UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

PAULO ROBERTO BATISTA

MODELAGEM MATEMÁTICA: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE ESTATÍSTICA

PONTA GROSSA
2013

PAULO ROBERTO BATISTA

MODELAGEM MATEMÁTICA: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE ESTATÍSTICA

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, no Curso de Mestrado Profissional em Matemática em rede nacional, Setor de Ciências Exatas e Naturais, da Universidade Estadual de Ponta Grossa.

Orientador: Prof. Dr. Airton Kist

PONTA GROSSA
2013

Ficha Catalográfica
Elaborada pelo Setor de Tratamento da Informação BICEN/UEPG

B333

Batista,Paulo Roberto
Modelagem matemática:uma proposta para o ensino de estatística / Paulo Roberto Batista.Ponta Grossa, 2013.
103f.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Área de Concentração: Matemática), Universidade Estadual de Ponta Grossa.
Orientador:Prof.Dr. Airton Kist

1. Estatística.2. Modelagem Matemática e Educação Estatística. I.Kist, Airton.II.Universidade Estadual de Ponta Grossa.Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. T.

CDD:519.5

TERMO DE APROVAÇÃO

Paulo Roberto Batista

"MODELAGEM MATEMÁTICA: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE ESTATÍSTICA"

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Ponta Grossa, pela seguinte banca examinadora.

Orientador: Prof. Dr. Airton Kist
Departamento de Matemática, UEPG/PR

Patricia Hess

Profa. Dra. Patricia Hess
Departamento de Matemática, UTFPR/PR

Profa. Dra. Luciane Grossi
Departamento de Matemática, UEPG/PR

Ponta Grossa, 11 de Abril de 2013.

DEDICATÓRIA

Aos meus familiares, que sempre me apoiaram e motivaram em mais esta caminhada e foram decisivos nesta importante conquista.

AGRADECIMENTOS

A DEUS, que dá significado à minha existência e sempre me guia em todos os momentos.

À minha MÃE, que não está mais entre nós, mas que foi a pessoa que, incondicionalmente, sempre acreditou em mim, me ouviu, confortou e motivou; enfim, é o meu exemplo de vida.

Ao meu Professor Orientador, Doutor Airton Kist, que me acompanhou em todas as etapas da elaboração deste trabalho.

Aos professores do DEMAT-UEPG que acolheram o PROFMAT na UEPG e não mediram esforços para que o programa obtivesse o sucesso devido.

Aos membros da banca examinadora, pelo tempo dedicado a este trabalho e as sugestões apontadas.

Aos colegas do Mestrado, com quem tive o prazer de trocar experiências durante todo o curso.

À Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) e ao Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), que oportunizaram este programa de pós-graduação.

Ao Governo Federal, que através da CAPES, disponibilizou as Bolsas de Estudos, facilitando em muito a dedicação ao programa.

Ao Governo do Estado do Paraná, pelo afastamento das atividades concedido para a finalização do Mestrado.

Ao Professor José Carlos Bus, diretor do Colégio Mafrense pela demonstração de amizade e companheirismo ao disponibilizar as instalações do Colégio para a aplicação deste trabalho.

MUITO OBRIGADO

“De que valeria o empenho do saber se assegurasse apenas a aquisição de conhecimentos, e não, de certo modo, e na medida do possível, o descaminho daquele que conhece”.

Foucault

RESUMO

A Estatística é considerada uma ciência que fornece métodos para a coleta, organização, descrição, análise e interpretação de dados, com o objetivo de tirar conclusões sobre o objeto de estudo e; consequentemente, auxiliar nas tomadas de decisões. Desempenha papel fundamental como embasamento para resoluções práticas de problemas nas mais diversas áreas do saber; dessa forma, de maneira direta ou indireta, está presente no dia a dia de todos os cidadãos indistintamente. Assim, cada vez mais, a Estatística deve contribuir para a formação da cidadania dos nossos alunos e de toda a sociedade, que de forma crítica e consciente precisam tomar decisões precisas e adequadas a cada problema que se apresente. Nesse contexto, os professores de Matemática têm a importante missão de criar a conexão entre os conceitos estatísticos e as realidades dos alunos, utilizando-se das tecnologias existentes e metodologias que melhor conduzam ao aprendizado consistente. Em face do exposto, este estudo tem como escopo pesquisar quais as decorrências o ambiente da Modelagem Matemática pode proporcionar para o processo de ensino e aprendizagem da Estatística do ensino médio. Portanto, os objetivos da pesquisa se configuram como: recomendar o estudo de Estatística por meio da Metodologia Modelagem Matemática na conjuntura do ensino médio e assim pesquisar e discutir os resultados que tal ambiente de aprendizagem pode proporcionar para o ensino e a aprendizagem da Estatística; defender e dar valor ao desenvolvimento, do discente, no que se refere aos aspectos críticos, da consciência da seriedade de sua participação na sociedade e da competência de integrar conteúdo escolar com o seu dia-a-dia. Para tanto, procura-se basear a investigação no que se refere à Educação Estatística, bem como apresentar a concepção de Modelagem Matemática por meio de revisão da literatura e aplicação prática de uma situação problema que sintetiza o processo de investigação estatística.

Palavras-chave: Estatística, Modelagem Matemática e Educação Estatística.

ABSTRACT

Statistics is considered a science that provides methods for the collection, organization, description, analysis and interpretation of data, in order to draw conclusions about the object of study and, therefore, assist in decision making. It plays a fundamental role as a basis for practical resolutions of problems in various areas of knowledge, in this way, directly or indirectly, it is present in the daily lives of all citizens without distinction. Thus, increasingly, the statistic should contribute to the citizenship of our students and the entire society which critically and consciously need to make accurate and appropriate decisions for every problem they face. In this context, mathematics teachers have the important task of creating a connection between the statistical concepts and realities of students, using existing technologies and methodologies that lead to a consistent better learning. In view of the above, this study has the objective to investigate what the consequences of Mathematical Modeling environment can provide to the teaching and learning of statistics in high school. Therefore, the research objectives are characterized as: recommend the study of Statistics through Mathematical Modeling Methodology juncture in high school and so research and discuss the results that this learning environment can provide to the teaching and learning of statistics; defend and give value to the development of the student, with regard to the critical aspects, awareness of the seriousness of their participation in society and the competence to integrate academic content with their day-to-day life. In order to accomplish all of that, we try to base the research in relation to Education Statistics, as well as present the design of mathematical modeling through literature review and practical application of a problem situation that summarizes the process of statistical investigation.

Keywords: Statistics, Mathematical Modeling and Statistical Education.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A influência da Estatística na vida das pessoas e nas instituições tem-se tornado cada vez mais visível, são pesquisas eleitorais, variações de preços de mercadorias, gráficos, tabelas e uma infinidades de informações às quais todos são submetidos diariamente. Neste sentido, todos os cidadãos deveriam ter conhecimentos de Estatística para que possam se integrar na sociedade atual. Esta relevância tem se repercutido no aumento do seu ensino nas escolas, que pode ser comprovado por documentos legais, tais como os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN e algumas propostas curriculares.

Instituições escolares baseadas nos mais diversos documentos relacionados à educação, como Parâmetros Curriculares Nacionais, Lei de Diretrizes e Bases (LDB), por exemplo, defendem que o currículo programático escolar deve atender às necessidades cotidianas do cidadão e proporcionar a este a utilização do conhecimento aprendido na escola em situações reais da vida diária.

Esses mesmos documentos educacionais recomendam que, nos ensinos fundamental e médio, o trabalho dos conceitos nas aulas carece ser feito de maneira a propiciar um ensino mais crítico e reflexivo para os alunos, contribuindo, pois, para a preparação de um indivíduo que atenda às características expressas nestes documentos, tão desejadas pelo profissional docente e pela sociedade.

Em relação ao ensino médio verificou-se, ao avaliar a LDB, que esta fase da educação básica deixou de ser somente uma possibilidade de profissionalização ou de preparação para o ensino superior, incidindo em uma etapa imprescindível para o exercício da cidadania. No artigo 35 da LDB estão anunciadas as intenções:

> I. a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no ensino fundamental, possibilitando o prosseguimento de estudos;
>
> II. a preparação básica para o trabalho e o exercício da cidadania do educando, para continuar aprendendo, de modo a ser capaz de se adaptar com flexibilidades a novas condições de ocupação ou aperfeiçoamento posteriores;
>
> III. o aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico;

> IV. a compreensão dos fundamentos científicos e tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática no ensino de cada disciplina. (LDB, 2004, p. 09, CD-ROM).

A reformulação do ensino médio no Brasil, estabelecida pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDBEN) de 1996, regulamentada em 1998 pelas Diretrizes do Conselho Nacional de Educação (CNE) e pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) prevê que o ensino e o aprendizado responsáveis pelo cumprimento dos objetivos acima citados, se constituem pela inserção das áreas de conhecimento, a saber: Ciências da Natureza e Matemática, Ciências Humanas e Linguagens e Códigos.

A Matemática está inserida na área "Ciências da Natureza e Matemática", juntamente com as disciplinas de Biologia, Física e Química. Essa área organiza e interliga as disciplinas, porém não as dilui nem as eliminam. Tais disciplinas se articulam nessa mesma área por possuírem em comum a investigação da natureza e dos desenvolvimentos tecnológicos, e compartilham linguagens para a representação e sistematização do conhecimento de fenômenos ou processos naturais e tecnológicos. (PCNEM, 2004).

Dessa forma, o ensino médio, etapa final da escolaridade básica, se organiza em um conjunto de competências para cada uma das áreas supracitadas. A área "Ciências da Natureza e Matemática", de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM, 2004), é organizada pelas competências: representação e comunicação, investigação e compreensão e contextualização sociocultural.

Com a finalidade de que as competências supracitadas sejam efetivadas com relevância científica e cultural bem como que haja a articulação dos conteúdos matemáticos com ideias lógicas, estruturou-se um conjunto de temas que possibilitam esse desenvolvimento ao longo das três séries do ensino médio. Esse conjunto pode ser sistematizado em três eixos norteadores ou temas estruturadores, sendo eles:

1. Álgebra: números e funções.

2. Geometria e medidas.

3. Análise de dados.

Cada eixo norteador, por sua vez, organiza-se por unidades temáticas. Dessa forma, temos a seguinte organização:

- Álgebra: números e funções - compõem-se por duas unidades temáticas: variação de grandezas e trigonometria;
- Geometria e medidas - compõem-se por quatro unidades temáticas que remetem ao estudo das geometrias plana, espacial, métrica e analítica;
- Análise de dados - é composto por três unidades temáticas, a saber: Estatística, Contagem e Probabilidade.

Todavia, os PCNEM ressaltam que a escolha por este currículo é possível e compatível com a sua proposta para esta etapa da escolaridade. O cumprimento desse programa contempla os critérios apontados nesse e não reproduz o modelo curricular de "listas de assuntos". Portanto, não se trata da única opção de trabalho para a equipe pedagógica das escolas, por isso a denominação aparentemente proposta.

Como o foco deste trabalho está no estudo de Estatística no ensino médio limitar-se-á à discussão da unidade temática Estatística que compõe parte do eixo norteador Análise de dados.

A unidade temática Estatística expressa os conteúdos desse assunto que devem ser abordados nessa etapa da educação básica. Esta se constitui por: descrição de dados; representações gráficas; análise de dados: média, moda e mediana, variância e desvio padrão.

Esse documento nacional da educação, os PCNEM, enfatiza que a Estatística deve ser tomada como um conjunto de ideias e procedimentos que permitem aplicar a Matemática em questões do mundo real, especialmente àquelas provenientes de outras áreas.

Nesse sentido, os PCNEM afirmam que cabe à Estatística, por exemplo, por meio da pesquisa estatística (que envolve amostras, levantamento de dados e análise desses), analisar a intenção de voto em uma eleição ou o possível êxito do lançamento de um produto no mercado (antes da ocorrência do fato).

Segundo Lopes (1998, p. 22), “a Estatística e a Probabilidade são temas essenciais da educação para a cidadania, uma vez que possibilitam o desenvolvimento de uma análise crítica sob diferentes aspectos científicos, tecnológicos e/ou sociais.” Nessa mesma direção, Mendes e Alves (2004, p. 01) dizem que “É na sala de aula que os estudantes adquirem habilidades que os ajudam a organizar e processar as informações que recebem da mídia e de outros meios de comunicação.”

Nesse sentido, observa-se nos PCN e em outros documentos que regem a educação nacional, a importância de preparar o estudante para lidar com as informações com dados estatísticos, tabelas e gráficos que recebe diariamente. Este fato está intimamente ligado às ideias da Educação Estatística, que se originou com as crescentes preocupações que se estabeleceram ao redor do processo de ensino e aprendizagem da Estatística.

A problemática a ser respondida configurava-se como: Que subsídios o uso da Modelagem Matemática pode proporcionar para a aprendizagem de conteúdos de Estatística no ensino médio?

O presente trabalho está organizado em 8 seções. A seção 1 discorre sobre a Educação Estatística, apresenta um apanhado histórico desde os primeiros relatos sobre o termo “Estatística”, até o ensino da Estatística na era atual e suas principais aplicações. Na seção 2 a Modelagem Matemática é analisada a partir de diversos autores; a seção 3 traz a fundamentação teórica que embasou a presente pesquisa. Já na seção 4, estão apresentadas as orientações e legislação vigente sobre como o assunto Estatística deve ser conduzido no processo de ensino e aprendizagem no Ensino Médio, também traz a análise de três livros, que abordam o assunto Estatística, atualmente utilizados em escolas públicas e privadas e recomendados pelo MEC. A seção 5 apresenta as principais definições utilizadas para o ensino da Estatística no Ensino Médio, também são exemplificados os diversos tipos de gráficos e suas representações. A seção 6 descreve a atividade prática proposta, que é o ensino da Estatística utilizando-se da Modelagem Matemática, bem como os resultados obtidos. Na seção 7, apresentamos várias considerações e reflexões sobre a viabilidade da Modelagem Matemática como metodologia alternativa ao ensino tradicional da Estatística e; a seção 8 apresenta nossas considerações finais.

1. EDUCAÇÃO ESTATÍSTICA

Diante das novas exigências do mundo moderno, em que cada cidadão precisa constantemente ler e interpretar linguagens e códigos nos meios de comunicação e nas mais diversas organizações, o ensino da Estatística se torna cada vez mais importante para a cidadania plena. Dessa forma, a Estatística deve ser inserida nas escolas em todos os níveis de ensino, trazendo aos nossos jovens, uma maior compreensão de suas realidades.

1.1 Breve História da Estatística

A Estatística é um ramo do conhecimento humano que surgiu da necessidade de manipulação de dados coletados e de como extrair informações de interesse desses dados. Assim pode-se dizer que a Estatística tem por objetivo obter, organizar e analisar informações cuja finalidade é descrever e explicá-los, além de determinar possíveis correlações, enfatizando a produção da melhor informação plausível a partir dos dados disponíveis. A Estatística é a ciência dos dados, sendo esses, quantitativos ou qualitativos inseridos em um contexto.

Etimologicamente a palavra Estatística vem de “status”, expressão latina que define “sensu lato” o estudo do estado, em virtude de as coletas de dados na antiguidade terem se constituído essencialmente de levantamentos promovidos pelo Estado para a realização dos censos. O censo era, originalmente, conhecido pelos cristãos como o recenseamento dos judeus ordenado pelo Imperador Augusto.

Os fatos, muitas vezes, se perdem na história. Existem registros do uso da Estatística na China desde a antiguidade e também pelas civilizações pré-colombianas dos maias, astecas e incas.

Com o renascimento, houve um despertar pelo interesse na coleta de dados estatísticos, principalmente por suas aplicações na administração pública. A orientação descritiva dos estatísticos italianos, por exemplo, foi retratada pela publicação, em 1561, da obra de Francesco Sansovini (1521 - 1586). Cabe salientar que; na mesma época, houve o reconhecimento por parte da Igreja Católica

Romana da importância dos registros de batismos, casamentos e óbitos, tornados compulsórios a partir do Concílio de Trento (1545 - 1563).

Há indícios de que o termo "Estatística" tenha sido introduzido na Alemanha, em 1746, pelo economista alemão Gottfried Achenwall (1719 - 1772), professor da Universidade de Göttingen. Contudo, outros indicadores apontam que a palavra Estatística foi proposta pela primeira vez no século XVII por Schmeitzel, na Universidade de Lena, e posteriormente adotada por Achenwall. De acordo com Memória (2004), Achenwall nada mais fez do que dar melhor sistematização e definição à mesma orientação descritiva usada pelos estatísticos italianos.

Em 1662, na Inglaterra, John Graunt (1620 – 1674) publicou um livro intitulado "Natural and Political Observations Mentioned in a Following Index and Made upon the Bills of Mortality", culminando na primeira tentativa de extrair conclusões de dados numéricos, que foi denominado como "Aritmética Política". Com a evolução é o que hoje chamamos de demografia. Esse fato é apontado por alguns estudiosos como um marco inicial da Estatística, de acordo com Memória (2004):

> Foi William Petty [...] contemporâneo e continuador de Graunt, quem denominou de Aritmética Política à nova arte de raciocinar por meio de dados sobre fatos relacionados com o governo. Em 1683, ele publicou sua obra Five Essays on Political Arithmetic e sugeriu que fosse criada uma repartição de registro de estatísticas vitais, mas isso só se consolidou no século 19, com o Dr. William Farr (1807 – 1883), contribuidor original da estatística médica. (MEMÓRIA, 2004, p. 14).

Outros estudiosos contribuíram para o que atualmente chamamos de História da Estatística, colaborando para a consolidação da mesma. A Revista do Instituto Internacional de Estatística, cuja sede localiza-se na cidade de Voorburg na Holanda, cita cinco homens que já receberam a honra de serem chamados de fundadores da Estatística, sendo eles: Hermann Conring (1606 - 1681)[1], Gottfried Achenwall (1719 - 1772), Johann Peter Süssmilch (1707 - 1767)[2], John Graunt (1620 - 1674) e William Petty (1623 - 1687).

---

[1] Intelectual alemão que fez contribuições significativas para o estudo de medicina, de políticas e de legislações. Em 1620, aos 14 anos de idade, ele começou a lecionar filosofia na Universidade alemã de Helmstedt.

[2] Considerado um dos pais da Econometria devido sua capacidade de trabalhar com a lei dos grandes números. Sua obra é amplamente referenciada por Thomas Robert Malthus (1766 – 1834).

Citamos também outros colaboradores para a consolidação da Estatística, como por exemplo o astrônomo inglês Edmond Halley (1656 - 1742), criador da primeira tábua de sobrevivência, elemento básico para o cálculo de seguros de vida, e Richard Price (1723 - 1791) que editou um famoso trabalho “Ensaio através da resolução de problemas na teoria de chances” no qual contém o teorema de Bayes, um dos teoremas mais fundamentais da teoria das probabilidades.

Em relação ao desenvolvimento da teoria das probabilidades, por meio dos jogos de azar, mencionamos Niccolò Fontana Tartaglia (1499 - 1557), Girolamo Cardano (1501 - 1576), seguidos por Galileu Galilei (1564 - 1642) e, posteriormente, os estudos feitos por Blaise Pascal (1623 - 1662) e Pierre de Fermat (1601 - 1665). Também é relevante e necessário citarmos os estudos feitos pela família Bernoulli que trouxe muitas contribuições no âmbito da Teoria das Probabilidades, instituindo o que hoje conhecemos por “lei fraca dos grandes números”, também conhecida como “o primeiro teorema fundamental de probabilidade”.

No século XIX, Gauss chega à curva de erros, denominada curva normal e que ficou conhecida como “Curva de Gauss”. A figura 1.1 mostra o exemplo de uma curva de Gauss utilizada para análise do quociente de inteligência (QI).

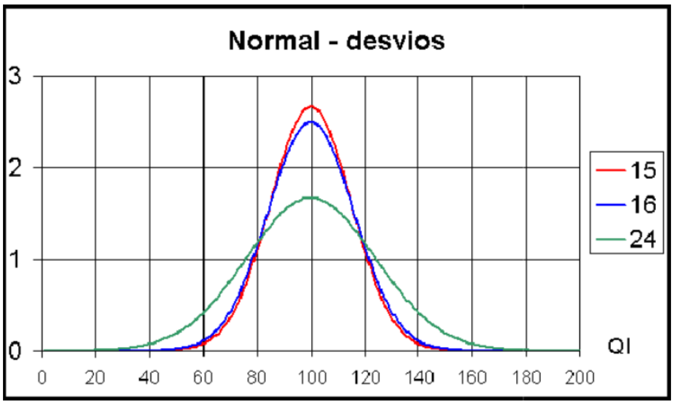


Figura 1.1: Exemplo de uma curva de Gauss, análise do quociente de inteligência com QIs de média 100 e desvios padrões; 15, 16 e 24.

Um dos períodos mais marcantes para a constituição da História da Estatística foi entre o final do século XIX e início do século XX, com a criação, na Inglaterra, da Escola Biométrica que teve como seu principal representante Karl Pearson (1857 - 1936). Este estudioso contribuiu muito para o desenvolvimento da Estatística. Foi quem fundou o Departamento de Estatística Aplicada na University

College London em 1911, o primeiro departamento universitário dedicado à Estatística em todo o mundo.

Nesse período predominou o estudo das técnicas de correlações e ajustamento de curvas. Segundo Batanero (2001, p. 07), "[...] é indiscutível que o século XX foi o século da Estatística, que passou a considerá-la uma das ciências metodológicas fundamentais e base do método científico experimental."

Nesse espaço de tempo surgiu outro grande nome da Estatística, Ronald Aylmer Fisher (1890 - 1962), que resolveu e mostrou alguns propósitos de Pearson. Fisher é considerado um dos maiores cientistas do século XX e fez contribuições teóricas fundamentais à Estatística, além de ter sido um ilustre geneticista. Essas contribuições feitas por Fisher tiveram início quando ele ainda era estudante universitário, em 1912, com a publicação de um artigo que versava sobre o método da verossimilhança no ajustamento de curvas de frequências, tendo o nome de probabilidade inversa, que mais tarde, em 1922, veio a ser corrigido.

