UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
CAMPUS DE MARÍLIA
FACULDADE DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS

SUELI SPOLADOR SIMÕES DE SOUZA

# ERROS EM MATEMÁTICA

## UM ESTUDO DIAGNÓSTICO COM ALUNOS DE 6ª SÉRIE DO ENSINO FUNDAMENTAL

Marília
2002

**SUELI SPOLADOR SIMÕES DE SOUZA**

# ERROS EM MATEMÁTICA

## UM ESTUDO DIAGNÓSTICO COM ALUNOS DE 6ª SÉRIE DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação da Faculdade de Filosofia e Ciências, Campus de Marília, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (UNESP), como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Educação.

Orientador: Prof. Dr. Vinício de Macedo Santos

Marília
2002

SUELI SPOLADOR SIMÕES DE SOUZA

# ERROS EM MATEMÁTICA

UM ESTUDO DIAGNÓSTICO COM ALUNOS DE 6ª SÉRIE DO ENSINO FUNDAMENTAL

**COMISSÃO EXAMINADORA**

____________________________________
Prof. Dr. Vinício de Macedo Santos
Universidade Estadual Paulista

____________________________________
Prof. Dr. José Carlos Miguel
Universidade Estadual Paulista

____________________________________
Profª. Drª. Leny Rodrigues Martins Teixeira
Universidade Estadual Paulista

Marília, 19 de dezembro de 2002

**DEDICATÓRIA**

Ao
Milton e
Luciana,
ao meu pai: Antonio e

à minha mãe: Águida (in memoriam).


## AGRADECIMENTOS

Ao prof. Dr. Vinício de Macedo Santos, orientador e amigo, pela sua disponibilidade, paciência, consideração e confiança manifestados durante a realização deste trabalho;

Aos alunos, professor, supervisora e diretora do colégio em que a pesquisa foi realizada pela atenção e receptividade;

Aos professores Dr. José Carlos Miguel e Dra. Leny Rodrigues Martins Teixeira pelas colaborações e oportunidade de mudanças;

Aos professores: Lúcia Tiosso (UEL, Londrina), Isabel Martins (Aveiros, Portugal), Kester Carrara, Viviane G. Villani, Eduardo José Manzini, Raul Aragão Martins e José Augusto da Silva Pontes, ambos pertencentes ao corpo docente do programa de pós-graduação da UNESP de Marília, pelos ensinamentos que contribuíram para a ampliação dos meus conhecimentos e enriquecimento deste trabalho;

À amiga Neusa Maria Marques de Souza pelo incentivo e cooperação na construção do projeto da pesquisa;

À Beatriz Carmo Lima de Aguiar (Bia), amiga e companheira, pela palavra amiga nas angústias e conquistas que permearam toda esta caminhada;

Ao esposo: Milton e à filha: Luciana pela compreensão da situação de “abandono” durante meus estudos;

Ao meu querido pai, que na humildade e inocência dos seus 85 anos, torceu para que eu “passasse de ano”, durante todo o período deste estudo;

A Deus, pela luz e segurança concedidas na elaboração, condução e conclusão deste projeto que abracei com muita humildade e seriedade.

## SUMÁRIO

SOUZA, S. S. S. de. **Erros em Matemática:** um estudo diagnóstico com alunos de 6ª série do Ensino Fundamental. 2002. 193f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Faculdade de Filosofia e Ciências, Campus de Marília, Universidade Estadual Paulista "Julio de Mesquita Filho" (UNESP).

## RESUMO

Neste estudo considera-se, de início, a hipótese de que os erros são elementos construtivos no processo de conhecimento e devem ser vistos como algo a ser compreendido; eles podem tornar-se uma importante ferramenta para diagnosticar e identificar as dificuldades e obstáculos presentes na aprendizagem da Matemática e gerar elementos que favoreçam o desenvolvimento cognitivo do aluno. O estudo desenvolve-se pautado em um referencial teórico construtivista, em uma sala de sexta série do ensino fundamental de uma escola pública de Londrina (PR), com alunos que vinham, ao longo dos anos de escolaridade, apresentando baixo rendimento. Foi feito um levantamento dos erros cometidos no cotidiano das aulas e nas avaliações com base em uma observação sistemática do trabalho realizado em sala de aula e na análise dos instrumentos de avaliação aplicados e no acompanhamento paralelo em horário extra-classe dos alunos que apresentavam maiores dificuldades. Os resultados da pesquisa mostram que, através do levantamento, diagnóstico e análise dos erros dos alunos, é possível conhecer a sua natureza, a sua origem ou possíveis causas e tratá-lo como um elemento potencialmente articulador de novos saberes, tanto para o professor como para o aluno. Para o professor como reorientador educativo, para a adoção de novas ações didático-pedagógicas; para o aluno como elemento de reflexão para entender onde e por que errou, para enxergar suas possibilidades cognitivas e vir a enriquecer e consolidar sua aprendizagem.

**Palavras-chave:** erros; investigação; análise; Matemática.

SOUZA, S. S. S. de. **Errors in Mathematics:** a diagnostic study with 6th grade students. 2002. 193f. Dissertation (Master's degree Program in Education) - Faculdade de Filosofia e Ciências, Campus de Marília, Universidade Estadual Paulista “Julio de Mesquita Filho” (UNESP).

## ABSTRACT

This study considers, from its beginning, the hypothesis that errors are constructive elements in the process of knowledge and that they must be seen as something to be understood. Errors may become an important tool for the diagnosis and identification of difficulties and obstacles present in the learning of Mathematics and to generate elements which favor the student's cognitive development. This study was conducted on the basis of a constructivist theoretical referential, with a group of sixth graders from a public school in the city of Londrina, PR, who had had a low performance rate during their school years. The identification of the errors made in their daily routine and in their evaluations was done through systematic class observation and the analysis of evaluation instruments and by parallel tutoring provided to those students with greater learning difficulties. The results show that, by means of a diagnosis and the analysis of students errors, it is possible to know their nature, origin and likely causes as well as to treat them as a potentially articulating element of new knowledge both for the teacher, as an educational guide in the adoption of new didactic and pedagogical practices and for the student, as an element of reflection to understand where and why he has made an error, to see his cognitive possibilities and to have his learning richer and solid.

**Key words**: errors; investigation; analysis; Mathematics.

# INTRODUÇÃO

A escolha do ensino da Matemática como contexto de referência para o estudo dos erros que as crianças cometem é pautada na evidência de que se trata de uma área considerada, do ponto de vista curricular, como necessária ao desenvolvimento intelectual da criança, por ser reconhecida como um amplo campo de relações, regularidades e coerências que despertam a curiosidade e instigam a capacidade de generalizar, prever e abstrair, o que favorece a estruturação do pensamento e o desenvolvimento do raciocínio lógico, além da capacidade expressiva e imaginação da criança. Tal escolha pauta-se, também, no fato de que por menos que se deseje e por mais que os estudos avancem, a Matemática continua sendo uma área em que os alunos têm baixo aproveitamento e apresenta alto índice de rejeição.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) baseados em princípios decorrentes de estudos, pesquisas, práticas e debates desenvolvidos nos últimos anos, admitem que o ensino de Matemática costuma provocar duas sensações contraditórias: da parte de quem ensina, a comprovada importância da área de conhecimento; do lado de quem aprende, a insatisfação diante do baixo rendimento, apresentado com muita freqüência, em relação à sua aprendizagem (PCN, 1997, p. 15).

Se a Matemática aparece como uma disciplina que contribui significativamente para a elevação das taxas de retenção, julgo ser necessário que se faça uma profunda reflexão sobre o trabalho educativo e possíveis causas de interferência, buscando reverter esse quadro. Considera-se aqui, que a identificação e análise dos erros dos alunos em relação às noções matemáticas constitui um instrumento importante e eficaz para conhecer o movimento e as relações do aluno no seu processo de conhecimento e pode auxiliar o professor a promover mudanças positivas no ensino da disciplina.

Sendo a Matemática uma disciplina de caráter universal, que se relaciona com as mais diferentes áreas do conhecimento como a psicologia, sociologia, economia, ecologia, etc., o seu saber tende a ser cada vez mais valorizado e torna-se imperativa a sua presença em nossa vida. Levando em conta a importância que tal conhecimento apresenta, este estudo busca compreender a forma como os alunos se relacionam com aspectos específicos da Matemática na sala de aula os quais os levam a apresentar baixo rendimento na disciplina e a não superarem suas dificuldades ao longo do processo de ensino e aprendizagem. Será que os erros que eles cometem estão sendo simplesmente assinalados?

Esta pergunta nos remete a uma observação do cotidiano vivido pelo aluno em sala de aula visando desvelar os caminhos percorridos pelo professor e alunos no sentido de identificar os principais tipos de erros e dificuldades, levantar suas possíveis causas e origem com o intuito de legitimar o papel construtivo do erro no processo e ensino e aprendizagem mostrando que, se diagnosticado, analisado e trabalhado, ele pode tornar-se um mecanismo eficaz no combate às interferências negativas e, conseqüentemente, contribuir para a melhoria do rendimento dos alunos e da qualidade do ensino.

Portanto, trabalho com a hipótese principal de que os erros são elementos construtivos dentro do processo de conhecimento e podem tornar-se uma importante ferramenta para diagnosticar e identificar as dificuldades e obstáculos na aprendizagem da Matemática possibilitando conhecer suas possíveis causas e origem.

Considero também que, através da identificação e análise dos erros cometidos pelos alunos, o professor pode planejar uma intervenção adequada no sentido de tornar o erro observável ao aluno, levando-o a tomar consciência do seu erro, oferecendo-lhe condições de refletir e compreender onde e porque errou, lutar para superá-lo e retomar o seu processo de construção do conhecimento matemático.

Para realizar a pesquisa propus-me a rastear e conhecer melhor os estudos já realizados sobre erros, análise dos erros e levantar alguns aspectos como dificuldades e obstáculos, presentes no processo de ensino e aprendizagem no sentido de favorecer a reflexão sobre a concepção que temos de erro. É meu desejo que estas reflexões possam vir a desencadear questionamentos e promover mudanças positivas em todo o processo educativo; a incrementar os saberes do professor, sua metodologia de ensino e sua compreensão da importância da Matemática.

O estudo segue uma linha de investigação voltada para a análise dos erros cometidos pelos alunos pautada na teoria psicogenética e visa detectá-los, analisá-los bem como levantar hipóteses alternativas sobre as possíveis causas ou origens, de acordo com a natureza própria do conhecimento matemático. Tem como eixo principal a observação e o estudo dos erros que os alunos cometem tanto no cotidiano em sala de aula como nas avaliações. Por acreditar tratar-se de elementos-chave para o sucesso ou não de um processo de ensino e aprendizagem, levo em consideração a organização do ensino de Matemática, a didática e o sistema de avaliação adotado bem como o saber matemático e as atitudes e comportamentos dos alunos.

O trabalho está fundamentado na epistemologia genética por tratar-se de uma teoria que discute o caráter construtivo dos erros cometidos pelo sujeito cognoscente, tomando-os como momentos do processo cognitivo e por vir revelando-se como uma perspectiva com possibilidades de esclarecer e apontar caminhos para o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem.

De acordo com a teoria piagetiana, o desenvolvimento da criança é permeado de invenções e descobertas em que os erros e acertos são inevitáveis na construção do conhecimento e reconhecidos como parte intrínseca desse processo. Sendo assim, creio que não se deve justificá-los ou evitá-los e sim analisá-los e problematizá-los transformando-os numa situação de aprendizagem. Dentro dessa visão de construção, os erros podem ser interpretados como uma tentativa de acerto onde a lógica própria foi construída em busca do acerto. A análise do processo pode constituir-se em pista interessante a ser seguida pelo professor, pois por meio dela é possível identificar a causa do erro e, então, planejar uma intervenção eficaz. Por outro lado, a simples constatação de erros, assinalamentos e punições, ainda presentes no ensino tradicional, refletem a valorização do resultado e não do processo.

O estudo se deu em uma sala de aula de sexta série do ensino fundamental da rede pública em Londrina (PR), composta por 24 alunos do sexo masculino e dois do sexo feminino, com idade entre 12 e 14 anos. A escolha da sala foi feita em conjunto com a diretora, supervisora e professor da disciplina de Matemática da escola e recaiu naquela que abriga um grande número de alunos que vinham, historicamente, apresentando baixo rendimento na disciplina.

O trabalho consistiu de observações rotineiras em sala de aula na disciplina de Matemática em que foram observados e identificados os erros mais freqüentes e persistentes referentes a todo o conteúdo curricular ministrado no primeiro semestre de 2001. Além das observações cotidianas, foram realizados encontros semanais, fora do horário regulamentar, entre final de março e junho daquele ano, com um grupo de alunos que mais apresentava dificuldades na disciplina. O objetivo desses encontros era acompanhar de perto os movimentos e estratégias dos alunos durante a resolução de exercícios e incrementar a coleta dos dados. Os estudos foram baseados em anotações feitas na sala de aula, nos encontros extra-classe e nos erros presentes nos instrumentos avaliativos.

Este trabalho é composto por três capítulos. O capítulo 1 busca suporte teórico para a pesquisa e está dividido em quatro momentos: o primeiro, traz abordagem geral sobre aprendizagem, conhecimento e desenvolvimento na perspectiva piagetiana; o segundo fala sobre atitudes e concepções que os alunos têm sobre a Matemática baseadas em estudos e pesquisas de alguns autores; o terceiro momento aborda a aprendizagem matemática, com considerações sobre a construção de conceitos matemáticos, aprendizagem de conceitos escolares e, dificuldades e obstáculos na aprendizagem da Matemática. Por fim, no quarto momento, fala sobre o erro no contexto construtivista e no processo pedagógico com abordagens de como o erro tem sido visto e trabalhado pelos professores, tanto no dia-a-dia como no processo avaliativo e, alguns estudos já realizados sobre a análise de erros em Educação Matemática. É relevante citar que levantamentos teóricos proporcionam subsídios para melhor entender e discutir a questão do erro e alguns dos problemas relacionados ao ensino específico da disciplina.

O capítulo 2 trata do desenvolvimento da pesquisa contemplando: definição do problema; hipótese; objetivos; sujeitos da pesquisa; procedimentos da coleta e registro dos dados e algumas informações sobre o universo pesquisado.

O capítulo 3 traz a apresentação, análise e interpretação dos dados, e a discussão dos resultados. Nas considerações finais procuro relacionar os diferentes elementos decorrentes das análises e dimensionar a natureza e alcance dos erros, a partir de características específicas e de regularidades entre eles.

Ao final, estão reunidos nos apêndices A e B respectivamente: o registro dos procedimentos do professor com base nas observações em classe e alguns registros e considerações sobre os encontros realizados com os alunos fora do horário regulamentar. Por fim, traz o Anexo A contendo os instrumentos avaliativos dos alunos no período pesquisado.

# CAPÍTULO 1

## REFERÊNCIAS TEÓRICAS PRINCIPAIS: discussão preliminar

### 1. 1 A Concepção de Aprendizagem, Conhecimento e Desenvolvimento na Perspectiva Piagetiana

Piaget estuda a aprendizagem de forma científica, privilegiando a capacidade do sujeito de integrar e processar informações, numa perspectiva interacionista entre o homem e o mundo, entre o sujeito e o objeto. Ele refere-se à aprendizagem como aquisição de uma resposta particular, apreendida graças à experiência, obtida de forma sistemática ou não; “refere-se, de um modo geral, à aquisição de uma conduta, ao domínio de um procedimento, à conquista de algo que passa a ser patrimônio de nossa ação; refere-se a algo específico, não importando sua amplitude" (apud MACEDO, 1994, p. 132).

Macedo (1994) fala sobre o desenvolvimento como uma aprendizagem no sentido lato, de ordem geral, responsável pela formação de conhecimentos, que é aprender a pensar, classificar, relacionar, transformar. Daí o interesse maior de Piaget em descrever e analisar antes o desenvolvimento da criança que suas aprendizagens.

A estrutura cognitiva sofre mudanças progressivas variando em intensidade ao longo do desenvolvimento intelectual. Piaget nos revela que, para cada idade, o sujeito tem um modo típico de se relacionar com o meio, determinado por uma estrutura mental característica, que estabelece uma forma particular de raciocínio. Os estágios de desenvolvimento estão baseados em dois aspectos da vida cognitiva: a estrutura, que diz respeito a como o indivíduo representa o mundo, e as operações, que indicam como o indivíduo pode atuar sobre essa representação. A seqüência desses estágios constitui-se do período sensório-motor, período pré-operacional, período operacional-concreto e período de operações formais.

A preocupação de Piaget não está centrada num saber particular, isolado, mas sim na capacidade da criança em relação ao mais geral, ao mais amplo, no qual o conhecimento particular, específico, está inserido. O cerne de seus estudos gira em torno da coordenação e do uso de habilidades inteligentes, de forma antecipatória, compensatória ou de pesquisa das causas racionais das informações recebidas.

O conhecimento consiste em uma estrutura organizada em sua totalidade, com coerência interna que permite a compreensão de informações particulares, não se tratando, portanto, de uma coleção de informações ou fatos particulares a alguns conteúdos. Piaget vê o progresso na aquisição de conhecimento como interdisciplinar, pois cada disciplina emprega parâmetros que são variáveis estratégicas para outras disciplinas, já que se agrupam e reagrupam em torno de realidades comuns.

Ramozzi-Chiarottino (1984, p.73) nos diz: “(...) conhecer é compreender (...) é atribuir significado às coisas no sentido mais amplo da palavra”. Educar para o conhecimento é formar sujeitos capazes de crítica e autocrítica, de pensamento criativo e transformador; capazes de defender seus pontos de vista; de enfrentar de maneira positiva os conflitos e as contradições e de superá-las. Educar para o conhecimento é educar para a autonomia. Diz, também, essa autora: “(...) conhecer para Piaget, não é simplesmente contemplar, imaginar ou representar o objeto; conhecer exige uma ação sobre o objeto para transformá-lo e para descobrir as leis que regem suas transformações” ( p. 47).

Piaget e seus colaboradores entendem que o conhecimento provém de fontes internas e externas ao sujeito e o reconhecem em três aspectos distintos e entrelaçados: o físico; o lógico-matemático e o social. O conhecimento físico refere-se aos objetos; pode ser adquirido através da observação e abstrações empíricas, sendo sua origem, portanto, externa ao sujeito. Ele se dá pela descoberta das propriedades físicas do objeto, ou seja, o sujeito ao exercer uma ação efetiva sobre o objeto, extrai as propriedades físicas do próprio objeto. Sendo assim, pode-se dizer que, o sujeito, ao realizar uma experiência, age sobre o objeto e, pela abstração de suas ações exercidas sobre ele, descobre as propriedades físicas, assim como as propriedades observáveis das ações realizadas materialmente.

O conhecimento lógico-matemático é de origem interna, construído pelo próprio aprendiz e consiste na construção de um sistema de relações que permite inserir os objetos nesse sistema; o sujeito desenvolve e coordena as ações e relações mentais sobre o objeto que se inscreve num quadro de relações, classificações, ordenações e medidas, através de abstrações empíricas e reflexivas. Como visto, não se trata de algo inato ou elaborado através de observação; pelo contrário, é construído pelo próprio indivíduo e não há como ser ensinado. Vale ressaltar que o conhecimento físico e o lógico-matemático estão inter-relacionados, não são multifacetados, não são fragmentados.

O conhecimento social, assim como o físico, tem fonte externa ao sujeito. É de natureza amplamente arbitrária e convencional e sua aquisição depende da interferência de outras pessoas da sociedade, mas também requer uma estrutura lógico-matemática para sua assimilação e organização. Esse conhecimento origina-se, portanto, de informações do mundo exterior como, por exemplo, o nome dado aos objetos ou regras sociais consensuais.

Sendo o conhecimento fruto de um processo de construções sucessivas com elaborações constantes de novas estruturas e partindo da premissa de que o erro expressa, em um determinado momento, uma hipótese de elaboração de conhecimento, julgo necessário, para poder discutir a questão e o lugar que ele ocupa no processo de aquisição do conhecimento, introduzir os conceitos centrais que sustentam o construtivismo piagetiano que são: a assimilação, a acomodação, a equilibração e a regulação.

É chamado de assimilação o mecanismo que o sujeito aplica ao procurar compreender o seu mundo. Assimilação, portanto, é o processo pelo qual o sujeito incorpora o objeto às suas estruturas; é dar um sentido ao objeto de conhecimento; é a seleção de informações a serem inseridas no mundo cognitivo. Dizendo com outras palavras, assimilar significa aprender com significado, pois o sujeito age e se apropria do objeto de conhecimento, atribuindo-lhe um significado próprio, já que este é integrado às possibilidades de entendimento (inteligência) até então construídas pelo sujeito. Assimilar implica, em maior ou menor grau, ajustar a ação às características do objeto. Sem a acomodação correspondente a assimilação torna-se impossível.

Quando a criança comete um erro ela emite ao professor sinais da qualidade de suas interpretações que, por sua vez, depende do nível de estruturação da sua inteligência. Sinaliza também a fragilidade da sua relação com o objeto de conhecimento e pode dar pistas importantes sobre suas reais capacidades de assimilação.

A acomodação dos elementos assimilados pelo sujeito (ajustamento) consiste em um processo complementar ao da assimilação e indica que, da mesma forma que o sujeito incorpora o objeto às suas estruturas, estas se ajustam às características do objeto novo, ou seja, modificam-se, enriquecendo o processo de assimilação. Em outras palavras, nesse processo, o sujeito modifica suas hipóteses e concepções anteriores às exigências impostas pelo novo e torna possível a assimilação. A acomodação surge, então, a partir de perturbações provocadas pelas situações novas que o sujeito enfrenta.

Conforme La Taille (1997), quando a criança, em decorrência do processo de assimilação já tiver assimilado satisfatoriamente o novo objeto, pode-se dizer que ocorreu um equilíbrio entre assimilação e acomodação. Piaget afirma que o processo de equilibração surge para sublinhar o caráter dinâmico da relação entre assimilação e acomodação.

No conjunto de seus estudos Piaget nos mostra que o indivíduo aprende, isto é, adquire conhecimento pela passagem de um estado de equilíbrio a outro através de um período de transição, durante o qual há um desequilíbrio. O alcance do equilíbrio vai depender da superação dos conflitos cognitivos (nomeados por Piaget como um estado de desequilíbrio). O conflito é caracterizado quando o sujeito toma consciência da precariedade de suas formas de assimilação em relação ao que pretende fazer ou resolver. Nesse sentido, Piaget afirma:

> É claro que numa perspectiva de equilibração, uma das fontes de progressos no desenvolvimento deve ser procurada nos desequilíbrios como tais, que obrigam um sujeito a superar seu estado atual e a procurar o que quer que seja em direções novas (apud LA TAILLE, 1997, p. 34).

A busca dessas novas direções (processo ativo do sujeito) provoca a reestruturação do pensamento e a abertura para novas condutas ainda mais ricas que as anteriores constituindo, portanto, uma rica fonte de progresso do desenvolvimento.

A aprendizagem, ao contrário do desenvolvimento, é concebida por Piaget como uma intervenção específica e intencional que se refere a uma noção determinada a ser incorporada pelo sujeito (se o sujeito tiver já construído noções elementares na seqüência da construção, em uma relação de assimilação). Daí dizer que a aprendizagem só é possível quando há assimilação ativa por um sujeito ativo.

A aprendizagem pode trazer mudanças às estruturas cognitivas do sujeito mas, por si só, não será suficiente para provocar o desenvolvimento dessas estruturas, embora, necessariamente, participe da ativação desse processo em interação com outros fatores atuantes no processo.

Como vimos, os conceitos de assimilação, acomodação e equilibração descrevem o processo de evolução da inteligência. Vale ressaltar que as regulações surgem das situações perturbadoras e que o erro, através do processo regulador, pode-se transformar em uma fonte de tomada de consciência, pois o indivíduo, ao perceber que suas ações estão de alguma forma inadequadas, pode vir a modificar seus esquemas de pensamento caracterizando-se, assim, uma situação de conflito, chamada por Piaget de perturbação (aquilo que faz obstáculo à assimilação).

Embora a psicologia genética tenha sido elaborada com um propósito essencialmente epistemológico e a teoria não tenha sido constituída com o objetivo de ser empregada na tarefa pedagógica, os educadores vêm buscando nela, cada vez mais, uma carateriização de como o sujeito que aprende forma o seu conhecimento, em busca de melhor adequar seus métodos pedagógicos ou diagnosticar problemas de aprendizagem.

O propósito central da psicologia e da epistemologia genética é considerar a passagem de uma estrutura a outra, isto é, explicar o mecanismo formador do conhecimento. Assim, o estudo do papel dos erros na aquisição do conhecimento deve incluir, além do enfoque estrutural, também o que corresponde ao processo genético e construtivo. Nesse sentido, a teoria da equilibração possibilita delinear a fonte dos comportamentos errôneos e os mecanismos de sua superação (CASTORINA, 1988).

É inegável que muito se fala em construtivismo. Mas, em que consiste essa proposta? Como se dá a aprendizagem nessa perspectiva? Piaget concebe a aprendizagem como uma aquisição diferente da maturação e, entre os fatores explicativos, introduz a noção de equilibração, da qual dependem as estruturas lógicas. Por sua vez, as estruturas lógicas caracterizam-se face à sua reversibilidade, isto é, há uma combinação de fatores extrínsecos e intrínsecos ao sujeito, que explicam a aprendizagem, que passa a apresentar uma proposta epistemológica diferente, contraposta ao apriorismo e ao empirismo, defendendo uma probabilidade crescente de equilibração entre as ações do sujeito. A essa proposta alternativa Piaget chamou de construtivismo (CASTRO, 1998).

O construtivismo opõe-se à idéia de que o conhecimento pode ser adquirido através de meras cópias dos objetos percebidos ou da verdade como transmissão, expressa pelo trabalho de quem sabe sobre quem não sabe, onde a revelação de uma verdade é tida como perfeita, e deve ser transmitida bem, sem erros ou diversificações (empirismo). O construtivismo nega que a inteligência seja *uma página em branco* onde diversas experiências ou lições vão-se acumulando ao longo de nossa vida. O construtivismo opõe-se também às concepções inatistas, que concebem o desenvolvimento como puro desenrolar de um programa inscrito nos gens.

Macedo (1994) fala do construtivismo como produto de uma ação espontânea do sujeito ou apenas desencadeada, mas nunca induzida. Diz, ainda, que no construtivismo o conhecimento só tem sentido como uma teoria da ação (em sua perspectiva lógico-matemática) e não como uma teoria da representação. Nessa perspectiva, o aluno é o agente da construção do seu conhecimento.

Em uma abordagem geral, Piaget refere-se ao construtivismo como um conjunto de teorias que afirmam que a evolução da inteligência é fruto da interação do sujeito com o meio, onde, através de um trabalho ativo de ação e reflexão ele cria ferramentas cada vez mais completas para conhecer o universo. Esta teoria opõe-se à idéia de que o conhecimento pode dar-se através de mera cópia ou transmissões verbais, ou que a inteligência seja produto de lições repetidas e acumuladas ao longo da existência.

Na concepção construtivista, a criança constrói o seu conhecimento fazendo conexões entre a realidade em que vive e os conhecimentos já adquiridos. A aprendizagem se dá através de descobertas, de invenção e assim a criança vai criando, de maneira progressiva, novos conhecimentos e novas maneiras de pensar. Nesse processo, a ênfase recai na maximização do desenvolvimento e não apenas na busca de resultado. Para Piaget, o importante é a ação física ou mental realizada pela criança; os erros e acertos são vistos como produto dessa ação; são detalhes, conseqüências do processo de desenvolvimento (apud MACEDO, 1994).

Piaget (1978) afirma que nossa ação física ou mental depende de dois sistemas cognitivos: o sistema do fazer e o do compreender. No plano do fazer, o erro causa frustração em vista de um resultado esperado. Nesse caso, desde que o objetivo e o resultado estejam claros para a criança, ela pode rever um procedimento indevido e corrigi-lo, alterá-lo ou aperfeiçoá-lo. No plano do compreender, o resultado não é o mais importante. O principal é o entender e ter o domínio da estrutura de uma determinada ação. Errar significa deparar-se com contradições, conflitos e falhas na hipótese inicial; corresponde a lacunas e falta de articulações com aquilo que se faz.

A educação pautada no construtivismo postula a formação de um aluno mais atento aos processos de seu raciocínio. Esse tipo de educação propõe que o aluno participe ativamente, através da experimentação e da pesquisa em grupo; estimula a dúvida e o desenvolvimento do raciocínio; busca a formação de pessoas participativas, questionadoras, investigadoras, cooperadoras e com mais desembaraço na elaboração do próprio conhecimento; procura despertar, por assim dizer, no aluno, um senso de autonomia e de participação.

## 1.2 Atitudes e Concepções sobre a Matemática

Gómez-Granell (1998) fala que a Matemática é um dos conhecimentos mais valorizados na sociedade moderna e ao mesmo tempo é considerada de difícil acesso à maioria da população e, em razão disso, ela é vista como um filtro seletivo do sistema educacional. A autora acredita que ainda persiste a crença, compartilhada por um grande número de professores, pais e cidadãos em geral, de que a Matemática é uma disciplina *difícil de ensinar e aprender*, em razão de ser *difícil e chata.* Acredita que essa idéia está baseada no fato de que a natureza do conhecimento matemático é diferente, em muitos aspectos, dos outros tipos de conhecimento, possuindo, por exemplo, um caráter de abstração muito maior que qualquer outro conteúdo; é profundamente dependente de uma linguagem específica, de caráter formal, que difere muito das linguagens naturais. A autora fala da necessidade de erradicar essa idéia de *que a Matemática é algo excessivamente abstrato, difícil e inacessível*. Embora reconheça que possam existir tendências ou estilos cognitivos que favoreçam o raciocínio abstrato e outros fatos que dificultem o raciocínio matemático, ela acredita que a maior parte das pessoas pode aprender Matemática sem nenhuma dificuldade, desde que a aprendizagem mantenha vínculo com o contexto e situações sociais e culturais do indivíduo.

Também com relação à questão de como a Matemática é vista em nossa sociedade, Lerner (1995) fala do resultado de uma pesquisa na qual os pais entrevistados são unânimes em apontar a Matemática como disciplina de difícil aprendizagem. Por outro lado, os próprios professores confirmam os pais: eles também consideram a Matemática algo *muito difícil* de passar ao aluno. Nesse sentido, mestres e pais iniciam as crianças numa *carreira* destinada ao fracasso.

A pesquisa de Fraga (1988) também dá a entender que alunos, pais e professores demostraram insatisfação com relação à Matemática elementar, vendo-a como difícil e tomando o fracasso como processo natural. Diante disso, é comum recorrerem a apoios e recuperações pedagógicas no sentido de amenizar a situação e, por vezes, aceitar o fracasso passivamente como um fato consumado e até irreversível. Fraga relata que, ao longo de sua experiência com crianças de séries iniciais que apresentam problemas de aprendizagem, vem-se consolidando a crença de que no processo de ensino e aprendizagem o emissor, o meio de transmissão e a forma como o receptor aprende estão fortemente articulados.

Sabe-se que os maiores índices de reprovação escolar ocorrem na Matemática e que se trata da disciplina que mais causa medo e aversão aos alunos. Para Cauzinille-Marmèche e Weil-Barais, os professores acreditam que o erro cometido pelos alunos "é devido à falta de conhecimento para a qual preconizam a terapia da clássica repetição da explicação e dos exercícios", produzindo um resultado ineficaz (apud TEIXEIRA, 1997, p.48). Com isso, muitas vezes os professores não acreditam que esses alunos podem aprender e passam a vê-los como desinteressados, limitados e incapazes de trabalharem com dados mais complexos. O que acontece é que alunos, mesmo sabendo trabalhar corretamente certas situações, fracassam diante de situações próximas, a partir do momento em que essas situações são modificadas, devido às limitações de seu conhecimento.

A comprovada importância da Matemática apoia-se no fato de que desempenha papel decisivo, pois através dela é possível solucionar problemas da vida cotidiana; tem muitas aplicações no mundo do trabalho e desempenha um papel essencial na construção de conhecimentos ligados a outras áreas curriculares. Do mesmo modo, interfere consideravelmente na formação de capacidades intelectuais, na estruturação do pensamento e na agilização do raciocínio dedutivo do aluno.

Apesar dos alunos considerarem a Matemática como um conhecimento de relevada importância em suas vidas, a idéia ainda mais difundida é que, como disciplina escolar, ela é considerada como uma das mais difíceis e da qual poucos gostam. Portanto, é premente a necessidade de modificar as atitudes e concepções que eles têm em relação à disciplina, bem como as crenças e concepções dos professores, pois o modo como os professores se relacionam com a Matemática produz reflexos nas relações dos alunos com a disciplina.

Nesse sentido, acredito que a atitude pedagógica exerce forte influência na relação do aluno com a disciplina: se o professor concebe a Matemática como um corpo de conhecimento organizado onde impera a lógica, a exatidão e o rigor, a visão do aluno e o seu desempenho será de um jeito; já se a Matemática for trabalhada como uma atividade humana, onde há lugar para o erro e para a reconstrução do conhecimento, em que é possível retirar prazer pela realização de atividades de exploração e descoberta, associadas ao cotidiano e à realidade das crianças, o rendimento e o gosto pela disciplina será bem diferente e, provavelmente, o mito de que a Matemática é *difícil e chata* deixará de existir.

## 1.3 A Aprendizagem Matemática

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (1997), a aprendizagem em Matemática está ligada à compreensão, ou seja, à apreensão do significado. Apreender o significado de um objeto ou acontecimento pressupõe vê-lo em suas relações com outros objetos e acontecimentos. Sendo assim, deve-se promover uma abordagem em que tais relações sejam favorecidas e destacadas, pois o significado da Matemática para o aluno resulta das conexões que conseguir estabelecer entre ela e as demais disciplinas, entre ela e o seu cotidiano e entre os diferentes temas matemáticos.

### 1. 3.1 A construção de conceitos matemáticos

É consenso que a escola assume um papel fundamental na construção de conceitos científicos pelos alunos. Para tanto, ela deve levar a criança a perceber a articulação entre conceitos incluindo-os num sistema hierárquico de abstrações. Sendo assim, a criança, ao tornar-se consciente desse sistema conceitual e ser capaz de localizar nele o lugar de cada conceito, passa a ter um raciocínio muito mais ágil e flexível. Vale ressaltar que, para que um conceito se torne consciente, é necessário que esteja incluído em um sistema no qual conceitos mais abstratos englobem os menos abstratos (DAVIS e OLIVEIRA, 1992). O processo de elaboração de um sistema conceitual requer a construção de muitas e diversificadas funções psicológicas, incluindo abstração, comparação e diferenciação, etc. Construído esse sistema, a forma de pensar e o modo de adquirir conhecimentos sofrem radical alteração.

Uma proposta educacional que coloca o aluno como centro do processo, enfatizando-o como um ser ativo no processo de construção de seu conhecimento, parte do princípio de que o aluno está constantemente interpretando seu mundo e suas experiências e essas interpretações ocorrem inclusive quando se trata de um fenômeno matemático. São as suas interpretações e o significado que a situação tem para a criança que a levarão, de fato, ao verdadeiro saber matemático.

Entendo que o conhecimento matemático deve ser apresentado aos alunos como historicamente construído e em permanente evolução. O contexto histórico possibilita ver a Matemática em sua prática filosófica, científica e social e contribui para a compreensão do papel que ela desempenha na formação básica de todo cidadão e, por que não dizer, do lugar que ela ocupa na história do conhecimento. Conhecer a construção histórica dos fatos matemáticos permite aos alunos não só uma maior compreensão da evolução dos esquemas conceituais e as dificuldades epistemológicas inerentes ao conceito a ser trabalhado, mas também o enriquecimento da sua herança cultural.

A construção de conceitos pela criança, enquanto instrumentos do seu pensamento, se dá tanto com base na sua experiência individual como a partir dos conhecimentos transmitidos através da interação social, especialmente na escola. Os conceitos provindos da experiência individual são os chamados de espontâneos. Estes se referem a objetos e situações observados, manipulados e vivenciados diretamente pela criança. Os conceitos adquiridos na escola, e através dela, são chamados de conceitos científicos por estarem ligados a eventos não diretamente acessíveis à observação ou ação propriamente dita. Sendo assim, conceitos espontâneos e científicos diferem entre si por se pautarem ou distanciarem da experiência concreta, implicando, necessariamente em processos distintos de construção (DAVIS e OLIVEIRA, 1992).

Temos visto que umas das boas formas de aprendizagem de conceitos é encontrá-los numa multiplicidade de contextos e vê-los expressos sob formas variadas e em níveis crescentes de complexidade, pois assim pode garantir mais e maiores oportunidades de se integrarem no sistema cognitivo do aluno. A organização dos temas incluídos nos currículos envolve uma determinada concepção dos processos de aquisição dos conhecimentos. O que tem predominado até agora é um saber fragmentado, isolado, em *períodos breves e bem delimitados,* de acordo com as seqüências determinadas sobre a base da análise do próprio saber. As escolas deveriam selecionar os conceitos e as capacidades mais importantes a salientar, de modo a poderem concentrar-se na qualidade da compreensão e não na quantidade de informação apresentada. A organização deve privilegiar o contexto especifico em que os conhecimentos são adquiridos dando-lhes significação e valor funcional durante sua aquisição (GÁLVEZ, 1996).

Ferreira (1963) resume a natureza dos conceitos como sendo "conteúdos mentais elaborados a partir de experiências correlatas e que se caracterizam por sua generalidade, diferenciação, abstração e simbolização"(p.35). Ressalta o aspecto evolutivo na formação de conceitos, uma vez que eles não permanecem fixos, mas se enriquecem com as novas experiências do sujeito e à medida que ele adquire novos conhecimentos, altera o seu modo de ver e interpretar as coisas e os conceitos, sem que haja um limite definitivo, subentendendo um contínuo enriquecimento de significado e relações: "crescem em determinadas linhas ou direções, aperfeiçoam-se em extensão, clareza e profundidade" (p.43).

A concepção construtivista defende que o ensino e a aprendizagem da Matemática devem ocorrer mediante a construção progressiva das estruturas operatórias pela atividade do sujeito. Com isso, para ensinar Matemática deve-se, de início, priorizar a construção dos conceitos matemáticos pela ação da criança, através de sua experimentação ativa, para então mais tarde trabalhar a formalização desses conceitos através da linguagem dos sinais operatórios. Essa concepção privilegia o espaço da escola em que a Matemática passa a gerar situações-problema que possibilitam o desenvolvimento ou o aprimoramento das estruturas da inteligência. Nesse caso, o conteúdo matemático confunde-se com a própria manifestação das estruturas que estão sendo construídas e expressas através de uma linguagem de signos operatórios e, desse modo, o sujeito vai, progressivamente, se apropriando dessa linguagem, devido à necessidade de registrar suas descobertas e deduções e de ser entendido pelos outros.

Desse modo, pode-se dizer que a idéia de aprendizagem operatória de conteúdos escolares se baseia no fato de que todo conhecimento é resultado de um processo construtivo e não de um processo instantâneo de compreensão e, sendo assim, somente tem significado o conhecimento resultante de construção pelo indivíduo. Se isso não ocorrer, o conhecimento fica atrelado à situação de aprendizagem inicial, não se constituindo, portanto, um conhecimento generalizável (TEIXEIRA, 1992).

Portanto, a aprendizagem operatória supõe a capacidade de generalizar. Por outro lado, adquirir um conhecimento não significa poder aplicá-lo imediatamente para todos os casos possíveis, pois a utilização de um conhecimento depende das condições do contexto operacional. Para Teixeira (1992), "o contexto operacional diz respeito ao conjunto de operações, abstrações, relações, etc... ou pré-operações que acompanham a realização de uma determinada ação" (p. 84). Diz ainda que um raciocínio está sempre vinculado a um conteúdo, nunca se dá no vazio; é resultado de outras operações ou pré-operações cujo grau de complexidade pode distorcer ou até mesmo impossibilitar o raciocínio. A realização de uma operação não deve ser vista como elemento funcional isolado, porquanto está sempre relacionado ao seu contexto operacional.

Em geral podemos dizer que, aprender operatoriamente não significa saber resolver problemas específicos apenas da escola, mas sim encontrar soluções para problemas impostos pela realidade. O aprendizado operatório não se limita a encontrar respostas comprometidas com o êxito, mas com a construção, com a elaboração da resposta, mesmo que não seja a mais apropriada para o determinado problema. Para tanto, o professor deve organizar e provocar situações em que certos conhecimentos se apresentem como necessários; deve, ainda, acompanhar as etapas de construção realizadas pelos alunos; levá-los a comparar entre si as respostas por eles encontradas, bem como a confrontá-las com a realidade, através de situações que os levem a tomar consciência das suas contradições e então vir a superá-las.

### 1.3.2 A aprendizagem de conceitos escolares e a questão do erro na visão de alguns autores

De acordo com as considerações feitas até agora, julgo oportuno pontuar certos aspectos de alguns estudos sobre a aprendizagem de conceitos escolares e a questão do erro para melhor fundamentar este trabalho. Os estudos contemplados são: os de D. Ausubel, que se preocupa com o processo da compreensão, transformação, armazenamento e uso da informação envolvida na cognição para explicar teoricamente o processo de aprendizagem; os de G. Vergnaud, que estão focados no desenvolvimento da formação de conceitos e no papel dos significados representados pelos invariantes operatórios; e os de Brousseau, que defende a aprendizagem como uma modificação do conhecimento que o aluno deve produzir por si mesmo, através de situações propiciadas pelo professor.

