Monica Karrer

LOGARITMOS

Proposta de uma seqüência de ensino utilizando a calculadora

Mestrado em EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PUC – SP
1999

Monica Karrer

LOGARITMOS

Proposta de uma seqüência de ensino utilizando a calculadora

Dissertação apresentada como exigência parcial para a obtenção do título de MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA à Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, sob orientação da Professora Doutora Sandra M. P. Magina.

PUC – SP
1999

BANCA EXAMINADORA

Dedicatória

Dedico este trabalho a todos os professores e pesquisadores em Educação Matemática, que com idealismo desempenham um papel primordial na sociedade.

AGRADECIMENTOS

À Professora Doutora Sandra M. P. Magina pelo trabalho de orientação, desenvolvido com muita dedicação, empenho e amizade.

À Professora Doutora Tânia M. M. Campos e à Professora Doutora Verônica G. G. Ferreira, pelas sugestões, comentários e críticas que tanto contribuíram para a elaboração e evolução dessa dissertação.

Aos professores do Programa de Ensino de pós-graduação em Educação Matemática da PUC-SP, por todo o incentivo dado durante o curso.

À Direção do colégio "Viva Vida", por autorizar a aplicação da seqüência didática e às Professoras Érica E. Garcia e Aparecida Crispa por cederem suas aulas para tal aplicação.

Aos alunos do colégio "Viva Vida" que demonstraram interesse durante todo o processo.

À Professora Marilda Medeiros e aos alunos do Colégio Objetivo, pela participação no estudo piloto e no grupo de referência.

Aos amigos do Mestrado, pelo companheirismo e sugestões.

À CAPES, pela bolsa de estudos que permitiu uma maior dedicação ao Programa de Pós-Graduação.

À minha família, especialmente meus pais, irmão e cunhada, que durante todo o processo me apoiaram, fornecendo auxílio e compreensão.

RESUMO

O objetivo deste trabalho consistiu em investigar se uma seqüência didática significativa para o ensino dos logaritmos, aliada ao uso da calculadora, favoreceria a formação deste conceito.

Para isso, construímos uma seqüência de ensino, fundamentada nas teorias psicológicas e educacionais, que partiu de situações-problema exponenciais. Neste caso, o logaritmo foi introduzido como uma necessidade de estudo, assumindo o papel de ferramenta para a resolução desses problemas.

Trabalhamos com dois grupos: experimental e de referência. Estes se submeteram a um pré-teste antes de serem introduzidos neste novo conceito, para em seguida estudarem os logaritmos segundo abordagens distintas. Enquanto o grupo experimental realizou o estudo através de nossa seqüência, o grupo de referência seguiu a abordagem tradicional apresentada nos livros didáticos. Por fim, os dois grupos realizaram um pós-teste, cujos resultados foram analisados sob os seguintes pontos de vista: análise do desempenho geral dos grupos, dos desempenhos por item, por objetivo e por indivíduo e por fim a análise da qualidade dos erros e dos procedimentos. A conclusão obtida é a de que a abordagem desenvolvida por nossa seqüência favoreceu a formação do conceito de logaritmo para esse grupo.

ABSTRACT

The aim of this work consisted in investigating whether a significative didadic sequence for the logarithm teaching, allied to the calculator usage, would favor this concept formation.

With this purpose, we structured a teaching sequence, based on psychologic and educational theories, that came from exponential problem – situations. In this case, the logarithm was introduced as a study necessity, assuming the role of a tool for the solution of these problems.

We worked with two groups: experimental and the reference group. Both of them were submitted to a pre test before being introduced to this new concept, then they studied logarithms according to distinct approaches. While the experimental group studied through our sequence, the reference group followed the traditional approach presented on didactic books. After all, both groups realized another test, that the results were analyzed by the following point of view: analyze of the general group development, of the developments by items, by objective and by individual, and finally, the analysis of the mistakes and procedures quality. We concluded that the approach developed by our sequence favored the logarithm concept formation to that group.

Í N D I C E

CAPÍTULO I: INTRODUÇÃO

CAPÍTULO II: O DESENVOLVIMENTO DOS LOGARITMOS (HISTÓRIA E PESQUISAS ATUAIS) À LUZ DAS TEORIAS PSICOLÓGICAS E EDUCACIONAIS

CAPÍTULO III: O ENSINO DOS LOGARITMOS NA ESCOLA

CAPÍTULO IV: METODOLOGIA

CAPÍTULO VI: CONCLUSÃO

CAPÍTULO VII: REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Í N D I C E D E A N E X O S

INTRODUÇÃO

1.1. PROBLEMÁTICA E OBJETIVO

Este trabalho tem por finalidade estudar um tema matemático desenvolvido na primeira série do ensino de nível médio: **os logaritmos**. Embora a criação deste conteúdo no início do século XVII objetivasse facilitar cálculos numéricos, constatamos que a aplicação dos logaritmos extrapolou em muito essa finalidade.

Atualmente, na fase do ensino médio, podemos utilizá-los na resolução de problemas que envolvem aplicações financeiras, valorização e desvalorização de bens, crescimento populacional e outros vários casos que possibilitam trabalhar com situações próximas da realidade do aluno. Em todos esses problemas, o logaritmo assume o papel de ferramenta para a resolução de equações exponenciais.

Por outro lado, pudemos notar que existem problemas no processo ensino-aprendizagem desse conteúdo e, consequentemente, na formação de seu conceito. Tais dificuldades inicialmente puderam ser percebidas tanto através de nossa própria experiência docente como em discussões com colegas da área. Interessados em investigar mais amiúde a existência de problemas na formação do conceito de logaritmo, resolvemos aplicar um teste empírico (que envolvia questões referentes à função exponencial e ao logaritmo) em trinta e cinco alunos do último ano do ensino médio da rede particular. Vale ressaltar que esse teste inicial foi especulativo, desprovido de caráter científico, visto que não houve nenhum tipo de controle de variáveis. Apesar de representar uma avaliação que não nos permite extrapolar as conclusões obtidas para além dos dados da amostra, a mesma se mostrou útil no sentido de oferecer várias informações que motivaram a nossa pesquisa. Dentre elas, podemos levantar que a maioria dos alunos, mesmo após o estudo da exponencial e do logaritmo, não sabia interpretar problemas exponenciais. Além disso, pouquíssimos alunos estabeleceram uma relação entre exponencial e logaritmo, já que não utilizaram este último como ferramenta para a resolução das equações exponenciais de transformação "não direta". Em relação às questões que privilegiavam as técnicas de cálculo, o desempenho foi um pouco melhor. Abaixo, apresentaremos as questões desse teste juntamente com o histograma de acertos, seguido por nossos comentários acerca do desempenho dos alunos.

<u>QUESTÕES:</u>

1)CALCULE X: $3^x = 81$

2)CALCULE Y: $3^y = 5$

3) O NÚMERO $4^{1,5}$:

A) NÃO EXISTE

B) EXISTE, MAS É IMPOSSÍVEL DETERMINAR O SEU VALOR

C) EXISTE E É UM NÚMERO ENTRE 4 E 7

D) EXISTE E É UM NÚMERO INTEIRO

JUSTIFIQUE A SUA RESPOSTA.

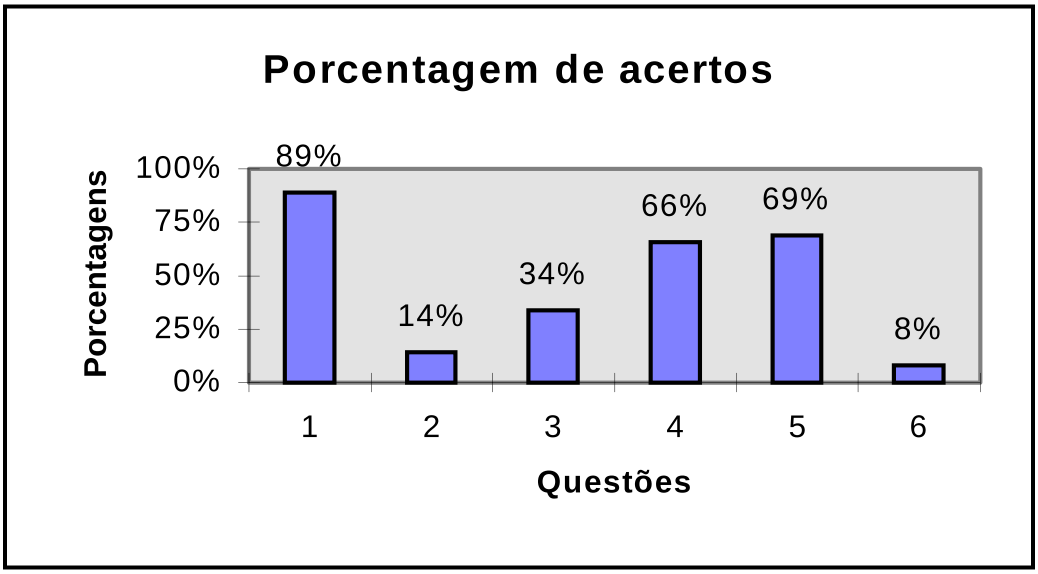
4)CALCULE $\log_2 16$

5)UM CERTO AUTOMÓVEL SOFRE UMA DEPRECIAÇÃO DE 10% AO ANO. A FUNÇÃO QUE REPRESENTA O SEU VALOR (EM REAIS) APÓS "T" ANOS É DADA POR: $F(t) = 10000.(0,9)^t$

DETERMINE O VALOR DESTE CARRO APÓS DOIS ANOS.

6)EM RELAÇÃO AO EXERCÍCIO ANTERIOR, DETERMINE O TEMPO NECESSÁRIO PARA QUE O VALOR DESTE AUTOMÓVEL SEJA DE 5000 REAIS. DEIXE O CÁLCULO DESTE TEMPO INDICADO.

Quadro 1.1 – Teste



Quadro 1.2 - Histograma da Porcentagem de Acertos no Teste

Podemos observar nesse gráfico, que os menores índices de acerto ocorreram nas questões que exigiam a interpretação e a aplicação do logaritmo como ferramenta para a resolução de equações exponenciais (questões 2 e 6). Em contrapartida, a questão 1, que envolveu a resolução de uma equação exponencial direta, teve uma porcentagem alta de acertos (89%). Dessa forma, descartamos a possibilidade de que o baixo sucesso na resolução dos problemas 2 e 6 tenha ocorrido devido ao fato da não compreensão de equações exponenciais, já que a maioria dos alunos se saiu muito bem na questão 1. Ao nosso ver, o problema parece decorrer do fato de que grande parte desses alunos não concebe o logaritmo como ferramenta para a resolução desse tipo de equação. A questão 3 também evidencia um problema na concepção de potência de expoente não inteiro. A concepção desse tipo de potência é fundamental, visto que uma das necessidades do uso do logaritmo para a resolução de equações exponenciais se dá exatamente nesses casos. Já as questões 4 e 5 apresentaram índices de acerto razoáveis, com pouco mais de 2/3 dos alunos demonstrando dominar os procedimentos nelas envolvidos. Observando essas duas questões, notamos que as mesmas representam exercícios que envolvem tão somente técnicas de cálculo, largamente utilizados na atividade matemática em sala de aula. Essa situação nos leva a crer que o ensino atual favorece o domínio da técnica em detrimento da formação do conceito e da competência de aplicar o mesmo em situações significativas.

Essas constatações, ainda que empíricas, forneceram a motivação para uma pesquisa científica sobre o processo de ensino-aprendizagem dos logaritmos. Em primeiro lugar, questionaremos se o aluno que calcula o logaritmo de um número numa certa base, entende o significado do que está desenvolvendo ou se esse ato é meramente mecânico. Pensamos que para investigar esse fato, poderíamos trabalhar com questões de estimativas (como por exemplo, verificar entre quais inteiros consecutivos estaria o logaritmo de 7 na base 2). A escolha de questões desse tipo se justifica pelo fato de que a estimativa requer do indivíduo algo mais do que aplicar diretamente a técnica para a sua resolução. Procuraremos também investigar sobre o motivo que levou esses alunos a não estabelecerem uma relação entre o uso do logaritmo e a resolução de equações exponenciais. Buscaremos então, obter informações para essa questão através da análise de um dos instrumentos mais utilizados pelo professor, o livro didático (no caso, utilizaremos uma amostra de seis livros). Notamos que os mesmos parecem não fornecer um ambiente favorável para o desenvolvimento da consciência dessa relação, fato que será descrito no capítulo III desse trabalho. Por último, com a constatação do baixo índice de acertos na questão 6, notamos que havia uma dificuldade na interpretação de problemas reais através do uso da função exponencial. Pensamos se haveria um meio de se introduzir os logaritmos de uma maneira mais significativa, através da exploração de problemas mais próximos da realidade desses alunos.

Acreditamos que o estudo da teoria dos logaritmos não deva ser um fim em si mesmo, mas sim estar a serviço de um domínio mais amplo de aplicação em problemas. Esses dois aspectos podem caminhar juntos, através de uma seqüência didática que procure comprometer os alunos.

É com a finalidade de amenizar tais dificuldades e por acreditar que um conceito só é formado partindo de situações-problema, que procuramos elaborar e testar uma seqüência didática nesses moldes para desencadear o processo de ensino-aprendizagem dos logaritmos. Não pretendemos abranger explicitamente o estudo das propriedades do logaritmo ou da função logarítmica. A intenção desta seqüência é a de fornecer uma alternativa para a introdução desse tema, procurando facilitar a ampliação posterior do conceito estudado.

Nesse caso, a nossa questão de pesquisa consiste em estudar se a introdução do conceito de logaritmo a partir de problemas desafiadores e significativos, nos quais o mesmo assume o papel de ferramenta de resolução de uma equação exponencial, favorece a formação de seu conceito. Para isso, desenvolveremos o nosso estudo com dois grupos, os quais estudarão a introdução desse conceito segundo abordagens diferentes: para o grupo de referência utilizaremos a abordagem que parte da definição matemática (comumente adotada no ensino atual) e para o grupo experimental utilizaremos como estratégia a introdução do logaritmo como uma necessidade para a resolução de um problema exponencial (abordagem utilizada neste trabalho).

Temos, por hipótese, que se o aluno interage com a introdução desse conteúdo através de situações significativas, o mesmo terá condições de construir o conceito de logaritmo. Pretendemos que a seqüência didática possibilite ao aprendiz conceituar logaritmo, interpretar a sua definição matemática, ter em mente a necessidade de seu estudo, além de resolver problemas práticos que envolvem o uso desse conceito. Temos a intenção de proporcionar meios para que o aluno não assuma um papel de mero espectador na aprendizagem. A seqüência foi construída com o intuito de possibilitar ao aluno uma função integrante em todo o processo. Ao professor pesquisador, caberá a responsabilidade de introduzir o logaritmo no momento adequado, orientar seus alunos durante a aplicação da seqüência e de fazer a institucionalização do conceito partindo das conclusões que os alunos apresentarem no desenvolvimento dessa atividade.

1.2. DESCRIÇÃO DA DISSERTAÇÃO

Faremos, nesse momento, a descrição deste trabalho de dissertação, procurando expor, de maneira resumida, os tópicos principais de cada capítulo. No capítulo I, apresentamos nossa motivação em relação ao tema, através da descrição da problemática, da apresentação da questão de pesquisa e da hipótese relacionada ao ensino de logaritmo.

O capítulo II é composto de três partes: a fundamentação teórica de nosso trabalho, o estudo histórico dos logaritmos e a revisão de literatura. Quanto à fundamentação teórica que embasará nosso trabalho, procuraremos selecionar os conhecimentos existentes nas correntes psicológicas de teorias de aprendizagem bem como aqueles provenientes da Didática da Matemática Francesa. Utilizaremos principalmente as contribuições dadas por Piaget, Vygotsky e Vergnaud (da Psicologia) e de Guy Brosseau e Régine Douady (da Didática Francesa). Em seguida, discorreremos sobre certos aspectos históricos do logaritmo. Assim sendo, temos a intenção de ressaltar a origem, o desenvolvimento e os objetivos desse tópico na época de sua criação. Temos em mente que essa investigação nos trará várias informações úteis para o entendimento dos problemas do ensino atual de logaritmo e conseqüentemente para a criação de nossa seqüência didática. Por fim, faremos uma revisão de literatura com a finalidade de obter uma visão geral das pesquisas existentes que envolvam logaritmos ou temas correlatos que possam contribuir para esse trabalho.

No capítulo III, investigaremos como o conteúdo de logaritmo é desenvolvido no ensino médio. Para isso, tomaremos dois parâmetros para a análise, os quais representam instrumentos fundamentais na atividade do professor: a Proposta Curricular vigente do Estado de São Paulo para o Segundo Grau e uma amostra de seis livros didáticos utilizados atualmente. Para esse estudo, procuraremos observar esse material através da elaboração de categorias que acreditamos interferirem na aprendizagem da introdução desse conceito. São elas: forma de introdução do conceito, apresentação de problemas contextualizados, apresentação de questões de estimativas, tabela x calculadora e inclusão de fatos históricos.

No capítulo IV, faremos a descrição de nossa metodologia de pesquisa. Com isso, descreveremos a nossa proposta acompanhada de seus objetivos didáticos, os sujeitos e o material utilizado para o estudo dos logaritmos. Em seguida apresentaremos o desenho geral do experimento, composto de três fases: o pré-teste, o desenho inicial da seqüência e o pós-teste. Forneceremos ainda, a descrição da aplicação do "projeto piloto", acompanhada das alterações que julgamos necessárias para a construção do estudo principal.

No capítulo V faremos uma análise quantitativa e qualitativa dos resultados obtidos no estudo principal. No capítulo VI realizaremos a discussão dos resultados, bem como as conclusões e sugestões para futuras pesquisas. Por fim, no capítulo VII será apresentada a bibliografia utilizada para a realização deste estudo.

O DESENVOLVIMENTO DOS LOGARITMOS (HISTÓRIA E PESQUISAS ATUAIS) À LUZ DAS TEORIAS PSICOLÓGICAS E EDUCACIONAIS

2.1. INTRODUÇÃO

Esse capítulo será composto por três partes. Na primeira, apresentaremos a fundamentação teórica da dissertação. Na segunda seção, voltaremos a nossa atenção para a origem e o desenvolvimento do logaritmo do ponto de vista histórico. Por fim, faremos uma revisão da literatura existente sobre esse tema.

Em relação à fundamentação teórica de nosso trabalho, destacaremos principalmente, contribuições da Psicologia Cognitiva dadas por Piaget, Vygotsky e Vergnaud. Além dessas, tomaremos emprestadas algumas idéias teóricas advindas da Didática da Matemática Francesa, especialmente a noção de obstáculo de Guy Brousseau e o jogo de quadros de Régine Douady. Vale a pena salientar que não é nossa intenção esgotar nenhum desses pressupostos teóricos. Pretendemos apenas guiar nosso estudo sem perder de vista a valiosa contribuição desses autores para o entendimento da aquisição de conceitos.

Em seguida, com relação à análise histórica, pretendemos fornecer uma visão geral da origem e do desenvolvimento do logaritmo, procurando descrever as necessidades e os objetivos da época e dos dias atuais, além de ressaltar os principais nomes que contribuíram para a criação e ampliação desse conceito. Procuraremos também analisar os obstáculos epistemológicos[1] do processo de construção deste saber, a fim de observar se os mesmos fornecem parâmetros para compreender e interpretar as dificuldades apresentadas pelos nossos alunos.

Por último, faremos uma revisão de literatura, discutindo as pesquisas existentes nas perspectivas de ensino e de formação do conceito de logaritmo ou correlatos, principalmente aquelas que fazem uso de ferramentas tecnológicas. Aqui destacaremos as pesquisas realizadas por Jere Confrey sobre as concepções e novas abordagens das funções exponenciais e logarítmicas.

2.2. CONTRIBUIÇÕES DA PSICOLOGIA COGNITIVA E DA DIDÁTICA DA MATEMÁTICA FRANCESA

Nesse momento, descreveremos as concepções que fundamentam teoricamente a nossa pesquisa, provenientes da Psicologia Cognitiva e da Didática da Matemática.

Com relação à Psicologia Cognitiva, a qual tem por preocupação realizar os estudos referentes à aquisição do conhecimento e ao processo de formação dos conceitos, destacaremos a corrente construtivista. Desse modo, nortearemos o nosso estudo utilizando algumas contribuições dadas por Jean Piaget, L. S. Vygotsky e Gerard Vergnaud.

[1] O termo obstáculo representa um conhecimento que é verdadeiro em determinado domínio mas que produz respostas falsas em outros.

De Piaget, utilizaremos basicamente duas idéias. A primeira se apóia no fato de que o indivíduo constrói o conhecimento a partir de sua ação sobre o objeto. Nesse caso, devem ocorrer sucessivas aproximações entre as partes, sendo que quanto maior o número de interações, maior será a expansão desse novo saber. O conhecimento assume dois aspectos: o **figurativo**, no qual o indivíduo descreve o objeto pelo uso da percepção e memória e o **operativo**, no qual o sujeito já tem condições de agir sobre o objeto utilizando o pensamento lógico.

A segunda idéia se refere aos fatores que influenciam o conhecimento, que podem ser classificados em: maturação, meio ambiente físico, meio ambiente social e a **equilibração**. Este último representa uma das idéias centrais de sua teoria e consiste na busca constante da adaptação intelectual do indivíduo. O processo de equilibração é composto de duas fases complementares (assimilação e acomodação). Assim, o sujeito interage com o objeto assimilando as suas propriedades, para em seguida acomodá-las.

Enquanto a assimilação é um processo externo, através do qual o indivíduo incorpora uma nova estrutura àquela já existente, a acomodação é um processo interno, em que o sujeito muda as estruturas já existentes no sentido de acrescentar novas características ao objeto. Estas duas etapas são complementares e visam a busca da adaptação intelectual da pessoa.

Nesse estudo, procuraremos desenvolver uma seqüência didática que introduza o logaritmo como um fator essencial para a resolução de um problema. Visto que o logaritmo é apresentado como uma necessidade de estudo, acreditamos que este fato desencadeará no aluno a necessidade de buscar uma nova adaptação intelectual, através de sucessivas etapas de assimilação e acomodação. Além disso, proporemos inúmeras atividades, as quais têm por finalidade garantir ao aluno vários contatos com esse novo objeto de conhecimento, possibilitando deste modo a sua expansão.

Vygotsky também considera que a aquisição de conhecimentos depende das fases de desenvolvimento mental do sujeito e concorda com Piaget no sentido de que há necessidade da ação do indivíduo para a construção do conhecimento. Porém, enquanto Piaget não leva em conta a influência do fator social nesse processo (considerando-o como individual, isolado e interno), o construtivismo de Vygotsky pode ser classificado como sócio-construtivismo, visto que nele é fundamental a cooperação do outro na formação de um conceito. Para Piaget, o ensino tem um papel limitado no desenvolvimento e na aquisição do conhecimento, sendo a maturação o fator fundamental para tal processo. Para Vygotsky, a aprendizagem constitui um fator impulsionador do desenvolvimento, caminhando à frente do mesmo. Com isso, o conhecimento sofre influências da herança cultural do sujeito dentro do grupo a que ele faz parte.

Utilizaremos três noções importantes de Vygotsky para nortear o nosso trabalho: a noção de ferramenta cultural como mediadora da situação, a idéia de zona de desenvolvimento proximal (ZDP) e a sua teoria sobre a formação dos conceitos, incluindo aí a classificação destes em espontâneos e não espontâneos.

A noção de **ferramenta cultural** se justifica pelo fato de que durante todo o processo pretendemos utilizar a calculadora para facilitar os cálculos na resolução de problemas. A calculadora não é um objeto da natureza, ao contrário, ela, assim como a régua e o próprio computador, foi concebida e construída pelo homem para auxiliá-lo em seus estudos e trabalhos matemáticos. Portanto a calculadora enquadra-se perfeitamente na conceitualização utilizada por Vygotsky para o termo ferramenta.

A **zona de desenvolvimento proximal**, a qual pressupõe que a experiência coletiva contribui para a individual, representa a discrepância entre o que um indivíduo consegue resolver por conta própria e o que resolve com o auxílio de alguém (diferença entre o nível de desenvolvimento real e o de desenvolvimento potencial). Esta idéia será utilizada no momento em que acreditamos que o desenvolvimento da seqüência didática proposta deva ser em duplas, tendo por finalidade explorar a cooperação entre indivíduos de zdp(s) provavelmente próximas mas diferentes, garantindo assim um avanço na aprendizagem. Além disso, o professor também terá por função, através da orientação e da solicitação de perguntas, contribuir para o sucesso nesse desenvolvimento.

Para Vygotsky, um **conceito** é mais do que a soma de conexões associativas formadas pela memória, é mais do que um hábito mental e não pode ser ensinado por treinamento. O processo de formação de conceitos pode ser dividido em três fases. A primeira é caracterizada pela agregação desorganizada e vaga de objetos isolados que de uma forma se aglutinam numa única imagem na mente do indivíduo, de acordo com uma impressão ocasional. Esta imagem, devido à sua origem, é extremamente instável. A segunda fase, mais importante no processo de formação de conceitos, é denominada de pensamento por complexos. Nesta etapa, o indivíduo já estabelece relações entre os objetos. Este tipo de pensamento já é coerente e objetivo, porém as ligações entre os objetos ainda são concretas e factuais e não abstratas e lógicas. A terceira fase, denominada fase dos conceitos potenciais, já envolve uma capacidade de abstração primitiva, mas que serve como precursora na formação do conceito propriamente dito. Apresentaremos, a seguir, duas citações importantes, a partir das quais consideraremos se o conceito de logaritmo foi construído ou não.

> *“Um conceito só aparece quando os traços abstraídos são sintetizados novamente, e a síntese abstrata daí resultante torna-se o principal instrumento do pensamento” (Vygotsky, 1993, pp.68)*

> *“...o papel decisivo nesse processo é desempenhado pela palavra, deliberadamente empregada, para dirigir todos os processos parciais da fase mais avançada da formação de conceitos.” (Ibid, pp. 68).*

Baseado nessas afirmativas, acreditamos que para a formação de um conceito, torna-se necessário ao indivíduo verbalizar o processo de sua construção bem como abstraí-lo, contextualizando-o em novas situações.

Nos seus estudos sobre a formação de conceitos nos adolescentes, Vygotsky notou que existe uma discrepância surpreendente entre a sua capacidade de formar conceitos e a sua capacidade de defini-los.

> *“O adolescente formará e utilizará um conceito com muita propriedade numa situação concreta, mas achará estranhamente difícil expressar esse conceito em palavras, e a definição verbal será, na maioria dos casos, muito mais limitada do que seria de esperar a partir do modo como utilizou o conceito” (Ibid, pp.69)”.*

De acordo com os estudos de Vygotsky, essa dificuldade também ocorre com os adultos, o que evidencia o fato de que a aplicação de conceitos na resolução de problemas precede a análise dos próprios conceitos. Pretendemos observar se essa dificuldade ocorre com os participantes de nosso estudo.

Um outro aspecto importante nessa análise de formação de conceitos é a capacidade de transferência, que consiste em aplicar o conceito estudado dentro de uma situação específica, numa outra situação com configuração diferente da original.

Concluímos então que o processo de formação de um conceito envolve o cumprimento de várias etapas: o estabelecimento de relações com o uso da lógica e da objetividade, a capacidade de abstração e de efetuar transferências, bem como o domínio da expressão do conceito com o uso de palavras.

Neste caso, consideraremos que o aluno participante de nossa pesquisa terá construído o conceito inicial de logaritmo se o mesmo tiver adquirido as seguintes habilidades:

- relacionar o logaritmo com os conceitos já aprendidos de exponencial;
- efetuar transferências através de atividades nas quais o logaritmo se apresenta num nível abstrato (em situações desvinculadas de contexto);
- efetuar transferências em novas situações concretas e abstratas;
- definir as etapas de construção de maneira coerente com suas próprias palavras.

Segundo Vygotsky, os conceitos podem ser classificados em espontâneos e não espontâneos. Nos espontâneos, não há consciência do processo, ou seja, a atenção é totalmente voltada ao objeto. Esse tipo de conceito é obtido pela própria experiência da pessoa. Assim é que ao aprender a andar de bicicleta, a preocupação do sujeito está totalmente voltada para conseguir pedalar e manter-se sobre a bicicleta, ao invés de querer entender sobre as noções físicas de equilíbrio ou sobre a energia mecânica necessária para provocar o movimento. Quando essa pessoa consegue finalmente andar de bicicleta, ela adquiriu um conhecimento particular e conseqüentemente de domínio limitado. Se ela, por exemplo, resolver andar de patins ou skate, terá de começar do zero seu aprendizado e, embora seja óbvio seu conhecimento de equilíbrio, este é inconsciente e, portanto, particular. Porém, se imaginarmos que essa mesma pessoa pratique bastante o andar de bicicleta tornando-se um bom ciclista, ela poderá transferir esse conhecimento para uma situação próxima a esta, como por exemplo, dirigir motocicleta. Então o conhecimento, inicialmente particular, começa a expandir-se, tornando-se mais geral.

O outro tipo de conceito é o não espontâneo, de onde encontramos o científico. Este tem por característica utilizar, desde o início e de maneira consciente, outros conceitos mediadores na relação do sujeito com o objeto. É o conceito científico que procuramos desenvolver na atividade escolar. A escola procura trabalhar com definições de tal forma que um conhecimento adquirido serve para “n” situações. Porém, muitas vezes, o aluno sabe teoricamente o conhecimento, mas não consegue trabalhá-lo numa situação prática, o que nos leva a acreditar que devamos explorar a relação entre os dois tipos de conceitos apresentados: espontâneo e científico.

Enquanto o conceito espontâneo segue um sentido ascendente, do particular para o geral, o científico se desenvolve justamente no sentido contrário. Isto decorre da própria origem de cada tipo de conceito, o espontâneo na experiência e o científico na consciência da relação com o objeto. Porém, existe uma forte relação entre os dois, no sentido de que há necessidade do indivíduo alcançar um certo nível de um conceito espontâneo para ter a capacidade de aprender um conceito científico correlato. Neste caso, quando o espontâneo se dirige ascendentemente, o mesmo abre espaço para o desenvolvimento de um conceito científico. É nosso propósito elaborarmos situações-problema que possibilitem ao aluno o estabelecimento da relação entre seus conceitos espontâneos e os científicos a serem desenvolvidos.

Vergnaud, diferentemente dos dois psicólogos anteriores, dirigiu seus estudos para a educação matemática, porém teve forte influência de ambos. Ele destaca a importância de se trabalhar com situações-problema para tornar um conceito matemático significativo. Para termos a nítida noção da influência citada, podemos observar que a idéia de resolução de problemas está fortemente relacionada com a interação sujeito-objeto, além de explorar em sala de aula - ambiente onde se desenvolve o conceito científico – situações espontâneas, as quais poderiam ser entendidas no dia a dia. Na construção de nossa sequência didática, procuraremos seguir essa idéia, fazendo com que as situações-problema assumam um papel central, pois acreditamos que desta maneira, forneceremos um ambiente favorável para que o conceito de logaritmos tenha um diferente significado para o aprendiz.

Ao lidar com problemas, existem relações e hierarquias a serem consideradas. Além disso, a construção de um conceito é um processo lento, que exige a exploração contínua de um determinado conteúdo, através da apresentação de situações-problema que explorem o domínio de diferentes propriedades desse conceito.

Na sua teoria dos campos conceituais, Vergnaud prega o princípio de elaboração pragmática dos conhecimentos, defendendo que não se pode reduzir o estudo da matemática somente no simbolismo ou nas situações. Deve-se todavia, considerar o sentido desses aspectos. Um conceito não assume sua significação em uma só classe de situações. Além disso, um conceito, por mais simples que seja, necessita de um conjunto de situações, as quais juntas, permitirão ao sujeito apreendê-lo. Com isso, podemos dizer que **Campo Conceitual** representa, basicamente, um conjunto de situações cujo domínio requer uma variedade de conceitos, procedimentos e o domínio da representação simbólica envolvida. Exemplificando, no nosso estudo de logaritmos, estaremos trabalhando com várias situações que envolvem outros conceitos tais como exponencial, potência, números irracionais e outros, unindo a isso a introdução de uma nova simbologia.

Para construir o conhecimento operacional, em primeiro lugar o sujeito deve captar o conjunto de invariantes, ou seja, o que caracteriza cada conjunto. Apesar de Piaget ter sido o primeiro a introduzir a questão dos invariantes, Vergnaud foi quem reconheceu a importância da percepção destes na formação de conceitos. É partindo dessa etapa que se inicia o processo de formação de esquemas, que Vergnaud denominou de teorema em ação, evoluindo para a competência até finalmente chegar ao conceito.

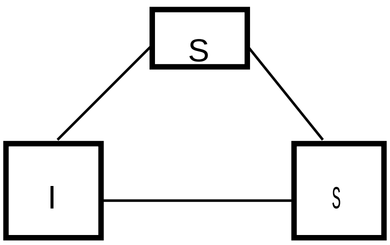
Concluindo, podemos dizer que um conceito, para Vergnaud, é composto de três aspectos, relacionados a seguir:

S: conjunto de situações que dão significado ao conceito;

I: conjunto de invariantes (características do conceito e procedimentos);

$\mathcal{S}$: conjunto de representações simbólicas usadas para representar o conceito, suas propriedades e as situações a que ele se refere.

Podemos relacionar estes três aspectos através do seguinte diagrama:



Da Didática da Matemática Francesa, procuraremos buscar apoio nas noções de obstáculo de Guy Brousseau e de Jogo de Quadros desenvolvidas por Régine Douady. Novamente gostaríamos de salientar que utilizaremos essas noções sem a intenção de esgotá-las, tomando-as como importantes contribuições para a construção de nossa sequência.

A noção de obstáculo, introduzido por Bachelard (1965) e aplicado à Matemática por Guy Brousseau (1983), representa um conhecimento local que quando aplicado em outros domínios produz respostas falsas.

> *"O erro não é somente o efeito da ignorância, da incerteza, do acaso (...) mas o efeito de um conhecimento anterior que tinha o seu interesse, seus sucessos, mas que agora se revela falso, ou simplesmente inadaptável. Os erros deste tipo não são erráticos e imprevisíveis, eles se constituem em obstáculos. Tanto no funcionamento do mestre como naquele do aluno, o erro é constitutivo do sentido do conhecimento adquirido". (Almouloud,1994, pp.38)*

Segundo Brousseau, os obstáculos se classificam de acordo com suas origens em: obstáculos epistemológicos, didáticos, psicológicos e ontogênicos. Em nosso estudo, voltaremos o nosso interesse nos dois primeiros.

Os obstáculos epistemológicos são aqueles "que tiveram um papel importante na história de certo conhecimento e cuja rejeição precisou ser integrada explicitamente no saber transmitido" (Ibid, pp.43). Estes podem ser identificados pelas dificuldades encontradas pelos matemáticos para superá-los na história.

Os obstáculos didáticos são aqueles que nascem da escolha de estratégias de ensino. Neste caso, há a formação de conhecimentos errôneos ou mesmo incompletos, que representarão futuramente um obstáculo para o desenvolvimento de certo conceito.

É importante salientar que tanto os obstáculos epistemológicos quanto os didáticos são inevitáveis na construção de um saber. Cabe ao professor tentar reconhecê-los com a finalidade de entender as dificuldades de seus alunos, bem como procurar rever a sua primeira apresentação do conceito em questão. Em nosso estudo, procuraremos destacar, caso existam, os possíveis obstáculos epistemológicos e didáticos que observarmos.

Régine Douady desenvolveu as noções de mudanças de quadros, reconhecidas pela comunidade científica como instrumentos poderosos para a construção de sequências didáticas. Um conceito matemático pode ser desenvolvido em diversos quadros, sendo que a mudança de quadros pode, em certos casos, facilitar e ampliar a visão de um determinado conhecimento. Temos a intenção de desenvolver a nossa sequência explorando o logaritmo dentro dessa idéia, procurando utilizar os quadros algébrico, gráfico, numérico e o das funções, pois acreditamos que com isso estaremos fornecendo uma abordagem que permite o contato com o objeto de estudo sob diversas formas, o que provavelmente possibilitará a expansão do conceito.

2.3. ESTUDO HISTÓRICO E EPISTEMOLÓGICO

2.3.1. Introdução

Acreditamos que um estudo histórico do surgimento de um conceito é um fator de grande importância para as pessoas participantes do processo de ensino-aprendizagem. Isso porque, além de constituir um enriquecimento para as aulas, fornece a todos uma visão das dificuldades encontradas na época para a construção, desenvolvimento, amadurecimento e ampliação desse conceito. Através do estudo dos obstáculos epistemológicos vividos pelos matemáticos do passado, há a possibilidade de obter explicações a respeito das dificuldades apresentadas pelos nossos estudantes. Além disso, trabalhando com esta abordagem, permitimos ao aprendiz alterar a antiga visão de que um tema matemático surgiu do nada, sem nenhum objetivo ou finalidade, oferecendo meios para que o mesmo vivencie que aprender conceitos matemáticos implica em algo muito mais amplo do que simplesmente “estimular seu raciocínio”. A matemática não é construída por diletantismo, ela sempre avança com o intuito de resolver problemas, sejam eles teóricos ou práticos.

Muitas vezes, o problema histórico que motivou a construção de um tema matemático não representa mais o objetivo de seu estudo atual. Esse fato ocorre com os logaritmos, como descreveremos adiante. Veremos que os logaritmos surgiram para resolver problemas numéricos, o que evidentemente não pode constituir uma meta para o seu estudo nos dias de hoje. Possibilitar ao aluno o conhecimento desse aspecto faz com que o mesmo perceba que um conceito passa por uma série de evoluções e ampliações ao longo do tempo.

2.3.2. Descrição histórica

Um problema fundamental do final do século XVI era o de se descobrir um método que simplificasse cálculos aritméticos complicados, o que atualmente é realizado com auxílio de calculadoras e computadores. Com o desenvolvimento contínuo da astronomia e da navegação, a grande preocupação era a de se obter uma técnica para a resolução de cálculos de forma rápida e eficiente.

Nessa época, para contornar esse problema, os matemáticos usavam tábuas que permitiam realizar produtos através de somas. Exemplificando, temos a tábua das funções trigonométricas. Segundo Loria (1982), estas tabelas existem desde o século II de nossa era, apresentadas por Cláudio Ptolomeu na sua obra Syntaxis Mathematica, a qual ficou conhecida posteriormente por Almagesto.

Um meio que utilizavam para transformar produto em soma pode ser exemplificado através da seguinte fórmula:

$$\boxed{\text{“ } \cos x \bullet \cos y = \tfrac{1}{2} \bullet \cos(x+y) + \tfrac{1}{2} \bullet \cos(x-y)\text{”}}$$

Nesse caso, dados dois números A e B, o cálculo realizado para se obter A • B baseava-se em substituir A = cos x e B = cos y, procurar na tabela x e y e aplicar a relação dada acima.

Porém, havia a necessidade da criação de um método que permitisse efetuar rapidamente outras operações além da multiplicação, tais como a divisão, a potenciação e a extração de raízes.

Foi dentro desse contexto que John Napier (1550-1617), teólogo e matemático nascido na Escócia, se destacou. Trabalhando no sentido de obter a técnica tão demandada da época, criou os logaritmos. Inicialmente, a sua idéia era a de simplificar multiplicações que envolviam senos (provavelmente influenciado pelas tábuas trigonométricas já existentes e pelo intuito de facilitar o cálculo para os astrônomos e navegadores), porém, rapidamente verificou que o seu estudo englobava a simplificação de outras operações através da aplicação dos logaritmos para números em geral.

De acordo com Smith (1958), a palavra "logaritmo" significa "número de razão", sendo que inicialmente Napier utilizou a expressão “número artificial”. Porém, antes de anunciar a sua descoberta ele adotou a nomenclatura utilizada atualmente.

Podemos destacar três grandes obras escritas por Napier, a “Rabdologia” (publicada em 1617), em que ele descreve a utilização de bastões móveis para efetuar somas de produtos parciais, a “Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio” (publicada em 1619) que contém um tratado de logaritmos e os procedimentos para a construção de uma tábua de logaritmos e, talvez a mais importante, “Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio” (publicada em 1614), em

que Kepler utilizou as tábuas nos cálculos relacionados à terceira lei do movimento dos planetas.

