O GRÁFICO DE *f*(*X*) = 1/*X* É UMA HIPÉRBOLE?

Maria Cristina Bonomi Barufi
IME – USP

Introdução

O presente artigo visa discutir um problema relacionado ao conteúdo desenvolvido nas escolas de nível médio: a apresentação da função $f(x)=\dfrac{1}{x}$ não é muito detalhada nos livros didáticos, sendo seu gráfico considerado uma hipérbole sem, entretanto, uma argumentação matemática razoável ou determinação de seus focos.

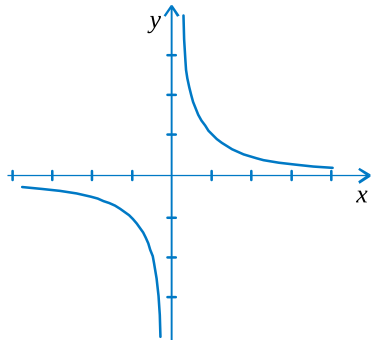
Consideramos que tal assunto pode ser abordado após o estudo das cônicas – assunto bastante detalhado pela **RPM**, com a publicação de diversos artigos. Trata-se do estudo de uma função cujo domínio não é o conjunto de todos os reais, sendo necessário excluir um único ponto do conjunto **R**, para obter seu campo de definição. A generalização para uma função racional, com numerador de grau no máximo 1 e denominador de grau 1, pode ser feita de maneira bastante natural, explorando movimentos no plano. Esse tipo de abordagem parece ser interessante, pois estimula a leitura e interpretação de gráficos e, considerando a questão sob um ponto de vista mais amplo, possibilita estabelecer significado para operações algébricas.

Lembremos que, dados dois pontos F_1 e F_2, denominamos hipérbole de focos F_1 e F_2 à curva que é o lugar geométrico dos pontos de um plano por F_1 e F_2, tais que

$$\left| d(P,F_1)-d(P,F_2) \right| = 2a < d(F_1,F_2) \quad (*)$$

onde a constante $2a$ é um número positivo dado inicialmente e é a distância entre os vértices da hipérbole, que são os dois pontos da curva, um em cada ramo, tal que a distância entre eles é a menor possível.

Examinando o gráfico da função $f(x) = \dfrac{1}{x}$ que, a cada número real não nulo associa o seu inverso, percebemos que os pontos dos dois ramos do gráfico que estão à distância mínima são $A_1 = (1,1)$ e $A_2 = (-1,-1)$, sendo a distância entre eles $2\sqrt{2}$.



Para garantir que esse gráfico é uma hipérbole, precisamos encontrar dois pontos F_1 e F_2, do plano xy, que sejam os focos e mostrar que:

(i) todo ponto do gráfico da função verifica a propriedade (*);

(ii) todo ponto do plano xy que verifica (*) é tal que $y = \dfrac{1}{x}$.

Busquemos então quais pontos são razoáveis candidatos a focos. Lembrando que os focos de uma hipérbole pertencem à reta que passa pelos seus vértices e são simétricos em relação ao ponto médio do segmento determinado pelos mesmos vértices, teremos que procurar pontos da forma $F_1 = (p, p)$ e $F_2 = (-p, -p)$, com $p > 1$.

Um ponto particular do gráfico de $f(x) = \dfrac{1}{x}$, por exemplo, $Q = \left(2, \dfrac{1}{2}\right)$, pode nos ajudar a encontrar F_1 e F_2. Substituindo P por Q em (*) obtemos

$$| d(Q, F_1) - d(Q, F_2) | = 2\sqrt{2}, \text{ logo, } | d(Q, F_1) - d(Q, F_2) |^2 = 8.$$

Com $F_1 = (p, p)$ e $F_2 = (-p, -p)$, podemos escrever

$$\left| d\left(\left(2,\frac{1}{2}\right),(p,p)\right)-d\left(\left(2,\frac{1}{2}\right),(-p,-p)\right)\right|^2=(2-p)^2+\left(\frac{1}{2}-p\right)^2+(2+p)^2+$$

$$\left(\frac{1}{2}+p\right)^2-2\sqrt{\left((2-p)^2+\left(\frac{1}{2}-p\right)^2\right)}\sqrt{\left((2+p)^2+\left(\frac{1}{2}+p\right)^2\right)}=8.$$

Efetuando os cálculos necessários, obtemos:

$\frac{1}{16}+4p^4+p^2=16+2+\frac{1}{16}+4p^4-8p^2$, isto é, $18-9p^2=0$, de onde concluímos que $p=\sqrt{2}$ ou $p=-\sqrt{2}$, ou seja, os pontos $F_1=\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ e $F_2=\left(-\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$ são os candidatos a focos da hipérbole. Podemos verificar também que $d(F_1,F_2)=4$.

Vamos provar em seguida o primeiro resultado de uma série de cinco:

Resultado 1: O gráfico de $f(x)=1/x$ é uma hipérbole de focos $F_1=\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ e $F_2=\left(-\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$.

Prova do resultado: Devemos mostrar as afirmações (i) e (ii) a seguir.

