PROFMAT Departamento de Matemática
Universidade Federal do Paraná
81531-990, Curitiba, PR
Brazil

TÓPICOS DE ARITMÉTICA

por

Allisson Cordeiro; Julio Cezar Cordeiro de Paula; Luana Fonseca Duarte Fernandes; Rafael da Silva Cortiano

Preprint PROFMAT 1 (2014)

31 de agosto, 2014

Disponível via INTERNET:
http://www.mat.ufpr.br

Tópicos de Aritmética

Allisson Cordeiro; Julio Cezar Cordeiro de Paula;
Luana Fonseca Duarte Fernandes; Rafael da Silva Cortiano
Departamento de Matemática - UFPR
019081-990, Curitiba, PR
Brasil
e-mail: luanafduarte@yahoo.com.br

8 de Dezembro de 2014

Resumo

O presente trabalho é uma coleção de atividades resolvidas, comentadas e complementares envolvendo conceitos de aritmética. Apresentamos uma proposta de material para ser utilizado em cursos extracurriculares, cujo objetivo é potencializar o interesse pelo estudo da Matemática. Por este motivo, buscamos atividades que despertem a motivação dos alunos e as descrevemos de maneira a auxiliar os professores em sua aplicação, com respostas, comentários e sugestões. A abordagem dos temas se faz com o uso recorrente de aspectos históricos, resolução de problemas, jogos e atividades recreativas.
Palavras-Chave: Aritmética - Resolução de problemas - Jogos

1 Introdução

O material a seguir é uma proposta de projeto para um curso de matemática extracurricular para alunos do Ensino Médio. Surgiu da percepção da necessidade de um atendimento diferenciado a alunos com algum interesse na disciplina, pois em nossas experiências podemos perceber que no dia a dia de uma sala de aula não é sempre possível dar atenção aos alunos com um maior interesse e habilidades em matemática. A consequência disso é um desperdício de possíveis talentos que são deixados a margem, em um sistema de ensino que geralmente oferece projetos extraclasse apenas de reforço escolar para sanar dificuldades, já que dificilmente temos algo no sentido de potencializar habilidades. Cabe ressaltar que a ideia não é selecionar apenas os melhores alunos para participar. O ideal é que seja aberto a todo aluno simpatizante da disciplina e que voluntariamente se inscreva no curso.

Os tópicos principais abordados são: paridade, divisão euclidiana, algoritmo de Euclides, sequência de Fibonacci, número de ouro, equações Diofantinas, teorema chinês do resto e quadrados mágicos. Os temas são desenvolvidos inicialmente com um pouco de história sobre o protagonista principal do assunto. Em seguida são propostas atividades, que remetem à resolução de problemas, nos quais o aluno vai gradativamente chegando às conclusões. No texto, as atividades estão com respostas e comentários. A versão do aluno, sem respostas, é encontrada no anexo. Buscamos abordar os assuntos de maneira curiosa e lúdica com a intenção de despertar uma motivação para os tópicos mais delicados do trabalho e principalmente causar uma inquietação no sentido de buscar conhecimento matemático que vá além do que a escola oferece às turmas regulares.

Em vários momentos no texto, o professor encontrará sugestões de como organizar a aplicação das atividades em sala. Porém, é importante que haja uma preparação inicial no sentido de mesclar a proposta do texto com a habilidade e experiência do aplicador. Igualmente importante é a realização de uma leitura inicial do nível de conhecimento matemático da turma. Neste sentido e caso seja necessário, deve ser pensado um pré-curso no qual serão trabalhadas as arestas identificadas.

2 Metodologia

Procuramos uma apresentação da matemática de forma a valorizar a construção do conhecimento, diferente da forma clássica na qual se define novos conteúdos com auxílio dos assuntos anteriores, completando com exemplos e problemas que utilizam esses saberes, segundo Brousseau (1996, pg 36) sobre a maneira de ensino clássica

> "apaga completamente a história destes saberes, isto é, a sucessão das dificuldades e das questões que provocaram o aparecimento dos conceitos fundamentais, a sua utilização para a colocação de novos problemas, a intrusão de técnicas e de questões resultantes dos progressos dos outros sectores, a rejeição de determinados pontos de vista, considerando falsos ou desadequados, e as numerosas querelas a seu respeito."

Buscamos coletar problemas e jogos que desenvolvessem o aspecto científico nos alunos, situações que envolvem habilidades de levantar hipóteses, conjecturar, intuir, testar e validar resultados, como Brousseau (1996, pg 38) descreve

> "uma boa reprodução pelo aluno de uma actividade científica exige que ele aja, formule, prove, construa modelos, linguagens, conceitos,

teorias, os troque com outros, reconheça aqueles que são conformes à cultura, retire desta aqueles que lhe são úteis, etc."

A respeito da escolha da aritmética, acreditamos que há conteúdo que não estão evidenciados nos parâmetros curriculares, porém podem ser abordados e relacionados com os que lá estão. A aritmética também é importante, pois segundo Gomes, (2008, pg 160)

> "A aritmética é invocada como o primeiro exemplo sensível da necessidade dos signos: conforme Condillac, não poderíamos fazer progressos algum no conhecimento dos números, se não imaginássemos nomes para todas as idéias que formamos pela multiplicação da idéia de unidade, que ele supõe já ter recenido um nome."

Escolhemos utilizar de alguns jogos, pois estes auxiliam no desenvolvimento de habilidades de raciocínio lógico, desperta um maior interesse, pode-se analisar os erros e elaborar estratégias para vencer, de acordo com Emerique (1999, pg 188)

> "colocar o aluno diante de situações de jogo pode ser uma boa estratégia para aproximá-lo dos conteúdos culturais a serem veiculados na escola, além de poder estar promovendo o desenvolvimento de novas estruturas cognitivas"

Também de acordo com o aspecto cognitivo do jogo Paulo (1999, pg 190) diz

> "necessidade e possibilidade de construção de novos conhecimentos e procedimentos, de descobrir erros e de imaginar formas de superá-los, dentre outros desafios."

Utilizamos também a resolução de problemas, uma vez que propicia um ambiente em que o aluno é ser ativo no processo de ensino-aprendizagem e segundo Onuchic (1999, pg 204)

> "a tendência é caracterizar esse trabalho considerando os estudantes como participantes ativos, os problemas como instrumentos precisos e bem definidos e a atividade na resolução de problemas como uma coordenação complexa simuntanea de vários níveis de atividade."

3 O algoritmo de Euclides

3.1 Um pouco de história: Euclides

Em 306 a.C. o controle da parte egípcia do império de Alexandre, O Grande, estava nas mãos de Ptolomeu I. Esse governador voltou a sua atenção para esforços construtivos. Um de seus primeiros atos foi a construção de um instituto conhecido como museu. Como professores, ele chamou um grupo de sábios de primeira linha, entre eles Euclides, de cuja vida sabe-se pouco. Tão obscura ficou sua vida que nenhum lugar de nascimento é associado ao seu nome. Embora edições de sua principal obra, Os Elementos, frequentemente o identificassem como Euclides de Megara, e um retrato de frequentemente apareça em histórias da Matemática, trata-se de um erro de identidade. O verdadeiro Euclides de Megara era um discípulo de Sócrates e, embora se preocupasse com lógica, não se sentia mais atraído pela Matemática que seu mestre.

Nosso Euclides, em contraste, é conhecido como Euclides de Alexandria, porque foi chamado lá para ensinar Matemática. Da natureza de seu trabalho pode-se presumir que tivesse estudado com discípulos de Platão, se não na própria Academia. Lendas associadas a Euclides o pintavam como um bondoso velho. Ptolomeu uma vez perguntou-lhe se havia um caminho mais curto, para a geometria, que o estudo de Os Elementos, e Euclides lhe respondeu que não havia estrada real para a geometria.

Evidentemente Euclides não dava ênfase a aspectos práticos do assunto. Há uma estória contada sobre ele que diz que quando um estudante perguntou para que servia o estudo da geometria, Euclides disse a seu escravo que desse três moedas ao estudante "pois ele precisa ter lucro com o que aprende". Embora se tenham perdido mais da metade dos seus livros, ainda restaram, para felicidade dos séculos vindouros, os treze famosos livros que constituem os Elementos (Stoicheia). Publicados por volta de 300 a.C. aí está contemplada a aritmética, a geometria e a álgebra. Muitos outros textos lhe são atribuídos. O trabalho de Euclides é tão vasto que alguns historiadores não acreditavam que fosse obra de um só homem.

Os trabalhos matemáticos que chegaram até nós foram inicialmente traduzidos para árabe, depois para latim, e a partir destes dois idiomas para outras línguas europeias. Embora alguns conceitos já fossem conhecidos anteriormente a sua época, o que impossibilita uma análise completa da sua originalidade, pode-se considerar o seu trabalho genial. Ao recolher tudo o que então conhecia, sistematiza os dados da intuição e substitui imagens concretas por noções abstratas, para poder raciocinar sem qualquer apoio intuitivo.

3.2 Atividades

Atividade 3.1 *Par ou ímpar maluco*

Essa atividade tem como objetivo propiciar ao professor um método lúdico para introduzir, em sala, a paridade dos números naturais e sua análise nas operações básicas: adição, subtração e multiplicação. O jogo aborda ainda um trabalho específico com restos de divisões entre dois números naturais e esse tema pode ser desenvolvido, sem tanto rigor, junto aos alunos. Com essa atividade espera-se que o aluno desenvolva uma análise mais formal sobre como proceder uma demonstração onde a análise de todos os casos possíveis é utilizada. Para a atividade vamos precisar da folha de questões que encontra-se no anexo.

Descrição da atividade: O professor deve separar os alunos em trios, onde um dos participantes iniciará o jogo como o mediador. Em seguida, o professor explicará o jogo: Cada um dos jogadores escolherá par ou ímpar e após, anotará, secretamente um número inteiro positivo a sua escolha, em uma folha de papel que será entregue ao mediador. O mediador se encarregará de multiplicar os números escolhidos e se o resultado for par, ganha o jogador que escolheu essa opção. Caso contrário ganhará o jogador que escolheu a opção ímpar. Após algumas rodadas é interessante observar junto a turma o que seriam números inteiros positivos e qual o motivo da ausência do número zero. Depois de jogarem por mais um tempo o professor deverá pedir aos alunos que respondam à questão um da folha de atividades da página 53.

Questão 3.1.1 *Existe uma estratégia que possibilite vencer sempre? Caso exista, qual seria?*

Resposta comentada: Sim, basta que o aluno escolha a opção par e anote um número par em sua ficha. Espera-se que os alunos percebam que se escolherem a opção par e anotar em seu papel um número par ele sempre vencerá, ou seja, o jogo não é justo, pois os participantes não possuem as mesmas chance de ganhar. Observado esse fato o professor deverá solicitar aos alunos que respondam à questão dois da folha de atividades da página 53 pois nela irão verificar matematicamente por que isto acontece.

Questão 3.1.2 *No conjunto dos inteiros positivos, um número par, pode ser representado como $2n$, com $n \in \mathbb{N}^*$. Já um número ímpar pode ser representado como $2k-1$, com $k \in \mathbb{N}^*$. Como o primeiro jogador escolheu a opção par e anotou em sua ficha um número par, temos que o outro jogador só poderá escolher um número par ou um número ímpar. Feitas essas considerações, pede-se:*

a. o produto entre dois números pares, ou seja $2n.2k$, com $n, k \in \mathbb{N}^*$. Analise a paridade.

Resposta comentada: $2n.2k = 4nk = 2.(2nk)$, como $2nk \in \mathbb{N}^*$, temos que $2nk = r$. Portanto $2n.2k = 2.(2nk) = 2r$, ou seja a multiplicação de dois números pares resultará em um número par.

b. o produto de um número par por um número ímpar, ou seja $2n.(2k-1)$ com $n, k \in \mathbb{N}^*$. Analise a paridade.

Resposta comentada: $2n.(2k-1) = 4nk - 2n = 2.(2nk-n)$, como $(2nk-n) \in \mathbb{N}^*$, temos que $(2nk-n) = r$. Portanto $2n.(2k-1) = 2.(2nk-n) = 2r$, ou seja a multiplicação resulta em um número par.

c. Com os resultados dos itens a e b o que podemos concluir?

Resposta comentada: Podemos concluir que nestes casos o resultado será sempre um número par, independente dos números escolhidos. Assim temos que se o jogador escolher par e anotar em sua folha um número par, será o vencedor.

Atividade 3.2 *Mudando um pouco as regras*

Os jogadores escolhem a opção par ou ímpar, mas ao invés de escrever qualquer número inteiro positivo para jogar, eles devem escolher somente os número inteiros positivos que não são divisíveis por três, por exemplo $2, 4, 5, 7, \ldots$, ou seja, os números que não são múltiplos de três. O modo de se obter o resultado também muda, pois após o mediador multiplicar os números escolhidos ele dividirá esse resultado por três e a análise da paridade será feita no resto desta divisão. Ou seja, quando o resto for par ganha o jogador que escolheu a opção par, caso contrário ganha o jogador que escolheu ímpar. Ao explicar essa mudança, o professor poderá abordar a questão de múltiplos de um número natural e a divisão por três, em especial utilizando o algoritmo de Euclides. Após algumas partidas o professor deverá solicitar que os alunos respondam à questão um da folha de atividades da página 53.

Questão 3.2.1 *Existe alguma estratégia que permita vencer sempre? Caso exista, qual é?*

Resposta comentada: Espera-se que os alunos fiquem inquietos com relação à obtenção dessa estratégia, pois de fato ela não existe, mas o professor deverá explorar esse fato ouvindo e testando possíveis maneiras sugeridas. Discutidas essas possibilidades espera-se que a turma esteja motivada a acompanhar a justificativa formal da ausência da estratégia. Para resolver essa nova situação temos que analisar o resto da divisão de um número natural por três. Neste instante é possível para o professor realizar algumas divisões por três com intuito de analisar o resto dessas divisões e concluir que para esse resto só existem três opções, o zero, o um ou o dois. Assim pode-se representar um número natural dividido por três na forma $3n + r$, com $n, r \in \mathbb{N}$ e $0 \leq r \leq 2$. Suponha que o número escolhido pelo primeiro jogador seja da forma $3n + r_0$, com $n, r_0 \in \mathbb{N}^*$ e $0 \leq r_0 \leq 2$, onde r_0 é o resto da divisão por três e que o outro número escolhido seja da forma $3k+r_1$, com $k, r_1 \in \mathbb{N}^*$ e $0 \leq r_1 \leq 2$ onde r_1 é o resto da divisão por três. Como a solução é obtida pela análise do resto da divisão da multiplicação dos números escolhidos por três, teremos que efetuar essa multiplicação. Assim temos,

$$(3n + r_0).(3k + r_1) = 9nk + 3nr_1 + 3kr_0 + r_1r_0 = 3(3nk + nr_1 + nr_0) + r_1r_0$$

e como $3nk + nr_1 + nr_0 \in \mathbb{N}^*$, temos que $3nk + nr_1 + nr_0 = u$. Portanto

$$(3n + r_0).(3k + r_1) = 3(3nk + nr_1 + nr_0) + r_1r_0 = 3u + r_1r_0$$

ou seja $r_1 r_0$ é o resto da divisão da multiplicação dos números escolhidos por três. Assim basta analisar os possíveis restos das divisões por três de cada um dos números escolhidos e multiplicar um pelo outro para obter o resto da divisão, da multiplicação desses números, por três. Logo iremos analisar todos os casos possíveis por meio de uma tabela. Lembrando que não é possivel para nenhum dos jogadores escolher números divisíveis por três, ou seja, não teremos o resto igual a zero para nenhum dos jogadores.