Em nome da imparcialidade histórica, devemos salientar também o trabalho de um outro matemático, Jost Bürgi (1552-1632), o qual desenvolveu sua teoria dos logaritmos praticamente ao mesmo tempo que Napier. Segundo Boyer (1976), não há dados históricos concretos que evidenciem quem desenvolveu em primeiro lugar esta teoria; porém constuma-se dar os créditos a Napier, pelo fato dele ter sido o primeiro a publicar uma obra sobre logaritmo. De qualquer forma, os dois seguiram abordagens, terminologias e valores numéricos diferentes. Apesar de ambos utilizarem como ponto de partida a relação entre as progressões aritmética e geométrica, Bürgi seguiu uma abordagem exclusivamente numérica, enquanto Napier privilegiou o estudo dos logaritmos sob a ótica geométrica. A relação entre as progressões e as abordagens acima citadas serão descritas adiante.

Apresentaremos em primeiro lugar o desenvolvimento realizado por Napi ras dos expoentes. Primeiramente, utilizou as séries:

PA	0	1	2	3	4	5	6	7	8

PG	1	2	4	8	16	32	64	128	256

Nesse caso, observou que o produto de termos da progressão geométrica possuía uma correspondência com a adição de termos da progressão aritmética.

> *"os expoentes dos fatores são somados para obter o expoente do produto e subtraídos para produzir o expoente do quociente" (Smith, 1958, pp.521).*

Exemplificando, considerando a progressão geométrica, temos que $2 \bullet 8 = 16$. Podemos representar os fatores deste produto como potências de base 2, ou seja, $2 = 2^1$ e $8 = 2^3$. Substituindo esta outra forma de representação na igualdade inicial e utilizando a propriedade de potências, temos que :

$$\boxed{2 \bullet 8 = 16 \Rightarrow 2^{1} \bullet 2^{3} = 16 \Rightarrow 2^{1+3} = 16 \Rightarrow 2^{4} = 16}$$

Com isso, o elemento 2 da PG corresponde ao número 1 da PA e o elemento 8 da PG corresponde ao elemento 3 da PA. Através do produto destes dois elementos da PG obtém-se o elemento 16, que por sua vez corresponde ao elemento 4 (1+3) da progressão aritmética.

Mas uma sequência de potências inteiras de uma base, tal como 2, não poderia ser utilizada para computações, porque as grandes lacunas entre termos sucessivos tornavam a interpolação muito imprecisa.

Para diminuir as lacunas entre os números, Napier construiu uma progressão geométrica com razão próxima de 1. No caso adotou a razão $1-10^{-7}$ (=0,9999999). Mas assim, os termos da progressão geométrica ficavam muito próximos. Para evitar os decimais, Napier multiplicou cada potência por 10^7. Assim, o Napier-logaritmo de $10^7 = 0$ e o de $10^7(1-10^{-7})=1$. Segundo Boyer (1976), se $N= 10^7 . (1-10^{-7})^L$, L é o logaritmo de Napier do número N.

A abordagem geométrico-mecânica dos pontos em movimento desenvolvida por Napier, a qual apresentaremos em seguida, já apresenta evidências da “intuição” de função, o que nos leva a concordar com a seguinte afirmativa de Boyer (1976) de que há, embora não explicitamente, a “idéia” de continuidade na sua definição:

> *“O conceito de função logarítmica está implícito na sua definição e em toda a sua obra sobre logaritmo, mas esta relação não preponderava em seu espírito. Tinha laboriosamente construído seu sistema com um objetivo - simplificação de computações, especificamente produtos e quocientes” (pp.229).*

Apresentaremos em seguida, os princípios do trabalho em termos geométricos desenvolvido por Napier, construído após vinte anos de dedicação a esta teoria.

" Considere um segmento de reta AB e uma semi-reta DE, de origem D, conforme a figura:

A----------C----------y- ---------B

Situação:

D x F E

---→

Suponhamos que os pontos C e F se ponham em movimento simultaneamente a partir de A e D, respectivamente, ao longo dessas linhas, com a mesma velocidade inicial. Admitamos que C se mova com uma velocidade numericamente sempre igual à distância CB e que F se mova com velocidade uniforme. Napier definiu DF como o logaritmo de CB. Isto é, sendo DF=x e CB=y, x é o Napier-logaritmo de y. Para evitar o incômodo das frações, Napier tomou o comprimento de AB como 10^7, pois as melhores tábuas de senos que dispunha estendiam-se até sete casas decimais" (Eves, 1995, pp. 344-345).

Fazendo uma relação com a abordagem numérica, temos que sobre uma sucessão de períodos de tempo iguais, y decresce em progressão geométrica enquanto x cresce em progressão aritmética, estabelecendo assim, a relação entre as progressões.

Podemos observar que nesta definição não aparece explicitamente o conceito de base, mas pode-se provar que $x = 10^7.\log_{1/e} (y/10^7)$. Ainda, em relação aos logaritmos de Napier é possível observar algumas características, tais como: (a) a tabela de logaritmos é decrescente, (b) o logaritmo do produto não é igual à soma dos logaritmos, (c) o logaritmo do quociente não é a diferença entre os logaritmos. No caso, temos que:

$$\Rightarrow N\log(a.b/10^7) = N\log a + N \log b$$
$$\Rightarrow N\log 10^7.(a/b) = N\log a - N\log b$$

Com isso, como foi bem colocado por Smith (1958), os logaritmos de Napier não são os logaritmos neperianos na conceituação moderna, visto que a base utilizada não é a base "e". Porém, estão conectados com este sistema através da relação: $\log_n a = 10^7 \bullet \log_e 10^7 - 10^7 \bullet \log_e a$

Sabe-se que no apêndice da edição de 1618 da obra Descriptio, aparece pela primeira vez uma afirmação equivalente a $\log_e 10 = 2{,}302584$, ou seja, o reconhecimento do logaritmo de base "e". Em 1620, John Speidell publicou a obra "Novos Logaritmos", também usando esta base. Além disso, de acordo com o que já foi citado acima, os logaritmos de Napier não satisfazem as propriedades atualmente conhecidas da função logarítmica, quanto ao logaritmo do produto e ao logaritmo do quociente.

Analisando a abordagem de Bürgi, tudo indica que ele também foi influenciado pelos trabalhos de Stifel. Mas, ao contrário de Napier, escolheu como razão da PG um número maior do que 1, no caso $1 + 10^{-4}$. Além disso, no lugar de multiplicar as potências desse número por 10^7 , multiplicou por 10^8 . Ainda, no sistema de Bürgi a tabela é crescente e, da mesma forma que o sistema de Napier, o logaritmo do produto não é igual à soma dos logaritmos.

Foi Henry Briggs (1561 - 1630), professor de geometira do Gresham College London e posteriormente professor de geometria em Oxford, um dos primeiros a demonstrar um grande interesse pelos estudos de Napier. Num encontro em 1615, deu como sugestão a adoção de outra base, no caso a base dez, devido ao fato do sistema usualmente utilizado ser o decimal. Então, concordaram em adotar $\log_{10}1=0$ e $\log_{10}10=1$. Com a aceitação de Napier, Briggs prosseguiu com o seu trabalho e esta teoria recebeu várias complementações de outros matemáticos. As tabelas de Briggs eram construídas por um processo de aproximações sucessivas e o intuito era o de representar qualquer número estritamente positivo sob a forma de potência de base 10. Em 1617, ano da morte de Napier, Brigs publicou "Logarithmorum Chilias Prima", que continha tabelas de logaritmos decimais dos números de 1 a 1000, com 14 casas decimais. Em 1624, publicou "Arithmetica Logarithmica" com os logaritmos de 1 a 20000 e de 90000 a 100000. As palavras "mantissa" e "característica" são introduzidas nesta obra. O processo utilizado por Briggs era diferente do utilizado por Napier. Adotou $\log_{10}1=0$ e $\log_{10}10=1$ e passou a fazer raízes sucessivas utilizando a relação $\log_{10}(a.b)^{1/2} = (\log a + \log b)/2$. Exemplificando, calculando a raiz quadrada de 10 obteremos 3,162277. Logo, temos que $\log_{10}3{,}162277=0{,}5$. A seguir, $\log_{10}(10^{1/2}.10)^{1/2}= \log_{10}(31{,}62277)^{1/2}$. Neste caso, $\log_{10}5{,}623413 = (\log_{10}10^{1/2}+\log_{10}10)/2= 0{,}75$. Continuando desse modo, calculou com 30 casas decimais as raízes quadradas sucessivas, a partir de $10^{½}$ até chegar ao expoente $1/2^{54}$. Em seguida ampliou ainda mais a sua tabela através das propriedades: $\log_{10}10^{n}x = n + \log_{10}x$ e $\log_{10}xy = \log_{10}x + \log_{10}y$.

De acordo com Eves (1995), a lacuna entre 20000 e 90000 foi preenchida com a ajuda de Adrien Vlacq (1600-1660). Edmund Gunter (1581-1626), um dos colegas de Briggs, publicou em 1620 uma tábua de logaritmos comuns de senos e tangentes de ângulos, para intervalos de um minuto de arco, com sete casas decimais. Ainda, Briggs e Vlacq publicaram quatro tábuas de logaritmos fundamentais, só recentemente superadas, quando, entre 1924 e 1949, foram publicadas extensas tábuas de vinte casas decimais como parte das comemorações do tricentenário da construção dos logaritmos.

Os logaritmos foram adotados por toda Europa, particularmente para a realização de cálculos na astronomia, sendo que os principais responsáveis pela divulgação deste novo achado foram Bonaventura Cavalieri na Itália, Johann Kepler na Alemanha e Edmund Wingate na França.

> *"Como afirmou Laplace, a invenção dos logaritmos ao diminuir o trabalho, dobrou a vida dos astrônomos" (Eves, 1995, pp. 346).*

Procurando obter outros meios de se efetuar cálculos numéricos com facilidade, surgiram muitas idéias como as réguas de cálculo, protótipos de máquinas de calcular e novas tabelas. Pode-se notar, com isso, que a principal meta do início do século XVII era a promessa da aplicabilidade dos conceitos matemáticos na resolução dos problemas numéricos. Assim sendo, Edmund Gunter, em 1620, projetou a linha logarítmica de números em que as distâncias eram proporcionais aos logaritmos dos números indicados. Somando e subtraindo distâncias com o auxílio de compassos eram obtidas multiplicações e divisões de números. Oito anos depois, em 1628, Edmund Wingate publicou um trabalho sobre linhas de proporção em que os espaços de um lado de uma régua indicavam números e do outro lado havia as suas respectivas mantissas. Foi ainda nesta década que, William Oughtred, inventou, em 1622, a régua de cálculo.

Vale salientar que atualmente, um logaritmo é considerado como um expoente, ou seja, se $a=b^x$, dizemos que **x** é o logaritmo de **a** na base **b**, para $a>0$, $b>0$ e $b\neq1$. Partindo dessa definição, as propriedades dos logaritmos decorrem imediatamente das leis dos expoentes. Porém, esta concepção não aparece de forma explícita nos trabalhos de Napier ou de Briggs, visto que os mesmos não concebiam na época expoentes fracionários e irracionais. Somente com Leonhard Euler (1707-1783) os logaritmos foram tratados como expoentes, assumindo a definição apresentada nos dias de hoje.

Em meados do século XVII, o logaritmo teve grande importância para o desenvolvimento do cálculo diferencial e integral. Foi Gregoire St Vincent (1584-1667) quem publicou em 1647 um trabalho sobre a quadratura do círculo e das secções cônicas, onde mostrou que as abscissas em progressão geométrica correspondem à áreas sob a hipérbole em progressão aritmética. Veio então à tona, a conexão entre os logaritmos naturais e a hipérbole, de tal forma que, se [a,b] é um intervalo fechado e $A_{a,b}$ denota a área sob a região delimitada pelo intervalo e a hipérbole $x.y=1$, então $A_{xa,xb} = A_{a,b}$. Se considerarmos $L(x) = A_{1,x}$ se $x \geq 1$ e $L(x) = -A_{x,1}$, para $0<x<1$, veremos que isto implica em $L(x.y) = L(x) + L(y)$.

A partir de então, o conceito em questão passou por uma série de ampliações. Partindo do resultado $1/(1+x) = 1 – x + x^2 – x^3 + ...$ de David Gregory (1627 – 1720), Isaac Newton (1624 – 1727) desenvolveu as primeiras computações sistemáticas de logaritmos como áreas sob a hipérbole por volta de 1660. Utilizando o resultado de Gregory, ele obteve, através da integração termo a termo, a seguinte relação: $A(1 + x) = x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + ...$

Embora não se referisse a A(1+x) como logaritmo, reconheceu a característica dos logaritmos, identificando a área sob a hipérbole em [0,x] como “correspondente” a uma linha de comprimento 1+x. Além disso, deduziu as seguintes propriedades:

$$A[(1+x)(1+y)] = A(1+x) + A(1+y)$$

$$A[(1+x)/(1+y)] = A(1+x) - A(1+y)$$

Nicolaus Mercator (1620-1687) publicou trabalhos sobre cosmografia, trigonometria, astronomia e métodos de computar logaritmos. Mercator subdividiu o intervalo [1,x] em n subintervalos de comprimento h=x/n, construiu os retângulos circunscritos e determinou a área total, obtendo assim a série de Mercator. A famosa série $\ln(1+x)= x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + ...$, que converge para $-1< x \leq 1$, pode ser usada de modo satisfatório para calcular logaritmos.

Em sua obra “Logarithmotechnia”, aborda cálculo de logaritmos por métodos derivados dos de Napier e Briggs e várias fórmulas de aproximação de logaritmos, dentre as quais destaca-se a apresentada acima. Mercator atribuiu o nome “logaritmos naturais” para os valores que são obtidos por meio dessa série. Brouncker e Gregory acharam também certas séries infinitas para logaritmos, mas essas foram ofuscadas pela maior simplicidade da série de Mercator.

A concepção da computação com finalidades práticas e o enfoque em problemas locais manteve os matemáticos do século XVI e início do XVII em um domínio discreto. Com isso, o conceito de função demorou muito a surgir. O logaritmo de Napier é inicialmente um número inteiro ou fracionário, visto que os cálculos só produzem resultados desse tipo, mas é, por definição, a aproximação de uma linha, que é uma grandeza contínua.

A partir do final do século XVII, os logaritmos passam a ser concebidos para além do seu aspecto prático. Há uma valorização do desenvolvimento teórico deste conceito. Os matemáticos voltam seu interesse para o estudo das trajetórias dos planetas. O desenvolvimento da astronomia tem evidentemente o

ó se

explicitou com o trabalho de Euler (1707 – 1783), o primeiro no qual o conceito de função é a base da construção matemática. Na sua obra "Introductio", Euler investiga a função exponencial, enfatizando o desenvolvimento em séries infinitas, caracterizando essa função como procedimento infinito. É devido a Euler o tratamento dado aos logaritmos como expoentes. Ainda, ele introduziu a notação f(x) para funções e a notação "e" para designar a base dos logaritmos naturais. Calculou também os logaritmos naturais dos inteiros de 2 a 10 através da série de Mercator.

No início do século XVIII, os matemáticos estavam envolvidos num grande problema teórico, que era a questão de desvendar a natureza dos logaritmos de números negativos. O famoso enunciado apresentado a seguir: *Se* $\log(-1)^2 = \log(+1)^2$ *então* $2\bullet\log(-1) = 2\bullet\log(+1)$. *Logo,* $\log(-1) = \log(+1)$ intrigava várias figuras ilustres, dentre elas Leibniz e Jean Bernoulli. Em 1747, Euler conseguiu explicar a questão da natureza desses logaritmos, evidenciando que os mesmos não eram números reais e sim imaginários puros. Esta conclusão foi obtida através da seguinte fórmula:
$e^{i\,\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\theta$

Esta identidade vale para todos os ângulos medidos em radianos. Em particular para $\theta = \pi$, tem-se que $e^{i\,\theta} = -1$, ou seja, que $\ln(-1) = \pi.i$. Euler também estudou outra propriedade dos logaritmos, baseada na afirmação de que qualquer número, positivo ou negativo, tem uma infinidade de logaritmos. Boyer (1976) bem explica que esta conclusão se deve ao fato de que da relação $e^{i\,(\theta \pm 2k\pi)} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$, vê-se que se $\ln a = c$, então $c \pm 2k\pi i$ também são logaritmos naturais de a.

2.3.3. Conclusão

Através dessa análise histórica, podemos concluir que os logaritmos foram criados para facilitar os enfadonhos cálculos aritméticos. A partir do final do século XVII, houve uma ampliação de seu uso no desenvolvimento teórico matemático. Questões não vinculadas à prática começaram a surgir, tais como a natureza dos logaritmos negativos e a não unicidade do logaritmo de um número. Pudemos, com esse estudo, evidenciar alguns obstáculos epistemológicos inerentes a este conceito.

Em primeiro lugar, vimos que o próprio contexto histórico da época influenciou os matemáticos a desenvolverem os logaritmos num domínio discreto. Neste caso, a demora do surgimento do conceito de função e da concepção de expoentes reais parece caracterizar um obstáculo epistemológico. Pretendemos investigar, através de nossa sequência didática, se este obstáculo encontrado no passado constitui uma dificuldade para os nossos alunos.

Um outro obstáculo epistemológico é representado pelos logaritmos de números negativos. Da forma como Napier e Briggs encararam o logaritmo, os logaritmos de números negativos simplesmente não existiam. Com o desenvolvimento de outras áreas matemáticas, este tipo de logaritmo passou a ser analisado, constituindo um problema para os matemáticos do século XVIII. Infelizmente, como o nosso estudo está sendo realizado com alunos da primeira série do ensino de nível médio, não poderemos analisar as influências que este obstáculo teria sobre os componentes de nossa amostra, visto que o conteúdo envolvido (números complexos) não faz parte ainda da bagagem matemática dos mesmos.

Temos claro que através da abordagem apresentada pelos livros ou mesmo pela nossa sequência, inevitavelmente estaremos criando um obstáculo didático para a compreensão dos logaritmos de números negativos e mesmo da não unicidade do logaritmo de um número para aqueles alunos que irão prosseguir com o estudo na área de exatas. Porém, como já foi descrito na seção 2.3.2, muitas vezes os obstáculos didáticos são inevitáveis na construção de um determinado saber.

2.3.4. Objetivo da época de criação x objetivo atual

Através da descrição apresentada, notamos que o logaritmo objetivava facilitar cálculos numéricos. Nesse contexto, é comum surgir em nosso pensamento uma indagação a respeito da utilidade do ensino dos logaritmos atualmente, visto que existem máquinas que desenvolvem os mesmos cálculos de forma mais rápida e eficiente. Extrairemos um trecho de um livro utilizado em nossa pesquisa que explica a importância do estudo atual desse conteúdo:

> *"A função logaritmo nunca morrerá, pela simples razão de que as variações exponencial e logarítmica são partes vitais da natureza e da análise. Consequentemente, um estudo das propriedades da função logaritmo e de sua inversa, a função exponencial, permanecerá sempre uma parte importante do ensino da matemática" (Eves, 1995, pp. 347).*

Nesse caso, novamente acreditamos que para que a introdução deste conteúdo tenha algum sentido para o aluno, torna-se vital explorar, obviamente dentro das possibilidades de compreensão do mesmo, situações-problema que envolvam a introdução deste conceito e a conseqüente evolução da teoria.

2.3.5. As definições de logaritmos encontradas em livros didáticos

Existem duas definições de logaritmos. A primeira depende da função exponencial, sendo a mais utilizada nos livros didáticos do ensino de nível médio Já a segunda definição não apresenta o logaritmo como inversa da exponencial; ela procura relacionar o logaritmo com a área de faixas da hipérbole de equação y=1/x. Apresentaremos abaixo as duas definições:

Definição1) Seja $a \in R$, $a>0$. Dizemos que $y=\log_a x$ se $a^y = x$, $\forall x \in R^*_+$. O número y é chamado logaritmo de x na base a.

O inconveniente desta definição é a demonstração das propriedades dos logaritmos para números reais.

Definição2) Seja $x \in R^*_+$. Definimos logaritmo natural de x e indicamos por lnx ao número $A_{1,x}$ = área da faixa delimitada pelo intervalo [1,x] e a hipérbole $y = 1/x$. Neste caso, convenciona-se que $A_{1,x}<0$ se $0<x<1$. Através desta definição, que não depende da definição de função exponencial, as propriedades dos logaritmos são facilmente verificadas. Além disso, define-se o número "e" como o único número em que lnx=1.

Os seis livros didáticos que analisamos, os quais discutiremos no capítulo seguinte, adotam a primeira definição, verificando a propriedade do produto de potências de mesma base para expoentes inteiros, assumindo em seguida, sem maiores comentários, que a regra é válida para expoentes reais. A segunda definição foi encontrada apenas num livro-texto específico sobre logaritmos, de autoria de Elon Lages Lima (1991). Apesar desta última constituir uma definição que tem por vantagem apresentar o número irracional “e” de uma forma natural e simples, não há como desenvolvê-la na primeira série do ensino médio, pelo motivo de envolver conteúdos que só serão trabalhados em alguns cursos do ensino superior.

2.4. REVISÃO DE LITERATURA

Para a realização desse estudo, procuramos investigar o que já foi elaborado no contexto do ensino de logaritmos, bem como em temas que possam ser de nosso interesse para essa pesquisa . Para isso, consultamos trabalhos de Jere Confrey e Erick Smith, os anais “Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência” (SBPC) e “Psychology of Mathematical Education” (PME), a revista “Educacional Studies”, o jornal “Journal for Research in Mathematical Education” (JRME), as teses catalogadas na PUC/SP, as pesquisas apresentadas no “Programa de Estudos e Pesquisas no Ensino da Matemática” (PROEM) e os resumos do “Encontro Nacional de Educação Matemática” (ENEM) e do “Encontro Paulista de Educação Matemática” (EPEM) e a “Revista de Educação Matemática”.

No texto de Confrey (1991) “Learning to Listen: a Student’s Understanding of Powers of Ten”, destacamos a mensagem da importância de se ouvir e analisar as etapas que o aluno seguiu para resolver certo problema, encorajando-o a apresentar seus próprios pontos de vista para que possam ser explorados. O texto apresentou um problema constituído por dados históricos representados em notação científica e o objetivo era de que o aluno representasse tais dados numa reta. A intenção era a de observar o entendimento dos estudantes em relação ao crescimento da função exponencial. A aplicação foi realizada com apenas uma estudante e esta não apresentou uma resposta convencional, porém a lógica utilizada para tal resolução era correta, se ouvida pelo professor. Esse texto contribui para o nosso estudo no sentido de mostrar que temos, como professores e pesquisadores, de ouvir as explicações que nossos estudantes podem dar a respeito de suas resoluções, antes de tomarmos qualquer atitude sobre a validade de tais respostas.

Um outro texto de Smith & Confrey (1995), “Splitting, Covariation and their role in the development of Exponential Functions” forneceu grandes contribuições para o nosso estudo. Neste texto, os autores apresentam uma abordagem para a construção da função exponencial baseada no isomorfismo entre dois mundos: o da contagem e o do seccionamento. Fazendo um paralelo com o estudo histórico, podemos relacionar estes dois mundos com as progressões aritmética e geométrica respectivamente. Através dessa abordagem, procuram explorar a comparação entre os crescimentos desses dois mundos, bem como a relação principal resumida neste momento pela seguinte frase: “somar no primeiro mundo equivale a multiplicar no segundo”. Em seguida, através de interpolações, o aluno constrói o conceito de função exponencial e logarítmica através da ênfase co-variacional e não da abordagem usualmente utilizada que tem por base o tratamento de funções como correspondência entre elementos de dois conjuntos, normalmente apresentadas na forma algébrica. O estudo envolveu um único aluno que foi posto diante de uma situação-problema cuja interpretação resultava na relação entre estes dois mundos. O aluno realizou várias conjecturas, sendo encorajado a observar, através de diversos exemplos, a validade de suas hipóteses.

Acreditamos que a abordagem co-variacional permite ao aluno comparar os tipos de crescimento das funções envolvidas, fato que fica oculto na abordagem baseada na correspondência. Desta forma, procuraremos criar uma sequência que explore esta abordagem co-variacional entre as funções exponencial e logarítmica, além da propriedade principal existente entre estes dois mundos.

Nos anais do PME, encontramos um trabalho sobre a visão do futuro professor em relação à função inversa "*The two faces of the inverse function – prospective teacher's use of undoing*" (Even, 1990). Esse estudo foi realizado com oito universidades dos Estados Unidos. Verificou-se que os futuros professores tinham a concepção de que a função inversa era algo que "desfaz" o que a função original fez, mas que essa idéia se mostrou insuficiente para se ter uma concepção sólida sobre função inversa. Isto ficou claro quando lhes foi colocada a questão: "Um estudante diz que existem duas funções inversas diferentes para a função $f(x) = 10^x$. A função raiz e a logarítmica. Este estudante está certo? " A maioria dos professores concluiu que as duas funções representavam a mesma coisa, o que mostra que os mesmos possuem um conhecimento frágil em relação a este tema. Com isso, provavelmente a concepção da inversa como algo que "desfaz" auxilia a compreensão da inversa, porém há necessidade de se ter uma visão mais ampla, a qual pode ser fornecida pela definição matemática formal.

Achamos este estudo importante para o nosso trabalho, visto que a nossa abordagem considera o logaritmo como uma ferramenta para a resolução de equações exponenciais, tendo por finalidade preparar o aluno para a concepção da função logarítmica como a inversa da exponencial. O trabalho apresentado acima nos mostra que existem problemas em relação à concepção de função inversa, principalmente no que tange às funções exponencial e logarítmica. Além disso, baseado nessa pesquisa, concluímos a importância de se construir uma visão ampla de um conhecimento, através de uma sequência que procure explorar e dar sentido à definição matemática formal do conceito.

No IV EPEM, encontramos uma pesquisa sobre logaritmos *“Logaritmos - Aspectos Históricos e Didáticos”* (Corrêa, 1989). O trabalho relata uma experiência didática sobre a teoria dos logaritmos partindo do estudo de porcentagens. Utiliza a história dos logaritmos dentro do contexto social e econômico da época em que surgiu, refazendo com os alunos os principais passos na evolução histórica do assunto. Quanto ao I ENEM, encontramos um trabalho que também despertou o nosso interesse, intitulado *“Logaritmos e exponenciais: uma linguagem para o diálogo interdisciplinar” (Amorin,1992).* Basicamente, o estudo envolve técnicas de modelagem matemática de problemas relacionados com débito de oxigênio durante uma sessão de ginástica, concentração de um medicamento no organismo e crescimento de bactérias.

Os trabalhos acima citados, encontrados no EPEN e ENEN, foram apresentados de uma forma muito resumida, relatados mais como caráter de experiência do que de pesquisa, o que não nos permitiu estabelecer maiores considerações. Apesar disso, como foram divulgados em meios da comunidade científica e levando em conta que estão diretamente relacionados com o tema de nosso estudo, consideramos importante citá-los nesta sessão.

Dos jornais consultados, encontramos no “Educational Studies in Mathematics”, um trabalho sobre a concepção de números irracionais denominado*:* *“The concept of irrational numbers in high-school students and prospective teachers”.* Este estudo foi apresentado por Fischbein, Jehiam e Cohen, em 1995, e basicamente procura levantar duas questões: verificar se as dificuldades apresentadas na história para a aceitação dos números irracionais existem nos dias de hoje e observar como a idade do indivíduo e a bagagem matemática influenciam na compreensão deste tipo de número. A pesquisa foi realizada com 30 estudantes no grau 9, 32 estudantes no grau 10 e 29 estudantes de faculdade (futuros professores). Foi constatado que a maioria das crianças e muitos futuros professores não estão aptos a definirem corretamente as concepções de números racionais, irracionais e reais. Através de exemplos, foi verificado que muitos estudantes não conseguem identificar se um número é racional ou irracional. O termo irracional é considerado equivalente a não inteiro ou a números que têm infinitas casas decimais. Não apresentaram segurança na distinção entre decimal periódico e não periódico. Surpreendentemente, através deste trabalho, constatou-se que não existe uma dificuldade intuitiva na mente dos estudantes em relação à irracionabilidade. Esta conclusão foi obtida partindo dos resultados obtidos através de duas questões: uma sobre a incomensurabilidade de segmentos e outra sobre a concepção de que há infinitos números racionais e infinitos números irracionais na reta. Portanto, as dificuldades apresentadas não são primitivas, mas fruto da educação matemática.

Essa constatação é muito importante para o nosso estudo, visto que o aluno deve ter a compreensão de número irracional para aceitar a aplicação dos logaritmos na resolução de determinadas equações exponenciais, como por exemplo a equação $2^x = 12$. O resultado encontrado ($x \cong 3,58$) não é um número racional. O aluno deverá ter consciência de que está encontrando uma aproximação, respeitando a precisão exigida pelo problema a ser resolvido.

No *“For the learning of mathematics – an international journal of mathematics education”* encontramos uma pesquisa denominada "Teaching Mathematics via Problem Solving” de Lester e Mau (1993). O texto procura mostrar o valor de ensinar matemática através de resolução de problemas. O interesse central é o de ajudar o estudante a entender os conceitos, processos e técnicas matemáticas. Para isso, há a apresentação de uma experiência de um curso destinado aos futuros professores denominado "Mathematics for Elementary Teachers via Problem Solving ", cujo objetivo é o de proporcionar ao estudante, atividades em que ele desenvolve sua própria matemática através de resolução de problemas. O curso foi desenvolvido em grupos, sendo que coube ao professor, o papel de orientador dos mesmos. Ainda, relataram que através dos comentários fornecidos pelos participantes, notou-se que os mesmos cortaram a relação de dependência com o professor, ou seja, desenvolveram auto-confiança e autonomia para resolver os problemas propostos.

Acreditamos que nossa proposta está bem próxima do que foi desenvolvido nesta pesquisa, pois procuramos partir de situações-problema. Além disso, durante todo o processo, trabalhamos com duplas. Com isso, foi importante verificar os resultados do estudo que adota esse tipo de abordagem e procedimento.

Por termos adotado a calculadora científica como ferramenta para a obtenção rápida de resultados, pesquisamos os estudos existentes sobre as aplicações de novas tecnologias e seus impactos no processo ensino-aprendizagem de conteúdos matemáticos. Destacaremos a seguir quatro estudos nesta área.

Costa (1998), realizou um estudo sobre a influência de dois diferentes contextos – computador e mundo experimental – na aprendizagem da trigonometria. Um dos grupos iniciou o conteúdo por atividades no computador para em seguida dar continuidade por manipulações no mundo experimental. O outro grupo seguiu a ordem inversa. O objetivo foi identificar se a ordem influenciava os resultados da aprendizagem deste conteúdo. A metodologia de avaliação consistiu na aplicação de três testes escritos: um antes de iniciar a sequência didática, um ao término das atividades de um dos contextos e o último ao final do estudo. A conclusão obtida é a de que a ordem realmente interferiu na aprendizagem desse conteúdo.

Ferreira (1998), apresentou um estudo sobre como os estudantes estruturam seu conhecimento sobre funções matemáticas enquanto trabalham com três micromundos[2], bem como o impacto que estes desempenham no aprendizado desses estudantes. O conteúdo de funções foi desenvolvido através da seleção de suas propriedades. O estudo foi realizado com dois programas de software que envolviam a possibilidade do computador explorar a representação de funções por movimentos contínuos: o DynaGraph (DG) (Goldenberg et al, 1992) e o Function Probe (FP) (Confrey et al, 1991). Quatro duplas de estudantes brasileiros que já tinham estudado função na escola, participaram de uma sequência de atividades composta de treze encontros de duas horas cada. Duas duplas inicialmente desenvolveram as atividades em DG (Paralelo e Cartesiano) para em seguida utilizar o FP e as outras duplas seguiram a sequência inversa. O estudo foi dividido em três fases. A primeira parte representou uma seção para familiarizar os estudantes com os comandos dos softwares, a segunda foi composta de atividades que objetivavam explorar as propriedades das doze funções agrupadas em quatro famílias e na última fase, os estudantes foram solicitados a agruparem as funções, como representadas em cada micromundo, de acordo com as propriedades que observaram. A conclusão obtida é a de que as articulações dos estudantes, quando situados em diferentes micromundos, sofrem influências dos aspectos técnicos e

[2] Um micromundo envolve conceitos matemáticos num modo peculiar que pode estar ou não próximo da matemática desenvolvida nas escolas.

pedagógicos do micromundo. Ainda, o resultado do desenvolvimento dos estudantes depende não somente dos dispositivos do computador, mas também de suas interações durante as atividades. Além disso, o uso de dois softwares fez com que os estudantes realizassem conexões de concepções que inicialmente estavam isoladas num micromundo.

Gracias e Borba (1998) discutem que as calculadoras nunca foram massivamente incorporadas a projetos educacionais por longos períodos, sendo que até hoje existem duas opiniões a respeito do uso de tecnologias no ensino. Uma delas considera a calculadora como um instrumento pedagógico de grande valor e de fácil aquisição enquanto a outra crê que o uso de máquinas de cálculo cria dependência e reduz a capacidade matemática do indivíduo.

Assim como a nossa proposta do uso da calculadora científica se baseia no fato de que a nossa abordagem tem por ênfase a resolução de problemas, Borba defende o uso de calculadoras gráficas em abordagens que adotam a ênfase na visualização. O estudo apresentado envolveu o uso da calculadora gráfica Casio fx-8700G, que possui os mesmos recursos de uma calculadora científica mas que também produz representações gráficas a partir da função definida pela sua expressão algébrica. Por ser portátil e mais acessível que um computador, não constitui um equipamento de difícil aquisição para uma escola. Basicamente, esta pesquisa procurou investigar o potencial da calculadora gráfica no estudo das funções quadráticas e teve por objetivo que o estudante estabelecesse relações entre as mudanças no gráfico com mudanças nos coeficientes da expressão algébrica e vice-versa, além do desenvolvimento das questões normalmente apresentadas nos livros didáticos. A aplicação foi realizada com dois estudantes do ensino de nível médio, separadamente, através de cinco sessões de aproximadamente duas horas. Constituiu-se num experimento de ensino, onde a construção do conhecimento do estudante levava em conta a interação com o entrevistador. Os resultados desse estudo mostraram que a calculadora gráfica permitiu que justificativas visuais fossem encontradas para relações algébricas e vice-versa. Com isso, houve o estabelecimento de um clima rico de previsões, testes, conjecturas e generalizações, graças à praticidade dessa ferramenta.

Um outro estudo realizado por Borba, Meneghetti e Hermini (1997), trata de uma discussão sobre o trabalho de modelagem desenvolvido por um grupo de estudantes da UNESP, Rio Claro, em 1995. O artigo relata a experiência de um grupo de seis alunas do curso de Ciências Biológicas que procuraram modelizar matematicamente um problema de biologia. O uso da calculadora gráfica facilitou a busca de uma função matemática que representasse o problema, possibilitando a essas estudantes fazerem conjecturas e investigações através de diversas tentativas, sem terem que se deter aos demorados cálculos que a situação exigia. Com isso, este instrumento parece ter representando para este grupo uma maneira de reorganizar a forma de pensar a matemática.

Concluindo, estas pesquisas a respeito do uso de ferramentas tecnológicas no processo de ensino-aprendizagem, denotam claramente que tais instrumentos permitiram explorar aspectos do conteúdo que não seriam possíveis através da abordagem tradicional. Não se trata apenas de desenvolver um ensino mais atual, mas sim, garantir ao aluno um ambiente propício para investigar, conjecturar e verificar suas hipóteses de maneira prática, eficiente e rápida.

O ENSINO DOS LOGARITMOS NA ESCOLA

3.1. INTRODUÇÃO

Este capítulo tem por finalidade analisar os principais instrumentos utilizados pelo professor no ensino de logaritmos. Com isso, selecionamos uma amostra de seis livros didáticos e a Proposta Curricular do Estado de São Paulo vigente. Pretendemos, nesse caso, obter um indicador de como o ensino dos logaritmos ocorre atualmente na escola.

Acreditamos que se o aluno tiver realmente a possibilidade de interagir com o conteúdo “logaritmo” através de situações significativas, teremos criado um ambiente favorável para a formação de seu conceito e ele, conseqüentemente, não apresentará maiores dificuldades em aprender toda a gama de teoria e procedimentos relacionados a esse tópico (como por exemplo as propriedades, o estudo da função logarítmica, as equações e inequações). Deve ficar claro que “interagir com o conceito inicial de logaritmo” não significa memorizar a definição e calcular mecanicamente logaritmos de certos números, mas sim entender o significado de logaritmo, ter em mente a necessidade de seu estudo, bem como saber justificar as características e as condições de existência inerentes a esse conceito.

Baseado nisso, como já foi mencionado, o objetivo deste trabalho consiste em pensar numa maneira eficaz de introduzir o conceito de logaritmo, sem a preocupação de englobar todo o conteúdo referente a esse tópico desenvolvido no ensino de nível médio. Nesse caso, analisamos cinco questões que consideramos que interferem na forma de introdução do mesmo, criando assim, categorias de análise, as quais serão definidas adiante.

O desenvolvimento desse capítulo se dará em três partes. Inicialmente, vamos analisar os livros didáticos em relação às categorias criadas, procurando ressaltar e discutir os pontos e formas relevantes que os mesmos abordam (positivos e negativos). Em seguida, faremos uma análise da Proposta Curricular do Estado de São Paulo do Ensino de Segundo Grau. Finalmente, vamos comparar as abordagens fornecidas por esta última e pelos livros didáticos.

3.2. OS LIVROS DIDÁTICOS

Procuramos selecionar seis livros didáticos mais freqüentemente utilizados nas escolas de São Paulo. A nossa intenção é a de procurar caracterizar o ensino da introdução de logaritmos, bem como comparar as abordagens analisadas. A seguir, apresentaremos os livros didáticos selecionados:

- **Os elos da matemática** - Editora Saraiva - 1995

  Autores: Rokusaburo Kiyukawa, Carlos Tadashi Shigekiyo e Kazuhito Yamamoto

- **Matemática - Temas e Metas** - Editora Atual - 1995

  Autor: Antonio dos Santos Machado

- **Fundamentos da Matemática Elementar** - Editora Atual - 1995

  Autores: Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce e Carlos Murakami

- **Matemática 1** - Editora Atual - 1993

  Autores:Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, José Carlos Teixeira, Nilson José Machado, Márcio Cintra Goulart, Luiz Roberto da Silveira Castro e Antonio dos Santos Machado

- **Matemática para o 2° grau** - Editora Ática - 1991

  Autores: Nelson Gentil, Carlos Alberto Marcondes dos Santos, Antônio Carlos Grecco, Sérgio Emílio Grecco e Antônio Bellotto Filho.

- **Matemática 1** - Editora FTD - 1992

  Autores: José Ruy Giovanni e José Roberto Bonjorno

Faremos agora, a análise desses livros segundo as categorias citadas abaixo:

- Forma de introdução do conceito;

- Apresentação de problemas contextualizados;

- Exploração de questões de estimativas;

- Tábua de logaritmos x calculadora e

- Inclusão de fatos históricos.

Em relação à forma de introdução do conceito, pretendemos observar se a abordagem adotada permite ao aluno a construção gradativa do conceito de logaritmo. Em seguida, faremos a análise da existência de situações problematizadas, com a finalidade de observar se os livros lançam mão de casos que permitam ao aluno perceber a utilidade do tópico estudado.

Como mostraremos adiante na análise dos livros, parece não ser tradição de nosso ensino fazer o aluno estimar resultados. Temos notado, seja através de nossa vivência como docente, seja no contato com outros profissionais da área, que o aluno não tem o hábito de verificar se a resposta obtida está coerente com a situação dada, o que muitas vezes poderia evitar a ocorrência de erros ou mesmo de respostas absurdas. É por esse motivo que gostaríamos de verificar a terceira categoria de análise apresentada, que envolve a exploração de questões de estimativas. Acreditamos que esse tipo de exercício permita ao professor observar como o seu aluno está assimilando e acomodando o conceito em questão, já que para a sua resolução não se utiliza diretamente a técnica apresentada no cálculo de logaritmos.

Atualmente, não faz sentido encarar o logaritmo como uma ferramenta de cálculo aritmético, visto que a calculadora cumpre este papel de maneira mais eficiente. Vamos então verificar a importância que os livros dão às tábuas de logaritmos, bem como se existe o incentivo ao uso de novas tecnologias, tal como a calculadora. Por fim, analisaremos se há preocupação em situar o aluno no momento histórico da criação dos logaritmos, para que o mesmo compreenda os motivos do surgimento bem como do desenvolvimento deste tópico.

3.2.1. Forma de introdução do conceito

Dentre as duas definições de logaritmos apresentadas no capítulo II, pudemos notar que todos os livros seguem aquela que associa logaritmo a expoente e não a que leva em conta a área da faixa delimitada pela hipérbole y = 1/x e o eixo x no intervalo [1,x].