Iniciando pela teoria de Ausubel, temos que a estrutura cognitiva de um indivíduo é um complexo organizado resultante dos processos cognitivos através dos quais ele adquire e utiliza o conhecimento. Para o autor, à medida que conceitos relevantes e inclusivos estejam adequadamente claros e disponíveis na estrutura cognitiva do indivíduo, novas idéias e informações podem ser aprendidas e retidas servindo, assim, de ancoradouro para novas idéias e conceitos (MOREIRA e BUCHWEITZ, 1987).

A idéia central dessa teoria, definida por Ausubel como aprendizagem significativa, consiste em um processo no qual uma nova informação é relacionada a um aspecto relevante, já existente da estrutura de conhecimento de um indivíduo. O interesse de sua teoria está voltado para a estruturação do conhecimento tendo por base as organizações conceituais já existentes que funcionam como estruturas de ancoragem e acolhimento de novas idéias, isto é, permite a integração, interligação, ponte ou ancoragem de outros conhecimentos num mesmo sistema. Trata-se, portanto, de um processo interativo entre o material recém-adquirido e os conceitos já existentes (chamados de subsunçores) que possibilita ao aluno utilizar o conhecimento já adquirido para incorporar novos conhecimentos, modificando, desse modo, a sua estrutura cognitiva ( NOVAK, 1981; RABELO, 1998).

Essa teoria está baseada na suposição de que as pessoas pensam com conceitos, o que revela a sua importância para a aprendizagem, pois um conceito comunica o significado de alguma coisa, podendo ser definido como um termo que representa uma série de características, propriedades, atributos, regularidades e/ou observações de um objeto, fenômeno ou evento.

Do ponto de vista ausubeliano, a aprendizagem de conceitos é facilitada quando os elementos mais gerais, mais inclusivos de um conceito são introduzidos em primeiro lugar e posteriormente, então, esse conceito vai sendo progressivamente diferenciado em termos de detalhe e especificidade. É o que Ausubel chama de princípio da diferenciação progressiva. De acordo com esse principio, o ensino de um conteúdo deve ser organizado de modo a se iniciar pelas idéias mais gerais e mais inclusivas para, somente então, estas serem progressivamente diferenciadas em termos de detalhe e especificidade. Dito de outra forma, deve-se começar pelos conceitos mais gerais, para depois, progressivamente, apresentar os intermediários e então chegar ao mais específico. Contudo, devem-se fazer constantes referências aos conceitos de ordem mais geral, primeiro para não perder de vista a idéia do todo e, depois, para agregar novos significados, elaborar cada vez mais o “geral”. Isto nos remete a refletir sobre a importância de fornecer previamente ao aluno idéias gerais às quais novas idéias possam ser relacionadas (MOREIRA e BUCHWEITZ, 1987).

Ao explicar o mecanismo de esquecimento (questão do erro), Ausubel indica três fases distintas durante a aprendizagem receptiva significativa e a retenção. A primeira fase consiste na *aprendizagem* propriamente dita e no surgimento de fenômenos com um certo grau de dissociabilidade; a segunda é concernente à *retenção* dos significados adquiridos ou à perda gradual de dissociabilidade das idéias em que pode ocorrer uma perda parcial; a terceira fase envolve a *reprodução* do material retido.

Cada fase, por sua vez, contribui de forma específica, para avaliar discrepâncias entre o material de aprendizagem e novas idéias que se estabelecem na estrutura cognitiva. Elas explicam as diversas *fontes* de erro na memória que são também *fontes* de esquecimento. Durante a fase da aprendizagem, significados vagos, difusos, ambíguos ou errôneos podem emergir, no início do processo, pela ausência (ou não-disponibilidade) de idéias subsunçoras relevantes na estrutura cognitiva, pela instabilidade ou falta de clareza dessas idéias ou em razão da falta de discriminação das idéias a serem aprendidas e dos próprios subsunçores. Isso acontece principalmente quando o aluno não tem autocrítica suficiente ou a necessidade de adquirir significados precisos.

Segundo Ausubel (1980), se ele tivesse que reduzir toda a psicologia educacional a um único princípio, diria que o fator singular mais importante que exerce influência na aprendizagem é o conhecimento prévio do aprendiz. Na visão do autor, basta que se descubra o que o aluno já sabe para então basear os ensinamentos.

Os estudos de G. Vergnaud sobre a aprendizagem de conceitos escolares estão voltados para o desenvolvimento da formação de conceitos e o papel dos significados representados pelos invariantes operatórios que, em Matemática podem ser objetos, propriedades, relações e processos, ou mesmo proposições (Ex.: 8 é divisor de 24, etc.), elementos esses trabalhados pelo pensamento para organizar a ação, chamados também de conceitos em ação.

A pesquisa de Vergnaud centra-se nos procedimentos ou estratégias que as crianças desenvolvem na tentativa de encontrar soluções para problemas na busca de desvendar os processos cognitivos envolvidos nessa ação, tanto de ordem lógica quanto simbólica. O autor entende que o desenvolvimento dos instrumentos cognitivos das crianças ocorre no processo de aquisição do conhecimento e que o conhecimento surge de problemas a serem solucionados no cotidiano do sujeito e pela concepção prévia que ele já tem das relações matemáticas. Portanto, um conceito não pode ser reduzido à sua definição, principalmente se nos interessarmos por sua aprendizagem e seu ensino, pois é através das situações e dos problemas a resolver que um conceito adquire sentido para a criança (VERGNAUD, 1993).

Vergnaud desenvolve toda uma teoria que visa o estudo do significado dos conceitos no contexto da sala de aula. Ele defende que o conhecimento deve ser desmembrado em áreas bem amplas em que cada uma delas corresponde a um espaço de situações-problema que requer conceitos e procedimentos em estreitas conexões. Considera que um conceito não se forma com um único tipo de situação e que uma situação, para ser analisada, requer mais de um conceito e a formação dos conceitos, que permite analisar e tratar as situações demanda bastante tempo ( FREITAS e PAIS, s/d).

Vergnaud (1993, p.8) ensina, portanto, que um conceito supõe uma trinca de conjuntos C= (S,I,Y), sendo:

1º) o conjunto de situações (S) que dá sentido ao conceito (referência);

2º) o conjunto das invariantes (I) em que se baseia a operacionalidade dos esquemas (significado);

3º) o conjunto das formas de linguagem (ou não) (Y) que permite representar simbolicamente o conceito, suas propriedades, as situações e os procedimentos de tratamento (significante).

Complementando o raciocínio, temos que um conceito envolve uma multiplicidade de processos ligados a muitas situações, invariantes e representações. Sendo assim, não se pode estudar um conceito isoladamente, é preciso mapear os elementos envolvidos através do “campo conceitual” definido por Vergnaud como um “conjunto de situações cujo domínio requer uma variedade de conceitos, procedimentos e representações simbólicas fortemente unidos uns aos outros” (apud TEIXEIRA, 1992, p. 91).

A teoria dos campos conceituais, criada por Vergnaud, é uma teoria cognitivista baseada em um princípio de elaboração pragmática do conhecimento, que embora inicialmente tenha sido elaborada para explicar o processo de conceitualização progressiva das estruturas aditivas, das estruturas multiplicativas, das relações entre número e espaço e da álgebra, não é específica da Matemática. O objetivo principal da teoria é propor uma estrutura que permita compreender as filiações e rupturas entre conhecimento, do ponto de vista de seu conteúdo conceitual, em crianças e adolescentes, por entender que nessa fase de desenvolvimento os efeitos da aprendizagem e do desenvolvimento cognitivo ocorrem sempre em conjunto, entendendo-se por *conhecimento* tanto as habilidades quanto as informações expressas. A noção de campo conceitual, que dá significado aos conceitos, é ampla e complexa e requer muito mais do que o domínio teórico do conceito. Um aluno, por exemplo, não constrói um conceito em resposta a um problema, mas constrói um campo de conceitos que tomam sentido num campo de problemas. A construção se dá através da articulação com vários outros conceitos e por meio de uma série de retificações e generalizações. O conjunto de situações que dará significado aos conceitos deve estar diretamente associado a didática praticada no dia-a-dia (FREITAS e PAIS s/d).

Sobre a questão do erro, Vergnaud (1982) entende que ele é parte integrante do processo de aprendizagem podendo ser visto como revelador dos significados com os quais as crianças trabalham; da defasagem entre o significado e significante e da explicitação das invariantes que constroem a respeito de um conjunto de situações. Para ensinar conceitos matemáticos e até mesmo para transformar os conceitos prévios dos alunos em conceitos mais elaborados, os professores precisam estar conscientes da importância do papel que a experiência cotidiana tem na formação de conceitos; precisam ter clareza das dificuldades que os alunos têm em compreender novas relações, em fazer novas associações; precisam conhecer os tipos de erros que eles cometem e, então, promover situações que propiciem o agregamento de novas informações e novos conhecimentos aos já previamente adquiridos, e com isso a ampliação dos conceitos já existentes.

Nesse sentido, Vergnaud ( 1993, p. 25) nos diz:

> o funcionalismo cognitivo do sujeito em situação depende do estado de seus conhecimentos, implícitos ou explícitos. Deve-se, pois, dar grande atenção ao desenvolvimento cognitivo, às suas continuidades, rupturas, passagens forçadas, à complexidade relativa das classes de problemas, procedimentos e representações simbólicas, à análise dos erros principais e dos principais insucessos.

Para Brousseau (1988), a aprendizagem deve ser considerada como uma modificação do conhecimento que o aluno deve produzir por si mesmo, cabendo ao professor propor situações que permitam colocar a criança em contato com problemas reais. Para tanto, é necessário criar situações de ensino em que o saber apareça para o aluno como um meio de selecionar, antecipar, executar e controlar as estratégias que aplica à resolução do problema formulado pela situação didática. A situação deve proporcionar a significação do conhecimento para o aluno, de modo que ele construa um conhecimento contextualizado, em contraste com a seqüenciação escolar habitualmente praticada em que a busca das aplicações dos conhecimentos antecede a sua apresentação, fora do contexto.

Na visão desse autor, os problemas de ensino são, também, problemas de didática. Ele defende o estabelecimento de uma negociação entre professor e alunos a qual chama de contrato didático. Esse contrato com componentes explícitos e implícitos, define as regras de funcionamento dentro da situação vivida como a distribuição de responsabilidades; a determinação de prazos para a execução de diferentes atividades; a permissão ou proibição do uso de determinados recursos de ação, enfim, regula o funcionamento da aula e as relações entre professor, aluno e saber, definindo os papéis de cada um e a divisão das tarefas (quem deve fazer o quê, ou pode fazer o quê, finalidades e objetivos). Nessa perspectiva, o erro se configura como variável do contexto de ensino e aprendizagem possível de ser assimilada tendo em vista as normas implícitas ou explícitas no contrato.

Vemos que os alunos chegam à escola com idéias próprias, algumas corretas e outras não, acerca de quase todos os temas que provavelmente irão trabalhar. A aprendizagem efetiva exige, muitas vezes, mais do que fazer apenas associações múltiplas de idéias novas às antigas. Exige superação de contradições das idéias previamente presentes em suas mentes e até mesmo restruturação radical do modo de pensar. Para incorporar alguma idéia nova, o aluno tem de alterar as ligações entre as coisas que já conhece ou mesmo pôr de lado algumas convicções concebidas ao longo da vida. E, isso não se resume em uma tarefa fácil, nem para o aluno, nem para o professor. Nesse sentido, os alunos devem ser encorajados a desenvolver visões novas, a formularem novas idéias diante de novas situações em muitos contextos. A mera repetição de tarefas, sejam manuais ou intelectuais, provavelmente não conduzirá o aluno nem a capacidades melhoradas nem a conhecimentos mais apurados.

O ensino da Matemática, portanto, deve ser iniciado com questões interessantes e familiares aos alunos e não com abstrações ou fenômenos que estejam fora do alcance da sua percepção, compreensão ou conhecimento. É preciso que eles comecem a tomar contato com as coisas à sua volta, e passem a observá-las, a ficar intrigados com elas, a colocar questões sobre elas, a argumentar acerca delas e, por fim, a tentar encontrar respostas para suas questões.

Baseado nas revisões teóricas de aprendizagem e de construção de conceitos vistas acima, posso dizer que aprender Matemática ou qualquer assunto de outra área inclui a construção de novos conceitos e relações entre conceitos. Para que haja aprendizagem com efetividade é necessário que o aluno atribua significado às idéias, ligando-as entre si e com outras idéias inclusive de outros domínios. Para que se compreenda um conceito não basta ouvir uma explicação do professor. É essencial que esse conceito adquira significado e isso só será possível se houver conexão com a experiência anterior do indivíduo.

Resumindo, posso dizer que um conceito se caracteriza por sua generalização (estender a vários outros objetos ou situações), diferenciação (permite que infiram relações de semelhança, diferença, causa e efeito, etc.), abstração (consiste em tornar um aspecto determinado da realidade e explorá-lo em profundidade de modo a conservar este aspecto em mente, sem referência a outros igualmente presentes na situação) e simbolização (uso de símbolos relativos a quantidades que inicialmente foram percebidas em situações concretas mas aos poucos foram tomando sentido próprio. Ex.: 10 + 10 = 20). Podemos afirmar, então, que uma criança possui o domínio de um determinado conceito ou uma regra (tabuada, por exemplo) quando ela é capaz de explicar, dar sentido a um determinado objeto ou situação, ou ilustrá-lo com exemplos próprios, e que a aquisição dessas capacidades, ou seja, a de construir um conceito, está intimamente ligada à didática de ensino.

### 1.3.3 Dificuldades e obstáculos na aprendizagem matemática

O processo de construção do conhecimento, especificamente no caso da Matemática, esbarra, além do erro, com alguns outros problemas como as dificuldades e os obstáculos. Centeno (1988) julga ser interessante que o professor saiba precisar o seu entendimento sobre esses aspectos no processo de ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos visando reconhecer falhas conceituais, obstáculos epistemológicos, dificuldades operacionais, etc., e então planejar uma intervenção adequada, no sentido de promover o desenvolvimento do aluno.

Desse modo, acreditando que o discernimento e o entendimento desses aspectos possam contribuir para a adequação das ações pedagógicas do professor ao longo do processo educativo, recorro à abordagem de alguns autores e estudiosos sobre a natureza de cada um deles e suas possíveis implicações no contexto do ensino e aprendizagem da Matemática.

### 1.3.3.1 Dificuldades

Dificuldade, na visão de Centeno (1988), em termos gerais, consiste em algo que impede o indivíduo de executar corretamente ou entender com facilidade uma coisa ou tarefa. As causas do impedimento podem ter várias origens: as relacionadas com o conceito que se aprende; com o método de ensino adotado pelo professor; com o modo como o aluno foi preparado em etapas anteriores e a própria disposição do aluno para aprender, entre outras.

Todo o ser humano desenvolve por si só um repertório considerável de conhecimento e na Matemática estão envolvidos não só conceitos como também processos intuitivos para a resolução de numerosos problemas. Muitas vezes a escola não consegue tirar proveito desse conhecimento e tenta impor um conhecimento, empírico, formalizado e descontextualizado, desprezando o conhecimento espontâneo dos alunos. Nesse sentido, Fraga (1988) assinala que grande parte das dificuldades na aprendizagem da Matemática está centrada nas atitudes dos professores, na dificuldade que eles têm de explorar as riquezas de cada aluno e de incentivar o raciocínio inteligente dessas crianças. Em sua pesquisa, constatou que muitas escolas ainda insistem em transmitir conhecimentos com exercícios repetitivos e exemplos desarticulados, distante da realidade dos alunos. O resultado disso se traduz em dificuldade na aprendizagem do conhecimento matemático e na desvalorização do conhecimento pessoal, próprio e intuitivo dos alunos, verbalizado com expressões como “eu não consigo aprender”, “eu não sou bom em Matemática”, minando as suas reais capacidades e competências e ainda, por sua vez, mascarando as dificuldades dos professores em lidar com os fatos lógico-matemáticos.

Miranda, Forte e Gil (1998) abordam em sua obra *Dificultades del Aprendizaje de las Matemáticas: um enfoque evolutivo*, aspectos gerais relativos ao desenvolvimento e à Educação Matemática e à análise do conceito de dificuldade de aprendizagem da Matemática em distintos momentos do desenvolvimento da criança, em que se manifestam as dificuldades de aprendizagem. O primeiro momento, chamado de primeira infância, vai do zero aos seis anos, o segundo, dos seis aos 12 anos e o terceiro, dos 12 aos 16 anos.

Na etapa de aprendizagem dos seis aos 12 anos, segundo as autoras, as crianças manifestam problemas com processos básicos, como a atenção, que dificultam a utilização de estratégias ordenadas e hierarquizadas, em relação: à cálculo; à hora de seguir os passos de um algoritmo ou aproveitamento de instruções; à percepção; ao processamento auditivo (dificuldades em realizar exercícios orais onde é necessário realizar cálculo mental e reconhecer números apresentados oralmente); à memória; e às características cognitivas e metacognitivas (controle do processamento da informação).

As caraterísticas dos objetivos e conteúdos próprios dessa etapa (dos 6 aos 12 anos) conduzem à utilização de uma série de estratégias de ensino e aprendizagem com alto grau de efetividade para a área de Matemática. As principais estratégias utilizadas são: a observação; a manipulação livre; a experimentação (que completa a observação); o estabelecimento de relações entre as partes ou elementos que compõem uma situação ou resultado; a estimação (aplicado a cálculo de medida e solução de problemas); as tentativas (quando não se tem a priori o método mais apropriado para resolver a questão); as linguagens matemáticas; e a resolução de problemas, que se constitui não só uma área de estudo em si mesma mas também um procedimento de ensino e aprendizagem.

Para Rivière (1995), as dificuldades na aprendizagem matemática estão relacionadas com: problemas de atenção (obriga a um esforço seletivo mais intenso que o exigido em outras matérias que são transmitidas principalmente através de linguagem natural); dificuldades de memória; deficiências no manejo de sistemas simbólicos; base de conhecimento inadequada; exigência excessiva de abstração (para muitos); modelos de ensino inadequados, caracterizados por métodos excessivamente verbalizados; saltos bruscos de um conceito a outro; ausência de referenciais materiais intuitivos; organização de conteúdos curriculares em função unicamente da estrutura lógica da Matemática e não das possibilidades evolutivas do aluno, etc.

Segundo o autor, o enfoque cognitivo tem sido mais eficaz que o neurológico para explicar as dificuldades de aprendizagem matemática e ajudar a resolvê-las. A lógica consiste em conhecer tanto os processos mentais empregados pelo aluno para efetuar, por exemplo, uma operação de adição, quanto as estruturas intelectuais que o aluno deve possuir para realizá-la, visando melhor compreender suas falhas e erros ao adicionar.

O enfoque cognitivo requer uma análise minuciosa, passo a passo, dos processos que entram em jogo na resolução de tarefas matemáticas. Para proceder à análise, devemos nos lembrar que as aprendizagens matemáticas ocorrem normalmente em condições de interação, em situações de relação comunicativa, pois a criança é um ser social que se comunica com o professor e os colegas em uma situação educacional. O enfoque cognitivo possui vantagens importantes como:

- baseia-se em uma análise sutil do funcionamento mental da pessoa que pratica matemática;
- estabelece uma relação profunda entre os erros e os processos normais de aprendizagem e aquisição do conhecimento;
- aplica-se a todos os alunos;
- concebe os alunos como sistemas ativos e não receptores passivos do desenvolvimento do conhecimento (RIVIÈRE, 1995, p.141).

Diante do exposto, é possível concluir que as dificuldades podem ser intrínsecas e extrínsecas aos alunos. Como dificuldades intrínsecas podemos citar problemas e deficiências relativos à memória, à atenção, à compreensão deficiente de conceitos matemáticos básicos, à disposição para aprender, à auto-estima, etc.

Como dificuldades extrínsecas ao aluno temos as atitudes didático-pedagógicas, que incluem o tratamento dado ao erro; o conhecimento da bagagem prévia dos alunos; e a organização de programas curriculares, adequados à contextualização do ensino para que este ensino seja motivador e significativo, etc.

#### 1.3.3.1.1 Dificuldades com linguagem e notação matemática

Uma das grandes dificuldades presentes no processo de ensino e aprendizagem da Matemática diz respeito à questão da linguagem devido a sua especificidade e caráter formal, que difere das linguagens naturais. A linguagem matemática envolve a *tradução* da linguagem natural para uma linguagem universal formalizada, que viabiliza novos cálculos e inferências e é esse nível de formalização da linguagem matemática que possibilita a sua função principal que é a conversão dos conceitos matemáticos em objetos mais facilmente manipuláveis e calculáveis, possibilitando determinadas inferências que de outro modo seriam impossíveis (GÓMEZ-GRANELL, 1998).

Sendo a Matemática uma linguagem e, como ocorre com qualquer outra linguagem, o seu domínio implica também conhecer os aspectos inerentes a ela, que são os sintáticos e semânticos. Podemos dizer que o aspecto sintático está relacionado com a manipulação de símbolos e regras e o semântico com o significado dos mesmos, com a compreensão do contexto em que eles se encontram. Desse modo, para evitar erros, por exemplo, decorrentes da manipulação de símbolos de acordo com determinadas regras, sem a devida compreensão dos significados desses símbolos, o ensino da Matemática deve abranger e favorecer a compreensão, pela criança, desses dois aspectos; deve, também, estimular a associação entre os aspectos sintáticos e semânticos permitindo, assim, a construção progressiva dos significados matemáticos.

Segundo Gómez-Granell (1998), a função essencial dos símbolos matemáticos é a inferência e, sendo assim, na base de sua invenção está a necessidade de procurar códigos, cada vez mais abstratos e rigorosos, que a tornam possível. Resumidamente, posso dizer que os símbolos matemáticos possuem dois significados: um estritamente formal e o outro referencial. O formal obedece às regras internas do próprio sistema e se caracteriza pela sua autonomia do real, pois a validade das suas declarações não está determinada pelo exterior; a sua linguagem caracteriza-se por suprimir o conteúdo semântico e expressar, de maneira mais geral e abstrata possível, o essencial das relações e transformações matemáticas; os símbolos com significado referencial se caracterizam, entre outras coisas, por permitir a associação dos símbolos matemáticos às situações reais e torná-los úteis para resolver problemas.

Ainda na visão dessa autora, saber Matemática implica dominar os símbolos formais, independentemente da situação vivida; implica saber interpretá-los e atribuir a tais símbolos o seu significado referencial para então usá-los nas situações e problemas propostos. Mas, para que os alunos associem símbolos matemáticos ao seu significado referencial, não basta promover e estimular o uso das estratégias pessoais do aluno, é preciso que o professor proponha, por exemplo, situações-modelos que permitam entender a semântica da operação ou transformação, sejam elas verbais, manipulativas ou até mesmo modelos aritméticos para as regras algébricas.

Um dos problemas com que o aluno se esbarra na sua comunicação matemática é com relação às convenções de notação próprias do simbolismo matemático. Muitas vezes o aluno raciocina corretamente, por exemplo, ao solucionar um problema com expressões numéricas (em que é necessário o uso de parêntesis) ou ao procurar o mínimo múltiplo comum para solucionar uma expressão algébrica, o que exige, além de um conhecimento conceitual, o domínio de uma série de regras e convenções que, embora lhe sejam conhecidas, ele não consegue expressar através da notação correta, ou seja, ele tem construído uma representação mental interna da questão, mas não consegue grafá-la corretamente. Nesse sentido, é importante ressaltar que aprender uma linguagem não é aprender uma série de regras e sim alcançar um certo grau de competência significativa que permita usar essa linguagem adequadamente. E, para isso, volto a dizer, é necessário que o professor envide esforços para que os alunos façam associações entre os aspectos sintáticos e semânticos presentes no problema, o que, dependendo do nível de desenvolvimento, exige o uso de diferentes linguagens (linguagem natural, esquemas, desenhos, símbolos, etc.) para poder expressar as transformações matemáticas que o problema requer, mas é importante que o aluno seja capaz de fazer associações com o algoritmo convencional, relacionando as ações em nível manipulativo por exemplo, com a sua expressão verbal, com o desenho e com o próprio algoritmo escrito, ou seja, que tenha consciência das regras que fazem a passagem de uma linguagem à outra (GÓMEZ-GRANELL, 1998).

#### 1.3.3.2 Obstáculos

Com relação aos obstáculos temos, do ponto de vista epistemológico, a noção proposta por Bachelard que deve ser compreendida como o efeito limitativo de um sistema de conceitos sobre o desenvolvimento do pensamento. Ao colocar o conhecimento científico em termos de obstáculos, Bachelard apontou categorias que seguem desde o conhecimento geral até os obstáculos substancialista, realista e animista. Inicialmente introduziu a noção de obstáculo no conhecimento científico como uma necessidade funcional de lentidão e de confusão no ato de conhecer. Posteriormente, a noção de obstáculo na aquisição de conhecimentos da física. Mais tarde esta noção foi objeto de diversos estudos muito interessantes e passou a ter uma importância especial na didática da Matemática. Entre os epistemólogos contemporâneos, Bachelard foi aquele que mais explicitamente se referiu aos aspectos pedagógicos envolvidos no desenvolvimento de uma ciência. Preocupado com a aplicação de suas teorias em sala de aula, ele escreveu:

> Na educação, a noção de obstáculo epistemológico também é desconhecida. Acho surpreendente que os professores de ciências, mais do que outros se possível fosse, não compreendam que alguém não compreenda. Poucos são

> os que se detiveram na psicologia do erro, da ignorância e da irreflexão. Os professores de ciências imaginam que o espírito começa como uma aula, que é sempre possível reconstruir uma cultura falha pela repetição da lição, que se pode fazer entender uma demonstração repetindo-a ponto por ponto. Não levam em conta que o adolescente entra na aula de física com conhecimentos empíricos já constituídos: não se trata, portanto, de adquirir uma cultura experimental, mas sim de mudar de cultura experimental, de derrubar os obstáculos já sedimentados pela vida cotidiana (1996, p. 23).

Para Bachelard (1996), compreender significa reconstruir. Diz ser preciso ter a coragem de aceitar que o conhecimento é provisório, pois toda noção de um conceito é sempre um momento da evolução de um pensamento: o ato de conhecer dá-se contra um conhecimento anterior. E mais:

> no fundo, o ato de conhecer se dá contra um conhecimento anterior, destruindo conhecimentos mal estabelecidos, superando o que, no próprio espírito, é obstáculo à espiritualidade. (...) é no âmago do próprio ato de conhecer que aparecem, por uma espécie de imperativo funcional, lentidões e conflitos. É aí que mostraremos causas de estagnação e até de regressão, detectaremos causas de inércia às quais daremos o nome de obstáculos epistemológicos (p.17).

A contribuição desse estudioso foi extremamente significativa para que a escola passasse a ter um olhar inovador sobre os erros praticados pelos alunos. Se o conhecimento, segundo ele, constitui-se pela retificação dos erros, toda a ciência guarda em sua gênese erros e mais erros. A Matemática, como ciência, seguiu esse percurso. Assim, toda ciência, como algo dinâmico, passa também por períodos de lentidão e de confusão. Conforme Bachelard:

> Não se pode basear nada na opinião: antes de tudo, é preciso destruí-la. Ela é o primeiro obstáculo a ser superado. Não basta, por exemplo, corrigi-la em determinados pontos, mantendo, como uma espécie de moral provisória, um conhecimento moral provisório (1938, p. 18).

A partir das idéias bachelardianas, Brousseau (1983), para interpretar as questões da didática da Matemática, ampliou a idéia de obstáculo estudando três tipos deles que têm lançado muita luz, por um lado, sobre o que se passa em sala de aula e, por outro, sobre a compreensão de certos bloqueios e de como trabalhar para removê-los. São eles: os de origem *epistemológica*, que podem aparecer tanto no desenvolvimento histórico dos conceitos como podem-se repetir nos conceitos espontâneos dos alunos; os de origem *ontogenética* (relativos ao desenvolvimento da criança), pode-se dizer que são os que provêm de limitações da capacidade cognitiva do sujeito em um dado momento de seu desenvolvimento mental; e os de origem *didática*, que provêm do método educativo escolhido para ensinar.

Assim como Bachelard observou na física, Brousseau mostrou que, na Matemática, um obstáculo é um conhecimento válido num determinado contexto. O conflito, quando considerado como uma situação em que o conceito adquirido conduz ao erro, surge quando o conhecimento se mostra insuficiente diante de uma situação nova, constituindo um obstáculo que requer  retificação do conhecimento anterior.

Esse ponto de vista nos conduz a uma reflexão epistemológica com implicações didáticas: constatar que os erros podem ser decorrentes de concepções adquiridas anteriormente pressupõe que o próprio processo de ensino pode ser um elemento gerador de erros. Visto assim, o erro pode contribuir positivamente para o processo de ensino e aprendizagem, desde que tenha como proposta a mudança da atitude de condenação do aluno como único culpado pelo erro e seja implementado um tratamento preventivo com relação a eles. Os erros cometidos pelos alunos devem ser vistos como expressão do caráter incompleto de seus conhecimentos e constituem uma oportunidade para o professor ajudá-los a adquirir o conhecimento que lhes falta ou levá-los a reconhecerem por que erraram.

Brousseau afirma  “que o erro não é somente o efeito da ignorância, da incerteza, do acaso... mas o efeito de um conhecimento anterior que num contexto era adaptado, mas que em outro se revela falso ou simplesmente inadaptado”. Os erros podem, em um mesmo sujeito, comparecer ligados entre si por uma fonte comum: um conhecimento antigo que foi eficiente em certas situações. Por isso mesmo são resistentes e vão ressurgir várias vezes, mesmo depois do sujeito ter rejeitado o modelo errado (apud. TEIXEIRA, 1997, p. 50 ).

Observa-se, dessa forma, que um obstáculo está relacionado com uma certa forma de conhecer algo, um conhecimento antigo que teve sua validade em um determinado domínio de ação  e que foi útil para a resolução de uma série de problemas, mas que não é válido em um outro conjunto de situações, podendo induzir o aluno a conclusões que não correspondem à verdade no novo contexto estudado. Por exemplo: o aluno aprende que o produto de dois Números Inteiros positivos é sempre maior que cada um desses números (2 x 3 = 6) onde seis é maior que dois e também maior que três. Ao aprender as propriedades do produto de dois Números Racionais em que, por exemplo, 1/2 . 1/4 = 1/8, depara-se com um produto menor que cada um dos dois fatores, pois um oitavo é menor que um meio e menor que um quarto, revelando-se, portanto, em um conhecimento falso e constituindo um tipo de obstáculo. O conhecimento em questão era válido e inquestionável na situação anterior, mas não mais no novo contexto, implicando a necessidade do aluno passar de um nível a outro de conceitualização.

Ao falar sobre os obstáculos de origem didática, Brousseau faz referência às práticas pedagógicas que ocorrem em sala de aula, no sentido de identificar as reais condições decorrentes de uma situação de aprendizagem, em que o aluno cresce em busca da construção do conhecimento. Nessa perspectiva, tal situação pode ser privilegiada para o estudo do erro, ao considerar, o professor, do mesmo modo que na perspectiva construtivista, que o aluno deve percorrer o caminho do trabalho científico, em busca de uma construção matemática eficaz. As referências construtivistas, assim como as referências epistemológicas correspondentes, levam a apresentar o trabalho de elaboração científica como uma superação de obstáculos. Nessa concepção, a didática consiste em criar e em provocar situações que permitam aos alunos a busca de soluções que agreguem novos conhecimentos, visto que, conforme Brousseau, “não haverá boas respostas se não houver boas perguntas” (apud CENTENO, 1988). E, para que haja a construção de conhecimento é necessária a participação do sujeito cognoscente.

De acordo com essas ponderações, vimos que os obstáculos epistemológicos podem-se fazer presentes tanto no desenvolvimento histórico dos conceitos quanto nos conceitos espontâneos dados pelos alunos. Trata-se de concepções constitutivas do conhecimento e inerentes a um sistema de conhecimentos, já que todo conhecimento é suscetível de ser um obstáculo à aquisição de novos conhecimentos e, quanto mais sedimentado ele estiver, maior será a resistência à sua ampliação. Portanto, há a necessidade de identificar os obstáculos para que eles não sejam confundidos com meras dificuldades. A noção de obstáculo epistemológico tem sido útil para dar sustentação à necessidade de romper a crença presente nas posturas didáticas tradicionais em que a Matemática é vista como uma disciplina destinada a indivíduos especiais, postura essa que estimula uma série de mitos e preconceitos (TEIXEIRA, 1997; PINTO, 2000).

### 1.4 O Erro na Perspectiva Construtivista

O erro na abordagem construtivista sugere o reflexo de mecanismos envolvidos no processo de compreensão e não um dado apenas pontual e, para que se possa compreendê-lo, deve-se necessariamente considerá-lo como ponto de partida, de modo que, a partir dele, se possa retroceder e desvendar os processos cognitivos envolvidos na aprendizagem de um conceito (TEIXEIRA, 1992).

Castorina (1988) considera que o erro na atividade escolar "é fecundo e positivo porque tem um lugar no mecanismo produtivo do conhecimento" (p. 33). Esse autor suscita questões interessantes sobre a problemática dos erros cometidos pelos alunos durante a aquisição de conhecimento: com relação à questão pedagógica, o autor entende que esta deve ser relacionada com a atitude do professor em relação aos erros e à maneira de corrigi-los; por outro lado, acredita ser uma questão de cunho psicológico ao questionar-se se os erros são fatos aleatórios da aprendizagem ou se têm suas razões no mecanismo de aquisição de conhecimentos e, por fim, entende tratar-se também de um problema epistemológico porque o fato de dar ou não significado ao erro "pressupõe a adoção de uma das teses básicas sobre a constituição do conhecimento: o apriorismo, o empirismo ou, então, uma posição construtivista" (p. 32).

Castorina (1988) admite que, como aquisição de conhecimento, a resposta errada possa realmente conter processos de elaboração mais sofisticados do que uma resposta certa. Considera que é através do estudo dos processos que deram origem às respostas, que se consegue reconhecer e avaliar a complexidade e sofisticação do pensamento da criança.

Rivière (1995) afirma que existe uma relação profunda entre os erros e os processos normais de aprendizagem e aquisição de conhecimento. O autor enfatiza que o enfoque cognitivo "nos ajuda a compreender um princípio fundamental: que, freqüentemente, os erros não são ilógicos, senão que respondem à aplicação de certas regras que, ainda que não sejam 'corretas', implicam em si mesmas a posse de uma determinada competência lógico-matemática"( p.141).

Segundo Centeno (1998), os erros sempre se relacionam com algum conhecimento que o indivíduo tem do assunto e, através deles, é possível detectar resistências e o grau de desenvolvimento de um conceito. Eles podem nos dar pistas de mal-entendidos que se instalam e podem consolidar-se, caso não apareçam explicitamente.

Ao abordar algumas dimensões de crescimento no desenvolvimento de conceitos, Ferreira (1963) diz que o erro deve ser encarado como etapas possíveis de desenvolvimento, podendo ser usado de maneira construtiva e, por meio deles, sanar lacunas e promover experiências. Para corrigi-lo diz ser necessário organizar percepções de modo a promover compreensão dos elementos e abandono das impressões errôneas em relação ao conceito.

Para la Taille (1997), os erros podem ocorrer por motivos variados. Podem ser causados: por esquecimento; por dificuldades de manutenção, de linguagem e outros ligados à simples ignorância a respeito de um determinado tema; por dúvidas ou simplesmente por acaso. A palavra erro tem significados diferentes em contextos diferentes, em áreas diferentes. Na psicologia a palavra pode ter uma conotação moral e pode produzir sentimento de culpa nas crianças. Mas, o mais importante não é a palavra utilizada para nomear resultados, e sim a interpretação que damos e a utilidade que eles podem ter no processo de ensino e aprendizagem.

Alguns autores buscam distinguir os tipos de erros e apresentam uma classificação para eles. La Taille (1997) classifica os erros como *negativos e positivos*. Os considerados *negativos* se destacam pela diferença entre conhecimento correto e incorreto. Os incorretos são resultados de uma teoria errada que a criança tem sobre as coisas e, nesse caso, merece um diagnóstico a respeito do nível de desenvolvimento da inteligência na qual ela se encontra. Os *positivos* ocorrem quando a criança constrói teorias sobre as coisas, pensa sobre elas, sendo preferível a presença de teorias erradas do que a falta delas. Nesse caso, os erros podem dar pistas interessantes sobre a real capacidade de assimilação, uma vez que, seguindo o raciocínio da criança é possível detectar o que pode estar interferindo no resultado.

Castorina (1988) considera como erros *construtivos* aqueles em que a criança, para apresentar uma solução, tenha que fazer analogias, uso de teorias que considera como corretas, mesmo que logo tenha que abandoná-las, num processo de idas e vindas, de conflitos e momentos de longa elaboração. São erros que particularmente permitem aberturas do pensamento para agregar novas idéias e novos conhecimentos (p.49).

Ferreiro e Teberosky (apud ESTEBAN, 1992, p. 81) chamam de erros construtivos respostas que se separam das respostas corretas, mas que, ao contrário de impedir o seu alcance, parecem permitir acertos posteriores.

Davis e Espósito (1991) nomeiam como erros *construtivos* aqueles que evidenciam progressos na atividade mental, que sinalizam a formação de novas estruturas. Consideram que diversas situações tidas como erradas mostram, na realidade, que os alunos, por meio do erro, estão construindo conhecimentos; e que os erros, quando bem trabalhados, geram possibilidades de avanço e ampliação de esquemas estruturais. Para os autores, os erros *não-construtivos* se diferenciam dos demais quando não indicam relação com a construção do conhecimento, quando os alunos já possuem a estrutura de pensamento necessária à solução da tarefa, quando eles já compreenderam, dominam o conteúdo, ou seja, já dispõem do conjunto de esquemas do “saber-fazer” mas erram por distração ou falta de fixação necessitando, às vezes, de mais treino ou repetição para que esse tipo de erro não venha mais a ocorrer.

De toda maneira, o educador deve tomar o erro como uma sinalização, como um indício, uma fonte de informação a respeito de como está ocorrendo o desenvolvimento cognitivo do aluno, de como ele está construindo suas hipóteses. O professor deve buscar saber se os erros ocorreram porque o aluno não possui a estrutura do pensamento necessária à solução da tarefa; deve avaliar, de forma precisa, o processo de construção do conhecimento do aluno e reformular, se necessário, os procedimentos de ensino fornecendo-lhe condições para superar os erros, de acordo com a natureza de cada um deles. Nesse caso o erro assume um papel instrutivo, construtivo, revelador das dificuldades e orientador de ações educativas.

Vale dizer que, para poder precisar se um erro é construtivo ou não-construtivo, às vezes é necessário realizar um diagnóstico acurado, uma intervenção pedagógica que permita examinar como a criança está operando, qual a trajetória do raciocínio utilizado e os seus procedimentos.

Na perspectiva construtivista os erros não devem ser somente apontados ou assinalados. É preciso que eles se tornem um observável para o aluno. Isso não quer dizer que o aluno deva apenas saber que errou, deve também perceber a qualidade do erro que cometeu. Para tanto, é preciso dotá-lo de elementos que propiciem a tomada de consciência dos problemas de seu raciocínio. As causas devem ser explicitadas para que ele possa raciocinar e vir a concluir que optou por um caminho incorreto; ele deve ser incentivado a buscar as mais variadas tentativas para obter a resposta certa, as teorias corretas, os procedimentos eficazes. Tornar um erro observável ao aluno não depende apenas da organização da tarefa, mas também do nível de desenvolvimento do sujeito. Ele precisa ter noção do que está realizando, senão o erro não terá significado algum; o efeito de suas observações será nulo. Temos, então, que o erro deve ser visto como uma fonte de tomada de consciência, visto que pode levar o sujeito a modificar e enriquecer o seu pensamento (LA TAILLE, 1997).

Mas, em que consiste a tomada de consciência? Conforme Castro (1998), entende-se por *tomada de consciência* uma construção de sistemas integrados que resulta da passagem de ações concretas às operações abstratas e de uma coordenação operatória, através de abstração reflexiva. Nesse processo ocorre a passagem do *porquê,* ou das razões fundamentais da tomada de consciência, ao *como,* que se refere ao mecanismo efetivo que torna conscientes os elementos que permaneciam até então inconscientes. Esse processo consiste numa conceitualização, numa passagem da assimilação prática a uma assimilação por meio de conceitos. Com isso, acontece a inversão da situação inicial, ou seja, a criança torna-se capaz de inverter o pensamento (reversibilidade) e a conceitualização passa a fornecer a ação. E essa interiorização supõe uma reconstrução no plano do pensamento.

Para Piaget (1974, p.197), a tomada de consciência é um “sistema dinâmico em permanente atividade”. Diferente disso, o senso comum tem presente a idéia de que a tomada de consciência se resume em um simples esclarecimento que nada acrescenta ou modifica. No sistema de ensino tradicional ainda nos deparamos com educadores que simplesmente apontam, assinalam o erro do aluno, tirando-lhe qualquer possibilidade de acesso ao porquê e ao como errou. Por exemplo: um aluno ao apresentar o resultado quarenta para a operação de seis multiplicado por seis (6 x 6= 40) e tiver como feedback apenas o assinalamento de que a resposta não é a correta, a leitura que ele fará é que o resultado quarenta não deve ser repetido para essa operação, ao passo que, se lhe for indagado se quarenta é divisível por seis, ou quanto é seis vezes seis, provavelmente chegará à resposta correta e em condições de avaliar a qualidade do seu erro, num processo consciente e construtivo.