(i) $\left|d(P,F_1)-d(P,F_2)\right|=2\sqrt{2}$, para todo ponto P da forma $\left(x,\frac{1}{x}\right)$.

(ii) Para todo ponto (x,y) tal que

$$\left|d\left((x,y),\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)\right)-d\left((x,y),\left(-\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)\right)\right|=2\sqrt{2},\text{ temos } y=\frac{1}{x}.$$

Efetuando os cálculos necessários, obtemos

$$\left|d\left(\left(x,\frac{1}{x}\right),\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)\right)-d\left(\left(x,\frac{1}{x}\right),\left(-\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)\right)\right|^2=8. \text{ Logo,}$$

$$\left|d\left(\left(x,\frac{1}{x}\right),\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)\right)-d\left(\left(x,\frac{1}{x}\right),\left(-\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)\right)\right|=2\sqrt{2}\text{, o que mostra (i).}$$

Por outro lado, se (x,y) é tal que

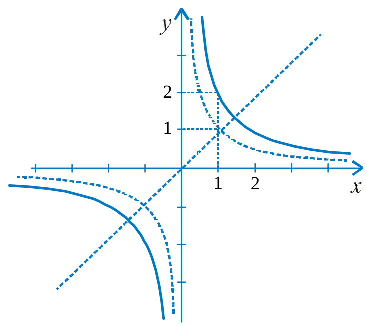
$$\left(x-\sqrt{2}\right)^2+\left(y-\sqrt{2}\right)^2+\left(x+\sqrt{2}\right)^2+\left(y+\sqrt{2}\right)^2-$$

$$2\sqrt{\left(x-\sqrt{2}\right)^2+\left(y-\sqrt{2}\right)^2}\sqrt{\left(x+\sqrt{2}\right)^2+\left(y+\sqrt{2}\right)^2}=8,$$

então, efetuando os cálculos, obtemos

$x^2+y^2=\sqrt{x^4+y^4+2x^2y^2+16-16xy}$, de onde concluímos que $xy=1$, o que mostra (ii).

I. Como é o gráfico de, por exemplo, $f_1(x)=2/x$, quando comparado com o gráfico de $f(x)=1/x$?



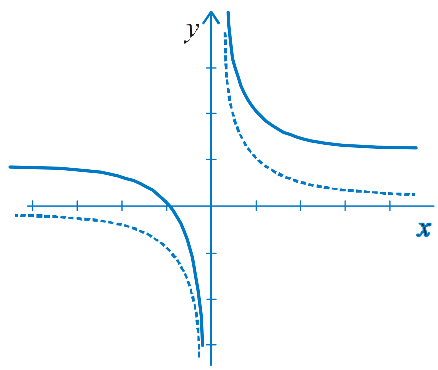
Para um mesmo valor não nulo da abcissa, o valor da ordenada na função f_1 é o dobro do valor da ordenada na função f; logo, ocorre, em relação à função inicial, uma mudança de "inclinação" com a curva se afastando da origem.

Supondo que o gráfico de $f_1(x)=2/x$ também seja uma hipérbole, vejamos qual é a ação do coeficiente 2 nos focos da nova hipérbole em comparação aos focos da primeira hipérbole, gráfico de f.

Inicialmente, observemos, pela simetria, que os vértices da nova curva são os pontos $\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ e $\left(-\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$ (de $y=x=2/x$) e a distância entre eles é 4. Em segundo lugar, observemos ser razoável que os novos focos sejam os pontos $(2,2)$ e $(-2,-2)$. De fato, no gráfico da função inicial $f(x)=1/x$, os vértices eram os pontos $(1,1)$ e $(-1,-1)$ e os focos eram $\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ e $\left(-\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$. No gráfico de $f_1(x)=\dfrac{2}{x}$, os vértices são os pontos $\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ e $\left(-\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$ – ocorreu a multiplicação pelo fator $\sqrt{2}$ nas coordenadas antigas – e então vamos considerar como candidatos a focos os pontos $(2,2)$ e $(-2,-2)$, obtidos através da multiplicação por $\sqrt{2}$ das coordenadas dos focos de $f(x)=\dfrac{1}{x}$. Logo, parece que o gráfico de $f_1(x)=\dfrac{2}{x}$ é uma hipérbole de focos $(2{,}2)$ e $(-2{,}-2)$ e com distância entre os vértices igual a 4. Esse resultado pode ser ampliado na forma mais geral abaixo, com demonstração análoga à do Resultado 1.

Resultado 2: O gráfico de $g_1(x)=k/x$, onde k é uma constante não nula, é uma hipérbole cujos focos são os pontos $\left(\sqrt{2k},\sqrt{2k}\right)$ e $\left(-\sqrt{2k},-\sqrt{2k}\right)$ e tal que a distância entre os vértices é igual a $2\sqrt{2k}$.

Vejamos agora como é o gráfico da função $g_2(x)=\dfrac{1}{x}+h$.