Dos seis livros didáticos analisados, dois introduzem o conteúdo partindo diretamente da definição matemática e quatro introduzem o conceito de logaritmo através de um exemplo de uma equação exponencial, cujo resultado é um número irracional. Nesse caso, colocam o logaritmo como uma ferramenta que oferece uma melhor aproximação do resultado, fato exemplificado no trecho abaixo.

Existem certas equações exponenciais que não podem ser resolvidas apenas através das propriedades da potenciação. Por exemplo, ao resolvermos a equação $2^x = 10$, podemos afirmar que 2^x é um número real compreendido entre 2^3 e 2^4.
Assim, $2^3 < 2^x < 2^4 \Leftrightarrow 3 < x < 4$. Neste caso, x é um número irracional e para podermos determiná-lo com maior aproximação, utilizamos os logaritmos.

Matemática para o 2° grau, página 142.

Um ponto positivo a ressaltar é que estes quatro livros já têm a preocupação de fornecer a idéia da aplicabilidade dos logaritmos na resolução de equações exponenciais “não diretas”. Porém, acreditamos que esse fato não possibilita ao aluno acomodar essa noção, pois segundo Piaget, para a construção de um conhecimento, o sujeito deve agir sobre o objeto. No caso, o texto é apresentado como um único comentário, ou seja, não há questionamentos ou atividades que envolvam a participação do leitor.

Um outro fato a levantar é que nenhum dos livros analisados parte de situações-problema para a introdução do logaritmo. Todos oferecem um texto pronto e com linguagem formal, fato que, baseado nos estudos de Vergnaud, acreditamos fornecer pouca ou nenhuma condição para o aluno construir de maneira gradativa e significativa este conceito.

Em seguida, estes quatro livros fornecem a definição matemática, incluindo as condições de existência e nomenclatura. Os outros dois iniciam a abordagem a partir deste ponto.

Sendo a e b números reais tais que a>0, b>0 e b≠1, chamamos de logaritmo de a na base b o expoente real x ao qual se eleva a base b para se obter a:
$$\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a, \text{ com } a>0,\ b>0 \text{ e } b\neq 1.$$
As condições impostas para a base são necessárias para que b^x tenha significado para todo x pertencente a R: como $b^x = a$ e $b^x > 0$, então a>0.
Observando $\log_b a=x$, temos:
a: logaritmando ou antilogaritmo de x, b: base e x: logaritmo

Matemática para o 2° grau, página 142

Observamos que a definição do logaritmo vem “pronta”, ou seja, a institucionalização do conceito ocorre no início de seu estudo. De acordo com o nosso estudo das teorias psicológicas de formação de conceito, novamente acreditamos que esse tipo abordagem não possibilita a construção do conhecimento em questão, pois não há a participação do aluno nesse processo. Considerando esse fato, procuraremos criar uma seqüência composta de várias atividades que possibilitam ao aluno conceituar logaritmo, fazendo com que essa definição matemática represente a última etapa de nosso estudo. Após a apresentação da definição, todos os livros cobram exercícios de cálculo de logaritmo, o que está exemplificado abaixo.

Calcule pela definição os seguintes logaritmos:		
a) $\log_2 1/8$	**b)** $\log_8 4$	**c)** $\log_{0,25} 32$

Fundamentos da Matemática Elementar, página 59

Podemos destacar que esses mesmos exercícios recaem em equações exponenciais com solução não irracional, fazendo com que o aluno simplesmente resolva equações exponenciais com transformação direta dos dois membros em potências de mesma base. Além disso, apesar desses quatro livros retomarem a idéia inicial (a de que o logaritmo representa um meio de obter melhores aproximações para equações exponenciais não diretas), a exploração deste fato ocorre na maior parte dos casos através de um número reduzido de exemplos e exercícios, com exceção do livro 3. Apenas três dos livros analisados possuem um tópico direcionado para a aplicação dos logaritmos em equações exponenciais, sendo que os demais embutem exercícios desse assunto num conjunto de questões diversas desenvolvidas na última parte do capítulo, normalmente em blocos de exercícios complementares. Fica evidente, nesse caso, a valorização da técnica de cálculo em detrimento da formação e aplicabilidade do conceito em questão.

Para que o leitor analise esta afirmação, apresentaremos uma tabela que retrata, na maioria dos livros analisados, a discrepância entre a quantidade de exercícios dos dois tipos. Para facilitar a leitura, apresentaremos ao lado de cada quadro, uma legenda que relaciona cada livro analisado com uma numeração.

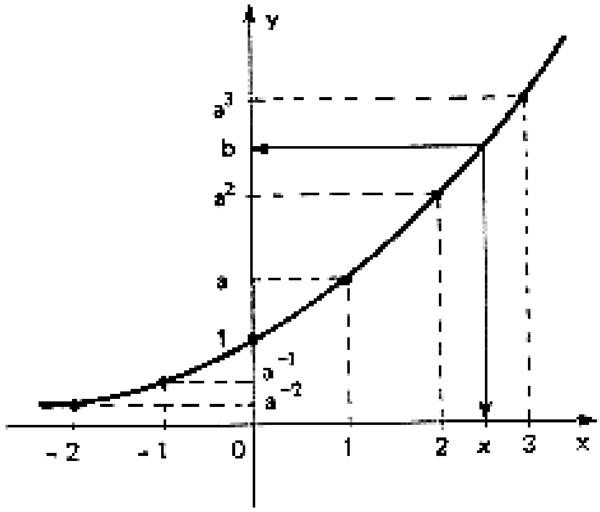
LIVRO	QUANTIDADE DE EXERCÍCIOS DE LOG QUE RECAEM EM EQUAÇÕES EXPONENCIAIS "DIRETAS"	QUANTIDADE DE EXERCÍCIOS DE LOGARITMO QUE RECAEM EM EQUAÇÕES EXPONENCIAIS "NÃO DIRETAS"	PERCENTUAL DE EXERCÍCIOS DO SEGUNDO TIPO
1	29	10	25,64%
2	55	10	15,38%
3	39	44	53,01%
4	39	9	18,75%
5	41	8	16,33%
6	67	15	18,29%

LIVRO
1- OS ELOS DA MATEMÁTICA
2- MATEMÁTICA – TEMAS E METAS
3- FUNDAMENTOS DA MATEMÁTICA ELEMENTAR
4- MATEMÁTICA 1 – ED. ATUAL
5- MATEMÁTICA PARA O SEGUNDO GRAU
6- MATEMÁTICA 1 – EDIT. FTD

Acreditamos que estes fatores poderão gerar no aluno problemas em relação ao estabelecimento do logaritmo como ferramenta de resolução de equações exponenciais não diretas.

Apenas um dos livros se preocupa em mostrar ao leitor a existência e a unicidade de um número real **x** tal que $a^x = b$.

Retomando a função exponencial $f(x) = a^x$, com $a>0$ e $a\neq 1$, observemos que sua imagem é o conjunto formado pelos números reais positivos: $Im(f) =\{y\in R/y>0\}$. De fato, um número real b está na imagem de f se existir x tal que $a^x = b$. Para $b\leq 0$, a equação $a^x = b$ não tem solução, pois sendo $a>0$ temos $a^x>0$, $\forall x\in R$. Por exemplo, $2^x = -2$, $2^x =-1$, $2^x = -½$ e $2^x=0$ são equações que não têm solução real. Por outro lado, sendo $b>0$, sempre podemos situar b entre duas potências de base a e expoentes inteiros consecutivos: $a^k \leq b < a^{k+1}$, $k \in Z$. Então a equação $a^x = b$ tem uma solução x, que é um número situado entre os dois expoentes: $k \leq x < k+1$. Esta solução é única devido ao fato da função ser ou crescente(a>1) ou decrescente(se 0<a<1).



Matemática - Temas e Metas, páginas 168 e169.

Logicamente não há condições no ensino de nível médio de demonstrar algebricamente as propriedades de existência e unicidade, porém achamos importante que o aluno tenha a oportunidade de saber que existe tal resultado e que o mesmo é único. Acreditamos que a abordagem gráfica é a mais adequada para se trabalhar com estas propriedades neste nível de ensino e, por esse motivo, utilizaremos esta idéia na construção de nossa seqüência.

3.2.2. Apresentação de problemas contextualizados - aplicações do logaritmo

Na sessão 3.2.1, vimos que nenhum livro parte de situações-problema para introduzir os logaritmos. Porém, cinco dos livros analisados apresentam problemas cuja interpretação matemática recai numa equação exponencial. Nesse caso, o logaritmo assume o papel de ferramenta para a resolução desses problemas.

Determine o tempo mínimo necessário para que um capital, empregado à taxa de 5% ao mês, com juros capitalizados mensalmente, dobre de valor.

Matemática para o segundo grau, página 184.

Todos os livros que apresentaram este tipo de problema, procuraram desenvolvê-lo no final do estudo de logaritmo, ou seja, estes exercícios praticamente assumiram um caráter ilustrativo de um conceito "já aprendido". A tabela abaixo confronta o número de problemas contextualizados com o número de questões sem contexto.

LIVRO	NÚMERO DE PROBLEMAS CONTEXTUALIZADOS	NÚMERO DE QUESTÕES SEM CONTEXTO	PERCENTUAL DE PROBLEMAS CONTEXTUALIZADOS
1	0	230	0%
2	4	369	1,07%
3	11	675	1,60%
4	1	363	0,27%
5	4	337	1,17%
6	3	441	0,68%

Obs: Foram computados os exemplos e os exercícios propostos de todo o conteúdo de logaritmo

LIVRO
1- OS ELOS DA MATEMÁTICA
2- MATEMÁTICA – TEMAS E METAS
3- FUNDAMENTOS DA MATEMÁTICA
4- MATEMÁTICA 1 – ED. ATUAL
5- MATEMÁTICA PARA O SEGUNDO GRAU
6- MATEMÁTICA 1 – EDIT. FTD

Fica claro que os problemas contextualizados assumem um papel secundário no estudo de logaritmos, visto que além de serem apresentados no final do capítulo, a quantidade de exercícios deste tipo é significativamente menor do que a quantidade de exercícios que privilegiam o cálculo. Provavelmente, este fato levará o aluno a ter maiores dificuldades em resolução de exercícios que exijam interpretação do que na resolução de questões técnicas.

O livro que não apresentou este tipo de problema, tentou mostrar a aplicabilidade dos logaritmos em outros campos através da apresentação de um texto complementar.

A escala Richter é uma escala logarítmica de medição de energia liberada pelos terremotos sob a forma de ondas que se propagam pela crosta terrestre, definida pelo professor C.F.Richter. Nela, é utilizado o logaritmo decimal. Os valores desta escala são chamados de magnitudes. Para se ter uma idéia, com uma magnitude de 9 graus, haveria a destruição total das construções de uma grande cidade.

Sendo uma escala logarítmica de base 10, um tremor de intensidade 10 vezes menor em relação à magnitude 9 graus é registrada como tendo a magnitude 8 graus, ou seja, a cada grau de magnitude que se eleva, a energia liberada intensifica-se 10 vezes.

O logaritmo decimal é também utilizado na Física, na definição da intensidade auditiva ou nível sonoro, cuja unidade mais usual é o decibel.

Na astronomia, o brilho das estrelas é também medido por uma escala logarítmica. O nosso Sol é uma estrela de magnitude 5 ou, como dizem, uma estrela de quinta grandeza.

Os elos da matemática, página 172.

Cinco dos livros analisados fornecem a antiga aplicabilidade dos logaritmos, voltando a atenção para a importância de facilitar cálculos numéricos. Porém, os mesmos não apresentam os problemas da época (de navegação ou de astronomia) de forma contextualizada. O que encontramos nessa pesquisa são exercícios de cálculo, do tipo apresentado abaixo:

Calcule a raiz quinta de 1270. São dados log 127=2,10380 e log4176 = 3,62076.

Matemática 1, página164.

Três livros apresentam simultaneamente aplicações antigas e atuais, porém apenas um dos livros procurou confrontar historicamente as diferentes aplicações, mostrando a evolução do conceito até os dias atuais. Neste caso, apresentou exercícios resolvidos e propostos do uso do logaritmo no cálculo numérico bem como na resolução de problemas exponenciais, acompanhados de um texto histórico. Em relação aos outros dois, não há nenhuma exploração do desenvolvimento histórico deste conceito. Enquanto um apresenta questões resolvidas dos dois tipos de aplicações, o outro desenvolve este tópico na forma de exercícios complementares. Um dos livros não apresenta as aplicações atuais, apenas coloca o logaritmo como um elemento facilitador de cálculos. É enriquecedor ter acesso às dificuldades que motivaram a descoberta dos logaritmos, ou seja, saber que surgiram para facilitar os cálculos numéricos exigidos pela astronomia e navegação da época. Porém, ocultar as aplicações atuais, apresentando o logaritmo como um conteúdo estudado unicamente para fins de cálculo numérico parece não oferecer nenhuma motivação ao aluno, já que o mesmo sabe que pode obter o resultado desse tipo de raiz através de uma calculadora. Em contrapartida, um dos livros da amostra apresenta apenas a aplicação atual, ocultando assim a história do desenvolvimento deste saber.

3.2.3. Exploração de questões de estimativas e coerência de respostas

A análise desse tópico, como já foi comentada, deve-se ao fato de que a maioria dos alunos não verifica a pertinência das respostas obtidas em relação ao problema desenvolvido. Essa afirmação pode ser constatada no dia a dia pelos professores que desenvolvem problemas matemáticos em sala de aula. Exemplificando, quantas vezes o aluno oferece uma resposta negativa para um problema cujo domínio são os números reais positivos? Isto parece ocorrer devido ao fato de que existem poucos estímulos no ensino atual que favoreçam a incorporação deste hábito, seja na conduta do professor ou na abordagem dos livros didáticos. Ao nosso ver, estimular no aluno esse tipo de atitude favoreceria não só o estudo dos logaritmos como qualquer outro conteúdo matemático, diminuindo a ocorrência de muitos erros ou de incoerência de respostas. Além disso, verificar como o indivíduo estima resultados representa um forte indicador de como o mesmo está pensando e entendendo o tema que está sendo desenvolvido, já que nestes casos, como já foi mencionado, ele não poderá recorrer apenas às técnicas de cálculo.

Baseado nisso, analisamos os livros citados em relação às questões de estimativas e notamos que há pouca exploração de exercícios neste aspecto, segundo o quadro a seguir.

LIVROS	NÚMERO DE QUESTÕES QUE EXPLORAM A ESTIMATIVA
1	0
2	5
3	0
4	2
5	0
6	0

LIVRO
1-OS ELOS DA MATEMÁTICA
2-MATEMÁTICA - TEMAS E METAS
3-FUNDAMENTOS DA MATEMÁTICA ELEMENTAR
4-MATEMÁTICA 1 - EDIT. ATUAL
5- MATEMÁTICA PARA O 2º GRAU
6-MATEMÁTICA 1 - EDIT FTD

Observamos que apenas dois exploram esse tipo de questão, fato exemplificado abaixo.

O número log50 está situado entre quais números inteiros consecutivos?

Matemática - Temas e Metas - página 173

Para resolver o exercício acima, o aluno não precisa utilizar a técnica de cálculo que parte da definição e conseqüente resolução da equação exponencial, fato tão sistematizado nos livros didáticos. Ele precisa apenas entender que o logaritmo de 50 na base 10 representa o expoente que deve ser atribuído ao 10 para que a potência resulte em 50, valor que está entre 1 e 2. A partir de sua resposta, o professor terá um termômetro para avaliar se o conceito está sendo construído ou não.

É por esse motivo que exploraremos a estimativa na nossa seqüência didática, procurando diagnosticar nos momentos oportunos, como o aluno está construindo o conceito de logaritmo.

3.2.4. Tábua de logaritmos x calculadora

Atualmente a calculadora é um instrumento de fácil aquisição, sendo que constitui uma poderosa ferramenta para a obtenção rápida de respostas para problemas matemáticos. Mesmo assim, apesar de ser uma forte aliada, ela ainda é vista nas escolas como uma barreira para o pensamento.

Nos textos analisados, observamos que apenas um livro (Matemática 1 - FTD), apesar de incluir a tabela de logaritmos decimais, dedica um espaço para a apresentação de como manusear uma calculadora para obter os resultados desses logaritmos. Os outros nem sequer comentam essa possibilidade e todos insistem em incluir como tópico obrigatório de estudo, as tabelas de logaritmos decimais criadas por Henri Briggs na época em que não existiam máquinas de calcular. Sabemos que para manusear essa tabela, o aluno deve aprender os conceitos de característica e mantissa. Nesse caso, dispende-se um certo tempo para explicar essas noções, enquanto que a calculadora forneceria o resultado em poucos segundos. Acreditamos que qualquer forma adotada para obter o resultado (pela tabela ou calculadora) não vai interferir na construção do conceito de logaritmo. Isso porque, um indivíduo não resolve um exercício somente através da calculadora, desde que a abordagem proposta dê ênfase na resolução de problemas em vez de procedimentos de cálculo. É necessário que ele tenha a capacidade de interpretar o problema, relacionar os conceitos envolvidos no mesmo e utilizar os procedimentos necessários para a sua resolução. Por esta razão, acreditamos que a calculadora representa apenas um instrumento atual, uma ferramenta cultural de acordo com Vygotsky, que tem por função facilitar a obtenção rápida de resultados, evitando os enfadonhos cálculos que nada contribuem para a aquisição e desenvolvimento do conceito. Os livros didáticos, neste aspecto, apenas refletem uma questão cultural. Como já foi mencionado, de acordo com pesquisas de Gracias e Borba (1998), a aceitação do uso de ferramentas tecnológicas no ensino não é unânime. Enquanto há uma corrente que insiste em dizer que as pessoas ficarão dependentes da tecnologia e perderão capacidades e conhecimentos matemáticos, outra assume que tais ferramentas constituem poderosos instrumentos pedagógicos. Os estudos, de forma geral, apontam que a utilização da calculadora nas escolas traz benefícios, porém, no Brasil, existe proibição quanto ao uso em testes e exames tais como vestibulares e concursos públicos e o uso nas escolas ainda é pontual.

Vale ressaltar que dois dos livros que adotam apenas a tabela, não realizam a relação entre o seu uso e a resolução de equações exponenciais, fato evidente no exemplo apresentado a seguir:

Resolver a equação: $2^x = 5$

Resolução: $x = \log_2 5$, portanto $S = \{ \log_2 5\}$

Os Elos da Matemática, página 161

Este fato parece denotar a inexistência de uma relação entre os tópicos estudados de um mesmo conteúdo. Estes livros apresentam, no decorrer do capítulo dedicado aos logaritmos, o procedimento de manuseio da tabela, como fazer uma mudança de base e o uso do logaritmo para resolver uma equação exponencial não direta. Porém, tais conceitos são estudados separadamente, não estabelecendo na resolução do exercício proposto a relação entre os mesmos.

3.2.5. Inclusão de fatos históricos

Temos a concepção de que a aprendizagem de um novo tópico se desenvolve de uma maneira mais sólida e, consequentemente, mais significativa, se o aluno entender em que contexto e por qual motivo ele foi criado, destacando as necessidades da época e a finalidade de seu estudo nos tempos atuais. No caso dos logaritmos, vale ressaltar que o objetivo da sua criação era o de facilitar cálculos numéricos, o que atualmente não tem sentido com as máquinas existentes. Porém, esta criação extrapolou em muito as suas causas originais, mostrando que o logaritmo tem grande utilidade em outras ciências. Nesta seqüência, gostaríamos de explorar a utilidade dos logaritmos decimais para a resolução de problemas exponenciais.

Um ponto positivo a levantar é que já existe na maioria dos livros didáticos analisados, a preocupação em explorar fatos históricos, afirmação que pode ser comprovada através do fato de que da amostra de livros didáticos selecionados, apenas um não inclui a exploração histórica. Em relação aos demais, três apresentaram a biografia dos principais matemáticos envolvidos na criação dos logaritmos bem como o comentário da utilidade dos mesmos, tanto na época de sua criação como nos dias atuais. Dos dois livros restantes, um apresentou apenas as biografias de John Napier e Henry Briggs e o outro só fez um comentário da utilidade dos logaritmos para os cálculos numéricos envolvidos na Astronomia da época. Como já foi mencionado, nenhum livro apresentou algum problema contextualizado da época que seria resolvido com o uso dos logaritmos. Encontramos somente comentários de que os logaritmos serviam para facilitar os demorados cálculos numéricos.

3.3. ANÁLISE DA PROPOSTA CURRICULAR DO ESTADO DE SÃO PAULO PARA O 2º GRAU

Procuramos analisar a mais recente Proposta Curricular do Estado de São Paulo para o Ensino de 2° Grau (1994) com relação à introdução de logaritmos. De nossa parte, consideramos que a abordagem adotada é de excelente qualidade e inteiramente possível de desenvolver em sala de aula.

Na análise, notamos que existe uma preocupação em fornecer meios para que o aluno construa o conceito, visto que a mesma se dá a partir de situações-problema. A abordagem tem início através do seguinte problema exponencial:

> **"A pressão atmosférica (pressão que a camada de ar exerce sobre os objetos) ao nível do mar é igual a 1 atm. Suponha que, ao se elevar um objeto de um ponto A a um ponto B, de modo que a altitude de B tenha 1000 m a mais que a altitude A, a pressão atmosférica em B seja 90% da pressão em A. Nestas condições, determine a pressão atmosférica (em atm), com relação ao nível do mar, num ponto cuja altitude é h metros".**
>
> **Existe altitude em que a pressão atmosférica seja a metade da pressão atmosférica ao nível do mar? Por quê?**

Proposta, página 282

Nessas condições, o aluno deveria verificar que a primeira questão é dada pela função exponencial: $F(h) = (0,9)^{h/1000}$, em que "h" representa a altitude em metros. Na segunda questão, a equação exponencial a ser resolvida é : $0,9^t = 0,5$. Neste caso, "t" representa a altitude em quilômetros.

Existe uma preocupação em criar um ambiente que possibilite ao aluno "enxergar" a existência de um número "t" tal que $0,9^t = 0,5$, através da construção do gráfico da função $f(t) = 0,9^t$. Ainda, procura-se criar condições de fazer com que o aluno conclua que o logaritmo é um tópico necessário a ser estudado, tendo por finalidade a resolução de certos tipos de equações exponenciais, através da transformação dos dois membros em potências de base 10.

Existe um expoente x_1 para 10, de modo que $10^{x1} = 0,9$ e existe um expoente x_2 para 10 tal que $10^{x2} = 0,5$. Nessas condições, poderíamos resolver a equação $0,9^h = 0,5$, pois esta seria transformada em uma equação de potências de mesma base (10). Estes expoentes estão tabelados, ou podem ser obtidos por meio de uma calculadora científica.

Assim, o número x_1 que deverá ser do expoente da base 10 para reproduzir 0,9 será chamado de logaritmo de 0,9 na base 10. O número x_2 que deverá ser o expoente da base 10 para reproduzir 0,5, será chamado logaritmo de 0,5 na base 10.

As notações tradicionais são: $x_1 = \log_{10} 0,9$ e $x_2 = \log_{10} 0,5$.

Proposta, páginas 285 e 287

A proposta procurou modernizar a forma de conduzir esse conteúdo, substituindo as famosas tábuas de logaritmos por calculadoras. Durante a abordagem do conteúdo em questão, ensina como utilizar este instrumento.

Existe um breve relato histórico sobre o surgimento dos logaritmos. Ainda, há um comentário sobre a utilidade deste tópico na época de seu surgimento e nos dias de hoje.

A consulta a tabelas logarítmicas necessita de todo um preparo técnico que dificulta a determinação dos expoentes (logaritmos). As calculadoras científicas são muito mais práticas e rápidas. Por exemplo, pra determinar o expoente da base 10 para reproduzir 0,9, digite: .9 e em seguida a tecla log.

Proposta – página 287

Após a resolução da equação em questão, a proposta procura sistematizar o processo, demonstrando que para resolver uma equação do tipo $a^x = b$, com $a>0$, $b>0$ e $a\neq1$, basta calcular $x= \log b/\log a$.

Embora a proposta apresente uma abordagem que consideramos de alta qualidade, acreditamos que o contato com o conteúdo logaritmo ainda se apresenta de forma limitada, sendo insuficiente para a internalização desse conceito. Esse fato pode ser observado no momento em que a proposta oferece apenas um único problema que envolve o logaritmo. De acordo com Piaget e Vergnaud, só com sucessivas interações com o objeto que o indivíduo será capaz de formar e ampliar um conceito. É por esse motivo, que no nosso estudo, procuraremos construir uma seqüência didática baseada na abordagem apresentada por essa proposta (introduziremos o logaritmo como um tópico necessário para resolver equações exponenciais). Porém, temos a intenção de “ir além” do que foi apresentado, ou seja, buscaremos ampliar a visão desse conteúdo através de questões de estimativas, de conceitualização, de levantamento das semelhanças e diferenças entre os logaritmos de diversas bases, da exploração do tipo de crescimento e da relação entre a exponencial e o logaritmo através de uma abordagem covariacional e da apresentação de outras situações-problema. Com isso, temos a intenção de garantir a formação e conseqüente ampliação desse conhecimento.

3.4.COMPARAÇÃO DAS ABORDAGENS DOS LIVROS DIDÁTICOS E DA PROPOSTA CURRICULAR

Através da descrição do conteúdo analisado dos livros didáticos e da Proposta Curricular, notamos que há uma grande diferença nos tipos de abordagem. Na introdução do conceito, enquanto os livros didáticos partem de um breve comentário da existência de expoentes irracionais ou mesmo da definição matemática, a proposta procura construir o conceito através da resolução de um problema exponencial. Nesse caso, baseado nos estudos de Vergnaud, acreditamos que a abordagem oferecida pela proposta é muito mais significativa, visto que o aluno verifica a necessidade da aprendizagem de tal conteúdo. Como já foi comentado, os livros apresentam problemas contextualizados no final do capítulo, caracterizando-os como exercícios que assumem um papel de ilustração para o que foi aprendido. Já a proposta assume esse tipo de exercício como papel principal da abordagem, visto que a inicia por um problema contextualizado.

Os livros didáticos comentam que atualmente não faz sentido adotar os logaritmos com a finalidade de facilitar cálculos numéricos, porém ainda apresentam exercícios com essa finalidade. Vimos ainda, que todos adotam as tabelas para o cálculo de logaritmos decimais. A Proposta Curricular substitui essas tabelas pelas calculadoras e ainda mostra que, se a abordagem adotada privilegia a resolução de problemas e não as técnicas de cálculo, a calculadora nada mais é do que um instrumento que auxilia a obtenção rápida de respostas.

Tanto os livros didáticos como a proposta procuram incluir fatos históricos. Como já foi citado, a proposta e apenas três livros abordam a origem do conceito, bem como as necessidades da época e as aplicações atuais. Os livros (em sua maioria) e a proposta não exploram questões de estimativas, de coerência de respostas, do tipo de crescimento e de comparações de logaritmos de bases diferentes.

Concluindo, podemos notar que a Proposta Curricular oferece um desenvolvimento mais atual (visto que procura utilizar os instrumentos de nossa época) e significativo (já que parte de problemas contextualizados, mostrando ao aluno a utilidade do tópico logo no início da aprendizagem). A abordagem dos livros é ainda um tanto obscura. Notamos que há a intenção, através de seus comentários, de mostrar um lado mais atual dos logaritmos, quando se trabalha com a parte histórica ou com situações-problema. Porém, realizando uma análise mais minuciosa notamos que, na prática, ainda se privilegiam técnicas de cálculo e uso de tábuas.

METODOLOGIA

4.1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo, apresentaremos a nossa proposta para introduzir o conceito de logaritmo, bem como os objetivos didáticos das atividades que a compõem. Ainda, descreveremos a nossa população-alvo (os sujeitos), o material utilizado no estudo e o desenho geral do experimento, este último composto de três fases: pré-teste, desenho inicial da sequência e pós-teste.

Foi realizada uma aplicação preliminar de nossa seqüência didática, a qual denominamos de "estudo piloto". A partir da análise de seus resultados, efetuamos algumas alterações no seu desenho, sem contudo mudar a sua essência. Assim sendo, descreveremos esta aplicação preliminar, acompanhada da proposta de ajustes para o estudo principal. Faremos essa descrição por fichas, para que o leitor possa acompanhar a evolução de nosso estudo.

4.2. PROPOSTA E OBJETIVOS

A proposta de nosso estudo consiste em oferecer uma forma mais significativa de introduzir os logaritmos, partindo de problemas exponenciais. Assim sendo, elaboramos uma seqüência didática tendo em vistas garantir:

- uma revisão de tópicos de função exponencial, os quais serão necessários para o desenvolvimento de nosso trabalho;

- a introdução do logaritmo decimal como uma necessidade de estudo, em que o mesmo assume o papel de ferramenta de resolução de equações exponenciais de transformação não direta de membros;

- a exploração de características do logaritmo decimal e sua relação com a exponencial;

- o entendimento das condições de existência partindo dessa relação;

- a exploração da relação entre os tipos de crescimento das funções exponencial e logarítmica, partindo de uma abordagem co-variacional;

- a ampliação do conceito, através da exploração e comparação de logaritmos em outras bases (base 2 e ½), procurando garantir assim a formação de uma base sólida para o estudo posterior da função logarítmica;

- a institucionalização do conceito, através da exploração da definição matemática.

Com isso, ao final do estudo temos por objetivo que o aluno seja capaz de:

- conceituar logaritmo (incluindo as condições de existência);

- resolver equações exponenciais diretas ou indiretas (com o uso do logaritmo);

- estabelecer a relação existente entre o logaritmo e a exponencial na resolução de problemas contextualizados;

- calcular logaritmos (quando necessário com o auxílio de instrumentos);

- estimar valores em situações que envolvem logaritmos e

- realizar comparações entre as características de logaritmos de bases diferentes (quanto ao sinal e crescimento).

4.3. OS SUJEITOS

O nosso estudo foi realizado com dois grupos: o grupo experimental e o grupo de referência. Em relação ao grupo experimental, trabalhamos inicialmente com 8 duplas totalizando 16 sujeitos, todos pertencentes a uma mesma instituição da rede particular de ensino do Estado de São Paulo. Eram estudantes da primeira série do ensino médio, com a característica de já terem realizado o estudo da função exponencial e não terem nenhum contato com os logaritmos. Como foram considerados somente aqueles que participaram do estudo completo (pré-teste, sequência e pós-teste), foram computados exatamente treze alunos para a análise dos resultados. Já o grupo de referência foi composto por uma turma da primeira série do ensino de nível médio de uma outra instituição particular de ensino, sendo que realizaram o estudo dos logaritmos através da abordagem tradicional apresentada nos livros didáticos. Ambos os grupos se submeteram a dois testes individuais: um antes de serem introduzidos no logaritmo e outro após terem tido o contato com esse conteúdo.

Para o grupo experimental, a aplicação dessa seqüência foi realizada em horário de aula, num total de cinco encontros de aproximadamente 60 minutos cada, o que equivale na maioria das escolas a 6 horas/aula. A aplicação desta seqüência foi realizada em duplas, sendo que o atendimento foi feito coletivamente em uma sala de aula.

Com relação ao grupo de referência, composto por uma turma de sala de aula, o trabalho foi desenvolvido conforme determinado pela escola. Novamente, foram computados como sujeitos que participaram desse grupo apenas os alunos que se submeteram às três fases propostas pelo estudo, ou seja, aqueles que responderam ao pré e pós testes e que não faltaram a nenhum dos encontros em que o professor trabalhou o conteúdo de logaritmo. Isso significou que, satisfeitas essas condições, tivemos 29 sujeitos no grupo de referência.

4.4. MATERIAL

Para a realização de nossa seqüência com o grupo experimental, fez-se necessário o uso dos seguintes materiais: papel, lápis, borracha, régua, calculadora científica, papel milimetrado e as fichas de atividades as quais serão descritas em seção posterior. Como não havia necessidade de uma calculadora para cada indivíduo, foram utilizadas 6 calculadoras para o grupo de 16 alunos. Utilizamos, ainda, um gravador para cada dupla, com a finalidade de possibilitar uma análise mais rica do desempenho e das possíveis observações colocadas por esses alunos. Quanto ao grupo de referência, utilizamos uma apostila própria da escola que continha a tabela de logaritmos decimais, além do material básico como lápis, borracha e régua. Seguindo a tradição da escola, não fornecemos a calculadora para esse grupo. Em relação aos testes, além do material básico citado acima, fornecemos calculadoras (para o grupo experimental) e a tabela de logaritmo decimal (para o grupo de referência).

4.5. DESENHO GERAL DO EXPERIMENTO

Nosso experimento incluiu três fases, a saber:

- A fase 1 que envolveu um teste inicial (pré-teste), composto de 6 questões sobre a função exponencial e o logaritmo, distribuídas da seguinte maneira: 3 questões básicas (nos moldes das trabalhadas nos livros didáticos) que privilegiavam a técnica de cálculo, uma situação-problema, uma questão de estimativa e uma questão de conceitualização do logaritmo;

- A fase 2 foi dedicada ao processo ensino-aprendizagem do logaritmo. Foi aqui que desenvolvemos a nossa seqüência didática com um dos grupos, enquanto que o outro teve contato com o tema na escola, dentro da sala de aula;

- Na fase 3, os dois grupos novamente se submeteram a um segundo teste nos moldes do primeiro. Isto significou que o pós-teste, embora diferisse do inicial quanto à ordem, contexto e valores apresentados nas questões, teve a equivalência matemática cuidadosamente respeitada.

4.5.1. Fase 1 – Apresentação e análise prévia do pré-teste

O pré-teste, composto de questões sobre a função exponencial e o logaritmo, foi aplicado para os dois grupos (experimental e de referência), com a finalidade de fazer uma sondagem sobre os conhecimentos prévios dos alunos. Vale salientar que esse teste foi aplicado para indivíduos que não estudaram logaritmo, mas que terminaram o estudo da função exponencial.

Temos consciência de que uma avaliação deste tipo pode não retratar o conhecimento real do aluno, já que existem vários fatores que podem interferir no seu desempenho, tais como problemas de ordem emocional, cognitiva ou mesmo biológica. Porém, este tipo de avaliação é a mais usual em nosso sistema escolar, portanto estaremos fornecendo um ambiente de igualdade para os dois grupos, seja na forma de avaliação como no conteúdo envolvido. Em relação a este último, procuramos selecionar questões nos moldes das trabalhadas nos livros didáticos ou no vestibular, com exceção de uma questão, em que pedimos para o aluno conceituar logaritmo.

A seguir, apresentaremos as questões do pré-teste, cada qual acompanhada de uma análise prévia e de sua resolução.

1) Calcular:

a) $\log_6 36$ b) $\log_{10} 12$

Apesar de ser um tipo de exercício comum no ensino atual, dificilmente o aluno conseguiria resolvê-lo, visto que o mesmo ainda não teve contato com os logaritmos. A intenção de incluir essa questão foi a de justamente certificar que o aprendiz não possuía esse conhecimento nesse pré-teste. O item "a" envolveu a aplicação da definição de logaritmo e conseqüente resolução de uma equação exponencial de transformação direta. No item "b", o aluno poderia usar instrumentos (calculadora ou tabela) para obter o resultado.

Resolução: a) $\log_6 36 = x \Rightarrow 6^x = 36 \Rightarrow 6^x = 6^2 \Rightarrow x = 2$

b) $\log_{10} 12$

- pela calculadora: $\log 12 \cong 1{,}0792$
- pela tabela: característica: 2-1 = 1

  mantissa: 0,0792

  Então $\log 12 = 1{,}0792$

2) Resolver em R: $9^x = 729$

Analisando este exercício, temos que o mesmo representa um tipo de questão muito trabalhado no ensino atual e, por esse motivo, acreditamos que a maioria dos alunos conseguiria desenvolvê-lo. A sua resolução envolvia os conhecimentos de potência e equação exponencial de transformação direta. Pretendíamos, com essa questão, observar se o aluno seria capaz de resolver uma equação exponencial de transformação direta.

Resolução: $9^x = 729 \Rightarrow 9^x = 9^3 \Rightarrow x = 3$

3) Resolver em R: $9^x = 20$

Considerando que este pré-teste seria aplicado para alunos que não estudaram logaritmo, acreditávamos que ninguém daria a solução do exercício. Tínhamos por intenção investigar se o aluno conseguiria dar uma estimativa do resultado (como por exemplo, $1<x<2$), verificando assim, se o mesmo admitiria a existência desse expoente.

Resolução: $9^x = 20 \Rightarrow x = \log_9 20 \Rightarrow x = \log 20/\log 9 \Rightarrow x \cong 1{,}36$

4) Uma pessoa aplicou 300 reais em um certo investimento que fornece 5% de juros compostos mensalmente. Determine, sabendo que a fórmula que fornece a quantia que a pessoa dispõe em qualquer tempo é :

$F(t) = 300 \cdot (1{,}05)^t$

a) a quantia após 3 meses

b) o tempo necessário para que a quantia seja de 1200 reais.

Em relação ao item “a”, que exigia o cálculo de um valor numérico, esperávamos que o aluno resolvesse corretamente. Talvez pudesse existir alguma dificuldade quanto à interpretação do texto, uma vez que problemas do mundo prático são pouco explorados no ensino da matemática, como vimos no capítulo III.

Já no item “b”, provavelmente não ocorreria acerto total, visto que para o cálculo haveria a necessidade do conhecimento de logaritmo. Pretendíamos verificar se o aluno conseguiria manipular a função exponencial apresentada, substituindo 1200 no lugar de F(t), a fim de sondar se a dificuldade para a resolução se encontraria apenas no logaritmo.

Resolução: a) $F(3) = 300 \bullet (1,05)^3 \cong 347,29$ reais

b) $1200 = 300 \bullet (1,05)^x \Rightarrow (1,05)^x=4 \Rightarrow$

$x = \log_{1,05}4 = \log4/\log1,05 \cong 28,41$ meses.

5) Se $\log_2 x = 2,8074$, então:

a) $\frac{1}{2}<x<1$

b) $1<x<2$

c) $2<x<4$

d) $4<x<8$

e) $8<x<10$

Justifique a sua resposta.

Esta questão exigia do aluno a capacidade de estimar o logaritmando a partir do resultado do logaritmo. Novamente, esperávamos que nenhum aluno conseguisse responder e justificar corretamente este exercício.

Resolução: a alternativa correta é a “d”, pois $\log_2 4 = 2$ e $\log_2 8 = 3$, logo $4<x<8$.

6) Para você, o que é logaritmo?

Com essa questão, pretendíamos constatar novamente que esse conteúdo era totalmente desconhecido para esses alunos. Esta pergunta também foi incluída no pós-teste (após o estudo dos logaritmos), a fim de investigar se o aluno adquiriu o conceito de logaritmo após a aprendizagem desse tópico.

4.5.2. Fase 2 – Desenho inicial da sequência

A seguir, apresentaremos o desenho inicial da seqüência didática. Faremos uma análise prévia das atividades bem como a descrição dos objetivos das questões.

O primeiro problema de nossa seqüência envolvia uma função exponencial (que deveria ser determinada pelo aluno). O quadro a seguir apresenta esse problema.

1) UMA DOENÇA EPIDÊMICA DOBRA O NÚMERO DE VÍTIMAS A CADA ANO. SE HOJE EXISTEM 300 INFECTADOS, DETERMINE (SUPONDO QUE A DOENÇA NÃO FOI CONTIDA):

A) O NÚMERO DE INFECTADOS APÓS UM ANO.

B) O NÚMERO DE INFECTADOS APÓS DOIS ANOS.

C) O NÚMERO DE INFECTADOS APÓS CINCO ANOS.

D) O NÚMERO DE INFECTADOS APÓS 10 ANOS

E) UMA FUNÇÃO QUE REPRESENTE O NÚMERO DE INFECTADOS APÓS "N" ANOS

F) APÓS QUANTOS ANOS O NÚMERO DE INFECTADOS SERÁ DE 76800

G) APÓS QUANTOS ANOS O NÚMERO DE INFECTADOS SERÁ DE 1228800.

Quadro 4.1: Questão 1 da Ficha 1 da Seqüência Didática Inicial

Este primeiro exercício tinha por objetivo avaliar os conhecimentos que o aluno adquiriu com o estudo da função exponencial (através de sua determinação e manipulação). Além disso, com esse problema, gostaríamos de oferecer a base mínima necessária para garantir o sucesso no desenvolvimento de nossa seqüência, visto que essa noção era imprescindível para a introdução do logaritmo através da abordagem proposta. Esse exercício poderia ser analisado subdividindo-o em três grupos:

- Grupo 1: formado pelos itens ***a,b,c*** e ***d*, ** que envolviam o cálculo de valor numérico;

- Grupo 2: formado pelo item ***e*, ** que exigia a generalização da situação, obtida através da fórmula de uma função exponencial;

- Grupo 3: formado pelos itens ***f*** e ***g***, que envolviam a manipulação da função exponencial e conseqüente resolução de uma equação.