Tornar o erro observável para o aluno é uma tarefa difícil e importante. Difícil por não ser perceptível e o sujeito não conseguir fazer por si mesmo, necessitando de uma intervenção. Para que o erro se torne observável, o sujeito deve ser levado a fazer uma leitura, produto de uma interpretação de sua própria ação (procedimentos) bem como do objeto sobre o qual incide a sua ação e, ao fazer essa leitura, o aluno pode substituir ações práticas por descrições e explicações e, então, ocorrer a tomada de consciência. Importante, porque só assim o sujeito terá algo *concreto* sobre o qual deve lutar para superar e retomar o seu processo de construção (MACEDO, 1995).

Ainda com relação à *tomada de consciência*, Piaget (1973) nos diz:

> A tomada de consciência consiste em fazer passar alguns elementos de um plano inferior inconsciente a um plano superior consciente; constitui, pois, uma reconstrução no plano superior do que já está organizado de outra maneira no plano inferior (...) Do ponto de vista do procedimento estrutural, é reconstrução, o que se constitui uma conceitualização. O inconsciente é povoado de esquemas sensório-motores ou operatórios já organizados em estruturas, exprimindo, contudo, o que o sujeito pode "fazer" e não o que ele pensa. Dito isto, a reconstrução conceitualizada que caracteriza a tomada de consciência pode ser de antemão suficiente, quando não é inibida por nenhuma contradição. Senão ela é primeiramente deformante e lacunar, depois se completa, pouco a pouco, graças a novos sistemas conceituais, permitindo ultrapassar as contradições por integração dos dados nesse novo sistema (p.42/43).

Sendo assim, entendo que a tomada de consciência de uma ação é a conversão ao plano consciente de todas as estruturas utilizadas na realização, produção e construção dessa ação, ou seja, a tomada de consciência leva o sujeito ao reconhecimento da ação por ele realizada, na qual a constatação (consciente) de um acerto ou de um erro o fará conhecedor de sua ação e da necessidade ou não de reformular seus pensamentos e ações. Nesse sentido, é imprescindível que o professor conheça o nível de desenvolvimento dos seus alunos para que possa intervir com pertinência e adequação.

Ainda sobre a questão do erro, na visão de Rico (1995), o erro é uma possibilidade permanente na aquisição e consolidação do conhecimento. Concepções incompletas ou deficientes fazem parte do acesso a ele, fazem parte do nosso conhecer, mas, para que o conhecimento avance é necessário, principalmente, que o conhecimento anterior seja modificado e isso exige uma busca crítica e persistente do erro. Considera esse autor que, a partir de seus erros, o aluno pode aprender distintas propriedades de um conceito; que a partir do erro ele pode, por si próprio, ou com a ajuda do professor e até mesmo dos colegas, compreender os motivos que o impediam de chegar a uma resposta correta.

Diante do que foi abordado vemos que a teoria piagetiana deu nova dimensão ao erro mostrando a importância que ele ocupa no processo de construção do conhecimento. Podemos dizer, em vista do que entendemos sobre a aquisição do conhecimento, que há, no homem, um esforço efetivo e peculiar na resolução de situações problematizadoras do contexto de sua vida cotidiana e este esforço deve ser valorizado e respeitado, independente da proposta pedagógica assumida no processo de ensino e aprendizagem. Assim, o erro cometido pelo aluno no dia-a-dia da sala de aula, em vez de ser preterido ou condenado, precisa ser analisado, visto que constitui fonte rica de pistas, importantes e esclarecedoras, sobre o modo pelo qual foi construído o pensamento do aluno e da sua real capacidade de assimilação.

### 1.4.1 O erro no ponto de vista pedagógico

Refletir sobre o papel do erro no processo de aprendizagem é mais do que uma possibilidade. É hoje uma necessidade. É comum vermos o erro associado ao fracasso. Então, por que não reverter essa visão e formar novas parcerias como "erro e conhecimento, erro e êxito, erro e desenvolvimento?" (CARVALHO, 1997, p.12).

É possível reconhecer o modelo pedagógico adotado, através do tratamento dispensado ao erro. Na pedagogia de base empirista, os erros têm a conotação de fracasso, não têm nenhuma função pedagógica, não são analisados, pelo contrário, são condenados e, portanto, devem ser coibidos. Nessa didática, o aluno não é levado a refletir sobre o que faz, a rever sua estratégia de ação e retomar seu caminho para ver onde errou e porque errou. A criança erra, o professor assinala, faz correções, expõe novamente o conteúdo e repete a lição até que ela a realize corretamente.

Por outro lado, na perspectiva construtivista, o professor repensa seu papel como educador: ao invés de ser somente transmissor de idéias e informações, atua como agente do desenvolvimento do aluno, estimulando-o a raciocinar, a explorar e a descobrir ao invés de imitar; o professor entende os erros como uma etapa do processo de aprendizagem e toma-os como indicadores do raciocínio lógico da criança. A análise do processo pode constituir uma pista interessante a ser seguida, pois através dela é possível identificar a causa do erro e planejar uma intervenção adequada.

Na perspectiva empirista, o conhecimento que a criança já traz consigo não é valorizado, nem tampouco as aproximações que consegue fazer em busca de se apropriar do novo; nem o modo como faz suas representações. Não se atribui valor às articulações que ela consegue fazer com o conhecimento já adquirido e com as novas informações que recebe. Isso se deve à impossibilidade de ver o erro como parte do processo de construção de conhecimentos e potencialmente articulador de novos saberes impedindo que a criança viviencie e expresse seu real processo de aprendizagem e desenvolvimento.

Nessa perspectiva, erro e acerto aparecem como pólos opostos. O erro é somente assinalado; é visto como algo condenável e deve ser banido. O resultado obtido pela criança é visto como algo acabado, sem que haja um processo de revisão ou investigação no sentido de identificar *porque* ou *como* ela errou. Desse modo, ao contrário do construtivismo, a ênfase recai no resultado e não no processo; a construção do conhecimento não é concebida como inerente ao processo de aprendizagem; a idéia de que a aprendizagem se dá por transmissão e repetição do que é ensinado ainda está presente. A ousadia, o ensaio, o erro e o risco não fazem parte desse processo de ensino. Ao contrário, são negados e estigmatizados. A criança aprende desde cedo que não se deve errar, uma vez que o erro tem a conotação de fracasso (MACEDO, 1994).

É possível observar, também, que na perspectiva empirista ou tradicional, o aluno é levado a confrontar seus saberes com os do professor sem lhe dar a oportunidade de, por si só, avaliar a qualidade de suas respostas. Em contrapartida, na perspectiva construtivista busca-se uma explicação satisfatória para as respostas consideradas erradas dadas pelas crianças. Nessa visão, a produção da criança é entendida como parte de um processo e, por trás de seu erro, há um rico processo de construção de conhecimento; o erro é relativizado, é entendido como um momento de síntese provisória, que revela o movimento do indivíduo em seu processo de conhecimento (ESTEBAN, 1992).

Um processo de ensino e aprendizagem que objetiva aprendizagem e desenvolvimento, não se limita apenas a alcançar a resposta correta e a aceitar os erros que venham a fazer parte do processo de conhecimento; deve estar voltado para a busca da construção de novos conhecimentos de tal forma que realimentem esse processo, e isso pode ser alcançado através da interação entre alunos e professores. A interação favorece a construção de novos saberes, pela troca, confronto, cooperação, superação, reconstrução por cada um e coletivamente. Nessa perspectiva, o educador dá um novo sentido ao seu papel e ao ato de ensinar. Ele interage com o aluno, avaliando o atingido como forma de propor o novo e se utiliza do novo como oportunidade de apropriação de conhecimento e de aumento de desenvolvimento do aluno (ESTEBAN, 1992).

Podemos dizer que a prática pedagógica adotada é responsável por grande parte do sucesso ou não do aluno. O professor deve ter atitudes que favoreçam a evolução conceitual e a evolução pessoal de cada aluno; deve substituir a pedagogia das certezas por uma pedagogia do problema; deve substituir a simplicidade pela complexidade "(...) assumindo o erro como ponto de partida e tendo como chegada uma verdade provisória, pois ensinar não é comandar, e educar não é simplesmente instruir". Deve tornar a aula prazerosa, uma vez que conhecimento e prazer estão intimamente ligados. É necessário "dar um tempo para que o aluno possa 'descobrir' o conhecimento e sentir prazer pela 'descoberta', sentir prazer de conhecer para conhecer mais e não apenas para utilizar na prova" (COSTA, 1998, p.165).

Às vezes o comportamento do aluno pode ser correto por muito tempo, mas sustentado por modelos falsos. O professor necessita estar atento para detectar o que não foi compreendido pelas crianças ou o que compreenderam mal, e criar condições necessárias para promover o crescimento e organização das idéias.

A visão de que a criança constrói, progressivamente, novos conhecimentos e novas maneiras de pensar tem contribuído muito para a prática pedagógica e para a formação do aluno. Com isso a escola vem lançando *um novo olhar* à pessoa do aluno e centrando maior atenção no processo de aprendizagem. Nessa concepção, não é desejável que a criança simplesmente saiba coisas, mas sim que pense sobre elas. O objetivo muda de foco: em vez de fornecer verdades prontas e acabadas ao aluno, voltar-se para capacitá-lo a elaborar o conhecimento que se espera que ele alcance.

É comum o professor abordar determinados assuntos/conteúdos com o pressuposto de que as crianças já tenham adquirido domínio na série anterior. Em vista disso, destaco a necessidade do professor, antes de uma nova abordagem, realizar um diagnóstico que permita conhecer o grau de facilidade ou dificuldade de cada aluno em relação aos aspectos do conceito a ser dado, de conhecer a maneira própria de cada um em progredir. Portanto, é conveniente que ele conheça cada um de seus alunos; o conhecimento que cada um deles têm do assunto a ser discutido, ainda que falsos e incompletos, para poder apoiar-se e promover progresso cognitivo.

Temos também que conhecer os diversos ritmos e formas de expressar de cada criança, e encaminhar ações que ampliem o processo de construção é significativamente importante para que ela obtenha sucesso. Quando a criança é vista como sujeito construtor de conhecimento, muitos comportamentos, ações e atitudes tidos como indicadores de sua incapacidade, passam a ser vistos como seu permanente repensar sobre a realidade com a qual interage.

Nesse sentido, Perrenoud (1999) nos diz que a didática empregada não deve ignorar a heterogeneidade dos alunos. Indivíduos diferentes não mobilizam os mesmos recursos para resolver os mesmos problemas, uma vez que o desenvolvimento de cada um acontece em ritmos e trajetórias diferentes. Portanto, a diversidade pode e deve levar a procedimentos de individualização e de diferenciação das tarefas, das avaliações, dos atendimentos, das exigências, não havendo razão para postular um único tipo de ação. Porém, temos que ponderar as condições de trabalho do professor, as dificuldades que eles enfrentam com o efetivo das classes. A sobrecarga de programas, a rigidez dos horários ou outras exigências contribuem para que o ensino diferenciado fique, por vezes, reduzido a apenas um sonho jamais realizável.

Diferenciar o ensino, diz Perrenoud (1995), "é organizar as interações e atividades de modo que cada aluno se defronte constantemente com situações didáticas que lhe sejam as mais fecundas". Isso não significa condenar a uniformidade de conteúdos, defende o autor, visto que pode atingir as mesmas competências por caminhos diversos. Para ele, diferenciação, "não é sinônimo de individualização do ensino. É evidente que não se pode falar de diferenciação sem gestão individualizada do processo de aprendizagem, mas isso não significa que os alunos vão trabalhar individualmente, o que acontece é que o acompanhamento e os percursos são individualizados" (p. 28/29).

Vale dizer que o construtivismo procura desenvolver práticas pedagógicas sob medida para cada grau de amadurecimento intelectual da criança, ou seja, as noções escolares, enquanto objeto de construção de conhecimento são construídas progressivamente de acordo com as peculiaridades e em níveis que lhe são próprios. Sendo assim, o professor, consciente da potencialidade dos erros no processo de ensino e aprendizagem, deve favorecer a tomada de consciência dos problemas do raciocínio do aluno e a busca de superação, sem perder de vista o nível cognitivo em que o aluno se encontra.

A postura construtivista de compatibilizar o tratamento dispensado ao erro de acordo com o nível de estruturação da criança provêm de estudos de Piaget em que demonstrou, através de experimentos, que a criança raciocina segundo estruturas lógicas próprias que evoluem conforme faixas etárias definidas e são diferentes da lógica do adulto e, portanto, o erro pode ser decorrente da falta de compreensão do que se pede. Nesses estudos Piaget classificou as respostas dadas por crianças em três níveis. No primeiro, a criança não tem a capacidade de resolver um problema e, às vezes, nem entende a situação colocada; no segundo, a criança tenta encontrar o resultado mas surge o conflito, a ambivalência, a dúvida; no terceiro, a criança já compreende e consegue resolver a questão.

A abordagem piagetiana sugere que se procure compreender o que os acertos e os erros revelam. Portanto, por ocasião da avaliação, o professor deve voltar-se não só para o acerto da resposta, mas sobretudo para o caminho usado para chegar até ela. A resposta dada pela criança deve ser tomada como um ponto de partida para a compreensão do processo do qual ela resultou e a causa do erro ou acerto será compreendida mediante exame desse processo. Através de uma intervenção adequada é possível conhecer o caminho percorrido pelo aluno e compreender como ele está construindo as suas hipóteses e, então, identificar as lacunas existentes na estrutura cognitiva ou outros elementos que o impede de chegar ao acerto, desvelando, desse modo, a causa ou as causas do erro. Verifica-se, assim, que o erro é uma rica fonte de informação e deve ser trabalhado no sentido de proporcionar e ampliar o desenvolvimento cognitivo.

Devemos considerar que, quando a criança dá uma resposta errada a um problema ou questão, é preciso avaliar se isso ocorreu por confusão ou esquecimento de um dado, por raciocínio incorreto ou por aplicação errônea de princípios ou regra que evidencie lacunas na aprendizagem. É necessário que o professor saiba distinguir os tipos de erros, bem como conhecer a origem deles, tomando-os como sinal de uma estruturação em construção para, então, direcionar a sua ação pedagógica a fim de criar condições para que o aluno possa reelaborar o problema em questão.

Para exemplificar, podemos citar uma operação de adição de frações apresentada por uma criança do seguinte modo: um terço mais um meio é igual a dois quintos (1/3 + 1/2 = 2/5). Como interpretar esse erro? Neste caso o resultado evidencia a hipótese da criança que vê cada Número Racional como dois Números Naturais não relacionados. E esta constatação requer ações adequadas capazes de levar o aluno a superar sua dificuldade ou obstáculo, conduzindo-o para a análise e busca de melhoria dos procedimentos. Agindo assim, o erro passa a ter caráter construtivo, propulsor da busca do acerto e desenvolvimento do aluno.

Outro fato a considerar é que os acertos casuais podem também ser identificados pela justificativa da criança. As vezes ela dá uma resposta certa, mas a justificativa que ela apresenta não é coerente ou se mostra incorreta diante da resposta. Por isso, é importante que os alunos sejam levados a justificar suas respostas, pois esse ato leva o sujeito a refletir sobre a questão e a demonstrar melhor seu nível de compreensão do problema.

Na visão de Centeno (1988), conhecimentos insuficientes devem ser considerados como uma etapa necessária para alcançar o conhecimento pleno e seu aparecimento é de grande valia para o professor. Isso não quer dizer que o erro deva ser provocado, mas trata-se de criar situações que possibilitem a manifestação do significado que as crianças dão, ao dizer ou escrever, a respeito do assunto abordado.

Conforme Vergnaud, “ser educador, hoje em dia, implica interrogar-se sobre o significado desses erros, para poder repensar uma didática científica” (apud CASTORINA, 1988, p. 44).

### 1.4.2 O erro e o processo avaliativo

Não há como falar de ação pedagógica e tratamentos dispensados ao erro sem levar em conta o processo avaliativo. Felizmente, temos acompanhado, ao longo desses últimos 20/30 anos, o surgimento de um grande número de novas idéias e propostas sobre o ensino e  a aprendizagem e isso tem despertado um interesse crescente pela avaliação escolar e provocado uma transformação do próprio conceito de avaliação.

Conforme Miranda, Forte e Gil (1998), desde que surgiu a teoria cognitiva se postula que a avaliação não pode limitar-se às respostas dos alunos e sim a examinar os processos utilizados por eles e que a realização de um diagnóstico correto deve contribuir para detectar as dificuldades e melhorar o processo de ensino, visto que os erros das crianças oferecem indícios importantes para determinar os procedimentos e a maneira de adaptar o ensino de apoio.

Segundo Rabelo (1998, p.11) "avaliar é indispensável em toda atividade humana e, portanto, em qualquer proposta de educação". Esse autor considera que a prática educacional necessita estar conscientemente preocupada com a promoção da transformação social e, para isso, os educadores precisam ter clareza sobre suas ações.

Entendo a avaliação como instrumento de desenvolvimento cognitivo, como uma atividade de caráter construtivo que permite o desabrochar das potencialidades e como levantamento de hipóteses, deduções e demonstrações e não de verificação de aprendizagem com a finalidade única de medir conhecimentos *adquiridos,* por vezes ilusoriamente, através de memorização pouco duradoura sobre os objetos, fatos, datas, fórmulas, leitura ou qualquer outro assunto. Esse tipo de avaliação requer grau de elaboração e reflexão mínimo e mostra o artificialismo da educação sistemática. Normalmente é traduzida em nota/conceito; os erros dos alunos não são sequer discutidos; a metodologia  raramente é revista e modificada mesmo diante do fracasso de grande parte das crianças em escolarização e, infelizmente ainda é predominante nos dias de hoje.

Como já vimos, no processo de ensino e aprendizagem, não basta apenas conhecer os erros e os acertos, a correção ou incorreção das respostas dos alunos, numa determinada prova de avaliação, mas sim, e principalmente, conhecer os processos que o levam a produzir estas respostas. Mais do que controlar, o professor deve interpretar, identificar problemas e levantar hipóteses explicativas que lhe permitam avaliar a complexidade e sofisticação do pensamento do aluno. Mais do que medir determinados comportamentos, importa compreender as razões do erro.

A avaliação quando vista como fonte de aprendizagem proporciona ao educando novas oportunidades para aprender, para melhorar e para refletir sobre o seu próprio trabalho. Se vistas como fonte de informação para o professor, as tarefas podem revelar lacunas, contradições, nível de estruturação da inteligência, conflitos, obstáculos, bem como preferências e aptidões de cada aluno.

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais fala-se da necessidade de repensar as finalidades da avaliação, sobre o que e como se avalia. A tarefa do avaliador deve ser um permanente exercício de interpretação de sinais, de indícios, e da reunião de elementos que lhe permitem uma reorganização da sua atividade pedagógica. O professor deve, não somente buscar indícios sobre o desempenho dos alunos, mas também ter claro o que pretende obter, bem como o uso que fará desses indícios. Nesse sentido, segundo os PCN (1997), a análise do erro pode ser uma pista interessante e eficaz.

A avaliação deve ser pautada na capacidade que o aluno tem de construir soluções próprias para novos problemas ou situações, nem que para isso necessite recorrer àquilo que lhe foi colocado como exemplo; que lhe foi apresentado na aula. O importante é que o aluno saiba aplicar o conhecimento prévio numa situação nova, porquanto tudo o que lhe é ensinado deve ser com o propósito de que ele desenvolva capacidades. O professor deve saber distinguir os meros erros de informação dos problemas no desempenho de capacidades.

A avaliação do desenvolvimento de uma capacidade exige conhecer o grau de desempenho prévio do aluno, do nível de seu progresso e das suas possibilidades e necessidades reais. Isso tudo é bem diferente do que apontar um erro de informação. É necessário saber distinguir se o erro é um equívoco de informação ou mesmo de cálculo ou se é um erro de raciocínio, de uso de princípios e regras.

Para tanto, faz-se necessário avaliar a própria noção de erro na aprendizagem bem como a sua eventual superação. Um erro de informação é sanado fornecendo-se ao aluno a informação correta ou preenchendo-se a lacuna existente da qual ele ainda não dispunha ou a partir de informações fundamentais das quais ele se apropriará através de tentativas e erros.

Enquanto informação relevante para os alunos, as tarefas de avaliação podem favorecer a reflexão e auto-regulação do seu próprio processo de conhecimento e aprendizagem. A avaliação deve abranger todo o conjunto das tarefas realizadas pelo aluno para que ele se certifique se houve progresso e não para ater-se somente aos erros e acertos. O comprometimento da escola deve voltar-se para o desenvolvimento dos seus alunos; para sua capacidade de construção de conhecimentos, que deve ocorrer em bases sólidas, fruto de reflexões e uso consciente da própria capacidade de pensar. Se o aluno trabalha, produz, aprende, não há porque preocupar-se com notas e erros ocasionais. O erro necessita ser trabalhado e não apenas constatado. Há professores que dizem ter aderido ao construtivismo e passam a achar que todo erro é construtivo, supervalorizando tudo o que o aluno faz e deixando-o à mercê da própria sorte (CAGLIARE, 1993).

Entendo que a avaliação não deve ser utilizada como um instrumento que contribua para o processo seletivo da educação, baseada na dicotomia aprovação/reprovação e sim considerada como um dos elementos-chave do processo de ensino e aprendizagem, voltada para detectar e promover a superação das dificuldades do educando, e como orientadora do processo educativo.

A reflexão sobre o erro numa dimensão construtiva permite que se estenda um olhar sobre as regularidades vigentes nas práticas avaliativas da escola, pois, em geral, nessas práticas, o professor tende a agir sobre o erro seguindo uma orientação essencialmente empirista, isto é, corretiva. Essa postura corretiva considera o erro do aluno como uma incapacidade sua, uma vez que se o aluno errou, é porque não sabe e, para que aprenda, é preciso que resolva mais exercícios. Nessa concepção, está presente a idéia de que aprendizagem é sinônimo de repetição do que é ensinado. Nesse caso, a capacidade do aluno se restringe a resolver exercícios do mesmo tipo, como se não fosse capaz de transportar o conhecimento adquirido para aplicá-lo em outras situações.

A avaliação necessita ser vista como um dos fios condutores da busca do conhecimento que permite ao professor, através do caminho percorrido pelo aluno, identificar as deficiências e necessidades de superação e, então, rever ou manter sua prática pedagógica para, junto com ele, encontrar o caminho da reconstrução em busca de um resultado satisfatório (LUCKESI, 1996).

Hadji (1994) considera que o processo avaliativo deve abranger três possíveis objetos: o primeiro é o inventário, que permite verificar o domínio que o aluno tem das competências e habilidades relativas ao que está sendo ensinado, situando-o num certo momento do processo. O segundo é o diagnóstico que permite situar o aluno no seu processo de aprendizagem e diagnosticar as lacunas desse processo e as dificuldades do aluno em relação ao conteúdo dado. O terceiro é o prognóstico que, através da avaliação, tem a função de orientar o aluno nas suas escolhas escolares.

Conforme Buriasco (1999), Bodin cita quatro perspectivas do erro relacionadas ao saber matemático: erros de saber; erros de saber-fazer; erros ligados à utilização adequada ou não dos saberes ou do saber fazer; erros de lógica ou raciocínio. Para a autora, as duas últimas perspectivas podem ser utilizadas em uma análise de interpretação dos erros explícitos numa avaliação do rendimento escolar de grande porte. Ela ressalta que, mesmo permitindo uma intervenção diferenciada do professor, essas perspectivas não oferecem os meios necessários para uma análise/interpretação das causas do erro de cada aluno e da concepção do saber de cada um deles em relação aos fatores que interferem ou influenciam essa concepção. Conclui que, por essas razões, essas perspectivas não são as mais adequadas para serem utilizadas em sala de aula na análise e na interpretação dos erros que aparecem numa avaliação da aprendizagem.

A autora esclarece que muitos dos atuais estudos em Educação Matemática convergem para uma perspectiva de análise/interpretação dos erros explícitos em uma avaliação, baseada nas relações existentes entre professor, aluno e saber. Nessa perspectiva, a análise dos erros pode ser conduzida em diferentes enfoques, podendo, com isso, um erro ter múltiplas interpretações (p. 91):

- no aluno (desenvolvimento psicogenético);
- no saber (dificuldades internas próprias);
- na relação entre professor e aluno (expectativas recíprocas);
- na relação entre aluno e saber (concepções dos alunos);
- na relação entre professor e saber (escolhas didáticas).

Para avaliar, o professor deve observar/interpretar de maneira pertinente. A avaliação deve consagrar-se na análise da conduta do aluno, uma vez que desempenhos e competências correspondem a dois níveis de análise de forma articulada, mas distintas. Corrigir o desempenho não significa o domínio de competência, nem tampouco a não-correção ou ausência de competência. Um acerto pode ser o produto de uma operacionalização da competência desejada, mas pode ser produto também de outros meios como o acaso, sorte, fraude, intuição, etc. Do mesmo modo, o erro ou mau desempenho pode ser causado por uma falha ou desatenção passageira, por inabilidade ou ausência de uma competência diferente daquela visada. O desempenho jamais será um indicador claro da competência que, por sua vez, é sempre inferida (HADJI, 2001).

Na visão desse autor, uma avaliação formativa deveria possibilitar a compreensão da real situação do aluno para que o professor possa planejar e implementar ações pedagógicas corretivas e eficazes. Essa compreensão pode ser viabilizada através de uma dupla operação de coleta de informações e análise de resultados. O autor considera que a observação por si só não é evidente. Deve-se definir quais informações serão pertinentes e primar pela sua quantidade/qualidade. Acha insuficiente reter apenas um item que evidencie somente o acerto/erro. Considera que os itens devam ser informativos e, para tanto, defende um sistema de codificação que compreenda as seguintes categorias: resposta exata; resposta pouco exata; resposta inexata; ausência de resposta. Para ele, "... a fase de análise dos resultados será mais rica e útil se as informações coletadas durante as observações forem capazes de alimentar uma interpretação dos itens dos erros ou acertos dos alunos" ( HADJI, 2001, p. 98).

Perrenoud (1999) chama de formativa a avaliação que ajuda o aluno a aprender e a se desenvolver, visto que o desenvolvimento e a aprendizagem dependem de múltiplos fatores freqüentemente entrelaçados. Para ele, toda avaliação que contribua para otimizar, por pouco que seja, um ou mais desses fatores pode ser considerada formativa. Diz que a avaliação formativa apresenta-se, antes de mais nada, sob a forma de uma regulação interativa, ou seja, de uma observação e de uma intervenção em tempo real, praticamente indissociáveis das interações didáticas.

Diz, ainda, o autor que melhor seria falar de observação formativa do que de avaliação em virtude de associações com a idéia de avaliação como medida; como classificações; como boletins escolares e idéias de informações codificáveis, transmissíveis, que contabilizam conhecimentos. Para ele, "observar é construir uma representação realista das aprendizagens, de suas condições, modalidades, mecanismos e resultados" (p. 104). Considera como observação formativa quando esta permite orientar e otimizar as aprendizagens em curso, sem se preocupar em classificar, certificar, ou selecionar. A observação formativa deve estar a serviço do acompanhamento da aprendizagem e da ação didática e deve-se inscrever num contrato que demanda confiança e cooperação entre professor e alunos.

Perrenoud (1999) defende uma avaliação que leve o aluno a construir conhecimentos ou competências de acordo com seu ritmo, de modo que possa ajustar sua ação ou suas representações; uma avaliação que permita identificar seus erros, dúvidas ou lacunas, que o leve a considerar o ponto de vista de seus parceiros que lhe permita aprender através de cooperação intelectual, conflito cognitivo ou outro mecanismo, enfim, uma avaliação que reforce as capacidades do sujeito para que possa gerir, por ele próprio, seus projetos, seus progressos, suas estratégias diante das situações-problema e obstáculos presentes no seu dia-a-dia. Diante do que vimos, a função da avaliação é diagnosticar e estimular o avanço do conhecimento do aluno, é orientar a aprendizagem. Os acertos, os erros, as dificuldades e dúvidas que o aluno apresenta são evidências significativas de como ele está interagindo com o conhecimento e não devem ser utilizados como instrumento que confere legitimação ao processo de seletividade da educação.

Para finalizar, enfatizo a necessidade de refletir sobre a importância do elemento *erro* no processo avaliativo, sobre o potencial que ele representa no processo de reconstrução do conhecimento ao tornar-se observável ao aluno, pois saber que errou e reconhecer o erro significa oportunidade de poder retroceder e trilhar novamente o caminho percorrido em busca do objetivo maior que é a superação das dificuldades e a aprendizagem.

### 1.4. 3 Estudos sobre análise de erros em Educação Matemática

Conhecer a história da investigação sobre a análise de erros presentes no ensino da Matemática pode desencadear questionamentos e reflexões sobre todo o processo educativo e promover transformações em estratégias didáticas, capazes tanto de oferecer ao professor possibilidades de ampliar seus saberes e incrementar a metodologia de ensino, quanto de ampliar a visão do quanto a Matemática é importante em nossas vidas. Diante dessa premissa, recorro à contribuição de Rico (1995) para divulgar os estudos que se destacaram sobre a investigação da análise do erro em Educação Matemática, ocorridos ao longo dos anos, em países da Europa como Alemanha, União Soviética, Espanha e América como os Estados Unidos.

Na Alemanha, o autor destaca os estudos de Weiner (1922), fundador da investigação didática orientada para estudos dos erros que estabelecem padrões explicativos para os equívocos individuais voltados para todas as idades escolares. Dentro do conceito geral de *incorreto* Weiner fez distinção entre equivocado, falsificado e erro. Além disso, agrupou os erros em cinco categorias: erros familiares; erros persistentes, erros similares; erros mistos; e erros devidos a situações emocionais.

Rico (1955) destaca os estudos de Seseman (1931) que se mostram voltados a uma fundamentação psicológica adequada para orientar o ensino da Matemática que distinguem três grupos de erros em aritmética: erros mecânicos, erros associativos e erros funcionais. Destaca também os estudos de Kiessling (1925) voltados principalmente para a denominada tendência ao erro, espécie de predisposição especial que algumas pessoas têm para equivocar-se. Considera notórios, também, os estudos de Rose (1925) que estabelecem uma classificação de causas de erro em Educação Matemática como: falta de atenção; ignorância das regras; confusão de conceitos; e falta de habilidade para reconhecer propriedades características de um problema matemático.

Rico (1995) faz referência aos estudos, após os anos 60 de Schlaak (1968), Glück (1971) e Pippig (1977) que se ocuparam especialmente em descobrir causas de erros nas diferentes etapas de resolução de problemas. Schlaak (1968) destaca a incompreensão inadequada dos enunciados, a determinação incorreta dos números, etc. Glück (1971) diferencia cinco tipos de erros: troca de operação; aproximação aditiva ou multiplicativa; resultados parciais; só o primeiro dígito correto; e erros de transcrição.

Na União Soviética, no início dos anos 60, consolidou-se um campo de investigação em Educação Matemática sobre a análise dos erros e dificuldades individuais do aluno na aprendizagem escolar. Entre as contribuições sobre esses estudos, conforme Rico (1995), o destaque vai para Kuzmitskaya que determinou quatro tipos de erros: insuficiência de memória a curto prazo; compreensão insuficiente das condições do problema; ausência de regras verbais para a realização dos cálculos: e erros por uso incorreto das quatro operações básicas. Igualmente os estudos de Menchinskaya destacam a regularidade dos erros apresentados em Educação Matemática enfatizando quatro causas potenciais de erros que, a seu ver, não devem ser distinguidas separadas umas das outras: realização incorreta de uma operação; compreensão conceitual insuficiente; distração ou perda de interesse, o que provoca erros mecânicos; e aplicação inapropriada de regras ou algoritmos.

Nos Estados Unidos há certa tradição investigativa sobre análise dos erros em Educação Matemática. Thorndike (1917), por exemplo, realizou um trabalho pioneiro intitulado *Psicologia da Aritmética* como um dos mais completos sobre os estudos de erros nas operações aritméticas fundamentais. Dentre outros estudiosos, Buswell (1925) se destaca pela ampliação do método de análise considerado como mais completo que os anteriores em que incluía, paralelo aos exercícios escritos, observações em aulas e entrevistas com o fim de diagnosticar o maior número possível de erros presentes nas quatro operações aritméticas. Destaque também para Brueckner (1935) e outros investigadores que voltaram seus estudos para cinco objetivos:

1) listar todas as técnicas errôneas;
2) determinar a distribuição de freqüência dessas técnicas de acordo com a idade dos alunos;
3) analisar as dificuldades especiais, particularmente as presentes na divisão e nas operações com zero;
4) determinar a persistência de técnicas errôneas individuais;
5) classificar e agrupar os erros ( RICO, 1995).

Conforme Rico (1995), essa corrente de investigação continuou nos Estados Unidos ainda por muitos anos orientando trabalhos como os de Engelhard (1975), Lankford (1972) e Cox (1975). Novas correntes sobre a análise de erros foram surgindo com o objetivo de diminuir drasticamente a freqüência dos erros. O ensino por diagnóstico em Matemática, desenvolvido por Ashlock (1975), Reisman (1972), Robitaille (1976) e o inglês Bell (1986), entre outros, fizeram uso também da análise de erros como um de seus instrumentos mais importantes. Ginsburg (1977), Erlwanger (1975), fortemente influenciados pelos métodos de Piaget, em suas investigações sobre as estruturas básicas dos processos de ensino e aprendizagem da Matemática, empregaram, como método de investigação, as entrevistas clínicas e estudo de casos.

Com relação à Espanha, o autor revela que, já a partir de 1953, Villarejo e Fernández Huerta haviam direcionado seus estudos com o fim de conhecer os erros mais comuns na aritmética escolar visando apresentar bases para um ensino corretivo através de métodos diagnósticos derivados dos erros detectados. Nesse país, a Editorial Sínteses é a responsável pela publicação da maior parte dos trabalhos que se ocupam dos principais erros detectados no ensino da Matemática. Entre outros autores, Centeno (1988), citada no transcorrer deste trabalho, se destaca pelos estudos voltados para a interpretação dos erros para orientar os processos de ensino da Matemática.

No Brasil, com a maior divulgação das obras de Piaget, pautados em fundamentos psicogenéticos surgem, junto com o construtivismo, inúmeros estudos, entre vários outros, como os de Davis e Espósito (1991), Santos e Santos (1996), Macedo (1994, 1995), La Taille (1997) e Teixeira (1997), abordando o potencial do erro na estruturação do conhecimento da criança, sua nova concepção e sua relevante importância no processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

# CAPÍTULO 2

# DESENVOLVIMENTO DA PESQUISA

## 2.1 Proposição

### 2.1.1 O problema

Durante toda a minha vida, cresci e amadureci, ouvindo de colegas de sala de aula, colegas de trabalho e familiares que a Matemática é difícil e chata e, no decorrer desse tempo, fui constatando que boa parte dessas pessoas não conseguia apresentar um bom desempenho na disciplina.

A literatura nos mostra ser essa uma questão universal. Pesquisadores de diversos países como Gómez-Granell (1998), Lerner (1995) e Fraga (1988), revelam que a Matemática é a disciplina que mais causa aversão, é a mais temida por parte dos alunos e a responsável por grande parte do insucesso escolar. Diante disso levanto os seguintes questionamentos:

- Por que os alunos fracassam tanto em Matemática?

- Como os conteúdos da disciplina vêm sendo apresentados para os alunos?

- O que podem revelar os erros? Eles são sempre sintomas de uma aprendizagem incompleta ou de fracasso?

- Quais os principais tipos de erros e dificuldades e suas possíveis causas?

- Que tipo de tratamento o professor tem dado ao erro?

- E o aluno, ele toma alguma atitude diante do erro?

### 2.1. 2 Hipótese

Tenho como hipótese que os erros são elementos construtivos no processo de conhecimento e devem ser vistos como algo a ser compreendido. Podem tornar-se uma importante ferramenta para o professor diagnosticar e identificar as dificuldades e os obstáculos presentes na aprendizagem da Matemática, pois acredito que o estudo dos erros pode revelar suas possíveis causas e origem e gerar elementos que favoreçam a superação das dificuldades e o desenvolvimento cognitivo do aluno.

### 2.1.3 Objetivos

- Fazer um estudo através de diagnóstico, análise e interpretação dos erros em Matemática apresentados por alunos de sexta série, em seu cotidiano escolar, por meio das avaliações e observações em sala de aula a partir de um referencial teórico-construtivista;

- explicitar e relacionar concepções de erro presentes na literatura, focando o papel positivo que ele ocupa no processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

## 2. 2 Condições Gerais de Realização da Pesquisa

### 2.2.1 Delimitação do estudo

O processo de delimitação iniciou-se pela escolha de uma escola que propiciasse a realização da pesquisa. Defini que o desejável fosse uma escola da rede pública estadual que comportasse as séries do ensino fundamental. Estudar os erros cometidos pelos alunos em seu cotidiano requer um acompanhamento de todas as aulas ministradas por um período prolongado. Portanto, considerei como ideal restringir a uma única sala de uma das séries do ensino fundamental, para fazer, assim, um estudo mais aprofundado sobre os problemas de aprendizagem dos sujeitos da pesquisa.

Mantive contato com quatro escolas com o perfil desejado e a escolha recaiu na que manifestou maior receptividade para a realização da pesquisa, tanto por parte da diretora e da supervisora como do professor da disciplina. Trata-se de uma escola localizada na zona leste de Londrina, mantida pelo governo do Paraná, em funcionamento desde 1962. No início, a escola atendia somente as quatro primeiras séries do primeiro grau. A partir de 1988, conseguiu autorização para o funcionamento de quinta a oitava séries do ensino fundamental. Em 1990, a escola passou por reformas, recebeu modernas instalações e a contar com oito salas de aula. Em 1994, devido ao grande interesse da comunidade local e bairros adjacentes, a escola passou a funcionar também com o primeiro grau supletivo - função de suplência de educação geral - fase II, no período noturno. Hoje a escola conta com cerca de 560 alunos distribuídos no período matutino, de quinta a oitava séries, no vespertino, de primeira a quarta séries e, no noturno, com o supletivo de quinta a oitava séries. A escola não dispõe de atendimento psicológico nem psicopedagógico; conta somente com a orientadora pedagógica.

Eu tinha uma certa preferência em realizar a pesquisa na quinta ou sexta série do ensino fundamental por acreditar tratar-se do início de um novo momento na vida escolar e social do aluno em que ele assume uma postura menos infantil, mais independente e já conta com um nível de organização mais elaborado, o que poderia tornar a pesquisa mais interessante. Desse modo, realizei um levantamento através dos registros das quartas e quintas séries baseado no ano anterior, com o intuito de coletar dados sobre o perfil dos estudantes e aproveitamento escolar. Após a análise das matrículas efetuadas para o ano letivo e os dados previamente coletados nos registros da escola, concluí que sete dos 26 alunos que comporiam a sexta série B haviam sido promovidos, da quinta para a sexta série, pelo conselho de classe, esclarecendo-se que uma das maiores dificuldades apresentadas em anos anteriores era com relação ao aprendizado da Matemática. Somado a esses, havia um aluno retido na sexta série do ano anterior, com as mesmas características.

De posse dos dados solicitados, na reunião com a diretora, supervisora e o professor da disciplina de Matemática da escola (um único para o ensino de quinta a oitava séries), eles assinalaram, considerando o conhecimento da trajetória escolar dos alunos nos anos anteriores, que era grande a probabilidade de que os alunos matriculados na sexta B viessem a apresentar maiores dificuldades no aprendizado da disciplina e mereceriam um estudo e uma atenção especial. Diante disso, ficou acertado que durante todo o primeiro semestre de 2001, eu faria observações cotidianas das aulas de Matemática, na sala da sexta série B, com ênfase na pessoa dos alunos e nos erros por eles cometidos, além de encontros paralelos, fora do horário regulamentar, com aqueles que estivessem apresentando baixo rendimento, ponderando que, além de ser um instrumento a mais para o diagnostico das dificuldades e coleta de dados, já que me possibilitaria maior convivência e interação com eles, poderia de certa forma trazer- lhes alguma contribuição para o seu desenvolvimento.

Inicialmente estava presente a preocupação em delimitar os estudos em um determinado tema previsto no programa curricular do primeiro semestre para ser pesquisado. Posteriormente essa idéia foi abandonada e optei por observar todas as aulas previstas para aquele semestre e trabalhar com a totalidade dos conteúdos nelas abordados.

### 2.2.2 Sujeitos da pesquisa

Para a realização do estudo foi escolhida uma classe (6ª série B) inicialmente com 26 alunos, sendo dois do sexo feminino e 24 do sexo masculino, com idade entre 12 e 14 anos. Vale ressaltar que, no decorrer do semestre, houve variação no número inicial devido à entrada e saída de alunos por transferências, com alguma oscilação no total de participantes.

A observação em sala envolveu todos os alunos. No entanto, com o passar dos dias, os alunos com mais dificuldades foram se revelando e minha atenção ficou mais voltada para um grupo de cerca de dez deles. Além de receberem maior atenção em sala, esses alunos passaram a participar dos encontros semanais, em horário alternativo, com freqüência esporádica, uns por impedimentos particulares e outros por desinteresse. Somente quatro dos alunos, especialmente os que apresentavam maior grau de dificuldade, tiveram freqüência regular prosseguindo até o último dos encontros. Desse modo, ao final, optei por restringir a pesquisa a esses quatro indivíduos, nominados no decorrer do meu estudo por A1, A2, A3 e A4.