Assim, se tecem conflitos na literatura. Alguns estudiosos atuais consideram Fisher como sendo o fundador da Estatística Moderna e outros, como sendo Pearson. Memória (2004), diz que Calyampudi Radhakrishna Rao[3] considerou Fisher como o fundador da Estatística Moderna, Fisher foi não somente o maior estatístico de sua época, mas para muitos que conheceram sua obra monumental, é ainda o maior estatístico de todos os tempos. Ao longo de sua eminente carreira obteve o grau de Doutor pela Cambridge University em 1926 e recebeu várias honrarias e distinções acadêmicas, entre outras, o título de Fellow of the Royal Society (F. R. S.) em 1929, e o título honorífico de Sir, em 1952.

Esses fatos históricos são de grande importância para a era da Estatística que vivemos atualmente. O reflexo desses estudos e a dedicação desses estudiosos são percebidos nos dias de hoje. Os censos são um bom exemplo disso. Nesse viés, imbuídos das informações desse breve resumo histórico, que julgamos ser relevante para a constituição deste trabalho, apresentamos na próxima seção um esboço da

[3] Professor emérito da Universidade Penn State (Pennsylvania State University). Trabalhou no Instituto Indiano de Estatística. Fez um mestrado em Matemática pela Universidade de Andhra e outro em Estatística pela Universidade de Calcutá. Seu trabalho esteve relacionado com análise multivariada, estimativa, inferência estatística e modelos lineares, geometria diferencial e biometria. Recebeu dezenas de medalhas, citações, prêmios e outras honrarias por suas contribuições à Ciência e à Estatística.

situação atual da Estatística, discorrendo um paralelo entre os fatos históricos e atuais, trazendo à tona a Estatística na era digital e as indicações de sua inserção no âmbito educacional.

1.2 A era atual da Estatística

Olhando para a História da Estatística e articulando com a era atual, percebemos que certos fatos permanecem, com aperfeiçoamentos, e que outros foram surgindo nesse caminho.

Os censos, que tiveram contribuição em toda a História da Estatística, ainda conservam-se na sociedade moderna. Hoje, no âmbito nacional, contamos com uma fundação pública da administração federal brasileira para a realização dos mesmos. Criada em 1934 e instalada em 1936 com o nome de Instituto Nacional de Estatística, passou a assumir o nome atual: Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (www.ibge.gov.br), mais conhecido pela sigla IBGE desde 1938. Sua sede está situada na cidade do Rio de Janeiro – RJ. O primeiro censo realizado no Brasil foi em 1872 ainda na época da família imperial e atualmente é realizado em média a cada dez anos.

A Estatística vem, ao longo do seu desenvolvimento, prestando uma grande contribuição à sociedade, pois além de fornecer métodos para organizar, resumir e comunicar dados, também proporciona condições de fazer inferência através de observações realizadas por um universo maior de observações potenciais.

Há três áreas entrelaçadas de interesse para a Estatística: descrição e resumo de dados (usada, por exemplo, para entender, relatar e discutir taxas de desemprego, índices de mortalidade, custo de vida, alturas de alunos de uma determinada sala de aula); teoria das probabilidades (associada a situações que envolvem o acaso) e análise e interpretação de dados amostrais (inferência).

A compreensão do significado dos dados disponíveis por simples inspeção de seus valores numéricos nem sempre é possível. Todavia, o sucesso da decisão dependerá da habilidade em compreender as informações contidas nesses dados.

Podemos dizer que a aplicação da Estatística apresenta sua melhor forma quando é combinada com o julgamento experiente e o bom senso de quem a aplica.

Notamos que é cada vez maior a utilização dos levantamentos estatísticos nas diversas áreas do conhecimento. Segundo Loureiro et al. (2000) existe uma manifestação generalizada e um reconhecimento de problemas de natureza Estatística nos vários ramos científicos, seja na indústria, seja em atividades governamentais, e isso faz crescer o interesse pela Estatística.

É relevante ressaltar que nos dias atuais não é suficiente que as pessoas saibam apenas ler e escrever. A sociedade globalizada demanda cada vez mais de pessoas que saibam analisar e tomar decisões sobre informações apresentadas dominantemente por meio de tabelas, gráficos e estatísticas. Essa mesma sociedade está cada vez mais usufruindo das ferramentas da tecnologia, principalmente da tecnologia informática. Desse modo ela exige, também, pessoas que tenham conhecimento básico nessa área, considerando, pois, os avanços tecnológicos aos quais somos submetidos.

A informática tornou-se um importante instrumento de preparo do jovem para sua vida profissional. Tornou-se, também, base de decisão para optar por quem assume uma vaga disponível de um determinado emprego. É provável que o candidato que possui conhecimentos básicos de informática tenha vantagem sobre o que não possui conhecimento algum nessa área. Dessa forma, a sociedade aos poucos vai impondo a necessidade de indivíduos conhecedores de informática com a mesma importância de saber ler, escrever e interpretar textos e gráficos. Segundo Borba e Penteado (2001), cada vez mais a tecnologia informática interfere no mercado de trabalho. Essa afirmação também pode ser estendida para o âmbito educacional.

No que se refere à Estatística, as tecnologias de informação e comunicação (TIC) exercem um papel fundamental em relação ao seu ensino. Segundo Ponte et al. (2006, p.106), “As TIC permitem o tratamento de dados reais, em vez de trabalhar apenas com amostras de pequena dimensão, com valores escolhidos artificialmente de modo a proporcionar cálculos simples.” Esses mesmos autores se referem, também, ao uso da Internet como um excelente recurso para o ensino e aprendizagem de conceitos de Estatística.

Branco (2000) afirma que as novas tecnologias se constituem como elementos indispensáveis na prática desse campo, não se tratando apenas de uma ferramenta útil para o trabalho com Estatística, e ainda acrescenta que no contexto estatístico não se pode ignorar elementos como a presença de dados, a essencial intervenção dos computadores e certa arte de análise de dados.

Outrossim se estabelece um “enlace” entre Informática e Estatística, dado a importância que ambas apresentam. Nesse sentido, diversas são as planilhas e os softwares estatísticos encontrados e que são utilizados não apenas para o desenvolvimento de aulas práticas, mas também para a obtenção de resultados estatísticos de pesquisas realizadas por alunos. Exemplo desses softwares podemos citar a Planilha Eletrônica do Excel, o R[4], o Sisvar[5], o SAS[6] e o Minitab[7].

No ensino superior, a Estatística é ministrada em praticamente todos os cursos, com ênfase na Estatística Descritiva e em questões relacionadas com a Inferência Estatística. A Estatística Descritiva preocupa-se com a coleta, a organização e a apresentação dos dados, sem nenhuma preocupação com a inferência que tem como interesse a análise e a interpretação de dados amostrais.

Devido aos fatos acima descritos e como consequência, o crescente desenvolvimento da Estatística na educação básica e na educação superior, passou-se, então, a ter uma “grande” preocupação com o ensino e aprendizagem da Estatística, dando origem a Educação Estatística no âmbito da Educação Matemática.

Instituições escolares, baseadas nos mais diversos documentos relacionados à educação (PCN, LDB, por exemplo), defendem que o currículo escolar precisa atender as necessidades cotidianas do cidadão e utilizar o conhecimento aprendido na escola em situações reais da vida diária.

[4] R é uma linguagem e um ambiente para computar dados estatísticos e gráficos, é um software livre que fornece uma grande variedade de técnicas estatísticas e gráficas.

[5] Sisvar é um programa de análises estatísticas e planejamento de experimentos. Foi desenvolvido principalmente com finalidades didáticas.

[6] O sistema SAS – *Statistical Analysis System* – consiste em um poderoso sistema de análise de dados e linguagem de programação, com amplas aplicações em Matemática e Estatística. O sistema tem sido um dos mais utilizados no mundo todo em análise de dados em geral.

[7] O Minitab é um software estatístico com uma gama considerável de recursos estatísticos e bastante utilizado nos cursos de graduação de muitas faculdades no Brasil e no mundo.

1.3 Educação Matemática e Educação Estatística: articulações

Comumente ouvimos relatos advindos de docentes de Matemática sobre a(s) dificuldade(s) encontrada(s) pelos estudantes em relação a aspectos que tecem essa disciplina. Corroborando com essa ideia, escutamos de alunos, seja da educação básica ou da superior, os "problemas" que eles enfrentam ao estudar no contexto da Matemática. Assim, o processo de ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos frequentemente é considerado como difícil ou até mesmo sem utilidade. Segundo Perez (2004, p.251), "[...] a falta de interesse para estudar Matemática pode ser resultante do método de ensino empregado pelo professor, que usa linguagem e simbolismo muito particular, além de alto grau de abstração."

Preocupações e inquietações neste contexto contribuíram para a consolidação da Educação Matemática como uma área de conhecimento e de pesquisa das ciências sociais e humanas que investiga política públicas da educação, reflexões sobre avaliação e; entre outros, o ensino e aprendizagem da Matemática. Deste modo, essa área de conhecimento não se fundamenta apenas como campo profissional, mas também como uma área em cujas atuações se estabelecem como prática e pesquisa teórica.

Para Bicudo e Garnica (2002, p.39), "o processo de ensino e de aprendizagem de Matemática envolve vários elementos. Práticas, conceitos, abordagens e tendências fazem parte desse cenário [...]". A Educação Matemática se preocupa com o significado que a Matemática assume por meio de seu ensino e de sua aprendizagem, entre outros fatores ligados a esse processo.

> Educação Matemática será, pois, expressão vaga se não for concebida como preenchendo-se, reflexiva e continuamente, dos significados que vêm da prática. A Educação Matemática dá-se como uma reflexão-na-ação. Ação que ocorre num contexto no qual vivemos com o outro: compartilhando vivências. Exige-se, portanto, dos que se lançam à iniciativa de perscrutar os domínios dessa região do conhecimento, o conviver com a perspectiva do outro, dialogicamente exercitando o respeito aos trabalhos coletivos (BICUDO; GARNICA, 2002, p. 40).

Para Fiorentini e Lorenzato (2007, p. 05), a Educação Matemática se caracteriza "como uma práxis que envolve o domínio do conteúdo específico (a matemática) e o domínio de ideias e processos pedagógicos relativos à transmissão/assimilação e/ou à apropriação/construção do saber matemático escolar.” Nesse sentido, esses mesmos autores afirmam que os objetivos da Educação Matemática são múltiplos e difíceis de serem categorizados, variando com o contexto de cada investigação. Contudo, podem ser classificados em dois objetivos fundamentais, a saber: o de caráter pragmático que se constitui como aquele que visa à melhoria da qualidade do ensino e da aprendizagem da Matemática e o de caráter científico que visa o desenvolvimento da Educação Matemática como campo de investigação e de produção de conhecimento.

Essas apreensões se estendem aos órgãos que elaboram os diversos documentos que regem a educação, seja nacional ou internacional, em seus vários níveis. Consultando os PCN, por exemplo, podemos perceber que esse documento educacional reforça que, nos diferentes níveis de ensino, é preciso enfocar estratégias que proponham uma interpretação dos conceitos matemáticos, tornando o ensino e a aprendizagem mais significativa. Enfatiza o desenvolvimento de um processo que possibilite ao aluno uma compreensão mais intensa do conteúdo, podendo relacioná-lo com outros objetos de estudo ou com seu cotidiano, estando, assim, apto a utilizá-lo em outras situações distintas da sala de aula.

No trabalho “Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos”, os educadores matemáticos Dario Fiorentini e Sergio Lorenzato em Fiorentini e Lorenzato (2007), esboçam o percurso da Educação Matemática e dividem sua concretização em quatro fases: fase 1 (década de 1970), intitulada como a etapa de gestação da área como campo profissional; fase 2 (década 1970 e início da década de 1980), chamada de fase de nascimento da Educação Matemática; fase 3 (década de 1980), como sendo a fase em que surgiu a necessidade de uma comunidade de educadores matemáticos; e a fase 4 (década de 1990), intitulada como a etapa de emergência de uma comunidade científica em Educação Matemática.

Constituindo os relatos dos acontecimentos da fase quatro, os autores apresentam o período em que a Educação Matemática passou a ser reconhecida pela Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação (Anped) quando esta aprovou a criação de um grupo de trabalho da área. Nesse período surgiram outras e novas linhas de investigação em Educação Matemática, entre elas, a Educação Estatística. Campos (2007) afirma que no contexto escolar a Estatística se compõe como uma parte da Matemática. Em conformidade com essa ideia e parafraseando Batanero (2001), Duarte (2004), certifica que “a Estatística faz parte integrante do currículo de Matemática de todos os níveis de ensino na maioria dos países desenvolvidos.”

Campos (2007) assegura que nessa linha de investigação, apesar do objeto de estudo ser a Estatística, o foco é a Educação da qual se originou a conjugação Educação Estatística. Nos anos 90, no contexto da Educação Estatística, assistiu-se o início de um movimento em torno de uma preocupação com o desenvolvimento conceitual e com o uso de tecnologia nos processos de aprendizagem. Entretanto, o uso do termo e as pesquisas direcionadas ao ensino e à aprendizagem dos conceitos de Estatística são recentes, como nos mostra o pequeno número de pesquisas que versam sobre essa temática.

A Educação Estatística preocupa-se tanto com o procedimento quanto com as discussões que os resultados que a manipulação de dados qualitativos e quantitativos venham gerar. Dessa forma se constitui como um campo de investigação que tem como finalidade o ensino e aprendizagem dos conceitos estatísticos de forma sólida e consistente, para efetivamente contribuir à aprendizagem significativa dos alunos.

2. MODELAGEM MATEMÁTICA

Um modelo matemático é uma descrição de um fenômeno usando conceitos, definições e linguagem matemática. A Modelagem Matemática atua exatamente no processo de desenvolvimento deste modelo; cada vez mais usado, em praticamente todas as áreas do conhecimento. Um modelo matemático ajuda a analisar um fenômeno, explicá-lo e fazer previsões sobre possíveis comportamentos das variáveis pesquisadas.

2.1 Considerações

O movimento da Modelagem Matemática na Educação Matemática teve início no Brasil na década de 70, estando ligado aos trabalhos de alguns professores do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas-SP. Esses professores utilizavam a Modelagem em trabalhos de Iniciação Científica e em algumas disciplinas da área da Matemática Aplicada.

No âmbito educacional, a Modelagem possui diversas vertentes. Olhando pela lente dos educadores matemáticos notamos que alguns defendem a Modelagem como estratégia pedagógica (Araújo, 2002; Bassanezi, 2002), outros como um ambiente de aprendizagem (Barbosa, 2001; Jacobini, 1999) e outras definições relacionadas surgem nesse campo. Estes significados atribuídos para a Modelagem, assim o são a partir das experiências de cada indivíduo aliado à literatura que o embasa.

Contudo, Biembengut e Hein (2007, p.35) afirmam que “A Modelagem Matemática não possui um estatuto definido [...]” e ainda acrescentam que existem regimentos internos na forma de esquemas nos quais se destacam os autores Bassanezi, Biembengut, Barroso, Golbarg e Luna, entre outros. Cada qual com sua visão adequada àquilo que lhe interessa, seja no ensino, na pesquisa ou na aplicação.

Esses pesquisadores trazem à tona a ideia da variedade das concepções de Modelagem e isso está ligado à forma como as atividades são regidas, ao contexto em que estão inseridos os estudantes, finalmente à abordagem dada pelo professor e pelos alunos. Nesse sentido, o docente não necessita se prender a um roteiro, ele caminha livre acatando a realidade social e cultural de seus alunos, e assim, fazendo Modelagem segundo a disponibilidade que lhe é concedida.

Vista por essa abordagem pedagógica, verifica-se que as diferenças que servem de base entre os entendimentos atribuídos à aplicação dessa tendência em sala de aula se concentram principalmente em relação à escolha do tema, à necessidade ou não do conteúdo matemático (a priori) e na disposição e à operacionalização das atividades.

Apesar disso, essas concepções de Modelagem estão fortemente ligadas à ideia de trabalhar com "problemas da realidade" por meio da Matemática e de construir um modelo ou de aproveitar um modelo já pronto para pesquisar uma circunstância de interesse.

Chaves e Espírito Santo (2008) asseguram que a Modelagem causa polêmica mesmo após vinte anos de pesquisa no Brasil. Com isso entendemos que essa perspectiva gera discussões teóricas e provoca controvérsias em relação às concepções adotadas. Esses autores acrescentam que as divergências e convergências em Educação Matemática em relação a essa tendência admitem uma ligação entre a forma de conceber algo e de colocá-lo em prática ou na forma como se cria e organizam atividades (da natureza de Modelagem) para a sala de aula. Assim, Barbosa (2004) alerta que:

> Muitas vezes, Modelagem é conceituada, em termos genéricos, como a aplicação de matemática em outras áreas do conhecimento, o que, a meu ver, é uma limitação teórica. Dessa forma, Modelagem é um grande 'guarda-chuva', onde cabe quase tudo. Com isso, não quero dizer que exista a necessidade de se ter fronteiras claras, mas de se ter maior clareza sobre o que chamamos de Modelagem. (BARBOSA, 2004, p. 73).

Corroborando com Barbosa, torna-se relevante esboçar neste momento as fronteiras claras (as características da Modelagem que a diferencia de outros ambientes de aprendizagem, como por exemplo, o ambiente de aprendizagem baseado no paradigma do exercício ou na resolução de problemas) do que consideramos Modelagem Matemática, nessa investigação.

Barbosa (2003, p. 02) ao referenciar Niss (2001) sustenta que existe "uma contínua necessidade de clarificar conceitos, objetivos e perspectivas relativas às aplicações e modelagem na educação matemática [...]."

Consideramos, portanto a necessidade de esclarecer como estamos adotando a Modelagem nesta pesquisa e de situar o leitor sobre o que chamamos de Modelagem neste caso. Nesta vertente, cientes de que em uma investigação no âmbito da Modelagem não é possível satisfazer todas as concepções existentes, em face da variedade de entendimentos que encontramos na área, apresenta-se, pois, uma revisão na literatura referente à Modelagem cuja finalidade é, na sequência, situarmos a pesquisa.

2.2 Diversidades

Incursionamos inicialmente pelas compreensões de Jonei Barbosa. Este autor entende a Modelagem “[...] como um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da Matemática, situações com referência na realidade.” (Barbosa, 2000, p.31). Entendemos que o termo indagar refere-se ao ato de criar perguntas ou problemas e questioná-los, investigá-los. Refere-se a uma contínua busca, uma seleção de dados, a organização destes e a manipulação de tais informações, seguidas de interpretações e reflexões.

Barbosa (2000), no que tange essa “definição”, a considera como uma forma de determinar o que entende por uma atividade de Modelagem, demarcando suas fronteiras em relação a outros ambientes, como resolução de problemas, por exemplo. Contudo, esse autor admite que:

> Não devemos “engessar” a configuração da Modelagem na Educação Matemática, pois isto pode resultar num afastamento da proposta daqueles que podem de fato produzir alterações na sala de aula de matemática, os professores. (...) Considerar a Modelagem através de configurações diferentes representa um avanço em sua viabilidade. (BARBOSA, 2000, p. 59).

Jacobini (2004) é outro pesquisador que usufrui da Modelagem em seus trabalhos e na sua prática de sala de aula. Assim coloca sua posição:

> Através da modelagem, problemas reais são transformados em uma linguagem matemática e resolvidos segundo teorias disponíveis. As soluções encontradas são então adaptadas à linguagem do mundo real de onde esses problemas são extraídos e as validações dessas soluções são comprovadas (ou não) a partir dos dados disponíveis. (JACOBINI, 2004, p. 57).

O autor considera a Modelagem como um instrumento de ação política na sala de aula. Nessa direção, Jacobini afirma: “Quando trabalho com projetos de modelagem na sala de aula prefiro o enfoque político, relacionado, de um lado, com a conscientização política do estudante [...] e, do outro lado, com uma ação política que se concretiza por meio do seu envolvimento com a comunidade” (fórum CVM, 23/05/2007).

Para Monteiro e Pompeu Jr. (2001), a modelagem matemática pressupõe um ciclo de atuação que parte de uma realidade, cria um modelo que procura explicar e entender aquela realidade e, com os resultados obtidos, volta-se a ela para validar/reformular o modelo criado.

Continuando nossa consulta, nos deparamos com Araújo (2007) quando ela aponta, baseada em pesquisa anterior, que constatou a existência de duas características destacáveis em Modelagem, sendo elas: a multiplicidade de perspectivas de Modelagem Matemática e a transformação dessas perspectivas no contexto da Educação Matemática.

Essa autora levanta a hipótese de que a existência de diferentes perspectivas de Modelagem na Educação Matemática poderia ser uma consequência da compreensão que se tem do que vem a ser problema da realidade. Em busca da investigação da hipótese estabelecida, Araújo (2007) incursiona pela Filosofia da Matemática e conclui:

> [...] não basta estudar os relatos apresentados pelos pesquisadores, nem considerar a ‘definição’ de Modelagem Matemática que eles apresentam, para concluir, de forma decisiva, qual é a relação entre Matemática e realidade que está subjacente a cada perspectiva. (Araújo, 2007, p. 30).

Nessa direção, notamos que não há como seguir uma “receita” para se desenvolver um trabalho de Modelagem. Muitas vezes, é preciso adaptar o processo ao contexto no qual a atividade está inserida. Nesse sentido se fazem presentes concepções semelhantes com alguns aspectos que se diferem.

Após esta revisão literária, inferimos que apesar das diversas concepções encontradas para a Modelagem no contexto escolar, considerando suas intersecções e os aspectos em que se diferem, acreditamos que esse processo pode ser desenvolvido em todos os níveis de ensino como estimulador dos alunos na realização de investigações.

A Modelagem, devido suas várias vertentes, nos permite criar e ousar em sala de aula e isso é bom, pois, dessa forma, o professor não se vê preso dentro de uma concepção da qual não pode extrapolar para continuar fazendo a Modelagem. Muitas vezes essa riqueza de atividades de Modelagem proporciona uma oscilação por essas diferentes compreensões.

Nesta corrente, após tais considerações que refletem os pensamentos de vários autores, apresentaremos, portanto, na seção seguinte como a Modelagem foi abordada por nós nesta investigação.

2.3 Modelagem sob a perspectiva desse trabalho

Como delineado anteriormente, diante da rica diversidade de concepções sobre a Modelagem, existe a necessidade de pontuar a visão de Modelagem estabelecida nessa investigação. Entre os pontos comuns sobre o que se configura um trabalho de Modelagem podemos citar Biembengut e Hein (2007, p. 36) quando asseguram que “O ato de modelar surge de uma inquietude. De uma situação-problema.”

Além disso, notamos também que as concepções de Modelagem convergem para a noção de trabalhar um problema da realidade, visando maior interesse por parte dos estudantes. Todavia, como ressaltam diversos pesquisadores com os quais concordamos, nem sempre um problema da realidade muito discutido no momento é, na verdade, de interesse do aluno.