Restos do 1° jogador	Restos do 2° jogador	Multiplicação dos restos	Paridade
1	1	$1.1 = 1$	ímpar
1	2	$1.2 = 2$	par
2	1	$2.1 = 2$	par
2	2	$2.2 = 4 = 1$	ímpar

Neste momento cabe ao professor exemplificar essa situação com números escolhidos pelos alunos, principalmente a última linha da tabela onde a múltiplicação dos restos resulta em quatro. A última linha da tabela merece uma atenção especial, pois o número resultante (resto) será maior do que o divisor. Uma estratégia consiste em voltar à conclusão, feita acima, que nos permitiu a construção da tabela e lembrar que caso $r_1.r_0$ for maior que três, então ele pode ser escrito como um múltiplo de três, ou seja na forma $3y + r$, com $y \in \mathbb{N}^*$. Assim basta dividir o número obtido por três e analisar o resto. No caso o resto da divisão de 4 por 3 é o número 1.

Outra ideia é retirar quantos números três forem possíveis do resultado obtido e analisar o que "sobra". De fato $4 - 1.3 = 1$. Assim foi possível retirar uma vez o número três e ainda sobrou um. Analisando a tabela pode-se concluir que não existe uma estratégia vencedora, pois os participantes não possuem acesso ao número de seu adversário.

Podemos dizer que o jogo é justo, porque existem as mesmas chances de vencer para cada escolha. É importante que o professor teste e instigue os alunos a modificar o jogo de mais maneiras ou até a criar seus próprios jogos utilizando restos, divisibilidade e paridade. Por exemplo, será que o jogo, independente do divisor natural escolhido, é sempre justo? O professor deve estar ciente de que a solução proposta, especialmente após a modificação do jogo, constitui em uma análise de casos para determinar todos os restos possíveis da divisão analisada. Esse método é muito importante, pois pode ser utilizado em outras áreas além da aritmética, como por exemplo em análise combinatória. Por esse motivo é importante que os alunos entendam que essa solução é satisfatória para o problema.

Atividade 3.3 *Sexta-feira* 13

Essa atividade tem como objetivo mostrar de forma lúdica como a análise de restos de divisões entre dois números inteiros positivos pode ser aplicada nas mais diversas situações. Para esta atividade vamos precisar da folha de questões que encontra-se no anexo e um calendário por equipe.

Descrição da atividade: O problema a seguir é um tanto curioso e pode ser proposto aos alunos como um desafio. O professor deverá dividir a sala em grupos de quatro pessoas e para cada grupo deverá ser entregue um calendário, preferencialmente os calendários devem ser de anos diferentes.

Questão 3.3.1 *Qual é o número máximo de sexta-feiras treze que podem ocorrer num ano que não é bissexto? Neste caso, em que dia da semana cai o décimo dia do ano?*

É importante que o professor ressalte que o problema não define um ano específico, mas sim que seja um ano que não é bissexto. A seguir estudaremos o seguinte resultado.

Resultado 3.1 *Monte uma tabela especificando quantos dias possuem cada mês do ano. Em seguida determine quantos dias do mês de março se passaram até o dia* 11 *de março e quantos dias faltam para terminar o mês de março tendo como base o dia* 11 *de março.*

Tabela da quantidade de dias de cada mês	
Mês	Total de dias
Janeiro	31
Fevereiro	28 ou 29 se for ano bissexto
Março	31
Abril	30
Maio	31
Junho	30
Julho	31
Agosto	31
Setembro	30
Outubro	31
Novembro	30
Dezembro	31

Temos 11 dias do mês de março até o dia 11 desse mês e faltam 20 dias para acabar o mesmo mês tendo como base o dia 11 de março.

Comentário Resultado 3.1: É preciso saber quantos dias possuem cada mês no ano para que o problema seja respondido. Além disso, os alunos devem perceber que se falarmos do dia 11 de março, isso significa que se passaram 11 dias do mês de março e faltam 20 dias para acabar esse mês, pois março possui 31 dias. Após terem debatido e solucionado o problema o professor deve propor aos alunos que respondam ao Resultado dois da folha de atividades.

Resultado 3.2 *Sabendo que o dia 2 de março é uma quinta-feira determine quais outros dias do mês de março ocorrem em uma quinta-feira. Em seguida determine uma estratégia que permita determinar esssa situação sem usar o calendário.*

Comentário Resultado 3.2: Note que, se o dia 02 de março é uma quinta-feira, então dia 09 de março, dia 16 de março, dia 23 de março e 30 de março serão todos numa quinta-feira. Note que $9 = 2 + 7$, $16 = 9 + 7$, $23 = 16 + 7$, $30 = 23+7$. Portanto, basta somarmos sete ao dia escolhido para obter o próximo dia que será, por exemplo, uma quinta-feira. Esse processo é válido para qualquer dia da semana. Após, os alunos devem responder ao resultado três da folha de atividades.

Resultado 3.3 *Determine a diferença entre o dia 11 de março e o dia 11 de abril, ou seja, a quantidade de dias que existe entre 11 de março e 11 de abril inclusive.*

Comentário da Resultado 3.3: Entre os dias 11 de março e 11 de abril inclusive, temos 31 dias.

Primeiro: Escolhido o dia do mês, vamos determinar a diferença entre esse dia e o último dia do mês. Por exemplo, escolhido o dia 11 de março temos que a diferença entre essa data e o último dia do mês de março é igual a 20, pois $31 - 11 = 20$.

Segundo: Somamos a diferença obtida anteriormente ao dia escolhido e assim obteremos a diferença entre um determinado dia de um mês e esse mesmo dia do mês seguinte inclusive. Retomando, temos que a diferença entre 11 de março e 11 de abril é 31, pois $20 + 11 = 31$.

Após os resultados terem sido apresentados e discutidos em sala o professor pode orientar os alunos a responderem à questão dois da folha de atividades.

Questão 3.3.2 *Com base no resultado três, construa uma tabela que indique a diferença entre os dias 13 de cada mês.*

Resposta comentada: Conforme o resultado três, temos a tabela abaixo com a diferença entre os dias 13 de cada mês.

13/01 - 13/02	13/02 - 13/03	13/03 - 13/04	13/04 - 13/05	13/05 - 13/06	13/06 - 13/07	13/07 - 13/08	13/08 - 13/09	13/09 - 13/10	13/10 - 13/11	13/11 - 13/12
31	28	31	30	31	30	31	31	30	31	30

Após a construção da tabela o professor deve orientar os alunos a responderem a questão dois da folha de atividades.

Questão 3.3.3 *Utilizando o resultado 3.2 determine quais dias treze ocorrem num mesmo dia da semana.*

Resposta comentada: Aplicando o Resultado 3.2 na tabela um, temos que se dividirmos a diferença obtida por 7, teremos como saber se os dias 13 ocorrem no mesmo dia da semana. Assim temos a tabela.

13/01 - 13/02	13/02 - 13/03	13/03 - 13/04	13/04 - 13/05	13/05 - 13/06	13/06 - 13/07	13/07 - 13/08	13/08 - 13/09	13/09 - 13/10	13/10 - 13/11	13/11 - 13/12
31	28	31	30	31	30	31	31	30	31	30
3	0	3	2	3	2	3	3	2	3	2

Analisando o resto das divisões, temos que dia 13 de fevereiro e 13 de março ocorrem no mesmo dia da semana. É conveniente que os dias que ocorreram num mesmo dia da semana sejam na sexta-feira. Assim só resta saber se existe mais algum mês que possua o dia 13 na sexta-feira. Para isso o professor deve orientar os alunos a responderem a questão três.

Questão 3.3.4 *Construa uma tabela indicando a diferença entre os dias treze, tendo como base o dia* 13 *de fevereiro. Após, aplique o resultado* 3.2 *e verifique quais dias* 13 *caem no mesmo dia da semana que o dia* 13 *de fevereiro.*

Exemplo 3.1 *Basta analisar o resto da divisão da diferença entre o dia* 13 *de fevereiro e o dia* 13 *do mês que queremos. Assim, se queremos analisar o dia* 13 *de maio, basta somar* $28+31+30=89$ *e verificar o resto do número obtido na divisão por* 7 *utilizando-se do resultado* 3.2.

13/01 - 13/02	13/02 - 13/03	13/03 - 13/04	13/04 - 13/05	13/05 - 13/06	13/06 - 13/07	13/07 - 13/08	13/08 - 13/09	13/09 - 13/10	13/10 - 13/11	13/11 - 13/12
-	28	59	89	120	150	181	212	242	273	303
-	0	3	5	1	3	6	2	4	0	2

Pela tabela acima chegamos a conclusão de que existe mais uma sexta-feira 13, que ocorre no dia 13 de novembro. Logo temos num mesmo ano, não bissexto, um total de, no máximo, três sextas-feiras 13. Sabendo que o dia 13 de fevereiro ocorre em uma sexta-feira, temos condições de descobrir em qual dia da semana o décimo dia do ano ocorre. Para isso o grupo deverá responder à questão quatro.

Questão 3.3.5 *Se o dia* 13 *de fevereiro ocorre em uma sexta-feira, em que dia da semana ocorre o dia* 10 *de janeiro?*

Resposta comentada: Em um sábado. Basta voltarmos à tabela da página 10 e olharmos a primeira coluna. Se dia 13 ocorre numa sexta e o resto da divisão da diferença entre 13 de janeiro e 13 fevereiro é igual a 3, temos que o dia 13 de fevereiro, passou três dias da semana do dia 13 de janeiro, ou seja, o dia 13 de janeiro ocorre numa terça-feira. Logo, o dia 10 de janeiro, o décimo dia do ano, ocorre em um sábado.

Atividade 3.4 *O jogo de Euclides*

Descrição da atividade: São dois jogadores, cada um escolhe, secretamente, um número natural não nulo. Suponhamos que um jogador escolheu o número 31, e o outro, o número 7. Um dos jogadores é sorteado para iniciar o jogo. Ele receberá o número escolhido pelo colega e deverá subtrair do maior número, 31, um múltiplo não nulo do menor, ($n7 = 7, 14, 21$ ou 28) de modo que o resultado ainda seja positivo. O segundo jogador receberá o novo par de números $31 - n7$, 7 e repetirá o processo, subtraindo do maior número um múltplo do menor, e assim por diante. Ganhará o jogo quem obtiver primeiro o número 0 em um par.

Exemplo 3.2 *Vamos simular uma partida com os números mencionados na descrição do jogo, ou seja,* 31 *e* 7*.*

O primeiro jogador terá várias opções de jogo: $[24, 7]$, $[17, 7]$, $[10, 7]$, $[3, 7]$. Suponhamos que escolha $[10, 7]$. Neste caso, o segundo jogador só terá uma alternativa: $[3, 7]$. Será a vez, novamente, do primeiro jogador que poderá escolher $[3, 4]$ ou $[3, 1]$. Se jogar $[3, 4]$, o segundo jogador será obrigado a jogar $[3, 1]$ e, na jogada seguinte, o primeiro jogador jogará $[1, 0]$ e será o vencedor.

Exemplo 3.3 *Suponhamos que os números escolhidos tenham sido* 49 *e* 5*.*

O primeiro jogador terá várias opções de jogo: $[4, 5]$, $[9, 5]$, $[14, 5]$, $[19, 5]$, $[24, 5]$, $[29, 5]$, $[34, 5]$, $[39, 5]$, $[44, 5]$. Suponhamos que escolha $[4, 5]$. Neste caso, o segundo jogador poderá ter só uma alternativa $[4, 1]$. Será a vez, novamente, do primeiro jogador que jogará $[0, 1]$ e será o vencedor.

Exemplo 3.4 *Sejam* 50 *e* 8 *os números escolhidos.*

O primeiro jogador terá várias opções de jogo:

$$[2, 8], [10, 8], [18, 8], [26, 8], [34, 8], [42, 8]$$

Suponhamos que escolha $[10, 8]$. Neste caso, o segundo jogador só terá uma alternativa $[2, 8]$. Será a vez, novamente, do primeiro jogador, que escolherá $[2, 0]$ e será o vencedor.

Questão 3.4.1 *Nos exemplos um, dois e três os números iniciais são* 31 *e* 7*,* 49 *e* 5*,* 50 *e* 8*, as jogadas vencedoras são respectivamente,* $[1, 0], [0, 1]$ *e* $[2, 0]$*. Qual relação existe entre os números escolhidos e o número não nulo obtido na jogada vencedora?*

Resposta Comentada: O número não nulo é o máximo divisor comum dos números iniciais. O professor pode chamar a atenção dos alunos para este fato, que o jogo termina com o par $\{n, 0\}$, onde n é o maior divisor comum dos dois números escolhidos inicialmente. De fato, se denotarmos por a e b os números escolhidos e um número dividir a e b, este número também dividirá $a - mb$ e b. Reciprocamente, se um número dividir $a - mb$ e b, este número também dividirá a e b. Portanto, os divisores comuns de a e b e os $a - mb$ e b são os mesmos e, consequentemente,

$MDC(a,b) = MDC(a-mb,b) = \cdots = MDC(n,0) = n$. O nome do jogo, jogo de Euclides, também sugere observar o algoritmo de Euclides para o cálculo do maior divisor comum de dois números:

	4	2	3
31	7	3	1
3	1	0	

Onde, em cada passagem, do maior número subtrai-se um múltiplo do menor (no jogo, esse múltiplo não é necessariamente o maior possível). Um resultado que enuncia exatamente parte da regra do jogo é o Lema de Euclides o qual enunciaremos e provaremos a seguir:

Lema 3.0.1 *Sejam $a, b, n \in N$ com $a < na < b$. Se existe $(a, b-na)$, então (a,b) existe, e $(a,b) = (a, b-na)$.*

Observação: (a,b) representa o MDC entre a e b.