Esperávamos que o aluno não apresentasse dificuldades no grupo 1 de questões, mas que tivesse certa dificuldade no grupo 2 (item ***e***). Isso porque, como já foi comentado no capítulo III, a abordagem seguida pelo ensino atual quase não explora a interpretação de situações problematizadas. Em relação ao grupo 3, acreditávamos que também não haveria maiores problemas, visto que não havia necessidade do uso do logaritmo para a resolução desse primeiro exercício.

A questão 2 dessa ficha também estava relacionada com um problema exponencial.

2) O VALOR DE UM CERTO AUTOMÓVEL (EM REAIS) SOFRE UMA DEPRECIAÇÃO DE 10% AO ANO. A FUNÇÃO QUE REPRESENTA O VALOR DESTE AUTOMÓVEL APÓS "T" ANOS É DADA POR:

$$F(T) = 10000.(0.9)^{T} \quad , 0 \leq T \leq 20$$

SABENDO QUE A VIDA ÚTIL DESTE CARRO É DE 20 ANOS, DETERMINE: (UTILIZE A CALCULADORA E, QUANDO NECESSÁRIO, USE APROXIMAÇÃO DE QUATRO CASAS DECIMAIS).

A) O VALOR DESTE CARRO HOJE
B) O VALOR DESTE CARRO APÓS 1 ANO
C) O VALOR DESTE CARRO APÓS 1 ANO E MEIO
D) O VALOR DESTE CARRO APÓS 2 ANOS
E) O VALOR DESTE CARRO APÓS 2 ANOS E MEIO
F) O VALOR DESTE CARRO APÓS 3 ANOS
G) O VALOR DESTE CARRO APÓS 6 ANOS
H) O VALOR DESTE CARRO APÓS 10 ANOS
I) O VALOR DESTE CARRO APÓS 20 ANOS
J) COM OS DADOS OBTIDOS, CONSTRUA UMA TABELA RELACIONANDO O TEMPO E O VALOR DO CARRO.
L) CONSTRUA UM GRÁFICO COM OS DADOS OBTIDOS, OU SEJA, REPRESENTE GRAFICAMENTE A FUNÇÃO DADA NO PAPEL MILIMETRADO.
M) ANALISANDO O GRÁFICO, EXISTE UM TEMPO "T" EM QUE O VALOR DO CARRO SEJA DE 5000 REAIS? ESTE VALOR DE "T" PERTENCE A QUE INTERVALO?
N) UTILIZANDO A FUNÇÃO DADA, TENTE CALCULAR O VALOR DE "T", PARA QUE O VALOR DO CARRO SEJA DE 5000 REAIS.
O) QUE DIFICULDADES VOCÊ ENCONTROU PARA RESOLVER ESTE ITEM?

Quadro 4.2 -Questão 2 da ficha 1 da seqüência didática

Através deste problema, pretendíamos, partindo da exploração dos quadros numérico, gráfico, algébrico e das funções, fornecer um ambiente favorável para a necessidade de se introduzir os logaritmos. Primeiramente, solicitaríamos o cálculo de valores numéricos (itens **a,b,c,d,e,f,g,h** e **i**) e observaríamos a concepção que o aluno possuiria de potência de expoente não inteiro (como por exemplo no item **c**). Em seguida, através da exploração da representação em tabelas (item **j**) e do quadro gráfico (itens **l** e **m**), pretendíamos que o aluno “observasse” a existência de um determinado tempo em que o valor do carro fosse de 5000 reais, constatando que este tempo estava entre 6 e 7 anos. No item **n**, solicitaríamos o cálculo desse tempo, com o objetivo de o aluno perceber que os conhecimentos que possuía não eram suficientes para resolver essa questão. Isso porque, tentando resolver através da técnica de resolução de equações exponenciais já dominada, o mesmo verificaria que a equação encontrada (no caso $0,9^t = 0,5$) não admitiria este tipo de resolução. Conseqüentemente, haveria a necessidade da aprendizagem de um novo conceito. Através do item **o**, pretendíamos observar o pensamento que o aluno tinha em relação a essa dificuldade.

A ficha 2 iniciaria com a retomada da equação obtida no item **n**. Nesse momento, deveríamos intervir no processo, mostrando que existe uma maneira de contornar esse problema através da representação dos dois membros da equação na forma de potência de mesma base. Inicialmente, a intenção era a de mostrar o processo existente adotando a base 10. O aluno deveria ficar ciente de que o motivo da escolha desta base específica se devia ao fato do nosso sistema ser decimal e que, uma conseqüência disto, consistia em podermos encontrar os resultados prontos em uma tabela ou com o auxílio da calculadora.

Já vimos que a equação obtida no exercício é: $(0,9)^t=0.5$. Nesse caso, mostraríamos que o processo consiste em escrever 0,9 e 0,5 como potências de 10, ou seja, $0,9=10^x$ e $0,5 = 10^y$. Neste momento, seria oportuno explorar certos aspectos históricos, citando o contexto que motivou a descoberta dos logaritmos, as dificuldades da época, as tabelas criadas por Henry Briggs (baseadas na representação de vários números sob a forma de potência de base 10), exemplos de como utilizavam estas tabelas no cálculo aritmético, o processo de desenvolvimento desse conteúdo e a apresentação de sua utilidade atual. Ainda, poderíamos orientá-los a utilizarem a calculadora, mostrando que este instrumento apenas substitui as tábuas, fornecendo o resultado desejado de forma mais rápida.

Em seguida, transmitiríamos ao aluno que na equação $0,9 = 10^x$, o expoente "x" representaria o logaritmo de 0,9 na base 10 e que a notação utilizada seria: $\log_{10} 0,9 = x$. Da mesma forma, poderíamos dizer que o expoente "y" da equação $0,5 = 10^y$ representaria o logaritmo de 0,5 na base 10 e que a notação a ser utilizada seria: $\log_{10} 0,5=x$.

Seria importante, num primeiro momento, auxiliarmos os alunos quanto ao uso da calculadora, mostrando que normalmente, para obter o logaritmo de 0,9 na base 10 numa calculadora científica, bastaria apertar o número 0.9 e em seguida a tecla log. Com isso, teríamos que o logaritmo de 0,9 na base 10 valeria -0,04575749, ou seja: $10^{-0,04575749} = 0,9$. Realizando o mesmo processo, o logaritmo de 0,5 na base 10 valeria -0,301029995, ou seja: $10^{-0,301029995} = 0,5$.

Solicitaríamos então, para que o aluno resolvesse a equação abaixo, substituindo os resultados obtidos. Esperávamos que o mesmo conseguisse seguir as etapas descritas abaixo:

$0,9^t = 0.5 \Rightarrow (10^{-0,04575749})^t = 10^{-0,301029995}$

Então: $-0,04575749\, t = -0,301029995$

Logo: $t \cong 6,58$ anos

Em seguida, pediríamos ao aluno que preenchesse a tabela abaixo:

N°	POTÊNCIA DE BASE 10	NOTAÇÃO DO LOGARITMO	CÁLCULO DO LOG
1			
6			
8,2			
10			
29			
100			
850			
1000			
0,2			
0,84			
0			
-10			
-250			

Quadro 4.3 - Tabela de logaritmos decimais - Ficha 2

Tínhamos por objetivo fornecer um ambiente favorável para que se estabelecesse a relação entre expoente de potência de base 10 e logaritmo decimal. Além disso, os três últimos itens da tabela visavam permitir o contato do aluno com casos de não existência de logaritmo decimal. Esperávamos que o aluno pudesse estabelecer uma relação entre o que ocorre com o logaritmo e com a função exponencial para justificar estes casos. Se o aluno não percebesse, poderíamos fazer perguntas comparativas nessa direção. Ainda, com relação a esta tabela, solicitaríamos que o aluno respondesse as seguintes perguntas:

A) O QUE REPRESENTA CADA LOGARITMO OBTIDO NA ÚLTIMA COLUNA?

B) O QUE VOCÊ NOTOU EM RELAÇÃO AOS RESULTADOS OBTIDOS PELO CÁLCULO DOS LOGARITMOS DE 1 A 10?

C) E DOS LOGARITMOS ENTRE 10 E 100?

D) O QUE ACONTECERIA COM OS LOGARITMOS ENTRE 10000000 E 100000000?

E)ENTRE QUE INTEIROS CONSECUTIVOS ESTÁ O LOGARITMO DE 238?

F) ENTRE QUE INTEIROS CONSECUTIVOS ESTÁ O LOGARITMO DE 3495?

G)ENTRE QUE INTEIROS CONSECUTIVOS ESTÁ O LOGARITMO DE 12375?

H) ANALISANDO OS NÚMEROS DADOS (DA PRIMEIRA LINHA ATÉ A OITAVA), PODEMOS NOTAR QUE ELES AUMENTAM. O QUE OCORRE COM OS SEUS LOGARITMOS?

I) EXISTEM LOGARITMOS DE NÚMEROS ENTRE 0 E 1 NESTA BASE? O QUE OCORRE COM ELES?

J)O QUE ACONTECEU QUANDO VOCÊ TENTOU CALCULAR O LOGARITMO DE ZERO? TENTE JUSTIFICAR A SUA RESPOSTA.

L) EXISTEM OS LOGARITMOS DE NÚMEROS NEGATIVOS NESTA BASE? JUSTIFIQUE.

M) PROCURE, BASEADO NESTE ESTUDO E UTILIZANDO SUAS PALAVRAS , ESCREVER O QUE É LOGARITMO DE UM NÚMERO NA BASE 10. NÃO ESQUEÇA DE INCLUIR NA SUA DEFINIÇÃO, AS CONDIÇÕES DE EXISTÊNCIA DO LOGARITMO DE BASE 10.

Quadro 4.4 - Questões da ficha 2

Analisando as questões acima, no item **a** tínhamos a intenção de procurar estabelecer uma associação entre o expoente de 10 e o logaritmo decimal. Em relação aos itens **b, c** e **d**, procuramos criar condições para que o aluno observasse que existe uma relação entre o logaritmo e o logaritmando. Com o objetivo de conduzir o aluno ao questionamento de estimativas de respostas foram criados os itens **e, f** e **g**. No item **h** pretendíamos efetuar a comparação entre o crescimento dos logaritmandos e de seus logaritmos. No item **i**, seria explorado o sinal das respostas (negativo ou positivo). Nos itens **j** e **l** havia a intenção de explorar as condições de existência do logaritmando, justificando-as através dos conhecimentos de função exponencial. Pretendíamos de um modo geral que, partindo dessas questões, o aluno conseguisse definir, com suas próprias palavras, o logaritmo de base 10, incluindo aí as condições de existência (item **m**). Além disso, acreditávamos que essas questões favoreceriam a maturação do conceito para a introdução posterior do estudo da função logarítmica.

Nunca é demais salientar que estaríamos todo o tempo junto do aluno e que buscaríamos auxiliá-lo sempre que ele precisasse. Este auxílio viria em forma de perguntas em situações análogas, contra-exemplos e questões reflexivas e comparativas. Para ampliar o conceito, na ficha 3, solicitaríamos ao aluno que preenchesse a tabela abaixo, além de responder as questões apresentadas em seguida :

No.	**Potência de base 2**	**Notação do log**	**Cálculo do log**
1			
2			
3			
4			
6			
8			
12,7			
16			
0			
0,5			
0,25			
-2			
-5			

Quadro 4.5 - Tabela de logaritmos de base 2 - Ficha 3

Em seguida, pediríamos para que respondessem as seguintes questões:

a) Quais as dificuldades que você encontrou?

b) Tente agora achar o logaritmo de 3 na base 2, transformando cada termo da equação exponencial $2^x = 3$ em potências de base 10.

c) Na base 2, quando o logaritmo dará um resultado entre 1 e 2?

d) O que ocorre com os logaritmos de números entre 4 e 8 nessa base?

e) Se o cálculo do logaritmo de um número resultou em um valor entre 5 e 6, o que podemos dizer sobre este número?

f) Entre que inteiros consecutivos está o logaritmo de 50 na base 2?

g)Tente agora, comparando as duas tabelas (de base 10 e de base 2) levantar o que há de comum entre elas.

Quadro 4.6 - Questões da Ficha 3

Com esse exercício, pretendíamos chamar a atenção do aluno em relação à existência de logaritmos em outras bases. Ainda, gostaríamos que o mesmo levantasse as semelhanças existentes entre logaritmos de bases diferentes (quanto ao crescimento, condições de existência, sinal das respostas obtidas etc) e estimasse resultados de logaritmos na base apresentada. Tínhamos também, a intenção de oferecer questões diretas (como por exemplo o logaritmo de 16 na base 2) e não diretas (como por exemplo o logaritmo de 3 na base 2). Para este último caso, pretendíamos observar se o aluno estabeleceria a relação de transformação em potências de base 10, procedimento utilizado anteriormente para resolver a equação $0,9^t = 0,5$. Após o preenchimento da tabela, o processo de mudança de base utilizado para esses casos não diretos seria por nós institucionalizado.

Nos exemplos anteriores, exploramos dois casos de logaritmos com bases maiores do que 1. Pretendíamos, prosseguindo com a nossa seqüência, trabalhar com um tipo de logaritmo cuja base era um número b/ $0<b<1$. Nesse caso, na ficha 4, solicitaríamos que o aluno comparasse esse caso com os logaritmos já estudados. Além disso, procuraríamos levantar questões que estimulassem o aluno a refletir sobre as condições de existência da base. Para isso, pediríamos ao aluno para que preenchesse a tabela seguinte e que respondesse as questões que se seguiam após o seu preenchimento.

No	Potência de base 1/2	Notação do log	Cálculo do log
1			
2			
3			
4			
8			
0.5			
0.63			
0			
-2			
-5			

Quadro 4.7 - Tabela de logaritmos de base ½ - Ficha 4

a)Nesta base, quando o logaritmo de um número resulta num valor positivo?

b)estime o valor do logaritmo de 28 nesta base

c)procure fazer um levantamento das semelhanças e diferenças encontradas entre esta última tabela (logaritmos de base 1/2) e das outras duas já estudadas (logaritmos de base 10 e de base 2).

d)Analise os casos abaixo:

d1) $\log_1 8$

d2) $\log_{-2}(3)$

d3) $\log_0 5$

e)Que tipo de valores você acha que a base de um logaritmo pode assumir, garantindo assim a existência do mesmo?

f)Tente agora, com suas palavras, definir logaritmo de um número em qualquer base, considerando as condições de existência.

g)Interprete a seguinte definição: Se $a>0$, $b>0$ e $b\neq 1$, $\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$

Quadro 4.8 - Questões da Ficha 4

Por fim, no item "f", a intenção era a de observar se após a aplicação desta seqüência, o aluno conseguiria, logicamente sem o rigor da notação matemática, conceituar logaritmo, incluindo aí as condições de existência do logaritmando e da base. Só nesta última etapa, pediríamos para interpretar a definição matemática apresentada no item "g", para em seguida institucionalizarmos tal conceito.

4.5.3. Fase 3 – Apresentação e análise prévia do pós-teste

O pós-teste foi composto de seis questões nos moldes dos exercícios apresentados no pré-teste. Apenas para o grupo experimental, no momento da aplicação dessa avaliação, acrescentamos mais uma questão de comparação entre logaritmos, a qual será comentada no capítulo V. Esta questão foi tabulada separadamente e aplicada apenas para o grupo experimental com a finalidade de oferecer mais informações sobre o resultado de nossa sequência. No pós-teste, o uso do logaritmo se apresentou em cálculos diretos, em questões de comparações e conceitualização, como também em casos em que assumiu o papel de ferramenta de resolução de equações exponenciais.

Este teste foi aplicado para os dois grupos após o estudo do logaritmo. A nossa intenção consistia em avaliar o crescimento de cada grupo do pré para o pós teste e se existiria uma diferença em relação ao rendimento dos mesmos, já que sabemos que estes aprenderam o conteúdo segundo abordagens distintas. Com isso, tínhamos por finalidade investigar se a seqüência de ensino elaborada, favoreceria a formação desse conceito. Novamente, neste teste, os alunos do grupo experimental puderam utilizar a calculadora científica e os alunos do grupo de referência a tabela de logaritmos decimais.

1) Calcular os logaritmos:

a) **$\log_3 81$** *(Exercício retirado da coleção de livros do Curso Objetivo - Álgebra I - Livro 37 - página 95)*

b) **$\log_{10}$ 75** *(Exercício retirado do livro Matemática 1 - José Ruy Giovanni e José Roberto Bonjorno - página 181)*

Com relação ao item "a" dessa questão pretendíamos observar se o aluno que estudou logaritmo dominou a sua técnica de cálculo. Para esta resolução o aluno não necessitava de calculadora ou tabela, visto que a mesma recaía numa equação exponencial de transformação direta, porém o uso desses instrumentos não foi vetado. Já no item "b", tínhamos por objetivo analisar se o aluno saberia obter o logaritmo decimal de um número, devendo utilizar para isso a calculadora (grupo experimental) ou a tabela (grupo de referência).

Resolução: a) $\log_3 81 = x \Rightarrow 3^x = 81 \Rightarrow 3^x = 3^4 \Rightarrow x=4$

b) log75

- utilizando a calculadora: log 75 $\cong$1,8751
- utilizando a tabela:

característica = 2-1 = 1 e mantissa = 0,8751

Então, log60 $\cong$ 1+0,8751 = 1,8751

2) Resolver em R: $4^x = 64$

Através desse exercício, tínhamos a intenção de verificar se o aluno resolveria equações exponenciais de transformação direta. Deixamos novamente livre o uso de instrumentos.

Resolução: $4^x = 64 \Rightarrow 4^x = 4^3 \Rightarrow x = 3$

3) Determine, com uma casa decimal, o valor de x que verifica equação: $5^x = 10$ (*Exercício retirado do livro didático "Matemática 1" de Gelson Iezzi e outros - Editora Atual, 1993 - página167).*

Com esse exercício, pretendíamos analisar se o aluno, após o estudo de logaritmo, construiu a concepção do uso deste como ferramenta de resolução de equações exponenciais. Para obter o resultado, o aluno poderia utilizar a calculadora ou a tabela.

Resolução: $5^x = 10 \Rightarrow x = \log_5 10 \Rightarrow x = \log 10/\log 5 \cong 1,4$

4)Uma aplicação financeira fornece 4% de juros compostos mensalmente. Supondo que hoje você deposite 80 reais e que não faça mais nenhum depósito ou retirada, determine:

a)a quantia acumulada após 3 meses

b)o tempo necessário para que a quantia acumulada seja de 400 reais.

Obs: A função que fornece a quantia acumulada após "t" meses é dada por $F(t) = 80 \bullet (1,04)^t$

Tínhamos por objetivo observar se o aluno conseguiria aplicar o que estudou numa situação contextualizada.

Resolução:

a) $F(3) = 80 \bullet (1,04)^3 = 80 \bullet 1,124864 \cong 89,99$ reais

b) Vamos calcular o tempo necessário para que a quantia totalize 400 reais:

$80 \bullet (1{,}04)^t = 400 \Rightarrow (1{,}04)^t = 5 \Rightarrow t = \log 5/\log(1{,}04) \Rightarrow t \cong 41{,}04$ meses

5) Se $\log_2 x = 3{,}78$, então: (Exercício adaptado do vestibular do Mackenzie)

a)$1<x<2$

b)$2<x<4$

c)$4<x<8$

d)$8<x<16$

e)$16<x<32$

Justifique a sua escolha

Nesta questão, pretendíamos observar se o aluno que já havia estudado logaritmos era capaz de estimar o valor do logaritmando partindo da resposta do logaritmo. Para tal, pediríamos para que não utilizassem a tabela ou a calculadora nesta questão.

Resolução: A resposta correta é a alternativa “d”, visto que $\log_2 8 = 3$ e $\log_2 16 = 4$, logo, $8<x<16$.

6)Para você, o que é logaritmo?

O nosso objetivo era o de observar qual conceito que um aluno apresentaria, após o estudo dos logaritmos.

4.6. DESCRIÇÃO DA APLICAÇÃO PRELIMINAR DA SEQÜÊNCIA (PROJETO "PILOTO") E PROPOSTA PARA A SEQÜÊNCIA DO ESTUDO PRINCIPAL

A sequência didática para a introdução do conceito de logaritmo foi aplicada para um grupo de três alunas (Tatiana, Denise e Ana Luiza) da primeira série do segundo grau de um colégio da rede particular de ensino de São Bernardo do Campo. A aplicação e a análise desse "piloto" tiveram por finalidade levantar os conhecimentos disponíveis dessas alunas sobre o tema, bem como observar se as atividades criadas nessa seqüência necessitavam de alterações. Através das respostas obtidas nesses encontros, pudemos observar que há necessidade de se efetuar pequenos ajustes na seqüência antes da aplicação definitiva da mesma, os quais serão descritos oportunamente nesta seção.

Todos os encontros foram realizados coletivamente, fora do horário de aula, nas dependências do colégio. Vale salientar que essas voluntárias já tinham estudado função exponencial e iriam começar o estudo de logaritmo.

4.6.1. Duração da aplicação preliminar da seqüência

Foram realizados quatro encontros, sendo que uma das alunas, por problemas de saúde, só participou do primeiro. A seqüência apresentada foi dividida em fichas, sendo que cada ficha equivaleu a um encontro. Cada encontro teve uma duração média de aproximadamente 60 minutos.

Faremos, a seguir, a descrição desses encontros, a partir da ficha a que cada um corresponde, procurando detalhar os pontos mais relevantes para a pesquisa. Apesar de já termos apresentado as questões que compõem essas fichas na seção 4.5.2, forneceremos novamente essas informações (de forma condensada, não tendo a preocupação de respeitar o formato original das atividades) com o intuito de facilitar a leitura desse trabalho.

4.6.2. Ficha 1

A primeira ficha foi composta pelos dois problemas apresentados que exploravam a função exponencial e teve por objetivo verificar as concepções das alunas a respeito dessa função.

1)Uma doença epidêmica dobra o número de vítimas a cada ano. Se hoje existem 300 infectados, determine (supondo que a doença não foi contida):

a) o número de infectados após um ano.
b) o número de infectados após dois anos.
c) o número de infectados após cinco anos.
d) o número de infectados após 10 anos

e) uma função que represente o número de infectados após "n" anos
f) após quantos anos o número de infectados será de 76800
g) após quantos anos o número de infectados será de 1228800.

2) O valor de um certo automóvel (em reais) sofre uma depreciação de 10% ao ano. A função que representa o valor deste automóvel após "t" anos é dada por:
$F(t) = 10000.(0.9)^t \quad , 0 \leq t \leq 20$
Sabendo que a vida útil deste carro é de 20 anos, determine: (utilize a calculadora e, quando necessário, use aproximação de quatro casas decimais).

a) o valor deste carro hoje
b) o valor deste carro após 1 ano
c) o valor deste carro após 1 ano e meio
d) o valor deste carro após 2 anos
e) o valor deste carro após 2 anos e meio
f) o valor deste carro após 3 anos
g) o valor deste carro após 6 anos
h) o valor deste carro após 10 anos
i) o valor deste carro após 20 anos
j) com os dados obtidos, construa uma tabela relacionando o tempo e o valor do carro.

l) construa um gráfico com os dados obtidos, ou seja, represente graficamente a função dada no papel milimetrado.
m) analisando o gráfico, existe um tempo "t" em que o valor do carro seja de 5000 reais? Este valor de "t" pertence a que intervalo?
n) utilizando a função dada, tente calcular o valor de "t", para que o valor do carro seja de 5000 reais.
o) que dificuldades você encontrou para resolver este ítem?

Quadro 4.9 – Apresentação da Ficha 1 na íntegra

4.6.2.1. Descrição

Nesse primeiro momento, explicamos o procedimento e os objetivos dos encontros. Foi pedido para que as alunas expusessem as dúvidas e discutissem todas as dificuldades, de tal forma a permitir que a pesquisadora pudesse acompanhar e anotar esses comentários. Visto que a intenção desse primeiro encontro era a de verificar qual a concepção que essas alunas tinham de função exponencial, a primeira ficha (composta de dois problemas exponenciais) foi entregue sem dizer sobre qual tópico matemático versava.

Distribuímos uma ficha para cada aluna. Inicialmente, procuraram resolver de forma individual, porém, diante da primeira dificuldade, passaram a discutir em grupo. Procuramos deixá-las à vontade, assumindo inicialmente o papel de ouvinte.

4.6.2.2. Análise da aplicação da ficha 1 (estudo piloto)

Conforme previsto, as alunas não tiveram dificuldades na resolução dos itens ***a,b,c*** e ***d***, visto que não fizeram perguntas e conseguiram resolvê-los de forma correta e satisfatória, o que nos leva a crer que essas questões não levantaram dúvidas. Verificando a ficha 1, notamos que esses itens exigiam do aluno apenas o cálculo de valores numéricos. No item ***e***, pedimos para que determinassem a função que representava a situação do exercício. Nesse caso, notamos que a primeira tentativa para a descoberta dessa função partiu de uma relação linear. A aluna Tatiana tentou $2 \bullet n$. Ao perceber que essa relação não dava conta da resolução, tentou $300 \bullet 2n$. Após essa tentativa, perceberam que nos itens resolvidos, ocorria uma multiplicação de fatores iguais, donde concluíram que deveriam fazer 2^n. Por fim, notando que essa operação ainda era insuficiente para dar conta da situação, conseguiram chegar em 300.2^n.

Nesse contexto, perguntamos se não estava faltando alguma coisa na notação dessa função. As alunas falaram que a fórmula seria $F(n) = 300 . 2^n$, sendo que não tiveram, naquele momento, problemas em dizer o que representava "n" e "F(n)". Ao serem questionadas sobre o tipo de função, verificamos que tiveram certa dificuldade em perceber que se tratava de uma função exponencial, apesar de já terem estudado o conteúdo através de uma outra abordagem. Essas dificuldades foram notadas principalmente pelas tentativas incorretas e pela demora, o que nos leva a crer que o ensino atual não favorece o reconhecimento desta função quando o aluno é posto diante de uma situação-problema exponencial.

No item ***f***, notamos que apenas a aluna Denise levantou a questão de que o valor 76800 deveria ser substituído no lugar de F(n). As outras alunas não apresentaram a facilidade na manipulação dessa função, resolvendo a questão a partir da explicação de Denise. Nesse caso, quando depararam com a equação $256 = 2^n$, comentaram que aquilo elas já tinham aprendido na escola e que bastava fatorar o 256. Com isso, podemos ressaltar que as alunas só associaram o que estavam resolvendo com o que já tinham estudado na escola, no momento em que chegaram numa técnica de cálculo, o que evidencia a tendência do ensino atual de trabalhar com exercícios sem contexto, que privilegiam resoluções numéricas e algébricas. Ainda, pudemos verificar que existem problemas na abordagem do ensino atual a respeito de <u>função</u>. Isso ficou claro em dois momentos: na solicitação do tipo de função envolvida no problema e na resolução do item ***"f***', que exigia do aluno, a noção dos significados de "F(n)" e "n", para em seguida, resolver a equação.

Um outro ponto a ser levantado, é o fato do uso da calculadora. A aluna Tatiana mostrou nesse primeiro encontro, uma certa repulsa no seu uso, como se esse fato fosse vergonhoso ou que demonstrasse certa incompetência. Isso foi comprovado numa frase em que dizia que não era necessário resolver aquelas contas através da calculadora, pois ela sabia fazer sozinha. Com isso, as outras alunas que adotaram a calculadora, terminavam o exercício num intervalo de tempo menor que o de Tatiana. Constatamos ainda, que as alunas não sabiam operar com a calculadora científica, visto que o ensino atual praticamente não admite o seu uso.

A segunda questão provocou grande motivação, pois representava uma situação mais próxima da realidade destas alunas.

As alunas resolveram os cálculos numéricos, exigidos do item ***a*** ao item ***i,*** de maneira satisfatória. Na construção do gráfico, notamos uma tendência em ligar os pontos com régua, o que nos mostra novamente como é forte a intuição de linearidade entre as variáveis.

O item ***m*** indagava se, através da análise do gráfico, existiria um tempo em que o valor do carro assumiria o valor de 5000 Reais, e em qual intervalo estaria este tempo. Todas as alunas realizaram individualmente a análise gráfica, mas apenas duas chegaram à conclusão de que esse tempo existia e que se situava entre 6 e 7 anos. Notamos que a formulação da questão, no que se refere ao cálculo de valores numéricos, levou uma das alunas à conclusão incorreta sobre esse tempo. Isto se deve ao fato de que os valores solicitados induziram num primeiro momento à construção de uma reta (visto que os pontos estavam muito próximos) e a construção à mão livre, com os valores dados, permitiu uma imprecisão que afetou o resultado final.

Apenas no item ***"n",*** ao depararem com a equação $\mathbf{0{,}9^t = 0{,}5}$, perceberam que não seria possível obter o valor de "t" com os conhecimentos que tinham. A intenção desse item foi exatamente a de criar um desafio, ou seja, de levantar o interesse para a necessidade de aprender algo novo.

As respostas dadas diante do questionamento dessa equação foram:

> **ANA LUIZA:** ***" É uma conta muito exata, não dá para igualar 0,5 na base 0,9."***
>
> **DENISE:** ***"Não dá para 0,5 chegar numa base igual a 0,9."***
>
> **TATIANA*****: " Não é possível saber o tempo em que o carro vale 5000 reais, porque eu não posso fatorar 0,5 para chegar à 0,9, neste caso, por esta fórmula, eu não consegui. Pelo método que a gente aprendeu não dá, mas deve existir outro jeito. Será que não dá para fazer por regra de três?"***

Nessa última frase, perguntamos como ela utilizaria a regra de três. Tatiana disse que poderia relacionar um valor conhecido com o seu tempo, então o valor 5000 com um tempo x. Novamente temos a questão da linearidade envolvida neste raciocínio.

Notamos que Ana Luiza teve dificuldade de se expressar matematicamente, Denise conseguiu falar com clareza sobre a questão e Tatiana já mostrou uma facilidade de ligar o problema com o contexto dado, procurando achar soluções, mesmo que incorretas.

De um modo geral, pudemos notar que, dentre as três alunas que participaram da resolução da primeira parte dessa seqüência, a aluna Denise tinha mais facilidade com a técnica de cálculo, enquanto que Tatiana tinha boa capacidade de interpretação. Ana Luiza pouco se manifestou, seguindo praticamente a resolução de Denise. De fato, quando a examinadora questionou o desempenho dessas alunas com seus professores do curso regular, obteve as informações de que Denise era considerada como uma ótima aluna, enquanto que Ana Luiza e Tatiana eram colocadas como medianas. Ao serem questionadas sobre essa primeira ficha, as mesmas responderam:

> **DENISE:** ***“ Gostei deste jeito, é mais real.***
>
> **TATIANA:** ***“Desta forma nós temos que pensar, do jeito que é dado na escola, a gente quase não precisa pensar.”***

Nessa frase de Tatiana, fica claro que o papel do ensino é o de valorizar a técnica e não o raciocínio. Ana Luiza não se manifestou em relação a essa ficha.

4.6.2.3. Conclusões da ficha 1 do projeto piloto

Através da resolução dessa primeira ficha, notamos que havia a necessidade da alteração dos valores solicitados no exercício 2 para a construção do gráfico. Isto se dá por dois motivos, comentados anteriormente:

- Os valores adotados induziam inicialmente à união dos pontos através de régua;
- Nem sempre foi obtida a conclusão gráfica de que o tempo que faz com que o carro assuma o valor de 5000 Reais está entre 6 e 7

Além disso, podemos eliminar o item **g** da questão 1, visto que não acrescentou novidades na seqüência.

4.6.2.4.Proposta para o estudo principal (Ficha 1)

Após análise dos resultados obtidos na aplicação piloto e do estudo das pesquisa realizadas por Jere Confrey, resolvemos realizar algumas alterações nessa primeira ficha. Procuramos ampliar a visão do conteúdo criando questões que favorecem a construção da relação entre exponencial e logaritmo através de uma abordagem co-variacional, a qual permite observar o tipo de crescimento entre cada “mundo” (logaritmo e exponencial), bem como obter a relação “somar no primeiro mundo (dos logaritmos) equivale a multiplicar no segundo (da exponencial)”.

A ficha 1, da forma como foi trabalhada com o grupo experimental, será apresentada no anexo V. Neste momento, transcreveremos e justificaremos as alterações ocorridas por questão trabalhada. Substituímos o primeiro exercício por outros dois que procuram explorar a relação de crescimento entre a exponencial e o logaritmo, bem como a propriedade “somar na primeira coluna equivale a multiplicar na segunda”. Procuramos explorar os quadros numérico, algébrico e das funções.

1) CONSTATOU-SE QUE UMA DOENÇA EPIDÊMICA DOBRA O NÚMERO DE VÍTIMAS A CADA ANO. EM DETERMINADA REGIÃO EXISTE HOJE 1 INFECTADO. SUPONDO QUE A DOENÇA NÃO FOI CONTIDA, DETERMINE:

A) O NÚMERO DE INFECTADOS APÓS UM ANO
B) O NÚMERO DE INFECTADOS APÓS DOIS ANOS
C) O NÚMERO DE INFECTADOS APÓS TRÊS ANOS
D) O NÚMERO DE INFECTADOS APÓS QUATRO ANOS
E) O NÚMERO DE INFECTADOS APÓS CINCO ANOS
F) O NÚMERO DE INFECTADOS APÓS SEIS ANOS
G) NÚMERO DE INFECTADOS APÓS SETE ANOS
H) O NÚMERO DE INFECTADOS APÓS OITO ANOS
I) O NÚMERO DE INFECTADOS APÓS NOVE ANOS
J) O NÚMERO DE INFECTADOS APÓS DEZ ANOS
K) COMPLETE A TABELA ABAIXO

TEMPO (PERÍODO EM ANOS)	NÚMERO DE INFECTADOS
0 (HOJE)	
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

L)COMO SE DÁ O CRESCIMENTO NA PRIMEIRA COLUNA?
M)COMO SE DÁ O CRESCIMENTO NA SEGUNDA COLUNA?
N)PREENCHA NA TABELA OS PASSOS QUE VOCE UTILIZA P PARA PASSAR DE UM ELEMENTO PARA OUTRO
O)ESCOLHA DOIS ELEMENTOS DA PRIMEIRA COLUNA E SOME

NÚMERO:
NÚMERO :
RESULTADO DA SOMA:

AGORA, CONSULTANDO A TABELA, DETERMINE OS CORRESPONDENTES DESTES NÚMEROS NA SEGUNDA COLUNA

NÚMERO:	CORRESPONDENTE:
NÚMERO:	CORRESPONDENTE:
RESULTADO DA SOMA:	CORRESPONDENTE:

VOCÊ CONSEGUE PERCEBER ALGUMA RELAÇÃO ENTRE ESTES DADOS? ESCREVA ESTA RELAÇÃO

P) ESCOLHA OUTROS DOIS NÚMEROS E OBSERVE SE A RELAÇÃO CONTINUA VÁLIDA

Q) CONSTRUA (NA TABELA) UMA TERCEIRA COLUNA RELACIONANDO O NÚMERO DE INFECTADOS OBTIDO EM CADA QUESTÃO COM POTÊNCIAS DE 2.

R) DETERMINE UMA FUNÇÃO QUE FORNEÇA O NÚMERO DE INFECTADOS APÓS “N” ANOS

S) DETERMINE O NÚMERO DE INFECTADOS APÓS 14 ANOS (SE QUISER, UTILIZE A CALCULADORA)

T) DETERMINE APÓS QUANTOS ANOS O NÚMERO DE INFECTADOS SERÁ DE 4096.

Quadro 4.10. Ficha 1 - Exercício 1 do estudo principal - apresentação na íntegra

Com isso, do item “**a**” ao item “**n**”, tínhamos por objetivo explorar a relação entre o crescimento exponencial e logarítmico. Nos itens “**o**” e “**p**” acreditávamos que o aluno conseguiria obter casos particulares que revelassem a propriedade básica dos logaritmos: “a soma de dois elementos da primeira coluna corresponde ao produto de dois elementos da segunda”, fato que seria posteriormente institucionalizado pelo professor. Os itens “**q**” e “**r**” procuravam conduzir o aluno à construção da função que forneceria o número de infectados após “n” anos. Já nos itens “**s**” e “**t**”, o aluno manipularia a função obtida na forma algébrica.

O segundo exercício também procurou explorar a relação de crescimento entre as funções exponencial e logarítmica (tabela, itens **a** e **b**), a propriedade básica encontrada para valores inteiros e não inteiros (itens **c** e **h**), a construção da função na forma algébrica (itens **d** e **e**) e sua utilização para realização de cálculos (itens **f**, **g**, **i**, **j** e **k**). Os quadros explorados novamente foram os numérico, das funções e algébrico.

2) UMA APLICAÇÃO FINANCEIRA TRIPLICA O VALOR DEPOSITADO AO FINAL DE CADA ANO. SUPONDO QUE UMA PESSOA DEPOSITE HOJE 1 REAL E NÃO EFETUE NENHUM DEPÓSITO APÓS ESTE, PREENCHA A TABELA RELACIONANDO O TEMPO (EM ANOS) E O VALOR ACUMULADO.

TEMPO	VALOR (EM REAIS)
0 (HOJE)	
APÓS 1 ANO	
APÓS 2 ANOS	
APÓS 3 ANOS	
APÓS 4 ANOS	
APÓS 5 ANOS	
APÓS 6 ANOS	

A)COMO SE DÁ O CRESCIMENTO NA PRIMEIRA COLUNA? E NA SEGUNDA?
B)PREENCHA NA TABELA OS PASSOS QUE VOCÊ UTILIZA PARA PASSAR DE UM ELEMENTO PARA OUTRO
C)ESCOLHA NOVAMENTE DOIS NÚMEROS DA PRIMEIRA COLUNA E OBSERVE SE A RELAÇÃO OBTIDA NO ITEM “O”DO EXERCÍCIO 1 É VÁLIDA NESTE EXERCÍCIO
D) CRIE UMA TERCEIRA COLUNA RELACIONANDO OS VALORES OBTIDOS (EM REAIS) COM POTÊNCIAS DE 3.
E)DETERMINE UMA FUNÇÃO QUE FORNEÇA O VALOR ACUMULADO APÓS “N” ANOS.
F)DETERMINE A QUANTIA QUE A PESSOA TERÁ APÓS ½ ANO. (DEIXE INDICADO NA FORMA DE FRAÇÃO)
G) DETERMINE A QUANTIA QUE A PESSOA TERÁ APÓS 5/2 ANOS (2 ANOS E MEIO)
H) PREENCHA A TABELA, UTILIZANDO A NOTAÇÃO NA FORMA DE FRAÇÃO:

APÓS ½ ANO	A QUANTIA SERÁ DE
APÓS 5/2 ANOS	A QUANTIA SERÁ DE
APÓS 3 ANOS	A QUANTIA SERÁ DE

PARA ESTES VALORES VALE A RELAÇÃO OBTIDA NO ITEM “N” DO EXERCÍCIO 1?
I)DETERMINE O VALOR ACUMULADO APÓS 12 ANOS.
J)DETERMINE O VALOR ACUMULADO APÓS 3 ANOS E MEIO (USE A CALCULADORA)
K)DETERMINE APÓS QUANTOS ANOS O VALOR ACUMULADO SERÁ DE 59049

Quadro 4.11. Ficha1 - Exercício 2 (estudo principal) - apresentação na íntegra

A questão do automóvel (questão 2 no desenho inicial) foi mantida (agora como questão 3), sofrendo as seguintes alterações:

- A função na forma algébrica não foi fornecida, mas sim construída conjuntamente com os alunos;

- Alteramos os valores numéricos dos seguintes itens desse problema:

C) O VALOR DESTE CARRO APÓS 2 ANO E MEIO D) O VALOR DESTE CARRO APÓS 6 ANOS *E) O VALOR DESTE CARRO APÓS 9 ANOS* *F) O VALOR DESTE CARRO APÓS 10ANOS* *G) O VALOR DESTE CARRO APÓS13 ANOS* *H)O VALOR DESTE CARRO APÓS 16 ANOS*

Esta última mudança foi justificada pelo fato de na aplicação “piloto” termos observado que os valores iniciais levavam à uma imprecisão no esboço do gráfico. Após estas alterações, houve a necessidade de dividir esta primeira ficha em dois encontros de aproximadamente 60 minutos cada, o que fez com que a aplicação total de nossa sequência exigisse em torno de 6 aulas, segundo a duração da aula na maioria das escolas.