Biembengut e Hien exemplificam essa situação contextualizando que o tema “suínos” não seria interessante para o trabalho de Modelagem durante todo um bimestre para estudantes que vivem em uma determinada região conhecida pela criação de porcos e que parte desses estudantes passa o dia trabalhando com suínos.

O interesse do aluno terá grandes implicações no decorrer da realização das atividades. A Modelagem, para nós, trata-se de um ambiente de aprendizagem que visa à melhoria do ensino e da aprendizagem, no que tange à Matemática. Para que esse propósito seja alcançado pelo professor é preciso que os alunos se envolvam na investigação de um tema que lhes interessa. Nesta investigação a Modelagem foi explorada com esse intuito, ou seja, investigar e discutir quais implicações tal estratégia pedagógica pode oferecer para o processo de ensino e aprendizagem da Estatística no ensino médio.

Pelo que já foi colocado sobre nossa concepção de ambiente de aprendizagem, baseado em Skovsmose (2000), ao adotar a Modelagem na sala de aula transformamos um ambiente de aprendizagem que tínhamos (conhecido) em um novo cenário, um ambiente de aprendizagem fundamentado na Modelagem.

3. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E DESCRIÇÃO DO TRABALHO

Nesta seção, após análise de vários autores, fundamentamos a hipótese da utilização da Modelagem Matemática na sala de aula. Nota-se que quando o professor se dispõe a transformar sua aula tradicional, seguindo um bom planejamento de ações, a distância entre teoria e prática se reduz substancialmente, favorecendo o efetivo aprendizado.

3.1 Dualidades

O foco deste trabalho se concentra em investigar as implicações da Modelagem Matemática, enquanto ambiente de aprendizagem, para os processos de ensino e de aprendizagem da Estatística no contexto do ensino médio. Uma das características da nossa pesquisa parece-nos bastante peculiar e, portanto, apresentaremos, nesse momento, uma discussão sobre a mesma.

Trata-se de que nessa investigação o professor assume, além de seu papel tradicional de educador, o papel de pesquisador ao pesquisar em sua prática. Por isso falamos em uma dualidade que se constitui essa dupla "função" desse profissional ocorrendo concomitantemente no espaço escolar.

Refletindo à luz da literatura pertinente em relação à constituição do professor como pesquisador, podemos notar que alguns pesquisadores (Campos, 2007; Ludke, 2004; Fiorentini, 2006; Ponte, 2003) defendem a pesquisa na prática da sala de aula do professor, sendo o educador também o pesquisador. Como exemplo, citamos Campos (2007) ao assegurar que

> [...] a figura do professor-pesquisador auxilia a aproximação da academia com a sala de aula, trazendo ganhos para ambos na medida em que oferecem, em sua interação, suporte para o trabalho do professor e a geração de um conhecimento importante, que nasce da problematização do ensino em sua prática do dia-a-dia. (CAMPOS, 2007, p. 32).

É essencial esclarecer que não estamos apontando que o professor não se configura como um pesquisador em sua prática. Pelo contrário, acreditamos que a cada aula, ou situações similares, o professor pode se constituir como um pesquisador e consequentemente como um profissional reflexivo sobre essa prática.

Campos afirma que Stenhouse (1975) e Elliot (1991), “defenderam que os próprios professores estariam mais capacitados para investigar os problemas educacionais, enfatizando a ideia de superação da distância entre as pesquisas acadêmicas e a escola.” (Campos, 2007, p. 30). Ao corroborar com a defesa desses estudiosos inferimos que, nesse sentido, o professor ocupa um lugar privilegiado quando se pesquisa nesse contexto. Entretanto, mais adiante Campos (2007) coloca que esses dois pesquisadores

> [...] ressaltaram que a valorização da reflexão dos próprios professores não implica em rejeitar a perspectiva acadêmica de produção de conhecimentos no campo educacional. Não é desejável que as investigações se prendam às questões práticas, mas busquem na visão acadêmica um subsídio para identificação e análise dos problemas pedagógicos. (CAMPOS, 2007, p. 30).

Podemos afirmar que a situação ideal, tanto para a melhoria do ensino e aprendizagem quanto para a prática pedagógica, é a interlocução entre professores e pesquisadores acadêmicos, em um movimento de compartilhamento de conhecimentos e experiências. Julgamos que isso acarretaria apenas benefícios, principalmente para os frequentadores de uma sala de aula.

De fato, não podemos omitir que alguns estudiosos defendem a ideia do pesquisador ter certo distanciamento do seu foco de pesquisa para que possa auxiliá-lo tanto na coleta quanto na análise dos dados. Asseguram que o pesquisador necessita estar aberto à ocorrência dos fatos e não se dispor à investigação esperando determinados eventos. Nesse viés, o professor não seria o pesquisador mais adequado para investigar em uma turma na qual leciona ou então sobre sua prática, visto que este se encontra imerso no ambiente a ser estudado. Diríamos que, nesta situação de pesquisa, o professor-pesquisador encontra-se ‘contaminado’ pelo ambiente no qual desenvolve a investigação.

Bogdan e Biklen (1994), refletem sobre as utilizações pedagógicas da investigação qualitativa e argumentam que tal abordagem requer que os educadores sejam mais rigorosos e observadores na coleta da informação, no sentido de reconhecerem os seus próprios pontos de vista e de neutralizarem as imagens estereotipadas que podem estar a determinar o seu comportamento face aos outros. Para, além disso, requer que se tome consciência de padrões de comportamento e características do meio físico, no sentido de se conseguir ser mais analítico relativamente às regularidades que podem estar despercebidamente a governar as suas vidas.

Goldenberg (2003, p. 59) é outra autora que faz considerações acerca do distanciamento entre o objeto estudado e o pesquisador. Dessa forma, coloca que “o fato de ter uma convivência profunda com o grupo estudado pode contribuir para que o pesquisador ‘naturalize’ determinadas práticas e comportamentos que deveria ‘estranhar’ para compreender.”

Cientes dessas implicações, fizemos, durante todo o processo de organização, coleta e análise dos dados da maneira mais neutra possível em relação à familiaridade com o ambiente para que se pudesse garantir a fidedignidade da investigação, bem como a busca pela neutralidade.

3.2 Características de uma Pesquisa-ação

A característica dessa investigação de pesquisar na prática nos conduz para o paradigma da pesquisa-ação. Contudo, para se configurar como tal não basta a participação efetiva do pesquisador na situação investigada, é necessário que a organização da investigação se desenvolva em torno de uma ação planejada.

Segundo Elliot (1998) a ideia de professores pesquisadores, os quais denomina de práticos, surgiu na Inglaterra no final de 1960 e início de 1970 no contexto do movimento curricular das escolas secundárias, cujo objetivo era atingir o currículo e propor mudanças pedagógicas direcionadas para a reconstrução das condições para uma educação básica significativa e valorosa.

Nesse período surgem vários movimentos de pesquisa-ação focando tanto o campo das relações sociais como o da educação. Nosso objetivo aqui é aclarar sobre a pesquisa-ação no âmbito educacional, explanar sobre essa perspectiva realizada dentro de uma organização, a escola.

No que tange esse campo, a indagação por meio da pesquisa-ação supõe a busca por estratégias de mudança que acarretem uma transformação visando a melhoria da realidade em que se atua. No caso, estratégias que mudem e transformem o ambiente escolar causando, assim, rupturas, principalmente na sala de aula.

Essa ideia de professores pesquisadores tomou corpo sob a direção de Lawrence Stenhouse no projeto da School Councils Humanities Project (1967 – 1972). Instalado na Inglaterra, esse projeto foi intitulado por “Humanities Curriculum Project”, no qual Stenhouse propunha um currículo e uma mudança pedagógica como um experimento educacional inovador, com a finalidade de ser testada por professores em classes concebidas como um laboratório. Elliott participou desde o início da equipe que auxiliou o projeto apresentado por Stenhouse (PEREIRA; 1998, ELLIOTT; 1998). Em relação a esse projeto Pereira (1998) afirma:

> A contribuição dele, ao movimento de reforma curricular já existente, consistiu em organizar o paradigma do plano curricular surgido de forma embrionária nos movimentos das secundary modern schools. Refletindo a tendência das escolas de centrar os temas de estudos na vida diária, como fundamento da organização dos conteúdos curriculares, o ponto de partida de Stenhouse consistiu em articular um objetivo geral para o estudo desses temas. (PEREIRA, 1998, p. 158-159).

Além desse, outros projetos foram desenvolvidos nesse contexto. Assim criou-se uma interação entre os especialistas acadêmicos e professores (práticos) e dessa influência mútua emergiram colaborações e negociações que mais tarde vieram a ser chamadas e conhecidas por pesquisa-ação.

Nessa investigação, o pesquisador era também o professor da turma (um prático) e estava, pois, pesquisando implicações na sua sala de aula, ou seja, investigando sua prática, em busca de direcionamentos que possam contribuir para um processo de ensino e aprendizagem mais valorativo da Matemática.

Além da finalidade de melhorar a prática, a pesquisa-ação também provoca o desenvolvimento do profissional docente que executa a ação e reflete sobre ela em prol do aperfeiçoamento dessa prática.

Elliott, conhecido como continuador das ideias de Stenhouse, em conformidade com este, caracteriza a pesquisa-ação “[...] como meio de produzir conhecimento sobre os problemas vividos pelo profissional, com vista a atingir uma melhora da situação, de si mesmo e da coletividade.” (Pereira, 1998, p. 154). Outro defensor e estudioso da pesquisa-ação é Michel Thiollent, esse autor conceitua essa perspectiva da seguinte forma:

> A pesquisa-ação é um tipo de pesquisa social com base empírica que é concebida e realizada em estreita associação com uma ação ou com a resolução de um problema coletivo e no qual os pesquisadores e os participantes representativos da situação ou do problema estão envolvidos de modo cooperativo ou participativo. (THIOLLENT, 2003, p. 14).

A perspectiva da pesquisa-ação não deve ser imposta e sim partir da necessidade dos práticos por mudanças e da busca pela inovação. A pesquisa-ação foca com ênfase a melhoria da prática, além da melhoria do conhecimento.

3.3 Modelagem Matemática e a sala de aula

Segundo Ponte et al. (2000) o profissional docente está imbuído de conhecimentos acadêmicos, conhecimentos profissionais e de senso comum, estando eles fortemente ligados, e afirma ainda que tais conhecimentos correspondem à práticas sociais diferenciadas. Dessa forma, esse autor denomina conhecimento acadêmico como aquele que se apresenta sob a forma declarativa, respeita a criação e validação de conhecimento científico, humanístico ou filosófico; o de senso comum como sendo o conhecimento que envolve tanto aspectos declarativos como legais, regula a condução da vida cotidiana e por último classifica o conhecimento profissional como aquele que partilha algumas das características dos anteriores, refere-se à resolução de problemas concretos em um domínio de prática bem definido e especializado.

Podemos, outrossim, afirmar que o conjunto de conhecimentos e as experiências vividas pelo educador influenciam em sua prática, bem como na necessidade deste de tomar decisões frente a situações que surgem em uma sala de aula e/ou fora dela, mas que de certa forma a influencia. Seu conhecimento profissional estabelece uma estreita relação com a ação, estando, assim, intimamente ligada à ideia de investigar em sala de aula e de tal modo com a pesquisa-ação.

Ludke (2001) parafraseando Stenhouse destaca a posição colocada por esse autor de comparação do professor com um artista que ensaia com seus diferentes materiais as melhores soluções para os problemas de criação. Assim, o professor deve experimentar em cada sala de aula, tal como em um laboratório, as melhores formas de atingir e envolver seus alunos no processo de ensino e aprendizagem. Apesar de Stenhouse ter feito tal metáfora em 1975, ela ainda nos é relevante.

Nesse campo é que adotamos a Modelagem como uma possibilidade para a sala de aula e desenvolvemos essa pesquisa com o objetivo de investigar as implicações desta no contexto no qual ela foi inserida (ensino médio).

A Modelagem, assim como o ensino formal (ou tradicional) na sala de aula, se estabelece na Educação Matemática como um ambiente de aprendizagem “possível” para o ensino e a aprendizagem dos conteúdos matemáticos. O termo “possível” está colocado com o objetivo de salientar que o trabalho com a Modelagem Matemática não se trata da chave que permite solucionar os problemas que existem no processo de ensino e aprendizagem da Matemática e sim notar que se busca disseminar caminhos plausíveis para o aprendizado, mas que pode não ser suficiente.

Nesse sentido, a Modelagem é vista como uma alternativa para o processo educacional da Matemática. Por meio dela podemos descrever fenômenos, analisá-los e interpretá-los gerando discussões reflexivas sobre tais fatos que cercam nosso dia-a-dia.

Notamos também que o ensino formal na sala de aula está aqui entendido como um ensino dirigido para repetições, treinamento por meio de exercícios com respostas prontas, com avaliação onde “quem acerta sabe, é inteligente e quem erra é considerado o não inteligente”. Queremos dizer com isso que o ensino tradicional é semelhante ao que definimos, em capítulo anterior, fundamentados em Skovsmose, como paradigma do exercício.

Em relação ao modelo de ensino transmissivo Ferreira e Wodewotzki (2007, p. 117) buscam fundamentação em Freire (2001, p. 52) que assegura que nessa abordagem pedagógica que se limita à transmissão de informação e ensino programado, os alunos devem fazer os exercícios usando mesmos argumentos, propriedades e resultados anteriormente alcançados; isto é, reproduzindo o conhecimento que lhes foi transmitido. A crítica freiriana a essa abordagem, entre outros pontos, assinala: “Quando entro em uma sala de aula, devo estar sendo um ser aberto a indagações, à curiosidade, às perguntas dos alunos, às suas inibições; um ser crítico e inquiridor [...].”

Vale ressaltar que não há intenção de comparar possibilidades para o processo de ensino e de aprendizagem e nem mesmo verificar se um é melhor do que o outro. O nosso objetivo é investigar as implicações da Modelagem Matemática e compartilhá-la com a comunidade da Educação Matemática.

A Modelagem possui como um de seus objetivos, romper com essa estrutura de “transmissor-receptor” e possibilitar um processo educacional voltado para discussões, interpretações, questionamentos, utilizando o conhecimento matemático para entendimento da realidade. Podemos dizer então, que a Modelagem provoca rupturas no ambiente de aprendizagem que era adotado na sala de aula anteriormente.

Esse novo ambiente de aprendizagem propõe aspectos que buscam contribuir para que se tenham alunos cientes de suas obrigações e direitos enquanto cidadãos preparados para conviver em sociedade, sem deixar de obter conhecimento matemático necessário para continuidade de sua vida escolar.

A Modelagem Matemática, adotada como um instrumento pedagógico e de conceitos, ideias e procedimentos da Matemática, também pode ser vista, por esta lente, como uma investigação matemática, uma investigação de um tema da realidade e de interesse do aluno. Essa perspectiva procura despertar em seus usuários (sejam alunos, sejam professores) um olhar mais atencioso, um espírito mais crítico frente situações de desconforto e/ou curiosidade.

4. DIRETRIZES, PARÂMETROS CURRICULARES E ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO MÉDIO

Nesta seção, apresentamos, em linhas gerais, as orientações de como o tema Estatística deve ser conduzido de acordo com documentos oficiais, bem como a legislação vigente. Também são analisados três livros atualmente utilizados por escolas públicas no Ensino Médio. Os livros são fornecidos gratuitamente aos alunos, pelo Governo Federal, através do Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio (PNLEM); implantado em 2004 visando a universalização de livros didáticos para os alunos do ensino médio, em todo o país.

4.1 Educação Estatística e Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio

A investigação que aqui se apresenta foi desenvolvida no âmbito do ensino médio, tendo em vista a inquietação inicial de buscar conhecer, averiguar e discutir as implicações do uso da Modelagem Matemática, tomada como um ambiente de aprendizagem, para a inserção dos conceitos de Estatística indicados para essa etapa educacional.

A antiga Lei nº 5692/71 assegurava que o 2º grau, atual ensino médio, se caracterizava por duas funções básicas: preparar o aluno para o prosseguimento dos estudos (ensino superior, por exemplo) e habilitar para exercício de uma profissão técnica. Essa lei foi substituída pela Lei nº 9394/96 que reestrutura o 2º grau, passando este a se denominar “ensino médio”.

A nova lei estabelece que o ensino médio deve assegurar a todos os cidadãos a oportunidade de consolidar e aprofundar os conhecimentos adquiridos no Ensino Fundamental; aprimorar o educando como pessoa humana; possibilitar o prosseguimento de estudos; garantir a preparação básica para o trabalho e a cidadania; dotar o educando dos instrumentos que o permitam “continuar aprendendo”, tendo em vista o desenvolvimento da compreensão dos “fundamentos científicos e tecnológicos dos processos produtivos” (Art.35, incisos I a IV) (LDB, p. 10, CD-ROM).

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional explicita o ensino médio como a “etapa final da educação básica” (Art. 21), sendo a educação básica composta pela educação infantil, ensino fundamental e ensino médio (Art. 36).

Em acordo com as leis da Educação Nacional, a UNESCO aponta como eixos estruturais da educação na sociedade contemporânea, incorporando às diretrizes gerais e orientadoras da proposta curricular, quatro premissas que a educação básica deve propiciar: aprender a conhecer, aprender a fazer, aprender a viver e aprender a ser.

Assim, os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM) estabelecem uma base comum organizada em três áreas curriculares, sendo elas: Linguagens e Códigos, Ciências Humanas e Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Essa última área citada é composta pelas disciplinas de Biologia, Física, Química e Matemática.

Cada uma dessas áreas, bem como suas disciplinas afins, é constituída por seus temas estruturais. Como o objetivo, nesse trabalho, é o ensino e a aprendizagem de Matemática, mais especificamente de conceitos de estatística no ensino médio, nos prenderemos apenas a discussão dos temas estruturais de Matemática.

• Identificar formas adequadas para descrever e representar dados numéricos e informações de natureza social, econômica, política, científico-tecnológica ou abstrata.

• Ler e interpretar dados e informações de caráter estatístico apresentados em diferentes linguagens e representações, na mídia ou em outros textos e meios de comunicação.

• Obter médias e avaliar desvios de conjuntos de dados ou informações de diferentes naturezas.

• Compreender e emitir juízos sobre informações estatísticas de natureza social, econômica, política ou científica apresentadas em textos, notícias, propagandas, censos, pesquisas e outros meios (PCNEM, 2004, p.127, CD-ROM).

4.2 A Estatística nos livros didáticos do Ensino Médio

Os livros didáticos são indubitavelmente, as ferramentas mais utilizadas pelos professores para a condução do processo de ensino e aprendizagem. Através do livro, os conteúdos e estratégias de ensino são propostas, e isso acaba por determinar a maneira como o trabalho do professor é feito, tornando-se pois, importantíssimo para o bom andamento do processo.

Para que fosse possível elaborar uma proposta alternativa do ensino da estatística no ensino médio, inicialmente foram analisados três livros didáticos, que abordam o conteúdo Estatística. Esta análise teve por objetivo verificar se tais abordagens didáticas sobre os conceitos estatísticos remetem os alunos ao real aprendizado, ou se o enfoque principal está calcado na memorização de fórmulas ou sequência de procedimentos pré-estabelecidos, se qualquer fundamentação.

Os três livros estão com seus conteúdos em consonância aos critérios que sugerem os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM), de 2000; os PCN+ (Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais) de 2002, bem como nas Diretrizes Curriculares de Matemática para a Educação Básica do Estado do Paraná. A escolha dos três livros, especificamente, foi motivada pelo fato de serem os mais utilizados nos colégios públicos na região de Ponta Grossa – PR. Os livros analisados foram os apresentados no quadro 4.1:

Coleção	Autores	Editora	Volume
Matemática: Aula por Aula	Benigno B. Filho Cláudio Xavier da Silva	FTD	1
Matemática: Ciência e Aplicações	Gelson Iezzi Osvaldo Dolce David Degenszajn Roberto Périgo Nilze Almeida	Saraiva	3
Matemática	Manoel Paiva	Moderna	3

Quadro 4.1: Relação dos livros didáticos analisados.

Cada um dos três livros traz basicamente uma definição sobre "O que é Estatística", algumas aplicações (os censos demográficos, por exemplo), e seguem com breves explicações sobre os principais conceitos, seguidas de exercícios resolvidos e exercícios para fixação, com modelos semelhantes aos anteriormente resolvidos. Nota-se que há uma preocupação em apresentar textos retratando diversas áreas do conhecimento e, como a estatística está presente em cada uma dessas áreas.

Os três livros analisados apresentam os procedimentos para cálculos de medidas de tendência central (média, mediana e moda). Um dos livros não apresenta os conceitos ou cálculos das principais medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão), o que acreditamos ser prejudicial ao aprendizado. Sem as medidas de dispersão, muitas comparações se tornam inócuas em tomadas de decisão. As apresentações dos dados são feitas por conjuntos, quadros, tabelas ou textos com situações problemas.

Observamos que somente o livro MATEMÁTICA: CIÊNCIA E APLICAÇÕES apresenta uma sequência de cálculos de medidas de dispersão com dados agrupados em classes. Algumas vezes, ao se deparar com longas séries de dados, em tabela ou quadro, a sua análise é mais rápida se estes estão agrupados. Outra vantagem significativa da utilização de tabelas ou quadros com os dados agrupados em classes está na visão global das variáveis em estudo. A partir das informações apresentadas, pode-se fazer determinações mais coerentes e conclusivas acerca do fenômeno estudado.

Todos trazem uma lista de exercícios complementares para o aprofundamento de aprendizagem, bem como questões do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), de vestibulares diversos e também de concursos públicos. Muitas questões são apresentadas através de gráficos e tabelas. Em nossa opinião, isso é importante no aspecto de capacitar os alunos em extrair informações importantes, sem que estas venham simplesmente escritas e prontas, empobrecendo o aprendizado.

5. PRINCIPAIS DEFINIÇÕES ESTATÍSTICAS DO ENSINO MÉDIO

Após a análise dos livros didáticos, com o intuito de facilitar os trabalhos da proposta a ser desenvolvida, foi elaborado um pequeno material utilizando-se dos conceitos estatísticos enfocados nos três livros; também foram apresentadas outras definições que julgamos importantes, mas não estavam contempladas nos livros já citados, para tais conceitos, utilizamo-nos de outros livros, todos devidamente referenciados. O objetivo da criação de tal material foi o de facilitar o manuseio por parte dos alunos participantes do trabalho, já que esses não dispunham dos livros citados para o acompanhamento.