Demonstração 3.1 *Seja $d = (a, b-na)$. Como $d|a$ e $d|(b-na)$, segue que d divide $b = b - na + na$. Logo, d é um divisor comum de a e b. Suponha agora que c seja um divisor comum de a e b; logo, c é um divisor comum de a e $b - na$ e portanto, $c|d$. Isso prova que $d = (a,b)$.*

Questão 3.4.2 *Curiosamente o primeiro jogador ganhou as três partidas. Suponha que ao invés das jogadas feitas na primeira rodada ele tivesse jogado os pares* $[17,7]$ *no primeiro exemplo,* $[29,5]$ *no segundo exemplo e* $[34,8]$ *no terceiro exemplo. Monte uma estratégia vencedora para o segundo jogador.*

Resposta comentada:

1° **Exemplo:** O primero jogador joga $[17,7]$. O segundo jogador tem as seguintes possibilidades: $[3,7]$ ou $[10,7]$. Suponha que ele escolha $[10,7]$. Será a vez, novamente do primeiro jogador que só terá uma alternativa: $[3,7]$. Agora, o segundo jogador pode jogar: $[3,4]$ ou $[3,1]$. Suponha que ele escolha $[3,4]$. O primeiro jogador será obrigado a jogar $[3,1]$. O segundo jogador jogará $[0,1]$ e vencerá a partida.

2° **Exemplo:** O primeiro jogador joga $[29,5]$. O segundo tem as seguinte possibilidades: $[4,5]$,$[9,5]$,$[13,5]$, $[18,5]$, e $[24,5]$. Suponha que ele escolha $[4,5]$. Será a vez novamente do primeiro jogador que só terá uma alternativa: $[4,1]$. O segundo jogará $[0,1]$ e vencerá a partida.

3° **Exemplo:** O primeiro jogador joga $[34,8]$. O segundo tem as seguintes possibilidades: $[2,8]$, $[10,8]$, $[18,8]$, $[26,8]$. Suponha que ele escolha $[10,8]$. Será a vez novamente do primeiro jogador que só terá uma alternativa: $[2,8]$. O segundo jogador jogará $[2,0]$ e vencerá a partida.

Questão 3.4.3 *Nas partidas em que o primeiro jogador venceu, ele entregou para o adversário os seguintes pares:*

Exemplo 1: $[10, 7], [3, 4]$.
Exemplo 2: $[4, 5]$.
Exemplo 3: $[10, 8]$.
Por outro lado as jogadas do segundo jogador (perdedor) foram:
Exemplo 1: $[3, 7], [3, 1]$.
Exemplo 2: $[4, 1]$.
Exemplo 3: $[2, 8]$.

a. A primeira coluna da tabela indica as jogadas do primeiro jogador (vencedor); divida o maior número do par pelo menor e insira o resultado aproximado na terceira coluna:

Ex.1	[10,7]	1,428
Ex.1	[3,4]	1,333
Ex.2	[4,5]	1,25
Ex.3	[10,8]	1,25

b. A primeira coluna da tabela indica as jogadas do segundo jogador (perdedor); divida o maior número do par pelo menor e insira o resultado aproximado na terceira coluna.

Ex.1	[3,7]	2,333
Ex.1	[3,1]	3
Ex.2	[4,1]	4
Ex.3	[2,8]	4

c. Na questão dois criou-se uma estratégia para que o segundo jogador vencesse a partir de uma jogada diferente da proposta, nos exemplos, pelo primeiro jogador. Assim, monte duas tabelas, uma indicando na primeira coluna as jogadas propostas por você para o segundo jogador (vencedor) e a outra com as jogadas do primeiro jogador (perdedor). Assim como no exercício b. insira na terceira coluna o resultado aproximado da divisão do maior número do par jogado pelo menor.

Segundo jogador (vencedor):

Ex.1	[10,7]	1,428
Ex.1	[3,4]	1,333
Ex.2	[4,5]	1,25
Ex.3	[10,8]	1,25

Primeiro jogador (perdedor):

Ex.1	[17,7]	2,428
Ex.1	[3,7]	2,333
Ex.1	[3,1]	3
Ex.2	[29,5]	5,8
Ex.2	[4,1]	4
Ex.3	[34,8]	4,25
Ex.3	[2, 8]	4

d. Qual foi o maior resultado encontrado na divisão dos números dos pares das jogadas do vencedor?

Maior resultado: $1,428$.

e. Qual foi o menor resultado encontrado na divisão dos números dos pares das jogadas do perdedor?

Menor resultado: $2,333$.

Questões 3.4.2 **e** 3.4.3 **comentadas:** O professor deve instigar os alunos a perceberem que o fato de o resultado da divisão de um par vencedor, nos exemplos, ser sempre menor que $1,428$ não é uma coincidência, ou seja, existe uma estratégia para vencer o jogo. De fato, a escolha do par a ser jogado é uma estratégia para vencer o jogo. Se um jogador recebe um par $[a, b]$ com

$$\frac{a}{b} < \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$$

ele terá as condições necessárias para adotar a estratégia que lhe garante a vitória. A ideia é que os alunos estejam motivados a acompanhar e a entender a demonstração Matemática da validade da estratégia para qualquer par de números naturais escolhidos. Provaremos a afirmação a seguir. Considerações iniciais:

dado um par $[a, b]$, com $a > b$, os pares

$$[a-b, b], [a-2b, b], \cdots, [a-qb, b]$$

com $a - qb \geq 0$, chamam-se pares derivados de $[a, b]$. Assim, $[24, 7], [17, 7], [10, 7], [3, 7]$ são os pares derivados de $[31, 7]$. Se $a - qb \geq 0$ e $a - (q+1)b < 0$ $[a - qb, b]$ chama-se par derivado mínimo de $[31, 7]$.

Observe que, dentre todos os pares derivados de um par $[a, b]$, com $a > b$, os números do par derivado mínimo são b e o resto da divisão de a por b.

Se $[a - qb, b]$ for o par derivado mínimo, diremos que o par $[a - (q-1)b, b]$ é o par anterior ao par derivado mínimo.

Observe, mais uma vez, o exemplo: Dado o par $[31, 7]$, o primeiro jogador tem apenas duas opções significativas:

- ele escolhe o par derivado mínimo $[3, 7]$;

- ele escolhe o par anterior ao par derivado mínimo, isto é, $[10,7]$, obrigando o adversário a jogar $[3,7]$. Qualquer outra escolha daria estas mesmas duas opções ao adversário.

Analisando o caso geral: suponhamos que o primeiro jogador receba o par $[n,m]$ com $m < n$. Se $\frac{n}{m}$ for um número inteiro k, o primeiro jogador ganhará o jogo com a jogada $[n-km,m]=[0,m]$. Suponhamos então, $n = qm+r$, $0<r<m$. O jogador deverá optar pelo par derivado mínimo ou pelo par anterior a este, isto é, deverá optar entre:

$$[nm-qm,m]=[qm+r-qm,m]=[r,m],\ \text{ com }\ 0<r<m.$$

$$[n-(q-1)m,m]=[qm+r-qm+m,m]=[m+r,m]\ \text{ com }\ m<m+r$$

Como o adversário vai prosseguir, tirando de m um múltiplo de r ou tirando de $m+r$ um múltiplo de m, olhemos para as razões $\frac{m}{r}$ e $\frac{m+r}{m}$. Fazendo $\frac{m}{r}=x$, teremos

$$\frac{m+r}{m}=1+\frac{r}{m}=1+\frac{1}{x}.$$

Qual das razões, $x=\frac{m}{r}$ ou $1+\frac{1}{x}=\frac{m+r}{m}$ é vantajosa para o jogador?
Observamos, inicialmente, que as razões seriam iguais se

$$x=1+\frac{1}{x}$$

ou seja, se $x^2-x-1=0$, ou ainda, dado que $x>0$, se

$$x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Este número $\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1,618$, terá um papel importante na discussão. Vamos chamá-lo de r.

Demonstração 3.2
- $x<r \Rightarrow 1+\frac{1}{x}>r$

$$\begin{aligned}
x<r\Rightarrow \frac{1}{x} &> \frac{1}{r}\\
\Rightarrow 1+\frac{1}{x} &> 1+\frac{1}{r}=1+\frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\\
&= 1+\frac{2}{1+\sqrt{5}}=\frac{1+\sqrt{5}+2}{1+\sqrt{5}}\\
&= \frac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}\\
&= \frac{3-3\sqrt{5}+\sqrt{5}-5}{1-5}=\frac{-2-2\sqrt{5}}{4}\\
&= \frac{-2(1+\sqrt{5})}{-4}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\\
&= r
\end{aligned}$$

- $x > r \Rightarrow 1 + \frac{1}{x} < r$

Demonstração 3.3

$$\begin{aligned}
x > r \Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{r} & \\
\Rightarrow 1 + \frac{1}{x} &< 1 + \frac{1}{r} = 1 + \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \\
&= 1 + \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5}+2}{1+\sqrt{5}} \\
&= \frac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} \\
&= \frac{3-3\sqrt{5}+\sqrt{5}-5}{1-5} = \frac{-2-2\sqrt{5}}{4} \\
&= \frac{-2(1+\sqrt{5})}{-4} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\
&= r.
\end{aligned}$$

Refazemos, então, a pergunta: o primeiro jogador pode optar entre um par cuja razão é maior do que r, ou um par cuja razão é menor do que r. Qual é a melhor opção? A resposta se encontra no seguinte fato:

Se um jogador receber um par $[a, b]$ com $1 < \frac{a}{b} < r$, naquela jogada ele não poderá ganhar o jogo e terá como única opção o par $[a - b, b]$ com razão $\frac{b}{a-b} > r$.
De fato, se

$$1 < \frac{a}{b} < r$$

$\frac{a}{b}$ não é inteiro e $a - 2b$ é negativo.
Portanto, a única opção será $[a - b, b]$ e

$$\begin{aligned}
\frac{b}{a-b} = \frac{1}{\frac{a}{b}-1} &> \frac{1}{r-1} = \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}-1} \\
&= \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}-2}{2}} \\
&= \frac{2}{-1+\sqrt{5}} \cdot \frac{-1-\sqrt{5}}{-1+\sqrt{5}} \\
&= \frac{-2-2\sqrt{5}}{1-5} = \frac{-2(1+\sqrt{5})}{-4} \\
&= \frac{1+\sqrt{5}}{2} = r
\end{aligned}$$

.

Desta forma, é sempre vantajoso para um jogador escolher aquele par cuja razão é menor do que r e passá-lo ao adversário. Este, na sua vez, não ganhará o jogo e será obrigado a devolver um par com razão maior do que r. Conclusão:
Se um jogador receber um par $[a, b]$ com $\frac{a}{b} > r$ ele terá uma estratégia que lhe garantirá a vitória. Demonstração:

- se $\frac{a}{b} > r$, ou a é múltiplo de b e o jogador vencerá naquele lance ou ele terá duas opções: escolher o par derivado mínimo ou o anterior ao mínimo. Já vimos que ele deve escolher o par com razão menor do que r, o que impedirá a vitória do adversário no lance seguinte.

Portanto, o jogador que receber um par $[a, b]$ com $\frac{a}{b} > r$ poderá sempre impedir que seu adversário ganhe o jogo no lance seguinte. Como o jogo é finito (já que os sucessivos pares contêm números naturais cada vez menores), necessariamente haverá uma vez em que o jogador receberá um par $[a, b]$, com a múltiplo de b, o que lhe dará a vitória.

4 Fibonacci e o número de ouro

4.1 Um pouco de história: A sequência de Fibonacci e o número de ouro

Fibonacci (filho de Bonaccio) foi um dos matemáticos mais importantes da Idade Média. Nasceu por volta de 1170 em Pisa, uma das primeiras cidades comerciais italianas e que manteve um comércio florescente com o mundo árabe. Desde cedo, Fibonacci foi iniciado nos negócios e nos cálculos, o que despertou o seu interesse pela matemática. Em 1202, Fibonacci escreveu sua obra mais célebre, "Liber Abaci", que foi também um meio, através do qual, a numeração hindu-árabe foi introduzida na Europa Ocidental. O nome de Fibonacci tornou-se conhecido devido a um problema que existia no seu livro "Liber Abaci", chamado de o problema dos coelhos. A solução desse problema é uma sequência numérica famosa e que, curiosamente, relaciona-se ao número de ouro e a diversos fenômenos da natureza.

1. Um cavalheiro adquiriu um casal de coelhos recém nascidos;
2. este casal de coelhos demora um mês exato para atingir a maturidade, tornando-se fértil e podendo reproduzir a partir do segundo mês;
3. cada casal de coelhos fértil gera um casal de filhos a cada mês, aceitando-se cruzamentos consanguineos;
4. o cavalheiro jamais se desfaz de seus coelhos que, por sua vez, nunca morrem;

Pergunta-se: ao final de doze meses, quantos casais de coelhos o cavalheiro possuirá? E quantos possuía a cada mês?

Mês	Casais adultos	Casais jovens	Total de casais
1	0	1	1
2	1	0	1
3	1	1	2
4	2	1	3
5	3	2	5
6	5	3	8
7	8	5	13
8	13	8	21
9	21	13	34
10	34	21	55
11	55	34	89
12	89	55	144

Note que cada termo a partir do terceiro é obtido pela soma dos dois anteriores:

$$\begin{aligned} 2 &= 1+1 \\ 3 &= 2+1 \\ 5 &= 3+2 \\ 8 &= 5+3 \\ &\vdots \\ 144 &= 89+55 \\ &\vdots \\ F_{n+2} &= F_n + F_{n+1} \end{aligned}$$

Essa sequência numérica é conhecida como sequência de Fibonacci.

4.2 Um pouco de história: O número de ouro

O número $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, cujo valor aproximado é $1,618033988749$, é conhecido historicamente por proporção áurea ou número de ouro. Dizemos que um ponto X divide o segmento $\bar{AB}$ na razão áurea (também conhecida como razão de ouro, divina proporção, proporção em extrema razão ou divisão de extrema razão) se X pertence ao segmento $\bar{AB}$ e $\frac{\bar{AX}}{\bar{XB}} = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,61803\ldots$. Este número (tradicionalmente representado pela letra grega fi maiúsculo:Φ) tem muitas aplicações surpreendentes em vários ramos da matemática. Não são poucos os que defendem a teoria sobre a presença do número de ouro em muitos objetos do universo, como, a natureza, artes, arquitetura e anatomia. Por outro lado, há estudos que apontam que essa teoria não passa de um mito. De qualquer forma este é um assunto muito interessante e enigmático que vale a pena ser pesquisado, porém não é o objetivo deste trabalho. Sendo assim deixamos como sugestão para aqueles que desejam um maior aprofundamento, há as referências [13], [14].

4.3 Atividades

Atividade 4.1 *Propriedades da sequência de Fibonacci.*

O objetivo desta atividade é concluir intuitivamente a validade das seguintes propriedades da sequência de Fibonacci:

Propriedade 1 As sucessivas razões entre um número e o que o antecede convergem para o número de ouro.