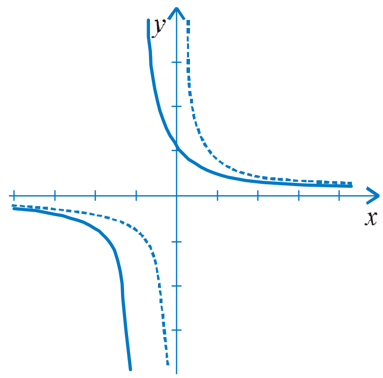
Observemos que, para um mesmo valor da variável x, a ordenada correspondente do ponto no gráfico de g_2 é igual à ordenada do ponto no gráfico de $f(x)=\dfrac{1}{x}$ somada com h. Assim sendo, não há mudança de "inclinação" na curva, mas ocorrerá alteração nas ordenadas dos focos, com adição da constante h. Esse fato é o Resultado 3, cuja demonstração é novamente análoga à do Resultado 1 e pode ser dispensada se a idéia da translação for clara.

Resultado 3: O gráfico de $g_2(x)=\dfrac{1}{x}+h$ é uma hipérbole cujos focos são os pontos $\left(\sqrt{2},h+\sqrt{2}\right)$ e $\left(-\sqrt{2},h-\sqrt{2}\right)$ e tal que a distância entre os vértices é igual e $2\sqrt{2}$.

II. Se efetuarmos uma translação horizontal através da constante m, no gráfico de $f(x)=1/x$, obtemos o gráfico da função $g_3(x)=\dfrac{1}{x+m}$.

Nesse caso, não há mudança de "inclinação" no gráfico da nova função, e as abcissas dos focos são alteradas através da adição da constante m.

Temos assim o seguinte resultado:



Resultado 4: O gráfico de $g_3(x) = \dfrac{1}{x+m}$ é uma hipérbole cujos focos são os pontos $\left(m+\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ e $\left(m-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$ e tal que a distância entre os vértices é igual a $2\sqrt{2}$.

III. Finalmente, a situação mais geral, englobando os dois últimos resultados, pode ser colocada na forma:

Resultado 5: O gráfico de $g_4(x) = h + \dfrac{1}{x+m}$ é uma hipérbole cujos focos são os pontos $\left(m+\sqrt{2}, h+\sqrt{2}\right)$ e $\left(m-\sqrt{2}, h-\sqrt{2}\right)$ e tal que a distância entre os vértices é igual a $2\sqrt{2}$.

IV. Para estudar o caso da função $g_5(x) = h + k\dfrac{1}{x+m}$, observamos que, primeiramente, ocorreu uma translação horizontal através da constante m, a seguir uma mudança de "inclinação" através da constante k e, finalmente, uma translação vertical através da constante h. Podemos, assim, enunciar o resultado seguinte:

Resultado 6: O gráfico de $g_5(x) = h + k\dfrac{1}{x+m}$ é uma hipérbole cujos focos são $\left(m+\sqrt{2k}, h+\sqrt{2k}\right)$ e $\left(m-\sqrt{2k}, h-\sqrt{2k}\right)$ e tal que a distância entre os vértices é igual a $2\sqrt{2k}$.

V. Como conclusão, podemos considerar o gráfico da função $g(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, definida no domínio $R-\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$. Em primeiro lugar precisamos garantir que $bc-ad\neq 0$, pois observamos que $bc-ad=0$ engloba os seguintes casos que não interessam na análise:

$a=b=0$, quando g é a função nula; $a=c=0$, quando $g(x)=\dfrac{b}{d}$ para todo *x;* $b=d=0$, quando $g(x)=\dfrac{a}{c}$ para todo *x*; $c=d=0$, quando não existe a função g; $bc=ad$, quando, novamente, $g(x)=\dfrac{a}{c}$ para todo *x*.

A função $g(x)=\dfrac{a\left(x+\dfrac{b}{a}\right)}{c\left(x+\dfrac{d}{c}\right)}=\dfrac{a}{c}\left[1+\dfrac{\dfrac{bc-ad}{ac}}{x+\dfrac{d}{c}}\right]=\dfrac{a}{c}+\dfrac{bc-ad}{c^2}\dfrac{1}{x+\dfrac{d}{c}}$ tem por gráfico uma hipérbole obtida a partir do gráfico de $f(x)=\dfrac{1}{x}$, fazendo as operações: translação horizontal de $-\dfrac{d}{c}$, multiplicação pelo fator $\dfrac{bc-ad}{c^2}$, e depois translação vertical de $\dfrac{a}{c}$. Assim, de acordo com o Resultado 6, os focos da curva são os pontos

$\left(-\dfrac{d}{c}+\sqrt{2\dfrac{bc-ad}{c^2}},\dfrac{a}{c}+\sqrt{2\dfrac{bc-ad}{c^2}}\right)$ e

$\left(-\dfrac{d}{c}-\sqrt{2\dfrac{bc-ad}{c^2}},\dfrac{a}{c}-\sqrt{2\dfrac{bc-ad}{c^2}}\right)$ e a distância entre os vértices é igual a $2\sqrt{2\dfrac{bc-ad}{c^2}}$.

Maria Cristina Bonomi Barufi é licenciada e mestre em Matemática pelo IME, USP, doutora em Didática pela FE, USP, docente do IME, USP, e membro da diretoria do CAEM, Centro de Aperfeiçoamento do Ensino de Matemática da USP.