### 2.2.3 Procedimentos de coleta e registro dos dados

O estudo dos erros cometidos pelos alunos no cotidiano da sala de aula exigiu um contato direto e prolongado com o ambiente e os sujeitos da pesquisa. Foi o desejo de retratar o dinamismo de uma situação numa forma, o mais próxima possível, daquelas do seu acontecer natural, que me fez optar pela pesquisa qualitativa do tipo etnográfica. Esta abordagem oferece vantagens que favorecem o desenvolvimento dos meus estudos, uma vez que abarca um plano de trabalho aberto e flexível e sua ênfase está voltada para o que está ocorrendo, ou seja, para o processo em si e não para os resultados finais (produto).

A abordagem qualitativa etnográfica trabalha com a experiência, com o cotidiano e com um universo de significados que envolvem motivos, aspirações, crenças, valores e atitudes que permitem conhecer os aspectos rotineiros dos sujeitos como empenho, concentração, disposição para aprender, bem como para compreender a dinâmica das relações sociais, seus conflitos e modos de ver e sentir a realidade e o mundo.

Entre as modalidades utilizadas na pesquisa etnográfica, optei pela participante, uma vez que a observação participante busca os significados atribuídos pelos sujeitos às suas ações e interações com o ambiente, possibilita um contato pessoal e estreito do pesquisador com o fenômeno pesquisado em que é possível *documentar o não-documentado* o que permite captar uma variedade de situações ou fenômenos diretamente na própria realidade, não passíveis de serem obtidos por meio de perguntas. A observação direta e a relação face a face favorece a interação almejada com os observados bem como a realização de um estudo da dinâmica da sala de aula em que é possível levar em conta a história pessoal de cada indivíduo assim como as condições específicas em que se dá a apropriação do conhecimento.

Isto significa considerar a situação concreta dos alunos (processos cognitivos, criatividade, dificuldades, etc.), a reconstrução dos processos e a situação concreta do professor (condições de vida e de trabalho, expectativas, valores e concepções), sua inter-relação com o ambiente e formas de conduzir e avaliar o ensino e a aprendizagem. Desse modo, o pesquisador tem a oportunidade de assumir uma postura ativa e crítica, voltada para a produção de conhecimentos e para a transformação da realidade, de forma a contribuir para a discussão e debates sobre as questões abordadas. Vale dizer que esta modalidade favorece a empatia por parte do observador e a aceitação dele por parte do grupo, considerado como fator decisivo no procedimento metodológico (LUDCKE e ANDRÉ, 1986; ANDRÉ, 1995 e 1999; MINAYO, 1994).

Com base nesses pressupostos, investiguei os tipos de erros presentes na resolução de exercícios de Matemática realizados em sala, em casa e propostos nas avaliações com o propósito tanto de identificá-los quanto de compreender os meios e a prática desenvolvida pelos alunos. A inserção do pesquisador no contexto e a interação entre pesquisador e sujeitos pesquisados favoreceu o estudo e a descoberta das razões que tornavam o resultado incorreto. A escolha do estudo qualitativo está vinculada à intenção de contribuir, por pouco que seja, para que os demais professores possam ampliar a concepção que têm do erro e a reconhecer a relevância do papel que ele exerce no estudo da Matemática.

De outro modo, a interação estabelecida entre pesquisador e pesquisados favoreceu a realização de um acompanhamento, paralelo à rotina diária e observação cotidiana, de um grupo de alunos que vinham apresentando maiores dificuldades na disciplina. A composição desse grupo foi definida pelo professor, pautada pelo aproveitamento apresentado pelos alunos no decorrer das aulas. Esse acompanhamento requeria um planejamento próprio de ações que tinha como finalidade conhecer de perto as dificuldades nos conteúdos estudados, através de um contato direto com o sujeito pesquisado e foi na pesquisa-ação que encontrei respaldo para esse tipo de trabalho, pois ele permite ao pesquisador um desempenho ativo na própria realidade dos fatos observados e promove a participação dos sujeitos na situação investigada. Através dessa modalidade de pesquisa, portanto, pude contar com a participação dos alunos em atividades que me permitiam compreender o processo de ação utilizado por eles na resolução de exercícios e aproximar-me das possíveis causas das suas dificuldades (THIOLLENT, 1986; ANDRÉ, 1995).

Uma das características da metodologia utilizada que considero de grande importância para o estudo consiste no fato de que as categorias a serem trabalhadas não necessitavam estar previamente definidas; elas foram construídas durante a realização do trabalho. Contudo, no decorrer da análise dos dados também foi possível validar algumas categorias identificadas em outros estudos.

Para a coleta dos dados optei por analisar as cópias das provas e exercícios para notas realizados durante todo o primeiro semestre dos alunos que vinham apresentado maiores dificuldades. Além disso fiz uso de um diário de campo contendo o registro cursivo e simultâneo das observações referentes às atividades desenvolvidas em sala, dos comentários do professor e dos alunos. As impressões relativas aos encontros semanais eram registradas momentos após o termino de sua realização.

A carga horária da disciplina era de cinco aulas semanais, sendo duas aulas seguidas às terças e às quartas-feiras e uma às quintas-feiras, com duração de cinqüenta minutos cada uma. O total de aulas observadas foi de 64.

No decorrer de minhas observações busquei conhecer os tipos de erros apresentados pelos alunos, localizar suas origens e identificar as principais dificuldades relacionadas aos conteúdos abordados. Paralelo a isso, observei alguns aspectos sobre a forma utilizada pelo professor na condução do processo de ensino e aprendizagem como: introdução e desenvolvimento de conceito; seqüência da apresentação do conteúdo; rotina de trabalho; natureza dos exercícios; processo de avaliação; procedimentos do professor e do aluno diante dos erros detectados; e dificuldades mais comuns apresentadas, pois considero que, para a análise dos elementos que contribuem para a produção e ou superação dos erros e dificuldades de aprendizagem em Matemática, o trabalho do professor desempenha papel preponderante.

## 2.3 Informações Preliminares sobre o Universo Pesquisado

### 2.3.1 Sobre o trabalho do professor

Embora reconheça que a prática do construtivismo e a adoção de um tratamento diferenciado para os alunos, ajustado às possibilidades cognitivas de cada um, seja ideal para o ensino da disciplina, o professor considera-a inadequada para aquele contexto devido à quantidade de alunos e ao comportamento desfavorável por parte deles em sala de aula. Vigora aí a crença de que as perspectivas pedagógicas são escolhidas de acordo com as características de um dado contexto, podendo o professor transportar-se de uma perspectiva a outra, ao sabor das mudanças e oscilações do contexto. Este argumento serve de justificativa para o seu estilo de trabalho. Nas suas aulas, o conteúdo é apresentado de forma expositiva enfatizando-se algumas características do assunto através de exercícios modelos. Na seqüência, os alunos executam uma série de exercícios semelhantes ao modelo apresentado. Em resumo, as aulas acontecem em uma rotina bem definida: o professor entra na sala, geralmente em silêncio, senta-se, organiza seu material, logo após dirige-se ao quadro para aplicar exercícios sobre o assunto do momento e, geralmente, também sobre a maior parte dos conteúdos já dados, em forma de revisão. Enquanto os alunos buscam as soluções, ele faz o controle da presença chamando nome por nome. Após um certo tempo faz a correção dos exercícios no quadro, normalmente lançando perguntas como "o que eu faço agora?" respondidas por um pequeno número de alunos, invariavelmente os mesmos, em coro. A dinâmica de trabalho adotada é voltada para fixação de regras e procedimentos, característica da visão empirista em que o conteúdo é apresentado como pronto e acabado; o professor fala, os alunos imitam (exercitam) e aprendem.

As regras para manter a disciplina em classe são estabelecidas e controladas pelo professor. Segundo ele, para que se tenha o domínio da sala, é necessário que a disciplina seja no estilo "militar" e, para tanto, faz uso de recursos como ameaça de chamar os pais para conversar, atribuição de pontos negativos e encaminhamento para a diretoria, entre outros. O professor considera impossível a realização de trabalho em grupo. Alega que provoca grande movimentação dos alunos, ponderando que não há como "dar bom resultado" devido à indisciplina dos alunos.

O livro didático adotado pela escola é o MATEMÁTICA 6 de Luiz Márcio Imenes e Marcelo Lellis, editora Scipione, e é pouco utilizado em sala de aula. O seu uso praticamente se restringe a estudos complementares em casa, paralelamente ao conteúdo dado em sala. O professor pede que os alunos resolvam os exercícios nele contidos e os apresentem no dia seguinte. Nos primeiros momentos da aula do dia, os alunos se deslocam até a mesa do professor, um a um, para mostrar o que fizeram em casa; o professor examina e faz seus registros. São pouquíssimos os alunos que realizam a *tarefa,* apesar dos lembretes. Os exercícios realizados em casa não são corrigidos.

### 2.3.2 Sobre o sistema de avaliação

Os alunos são avaliados semestralmente com notas de zero a dez. Segundo a supervisora de ensino, o sistema consiste numa avaliação contínua envolvendo vários itens como notas de provas, exercícios, apresentação de tarefas e comportamento em sala. As avaliações, por vezes chamadas pelo professor de “exercícios para nota” e provas ocorrem sem aviso prévio. Porém, antes de serem aplicadas o professor realiza uma revisão de todo o conteúdo a ser contemplado na avaliação através de resolução e correção de exercícios. Não há um número predeterminado de vezes em que os alunos serão avaliados. As avaliações ocorrem e acordo com a necessidade percebida pelo professor e a elas são atribuídos pontos que farão parte da somatória ao final do semestre. Ao todo o professor colecionou 13 avaliações. Somente sete delas foram corrigidas e lhes atribuída nota. As demais receberam apenas um *visto.* Os alunos tiveram conhecimento sobre o seu desempenho (notas, erros e acertos) ao final do semestre, no último dia de aula, com a devolução das avaliações e anúncio da nota *final.*

### 2.3.3 Programa curricular trabalhado no período investigado

Os conteúdos apresentados pelo professor no primeiro semestre do ano letivo seguiu, em linhas gerais, o currículo básico para a sexta série do ensino fundamental proposto pela Secretaria de Estado da Educação, para a escola pública do Paraná. Foram os seguintes os conteúdos apresentados e trabalhados em sala de aula:

- Números Inteiros Relativos:

- representação geométrica com uso da reta numérica (localização de positivos e negativos);
- números opostos ou simétricos;
- exercícios envolvendo soma, subtração, multiplicação, divisão e potenciação.

- Números Racionais Relativos: exercícios envolvendo soma, subtração, multiplicação, divisão e potenciação de decimais e frações.

- Expressões algébricas: exercícios com uma ou mais variáveis trabalhando adição, subtração, multiplicação e divisão de Números Inteiros e fracionários.

- Equações de 1º grau: exercícios e problemas.

- Perímetro e Área: introdução e problemas.

- Ângulos: introdução, definição e medidas.

Ressalte-se que esta listagem de conteúdo está contemplada no livro didático adotado pela escola, de Luiz Márcio Imenes e Marcelo Lellis, editora Scipione, conforme já citado.

### 2.3.4 Sobre o trabalho de observação em sala de aula

No primeiro dia de observação o professor apresentou-me aos alunos, falou sobre o meu tempo de permanência com eles, sobre em que consistia o meu trabalho e quais eram meus objetivos, destacando a relevante contribuição que eles viriam a dar para a realização dos meus estudos.

As observações aconteciam três vezes por semana num total de cinco aulas semanais. Inicialmente elas ocorriam a partir de um determinado ponto da sala, onde me sentava. As carteiras eram distribuídas em 5 fileiras e eu ocupava geralmente a última carteira da fila do meio. Os registros eram cursivos e simultâneos aos acontecimentos, anotava a exposição de todo o conteúdo dado pelo professor, comentários e principais dificuldades dos alunos. Em pouco tempo passei a não só observar, mas também, a pedido do professor, a auxiliá-lo em dirimir dúvidas apresentadas pelos alunos referentes aos exercícios dados em sala, o que contribuiu substancialmente para que eu saísse da condição de espectadora e tivesse uma aproximação maior, tanto com os alunos quanto com o professor. Passei, então, a fazer parte da *turma* e a interagir cada vez mais com eles. A relação estabelecida entre nós e o ambiente criado foi primordial para o desenvolvimento do estudo.

### 2.3.5 Sobre o acompanhamento dos alunos fora do horário regulamentar

Conforme acordo previamente firmado, ao final do mês de março, iniciei um acompanhamento, fora do horário regulamentar, dos alunos que estavam apresentando maiores dificuldades na disciplina. O acompanhamento teve início no dia 28 de março de 2001, após prévio contato com os pais para esclarecimentos e assegurar a participação dos alunos. Os encontros ocorriam todas as quartas-feiras, em uma sala de aula especialmente reservada para esse fim. No início contaram com a participação de dez alunos. Em pouco tempo houve diminuição para um número médio de seis a oito que se reduziu gradativamente terminando com a participação de quatro deles. O trabalho consistia na abordagem dos conteúdos dados em sala e tinha como objetivo maior um contato direto e estreito com os alunos para diagnosticar e melhor compreender os erros e as dificuldades apresentadas, o que possibilitava maior incremento no processo de coleta dos dados. Vale ressaltar que, embora não fizesse parte dos meus objetivos, esses encontros trouxeram algumas contribuições para o desenvolvimento dos alunos, pois, em dadas tarefas, eu os incentivava a refletir sobre os seus erros e sobre os seus procedimentos, levando-os, em vários momentos, à tomada de consciência, ou seja, à percepção de que não estavam no caminho certo;

de que o erro faz parte do processo de conhecimento, porém com diferentes razões para que aconteça, e de que a reflexão, tendo como referência o seu próprio erro, constitui-se em exercício metacognitivo, já que possibilita a observação sobre os seus próprios processos.

Nesses encontros procurei cultivar um clima informal e amistoso para que os alunos se sentissem livres para expor seus pensamentos e expressar suas dificuldades.

Para o desenvolvimento desse trabalho com os alunos, apoiei-me no livro didático adotado pela escola e fiz uso de algumas atividades presentes no material editado pela SE/CENP - Secretaria da Educação - Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas, Experiências Matemáticas: 6ª série, que busca privilegiar a atividade do aluno e sua efetiva participação no processo de construção de seu conhecimento.

Em busca de outros elementos que pudessem influenciar negativamente na aprendizagem da disciplina, reservei, sempre que possível, momentos para perguntar-lhes sobre as suas condições de vida, número de irmãos, se moravam com os pais; para falarmos sobre a nossa vida pessoal como idade, esporte preferido, conceito sobre a disciplina, relacionamento com os colegas e professores, dificuldades na vida e na escola, enfim, sobre dados que pudessem permitir maior conhecimento e melhor entendimento para certos tipos de atitudes e ações observadas em sala de aula.

No total foram 12 encontros fora do horário regulamentar, ocorridos às quartas-feiras, das 14h às 15h e 30 min, entre o final do mês de março e o início de julho de 2001.

# CAPÍTULO 3

## RESULTADOS E DISCUSSÃO DA PESQUISA

### 3.1 Apresentação, Análise e Interpretação dos Dados

Como já citei, no decorrer de todo o período de investigação foram aplicadas 13 avaliações que incluem exercícios e provas com exercícios rotineiros. Em princípio seriam atribuídas notas a todas essas avaliações, mas, na realidade, somente 7 delas foram corrigidas e compuseram a nota final do semestre. Vale dizer que não foi possível interagir com os alunos a respeito dos erros cometidos nessas avaliações, para identificar os diferentes tipos de raciocínios adotados por eles pelo fato de eu ter tido acesso à totalidade das avaliações somente na véspera do término do período, época em que o professor terminara a correção, se preparava para divulgar as notas finais e entregá-las aos alunos. Em algumas oportunidades, com o consentimento do professor, procurei recolher as provas, conforme os alunos iam terminando e pude rapidamente visualizar algumas dificuldades, confirmando as já detectadas no cotidiano em sala e nos encontros semanais.

Desse modo, ao final do período das observações e de posse da cópia das avaliações, realizei um levantamento dos erros separadamente, de acordo com o conteúdo trabalhado. A análise teve fases distintas como: o reconhecimento do erro; a análise do caminho seguido pelo aluno; a inferência de possíveis causas dos erros e o grau de dificuldade no aprendizado do conteúdo, traduzido pelos índices dos erros apresentados nos quadros ao final de cada tópico. A execução desses passos foi precedida de uma breve introdução sobre o conteúdo abordado com base em alguns autores e estudiosos do assunto. Vale dizer que para calcular o índice de erros dos alunos, foram computados os exercícios que continham algum tipo de erro, e o percentual foi extraído da relação direta entre os exercícios e os problemas efetivamente realizados, não sendo contabilizados, portanto, os exercícios deixados em branco.

Convém ressaltar que os dados estatísticos aqui apresentados têm a finalidade única de melhor situar o leitor diante de minhas interpretações, não imprimindo, portanto, as exigências requeridas por um minucioso estudo quantitativo. Tais dados resumem-se aos quadros com o índice de erros apurado por aluno, referente a cada conteúdo e um quadro geral, apresentado ao final, incluindo o total das questões presentes nas avaliações. É importante salientar também que somente o quadro 1, o que se refere aos Números Inteiros Relativos, traz o índice por tipo de erros. Isso se deve à quantidade abundante de exercícios presentes nas avaliações, o que não acontece nos demais conteúdos, e a meu ver não justifica a busca do percentual separadamente para um número reduzido de questões, conforme pode ser confirmado no quadro 5.

Como já mencionado anteriormente, embora eu tenha observado e acompanhado cotidianamente todos os alunos da sala e estado com cerca de dez deles nos encontros semanais, optei por apresentar os dados referentes a quatro alunos. Esses alunos vinham apresentando baixíssimo índice de aproveitamento em Matemática ao longo de sua escolarização, requeriam maior atenção na sala de aula e freqüentaram os encontros semanais com regularidade, o que permitiu observar as suas dificuldades com mais proximidade.

Ao final deste trabalho apresento o apêndice A e B com registro detalhado sobre as observações realizadas em sala de aula e sobre os estudos paralelos ocorridos fora do horário regulamentar, respectivamente. O relato apresentado no apêndice A dá uma visão geral dos procedimentos do professor na abordagem dos conteúdos e do modelo pedagógico utilizado. O apêndice B traz algumas considerações sobre os encontros semanais os quais complementaram as minhas observações e coleta de dados. Por último temos o anexo A que contempla todas as provas e exercícios de verificação realizados no decorrer deste estudo.

A seguir, apresento os temas abordados em sala de aula durante o semestre e em relação aos quais os erros foram observados.

**I - Números Inteiros Relativos**

Sabemos que a noção intuitiva de Números Inteiros, ainda que muito rudimentar, manifesta-se para as crianças muito antes de ser abordada na escola, através de situações vividas como jogos e brincadeiras, noções sobre temperatura, altitude, subida e descida de um elevador, etc.

Conforme González e outros (1990), para potencializar o conhecimento sobre Números Inteiros é necessário fazer algo mais do que abordar o tema, suas aplicações, as regras e exercícios, ainda que haja esforço em buscar situações concretas que justifiquem suas propriedades. Tratar o tema inicialmente no plano formal é correr o risco de deixá-lo cair no vazio, ser facilmente esquecido e provocar erros e confusões. A orientação é buscar situações que permitam aos alunos chegar ao conceito formal de Número Inteiro a partir do referencial intuitivo e do conhecimento que têm dos Números Naturais.

Baldino (s/d) sugere que os Números Inteiros sejam inicialmente inseridos em jogos e brincadeiras e em situações que façam parte do cotidiano das crianças de modo que provoquem desequilíbrios em suas concepções espontâneas, proporcionem experimentação de concepções provisórias e ajuste de concepções próprias, favorecendo a vivência das soluções de situações-problema em ação como tirar o maior do menor, subtrair um negativo do negativo, entre outros.

As orientações didáticas contidas nos PCN (1997) destacam o aspecto relevante do jogo, do desafio genuíno que eles provocam no aluno, que gera interesse e prazer. Sugerem que os jogos façam parte da cultura escolar, cabendo ao professor analisar e avaliar a potencialidade educativa dos diferentes jogos e o aspecto curricular que se deseja desenvolver.

Buscar na história fatos relevantes que contribuam para a fundamentação e a construção do conjunto de números negativos e elementos que favoreçam a construção do conhecimento, através de caminhos experimentais ou dedutivos, são, também, algumas das alternativas. O importante é que estejam ao alcance da compreensão dos alunos e que a transposição mecânica, sem muito ou qualquer sentido para eles, seja evitada.

Na visão de Vergnaud (1993), se estivermos interessados em que o aluno realmente aprenda, um conceito não pode ser reduzido à sua definição, porquanto é através das situações e dos problemas a resolver que um conceito adquire sentido para a criança. Segundo o autor, para ensinar conceitos matemáticos e até mesmo para transformar os conceitos prévios dos alunos em conceitos mais elaborados, os professores precisam estar conscientes da importância do papel que a experiência cotidiana tem na formação de conceitos; precisam ter clareza das dificuldades que os alunos têm em compreender novas relações, em fazer novas associações; devem promover situações que propiciem o agregamento de novas informações e novos conhecimentos aos já previamente adquiridos, e com isso ampliem os conceitos já existentes.

O trabalho com Números Inteiros Relativos, na série observada, se deu praticamente durante todo o semestre pois além de ter sido retomado durante todo o período, o conteúdo em si estava presente também nos demais temas como equações de 1º grau e resolução de problemas.

A seguir, apresento alguns tipos de erros detectados nas operações com os Números Inteiros Relativos e inferências de possíveis causas:

**1) erros de cálculo:**

- + 26 - 45 = -21
- -17 - 15 = -35
- (-17) . (+17) = -279
- (- 49) : (-7) = +8
- (-10) : (-10) = 0
- (+500) : (-500)= 0
- (- 41) . (-5) = 141
- (-17) . (+17) = -279
- (+ 22) . (-22) = - 88
- (- 30) . (- 30) = + 930
- $(+6)^2$ = + 42

- $(+7)^3 = +42$

A dificuldade em efetuar as operações com correção demonstra deficiências na aprendizagem de procedimentos e algoritmos básicos e pouca habilidade em cálculos. No cálculo de +26 - 45= -21, por exemplo, o aluno subtraiu a unidade menor da maior (6 - 5 = 1) e depois efetuou a subtração das dezenas, seguindo o mesmo princípio, encontrando o resultado -21. O resultado encontrado nas operações (-10) : (-10) = 0 e (+500) : (-500)= 0, me leva a crer que o aluno teria o mesmo raciocínio se fosse com Números Naturais, visto que ele deve entender que um número dividido por ele mesmo é zero. Na multiplicação de -22 por +22 igual a -88, é provável que o aluno tenha aplicado uma “propriedade distributiva” ( dois vezes 22 mais dois vezes 22). Nesse caso, é possível perceber a falta de habilidade em estabelecer relações como fazer estimativa do resultado, pois ele poderia inferir que 20 x 20 = 400 e que 88 não poderia ser o resultado correto.

**2) erros que envolvem troca de operações e regra de sinais:**

- (-1) . (-1) . (-1) = - 3
- (-18) . (- 8) = +26
- (-100) : (+2) = - 98
- (-12) : (- 3) = + 9
- (-7) . (-2) . (+3) = +6
- -12 + 15 = -27
- ( -9) + (-9) = +18
- -18 - 18 = 0
- -16 - 16 + 16 = 16
- (-5) + (-1) = +6
- (-7) + (-2) = +9
- $(-5)^2 = -25$ e $(+5)^2 = +25$
- $(-13)^2= -169$ e $(+13)^2 = +169$
- $(-2)^4 = -16$ e $(+2)^4 = +16$

Os resultados acima apresentados evidenciam uma das maiores dificuldades dos alunos em trabalhar com os Números Inteiros Relativos que é lidar com duas dimensões presentes em operações com esses números que são estados e operações, enquanto que a preocupação ao operar com os Naturais residia em somente realizar a operação descrita. Eu não apresentei os erros decorrentes de troca de operações e regras de sinais em tópicos distintos por entender que os motivos que os desencadearam encontram-se entrelaçados. Percebo que, no caso de operações de multiplicação e divisão, o aluno considerou a operação como a indicada no sinal do número, pelo menos para chegar ao resultado final. Ex.: (-12) : (-3) = +9. Ele realizou a operação de adição ou subtração, porém com aplicação correta das regras de sinais da multiplicação ou divisão. Já nas operações de adição e subtração, ele seguiu a operação indicada, mas deixou de lado o sinal do número; depois ele aplicou a regra de sinais adotada na multiplicação e divisão (sinais iguais, mais; sinais diferentes, menos), possivelmente pela maior facilidade em memorizá-las. Ex.: (-9) + (-9)= +18. Com relação aos erros presentes nos exercícios de potenciação, vejo que são oriundos das regras de sinais, em razão dos quais pressuponho que o aluno tenha feito uma combinação de regras e extraído uma regra própria e única, em que atribui ao resultado o mesmo sinal da base, regra esta válida para bases positivas, independentemente de o expoente ser par ou não: $(-2)^4 = -16$ ; $(+2)^4 = +16 \Rightarrow$ correta. Resumindo, vejo que há deficiência conceitual de Números Inteiros Relativos culminando em extrapolação ou supergeneralização na aplicação das regras de sinais, inclusive a criação de uma regra própria, no caso da potenciação.

**3) ausência de sinal no resultado:**

- $- 8 - 2 = 10$
- $- 9 + 14 = 5$
- $- 3^3 = 27$
- $(- 5)^2 = 25$
- $-4 - 4 = 8$
- $19 - 23 = 4$
- $-6 -3 -9 - 4 = 22$
- $16 - 56 = 40$

Nesses casos é possível que o aluno tenha formado o conceito de Números Inteiros Relativos, tenha o domínio das regras de sinais e habilidade para operar mentalmente com acerto, mas na hora de grafar, de colocar no papel, acaba por omitir o sinal, talvez por entender que não seja necessário: ele sabe que $-4-4=-8$ e possivelmente entenda não ser necessário deixar o sinal explícito no resultado final.

**4) erros ao operar com potenciação:**

- $(-5)^4 = 20$
- $-5^2 = -10$
- $(-1)^3 = -3$
- $(-10)^4 = +40$
- $(-2)^4 = +16$
- $-2^4 = +16$
- $-2^7 = 49$
- $36^0 = 36$
- $(-2)^5 = 25$
- $(-2)^7 = 49$
- $(-2)^5 = -25$
- $(-10)^4 = -10^4$
- $(+9)^8 . (+9) . (+9)^9 = +9^9$
- $a^7 . a . a^{10} = a^{10}$

Embora seja um erro comum multiplicar a base pelo expoente em exercícios de potenciação, creio que as respostas dadas, de um modo geral, evidenciam insuficiência na formação/conservação de conceito de potenciação e domínio das suas propriedades básicas como o significado do expoente, do expoente nulo, do parêntesis na operação e da não-distinção da potenciação como multiplicação de fatores iguais.

**5) outros tipos de erros:**

- $(-10)^3 = -10$
- $(-13) . (+13) = 9$
- $+26 - 49 = 59$
- $-8 + 12 = +12$
- $(-16) + (-15) = -15$

- (-86) : (+2) = +2

Causa não identificada. Há possibilidade de ser uma mera resposta rápida do aluno para livrar-se logo da tarefa ou, devido ao fato de não ter conseguido resolver o exercício e ter receio de deixá-lo sem resposta.

O quadro 1 apresenta o índice de erros cometidos pelos alunos, apontados no levantamento acima. Ele nos mostra a dimensão das dificuldades que esses alunos vêm enfrentando na realização de operações com os Números Inteiros Relativos.

Quadro 1 - Índice dos tipos de erros cometidos pelos sujeitos da pesquisa

| Conteúdo | Alunos | | | |
|---|---|---|---|---|
| Números Inteiros | A1 | A2 | A3 | A4 |
| erros de cálculo | 13% | 22% | 10% | 14% |
| erros c/ operações e regra sinais | 51% | 50% | 61% | 67% |
| ausência de sinal no resultado | 5% | 16% | 0% | 22% |
| conceito de potenciação | 14% | 10% | 15% | 18% |
| outros tipos de erros | 13% | 1% | 3% | 3% |

Os erros apresentados nas avaliações já haviam sido observados na resolução dos exercícios durante as aulas, ficando evidente a grande dificuldade dos alunos em operar com Números Inteiros Relativos. Os tipos de erros constatados sugerem, além de dificuldades com cálculos: deficiências conceituais e procedimentais; falta de domínio de propriedades; incapacidade de estender certas regras para novos contextos; e falta de compromisso com a aprendizagem (colocação de respostas rápidas para livrar-se logo da tarefa). Acredito que muitas dessas dificuldades estão relacionadas com o procedimento pedagógico adotado, uma vez que o conteúdo fôra apresentado, conforme descrito no apêndice B, de forma mecânica e descontextualizada não favorecendo a reflexão, a possibilidade de tirar conclusões sobre o uso das regras e a associação dos exercícios com situações presentes no cotidiano.

## II - Números Racionais Relativos

Pelo que vemos, a opção preferencial, ao longo de muitos anos, para introduzir o estudo das frações é a abordagem da relação entre parte e todo que consiste em dividir um todo em partes iguais e considerar algumas delas, pelo fato de ser uma das interpretações mais intuitivas das frações. Entretanto, vejo a necessidade de proporcionar aos alunos a adequada experiência em que sejam explorados os diferentes significados/interpretações das frações para que cheguem a compreender o conceito. Trata-se de incluir aspectos que explicitem os diferentes significados das frações como divisão, razão, transformação, quociente de Números Naturais, etc.

Llinares e Sánchez (1998) destacam que se deve dar aos alunos um conhecimento intuitivo e profundo das frações, apresentando a eles contextos significativos tanto para o conceito como para o seu campo de aplicação, buscando conexões conceituais. Deve-se, também, ensinar-lhes processos algorítmicos porém, respeitando processos próprios dos alunos, desde que sejam válidos.

O desenvolvimento das noções que constituem a rede de relações integrantes do construto Número Racional bem como de situações que levem o aluno à construção do conceito de Racional fazem parte do currículo de séries anteriores, o que me leva a pressupor que, na sexta série, ele detenha o domínio suficiente para realizar operações básicas. Porém, trabalhar com Números Racionais Relativos tornou-se uma batalha penosa para os alunos, pois além das dificuldades em operar com as regras de sinais presentes nos Números Inteiros Relativos, eles apresentavam também dificuldades em operar com os Números Racionais.

Os dez exercícios presentes nas avaliações revelam os vários tipos de erros e dificuldades encontrados pelos alunos:

**1) soma de numerador com numerador e denominador com denominador ignorando os sinais dos termos:**

- -2/5 +2 = 4/6

- ( - 0,2) +  ( - 1  2/3) = 2/10 + 5/3 = 7/13
- -5/8 + 3/10 = 8/18

Percebe-se que os alunos somaram as frações como se estivessem operando com Números Naturais. Segundo Llinares e Sánchez (1988), há uma tendência do aluno tratar cada Número Racional como justaposição de dois Naturais apenas separados por um traço, devido a similaridade de notações existente entre as frações e os Números Naturais, o que sugere presença de obstáculo de ordem epistemológica. Uma outra hipótese a considerar é que o aluno usou o mesmo procedimento da multiplicação de frações, porém adicionando os termos.

**2) erros no cálculo do M.M.C.:**

- -5/8 + 3/10 = 20/30 + 3/30 = 23/30
- (- 1/8) + ( +1/6) =  -19/27 + 20/27 = +1/27

Suponho que no primeiro exercício houve uma mescla-alteração de passos do algoritmo mal aprendidos associados a um procedimento próprio. Acompanhando o raciocínio do aluno vejo que ele errou ao estabelecer o número trinta como divisor comum para encontrar as frações equivalentes e, ao efetuar a divisão do denominador encontrado (trinta) pelo numerador (oito), obteve o valor aproximado quatro que, multiplicado por cinco, dá 20. No último exercício, o aluno cometeu um erro ao determinar o divisor comum e na seqüência fez a operação do denominador encontrado menos o denominador anterior e colocou a diferença como novo numerador ( 27 - 8 = 19). Fazendo uso do mesmo procedimento encontrou 27 - 6 = 20, este, porém, com erro de cálculo. Estes equívocos evidenciam falta de compreensão e/ou falta de domínio do processo para operar com Números Racionais Relativos, levando os alunos a criarem procedimentos ineficazes.

**3) erros devidos à operação com decimais:**

- (-3/4) + 0,9 = 12/5   (os alunos ignoraram a vírgula no decimal “0,9”, desprezaram o sinal dos termos e trataram o número decimal e fracionário como se fossem Naturais);

- (- 0,3 ) : (- 3/5) = 3/15 (os alunos ignoraram o decimal tomando-o como Natural; erraram também ao inverter a primeira fração em vez da segunda para então operar a multiplicação).

Através desses erros é possível perceber que os alunos não concebem os números decimais como números menores que a unidade e tampouco estabelecem relações dos números decimais com os números fracionários, além de desprezar os sinais dos termos, demonstrando conhecimento insuficiente dos Números Racionais o que requer retificação do conhecimento anterior, ou seja, passar do nível de conceitualização dos Naturais para os Racionais e posteriormente para os Racionais Relativos.

**4) dificuldade em converter uma fração mista:**

- (- 0,2) + (- 1 2/3) = (-2/10) + (- 6/3) = 12/13

Neste caso, o aluno além de não ter convertido corretamente a fração mista em imprópria, misturou as operações, realizando multiplicação com os numeradores e soma com os denominadores, sem recorrer às frações equivalentes. Denota o uso de procedimento próprio e ineficaz associado à incompreensão do processo e à influência dos Números Naturais ( já citada).

**5. ausência de sinais nos resultados:**

- ( +11) : (- 44/5) = 55/44
- ( + 4/3) . (- 4/3) = 16/9

Estes erros têm as mesmas características dos apresentados nas operações com os Números Inteiros descritos anteriormente e eu volto com a hipótese de que esse aluno tem o conceito de Números Racionais formado e opera mentalmente com acerto, mas, na hora de grafar o resultado, omite o sinal, talvez por estar claro para ele (que o resultado é positivo ou negativo) e entender que não seja necessário colocá-lo.

**6) erros que envolvem troca de operações e regra de sinais:**

- -3/10 - 1/6 = -9/30 - 5/30 = 4/30 (é possível que o aluno não tenha o domínio das regras de sinais da adição/ subtração e tenha seguido o sinal da operação, desconsiderando o sinal do outro termo);

- (+11) : (- 44/6) = 55/6 (o aluno realizou operação de adição somando os numeradores e denominadores “interpretando o denominador de +11 como zero ⇒ 11/0 + 44/6= 55/6”, sem atentar para os sinais dos termos cometendo um erro semelhante ao que já ocorreu nas operações de multiplicação e divisão com Números Inteiros (-100) : (+2) = -98);
- (- 4) . (- 3/11) = 7/12 ( o aluno somou numeradores e denominadores e pode ter aplicado corretamente a regra de sinal da multiplicação “menos com menos = mais” e ter interpretado como desnecessário o sinal no resultado final, como já visto anteriormente);
- (- 0,3) : (-3/5) = 6/6 (tratou o número decimal 0,3 como Número Natural 3 e somou numeradores e denominadores como se estivesse operando com Números Naturais; com relação à regra de sinais, apresento a mesma hipótese do exercício anterior: o aluno pode ter aplicado a regra de sinais da multiplicação e ter entendido não ser necessário explicitá-lo no resultado);
- ( + 4/3) . (- 4/3) = 8/6 (o mesmo que no exercício anterior).

Parte dos erros aqui apresentados denotam a resistência dos alunos em trabalhar com os Números Racionais Relativos (decimais e fracionários) pelo fato de terem dispensado tratamento semelhante ao dos Números Naturais. Ao analisar os demais erros, os que envolvem troca de operação e regras de sinais, vejo que os alunos assumiram o sinal do número como operação e adicionaram ou subtraíram em vez multiplicar ou dividir, porém, omitindo o sinal nos resultados.

**7) erro devido à conversão da divisão em multiplicação:**

- ( - 0,3) : ( - 3/5) = - 3/10 : - 3/5 = - 30/15

Neste exercício, o aluno reconheceu o número decimal, transformou-o corretamente em fracionário, porém errou ao realizar a “multiplicação cruzada”, possivelmente porque não compreendeu ou não tem o domínio do procedimento para dividir frações. Falhou também no procedimento de uso das regras de sinais.

O quadro 2, como citei no início deste capítulo, traz somente o percentual geral de erros devido à baixa quantidade de exercícios presentes nas avaliações.

Quadro 2 - Índice de erros nas operações com Números Racionais Relativos

| Alunos | A1 | A2 | A3 | A4 |
|---|---|---|---|---|
| Números Racionais Relativos | 100 % | 90% | * | 100% |

* Não consta o índice de erros relativo ao aluno A3 devido à sua ausência nos dias das avaliações que continham exercícios com Números Racionais Relativos

Diante do levantamento dos tipos de erros e da inferência de possíveis causas, fica evidente que grande parte dos erros que os alunos cometem ao trabalhar com os Racionais tem origem, conforme afirmam Llinares e Sánchez (1988), na similaridade existente na linguagem e na simbologia presentes nos Números Naturais. Segundo os autores, as frações recebem nomes iguais ou muito parecidos com os que já são familiares no contexto dos números ordinais como "um quarto", "dois quintos" e, em razão da experiência com Números Naturais, os alunos tendem a ver as frações como um conjunto dos Números Naturais. A soma de numeradores com numeradores e denominadores com denominadores de forma independente, sem que antes tenham transformado as frações em equivalentes, ocorreu com muita freqüência e, segundo minhas observações e bibliografia estudada, este parece ser um ato comum praticado pelos estudantes. Esse tipo de erro tem sido objeto de estudos e é mencionado por autores como por exemplo Borasi (1987), Nunes e Bryant (1997) além dos já citados: Llinares e Sánchez (1988). Pressuponho que a falta de domínio e/ou entendimento dos procedimentos para encontrar um denominador comum levou os alunos a criarem procedimentos próprios ineficazes. Em geral, acredito que o alto índice de erros se deve a dificuldades conceituais, algorítmicas e procedimentais. Receio que o conteúdo não tenha sido apresentado e explorado com eficácia, visto que grande parte dos alunos apresentou deficiências conceituais no que concerne a números decimais e fracionários, e a introdução dos Racionais Relativos deveria ser, a meu ver, precedida do resgate de conhecimentos prévios, do fortalecimento dos conhecimentos já adquiridos e até mesmo de um esforço da consolidação de conceitos básicos por parte do professor, para então avançar com novo conteúdo. Entendo que os aspectos principais que deveriam ter sido abordados visando o fortalecimento mencionado, antes da introdução dos Números Racionais Relativos, são os seguintes:

- observação de que os Números Naturais podem ser expressos na forma fracionária e encontram-se presentes nos mais diversos momentos do nosso cotidiano;

- exploração da divisão parte-todo: número de partes (numerador) e total das partes (denominador) através de representação gráfica e/ou manipulação de objetos;

- reconhecimento do conjunto dos Números Inteiros como extensão dos Naturais e, por conseguinte, dos Racionais como extensão dos Inteiros e dos Racionais Relativos como extensão dos Racionais;

- localização na reta numérica de Números Racionais e Racionais Relativos para construção ou fortalecimentos de conceitos;

- resgate do conceito de números decimais bem como sua representação fracionária;

- necessidade de converter as frações dadas em outras equivalentes, ambas com um denominador comum (total das partes), para poder realizar as operações de adição e subtração;

- compreensão da regra de multiplicação de frações iniciando com a soma de frações ($1/3 + 1/3 = 2/3 \Rightarrow 2/1 \cdot 1/3 = 2/3$) através de representação gráfica e manipulação de material concreto;

- compreensão da regra de divisão de frações através de resoluções experimentais, iniciando com a divisão de um inteiro por uma fração (1 :

1/n = n) e, posteriormente, com um número qualquer inteiro por uma fração (m : 1/n = mxn), que é a fração invertida, no sentido de facilitar ao aluno a possibilidade de inferir as primeiras deduções para depois trabalhar com a divisão de frações.

**III - Expressões Algébricas**

O uso das letras em álgebra constituiu uma grande dificuldade para os alunos. As letras, em aritmética, já eram conhecidas por eles mas serviam para representar apenas medidas como metro (m), litro (l), etc. e não número ou quantidade qualquer. Na álgebra, as letras aparecem de uma maneira bem diferente que na aritmética. Elas indicam valores numéricos e essa mudança, comumente, causa muita confusão. Um dos aspectos mais importantes da álgebra talvez seja a própria idéia de variável. Mesmo reconhecendo as letras como representações de números, há uma tendência a considerar que elas representam valores específicos únicos como x + y + z nunca pode ser igual a x + p + z e não números genéricos. Para que o aluno tenha sucesso em álgebra, é preciso que ele compreenda a generalização das relações e procedimentos aritméticos dentro do contexto aritmético. Se não forem reconhecidos, ou se o aluno tiver concepções erradas a respeito deles, seu desempenho em álgebra poderá ser afetado (BOOTH, 1994).

A introdução algébrica feita pelo professor se deu com a demonstração de adição e subtração de dois ou mais termos algébricos com a mesma parte literal como: 2a + 1a = 3a; 3y/8 - y = -5y/8, seguida de boa explanação. Ocorreu durante duas aulas abrangendo a resolução de 14 exercícios. Posteriormente, durante uma aula, o professor trabalhou com multiplicação de termos algébricos envolvendo 15 exercícios, preparando os alunos para a resolução de equações de 1º grau. Convém ressaltar que exercícios dessa natureza não foram contemplados nas avaliações.