Propriedade 2 Fixado um termo $m \geq 1$ da sequência de Fibonacci temos que para n múltiplo de m, $F(n)$ é múltiplo de $F(m)$.

Propriedade 3 A soma de n termos da sequência de Fibonacci pode ser calculada por: $Sn = F(n+2) - 1$;

Propriedade 4 O n-ésimo termo da sequência de Fibonacci pode ser calculado por: $F(n) = \frac{\phi^n}{\sqrt{5}}$.

De fato é possível demonstrar a validade das propriedades mas não faremos, pois foge da proposta do curso. A demonstração pode ser encontrada na referência [15]
Propriedade 1 As sucessivas razões entre um número e o que o antecede convergem para o número de ouro.

Entregue aos alunos a folha de atividades da página 56 e peça para que preencham a tabela com os números da sequência de Fibonacci, sendo:
n: ordem do termo.
F_n: termo de ordem n.
$F_n - 1$: termo de ordem $n - 1$.
$\frac{Fn}{(Fn-1)}$: Razão entre o termo de ordem n e o anterior a ele, ou seja $n - 1$.

Faremos o preenchimento até o 15° termo, isso já é o bastante para o convencimento informal do que desejamos concluir. A última coluna deve ser preenchida com o auxílio de uma calculadora.

n	F_n	F_{n-1}	$\dfrac{F_n}{F_{n-1}}$
1	1	-	
2	1	1	1
3	2	1	2
4	3	2	1,5
5	5	3	1,666666666 ...
6	8	5	1,6
7	13	8	1,625
8	21	13	1,615384615 ...
9	34	21	1,61904761 ...
10	55	34	1,617647058 ...
11	89	55	1,6181818181 ...
12	144	89	1,617977528 ...
13	233	144	1,618055555 ...
14	377	233	1,618025751 ...
15	610	377	1,6180371

Questão 4.1.1 *O que acontece com a razão de um termo pelo seu anterior a medida que o n aumenta?*

Resposta: O valor aproxima-se cada vez mais do número de ouro.

Questão 4.1.2 *A que conclusão podemos chegar?*

Resposta: As sucessivas razões entre um número e o que o antecede convergem para o número de ouro.
Propriedade 2: Fixado um termo $m \geq 1$ da sequência de Fibonacci temos que para n múltiplo de m, $F(n)$ é múltiplo de $F(m)$.
Peça aos alunos que façam o preenchimento da tabela:
n: ordem do termo .
F_n: termo de ordem n.

n	F_n
1	1
2	1
3	2
4	3
5	5
6	8
7	13
8	21
9	34
10	55
11	89
12	144
13	233
14	377
15	610
16	987
17	1597
18	2584
19	4181
20	6765
21	10946

Consulte a tabela acima e preencha as seguintes tabelas relacionando os termos $F(n)$ para n múltiplo de 3 e também múltiplos de 5.

n	3	6	9	12	15	18	21
F(n)	2	8	34	144	610	2584	10946

n	5	10	15	20
F(n)	5	55	610	6765

Questão 4.1.3 *Qual a relação entre $F(3)$ e $F(6)$, $F(9)$, $F(12)$, $F(15)$, $F(18)$, $F(21)$? E entre $F(5)$ e $F(10)$, $F(15)$, $F(20)$?*

Resposta: $F(6)$, $F(9)$, $F(12)$, $F(15)$, $F(18)$, $F(21)$ são todos múltiplos de $F(3)$. Da mesma forma $F(10)$, $F(15)$, $F(20)$ são múltiplos de $F(5)$.

Questão 4.1.4 *A que conclusão podemos chegar?*

Resposta: Para todo número n múltiplo de m, com $m \geq 1$, $F(n)$ é múltiplo de $F(m)$.
Propriedade 3: Soma de n termos da sequência de Fibonacci pode ser calculada por: $Sn = F(n+2) - 1$;

Questão 4.1.5 *Calcule as seguintes somas:*

a. S_5, do termo $F(1)$ ao $F(5)$. **Resposta:**

$$F(1) + F(2) + \ldots + F(5) = 1 + 1 + 2 + 3 + 5 = 12$$

b. S_8, do termo $F(1)$ ao $F(8)$. **Resposta:**

$$F(1) + F(2) + \ldots + F(8) = 1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 + 21 = 54$$

c. S_{14}, do termo $F(1)$ ao $F(14)$. **Resposta:**

$$F(1)+F(2)+\ldots+F(14) = 1+1+2+3+5+8+13+21+34+55+89+144+233+377 = 986$$

Questão 4.1.6 *Qual a relação entre $F(7)$ e S_5, $F(10)$ e S_8, $F(16)$ e S_{16}?*

Resposta comentada: $F(7) = 13$ e $S_5 = 12$; $F(10) = 55$ e $S_8 = 54$; $F(6) = 987$ e $S_{16} = 986$. As somas são uma unidade menor do que o segundo termo subsequente.

Questão 4.1.7 *Generalize o resultado anterior.*

Resposta comentada: A fórmula para o cálculo dos n termos de uma sequência de Fibonacci é:

$$Sn = F(n + 2) - 1.$$

Questão 4.1.8 *Calcule a soma S_{21}, do termo $S(1)$ ao $S(21)$.*

Resposta comentada: $S_{21} = F(21 + 2) - 1$, assim $S_{21} = F(23) - 1$, em nossa tabela temos somente até o termo de ordem 21, porém temos condições de calcular rapidamente $F(23)$ pois ele é $F(22) + F(21)$ e temos $F(22) = F(21) + F(20)$, ou seja, $F(22) = 10946+6765$, donde $F(22) = 17711$. Portanto $F(23) = 17711+10946 = 28657$. Logo, $S_{21} = 28657 - 1, S_{21} = 28656$.

Questão 4.1.9 *Calcule a soma S_{30}, do termo $S(1)$ ao $S(30)$.*

A soma pedida é $S_{30} = F(30 + 2) - 1$, ou seja, $S_{30} = F(32) - 1$. Podemos repetir o processo da questão anterior e com algum trabalho calcular $F(32)$ e assim a soma, porém não faremos assim.

Resposta comentada: A intenção da questão é perceber que na maioria das vezes o trabalho de encontrar manualmente os termos da sequência de Fibonacci é demorado. Uma maneira mais rápida de executar isso é através da P4:
Propriedade 4 O n-ésimo termo da sequência de Fibonacci pode ser calculado por:

$$F(n) = \frac{\phi^n}{\sqrt{5}}$$

Assim, $F(32) = \frac{1{,}618034^{32}}{\sqrt{5}}$, portanto, $F(32) \cong 2178309,485$, donde concluímos que $F(32) = 2178309$. Voltando à questão 4.1.9, temos: $S_{30} = 2178309 - 1 = 2178308$

Atividade 4.2 *O retângulo de ouro e a sequência de Fibonacci.*

O retângulo de ouro surge do processo de divisão em média e extrema razão. Ele é assim chamado porque ao dividir-se a base desse retângulo pela altura, obtém-se aproximadamente o valor do número de ouro. Por exemplo: Os retângulos AEFB e CDEF são retângulos de ouro. Nesta atividade nosso objetivo é construir o retângulo de ouro a partir da sequência de Fibonacci. Para a atividade vamos precisar de papel quadriculado.

Descrição da atividade: Entregar aos alunos as folhas de papel quadriculado. Orientá-los a desenhar retângulos usando os quadrados da folha de acordo com o seguinte procedimento: Os retângulos serão montados a partir de quadrados cuja medida correspondem aos termos da sequência de Fibonacci. Por exemplo:

- no primeiro retângulo pode ser usado apenas um quadrado de lado um.
- no segundo retângulo podem ser usados um quadrado de lado um do passo anterior e um novo quadrado de lado um.
- no terceiro retângulo podem ser usados os dois quadrados de lado um do passo anterior e um novo de lado dois. E assim por diante.

Note que os quadrados devem ser posicionados de forma que encaixem na figura gerando um novo retângulo. Agora os alunos devem desenhar os próximos quatro retângulos. Para auxiliá-los faça as seguintes perguntas:

Questão 4.2.1 *Quais as medidas dos retângulos desenhados?*

Resposta: Quarto retângulo: 5 u.m de comprimento e 3 u.m de altura.
Quinto retângulo: 5 u.m de comprimento e 8 u.m de altura.
Sexto retângulo: 13 u.m de comprimento e 8 u.m de altura.

Questão 4.2.2 *Você conseguiria, sem desenhar, responder quais são as medidas dos próximos retângulos? Se a resposta for afirmativa, indique as medidas dos próximos três retângulos.*

Resposta Sim, pois são os sucessivos termos da sequência de Fibonacci. Assim a medida dos três próximos retângulos serão:
Sétimo retângulo: 13 u.m de comprimento e 21 u.m de altura.
Oitavo retângulo: 34 u.m de comprimento e 21 u.m de altura.
Nono retângulo: 34 u.m de comprimento e 55 u.m de altura.

Questão 4.2.3 *Indique a seguir a razão entre a medida maior e a medida menor de cada um dos retângulos:*

Resposta: Primeiro retângulo: $1/1 = 1$
Segundo retângulo: $2/1 = 2$
Terceiro retângulo: $3/2 = 1,5$

Quarto retângulo: $53 = 1,666\ldots$
Quinto retângulo: $8/5 = 1,6$
Sexto retângulo: $13/8 = 1,625$
Sétimo retângulo: $21/13 = 1,615384615\ldots$
Oitavo retângulo: $34/21 = 1,61904761\ldots$
Nono retângulo: $65/44 = 1,617647058\ldots$

Questão 4.2.4 *O que podemos concluir a respeito da razão entre as medidas dos lados dos retângulos?*

Resposta: podemos concluir que à razão entre a medida dos lados é igual a razão entre um termo da sequência de Fibonacci e o seu anterior, o qual já vimos que se aproxima cada vez mais do número de ouro.

Questão 4.2.5 *Qual é um método eficiente para construir um retângulo de ouro?*

Resposta: Podemos construir um retângulo de ouro a partir da união de quadrados cujas medidas correspondem, em ordem, aos termos da sequência de Fibonacci.

Atividade 4.3 *A mágica de Fibonacci*

A atividade a seguir é uma interessante brincadeira com o propósito de instigar a curiosidade do aluno e a partir disso abordar temas como da teoria de números e propriedades da sequência de Fibonacci. Para a atividade vamos precisar de uma folha, por aluno, com dez linhas numeradas de 1 a 10.

Descrição da atividade: Peça aos alunos que escolham um representante e entregue a este um envelope fechado contendo o número 1,61 anotado. Dê aos alunos uma folha com dez linhas numeradas de 1 a 10. Peça a eles que escolham, em secreto, dois números inteiros e os coloquem um na primeira linha e um na segunda. Solicite aos alunos que completem as demais linhas (3^a e 10^a) fazendo a soma das duas linhas anteriores, formando assim uma sequência de Fibonacci. Por exemplo:

1^a	5
2^a	12
3^a	17
4^a	29
5^a	46
6^a	75
7^a	121
8^a	196
9^a	317
10^a	513

Professor, temos dois resultados curiosos a respeito de qualquer sequência obtida seguindo as instruções anteriores. Estes resultados não devem ainda ser revelados aos alunos.

- A soma dos dez termos é igual ao produto do elemento da sétima linha por 11.
- O quociente da décima linha pela nona, com duas casas decimais, é igual a $1,61$.

Note a validade dos resultados no exemplo: a soma dos dez elementos é 1331 que por sua vez é igual ao produto do elemento da sétima linha, 121 por 11. O quociente do elemento da décima linha, 513, pelo elemento da nona linha, 317, com duas casas decimais é $1,61$. Use esses resultados para despertar a curiosidade dos alunos. Depois dos truques iremos demonstrar porque funciona.

O truque

Peça aos alunos para somar os números obtidos nas dez linhas e que não revelem o resultado. Pergunte a alguns alunos apenas o número da sétima linha e faça as adivinhações. O ideal é que o professor esteja hábil na multiplicação por 11 a fim de dar resultados mentalmente, pois isto cria um mistério maior. Nesta altura dos acontecimentos é esperado que a turma esteja bastante curiosa de como o professor fez para "adivinhar". Solicite ainda que um dos alunos divida o número da décima linha pelo número da nona linha e que revele o resultado aproximado até a segunda casa decimal. O aluno terá encontrado o número $1,61$. Escreva esse número no quadro. Este é o momento do aluno que está com o envelope abri-lo e surpreendemente lá estará o número $1,61$.

Desvendando o mistério:

Como está evidenciado na regra, podemos escolher quaisquer números iniciais, sendo assim chame de x o primeiro e de y o segundo. A seguir complete as demais linhas da tabela (3^a a 10^a) fazendo a soma das duas linhas anteriores.

1^a	x
2^a	y
3^a	x + y
4^a	x + 2y
5^a	2x+3y
6^a	3x+5y
7^a	5x+8y
8^a	8x+13y
9^a	13x+21y
10^a	21x+34y

Questão 4.3.1 *Some os termos da 1^a a 10^a linha.*

Resposta:

$$x+y+x+y+x+2y+2x+3y+3x+5y+5x+8y+8x+13y+13x+21y+21x+34y$$

$$= 55x+88y$$

Questão 4.3.2 *Note que 55 e 88 são múltiplos de 11, sendo assim, podemos escrever, $55x+88y = 11(5x+8y)$. Quem é $5x+8y$? Qual a conclusão a que podemos chegar?*

Resposta comentada: $5x + 8y$ é o elemento da sétima linha. Podemos calcular a soma dos dez termos da sequência conhecendo apenas o sétimo termo, basta calcular o produto do termo que está na sétima linha por 11.

A segunda parte do truque é um pouco mais delicada de ser demonstrada, porém é razoável esperar que haja um bom entendimento por parte dos alunos.

Teorema 4.1 *Dada uma sequência de dez termos em que cada um a partir do terceiro é obtido somando os dois termos anteriores, temos que o quociente do elemento da décima linha pelo elemento da nona linha é, com duas casa decimais, igual a* $1,61$.

Demonstração 4.1 *Faremos uso de uma propriedade de desigualdades bastante conhecida:*
Se a, b, c *e* d *são números positivos tais que* $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, *então* $\frac{a+c}{b+d}$ *está entre* $\frac{a}{b}$ *e* $\frac{c}{d}$.
Vamos demonstrar essa propriedade:

$$\frac{a}{b} \quad < \quad \frac{c}{d} \tag{4.3.1}$$

obtemos $ad < bc$, *implicando* $ab + ad < ab + bc$, *que, após fatoração, fornece-nos* $a(b + d) < b(a + c)$.
Dividindo ambos os membros por $b(b + d)$, *chegamos à desigualdade*

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d}.$$

Por outro lado,

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$$

obtemos $ad < bc$, *implicando* $ad + cd < bc + cd$, *após fatoração, fornece-nos* $d(a + c) < c(b + d)$.