4.6.3. Ficha 2

A segunda ficha, que destinava-se a introduzir o conceito de logaritmo como ferramenta necessária para a resolução de uma equação exponencial, incluiu a resolução da equação $(0,9)^t = 0,5$ e a tabela de logaritmos de base 10 em conjunto com as questões a ela associadas.

N°	POTÊNCIA DE BASE 10	NOTAÇÃO DO LOGARITMO	CÁLCULO DO LOG
1			
6			
8,2			
10			
29			
100			
850			
1000			
0,2			
0,84			
0			
-10			
-250			

A) O QUE REPRESENTA CADA LOGARITMO OBTIDO NA ÚLTIMA COLUNA? B)O QUE VOCÊ NOTOU EM RELAÇÃO AOS RESULTADOS OBTIDOS PELO CÁLCULO DOS LOGARITMOS DE 1 A 10? C) E DOS LOGARITMOS ENTRE 10 E 100? D) O QUE ACONTECERIA COM OS LOGARITMOS ENTRE 10000000 E 100000000? E)ENTRE QUE INTEIROS COSECUTIVOS ESTÁ O LOGARITMO DE 238? F) ENTRE QUE INTEIROS CONSECUTIVOS ESTÁ O LOGARITMO DE 3495? G)ENTRE QUE INTEIROS CONSECUTIVOS ESTÁ O LOGARITMO DE 12375? H)ANALISANDO OS NÚMEROS DADOS (DA PRIMEIRA LINHA ATÉ A OITAVA), PODEMOS NOTAR QUE ELES AUMENTAM. O QUE OCORRE COM OS SEUS LOGARITMOS?	I) EXISTEM LOGARITMOS DE NÚMEROS ENTRE 0 E 1 NESTA BASE? O QUE OCORRE COM ELES? J)O QUE ACONTECEU QUANDO VOCÊ TENTOU CALCULAR O LOGARITMO DE ZERO? TENTE JUSTIFICAR A SUA RESPOSTA. L)EXISTEM OS LOGARITMOS DE NÚMEROS NEGATIVOS NESTA BASE? JUSTIFIQUE. M)PROCURE, BASEADO NESTE ESTUDO E UTILIZANDO SUAS PALAVRAS , DAR UMA DEFINIÇÃO DE LOGARITMO DE UM NÚMERO NA BASE 10. NÃO ESQUEÇA DE INCLUIR NA SUA DEFINIÇÃO, AS CONDIÇÕES DE EXISTÊNCIA DO LOGARITMO DE BASE 10.

Quadro 4.12 – Apresentação da ficha 2 na íntegra

4.6.3.1. Descrição

Nesse segundo encontro, partimos do fato de que os conhecimentos que essas alunas tinham não eram suficientes para resolver o item **m** da questão 2 da ficha 1. Nesse caso, intervimos no processo para introduzir o conceito de logaritmo através da necessidade de resolução da equação obtida naquela questão: $0{,}9^t = 0{,}5$. Em seguida, as alunas deveriam preencher a tabela de logaritmos de base 10, bem como a resolução das questões associadas à mesma. Novamente, distribuímos uma ficha para cada aluna. A duração desse encontro foi de aproximadamente 60 minutos.

4.6.3.2. Análise da aplicação da ficha 2 (estudo "piloto")

Inicialmente, retomamos o item **m** da última questão da ficha 1, lembrando que a equação obtida não poderia ser resolvida com os conhecimentos disponíveis das duas alunas.

Em seguida, procuramos mostrar que existe um caminho, como foi descrito anteriormente, o qual consistia em escrever os dois membros da equação sob a forma de potência de base 10. Os expoentes do 10 eram denominados logaritmos dos números em questão na base 10 e eram obtidos através da calculadora científica. Realizando essa transformação, as alunas resolveram a equação exponencial obtida, determinando o tempo (aproximado) necessário para que o valor do carro fosse de 5000 reais.

Ainda, mostramos como utilizar a calculadora científica para fazer essa transformação, dizendo que os expoentes encontrados eram denominados logaritmos (do número em questão) na base 10. Nesse caso, foi demonstrado como utilizar a calculadora para o cálculo de logaritmos e de potências de expoentes não inteiros.

A partir desse encontro, notamos uma aceitação maior do uso da calculadora como um meio de encontrar resultados de problemas, os quais não seriam obtidos sem o uso desse instrumento.

Apenas as alunas Tatiana e Ana Luiza participaram da resolução dessa ficha. Notamos que, com a ausência de Denise, a aluna Ana Luiza se sobressaiu, colocando suas opiniões, fato que não ocorreu no primeiro encontro.

Chegando à tabela, notamos que as duas alunas:

-não sabiam como representar o número 1 na forma de potência de base 10, o que nos leva a crer que existem dificuldades em compreender o significado de potência ou que a formulação da questão não estava clara;

-conseguiram concluir a não existência do logaritmo de 0 e de número negativo, através da calculadora;

-conseguiram explicar o motivo da não existência através do estabelecimento da relação com a exponencial;

-não tiveram dificuldades em dizer que o logaritmo é um expoente, no caso "o expoente do 10 para se obter o número que se pede";

-conseguiram estimar corretamente em que intervalo estaria o logaritmo de um número, bem como perceber que, nessa base, aumentando o número, aumenta o valor do logaritmo. Além disso, chegaram à conclusão da situação em que o logaritmo de um número na base 10 forneceu resultado negativo;

- A aluna Tatiana procurou fornecer as respostas através de uma escrita formal, porém este fato a levou a cometer muitos erros. É uma aluna que apresentou grande rapidez de raciocínio, mas que não demonstrou a maturidade de representar matematicamente o que conseguia expressar na linguagem natural. Esta afirmação foi verificada, por exemplo, na resolução do item **c**, que questionava sobre os logaritmos entre 10 e 100. A sua resposta verbal foi dada rapidamente, citando que os logaritmos estariam entre 1 e 2, porém, ao escrever essa resposta, a notação fornecida foi 1>x<2. Ela questionou a denominação dada para o número de quem se quer obter o logaritmo (logaritmando), pois queria colocá-la na sua definição.

4.6.3.3. Conclusões:

Pudemos, através da aplicação desta ficha, verificar que:

- Há necessidade de uma mudança de linguagem na última parte, quando foi solicitada a definição de logaritmo. Através da linguagem apresentada, as alunas mostraram dificuldade em entender o que estava sendo pedido;

- Na nossa opinião, o objetivo dessa ficha foi atingido, visto que as alunas conseguiram, sozinhas, obter as conclusões relativas ao cálculo de logaritmo na base 10, o que representa o logaritmo na base 10 e as condições para a existência desse tipo de logaritmo.

4.6.3.4. Proposta para o estudo principal (ficha 2)

Novamente, diante do desempenho apresentado por essas alunas no desenvolvimento dessa ficha e das contribuições dos estudos de Confrey, efetuamos algumas alterações. Mantivemos a resolução da equação $0,9^t = 0,5$ e a exploração da história do conceito. Na tabela, incluímos mais uma coluna denominada “etapa”, que representava o logaritmo calculado. No item “a” da série de questões, pretendíamos verificar se o aluno estabeleceria esta relação. A inclusão da coluna “etapa” visava estabelecer a análise co-variacional entre os dois mundos (logaritmo e exponencial). Alteramos a frase “potência de base 10” para “representar o número como potência de base 10”, pois acreditamos que a formulação da questão gerava dúvidas. Incluímos ainda casos em que são dadas as etapas (na tabela equivalem às linhas que contém como etapas os valores 3,0792; 4 e 4,30103) para o aluno determinar o número, com a finalidade de observar se o mesmo estabeleceria a relação inversa. A última linha (caso em que o número vale 10000) foi incluída para ampliar a visão de crescimento exponencial, tratado posteriormente no item **h** da série de questões. Os casos de não existência bem como os de resultado negativo foram retirados da tabela e tratados nas questões que a seguiam, alteração justificada após o acréscimo da coluna “etapa”. Vale salientar que, em relação ao desenho inicial, só ocorreu acréscimo de informações bem como um novo tratamento do conteúdo. Não houve nenhuma mudança na essência da sequência inicialmente elaborada. A tabela da ficha 2 do estudo principal está apresentada a seguir:

Etapa	Número	Representar o número como potência de base **10**	**Apresentar o cálculo do logaritmo**	**Representar na notação de logaritmo**
0	1			
	6			
	8,2			
1	10			
	29			
2	100			
	850			
3	1000			
3,0792				
4				
4,30103				
	100000			

Quadro 4.13. Ficha 2 - tabela do estudo principal

Apresentaremos abaixo a relação das questões da ficha 2 do estudo principal:

a)O que representam os valores da primeira coluna?

b)O que você notou em relação aos resultados obtidos pelo cálculo dos logaritmos de 1 a 10?

c)E dos logaritmos de 10 a 100?

d)O que aconteceria com os logaritmos entre 10000000 e 100000000?

e)Entre que inteiros consecutivos está o logaritmo de 238?

f)Entre que inteiros consecutivos está o logaritmo de 3495?

g)Entre que inteiros consecutivos está o logaritmo de 12375?

h) marque as linhas onde onde os números dados (da 2ª coluna) são 1,10,100,1000,10000 e 100000. Estes números aumentam multiplicando-se por dez. O que ocorre com os seus logaritmos?

i)Tente representar o número 0,2 como potência de base 10. Em seguida, tente representar o número 0,84 na base 10. Existem logaritmos de números entre 0 e 1 nesta base? O que ocorre com eles?

j)Tente representar o número 0 como potência de base 10. O que acontece? Existe o logaritmo de 0 na base 10? Tente justificar a sua resposta.

l)Tente representar o número -10 como potência de base 10. Em seguida, represente o número -250 na base 10. O que acontece? Existem os logaritmos de números negativos nesta base? Justifique.

m) procure, baseado nesse estudo, escrever com suas palavras o que é logaritmo de um número na base 10. Não esqueça de incluir as condições de existência do logaritmo de base 10.

Quadro 4.14. Ficha 2 – questões do estudo principal

4.8.4. Ficha 3

A terceira ficha procurou mostrar a existência de outras bases de logaritmo. Nesse caso, incluiu a tabela e as questões relativas ao logaritmo de base 2.

No.	Potência de base 2	Notação do log	
1			
2			
3			
4			
6			
8			
12,7			
16			
0			
0,5			
0,25			
-2			
-5			

A) Quais as dificuldades que você encontrou? B) Tente agora achar o logaritmo de 3 na base 2, transformando cada termo da equação exponencial $2^x = 3$ em potências de base 10. C) Na base 2, quando o logaritmo dará um resultado entre 1 e 2? D) O que ocorre com os logaritmos de números entre 4 e 8 nessa base?	E) Se o cálculo do logaritmo de um número resultou em um valor entre 5 e 6, o que podemos dizer sobre este número? F) Entre que inteiros está o logaritmo de 50 na base 2? G) Tente agora, comparando as duas tabelas (de base 10 e de base 2), levantar o que há em comum entre elas.

Quadro 4.15 – Apresentação da ficha 3 na íntegra

4.6.4.1. Descrição

O procedimento desse terceiro encontro foi o mesmo que o desenvolvido nos encontros anteriores. Foi distribuída uma ficha para cada aluna, com duração de aproximadamente 50 minutos. Essa ficha era composta por uma tabela que explorava logaritmos de base 2 e por uma série de questões relacionadas a essa tabela. Participaram desse encontro as alunas Tatiana e Ana Luiza.

4.6.4.2. Análise da aplicação da ficha 3 (estudo piloto)

Durante o preenchimento da tabela de logaritmos de base 2, novamente as duas alunas apresentaram dificuldades em compreender o que estava sendo pedido na coluna "Potência de base 2". Apesar de já terem estudado potência, a terminologia não teve significado para as alunas, sendo que só entenderam o que estava sendo solicitado quando reformulamos a questão, dizendo que elas deveriam escrever o número como "2 elevado a algo".

A tabela não foi preenchida na ordem dada. As alunas resolveram em primeiro lugar todas as potências diretas de 2 .

A dificuldade maior ocorreu na questão em que se solicitava a representação do número 0,5 sob a forma de potência de base 2. As alunas tentaram representar 0,5 em notação científica (provavelmente por estarem utilizando atualmente esta notação em Física) e viram que este caminho não facilitava a resolução. Pedimos para que representassem 0,5 sob a forma de uma outra notação, mas elas não tinham idéia de que outra forma poderiam representar este número. Foi quando propusemos para que representassem sob a forma de fração que conseguiram resolver o exercício.

Após a resolução das potências diretas, sobraram três casos não diretos na tabela: 3; 6 e 12,7.

Quando pedimos para que representassem o número 3 sob a forma de potência de base 2, elas verificaram que não seria possível obter tal representação diretamente.

Foi questionado então, como poderiam resolver este problema. No mesmo momento, Tatiana falou se poderia utilizar o mesmo método que usou na ficha 2, ou seja, transformar os dois números em potências de base 10. Ao ser questionada como faria isso, ela respondeu que bastaria achar os logaritmos através da calculadora.

Nessa fase, notamos que Ana Luiza apresentou a necessidade de detalhar mais o processo de resolução, enquanto que Tatiana chegou ao mesmo resultado de forma mais rápida, "pulando" passagens. Ao ser questionada sobre estas passagens, ela conseguiu explicar o que estava embutido na sua forma de resolução.

Resolução de Tatiana

$$2^x = 3$$

$$10^{0,30102x} = 10^{0,47712}$$

$$x=1,58501$$

Resolução de Ana Luiza

$$2^x = 3 \text{ e } 2 = 10^y$$

$$\log_{10} 2 = y \quad e \quad \log 3 = w$$

$$y=0,30102 \qquad w=0,47712$$

$$10^{0,30102x} = 10^{0,47712}$$

$$x=1,58501$$

As alunas conseguiram, de forma bastante satisfatória, levantar as semelhanças existentes entre os logaritmos de base 2 e de base 10.

Após o término da ficha, foi institucionalizada a relação entre o processo que utilizavam para resolver esse tipo de equação e a técnica de mudança de base, com a finalidade de obter uma sistematização do processo.

4.6.4.3. Conclusões:

Notamos que a formulação da questão "d" ("Se o cálculo do logaritmo de um número resultou em um valor entre 5 e 6, o que podemos dizer sobre este número?"), causou confusão entre logaritmo e logaritmando.

O objetivo dessa ficha também foi atingido. Vale ressaltar que as duas alunas seguiram caminhos distintos na resolução dos exercícios, porém chegaram corretamente aos resultados, sendo que Ana Luiza necessitou detalhar mais para compreender o que estava fazendo

4.6.4.4. Proposta para o estudo principal (Ficha 3)

Para o estudo principal, fizemos novamente o mesmo tipo de alteração realizado na ficha 2: incluímos a coluna denominada “etapa” (que representa o logaritmo do número dado) e retiramos os casos de não existência e de resultado negativo, os quais foram tratados em seguida na forma de questões. Também incluímos uma questão que pedia o significado da coluna etapa (item **b**), outra que

que procurou explorar o tipo de crescimento do logaritmo (item **l**) e uma situação problema (item **n**). Na tabela, na última linha pretendíamos que o aluno novamente realizasse o pensamento inverso, para determinar o número partindo do seu logaritmo. Por fim, alteramos a linguagem do item **e** para uma melhor compreensão. A seguir, apresentaremos a tabela e as questões da ficha 3 desenvolvida no estudo principal.

ETAPA	NÚMERO	REPRESENTAR O NÚMERO COMO POTÊNCIA DE BASE 2	APRESENTAR A NOTAÇÃO DO LOGARITMO	APRESENTAR O CÁLCULO DO LOGARITMO
0	1			
1	2			
	3			
2	4			
	6			
3	8			
	12,7			
4				

Quadro 4.16. Ficha 3 - tabela do estudo principal

As questões desenvolvidas na ficha 3 foram:

A)QUAIS AS DIFICULDADES QUE VOCÊ ENCONTROU?
B)O QUE REPRESENTAM OS VALORES DA PRIMEIRA COLUNA?
C)TENTE ACHAR O LOGARITMO DE 3 NA BASE 2, TRANSFORMANDO CADA TERMO DA EQUAÇÃO EXPONENCIAL $2^X = 3$ EM POTÊNCIAS DE BASE 10.
D)NA BASE 2, QUANDO O LOGARITMO DARÁ UM RESULTADO ENTRE 1 E 2?
E)O QUE OCORRE COM OS LOGARITMOS ENTRE 4 E 8?
F)EM QUE INTERVALO ESTARIA UM NÚMERO CUJO LOGARITMO RESULTOU EM UM VALOR ENTRE 5 E 6?
G)ENTRE QUE INTEIROS CONSECUTIVOS ESTÁ O LOGARITMO DE 50 NA BASE 2?
H)TENTE REPRESENTAR O NÚMERO 0 COMO POTÊNCIA DE BASE 2. EXISTE O LOGARITMO DE 0 NA BASE 2? JUSTIFIQUE
I)TENTE REPRESENTAR O NÚMERO –2 COMO POTÊNCIA DE BASE 2. EXISTE O LOGARITMO DE –4 NA BASE 2? TENTE REPRESENTAR O NÚMERO –5 COMO POTÊNCIA DE BASE 2. EXISTE O LOGARITMO DE –5 NA BASE 2? JUSTIFIQUE
J)EXISTE O LOGARITMO DE NÚMERO NEGATIVO NA BASE 2? JUSTIFIQUE
K)CALCULE O LOGARITMO DE 0,5 NA BASE 2. EM SEGUIDA, CALCULE O LOGARITMO DE 0,25 NA BASE 2. O QUE ACONTECEU COM OS RESULTADOS? AGORA, REPRESENTE ESTES NÚMEROS NA FORMA DE POTÊNCIA DE BASE2. QUANDO O RESULTADO DO CÁLCULO DO LOGARITMO DE UM NÚMERO NA BASE 2 DARÁ NEGATIVO?
L)MARQUE AS LINHAS ONDE OS NÚMEROS DADOS (DA 2ª COLUNA) SÃO 1,2,4,8 E 16. ESTES NÚMEROS AUMENTAM MULTIPLICANDO-SE POR 2. O QUE OCORRE COM OS SEUS LOGARITMOS?
M)TENTE, AGORA, COMPARANDO OS DOIS ESTUDOS (LOGARITMOS DE BASE 10 E DE BASE 2), LEVANTAR O QUE HÁ DE COMUM ENTRE ELES.
N)RESOLVA O SEGUINTE PROBLEMA: UMA POPULAÇÃO DE BACTÉRIAS DOBRA A CADA MINUTO. SE INICIALMENTE HAVIA 300 BACTÉRIAS, APÓS QUANTOS MINUTOS ESTA POPULAÇÃO SERÁ CONSTITUÍDA DE 2516582400 INDIVÍDUOS?

Quadro 4.17. Ficha 3 – questões do estudo principal

Como essa última questão não estava presente no estudo preliminar, faremos um breve comentário sobre a mesma. A inclusão desse novo item teve por objetivo retomar a aplicação do logaritmo dentro de uma situação contextualizada. Para a sua resolução, o aluno deveria interpretar o problema, determinar a função matemática que representava a situação, manusear uma função exponencial e aplicar o logaritmo para a sua resolução.

Resolução:

Número inicial de bactérias: 300

Número de bactérias após 1 minuto: 600 (=300 $\bullet$ 2)

Número de bactérias após 2 minutos:1200 (=300 $\bullet$ 2^2)

Número de bactérias após 3 minutos: 2400 (=300 $\bullet 2^3$)

Neste caso, a função que representa o número de bactérias após "t" minutos é $F(t) = 300 \bullet 2^t$

Para determinar o tempo necessário para que a população tenha 2516582400 indivíduos, faremos: $2516582400 = 300 \bullet 2^t \Rightarrow$

$2^t = 8388608 \Rightarrow t = \log 8388608/\log 2 = 23$

Resposta: O número de bactérias será igual a 2516582400 após 23 minutos.

4.6.5. Ficha 4

A ficha 4 envolveu o estudo de logaritmos de base b/ 0<b<1 (no caso a base ½), e a análise das condições de existência da base. Ainda, na ficha 4, foi solicitada a conceituação de logaritmo e a interpretação da definição formal.

No.	Potência de base 1/2	Notação do log	Cálculo do log
1			
2			
3			
4			
8			
0,5			
0,63			
0			
-2			
-5			

a)Nesta base, quando o logaritmo de um número resulta num valor positivo? b)Estime o valor do logaritmo de 28 nesta base c) Procure fazer um levantamento das semelhanças e diferenças encontradas entre esta última tabela (logaritmos de base 1/2) e das outras duas já estudadas (logaritmos de base 10 e de base 2).	d)Analise os casos abaixo: d1) $\log_1 8$ d2) $\log_{-2} (3)$ d3) $\log_0 5$ e)Que tipo de valores você acha que a base de um logaritmo pode assumir, garantindo assim a existência do mesmo? f)Tente agora, com suas palavras, definir logaritmo de um número em qualquer base, considerando as condições de existência. g) Interprete a seguinte definição: Se $a>0$, $b>0$ e $b\neq1$, $\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$

Quadro 4.18 – Apresentação da ficha 4 na íntegra

4.6.5.1. Descrição

Esse último encontro se deu novamente com as duas alunas (Tatiana e Denise), com o mesmo procedimento adotado nos encontros anteriores. A ficha 4 era composta de uma tabela que explorava os logaritmos de base ½, além de questões sobre a existência da base e a interpretação da definição matemática.

As alunas estavam bem à vontade para apresentar e discutir as dúvidas, sendo que a examinadora assumiu novamente uma postura de ouvinte. A duração deste último encontro foi de 60 minutos.

4.6.5.2. Análise da aplicação da ficha 4 (estudo piloto).

Não houve dificuldades para resolver essa ficha, visto que as técnicas de cálculo e os procedimentos envolvidos já tinham sido trabalhados na ficha 3. A tabela foi preenchida na ordem dada e as conclusões e comparações obtidas foram satisfatórias. Abaixo, vamos colocar as conclusões que as alunas apresentaram quando foram solicitadas a explicar o que é logaritmo:

> **ANA LUIZA*: " Quando temos uma equação exponencial que não dá para igualar as bases usamos log. O log é o expoente da base quando se quer chegar (igualar) ao logaritmando. O log existe quando o logaritmando for maior que zero e a base maior que zero e diferente de 1."***
>
> **TATIANA*: "Quando chegamos à uma equação exponencial impossível de igualar as bases nós usamos o log , que é o log da base que queremos igualar ao logaritmando. Log existe quando o logaritmando é >0 e a base>0 e diferente de 1."***

Notamos, nessas duas definições, que em primeiro lugar a preocupação foi mostrar a utilidade do log. Em seguida, o que representa o log, para finalmente apresentar as condições de existência, exatamente na ordem trabalhada pela seqüência. Apesar de alguns problemas de linguagem, podemos considerar que o objetivo foi atingido.

Em seguida, no item "g", foi apresentada a definição matemática formal:

"Se $a>0$, $b>0$ e $b\neq1$, $\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$"

Pedimos para que as alunas tentassem interpretá-la. As respostas obtidas foram:

> **ANA LUIZA*: "Sendo <u>a</u> o logaritmando e <u>b</u> base (ambos maiores que zero), log da base b elevado a x dará o logaritmando a. Obs: b tem que ser diferente de 1. O expoente é x."***
>
> **TATIANA: *"Se o logaritmando é maior que 0 e a base maior que 0 e diferente de 1, o log de a na base b é igual a b elevado ao log (que é o x) que é igual ao logaritmando."***

4.6.5.3. Conclusões

Inicialmente, as alunas preencheram a tabela dessa ficha com rapidez e segurança, visto que não havia a exigência de procedimentos muito diferentes dos utilizados nas fichas anteriores. Porém, notamos que a definição matemática representou um fator complicador no estudo, visto que mesmo após a realização das fichas e da conceitualização do logaritmo, a interpretação da definição formal não foi satisfatória.

4.6.5.4. Proposta para o estudo principal (Ficha 4)

Para o estudo principal, seguimos novamente o procedimento realizado nas duas fichas anteriores, ou seja, incluímos a coluna "etapa", juntamente com mais dois casos de logaritmos de números decimais. Retiramos da tabela os casos de não existência bem como os de resultado negativo, os quais foram tratados na forma de perguntas. Apresentaremos, a seguir, a nova tabela e o conjunto de questões desenvolvidas na ficha 4.

Etapa	número	Representar o número na forma de potência de base 1/2	Apresentar a notação do logaritmo	Apresentar o cálculo do log
0	1			
	0,63			
1	0,5			
	0,3			
2	0,25			

Quadro 4.19. Ficha 4 - Apresentação da tabela do estudo principal

Questões:

a)Tente representar o número 0 como potência de base ½. Existe o logaritmo de 0 na base ½? Justifique.

b)Tente representar os seguintes números como potências de base ½:

b_1)2 b_2)4 b_3)8 b_3) 3

c)nesta base, quando o resultado do logaritmo dará um número positivo? E negativo?

d)tente representar o número –2 como potência de base ½. O que aconteceu? Tente representar o número –5 como potência de base 2. O que ocorreu? Justifique

e)existe logaritmo de número negativo na base ½?

f)estime o valor do logaritmo de 28 nesta base.

g)Procure fazer um levantamento das semelhanças e diferenças encontradas entre esta última parte (logaritmos de base ½) e das outras duas já estudadas (logaritmos de base 2 e 10)

h)Analise os casos abaixo:

h_1)$\log_1 8$ h_2)$\log_{-2} 3$ h_3)$\log_0 5$

i)que tipo de valores você acha que a base de um logaritmo pode assumir para que o logaritmo exista?

j)Escreva, com suas palavras, o que é logaritmo de um número em qualquer base, considerando as condições para ele existir.

l)Interprete a definição matemática: se $a > 0$, $b > 0$ e $b \neq 0$, $\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$

Quadro 4.20. Ficha 4 – Questões do estudo principal

4.6.6. Conclusão final da aplicação “piloto”

De um modo geral, pudemos constatar que, para essas alunas, existem problemas quanto ao ensino de função exponencial e potência, o que já foi justificado na descrição da aplicação das fichas 1 e 2. Esse fato interferiu na aprendizagem do conceito de logaritmo através da abordagem adotada por esta seqüência, de modo que tivemos que retomar alguns conceitos.

O desempenho das alunas nos quatro encontros foi satisfatório. Mostraram interesse durante todo o processo, comentando que sentiam a necessidade de que a abordagem de qualquer conteúdo matemático envolvesse questões de aplicação prática.

Com os resultados obtidos, acreditamos que a proposta cumpriu o papel de oferecer condições a essas alunas de conceituar logaritmo, estabelecer as condições de existência e as comparações de logaritmos de bases diferentes, além de mostrar a utilidade atual desse tópico. Com a finalidade de garantir a construção do tipo de crescimento do logaritmo e da exponencial, a exploração da propriedade básica dos logaritmos e o estabelecimento co-variacional da relação entre estes dois “mundos”, resolvemos efetuar algumas alterações já justificadas durante o capítulo.

Retomando o estudo piloto, concluímos que um dos objetivos específicos não foi totalmente alcançado devido aos problemas de escrita e interpretação da definição formal. Quando solicitamos, no decorrer da seqüência, a definição de logaritmo, as duas alunas responderam facilmente que era “o expoente da base para dar o logaritmando”. Através da simbologia matemática apresentada, notamos que apresentaram corretamente a interpretação das condições de existência, porém acabaram "emendando" a frase dizendo que log é igual a **b** elevado a **x**, e não o próprio **x**. Na definição de Tatiana, ela colocou que o log de **a** na base **b** é igual a **b** elevado ao **log** (que é o **x**), o que nos mostra que ela concluiu que o **log** é o **x**, mas não conseguiu expressar corretamente na linguagem escrita. Essa situação nos leva a crer que a apresentação da definição matemática formal não teve significado para essas alunas, mesmo após a aplicação da seqüência. Isso talvez decorra do fato de que há pouca exploração da simbologia matemática no ensino atual.

Por fim, foi aplicado um teste (presente no anexo II), para avaliar se as alunas conseguiriam resolver uma equação exponencial cuja resolução necessitava da aplicação do log, um logaritmo que exigia a mudança de base e um problema prático. O acerto foi total e pudemos notar que essas alunas adquiriram o hábito de verificar a pertinência das respostas obtidas, ou seja, se a resposta era coerente ou não à estimativa por elas realizada.

ANÁLISE DOS RESULTADOS

5.1. INTRODUÇÃO

Este capítulo é composto por três partes. A primeira traz comentários gerais sobre a aplicação de nossa seqüência com o grupo experimental. Na segunda parte, procederemos com a análise quantitativa do desempenho apresentado pelos grupos nos pré e pós-testes. Essa análise será realizada segundo cinco pontos de vista:

- o percentual geral de acertos de cada grupo nos dois testes;
- o índice de crescimento dos dois grupos;
- o desempenho por item;
- o desempenho por objetivo;
- o desempenho por indivíduo, envolvendo o seu resultado em cada teste e a sua evolução do pré para o pós-teste.

Finalmente, a última parte será reservada para a análise da qualidade dos erros e procedimentos desenvolvidos pelos componentes desses grupos.

5.2. COMENTÁRIOS GERAIS SOBRE A APLICAÇÃO DA SEQUÊNCIA

Nesta seção apresentaremos e discutiremos o comportamento dos alunos frente às atividades e resolução de problemas propostos ao longo da nossa sequência didática. Para uma melhor organização da apresentação e, principalmente para ser fiel à cronologia da sequência, faremos nossos comentários e discussões de acordo com a ordem utilizada nas fichas .[1]

5.2.1. Ficha 1

•Situação-problema 1) Número de pessoas infectadas x tempo

Das oito duplas, apenas duas tiveram dúvidas no preenchimento da tabela relativa a este problema. A dificuldade apresentada por ambas consistia num problema de interpretação do exercício. Consideraram que “dobrar” significava “gerar mais dois”. Quando questionadas, ofereceram a seguinte resolução:

HOJE: 1 INFECTADO
APÓS UM ANO: 3 INFECTADOS
APÓS DOIS ANOS: 10 INFECTADOS

Pedimos para que especificassem o pensamento utilizado para obter tais resultados. Responderam que após um ano teriam o dobro do que tinha mais um infectado (2 • 1 + 1), seguindo a mesma idéia para achar o número de infectados após dois anos (2 • 3 + 1 + 3). Foi solicitado para que lessem novamente o problema. Observaram que o mesmo dizia que ao final de cada ano havia o dobro do número de infectados do período anterior. Com isso, conseguiram interpretar corretamente e preencher a tabela.

[1] As fichas tal qual foram utilizadas na sequência, encontram-se disponíveis no anexo V.

Todas as duplas conseguiram estabelecer a relação “somar na primeira coluna equivale a multiplicar na segunda coluna”, a qual se deu após várias tentativas. Das oito duplas, sete iniciaram a resolução do problema estabelecendo a relação de “dobro”, talvez influenciadas pelo seu enunciado. Vale salientar que cada dupla escolheu os seus números, sem nenhum tipo de controle. Uma das duplas, devido a sua escolha, iniciou pela tentativa de que todos eram pares. Pedimos para que tomassem outros números, e logo viram que aquele caminho era inconsistente. Quatro grupos seguiram dizendo que então a relação deveria ser a de “elevar ao quadrado”. Pedimos para que verificassem o que estavam dizendo e perceberam que também não dava certo. As outras duplas não se manifestaram. Como a dificuldade de estabelecer a relação foi geral, solicitamos que tomassem outro exemplo antes de descobrirem a propriedade. Após esta nova tentativa, conseguiram obter a relação pedida.

Notamos que havia uma ânsia de responder rapidamente as questões, sem a preocupação de parar e pensar realmente sobre o que estava sendo solicitado e de buscar um caminho que fizesse sentido. Além disso, após uma leitura rápida, a colocação mais comum era dizer que não entenderam o que estava sendo pedido, numa clara tentativa de fazer com que a pesquisadora oferecesse a resposta. Nesses momentos solicitávamos que lessem novamente e só então conseguiam compreender e tentavam resolver. O fato dos alunos responderem rapidamente, sem o comprometimento de estarem realmente utilizando um pensamento analítico-reflexivo para a resolução da situação-problema parece representar ainda uma postura comum adotada de um modo geral pela escola. Esta atitude passiva, que atribui ao professor a responsabilidade de oferecer todas as respostas, provavelmente ainda está arraigada na visão do aluno. Cabe a nós, educadores, assumirmos uma postura de orientadores do processo, procurando reverter este tipo de comportamento apresentado pelos alunos.

Notamos que todas as duplas apresentaram uma concepção frágil de potência. Exemplificando, uma das duplas perguntou se " potência de base 2 significava elevar ao quadrado". Como observamos que aspectos relacionados com este conceito representavam uma dúvida geral, fizemos uma interferência no processo para explicar o que representava uma potência. Neste caso, exploramos os exemplos 4^3 e 6^2 , destacando quem era a base e o expoente de cada caso e como deveríamos resolvê-los.

Para obter a função do primeiro exercício, todas as duplas apresentaram dificuldade. Partiram da linear $f(n) = 2 \bullet n$, fato que também aconteceu no piloto. Novamente verbalizaram várias tentativas sem contudo se deterem no problema proposto. Pedimos para que voltassem à tabela e que analisassem se existia alguma relação entre a primeira coluna e a coluna criada (de potências de 2). Perceberam que o expoente do dois coincidia com os valores da primeira coluna e com isso construíram a função.

Mesmo obtendo a função, quatro duplas não a utilizaram para calcular o número de infectados após 14 anos, alegando ser mais fácil obter o resultado através da construção passo a passo da tabela. Perguntamos como fariam se o exercício solicitasse o número de infectados após "100 anos". Responderam que aí utilizariam a função, mas apenas uma dupla sabia calcular uma potência na calculadora. Neste momento, interferimos novamente explicando como utilizar a máquina para este fim. Ao contrário do que ocorreu no estudo preliminar (“piloto”), houve uma boa aceitação da calculadora, isso graças ao fato desses alunos já a utilizarem regularmente nas aulas de Física.

- Situação-problema 2) Quantia aplicada x tempo de aplicação

Não houve problemas no início da resolução dessa segunda situação-problema. Todos conseguiram preencher a tabela, analisar e comparar os tipos de crescimento dos elementos das duas colunas e verificar a propriedade (“a soma de dois elementos da primeira coluna equivale ao produto dos correspondentes da segunda coluna”).

Apesar de construírem a função na forma algébrica ($f(x) = 3^x$), nenhuma dupla resolveu o item “e” (quantia após ½ ano) utilizando-se dessa função. Duas duplas não se manifestaram e as outras seis partiram da idéia de que se ½ está entre 0 e 1 (na metade) então $3^{1/2}$ deveria estar entre 1 e 3, logo valia 2. Pedimos a todos (de forma coletiva) para que consultassem a tabela e analisassem se esta idéia era válida para o 3^3. Verificaram que 3 está entre 0 e 6, mas que $3^3 = 27$ não representava o valor médio entre $3^0=1$ e $3^6 = 729$). Quando questionados, colocaram que não dava certo porque o crescimento não era sempre o mesmo, ou seja, a diferença entre os elementos da segunda coluna não era constante.

Podemos ressaltar que houve uma evolução em relação à resolução da situação-problema do pré-teste. Enquanto no teste os alunos desprezavam a função na forma algébrica, utilizando caminhos de resolução baseados em dados numéricos, na aplicação da sequência já ocorreu a construção algébrica da função, porém não a sua apropriação na resolução da questão proposta. Tanto no pré-teste como na aplicação, notamos que a busca da resolução do problema utilizando-se de uma relação linear foi um aspecto presente, porém no desenvolvimento da sequência, já houve uma evolução, visto que o grupo observou e justificou que este tipo de relação não era adequado.

No preenchimento da tabela apresentada abaixo, que tinha a finalidade de favorecer a construção da validade da propriedade "somar na primeira coluna equivale a multiplicar na segunda" para números não inteiros, pedimos para que deixassem a representação na forma de potência de expoente fracionário.

Após 1/2 ano	
Após 5/2 anos	
Após 3 anos	

Nesse caso, todos obtiveram que 1/2 + 5/2 = 3 e que $3^{1/2} \bullet 3^{5/2} = 3^3$ e concluíram que a relação era válida também para este caso. Uma dupla utilizou a calculadora e obteve como resultado final 27,000000001 (não exatamente 27), visto que a mesma trabalhava com um limite de dez dígitos. Indagaram porque não dava certo e nesse momento pudemos retomar a questão da aproximação e do arredondamento.

•Situação-problema 3) Valor do automóvel x tempo

Em relação a essa terceira situação-problema, construímos juntos a função que representava o valor do automóvel após “t” anos. Os alunos conseguiram efetuar todos os cálculos numéricos sem dificuldade, bem como a construção da tabela. No item que solicitava a construção do gráfico, seis duplas localizaram incorretamente o ponto (0,10000), colocando-o no lugar de (0,0) ou de (1,10000), o que denotou dificuldade de trabalhar com o eixo cartesiano. Chamamos a atenção para essa questão, pois os sujeitos da pesquisa trabalham com a representação gráfica de função há mais de um ano (desde a última série do ensino fundamental) e no entanto ainda apresentam dificuldade em determinar um ponto no plano. Como esse comportamento ocorreu com a maioria das duplas, mais uma vez nos questionamos sobre a ênfase dada na escola para a memorização em detrimento da experienciação e construção do conhecimento.

Outro fato interessante é que, apesar de termos efetuado mudanças nos valores numéricos para não levá-los à falsa impressão de que o gráfico seria uma reta (para os pontos iniciais), os alunos queriam utilizar a régua para unir os pontos, alegando que a representação não sairia “perfeita” a mão livre. Aqui nos perguntamos se tal comportamento ocorreu porque esses alunos faziam associação direta entre função e linearidade ou se apenas queriam fazer os traços “mais bonitos”.

No item que questionava a existência de um tempo “t’ que faria com que o valor do carro assumisse 5000 reais, duas duplas responderam que este tempo não existia pois o valor 5000 não estava “marcado” no gráfico, já que não foi solicitado nos cálculos numéricos. Ao realizarmos o estudo histórico dos logaritmos, levantamos um possível obstáculo epistemológico relacionado à resistência de “sair” do domínio discreto. Notamos que a dificuldade em aceitar a continuidade no gráfico também esteve presente na aplicação desta sequência nesse momento. As duplas que assumiram a existência desse tempo, inicialmente não tinham idéia de como obtê-lo. Sugerimos que prosseguissem para a próxima questão (item “n”) que solicitava o uso da função dada na forma algébrica para obter esse resultado. Através dessa função, todos conseguiram obter a equação $0{,}9^t = 0{,}5$, justificando que não daria para trazer para a mesma base.

5.2.2. Ficha 2

- Resolução da equação $0{,}9^{t} = 0{,}5$ e tabela de logaritmos decimais

Resolvemos inicialmente a equação $0{,}9^t = 0{,}5$ usando logaritmos e fizemos a relação do valor encontrado e o intervalo por eles determinado no gráfico. Neste momento, aproveitamos para desenvolver os aspectos históricos inerentes a este conteúdo. Exploramos o contexto da época, a criação dos logaritmos por Napier e as tabelas de Henry Briggs. Ainda, apresentamos a utilidade dos logaritmos na época, exemplificada pela resolução do cálculo de $0{,}71^5 \cdot 0{,}34$, através de seu uso. Comentamos que atualmente não há necessidade de usar os logaritmos para esse fim, mas que podemos utilizá-los na resolução de equações exponenciais “não diretas”.

Em seguida, os alunos preencheram a tabela sem dificuldades e perceberam que a coluna “etapa” representava o logaritmo. A tabela foi preenchida na ordem dada e todos conseguiram estabelecer a relação inversa quando era dada a etapa e se pedia para determinar o número. Conseguiram estimar, perceber o crescimento e verificar que os números entre 0 e 1 têm logaritmo decimal negativo.

No caso do logaritmo de 0, obtiveram a mensagem de erro na calculadora e assim concluíram a não existência do logaritmo de zero. Nenhuma dupla conseguiu justificar esta ocorrência estabelecendo a relação com a função exponencial, fato que nos surpreendeu, visto que os alunos já tinham estudado este conteúdo, o que vem a reafirmar a nossa conjectura sobre ser o método de memorização o mais estimulado e adotado pela escola.