**III. a - Equações do 1º grau**

Ao lidar com as expressões algébricas, os alunos aprenderam a operar com fatores que apresentavam incógnitas iguais sem, no entanto, determinar o valor do termo desconhecido. Resolver uma equação consiste em encontrar o valor da incógnita ou da variável de modo que torne a sentença aberta verdadeira e a resolução de exercícios desse tipo significou um novo momento na vida dos alunos.

De início, a dificuldade dos alunos em resolver uma equação simples, com incógnitas somente no primeiro membro mostrou-se significativa. Mais adiante, quando as incógnitas passaram a aparecer também no segundo membro e que, para determinar o Conjunto Verdade, o aluno teria que isolar a incógnita no primeiro membro e os termos conhecidos no segundo, realizando operações inversas (ou inversão de sinal) ao migrar de um membro para o outro, o índice de erros aumentou.

Conforme pode ser visto a seguir, os erros encontrados no levantamento efetuado em provas e exercícios para nota têm diversas origens:

**1) erros de sinal na mudança de membro:**

- $6 + x = -12 \Rightarrow x = 12 + 6 \Rightarrow x = 18$ (erro de sinal na mudança de membro. É possível que aqui o aluno tenha compreendido o processo, uma vez que foi capaz de fazer a transformação "qual número que adicionado a 6 dá -12 ?" e errou na notação);
- $9x - 18 = 3x + 21 \Rightarrow 9x + 3x = +18 + 21 \Rightarrow 12x = 39 \Rightarrow x = 39/12$ (erro de sinal na mudança de membro);
- $9x - 7 = 5x + 13 \Rightarrow 9x + 5x = 13 - 7 \Rightarrow 14x = 16 \Rightarrow x = 16/14$.

A possível causa consiste na incompreensão do processo que implica o isolamento da incógnita em um dos membros e a realização da operação inversa para desfazer a operação inicial (incompreensão da notação do símbolo de igualdade como um equilíbrio em dois sentidos em operações algébricas).

**2) erros ao determinar o valor da incógnita:**

- $6x = 12 \Rightarrow \quad x = 12 + 6 \Rightarrow \; x= 18$
- $6x = 12 \;\Rightarrow\; x = 12 - 6 \Rightarrow \; x = 6$
- $9x = 7x + 1 \Rightarrow \; 9x - 7x = 1 \;\Rightarrow\; 2x = 1 \Rightarrow \; x = 1$ $V=\{1\}$
- $2\,(x -1) - 7 = 16 \Rightarrow \; 2x - 2 -7 = 16 \;\Rightarrow 2x = \; 7 + 16 + 2 \Rightarrow \; 2x = 25 \Rightarrow \; x= 25$
  $V = \{25\}$
- $7x + 4 = 39 \Rightarrow x = 39 - 7 = 32 \;\Rightarrow x= 32 : 4 = 8$

O aluno não reconhece a operação de multiplicação implícita entre o numeral e a incógnita (multiplicação em álgebra por justaposição) e troca a operação de multiplicação por adição evidenciando o fenômeno da extrapolação de uma regra, válida, por exemplo, para a soma de inteiros com decimais onde o sinal + de aritmética é eliminado ( 2 + 0,5 = 2,5).

**3) outros tipos de erros:**

- $x - 4 = -2 \;\; x = -2 + 4 = \; - 6$ ( erro de notação no resultado);
- $x + 1 = 7 \;\; V = \{1\}$;
- $x - 8 = 10 \;\; V = \{8\}$;
- $12x - 6 = 9x + 3 \Rightarrow \; 12\,x + 9x = -6 + 3 \Rightarrow 12x :9 = 12x/9 \quad V= \{19\}$ (dificuldade em trabalhar com numerais e incógnitas);
- $9x = 7x + 1 \;\Rightarrow\; x = 7\text{-}1 = 6 : 9 = \; x = 3$ (procedimento indevido. O aluno reduziu o campo trabalhado a apenas numerais);
- $5x - 2 = 18 + 3x \Rightarrow \; 5x - 2x= - 2 + 18 \;\Rightarrow 2\,x = 3x : 18 + 13 = V = \{24\}$;
- $5x -2 = 18 + 3x \;\Rightarrow 5x -2 = 18 + 3 \Rightarrow 5x - 2 = 3x = 18+3 \Rightarrow \; x = 24$ ;
- $5x + 1 = 36 \;\Rightarrow\; x= 42$ ( o aluno somou 5 + 1 + 36= 42; ele operou com todos os coeficientes numéricos);
- $7x = 4x = 5 \;\Rightarrow\; x= 16$ ( o aluno somou 7+4+5 = 16; semelhante ao anterior).

Nestes exercícios é possível perceber a falta de domínio dos alunos quanto aos procedimentos para resolver uma equação, possivelmente por não terem formado o conceito do que é uma operação algébrica, evidenciado quando operaram com todos os coeficientes numéricos (prescindindo das incógnitas), possivelmente por julgá-los mais relevantes que as incógnitas. É também possível perceber que eles não compreenderam a representação do sinal de igualdade na resolução de equações como uma relação de equivalência, como um equilíbrio em dois sentidos, diferentemente do que ocorre em operações da aritmética que geralmente é interpretado como um símbolo que precede a escrita de uma resposta (BOOTH, 1994). Neste tópico, vale mencionar, que os três primeiros exercícios foram realizados por um mesmo aluno tendo-se dado a realização do primeiro exercício uma semana antes dos outros dois. Nesse exercício ele sinalizava compreender o processo de solução, errando apenas na notação final, deixando dúvida, portanto, se as duas respostas posteriores podem ser interpretadas como aleatórias ou se ele buscou uma forma própria de resolução.

**4) erro ao operar com fracionários:**

- $x/2 + x/3 = 1 \Rightarrow 12x/6 + 18x/6 = 6/6 \Rightarrow 12x + 18x = 6 \Rightarrow 30x = 6$
  $x = 30/6 \Rightarrow x = 5 \quad V = \{5\}$
- $x/2 + x/4 = 1 \Rightarrow 8/4 + 3/4 = 4/4$
- $x/2 - x/4 = 1/2 \Rightarrow 8/4 - 16/4 = 8/4 \Rightarrow 8 - 1 = 8 \Rightarrow 7 = 8 \Rightarrow V = \{8/7\}$

Os alunos demonstraram reconhecer a necessidade de encontrar um denominador comum para realizar a operação, porém, possivelmente por falta de domínio do procedimento, erraram ao determinar os numeradores. Nos dois últimos exercícios, além da incidência do erro no processo de cálculo dos numeradores, o aluno abandonou a incógnita e realizou a operação utilizando método próprio e ineficaz. Nestes casos, reapareceu a dificuldade em operar com os Números Racionais bem como a dificuldade em reconhecer a relevância da incógnita na operação.

**5) erros de cálculo e regras de sinais:**

- $2(x - 1) - 7 = 16 \Rightarrow 2x - 2 - 7 = 16 \Rightarrow 2x + 6 = 16 \Rightarrow 2x = 25 \Rightarrow V = 25/2$
- $x - 4 = -2 \Rightarrow x = -2 + 4 \Rightarrow x = -6$

Os alunos efetuaram com acerto a operação que envolve a propriedade distributiva mas erraram nos cálculos (- 2 - 7= +6) e na manipulação das regras de sinais; possivelmente fizeram uso da regra da multiplicação/divisão (- - = +); incorrendo nos mesmos erros já detectados nas operações com Números Racionais Relativos.

**6) dificuldade em operar com a propriedade distributiva:**

- $7(x - 2) = 5(x + 3) \Rightarrow 7x - 2 = 5x + 3 \Rightarrow x = 8$

Este erro evidencia a compreensão insuficiente dos princípios da propriedade distributiva bem como dos procedimentos para resolução de uma equação.

O quadro 3 mostra o percentual total de erros dos alunos pesquisados e denotam o grau de dificuldade em resolver uma equação.

Quadro 3 - Índice de erros presentes nos exercícios de equações de 1º grau

| Alunos | A1 | A2 | A3 | A4 |
|---|---|---|---|---|
| Equações de 1º grau | 77% | 50% | 75% | 91% |

O desempenho dos alunos na resolução de exercícios e problemas presentes nas avaliações, apurado em termos de índice de erros mostrados no quadro acima não atingiu um nível satisfatório. Acredito que as dificuldades em encontrar a solução para uma equação de 1º grau são em grande parte devidas à insuficiência de aprendizagens anteriores, que se vão sobrepondo e reaparecendo de diferentes maneiras e, para minimizá-las, seria necessário uma postura pedagógica do professor no sentido de retornar aos conceitos básicos e explorar os conhecimentos já adquiridos visando a ancoragem de novos conhecimentos e fortalecimento dos anteriores. Durante as observações em sala de aula, foi possível perceber que os alunos não têm domínio suficiente das propriedades básicas como comutativa, distributiva e fechamento bem como dos procedimentos operativos para resolução de expressões. Foi possível perceber, também, que eles não conseguem fazer generalizações suficientes para concluir que, para se obter o valor de x em x +1 = 7, basta realizar a operação inversa "sete menos um é igual ao número procurado", indicando que os alunos não concebem o sinal de igualdade como um equilíbrio manipulável em ambos os sentidos; não conseguem compreender que 2x é uma forma de expressar "duas vezes x", embora o professor tenha explicado e reforçado tratar-se de uma *"multiplicação do numeral dois com o termo desconhecido x".* Esse tipo de dificuldade já havia sido constatado por Booth (1994) que, em seus estudos, relata haver percebido a tendência aparentemente forte nas crianças em verem a multiplicação em álgebra por justaposição como soma em vez de produto e sugere que na fase de iniciação dos alunos em álgebra a notação seja feita na forma completa (x . 2 ou 2 . x). De fato, nos exercícios realizados nas provas este tipo de erro aparece na realização de uma operação de adição e outra de subtração para encontrar o valor de x na equação 6x= 12 ( ver item nº 2 acima). De um modo geral os erros constatados nas avaliações indicam deficiências conceituais generalizadas e falta de domínio dos procedimentos para operar com exercícios algébricos.

## IV - Resolução de Problemas Algébricos

Durante o acompanhamento diário das aulas (e isto também está retratado nas avaliações) observei que os alunos estavam acostumados a resolver exercícios que requeriam apenas aplicação de rotinas automatizadas aprendidas por repetição. A meu ver, provavelmente, a maior parte deles não conseguia discernir o sentido do que estava fazendo tendo como conseqüência muitas dificuldades em transferir ou generalizar, de forma autônoma, esses conhecimentos a novas situações.

Como vou falar de resolução de problemas e até agora a abordagem das aulas limitou-se à aplicação de exercícios, considero pertinente mencionar a diferenciação que Pozo e Pérez Echeverría (1998) fazem entre realização de exercícios e solução de problemas. De um modo sintético, esses autores dizem que a realização de exercícios se baseia no uso de habilidades ou técnicas "sobreaprendidas", ou seja, transformadas em rotinas automatizadas como conseqüência de uma prática contínua, que não representa nada de novo, podendo tais exercícios ser resolvidos através de caminhos ou meios habituais. Na resolução de um problema as técnicas "sobreaprendidas" constituem um recurso instrumental necessário, mas não suficiente para alcançar a solução; exige, além delas, um processo de reflexão ou uma tomada de decisões sobre a seqüência de passos a serem seguidos (estratégias) e a disponibilidade de uma série de habilidades e conhecimentos de diferentes linguagens e algoritmos.

Complementando, os autores dizem que exercícios servem para consolidar certas técnicas, habilidades e procedimentos necessários para posterior solução de um problema, mas dificilmente podem trazer alguma ajuda para que essas técnicas sejam usadas em contextos diferentes daqueles onde foram aprendidas ou exercitadas, ou dificilmente podem servir para a aprendizagem e compreensão de conceitos.

Um dos objetivos do ensino da Matemática é tornar o aluno capaz de fazer a análise dos passos e procedimentos utilizados na resolução de um problema, tornando explícitos os conceitos neles envolvidos. Isso é muito importante, uma vez que proporciona a tomada de consciência sobre suas próprias idéias e conhecimentos. Porém, há alunos que são capazes de resolver corretamente os problemas, mas nem sempre explicam as razões da sua maneira de proceder. Há alunos, também, que perante um enunciado, depois de uma rápida leitura, tendem a resolver a tarefa de forma imediata, sem reflexão prévia; se atiram, simplesmente, para as operações sem terem a visão do conjunto do problema. Fazem qualquer coisa, precipitam-se, somam ou multiplicam ao acaso, porque entendem (ou lhes é cobrado) que devem atuar, transformando, por vezes, os dados do problema em solução. Diante disso, conforme Pérez Echeverría (1998), é necessário levar os alunos a pensar antes de agir; conscientizá-los de que devem, primeiramente, pôr em ordem os elementos do enunciado antes de querer empreender a procura da solução do problema e, ao final, é desejável que eles sejam capazes de explicar as razões que os levaram a proceder dessa maneira em vez de outra.

De acordo com Pérez Echeverría (1998) e Mialaret (1975), a compreensão de um problema matemático pode ser influenciada por diversos fatores como: o conteúdo das tarefas; a sua relação com os conhecimentos que o aluno detém; o vocabulário utilizado no enunciado; o contexto no qual ocorre. Enfim, a forma de linguagem que as expressões assumem faz com que haja uma variação considerável na sua tradução para as representações matemáticas, influindo decisivamente na forma de resolvê-las e, conseqüentemente, no êxito ou fracasso do aluno.

Os alunos devem ser preparados para trabalhar com vários tipos de problemas. Há problemas em que as operações estão praticamente explícitas no enunciado, não exigindo o uso de grandes estratégias e técnicas para chegar à solução final e, entre outros tipos, há aqueles que oferecem apenas um conjunto de dados e o aluno deve investigar para descobrir o caminho ou os caminhos possíveis a percorrer; deve inventar um subterfúgio quer para explorar os dados que lhe são fornecidos, quer para encontrar os dados intermediários indispensáveis à pesquisa das soluções. Cada tipo de problema tem seu papel a desempenhar na formação matemática do aluno e o campo de aplicação e os limites da sua utilização devem estar ao alcance deles.

O primeiro passo para a solução de um problema consiste na tradução das palavras ou do formato de apresentação em termos matemáticos (expressões e símbolos matemáticos) com os quais o aluno vai lidar e isso requer a presença de conhecimentos lingüísticos, semânticos e esquemáticos que facilitem a compreensão da tarefa; em seguida ele deve programar estratégias e definir as técnicas que o levarão à solução. Ao final deve saber interpretar os resultados e traduzi-los como uma solução plausível (PÉREZ ECHEVERRÍA, 1998).

Com relação à didática a ser adotada, essa autora recomenda que as tarefas ou situações planejadas exijam do aluno uma previsão inicial, uma estimativa ou um julgamento concreto do problema a ser trabalhado. O aluno deve saber distinguir que dados são úteis e que dados não são para determinar as ações que devem ser realizadas, deve saber interpretar o contexto do problema e dar-lhe sentido. Desse modo, é indispensável que o problema seja extraído da vida cotidiana para que o aluno, de acordo com seus conhecimentos e hábitos, tenha uma compreensão do contexto no qual se inserem os fatos tornando possível vivenciar os termos do enunciado.

Após o trabalho com equações de 1º grau o professor anunciou que os alunos passariam a resolver “problemas de equação” e, para isso, teriam que fazer a leitura e interpretação dos enunciados para poder resolvê-los.

A resolução de um problema algébrico, como sabemos, consiste em determinar o valor da incógnita, ou seja, de um termo desconhecido apresentado no problema. Isso requer uma leitura atenta do enunciado, sua compreensão, mudança da linguagem escrita para a linguagem simbólica da Matemática, identificação das operações a serem efetuadas e processos de resolução, ou seja, requer o uso de uma série de habilidades, técnicas e procedimentos que já devem ser de domínio dos alunos.

Durante nove aulas seguidas os alunos resolveram, em sala, 51 problemas com enunciados semelhantes aos aplicados na prova (envolvendo triplo, quádruplo, um número somado com seu dobro, etc.). As dificuldades apresentadas no dia-a-dia e nas avaliações foram de ordem conceitual envolvendo a interpretação do enunciado e a representação matemática, seguidas das de ordem operacional que se referem aos passos seguidos pelos alunos na busca da solução. Os nove problemas que serão analisados fizeram parte das avaliações realizadas durante o período observado e demonstram claramente as grandes dificuldades enfrentadas pelos quatro alunos, representados por A1, A2, A3 e A4. Devido à facilidade e melhor visualização que o assunto requer, o levantamento e análise dos erros na resolução de problemas será apresentada em formato diferente dos demais conteúdos. Mostrarei o caminho escolhido por cada um dos alunos para a resolução, problema por problema.

O quadro com o índice de erros na resolução de problemas não será apresentado, já que entre os nove problemas solucionados houve apenas um único acerto: o de número três, pelo aluno A2, conforme podemos ver abaixo:

**1 - A diferença entre o triplo de um número com 20 é igual a 34. Qual é esse número?**

A1) $3x+20 = 34$ $3x = 34$ $x= 34 - 20 = 14$ (o aluno representou a diferença como adição);

A2) $3x - 20 = 34$ $17x = 34$ $x = 34/17$ (representação matemática correta. Erro no procedimento);

A3) $3x + 20 = 34$ (coincidentemente este aluno apresentou o mesmo raciocínio do aluno A1, porém, abandonou a equação);

A4) $x + 20 = 34$ $x= 6$ (o aluno não considerou a informação dada no problema " o triplo de um número", representou a diferença como adição e atribuiu um valor, possivelmente, aleatório à x).

Neste problema, a expressão "com", presente no enunciado, pode ter induzido os alunos, com exceção do A2, a interpretar a operação como adição, provocando erros.

**2 - O quádruplo de um número diminuído de 8 é igual ao dobro desse número diminuído de 2. Qual é esse número?**

A1) $4x - 8= 2x - 2$ $4x + 8 +2 - 10$ $x= 10 : 4 +2 = 4$ (está correta a interpretação do problema e a tradução para a linguagem simbólica. O aluno apresentou dificuldade no procedimento para chegar à solução);

A2) $4/2x - 8 = 2x - 2$ (a representação de quádruplo foi feita pelo aluno como 4/2, sem que se desse conta de que 4/2 é igual a 2);

A3) $4x - 8 - 2 - 2$ (percebe-se que o aluno representou corretamente o quádruplo e o dobro, mas não obteve êxito na formulação/elaboração da equação);

A4) $2x = 4$ $x = 8$ (é provável que o aluno tenha feito uma rápida leitura do problema e realizado uma tradução sem se ater fielmente a informações presentes no enunciado).

**3 - Nove vezes um número é igual ao triplo desse número adicionado a 39. Qual é esse número?**

A1) $9x = 3x + 39 = 47$ $x = 47$ (o aluno fez corretamente a tradução para a linguagem matemática. Apresentou dificuldade no procedimento para chegar à solução);

A2) $9x = 3x + 39$ $9x - 3x = 39$ $6x = 39$ $x = 39/6$ (a tradução para a linguagem matemática e procedimentos de solução estão corretos);

A3) $9x = 3 + 39$ (o aluno não usou a incógnita para representar o triplo do número a ser encontrado);

A4) $x = 18 - 39$ $x = 21$ (não foi possível inferir o raciocínio seguido pelo aluno para a montagem da equação e resultado obtido).

**4- Adicionando a metade de um número com a sua terça parte(sic) é igual a 1. Qual é esse número?**

A1) 1/2 + 1/3 = 1 12/6 + 18/6 = 6/6 x = 32 (o aluno trabalhou com a incógnita implicitamente. Errou ao operar com frações; fez uso de procedimento próprio, conforme visto na análise dos exercícios sobre Números Racionais Relativos);

A2) 1/2x + 1/3x = 1 3/6x + 2/6x = 5/6 (o aluno realizou corretamente a operação de adição das frações do primeiro termo, porém não atentou para a igualdade proposta na equação "notação simbólica do sinal de igualdade");

A3) x + 3 = 1 (o aluno tratou os números fracionários como Inteiros);

A4) 1x = 3 x= 2 (interpretação errônea do problema? Na solução dada aparece o fenômeno da supergeneralização da regra. Como o número 1 que antecede o x não tem nenhum sinal na frente o aluno, possivelmente, entendeu que o sinal que ele tem é +, ou seja, um positivo (+1) e como há o sinal de igualdade, realizou a operação inversa x = 3 -1 = 2).

**5- A diferença entre o quíntuplo de um número e 40 é igual a 2 menos esse número. Determine esse número.**

A1) 5x + 40 = 2 x = 2 + 40 x= 42 (o aluno voltou a usar a operação da adição para representar "a diferença" falhando na tradução do problema para a linguagem matemática e no procedimento de resolução);

A2) 5/2x - 40 = 2 - x (o aluno voltou a representar, dessa vez o quíntuplo, como uma fração com denominador 2);

A3) 4x - 40 = 2 - x (o aluno confundiu o quíntuplo com o quádruplo mas completou corretamente a representação matemática conforme o enunciado do problema. Contudo, abandonou-a sem dar andamento);

A4) 40 : 2 = 20 (Resposta dada ao problema: "o número é 20". Percebe-se, uma certa "pressa" em desincumbir-se logo da tarefa, levando-o à interpretação errônea do problema e procedimento inconsistente).

**6- Ao triplo de um número adicionamos 12 e o resultado é igual ao quíntuplo desse número. Qual é esse número?**

A1) 12 . 4x = 48 x = 48 (houve dificuldade na interpretação/representação da situação em linguagem matemática e nos procedimentos para encontrar a solução);

A2) 3x + 12 = 4 (o aluno representou corretamente o triplo, mas errou ao representar o quíntuplo, além de não fazer presente a incógnita);

A3) (deixou em branco);

A4) "R; o número é 14x" (não foi possível inferir o raciocínio do aluno).

**7- A soma da metade de um número com 21 é igual ao dobro do número menos 9. Determine esse número.**

A1) 1/2 + 21 = 22/3 (houve dificuldade na representação matemática e procedimentos envolvendo operação com frações);

A2) 2x + 21 = 2x - 9 (o aluno representou a metade como dobro);

A3) (deixou em branco);

A4) "R: o número é 31" (possivelmente somou 1/2 + 21 + 9 = 31).

**8- O triplo de um número adicionado com 2 é igual ao próprio número mais 8. Calcule esse número.**

A1) 3x = x + 8 3x = x + 8 - 8 x 8x - 3 = 5 (a representação matemática dos dados do problema e os procedimentos utilizados foram indevidos);

A2) (deixou em branco);

A3) (ausente. Não fez a prova);

A4) 3x + 2 = -2 + 8 3x = 10 + 5 x= 15 (o aluno iniciou bem a representação numérica do problema, porém, no segundo membro, não soube representar "o próprio número" como incógnita, culminando em uma seqüência de erros).

**9- Um número adicionado com 3/4 desse mesmo número é igual a 21. Qual é esse número?**

A1) x + 3/4x = 412 (o aluno copiou o enunciado como "igual a 412" e prosseguiu: - 4/4x + 12/4 = 1648/4 x = 12 - 4 = 8 - 1648 = 8.241. Ele interpretou corretamente o problema, avançou trabalhando com frações com acerto mas falhou no procedimento de resolução da equação);

A2) (deixou em branco);

A3) (ausente. Não fez a prova);

A4) 1x + 3/4 = 21 x= 416 (não foi possível inferir o raciocínio trilhado pelo aluno para a obtenção desse resultado).

Como é possível observar os problemas presentes nas avaliações são pobres no enunciado; não caracterizam uma situação de vivência diária, porém, são simples. Trazem as operações praticamente explícitas, exigindo apenas a tradução para a linguagem matemática e o domínio dos procedimentos para resolução de uma equação. Analisando os dados levantados cheguei às seguintes conclusões a respeito das dificuldades de cada um dos alunos pesquisados:

- o aluno A1, por vezes, representa o problema matematicamente de forma correta mas tem dificuldades em chegar à solução possivelmente por insuficiência conceitual (frações) e falta de compreensão/fixação nos procedimentos em operações que envolvem variáveis;
- o aluno A2 representou indevidamente quádruplo como 4/2, quíntuplo como 5/2, e a metade como dobro evidenciando confusão conceitual, mas, apesar de outros erros no procedimento mostra certa coerência na organização do seu raciocínio em busca da solução. Realizou com acerto o problema 3;

- o aluno A3, em algumas vezes, traduziu o problema corretamente para a linguagem simbólica, porém abandonou-o sem qualquer tentativa. Em outros casos aparentou distração ao não considerar a incógnita (o triplo desse número = 3) ou, outra hipótese que considero mais plausível é que ele reduziu o campo (numeral e incógnita) a somente numerais por julgar mais relevante e/ou por deter sobre ele maior domínio. É visível, também, a dificuldade em operar com frações;

- com relação ao aluno A4 era visível o seu comportamento dispersivo durante as explicações do professor, as resoluções de exercícios em sala e as correções na lousa, e esse comportamento foi acompanhado por mim durante todo o período das observações. Acredito que a aleatoriedade percebida na tradução dos problemas para a linguagem simbólica e na apresentação de certos resultados podem ser decorrência dessa falta de atenção. Creio, também, que a apresentação de meros resultados, aparentemente sem compromisso com o acerto, se deve à insistência do professor em que o aluno não deixe problemas sem respostas, não deixe de tentar, se esforce na busca da solução. Entretanto, percebe-se que o aluno A4 tem condições de melhorar seu rendimento, mas, para isso, é necessário que haja disposição e esforço. O aluno demonstra deficiências conceituais e operacionais, mas tem potencial para reverter esse quadro.

Pressuponho que a linguagem essencialmente algébrica, presente nos problemas, não comum em situações vividas no dia-a-dia, pode ter contribuído para o alto índice de erros constatados. Os tipos de problemas propostos não expressam um sentido referencial, os quais, acredito, não motivaram os alunos a fazer inferências ou a especular sobre os resultados, levando-os ao uso dos conhecimentos (conceituais) e ao domínio de regras e procedimentos de que dispunham.

A ausência de problemas comuns do cotidiano e o trabalho em pequenos grupos restringem a ação dos alunos e não lhes possibilitam vislumbrar diferentes situações e lugares para um determinado problema; discutir e verbalizar para o colega em que consiste o problema; refletir sobre o que o problema pede (supondo uma leitura atenta); identificar as operações a serem efetuadas para, somente então, partir para a solução. Acredito que a reflexão sobre o dado a ser encontrado (a resposta final) e sobre o caminho a ser seguido (estratégia), ao contrário da forma rápida e compulsória que eles costumavam adotar, poderia favorecer a correta tradução dos símbolos matemáticos e a operacionalização.

**V - Área e Perímetro**

A abordagem do cálculo de área e perímetro ocorreu em apenas duas aulas. O trabalho em sala de aula foi precedido de medição e cálculo do perímetro e área do quarto da residência de cada aluno, como tarefa de casa, envolvendo, portanto, um contexto, e contribuindo para melhor compreensão do conteúdo.

Como o número de problemas presentes nas avaliações não foi elevado, optei por descrevê-los acompanhados das resoluções dos alunos:

**1) Sabendo que a figura abaixo tem as seguintes medidas:**

6,5 cm

3 cm

**a) qual a sua área?**

**b) qual o seu perímetro?**

A1) - área: 15,18 - aplicou a propriedade distributiva na ordem inversa (três vezes cinco e depois três vezes seis);

- perímetro: 8,39 ( raciocínio não identificado);

A2) - área: 19,0 (erro de cálculo);

- perímetro: 870 (raciocínio não identificado);

A3) - ausente. Não fez a prova;

A4) - área: 189m (o aluno copiou a medida de um lado como 6,3. Possivelmente efetuou o cálculo como 63 . 3 sem considerar o decimal);

- perímetro: 9,3 ( somou 6,3 + 3).

**2) Um terreno mede 18 metros de largura e 26 metros de comprimento. Determine o seu perímetro. Caso o dono resolve (sic) fazer uma cerca em volta do terreno com 5 voltas de fio de arame, quanto deverá comprar?**

A1) a área é de 15, o perímetro será 68 ( acompanhamento do raciocínio: 26. 18 = 68 $\Rightarrow$ 68 : 5 = " em branco". A resolução deste exercício apresenta uma seqüência de erros que podem ser devidos à falta de leitura ou de não compreensão do enunciado e de falhas conceituais);

A2) (ausente. Não fez a prova);

A3) 118 + 26 = 44 P: 44 metros (o aluno considerou apenas a soma de dois dos lados);

A4) 18 + 26 = 44 ⇒ 44 . 5 = 220 R: Ele deverá comprar 220m de fio (o aluno considerou perímetro como soma de dois dos lados).

**3) Se o seu quarto tem o tamanho de 3 metros de largura e 3 metros de comprimento.(sic) Qual é a área do seu quarto? E qual é o perímetro?**

A1) a área é 9. O perímetro é 6 (considera apenas a medida de um dos lados e comprimento);

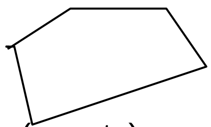
A2) (ausente. Não fez a prova);

A3) A= 9; P=6 ( o erro reaparece: somou apenas dois dos lados);

A4) A= 36; P= 9 (possivelmente o aluno somou 3+3= 6 e depois calculou a área: 36. Ao calcular o perímetro procedeu como se fosse área ⇒ P= 9).

**4) Observe as figuras e calcule o perímetro:**

**FIGURA A - Medidas dos lados: 6cm, 4cm, 5cm, 8cm, 3cm**



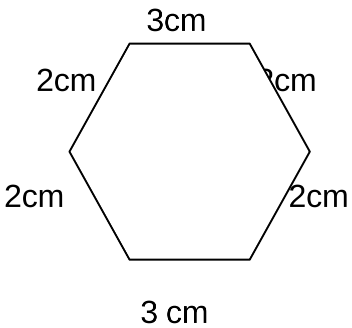
A1) 26 cm (correta);

A2) (ausente. Não fez a prova);

A3) 6 + 4 + 5+ 8 + 3 = 26 P= 26 cm (correta);

A4) P= 26 (correta).

**FIGURA B:**




A1) resposta: 14 cm (correta);

A2) (ausente. Não fez a prova);

A3) 3+3+2+2+2+2 = 14 P=14 cm (correta);

A4) P= 14 (correta).

**5) Quantos metros de piso preciso comprar para colocar em um barracão de 14m de comprimento e 8m de largura? Quanto vou gastar sabendo que o metro quadrado do piso custa R$ 7,80?**

A1) 14. 8 = 112 Resposta: vai gastar 112 real (sic). (o cálculo da área está correta porém o aluno transformou a medida da área encontrada em valor a ser gasto);

A2) (ausente. Não fez a prova);

A3) (deixou em branco);

A4) P = 102 ( erro de cálculo: 14 . 8 = 102) ⇒ 102 . 7,80 = 79,660 R: Eu vou gastar 79, 660 (reaparece a dificuldade em operar com números mais elevados e decimais).

**6) Uma sala tem as seguintes medidas: 3,5 de largura e 5m de comprimento. Quantos metros quadrados de piso preciso comprar?**

A1) 3,5 . 5 = 17,5 "R: Terá que gastar R$ 175,00" (realizou o cálculo com acerto porém não atentou para o que o problema pede e transformou o resultado obtido em valor "Reais");

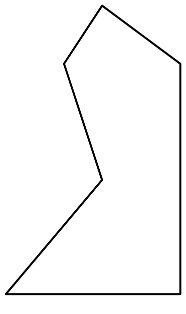
A2) 3,5 . 5 = 15, 5 "R: 15, 5 eu preciso comprar" (ocorreu erro no procedimento de cálculo);

A3) 3,5 . 5 = 17,0 "R: deve comprar 1,70" (ocorreu erro de cálculo e falta de atenção na resposta);

A4) "Eu preciso comprar 17,5 m de piso". (correta)

**7) Determine o perímetro das figuras:**

**FIGURA A - Medidas dos lados: 3cm, 3cm, 6cm, 6cm, 7cm, 4cm**



A1) (deixou em branco);

A2) R: 29 cm (correta);

A3) P: 29 cm (correta);

A4)  = 34  (erro de cálculo).

**FIGURA B - Medidas dos lados: 8cm,  3cm, 3cm, 6cm, 4cm**

A1) (deixou em branco);

A2)  R: 24 cm (correta);

A3) P:  24 cm ( correta);

A4)  = 24 (correta).

Apresento, no quadro 4, o índice de erros dos alunos separando-os apenas pela natureza do conteúdo (área e perímetro) devido à apresentação da totalidade deles na análise acima realizada.

Quadro 4 - Índice de erros referente à área e perímetro

| Alunos | A1 | A2 | A3 | A4 |
|---|---|---|---|---|
| Área | 25% | 100% | 50% | 75% |
| Perímetro | 60% | 33% | 33 % | 57% |

Como é possível notar, o índice de erros no cálculo de perímetro mostra-se menor. Acredito que se deve ao grau de facilidade dos exercícios (4 deles)  que apresentavam as figuras com as medidas indicadas em todos os lados restando somente fazer a soma dos dados. Esta hipótese se baseia  no fato de que, se a figura não estivesse explícita e o aluno tivesse que inferir a visualização, por exemplo,  “Se o seu quarto tem o tamanho de 3 metros de largura e  3 metros de comprimento” e lhes fosse pedido para calcularem o perímetro, a dificuldade surgiria.  Do mesmo modo, se a figura apresentasse somente a medida de um dos lados  da largura e do comprimento, no caso de um retângulo, por exemplo, o grau de dificuldade aumentaria e seria comum a apresentação da soma apenas dos dados presentes. Considero importante mencionar que a correção do professor, feita nas avaliações, estava centrada na efetividade do cálculo sem a preocupação de verificar se a unidade de medida trabalhada estava expressa ou não no resultado como metro e metro quadrado e seus múltiplos e submúltiplos, respectivamente para o perímetro e área, podendo contribuir para futuras dificuldades em trabalhos com unidades de medida.

De um modo geral, vejo que neste tópico a origem das dificuldades e erros provém de conhecimentos anteriores, principalmente relacionados a operações com decimais, a que se aliam compreensão dos problemas, procedimentos de cálculos e deficiência de conceitos de área e perímetro.

**VI - Noções sobre ângulos**

A aprendizagem desse conteúdo não foi submetida à avaliação. Ele foi apresentado aos alunos na última aula do semestre, acompanhado da resolução de exercícios.

## 3.2 Discussão dos Resultados

Como pode ser visto através dos dados apresentados anteriormente, as formas de erros e suas possíveis causas são variadas. Para melhor visualização o quadro 5 traz o percentual de erros, por conteúdo, de uma forma global, exceto os relacionados aos Números Inteiros Relativos que permitiram uma análise mais detalhada, em três tópicos, devido ao número mais elevado de questões presentes nas provas. Além do percentual de erros o quadro mostra também o número de questões relativo a cada conteúdo e revela o alarmante grau de dificuldade apresentado pelos alunos.

Quadro 5 - Síntese do percentual de erros e quantidade de questões presentes nas avaliações

| Natureza do conteúdo | nº exerc. provas | índice erros dos alunos | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | A1 | A2 | A3 | A4 |
| Adição/Subtr. Números Inteiros | 108 | 62% | 71% | 73% | 76% |
| Multipl./Divisão Números Inteiros | 80 | 83% | 50% | 75% | 80% |
| Potenciação Números Inteiros | 60 | 89% | 69% | 81% | 80% |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Números Racionais Relativos | 10 | 100% | 90% | * | 100% |
| Equações | 30 | 77% | 50% | 75% | 91% |
| Problemas | 09 | 100% | 90% | 100% | 100% |
| Área | 04 | 25% | 100% | 50% | 75% |
| Perímetro | 07 | 60% | 33% | 33% | 57% |

Como é possível observar, a dificuldade maior aparece na resolução dos problemas, seguido das resoluções de exercícios com Números Racionais Relativos. O menor grau recai no cálculo de perímetro. Entre os quatro alunos, o aluno A2 é o que apresenta menor índice de erros em todos os conteúdos, com exceção do cálculo de área em que os erros podem ter ocorrido por falta de atenção, visto que se referem à erros de cálculo. O resultado vai ao encontro de minhas observações no período. Trata-se de um aluno que tem certas dificuldades mas empenha-se em superá-las. A atenção, o esforço, a busca para conhecer onde e por que errou (observar seus erros) foi uma característica marcante dele.

Ainda no esforço de aprofundamento da análise me proponho a organizar categorias para situar tais erros e fazer referências a algumas de suas possíveis causas. Em vista disso, farei uso de duas categorias que emergiram da leitura das respostas dos alunos. São categorias não excludentes, nomeadas como **gerais e locais**. Na primeira categoria identificam-se erros recorrentes em exercícios ou problemas em praticamente todos os conteúdos trabalhados, levando-me a crer que independem dos temas tratados e provavelmente apoiam-se em possíveis hipóteses gerais dos alunos no que se refere a propriedades, a cálculo, a regularidades e padrões, a abstrações, etc. Na segunda categoria os erros são pontuais, geralmente relacionados a hipóteses dos alunos motivadas por particularidades de cada tema e/ou por particularização de uma hipótese geral, anteriormente mencionada. Busco, ainda, classificar os erros como construtivos ou não-construtivos, pois segundo Davis e Espósito (1991), erros de naturezas distintas exigem condutas pedagógicas diferenciadas. Conforme vimos, erros considerados construtivos são aqueles que exigem analogias, uso de teorias, mesmo que logo o aluno tenha que abandoná-las num processo de idas e vindas, de conflitos e momentos de longa elaboração; são erros que evidenciam progressos na atividade mental, que sinalizam a formação de novas estruturas e indicam possibilidades de progresso. Os chamados não-construtivos diferem dos demais por não estarem relacionados com a construção do conhecimento; revelam que o aluno já possui a estrutura de pensamento necessária à solução da tarefa, ou seja, ele já compreendeu e sabe como chegar à resposta correta, mas erra por distração ou por falta de fixação de algum procedimento. Convém ressaltar que uma afirmação precisa sobre se um erro é ou não construtivo implica, além do diagnóstico, uma intervenção no sentido de investigar a organização intelectual do aluno, e a entrevista clínica seria um método apropriado para isso. Contudo, isso envolveria uma outra etapa de estudos não presente no rol dos meus objetivos, podendo vir a ser realizada num futuro próximo. Desse modo, optei por realizar a classificação de construtivos e não-construtivos baseada em hipóteses levantadas por meio da análise dos erros dos alunos e por isso a faço com certa cautela.

Na categoria dos **gerais** temos os erros que reaparecem de forma sistemática nos conteúdos trabalhados durante a pesquisa que são os erros de cálculo e os erros que envolvem troca de operações e regras de sinais. Os erros presentes nessa categoria são considerados sistemáticos, pois segundo Rico (1995), aparecem com freqüência, são sintomas de um método ou compreensão equivocada que o aluno considera e utiliza como correta e, geralmente são mais efetivos para revelar os processos mentais.

A categoria dos **locais** abarca os demais tipos de erros presentes no levantamento e também são considerados como erros sistemáticos pelo fato de se apresentarem da mesma maneira em situações diferentes. Estão classificados como:

1) Erros por apropriação deficiente de conceitos;
2) Erros por falta de compreensão e domínio de procedimentos;
3) Erros por fragilidade nas organizações conceituais que impedem a integração de novos conhecimentos.

Para comentar os erros de cálculo, presentes na categoria dos **gerais,** parto da premissa que nessa fase do aprendizado, os conhecimentos básicos sobre a realização de operações elementares já se encontram consolidados na estrutura do conhecimento pelo aluno e que ele deve ter compreensão do processo de resolução e o domínio das operações, levanto a hipótese de que os erros de cálculo apresentados são em decorrência de falta de atenção ou equívoco passageiro. Seguindo esse raciocínio, creio que eles podem ser classificados como erros não-construtivos, visto que a desatenção ou equívoco, a meu ver, não indicam progresso ou construção de conhecimentos. Por outro lado, se os erros que envolvem operações com números mais elevados forem considerados como decorrentes de uma lacuna na capacidade de decompor e reagrupar números e dificuldades em fazer analogias de possíveis resultados, conforme pode ser observado nos seguintes exercícios: (-17) . (+17) = -279; (+ 22) . (-22) = - 88 e (- 30) . (- 30) = + 930 ou, ainda, decorrentes de construção de teorias ligadas aos procedimentos de resolução como o uso da propriedade distributiva, embora aplicada inadequadamente, creio que estes podem ser classificados como erros construtivos. Devemos ter em mente que, de um modo geral, a dificuldade sucessiva em chegar a resultados certos, cria um estado de insegurança pouco favorável à formação matemática. Por outro lado, a exatidão e a rapidez do cálculo (destreza) geram segurança e são considerados como elementos importantes para uma evolução rápida do aluno. Nesse caso, o treino pode ser uma das opções encontradas para amenizar essa dificuldade, porém, antes de submeter o aluno a treinos e memorizações, é necessário assegurar-se de que ele é capaz de recordar as etapas lógicas que permitem explicar os resultados obtidos bem como incentivá-lo a buscar mecanismos próprios para transpor suas deficiências, desde que sejam eficazes (MIALARET, 1975).