5.1 Definição de Estatística

É uma parte da matemática aplicada que fornece métodos para coleta, organização, descrição, análise e interpretação de dados para a utilização dos mesmos na tomada de decisões. A coleta, a organização, a descrição dos dados, o cálculo e a interpretação de coeficientes pertencem à ESTATÍSTICA DESCRITIVA, enquanto a análise e a interpretação dos dados, associado a uma margem de incerteza, ficam a cargo da ESTATÍSTICA INDUTIVA ou INFERENCIAL, também chamada como a medida da incerteza ou métodos que se fundamentam na teoria da probabilidade.

5.2 População e Amostra

As pesquisas estatísticas precisam atender a um “público alvo”, previamente estabelecido. Com base nesse conjunto de pessoas ou seres quaisquer, os dados são coletados e analisados de acordo com o princípio da pesquisa. Esse público alvo recebe o nome de População e constitui um conjunto de elementos que apresentam características próprias, por exemplo: os alunos de um colégio, os membros de uma torcida organizada de futebol, os funcionários de uma empresa, os sócios de um clube, o crescimento de certa cultura agrícola, os beneficiários do programa Bolsa Família, entre muitos outros exemplos. A População também pode ser relacionada a um conjunto de objetos ou informações. Na estatística, a população é classificada como finita e infinita.

Amostra é qualquer subconjunto não vazio extraído de um conjunto maior denominado População. Particularmente em casos em que a população é infinita, ou considerada como tal, torna-se impossível ou muito dispendioso o estudo de um fenômeno, considerando-se todos os dados. Dessa forma, número de entrevistas ou observações corresponde a uma quantidade determinada de elementos do conjunto, tais dados são submetidos ao estudo pré-estabelecido e os resultados, generalizados a toda População.

5.2.1 População finita

Nesse caso, a quantidade de elementos de um grupo não é muito grande, logo, a pesquisa deve coletar os dados de toda a população. Por exemplo; a quantidade de aprovados de um colégio, ao fim do ano letivo; quantos moradores de um edifício participaram da reunião de condomínio; a população constituída por todos os automóveis fabricados por uma montadora em certo dia; a opinião dos clientes sobre a qualidade do atendimento em uma pequena empresa, etc...

5.2.2 População infinita

O número de elementos que compõe o conjunto a ser estudado é muito elevado, inviabilizando a participação integral dos componentes do grupo. Grupos de elementos com essa característica podem ser considerados infinitos. Por exemplo a população da cidade do Rio de Janeiro, o número de bactérias de uma cultura, o número de torcedores da equipe do Flamengo nos estados brasileiros, a população constituída de todos os resultados (cara ou coroa) em sucessivos lançamentos de uma moeda, etc...

5.3 Variáveis

Convencionalmente, é o conjunto dos resultados possíveis de um fenômeno, podemos definir como a característica medida ou avaliada em cada elemento de uma amostra ou população. As variáveis podem assumir valores numéricos ou não numéricos como uma descrição ou qualidade. As variáveis são classificadas em variáveis quantitativas ou variáveis qualitativas.

As variáveis qualitativas não são expressas numericamente, pois relacionam situações como a cor da pele, cor dos olhos, marca de refrigerante, marca de automóvel, preferência musical entre outras. Elas podem ser divididas em ordinais e nominais. As variáveis qualitativas ordinais, apesar de não serem numéricas, obedecem a uma relação de ordem, por exemplo: conceitos como ótimo, bom, regular e ruim, classe social, grau de instrução, etc. Já as variáveis qualitativas nominais não estão relacionadas à ordem, elas são identificadas apenas por nomes, por exemplo, as cores: vermelho, amarelo, preto, azul, rosa, verde, etc. Também como exemplo de nominais temos as marcas de roupas, nome de bebidas, nacionalidade, estado civil, entre outras.

As variáveis quantitativas são características que podem ser representadas numericamente; são classificadas em variáveis contínuas ou discretas. Nas variáveis quantitativas discretas os possíveis resultados formam um conjunto finito ou enumerável de números, são variáveis de contagem, por exemplo: número de carros vendidos, quantidade de operadoras de telefonia, números de sócios de uma agremiação esportiva, etc. No caso das variáveis quantitativas contínuas, os possíveis valores estão dentro de um intervalo, aberto ou fechado, dos números reais. Como exemplo podemos citar a massa de um produto, altura dos alunos de uma escola, os tempos dos atletas em uma competição, entre outras situações.

5.4 Distribuições de frequência

Em Estatística, a distribuição de frequência consiste na organização dos dados de acordo com as ocorrências dos diferentes resultados observados, é um agrupamento de valores que uma ou mais variáveis podem assumir em uma amostra. Essa amostra, normalmente é ordenada por quantidades ou por classes, criando-se tabelas ou gráficos, por exemplo, que resumem o fenômeno a ser pesquisado.

5.4.1 Dados brutos

Dados brutos são os dados coletados, mas ainda não organizados numericamente.

Exemplo 1

A tabela 5.1 apresenta o consumo de energia elétrica em Kwh, de 50 residências, no mês de fevereiro de 2013.

Tabela 5.1: Consumo mensal de energia elétrica de 50 residências, em Kwh

58	62	80	57	8	126	136	96	144	19
90	86	38	94	82	75	148	114	131	28
66	95	121	158	64	105	118	73	83	81
50	92	60	52	89	58	10	90	94	74
9	75	72	157	125	76	88	78	84	36

Como pode-se observar na tabela 5.1, os valores estão dispostos de forma aleatória, sem critério algum, em razão disso, poucas informações podem ser coletadas.

5.4.2 Rol

O rol é um arranjo de dados numéricos organizados em ordem crescente ou decrescente de grandeza. A tabela 5.2 apresenta os dados organizados de forma crescente:

Tabela 5.2: Consumo mensal de energia elétrica de 50 residências, em Kwh, organizados em ordem crescente

8	9	10	19	28	36	38	50	52	57
58	58	60	62	64	66	72	73	74	75
75	76	78	80	81	82	83	84	86	88
89	90	90	92	94	94	95	96	105	114
118	121	125	126	131	136	144	148	157	158

A distribuição dos valores propicia algumas vantagens em relação à distribuição inicial (dados brutos). Facilmente observam-se os valores máximo e mínimo, e assim, pode-se calcular a amplitude total (A_T), pela diferença entre tais valores.

5.5 Frequência simples ou absoluta (*fi*)

A frequência simples ou absoluta de uma variável é representada pelo número de vezes que aparece no conjunto considerado. Analisemos a tabela 5.3:

Tabela 5.3: Cotações médias mensais do dólar entre os anos de 2009 e 2012

	Jan	Fev	Mar	Abr	Mai	Jun	Jul	Ago	Set	Out	Nov	Dez
2009	2,30	2,31	2,31	2,20	2,06	1,94	1,94	1,83	1,82	1,73	1,72	1,75
2010	1,77	1,84	1,78	1,75	1,81	1,80	1,77	1,76	1,71	1,69	1,71	1,69
2011	1,67	1,66	1,67	1,59	1,61	1,58	1,56	1,59	1,75	1,77	1,79	1,83
2012	1,79	1,71	1,79	1,85	1,98	2,04	2,02	2,02	2,02	2,02	2,06	2,04

A tabela 5.3, traz as cotações médias mensais do dólar entre os anos de 2009 e 2012, e pode-se observar que o valor R$ 2,02 tem frequência 4, o valor R$ 1,71 tem frequência 3. Podemos observar que o procedimento descrito acima ainda não é satisfatório, já que exige muito espaço, mesmo quando o número de valores da variável não é muito grande. Assim o mais viável nessas situações é agrupar os dados (observações) em intervalos. Dessa forma, agrupamos os valores da variável em intervalos, chamando-os de classes, conforme a tabela 5.4.

Tabela 5.4: Distribuição de frequências das cotações médias do dólar, entre 2009 e 2012.

Cotação	Frequência (*fi*)
1,50 ⊢ 1,60	4
1,60 ⊢ 1,70	6
1,70 ⊢ 1,80	16
1,80 ⊢ 1,90	7
1,90 ⊢ 2,00	3
2,00 ⊢ 2,10	8
2,10 ⊢ 2,20	0
2,20 ⊢ 2,30	1
2,30 ⊢ 2,40	3
Total	48

Na tabela 5.4, os dados observados foram divididos em classes arbitrárias de amplitude R$0,10. Olhando a tabela, observa-se que existem 4 dados na classe 1,50 ⊢ 1,60. Na distribuição por intervalos ou classes, a interpretação é dada da seguinte forma:

- 1,60 ⊢ 1,70: a classe compreende os números de 1,60 (inclusive), até 1,70 (exclusive).
- 2,10 ⊢ 2,20: a classe compreende os números de 2,10 (inclusive), até 2,20 (exclusive).
- A amplitude total das observações é 2,31 – 1,56= 0,75.

O número de classes (*k*) pode ser determinado arbitrariamente ou de acordo algum modelo pré-estabelecido. Uma maneira de calcular a quantidade de classes é através da regra de Sturges: $k = 1 + 3{,}3.\log n$, onde *n* é o número de observações, ou tamanho da amostra. Uma forma de determinar a amplitude de cada classe (*h*) é utilizar a seguinte fórmula: $h = \frac{A_T}{k}$.

Para fazer uma nova tabela, mais criteriosa, usando os dados fornecidos, basta seguir a sequência de cálculos que definem os valores de referência; primeiramente, deve ser calculada a quantidade de classes. São 48 dados, logo, $k = 1 + 3{,}3.\log 48 = 6{,}54$ e a amplitude de cada classe será $h = 0{,}75/6{,}54 = 0{,}115$. Assim serão 7 classes de amplitude R$ 0,12. Construindo, dessa forma, a tabela 5.5.

Tabela 5.5: Distribuição de frequências das cotações médias do dólar, entre 2009 e 2012, utilizando-se da regra de Sturges.

Cotação	Frequência (*fi*)
1,50 ⊢ 1,62	5
1,62 ⊢ 1,74	10
1,74 ⊢ 1,86	18
1,86 ⊢ 1,98	2
1,98 ⊢ 2,10	9
2,10 ⊢ 2,22	1
2,22 ⊢ 2,34	3
Total	48

Comparando-se as tabelas 5.3, 5.4 e 5.5, fica evidente que quando o conjunto a ser analisado tiver uma quantidade de elementos relativamente grande, as tabelas que apresentam os dados agrupados sintetizam melhor o fenômeno em estudo, pois dão uma visão global das informações. Cabe salientar que a escolha da tabela adequada depende da quantidade de valores a serem analisados; em relação à quantidade de classes da tabela, recomenda-se não ser inferior a cinco e nem exceder quinze.

5.6 Frequência Relativa (*fr*)

Denomina-se frequência ou proporção relativa (fr), o quociente entre a frequência absoluta (*fi*) e o número de elementos *n* da amostra e é, geralmente, expressa em porcentagem, ou seja: $fr = \frac{f_i}{n}$.

Devemos observar que se tivermos a *fr*, basta multiplicá-la por 100 para termos a porcentagem, que em geral é mais fácil para analisar os resultados. Observemos a tabela 5.6, construída a partir dos preços da gasolina, coletados em 15 postos de combustíveis da cidade de Mafra, em 18/ 02/ 2013.

Tabela 5.6: Distribuição de frequências do preço da gasolina de 15 postos, consultados no dia 18/ 02/ 2013, em Mafra – SC.

Preço em R$	*fi*	*fr*
2,69	3	0,20
2,72	4	0,27
2,75	2	0,134
2,77	2	0,134
2,88	3	0,20
2,90	1	0,067
Total	15	1

De acordo com os dados da tabela 5.6, observa-se que:

- Em 20% dos postos, o preço é R$ 2,69;
- Em 13, 4% dos postos, o valor da gasolina é R$ 2,75; e
- A frequência absoluta do valor R$ 2,90 é 1, a frequência relativa é de 6, 7%.

5.7 Os gráficos na Estatística

Os gráficos constituem uma forma clara e objetiva de representar dados estatísticos. O objetivo é proporcionar ao leitor, de forma sintetizada, a interpretação e compreensão dos fatos. De acordo com a característica da informação precisamos escolher o gráfico mais adequado. Os mais usuais são: gráfico de segmentos, gráfico de barras, gráfico de setores e os de dispersão.

5.7.1 Gráficos de segmentos

Os gráficos de segmentos são utilizados principalmente quando o objetivo é mostrar o acréscimo, decréscimo ou estabilidade, das variáveis estatísticas, no decorrer de certo período. Abaixo, exemplos de aplicações com gráficos de segmentos.

Exemplo 1

(Exame Nacional do Ensino Médio / 2012)- O dono de uma farmácia resolveu colocar à vista do público o gráfico mostrado a seguir, que apresenta a evolução do total de vendas (em Reais) de certo medicamento ao longo do ano de 2011.

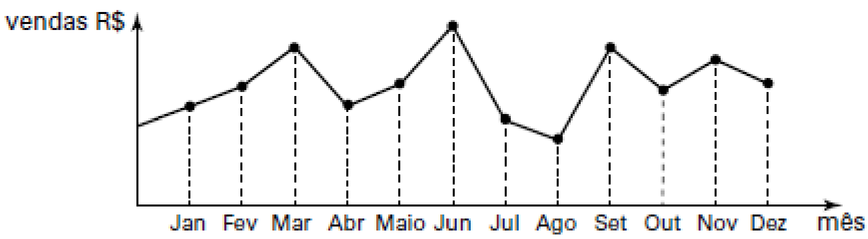


Figura 5.1: Gráficos de segmentos - Exemplo 1

De acordo com o gráfico, os meses em que ocorreram, respectivamente, a maior e a menor venda absoluta em 2011 foram

A) março e abril. D) junho e setembro.

B) março e agosto. E) junho e agosto.

C) agosto e setembro.

Exemplo 2

(Exame Nacional do Ensino Médio / 2012)- A figura a seguir apresenta dois gráficos com informações sobre as reclamações diárias recebidas e resolvidas pelo Setor de Atendimento ao Cliente (SAC) de uma empresa, em uma dada semana. O gráfico de linha tracejada informa o número de reclamações recebidas no dia, o de linha contínua é o número de reclamações resolvidas no dia. As reclamações podem ser resolvidas no mesmo dia ou demorarem mais de um dia para serem resolvidas.

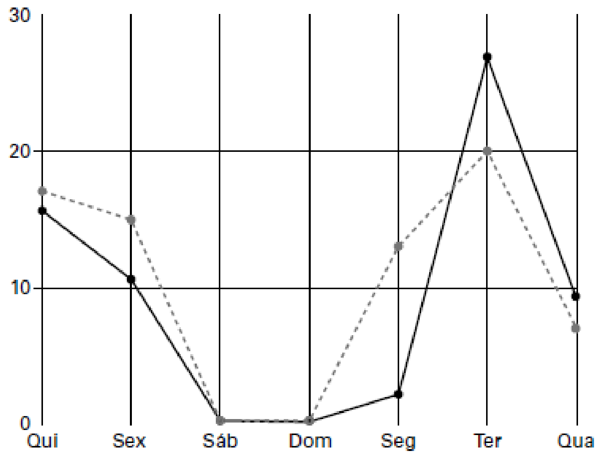


Figura 5.2: Gráficos de segmentos - Exemplo 2

O gerente de atendimento deseja identificar os dias da semana em que o nível de eficiência pode ser considerado muito bom, ou seja, os dias em que o número de reclamações resolvidas excede o número de reclamações recebidas.

Disponível em: http://blog.bibliotecaunix.org. Acesso em: 21 jan. 2012 (adaptado).

O gerente de atendimento pôde concluir, baseado no conceito de eficiência utilizado na empresa e nas informações do gráfico, que o nível de eficiência foi muito bom na

A) segunda e na terça-feira.

B) terça e na quarta-feira.

C) terça e na quinta-feira.

D) quinta-feira, no sábado e no domingo.

E) segunda, na quinta e na sexta-feira.

5.7.2 Gráfico de barras

O gráfico de barras é um tipo de gráfico no qual os itens de dados são representados sob a forma de barras retangulares, podendo ser verticais ou horizontais. Pode-se diferenciar umas das outras, por cores, destaque ou padrão. Valores positivos e valores negativos podem ser apresentados em relação a uma linha de base no ponto zero. O gráfico de barras é utilizado quando temos dados qualitativos. Abaixo, exemplos de gráficos de barras:

Exemplo 1

(Exame Nacional do Ensino Médio / 2012)- Em um blog de variedades, músicas, mantras e informações diversas, foram postados ”Contos de Halloween“. Após a leitura, os visitantes poderiam opinar, assinalando suas relações em: ”Divertido“, ”Assustador“ ou ”Chato“. Ao final de uma semana, o blog registrou que 500 visitantes distintos acessaram esta postagem. O gráfico a seguir apresenta o resultado da enquete.

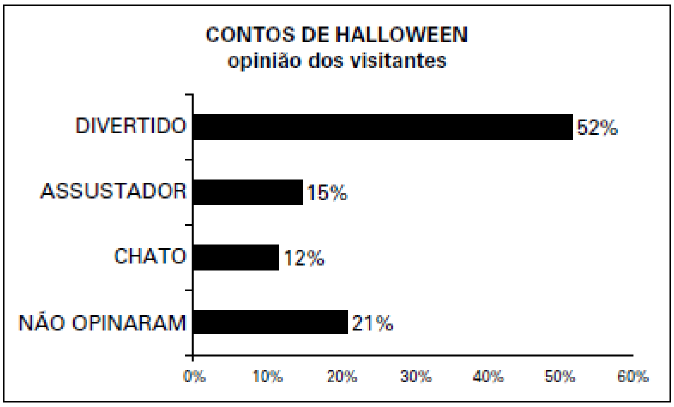


Figura 5.3: Gráfico de barras Contos de Halloween

O administrador do blog irá sortear um livro entre os visitantes que opinaram na postagem ”Contos de Halloween“. Sabendo que nenhum visitante votou mais de uma vez, a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso entre as que opinaram ter assinalado que o conto ”Contos de Halloween“ é ”Chato“ é mais aproximada por

A) 0,09.
B) 0,12.
C) 0,14.
D) 0,15.
E) 0,18.

Exemplo 2

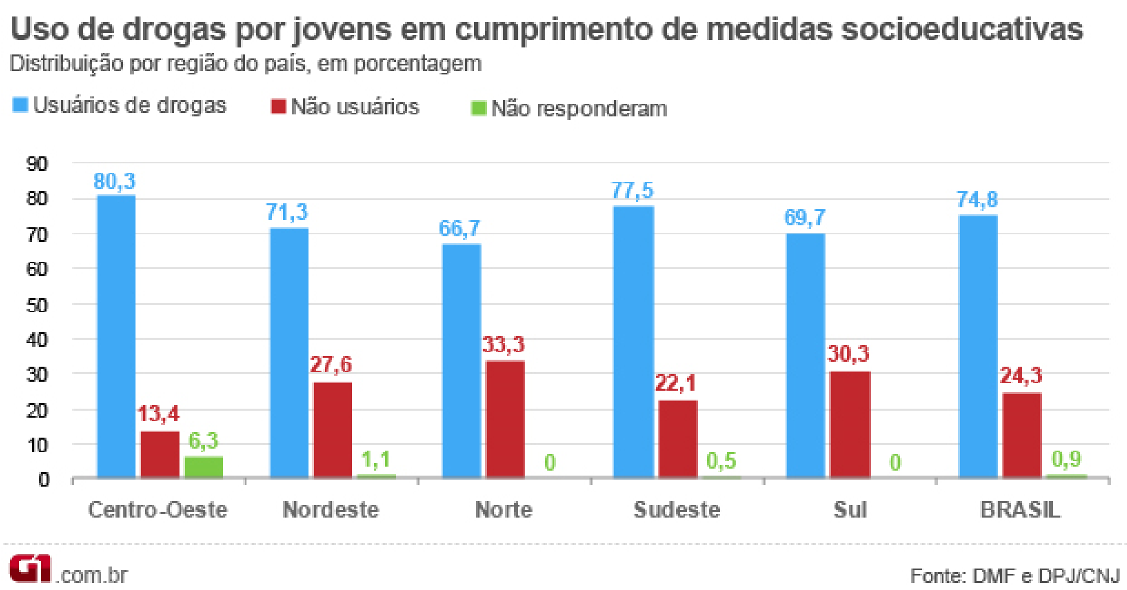


Figura 5.4: Gráfico mostrando os resultados da pesquisa "Panorama Nacional, a Execução das Medidas Socioeducativas de Internação", realizada pelo Departamento de Monitoramento e Fiscalização do Sistema Carcerário (DMF) e Departamento de Pesquisas Judiciárias (DPJ), divulgada pelo Conselho Nacional de Justiça (CNJ) em 10/ 04/ 2012.

A análise do gráfico da figura 5.4 deixa claro que há uma forte relação entre a criminalidade e a utilização de drogas na juventude. Em todas as regiões a porcentagem de apreendidos usuários é muito maior do que os não usuários.

5.7.3 Gráficos de setores

Os gráficos de setores, comumente chamados de gráficos pizza, são construídos dividindo-se um círculo (pizza) em setores (fatias), um para cada categoria, que serão proporcionais à frequência daquela categoria.

É importante salientar que o gráfico de setores deve ser utilizado quando se deseja confrontar as partes integrantes de um total, não sendo aconselhável representar um número grande de fatias, pois como são comparadas as áreas, muitas fatias prejudicariam a leitura.

Exemplo 1

(Universidade Federal de São Carlos / 2003)- O gráfico em setores do círculo de centro O representa a distribuição das idades entre os eleitores de uma cidade. O diâmetro AB mede 10 cm e o comprimento do menor arco AC é $\frac{5\pi}{3}$ cm.

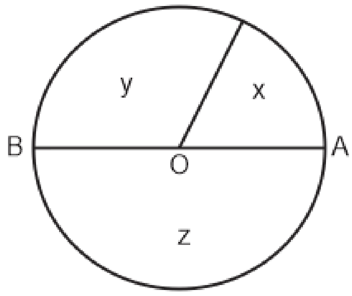


Figura 5.5: Gráficos de setores - Exemplo 1

O setor x representa todos os 8 000 eleitores com menos de 18 anos, e o setor y representa os eleitores com idade entre 18 e 30 anos, cujo número é

(A) 12 000.

(B) 14 800.