Retomamos o estudo da exponencial, lembrando que o conjunto imagem era formado por números reais estritamente positivos. Para isso, tomamos como exemplo $f(x) = 2^x$ e os alunos observaram, atribuindo valores, que para qualquer valor de “x”, as respostas obtidas eram estritamente positivas. Assim, todos conseguiram justificar a não existência do logaritmo decimal de número negativo, escrevendo respostas tais como “o número 10 elevado a qualquer expoente dá um resultado estritamente positivo” (Dupla: Daniela e Bruno). Uma dupla estava utilizando a calculadora HP, que aceita a existência de logaritmo de número negativo e, com isso, ela questionou esta existência. Pudemos notar nesta fase, o estabelecimento de um obstáculo, tendo em vista que estes logaritmos existem e envolvem a noção de números complexos, conteúdo não dominado nesta fase de ensino. Logo, como já foi mencionado, a abordagem adotada por nossa sequência e mesmo pelos livros didáticos inevitavelmente representarão um obstáculo didático para aqueles que fizerem um curso superior na área de exatas.

Novamente nessa ficha sentimos o problema da fragilidade na concepção de potência. Ao serem questionados sobre o que representava o logaritmo, todos forneciam verbalmente a resposta de que era um expoente. Porém, quatro duplas forneciam como resposta escrita a base elevada ao expoente. Exemplificando, o logaritmo de 100 na base 10 era representado como 10^2 por estas duplas. Voltamos então a discutir o que representava base e expoente de uma potência.

Uma evidência neste encontro foi o fato de que havia uma grande dificuldade em questões que exigiam a construção de textos. Essa constatação foi notada na questão em que pedíamos o conceito de logaritmo. Ao serem indagados verbalmente, todos sabiam explicar corretamente o que era logaritmo. Na escrita, o resultado era sempre inferior ao fornecido verbalmente. Apesar de todos concluírem que "logaritmo decimal era o expoente do 10 para obter um outro número", sete duplas relataram este fato de maneira muito confusa. Exemplificando, apresentaremos o conceito escrito de uma das duplas: "Logaritmo é o expoente da base 10 quando elevado a qualquer número é positiva a resposta" (Dupla Milena e Juliana).

5.2.3. Ficha 3

- Tabela e questões dos logaritmos de base 2

Entregamos esta ficha sem comentar que a calculadora oferecia apenas a tecla do logaritmo de base 10 (e de base "e"), no intuito de observar se os alunos conseguiam estabelecer alguma relação dessa situação com o problema do automóvel. Todas as duplas tentaram resolver na ordem dada e não conseguiram. Perguntaram se a calculadora tinha a tecla log na base 2. Dissemos que não e com isso eles resolveram os itens diretos, que não necessitavam do uso desse instrumento. Apenas uma das duplas conseguiu relacionar o caso não direto com àquele estudado inicialmente na introdução do logaritmo. Esta informação foi colocada oralmente por essa dupla e as demais acabaram ouvindo. Nesse momento, ficamos surpresos com o comportamento destas duplas. Nenhuma aceitou passivamente o resultado, transcrevendo-o na ficha; houve questionamentos e a criação de um ambiente muito rico, constituído de uma grande interação entre os integrantes do grupo. A exploração da "zona de desenvolvimento proximal" ficou evidente, pois a dupla que resolveu o problema "puxou" os demais para além do que estes conseguiram inicialmente atingir. Em seguida, todos conseguiram estabelecer sozinhos a propriedade de mudança de base, dizendo que para calcular $2^x = 3$ bastava calcular log3/log2, fato que foi em seguida institucionalizado. Após essa etapa, todos conseguiram preencher a tabela inteira.

Cinco duplas tiveram dificuldade em compreender a questão "f", que pedia em qual intervalo estaria um número cujo logaritmo (de base 2) resultou em um valor entre 5 e 6. Perguntamos para essas duplas qual seria o número cujo logaritmo na base 2 valeria 5. Tal pergunta foi suficiente para que essas duplas entendessem que estavam fazendo o processo inverso, ou seja, analisando o logaritmando. Houve uma certa confusão (com 3 duplas) entre logaritmo de número negativo e logaritmo que resulta em número negativo. Colocamos exemplos numéricos no intuito de facilitar o entendimento da diferença. Neste caso, $\log_2(-2)$ representava o logaritmo de número negativo, fato que estas duplas justificaram que não existia, agora com o uso da exponencial. Em seguida, discutimos que $\log_2 1/2 = -1$ representava um logaritmo que resultaria em número negativo.

Todas as duplas conseguiram estabelecer a comparação entre os logaritmos de bases 2 e 10 satisfatoriamente. Todos escreveram sobre a inexistência de logaritmo de número negativo e do zero nas duas bases. Além disso, afirmaram que o logaritmo (nas duas bases estudadas) de um número entre 0 e 1 resultava em valor negativo. Duas duplas avançaram um pouco mais, apresentando que o logaritmo de 1 valeria zero nas duas bases. Uma dupla acrescentou que para a base 10 o uso da calculadora era imediato, enquanto que para a base 2 não.

Em relação ao problema das bactérias, a obtenção da função não foi imediata. Todos conseguiram observar que como o número dobrava deveria haver uma relação com potência de base 2. Solicitamos que achassem os valores após 1 minuto, após 2 minutos e após 3 minutos. Todos explicitaram que $f(x) = 2^x$ não dava conta da situação, mas não conseguiam descobrir o que estava faltando. Pedimos para que tentassem relacionar com o valor inicial 300. Apenas uma dupla percebeu que o resultado após 1 minuto era 300•2, após 2 minutos 300•4 e após 3 minutos

300•8. Novamente foi estabelecido um ambiente de interação entre os demais participantes dessa atividade e esta dupla, gerando questionamentos e conjecturas. Em seguida, todos relacionaram os segundos fatores dos produtos com potências de 2, obtendo assim a função na forma algébrica. Após a obtenção da função $f(x) = 300 \bullet 2^x$, todos conseguiram resolver o exercício.

5.2.4. Ficha 4

- Tabela e questões dos logaritmos de base 1/2

Nesta ficha, a tabela foi preenchida na ordem dada e sem dificuldades, visto que os procedimentos não diferiam daqueles utilizados na ficha 3.

Todas as duplas perceberam que entre 0 e 1, o logaritmo nesta base resultava em valor positivo e para valores maiores do que 1 em negativo. Duas duplas notaram nesse momento que esta conclusão era diferente da obtida nos logaritmos de bases 2 e 10.

Resolvendo o item “h” - *Analise os casos:* $h_1)\ \log_1 8 \quad h_2)\ \log_{-2} 3$ *e* $h_3) \log_0 5$- perceberam que a base não poderia valer 0, 1 ou ser negativa, pois nestes casos não encontravam respostas (pela calculadora). Nenhuma dupla conseguiu justificar essa inexistência lançando mão da relação com a função exponencial. Com isso, procuramos retomar certos conceitos inerentes à função exponencial, tais como o tipo de crescimento (utilizamos exemplos numéricos, no caso $f(x)= 2^x$ e $g(x)=1/2^x$), as condições da base (estritamente positiva e diferente de 1) que garantem este tipo de crescimento e por fim, o domínio e a imagem da função exponencial.

Na comparação dos logaritmos das três bases, todas as duplas estabeleceram como semelhança o fato de que não existia logaritmo de número negativo e do 0. Duas duplas ainda colocaram que o logaritmo de 1 em todas as bases valia zero. Em relação às diferenças, todos notaram que nas bases 2 e 10, os logaritmos entre 0 e 1 eram negativos, fato que não ocorreu na base ½. As duas duplas citadas perceberam a diferença da relação de monotonicidade entre os logaritmos de bases 2 e 10 com os de base ½. Com relação ao conceito de logaritmo, novamente pudemos observar uma grande dificuldade em expressá-lo na forma escrita. Todas as duplas verbalizaram de maneira satisfatória o que representava o logaritmo e quais eram as condições para o mesmo existir, apesar da qualidade dessa verbalização ser inferior ao modo como utilizaram o logaritmo na resolução dos exercícios que compunham as fichas. Porém, a qualidade da representação escrita desse conceito foi inferior ao apresentado através da fala. Vale ressaltar que essa dificuldade também ocorreu no “piloto”. Esse fato parece ser justificado pelas pesquisas de Vygotsky. Como foi citado no capítulo II, nos seus estudos sobre a formação de conceitos nos adolescentes, Vygotsky notou que existia uma discrepância surpreendente entre a sua capacidade de formar conceitos e a sua capacidade de defini-los. Ainda, acrescentou que a definição verbal era, na maior parte dos casos, mais limitada do que seria de se esperar a partir do modo como o indivíduo trabalhou com o conceito, o que vem de encontro com o que ocorreu durante a aplicação de nossa sequência.

Como todos os alunos verbalizaram corretamente o conceito em questão e suas condições de existência, consideramos como satisfatórias as respostas escritas do tipo: "o logaritmo é o expoente que se deve colocar para a base para dar o número que está em cima" (Daniela e Bruno). As condições de existência foram relatadas nas respostas de cinco duplas.

A última questão da ficha 4 solicitava a interpretação da definição matemática do logaritmo:

"Se $a>0$, $b>0$ e $b\neq 1$, $\log_b a=x$ se e somente se $b^x = a$".

"a" é denominado logaritmando, "b" é a base e "x" é o logaritmo

Além da resposta escrita, pedimos, separadamente para cada dupla, que interpretassem verbalmente tal definição. Pudemos notar que, apesar da aplicação de toda a sequência e de responderem corretamente o que é logaritmo com suas condições de existência, o entendimento da definição matemática não foi satisfatório. Novamente pudemos estabelecer uma comparação com o que ocorreu no "piloto". Desta forma, resolvemos fazer de forma coletiva essa interpretação, retomando inicialmente a simbologia existente nesta definição e explorando a conceitualização verbal que já tinham apresentado. Notamos que esses alunos não tinham dificuldade em interpretar as condições de existência apresentadas nesta definição. As maiores dúvidas surgiram no entendimento de $\log_b a=x \Leftrightarrow b^x = a$". Vale lembrar que na análise dos livros didáticos apresentada no capítulo 3, observamos que a maioria das obras partiu da definição (ou de um breve comentário seguido pela definição) e não retomou mais esta questão. Pela nossa experiência docente, esta parece ser uma forma comum de abordagem de qualquer conteúdo matemático e talvez esse fato não permite ao aluno compreender a definição apresentada através da simbologia matemática.

5.3. ANÁLISE DO DESEMPENHO DOS GRUPOS EXPERIMENTAL E DE REFERÊNCIA NOS TESTES

Nesta seção, faremos a análise do desempenho dos dois grupos segundo os pontos de vista citados anteriormente na sessão 5.1. Procuraremos, em cada análise, realizar uma tabulação numérica acompanhada da discussão dos resultados obtidos.

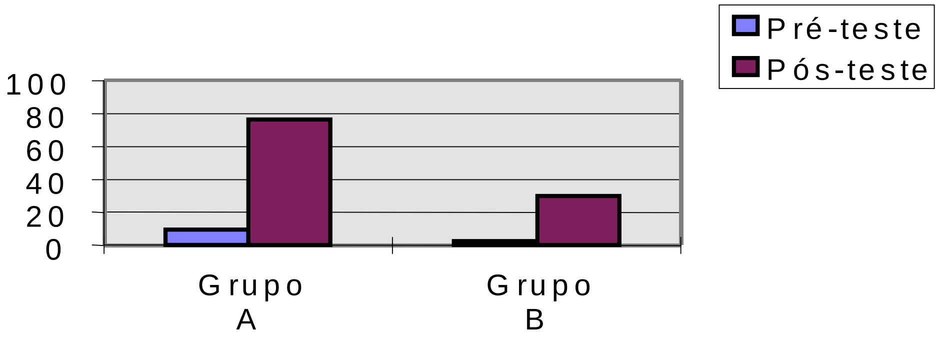
5.3.1. Análise numérica e gráfica do percentual de acertos dos grupos.

Apresentaremos, a seguir, a análise da porcentagem relativa de acertos de cada grupo no pré e pós testes. Como o número de sujeitos foi diferente, para ser possível estabelecer uma comparação entre os seus desempenhos, calcularemos a quantidade de acertos de cada grupo pelo total de possibilidades de acerto. Em cada teste (pré e pós) havia oito itens a serem analisados. Como o grupo experimental era composto de 13 indivíduos, tivemos um total de 104 possibilidades de acerto por teste. Já para o grupo de referência, composto de 29 alunos, 232 passa a ser o número de possibilidade de acerto por teste. Dessa forma, obteremos a porcentagem relativa de acertos (de cada grupo) nos pré e pós testes.

Porcentagem de acertos - Análise do desempenho geral dos grupos

Grupo A - grupo experimental
Grupo B - grupo de referência

Grupo/Teste	Pré-teste	Pós- teste
Grupo A	9,61%	75,96%
Grupo B	2,59%	30,17%



Quadro 5.1. Porcentagem de acertos dos grupos nos testes

O gráfico acima, acompanhado da tabela, mostra-nos que o grupo A teve o melhor desempenho tanto no pré como no pós teste. O grupo B, mesmo após ter estudado todo o conteúdo de logaritmo proposto para o ensino de nível médio (cálculos, propriedades, equações, inequações e logaritmos decimais) - o que implica que teve mais contato com o objeto se comparado com o grupo A - acertou apenas o equivalente a menos de um terço do pós-teste. Apesar do grupo experimental ter acertado mais que o grupo de referência no pré-teste, vale notar que o acerto em ambos os grupos foi muito baixo. De fato, o pré-teste foi elaborado de tal forma que permitisse que um aluno que tivesse estudado a função exponencial e que não tivesse nenhum contato com o conteúdo logaritmo, pudesse ter um acerto máximo de 25%, o que está longe de ser a realidade nos dois grupos.

Com relação ao pós-teste, o percentual de acerto do grupo experimental foi satisfatório, muito mais se considerarmos que o teste envolveu tanto situações-problema, como questões de técnicas algorítmicas e conceituais. Esse percentual de acerto também é considerado bom se tomarmos por termômetro o patamar exigido pela escola. Contudo, essa primeira apresentação dos resultados é muito geral e não nos fornece "pistas" suficientes para que possamos analisar o comportamento desses alunos do ponto de vista da formação e desenvolvimento do conceito de logaritmo. Para tanto, procuramos realizar outros tipos de análise que apresentaremos nas seções a seguir.

5.3.2. Análise percentual do crescimento dos dois grupos após o estudo do logaritmo- apresentação do índice de crescimento

O quadro abaixo retrata a porcentagem de acertos nos pré e pós testes, acompanhada da análise numérica do índice de crescimento dos dois grupos. Para obter o índice de crescimento de cada grupo, realizamos a diferença das porcentagens de acerto obtidas em cada teste e em seguida dividimos o resultado obtido pela porcentagem inicial.

Grupo A - grupo experimental Grupo B - grupo de referência			
Grupo/Teste	Pré-teste	Pós- teste	Índice de crescimento
Grupo A	9,61%	75,96%	6,90
Grupo B	2,59%	30,17%	10,65

Quadro 5.2. Análise do crescimento dos grupos

Analisando a situação acima, notamos que o grupo B obteve um índice de crescimento maior do que o grupo A. Isto porque 2,59% é praticamente zero, portanto qualquer acerto posterior apareceria como um grande feito, mesmo que esse percentual de acerto indique reprovação, se tomarmos o patamar mínimo exigido pela escola. Com isso, os dados numéricos de índice de crescimento nos passam, se não analisados minuciosamente, uma falsa impressão de que o grupo B teve um sucesso maior que o grupo A.

O baixo resultado apresentado pelo grupo B no pré-teste provavelmente se deve ao fato de que essa turma não teve um comprometimento muito grande na resolução do pré-teste, visto que sabiam que aquela atividade não representaria uma nota no seu conceito final. Eventualmente, se tivéssemos realizado um trabalho de conscientização da importância dessa avaliação com esse grupo, o resultado inicial poderia ser diferente. Já os componentes do grupo A (experimental) se comprometeram durante todo o processo, mesmo sabendo que não haveria uma atribuição de "nota" para a atividade que estavam participando. Além disso, houve, desde o início, o estabelecimento de uma relação afetiva entre o grupo A e o orientador, baseada na intenção de auxiliar o trabalho de pesquisa. Já em relação ao pós-teste, foi colocado ao grupo B que o mesmo representaria uma das notas que comporia a média do bimestre, fato que não ocorreu com o grupo experimental. Apesar disso, notamos que o resultado final do grupo de referência foi insatisfatório (em torno de 30% de acerto).

5.3.3. Análise do percentual de acertos por itens

A tabela abaixo representa o percentual de acertos de cada questão apresentado pelos grupos nos dois testes. Temos a intenção de realizar tal análise visto que cada item foi elaborado de modo a privilegiar um determinado conteúdo matemático. Com isso, poderemos observar em que pontos há maiores dificuldades.

Faremos uma análise quantitativa e qualitativa de seus desempenhos em cada questão, citando os principais tipos de erros. Uma análise global da categorização de erros será apresentada mais adiante, com a finalidade de se obter uma visão mais ampla dos caminhos que levaram o aluno ao insucesso.

Questões/ Grupos	Grupo experimental		Grupo de referência	
	pré teste	pós teste	pré teste	pós teste
Q1a	0%	76,92%	0%	68,96%
Q1b	0%	100%	0%	24,14%
Q2	69,23%	92,31%	17,24%	62,07%
Q3	0%	61,54%	0%	13,79%
Q4a	7,69%	84,61%	3,45%	24,14%
Q4b	0%	38,46%	0%	3,45%
Q5	0%	69,23%	0%	20,69%
Q6	0%	84,61%	0%	24,14%

Quadro 5.3. Desempenho por item

Analisando o item “a” da questão 1, podemos notar que os dois grupos evoluíram, apresentando uma porcentagem de acertos satisfatória no pós-teste. Nós classificamos essa questão, que no pós-teste envolvia o cálculo do $\log_3 81$, como um tipo de exercício largamente explorado no ensino atual (baseado na nossa análise dos manuais didáticos apresentada no capítulo III), o qual valoriza a técnica de cálculo do logaritmo. Vale salientar que o grupo experimental apresentou sucesso na sua resolução, apesar da abordagem utilizada não privilegiar esta forma de questão. O principal tipo de erro ocorrido foi decorrente de problemas na concepção de potência, caso que será descrito adiante.

O item “b” da questão 1 do pós-teste – calcular $\log_{10}75$ - deveria ser resolvida com o uso da calculadora (para o grupo experimental) e através da tabela de logaritmos (para o grupo de referência). Podemos notar que no pós-teste o grupo experimental obteve 100% de acerto, enquanto que o grupo de referência apenas 24,14%. Como já foi comentado no capítulo III, “perde-se” praticamente uma aula orientando o aluno quanto à forma de manipulação da tabela, desprezando o fato de que há uma máquina que fornece o resultado de forma mais rápida. Ora, procurar o resultado em uma tabela não envolve nenhuma função cognitiva sofisticada. Ao nosso ver, só representa mais um algoritmo a ser “decorado” pelo aluno. Então, por que não usar a calculadora, cujo algoritmo é muito mais simples? A maioria das questões do grupo de referência classificadas como erradas estavam sem nenhum tipo de resolução, o que nos leva a crer que a dificuldade era decorrente da falta de conhecimento de manipulação da tabela.

A questão 2, tanto no pré como no pós-teste, era constituída por uma equação exponencial de transformação direta, a qual representou um exercício que o aluno já conseguiria resolver no pré-teste com base nos seus conhecimentos. Enquanto o grupo experimental apresentou uma boa porcentagem de acertos no pré-teste (69,23%), tendo um crescimento que atingiu quase que a totalidade de acertos no pós-teste (92,31%), o grupo de referência apresentou um resultado insatisfatório no pré-teste (17,24%) e médio no pós (62,07%). O principal motivo que levou os grupos às respostas incorretas foi constituído por problemas nas concepções de equação exponencial e de potência. Vale salientar que, diante das dificuldades apresentadas pelo grupo experimental durante a aplicação da sequência, sempre retomamos os conceitos de potência e exponencial. Acreditamos que essa postura favoreceu o sucesso do grupo experimental nesta questão.

A questão 3, que envolvia uma equação exponencial “não direta” (pré-teste: $9^x = 20$ e pós-teste: $5^x = 10$) e que tinha por objetivo observar se o aluno possuía conhecimento do uso do logaritmo como ferramenta de resolução deste tipo de equação, apresentou um índice de acerto razoável no grupo experimental e baixo no grupo de referência. No grupo experimental, notamos que a deficiência na concepção de potência foi a principal causa de erro e no grupo de referência os problemas no conceito de exponencial e nas técnicas de cálculo de logaritmo. Temos a intenção de salientar que no pré-teste, tal questão foi deixada em “branco” por todos os alunos. Apesar de sua resolução envolver logaritmos, tínhamos a intenção de observar se alguém apresentaria estimativas do resultado. Pudemos notar que não ocorreu nenhum tipo de tentativa, o que vem de encontro com a análise dos livros em relação a esta categoria, a qual denotou que parece não ser uma prática comum de nosso ensino criar situações que habituem o aluno a estimar resultados.

A questão 4 (item “a”) solicitava o cálculo da quantia após 3 meses, o que representava, no pós-teste, o cálculo de $F(t) = 80 \bullet (1,04)^t$ para t=3. Também constituía um tipo de questão que o aluno já conseguiria resolver no pré-teste. Podemos observar que ambos os grupos apresentaram baixo rendimento no pré-teste, provavelmente por exigir do aluno a interpretação de um problema, fato que constitui, segundo a análise realizada no capítulo III, como um fator de importância secundária no ensino atual. Após o estudo dos logaritmos, percebemos que o grupo experimental apresentou um grande “salto” no seu desempenho. Já o grupo de referência, apesar de também ter crescimento, apresentou menos de um terço dos alunos acertando tal item. Provavelmente a abordagem seguida pela nossa sequência, que explorou a interpretação de problemas, favoreceu o desempenho do grupo experimental nesse item.

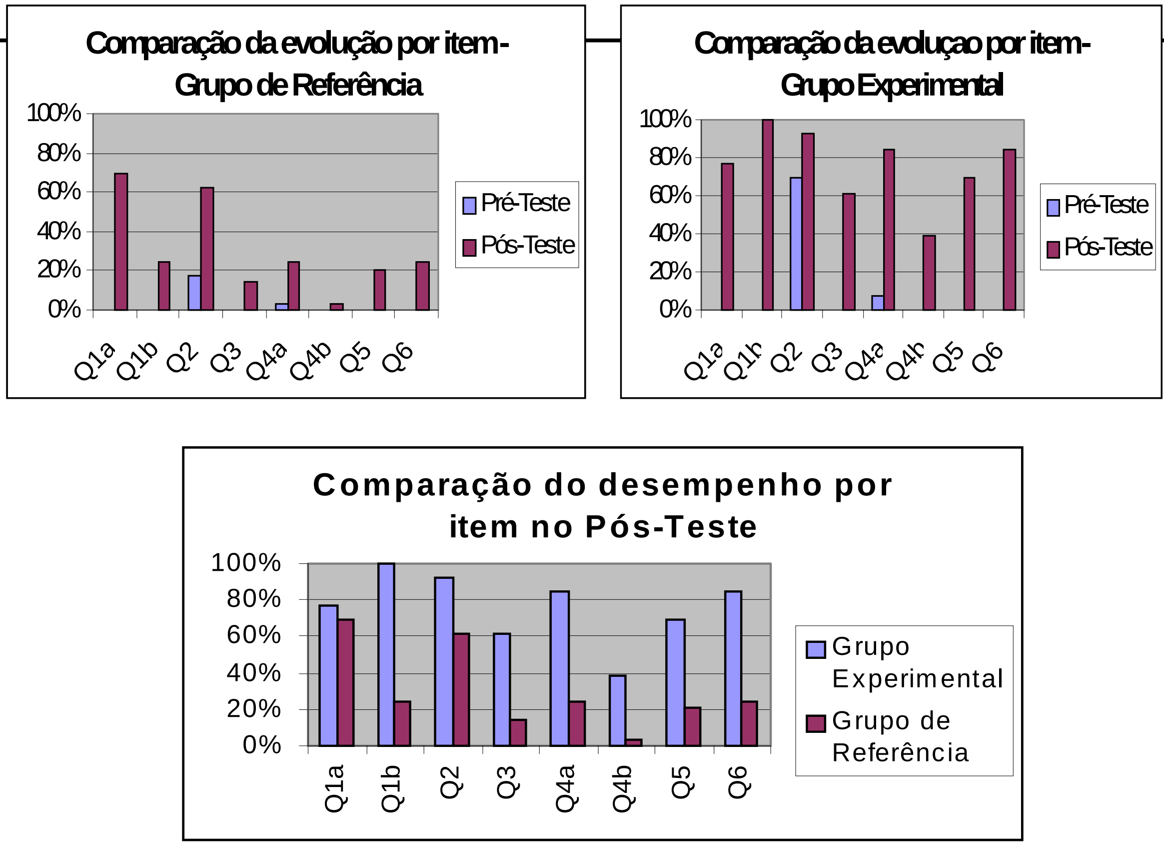
O item “b” da questão 4 do pós-teste, que solicitava o tempo necessário para que a quantia atingisse 400 reais, não apresentou um bom resultado tanto no grupo experimental como no de referência. Notamos que o principal erro apresentado pelos alunos do primeiro grupo foi decorrente de problemas na concepção da função exponencial e em manipulações matemáticas básicas (como problemas na hierarquia das operações ou na resolução de equações). Já o grupo de referência praticamente entregou a questão sem nenhuma resolução, o que nos faz crer que há dificuldades já na interpretação do problema. Este fato ocorrido com o grupo de referência não surpreende, visto que, com base na análise dos livros apresentada no capítulo III, pouco se explora este tipo de exercício no ensino atual. Além disso, retomando Vergnaud, temos que um conceito é formado por um conjunto de situações. Talvez a nossa sequência didática poderia ter explorado um conjunto maior de situações-problema, garantindo dessa forma um melhor desempenho dos alunos nesse tipo de questão. No pré-teste, tínhamos a intenção de observar se o aluno apresentaria alguma tentativa. A questão, considerando os conhecimentos que esses alunos possuíam, poderia ser resolvida até certo ponto, ou seja, o aluno poderia interpretar o problema, manipular a função até obter a equação exponencial não direta. Apesar disso, nenhum indivíduo apresentou a resolução correta até esse ponto.

A questão 5 do pós-teste, que pedia para estimar o logaritmando ($\log_2 x = 3{,}78$), apresentou uma porcentagem de alunos que acertaram satisfatória (69,23%) para o grupo experimental e insatisfatória para o outro grupo (20,69%). Novamente, buscando a análise realizada no capítulo III, vimos que as questões de estimativa são pouco exploradas, fato que acreditamos explicar o baixo rendimento do grupo de referência. Sabemos ainda que, para Piaget, o pensamento é uma ação internalizada. Para realizar estimações, o aluno teria que prever, isto é, agir sobre o pensamento, o que representaria mais uma forma de aproximação do objeto e consequentemente de expansão do conceito.

Por fim, a questão 6 solicitava o conceito escrito de logaritmo. Através dela, tínhamos a intenção de observar que tipo de noção um aluno que estudou esse conteúdo poderia apresentar. Comparando os dois grupos, notamos que há uma grande diferença nos resultados. Quase a totalidade do grupo experimental relacionou logaritmo ao expoente enquanto que apenas 24,14% do grupo de referência estabeleceu essa associação.

Observando os resultados constatamos que em quatro itens (Q1a, Q2, Q3 e Q4b) o comportamento dos grupos seguiu a mesma tendência. Observando o quadro anterior, notamos que apesar da diferença de desempenho a favor do grupo experimental, os itens que apresentaram menor índice de acerto (Q4b e Q3 respectivamente) foram comuns a ambos os grupos. Com isso, podemos destacar que para esses grupos, a dificuldade maior ocorreu em questões que exigiram a manipulação de uma função exponencial numa situação contextualizada e o uso do logaritmo para a resolução de equações exponenciais não diretas. Com relação ao item Q1a, ambos os grupos partiram do zero e alcançaram um percentual semelhante de acerto (em torno de 70%). O item Q2 representou o caso em que ambos partiram com o maior número de acertos no pré-teste, sendo que no pós-teste representou o segundo melhor desempenho se comparado com todos os itens que compunham essa avaliação.

Apresentaremos em seguida, os gráficos de comparação da evolução por questão do pré para o pós-teste e da comparação do percentual de acertos por questão entre os dois grupos (no pós-teste).



Quadro 5.4. Comparação da evolução por item e do desempenho por item no pós- teste

Em relação a este último gráfico, podemos observar que em todas as questões o grupo experimental obteve um sucesso maior do que o grupo de referência e não somente no desempenho geral do teste.

Como já foi mencionado, no pré-teste o aluno teria condições para resolver os itens Q2 e Q4a. Se observarmos os dois primeiros gráficos de comparação da evolução por questão, podemos notar que o grupo experimental já partiu, no item Q2, de uma boa porcentagem de acertos (em torno de 70%), o que implica no efeito que denominaremos de “teto”, ou seja, a possibilidade de crescimento nesta questão ficou limitada. Esse fato não ocorreu com o grupo de referência, visto que o desempenho nesta questão no pré-teste foi insatisfatório. Com isso, a possibilidade de crescimento nessa questão era bem maior, o que provavelmente pode “explicar” o maior índice de crescimento obtido pelo o grupo de referência.

5.3.4. Análise dos testes por objetivo

No capítulo IV, definimos os objetivos de nossa sequência, sendo que os testes foram elaborados tendo em vista tais objetivos. Faremos então uma análise do desempenho dos dois grupos sob a ótica desses objetivos, os quais servirão como mais um termômetro para avaliar a aprendizagem do conceito de logaritmo. Abaixo, apresentaremos os objetivos citados no capítulo IV (Metodologia), os quais estão indicados neste contexto por algarismos romanos:

I - conceituar logaritmo (incluindo as condições de existência);

II - resolver equações exponenciais diretas;

III- resolver equações exponenciais não diretas (com o uso do logaritmo);

IV- interpretar problemas exponenciais;

V- estabelecer a relação existente entre o logaritmo e a exponencial na resolução de problemas reais;

VI - calcular logaritmos diretos;

VII- calcular logaritmos com o auxílio de instrumentos (calculadora ou tabela);

VIII- estimar valores em situações que envolvem logaritmos e

IX- realizar comparações entre as características de logaritmos de bases diferentes (quanto ao sinal e crescimento).

Como os conteúdos estavam interligados, dificilmente uma questão envolvia apenas um dos objetivos citados acima. Exemplificando, o item 4b envolvia os objetivos III, IV, V e VII. Porém, para realizar esta análise, relacionamos cada item com o seu objetivo principal, ou seja, com o objetivo para o qual o item foi criado. Neste caso, tomando o exemplo citado, relacionaremos o item Q4b com o objetivo V. Assim sendo, a tabela abaixo apresenta as questões dos testes (pré e pós) relacionadas aos objetivos.

Questão	Objetivos – Pré e pós testes
1/a	VI
1/b	VII
2	II
3	III
4/a	IV
4/b	V
5	VIII
6	I

Para manter a equivalência entre os testes, o objetivo IX foi examinado como uma questão à parte, desvinculada ao teste e apresentada somente para os alunos do grupo experimental, a qual comentaremos adiante. A tabela abaixo mostra a correspondência dos objetivos com as porcentagens de sucesso, para cada grupo nos pré e pós testes.

	Grupo Experimental		Grupo de Referência	
Objetivo	Pré-teste %	Pós-teste %	Pré-teste %	Pós-teste %
	0	84,61	0	24,14
II	69,23	92,31	17,24	62,07
III	0	61,54	0	13,79
IV	7,69	84,61	3,45	24,14
V	0	38,46	0	3,45
VI	0	76,92	0	68,96
VII	0	100	0	24,14
VIII	0	69,23	0	20,69

Quadro 5.5. Análise do desempenho por objetivo

Na questão referente ao Objetivo IX , 53,85% dos alunos obtiveram êxito. Consideramos um índice médio e talvez deveríamos explorar mais questões desse tipo em nossa sequência, para garantir ao aluno um maior contato com esse objeto de estudo. A questão relativa a esse objetivo, apresentada a seguir, foi resolvida sem o uso da calculadora.

> Das alternativas abaixo, indique qual é a verdadeira e justifique.
>
> a) $\log_3 8 > \log_5 27$
>
> b) $\log_{1/3} 3 > \log_{1/3} 9$
>
> c) $\log_9 81 < \log_6 36$
>
> Justificativa: ____

Esse exercício só foi considerado correto se resolvido e justificado satisfatoriamente. Se tivéssemos incluído no total de corretas as questões sem justificativa, o percentual de acertos subiria para aproximadamente 70%, porém não saberíamos se o aluno possuía o conceito ou se a sua atitude seria apenas uma tentativa para não deixar a questão sem resolução.

Fazendo uma análise do desempenho do grupo experimental com relação aos objetivos, notamos que a tabela mostra que não conseguimos um resultado satisfatório somente em relação ao objetivo V, já que apenas 38,46% dos alunos obtiveram sucesso na questão 4-b. Analisando este objetivo ("estabelecer a relação entre logaritmo e exponencial na resolução de problemas reais"), observamos que vários fatores podem ter interferido no insucesso desta meta, visto que dos oito alunos que erraram, dois apresentaram erros relacionados à manipulações algébricas básicas, três à concepção de exponencial e apenas três respostas estavam "em branco". Essa questão requeria dos alunos os conhecimentos prévios de função e manipulação de equação exponencial.

Em relação ao objetivo III, em que 61,54% dos alunos responderam a contento, também há fortes indícios de que havia mais de um fator contribuindo para não elevar este índice, tais como problemas com a concepção de potência e nas manipulações algébricas. Essa afirmação se baseia no fato de que, dos cinco erros encontrados na questão "$5^x = 10$" (que corresponde a esse objetivo), apenas um deixou em branco enquanto que os outros transformaram 10 em 5^2. Novamente gostaríamos de discutir que a escolha do número 10 foi aleatória e, se por um lado representou uma infelicidade, visto que provocou confusões em alguns componentes do grupo, por outro contribuiu no sentido de trazer mais evidências sobre as lacunas existentes na questão da potência.

Embora a maioria dos alunos do grupo experimental (69,23%) tenha acertado a questão relativa ao objetivo VIII – estimar valores em situações que envolvem logaritmos - , notamos a necessidade de realizar um trabalho maior neste aspecto, a fim de garantir um número maior de contatos com a estimação do logaritmo, do logaritmando e da base.

Quanto aos outros objetivos envolvidos nos testes (I, II, IV,VI, VII e IX), consideramos que foram atingidos de maneira satisfatória, visto que nas questões que visavam examinar tais objetivos, o total de alunos que se saiu bem em cada item, correspondeu a mais do que 75% de nossa amostra experimental.

Já o grupo de referência , dos oito objetivos analisados, atingiu de forma regular apenas dois: o II e o VI. Nesses casos, tivemos em torno de 65% dos alunos acertando as questões relacionadas a tais objetivos. Se realizarmos uma análise mais minuciosa, notaremos que estes estão relacionados às técnicas de cálculo e ao domínio de algoritmos, pois representam objetivos ligados à resolução de equações exponenciais "diretas" e cálculo de logaritmos "diretos". Este resultado não está fora do esperado, pois, de acordo com a análise dos livros didáticos, ficou evidente a valorização de questões deste tipo em detrimento das situações-problema e questões conceituais.

Os demais objetivos (I, III, IV, V,VII e VIII) não foram atingidos por este grupo, já que o índice de acerto de questões relacionadas a esses objetivos não ultrapassou 25%. Da mesma forma que o grupo experimental, o objetivo que correspondeu ao menor percentual de acerto foi o V. É interessante destacar que 38,46% do grupo experimental atingiu tal objetivo e este resultado foi considerado insatisfatório. Porém, ainda representou um percentual maior do que todos os índices correspondentes aos seis objetivos citados acima e não atingidos pelo grupo de referência.

5.3.5. Análise do desempenho dos sujeitos por grupo

Neste momento faremos um estudo do desempenho e da evolução dos alunos nos testes aplicados. Para tanto, numeramos cada aluno do grupo experimental (de 1 a 13) e cada aluno do grupo de referência (de 1 a 29). Vale lembrar que os dois testes possuíam 8 itens cada, portanto o número máximo de acertos por aluno é 8. A tabela abaixo indica o número de acertos por aluno no pré e pós testes e a porcentagem de acertos no pós-teste.

Alunos	Pré-teste (nº de acertos)	Pós-teste (Nº de acertos)	% de acertos no pós-teste
1	1	6	75
2	1	8	100
3	1	8	100
4	2	6	75
5	1	7	87,5
6	1	8	100
7	1	5	62,5
8	1	6	87,5
9	1	3	37,5
10	1	6	75
11	1	5	62,5
12	1	6	75
13	1	4	50

Quadro 5.6. Tabela do desempenho dos alunos - Grupo experimental

Analisando a tabela, podemos observar que todos os sujeitos do grupo experimental tiveram evolução. Mais de dois terços dos alunos (9 alunos) seriam aprovados com um acerto maior ou igual a 75% da avaliação e mais de 90% (12 alunos) de nossa amostra experimental teria condições de ser aprovada segundo o critério escolar. O aluno "9" foi aquele que apresentou um menor crescimento em seu desempenho, visto que no pré-teste acertou uma questão e no pós-teste apenas 3, ou seja, menos da metade do teste. O aluno "13" também não apresentou um alto crescimento, embora ele tenha acertado 50% dos itens, o que consideramos satisfatório, tendo como parâmetro a média adotada pela maioria das escolas. Os demais sujeitos apresentaram um bom crescimento em seus desempenhos. Se observarmos a porcentagem de acertos destes no pós-teste, teremos que no mínimo obtiveram 62,5% de sucesso. Com isso, acreditamos ter atingido nossos objetivos através da aplicação de nossa sequência. Nossas únicas dúvidas são com relação à acomodação do conceito de logaritmo (segundo a visão de Piaget) e para esclarecer tal dúvida teríamos que reaplicar o pós-teste (teste de retenção) acompanhada da definição. Como já foi comentado, em relação a esta última, constatamos que havia problemas, os quais estavam relacionados principalmente com a familiarização dos símbolos matemáticos, um domínio que vai muito além do cerne deste estudo.

A seguir, apresentaremos a mesma análise para os sujeitos do grupo de referência.

Alunos	Pré-teste	Pós-teste	% de acertos no pós teste
1	0	5	62,5%
2	0	2	25%
3	0	0	0%
4	0	6	75%
5	0	4	50%
6	0	1	12.5%
7	0	4	50%
8	0	3	37,5%
9	0	4	50%
10	0	4	50%
11	1	2	25%
12	0	0	0%
13	1	2	25%
14	0	2	25%
15	0	2	25%
16	1	1	12,5%
17	0	0	0%
18	2	4	50%
19	1	4	50%
20	0	1	12,5%
21	0	0	0%
22	0	4	50%
23	0	1	12,5%
24	0	3	37,5%
25	0	1	12,5%
26	0	1	12,5%
27	0	6	75%
28	0	3	37,5%
29	0	0	0%

Quadro 5.7. Tabela do desempenho dos alunos - Grupo de referência

Consultando a tabela anterior, notamos que apenas três dos vinte e nove alunos acertaram acima de 50% do pós-teste, sendo que destes, dois atingiram um percentual máximo de 75% de acerto. Como esses três alunos não acertaram item algum no pré-teste, com certeza eles foram responsáveis pela alta taxa de variação que seu grupo apresentou do pré para o pós-teste. Em relação aos outros vinte e seis alunos dessa amostra, tivemos apenas sete casos com acerto de 50% e 19 casos em que o desempenho apresentado foi insatisfatório, visto que, para esses, a média de acertos no pós-teste foi de aproximadamente 2 questões, ou seja, em torno de 25% da avaliação.

Com isso, apenas um terço da amostra teria condições de ser aprovada, segundo o sistema escolar vigente. Notamos que aproximadamente um quinto em nada evoluiu e outros um quarto tiveram um crescimento modesto, com aumento de acerto em apenas uma questão (passaram de nenhuma para uma questão correta ou de uma para duas questões corretas). Além disso, mais de 55% dos alunos (o que equivale a 16 indivíduos) não conseguiram acertar mais que 25% do teste, ou seja, dois itens. Tais resultados são no mínimo preocupantes – para não dizer assustadores - . Vale salientar que a professora desse grupo, além de ser considerada pelos alunos e colegas como extremamente competente, ainda estava comprometida com a pesquisa, pois pedimos a sua autorização para aplicar o teste dois meses antes e explicamos a ela tudo o que pretendíamos fazer com seus alunos.