Dividindo ambos os membros por $d(b + d)$, *chegamos à desigualdade*

$$\frac{a+c}{b+d} \quad < \quad \frac{c}{d}. \tag{4.3.2}$$

De 4.3.1 e 4.3.2 concluimos:

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

Voltemos à demonstração da segunda parte do truque. O quociente a ser analisado é

$$\frac{21x + 34y}{13x + 34y}$$

Note que

$$\frac{21}{13} = 1,615384\cdots$$

$$\frac{34}{21} = 1619047\cdots$$

assim,

$$\frac{21}{13} < \frac{34}{21} \text{ , ou ainda , } \frac{21x}{13x} < \frac{34y}{21y}.$$

Logo, pela propriedade de desigualdades demonstrada anteriormente temos

$$\frac{21x}{13x} < \frac{21x+34y}{13x+21y} < \frac{34y}{21y}$$

donde concluimos,

$$\begin{aligned} 1,615384\cdots &= \frac{21}{13} \\ &= \frac{21x}{13x} < \frac{21x+34y}{13x+21y} \\ &< \frac{34y}{21y} = \frac{34}{21} = 1,619047\cdots \end{aligned} \tag{4.3.3}$$

ou seja, o quociente está entre $1,615384\cdots$ *e* $1,619047$*, se considerarmos apenas duas casas decimais ele é igual a* $1,61$.

5 Equações Diofantinas

5.1 Um pouco de história: Diofanto

No período conhecido como Segunda Idade de Alexandria, encontramos o maior algebrista grego, Diofanto de Alexandria. Pouco se sabe sobre sua vida, além de uma tradição referida numa coleção de problemas datando do quinto ou sexto século, chamada "Antologia grega"

> Deus lhe concedeu ser um menino pela sexta parte de sua vida, e somando uma duodécima parte a isto cobriu-lhe as faces de penugem. Ele lhe acendeu a lâmpada nupcial após uma sétima parte, e cinco anos após seu casamento concedeu-lhe um filho. Ai! Infeliz, criança tardia; depois de chegar à metade da vida de seu pai, o destino frio o levou. Depois de se consolar de sua dor durante quatro anos com a ciência dos números ele terminou sua vida (Cohen e Drabkin,1958; p.27).

Se esse enigma é historicamente exato, Diofanto viveu oitenta e quatro anos. Positivamente não deve ser tomado como problema típico dos que interessavam a Diofanto, pois este pouca atenção deu a equação de primeiro grau. As equações Diofantinas, têm seu nome em homenagem a Diofanto de Alexandria, matemático grego, que publicou treze volumes do livro Aritmética, que até há pouco tempo somente seis eram conhecidos originalmente em grego, na atualidade existem mais quatro livros que alguns historiadores julgam fazer parte da obra de Diofanto, porém escritos em árabe.

5.2 Atividades

Atividade 5.1 *Equações Diofantinas*

O objetivo desta atividade é o ensino de resolução de equações Diofantinas, ou seja, do tipo $ax + by = c$, com $a, b, c \in \mathbb{N}$. Atentar para o fato de que as resoluções das equações diofantinas dar-se-ão sempre no universo do conjunto dos números inteiros face esse ser o objeto de nosso estudo, uma vez que para os reais sempre teremos um par que corresponda a uma solução válida.

Vamos começar com um problema:

Proponha aos alunos que resolvam da maneira como julgarem pertinente o primeira questão da folha de atividades da página 60:

Questão 5.1.1 *Numa criação de coelhos e galinhas contaram-se* 152 *pés. Quantas podem ser as galinhas e quantos podem ser os coelhos. Após discutir as respostas possíveis reduzir a resposta a menor diferença possível entre o número de galinhas e coelhos.*

Resposta comentada: Após aparecer a primeira resposta válida, informe aos educandos que a mesma não é única e os faça chegar à conclusão de que outra resposta válida será sempre somar duas galinhas e diminuir um coelho, ou retirar duas galinhas e acrescentar um coelho visto que estamos acrescentando ou retirando quatro pés e retirando ou acrescentando quatro pés, mantendo o número de pés solicitados. Caso não apareça uma resposta válida, instigue os alunos a acharem uma resposta para o caso em que só existam galinhas. Serão encontrados 76 galinhas e 0 coelhos. Em seguida, faça-os entender que outras respostas válidas seriam 74 galinhas e 1 coelho, 72 galinhas e 2 coelhos, 70 galinhas e 3 coelhos, etc. Ao fazermos a inspeção das respostas, encontraremos todas as respostas válidas. Mostre aos alunos que a medida que se diminui o número de galinhas, o número de coelhos deve aumentar e, com isso, a diferença entre eles diminui. Chegaremos ao resultado de 28 galinhas e 24 coelhos (diferença de 4 animais); a próxima resposta será 26 galinhas e 25 coelhos (diferença de 1 animal); a próxima resposta válida será 24 galinhas e 26 coelhos (diferença de 2 animais). Neste momento, mostre que as próximas respostas somente irão aumentar a diferença; logo esta é a resposta procurada. Após estas reflexões apresente a solução da equação diofantina:

$$4x + 2y = 152$$

Esta equação pode ser reduzida à forma

$$2x + y = 76$$

Devemos escrever o número 1 em função dos coeficientes $a = 2$, $b = 1$ Como $2 - 1 = 1$. Então

$$76.(2 - 1) = 76.1$$

$$2.76 + 1.(-76) = 76$$

ou seja, os números $x = 76$ e $y = -76$ são soluções válidas para a equação acima. Utilizando o mesmo raciocínio efetuado com os alunos, sabemos que caso seja diminuído o número de coelhos, ocorre um acréscimo no número de galinhas. Mais especificamente, como já verificado, ao diminuirmos um coelho e acrescentarmos duas galinhas, chegaremos à resposta já encontrada. Neste momento, vale frisar aos alunos que nem sempre será possível efetuar a resolução via tentativas e erro. Por isso deve-se entender o método de resolução a fim de que sejam encurtados os processos.

Questão 5.1.2 *É possível encontrar valores inteiros para x e y que satisfaçam a equação $4x + 6y = 3$?*

Resposta comentada: Não existe solução $\mathbb{Z}$ para a equação. Temos que $4x$ e $6y$ são pares para todo $x, y \in Z$, sendo assim $4x + 6y$ também é par. Portanto, não pode ser igual a 3 pois este é ímpar.

Na equação apresentada na questão anterior conseguimos perceber que não há solução em $\mathbb{Z}$. Nem sempre essa conclusão é tão natural assim. Por exemplo, a equação $3x + 6y = 10$ não possuiu solução em inteiros e pelo menos a princípio não é tão óbvio chegar a esta conclusão. A proposição a seguir apresenta em que condições as equações Diofantinas apresentam solução.

Proposição 5.1 *Sejam $a, b, c \in \mathbb{N}$. A equação $ax + by = c$, admite solução em inteiros se, e somente se o m.d.c entre a e b, ou seja (a, b), divide c.*

Demonstração 5.1 *Tome uma equação na forma:*

$$ax + by = c; \quad com \quad a, b, c, x, y \in \mathbb{Z} \tag{5.2.1}$$

Suponha que o m.d.c entre a e b é igual a d; logo

$$a = d.t \quad e \quad b = d.u; \quad com \quad d, t, u \in \mathbb{Z}.$$

Assim a equação (5.2.1) pode ser escrita na forma:

$$d.t.x + d.u.y = c \quad ou \quad : d.(t.x + u.y) = c$$

dividindo ambos os lados por d obteremos :

$$t.x + u.y = \frac{c}{d}$$

1. *Suponhamos primeiramente que d não divide c. Logo $c/d \notin \mathbb{Z}$ e a equação $ax+by$ não possui solução em $\mathbb{Z}$; pois como $\mathbb{Z}$ é fechado em relação à multiplicação e à adição $ax + by \in \mathbb{Z}$.*

2. *Suponhamos agora que d divide c. Logo $c/d \in \mathbb{Z}$, e a equação $ax + by = c$ possui solução em $\mathbb{Z}$; pois como $\mathbb{Z}$ é fechado em relação a multiplicação e adição existe a, x, b, y tal que $a.x + b.y = c$.*

Sabe-se então determinar se a equação Diofantina tem solução nos inteiros. Sendo assim agora será apresentado um esquema de resolução da equação. Faremos isso através da resolução de um exemplo.

Exemplo 5.1 *De quantas maneiras pode-se comprar selos de* 3 *reais e de* 5 *reais de modo que se gaste* 50 *reais?*

Sendo x e y respectivamente a quantidade de selos de 3 reais e 5 reais, temos que o problema pode ser representado pela equação:

$$3x + 5y = 50$$

Como o m.d.c entre 3 e 5 é 1 e 1 divide qualquer número, logo a equação tem solução. Mostrar aos alunos que o modo de se obter a solução é simples e envolve escrever o número 1 em função dos coeficientes a e b da equação $ax + by = c$. Como temos de solucionar a equação $3x + 5y = 50$; basta que escrevamos o número 1 em função de produtos envolvendo os números 3 e 5. Assim mostre aos alunos que

$$1 = 3.2 - 5 \quad \text{ou} \quad 1 = 3.2 + 5.(-1)$$

Como a equação proposta é igual a 50, basta multiplicarmos os dois lados da igualdade por 50 e obteremos:

$$50.[3.2 + 5.(-1)] = 1.50$$

Usando a propriedade distributiva temos que:

$$3.(2.50) + 5.(-1.50) = 50$$

$$3.100 + 5.(-50) = 50$$

Logo $x = 100$ e $y = -50$ são uma solução válida para a equação. Como estamos calculando a quantidade de selos, esta resposta não faz o menor sentido em se tratando de valores negativos. Neste ponto mostrar aos alunos que como $3.5 = 5.3 = 15$, a cada cinco unidades em x obteremos um y menor em três unidades e vice-versa de tal forma que $x = 95$, $y = -47$, é uma outra solução, $x = 90$, $y = -44$ e assim sucessivamente chegaremos a $x = 20$, $y = -2$, a próxima resposta será $x = 15$, $y = 1$ (que será a primeira resposta válida). Através do mesmo raciocínio obteremos $x = 10$, $y = 4$; $x = 5$, $y = 7$; $x = 0$ e $y = 10$. Como a próxima resposta desta sequência será $x = -5$ e $y = 13$, daqui para frente somente encontraremos soluções que são inválidas para o nosso problema. Então, as formas como podemos comprar os selos são

1. 15 selos de $R\$\ 3,00$ mais 1 selo de $R\$\ 5,00$.
2. 10 selos de $R\$\ 3,00$ mais 4 selos de $R\$\ 5,00$.
3. 5 selos de $R\$\ 3,00$ mais 7 selos de $R\$\ 5,00$.
4. Nenhum selo de $R\$\ 3,00$ com 10 selos de $R\$\ 5,00$.

Note que podemos em cada um dos itens escrever

a. $x = 100 - 5.17$, donde $x = 100 - 85$, ou seja $x = 15$
$y = -50 + 3.17$, donde $y = 50 + 51$, ou seja $y = 1$.

b. $x = 100 - 5.18$, donde $x = 100 - 90$, ou seja $x = 10$
$y = -50 + 3.18$, donde $y = 50 + 54$, ou seja $y = 4$.

c. $x = 100 - 5.19$, donde $x = 100 - 95$, ou seja $x = 5$
$y = -50 + 3.19$, donde $y = 50 + 57$, ou seja $y = 7$.

d. $x = 100 - 5.20$, donde $x = 100 - 100$, ou seja $x = 0$
$y = -50 + 3.20$, donde $y = -50 + 60$, ou seja $y = 10$

Perceba que há um padrão de soluções: sendo $x_0 = 100$ e $y_0 = -50$ a solução inicialmente encontrada para a equação $3x + 5y = 50$. As demais soluções são:

$$x = x_0 - 5t; y = y_0 + 3t, \quad \text{com} \quad t \in \mathbb{Z}$$

O resultado que intuímos no exemplo é de fato válido e o enunciamos a seguir.

Proposição 5.2 *Seja x_0 , y_0 soluções da equação $ax + by = c$, onde o m.d.c de a e b é igual a 1. Então, as soluções x, y em $\mathbb{Z}$ da equação são*

$$x = x_0 - tb, t \in \mathbb{Z}$$

$$y = y_0 + ta, t \in \mathbb{Z}$$

Demonstração 5.2 *Seja x, y uma solução de $ax + by = c$, logo,*

$$ax_0 + by_0 = ax + by = c$$

consequentemente

$$a.(x - x_0) = b.(-y + y_0)$$

Como m.d.c de a e b é igual a 1, segue-se que b divide $(x - x_0)$. Logo, $x - x_0 = t.b, t \in \mathbb{Z}$, substituindo temos, $a.t.b = b.(-y + y_0)$, segue-se que $-y + y_0 = t.a$, logo $y = y_0 - t.a, t \in \mathbb{Z}$, o que prova que as soluções são do tipo exibido. Por outro lado x, y, como no enunciado, é solução, pois

$$ax - by = a.(x_0 - tb) + b.(y_0 + ta) = ax_0 - atb + by_0 + atb = ax_0 + by_0 = c$$

Agora é o momento de os alunos praticarem:

Questão 5.1.3 *Qual a idade do senhor Pedro sabendo que ela pode ser expressa na forma $11x + 1$ ou na forma $8y + 3$ e $x, y \in \mathbb{Z}$?*

Resposta comentada: Lembrando que sempre deverá informar ao aluno que a solução será efetuada dentro dos números inteiros, ou seja $x, y \in \mathbb{Z}$. Primeiro vamos mostrar que necessitamos de uma resposta que satisfaça tanto a primeira quanto a segunda afirmação. Como x,y devem ser inteiros, podemos montar as equações na forma

$$11x + 1 = I \quad \text{e} \quad 8y + 3 = I$$

onde I é a idade do Sr.Pedro. Como $11x + 1 = I$ e $8y + 3 = I$; logo podemos concluir que

$$11x + 1 = 8y + 3$$

Reorganizando a equação teremos: $11x - 8y = 2$; como então, resolveremos a equação ao lado? O professor deve resgatar a resolução do m.d.c (máximo divisor comum) para poder escrever o número 1 em função de uma expressão envolvendo $11.p - 8.q$, de tal forma que encontremos uma expressão na forma $11p - 8q = 1$, com $p, q \in \mathbb{Z}$; multiplicada a solução por 2 teremos

$$11.(2p) - 8.(2q) = 2 \quad \text{a qual} \quad 2p = x, \quad \text{ou} \quad 2q = y$$

será uma das soluções para a equação.