(C) 16 000.

(D) 18 000.

(E) 20 800.

Exemplo 2

(Universidade Federal de Minas Gerais / 2006)- Este gráfico representa o resultado de uma pesquisa realizada com 1000 famílias com filhos em idade escolar:

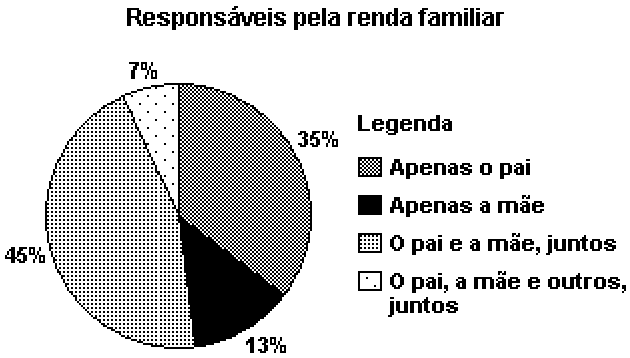


Figura 5.6: Gráficos de setores - Exemplo 2

Considere estas afirmativas referentes às famílias pesquisadas:

I) O pai participa da renda familiar em menos de 850 dessas famílias.

II) O pai e a mãe participam, juntos, da renda familiar em mais de 500 dessas famílias.

Então, é CORRETO afirmar que

a) nenhuma das afirmativas é verdadeira.

b) apenas a afirmativa I é verdadeira.

c) apenas a afirmativa II é verdadeira.

d) ambas as afirmativas são verdadeiras.

Exemplo 3

Os custos totais dos acidentes de trânsito nas áreas urbanas do país somam R$ 5,3 bilhões por ano. Só o afastamento temporário ou definitivo do trabalho - a perda de produção - significa 43% desse total. Os custos com os veículos representam 30%, e o atendimento médico-hospitalar e a reabilitação, 16%.

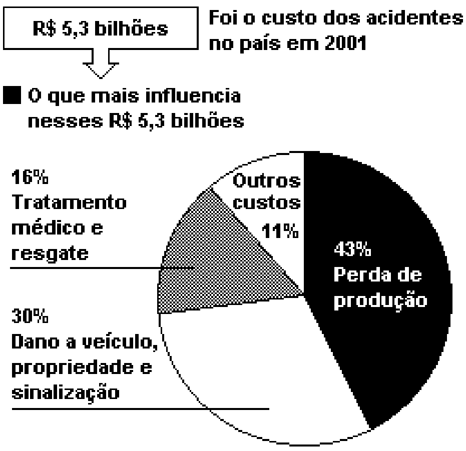


Figura 5.7: Gráficos de setores - Exemplo 3
Fonte: "Folha de São Paulo", 1.º. 06.03, p. C1 (adaptado).

De acordo com os dados do gráfico por setores, o custo relativo à perda de produção devido a acidentes de trânsito, nas áreas urbanas do país, em bilhões de reais, foi, aproximadamente,

a) 2,32 b) 2,30 c) 2,28 d) 2,24 e) 2,23

5.7.4 Histograma

O histograma é um gráfico composto por retângulos justapostos em que a base de cada um deles corresponde ao intervalo de classe e a sua altura representa a respectiva frequência. A área de cada retângulo é proporcional à frequência da classe correspondente e tem grande aceitação nos casos de distribuição contínua de frequência. Suponhamos, por exemplo, uma experiência na qual foram medidas 50 peças da linha de produção de uma empresa, com os resultados das observações registrados no quadro 5.1:

Medidas, em cm das 50 peças observadas									
5,03	4,90	5,07	4,86	4,92	4,85	4,85	5,06	4,95	5,00
5,06	4,96	4,91	5,07	4,81	4,82	4,82	4,84	4,97	4,87
5,04	4,97	5,07	4,88	5,00	5,00	4,88	5,05	5,04	4,91
5,07	4,98	5,01	4,96	4,81	4,95	4,83	4,84	5,02	5,05
4,93	4,99	4,93	5,03	4,89	5,02	4,81	4,92	4,99	5,01

Quadro 5.1: Medidas de 50 peças de uma linha de produção, dados em cm.

Com os dados brutos do quadro 5.1, pode-se montar fazer uma distribuição de frequências, veja a tabela 5.7.

Tabela 5.7: Medidas de 50 peças de uma linha de produção, com os intervalos de classes.

Comprimento (cm)	Frequência (*fi*)
4,80 ⊢ 4,84	6
4,84 ⊢ 4,88	6
4,88 ⊢ 4,92	6
4,92 ⊢ 4,96	6
4,96 ⊢ 5,00	7
5,00 ⊢ 5,04	10
5,04 ⊢ 5,08	9
Total	50

A partir das informações da tabela 5.7 pode-se construir um histograma, figura 5.8.

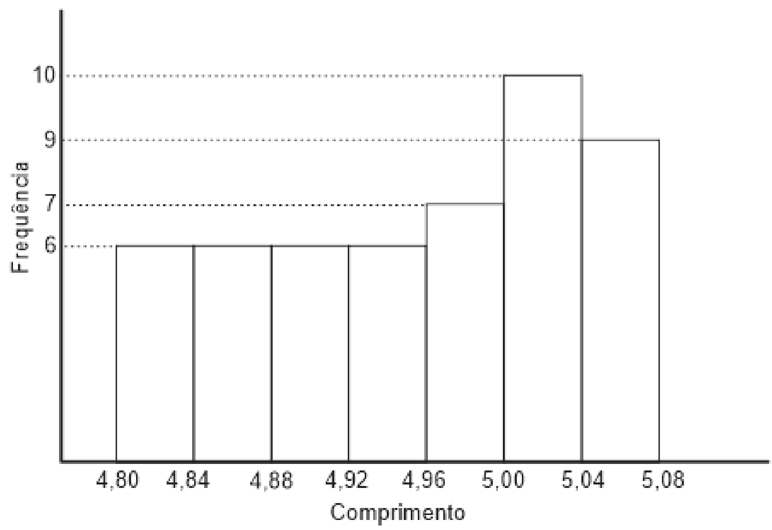


Figura 5.8: Histograma com as Medidas de 50 peças de uma linha de produção, com os intervalos de classes.

5.7.5 Gráfico de dispersão

O diagrama de dispersão é um gráfico onde pontos no espaço cartesiano XY são usados para representar simultaneamente os valores de duas variáveis quantitativas medidas em cada elemento do conjunto de dados, são largamente utilizados quando se quer fazer comparações entre duas ou mais variáveis quantitativas. Como exemplo, analisemos a tabela 5.8 contendo os dados sobre vendas de tablets no 1.° semestre de 2012 em uma pequena empresa, nas modalidades venda na loja física, loja virtual ou televendas.

Tabela 5.8: Vendas de tablets no 1.º semestre de 2012

	Janeiro	Fevereiro	Março	Abril	Maio	Junho
Loja física	32	34	32	31	28	22
Loja virtual	21	22	24	28	32	32
Televendas	25	24	22	23	20	20

Com os dados da tabela 5.8, faz-se o gráfico de dispersão para comparações de resultados.

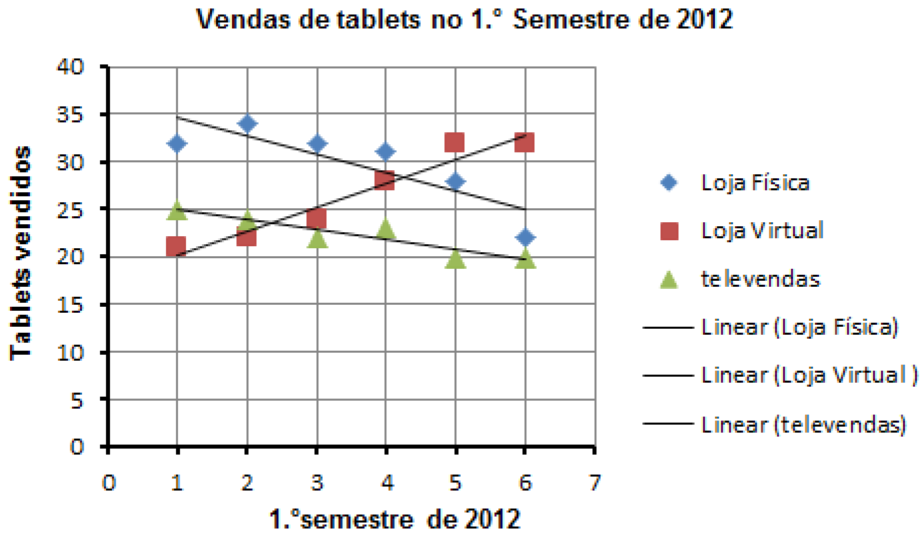


Figura 5.9: Gráfico de dispersão e linha de tendência comparativo entre as modalidades de venda de tablets no 1.° semestre de 2012

Pela análise do gráfico apresentado na figura 5.9, percebe-se que na loja em questão, há uma tendência ao aumento das vendas pela internet, enquanto vendas na loja física e por televendas apresentam uma redução gradual no período. Tais constatações podem ser relevantes para tomadas de decisão; por exemplo, em quais meios de venda a loja apresenta melhores resultados, para campanhas promocionais.

Outro exemplo de aplicação do gráfico de dispersão. Considere os seguintes dados sobre as idades de 14 casais, em união estável superior a dois anos, coletados para uma pesquisa sobre o perfil dos cônjuges em certa comunidade.

Idade da esposa	19	24	20	28	26	25	27	23	32	31	35	32	34	40
Idade do marido	28	29	27	26	31	24	39	33	37	34	35	42	31	41

Quadro 5.2: Idades dos cônjuges pesquisados de 14 casais participantes de pesquisa sobre perfil dos casais.

A partir dos dados do quadro 5.2 constrói-se o gráfico de dispersão apresentado na figura 5.10.

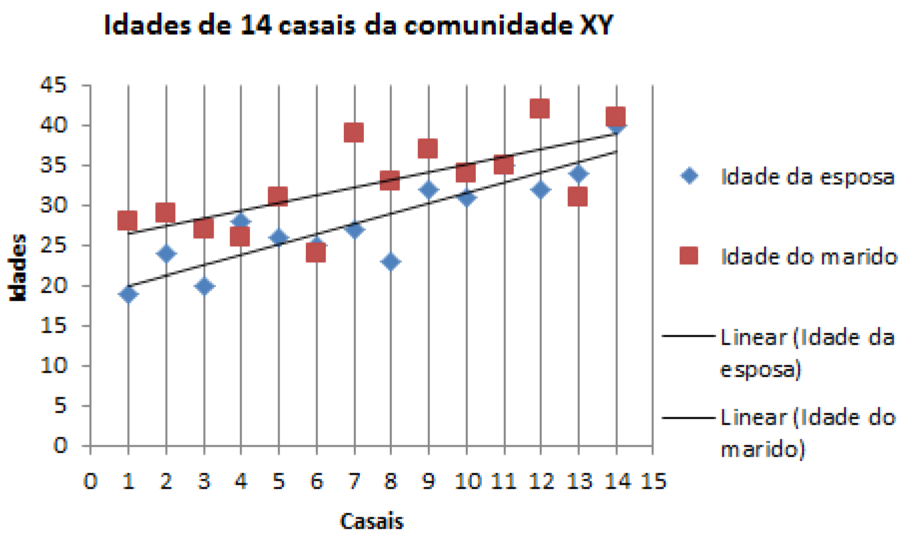


Figura 5.10: Gráfico de dispersão e linha de tendência comparando as idades dos 14 casais pesquisados.

No gráfico de dispersão anterior, nos casais em questão, nota-se que há indícios, de um modo geral que, à medida que a idade da esposa aumenta, a idade do marido segue a mesma tendência, o que não é uma regra.

5.8 Medidas de Tendência Central ou de Posição

São medidas utilizadas principalmente para a descrição e caracterização de um conjunto de valores. O objetivo é encontrar os valores representativos do conjunto, de modo a resumir ao máximo as observações sobre os dados em questão. As principais medidas de posição são a média aritmética, a mediana e a moda.

5.8.1 Média Aritmética ($\bar{x}$)

Dado um conjunto de valores $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$, a média aritmética é calculada por $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$, onde $\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + ... + x_n$.

Exemplo 1

Um grupo de pessoas apresenta as idades de 11, 13, 15 e 17 anos. Se uma pessoa de 12 anos juntar-se ao grupo, o que acontecerá com a média de idade do grupo?

Média das 4 primeiras pessoas

$$\bar{x} = \frac{11+13+15+17}{4} = 14$$

Média calculada com mais uma idade

$$\bar{x} = \frac{11+13+15+17+12}{5} = 13{,}6$$

Conclusão: Após a entrada de mais uma pessoa com 12 anos, a média será reduzida de 14 para 13,6 anos, ou seja, será aproximadamente 3% menor.

Exemplo 2

(Concurso público dos Correios-2008)- A média aritmética das idades entre os funcionários da Agência Central dos Correios de Recife/PE: Júlio, Adriana, Renato e Otávio é de 24 anos. Se a média de idade dos homens é de 23 anos, qual é a idade de Adriana?

Cálculo da média dos homens:

$$\frac{J+R+O}{3} = 23 \quad \text{portanto, } J+R+O = 69 \text{ .}$$

A soma das idades dos homens é 69 anos, logo:

$$\frac{69+A}{4} = 24 \quad \text{portanto, } A = 96-69 = 27 \text{.}$$

Exemplo 3

(Faculdade Estácio de Sá)- A média das idades de 11 jogadores de um time de futebol diminuiu 1 ano, quando o clube trocou um de seus jogadores por um jovem jogador de 19 anos. Podemos afirmar que a idade do jogador substituído é de:

a) 33 b) 32 c) 31 d) 30 e) 29

Seja x a idade do jogador que entrou no jogo e S_{11} a soma das idades dos 11 jogadores que iniciaram a partida, logo:

$$\bar{x} = \frac{S_{11}}{11}, \qquad \bar{x} - 1 = \frac{S_{11} - x + 19}{11} \quad \text{e} \quad \bar{x} = 30.$$

5.8.2 Média Aritmética Ponderada

Nos cálculos envolvendo média aritmética simples, todas as ocorrências têm exatamente a mesma frequência ou o mesmo peso. No entanto, existem casos onde as ocorrências têm frequências diferentes. Seja um conjunto de valores $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ e seus respectivos pesos $\{p_1, p_2, ..., p_n\}$, nestes casos, o cálculo da média deve levar em conta esta importância relativa ou peso relativo, o que caracteriza a média ponderada, esta pode ser calculada pela fórmula

$$\bar{x}_p = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i \times p_i)}{\sum_{i=1}^{n} p_i}.$$

Para dados agrupados por distribuição de frequências em k classes, com pontos médios de cada classe $\{X_1, X_2, ..., X_k\}$ e frequências simples $\{f_1, f_2, ..., f_k\}$, respectivamente, então a média aritmética é dada por:

$$\bar{x}_p = \frac{\sum_{i=1}^{k}(X_i \times f_i)}{\sum_{i=1}^{k} f_i}.$$

Para obter-se o ponto médio de cada classe, basta calcular a média aritmética entre o menor valor e o maior de cada classe; por exemplo, uma classe definida pelo intervalo 10 ⊢ 14, tem ponto médio 12, que é a média aritmética entre 10 e 14.

Exemplo 1

A tabela 5.9 apresenta as cotações médias do dólar entre 2009 e 2012, calcular o valor médio do período.

Tabela 5.9: Cotações médias do dólar, entre 2009 e 2012

Cotação	Frequência (*fi*)
1,50 ⊢ 1,62	5
1,62 ⊢ 1,74	10
1,74 ⊢ 1,86	18
1,86 ⊢ 1,98	2
1,98 ⊢ 2,10	9
2,10 ⊢ 2,22	1
2,22 ⊢ 2,34	3
Total	48

Primeiramente precisamos encontrar os pontos médios das classes. São eles: 1,56; 1,68; 1,80; 1,92; 2,04; 2,16; 2,28. Assim temos que a média é dada por:

$$\bar{x}_p = \frac{1{,}56\times5+1{,}68\times10+1{,}80\times18+1{,}92\times2+2{,}04\times9+2{,}16\times1+2{,}28\times3}{48} = \frac{88{,}2}{48} = 1{,}84\,.$$

Exemplo 2

Um ourives fez uma liga, fundindo 200 g de ouro 14 quilates com 300 g de ouro 16 quilates. Qual é a liga encontrada (em quilates) após a fundição?

Trata-se de um exercício de média aritmética ponderada, pois as quantidades de cada tipo de metal são diferentes, logo:

$$\bar{x}_p = \frac{14\times200+16\times300}{200+300} = 15{,}2\,.$$

Exemplo 3

(UECE)- Em um concurso público, três provas foram realizadas. Um candidato obteve nota 4 na primeira prova, que tinha peso 3. Nota 9 na segunda prova, que tinha peso 2, e nota 8 na terceira prova, que tinha peso 5. Qual foi a média desse candidato?

$$\bar{x}_p = \frac{4 \times 3 + 9 \times 2 + 8 \times 5}{10} = 7\,.$$

5.9 Mediana (*Md*)

É o valor que ocupa a posição central em um conjunto de dados, os valores devem estar distribuídos em ordem crescente. A mediana divide o conjunto de dados em duas partes iguais em relação à quantidade de elementos. Quando a quantidade de valores for ímpar, a mediana, ou valor mediano, é simplesmente o valor que ocupa a posição central. Caso essa quantidade de valores seja par a mediana será a média aritmética dos dois valores centrais.

Diferentemente da média, a mediana não é influenciada por valores afastados da posição central, visto que ela é uma medida vinculada à posição que ocupa no conjunto ordenado. Assim, se existirem valores demasiadamente grandes ou pequenos (valores extremos), estes não afetarão o valor da mediana, pois não alterarão a ordem da distribuição.

Exemplo 1

Na tabela 5.10 encontra-se a distribuição de frequência dos salários das três funções existentes em uma empresa de médio porte.

Tabela 5.10: Distribuição de salários - Exemplo 1

Função	Salário (R$)	Número de Funcionários
Operário	500,00	40
Inspetor	2.500,00	8
Diretor	5.000,00	2

Com base nesses dados, analise as proposições e indique a verdadeira

I. A mediana é o salário de R$ 2.500,00 recebido pelos inspetores dessa empresa.

II. A mediana é o salário de R$ 500,00; recebido pelos operários.

III. A mediana e a média aritmética dos salários são iguais.

Análise das proposições

I. Falsa, a empresa conta com 50 funcionários, logo a mediana será a média entre os salários que ocupam as posições 25 e 26 do rol, ambos são de R$ 500,00.

II. Verdadeira.

III. Falsa, a média aritmética dos salários é R$ 1000,00, enquanto a mediana é R$ 500,00.

Exemplo 2

Suponha que precisamos calcular a mediana em relação ao resultado de um teste objetivo de conhecimentos gerais aplicado a um grupo de 7 alunos, cujas pontuações foram: 5, 8, 6, 3, 7, 5, 9.
Resolução
Iniciamos ordenando os valores, assim o rol será: 3, 5, 5, 6, 7, 8, 9.
Em seguida, calculamos a posição da mediana neste conjunto, ou seja, o elemento mediano. São 7 valores, então a mediana ocupa a quarta posição e será igual a 6.

5.10 Moda (M_o)

Por definição, a moda ou valor modal de um conjunto de dados, é o valor que apresenta a maior frequência absoluta. Cabe salientar que a moda pode não existir. Caso exista, pode não ser única, assim, um conjunto pode ser amodal, unimodal, bimodal, etc.

Exemplos

1) O conjunto A= {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} é amodal, pois nenhum valor apresenta frequência maior que os demais.
2) O conjunto B= {1, 1, 2, 3, 4, 5, 6} é unimodal e a moda M_o= 1.
3) O conjunto C= {1, 1, 2, 2, 3, 5, 12} é bimodal, 1 e 2 apresentam maior frequência.

4) O conjunto D= {1, 1, 5, 5, 7, 7, 12, 12} é amodal, pois todos os valores tem frequências iguais.

5.11 Medidas de dispersão

Um aspecto importante no estudo descritivo de um conjunto de dados estatísticos, é o da determinação da variabilidade ou dispersão desses dados, em relação à medida de localização do centro da amostra; a média aritmética, por exemplo. As medidas de dispersão são indispensáveis para a descrição do comportamento dos dados em questão, pois medem a consistência de uma distribuição de frequências, que é exatamente a variabilidade já citada, possibilitando uma melhor compreensão do fenômeno pesquisado.

5.11.1 Amplitude Total (A_T)

Das medidas de dispersão, a amplitude total é a mais simples que existe. Para calculá-la, basta fazer a diferença entre o maior e o menor valor da distribuição, já que se baseia apenas nos dois extremos. Tem pouca utilidade se quisermos informações mais apuradas a respeito do comportamento do fenômeno estudado. Ao analisarmos a tabela 5.3, página 51, verificamos que a maior cotação e a menor são respectivamente R$ 2,31 e R$ 1,56. A amplitude total é de R$ 0,75; este valor não traz muita informação a respeito da tabela, logo não podemos tirar conclusões mais aprofundadas acerca das variações dos números dentro do conjunto.

5.11.2 Variância e Desvio Padrão

Para medir o grau de dispersão ou de concentração de valores de uma série estatística em torno de sua média, é importante que se estude o comportamento dos desvios de cada valor em relação à respectiva média. Entretanto, ao somarmos todos os desvios em relação à média, verificamos que tal soma será sempre nula (propriedade), pois a média é exatamente o ponto de equilíbrio dos dados.

O que fazer então? Uma maneira simples é utilizar a média aritmética do quadrado desses desvios (isso na realidade é a média quadrática dos desvios). Daí vem, justamente, a definição matemática dessa medida de dispersão. Definimos então a Variância (V) de um conjunto qualquer de valores como a média quadrática dos desvios tomados em relação à média desse conjunto, que pode ser calculada por:

$$V = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}$$

A variância é uma importante medida de dispersão, mas, seu resultado é dado em unidade de medida que é o quadrado da original. Algumas dessas medidas não têm nenhum sentido prático. Ficaria sem sentido analisar, por exemplo, $(\text{idade})^2$, $(\text{massa})^2$, $(\text{Salário mínimo})^2$, etc. Logo, como alternativa para contornar essas situações, existe uma medida denominada desvio-padrão (D_p), definida como a raiz quadrada da variância:

$$D_p = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})}{n}}.$$

Outra medida de variabilidade que também é utilizada é o desvio médio $\bar{D}$, este pode ser calculado por:

$$\bar{D} = \frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i - \bar{x}|}{n}.$$

Exemplo 1

Determine o desvio médio, a variância e o desvio padrão da seguinte série estatística:

X= {10, 20, 30, 40, 50, 90}.