Convém novamente ressaltar que esta turma estudou todo o conteúdo de logaritmo desenvolvido na primeira série do ensino de nível médio, ou seja, teoricamente teria muito mais chances de obter um resultado satisfatório, visto que teve mais contato com esse tópico se comparado com o grupo experimental. Além disso, realizaram o pós-teste como uma atividade que comporia a nota do bimestre. Os alunos sabiam antecipadamente que fariam o teste, ao contrário do grupo experimental. A decisão de que esta avaliação assumiria uma nota se deu pelo fato de que não houve um comprometimento satisfatório na resolução do pré-teste. Com essa atitude, acreditamos ter obtido um resultado mais realista da situação de aprendizagem do grupo de referência.

5.4. ANÁLISE QUALITATIVA DOS ERROS E PROCEDIMENTOS DESENVOLVIDOS PELOS DOIS GRUPOS

Temos a intenção, nesta seção, de realizar uma análise da qualidade do procedimento que os alunos utilizaram para resolver os testes. Para tal, vamos agrupar os erros de acordo com suas características, estabelecendo assim categorias. O nosso objetivo consiste em identificar os principais raciocínios e procedimentos que conduziram os alunos ao insucesso, evidenciando através dessa análise os possíveis obstáculos didáticos e epistemológicos presentes. Compararemos os tipos de erros cometidos no pré e pós testes, além de confrontar os procedimentos utilizados pelos dois grupos, a fim de obter um parâmetro mais pormenorizado da evolução desses estudantes.

Após uma leitura cuidadosa dos testes, pudemos identificar nove categorias de erros, as quais serão apresentadas abaixo:

E_1: Dificuldade nas manipulações algébricas básicas;

E_2: Problemas na concepção de potência;

E_3: Problemas na concepção de função exponencial;

E_4: Tendência ao pensamento linear em situações não lineares;

E_5: Dificuldade de se expressar na forma escrita;

E_6: Problemas de interpretação;

E_7: Erro proveniente do não estabelecimento do logaritmo como ferramenta de resolução de equações exponenciais;

E_8: Problemas na técnica de cálculo do logaritmo;

E_9: Desconhecimento ou uso inadequado de ferramentas (tabelas ou calculadoras) para o cálculo de logaritmos.

Novamente, apesar de estarmos cientes de que existem casos em que há vários tipos de erros na resolução de um único exercício, faremos uma relação unívoca entre cada item e a correspondente categoria de erro, relevando para esses casos, aquela que foi dominante para o insucesso da questão.

Consideramos que o aluno cometeu um erro do tipo E_1 se, apesar de utilizar o procedimento correto de resolução, errou na hierarquia das operações, nas passagens do processo de resolução de equações ou em contas.

Exemplificando esta categoria, tomaremos a resolução apresentada por uma aluna do grupo experimental no pós-teste, para a questão que solicitava o tempo necessário para que a quantia acumulada fosse de 400 reais:

$F(t)=80.(1,04)^t \Rightarrow$

$400 = 80 \,.\, (1,04)^t \Rightarrow$

$80\text{-}400 = 1,04^t \Rightarrow$

$1,04^t=320 \Rightarrow$

$t=\log 320/\log 1,04 = 147,07.$

Aluna nº1 - Experimental - pós-teste

Podemos observar que a aluna cometeu dois erros em manipulações algébricas básicas (o primeiro quando realizou a passagem 80-400 e o segundo na própria conta 80-400), os quais a conduziram ao insucesso na questão.

Consideramos que o aluno cometeu um erro do tipo E_2 quando ficou evidente que há uma fragilidade no entendimento do que é uma potência. Exemplificando, apresentaremos um erro cometido por um aluno na questão 3 do pós-teste.

$5^x=10 \quad 5^x=5^2 \quad x=2$

Aluno nº 10 - Experimetal - pós-teste

Fica evidente, nesta resolução, que houve uma confusão entre potência e produto. Não foi previsto, na análise prévia desse teste, que haveria este tipo de erro. A escolha involuntária do número 10 como elemento dessa equação representou uma variável que levou quatro alunos ao mesmo tipo de erro.

Um aluno apresentou o erro E_3 se demonstrou insegurança no conteúdo de função exponencial, como por exemplo, no desenvolvimento apresentado a seguir:

$$9^x = 729$$
$$9^x = 3^6$$
$$x = 6$$

Aluno nº11 - Experimental - pré-teste

O erro E_4 foi notado em quase todo o processo de estudo com o grupo experimental, ou seja, no pré-teste e na aplicação da sequência. Exemplificando, no exercício 4 do pré-teste, o problema apresentava a função $F(t) = 300 \bullet (1{,}05)^t$ e solicitava a quantia após 3 meses. Uma aluna apresentou a seguinte resolução:

300 - 100%

x - 5%

$100 \bullet x = 1500 \Rightarrow x = 15$

$3 \bullet 15 = 45$

Resposta:

$300 + 45 = 345$

Aluna nº 6 - Experimental - Pré-teste

Pudemos notar que, apesar do exercício apresentar a função na forma algébrica, a interpretação do problema foi realizada através de um pensamento linear.

O erro classificado na categoria E_5 pôde ser notado em questões nas quais havia a necessidade de conceituar ou justificar uma resolução. Exemplificando, vamos apresentar a resolução da questão 5 de um aluno do grupo experimental. Esta questão pedia para estimar o valor de x em $\log_2 x = 3,78$. O aluno indicou corretamente a alternativa "d" ($8<x<16$) mas ofereceu a seguinte justificativa:

"pois se nós elevarmos a base a resposta tem que dar o expoente"

Aluno nº 9 - Experimental - pós-teste

A próxima categoria, denotada por E_6, compreende o insucesso decorrente da falha na interpretação de uma questão. Podemos exemplificar esta categoria apresentando a resolução da questão 5 fornecida por uma aluna do grupo experimental:

Se $\log_2 x = 3,78$ então $2<x<4$. Justificativa: O número 3,78 é maior que 2 e menor que 4.

Aluna nº1 - Experimental - pós-teste

As categorias E_7 e E_8 já correspondem a erros localizados no próprio conteúdo de logaritmo. O erro E_7, através do qual percebemos que o aluno não adquiriu a concepção do uso do logaritmo na resolução de equações exponenciais não diretas, ocorreu, por exemplo, na seguinte resolução:

$F(t) = 80.(1,04)^t$

$400 = 80.(1,04)$

$5 = 1,04^t$

$t = 5 : 1,04 = 4,8076$

Aluno nº8 - Experimental - pós-teste

A categoria E_8 foi criada pelo fato de termos notado a existência de dificuldades com a técnica de cálculo de logaritmos não diretos e não decimais. Apesar desta técnica ter sido institucionalizada em sala ($\log_a b = \log_{10} b / \log_{10} a$, para $b>0$, $a>0$ e $a \neq 1$), ainda notamos erros do tipo:

$\log_3 81 = \log 3/\log 81 = 0,477/1,908 = 0,25.$

Aluno nº 9 - Experimental - pós-teste

A categoria E_9 representa o erro decorrente do desconhecimento ou falta de habilidade de utilizar os instrumentos fornecidos (tabela ou calculadora) para obter o resultado do logaritmo. Apresentaremos como exemplo a resolução da questão 1-b dada por um aluno:

$\log_{10} 75 = c+m \quad c=1 \quad m=?$

Aluno nº 9 - Referência - Pós-teste

A tabela abaixo indica o tipo de erro cometido pelos alunos do grupo experimental no pré e pós testes. Utilizaremos as notações indicadas pelas categorias de erros, sendo que as questões “em branco” serão simbolizadas por “E_b” e as corretas por “C”.

aluno/questão	Q1/a - pré	Q1/a - pós	Q1/b –pré	Q1/b -pós	Q2 - pré	Q2 - pós	Q3 - pré	Q3 - pós	Q4/a –pré	Q4/a –pós	Q4/b -pré	Q4/b -pós	Q5 - pré	Q5 - pós	Q6 - pré	Q6 - pós
1	E_b	C	E_b	C	C	C	E_b	C	E_b	C	E_b	E_1	E_b	E_6	E_b	C
2	E_b	C	E_b	C	C	C	E_b	C	E_b	C	E_b	C	E_b	C	E_b	C
3	E_b	C	E_b	C	C	C	E_b	C	E_b	C	E_b	C	E_b	C	E_b	C
4	E_b	E_5	E_b	C	C	C	E_b	C	C	C	E_b	C	E_b	C	E_b	E_5
5	E_b	C	E_b	C	C	C	E_b	C	E_4	C	E_4	E_1	E_6	C	E_b	C
6	E_b	C	E_b	C	C	C	E_b	C	E_4	C	E_4	C	E_6	C	E_b	C
7	E_b	C	E_b	C	E_2	C	E_b	E_2	E_b	C	E_b	E_3	E_b	C	E_b	E_5
8	E_b	C	E_b	C	E_3	C	E_b	C	E_4	C	E_4	E_3	E_b	C	E_b	C
9	E_b	E_8	E_b	C	E_b	E_5	E_b	E_2	E_b	C	E_b	E_b	E_b	E_5	E_b	C
10	E_b	E_8	E_b	C	C	C	E_b	E_2	E_b	C	E_b	C	E_b	C	E_b	C
11	E_b	C	E_b	C	E_3	C	E_b	C	E_b	E_1	E_b	E_6	E_b	E_6	E_b	C
12	E_b	C	E_b	C	C	C	E_b	E_2	E_b	C	E_b	E_7	E_b	C	E_b	C
13	E_b	C	E_b	C	C	C	E_b	E_b	E_b	E_b	E_b	E_b	E_b	E_6	E_b	C

Quadro 5.8. Análise do tipo de erro cometido nos testes - Grupo experimental

Analisando os resultados apresentados na tabela anterior, pudemos observar que todos apresentaram, na maioria das questões do pós-teste, algum tipo de tentativa, mesmo que incorreta. Por esse motivo, obtivemos um conjunto satisfatório de dados, o qual possibilitou classificar os principais procedimentos que conduziram o aluno ao erro.

No pré-teste, a maioria das questões estava sem resolução. Das questões resolvidas, as categorias de erros notadas foram: E_2, E_3, E_4 e E_6 (erros detectados em 11 questões). A categoria E_4 (erro decorrente da tendência ao pensamento linear) foi a mais frequente (6 casos), ocorrendo especificamente na questão 4 (itens “a” e “b”). Em seguida, notamos dois erros decorrentes de problemas na concepção de função exponencial, especificamente em resoluções de equações exponenciais diretas e dois erros decorrentes da dificuldade em interpretar problemas. Percebemos ainda, uma evidência de falha na concepção de potência. No pré-teste os alunos possuíam bagagem para resolver apenas as questões 2 e 4(item “a”). Com isso, nem todas as categorias de erros puderam ser notadas. Além disso, as categorias E_7 , E_8 e E_9 não poderiam estar presentes, visto que representavam erros localizados no conteúdo de logaritmo.

No pós-teste, apesar do grupo apresentar um bom índice de acertos, pudemos observar um número maior de ocorrência de erros se comparado ao obtido no pré-teste, o que pode ser justificado pelo fato de que todos apresentaram resoluções na maioria dos exercícios, ou seja, apenas quatro itens estavam em branco. Os erros mais frequentes foram E_5 (5 casos) seguido de E_2 e E_6 (4 casos cada), ou seja, “dificuldade em se expressar na forma escrita”, “erro decorrente de problemas na concepção de potência” e “erro decorrente de problemas de interpretação”.

Notamos que são problemas secundários, não específicos do conteúdo de logaritmos, mas que conduzem ao insucesso nas resoluções, o que vem de encontro à concepção de campo conceitual de Vergnaud. Acreditamos que as potências, a exponencial e o logaritmo pertencem a um mesmo campo conceitual, logo, deficiências nos dois primeiros conceitos inevitavelmente representarão um fator causador de dificuldades na construção do conceito de logaritmo. A dificuldade de se expressar na forma escrita e os problemas de interpretação provavelmente podem ser justificados pela análise realizada no capítulo III que mostrou a evidente valorização de questões técnicas em detrimento dos problemas e questões conceituais nos livros didáticos. Já as dificuldades relacionadas ao conceito de potência parece ter se constituído num obstáculo didático proveniente de uma falha no processo ensino-aprendizagem desse conteúdo para essa turma, já que foi um problema constante durante toda a aplicação da sequência. A categoria E_1 (erro nas manipulações algébricas básicas) ocorreu em três casos e a categoria E_3 (problemas na concepção de função exponencial) em dois. Estas três últimas categorias (E_2, E_1 e E_3) nos mostram a grande interligação entre os conteúdos matemáticos e conseqüentemente a importância de se ter o domínio de um conceito e das técnicas inerentes ao mesmo para obter sucesso na aprendizagem de um novo tema. Por fim, dos vinte e cinco erros apresentados (incluindo as questões em branco), apenas três estão localizados no próprio conteúdo de logaritmos (E_7 e E_8). Apenas um aluno errou por não estabelecer a relação entre o logaritmo e a resolução de equações exponenciais e os outros dois apresentaram problemas na técnica de cálculo do logaritmo, especificamente na técnica de mudança de base que utilizaram para resolver o item 1-a.

A categoria E_9 não esteve presente no grupo experimental. Além disso, a categoria E_4, tão presente no pré-teste, foi superada no pós, visto que neste segundo teste, este tipo de erro não teve nenhuma ocorrência. Para a resolução do exercício 4, todos os alunos utilizaram a função exponencial dada, ou seja, nenhum estabeleceu uma relação linear ao lidar com essa questão, como ocorreu no pré-teste.

Realizando uma análise de cada sujeito, observamos que nenhum cometeu o mesmo tipo de erro no pré e pós-teste. Ainda, desprezando as questões em branco, de onze questões erradas apresentadas no pré-teste, das equivalentes no pós-teste, nove tiveram resolução correta.

Vamos, nesse momento, analisar as principais categorias apresentadas pelo grupo de referência para em seguida estabelecer uma comparação dos tipos de erros apresentados pelos dois grupos.

aluno/questão	Q1/a - pré	Q1/a – pós	Q1/b -pré	Q1/b -pós	Q2 - pré	Q2 - pós	Q3 - pré	Q3 - pós	Q4/a -pré	Q4/a -pós	Q4/b-pré	Q4/b-pós	Q5 - pré	Q5 - pós	Q6 - pré	Q6 - pós
1	E_b	C	E_b	E_8	E_b	C	E_b	C	E_b	C	E_b	E_7	E_b	C	E_b	E_5
2	E_b	C	E_b	E_9	E_b	C	E_b	E_3	E_b	E_b	E_b	E_b	E_b	E_8	E_b	E_b
3	E_b	E_b	E_b	E_b	E_b	E_2	E_b	E_b	E_b	E_b	E_b	E_b	E_b	E_b	E_b	E_b
4	E_b	C	E_b	C	E_b	C	E_b	C	E_b	E_2	E_b	E_6	E_b	C	E_b	C
5	E_b	C	E_b	C	E_b	C	E_b	E_3	E_b	E_2	E_b	E_b	E_b	E_5	E_b	C
6	E_b	C	E_b	E_9	E_b	E_3	E_b	E_b	E_b	E_2	E_b	E_4	E_b	E_6	E_b	E_5
7	E_b	C	E_b	C	E_b	C	E_b	C	E_b	E_b	E_b	E_b	E_b	E_5	E_b	E_5
8	E_b	C	E_b	C	E_b	C	E_b	E_8	E_b	E_1	E_b	E_b	E_b	E_6	E_b	E_5
9	E_b	C	E_b	C	E_b	E_2	E_b	E_8	E_b	C	E_b	E_7	E_b	C	E_b	E_b
10	E_b	C	E_b	E_8	E_b	C	E_b	E_9	E_b	E_1	E_b	E_7	E_b	C	E_b	C
11	E_b	C	E_b	E_9	C	C	E_b	E_8	E_b	E_3	E_b	E_b	E_b	E_5	E_b	E_5
12	E_b	E_8	E_b	E_9	E_b	E_3	E_b	E_8	E_b	E_3	E_b	E_b	E_b	E_b	E_b	E_5
13	E_b	C	E_b	E_b	C	C	E_b	E_b	E_b	E_3	E_b	E_b	E_b	E_8	E_b	E_5
14	E_b	C	E_b	E_8	E_b	C	E_b	E_3	E_b	E_1	E_b	E_b	E_b	E_5	E_b	E_b
15	E_b	C	E_b	E_8	E_b	C	E_b	E_8	E_b	E_1	E_b	E_b	E_b	E_5	E_b	E_5
16	E_b	C	E_b	E_8	C	E_2	E_b	E_3	E_b	E_2	E_b	E_b	E_b	E_b	E_b	E_5
17	E_b	E_8	E_b	E_9	E_2	E_3	E_3	E_8	E_b	E_b	E_b	E_b	E_b	E_6	E_b	E_5
18	E_b	C	E_b	E_9	C	C	E_3	E_8	C	C	E_b	E_7	E_b	E_b	E_b	C
19	E_b	C	E_b	E_9	C	C	E_b	E_9	E_b	E_b	E_b	E_b	E_b	C	E_b	C
20	E_b	C	E_b	E_b	E_b	E_3	E_b	E_3	E_b	E_3	E_b	E_4	E_b	E_6	E_b	E_b
21	E_b	E_b	E_b	E_b	E_b	E_b	E_b	E_b	E_b	E_b	E_b	E_b	E_b	E_b	E_b	E_b
22	E_b	C	E_b	E_8	E_b	C	E_b	E_b	E_b	C	E_b	E_3	E_b	E_b	E_b	C
23	E_b	E_b	E_b	E_b	E_b	C	E_b	E_b	E_b	E_b	E_b	E_b	E_b	E_b	E_b	E_5
24	E_b	C	E_b	E_3	E_b	C	E_b	E_3	E_b	C	E_b	E_3	E_b	E_2	E_b	E_5
25	E_b	E_b	E_b	C	E_b	E_3	E_b	E_b	E_b	E_b	E_b	E_b	E_b	E_b	E_b	E_5
26	E_b	E_b	E_b	E_b	E_b	C	E_b	E_b	E_b	E_1	E_b	E_b	E_b	E_b	E_b	E_b
27	E_b	E_1	E_b	C	E_b	C	E_b	C	E_b	C	E_b	C	E_b	C	E_b	E_b
28	E_b	C	E_b	E_9	E_b	E_2	E_b	E_1	E_b	C	E_b	E_9	E_b	E_6	E_b	C
29	E_b	E_b	E_b	E_b	E_b	E_b	E_b	E_b	E_b	E_1	E_b	E_b	E_b	E_b	E_b	E_5

Quadro 5.9. Análise dos erros cometidos pelos alunos - Grupo de referência

Como já foi mencionado, este grupo realizou o pós-teste tendo consciência de que o mesmo representaria uma das notas que comporia a média de segundo bimestre. Apesar disso, ainda temos muitas questões deixadas em “branco”, o que parece demonstrar que o aluno prefere se omitir a apresentar as suas tentativas. Para exemplificar tal afirmação, podemos notar que dos nove erros ocorridos no item 1-a, seis são do tipo E_b (questões em branco). Realizando um levantamento do percentual de questões deixadas “em branco” no pós-teste, temos que, para o grupo experimental, de 104 possibilidades somente 4 questões não tinham nenhum tipo de resolução, o que representa um percentual de aproximadamente 3,85%. Já para o grupo de referência, de 232 possibilidades, 68 questões foram deixadas em branco, o que representa um percentual de aproximadamente 29,31%. Gostaríamos novamente de salientar que respostas em branco podem significar muito mais do que um não acerto, podem indicar um não comprometimento com o teste ou o medo de assumir o quanto não se sabe.

No item Q1-b, temos como principais categorias E_9, E_8 e E_b . Com exceção do erro E_b, do qual não se pode tirar nenhuma conclusão, notamos que as outras categorias representam erros localizados no conteúdo de logaritmos. Vimos que a categoria E_9 (desconhecimento do uso de instrumentos para o cálculo do logaritmo), tão presente neste grupo, não teve ocorrência no grupo experimental. Este fato parece indicar que o uso da calculadora representou um fator motivador e mais atual para o desenvolvimento do conteúdo, visto que a maioria dos elementos do grupo de referência demonstrou desconhecimento ou mesmo falta de habilidade em utilizar a tábua de logaritmos decimais.

No item Q2, dos nove erros detectados, cinco estavam relacionados com problemas no conceito de exponencial e os demais no conceito de potência. Vinte e seis alunos erraram o item Q3, sendo que pudemos notar principalmente deficiências na compreensão da função exponencial e nas técnicas de cálculo do logaritmo. No item Q4-a, vários procedimentos levaram ao insucesso, dentre eles problemas na concepção de potência, em manipulações algébricas e na concepção de exponencial. O item Q4-b foi o que teve o menor índice de acertos no pós-teste, sendo que dois terços deixaram a questão em branco. Consultando a tabela, os erros encontrados foram distribuídos em várias categorias. Porém, devido ao grande número de questões sem resolução, tudo leva a crer que a principal dificuldade era a de interpretação do problema.

O item Q5, que explorava a estimação do logaritmando seguida de justificativa, mostrou que há uma grande dificuldade em interpretar uma questão não convencional. Além disso, em certos casos o aluno colocava a alternativa correta, porém a sua justificativa escrita era totalmente confusa ou inadequada. Esse fato nos mostra a importância de se trabalhar com questões que estimulem o aluno a expressar o seu pensamento. Abaixo, apresentaremos a justificativa dada por um aluno que respondeu a alternativa correta:

“A alternativa correta é a “d” pois a base é <1”

Aluno 20 - Grupo de referência - pós-teste

Com isso, os erros encontrados neste item foram distribuídos principalmente nas categorias E_5 e E_6.

No último item (Q6), notamos que apenas sete alunos conceituaram de forma clara o logaritmo. A expressão escrita dos demais ou era muito confusa ou não representava o conceito de logaritmo. Notamos na análise das respostas, apesar de nem sempre claras, uma certa tendência em conceituar logaritmo como uma operação, com a preocupação de mostrar a sua utilidade na resolução de equações exponenciais "não diretas". Essa afirmação pode ser exemplificada pela resposta fornecida por uma aluna do grupo de referência em relação ao que era logaritmo:

"É um **cálculo** para descobrir algo que não tem saída"

Aluna 25 - Grupo de referência - pós-teste

5.4.1. Comparação dos erros e dos avanços cometidos pelos dois grupos

Segundo a análise apresentada acima, pudemos observar que os erros cometidos pelo grupo experimental praticamente não estavam localizados no conteúdo de logaritmos, visto que dos vinte e cinco erros (incluídas as questões em branco) encontrados no pós-teste, apenas três eram específicos desse tema. Na maior parte das vezes, problemas com potências, com as manipulações matemáticas básicas ou mesmo dificuldades de interpretação e de manifestação escrita constituíram os principais fatores que conduziram ao erro. Já com o grupo de referência, além desses fatores, encontramos também uma quantidade de erros provenientes de dificuldades no próprio conteúdo de logaritmo (um total de 32 erros nesse tópico), distribuídos nas questões conceituais, de técnicas de cálculo e de uso da tabela. Esse fato nos leva a crer que a abordagem utilizada para o grupo experimental forneceu uma base mais sólida para o estudo dos logaritmos, garantindo uma melhor aprendizagem deste conteúdo.

Se compararmos os desempenhos apresentados no item 1-b, o qual estava avaliando a capacidade de utilizar um instrumento para obter o resultado do logaritmo decimal, observaremos que enquanto o grupo experimental obteve acerto total, o grupo de referência atingiu pouco mais de 24%. Ao analisarmos os livros didáticos (capítulo III), vimos que todos incluem como tópico de estudo as tabelas decimais, sendo que apenas um também inclui o uso de calculadoras. O resultado obtido parece mostrar que a calculadora, além de constituir um elemento motivador e atual, representou, dentre as duas ferramentas oferecidas, a que mais facilita a obtenção dos logaritmos decimais.

O grupo experimental apresentou maiores dificuldades na concepção de potência, o que novamente nos leva a crer que este fato seja decorrente de uma falha no processo ensino-aprendizagem desse conceito para esse grupo. Porém, o grupo de referência apresentou no pós-teste um número alto de questões em branco, o que novamente salientamos que este fato pode muitas vezes “esconder” determinados procedimentos que poderiam levar a este tipo de erro.

Os dois grupos apresentaram como categoria dominante, a E_5 (dificuldade na manifestação escrita), sendo que foram encontradas dezenove ocorrências para o grupo de referência e cinco para o grupo experimental. Como vimos no capítulo III, os exercícios conceituais e de interpretação são pouco trabalhados e com isso pouco se explora do aluno a capacidade de expressão escrita.

Como o grupo de referência entregou o pré-teste praticamente em branco, não pudemos constatar a superação de erros através destes instrumentos de avaliação. Já com relação ao grupo experimental, este mostrou ter superado a categoria E_4 (pois ocorreu no pré-teste e não no pós) e não ter cometido o erro pertencente à categoria E_9. Além disso, pudemos notar que todos os tipos de erros categorizados estiveram presentes no pós-teste do grupo de referência.

Realizando uma síntese geral das análises realizadas, vimos que:

- O desempenho geral do grupo experimental foi substancialmente superior que o do grupo de referência, atingindo mais do que 75% de sucesso;

- Na análise do percentual de acertos por item, o grupo experimental apresentou índices de acerto acima de 60% em sete dos oito itens, enquanto o grupo de referência apresentou seis itens com índice abaixo de 25% de acerto.

- Todos os alunos do grupo experimental tiveram evolução, sendo que doze dos treze alunos acertaram acima de 50% e, destes, exatamente nove acertaram acima de 75%. Já no grupo de referência, apenas três dos vinte e nove alunos acertaram acima de 50%;

- Da análise qualitativa dos erros cometidos, de acordo com o que apresentamos na sessão 5.4.3, o grupo experimental não mais cometeu o erro E_4 (tendência ao pensamento linear) no pós teste. Além disso, não houve ocorrência do erro E_9, que representava o desconhecimento do uso de instrumentos para o cálculo de logaritmos. Ainda, nenhum representante do grupo experimental apresentou o mesmo tipo de erro cometido no pré-teste. Já o grupo de referência cometeu todos os tipos de erros destacados nessa análise. Portanto, concluímos que para o grupo experimental houve superação de concepções errôneas, não podendo afirmar nada a respeito em relação ao grupo de referência, visto que o pré-teste desta turma estava praticamente em branco;

- A abordagem adotada, apesar de não privilegiar técnicas de cálculo, garantiu ao grupo experimental o sucesso também em questões que envolviam algoritmos. Já o grupo de referência, só teve sucesso e ainda modesto, nas questões técnicas;

- Dos oito objetivos específicos propostos para as duas turmas, o grupo experimental atingiu de forma satisfatória sete. Já o grupo de referência, atingiu apenas dois, exatamente aqueles relacionados às questões técnicas.

Partindo desses resultados, acreditamos ter, nesse momento, informações suficientes para realizar a conclusão de nosso estudo, a qual será desenvolvida no próximo capítulo.

CONCLUSÃO

6.1. INTRODUÇÃO

No capítulo anterior procedemos com a análise quantitativa e qualitativa dos resultados de nosso estudo. Nesse capítulo apresentaremos os comentários gerais que englobam, além de uma breve descrição de nossa pesquisa, as observações e reflexões sobre as evidências ocorridas em nosso experimento. Em seguida, faremos a discussão e as conclusões, partindo dos resultados encontrados no capítulo anterior. Para tanto, teremos em mente os nossos objetivos, a questão de pesquisa e a fundamentação teórica. Por fim, faremos as considerações finais sobre o trabalho realizado.

6.2. COMENTÁRIOS GERAIS

Como já foi apresentado na introdução deste trabalho, o ponto de partida para a elaboração desse estudo foi a constatação, ainda que empírica, de que havia problemas no processo de ensino-aprendizagem do conceito de logaritmo. Na tentativa de investigar estes problemas e de buscar respostas para as dificuldades apresentadas pelos alunos nesse conteúdo, iniciamos o nosso estudo científico. Primeiramente, realizamos uma análise do principal material de apoio do professor - o livro didático- e constatamos que a abordagem apresentada na amostra analisada não oferecia um ambiente favorável para a construção do conceito, de acordo com as categorias de análise apresentadas no capítulo III. Com isso, fundamentado nas teorias psicológicas da aprendizagem e utilizando contribuições da Didática da Matemática Francesa, procuramos elaborar uma sequência didática para a introdução dos logaritmos, com a finalidade de investigar se a abordagem por nós adotada favoreceria a formação inicial desse conceito.

6.2.1. Sobre nossos pressupostos teóricos

De forma resumida, esta sequência procurou desenvolver uma abordagem baseada no modelo construtivista e visou oferecer uma forma mais significativa e moderna de conduzir os logaritmos. Procuramos envolver o aluno na resolução de situações-problema nas quais o logaritmo apareceria como uma necessidade de estudo, assumindo o papel de ferramenta de resolução de equações exponenciais. Para esta construção, utilizamos as concepções contidas na Teoria dos Campos Conceituais de Gèrard Vergnaud, o qual defende que a resolução de problemas é parte integrante do processo de formação de conceitos. Ainda, fundamentado em Piaget, procuramos criar uma série de atividades com a finalidade de levar o aluno a realizar diversos contatos com o objeto de estudo, possibilitando assim a expansão do conceito em questão, explorando através dessa abordagem, os aspectos figurativo e operativo do conhecimento. A sequência procurou explorar também a relação entre os conceitos espontâneos apresentados pelos alunos e os conceitos científicos inerentes ao conteúdo, proposta na teoria sócio-construtivista de Vygotsky. Esta teoria considera que a aprendizagem constitui um fator impulsionador do desenvolvimento. Com isso, trabalhamos toda a sequência didática em duplas, garantindo assim a exploração da zona de desenvolvimento proximal. Ainda, adotamos a calculadora como uma ferramenta cultural que assumiu o papel de auxiliar o aprendiz na obtenção rápida de respostas. Na construção de nossa sequência didática, procuramos explorar o jogo de quadros proposto na teoria de

Régine Doady, com a finalidade de garantir ao aluno o contato com o objeto de estudo sob diversos aspectos. Finalmente, durante o nosso estudo, tivemos a intenção de levantar os principais obstáculos epistemológicos e didáticos da teoria de Guy Brousseau, que poderiam eventualmente estar presentes na aquisição desse novo conceito.

6.2.2. Sobre o desenvolvimento da sequência nos dois estudos

Seguiremos apresentando, de forma resumida, as principais observações encontradas no nosso experimento, destacando a semelhança de comportamentos dos alunos dos estudos “piloto” e “principal”.

Apesar de termos adotado a realização da sequência em duplas, diante das dificuldades houve um intercâmbio de informações. Inicialmente, tínhamos o receio de que as duplas com maior dificuldade simplesmente tomassem os resultados das outras que os encontravam de forma mais rápida. Porém, observamos que, ao não vetar esse intercâmbio, o estudo se tornou ainda mais rico, visto que os alunos que apresentaram dificuldades não adotaram uma postura passiva, ou seja, faziam questionamentos, levantavam dúvidas, numa clara demonstração de que queriam realmente entender o problema. Vale acrescentar que apesar de nos dois estudos os alunos saberem que as atividades não valiam nota, todos demonstraram grande interesse e contribuíram durante o processo. Acreditamos que a mudança na forma de se trabalhar com o conteúdo, seguindo uma abordagem que procurou envolver o aluno através de situações reais, além do trabalho desenvolvido em duplas, criou um ambiente favorável para tal comportamento.

O uso da calculadora pareceu representar um fator de motivação para todos os alunos e constatamos que, apesar de apresentarem facilidade em sua manipulação, no início todos desconheciam a forma de calcular uma potência com o uso de tal instrumento. Todos demonstraram familiaridade com a tecnologia, o que acreditamos ser fruto da cultura globalizada atual, na qual o indivíduo, desde muito pequeno, já interage com as mais diversas máquinas (televisão, vídeo-game, vídeo-cassete, telefone, computadores, brinquedos de controle remoto dentre outros) no seu cotidiano. Por outro lado, pesquisas recentes (Borba,1998) apontam para a resistência que a escola ainda possui em adotar a calculadora como ferramenta de cálculo. Tal resistência pode ser a explicação para o desconhecimento dos alunos em operar com a calculadora científica em determinados cálculos.

Todos os alunos preferiram a abordagem baseada em problemas, demonstrando maior interesse nesse tipo de questão do que nas questões técnicas e conceituais, fato comprovado por Vergnaud, que defende o trabalho com situações-problema para tornar o processo de ensino-aprendizagem mais significativo, possibilitando a formação do conceito. Apesar disso, todos apresentaram grande dificuldade na interpretação dos problemas propostos, o que vem de encontro com a nossa análise dos livros didáticos, a qual verificou a discrepância entre o número de questões nas quais se privilegia a memorização de algoritmos e a quantidade de situações-problema contextualizados . Dentre as questões técnicas e conceituais, todos preferiram as do primeiro tipo, provavelmente por serem mais estimuladas e desenvolvidas na escola, o que conseqüentemente oferece maior segurança.

Durante a aplicação da sequência, notamos que os alunos apresentavam grande dificuldade de entendimento nas questões conceituais. Nos livros didáticos não havia a exploração do conceito escrito de logaritmo e, pela nossa experiência docente, parece não ser uma tendência exclusiva deste conteúdo. Porém, os alunos do grupo experimental, após o estudo dos logaritmos através de uma abordagem que valorizou constantemente a verbalização do processo de construção do conceito, apresentaram um índice de acerto acima do esperado (84,61%) na questão que pedia a conceitualização do logaritmo

Tanto no estudo piloto como no principal, os alunos apresentaram uma expressão verbal satisfatória, porém este era de qualidade inferior ao modo como trabalharam com o conceito. Já vimos que, segundo Vygotsky, esta é uma característica predominante no processo de formação de um conceito, ou seja, a aplicação de conceitos na resolução de problemas precede a análise dos próprios conceitos. Tal comportamento também está em consonância com a Teoria dos Campos Conceituais, que afirma que a aquisição do conhecimento inicia-se na ação a qual inicialmente não é explicitada.

Uma outra dificuldade evidente ocorreu na questão do domínio da simbologia matemática envolvida na definição do logaritmo. No nosso estudo, apesar da maioria dos alunos expressar um conceito verbal satisfatório sobre o logaritmo, a decodificação de sua definição matemática representou um fator complicador. Vimos que os livros geralmente ofereciam a definição matemática do logaritmo logo no início do estudo, não sendo mais retomada. Pela nossa prática docente, observamos que tratar uma definição matemática dessa maneira parece não representar um privilégio dos logaritmos. Já é difícil entendermos a definição de algo que não construímos, muito mais quando esta definição vem recheada de um sistema simbólico pouco usual em nossa vida. Conseqüentemente, é natural que o aluno não apresente facilidade na compreensão desse tipo de linguagem. Entendemos que a nossa sequência, apesar de adotar uma abordagem que privilegiou a institucionalização do conceito apenas no final do estudo, esta ainda não foi suficiente para suprir tal problema, visto que acreditamos que essa dificuldade perpassa por toda a matemática.

Ainda, havia lacunas na aprendizagem de potência e função, principalmente com os sujeitos do estudo principal, fato que em certos momentos exigia a retomada desses conceitos para a evolução do estudo dos logaritmos. Como os indivíduos do grupo experimental cursaram juntos todas as séries do ensino fundamental e a primeira série do ensino médio, acreditamos que tal dificuldade foi decorrente da abordagem adotada pela escola para o estudo de potências.

Em relação a estes dois últimos aspectos discutidos – simbologia matemática e potência - gostaríamos de retomar Vergnaud, quando este afirma que um Campo Conceitual representa um conjunto de situações cujo domínio requer uma variedade de conceitos, procedimentos e domínio de representação simbólica. Logo, as dificuldades apresentadas em outros conceitos e no domínio da simbologia matemática, inevitavelmente representariam um fator complicador para a construção do conceito de logaritmo.

A tendência ao pensamento linear foi também uma questão constantemente presente em vários momentos dos encontros, dentre eles na determinação da função do exercício 1 da primeira ficha e na construção do gráfico. Este comportamento parece evidenciar um obstáculo didático para o estudo de funções não lineares, visto que o aluno tende a generalizar para outros domínios, as propriedades inerentes ao primeiro tipo de função que aprendeu – a função de primeiro grau. Este fato, como já foi comentado, parece ter sido superado pelos componentes do grupo experimental, pois ninguém cometeu este tipo de erro no pós-teste.

Partindo das informações obtidas na análise do desempenho dos grupos nos testes, realizada no capítulo V e das evidências observadas na aplicação de nossa sequência didática, achamos que temos condições de partir para as conclusões de nosso estudo. Gostaríamos de salientar que a conclusão não se baseia apenas na "fotografia" dos resultados dos testes. Consideramos importante levar em conta também as observações notadas durante o desenvolvimento da sequência, pois acreditamos que esses cinco encontros nos forneceram ricas informações.

6.3. DISCUSSÃO E CONCLUSÕES

Nesta pesquisa objetivamos investigar se a abordagem adotada por nossa sequência favoreceria a formação do conceito de logaritmo. Para isso, procuramos trabalhar com dois grupos: o experimental – que participou do processo utilizando a nossa sequência - e o de referência – que estudou o conteúdo através da abordagem tradicional.

No capítulo V, apresentamos os comentários gerais sobre a aplicação da sequência e a análise dos resultados do pós-teste realizado pelos dois grupos, sob as óticas quantitativa e qualitativa. Partindo dessas informações, acreditamos que a abordagem de nossa sequência favoreceu a construção do conceito de logaritmo. Isto porque, apesar das dificuldades apresentadas durante a aplicação de nossa sequência, o grupo experimental obteve sucesso em todos os aspectos, o que não podemos afirmar com relação ao grupo de referência. Para que o leitor tenha clara esta afirmação, mostraremos de forma resumida os principais resultados já descritos no capítulo V. Vimos que nas análises do desempenho geral e do percentual de acertos por item, o grupo experimental atingiu um patamar consideravelmente superior que o alcançado pelo grupo de referência. Além disso, os erros cometidos pelo grupo experimental ao final do estudo não eram específicos do conteúdo dos logaritmos. Já o grupo de referência cometeu todos os erros categorizados, inclusive aqueles localizados nos logaritmos. Notamos superação de erros no grupo experimental, fato que não pôde ser verificado em relação ao outro grupo, devido ao grande número de questões deixadas "em branco".

Ainda, gostaríamos novamente de lembrar que o grupo de referência realizou o pós-teste após o estudo de todo o conteúdo de logaritmos referente a primeira série do ensino de nível médio, enquanto que o grupo experimental só teve contato com o conteúdo inicial dos logaritmos.

De acordo com o que foi apresentado no capítulo II sobre a teoria de formação de conceitos de Vygotsky, consideramos que um aluno construiu o conceito inicial do logaritmo se o mesmo adquiriu as habilidades de relacioná-lo com a exponencial, efetuar transferências contextualizando-o em novas situações concretas e abstratas, além de apresentar com suas próprias palavras as etapas da construção desse conceito. Neste caso, através dos resultados obtidos nos encontros e da análise dos testes por objetivo realizada na seção 5.3.4, podemos concluir que:

- o estabelecimento da relação entre o logaritmo e a exponencial se deu de maneira satisfatória na resolução de equações exponenciais não diretas (Objetivo III), já que 61,54% dos alunos atingiram tal objetivo. Já o estabelecimento desta relação na resolução da situação-problema não obteve êxito, visto que apenas 38,46% do grupo experimental acertou tal questão. Como já foi mencionado, vários fatores interferiram neste resultado, dentre eles erros nas manipulações algébricas básicas, lacunas na compreensão de função e problemas de interpretação;

- O grupo experimental obteve sucesso na contextualização do logaritmo em situações abstratas, pois 76,92% dos alunos conseguiram calcular logaritmos diretos, 69,23% estabeleceram estimativas do logaritmando e 100% foi o índice de sucesso no cálculo do logaritmo com calculadora;

- O conceito de logaritmo, incluindo as condições de existência, avaliado na questão 6 do pós-teste também se deu de modo satisfatório, visto que 84,61% foi o índice de acerto desta questão. Durante a sequência, pudemos notar que a verbalização das etapas de construção do conceito, apesar dos problemas já citados, foi satisfatória. Esta constatação pôde ser realizada nas questões em que solicitávamos o conceito de logaritmo decimal, as condições de existência do logaritmando e da base, as comparações dos logaritmos de base 10,2 e ½ e o conceito de logaritmo em qualquer base.