	1	2	1
11	8	3	2
3	2	1	

Logo, podemos escrever:

$$1 = 3 - 2 = 3 - (8 - 2.3) = 3.3 - 8 = 3.(11 - 8) - 8 = 11.3 - 8.4;$$

$11.(3) - 8.(4) = 1$, multiplicando ambos os membros por 2 teremos:

$$2.[11.(3) - 8.(4)] = 2.1$$

$$11.(3.2) - 8.(4.2) = 2 \ \text{; donde}$$

$$11.6 - 8.8 = 2$$

com $x = 6$ e $y = 8$ é uma das soluções da equação.

Para encontrar a idade do Sr. Pedro basta então substituir o valor de x na equação $11.x + 1$, ou seja, $11.6 + 1 = 67$; ou o valor de y na equação $8.y + 3$ o que nos fornece equivalentemente $8.8 + 3 = 64 + 3 = 67$. Logo a idade do Sr. Pedro é de 67 anos. Neste momento, o professor deve solicitar aos alunos que usem a preposição 5.2 para calcular outras possíveis respostas:

$$x = x_0 - tb, t \in \mathbb{Z}, \quad \text{substituindo}$$

$$x = 14 - (-8)t, \quad \text{ou seja,} \quad x = 14 + 8t$$

Para $t = -2$,

$$x = 14 + 8.(-2) = 14 - 16 = -2$$

substituindo $x = -2$ em $I = 11.x + 1$, temos:

$$I = 11.(-2) + 1 = -22 + 1$$

logo $I = -21$, o que não faz sentido no contexto do problema.
Para $t = -1$,

$$x = 14 + 8.(-1) = 14 - 8 = 6$$

substituindo $x = 6$ em $I = 11.x + 1$, temos:

$$I = 11.(6) + 1 = 66 + 1$$

logo $I = 67$, é a resposta que havíamos encontrado anteriormente.
Para $t = 0$,

$$x = 14 + 8.(0) = 14 + 0 = 14$$

substituindo $x = 14$ em $I = 11.x + 1$, temos:

$$I = 11.(14) + 1 = 154 + 1$$

logo $I = 155$. Essa resposta é improvável visto que atualmente o Guiness Book, o famoso livro dos recordes, lista como a pessoa mais velha do mundo um japonês de 114 anos de idade. Para valores t maiores que 2 teremos idades maiores que 155 anos e para valores de t menores que -2, idades menores que -21. De uma forma ou de outra os resultados seriam impossíveis.

Questão 5.1.4 *De quantas maneiras posso efetuar o pagamento de $R\$ \ 1.000,00$, utilizando-se de exatamente 30 notas entre os valores de $R\$ \ 10,00$, $R\$ \ 20,00$ e $R\$ \ 50,00$.*

Resposta comentada: Primeiramente notamos que as equações definidas pelo texto são:

$$10x + 20y + 50z = 1000 \tag{5.2.2}$$

$$x + y + z = 30 \tag{5.2.3}$$

De (5.2.3) temos que $x = 30 - y - z$; substituindo em (5.2.2)

$$10.(30 - y - z) + 20y + 50z = 1000$$

$$300 - 10y - 10z + 20y + 50z = 1000$$

$$10y + 40z = 1000 - 300$$

$$10y + 40z = 700 \quad \text{ou} \quad y + 4z = 70$$

Resolvendo esta equação diofantina obteremos as respostas possíveis para o enunciado proposto. Logo:

$$1 = 1(-3) + 4.1$$

$$70.1 = 70.[1.(-3) + 4.1]$$

$$70 = 1.(-210) + 4.70$$

Portanto $y = -210$ e $z = 70$ é solução da equação. Porém, não faz sentido para o contexto do problema já que não há como ter quantidade negativa de notas de $R\$ \ 20,00$. Usamos então a preposição 3 afim de encontrar uma resposta que seja adequada.

$$y = y_0 - b.t \quad z = z_0 + a.t \quad t \in \mathbb{Z}$$

substituindo:

$$y = -210 - 4.t \quad \text{e} \quad z = 70 + t, \quad t \in \mathbb{Z}$$

por inspeção vemos que um valor conveniente para t é -53, assim temos:

$$y = -210 - 4.(-53) = -210 + 212 = 2, \quad \text{ou seja,} \quad y = 2$$

$$z = 70 + (-53) = 70 - 53 = 17, \quad \text{ou seja,} \quad z = 17$$

substituindo na equação (5.2.2):

$$x + y + z = 30, x + 2 + 17 = 30, x + 19 = 30, x = 11$$

Portanto uma resposta para o problema é: 11 notas de $R\$ \, 10,00$, 2 notas de $R\$ \, 20,00$ e 17 notas de $R\$ \, 50,00$. De fato:

$$10.11 + 20.2 + 50.17 = 1000$$

Existem outras respostas para o problema?
Para responder a isso precisamos analisar outros valores de t menores que -53; note na equação $z = 70 + t$ que t não pode ser menor que -70 pois os resultados a partir daí serão de números negativos de notas de $R\$ \, 50,00$. Concluímos então que podemos estudar respostas para valores de t no intervalo $-73 \leq t \leq -53$. Forneça um valor de t para cada aluno da turma e peça que determinem a respectiva resposta do problema. Em seguida discutam essas respostas.
Dividindo 202 por 4 obtemos 50 com resto 2; diminuindo 50 vezes teremos $z = 18$ e obteremos:

$$z = 18 \quad \text{e} \quad y = -2.$$

As próximas respostas válidas serão: $z = 17$, $y = 2$; logo $x = 11$

$$10x + 20y + 50z = 110 + 40 + 850 = 1000$$

$z = 16$, $y = 6$; logo $x = 8$

$$10x + 20y + 50z = 80 + 120 + 800 = 1000$$

$z = 15$,$y = 10$, logo $x = 5$

$$10x + 20y + 50z = 50 + 200 + 750 = 1000$$

$z = 14$, $y = 14$, $x = 2$

$$10x + 20y + 50z = 20 + 280 + 700 = 1000$$

Para $z = 13$, $y = 18$, $x = -1$ a resposta não é válida, pois x obrigatoriamente é maior ou igual a zero.

Da onde podemos concluir que estas são as respostas válidas para o problema.
Após introduzido o assunto, o professor pode recorrer aos exercícios da página 48 a fim de que seja fixada a forma de resolução dos problemas envolvendo equações diofantinas.

Outra aplicação para as equações Diofantinas anteriormente descritas, será a utilização de equações Diofantinas junto aos problemas envolvendo o Teorema Chinês do Resto. O referido teorema trata de um processo de resolução de um sistema de equações modular; teve uma de suas primeiras aparições em "Manual de aritmética do mestre Sun", um livro chinês que data de 287 d.C. a 473 d.C.. Ele foi desenvolvido simultaneamente por gregos e chineses com o intuito de resolver alguns problemas relativos à astronomia.

Atividade 5.2 *Mágica com os números.*

O objetivo desta atividade é a resolução de um sistema de equações modulares através de uma abordagem de sistemas de equações e resolução de equações diofantinas, face tratar-se de uma forma de cálculo mais acessível ao aluno de Ensino Médio, a fim de que não se aprofunde muito no campo da aritmética modular, parte de congruências limitando-se a simples apresentação ao educando das formas gerais de que um número X congruente a P na base Y, pode ser escrito na forma $K.Y + P$, com $K \in \mathbb{N}$. Por exemplo, um número que deixa resto 3 quando dividido por 7 pode ser escrito sob a forma $7K + 3$, com $K \in \mathbb{N}$. Sendo que, esta ideia será utilizada para a resolução de problemas envolvendo o Teorema Chinês do Resto, utilizando-se da resolução dois a dois através de sistemas de equação os quais irão resultar em uma equação diofantina, sobre as quais recairão os objetos de ensino de maneira que fiquem mais acessíveis aos nossos alunos de Ensino Fundamental e Médio.

Descrição da atividade: O professor ao chegar em sala solicita aos alunos que escolham, em comum acordo, um número entre 11 e 1000 (Neste momento o professor pode até sair da sala afim de que os alunos possam confabular). Feito isso os alunos devem apresentar ao professor três respostas:

Questão 5.2.1 *Qual o resto deixado pelo número escolhido quando dividido por* 9*?*

Questão 5.2.2 *Qual o resto deixado pelo número escolhido quando dividido por* 10*?*

Questão 5.2.3 *Qual é o resto deixado pelo número escolhido quando dividido por* 11*?*

Com estas respostas em mãos, o professor, secretamente, segue o procedimento a seguir para desvendar o enigma e apresentar o número aos alunos.

Exemplo 5.2 *A turma escolheu o número* 825*; logo quando dividido por* 9 *gera resto* 6*; dividido por* 10 *deixa resto* 5 *e dividido por* 11 *deixa resto* 0*. Logo* X *pode ser escrito de três formas a seguir:*

$$X = 11k \tag{5.2.4}$$

$$X = 9u + 6 \tag{5.2.5}$$

$$X = 10v + 5 \text{ com } k, u, v \in \mathbb{N}. \tag{5.2.6}$$

Igualando (5.2.4) a (5.2.5) teremos:

$$11k = 9u + 6 \quad 11k - 9u = 6$$

Esta equação diofantina pode ser resolvida pois m.d.c entre 11 e 9 é igual a 1 e 1 divide 6. Então teremos: $11a - 9b = 1$ como

$$1 = 9 - 2.4 = 9 - (11 - 9).4 = 9 - 11.4 + 9.4 = 11.(-4) - 9.(-5)$$

$$11.(-4) - 9.(-5) = 1 \quad \text{(Multiplicando ambos os lados por 6 teremos)}$$

$$11.(-24) - 9.(-30) = 6$$

Donde $k = -24$ satisfaz (5.2.4) a (5.2.5) simultaneamente; sendo um valor de X possível $X = 11.(-24)$ logo $X = -264$. Como, o resultado $X = -264$, nada mais é do que o resultado da equação diofantina $11k - 9u = 6$, sabemos de equações diofantinas que outros valores válidos para a equação serão $k_1 = k + p.9$ o que implicaria $u_1 = u + p.11$, com $p \in \mathbb{Z}$. Como X é da forma $X = 11.k$, obteremos $X = 11.(k + 9p)$, ou seja, $X = 11.k + 99.p$, com $p \in \mathbb{Z}$. Donde concluímos que existe uma resposta possível a cada 99 números consecutivos. Então X pode ser $X = -264$, $X = -165$, $X = -66$, $X = 33$. Generalizando teremos

$$X = 99w + 33 \tag{5.2.7}$$

Igualando (5.2.6) e (5.2.7) teremos:

$$10v + 5 = 99w + 33$$

$$10v - 99w = 28$$

Como m.d.c entre 99 e 10 é igual a 1 e 1 divide 28; logo a equação possui solução.

$$10c - 99d = 1$$

$$1 = 10 - 9 = 10 = 10 - (99 - 9.10) = 10.10 - 99.1$$

$$10.10 - 99.1 = 1 \quad \text{(Multiplicando-se ambos os lados por 28) teremos:}$$

$$10.280 - 99.28 = 28$$

Como $v = 280$; logo $X = 10.280 + 5 = 2805$. Efetuando a comparação das respostas exatamente como a feita no item anterior, chegamos a conclusão de que possuímos $v_1 = 10.(280 + 99.p)$, ou $v_1 = 10.280 + 990.p$, ou seja os valores de X variarão para mais ou para menos 990. Donde

$$X = 2805; \quad X = 1815; \quad X = 825$$

Sendo que, $X = 825$ está no intervalo solicitado aos alunos e possui os restos informados pelos mesmos. Logo $X = 825$.

Após esta "mágica"o professor deve solicitar aos alunos que encontrem um número entre 1 e 50 que deixe resto 1 quando dividido por 2; resto 2 quando dividido por 3 e resto 3 quando dividido por 5. Incentivar aos alunos a efetuarem a resolução por tentativa e erro. Segue uma forma de resolução:

Grupo dos números que quando divididos por 5 deixam resto 3 entre 1 e 50.

$$3 - 8 - 13 - 18 - 23 - 28 - 33 - 38 - 43 - 48$$

Excluindo os números que são divisíveis por 2 (pares)

$$3 - 13 - 23 - 33 - 43$$

Analisando os candidatos:
3 deixa resto 0 quando dividido por três.
13 deixa resto 1 quando dividido por três.
23 deixa resto 2 quando dividido por três.

33 deixa resto 0 quando dividido por três.
43 deixa resto 1 quando dividido por três.
Neste momento, o professor deve mostrar que 53 também seria uma resposta válida, assim como 83, 113, porém não se encontram no intervalo solicitado.

Após esta etapa para apresentação do tipo de problema, o professor deve escolher um número entre 10 e 999, informar os restos na divisão por 9, 10 e 11 e resolver detalhadamente o problema com seus alunos para que entendam o processo de resolução.

6 O quadrado mágico

6.1 Um pouco de história: quadrados mágicos

Vamos utilizar a definição de que um quadrado mágico de ordem n é uma matriz de $n \times n$, com n^2 números naturais distintos tais que a soma de cada coluna, linha e diagonal é um mesmo número, chamado de constante mágica. Há alguns textos que não fazem restrição quanto a serem números distintos, porém vamos trabalhar com a restrição. Há registros de quadrados mágicos desde aproximadamente 2200 a.C., conta-se que o Imperador chinês Yü enquanto caminhava próximo a um rio encontrou uma tartaruga, e no casco dela havia um diagrama com um padrão numérico. O primeiro quadrado mágico registrado em um livro foi no primeiro século Da-Dai Liji. Na China, os quadrados mágicos são utilizados em diversas áreas como astrologia, adivinhação, filosofia, fenômenos naturais, comportamento humano e faz parte da cultura Chinesa. Da China foi para Índia, depois para os países árabes, Europa e de lá para o Japão, também foi inserido na cultura da África Ocidental. Em algumas culturas são associados à adivinhação, à alquimia e à astrologia. Durante o século XVII um francês fez um estudo da teoria matemática para a construção dos quadrados mágicos e Adamas Kochansky estendeu o conceito para três dimensões. No século XIV os quadrados mágicos eram relacionados com probabilidade e análise. Atualmente eles estão associados a análise fatorial, combinatória, matrizes, aritmética modular e geometria.

6.2 Atividades

Atividade 6.1 *Encontrando padrões.*

A atividade tem como objetivo a descoberta de padrões em quadrados mágicos 3×3 utilizando a sequência de $1 - 9$, através da observação e de alguns questionamentos.
Descrição da atividade: Para iniciar a atividade, uma sugestão é dividir os alunos em gupos de dois ou três, entregue uma folha com o quadrado mágico da figura e questões a seguir (modelo para o aluno no anexo). Peça aos alunos para encontrarem padrões no quadrado mágico dado utilizando as questões para auxiliá-los:

Atividade 6.2 *Encontre padrões no quadrado:*

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Questão 6.2.1 *Qual a maior soma que pode ser obtida com três números diferentes com os números de* 1 *a* 9*?*

Resposta: 24 pois é a soma dos três maiores números 7, 8 e 9.