Calculando a média aritmética, obteremos $\bar{x} = 40$. Agora vamos calcular as medidas de variabilidade:

Tabela 5.11: Elementos, Desvios e Quadrados dos Desvios - Exemplo 1

Elementos da série	**Desvios**	**Quadrados dos desvios**
x_1= 10	10 - 40= - 30	900
x_1= 20	20 - 40 = - 20	400
x_1= 30	30 - 40= - 10	100
x_1= 40	40 - 40= 0	0
x_1= 50	50 - 40= 10	100
x_1= 90	90 - 40 = 50	2500
Total		4000

- O desvio médio é $\overline{D} = \frac{|-30| + |-20| + |-10| + |10| + |50|}{6} = 20$;
- A variância é $V = \frac{4000}{6} = 666{,}67$; e
- O desvio padrão é $D_P = \sqrt{666{,}67} = 25{,}82$.

Exemplo 2

Considere as médias finais, agrupadas na tabela 5.12, referentes a 54 alunos, na disciplina de Matemática, da 2.ª série "A" do ensino médio, do Colégio XYZ. Calcule a média da turma, variância e desvio padrão.

Tabela 5.12: Distribuição das médias dos 54 alunos para o cálculo da Variância.

Média	N° de alunos (f_i)	Ponto Médio (x_i)	$(x_i - \overline{x})^2$	$(x_i - \overline{x})^2 \times f_i$
3 ⊢ 4	2	3,5	$(3{,}5 - 7{,}3)^2 = 14{,}44$	28,88
4 ⊢ 5	3	4,5	$(4{,}5 - 7{,}3)^2 = 7{,}84$	23,52
5 ⊢ 6	7	5,5	$(5{,}5 - 7{,}3)^2 = 3{,}24$	22,68
6 ⊢ 7	8	6,5	$(6{,}5 - 7{,}3)^2 = 0{,}64$	5,12
7 ⊢ 8	14	7,5	$(7{,}5 - 7{,}3)^2 = 0{,}04$	0,56
8 ⊢ 9	12	8,5	$(8{,}5 - 7{,}3)^2 = 1{,}44$	17,28
9 ⊢ 10	8	9,5	$(9{,}5 - 7{,}3)^2 = 4{,}84$	38,72
Total	54		32,48	136,76

A média em questão será:

$$\overline{x} = \frac{394}{54} = 7{,}3.$$

A variância é a média quadrática dos desvios, logo:

$$V = \frac{136{,}76}{54} = 2{,}53.$$

O desvio padrão, que é representado pela raiz quadrada da variância, é:

$$D_P = \sqrt{2{,}53} = 1{,}59.$$

Exemplo 3

Num levantamento realizado em 100 jogos de futebol de um torneio, foram colhidos os seguintes dados:

Gols por partida	0	1	2	3	4	5
Frequência de jogos	28	26	31	9	4	2

Quadro 5.3: Gols por partida de futebol

Calcular o desvio padrão do número de gols marcados por partida.

Cálculo da média

$$\bar{x} = \frac{0 \times 28 + 1 \times 26 + 2 \times 31 + 3 \times 9 + 4 \times 4 + 5 \times 2}{28 + 26 + 31 + 9 + 4 + 2} = \frac{141}{100} = 1{,}41.$$

Cálculo da média quadrática

$$V = \frac{28.(0 - 1{,}41)^2 + 26.(1 - 1{,}41)^2 + 31.(2 - 1{,}41)^2 + 9.(3 - 1{,}41)^2 + 4.(4 - 1{,}41)^2 + 2.(5 - 1{,}41)^2}{28 + 26 + 31 + 9 + 4 + 2} = 1{,}4618.$$

Dessa forma, o desvio padrão será $D_P = \sqrt{1{,}4618} \cong 1{,}21$ gol por partida.

6. ENSINO DA ESTATÍSTICA COM A MODELAGEM MATEMÁTICA

Nesta seção, estão versadas todas as etapas da aplicação prática do trabalho referente ao ensino da Estatística, utilizando-se da Modelagem Matemática, bem como os resultados obtidos. Também os motivos que levaram à escolha do tema, e a sequência didática desenvolvida.

6.1 Desenvolvimento e público envolvido

O desenvolvimento das atividades relacionadas à prática pedagógica ocorreu no período de 05 a 08 de fevereiro de 2013; foram quatro encontros, cada um com três horas de duração. A aplicação foi feita a partir da criação de um grupo de estudos com alunos de diferentes séries; o grupo era formado por quatro alunos do 8.° ano do ensino fundamental, seis alunos da 1.ª série do ensino médio e 5 alunos da 2.ª série, também do ensino médio. Todos os alunos estavam regularmente matriculados junto ao Colégio Mafrense, Instituição de Ensino Particular, vinculado à Universidade do Contestado, Campus Mafra, situado em Mafra, Santa Catarina.

6.2 O porquê da Estatística

O tema Estatística foi escolhido pela relevância cada vez maior na nossa sociedade, desempenhando papel crescente e importante em praticamente todas as áreas da pesquisa humana. O entendimento dos conceitos estatísticos e a possibilidade de comparações de resultados para tomadas de decisões, na opinião deste autor, deve ser uma constante para todos os nossos educandos.

O real entendimento de conceitos das medidas de tendência central e dispersão possibilita uma visão mais aprofundada acerca de informações diariamente expostas pelos diversos meios de comunicação. Essas informações, se bem interpretadas, podem influenciar positivamente, não só o dia a dia dos alunos, mas de toda a sociedade. Acreditando fortemente no exposto, afirmamos que uma condução bem elaborada dos assuntos concernentes ao letramento estatístico, podem extrapolar os limites das tradicionais fórmulas e se tornar, além de agradável, muito produtivo.

6.3 Metodologia aplicada

A metodologia aplicada foi a Modelagem Matemática, por se tratar de uma metodologia que objetiva a interpretação e compreensão dos mais diversos fenômenos do nosso cotidiano. A Modelagem pode ser aplicada em praticamente todos os assuntos relacionados à Matemática. Para o ensino da Estatística, é uma poderosa ferramenta, visto que podemos aliar os conceitos formais estudados aos assuntos de interesse dos alunos. No momento em que esse interesse vem à tona, o real aprendizado passa a acontecer e ser significativo.

6.4 Sequência didática da aplicação prática

Como já exposto, para fazer a aplicação prática do trabalho, foi necessário a criação de um grupo de estudos. Para tanto, se apresentaram quinze alunos, que voluntariamente participaram das atividades; todas realizadas em contra turno (período vespertino), visto que as turmas do Ensino Médio, bem como o 8.º ano, tem suas atividades regulares no período matutino.

Ao formar o grupo, surgiram os primeiros desafios a serem vencidos, pois o grupo era totalmente heterogêneo em relação ao conteúdo proposto. No grupo haviam seis alunos que já estudaram o tema; em contrapartida, os outros nove sequer sabiam as definições mais elementares. Para que o trabalho fosse implementado, foi elaborado o material de apoio constante da seção quatro, deste trabalho, com as principais definições usadas nas aulas de estatística.

O material foi trabalhado completamente nos dois primeiros encontros, nos dias 05/ 02/ 2013 e 06/ 02/ 2013. Ao final do segundo encontro, todos os envolvidos já demonstravam condições satisfatórias para os cálculos das diversas situações que seriam propostas a posteriori. No dia 07/ 02/ 2013, foi passado o filme “O homem que mudou o jogo”, com o objetivo principal de mostrar aos educandos, como a Estatística está presente em quase tudo no nosso dia a dia. Nessa etapa, todos perceberam a utilização dos números para tomar decisões, as quais devem ser confiáveis. Ficou evidente que análises criteriosas podem influenciar positivamente o futuro de pessoas e empresas.

Notou-se grande interesse no entendimento dos métodos utilizados para que informações técnicas se transformassem em um coeficiente. Após o filme, foram discutidos novamente os conceitos e definições trabalhados anteriormente, ao final desse encontro, concluímos que já poderíamos partir para a etapa final.

6.5 Sobre o filme sensibilizador

O filme "O homem que mudou o jogo", lançado em 2011, retrata a situação real ocorrida em um time de Beisebol profissional norte americano, o Oakland Athletics, que sem um grande orçamento para investir na montagem de um elenco competitivo, usou de dados estatísticos para formar o time que disputou a temporada 2002.

Sobre a forma como o campeonato é disputado, a MLB ou Major League Baseball, é a maior liga de beisebol do mundo, composta por 30 times (29 americanos e 1 canadense) divididos em duas sub-ligas: American League (Liga Americana) e National League (Liga Nacional), cada uma com 15 times. Essas duas sub-ligas são divididas em três divisões cada: Central, Leste e Oeste. Durante a temporada, que dura 7 meses, no período de abril a outubro, cada time tem 162 jogos; a grande maioria desses jogos é entre equipes da mesma liga, mas em algumas semanas ocorre o período interligas, com jogos entre times de ligas diferentes. Os quadros 6.1 e 6.2 listam as equipes de cada liga.

Liga Americana de Baseball

Divisão Oeste	**Divisão Central**	**Divisão Leste**
Houston Astros	Chicago White Sox	Baltimore Orioles
Los Angeles Angels	Cleveland Indians	Boston Red Sox
Oakland Athletics	Detroit Tigers	New York Yankees
Seattle Mariners	Kansas City Royals	Tampa Bay Rays
Texas Rangers	Minnesota Twins	Toronto Blue Jays

Quadro 6.1: Times da Liga Americana de baseball

Liga Nacional de Baseball

Divisão Oeste	**Divisão Central**	**Divisão Leste**
Arizona Diamondbacks	Chicago Cubs	Atlanta Braves
Colorado Rockies	Cincinnati Reds	Miami Marlins
Loa Angeles Dodgers	Milwaukee Brewers	New York Mets
San Diego Padres	Pittsburg Pirates	Philadelphia Phillies
San Francisco Giants	Saint Louis Cardinals	Washington Nationals

Quadro 6.2: Times da Liga Nacional de baseball

A classificação é feita dentro de suas divisões, da seguinte forma: o time soma 0,5 ponto a cada vitória e subtrai 0,5 ponto por derrota, por exemplo um time que conseguiu vencer 120 jogos, somará 120 $\times$0,5= 60 pontos. Como não há o empate, o time teve 42 derrotas, portanto 42 $\times$ 0,5= 21 serão subtraídos, logo, o time teve 60 – 21= 39 pontos. Após esta jornada, são classificados 10 times, contemplando todas as ligas, por critérios estabelecidos pela MLB para a pós-temporada (fase final), daí seguem os confrontos até que se defina o campeão.

A maratona de jogos é muito grande, isso faz com que cada time tenha no seu elenco muitos jogadores, para que possíveis baixas durante o campeonato não prejudiquem a qualidade do time durante todo o campeonato. A consequência direta é que o orçamento deve ser alto, tornando-se maior ainda, se entre os jogadores, figurarem estrelas do esporte, com salários que chegam aos 15 milhões de dólares ao ano.

Com a lista salarial mais baixa entre todos os outros times da liga nacional americana, o Oakland Athletics conseguiu uma sequência de 20 vitórias seguidas na temporada de 2002, sem mudanças no elenco que antes havia perdido 11 partidas consecutivas.

Os resultados não vieram do treinador ou de discursos inspirados dentro de um vestiário, mas sim de um executivo responsável pela compra e venda de jogadores. Gerenciado por Billy Beane (Brad Pitt), o executivo de um dos menores times da liga, o A’s conseguiu montar um time que só voltou a ser derrotado na partida final pelo Minnesota Twins, outro time com uma folha salarial muito superior.

A inovação proposta por Beane foi motivada pelo fato de que, ao final da edição de 2001, além de perder boa parte de seus melhores jogadores, ainda recebeu a notícia de que não teria grandes recursos para investir na reformulação da equipe. Beane é um executivo disposto a enfrentar o desafio de reestruturar a equipe sem grandes estrelas, ele resolve investir nas teorias de Peter Brand (Jonah Hill), um economista recém-formado em Yale que trabalha com números e não com a habilidade dos jogadores.

As atuações de cada jogador são analisadas minuciosamente, verificando quais são seus pontos fortes e fracos, estas análises geram coeficientes de aproveitamento (números), e ao invés de procurarem um único jogador que possa produzir tais números que eles precisam para vencer, eles procuram 2 ou 3 jogadores para a mesma função que possam realizar os mesmos números e com salários muito menores.

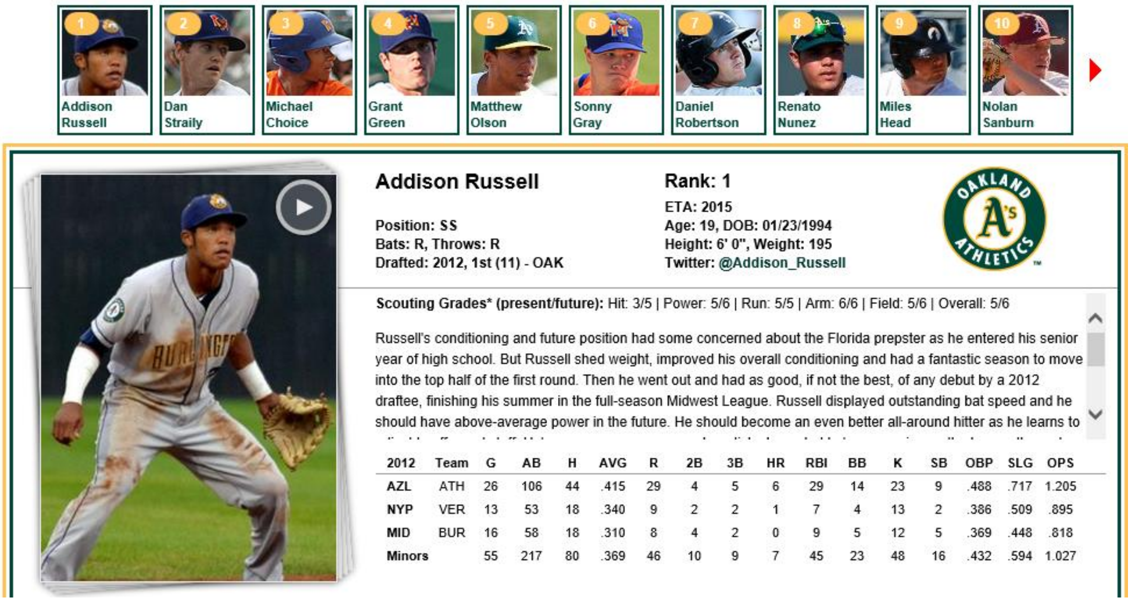
Peter Brand analisou 20 anos de estatísticas dos jogos para montar a base de um time vencedor. Não vencendo com uma grande estrela, mas com um conjunto. Ao enfrentar toda a comissão técnica do A’s, ele sabe que se tiver uma temporada fracassada, será demitido.

Ao iniciar a temporada de 2002, toda a crítica especializada no assunto culpa o dirigente pelas 11 derrotas; depois, exalta o treinador quando o time consegue a sequência de vitórias, mesmo que a sequência tenha vindo por causa das atitudes de Beane, muitas vezes criando atritos com o treinador.

Hoje, outras equipes da liga aderiram ao projeto de dados estatísticos para a composição de suas equipes; seguindo esta filosofia, o Boston Red Sox foi campeão em 2004, cabe salientar que desde 1918 a equipe não conquistava a Liga Americana de Beisebol.

Ao visitar a página do Oakland, pode-se observar os dados estatísticos não só da própria equipe, mas de todas as equipes da liga profissional, pode-se ainda fazer várias comparações entre atletas, equipes, etc...

A figura 6.1 mostra a página oficial do A’s, com informações sobre o jogador Addison Russell.



2012	Team	G	AB	H	AVG	R	2B	3B	HR	RBI	BB	K	SB	OBP	SLG	OPS
AZL	ATH	26	106	44	.415	29	4	5	6	29	14	23	9	.488	.717	1.205
NYP	VER	13	53	18	.340	9	2	2	1	7	4	13	2	.386	.509	.895
MID	BUR	16	58	18	.310	8	4	2	0	9	5	12	5	.369	.448	.818
Minors		55	217	80	.369	46	10	9	7	45	23	48	16	.432	.594	1.027

Figura 6.1: Página oficial do A's, com estatísticas sobre o jogador Addison Russel.

Disponível em: http://oakland.athletics.mlb.com/mlb/prospects/watch/y2013/index.jsp?c_id=oak#list=oak , acesso em 10/02/2013.

No filme citado, a estatística se apresenta como uma ferramenta valiosa usada para gerenciar uma agremiação esportiva, provando mais uma vez a sua importância cada vez maior nas tomadas de decisões. Após a exibição do filme, os alunos responderam um pequeno questionário com o objetivo de verificar quais conceitos matemáticos foram notados. As questões propostas foram:

Questão 01: Você achou importante a contratação de um economista para auxiliar no gerenciamento da equipe?

Questão 02: Quais conteúdos foram notados durante o filme?

Questão 03: A análise de "números" pode realmente auxiliar em tomadas de decisões?

Questão 04: O que o economista pretendia, ao comparar todos os números?

Questão 05: A renovação de uma equipe, comparando os dados dos jogadores, foi mais eficiente do que a equipe de olheiros?

Analisando as respostas pode-se perceber que a grande maioria dos alunos atingiu de maneira satisfatória o objetivo pretendido. Praticamente todos responderam positivamente à primeira pergunta. Todos notaram que o gerente usou de estatísticas para contratações (muitos citaram as médias como referência).

Todos concordaram ser importante ter informações numéricas, pois facilita a comparação. Após um tempo de discussão, o grupo concluiu que o economista levantou todos os pontos fortes e fracos de cada jogador para criar um índice e poder compará-lo. Dos quinze alunos, onze confiariam somente nos números; dois nos olheiros e dois nos números, desde que os olheiros pudessem opinar.

6.6 Proposta de trabalho: Analisar os dados estatísticos referentes a uma rodada do NBB

No último encontro, dia 08/ 02/ 2013, os alunos puderam por em prática os conhecimentos adquiridos como preparação à situação problema. Como os esportes chamam a atenção de praticamente todos os envolvidos no trabalho, adolescentes entre 13 e 17 anos, a ideia de analisar os resultados dos jogos de uma rodada do NBB (Novo Basquete Brasil), foi prontamente aceita.

Foi solicitado aos alunos a realização de um levantamento estatístico da primeira rodada do Novo Basquete Brasil (NBB), edição 2012/2013 disputada entre os dias 23/11/2012 e 24/11/2012. A NBB é a liga oficial de basquete do Brasil, organizada com a chancela da Confederação Brasileira de Basquete, em substituição ao antigo Campeonato Brasileiro de Basquete. Para tanto foram fornecidos aos alunos todos os resultados dos jogos da rodada supracitada, com resultados finais e parciais (o basquete é disputado em quatro quartos de 12 minutos cada). O resultado final se dá pela soma dos pontos obtidos nos quartos.

Para os três primeiros jogos, os cálculos foram feitos manualmente, para reforçar a importância dos conhecimentos já adquiridos. Os cálculos para os demais jogos foram obtidos com a utilização da Planilha Eletrônica Excell, com objetivo de agilizar os cálculos e fazer com que os alunos utilizassem o laboratório de informática. Também foram utilizadas calculadoras científicas com o objetivo de familiarizá-los ao uso dos recursos de cálculo que estas fornecem.

O trabalho consistia em calcular/identificar:

- A amplitude de pontos marcados por jogo entre todas as equipes;
- A média aritmética dos pontos por jogo;
- A média aritmética dos quartos do jogo de cada time;
- A mediana de pontos por quarto;
- A variância (por quartos); e
- O desvio padrão (por quartos).

A atividade proposta também tinha por objetivo verificar características comuns às equipes vencedoras de cada confronto. Inicialmente foram elaboradas tabelas com os resultados parciais e finais de cada jogo, destacando a média aritmética, mediana, variância e desvio padrão.

6.7 Resultados dos Jogos da primeira rodada do NBB e análise dos mesmos

A seguir estão as figuras demonstrativas do resultado final de cada jogo; também os resultados parciais dos quartos e a tabela com os valores calculados da Média, Mediana, Variância e Desvio Padrão.

Franca x Brasília

Figura 6.2 com os resultados do jogo Franca e Brasília e tabela 6.1 confeccionada a partir dos dados da figura 6.2.

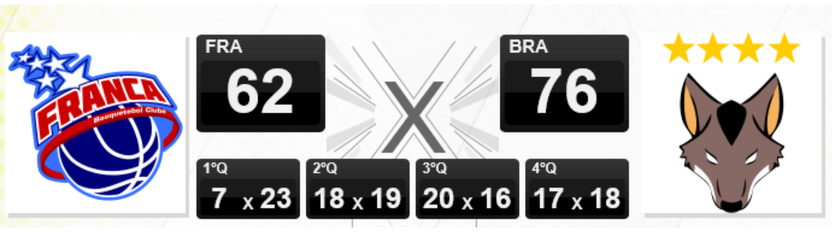


Figura 6.2: Resultado do jogo Franca e Brasília, destacando os pontos marcados em cada quarto por equipe.

Tabela 6.1: Pontos marcados por quarto das equipes, média aritmética dos quartos, mediana dos quartos, variância e desvio padrão – Franca e Brasília.

	1Q	2Q	3Q	4Q	Média	Mediana	Variância	Desvio Padrão
Franca	7	18	20	17	15,5	17,5	25,25	5,02
Brasília	18	16	19	23	19	18,5	6,5	2,55

Minas Tênis Clube x Tijuca

Figura 6.3 com os resultados do jogo MinasTênis Clube e Tijuca e tabela 6.2 confeccionada a partir dos dados da figura 6.3.

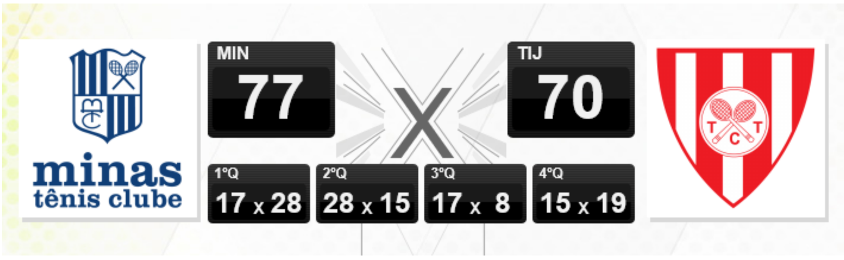


Figura 6.3: Resultado do jogo Minas Tênis Clube e Tijuca, destacando os pontos marcados em cada quarto por equipe.