Diante desses resultados, acreditamos que a abordagem seguida pela sequência didática cumpriu o seu papel de possibilitar a construção do conceito inicial do logaritmo.

6.4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diante das análises apresentadas na seção anterior, consideramos que o nosso estudo pode ser visto como uma contribuição para a Educação Matemática. A abordagem que parte de uma situação-problema, considerando o logaritmo como uma ferramenta indispensável para a sua resolução, representou uma possibilidade viável para a aplicação em sala de aula, tendo em vista que utilizamos o horário normal de aulas para desenvolvê-la com o grupo experimental. Com isso, acreditamos que não haverá a necessidade de grandes adaptações na sequência por outro educador, caso queira utilizá-la em sala de aula. O material envolvido é de fácil aquisição, sendo que o ideal seria trabalhar com uma calculadora para cada dupla. Vale salientar que no desenvolvimento dos testes e da sequência, trabalhamos com somente seis calculadoras para oito duplas, fato que não inviabilizou o desenvolvimento satisfatório das atividades. A calculadora representou, para os alunos do grupo experimental, um instrumento extremamente eficaz, visto que possibilitou centrar a atenção no conceito e não nas técnicas de cálculo. Neste momento, gostaríamos de salientar que não defendemos o uso de tal instrumento em qualquer situação. Mesmo no desenvolvimento de nosso estudo, houve momentos em que o interesse era o de observar se o aluno conseguia estabelecer estimativas. Neste caso, pedimos para que não utilizassem tal instrumento. Concluímos então que cabe ao professor decidir em quais atividades a calculadora pode representar uma ferramenta eficaz.

Apesar da amostra do grupo experimental ser relativamente pequena se comparada à quantidade média de alunos de uma sala de aula, acreditamos que não haveria maiores dificuldades na aplicação para uma turma maior. Esta afirmativa se deve ao fato de que a sequência não exige grandes interferências do professor, e as eventuais institucionalizações poderiam ser realizadas de forma coletiva.

Gostaríamos de acrescentar neste momento, como educadores e pesquisadores, as nossas posições pessoais. Os resultados obtidos nesta pesquisa nos forneceram um enorme crescimento, além da credibilidade de que é possível desenvolver um conceito matemático em sala de aula de forma motivadora e significativa. Ficou evidente que uma abordagem que procura envolver a participação do aluno, explorando constantemente situações próximas de seu cotidiano, favorece a apresentação de um outro tipo de comportamento. Constatamos que os estudantes não assumiram um papel apático e passivo, caracterizado pela espera da "transmissão" de um conhecimento como algo obrigatório; eles passaram a assumir um papel de "construtores" de tal conhecimento, apresentando interesse e compromisso com a formação desse novo saber. As reflexões realizadas durante o estudo nos levaram à evidência da importância de todo professor ter acesso às pesquisas existentes na área de Educação Matemática, seja por leituras ou através de cursos de reciclagem, a fim de aprimorar a sua forma de conduzir um determinado tema e “sentir” a satisfação de que o seu trabalho está fornecendo resultados satisfatórios.

Pretendemos deixar claro que acreditamos que existem outras formas eficazes de se introduzir o logaritmo, baseadas em situações que procuram dar significado ao aluno. De maneira alguma defendemos que essa é a única forma de ensinar este conteúdo. Apenas acreditamos que para o grupo experimental, a nossa sequência e o uso da calculadora representaram elementos facilitadores para a construção desse conceito.

Realizando uma avaliação crítica de nosso estudo, notamos que em certos pontos poderíamos aperfeiçoá-lo. Achamos que ampliando a duração da aplicação de nossa sequência, trabalharíamos melhor certos pontos que provavelmente levariam à obtenção de melhores resultados em determinadas questões. Em primeiro lugar, achamos que seria válido trabalhar com um número maior de situações-problema. Esta afirmação se deve ao fato de acreditarmos que se o aluno tiver a possibilidade de interagir mais com este tipo de exercício, o mesmo terá condições de desenvolver melhor as habilidades de interpretação e de modelização matemática. Ainda, não estava previsto que depararíamos com tantas dificuldades no conteúdo de potências. Apesar do grupo experimental apresentar as maiores dificuldades neste tema, os componentes do “piloto” e do grupo de referência também demonstraram a existência de “lacunas” em tal tópico. Com isso, mesmo não sendo o conteúdo de potências o nosso interesse principal nesse estudo, poderíamos incluir no início de nossa sequência uma revisão desse conceito. Achamos que a questão de estimativa auxiliou em muito a formação do conceito, e portanto poderia ser mais explorada, no sentido de criar mais situações para o aluno estimar o logaritmando, o logaritmo e a base. Por fim, apesar de nossa sequência institucionalizar o conceito no final da proposta, acreditamos que poderíamos explorar mais a simbologia apresentada na definição matemática do logaritmo. A partir do observado, propomos para os pesquisadores de Educação Matemática, que trabalhem com maior ênfase a linguagem matemática de tal forma a permitir aos alunos a apropriação dessa simbologia.

Pretendemos prosseguir na pesquisa, estabelecendo contato com os alunos que compuseram o grupo experimental. Já tivemos a oportunidade de obter, através de contato com a professora de matemática desta turma, a informação de que a ampliação do conceito (estudo das propriedades e da função logarítmica) ocorreu de forma satisfatória e que esses alunos demonstraram facilidade nessa extensão.

Diante das dificuldades apresentadas no conteúdo de potência, é de nosso interesse realizar um estudo científico sobre a construção de tal conceito. Por fim, ainda como sugestões de pesquisa, acreditamos ser de vital importância desenvolver estudos sobre a relação entre a simbologia apresentada nas definições matemáticas e o significado atribuído pelos alunos.

BIBLIOGRAFIA

AABOE,A. - **Episódios da História Antiga da Matemática** - Coleção Fundamentos da Matemática Elementar. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1984.

ALMOULOUD,S. Ag. - **Caderno de Educação Matemática - Volume III - Fundamentos da Didática da Matemática e Metodologia de Pesquisa.** São Paulo: Programa de Estudos Pós Graduados no Ensino da Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 1997.

AMORIN, P.F.; LIMA, V.N. Logaritmos e exponenciais: uma linguagem para o diálogo interdisciplinar. **Anais do IV Encontro Nacional de Educação Matemática**. Blumenau: FURB, 1992.

ÁVILA, G. Como se constrói uma tábua de logaritmos. **Revista do Professor de Matemática** (n°26), 1994.

BORBA, M.C.; GRACIAS, T.S. Calculadoras gráficas e funções quadráticas. **Revista de Educação Matemática** (nº 4), 1998. p. 27-32

BORBA, M.C.; MENEGHETTI, R.C.G.; HERMINI, H.A. Modelagem, calculadora gráfica e interdisciplinaridade na sala de aula de um curso de ciências biológicas. **Revista de Educação Matemática** (nº 3), 1997. p. 63-69.

BOYER, C.B. **História da Matemática**. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 1976.

BROUSSEAU,G. **Le Contract Didactique: le milieu** . RDM, vol. 9, nº 3,1988.

_____________ **Fondements et methodes de la didatique des mathématiques**. RDM, vol. 7, nº 2. 1986.

_____________ **Les obstacles epistemologiques et les problèmes en mathématiques**. RDM, vol.4, nº 2, 1983.

CAJORI,F. **A History of Elementary Mathematics with hints on methods of teaching.** New York: MacMillan Company,1924.

CONFREY, J. **The Concept of Exponential Functions: a Student's Perspective** em "Epistemological Foudations of Mathematical Experience, Ed. L.Stefe, New York: Springer, U.S.A, 1991.

CONFREY, J.; SMITH, E. Splitting, covariation and their role in the development of exponential functions. **Journal for Research in Mathematics Education**. (26), 66-86, 1995.

CORRÊA, R.A. Logaritmos – aspectos históricos e didáticos. **Anais do I Encontro Paulista de Educação Matemática**.(85-86). Campinas: PUCCAMP, 1989.

COSTA, N.M.L. **Funções seno e cosseno: uma sequência de ensino a partir dos contextos do mundo experimental e do computador**. Dissertação de Mestrado. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 1997.

DOUADY, R. **Jeux de Cadres et Dialectique outil-objet**. RDM, vol 7, nº 2, 1986.

EVEN, R. The two faces of the inverse function prospective teachers' use of "undoing". **International Group for the Psychology of mathematics education**. (1), 37-44, 1990.

EVES, H. **An Introduction of the History of Mathematics.** Saunders - College Pub,1983.

FERREIRA, V.G.G. Conceptions as articulated in different microworlds exploring functions. **Proceedings of the 22nd. Conference of the International Group for the Psychology o Mathematics Education**. Stellenbosch, South Africa, 1998. p.9-16

FISCHBEIN, E.; JEHIAM R.; COHEN D. The concept of irrational numbers in high-school students and prospective teachers. **Educational Studies in Mathematics – an international journal.** (29), 29-44, 1995**.**

FURTH, H. G. **Piaget e o conhecimento: Fundamentos teóricos -** trad. De Valerie Rumjanek. Rio de Janeiro: Ed. Forense Universitária Ltda, 1974.

FURTH, H. G. **The Operative and Figurative Aspects of Knowledge in Piaget's Theory** em Geber,B. "Piaget and Knowing: studies in Genetic Epistmology" London: Routledge & Kegan Paul, 1977.

GENTIL, N. e outros. **Matemática para o 2º grau.** São Paulo: Ática, 1991.

GIOVANNI, J.R.; BONJORNO, J.R. **Matemática 1.** São Paulo: FTD, 1992.

IEZZI,G; DOLCE,O.; MURAKAMI,C. **Fundamentos da Matemática Elementar.** São Paulo: Atual, 1995.

IEZZI,G e outros. **Matemática 1.** São Paulo: Atual, 1993.

KIYUKAWA, R. SHIGEKIYO, C.T.; YAMAMOTO,K. **Os elos da Matemática.** São Paulo: Saraiva, 1995.

LESTER, F.K.; MAU T.S. Teaching Mathematics via Problem Solving. **For the Learning of Mathematics.** (13), 8-17,1993.

LIMA, E. L. **Logaritmos** - Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1991.

LIMA, E. L. **Meu Professor de Matemática e outras histórias** Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1991.

LORIA,G. **Storia delle Matematich dall alba della civilità al tramonto del secolo XIX**. Milano: Ulrico Hoelpi, 1982.

MACHADO, A.S. **Matemática - temas e metas.** São Paulo: Atual, 1995.

NOBILIONI, G.; VASCONCELLOS, J.F.; LANZONI, A.J.'SENO,C.H. **Coleção Objetivo - Sistema de Métodos de Aprendizagem- Álgebra I**. (livro 37). São Paulo: Centro de Recursos Educacionais,1997.

SECRETARIA DA EDUCAÇÃO DO ESTADO DE SÃO PAULO. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas- **Proposta Curricular para o Ensino de Matemática,** 2º Grau. São Paulo: CENP, 1994.

SMITH, D.E. **History of Mathematics** – (vol 1 e 2). New York: Dover Publications Inc, 1958.

TAHAN, M. **As maravilhas da matemática.** Rio de Janeiro: Bloch Editores S.A, 1976.

VERGNAUD, G. **Problem Solving and Concept Development in Learning of Mathematics**. E.A.R.L.I.(Second meeting). Tübigen: EARLI, 1987.

______________ **La théorie des champs conceptuels**. RDM 23, vol 10, pp 133-170.

VERGNAUD, G. **Epistemology and Psicology in Mathematics Education** em Nesher, P. E Kilpatrick, J. Mathematis and Cognition, Cambridge University Press, 1994.

VYGOTSKY, L. S. **Formação social da mente - O Desenvolvimento dos Processos Psicológicos Superiores.** Tradução de J. Cipolla Neto e outros, São Paulo: Martins Fontes, 1991.

_______________ **Pensamento e Linguagem** - Tradução de J.L. Camargo. São Paulo: Martins Fontes, 1993.

ANEXO I – FICHAS DO ESTUDO “PILOTO”

Ficha 1

Resolver os problemas.

1) Uma doença epidêmica dobra o número de vítimas a cada ano. Se hoje existem 300 infectados, determine (supondo que a doença não foi contida):

a) o número de infectados após um ano: ________________________________
b) o número de infectados após dois anos: ________________________________
c) o número de infectados após cinco anos: ________________________________
d) o número de infectados após 10 anos: ________________________________
e) uma função que represente o número de infectados após “n“ anos: ________________________________
f) após quantos anos o número de infectados será de 76800: ________________________________
g) após quantos anos o número de infectados será de 1228800: ________________________________

2) O valor de um certo automóvel (em reais) sofre uma depreciação de 10% ao ano. A função que representa o valor deste automóvel após "t" anos é dada por: $\mathbf{F(t)=10000.(0.9)^t}$, $0 \leq t \leq 20$.

Sabendo que a vida útil deste carro é de 20 anos, determine: (utilize a calculadora e, quando necessário, use aproximação de quatro casas decimais).

a) o valor deste carro hoje ________________________________
b) o valor deste carro após 1 ano ________________________________
c) o valor deste carro após 1 ano e meio ________________________________
d) o valor deste carro após 2 anos ________________________________
e) o valor deste carro após 2 anos e meio ________________________________
f) o valor deste carro após 3 anos ________________________________
g) o valor deste carro após 6 anos ________________________________

h) o valor deste carro após 10 anos ______________________________

i) o valor deste carro após 20 anos ______________________________

j) com os dados obtidos, construa uma tabela relacionando o tempo e o valor do carro:

Tempo	Valor do carro

l) construa um gráfico com os dados obtidos, ou seja, represente graficamente a função dada no papel milimetrado:

m) analisando o gráfico, existe um tempo "t" em que o valor do carro seja de 5000 reais? Este valor de "t" pertence a que intervalo?

n) utilizando a função dada, tente calcular o valor de "t", para que o valor do carro seja de 5000 reais:

____

____

____

o) que dificuldades você encontrou para resolver este item?

____

____

Ficha 2

1) Vamos resolver a equação obtida na ficha anterior:

____

____

2) Preencha a tabela abaixo:

N^o	Potência de base 10	Notação de logaritmo	Cálculo do logaritmo
1			
6			
8,2			
10			
29			
100			
850			
1000			
0,2			
0,84			
0			
-10			
-250			

Responda as seguintes questões:

a) o que representa cada logaritmo obtido na última coluna?

____

b) o que você notou em relação aos resultados obtidos pelo cálculo dos logaritmos de 1 a 10?

c) e dos logaritmos de 10 e 100?

d) o que aconteceria com os logaritmos entre 10000000 e 100000000?

e) entre que inteiros consecutivos está o logaritmos de 238?

f) entre que inteiros consecutivos está o logaritmo de 3495?

g) entre que inteiros consecutivos está o logaritmo de 12375?

h) Analisando os números dados (da primeira linha até a oitava), podemos notar que eles aumentam. O que ocorre com os seus logaritmos?

i) existem logaritmos de números entre 0 e 1 nesta base? O que ocorre com eles?

j) o que aconteceu quando você tentou calcular o logaritmo de zero? Tente justificar a sua resposta.

k) existem os logaritmos de números negativos nesta base? Justifique.

l) procure, baseado neste estudo, e utilizando suas palavras escrever o que é logaritmo de um número na base 10. Não esqueça de incluir as condições de existência do logaritmo de base 10.

Ficha 3

1) Preencha a tabela abaixo:

No.	Potência de base 2	Notação de logaritmo	Cálculo do logaritmo
1			
2			
3			
4			
6			
8			
12,7			
16			
0			
0,5			
0,25			
-2			
-5			

2) Responda as questões abaixo:

a) quais as dificuldades que você encontrou?

b) tente agora achar o logaritmo de 3 na base 2, transformando cada termo da equação exponencial $2^x = 3$ em potências de base 10.

c) na base 2, quando o logaritmo dará um resultado entre 1 e 2?

d) o que ocorre com os logaritmos entre 4 e 8 nessa base?

e) se o calculo do logaritmo de um número resultou em um valor entre 5 e 6, o que poderíamos dizer sobre este número?

f) entre que inteiros consecutivos está o logaritmo de 50 na base 2?

g) Tente agora, comparando as duas tabelas (de base 10 e de base 2), levantar o que há de comum entre elas.

Ficha 4

1) Preencha a tabela abaixo:

Nº	Potência de base 1/2	Notação de logaritmo	Cálculo do logaritmo
1			
2			
3			
4			
6			
8			
0,5			
0,63			
0			
-2			
-5			

2) Responda as questões abaixo:

a) Nesta base, quando o logaritmo de um número resulta num valor positivo?

---

b) estime o valor do logaritmo de 28 nesta base:

---

c) procure fazer um levantamento das semelhanças e diferenças encontradas entre esta última tabela (logaritmos de base ½) e das outras duas já estudadas (logaritmos de base 10 e de base 2).

d) Analise os casos abaixo:

d_1) $\log_1 8$

d_2) $\log_{-2}(3)$

d_3) $\log_0 5$

e) Que tipo de valores você acha que a base de um logaritmo pode assumir, garantindo assim a existência do mesmo.

f) Tente agora, com suas palavras, definir logaritmo de um número em qualquer base, considerando as condições de existência.

g) Interprete a seguinte definição: se $a > 0$, $b > 0$ e $b \neq 1$, $\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$

ANEXO II – TESTE FINAL APLICADO NO ESTUDO PILOTO

1) Calcule $\log_7 50$

2) Calcule "x" em $5^x = 134$

3) Uma pessoa aplicou 400 reais em um certo investimento que fornece 12% de juros mensais. A fórmula que fornece a quantia que a pessoa dispõe em qualquer tempo é:
   $F(t) = 400 \cdot (1{,}12)^t$
   Determine o tempo necessário para que a quantia seja de 1200 reais.

ANEXO III – PRÉ-TESTE APLICADO NO ESTUDO PRINCIPAL (GRUPOS EXPERIMENTAL E DE REFERÊNCIA)

1) Calcular:

a) $\log_6 36$ b) $\log_{10} 12$

2) Resolver em R: $9^x = 729$

3) Resolver em R: $9^x = 20$

4) Uma pessoa aplicou 300 reais em um certo investimento que fornece 5% de juros compostos mensalmente. Determine, sabendo que a fórmula que fornece a quantia que a pessoa dispõe em qualquer tempo é : $F(t) = 300 \cdot (1{,}05)^t$

a) a quantia após 3 meses

b) o tempo necessário para que a quantia seja de 1200 reais.

5) Se $\log_2 x = 2{,}8074$, então:

a) $\frac{1}{2}<x<1$ b) $1<x<2$ c) $2<x<4$ d) $4<x<8$ e) $8<x<10$

Justifique a sua resposta.

6) Para você, o que é logaritmo?

ANEXO IV – PÓS-TESTE APLICADO NOS GRUPOS EXPERIMENTAL E DE REFERÊNCIA

1) Calcular os logaritmos:

a) $\log_3 81$

---

b) $\log_{10} 75$

---

2) Resolver em R: $4^x = 64$

---

3) Determine, com uma casa decimal, o valor de x que verifica equação: $5^x = 10$

---

4) Uma aplicação financeira fornece 4% de juros compostos mensalmente. Supondo que hoje você deposite 80 reais e que não faça mais nenhum depósito ou retirada, determine:

a) a quantia acumulada após 3 meses

---

b) o tempo necessário para que a quantia acumulada seja de 400 reais.

Obs: A função que fornece a quantia acumulada após “t” meses é dada por $F(t) = 80 \bullet (1{,}04)^t$

5) Se $\log_2 x = 3{,}78$, então:

a) $1<x<2$ b) $2<x<4$ c) $4<x<8$ d) $8<x<16$ e) $16<x<32$

Justifique a sua escolha

6) Para você, o que é logaritmo?

ANEXO V – FICHAS DO ESTUDO PRINCIPAL

Ficha 1

Nomes:

____

Resolver os problemas:

1) Constatou-se que uma doença epidêmica dobra o número de vítimas a cada ano. Em determinada região existe hoje 1 infectado. Supondo que a doença não foi contida, determine:

a) o número de infectados após um ano: ______________________________

b) o número de infectados após dois anos: ______________________________

c) o número de infectados após três anos: ______________________________

d) o número de infectados após quatro anos: ______________________________

e) o número de infectados após cinco anos: ______________________________

f) o número de infectados após seis anos: ______________________________

g) número de infectados após sete anos: ______________________________

h) o número de infectados após oito anos: ______________________________

i) o número de infectados após nove anos ______________________________

j) o número de infectados após dez anos ______________________________

k) complete a tabela abaixo com os dados obtidos

tempo (período em anos)	Passos	número de infectados	Passos
0 (hoje)			
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			

l) como se dá o crescimento na primeira coluna?

m) como se dá o crescimento na segunda coluna?

n) Preencha na tabela os passos que você utiliza para passar de um elemento para outro

o) escolha dois elementos da primeira coluna e some

Número:
Número:
Resultado da Soma:

Agora, consultando a tabela, determine os correspondentes destes números na segunda coluna:

Número:	Correspondente:
Número:	Correspondente:
Resultado da Soma:	Correspondente:

Você consegue perceber alguma relação entre estes dados? Escreva esta relação.

p) Escolha outros dois números e observe se a relação continua válida

q) construa (na tabela) uma terceira coluna relacionando o número de infectados obtido em cada questão com potências de 2.

r) determine uma função que forneça o número de infectados após "n" anos.

____

____

s) determine o número de infectados após 14 anos (se quiser, utilize a calculadora).

____

____

t) determine após quantos anos o número de infectados será de 4096.

____

____

2) Uma aplicação financeira triplica o valor depositado ao final de cada ano. Supondo que a pessoa deposite hoje 1 real e não efetue nenhum depósito após este, preencha a tabela relacionando o tempo (em anos) e o valor acumulado.

Tempo	valor (em reais)
0 (hoje)	
após 1 ano	
após 2 anos	
após 3 anos	
após 4 anos	
após 5 anos	
após 6 anos	

a) Como se dá o crescimento na primeira coluna? E na segunda?

____

____

b) Preencha na tabela os passos que você utiliza para passar de um elemento para outro.

c) Escolha novamente dois números da primeira coluna e observe se a relação obtida no item "o" do exercício 1 é válida neste exercício.

d) Crie uma terceira coluna relacionando os valores obtidos (em reais) com potências de 3.

e) determine uma função que forneça o valor acumulado após "n" anos.

f) determine a quantia que a pessoa terá após ½ ano. (use a calculadora)

g) determine a quantia que a pessoa terá após 5 anos (2 anos e meio)

h) Preencha a tabela:

após ½ ano	a quantia será de
após 2,5 anos	a quantia será de
após 3 anos	a quantia será de

Para estes valores vale a relação obtida no item “n” do exercício 1?

i) determine o valor acumulado após 12 anos.

j) determine o valor acumulado após 3 anos e meio

k) determine após quantos anos o valor acumulado será de 54249

3) O valor de um certo automóvel (em reais) sofre uma depreciação de 10% ao ano. Se o valor atual é de 10000 reais, vamos determinar a função que representa o valor deste automóvel após "t" anos.

Sabendo que a vida útil deste carro é de 20 anos, determine: (utilize a calculadora e, quando necessário, use aproximação de quatro casas decimais).

a) o valor deste carro hoje

b) o valor deste carro após 1 ano

c) o valor deste carro após 2 anos e meio

d) o valor deste carro após 6 anos

---

e) o valor deste carro após 9 anos

---

f) o valor deste carro após 10 anos

---

g) o valor deste carro após 13 anos

---

h) o valor deste carro após 16 anos

---

i) o valor deste carro após 20 anos

---

j) com os dados obtidos, construa uma tabela relacionando o tempo e o valor do carro.

Tempo (em anos)	Valor do carro (em reais)

l) construa um gráfico com os dados obtidos, ou seja, represente graficamente a função dada no papel milimetrado.

m) analisando o gráfico, existe um tempo "t" em que o valor do carro seja de 5000 reais? Este valor de "t" pertence a que intervalo?

n) utilizando a função dada, tente calcular o valor de "t", para que o valor do carro seja de 5000 reais.

o) que dificuldades você encontrou para resolver este item?

FICHA 2

Nomes:

____

____

____

1) Vamos resolver a equação obtida no último encontro: $0,9^t = 0,5$

____

____

____

2) Preencha a tabela abaixo:

Etapa	**Número**	Representar o número como potência de base **10**	**Apresentar o cálculo do logaritmo**	**Representar na notação de logaritmo**
0	1			
	6			
	8,2			
1	10			
	29			
2	100			
	850			
3	1000			
3,0792				
4				
4,30103				

	100000			

3) Responda as seguintes questões:

a) o que representam os valores da primeira coluna?

---

b) o que você notou em relação aos resultados obtidos pelo cálculo dos logaritmos de 1 a 10?

---

c) e dos logaritmos entre 10 e 100?

---

d) o que aconteceria com os logaritmos entre 10000000 e 100000000?

---

e) entre que inteiros consecutivos está o logaritmo de 238?

---

f) entre que inteiros consecutivos está o logaritmo de 3495?

---

g) entre que inteiros consecutivos está o logaritmo de 12375?

---

h) marque as linhas onde os números (da 2^a coluna) são 1,10,100,10000,10000 e 100000. Estes números aumentam multiplicando-se por dez. O que ocorre com os seus logaritmos?

---

i) Tente representar o número 0,2 como potência de base 10. Em seguida tente representar 0,84 como potência de base 10.

Existem logaritmos de números entre 0 e 1 nesta base? O que ocorre com eles?

j) Tente representar o número 0 como potência de base 10. O que acontece?

Existe o logaritmo de 0 na base 10? Tente justificar a sua resposta.

k) Tente representar o número -10 como potência de base 10. O que acontece? Tente calcular o logaritmo de -250 na base 10. Existem os logaritmos de números negativos nesta base? Justifique.

l) procure, baseado neste estudo, escrever com suas palavras o que é logaritmo de um número na base 10 e quando ele existe.

FICHA 3

Nomes:

____

____

1) Preencha a tabela abaixo:

Etapa	Número	Representar o número como potência de base 2	Apresentar a notação como logaritmo	Apresentar o cálculo do logaritmo
0	1			
1	2			
	3			
2	4			
	6			
3	8			
	12,7			
4				

2) Responda as questões abaixo:

a) quais as dificuldades que você encontrou?

____

____

b) o que representam os valores da primeira coluna?

____

c) tente agora achar o logaritmo de 3 na base 2, transformando cada termo da equação exponencial $2^x = 3$ em potências de base 10.

____

d) na base 2, quando o logaritmo dará um resultado entre 1 e 2?

e)o que ocorre com os logaritmos entre 4 e 8?

f) em que intervalo estaria um número cujo logaritmo resultou em um valor entre 5 e 6?

g) entre que inteiros consecutivos está o logaritmo de 50 na base 2?

h) Tente representar o número 0 como potência de base 2. Existe o logaritmo de 0 na base 2? Justifique

i) Tente representar o número –2 como potência de base 2. O que ocorre? Tente , justificar. Verifique se existe o logaritmo de -5 na base 2. Justifique

j) Existe logaritmo de número negativo na base 2? Justifique

l) Calcule o logaritmo de 0,5 na base 2. Em seguida, calcule o logaritmo de 0,25 na base 2. O que aconteceu com os resultados? Agora, represente estes números na forma de potência de base 2. Quando o resultado do cálculo do logaritmo de um número na base 2 dará negativo?

m) marque as linhas onde os números dados (da 2^a coluna) são 1, 2, 4,8 e 16. Estes números aumentam multiplicando-se por 2. O que ocorre com os seus logaritmos?

m) Tente agora, comparando os dois estudos (logaritmos de base 10 e de base2), levantar o que há de comum entre eles.

n) Resolva o seguinte problema:

Uma população de bactérias dobra a cada minuto. Se inicialmente havia 300 bactérias, após quantos minutos esta população será constituída de 2516582400 indivíduos?

FICHA 4

Nomes:

____

____

____

1) Preencha a tabela abaixo:

Etapa	número	Representar o número na forma de potência de base 1/2	Apresentar a notação do logaritmo	Apresentar o cálculo do log
0	1			
	0,63			
1	0,5			
	0,3			
2	0,25			

Responda as questões abaixo:

a) Tente representar o número 0 como potência de base ½. Existe o logaritmo de 0 na base ½ ?Justifique.

____

b) Tente representar os seguintes números como potência de base ½:

b_1) 2 ___________________________

b_2) 4 ___________________________

b_3) 8 ___________________________

b_4) 3 ___________________________

c) Nesta base, quando o resultado do cálculo do logaritmo dá um número positivo? E negativo?

d) Tente representar o número -2 como potência de base ½. Faça o mesmo para o número -5.O que aconteceu? Justifique.

e) Existe logaritmo de número negativo na base ½ ?

f) estime o valor do logaritmo de 28 nesta base.

g) procure fazer um levantamento das semelhanças e diferenças encontradas entre esta última tabela (logaritmos de base 1/2) e das outras duas já estudadas (logaritmos de base 10 e de base 2).

h) Analise os casos abaixo:

h_1) $\log_1 8$ h_2) $\log_{-2} (3)$ h_3) $\log_0 5$

i) Que tipo de valores você acha que a **base** de um logaritmo pode assumir, para que o logaritmo exista?

---

j) Tente agora, com suas palavras, definir **logaritmo de um número em qualquer base**, considerando as condições de existência.

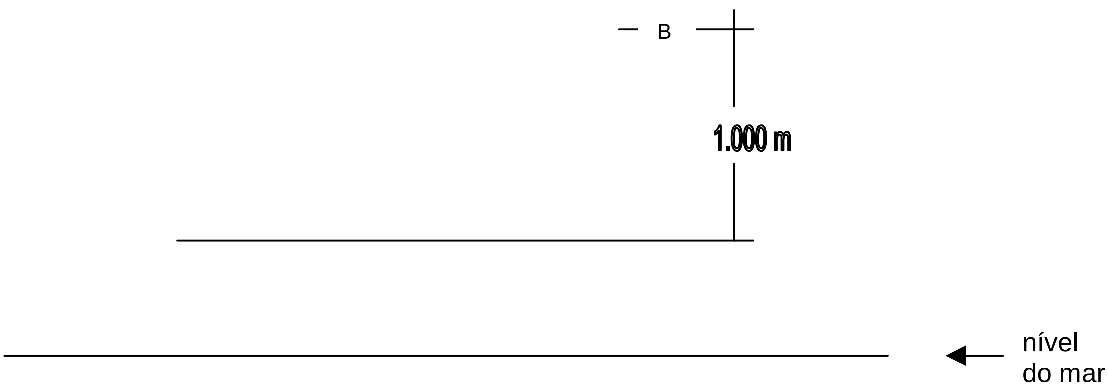
---

l) Interprete a definição matemática: Se $\log_b a = x \Rightarrow b^x = a$, para $b > 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$.

ANEXO VI – PROPOSTA CURRICULAR DO ESTADO DE SÃO PAULO (CONTEÚDO: LOGARITMOS)

1) A pressão atmosférica (a pressão que a camada de "ar" exerce sobre os objetos) ao nível do mar é igual a 1 atm (lemos 1 "atmosfera").

   Suponha que, ao se elevar um objeto de um ponto A a um ponto B, de modo que a altitude de B tenha 1000m a mais que a altitude A, a pressão atmosférica em B seja 90% da pressão em A (veja figura).



Nessas condições, determine a pressão atmosférica (em atm), com relação ao nível do mar num ponto cuja altitude é h metros.

Este problema apresentado proporciona "maior grau" de liberdade para as extensões, por causa da lei geral que o enunciado encerra. Assim, poderíamos perguntar, por exemplo, o valor da pressão atmosférica em pontos com as seguintes altitudes:

a) 500 m
b) 1,5 km
c) 2,5 km
d) 5,5 km
e) 250 m
f) 1.250 m
g) 750m
h) 2.750m

A última seqüência de cálculos de pressões atmosféricas para diversas altitudes pode levar um aluno a concluir que a variável h, que representa a grandeza altitude, pode assumir qualquer valor (dentro de certos limites para os quais a experiência física tem validade).

A grande questão que surge é: o que significa para o aluno, a frase "h pode assumir qualquer valor"?

Dependendo de trabalhos anteriores, "qualquer valor", para um aluno, poderá significar apenas um certo conjunto de números racionais de determinado tipo, ou, na melhor das hipóteses, todos os racionais, mesmo que já tenha tido contato com números irracionais. Em outras palavras, alguns alunos não conseguem distinguir números não inteiros racionais de números irracionais. Esta pode ser uma questão delicada, mas que poderá ser deixada de lado diante das características de uma turma, ou diante dos objetivos de um curso proposto para essa turma. Mesmo que o professor opte por não tocar na classificação dos números não inteiros para os alunos, em geral, isto não significa que esse tipo de classificação não possa ser trabalhada com algum aluno em particular, que esteja interessado na fundamentação de algumas questões de Matemática.

Resumindo, a variável h, na equação pressão atmosférica em ponto de altitude h igual a $0{,}9^t$ atm poderá ter vários domínios, de acordo com a formação matemática da turma com que se está trabalhando. Para efeito de continuidade dessas notas, admitiremos que h possa assumir (postuladamente) qualquer valor real positivo, mesmo que, por motivos "extra matemáticos", isso não faça sentido para algum aluno. Por exemplo: será que tem sentido a determinação da pressão atmosférica em um ponto cuja altitude é $\sqrt{2}$ km?

Vamos considerar, inicialmente, a questão da existência de um número h tal que $0{,}9^h = 0{,}5$. Graficamente, se concebermos que a curva é contínua, poderemos “acreditar” na “existência” de um valor “h” que satisfaça tal equação.

Só sabemos, realmente, resolver uma equação com potências, cuja incógnita é expoente de uma determinada base, se as potências envolvidas na equação tiverem bases iguais.

Em símbolos: se $A \cdot b^x = A \cdot b^y$, será possível concluirmos que $x = y$.

O motivo para tal conclusão também deverá ser postulado, pois é inviável, no 2º grau, a demonstração que dada uma função exponencial, o valor da função para um certo x tal que $f(x)= Ab^x$ $(A \neq 0; b > 0 \text{ e } b \neq 1)$, seja, em geral, um a um (ou injetora).

Em alguns casos, como por exemplo para x inteiro, é possível mostrar que se $A \cdot b^x = A \cdot b^y$, então $x = y$. A dificuldade (técnica) maior ocorre no caso geral quando x não é inteiro.

Em particular, a equação que "desejamos" resolver ($0{,}9^h = 0{,}5$), não possui potências de bases iguais e, portanto, não poderemos usar, em princípio, a conseqüência da afirmação que foi feita. A grande questão, neste ponto, está em mostrar que existe um mecanismo que permite "igualar as bases" de uma equação exponencial.

A descoberta desse mecanismo teve início em 1590 e foi feita por John Napier. Nos 25 anos que se seguiram, Napier se empenhou em construir tabelas que permitiam representar "qualquer" número positivo sob forma de potência de uma determinada base. Esse trabalho atraiu a atenção de muitos estudiosos da época, dentre eles, a do matemático inglês Henry Briggs que realizou um trabalho análogo ao de Napier. Briggs construir tabelas que permitiam representar "qualquer" número positivo sob forma de potência de base 10. Essas tabelas passaram a ser chamadas de "tábuas de logaritmos decimais". Tais tabelas foram construídas por um processo de aproximações sucessivas que demandavam uma "grande quantidade" de cálculos e tempo.

O conceito que estava por trás dessas tabelas era o conceito de logaritmo que, além da “utilidade computacional“ expressada pelas tábuas, teve grande importância para o desenvolvimento do cálculo diferencial e integral, a partir do século XVII. O desenvolvimento em série de funções proporcionou a confecção de tábuas logarítmicas de maneira muito mais eficiente e rápida. Atualmente, tais desenvolvimentos em séries, juntamente com o desenvolvimento tecnológico em microeletrônicas que tornaram o cálculo de logaritmos extremamente rápidos.

Utilizando-se uma tábua de logaritmos decimais, ou uma calculadora eletrônica que possui uma tecla do tipo $\boxed{\text{LOG}}$, será possível determinarmos o expoente da base 10 que deverá reproduzir um determinado número.

Para ilustrar o que foi dito, pode se tornar didático e motivador pedir aos alunos que construam o gráfico, em coordenadas retangulares, da função exponencial:

Valor da função para número $f(x) = 10^x$, onde x assume “qualquer valor“

Nessas condições, de posse de x_1 e x_2 poderíamos resolver a equação $0,9^h = 0,5$, pois esta seria transformada em uma equação de potências de mesma base.

Deverá ficar claro para os alunos que esses expoentes estão tabelados, ou podem ser obtidos por meio de uma calculadora científica.

Este, talvez, seja o momento adequado para se mostrar todo o aparato simbólico que serve para representar o conceito aqui envolvido e que muitas vezes esconde toda a simplicidade do conceito em questão.

Assim, o número x_1, que deverá ser o expoente da base 10 para reproduzir 0,9, será chamado logaritmo de 0,9 na base 10.

O número x_2, que deverá ser o expoente da base 10 para reproduzir 0,5, será chamado logaritmo de 0,5 na base 10.

As notações tradicionais são:

X_1 é o logaritmo de 0,9 na base 10 ou
$X_1 = \log_{10} 0,9$;
X_2 é o logaritmo de 0,5 na base 10, ou
$X_2 = \log_{10} 0,5$.

A consulta a tabela logarítmicas necessita todo um preparo técnico que dificulta, um pouco, a determinação dos expoentes (logaritmos).

As calculadoras científicas são muito mais práticas e rápidas. Por exemplo, para determinar o expoente da base 10, para reproduzir 0,9, digite: .9 $\boxed{\text{LOG}}$ e obtenha –0,04575749.

Para determinar o expoente da base 10, para reproduzir 0,5, digite: .5 $\boxed{\text{LOG}}$ e obtenha – 0,301029995.

O significado de cada um desses números é:

$10^{-0,04575749} = 0,9$ e $10^{-0,301029995} = 0,5$.

Logo, a equação do problema que estamos resolvendo sofre as seguintes modificações:

$0,9^h = 0,5$ (1)
$(10^{-0,04575749})^h = 10^{-0,301029995}$ (2)
$10^{-0,04575749 \,.\, h} = 10^{-0,301029995}$ (3)

Como as bases de (3) são iguais a 10, então pela afirmação feita, podemos escrever:

$-0,4575749 \,.\, h = -0,301029995$ (4)

O conceito de logaritmo na base 10 é utilizado para transformar uma equação exponencial em outra equação exponencial, equivalente à primeira, na qual todas as bases envolvidas são iguais a 10 (a tecla $\boxed{\text{LOG}}$ de uma calculadora científica fornece os expoentes respectivos).

A equação (4) é uma equação do1º grau. Logo:

$$\mathrm{h} = \frac{-0{,}3010995}{-0{,}04575749} = 6{,}578813479 \qquad (5)$$

Interpretando o valor encontrado de h, com relação ao problema proposto, podemos afirmar que à altitude aproximada de 6,57881 km, ou 6.578,81 m, a pressão atmosférica é igual a 0,5 atm.

Tendo em vista as notações introduzidas para os expoentes da base 10, de modo que fossem obtidos os valores 0,9 e 0,5. Podemos escrever como segue:

$$h = \frac{\log_{10} 0{,}5}{\log_{10} 0{,}9} = \frac{-0{,}301029995}{.0{,}4575749} = 6{,}57881\,\mathrm{km}$$

Numa calculadora científica, os procedimentos são:

Digite: . 5 $\boxed{\text{LOG}}$ $\boxed{\div}$. 9 $\boxed{\text{LOG}}$ $\boxed{=}$

De um modo geral, a equação:

$A^x = b$ (1)

Com a e b positivos e a ≠ 1, poderá ser “resolvido“ utilizando-se os logaritmos decimais que serão instrumentos para “igualar“ as bases de (1), na base 10.

Com um pouco mais de detalhe, existe (em geral, postuladamente) um número m tal que 10^m=a e existe (em geral, também postuladamente) um número n tal que 10^n=b. Logo, (1) poderá ser escrita:

$(10^m)^x = 10^n$ (2)

$10^{m\,.\,x} = 10^n$ (3)

e como em (3) as bases são iguais, então:

m . x = n

Resolvendo (4) e utilizando as notações já introduzidas, podemos escrever:

$$x = \frac{\log_{10} b}{\log_{10} a}$$

Numa calculadora científica, os procedimentos são:

Digite: b $\boxed{\text{LOG}}$ $\boxed{\div}$ a $\boxed{\text{LOG}}$ $\boxed{=}$