Questão 6.2.2 *Qual a menor soma que pode ser obtida com três números diferentes com os números de* 1 *a* 9*?*

Resposta: 6, pois é a soma dos 3 menores 1, 2 e 3.

Questão 6.2.3 *Pode ser utilizado um número mais de uma vez?*

Resposta: Por observação conclui-se que não.

Questão 6.2.4 *Compare as somas dos números em linhas, colunas e diagonais. O que podemos dizer a respeito delas?*

Resposta: São iguais a 15.

Questão 6.2.5 *O que podemos dizer sobre a disposição dos números pares e ímpares?*

Resposta: Por observação temos que os pares estão nos cantos e os ímpares estão acima, abaixo, lado esquerdo e direito do quadrado central.

Questão 6.2.6 *Qual a soma dos cantos superior esquerdo e inferior direito? Onde mais encontramos esta soma?*

Resposta: $4 + 6 = 10$. Também encontramos este valor somando o canto superior direito com o canto inferior esquerdo, $8 + 2 = 10$.

Questão 6.2.7 *Qual a soma de todos os números? Qual a relação desta soma com a soma das colunas, linhas ou diagonais?*

Resposta: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$. A soma das colunas, linhas ou diagonais é um terço da soma de todos os números $\frac{45}{3} = 15$.
Comentário: Durante a atividade promova discussão para que todos percebam que 15 é uma constante mágica e que existem alguns padrões no quadrado. Depois, passe para a seguinte atividade:

Atividade 6.3 *Construindo um quadrado mágico.*

Descrição da atividade: Para a atividade vamos precisar de um conjunto de cartões numerados de 1-9, um conjunto por grupo, e da folha de questões. Distribua um conjunto de fichas numeradas de 1 a 9 para cada grupo e peça para que os alunos construam um quadrado mágico (diferente do dado na atividade) com os padrões que foram observados. Lembre-os de que a soma de cada linha, coluna e diagonal deve ser 15. Antes de iniciarem, mostre que não é qualquer valor que pode ir no centro do quadrado, para isso, faça o seguinte exemplo e sugira posteriormente para fazerem o mesmo para os demais valores, até descobrirem que somente o 5 pode estar no centro do quadrado.

Exemplo 6.1 *É possível colocarmos* 1 *no centro do quadrado?*

Se colocarmos 1 no centro do quadrado qual a soma para completar a linha central e a coluna central? A soma total deve ser 15 como já temos 1 a soma dos outros dois valores é $15-1=14$. Como podemos escrever a soma 14 com os números de 2 a 9? As possibilidades são $14=5+9$ e $14=6+8$. Se colocarmos estes valores na linha e na coluna, teremos a figura,

	5	
8	1	6
	9	

Resta colocar quais números? $2,3,4$, e 7. Na primeira linha já temos 5 então os outros dois devem somar $15-5=10$, as possibilidades são: $10=4+6$, não podemos pois já usamos o 6; $10=2+8$ não podemos pois já usamos o 8; $10=1+9$ não podemos pois já usamos o 1 e o 9; restou $10=3+7$. Temos as possibilidades

3	5	7
8	1	6
	9	

7	5	3
8	1	6
	9	

No primeiro quadrado, por exemplo, a diagonal que contém o 3 e 1, temos a soma $3+1=4$ para completar 15 seria necessário utilizar o 11, mas não é possível. Na segunda opção temos o mesmo problema na diagonal secundária. Logo com o 1 no centro não é possível completar o quadrado. Podemos usar o argumento de que como observamos na primeira atividade a disposição dos número ímpares e pares são:

par	ímpar	par
ímpar	ímpar	ímpar
par	ímpar	par

Se temos o 1 no centro vimos que a soma dos outros dois números deve ser 14, e conforme o quadrado acima temos que a coluna central e a linha central devem ser a soma de ímpares e $14=5+9$ e $14=6+8$, esta segunda opção é soma de pares, logo não podemos ter o 1 no centro.

Analogamente podemos mostrar que os valores $2,3,4,6,7,8$ e 9 não podem estar no centro. Desta forma, somente 5 pode estar no centro.

Agora que os alunos sabem deste fato, peça para que construam um quadrado mágico diferente do dado na primeira atividade. São oito possibilidades. Os quadrados mágicos a seguir são simétricos. Por isso, é possível trabalhar também este conceito geométrico, porém não é este o nosso foco.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

8	3	4
1	5	9
6	7	2

4	9	2
3	5	7
8	1	6

4	3	8
9	5	1
2	7	6

6	1	8
7	5	3
2	9	4

6	7	2
1	5	9
8	3	4

2	9	4
7	5	3
6	1	8

2	7	6
9	5	1
4	3	8

Atividade 6.4 *Generalizando quadrado mágicos de ordem* 3

Descrição da atividade: Depois de realizadas as primeiras atividades, pergunte se as seguintes propriedades são válidas para quaisquer sequência de nove números distintos, entregue as seguintes perguntas para os alunos e peça para resolverem:

Questão 6.4.1 *Dado um quadrado mágico de ordem* 3*, ou seja* 3×3*. Verifique:*

b	c	d
e	a	f
g	h	i

a. A constante mágica (valor da soma de cada linha, coluna e diagonal) é um terço da soma de todos os nove números dispostos no quadrado mágico.

Resposta comentada: De fato
$\begin{cases} b+c+d=k \\ e+a+f=k \\ g+h+i=k \end{cases}$ Somando temos que $a+b+c+d+e+f+g+h+i=3k$.

b. A constante mágica é o triplo do valor central.

Resposta comentada: Seja k a constante mágica, temos $\begin{cases} c+a+h=k \\ e+a+f=k \\ g+a+d=k \\ b+a+i=k \end{cases}$

Somando temos $4a+b+c+d+e+f+g+h+i=4k$ como $a+b+c+d+e+f+g+h+i=3k$ então temos $3a+3k=4k$ logo $a=\frac{k}{3}$.

c. A soma dos elementos dos quatro cantos é quatro vezes o valor central.

Resposta comentada:

$$\begin{aligned} b+i+a &= k \\ g+d+a &= k \\ b+g+d+i &= 2k-2a \\ &= 2.3a-2a \\ &= 4a \end{aligned}$$

d. A soma dos elementos do centro de cada alinhamento periférico é igual a soma dos elementos dos quatro cantos.

Resposta comentada:

$$\begin{aligned} a+b+c+d+e+f+g+h+i &= 3k = 3.3a \\ (b+d+g+i)+a+c+e+h+f &= 9a \\ 4a+a+c+e+h+f &= 9a \\ c+e+h+f &= 4a \end{aligned}$$

e. A soma de dois elementos extremos de um alinhamento que passe pelo centro é igual ao dobro do valor central.

Resposta comentada:

$$\begin{aligned} a+c+h &= k = 3a \\ c+h &= 2a \\ e+a+f &= k = 3a \\ e+f &= 2a \end{aligned}$$

Questão 6.4.2 *Complete os seguintes quadrados mágicos:*

6	17	
	11	7
12		

	2	
		20
11	26	

Resposta: No primeiro quadrado podemos utilizar a propriedade de que a constante mágica é o triplo do valor central, logo é $3.11 = 33$ e completar o quadrado; no segundo, podemos utilizar que a soma de dois elementos extremos que passe pelo centro é igual ao dobro do valor central, então temos $2 + 26 = 28$ o valor central é 14. Assim temos a constante mágica 42.

6	17	10
15	11	7
12	5	16

23	2	17
8	14	20
11	26	5

Atividade 6.5 *Operações com quadrados mágicos*

Descrição da atividade: As próximas atividades estão relacionadas a operações com quadrados mágicos e suas propriedades, através também da investigação podemos verificar e depois validar alguns resultados. Para isto, inicie as atividades entregando aos alunos os seguintes problemas que aqui estão resolvidos.

Questão 6.5.1 *Considere os quadrados mágicos formados por duas sequências diferentes e responda:*

6	1	8
7	5	3
2	9	4

10	2	9
6	7	8
5	12	4

a. Se multiplicarmos por dois todos os elementos dos quadrados mágicos o que acontece com a constante mágica?

Resposta comentada: A constante mágica fica multiplicada por dois. A primeira tem como constante mágica 15 , e depois que multiplicamos por dois a constante mágica é 30. No segundo quadrado mágico, a constante é 21, e depois que multiplicamos por dois a constante mágica é 42.

12	2	16
14	10	6
4	18	8

20	4	18
12	14	16
10	24	8

b. Se somarmos dois em todos os termos dos quadrados mágicos o que acontece com cada constante mágica?

Resposta comentada:

8	3	10
9	7	5
4	11	6

12	4	11
8	9	10
7	14	6

Às constantes mágicas ficam adicionadas 6, a primeira fica $15+6 = 21$ e a segunda $21 + 6 = 27$.

c. Se somarmos os dois quadrados o resultado ainda é um quadrado mágico?

Resposta comentada:

16	3	17
13	12	11
7	21	8

Ainda é um quadrado mágico.

Questão 6.5.2 *Vamos generalizar as propriedades vistas na primeira atividade:*

a. Se multiplicarmos por uma constante k todos os elementos de um quadrado mágico a constante mágica fica multiplicada por k.

Resposta comentada:

a	b	c
d	e	f
g	h	i

ka	kb	kc
kd	ke	kf
kg	kh	ki

A constante mágica é $S = a + b + c$ e depois de multiplicado por k temos a nova constante $ka + kb + kc = k(a + b + c) = kS$.

b. Se somarmos uma constante k em todos os elementos de um quadrado mágico então a constante mágica fica somada $3 \times k$.

Resposta comentada:

a	b	c
d	e	f
g	h	i

a+k	b+k	c+k
d+k	e+k	f+k
g+k	h+k	i+k

A constate mágica é $S = a + b + c$ depois que somamos a constante k temos a constante mágica $a + k + b + k + c + k = a + b + c + 3k = S + 3k$.

c. Se somarmos dois quadrados mágicos, formados por sequências distintas entre si, então o resultado ainda é um quadrado mágico.

Resposta comentada:

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline a & b & c \\ \hline d & e & f \\ \hline g & h & i \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|}\hline a_1 & b_1 & c_1 \\ \hline d_1 & e_1 & f_1 \\ \hline g_1 & h_1 & i_1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline a + a_1 & b + b_1 & c + c_1 \\ \hline d + d_1 & e + e_1 & f + f_1 \\ \hline g + g_1 & h + h_1 & i + i_1 \\ \hline \end{array}$$

Sejam S e S_1 as constantes mágicas cada uma de um quadrado. No quadrado mágico da soma temos:

$$a + a_1 + b + b_1 + c + c_1 = (a + b + c) + (a_1 + b_1 + c_1) = S + S_1$$

analogamente para todas as linhas, colunas e diagonais do quadrado da soma, podemos então concluir que as somas são todas iguais a $S + S_1$. Logo, o quadrado formado pela soma de dois quadrados mágicos é também mágico e sua constante mágica é $S + S_1$.

Atividade 6.6 *Progressão Aritmética e quadrados mágicos*

Descrição da atividade: Para podermos fazer as relações entre progressão aritmética e quadrados mágicos, peça para os alunos resolverem a questão a seguir utilizando o que vimos nas atividades anteriores. Não diga a eles que são progressões aritméticas, se algum aluno perceber não tem problema, mas a princípio não comente.

Atividade 6.7 *Monte três quadrados mágicos com os seguintes conjuntos de números:* $(2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)$, $(1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17)$, $(2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18)$.

Use as questões a seguir como um auxílio.

Questão 6.7.1 *Qual a constante mágica para cada conjunto?*

$$\text{Conjunto 1}: \frac{2+3+4+5+6+7+8+9+10}{3} = 18$$
$$\text{Conjunto 2}: \frac{1+3+5+7+9+11+13+15+17}{3} = 30$$
$$\text{Conjunto 3}: \frac{2+4+6+8+10+12+14+16+18}{3} = 27$$

Questão 6.7.2 *Qual a relação entre os três conjuntos e o conjunto* $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$ *dentro do quadrado mágico?*

Resposta: São progressões aritméticas.

Questão 6.7.3 *Qual a razão de cada conjunto?*

Resposta comentada:
Conjunto 1 : 1
Conjunto 2 : 2
Conjunto 3 : 1
Conjunto de 1 a 9 : 1

Questão 6.7.4 *Como podemos relacionar a montagem do quadrado tradicional (com os valores de* 1 *a* 9*) com a montagem dos quadrados mágicos com os três novos conjuntos?*

Resposta comentada: Como forma uma progressão aritmética podemos relacionar os termos em ordem: os primeiros com os primeiros, os segundos com os segundos, e assim sucessivamente; e relacionado com a posição no quadrado mágico formado pelos números de 1 a 9 que já sabemos montar:

4	3	8
9	5	1
2	7	6

a_4	a_3	a_8
a_9	a_5	a_1
a_2	a_7	a_6

5	4	9
10	6	2
3	8	7

7	5	15
17	9	1
3	13	11

8	6	16
18	10	2
4	14	12

Peça para os alunos observarem qual a relação do termo central do quadrado mágico com o termo central da P.A. Agora que eles já sabem essa relação entregue os seguintes problemas:

Questão 6.7.5 *Considere o seguinte quadrado mágico; subtraia o termo central* 5 *de todos os números:*

4	3	8
9	5	1
2	7	6

Resposta:

-1	-2	3
4	0	-4
-3	2	1

Questão 6.7.6 *Sabendo que temos uma P.A., como encontrar a constante mágica do quadrado formado por ela?*

Resposta comentada: Será a soma dos nove termos dividido por três:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$
$$\frac{S_9}{3} = \frac{(a_1 + a_9)9}{2.3} = \frac{3(a_1 + a_9)}{2}$$

Questão 6.7.7 *Será que a soma dos nove termos da P.A. (formada por inteiros positivos) é sempre divisível por* 3*?*

Resposta comentada: Sim, pois $a_1 = a_5 - 4r$ e $a_9 = a_5 + 4r$ logo

$$S_9 = \frac{(a_1 + a_9)9}{2} = \frac{(a_5 - 4r + a_5 + 4r).9}{2} = \frac{2a_5.9}{2} = 9a_5$$

que é divisível por 3.

Questão 6.7.8 *Construa um quadrado mágico cujo termo central seja* 11.