Tabela 6.2: Pontos marcados por quarto das equipes, média aritmética dos quartos, mediana dos quartos, variância e desvio padrão – Minas e Tijuca

	1Q	2Q	3Q	4Q	Média	Mediana	Variância	Desvio Padrão
Minas	17	28	17	15	19,25	17	26,19	5,12
Tijuca	28	15	8	19	17,5	17	52,25	7,23

São José x Bauru

Figura 6.4 com os resultados do jogo São José e Bauru e tabela 6.3 confeccionada a partir dos dados da figura 6.4.

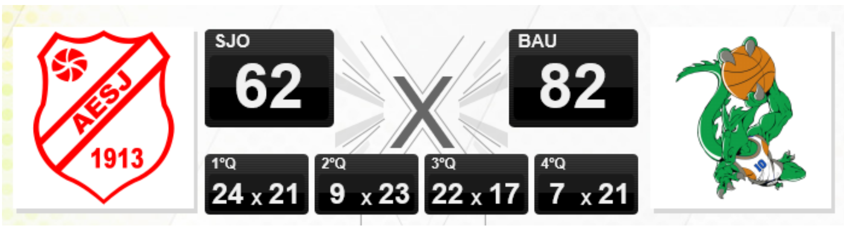


Figura 6.4: Resultado do jogo São José e Bauru, destacando os pontos marcados em cada quarto por equipe.

Tabela 6.3: Pontos marcados por quarto das equipes, média aritmética dos quartos, mediana dos quartos, variância e desvio padrão – São José e Bauru

	1Q	2Q	3Q	4Q	Média	Mediana	Variância	Desvio Padrão
São José	24	9	22	7	15,5	15,5	57,25	7,57
Bauru	21	23	17	21	20,5	21	4,75	2,18

Mogi da Cruzes x Liga Sorocabana

Figura 6.5 com os resultados do jogo Mogi das Cruzes e Sorocabana e tabela 6.4 confeccionada a partir dos dados da figura 6.5.

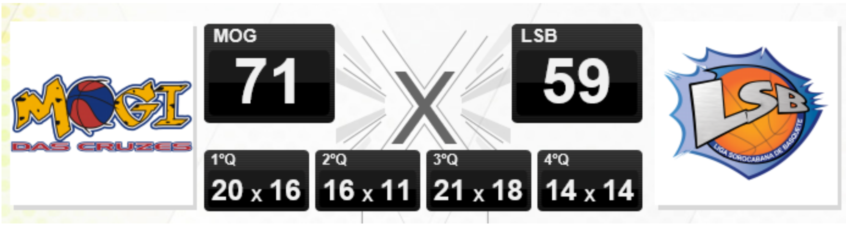


Figura 6.5: Resultado do jogo Mogi da Cruzes e Liga Sorocabana, destacando os pontos marcados em cada quarto por equipe.

Tabela 6.4: Pontos marcados por quarto das equipes, média aritmética dos quartos, mediana dos quartos, variância e desvio padrão – Mogi das Cruzes e Sorocabana.

	1Q	2Q	3Q	4Q	Média	Mediana	Variância	Desvio Padrão
Mogi	2	16	21	14	13,25	15	48,69	6,98
Sorocabana	14	18	11	16	14,75	15	6,68	2,59

Paulistano x Limeira

Figura 6.6 com os resultados do jogo Paulistano e Limeira e tabela 6.5 confeccionada a partir dos dados da figura 6.6.

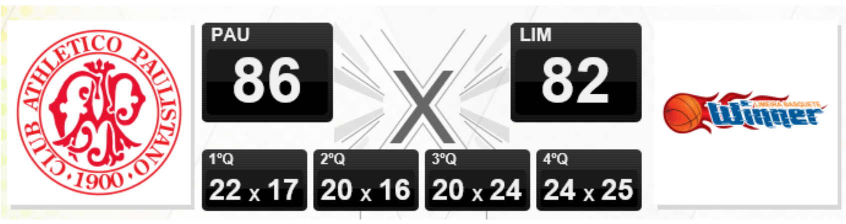


Figura 6.6: Resultado do jogo Paulistano e Limeira, destacando os pontos marcados em cada quarto por equipe.

Tabela 6.5: Pontos marcados por quarto das equipes, média aritmética dos quartos, mediana dos quartos, variância e desvio padrão – Paulistano e Limeira

	1Q	2Q	3Q	4Q	Média	Mediana	Variância	Desvio Padrão
Paulistano	22	20	20	24	21,5	21	2,75	1,66
Limeira	17	16	24	25	20,5	20,5	16,25	4,03

Pinheiros x Joinvile

Figura 6.7 com os resultados do jogo Pinheiros e Joinvile e tabela 6.6 confeccionada a partir dos dados da figura 6.7.

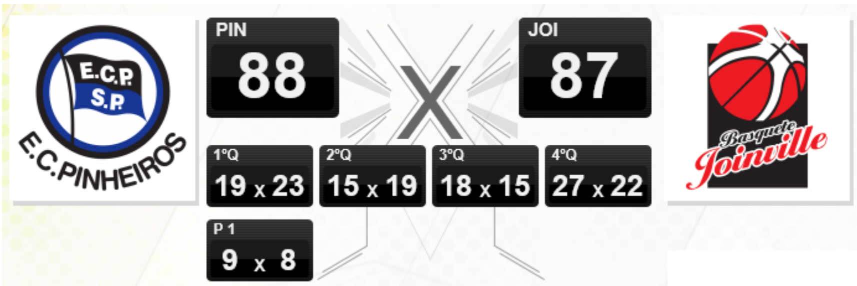


Figura 6.7: Resultado do jogo Pinheiros e Joinvile, destacando os pontos marcados em cada quarto por equipe.

Tabela 6.6: Pontos marcados por quarto das equipes, média aritmética dos quartos, mediana dos quartos, variância e desvio padrão – Pinheiros e Joinvile

	1Q	2Q	3Q	4Q	Média	Mediana	Variância	Desvio Padrão
Pinheiros	19	15	18	27	19,75	18,5	19,69	4,44
Joinvile	23	19	15	22	19,75	20,5	9,69	3,11

Esse jogo terminou empatado em 79 x 79, foi feita então a prorrogação, na qual, sagrou-se vencedor o time do Pinheiros, por 9 x 8, finalizando o placar. Os cálculos foram feitos com base nos resultados dos quatro quartos, para que todas as equipes tivessem o mesmo parâmetro de comparação.

Palmeiras x Suzano

Figura 6.8 com os resultados do jogo Palmeiras e Suzano e tabela 6.7 confeccionada a partir dos dados da figura 6.8.

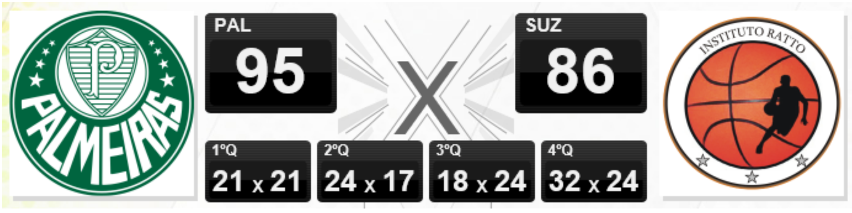


Figura 6.8: Resultado do jogo Palmeiras e Suzano, destacando os pontos marcados em cada quarto por equipe.

Tabela 6.7: Pontos marcados por quarto das equipes, média aritmética dos quartos, mediana dos quartos, variância e desvio padrão – Palmeiras e Suzano

	1Q	2Q	3Q	4Q	Média	Mediana	Variância	Desvio Padrão
Palmeiras	21	24	18	32	23,75	22,5	27,19	5,21
Suzano	21	17	24	24	21,5	22,5	8,25	2,87

Uberlândia x Cearense

Figura 6.9 com os resultados do jogo Uberlândia e Cearense e tabela 6.8 confeccionada a partir dos dados da figura 6.9.

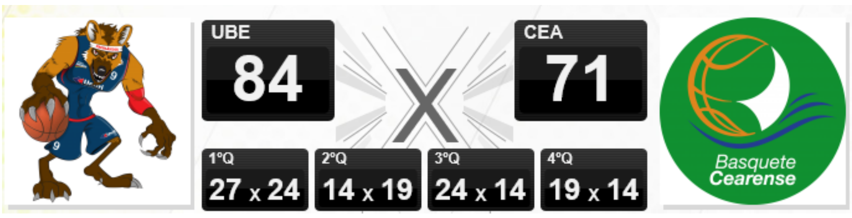


Figura 6.9: Resultado do jogo Uberlândia e Cearense, destacando os pontos marcados em cada quarto por equipe.

Tabela 6.8: Pontos marcados por quarto das equipes, média aritmética dos quartos, mediana dos quartos, variância e desvio padrão – Uberlândia e Cearense

	1Q	2Q	3Q	4Q	Média	Mediana	Variância	Desvio Padrão
Uberlândia	27	14	24	19	21	21,5	24,5	4,95
Cearense	24	19	14	14	17,75	16,5	17,19	4,15

Vila Velha x Flamengo

Figura 6.10 com os resultados do jogo Vila Velha e Flamengo e tabela 6.9 confeccionada a partir dos dados da figura 6.10.

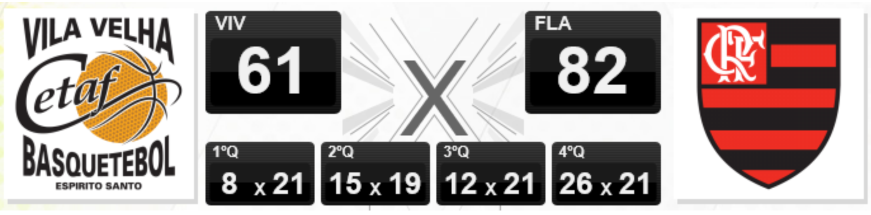


Figura 6.10: Resultado do jogo Vila Velha e Flamengo, destacando os pontos marcados em cada quarto por equipe.

Tabela 6.9: Pontos marcados por quarto das equipes, média aritmética dos quartos, mediana dos quartos, variância e desvio padrão – Vila Velha e Flamengo

	1Q	2Q	3Q	4Q	Média	Mediana	Variância	Desvio Padrão
Vila Velha	8	15	12	26	17	17	47,75	6,91
Flamengo	21	19	21	21	21	21	1	1

6.8 Atividade de análise dos cálculos feitos a partir resultados dos jogos

Após os cálculos e confecções das tabelas acerca dos resultados dos jogos da 1.ª rodada do NBB, os alunos responderam a algumas questões referentes aos resultados apresentados ao início das atividades (as figuras com placar de cada jogo). Também os resultados obtidos pela aplicação prática dos conceitos anteriormente estudados em sala. O objetivo dessa atividade foi o de possibilitar uma comparação entre o real entendimento sobre o assunto através das aulas tradicionais, e; se existe melhora significativa, caso a metodologia utilizada extrapole os limites pré-estabelecidos pelo livro didático. Foram respondidas algumas questões elaboradas pelo professor, as questões foram:

Questão 01) Qual equipe fez a maior pontuação?

R: A equipe do Palmeiras, que fez 95 pontos.

Questão 02) Qual equipe fez a menor pontuação?

R: A Liga Sorocabana, com 59 pontos.

Questão 03) Quais equipes foram mais regulares em relação aos pontos marcados por quarto, confeccione uma tabela, indique o desvio padrão e verifique e o resultado foi de vitória ou derrota.

R: A tabela 6.10 expressa em ordem crescente o Desvio Padrão de cada time, obtido de acordo com os pontos marcados e também se o time venceu ou foi derrotado no jogo.

Tabela 6.10: Equipes participantes do NBB 2012/2013, com Desvio Padrão calculado a partir dos pontos marcados por quarto e resultado final (V) vitória ou (D), derrota.

Equipe	Desvio Padrão	Resultado	Equipe	Desvio Padrão	Resultado
Flamengo	1	V	Pinheiros	4,44	V
Paulistano	1,66	V	Uberlândia	4,95	V
Bauru	2,18	V	Franca	5,02	D
Brasília	2,55	V	Minas	5,12	V
Sorocabana	2,59	D	Palmeiras	5,21	V
Suzano	2,87	D	Vila Velha	6,91	D
Joinvile	3,11	D	Mogi das Cruzes	6,98	V
Limeira	4,03	D	Tijuca	7,23	D
Cearense	4,15	D	São José	7,57	D

Questão 04) Com os dados da questão anterior, em relação ao desvio padrão, analise-os e faça uma breve reflexão dos resultados.

R: Pode-se observar, que das cinco equipes com desvio padrão mais baixo, 4 venceram e; das 5 com desvio padrão mais alto, apenas 2 venceram. Sendo que a de menor desvio padrão (Flamengo) e a de maior desvio padrão (São José) tiveram como resultado, vitória e derrota respectivamente. Podemos assim concluir que, num contexto pré-estabelecido, quanto maior a regularidade da equipe, há indícios de que a chance de vitória aumenta consideravelmente.

5) Elabore um gráfico que descreva o jogo Vila Velha x Flamengo

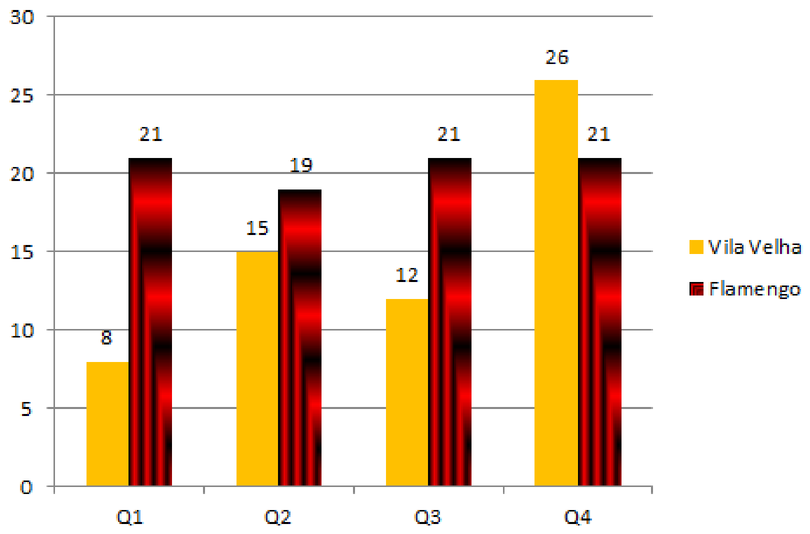


Figura 6.11: Gráfico de barras com os resultados dos quartos do jogo Vila Velha e Flamengo.

6.9 Análise dos resultados obtidos

Ao final dessa etapa da atividade proposta, foi possível perceber nitidamente o avanço dos alunos em relação ao tema Estatística. Como já exposto, o grupo era formado por alguns alunos que já tinham estudado o conteúdo, porém, outros tiveram o primeiro contato durante a atividade; essa heterogeneidade foi bastante interessante para o desenvolvimento do trabalho, pois possibilitou verificar a construção do conhecimento por alguns alunos, enquanto consolidou o aprendizado de outros. Como todos os trabalhos foram feitos em grupo(s), acabou criando uma interação entre os membros de cada grupo, durante todo o trabalho, aqueles que “sabiam” mais, auxiliaram os que tinham dificuldades.

As questões 01 e 02 foram respondidas sem qualquer dificuldade, por simples observação, sem necessidade de conhecimentos prévios. A questão 03 foi a que levou maior parte do tempo, mas os alunos não tiveram dificuldades, pois durante todo o desenvolvimento do trabalho, já haviam feito vários cálculos e também usaram a planilha eletrônica excel na confecção das tabelas já apresentadas. Houve um grande envolvimento por parte de todos, foram feitas várias tabelas e quadros, a planilha foi bastante explorada por parte dos alunos.

A questão 05 foi a que apresentou alguma dificuldade, não no aspecto de lançar os dados na planilha, mas na formatação do gráfico, aqui foram várias intervenções para que ficasse claro o modelo de gráfico mais adequado, como ficariam as legendas e uso de cores, por exemplo. Após uma série de possibilidades, chegaram a um consenso na escolha pelo gráfico de barras, o qual foi apresentado.

A questão 05 foi a que suscitou maior debate entre os alunos; enquanto alguns compararam rapidamente os resultados tabelados na questão 03, outros acabaram refazendo praticamente todos os cálculos para chegar a uma conclusão. Só depois perceberam o trabalho maior, desnecessário. Não foi necessária a intervenção por parte do professor, em pouco tempo o grupo como um todo conseguiu perceber as tendências a vitórias ou derrotas dos times. O ponto interessante nessa questão, foi a unanimidade por parte dos alunos, de que o que existe é um indício, não a certeza; que era a resposta esperada.

7. AVALIAÇÃO GERAL E ALGUMAS REFLEXÕES SOBRE O USO DA MODELAGEM MATEMÁTICA

O processo de ensino e aprendizagem da Estatística por meio do trabalho com Modelagem em sala de aula aponta indícios da existência e do desenvolvimento de competências estatísticas nos alunos. Mesmo sem estabelecer elo entre o fato e a palavra “Estatística”, esses estudantes ficam imbuídos de noções básicas em relação ao conteúdo específico, produzem discussões e tomada de decisões utilizando-se de ferramentas estatísticas.

A Modelagem Matemática é desenvolvida em sala de aula, o envolvimento do educando com o processo de ensino e aprendizagem conduz ao desencadeamento de competências às vezes não notadas pelo docente ou até mesmo pelo próprio aluno. Nesse caso a Modelagem possibilitou detectar a competência almejada no âmbito da Educação Estatística, a Literácia Estatística.

Sabemos, pois, que o trabalho com tecnologia dentro da sala de aula é muitas vezes um desafio para alguns alunos e principalmente para o profissional docente, enquanto alguns alunos dominavam totalmente o uso do computador, outros apresentaram dificuldades até no simples processo de ligá-lo. Apesar do grande advento da tecnologia informática que assistimos diariamente em nosso cotidiano, é preciso ressaltar a classe de indivíduos que ainda está ou se faz alheia a ela.

No que se refere ao trabalho docente, diversos são os fatores que apontam para a não inclusão dessa tecnologia em sala de aula. Um dos motivos que podemos citar é a falta de preparo por parte dos próprios professores para ações pedagógicas com informática ou mesmo para o uso pessoal desta tecnologia. Preparo este que na maioria das vezes não é oferecido pelo próprio curso de licenciatura em que o professor se graduou.

Outro fator importante, e que deve ser trazido à tona, são as precárias condições das salas de informática, principalmente na rede pública de ensino, constatadas pelas dificuldades encontradas pelos alunos advindos de tais escolas, exatamente os que enfrentaram dificuldades. Geralmente são muitos alunos e poucos computadores, há falta de softwares e/ou de internet, de manutenção e/ou de um técnico responsável. Muitos desses alunos ainda não possuem computadores próprios, apesar desse fato, muitos acessam a internet em outros ambientes, como em estabelecimentos comerciais, em casa de amigos ou no trabalho. Contudo, alguns alunos não têm nem mesmo esse acesso, o que pode tornar demorado o processo de ensino e de aprendizagem.

Esses obstáculos geralmente são os grandes responsáveis pelo distanciamento do professor de um ambiente de aprendizagem fundamentado na tecnologia informática. Quando se trata de trabalhar com informática, a imprevisibilidade se torna evidente em decorrência de problemas técnicos e de dúvidas que os alunos têm, e que surgem, ao manusear o computador.

O que também acontece frequentemente é que cursos de capacitação e treinamentos (oferecidos pela Secretaria da Educação) para preparar os professores para trabalhar com as mídias informáticas acabam ensinando estes a simplesmente usar o computador, acreditando que essa atividade é suficiente, e não discutem como trabalhar pedagogicamente com o computador, o que deveria ser o objetivo. Mesmo assim, o fato do professor se "capacitar/preparar" para a aula não impede que situações novas aconteçam no decorrer da mesma.

O trabalho com Modelagem gera obstáculos e o trabalho no ambiente de informática também produz suas barreiras. Assim, quando o professor se dispõe ao trabalho simultâneo de Modelagem e informática está propenso ao encontro de duas vertentes de obstáculos, os da Modelagem e os da informática. Quando o professor se lança para esse duplo desafio se desloca da sua zona de conforto para uma zona de risco. Diante da dimensão dessa imprevisibilidade muitos professores não se arriscam em novos territórios, preferem ter o controle da aula em suas mãos, onde nada pode acontecer além das fronteiras previstas.

Ao adotarmos o ambiente de aprendizagem da Modelagem em sala de aula para o ensino e aprendizagem de Estatística, percebemos que o uso de tecnologia informática pode obter um papel enriquecedor na operacionalização das atividades (tabulação dos dados e construção dos gráficos, principalmente). No entanto, sabemos que a tecnologia informática em sala de aula se configura como uma prática desafiadora para muitos professores.

Averiguamos, portanto, que o trabalho nesse ambiente de aprendizagem com o auxílio da informática implica em uma possibilidade para o professor permitir-se enfrentar esses desafios e, além disso, oportunizar aos seus alunos o trabalho fundamentado em duas perspectivas inovadoras, capazes de despertar nesses estudantes argumentos investigativos, críticos e criativos. Apontamos a contribuição dada principalmente àqueles alunos que têm o acesso limitado à tecnologia informática.

Durante o processo de Modelagem o aluno é retirado do seu papel de receptor e deslocado para o centro do aprendizado, tornando-se assim um colaborador junto ao professor e, nesse processo, ambos são responsáveis pelas atividades que proporcionam o ensino e a aprendizagem. Analogamente o professor deixa de exercer seu papel de detentor do poder, configurando-se também como um colaborador em sala de aula.

Um trabalho investigativo, como o trabalho de Modelagem demanda disposição de tempo por parte do educador, que por várias vezes não o tem. O trabalho com Modelagem em sala de aula pode ser demorado, lento. E no âmbito escolar o professor possui um currículo pré-determinado, o qual nem sempre é possível cumprir devido ao pouco tempo letivo. O trabalho com Modelagem, principalmente no ensino médio, em horários extraclasse, por exemplo, pode encontrar obstáculos, pois os alunos geralmente desenvolvem outras atividades nos horários inversos ao de aula. Pode-se então montar grupos de estudos, e assim, contornar o “problema” do tempo e do conteúdo programático a ser vencido.