Ainda na categoria dos **gerais**, temos os erros relacionados à troca de operação e regras de sinais, presentes principalmente nos exercícios e problemas que envolvem Números Inteiros Relativos e Racionais Relativos. Estes, às vezes, aparecem ligados entre si; denotam uma certa ambigüidade, possivelmente por possuir valências positivas e negativas culminando em um outro tipo de erro que é o predomínio do sinal do número como operação principal, seguida da apropriação indevida da regra de sinais da multiplicação:(-12) : (- 3)=+9; (-7) . (-2) . (+3) = +6; -12 + 15 = -27; ( -9) + (-9) = +18. Segundo Teixeira (1992), trabalhar com Números Inteiros Relativos e por conseqüência com os Racionais Relativos requer a habilidade em lidar com duas variáveis ao mesmo tempo que é o estado e a operação do número, pois o Número Inteiro é um operador com duplo sentido, representando não só o valor numérico das posições como também deslocamentos que transformam uma posição em outra, ou seja, deslocamentos à esquerda: negativo; à direita: positivo. Sendo assim, o aluno precisa ter bem claro nas suas relações cognitivas o significado do sinal do número e da operação para poder conviver com essa simultaneidade. Desse modo, tendo em vista a difícil tarefa de precisar esse tipo de erro como construtivo ou não-construtivo, optei por considerá-lo sob dois aspectos:

a) se as trocas de operações e as aposições de sinais ocorreram de maneira mecânica e não tenham exigido nenhum esforço do aluno na busca do acerto, eles são considerados como não-construtivos;

b) mas, se o aluno envidou esforços e errou porque não conseguiu entender o problema ou, na ânsia de acertar criou uma regra própria ou uma generalidade, revelando que construiu hipóteses, entendo que suas ações buscam a construção do conhecimento e, então, considero o erro como um erro construtivo. Além dos exemplos citados acima, em que há o predomínio do sinal do número como operação principal, seguida da apropriação indevida da regra de sinais da multiplicação, posso mencionar outros casos que evidenciam analogias e uso de teorias: $(+5)^2 = +25 \Rightarrow ( -5)^2 = -25$; $+13)^2 = +169 \Rightarrow (-13)^2 = -169$; $(+2)^4 = +16 \Rightarrow (-2)^4 = -16$. São exercícios em que o aluno faz construções (generalização de uma regra) nas quais ele deve entender que o resultado precisa ter o mesmo sinal da base pois, se a regra é válida para a base positiva, teria que valer também para a negativa. O mesmo acontece com relação à justaposição de termos $6x = 12 \Rightarrow x = 12 + 6$. Em ambos os casos ele aplicou uma teoria própria que às vezes dá certo, ou seja, é válida para uma situação mas não é válida para outra; ora a sua hipótese se confirma, ora não, e ele continua fazendo tentativas. A superação de dificuldades como estas necessita primeiro que elas sejam diagnosticadas e depois analisadas para que se identifique a origem e a natureza e depois que haja uma intervenção para suscitar reformulações conceituais de modo a produzir modificações na maneira que o aluno trabalha levando-o a pensar e descobrir que estava errado ao fazer a generalização e vir a visualizar onde e por que estava errando.

Vale dizer que tanto a supergeneralização ou extrapolação no uso de uma regra quanto a justaposição de termos em álgebra (justaposição do termo literal com o numérico) já foram detectadas e estudadas por alguns autores como Gómez-Granell (1998) e Booth (1998), tratando-se, portanto, de erros típicos que, dependendo da circunstância em que são encontrados, podem ser considerados como obstáculos epistemológicos e a sua superação implica uma ação didática que favoreça o crescimento do aluno e a ampliação de seus conhecimentos no sentido oportunizar a passagem para um outro nível de conceitualização. Possivelmente a instalação dessa dificuldade e obstáculo seja também em decorrência da metodologia usada pelo professor que trabalhou com conteúdos prontos sem que o aluno tivesse a percepção clara de equacionamento, sem uma preparação adequada para trabalhar com estruturas algébricas. O professor poderia ter trabalhado previamente com o princípio aditivo e multiplicativo de modo que o aluno pudesse fazer analogias e tirar suas próprias conclusões, o que favoreceria a sua compreensão e o seu desenvolvimento.

De modo geral podemos dizer que grande parte dos erros *que envolvem as regras de sinais*, presentes em diversos conteúdos como a apropriação indevida da regra de sinais da multiplicação/divisão em exercícios de adição e subtração se deve a problemas conceituais e didáticos, pois o professor apresentou as regras prontas: “na adição, sinais iguais, soma e conserva o sinal; sinais diferentes, subtrai e dá o sinal do maior (...) na multiplicação é assim; sinais iguais é sempre positivo (...)”, sem dar ao aluno a oportunidade de descobrir, de deduzir ou extrair as regras implícitas na teoria visando transmitir-lhe algum significado. Não resta dúvida que antepor a memória ao entendimento da situação matemática gera uma aprendizagem ineficaz. É sabido que a aprendizagem por processos de memorização e repetições não leva a uma compreensão significativa: trata-se de processos superficiais e mais vulneráveis ao esquecimento e a confusões perceptivas que levam o aluno a cometer erros sistemáticos. E essa pode ser uma das principais causas dos erros constatados. Creio que a seqüência de exercícios descontextualizados e repetitivos e a colocação de problemas com enunciados voltados mais para fatores sintáticos do que semânticos, em que também ocorreu interpretações errôneas (uso da adição para representar a "diferença", por exemplo) contribuem para a falta de interesse e atenção do aluno culminando em erros dessa natureza.

Como já mencionei, as duas categorias dos erros não podem ser consideradas excludentes, uma vez que erros citados na categoria dos **gerais** podem voltar a aparecer na categoria dos **locais**. Desse modo, passo a comentar os erros classificados como **locais**:

1) **Erros por apropriação deficiente de conceitos:** a meu ver a apropriação de conceitos depende muito da metodologia adotada pelo professor na apresentação de novos conteúdos. Como já vimos, Ferreira (1963) entende que os conceitos são elaborados a partir de experiências já adquiridas pelos alunos e se caracterizam por sua generalidade, diferenciação, abstração e simbolização. Sendo o conceito um conhecimento em evolução, pois à medida que o sujeito adquire novos conhecimentos altera o seu modo de ver e interpretar as coisas e os seus próprios conceitos, vejo a necessidade do professor concentrar-se na contextualização do ensino e na qualidade da compreensão e não na quantidade de informação apresentada. Como pode ser observado no relato constante no apêndice A, que traz o registro dos procedimentos do professor em sala de aula, muitos dos conceitos, definições, propriedades e regras foram expostas para os alunos, ou seja, não foi dada a oportunidade do aluno explorar, abstrair, construir o seu conhecimento: "a potenciação é uma multiplicação de fatores iguais"; "Para dividir (*frações*) a gente multiplica pelo inverso, multiplica cruzado o numerador de um termo com o denominador do outro termo ou ainda podemos copiar a primeira fração e inverter a segunda. Daí é só multiplicar numerador com numerador e denominador com denominador. O sinal delas permanece. Se der para simplificar, simplifica. Assim vejam: (-2 1/3) : (0,4) = (-7/3) : 4/10 = -70/12 que, simplificando, dividindo por dois é igual a -35/6 ( ...) copiem este exemplo!". Ao se inferirem possíveis causas dos

erros, a deficiência conceitual aparece em vários momentos e está relacionada a diversos conteúdos como Números Inteiros Relativos: $-2^7 = 49$; Números Racionais Relativos: (- 0,3 ) : (- 3/5) = 3/15; resolução de problemas: conceito de triplo, dobro, etc.; aparece também a deficiência de conceito de área e perímetro.

2) **Erros por falta de compreensão e domínio de procedimentos:** a compreensão e domínio de procedimentos por parte do aluno requer que ele seja capaz de estabelecer relações ou se aperceber das implicações envolvidas em cada ação. O ensino de um procedimento, passo a passo, para encontrar um denominador comum, por exemplo, é necessário mas não é suficiente. Igualmente ao ensinar que, para dividir frações, o aluno deve copiar a primeira fração e inverter a segunda, para então multiplicar os numeradores e denominadores, também não é suficiente. Antes de dominar um procedimento o aluno precisa compreendê-lo e isso exige que se dê oportunidade para o uso de suas habilidades como dedução, generalização, descoberta. O mesmo acontece com a aplicação de uma regra: "(...). operação que envolva soma ou subtração de números de mesmo sinal, somam-se os números; se forem diferentes, subtrai e dá o sinal do maior", conforme ensinava o professor. Os estudos de Gómez-Granell (1998) apontam que uma boa parcela dos erros cometidos pelos alunos deve-se ao fato do ensino ter sido baseado muito mais na aplicação de regras que na compreensão do significado. Os alunos aprendem a manipular símbolos sem se aperceberem do sentido que eles têm, aplicam as regras que lhes foram ensinadas, mas não são capazes de conectá-las nem com seu conhecimento procedimental nem com o conceitual. Erros dessa natureza foram observados no levantamento envolvendo Números Inteiros Relativos: (+22) . (-22) = - 88; Números Racionais Relativos: - 5/8 + 3/10 = 8/18 e na resolução de equações: $6x = 12 \Rightarrow x = 12 + 6 \Rightarrow x = 18$, além de outros. Nesses casos os alunos aplicam procedimentos e regras que dominam, em contextos não adequados, fazendo a supergeneralização ou extrapolação de uma regra, ou seja, aplicam uma regra ou estratégias similares em áreas de conteúdos diferentes, ora obtendo acerto, ora não, conforme já citado anteriormente.

3) **Erros por fragilidade nas organizações conceituais que impedem a integração de novos conhecimentos:** esses tipos de erros se devem à resistência dos alunos em incorporar novos conhecimentos na estrutura cognitiva, provavelmente pela fragilidade dos conhecimentos adquiridos que caracterizam a presença de obstáculos. Retornando às idéias de Bachelard, entendo que um obstáculo está relacionado com uma certa forma de conhecer algo, um conhecimento antigo que teve sua validade em um determinado domínio de ação e que foi útil para a resolução de uma série de problemas mas que não é válido em outro conjunto de situações, podendo induzir o aluno a conclusões que não correspondem à verdade no novo contexto estudado. E foi exatamente isso que observei e encontra-se presente em determinados erros dos alunos como a resistência em conceber Números Inteiros Relativos como extensão dos Números Naturais, a tendência desse aluno tratar o Número Racional como justaposição de dois Naturais apenas separados por um traço, o não-reconhecimento dos números decimais como parte dos Números Racionais e a troca da operação de multiplicação implícita entre o numeral e a incógnita (multiplicação em álgebra por justaposição) por adição, entre vários outros.

Para finalizar, considero as dificuldades e os erros apresentados na categoria dos locais como construtivos, uma vez que, mesmo havendo conceitos insuficientes, procedimentos indevidos e até mesmos obstáculos para serem superados, há sinais de que o aluno está pensando sobre eles e, como diz La Taille (1997), é preferível a presença de teorias erradas do que a falta delas. Desse modo, parto da premissa de que os erros apresentados expressam, de alguma maneira, uma hipótese de elaboração de conhecimento e afirmo, baseado em observações e estudos que há um evidente esforço do aluno na busca da compreensão e da construção do seu conhecimento.

### 3. 2.1 Em busca da origem dos erros

Ao fazer o diagnóstico e análise dos erros foi inevitável incursionar pelo terreno das causas e motivações dos erros, levantar certas hipóteses e fazer algumas inferências. Por acreditar haver certo consenso que os erros detectados provêm de dificuldades e obstáculos, embora este não seja o foco do estudo, busco, valendo-me das três dimensões apresentadas por Brousseau, situar algumas possíveis origens dos erros diagnosticados para explicar a procedência deles na aprendizagem em Matemática:

- dificuldades de origem epistemológica;
- dificuldades de origem didático-pedagógicas;
- dificuldades de origem ontogenética (referentes a atitudes e comportamentos dos alunos).

Considerando a abrangência dessas três dimensões julgo pertinente, antes de enveredar para as considerações que acredito terem dado origem a tais dificuldades e obstáculos, apontar o caminho escolhido para guiar minhas ponderações:

a) as dificuldades de origem epistemológica estão relacionadas com o saber, com o conhecimento e com a consolidação da aprendizagem de conceitos matemáticos dos alunos;

b) as de origem didático-pedagógicas estão relacionadas com a ação do professor, com a condução do processo de ensino e aprendizagem, envolvendo o método educativo escolhido para ensinar a introdução e desenvolvimento do conceito; a rotina de trabalho; a natureza dos exercícios; o processo de avaliação e a relação entre professor e aluno;

c) as dificuldades de origem ontogenética ou atitudinais/comportamentais, que são intrínsecas aos alunos, estão relacionadas com as atitudes e comportamentos deles, como problemas de atenção, hábitos escolares, interesse, auto-estima, facilidade/dificuldade e disposição para aprender.

Desse modo**,** passo a descrever alguns dos diferentes aspectos relacionados com as dificuldades e obstáculos geradores de erros como os que puderam ser identificados neste estudo:

**a) aspectos associados à ocorrência de dificuldades e obstáculos de origem epistemológica:**

- dificuldades com relação a noções básicas algorítmicas e procedimentos desenvolvidos com o conjunto dos Números Naturais, especialmente em operações de multiplicação e divisão que envolvam dois ou mais dígitos;
- dificuldades em realizar operações com os Números Inteiros, Racionais e Racionais Relativos e problemas com estruturas algébricas devido à complexidade das operações e incompreensão dos processos o que culmina em extrapolação de regras, justaposição de termos e notação precisa, especialmente em álgebra;
- deficiências conceituais ao lidar com os Números Inteiros percebidas na realização de operações em que desconsideram o sinal do termo, como se estivessem trabalhando com os Naturais: 24+16 + (-12) = 52;
- dificuldades na aplicação de regras de sinais e domínio de procedimentos matemáticos nos mais diversos conteúdos que evidenciam falta de compreensão/deficiência conceitual;
- falta de destreza em cálculos: falta de habilidade em decompor, generalizar;
- evidência de artificialismo/mecanização no aprendizado: muitos alunos não são capazes de efetuar qualquer dedução, demonstração, reflexão sobre o conteúdo aprendido ou utilizar supostos conhecimentos em contextos diferentes, de forma genérica;
- dificuldade em reconhecer o significado referencial de símbolos matemáticos, como o sinal de igualdade em álgebra, por exemplo, que requer uma associação do aspecto sintático com o semântico do símbolo para o seu uso preciso.

**b) aspectos associados à ocorrência de dificuldades e obstáculos de origem didático-pedagógica:**

- a exploração dos conhecimentos prévios e a contextualização na apresentação de novos conceitos são insuficientes;
- a ausência de situações podem propiciar agregamento de novos conhecimentos aos já previamente adquiridos visando ampliação de conceitos;
- a forma de apresentação do conteúdo não contempla o método de indução/dedução tampouco de exploração/experimentação;
- o método de ensino utilizado induz à aprendizagem mecânica privilegiando a fixação através de exercitação e treino em vez da compreensão e construção do conhecimento: os conceitos e as regras são apresentados e exercitados;
- os alunos memorizam regras em detrimento da exploração e construção do conceito "adição de dois números com sinais diferentes subtrai e dá o sinal do maior.... +5 + (-9) = - 4)" ;
- a dinâmica das aulas (rotina/repetitiva) contribui para o aumento da falta de interesse, para a falta de atenção e participação mínima na correção dos exercícios;
- a ausência de atividades que exploram habilidades como exemplificar, comparar, representar, identificar, entre outras visando levar o aluno a concluir por si só que a resposta dada não é a mais adequada prejudica a construção do seu conhecimento;
- os tipos de exercícios aplicados em sala de aula e as avaliações são insuficientes para diagnosticar se os acertos dos alunos ocorrem por compreensão do conteúdo ou por reprodução do conhecimento;
- há evidência de que os alunos se sentem desassistidos pelo fato de tomarem conhecimento sobre o seu desempenho somente ao final do semestre, juntamente com a nota final;
- o sistema de avaliação instituído não contribui para o desenvolvimento cognitivo do aluno, conforme apontam os PCN**;**
- os alunos mostram-se desinteressados/desestimulados, tolhidos para a realização de atividades possivelmente em decorrência de críticas feitas pelo professor durante a correção de exercícios no quadro;

- as tarefas de casa não são dirigidas, orientadas e tampouco corrigidas; o acompanhamento tem a função de computar quem fez ou não fez algum tipo de exercício;
- há falta de empatia entre professor e alunos; predomina a autoridade do professor provocando confrontos e indisciplina;
- a falta de atividades que possibilitem a inter-relação entre aluno e aluno prejudica o desenvolvimento e rendimento deles;
- os alunos raramente são incentivados a observar os tipos de erros que vêm cometendo, a rever seus processos e sanarem suas dúvidas;
- os erros constatados em sala de aula não são diagnosticados e tampouco trabalhados no sentido de impedir que se instalem e se consolidem; a remediação vem através de exercitações com exercícios semelhantes visando fixação de procedimentos;
- a constatação de alto índice de erros apresentados no dia-a-dia não alertou o professor para buscar mudanças na estratégia de ensino adotada;
- as habilidades dos alunos em decompor, generalizar, abstrair não são devidamente desenvolvidas ao longo do estudo dos novos conteúdos;
- os tipos de problemas propostos (descontextualizados social e culturalmente) concorrem para a desmotivação em compreendê-los e para o desinteresse pela busca da solução correta;
- há necessidade de maior exploração da linguagem simbólica da matemática visando diminuir as dificuldades em associar os símbolos matemáticos às situações reais e torná-los úteis para resolver problemas;

**c) aspectos associados à ocorrência de dificuldades e obstáculos de origem ontogenética ou atitudinais/ comportamentais:**

- hábitos de estudo ineficazes. A maioria dos alunos não questiona, não procura sanar suas dúvidas. A preocupação reside em apagar a solução errada e em copiar a resolução correta após a correção (atitude reforçada pelo professor); são poucos os alunos que fazem revisão em casa;

- alguns alunos, para se livrarem logo da tarefa ou por incapacidade de resolvê-la e para não serem acusados de nem terem tentado chegar a uma solução, são capazes de apresentar resultados desprovidos de qualquer sentido;
- os alunos não se empenham em melhorar a destreza em cálculos;
- alguns alunos não participam das correções por medo de errar e serem ridicularizados;
- são poucos os alunos que se preocupam com os erros cometidos procurando descobrir porque e onde errou. A preocupação centra-se no fazer (para não ser chamado à atenção) e não no saber-fazer;
- grande parte dos alunos mostram-se alienados com pouca concentração durante as aulas;
- a falta de atenção na leitura de enunciados de problemas e exercícios tem prejudicado o rendimento do aluno;
- os alunos têm grande dificuldade em transformar os conceitos prévios em conceitos mais elaborados;
- poucos são os alunos que se esforçam para superar suas dificuldades;

A identificação desses pontos relacionados à origem das dificuldades e obstáculos, levando em consideração a classificação de Brousseau, me sugere os seguintes questionamentos:

1) O desenvolvimento cognitivo dos alunos encontra-se num nível adequado para a suficiente compreensão do conceito de Números Inteiros Relativos, Números Racionais Relativos bem como para trabalhar com álgebra?

2) Será que se fosse utilizada uma outra metodologia que valorizasse os conhecimentos prévios dos alunos, que fosse mais contextualizada e voltada para a construção do conceito, dedução das regras e compreensão dos procedimentos, essas dificuldades teriam aflorado também com um índice tão alto?

3) Será que se fosse proporcionada maior interação entre professor e aluno, aluno e aluno e se as atividades fossem trabalhadas de modo diferenciado, isso contribuiria

para despertar a motivação nos alunos e fazer com que eles passassem a centrar maior atenção nas explicações, na resolução de problemas e exercícios, a mudar, enfim, o comportamento em sala de aula?

### 3.2.2 Algunas implicações pedagógicas

Após reflexões, sobre as observações cotidianas, as interações com os alunos nos encontros fora do horário regulamentar, o que me permitiu conhecer de perto suas angustias e dificuldades; a análise dos erros e as possíveis causas aqui levantadas, ouso afirmar que boa parte das deficiências apresentadas poderiam ter sido minimizadas com um trabalho pedagógico diferente, em sintonia com os princípios que vêm orientado as reformas no ensino, a produção de currículos e materiais didático-pedagógicos e em sintonia com ações de capacitação e formação docente; com uma prática pedagógica voltada para a construção de conceitos, compreensão das regras e procedimento; com um ensino que partisse do geral para o específico, que trabalhasse com o conhecimento que o aluno tem, com aquilo que faz parte de sua vivência. O ensino de um novo conteúdo poderia ter início, por exemplo, com a busca de soluções para situações-problemas, que possibilitaria explorações, investigações, relações e deduções em que os conceitos e regras vão emergindo à medida que o aluno avança, constituídas de significados, propiciando, assim, a construção de um conhecimento sólido e significativo e, conseqüentemente, promovendo o desenvolvimento cognitivo do aluno. Uma situação problema, por exemplo, poderia ter precedido o trabalho com equações, de modo a suscitar conhecimentos gerais dos alunos, situações vivenciadas no cotidiano para depois chegar à estrutura algébrica. em enunciados com linguagens mais específicas. Poderia também ter sido utilizada e trabalhada como contraponto para fazer a transição da linguagem natural (materna) para a linguagem matemática (simbólica) na introdução de problemas algébricos.

Aliado a tudo isso entendo que o trabalho do professor deveria estar voltado para a exploração dos erros cometidos pelos alunos, pois como vimos, o erro, no referencial construtivista, é um elemento fundamental no processo de construção do conhecimento; ele é inerente ao processo; ele faz parte desse processo. Desse modo é desejável que o professor problematize as situações em que os erros estão presentes para que os alunos percebam os caminhos e soluções adotados e que conduziram ao erro, num processo de tomada de consciência não só do resultado mas também das ações que os levaram a tal resultado viabilizando outras possibilidades de solução pois, segundo Piaget, a tomada de consciência é exatamente isso: perceber que os resultados de uma ação não foram adequados, movendo o sujeito a refletir porque o esquema usado não deu certo. Ainda sob a ótica construtivista, é possível afirmar que o erro exerce um papel mais importante que o acerto, pois à medida que perpetua-se o acerto, de certa forma, não se percebe porque os alunos acertam e o erro, ao contrário, quando ocorre é como se houvesse o acionamento de um sinal de alerta que faz com que o sujeito se volte para a área central do processo da compreensão e comece a se indagar sobre os aspectos do domínio do conceito: o "como" ele realizou a ação e qual é o seu "objetivo" porque até então a sua preocupação centrava-se no resultado final. Portanto, vejo a necessidade do professor voltar-se para um ensino significativo o que inclui tomar o erro do aluno como fonte de tomada de consciência, como exercício metacognitivo, visto que, do ponto de vista da teoria construtivista, reflexão e tomada de consciência fazem parte da compreensão de um conceito.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Por que os alunos fracassam tanto em Matemática? Como os conteúdos da disciplina vêm sendo apresentados para os alunos? Os erros são sempre sintomas de uma aprendizagem incompleta ou de fracasso? o que podem revelar os erros? Quais os principais tipos de erros e suas possíveis causas? Que tipo de tratamento o professor tem dado ao erro? E o aluno toma alguma atitude diante do erro?

No início deste trabalho levantei todos esses questionamentos e acredito que os resultados encontrados juntamente com os comentários que farei agora responderão parte deles, embora eu considere que respostas conclusivas e gerais para todos esses questionamentos estejam fora do alcance de um único trabalho de pesquisa. Evidentemente, respostas efetivas decorrerão da busca de cada professor, ao se colocarem como sujeitos/autores das mesmas.

Como vimos, boa parcela dos problemas detectados estão relacionados à forma de atuação do professor; a começar pela concepção que ele tem de erro, o que pode ser inferido pela sua atitude diante dos erros cometidos pelos alunos em sala de aula e nas avaliações. Os métodos didático-pedagógicos se mostraram inadequados, não privilegiam os conhecimentos prévios dos alunos; os conteúdos foram apresentados de forma fragmentada e descontextualizada, o que prejudica a evolução, a construção conceitual paulatina do aluno; o professor seguiu o velho modelo da matemática tradicional que valoriza a repetição, voltada para a fixação de conceitos e procedimentos, através da realização de exercícios, o que está longe de ser um ensino motivador e significativo.

Convém considerar que uma perspectiva de ensino com essas características concorre para que determinados tipos de erros aconteçam com maior freqüência, como a troca de operações e regras de sinais presentes nos Números Inteiros e Racionais Relativos que ocorreram de forma interligada, levando-me a supor que esse tipo de erro, além de outros, seja de origem didática. Além disso há um alto índice de erros, conforme mostra o quadro síntese (quadro 5), que não deve ser desprezado, pelo contrário é significativo e não pode ser atribuído somente ao aluno.

Alguns outros procedimentos do professor também concorreram para o baixo rendimento do aluno. A resolução dos exercícios no quadro, por exemplo, tinha a simples função de correção, de mostrar o *certo*. Os alunos que não tivessem acertado o exercício deveriam apagá-lo e copiá-lo corrigido, havendo uma certa vigilância nesse sentido: “Agora copiem o certo no caderno. Vamos lá!”. O critério de escolha adotado para que um dos alunos fosse ao quadro participar da correção minava qualquer possibilidade de a atividade tornar-se uma ação positiva. Com exceção dos bons alunos que se manifestavam voluntariamente para ir ao quadro, possivelmente pela vontade de crescer diante dos outros colegas, a escolha recaía nos alunos que apresentavam maiores dificuldades: “venha você FR, que nunca sabe fazer nada”. Participar de uma correção, portanto, em vez de ser um momento em que o aluno poderia receber ajuda do professor e dos colegas para sanar dúvidas e amenizar dificuldades, tornava-se um momento de castigo: “Quem não fizer no caderno vai fazer no quadro! Comigo é assim!”, sem contar que os erros, por vezes, eram ridicularizados.

Vale ressaltar que durante a correção praticamente não havia diálogo do professor com os alunos. A principal preocupação do professor parecia consistir no número de acertos “Quem acertou? Quem errou? Ergam o braço para eu ver!”. A preocupação residia na quantidade de acertos e erros e não em quem errou, onde errou e por que errou. E o número de acertos e erros é que determinava se ele passaria mais exercícios semelhantes para serem “exercitados” ou não. Não havia uma problematização do erro, nem espaço para discutir *problemas e dificuldades.* O sistema da aula pouco contribuía para dirimir dúvidas e tampouco para perceber se a classe se conscientizou ou não de seus erros.

Conforme Esteban (1992), a interação entre aluno e aluno favorece a construção de novos saberes pela troca, pelo confronto, cooperação, superação reconstrução individual e coletiva e, como é possível perceber, pela interação entre pares, disso os alunos também foram privados.

Na fala do professor, o erro não aparecia como elemento natural do processo de construção, como parte do desenvolvimento dos alunos, não era visto como “(...) uma etapa necessária para o progresso do conhecimento”. Ao contrário, expressava indícios de fracasso (CENTENO, 1988, p.141).

Os alunos também não tinham atitudes positivas diante dos erros. Já desmotivados diante do baixo desempenho e com o agravante de serem considerados como alunos que “dificilmente seriam recuperados” sentiam-se ainda mais enfraquecidos e pareciam não se importar tanto com os seus erros. Para vários deles, errar um exercício representava somente um a mais em sua estatística; copiar o *certo* da lousa parecia ser suficiente para prosseguir com os estudos.

Em um dos *sermões* proferidos pelo professor, diante da constatação do alto índice de erros dos alunos, foi possível observar a culpabilização do aluno, ou seja, a transferência da responsabilidade do baixo rendimento para o aluno e para a família: " Estou percebendo que o rendimento de vocês vem caindo, não é mesmo? Os resultados de ontem estavam melhores que o de hoje, não é verdade? Será que esqueceram o que eu ensinei de ontem para hoje? Vocês têm que estudar, têm que se ajudar. Aqui na sala tem aluno de todo jeito. Tem os que são rápidos no cálculo, os que erram nos sinais, os que erram nas contas ... Como é que vamos fazer? Qual a sugestão de vocês? Os pais de vocês acompanham e cobram a tarefa de vocês? (...)". Vemos que o professor percebia os tipos de erros cometidos com mais freqüência, percebia que algo não ia bem e mesmo assim resistia em mudar sua postura, sua estratégia de ensino, preferindo condenar o aluno e eximir-se da culpa pelo insucesso.

No meu modo de ver, o sistema avaliativo instituído funcionava como um instrumento oficial com a finalidade única e exclusiva de verificação para atribuir nota, cumprindo um papel obsoleto nos dias de hoje, perdendo toda a sua razão de ser. Nas avaliações, os erros foram somente assinalados, com o agravante de terem sido apresentados aos alunos somente ao final do semestre, quando se deu a entrega de todas as avaliações do período. Nem para reflexão por parte dos alunos poderiam servir pois no dia seguinte eles estariam em férias escolares e dificilmente uma atitude nesse sentido seria tomada.

Conforme citei, a avaliação é defendida por muitos autores como Hadji (1994, 2001), Luckesi (1996), Perrenoud (1999), entre outros, como um instrumento de formação do aluno e não somente de informação; um instrumento valioso para promover o desenvolvimento cognitivo do aluno e reorientar o processo educativo com implemento de ações pedagógicas corretivas e eficazes, já que os acertos, os erros, as dificuldades e as dúvidas que o aluno apresenta são evidências significativas de como ele está interagindo com o conhecimento.

Durante a realização do meu trabalho, pude constatar os mais diversos tipos de erro. Isto também pode ser observado no levantamento realizado através das avaliações em que, por exemplo, num universo de 10 exercícios sobre Números Racionais Relativos, pude constatar sete tipos de erros diferentes, sem contar as variações entre eles. Acredito que esses tipos de erros, já observados por mim no cotidiano, se diagnosticados e analisados pelo professor, em um trabalho semelhante ao aqui realizado, podem alterar toda a rotina da aula e favorecer o desenvolvimento de um trabalho voltado para o entendimento de conceitos e procedimentos. Vale dizer que muitos desses erros são persistentes e vão durar por vários anos escolares, a menos que haja uma intervenção pedagógica eficaz.

Como sabemos, a atitude pedagógica produz ou não forte influência no gosto do aluno pela disciplina. Sendo assim, pergunto: Como ter motivação para aprender diante da apresentação de conteúdos prontos, via transmissão e repetições a que o aluno (receptor) foi submetido? Como gostar da Matemática? Como ter interesse pela disciplina? Como melhorar o rendimento diante de uma metodologia que induz os alunos à passividade limitando, assim, a sua capacidade de desenvolvimento? São questionamentos que merecem considerações e reflexões por parte de quem ensina.

Por outro lado, não se pode atribuir, sempre, toda a responsabilidade do insucesso dos alunos ao professor. Deve-se levar em conta o histórico de vida e escolar dos alunos. E, como eu já havia mencionado, consta nos registros da escola, posteriormente confirmados pelo professor e supervisora, que esses alunos também têm demonstrado baixo rendimento na disciplina de Matemática em séries anteriores. Deve-se considerar, também, que há perfis diferentes: uns sujeitos com maior facilidade e outros com menor facilidade para aprender e para lidar com o lógico, com o formal; há, ainda, os que apresentam atitudes negativas com relação à Matemática e acreditam que não têm capacidade para desenvolver-se nessa área do conhecimento, ao contrário dos que simpatizam com ela e envidam todo o esforço na realização das atividades propostas. Outro fator importante que também deve ser levado em conta é a quantidade e a complexidade dos conteúdos que foram abordados durante o período observado.

Diante dos resultados obtidos, creio poder afirmar que os erros constituem uma importante ferramenta que possibilita o diagnóstico dos problemas presentes no processo tanto de ensino como de aprendizagem. Ressalte-se que no processo de ensino, os erros podem ajudar o professor a concluir que a estratégia de ensino adotada se mostra inadequada e necessita ser redefinida mediante novas ações metodológicas e pedagógicas. Na aprendizagem, os erros podem ser tomados como objeto de metacognição, de reflexão; como fonte de tomada de consciência proporcionando ao aluno a possibilidade de reavaliar as suas ações, as estratégias e o caminho seguido em busca do resultado que revelou-se inadequado; de compreender o seu erro e então retomar o processo de construção do seu conhecimento.

Tornar relevante o papel educacional do erro pode até provocar mudanças em atitudes e crenças com relação à disciplina, tanto por parte do aluno como do professor. Portanto, promover atividades estimulantes sobre determinados tipos de erros nos ajudam a descobrir quão longe sua análise pode levar-nos ajudando-nos a alterar concepções e crenças, vencer preconceitos tanto em relação ao próprio erro como à disciplina e a proporcionar ganhos extremamente importantes para o professor e para o aluno.

Espero ter providenciado evidências suficientes para mostrar o papel construtivo dos erros no processo de construção do conhecimento e no desenvolvimento de ações pedagógicas e do papel de destaque que ele ocupa no sistema educacional. Creio ser possível afirmar que a análise de erros pode ser considerada como uma promissora estratégia de pesquisa para clarear alguns dos questionamentos fundamentais do processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Seria interessante que esses estudos pudessem ser estendidos por um horizonte nacional. Nesse sentido, assim como Rico (1995), espero ter contribuído para um maior desenvolvimento dos estudos sobre o erro e poder assistir, cada vez mais, o avanço na compreensão teórica e em suas implementações práticas.

Tenho uma visão otimista a respeito de mudanças no modo de pensar e agir dos professores em sala de aula, mas, para tanto, é necessário ter a coragem de duvidar das nossas crenças, da nossa visão de mundo e sobretudo da maneira de encarar a produção do conhecimento. É preciso superar paradigmas e aceitar o erro como um instrumento a favor do ensino e aprendizagem, como meio de conhecer o modo como o aluno está construindo suas hipóteses, como produto de uma construção ativa e de uma tentativa de busca da resposta correta. É preciso aceitar o erro como elemento construtivo, como parte do conhecer e vê-lo como fonte de tomada de consciência pois, através dele, o aluno pode vir a modificar e enriquecer o seu conhecimento.

## REFERÊNCIAS

ABRANTES, P. **Avaliação e Educação Matemática**. Lisboa: MEM/USU - GEPEM, 1995. v.1. (Série Reflexões em Educação Matemática).

ANDRÉ, M. E. D. A. A Avaliação da Escola e Avaliação na Escola. **Cadernos de Pesquisa** (74), 1990.

______. **Etnografia da Prática Escolar**. Campinas: Papirus, 1995.

______. A Pesquisa no Cotidiano Escolar. In: FAZENDA, I. (Org.). **Metodologia da Pesquisa Educacional**. São Paulo: Cortez, 1999. p. 36-45.

AUSUBEL, D. P. et al. **Psicologia Educacional**. Rio de Janeiro: Interamericana, 1980.

BACHELARD, G. **O Novo Espírito Científico**. Rio de Janeiro: Edições Tempo Brasileiro, 1968**.**

______. **A Formação do Espírito Científico**. Rio de Janeiro: Contraponto, 1996.

BALDINO, R. R. **Sobre a Epistemologia dos Inteiros.** Rio Claro: Unesp/GPA, [19..]. mimeo.

BOOTH, L. R. Dificuldades das Crianças que se Iniciam em Álgebra. In: COXFORD, A. F. ; SHULTE, A. P. (Orgs.). **As Idéias da Álgebra**. Tradução por Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994.

BORASI, R. Students' Errors in the Mathematical Learning Process: a survey. **For the Learning of Mathematics.** Montreal, Quebec, Canadá: FLM Publishing Co. Ltd., v.1, n. 1, p. 16-20, jul. 1980.

______. Exploring Mathematics Through the Analysis of Errors. **For the Learning of Mathematics.** Montreal, Quebec, Canadá: FLM Publishing Association, v.7, n. 3, p. 2-8, nov. 1987.

BRASIL, Secretaria da Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: MEC/SEF, 1997. v.3.

BROUSSEAU, G. Les Obstacles Epistemologiques et les Problemes en Mathématiques. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 4 (2), p.165-198, 1983.

______. Le Contrat Didactique: le milieu. **Recherches em Didactique des Mathématiques**, v. 9, n. 3, p. 309-336, 1988.

______. Os Diferentes Papeis do Professor. In: PARRA, C. ; SAIZ, I. (Orgs.). **Didática da Matemática**: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas,

1996. p. 48-72.

BRUECKNER, L. J. ; BOND, G. L. **Diagnóstico y Tratamiento de las Dificultades en Aprendizaje**. Madrid: Rialp, 1961.

BURIASCO, R. L. C. de. **Avaliação em Matemática**: um estudo das respostas de alunos e professores. 1999, 233 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Estadual Paulista. Campus de Marília, Marília.

CAGLIARI, L. C. Avaliando a Avaliação escolar. In: LOPES, Maria Zilda da C. et. al. **Alfabetização:** passado, presente e futuro. São Paulo: Série Idéias FDE, Diretoria Técnica, n.19, p. 111-123, 1993.

CARVALHO, J. P. de. Avaliação e Perspectivas na Área de Ensino de Matemática no Brasil. **Em Aberto**, Brasília, ano 14, n. 62, p. 74-95, abr./jun. 1994.

CARVALHO, J. S. F. de. As Noções de Erro e Fracasso no Contexto Escolar: algumas considerações preliminares. In: AQUINO, J. G. (Org.). **Erro e Fracasso na Escola**. São Paulo: Summus, 1997. p. 11-24.

CASTORINA, J. A. et al. **Psicologia Genética**: aspectos metodológicos e implicações pedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1988.

CASTRO, R. S. de. **Conflito Cognitivo e Aprendizagem Operatória**. 1998. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

CENTENO, J. P. **Números Decimales. Por qué? Para qué?** Madrid: Sinteses, 1988.

CHARNAY, R. Aprendendo com a Resolução de Problemas. In: PARRA C. ; SAIZ, I. (Orgs.). **Didática da Matemática**: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996. p. 36-47.

______. L'Erreur dans L'enseignement des Mathématiques. In. Mathématiques, peut mieux faire; l' élève face à la dificulté en mathématiques. **Recontres Pedagogiques,** França, n. 12, p. 9-32, 1998.

______. Traitement des Erreurs en Mathématiques et Stratégies de Différenciation. **Repères**, França, n. 5, p. 87-101, 1992.

COSTA, R. C. Os obstáculos Epistemólogicos de Bachelard e o Ensino de Ciências. **Cadernos de Educação**, ano 7, n. 11, jul./dez., 1998.

DAVIS, C. ; ESPÓSITO, Y. O Papel e a Função do Erro na Avaliação Escolar. **Revista Brasileira de estudos Pedagógicos,** Brasília, v.72, n.171, p. 196-206, 1991.

DAVIS, C. ; OLIVEIRA, Z. **Psicologia na Educação**. São Paulo: Cortez, 1992.

ESTEBAN, M. T. Repensando o Fracasso Escolar. **Cadernos CEDES**, Campinas, n. 28, p. 75-86, 1992.

FERREIRA, M. L. de A. C. **Formação e Desenvolvimento de Conceitos.** Belo Horizonte: PABAEE, 1963. p. 33-50.

FRAGA, M. L. **A Matemática na Escola**: uma observação do cotidiano. São Paulo: EPU, 1988.

FREITAS, J. L.M. de ; PAIS, L. C. **Desafios para a Construção de um Conhecimento Didático nas Áreas de Ciências e Matemática**. [19..]. mimeo.

GÁLVEZ, G. A Didática da Matemática. In: PARRA, C. ; SAIZ, I. (Orgs.). **Didática da Matemática**: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996. p. 26-35.

GÓMEZ-GRANELL, C. A aquisição da Linguagem Matemática: símbolo e significado. In: TEBEROSKY, A. ; TOLCHINSKY (Orgs.). **Além da Alfabetização** - a aprendizagem fonológica, ortográfica, textual e matemática. São Paulo: Ática, 1998. p. 257-283.

GONZÁLEZ, J. L. et. al. **Numeros Enteros**. Madrid: Sintesis, 1990.

HADJI, C. **A Avaliação, Regras do Jogo.** Portugal: Porto Editora, 1994.

______. **Avaliação Desmistificada**. Porto Alegre: ARTMED, 2001.

KAMII, C. **Aritmética:** novas perspectivas: implicações na teoria de Piaget. Campinas: Papirus, 1995. p.13-60.

LA TAILLE, Y. de ; OLIVEIRA, M. K. ; DANTAS, H. **Piaget, Vygotsky, Wallon**: teorias psicogenéticas em discussão. São Paulo: Summus, 1992.

______. O Erro na Perspectiva Piagetiana. In: AQUINO, J. G. (Org.). **Erro e Fracasso na Escola**: alternativas teóricas e práticas. São Paulo: Summus, 1997. p. 25-44.

LERNER, D. **A Matemática na Escola**: aqui e agora. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

LLINARES, Ciscar. S. ; SANCHEZ, Garcia M. V. **Fracciones**: la relacion parte-todo. Madrid: Sintesis, 1988.

LUCKESI, C. C. **Avaliação da Aprendizagem Escolar**. São Paulo: Cortez, 1996.

LUDKE, M. ; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em Educação**: abordagens qualitativas. São Paulo, EPU, 1986. p. 11-52.

MACEDO, L. de. Para uma Aplicação Pedagógica na Obra de Piaget**:** algumas considerações. **Caderno de Pesquisa,** São Paulo (61), p. 68-71, maio 1987.

______. **Ensaios Construtivistas**. São Paulo: Casa do Psicólogo, 1994.

______. Para uma Psicopedagogia Construtivista. In: ALENCAR, E. S. de. **Novas Contribuições da Psicologia aos Processos de Ensino Aprendizagem**. São Paulo: Cortez, 1995. p. 121-140.