Diante do pouco tempo, fica difícil para o professor desenvolver projetos como, ou semelhantes, aos de Modelagem, principalmente se este (professor) optar por um caso que acarrete mais tempo. Sem estímulos e sem tempo o professor prefere não ousar e nem modificar sua prática para que não se sobrecarregue de trabalhos extraclasse (necessários para a elaboração e organização desse tipo de atividade). Nesse viés, temos uma classe de profissionais docentes denominadas de “conformados”, contudo nós não diríamos “conformados”, mas sim “desmotivados”.

Assim, com a efetivação deste trabalho chegamos a algumas considerações, que encerram esta pesquisa e que em contrapartida podem oferecer subsídios para que outros pesquisadores despertem suas inquietações.

8. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Acreditamos que, neste trabalho, alcançamos nossos dois objetivos inicialmente propostos:

• Propor o estudo de Estatística por meio da Modelagem Matemática no contexto do ensino médio e assim investigar e discutir quais implicações tal ambiente de aprendizagem pode oferecer para o ensino e a aprendizagem da Estatística.

• Favorecer e valorizar no estudante o desenvolvimento de aspectos de criticidade, a consciência da importância de sua participação na sociedade, e a capacidade de associar “conteúdo escolar” com seu o dia-a-dia.

No que tange o segundo objetivo por nós almejado, nossos dados nos levaram à constatação da existência de vestígios que apontaram para o desenvolvimento, nos alunos, de conscientização, aspectos críticos, investigativos e coletivos. Assim, acreditamos ter alcançado também este objetivo.

Por meio da articulação dos nossos pressupostos teóricos, da nossa metodologia e dos nossos dados, ou seja, através da nossa análise, procuramos responder a questão diretriz do trabalho. Nessa procura pelas respostas, ou por direcionamentos que levassem a tal, selecionamos nossas categorias de análise e por meio delas inferimos implicações oriundas da constituição de um ambiente de aprendizagem da Modelagem para o ensino e a aprendizagem da Estatística.

Além disso, os processos de ensino e aprendizagem de Estatística em um ambiente de Modelagem possibilita o trabalho com o auxílio da tecnologia informática. Este fato implica em uma possibilidade para que o professor possa permitir-se enfrentar os desafios apresentados pela inclusão desta tecnologia em sala de aula. É desejável romper com as barreiras e aceitar/adotar as mudanças tecnológicas vividas constantemente pela sociedade, na qual nós e nossos alunos estamos inseridos e, portanto, vivenciando-as.

Observamos também que o professor deve estar preparado para, se necessário, lidar com situações de ordem afetivas e emocionais que podem ser aguçadas em seus alunos em decorrência da escolha do tema.

Ainda no que tange as ações didático-pedagógicas do professor, inferimos que quando a Modelagem é desenvolvida em sala de aula o professor está propenso ao constante encontro de barreiras para a efetivação do projeto como, por exemplo, falta de tempo, de material, de apoio, de colaboração, o vem corroborar com os obstáculos que o trabalho com Modelagem pode gerar citados por Bassanezi (2002). Notamos que algumas dessas barreiras podem ser contornáveis, contudo verificamos que outras podem fugir do controle do professor em querer sua superação (aulas interrompidas e/ou não ministradas por motivos diversos que levam a diminuição do tempo disponível).

Foi possível verificar que o ensino e a aprendizagem de Estatística por meio da Modelagem dispara uma gama de reflexões, capazes de mudar, ou simplesmente aclarar, as concepções dos indivíduos, contribuindo para o desenvolvimento da sua conscientização em relação a fatos que acercam a sociedade.

Assim, encerramos este trabalho afirmando que o processo de ensino e aprendizagem da Estatística, no âmbito do ensino médio, por meio de um ambiente de aprendizagem da Modelagem Matemática trata-se de um “caminho” possível e viável para a ação didático pedagógica do professor em sala de aula, constituindo-se de um ambiente altamente investigativo cujas propriedades marcam a manifestação de cidadãos reflexivos, críticos e ativos na sociedade, ou seja, apontando aspectos que colaboram para a cidadania crítica do aluno.

8.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Os professores de Matemática de todos os níveis de ensino devem sempre buscar conhecimento e aprimoramento das suas práticas pedagógicas acerca do ensino de Estatística. Acreditamos que atividades que envolvam os alunos de maneira concreta na busca por resultados sejam muito significativas na construção do conhecimento efetivo; nesse contexto, sugerimos algumas situações que podem trazer importantes contribuições ao ensino da Estatística:

- Ensino de Estatística com planilhas eletrônicas;
- Discussão das questões de vestibulares e do ENEM que contemplem o assunto Estatística;

- Investigação de outras metodologias para o ensino da Estatística, a Etnomatemática ou Engenharia Didática, por exemplo;
- Análise dos livros didáticos que contemplam o assunto Estatística;
- Aplicações da Estatística nas outras áreas do conhecimento, como Biologia, Física e Química,
- Propostas de oficinas para o estudo da Estatística.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALRØ, H.; SKOVSMOSE, O. **Diálogo e Aprendizagem em Educação Matemática.** Traduzido por: Figueiredo, O. A. Tradução de: Dialogue and Learning in Mathematics Education: Intention, Reflection and Critique. 2002. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

ALVES-MAZZOTTI, A. J. **Parte II – O Método nas Ciências Sociais.** In: ALVESMAZZOTII, A. J.; GEWANDSZNAJDER, F. **O Método nas Ciências Naturais e Sociais: pesquisa quantitativa e qualitativa.** São Paulo: Pioneira, 2004, p. 109-188.

ARAÚJO, J. L. **Relação entre matemática e realidade em algumas perspectivas de Modelagem Matemática na Educação Matemática.** In. BARBOSA, J.C.; CALDEIRA, A.D.; ARAUJO, J.L. (orgs). **Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira: pesquisas e práticas educacionais.** Recife: SBEM, 2007, p. 17-32.

ARAÚJO, J. L.; BORBA, M. C. **Construindo pesquisas coletivamente em Educação Matemática.** In: ARAÚJO, J. L.; BORBA, M. C. (orgs.). Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2006, p. 27-47.

BARBOSA, J. C. **Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico**. In: Reunião anual da ANPED. Rio de Janeiro: ANPED, 2001. 1CD-ROM.

BARBOSA, J. C. **A prática dos alunos no ambiente de Modelagem Matemática: um esboço de um framework.** In: BARBOSA, J. C.; CALDEIRA, A.D.; ARAUJO, J. L. (orgs). **Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira: pesquisas e práticas educacionais.** Recife: SBEM, 2007, p. 161-174.

_________________**A dinâmica das discussões dos alunos no ambiente de Modelagem Matemática.** In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. Águas de Lindóia. Anais... Recife: SBEM, 2006. 1 CD-ROM.

_________________**Modelagem Matemática: O que é? Por que? Como?** Veritati, n. 4, 2004, p. 73-80.

_________________**Modelagem matemática e a perspectiva sócio-crítica.** In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. Santos. Anais... São Paulo: SBEM, 2003. 1 CD-ROM.

________________**Uma perspectiva para a modelagem matemática.** In: Anais do IV ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. Rio Claro: Programa de Pós-graduação em Educação Matemática, 2000.

BARBOSA, J. C.; SANTOS, M. A. **Modelagem matemática, perspectivas e discussões.** In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. Belo Horizonte. Anais... Recife: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2007. 1 CDROM.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia.** São Paulo: Contexto, 2002.

BATANERO, C. **Didáctica de la estadística. Granada: Grupo de Investigación en Educación Estadística (2001).** (Disponível em: http://www.ugr.es/local/batanero)

BICUDO, M. A. V. **Pesquisa Qualitativa e Pesquisa Qualitativa segundo a abordagem fenomenológica.** In: ARAÚJO, J. L.; BORBA, M. C. (orgs.). **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática.** Belo Horizonte: Autêntica, 2006, p. 101-114.

BICUDO, M.A.V. **A hermenêutica no trabalho do professor de matemática.** In: Cadernos da Sociedade de Estudos e Pesquisa Qualitativos. vol. 3 . São Paulo: ASociedade, 1993.

BICUDO, M. A V.; GARNICA, A V. M. **Filosofia da Educação Matemática.** Belo Horizonte: Autêntica, 2002. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

BIEMBENGUT, M.S. **Modelagem Matemática & Implicações no Ensino e na Aprendizagem de Matemática.** Blumenau: Edifurb, 2004.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Sobre Modelagem Matemática do Saber e seus Limites.** In: BARBOSA, J.C.; CALDEIRA, A.D.; ARAUJO, J.L. (orgs). **Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira: pesquisas e práticas educacionais.** Recife: SBEM, 2007, p. 33-47.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos.** Tradução de M. J. Alvarez; S. B. dos Santos e T. M. Baptista.Porto: Porto Editora, 1994.

BORBA, M.C.; PENTEADO, M.G. **Informática e Educação Matemática.** Belo Horizonte: Editora Autêntica, 2001.

BORBA, M. C., VILLARREAL, M. E. **Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking: Information and Communication Technologies, Modeling, Visualization and Experimentation.** New York: Springer Science+Business Media, Inc., 2005.

BORBA, M. C.; MENEGHETTI, R. C. G.; HERMINI, H. A. **Modelagem, calculadora gráfica e interdisciplinaridade na sala de aula de um curso de ciências biológicas.** Revista de Educação Matemática da SBEM-SP. São José do Rio Preto, v. 5, n. 3, 1997, p. 63-70.

BRANCO, J. **Estatística no secundário: o ensino e seus problemas.** In: LOUREIRO, C., OLIVEIRA, F.; BRUNHEIRA, L. (Eds.) **Ensino e aprendizagem da estatística.** Lisboa: SPE e APM, 2000, p. 11-30.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.** Secretaria de Educação Fundamental – Brasília: MEC/SEF, 1998.

BURAK, D. **Modelagem Matemática e a sala de aula.** In: ENCONTRO PARANAENSE DE MODELAGEM EM EDUCAÇÃO MATEMATICA. 2004, Londrina. Anais... Londrina: UEL, 2004. 1 CD-ROM.

BURAK, D. **Modelagem Matemática: ações e interações no processo de ensino aprendizagem.** Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1992.

CALDEIRA, A.D. **Etnomodelagem e suas relações com a Educação Matemática na infância.** In: BARBOSA, J.C.; CALDEIRA, A.D.; ARAUJO, J.L. (orgs). **Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira: pesquisas e práticas educacionais.** Recife: SBEM, 2007, p. 81-98.

CALDEIRA, A. D.; MEYER, J. F.C. A. **Educação matemática e ambiental: uma proposta de formação continuada e de mudanças.** Zetetiké, Campinas, v. 9, n. 15/16, 2001, p. 155-170.

CARVALHO, C. **Comunicação apresentada na mesa redonda Literacia Estatística do I Seminário de Ensino de Matemática** – 14ª Conferência realizada pelo COLE, Campinas (São Paulo), 22-25 de Julho de 2003.

CHAVES, M. I. A; ESPIRITO SANTO, A.O. **Modelagem Matemática: uma concepção e várias possibilidades.** In: Bolema -Boletim de Educação Matemática, ano 21, nº 30, 2008, p.149-161.

CHAVES, M. I. A. **Modelando matematicamente questões ambientais relacionadas com a água a propósito do ensino-aprendizagem de funções na 1ª série-EM.** 2005. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Núcleo Pedagógico de Apoio ao Desenvolvimento Científico, Universidade Federal do Pará, 2005, Belém. (Disponível em: http://www.ufpa.br/npadc/gemm/documentos/doc 05 htm).

D'AMBROSIO, U. Prefácio. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Orgs.) **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática.** Belo Horizonte: Autêntica, 2004, p. 11-45.

D'AMBROSIO, U. **Etnomatemática–Elo entre tradições e modernidade.** Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

DELMAS, R. C. **Statistical literacy, reasoning and learning: a commentary.** In: Journal of Statistics Education, 2002. v. 10, n. 3. (Disponível em: http://www.amstat.org/publications/jse/v10n3/delmas_discussion.html).

DIAS, H. **EJA e a Teoria Sócio-cultural Vygotskyana.** Disponível em: Recanto das Letras http://recantodasletras.uol.com.br/ensaios/1021093.

DUARTE, T. O. C. **A Estatística no 1º ciclo. Uma abordagem no 3º ano de escolaridade.** Dissertação de Mestrado. Faculdade de Ciências. Universidade de Lisboa – Lisboa, 2004.

ELLIOT, J. **Recolocando a pesquisa-ação em seu lugar original e próprio.** In: GERALDI, C. M. G.; FIORENTINI, D.; PEREIRA, E. M. A. (Orgs.). Cartografias do trabalho docente. Campinas: Mercado da Letras, 1998, p. 137-152.

FARHAT, C. A. V. **Introdução à Estatística Aplicada.** São Paulo: FTD, 1998.

FERREIRA, D. H.L.; WODEWOTZKI, M. L. L. **Questões ambientais e Modelagem Matemática: uma experiência com alunos do ensino fundamental.** In: BARBOSA, J.C.; CALDEIRA, A.D.; ARAUJO, J.L. (orgs). Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira: pesquisas e práticas educacionais. Recife: SBEM, 2007, p. 115-132.

FIORENTINI, D. **Histórias e Investigações de/em Aulas de Matemática.** Campinas: Alínea, 2006.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos.** Campinas, SP: Autores Associados, 2007.

FREIRE, P. **Educação Matemática.** Entrevista concedida a Ubiratan D'Ambrosio e à Maria do Carmo Domite. s/d. (Disponível em: http://comatematica.blogspot.com/2007/05/ubiratan-dambrsio-entrevista-paulo.html).

GAL, I. **Adult numeracy development: theory, research, practice.** Cresskill, NJ: Hampton Press, 2000.

GARNICA, A. V. M. **Historia Oral e Educação Matemática**. In: ARAÚJO, J. L.; BORBA, M. C. (orgs.). Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2006, p. 79-100.

GOLDENBERG, M. **A arte de pesquisar: como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais.** Rio de Janeiro: Record, 2003.

HABERMAS, J. **Conhecimento e Interesse.** Tradução autorizada da segunda edição alemã, publicada em 1973 por Suhrkamp Verlag, Frankfurt am Main, Alemanha Ocidental. Traduzido por: José N. Heck, ZAHAR Editores. Rio de Janeiro, 1982.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PÉRIGO, R. V.; ALMEIDA, N. de. **Matemática Ciência e Aplicações.** 6. ed. São Paulo: Atual, v. 3, 2010.

JACOBINI, O.R. **Modelagem Matemática em sua Dimensão Crítica: novos caminhos para conscientização e ação políticas.** In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. Ouro Preto. Anais... Ouro Preto: Universidade Federal de Ouro Preto. 2007. 1 CD-ROM.

_________________ Fórum do Centro Virtual de Modelagem (CVM), 23/05/2007. http://143.107.250.90/tidia-ae/Login.jsp

JACOBINI, O. R.; WODEWOTZKI, M. L. L. **Uma Reflexão sobre a Modelagem Matemática no Contexto da Educação Matemática Crítica.** In: Bolema - Boletim de Educação Matemática, ano 19, nº 25, 2006, p.71-88.

KAISER, G.; SRIRAMAN, B. **A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education.** Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, v. 38, n. 3, 2006. p. 302-310.

KAISER-MESSMER, G. **Application-orientated mathematics teaching: a survey of the theoretical debate.** In: NISS, M.; BLUM, W.; HUNTLEY, I. Teaching of Mathematical Modelling and Applications. Chichester: Ellis Horwood, 1991, p. 83-92.

LDB. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, 1996.** In: EMR, Ensino Médio em Rede: Programa de Formação Continuada para Professores do Ensino Médio, 2004. CDROM.

LOPES, C. A. E. **A Probabilidade e a Estatística no Ensino Fundamental: uma análise curricular.** Dissertação (Mestrado em Educação). Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas,1998.

LOUREIRO, C.; OLIVEIRA, F.; BRUNHEIRA, L. **Ensino e Aprendizagem da Estatística.** GRAFIS. Lisboa, 2000.

LUDKE, M.; ANDRÉ, M.E.D.A. **Abordagens qualitativas de pesquisa: a pesquisa etnográfica e o estudo de caso.** In: Pesquisa em educação: abordagens qualitativas. São Paulo: Editora Pedagógica Universitária, 1986.

LÜDKE, M. . **O professor e a pesquisa.** Campinas: Papirus, 2004.

LÜDKE, M. **O professor, seu saber e sua pesquisa.** In: Educação & Sociedade, ano XXII, nº 74, Abril/2001. (Disponível em http://www.scielo.br/pdf/es/v22n74/a06v2274.pdf).

MACHADO, N. J. **Cidadania e educação.** São Paulo: Escrituras, 2001.

MEMORIA, J. M. P. **Breve História da Estatística.** Brasília, DF: Embrapa Informação Tecnológica. 2004.

MENSA BRASIL. Disponível em: <http://www.mensa.com.br >. Acesso em: 20 de fevereiro de 2013.

MENDES, C. R.; ALVES, R. L. **Uma proposta de ensino de Estatística através de projetos: um desafio para a sala de aula.** In: VII EPEM - Encontro Paulista de Educação Matemática, 2004, São Paulo. Anais do VII EPEM - Matemática na escola: Conteúdos e Contextos, 2004.

MONTEIRO, A.; JUNIOR, G. P. **A Matemática e Os Temas Transversais.** São Paulo: Editora Moderna, 2001.

O Homem que mudou o jogo. Direção: Bennet Miller. Columbia Pictures. Estados Unidos, 2011. 1 DVD (113 min). Título original: Moneyball.

OREY, D. C.; ROSA, M. **A Dimensão Crítica da Modelagem Matemática: Ensinando para a eficiência sócio-crítica.** In: Conferência Nacional sobre Modelagem e Educação Matemática. Anais... Ouro Preto: Universidade Federal de Ouro Preto. 2007. 1 CDROM.

PAIVA, M. **“Componente Curricular: Matemática”.** Ed. Moderna, 1.ª edição, v. 3, 2009.

PCNEM. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio.** In: EMR, Ensino Médio em Rede: Programa de Formação Continuada para Professores do Ensino Médio, 2004. CDROM.

PEREIRA, E. M. **A Professor como pesquisador: o enfoque da pesquisa-ação na prática docente.** In: GERALDI, C. M. G; FIORENTINI, D.; PEREIRA, E. M. A (orgs). Cartografias do trabalho docente: professor(a)-pesquisador(a). Campinas, SP: Mercado de letras: Associação de leitura do Brasil-ALB, 1998. (Coleção leituras no Brasil). p. 153-181.

PEREZ, G. **Prática Reflexiva do Professor de Matemática.** In: BICUDO, M.A.V.; BORBA,

M.C. (orgs.). **Educação Matemática: Pesquisa em Movimento.** São Paulo: Editora Cortez, 2004, p. 250-263.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na sala de aula.** Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

PONTE, J. P. **Literacia Matemática.** Comunicação apresentada no Congresso Literacia e Cidadania, Convergências e Interface, realizado pelo Centro de Investigação em Educação “Paulo Freire ” da Universidade de Évora, de 28 a 30 de Maio de 2002, publicado nas Actas em CD-ROM com o nº 37.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula.** Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

PONTE, J.P. **Prefácio do livro “Histórias e Investigações de/em Aulas de Matemática”.** Campinas: Alínea, 2006.

PONTE, J. P.; OLIVEIRA, H.; BRUNHEIRA, L.; VARANDAS, J. M.; FERREIRA, C. **O trabalho do professor numa aula de investigação matemática.** Escola Secundária Bramcaamp Freire, Lisboa. 2000. (Disponível em: http://ia.fc.ul.pt/textos/98%20Ponte%20etc%20(Quadrante-MPT).pdf)

ROSA, M.V.F.P.C; ARNOLDI, M.A.G.C. **A Entrevista na Pesquisa Qualitativa: mecanismos para validação dos resultados.** Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

SAMPIERI, R. H; COLLADO, C. F.; LUCIO, P. B. **Metodologia de Pesquisa.** São Paulo. McGrawHill, 2006.

Secretaria de Estado da Educação. Superintendência de Educação. **Diretrizes Curriculares de Matemática para a Educação Básica do Estado do Paraná,** Curitiba, 2008.

SKOVSMOSE, O. **Desafios da Reflexão em Educação Matemática Crítica.** Tradução: Orlando de Andrade Figueiredo, Jonei Cerqueira Barbosa. Campinas, SP: Papirus, 2008. (Coleção Perspectivas em Educação Matemática).

________________ **Educação Matemática Crítica: a questão da democracia.** Campinas, SP: Papirus, 2001.

________________ **Cenários para investigação.** In: Bolema – Boletim de Educação Matemática. Rio Claro, ano 13, n. 14, 2000, p. 66-91.

________________ **Reflective knowledge: its relation to the mathematical modelling process.** Int. J. Math. Edu. Sci. Technol., v. 21, n. 5, 1990. p. 765-779.

SHAUGHNESSY, M. **Emerging issues for research on teaching and learning probability and statistics.** In: B. Philips (Ed.), Papers on statistical education presented at ICME-8. Swinburne: Swinburne University of Technology, 1996, p. 39-

SNEE, R. D. **Discussion: Development and Use of Statistical Thinking: A New Era.** International Statistical Review, 67, 1999, 255-258.

THIOLLENT, M. **Metodologia da pesquisa-ação.** São Paulo: Cortez, 2003.

VYGOTSKY, L. S. **A Formação Social da Mente.** Tradução José Cipolla Neto et al. 4 ed. São Paulo: Martins Fontes, 1991.

WODEWOTZKI, M.L.L.; JACOBINI, O.R. O **Ensino de Estatística no Contexto da Educação Matemática.** In: BICUDO, M.A.V.; BORBA, M. de C. (orgs.). **Educação Matemática: Pesquisa em Movimento.** São Paulo: Editora Cortez, 2004, p. 232-249.

XAVIER, C.; BARRETO, B. **Matemática: Aula por Aula.** Ed. FTD, 1.ª ed. v. 1, 2005.

ZBIEK, R. M., CONNER, A. **Beyond Motivation: exploring mathematical modeling as a context for deepening students' understanding of curricular mathematics. Educational Studies in Mathematics: an international journal.** Volume 63, nº 1, 2006.