MADRUGA, J. A. G. ; LACASA, P. Processos Cognitivos Básicos nos Anos Escolares. In: COLL, C. ; PALÁCIOS, J. ; MARCHESI, A. (Orgs.). **Desenvolvimento Psicológico e Educação**: psicologia evolutiva. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995, v. 1. p. 205-218.

MIALARET, G. **A Aprendizagem da Matemática**. Coimbra: Almedina, 1975.

MINAYO, M. C. de S. (Org.). **Pesquisa Social.** Petrópolis: Vozes, 1994.

MIRANDA, A. ; FORTES, C. ; GIL, M. D. **Dificultades del Aprendizaje de las Matemáticas**: um enfoque evolutivo. Archidona ( Málaga): Ediciones Aljibe, 1998.

MOREIRA , M. A. ; BUCHWEITZ, B. **Mapas Conceituais**: instrumentos didáticos de avaliação e análise de currículo. São Paulo: Moraes, 1987.

NOVAK, J. D. **Uma Teoria de Educação.** São Paulo: Pioneira, 1981. p. 55-73.

NUNES, T. ; BRYANT, P. **Crianças Fazendo Matemática**. Porto Alegre: Artes Médicas, p. 91-211, 1997.

PÉREZ ECHEVERRÍA, M. P. A Solução de Problemas em Matemática. In: POZO, J. I. (Org.). **A Solução de Problemas:** aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: Artes Médicas, 1988. p. 43-102.

PÉREZ ECHEVERRÍA, M. P. ; POZO, J. I. Aprender a Resolver Problemas e Resolver Problemas para Aprender. In: POZO, J. I. (Org.). **A Solução de Problemas:** aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre : Artes Médicas, 1988. p. 13-42.

PERRENOUD, P. Não Mexam na Minha Avaliação! Para uma abordagem sistêmica da mudança pedagógica. In: NÓVOA, A. ; Estrela, A. (Orgs.). **Avaliações em Educação**: novas perspectivas. Portugal: Porto, 1993. p.173-188.

______. **Avaliação**: da excelência à regulação das aprendizagens - entre duas lógicas. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1999.

PIAGET, J. **Sabedorias e Ilusões da Filosofia**. São Paulo: Difusão Européia do Livro, 1969.

______. **Problemas de Psicologia Genética**. Rio de Janeiro: Forense, 1973.

______. **A Tomada de Consciência.** São Paulo: Melhoramentos, 1974.

______. **A Equilibração das Estruturas Cognitivas**: problema central do desenvolvimento. Rio de Janeiro: Zahar, 1976.

______. **Fazer e Compreender**. São Paulo: EDUSP, 1978.

______. **A Representação do Mundo na Criança**. Tradução. R. Fiúza. Rio de Janeiro: Record, s.d.

PIAGET, J. ; GRÉCO, P. **Aprendizagem e Conhecimento**. Tradução da equipe da Livraria Freitas Bastos. Rio de Janeiro: Livraria Freitas Bastos, 1974.

PINTO, N. B. **O Erro como Estratégia Didática**. Campinas: Papirus, 2000.

PONTE, J. P. ; MATOS, J. M. ; ABRANTES, P. **Investigação em Educação Matemática:** implicações curriculares. Portugal: Instituto de Inovação Educacional, 1998.

RABELO, E. H. **Avaliação**: novos tempos, novas práticas. Petrópolis: Vozes, 1998.

RAMOZZI-CHIAROTTINO, Z. **Ensaios 107**: em busca do sentido da obra de Jean Piaget. São Paulo: Ática, 1984.

RANGEL, A. C. S. **Educação Matemática e a Construção do Número pela Criança**: uma experiência em diferentes contextos sócio-econômicos. Porto Alegre: Artes Médicas, 1992.

RICO, L. Errores en el Aprendizaje de las Matemáticas. In: KILPATRICK J. ; GOMEZ P. ; Rico, L. **Educación Matemática.** Colômbia: Grupo Editorial Iberoamérica, 1995. p. 69-108.

RIVIÈRE, A. Problemas e Dificuldades na Aprendizagem Matemática: uma perspectiva cognitiva. In: COLL, C. ; PALÁCIOS, J. ; MARCHESI, A. (Orgs.). **Desenvolvimento Psicológico e Educação**: necessidades educativas especiais e aprendizagem escolar. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995, v. 3. p.131-156.

SÁNCHEZ, J. R. Concepciones Errôneas en Matemáticas. Revisión y evaluación de las investigaciones. **Educar**, n. 17, p. 205-219, 1990.

SANTALÓ, L. A. A Matemática para não-Matemáticos. In: PARRA, C. ; SAIZ, I. (Orgs.). **Didática da Matemática**: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996. p. 11-25.

SANTOS, G. C.; SANTOS, S. R. O Erro na Aprendizagem de Matemática: uma abordagem construtivista. **Revista da FAEEBA**, Salvador, n. 6, p. 135-145, jul./dez. 1996.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria de Estado da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. **Experiências Matemáticas,** São Paulo, 6ª série, versão preliminar, 1994.

SCHLIEMANN, A. D. ; SANTOS, C. M. ; COSTA, C. Da Compreensão do Sistema Decimal à Construção de Algoritmos. In: ALENCAR, E. S. (Org.). **Novas Contribuições da Psicologia aos Processos de Ensino e Aprendizagem**. São Paulo: Cortez, 1995. p. 99-117.

TEIXEIRA, L. R. M. **Aprendizagem Escolar de Números Inteiros**: análise do processo na perspectiva construtivista piagetiana. 1992. v.1, 378 f. Tese (Doutorado em Psicologia), Universidade de São Paulo, Instituto de Psicologia, São Paulo.

______. A análise de Erros: uma perspectiva cognitiva para compreender o processo de aprendizagem de conteúdos matemáticos. **Revista Nuances**, v. III, p. 47-52, set. 1997.

TEIXEIRA, L. R. M. et al. As Representações Simbólicas e os Significados Construídos por Alunos do Ensino Fundamental sobre a Escrita Numérica. **Revista Nuances**, v. VI, p. 143-155, out. 2000.

THIOLLENT, M. **Metodologia da Pesquisa-ação**. São Paulo: Cortez: Autores Associados, 1986.

VERGNAUD, G. **Psicologia Cognitiva e do Desenvolvimento e Pesquisas em Educação Matemática**: algumas questões teóricas e metodológicas. Conferência para o grupo de Estudos em Educação Matemática, Kingston, Queen's University, 1982 ( trad. de J. V. Weiss e F. H. Mandel).

______. **Teoria dos Campos Conceituais**. In: Seminário Internacional de Educação Matemática,1.,1993, Rio de Janeiro, Anais... Rio de Janeiro: UFRJ, 1993. p. 1-26.

VIANNA, H. M. Avaliação do Desempenho em Matemática e Ciências: uma experiência em S. Paulo e Fortaleza. **Estudos em avaliação educacional,** n. 5, p. 107-120, jan./jun. 1982.

______. Avaliação Educacional e seus Instrumentos: novos paradigmas. In: SOUZA, E. C. B. M. de ( Org.) **Técnicas e Instrumentos de Avaliação**. Brasília: UnB, v.1, 1997. p. 37-79.

YACKEL, E. et al. A Importância da Interação Social na Construção do Conhecimento Matemático das Crianças. **Educação e Matemática**, n. 18, p. 17-21, jun.1991.

# APÊNDICES

## APÊNDICE A

**Registro a partir das observações dos procedimentos do professor em sala de aula**

Nesta seção procuro relatar o cotidiano em sala de aula para dar uma idéia de como o conteúdo foi apresentado aos alunos: a seqüência; os tipos de exemplos dados; o tempo (número de aulas) em que foram trabalhados; a organização da aula; as formas de correção dos exercícios e problemas; o relacionamento existente entre professor e aluno; e algumas falas do professor e dos alunos.

### 1. Números Inteiros Relativos

O ano letivo teve início com a recordação do conjunto dos Números Naturais, das operações com os números fracionários e da necessidade de recorrer a um outro conjunto para poder representar, por exemplo, temperaturas abaixo de zero, saldos bancários negativos, etc. O conjunto dos Números Inteiros Relativos foi apresentado como uma extensão dos Números Naturais criado para tornar possível a realização de operações como "tirar sete de quatro; nove de cinco...". Para tanto, o professor falou sobre a existência dos números positivos e negativos e a sua representação na reta numérica; apresentou a noção de números simétricos ou opostos e falou sobre o valor absoluto de um Número Inteiro. Para reforçar o conceito de números opostos, situou-os novamente na reta numérica e em seguida pediu que os alunos resolvessem exercícios de comparação de grandeza completando com sinal de igual, maior ou menor ( = , >, < ) em exercícios como os abaixo descritos e em outros como colocar números em ordem crescente:

- 7 .... - 7;

+2 .... +3;

- 3 .... - 4 .

Em aulas seguintes, dando andamento ao programa, o professor passou a trabalhar com a operação de adição, inicialmente com números de mesmo sinal, apresentando modelos como (+5) + (+3) = (+8) e (- 4) + (- 3)= (- 7), aplicando, em seguida, exercícios semelhantes, para fixação.

Via de regra, as aulas seguiram um mesmo padrão; iniciaram-se com exercícios visando recordar o que fora abordado no dia anterior, ou nos dias anteriores para, então, apresentar novo conteúdo. Desse modo, após a realização de exercícios com a operação de adição, o professor introduziu a operação de subtração envolvendo termos com sinais iguais e, posteriormente, sinais diferentes. Nessa ocasião, voltou a empregar exemplos de situações presentes em nosso cotidiano que necessitam dos números negativos e positivos como lucros e prejuízos, saldo bancário de cheque especial, "tenho e devo", oscilação de temperatura, etc., abandonando-os, porém, nas aulas subsequentes.

Vale dizer que o professor, ao ensinar as operações tanto de adição como de subtração com Inteiros, embora tenha ilustrado com exemplos envolvendo situações reais como as que acabamos de descrever, não deu ao aluno a oportunidade de descobrir, de deduzir, de extrair as regras implícitas na teoria; elas foram apresentadas *prontas*: "na adição, sinais iguais: soma e conserva o sinal; sinais diferentes, subtrai e dá o sinal do maior".

Ao trabalhar operações de adição e subtração envolvendo mais de dois fatores ( "hoje vamos trabalhar com mais números positivos e negativos..."), o professor explicou que, para resolver -12+8-9+2-6= é possível chegar a um mesmo resultado trabalhando de três maneiras diferentes:

a) efetuando o cálculo por parcelas que envolvem dois termos: -12+8-+2-6=

- 4 -9+2-6=

-13+2 - 6=

11 - 6= -17

b) agrupando os termos que iniciam com o mesmo sinal: -12 - 9 - 6= - 27 e +8 + 2= 10, que segundo o professor "…. juntando os resultados encontrados ficaria assim: -27 + 10= -17";

c) cálculo memorístico: "o outro jeito é resolver direto, só que memorizando; idêntico ao 'a' só que sem fazer nenhum tipo de anotação".

Após a apresentação das três opções de cálculo o professor indagou: " Qual deles (processos) é mais fácil? Qualquer um dos processos usados tem que chegar no mesmo resultado! Cada um vai usar o que achar mais fácil! ". Em seguida ele passou exercícios semelhantes ao modelo e disse: "agora tentem resolver sozinhos usando qualquer um dos processos". Aguardou um período de tempo e perguntou: "Acharam o resultado? Digam aí que eu vou anotar". Os alunos foram relatando os resultados encontrados para a expressão +15 - 5 - 3 +1 - 2= e o professor foi anotando no canto do quadro. Os resultados mencionados foram: +6; +14; +8; +10. "Está bem, então vamos corrigir!. Posso resolver no quadro?" Conforme ia resolvendo no quadro verbalizava o seguinte esquema de solução:

+15 - 5 - 3 + 1 - 2 =

+10 - 3 + 1 - 2=

+7 + 1 - 2=

+8 - 2= +6

"Olhem bem: lembrem-se que se eu tenho 15 e devo 5, vou ficar com 10; se eu tenho 10 e devo três, vou ficar com 7; se eu tenho 7 e ganho 1, vou ficar com oito; se eu tenho oito e devo dois vou ficar com quanto? Não se esqueçam: operação que envolva soma ou subtração de números de mesmo sinal, somam-se os números; se forem diferentes, subtrai e dá o sinal do maior. Quem acertou? Quem errou? Ergam o braço para eu ver. Agora copiem o certo no caderno. Vamos lá! Nos próximos exercícios não quero que resolvam usando o cálculo mental. Vamos ver se mais alunos acertam!"

Através desse diálogo é possível perceber que a preocupação do professor recaiu no índice de acertos e não na causa que provocou tantos erros. Seria uma oportunidade para identificar as dificuldades e estabelecer estratégias de ação para evitar que os mesmos erros venham a ocorrer novamente.

A aula seguinte iniciou-se seguindo a mesma rotina. O professor remeteu os alunos a resolver os seguintes exercícios:

Calcule:

a) 5 - 9 + 1=

b) - 8 - 2 + 3=

c) - 15 + 8 - 7=

Recomendou que usem o processo que não inclua o cálculo mental; fez a chamada enquanto os alunos os resolviam; perguntou e anotou os diferentes resultados obtidos no quadro e então, em voz alta, foi solucionando parte por parte os exercícios usando giz de cores diferentes. Desta vez, pediu que observassem onde estavam errando e caso tivessem dúvidas que fizessem perguntas. Na seqüência , um único problema foi colocado para resolução:

- Numa gincana da escola, cada classe tinha que cumprir 6 etapas pelas quais recebia uma pontuação positiva ou negativa, conforme o desempenho. No quadro está o resultado de uma classe na gincana:

1ª etapa + 5 pontos

2ª etapa - 8 pontos

3ª etapa - 15 pontos

4ª etapa +10 pontos

5ª etapa +2 pontos

6ª etapa - 7 pontos

Qual o total de pontos dessa gincana?

Ao efetuar a correção no quadro o professor foi dizendo: “Esse é o resultado da gincana. Como resolver? Vamos lá! Na 1ª etapa ganhou cinco pontos, na 2ª etapa perdeu oito pontos.....”, e foi montando a expressão a ser resolvida do seguinte modo: (+5) + (-8) + (-15) + (+10) + (+2) + ( -7) = efetuou os cálculos e colocou o resultado “Quem acertou? Quem errou? Corrijam no caderno!”

As aulas transcorriam sempre no mesmo ritmo: exercícios no quadro semelhantes aos dados em dias anteriores e mesmo esquema de correção. O professor não voltou a dar problemas. Em um dos dias colocou o seguinte exercício:

- Calcule a soma algébrica dos números abaixo

a) 18 + 8 - 5 -15 - 3 + 8 -10 -1= os resultados encontrados foram: 0; -2 ; +3; +2 (quatro resultados diferentes)
b) - 85 - 54 + 36 + 30 - 8 - 10 = igualmente: -91; +97; - 38; -61; +49; -85; -141; +81; +19 (nove resultados diferentes)
c) -18 + 12 + 20 - 34 + 51= resultados encontrados: +31; +41; -25; -13;+21 ( cinco resultados diferentes)

O professor observou que alguns alunos não haviam sequer tentado fazer os exercícios e os alertou: “quem não fizer no caderno vai fazer no quadro! comigo é assim!”

Ao perceber que para o exercício “b” foram encontradas nove resultados diferentes ele indagou: “Qual é a dificuldade de vocês? Estão fazendo as contas erradas é isso? Parem e vejam onde estão errando; por isso que eu digo que é complicado fazer os cálculos mentalmente”

Insatisfeito com os resultados obtidos pelos alunos o professor perguntou: “Eu já entreguei o livro para vocês, não é mesmo? Eu disse que não ia ficar trabalhando o livro em sala de aula. Ele serve para reforço em casa. Quem já pelo menos folheou o livro para ver o que estamos vendo? Quem daqui costuma fazer revisão em casa? Da p. 141 à 161 tem bastante exercícios para resolver. Esse livro é a própria tarefa de vocês, o próprio reforço de vocês. Não resolve estudar só na sala de aula, tem que ter o hábito de revisar em casa! Estudar, revisar, resolver exercícios do livro é a tarefa de vocês! Estou percebendo que o rendimento de vocês vem caindo, não é mesmo? Os resultados de ontem estavam melhores que o de hoje, não é verdade? Será que esqueceram o que eu ensinei de ontem para hoje? Vocês têm que estudar, têm que se ajudar. Aqui na sala tem aluno de todo jeito. Tem os que são rápidos no cálculo, os que erram nos sinais, os que erram nas contas ... Como é que vamos fazer? Qual a sugestão de vocês? Os pais de vocês acompanham e cobram a tarefa de vocês? Pedem para revisarem o que foi visto na aula? Vamos fazer o seguinte: a partir de amanhã eu quero que vocês copiem alguns exercícios do livro em um outro caderno ou folha qualquer, resolvam e apresentem para mim logo no início da aula. Eu não vou cobrar. Mostrem um exercício que seja! Tarefa é obrigação de vocês, de cada um de vocês... Vou anotar o nome dos alunos que apresentarem a tarefa e dos que não apresentarem. Estamos entendidos?"

E prosseguiu: "pelo jeito vocês estão cansados de fazer contas de adição e subtração. Então vamos trabalhar a Multiplicação. Depois retornaremos na adição e subtração dos Números Inteiros". E apresentou a operação de multiplicação do seguinte modo:

1) Multiplicação de dois números de sinais iguais

Ex. (+5) . (-2)= + 6
(+3) . (+7)= + 21
(-5) . (-2)= +10
(-3) . (-7)= +21
se os fatores tiverem sinais iguais, o produto será positivo.

2) Multiplicação de dois números de sinais diferentes
Ex.: (+3) . (-2)= - 6
(-5) . (+4)= - 20
(+6) . (-5)= - 30

$(-1) \cdot (+7) = -7$

Se os fatores tiverem sinais diferentes o produto será negativo.

Um dos alunos, que sempre manifestava bastante interesse pela aula, perguntou: “Professor, três negativo vezes sete negativo dá 21 positivo por que?”

E ele respondeu: “a regra diz o seguinte: na multiplicação é assim; sinais iguais é sempre positivo. Na adição e subtração é diferente. Na semana que vem vou trazer um vídeo para vocês” ( não levou).

Ao final dessa aula o professor se dirigiu a mim para trocar idéias a respeito de como poderia justificar essa regra. Fiquei de pesquisar e ajudá-lo no que pudesse. Na aula seguinte entreguei-lhe cópia do material de que dispunha sobre o assunto.

Nos dias seguintes, fiquei aguardando que ele desse um retorno para o aluno mas isto não ocorreu.

A partir desse contato, geralmente ao sair da sala, o professor falava de suas angústias com relação aos alunos, do comportamento deles em sala de aula, da falta de interesse, da alienação de alguns, da indiferença de alguns pais ao serem contatados para tomarem conhecimento das dificuldades e/ ou da indisciplina do filho, etc. Ele se colocava como vítima do processo.

Os laços de amizade e confiança foram se estreitando e ele me pediu que passasse a ajudá-lo acompanhando de perto os alunos com maiores dificuldades na resolução dos exercícios em sala. Com isso, seguindo a dinâmica da aula, o professor escrevia no quadro os exercícios a serem resolvidos. Eu ficava observando e quando percebia que o aluno já havia terminado, punha-me ao seu lado para ver se tinha alguma dificuldade e como poderia ajudá-lo. O professor passou a ter o mesmo procedimento, percorrendo aluno por aluno, o que contribuiu para uma aproximação maior entre eles. Com o passar dos dias, os alunos passaram a solicitar a minha presença e ficavam “disputando” a minha atenção para auxiliá-los. Nesses momentos, tive sempre o máximo cuidado para não prejudicar o andamento da aula e, assim que o professor dizia “vamos fazer a correção”, rapidamente eu retornava para o meu lugar situado na fileira do centro, na última carteira, localização que favorecia uma observação geral.

Nas aulas subseqüentes, o professor trabalhou uma série de exercícios com produtos envolvendo dois fatores com sinais iguais (só negativos e só positivos) e depois com sinais diferentes, sempre reforçando a regra básica de sinais na multiplicação. “Depois eu vou passar exercícios com três ou quatro fatores” e alguns alunos reclamaram: “Ah não professor!” e ele: “é a mesma coisa, gente! É só observar os sinais!” E colocou no quadro:

(-) . (-) = +

(+) . (+)=+

(+) . (- = -

(-) . (+)= -

O próximo exercício dado foi o seguinte: (- 2) . (- 4) . (- 3) = “e agora será que vai dar positivo ou negativo?”. A opinião dos alunos diverge e ele reforça mais uma vez a regra de sinais na multiplicação.

Ao introduzir multiplicações de parcelas com dois dígitos, como os abaixo, os erros aumentaram:

(- 32) . ( -16)=

(+47) . (- 59)=

“gente! vou ter que parar a matéria e voltar ao assunto da quinta série!, vou ter que dar operações com Números Naturais de novo! Se eu tiver que parar e retomar o treino de contas vocês não vão para frente! Vocês tem que estudar em casa!”. De fato, era evidente a dificuldade dos alunos operarem com números maiores, e da confusão predominante com relação às regras de sinais. Alguns alunos nem sequer tentavam efetuar as contas e quando perguntei a um deles porque não havia tentado, ele disse: “estou com dor de cabeça”; em outras ocasiões a mesma resposta reapareceu.

O professor tentou mudar a maneira de fazer a correção dos exercícios. Por vezes nomeou alunos para irem ao quadro para resolvê-los. Alguns deles se ofereciam, porém eram sempre os mesmos. Os próprios colegas riam da situação de impotência do colega, diante das dificuldades. Havia alunos que abaixavam a cabeça dissimulando, quando chamados ou solicitados para auxiliar o colega que estava no quadro. A meu ver, há o lado positivo no fato do aluno ir ao quadro, pois trata-se de uma oportunidade dele expor suas dificuldades e receber ajuda do professor e colegas. Porém, o “convite” era dirigido invariavelmente aos que tinham as maiores dificuldades e eles se sentiam ridicularizados pelos colegas e professor diante do seu fracasso. “venha você FR, que nunca sabe fazer nada”. Nessas ocasiões o tumulto era generalizado; voavam papéis, fluíam sonoras risadas e gozações.

A meu ver uma estratégia positiva transformada em negativa. Aos poucos o professor foi abandonando a prática de levar alunos ao quadro, requerendo somente participação coletiva e verbal (fazia perguntas e poucos, sempre os mesmos, respondiam).

Em uma outra aula, antes de prosseguir com o conteúdo, o professor fez uma revisão envolvendo uma série de exercícios com operações de adição e subtração, trabalhando com duas parcelas de um dígito e de dois dígitos; outra série exercícios com adição e/ou subtração com quatro ou mais fatores e multiplicação de dois ou mais fatores, envolvendo um e/ou mais dígitos. Enfim, englobando todos os tipos de exercícios dados até o momento. Após a correção no quadro, passou uma prova contendo exercícios semelhantes. Ao final da aula, antes de levá-las para correção, permitiu que eu as trouxesse para casa para acompanhar as dificuldades e erros cometidos.

Por volta da 15ª aula o professor apresentou aos alunos a divisão com Números Inteiros. Ele explicou: “muda a operação mas a regra dos sinais é a mesma da multiplicação. Vocês vão fazer o jogo do sinal”. E exemplificou:

(+15) : (+3)= +5;

(- 15) : (- 3)= +5;

(-12) : (+4)= -3

“Alguma pergunta?”

Após a realização, em forma de exercitação, de uma série de exercícios com operação de divisão, o professor retoma a operação de multiplicação com Números Naturais e pediu para efetuarem cálculos como:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 867 | 36.549 | 12 | 132 |
| x 69 | x 798 | x 24 | x 132 |

E as dificuldades com cálculo (operação da tabuada) ressurgiram. O professor pediu que exercitassem bastante a tabuada em casa para tornarem os cálculos mais ágeis e melhorar o índice de acerto.

Os enunciados dos exercícios presentes no cotidiano e nas provas apresentavam-se, invariavelmente como: Efetue; Resolva; Efetue as multiplicações; Calcule, etc., não mais retomando a resolução de problemas.

**- Potenciação com Números Inteiros Relativos**

“Hoje nós vamos ver potenciação com Números Inteiros!”

E escreveu no quadro a seguinte definição acompanhada do exemplo: A potenciação é uma multiplicação de fatores iguais.

⌈ (expoente)

$3^3$ = 27 (potência)

⌊ (base)

“Isso já é um assunto visto por vocês, só que agora vamos trabalhar números com sinais. Vejam como se resolve este, olhem:”

$(-3^3) = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) =$ “será que o resultado vai ser positivo ou negativo?” e resolve: “menos três vezes menos três é o que? mais nove ou menos nove? e mais nove vezes menos três vai dar quanto? positivo ou negativo?” E coloca o resultado: -

27. “vejam bem: vocês tem uma base negativa e um expoente ímpar, deu o quê? negativo não é mesmo? agora vejam”:

$(-3)^{2} = (-3) . (-3) = +9$ “aqui é menos vezes menos, então o resultado é positivo”

$(+3)^3 = + 27$ ” porque mais três, vezes mais três é igual a nove e nove vezes mais três é vinte e sete positivo, não é mesmo? Então vocês devem observar se a base é negativa ou positiva e se o expoente é par ou impar. O ideal é vocês guardarem a regrinha”. E escreveu no quadro:

$( + )^{par} = +$ ( base par, expoente par: positivo)

$( - )^{par} = +$ ( base negativa, expoente par: positivo)

$( + )^{impar} = +$ ( base positiva, expoente ímpar: positivo)

$( - )^{impar} = -$ (base negativa, expoente ímpar: negativo)

E complementou: “e se o número não estiver entre parêntesis, assim olhem: $-2^2$ como vai ser o resultado? Vejam que não é o menos dois que vai ao quadrado, é o dois, e aí?” Os alunos ficaram em silêncio e então ele explicou que o resultado da operação (dois ao quadrado) vai ser negativo porque aquele sinal não é do termo do qual vai ser elevada a determinada potência e sim do produto de dois vezes dois, portanto o resultado será menos quatro.

A aulas subseqüentes seguiram a mesma rotina das anteriores com exercícios “Calcule as potências”, envolvendo base e expoentes ora maiores, ora menores, inclusive base um, que fizeram surgir, além dos erros recorrentes de cálculo, novos tipos de erros:

$(+2)^6 = +12$ “gente, preste atenção! dois elevado a sexta potência não é duas vezes seis não! é dois vezes dois, (....) vezes dois, que é igual a sessenta e quatro!”

Em exercício semelhante, o mesmo tipo de erro: $(+6)^2 = 12$ e mais uma vez a correção oral: “não é seis vezes dois é seis ao quadrado!, é seis vezes seis!. Pode ser também que alguém tenha calculado seis vezes seis, igual a 12. vamos estudar tabuada, gente!”

**- Propriedades da potenciação**

Exposição no quadro: Em produto de uma potência de mesma base: somam-se os expoentes. Exemplo:

$a^3 . a^2 = a^5$ relembrando ser o mesmo que $( a^1 . a^1 . a^1 . ) . ( a^1 . a^1 ) = a^5$

Exercícios:

Reduza a uma só potência:

$x^7 . x^8 =$

$(+5)^7 . (+5)^2 =$

$(-6)^2 . (-6) . (-6)^2 =$ e mais 15 exercícios do mesmo gênero.

Antes de ensinar a operação de divisão com potência de mesma base, o professor passou exercícios para serem resolvidos em casa, em folha separada, que valeriam nota. Foram 5 itens envolvendo adição, subtração, multiplicação e divisão de inteiros, cálculo de potências e redução a uma só potência de mesma base.

A aula seguinte teve início com a apresentação da operação de divisão com potência de mesma base, com exposição no quadro, do seguinte modo:

**- Divisão de potência de mesma base**

Explicou com o seguinte exemplo:

$a^5 : a^2 = ( \cancel{a} . \cancel{a} . a . a . a) : ( \cancel{a} . \cancel{a} ) = a^{(5 -2)} = a^3$ E em seguida uma série de exercícios como os abaixo:

Sem resolver, aplique a propriedade da potenciação:

$a^7 : a^3 =$

$(-2)^8 : (-2)^5 =$

E outros do gênero como:

Calcule:

$10 + (- 3)^2 =$

$(- 4)^2 - 3 =$

Durante a correção o professor explicou: “10 + ( +9)= 10 + 9= 19 . Quando tiver potência, primeiro vocês repetem o termo que não tem potência (o dez), resolve a potência deixando-a com o sinal dentro do parêntesis porque senão ficam dois sinais juntos ( 10 + + 9). Aí então resolve o sinal ( mais com mais dá mais) e dão o resultado. Reforça que devem lembrar que “potência de base negativa e expoente par o resultado vai ser positivo......”

A abordagem e o estudo dos Números Inteiros Relativos foram feitos em 23 aulas.

**2. Números Racionais Relativos**

Para iniciar a apresentação do conteúdo sobre Números Racionais Relativos, o professor relembrou as operações com frações, já conhecidas pelos alunos, com o seguinte exercício:

3/5 + 1/6 = “Quem lembra como se resolve? É necessário colocar os denominadores iguais não, é?” E calcula o M.M.C., passo a passo, em voz alta. De posse do resultado voltou a questionar: “O que vocês vão fazer agora? Dividir o resultado por cada denominador e multiplicar pelo numerador. Assim: trinta dividido por cinco é igual a seis, vezes três do numerador é igual a dezoito e assim por diante. E se seu pegar a mesma fração com a operação de subtração em vez de adição? O que vocês vão fazer? O mesmo processo não é? Vamos lá. O M.M.C. já está calculado, portanto é só fazer as contas novamente” E realizou os cálculos: 18/30 - 5/30 = 13/30. “Alguma pergunta?”

“Agora eu vou colocar essas frações como Números Inteiros. Assim, vejam: (+3/5) + (+1/6) = O primeiro passo é eliminar os parêntesis. Quando o número não tem sinal na frente é positivo então faz-se assim: (+3/5) + (+1/6) = +3/5 + 1/6. O que vocês vão fazer agora? Resolvam igual a outra 18/30 + 5/30 = 23/30. Vejam bem: quando é positivo não precisa colocar o sinal, portanto a resposta é 23/30. Agora vamos resolver com sinal negativo: (-3/5) + (-1/6) = Como vocês vão eliminar os parêntesis aqui? Quando não tem sinal fora é o quê? Positivo, não é positivo? Então fica assim: +(-3/5)

+ (-1/6) = positivo vezes negativo = negativo ⇒ - 3/5 - 1/6 = O M.M.C. já está calculado, portanto é só fazer as contas. Prestem atenção que os números são negativos! -18/30 - 5/30 = - 23/30”

O professor escreveu no quadro outros exercícios como (-2/3) + (+1/2)= (+3/4) + (-1/2)= e demonstrou novamente pedindo, ao mesmo tempo para atentarem primeiro para a eliminação dos parêntesis, depois para o cálculo do M.M.C. e em seguida para o cálculo dos novos numeradores.

Nas aulas seguintes colocou uma série de exercícios como os abaixo, lembrando que quando o número não possui denominador subentende-se que seja um.

- 3 - (7/4) =

1 - 1/2 + 1/4 - 1/8 =

Após cinco aulas trabalhando com as operações de adição e subtração, o professor introduziu a multiplicação de Números Racionais Relativos explicando que neste tipo de operação multiplica-se numerador com numerador e denominador com denominador. Pediu para atentarem para as regras de sinais, já conhecida por eles.

Em meio a exercícios como os abaixo, o professor colocou números mistos e decimais para serem transformados em fracionários, relembrando todo o procedimento para a conversão:

(-2/5) - (+1/2) =

(-2/5) . (+1/2) =

(1 ¼ ) . (0,1) =

0,7 . (-1/3) =

Mais três aulas se passaram. Em uma delas o professor, após revisão das operações de adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação com Números Inteiros realizou uma prova envolvendo 15 questões sobre esse conteúdo mais duas com Racionais Relativos, envolvendo números decimais e mistos.

Na aula seguinte explicou a operação de divisão com os Racionais Relativos: "Para dividir a gente multiplica pelo inverso, multiplica cruzado, o numerador de um termo com o denominador do outro termo ou ainda podemos copiar a primeira fração e inverter a segunda. Daí é só multiplicar numerador com numerador e denominador com denominador. O sinal delas permanece. Se der para simplificar, simplifica. Assim vejam: (-2 1/3) : (0,4) = (-7/3) : 4/10 = -70/12 que, simplificando, dividindo por dois é igual a -35/6". E explicou: "o que significa o traço entre o numerador e o denominador de uma fração? Ex.: a/b significa divisão de a por b não é? Então 3/4 pode ser lido como três dividido por quatro. E, numa operação assim escrita 1/2 / 3/4 é o mesmo que 1/2 : 3/4 = 4/6 que, dividido (simplificação) por dois é igual a 2/3. Copiem esse exemplo!"

Na aula seguinte o professor atribuiu um grande número de exercícios de divisão para serem resolvidos. Quando retornou aos exercícios com operações de adição, subtração e multiplicação, percebi que o índice de erros aumentou. Os alunos praticamente haviam esquecido os procedimentos dessas operações, principalmente com relação à eliminação de parêntesis. Ex.: + (-1/2).

Na 31ª aula, após perceber a dificuldade dos alunos em relembrar as regras e procedimentos, o professor fez uma revisão com exercícios envolvendo as quatro operações e potenciação com Inteiros e as quatro operações com Racionais Relativos, bem como um exercício pedindo, primeiro, para eliminar os parêntesis e, depois, para resolver o exercício: (+5) + (-3) - (-9) - (+2) + (-3) + (+2) = e anunciou que em seguida haverá uma prova. Um dos alunos se manifestou: "Outra prova? O senhor já entregou alguma das que nós fizemos?" O professor acenou com a cabeça que não. E o aluno prosseguiu: "onde já se viu a gente fazer tanta prova e o senhor não entregar nenhuma?" O professor se manifestou novamente: "Já falei para vocês que até o final do ano, eu entrego. Eu ainda não corrigi nenhuma".

Após a aula, em conversa informal, o professor me confidenciou que achava que nem ia devolver as provas porque, de um modo geral, os alunos foram muito mal. "fica difícil, né. Vamos ver se eles melhoram".

Na aula seguinte, antes da prova, o professor resolveu as questões no quadro enfatizando os procedimentos e as regras referentes a cada tipo de exercício. Com relação ao exercício em que era para resolver, primeiro, eliminando os parêntesis ele perguntou: “Como vocês resolveram este exercício? Primeiro juntaram todos os números negativos e depois todos os positivos?” E assim o fez no quadro. Nos exercícios de potenciação, voltou a relembrar as regras: “menos um elevado à quinta potência dá quanto? menos um, não é mesmo? porque é negativo elevado à impar!”.

A aula posterior à prova teve inicio com a apresentação de potenciação com Números Racionais Relativos com o seguinte exemplo:
$(1/5)^2 = 1/25$ “Isto se resolve assim olhem, prestem atenção que é fácil. É potenciação de Números Racionais: $(+1/5) . (+1/5) = (+1/25)$”
“Vejam este outro exemplo: $(- 2/3)^2 =$ “menos dois terços ao quadrado. Olhem o dois terços é negativo e o expoente é par então o resultado é positivo e, dois ao quadrado é quatro e três ao quadrado é nove então, o resultado é quatro nonos positivo. Alguma pergunta?”. Um dos alunos questionou, parecendo não entender (ou não lembrar) que o expoente significa número de vezes que o número (base) vai ser multiplicado por ele mesmo, então o professor pediu que ele dissesse quanto é menos dois elevado ao cubo. O aluno não respondeu e ele disse: “fica pensando aí enquanto eu dou alguns exercícios para vocês resolverem”. E passou no quadro vários exercícios a exemplo dos explicados anteriormente como:
$(-1/2)^3 =$ ; $(-3/4)^1=$ ; $(-9/11)^2 =$ $(+1/3)^2 =$

Enquanto os alunos buscavam a solução para os exercícios, fui observar o aluno que havia feito o questionamento e percebi que a resposta dada para a questão que o professor lhe dera (menos dois ao cubo) era 6. Então eu o questionei: “Fh, como você achou esse resultado? Ele pensou mais um pouco e disse: não é seis não é oito. E eu voltei a indagar:” e o sinal como fica?” Pensou mais um pouco e disse: é negativo! é negativo porque o expoente é impar!. Quando o professor veio perguntar se ele já havia pensado, ele deu a resposta correta e disse ter entendido os demais exercícios.

Prosseguindo com o conteúdo, o professor introduziu e explicou novos exercícios como os abaixo e, então, como de rotina, colocou uma série deles para que os alunos os resolvessem:

$2/3 + (-1/3)^2 =$

$1 + 3/5 + (-1/2)^3 =$

Nesse dia, grande parte dos alunos estavam inquietos, conversando muito e demonstrando pouco interesse pela aula. O professor já havia percebido que muitos deles não haviam resolvido os exercícios no caderno e uma vez feita a correção no quadro, eles apenas copiaram os resultados. Isso desencadeou um discurso do professor por cerca de 30 minutos dizendo que, com essa atitude, os alunos estariam enganando-se a si mesmos. “vejo que a preocupação de vocês é nota: que dia que vai haver prova?, já corrigiu a prova? Vocês têm que se conscientizar que tem que vir à escola para aprender. Ter nota e não aprender não têm sentido! Poucos são os alunos que resolvem exercícios em casa! Se a gente deixa vocês a vontade, vocês quase derrubam a sala! Está faltando educação e respeito aqui. Se interrompi a aula e estou dizendo tudo isto para vocês é porque me preocupo com vocês, me preocupo com o futuro de vocês! Ás vezes penso em dar uma aula diferente, mas como? Não tem como trabalhar diferente, não tem como trabalhar em grupo!. Acho que primeiro teria que domar vocês! Têm alunos aqui que vieram de outra escola. Porque será que saíram de lá? A escola não prestava ou é o aluno que não presta? Tenho outra coisa a dizer: têm alunos excelentes aqui na sala, muito bons mesmo. Porque vocês não acompanham eles?”. E prosseguiu dizendo que iria convocar uma reunião com os pais, para deixá-los cientes do que estava acontecendo, que da próxima vez vai dar advertência ou até mesmo colocá-los para fora da sala, que vai acompanhar quem está ou não resolvendo exercícios em casa, etc. Enquanto o professor falava, os alunos permaneceram em silêncio total. Muitos debruçados sobre a carteira, de olhos fechados.

Mais duas aulas se passaram. Em uma delas foi recordado todo o conteúdo já dado através de resolução de exercícios. Na outra, o professor explorou bem a resolução de expressões envolvendo soma, subtração e potenciação de Racionais Relativos. Na seguinte, introduziu adição algébrica.

**3. Expressões Algébricas**

A adição algébrica foi introduzida com a seguinte explicação: "para adicionar dois ou mais termos algébricos, estes devem ter a mesma parte literal (letras). Caso tenham a mesma parte literal, basta calcularmos e conservar a parte literal". E reforçou demonstrando o exercício:

"2a + 1a = 3a, sendo que o número dois é o coeficiente numérico e o "a" é a parte literal. Alguma pergunta? Se for com fração, assim, olhem: 2x + 3/4x = vocês primeiro façam todo o processo que vocês já conhecem calculando primeiro o M.M.C. (...). Vejam outro exemplo: 2ax +3ax + 4 + 2 =". E fez a demonstração da solução.

Durante duas aulas o professor abordou a soma e subtração de expressões algébricas juntamente com a resolução de 14 exercícios. Conduziu as aulas com muita tranqüilidade, reforçou os pontos em que os alunos vinham tendo maiores dificuldades tais como: quando e como calcular o M.M.C., visto que o índice de erros era alto; regras de sinais, etc. e lembrou que para resolverem os exercícios com sucesso os alunos precisariam ter o domínio dos conhecimentos básicos e, portanto, deveriam deixar as conversas de lado e dedicar maior atenção às aulas.

Na aula seguinte apresentou a multiplicação algébrica, relembrando as regras da potenciação dizendo que para multiplicar bases iguais soma-se os expoentes, etc. Após as explicações acrescentou 15 exercícios envolvendo Números Inteiros, Números Racionais Relativos, decimais, incógnitas variadas, etc.

**4. Equações de 1º grau**

A abordagem sobre equações de 1º grau iniciou-se com a apresentação de sentenças numéricas como 15 + 10 = 25; 10 + 3 = 18, e o questionamento se são verdadeiras ou falsas. O professor falou sobre sentenças abertas como sendo aquelas que possuem elementos desconhecidos, elementos esses chamados de variáveis ou incógnitas. Ex.: $x + 4 = 9 \Rightarrow$ variável x e, $x + y = 20 \Rightarrow$ variável xy. Falou também sobre sentenças fechadas como aquelas que não possuem variáveis ($15 - 5 = 10 \Rightarrow$ verdadeira fechada).

O professor lembrou que já, desde a primeira série os alunos resolviam esse tipo de problema (1 + 2 = 3), porém ainda não era chamada de equação de 1º grau. E voltou a explicar: " x + 5 = 15. Como vocês fazem para achar o valor de x?" Os alunos responderam: quinze menos cinco!. E ele volta a questionar: "O que vocês fizeram então? foi a operação inversa, não foi? Então, se for soma a inversa é a subtração, se for subtração é soma, se for multiplicação é divisão (...)". E continuou a explicação indicando qual é o primeiro membro ( x + 5) e segundo membro (15) da equação dada e dizendo que, para resolvê-la, o coeficiente numérico cinco vai para o segundo membro com a operação inversa ( 15 - 5) , para então chegar ao resultado onde x é igual a dez. Falou também sobre o Conjunto Universo e Conjunto Verdade com a seguinte explicação: " seja a sentença aberta: x é a estação do ano que começa por P. Então, Conjunto Universo: U= {primavera, verão, outono e inverno} e o Conjunto Verdade: V = {primavera}" . Em outra aula, volta a explicar o que é termo desconhecido, o que é 1º e 2º membro e a falar sobre a necessidade de realizar a operação inversa para chegar ao valor da incógnita. Muitos alunos estiveram alheios à explicação do professor durante todo o tempo e cometeram muitos erros ao solucionarem os exercícios, principalmente no passo em que teriam que realizar operação inversa (troca do sinal) ao mudarem os termos de membro. Quando as equações envolviam mais de uma operação, como no exercício: 2x + 14 = 28, as dúvidas aumentaram. Ao realizar a correção, o professor perguntou: "quantas operações eu tenho aqui? Primeiro tenho que resolver a adição. E então, o que fica no primeiro membro? 2x não é mesmo? porque o 14 passou para o segundo membro com a operação inversa da soma, ficando, portanto, 2x = 28 - 14, então 2x = 14. E agora? qual a operação existente entre o dois e o x? É multiplicação? Então o 2 vai para o segundo membro com que operação? Divisão, certo? Então fica assim: $x = 14/2 \Rightarrow$ portanto, $x = 7$. Vamos prestar atenção neste outro caso: $2x = -9 + x$" . E explica todo o processo de solução".

Em aulas seguintes continuou com exercícios de expressões algébricas incluindo exercícios que envolviam propriedades como a distributiva, como $-4(x + 3) = 1$, embora não tenha voltado a relembrar a propriedade.

Oito aulas após a introdução de expressões algébricas, tempo em que se fizeram muitos exercícios como os abordados acima, o professor explicou a resolução de expressões algébricas com números fracionários. Ex.: $x/3 + x/2 = 15$, informando que o primeiro passo seria encontrar o M.M.C., "Façam assim: encontrem o M.M.C., dividam pelo de número de baixo e multipliquem pelo de cima. Depois disso podem ignorar os denominadores. Eles não interessam mais ($2x/6 + 3x/6 = 90/6$). Então, a expressão fica como as que vocês já vinham resolvendo: $2x + 3x = 90$. Prestem atenção em um outro exemplo:

$\frac{x-1}{4} - \frac{x-3}{6} = \frac{3}{1} \Rightarrow \frac{3(x-1)}{12} - \frac{2(x-3)}{12} = \frac{36}{12}$ esquecendo o denominador fica

assim: $\Rightarrow 3(x-1) - 2(x-3) = 36$

$3x - 3 - 2x + 6 = 36$

$3x - 2x = 36 + 3 - 6$

$1x = 33 \Rightarrow x = 33 \Rightarrow V = \{33\}$

O alunos trabalharam com esses tipos de exercícios por cerca de mais quatro aulas, totalizando 12 aulas abordando expressões algébricas e equações de 1º grau.

## 5. Resolução de Problemas

O professor explicou que passaria a dar problemas que envolveriam praticamente tudo o que eles deveriam ter aprendido até o momento. “São problemas de equação. Para que possam resolver vocês têm que ler e interpretar”. Alguns exemplos dos problemas dados:

- Do número 1510 subtraí 960. A seguir, multipliquei o resultado por 45. Finalmente, dividi o produto por 9. Qual será o resultado?

- O triplo de um número, diminuído de 12 é igual a 33. Qual é esse número?

- O quádruplo de um número diminuído de 10 é igual ao dobro desse número aumentado de 2. Qual é esse número?

- Subtraindo 5 da terça parte de um número obtém-se o resultado igual a 15. Qual é esse número?

Em uma das aulas o professor colocou cinco problemas no quadro. Oito minutos se passam e nenhum dos alunos havia feito nem sequer a tradução para a linguagem matemática. O professor questionou se estava muito difícil e esperou mais algum tempo. Um dos problemas consistia no seguinte:

- A terça parte de um número diminuído de sua quinta parte é igual a 6. Qual é esse número?

Antes do professor fazer a correção no quadro, eu, ao passar por um dos alunos, me deparei com a seguinte tradução: $3/2 - 5/2 = 6 \Rightarrow 12/x - 10/x = 6/x$ Então eu perguntei: H., me conta como foi que você chegou a esses números? “Ah, não sei, fui fazendo aí, ó e deu isso. Eu sei que está errado mas deixa assim”. Posso me sentar ao seu lado para fazermos juntos novamente? “Não, larga pra lá, depois eu copio do quadro”. Percebia-se um cansaço físico e mental no aluno. Será que tem a ver com os tipos de problemas? Com a rotina desprovida de atrativos?

Foram dados em classe 45 problemas semelhantes aos mencionados em um período de oito aulas; sempre na mesma rotina. As dificuldades apresentadas foram muitas. Os alunos não estavam habituados nem estimulados a pensar, a interpretar. Os erros eram os mais diversos; desde a representação matemática de terça parte, quádruplo a  diminuído, adicionado, entre outros. Quando conseguiam montar a equação, erravam no procedimento. O índice de erros apresentados era muito alto, porém as aulas seguiam no mesmo ritmo.

## 6. Área e Perímetro

No final do mês de junho, na  74ª  aula dada, o professor introduziu o conceito de área e perímetro através de desenhos. Demonstrou,  através de exemplos, em que consistia a área de um quadrado e um retângulo e perímetro de quadrado, retângulo e polígono. Antes, porém, na aula que antecedeu as explicações, ele indicou as páginas do livro para que os alunos tomassem algum contato com o assunto, através de leitura em casa. Pediu também que, após a leitura, medissem, desenhassem e calculassem a área e o perímetro do quarto onde dormiam. Com isso, os alunos que haviam cumprido a tarefa, vieram com algum conhecimento e não tiveram muitas dificuldades para entender as explicações do professor. O conteúdo foi trabalhado em sala durante duas aulas através de resolução de problemas. Embora boa parte dos alunos estivessem obtendo êxito outros demonstravam não ter apreendido os conceitos  gerando confusão no procedimento de cálculo de perímetro e área. Outra dificuldade percebida estava relacionada ao trabalho com números decimais culminando em muitos erros. Na terceira aula com  em que se abordava área e perímetro, os alunos já foram submetidos à uma avaliação que envolvia problemas semelhantes aos resolvidos em classe juntamente com outros conteúdos.  Como já estávamos na penúltima semana que antecedia as férias escolares, o professor estava voltado para a revisão dos conteúdos já dados e para as avaliações. Contudo retornou outras vezes com mais problemas para serem solucionados.

## 7. Noções sobre ângulos

Nas últimas três aulas do semestre o professor recordou o que era ponto, reta, segmento de reta e introduziu conceitos e definições sobre ângulos. Para tanto recorreu a exemplos do trabalho de um pedreiro (uso do esquadro); do jogador de bola ao pegar o melhor ângulo do gol; formato/inclinação do telhado das casas (triângulo) para o escoamento das águas; moldura de um quadro, etc. Posteriormente abordou os ângulos complementares, suplementares, agudo, reto, obtuso e raso, seguidos de exercícios. Esse conteúdo foi somente apresentado aos alunos não sendo portanto objeto de avaliação em nenhuma das provas e exercícios de verificação.

As aulas dadas no período de observação, no primeiro semestre letivo do ano de 2000, foram no total 82. As observadas, totalizaram 64.

## APÊNDICE B

**Alguns registros e considerações sobre os encontros com os alunos realizados fora do horário regulamentar**

Esta seção traz registros de como se deu o estudo complementar paralelo às observações em sala de aula, realizado com os alunos que vinham apresentando maiores dificuldades em Matemática.

Os estudos tiveram início no final do mês de março, conforme acordo prévio com o professor e direção da escola e ocorriam todas as quartas-feiras, das 14 horas às 15 horas e 30 minutos, em uma sala do colégio especialmente reservada para essa atividade. O primeiro encontro contou com um número de dez alunos, depois foi reduzindo-se e por algum tempo teve a participação média de seis a oito alunos. Porém, somente quatro deles tiveram freqüência regular até o ultimo encontro. A variação do número de participantes teve motivos variados como problemas pessoais (não liberação do trabalho), desinteresse e inclusões posteriores.

O objetivo principal desse estudo complementar era estabelecer um relacionamento mais estreito com os alunos e conhecer melhor as suas dificuldades relacionadas aos conteúdos estudados em classe e, se possível, a natureza das suas deficiências, o que favoreceria o enriquecimento da minha coleta de dados. Além da busca desses objetivos esperava, também, poder contribuir para o crescimento dos alunos, oportunizando a compreensão dos conceitos fundamentais e uma atitude reflexiva sobre seus erros, de modo a torná-los visíveis para eles, pois eu tinha como pressuposto que se eles passassem a observar seus erros e a rever a estratégia usada na resolução do exercício ou problema seria possível compreender por que não se saíram bem na realização da tarefa e retificar o seus procedimentos, num processo de reconstrução do conhecimento.

Em nossas atividades busquei trabalhar com conteúdos estudados em sala, em forma de problemas, exercícios e outras alternativas que privilegiassem a construção do conhecimento. Para tanto, tive como guia o livro didático do Imenes e Lellis e o Caderno de Experiências Matemáticas - CENP - 6ª série, do qual extraí várias atividades.

No primeiro encontro realizado percebi que essa tarefa não seria fácil. Os alunos, com rara exceção, estavam com a auto-estima bem abaixo do desejável, desmotivados, desinteressados e inconformados por estarem ali, uma vez que o professor entendeu nosso trabalho como um reforço e verbalizou que tais alunos seriam de "difícil recuperação". Esse primeiro encontro foi frustrante. Eu fui cheia de planos, organizada para trabalhar com os Números Inteiros Relativos de forma diferente da abordada em sala e pouco consegui. Se o professor considerava os alunos indisciplinados em suas aulas, eles ali, livres das repreensões com as quais estavam acostumados, extrapolaram todos os limites. Percebi ser necessário me reposicionar e elaborar novas estratégias para prosseguir com o meu objetivo.

O encontro seguinte teve início com um diálogo em que propus que nós deveríamos, juntos, estabelecer como deveriam ocorrer nossos estudos, como torná-los interessantes. Falamos sobre a preferência na disposição das cadeiras na sala, sobre a forma de abordagem do conteúdo; sobre a liberdade de questionar e trocar idéias com os colegas; sobre o gosto pela disciplina e sobre o clima que deveria reinar em nosso ambiente, visando assegurar o interesse cooperativo de todos. Nesse dia estavam presentes sete alunos. Estabeleceram que eles mesmos primariam pela harmonia no ambiente, reprovando atitudes indesejáveis dos colegas. Foi uma negociação, um acordo mútuo, com objetivos imediatos e claros, com características próprias de um contrato didático.

Os encontros passaram, então, a contar com um clima mais ameno, não tanto quanto desejável, mas passível de continuidade. Nessas ocasiões procurei resgatar os conceitos fundamentais sobre Números Inteiros Relativos partindo dos conhecimentos já existentes e de situações em que aquele saber pudesse estar contextualizado, ressaltando a sua importância do conteúdo ensinado e utilização na resolução de problemas presentes em nosso cotidiano. Busquei situações fizessem emergir as regras de sinais presentes na adição e subtração "menos com menos dá menos", "mais com menos e menos com mais, subtrai e dá o sinal do maior" que até então eram conhecidas via transmissão de conhecimento e exercitação a fim de que passassem a ter algum sentido para eles.

Esforcei-me para que as atividades, problemas e exercícios tivessem um contexto como referência; plantava desafios para que o grupo, através de interações entre pares, definissem os procedimentos a serem seguidos em busca da melhor maneira para encontrar a resposta correta. Invariavelmente a dificuldade de um era do outro também, porém em grau diferente permitindo que eles se ajudassem e tirassem suas próprias conclusões. Apresentava, por exemplo, um exercício envolvendo Números Inteiros Relativos, que tivesse recebido tratamento de Números Naturais, questionando em que contexto o cálculo realizado poderia ser considerado como correto: -18 - 18 = 0. Uma outra estratégia usada, principalmente na resolução de equações, para que visualizassem se a resposta estava correta ou não, era “tirar a prova”, fazendo a substituição do valor encontrado pela incógnita, comprovando o acerto ou fazendo a retomada do pensamento na busca do acerto.

É verdade que nem sempre isso era possível, pois mesmo com o acordo firmado, com o compromisso assumido de que eles próprios iriam primar pela disciplina e pelo bom clima no nosso ambiente de estudo, enfrentei muitos problemas. Houve dias em que eles estavam extremamente agitados, alguns desinteressados e perturbando a paz dos poucos que estavam concentrados no estudo. Foi necessário, por várias vezes, interromper nossas atividades e, através de muito diálogo e propostas de reflexão, resgatar o acordo firmado para então prosseguir nossos trabalhos.

Como nem todos os alunos freqüentavam os estudos com assiduidade, eles tinham dificuldade em administrar esse acordo. Fazia-se necessária a retomada freqüente dos pontos estabelecidos para envolver os faltosos. A irregularidade na freqüência quebrava o ritmo do trabalho e prejudicava o acompanhamento e a evolução dos alunos.

A exemplo de uma atividade contida no Caderno de Experiências Matemáticas - CENP, já citado, pontuamos a localização geográfica residencial de alguns dos alunos ali presentes na mesma rua da escola para explorar o conceito de

Números Inteiros Relativos através do ordenamento e a representação geométrica de suas moradias em uma reta numérica. Tomando a escola como ponto referencial de partida (zero), representamos os deslocamentos que habitualmente faziam para a direita (+) e para a esquerda (-) ao irem para à escola e eventuais deslocamentos quando um colega vai à casa do outro. Através dessas mesmas representações trabalhamos a noção de módulo de um Número Inteiro, operação de adição e subtração de Inteiros (ao determinar a distancia percorrida nos deslocamentos) e a distinção existente entre valor relativo e valor absoluto de um número. Essas atividades permitiram observar algumas dificuldades e obstáculos que estavam prejudicando a consolidação da aprendizagem e favorecer a apreensão e fortalecimento dos conceitos.

Com a presença física de um termômetro, exploramos problemas relacionados a variações de temperatura ocasionadas pela chegada de frentes frias; as temperaturas abaixo de zero que eventualmente ocorrem na região sul do Brasil, em determinada época do ano e em outros países; falamos sobre temperaturas predominantes em regiões norte e sul do país representando-as a partir da temperatura média na cidade de Londrina. Falamos também sobre a temperatura do corpo humano, situações de febre e cuidados especiais que devem ser tomados para baixá-la, etc.

Outro recurso utilizado para abordar os números negativos e positivos e realizar operações de adição e subtração foi recorrer à situação concreta de ganhos e perdas, dívidas e crédito, simulando situações vivenciadas em jogos, contas bancárias, entre outros, que prenderam a atenção dos alunos e os fizeram voltar-se para situações do cotidiano. Alguns desses recursos foram citados na apresentação do conteúdo, porém não foram explorados e foram abandonados logo em seguida pelo professor.

Após essa contextualização, recorri a exercícios já resolvidos em sala de aula colocados, porém, de outro modo: apresentava, por exemplo, a sentença numérica: $-12 + 3 = -9$ e pedia aos alunos que construíssem um enunciado para ela;

uma situação inversa de um problema apresentado. Embora alguns alunos tenham manifestado resistência para elaborar o problema, chegando a sugerir que eu desse exercícios iguais aos dados pelo professor (em forma de repetição), a experiência foi muito boa, e os resultados animadores. As regras de sinais, até então repetidas exaustivamente, passaram a ser vistas de outra maneira e a ter sentido para eles. Os exercícios dados pelo professor passaram a reforçar e fixar essas regras. E alguns alunos, frente aos erros cometidos, passaram a reiniciar a execução do exercício procurando situá-lo num contexto, de modo a reorganizar seu raciocínio em busca da resposta correta.

A problematização do exercício contribuiu para o resgate do papel da ação na construção de conceitos que, segundo Charnay (1996), não precisa necessariamente ser exercida pela manipulação de objetos mas de uma ação com uma finalidade, que supõe uma dialética "pensamento-ação". Entendo como pertinente esta colocação, visto que o aluno, ao construir uma situação para dado exercício, exerce uma ação, simulada que seja, e a visão que tinha do mero exercício passa a ser outra, permitindo que remeta os saberes, então apropriados, às questões relacionadas ao seu dia-a-dia.

A compreensão das regras de sinais da multiplicação e divisão de Números Inteiros foi permeada de muitos obstáculos. É difícil a aceitação de que "menos com menos dá mais"; bem como que "sinais iguais dá positivo" , "sinais diferentes dá negativo". Conforme Gómez-Granell (1998, p.264), os símbolos matemáticos possuem dois significados: formal e referencial. O formal "obedece a regras internas do próprio sistema e se caracteriza pela sua autonomia do real, pois a validade de suas declarações não está determinada pelo exterior" e o outro, o que se pode chamar de significado referencial ou semântico permite associar os símbolos matemáticos a situações reais com imagens e representações icônicas de modo a torná-los úteis, inclusive para a resolução de problemas. Dizendo de outro modo, vejo que o aluno precisa primeiro compreender a lógica da regra para depois fazer o uso formal como "menos com menos dá mais". Como sabemos, é limitada a escolha de situações concretas/práticas que dêem significado às regras de multiplicação e divisão com Números Inteiros. Foi nos estudos de González e outros (1990, p. 133) que encontrei uma situação que usava a idéia de grandeza em dois sentidos, relacionando num mesmo problema dinheiro e tempo e que poderia dar sentido à regra apenas apresentada em classe. Após adaptações, não foi difícil trabalharmos com o seguinte problema: Fernando recebe mesada mensal do pai para a compra de lanches na cantina do colégio. Há 2 semanas ele tinha mais dinheiro do que tem hoje. Quanto tinha se ele gasta 5 reais por semana?

Depois de muita discussão e inferências chegamos à demonstração esperada:

gasta 5 reais por semana: -5

haviam-se passado 2 semanas: -2

Na conclusão chegou-se à conclusão de que há 2 semanas atrás ele tinha 10 reais a mais do que hoje, pois ( -5) . (- 2) = +10

Assim como as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão, a potenciação de Números Naturais também é uma operação já conhecida pelos alunos, em séries anteriores. As dificuldades em trabalhar com potenciação revelavam-se muito grandes. Foi necessário resgatar o conceito de potência para poder resolver os exercícios de potenciação com Números Inteiros. Para iniciar, fiz uso das folhas- tipo III-3 e III-3a do Caderno CENP, 1994, p. 47 e 48, onde os alunos puderam resgatar algumas propriedades da potenciação de Números Naturais através de suas próprias conclusões. Em seguida, partimos para a solução de exercícios buscando a extração das regras e generalizações.

Realizar operações com Números Racionais Relativos mostrou-se também muito complicado. Além das dificuldades em operar os Inteiros Relativos, ficou evidente o precário conhecimento com os Números Racionais, dificultando sobremaneira a realização de exercícios. Como já descrevi, o tempo que o professor dispensou recordando as operações com os Racionais foi insuficiente para que os alunos retomassem o conceito que têm sobre frações, para o resgate do significado do numerador e do denominador, em que consiste o M.M.C. e o procedimento para chegar até ele. Grande parte dos alunos realizava as operações com os Racionais

Relativos como se estivessem operando com os Números Naturais evidenciando presença de obstáculo epistemológico que teria que ser superado.

Desse modo, paralelamente às minhas observações, busquei resgatar e fortalecer o conceito de fração e suas representações. Aproveitei a comemoração da Semana da Páscoa, época em que os chocolates estão em evidência, para explorar as operações com frações através de barras de chocolate. À espera de poder consumir a guloseima, os alunos participaram com interesse nas discussões, representações e exemplos criados para trabalhar com o assunto.

Ao final desse encontro, aproveitando o clima descontraído e o envolvimento conquistado, falamos um pouco sobre nossas vidas, família, alegrias, preferências, etc. Nessa oportunidade, um dos alunos disse que eu teria que ser mais brava para que os colegas tivessem um pouco de medo de mim e não fizessem tanta bagunça, ressaltando, a meu ver, a visão da figura autoritária que o professor representa para ele. Aproveitando essa manifestação do aluno, falamos sobre o respeito que devemos ter com os nossos professores e colegas, sobre disciplina, sobre a cordialidade e harmonia que deve reinar no ambiente em que vivemos, em vez de conturbações e imposições, de desrespeitos e dominação. Pedi que refletissem sobre isso.

Em outra oportunidade, voltamos a falar sobre frações numa linguagem bem informal, aproveitando o modo como eles costumam se expressar no cotidiano. Falamos, também, sobre o quanto as frações estão presentes no nosso dia-a-dia (meio dia, meio quilo, duas de cada dez pessoas..., receitas culinárias), enfim, da sua utilidade e da importância em dominar as operações com números fracionários.

Antes de iniciar o trabalho com resolução de Equações de 1º grau, fiz uma brincadeira com os alunos chamada “descobrindo a mágica”. Pedi a um aluno que pensasse em um número. A seguir que somasse 2 a esse número. Depois que ele dobrasse o resultado e em seguida subtraísse 4. Perguntei o resultado obtido (e dividi por 2) e disse-lhe o número que havia pensado. Fiz o mesmo com os demais alunos e fui anotando no quadro os valores obtidos e os números pensados de cada um deles. Eles ficaram eufóricos com a “adivinhação”. Em seguida distribuí cópia da Folha- Tipo III - 26, p. 300 do Caderno de Experiências Matemáticas- 6ª série - CENP que continha problema semelhante e pedi que realizassem a tarefa juntos fazendo as anotações algébricas de acordo com o esquema proposto constante na folha. Pedi também que anotassem os resultados e tirassem conclusões. Depois de algum tempo, como eles estavam demorando para chegar à conclusão, retomei as minhas anotações feitas no quadro, relacionadas à brincadeira anterior, pedindo que observassem e me dissessem o que havia de comum entre o número pensado e o resultado obtido e logo eles mataram a “charada”. Depois retornaram ao que haviam feito e tiraram conclusões. Eles gostaram muito da atividade que revelou-se eficaz, uma vez que envolvia cálculos, tradução da linguagem literal para a representação matemática (representação algébrica) e interpretação.

Posteriormente, no trabalho com equações, percebi que os alunos vinham apresentando muitas dificuldades em sala de aula, principalmente ao isolar a incógnita no primeiro membro porque não realizavam a operação inversa ao transportar os números de um termo para o outro e não reconheciam a operação de multiplicação quando a expressão se dava por justaposição (Ex.: 3x). Diante disso, busquei reintroduzir o tema equações de 1º grau. Iniciei dizendo que uma equação de 1º grau possui pelo menos uma variável com expoente 1, por isso é denominada de 1º grau e é expressa por uma igualdade. E que, se uma equação é expressa pelo sinal de igualdade, então ela possui dois membros (o primeiro à esquerda do sinal de igualdade e o segundo à direita do sinal de igualdade). Encontrar o conjunto verdade de uma equação, isto é, encontrar um valor do universo para a variável de modo que o resultado do primeiro membro seja igual ao do segundo membro, tornando a sentença verdadeira é encontrar o valor da variável (ou incógnita). Então questionei: qual é o número que adicionado a 3 é igual a 7? e transformando o questionamento em linguagem matemática obtivemos: x ( elemento desconhecido) mais três é igual a sete (x+ 3 = 7) e partimos para a busca do valor desconhecido. Por se tratar de um exercício muito simples foi fácil para os alunos chegar rapidamente à resposta e um deles submeteu o resultado à prova para comprovar a afirmativa de igualdade.

Prosseguindo com as atividades fui inserindo novos elementos no primeiro membro e posteriormente no segundo membro, inclusive incógnitas, pedindo que eles fossem explicando com suas palavras o que se deveria fazer para encontrar o valor desconhecido. Insisti em exercícios que exigiam mudanças de membro dizendo que primeiro teríamos que desfazer (realizar operação inversa) as operações de adição e/ou subtração e por último a multiplicação ($7. x + 15 = 71$). Enfatizei que, para facilitar a escrita, a forma usual de expressar a multiplicação de um número por uma incógnita, no caso $7. x$ é $7x$, ou seja, subentende-se que há uma operação de multiplicação entre o sete e o x . Tive que voltar várias vezes a enfatizar a diferença que há entre a operação, por exemplo: $3x = 21$ e a $3 + x = 21$. Esse erro mostrou-se muito comum nos exercícios em classe evidenciando a tendência de supergeneralização de uma regra ou procedimento. Para mostrar a diferença e visando melhor entendimento, pedia que criassem enunciados para uma e outra situação, o que acredito ter sido muito positivo. Criar enunciados para operações com adição mostrou-se mais fácil que com multiplicação. É interessante que os alunos levantavam situações pertinentes para as equações mas se estas aparecessem fora de contexto, o erro (supergeneralização) tornava-se muito freqüente.

Os passos seguintes foram com operações envolvendo Números Inteiros Relativos e posteriormente Números Racionais Relativos e operações que exigiam usar a propriedade distributiva, a qual foi preciso resgatar para que pudessem efetuar as operações, pois os alunos já não se lembravam mais. As dificuldades já detectadas, apesar de todo o esforço empreendido, persistiram: erros de sinais, procedimentos para encontrar o M.M.C. e operações com frações. Para tanto, retornava sempre aos conceitos, como a origem das regras de sinais, reconhecimento do significado de numerador, denominador, etc., estimulando-os a descobrirem seus erros, a trocarem idéias e a reiniciar esse procedimento.

Com relação à resolução de problemas, posso dizer que os alunos, acostumados a resolver exercícios repetitivos e similares em sala de aula, apresentavam muita dificuldade para solucioná-los. Sabemos que a resolução de um problema requer a disponibilidade de uma série de habilidades e procedimentos que envolvem, inclusive, a tadução literal para a linguagem matemática, além de uma programação de estratégias e técnicas que levarão à sua solução.

Os problemas dados pelo professor eram simples, com operações praticamente explícitas no enunciado e mesmo assim o índice de acerto dos alunos era muito baixo. Era comum ver os alunos se atirando, simplesmente, para as operações sem ao menos saberem dizer o que estavam procurando como solução. Diante disso, busquei levá-los, primeiramente, a fazerem uma leitura atenta e detalhada do enunciado do problema, a buscarem o que o problema pedia, para depois traduzi-lo em linguagem matemática. Eu criava novos enunciados para os mesmos problemas dados pelo professor, mais próximos da realidade deles, passíveis de serem vivenciados e, em casos de acertos, procurava mostrar que eles poderiam usar o conhecimento que tinham em qualquer área de suas vidas.

Retornamos aos conceitos e representações do que vem a ser triplo, quádruplo, um terço, etc., enfatizando que a tradução da linguagem literal para a linguagem matemática, em um problema, é fundamental para chegar à resposta correta. Mostrei que um problema pode envolver conhecimentos de vários conteúdos como Números Inteiros, Números Racionais Relativos, Expressões Algébricas e Equações de primeiro grau e, para tanto, não deveriam conviver com dúvidas; deveriam questionar e participar mais das aulas.

O estudo de área e perímetro requereu entendimento claro do que era a medida de um e de outro. Os erros dos alunos decorriam, na maioria das vezes, da falta de atenção ao que o problema pedia à realização das operações, principalmente se envolvesse decimais. Pedi que voltassem suas atenções para o enunciado e refletissem antes de realizarem os cálculos, pois eu havia percebido que eles se deixavam levar pelas medidas apresentadas na figura ou os dados presentes no enunciado. Caso se tratasse de largura e comprimento, partiam para o cálculo da área, ou até mesmo faziam a soma das medidas presentes na figura (apenas dois dos lados). Se a figura apresentasse a medida em cada um dos lados, a probabilidade de acerto era maior, mas ainda com muitos erros de cálculo.

Durante os encontros com os alunos busquei perseguir meus objetivos que centravam-se em observações e na busca de respostas para minhas indagações. Isto incluiu o trabalho com os conteúdos já estudados em sala, o que, de certa forma pode ter favorecido seus conhecimentos e a busca de conscientização de que o erro, ao contrário de ser um elemento simplesmente condenável, faz parte do aprendizado e que a reflexão sobre ele bem como a retomada do caminho trilhado pode ser eficaz para a reconstrução do conhecimento. Foram 12 encontros num total de 18 horas.

# ANEXOS

**ANEXO A: Instrumentos avaliativos**

**Nome:** **Data: 14/03/2001**

**1) Efetue:**

a) -8 + 12 =

b) 26 - 45 =

c) -17 - 15 =

d) -60 - 18 + 50 - 13 =

e) +14 - 15 - 11 - 13 + 36 =

**2) Efetue a multiplicação**

a) (-5) . (-7) =

b) (-13) . (+13) =

c) (+30) . (-30) =

d) (-12) . (-6) =

e) (-369) . (-136) =

**Nome:** **Data: 22/03/2001**

**1) Resolva:**

| | |
|---|---|
| -12 + 15 = | (-9) + (-9 ) = |
| +6 - 7 - 8 - 1 = | (+3) + (+5) = |
| -16 - 16 + 16 = | (-18) + (-15) = |
| 23 - 52 + 17 = | -100 + 100 = |
| 9 - 8 - 7 + 11 = | (+17) + (+23) = |

**2) Determine os produtos**

| | |
|---|---|
| (-7) . (-2) . (+3) = | (-1). (-1). (-1) = |
| (-17). (-16) = | (-18). (-1) = |
| (-15) . (-2) . (-1) = | (-2). (-2) . (-2). (-2). (-2) = |
| (-23) . (+23) = | (+3). (+1). (+16). (-17) = |
| (+19) . (-1). (+3) = | (-36) . (+36) = |

**3) Calcule:**

(-42) : (-7) =

(-86) : (+2) =

(+500 : (-500) =

(+10) : (-10) =

(-18) : (-3) =

(+20) : (-20) =

**4) Calcule as potências:**

$(-9)^4 =$ $(+1)^{37} =$

$(+51)^2 =$ $(-10)^4 =$

$(-1)^{749} =$ $(-6)^4 =$

**5) Reduza a uma só potência:**

$(+1)^6 \,.\, (+1)^1 \,.\, (+1)^8 =$ $(+9)^1 \,.\, (+9)^1 \,.\, (+9)^1 =$

$c^1 \,.\, c^1 \,.\, c^1 \,.\, c^1 =$ $a^7 \,.\, a^1 \,.\, a^{10} =$

$(-12)^7 \,.\, (-12)^9 =$ $b^1 \,.\, b^1 \,.\, b^1 \,.\, b^1 =$

**Nome:** **Data: 09.04.2001**

**Exercícios de revisão. Ao resolvê-los preste muita atenção. Caso haja dúvidas consulte o caderno.**

**1) Calcule:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| (+2) + (+3) = | (-5 + (-1) = | (-3) + (-7) = | (-4) + (-4) = |
| (+1) + (+8) = | (-7) + (-2) = | (+5) + (+5) = | (-10) + (-11) = |
| (+7) + (+2) = | (-8) + (-4) = | (+3) + (+4) = | (+8) + (+9) = |
| (+9) + (+4) = | (-1) + (-1) = | (-6) + (-5) = | (+20) + (+20) = |
| (+6) + (+4) = | (-4) + (-2) = | (+8) + (+2) = | (-10) + (-30) = |

**2) Efetue:**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| -4 + 2 = | 5 - 6 = | +7 - 7 = | -17 + 20 = | -8 + 15 = |
| -3 - 1 = | +1 - 1 = | -9 + 8 = | -18 - 18 = | +12 - 13 = |
| +7 - 5 = | -2 - 1 = | -10 - 10 = | 12 - 12 = | -12 - 13 = |
| 4 - 3 = | -5 - 6 = | +40 -20 = | -100 + 100= | -17 + 19 = |
| -3 - 8 = | 5 - 8 = | -9 + 11 = | -17 + 17 = | -6 + 9 = |

**3) Resolva:**

-17 + 14 - 3 + 2 - 10 + 6 = 20 - 50 + 30 - 20 + 10 =

**4) Observe e efetue:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| ( -5) . (-2) = | (+30) : (-10)= | (-12) : (-3) = | (-100) : (+2) = |
| (+3) . (-1) = | (-10) : (-2) = | (-7) : (+1) = | (-1) : (-1) = |
| (-3) . ( -2) = | (-15) : (+3) = | (-24) : (-2) = | (-45) : 9 = |
| (+6) . (-7) = | (+8) : (+1) = | (+5) : (-1) = | 0 : (-2) = |
| (-8) . (-9) = | (-6) : (-2) = | (-6) : (-6) = | 0: (-9) = |

**5) Calcule as potências:**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $(-5)^2 =$ | $(-1)^{47} =$ | $(+6)^3 =$ | $(-3)^5 =$ | $(-2)^2 =$ |
| $(+5)^2 =$ | $(+7)^1 =$ | $(+7)^3 =$ | $(+3)^5 =$ | $(-2)^3=$ |
| $(-1)^3 =$ | $(-7)^1 =$ | $(-10)^3 =$ | $(-2)^4 =$ | $(-2)^4 =$ |
| $(+1)^3 =$ | $(-13)^2 =$ | $(+10)^3 =$ | $(+2)^4 =$ | $(-2)^5 =$ |
| $(-1)^4 =$ | $(-14)^2 =$ | $(-8)^3 =$ | $(+1)^6 =$ | $(-2)^6 =$ |
| $(+1)^4 =$ | $(-15)^2 =$ | $(+8)^3 =$ | $(-1)^6 =$ | $(-2)^7 =$ |

**Nome:** **Data:11.04.2001**

**1) Resolva:**

8 - 12 =

-9 - 7 =

-10 + 20 =

-50 + 50 =

-1 + 1 =

**2) Calcule as potências:**

$(-6)^2 =$

$(-1)^5 =$

$-4^{2}=$

$-8^2 =$

$(-7)^2 =$

**3) Efetue**

(-9) . (-8) =

(-49) : (-7)

(-100) :(-2) =

(-17) . (+17) =

(-48) : (+12) =

**4) Resolva:**

(-0,2) + (1 2/3) =

-1/8 + 1/6 =

**Nome:** **Data: 20.05.2001**

**Exercícios de revisão**

| **1) Calcule:** | **2) Calcular** |
|---|---|
| (+8) . (-9) = | (-9) : (+3) = |
| (-6) . (-5) = | (-11) : (-11) = |
| (+7) . (+4) = | (+21) : (+3) = |
| (+5) . (-11) = | (+36 : (-4) = |
| (-7) . (+11) . (-2) = | (+45) : (-3) = |
| (-12) . (-6) . (+3) = | (+52) : (+2) = |

| **3) Efetue:** | **4) Calcular** |
|---|---|
| -8 - 2 = | 27 -16 - 10 = |
| -9 +14 = | 7 + 20 - 4 = |
| -4 - 4 = | -17 + 14 + 3 = |

19 - 23 = -25 - 21 - 40 =

-40 -11 =

-1 + 30 =

40 - 63 =

**5) Resolva:**

-5/8 + 3/10 = -3/4 + 0,9 =

(-4) . (-3/11) = (0,3) : (-3/5) =

**6) Resolva as seguintes equações:**

5x + 1 = 36

9x - 7 = 5x + 13

7x = 4x + 5

2x - 8 = 8

8x - 14 = 2x

**Nome:** **Data: 24.05.2001**

**Resolva as equações:**

x +2 = 13

6x = -12

x - 4 = -2

4x + 1 = 29

7x + 4 = 39

9x = 7x + 1

20x - 13 = 20 + 9x

9x - 7 = 5x + 13

$9x + 4 = 2x + 56$

Assinatura do responsável: ..............................

**Nome:** **Data: 30.05.2001**

**1) Calcule a área do quadrado que mede 2,4 cm de lado.**

**2) Calcule:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| -23 + 18 = | 12 + 3 = | 14 - 7 = | 91 - 37 = |
| -7 - 32 = | -5 + 4 = | -50 - 25 = | -100+ 100 = |
| 14 - 17 = | -11 + 21 = | 18 - 84 = | 108 - 120 = |

**3) Calcule:**

-18 + 12 + 20 - 34 + 51 =

-11 - 19 - 18 =

-12 - 7 + 4 =

1 - 1 + 1 - 1 + 1 =

**4) Calcule:**

$(-13) . (+1) =$ $(-8) . (+11) =$ $(-108) : (+9) =$

$(-41) . (-5) =$ $(+63) : (-9) =$ $(+52) : (-13) =$

**5) Calcule as potências:**

$(-5)^4 =$ $5^2 =$ $(-9)^2 =$ $(-24)^2 =$

$(-36)^0 =$ $(+6)^1 =$ $-3^3 =$ $-2^4 =$

**6) Resolva:**

$-2/5 + 2 =$ $-3/10 - 1/6 =$

$(+4/3) . (-4/3) =$ $(+11) : (-44/5) =$

**7) Resolva as equações:**

$x + 8 = 10$ $3x = 21$

$2x = -2$ $x+1 = -7$

$5x - 7 = 4x$ $3x + 13 = -2$

$7x + 4 = 39$ $11x - 5 = 8x - 9$

$5x - 40 = 2 - x$ $5x = 6x - 6$

$6 (2x -1) - 7x - 4 = 2 (3x - 2)$

Assinatura do Responsável:................................................

**Nome:** **Data: 06.06.2001**

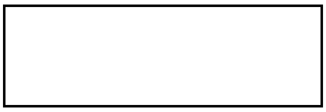
**Exercícios ( problemas)**

1) O triplo de um número adicionado com dois é igual ao próprio número, mais 8. Qual é esse número?

2) Um número adicionado com 3/4 desse número é igual a 21. Qual é esse número?

3) Sabendo que a figura abaixo tem as seguintes medidas

6,5 cm



3 cm

a) qual a sua área?

b) qual o seu perímetro?

**Nome:** **Data:19.06.2001**

**Exercícios:**

1) A diferença entre o triplo de um número com 20 é igual a 34. Qual é esse número?

2) O quádruplo de um número diminuído de 8 é igual ao dobro desse número diminuído de 2. Qual é esse número?

3) Nove vezes um número é igual ao triplo desse número adicionado a 39. Qual é esse número?

4) Adicionando a metade de um número com a sua terça parte é igual a 1. Qual é esse número?

5) A diferença entre o quíntuplo de um número e 40 é igual a 2 menos esse número. Determine esse número.

**Nome:** **Data: 20.06.2001**

**Exercícios:**

1) Um terreno de medidas 18 metros de largura e 26 metros de comprimento. Determine o seu perímetro. Caso o dono resolve fazer uma cerca em volta do terreno com 5 voltas de fio de arame, quanto deverá comprar?

2) Se o seu quarto tem o tamanho de 3 metros de largura e 3 metros de comprimento. Qual é a área do seu quarto? E qual é o perímetro?

**3) Observe as figuras e calcule o perímetro:**

**Figura A:** Medidas: 6cm, 4 cm, 5cm, 8cm, 3 cm

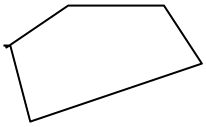
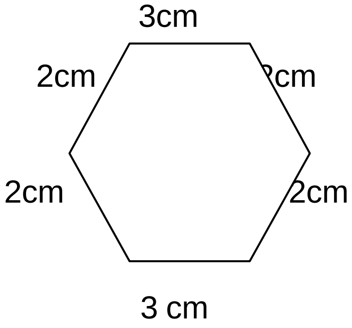


**Figura B:**




4) Quantos metros de piso preciso comprar para colocar num barracão de 14m de comprimento e 8m de largura? Quanto vou gastar sabendo que o $m^2$ do piso custa R$ 7,80?

**Nome:** **Data: 21.06.2001**

**Exercícios**

**1) Resolva as seguintes equações:**

a) $5x - 2 = 18 + 3x$

b) $6x - 10 = 2x + 14$

c) $7(x-2) = 5(x + 3)$

d) $2(x - 1) - 7 = 16$

e) $x/2 - x/4 = 1/2$

f) $x/3 + 4 = 2x$

**Nome:** **Data: 26.06.2001**

**Exercícios**

**1) Resolva:**

$-17 + 23 =$

$-18 - 18 =$

$-10 + 10 =$

$-6 - 3 - 9 - 4 =$

$16 - 56 =$

**2) Calcule:**

(-16) .  (+16) =

(-48) : (+2) =

(56) : (-8) =

(-12) : (-12) =

(-6) . (-17) =

**Calcule:**

$(-3)^3$ =

$-8^2$=

$-5^3$ =

$(+4)^2$ =

$(-6)^2$=

**4) Resolva as seguintes equações:**

a) x/2 + x/3 = 1

b) 4(x-2) = 2(x -1)

c) 12x - 6 = 9x + 3

d) 9x - 18 = 3x + 21

**Nome:** **Data: 03/07.2001**

1) Uma sala tem as seguintes medidas: 3,5 m de largura e 5 m de comprimento.
Quantos metros de piso preciso comprar?

2) Ao triplo de um número adicionamos 12 e o resultado é igual ao quíntuplo desse número. Qual é esse número?

3) A soma da metade de um número com 21 é igual ao dobro do número menos 9. Determine esse número.

4) Determine o perímetro das figuras:

FIGURA A: Medidas: 8 cm, 3cm, 3cm, 6cm, 4 cm

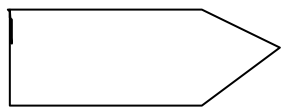


FIGURA B: Medida dos lados: 3cm, 3cm, 6cm, 6cm, 7cm, 4 cm