Resposta comentada: Há inúmeras soluções, podemos construir uma P.A. com termo $a_5 = 11$ e escolher uma razão, por exemplo $r = 2$, assim descobrimos todos os nove termos, e dispomos no quadrado mágico como no primeiro exercício: P.A.: $3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19$

Constante mágica: $3.a_5 = 3.11 = 33$

9	7	17
19	11	3
5	15	13

Questão 6.7.9 *Complete o seguinte quadrado mágico:*

		10
40		20

Resposta comentada: Como vimos, os termos simétricos, em relação ao quadrado central, são 10 e 40 e o centro é a média destes valores. Logo é $\frac{10+40}{2} = 25$ e por simetria completamos o quadrado.

30	35	10
5	25	45
40	15	20

Questão 6.7.10 *Construa um quadrado mágico cuja constante mágica seja* 51.

Resposta comentada: Há infinitas possibilidades:
Por exemplo, sabemos que a constante mágica é três vezes o termo central, logo $3a_5 = 51$. Portanto $a_5 = 17$. Escolhendo a razão igual a 2, assim descobrem-se os demais termos e completa-se o quadrado como no primeiro exercício, tem-se: PA: $9, 11, 13, 15, 17, 21, 23, 25$.

15	13	23
25	17	9
11	21	19

7 Problemas complementares

7.1 Problemas de Divisibilidade

1. Discuta a paridade

   a. da soma de dois números naturais.

   b. da diferença de dois números naturais.

   c. do produto de dois números naturais.

2. Quem possui mais chances de ganhar no par ou ímpar normal: quem escolhe par ou quem escolhe ímpar?

3. Seja n um número natural diferente de zero. Mostre que um, e apenas um, número de cada terna abaixo é divisível por 3.

   a. $n, n+1, n+2$

   b. $n, n+10, n+23$

   c. $n, n+2, n+4$

   Para o professor: Comente com os alunos que resolver o item "a"é o mesmo que afirmar que em três números naturais consecutivos um deles é sempre divisível por três. E o item "c"que dentre três números naturais pares ou ímpares consecutivos um deles será sempre divisível por três

4. Prove que $n^5 + 4n$ é divisível por 5 qualquer que seja o natural n.

5. Prove que $n^2 + 1$ não é divisível por 3 qualquer que seja o natural n.

6. Prove que $n^3 - n$ é divisível por 24 qualquer que seja o natural ímpar n. Dica: prove que o número dado é um múltiplo tanto de 3 quanto de 8.

7.2 Problemas de sequência de Fibonacci e o número de ouro

1. Uma árvore cresce de acordo com a seguinte regra:
   Na primeira semana a árvore começa a crescer com apenas um galho. Após crescer por duas semanas, esse galho da origem a um novo galho por semana. Cada novo galho gerado continua a crescer, e após crescer por duas semanas dá origem a um novo galho por semana.

   a. Faça um desenho indicando o crescimento da árvore após cinco semanas passadas do início de seu crescimento.

   b. Responda quantos galhos teremos após seis, sete e treze semanas.

2. Os termos de uma sequência, a partir do terceiro, são obtidos somando os dois termos imediatamente anteriores. Sabe-se que a soma dos dez primeiros termos dessa sequência é 4411, e que o sexto termo da sequência é 248. Qual é o terceiro termo da sequência?

3. A base de um retângulo de ouro mede 55 cm. Qual a medida de sua altura?

4. Calce a soma dos 40 primeiros termos da sequência de Fibonacci.

5. A abelha que aparece na figura deseja percorrer algumas células na sua colmeia. Ela pode começar ou pela célula 1 ou pela célula 2 e move-se apenas para a célula cujo número seja superior ao seu. Sendo assim há apenas um caminho para chegar à célula 1; duas maneiras de chegar à célula 2: diretamente ou via a célula 1. Para a célula 3, pode ir de 1 para 2 e depois para 3, ou de 1 para 3, ou ainda de 2 para 3, isto é, há três caminhos diferentes. Quantos caminhos há desde o princípio até à célula n?

7.3 Problemas de Equações Diofantinas

Problema 7.1 *Maria tem exatamente* $R\$\ 61,00$ *em notas de* $R\$\ 1,00$, $R\$\ 5,00$ *e* $R\$\ 10,00$. *Se ela tem exatamente* 14 *notas. Quais as notas que possui?*

Problema 7.2 *João tem várias cartas para enviar com* $R\$\ 100,00$. *Comprando selos de* $R\$\ 0,53$ *e* $R\$\ 0,49$. *De quantas maneiras diferentes ele pode remeter as cartas sem que sobre nem um centavo?*

Problema 7.3 *Dois times disputam um declato. Em cada competição, o time vencedor ganha* 4 *pontos, o time perdedor ganha* 1 *ponto e, em caso de empate, ambos os times ganham* 2 *pontos. Após um certo número ímpar de rodadas, os dois times juntos possuem juntos* 46 *pontos. Quantos empates houveram?*

Problema 7.4 *Quantas quadras de basquete e quantas quadras de vôlei são necessárias para que* 80 *alunos joguem simultaneamente qualquer um dos esportes?*

Problema 7.5 *Encontre todos os números naturais menores do que* 500 *que deixam resto* 3 *quando divididos por* 7 *e deixam resto* 10 *quando divididos por* 13.

Problema 7.6 *Num cinema o valor da entrada é de* $R\$ \ 15,00$ *e, hoje excepcionalmente a meia-entrada está sendo cobrada* $R\$ \ 7,00$. *Sabendo que o valor arrecadado na sessão foi de* $R\$ \ 1.000,00$, *qual o número máximo e o número mínimo de pessoas que podem ter assistido à sessão?*

Problema 7.7 *Um produtor rural precisa arrecadar* $R\$ \ 15.000,00$ *para pagamento urente de uma dívida. Sabendo que possui sacas de feijão e trigo as quais pode vender a* $R\$ \ 270,00$ *e* $R\$ \ 360,00$. *De quantas formas diferentes ele pode efetuar a venda de modo a arrecadar o valor exato?*

7.4 Problemas do Teorema Chinês do Resto

Problema 7.8 *Um fazendeiro possui um número de cabeças de gado de tal forma que se esse número for dividido por* 7 *origina um resto* 3, *se dividirmos essa quantidade por* 11 *deixa resto* 5 *e se dividirmos ainda a quantidade por* 7 *a conta será exata. Qual o número mínimo de cabeças de gado que esse fazendeiro possui?*

Problema 7.9 *Para o problema anterior, apresente outras três quantidades de cabeças de gado que satisfazem os restos apresentados e diferentes da solução mínima.*

Problema 7.10 *Possuo em minha carteira um valor em dinheiro que caso seja dividido por* 7 *deixa resto* 2, *caso seja dividido por* 2 *deixa resto* 1 *e, caso seja dividido por* 9 *deixa resto* 5. *Sabendo que possuo entre* $R\$ \ 500,00$ *e* $R\$ \ 625,00$. *Quanto possuo em minha carteira?*

7.5 Problemas de quadrados mágicos

Problema 7.11 *(Banco de questões-OBMEP-2013) O quadrado abaixo é parte de um quadrado mágico que usa os números ímpares entre* 1 *e* 17. *Descubra qual o valor de* X

	1	
5		13
X		3

Problema 7.12 *(Banco de questões-OBMEP-2012) Gabriel desenha quadrados divididos em nove casas e escreve os números naturais de* 1 *a* 9, *um em cada casa. Em seguida, ele calcula a soma dos números de cada linha e de cada coluna. A figura mostra um dos quadrados do Gabriel; observe que a soma dos números da terceira linha é* $5+8+2=15$ *e a soma dos números da segunda coluna é* $9+7+8=24$. *Neste exemplo, as seis somas são* $6, 12, 15, 15, 18$ *e* 24.

6	9	3	18
4	7	1	12
5	8	2	15
15	24	6	

a. Gabriel preencheu um quadrado e fez apenas cinco somas: $9, 13, 14, 17$ e 18. Qual é a soma que está faltando?

b. Explique por que não é possível que em um quadrado do Gabriel, todas as somas sejam números pares.

c. Preencha o quadrado de forma que as somas sejam 7,13,14,16,18 e 22.

Problema 7.13 *(OBM-1998) No quadrado mágico abaixo, a soma dos números em cada linha, coluna e diagonal é sempre a mesma. Qual o valor do número x?*

15		35
50		
25	x	

Problema 7.14 *(Banco de questões-OBMEP-2010) Complete as casas em branco da tabela ao lado com frações, de tal modo que a soma dos três números de qualquer linha, qualquer coluna e das duas diagonais seja sempre a mesma.*

		$3/5$
	$1/2$	
0,4	0,5	

Problema 7.15 *(Banco de questões-OBMEP-2010) Complete os cinco números que faltam no quadrado abaixo para que ele seja um quadrado mágico*

-12		-4
	0	
4		

8 Referências Bibliográficas

Referências

[1] BROUSSEAU,Guy. In: *Didática Matemáticas, direção de Jean Brun. Tradução: Maria José Figueiredo.* Lisboa: Horizontes Pedagógicos, 1996, p. 35-113.

[2] EMERIQUE, Paulo S..In: *Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e - Perspectivas. Organizadora: Maria Aparecida Viggiani Bicudo.* São Paulo: Editora UNESP, 1999, p. 185-198.

[3] ONUCHIC, Lourdes de la R..In: *Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas. Organizadora: Maria Aparecida Viggiani Bicudo.* São Paulo: Editora UNESP, 1999, p. 199-218.

[4] GOMES, Maria Laura Magalhães.: *Quatro visões iluministas sobre a educação matemática: Diderot, D'Alembert, Condillac e Condorcet.* Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2008.

[5] Pitombeira, J. B.: *O jogo de Euclides.* Revista do Professor de Matemática (RPM), SBM, São Paulo, 1989.

[6] HEFEZ, Abramo.: *Elementos de Aritmética.* 2.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011.

[7] BOYER, Carl B..: *História da matemática* 2. ed. Editora Edgard Blucher, LTDA.

[8] FOMIN, Dmitri; GENKIN, Sergey; ITENBERG, Ilia.: *Círculos Matemáticos: A Experiência Russa. Tradução: Valéria de Magalhães Iório.* Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

[9] Roque ROQUE, Tatiana.: *História da Matemática.* Editora Zahar, 2012.

[10] STEWART, Ian.: *Almanaque das Curiosidades Matemáticas.* Editora Zahar, 2008.

[11] STEWART, Ian.: *Incríveis Passatempos Matemáticos.* Editora Zahar, 2010.

[12] GARDNER, Martin.: *Divertimentos matemáticos*/ tradução de Bruno Mazza. 3.ed. São Paulo: IBRASA, 1998.

[13] Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/EnsMed/expensmat_iicap4.pdf. Acesso em: 25/10/2014.

[14] Disponível em: http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/515/2011_00411. Acesso em: 25/10/2014. _PABLO_ROBERTO_DE_SOUSA_NETO.pdf. Acesso em: 25/10/2014.

[15] Disponível em: http://www.mat.ufmg.br/ espec/monografiasPdf/Monografia_Jurandir.pdf. Acesso em: 25/10/2014.

[16] Disponível em: http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/euclides/euclides.htm. Acesso em: 25/10/2014.

[17] Disponível em: http://www.uff.br/cdme/rza/rza-html/rza-paintings-br.html. Acesso em: 25/10/2014.

[18] Disponível em: http://cmup.fc.up.pt/cmup/mcsilva/HMTP8.pdf. Acesso em: 25/10/2014.

[19] Disponível em: http://gazeta.spm.pt/getArtigo?gid=373. Acesso em: 25/10/2014.

[20] Disponível em: http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/558/2011. Acesso em: 25/10/2014. _00462_GISELI_DUARDO_MACIANO_CAMPOS.pdf?sequence=1. Acesso em: 25/10/2014.

[21] Disponível em: http://www.uesb.br/mat/download/Trabamonografia/2013/Dinguiston.pdf. Acesso em: 25/10/2014.

[22] Disponível em: http://legauss.blogspot.com.br/2009/06/o-general-e-o-teorema-chines-dos-restos.html. Acesso em: 25/10/2014.

[23] Disponível em: http://illuminations.nctm.org/lesson.aspx?id=655. Acesso em: 25/10/2014.

[24] Disponível em: http://www.nctm.org/uploadedFiles/Lessons_and_Resources/mt2012-08-34a.pdf. Acesso em: 25/10/2014.

[25] Disponível em: http://www.nctm.org/publications/article.aspx?id=19900. Acesso em: 25/10/2014.

Anexo

Atividade: Par ou ímpar maluco.

Questão 1: Existe uma estratégia que possibilite vencer sempre? Caso exista, qual seria essa estratégia?

Questão 2: No conjunto dos números inteiros positivos,um número par pode ser representado como $2n$, com $n \in \mathbb{N}^*$ já um número ímpar pode ser representado como $2k - 1$, com $k \in \mathbb{N}^*$. Como o primeiro jogador escolheu a opção par e anotou em sua ficha um número par, temos que o outro jogador só poderá escolher um número par ou um número ímpar. Feitas essas considerações, pede-se:

a. O produto entre dois números pares, ou seja $2n.2k$, com $n, k \in \mathbb{N}^*$. Analise a paridade.

b. O produto de um número par por um número ímpar, ou seja $2n.(2k - 1)$ com $n, k \in \mathbb{N}^*$. Analise a paridade.

c. Com os resultados dos itens a e b o que podemos concluir?

Atividade 2: Mudando um pouco as regras.

Questão 1: Existe alguma estratégia que permita vencer sempre? Caso exista, qual seria essa estratégia?

Atividade Sexta-feira 13

Questão 1: Qual é o número máximo de sextas-feiras treze que podem ocorrer num ano que não é bissexto? Neste caso, em que dia da semana cai o décimo dia do ano?

Resultado 1: Monte uma tabela especificando quantos dias possuem cada mês do ano. Em seguida determine quantos dias do mês de março se passaram até o dia 11 do mesmo mês e quantos dias faltam para terminar esse mês tendo como base o dia 11 de março.

Tabela da quantidade de dias de cada mês	
Mês	Total de dias
Janeiro	
Fevereiro	
Março	
Abril	
Maio	
Junho	
Julho	
Agosto	
Setembro	
Outubro	
Novembro	
Dezembro	

Resultado 2: Sabendo que o dia 2 de março é uma quinta-feira, determine quais outros dias do mês de março ocorrem em uma quinta-feira. Em seguida determine uma estratégia que permita determinar esssa situação sem usar o calendário.

Resultado 3: Determine a diferença entre o dia 11 de março e o dia 11 de abril, ou seja, a quantidade de dias que existe entre 11 de março e 11 de abril inclusive.

Questão 2: Com base no resultado três, construa uma tabela que indique a diferença entre os dias 13 de cada mês.

Questão 3: Utilizando o resultado dois determine quais dias 13 ocorrem num mesmo dia da semana.

Questão 4: Construa uma tabela indicando a diferença entre os dias 13, tendo como base o dia 13 de fevereiro. Após, aplique o resultado dois e verifique quais dias 13 caem no mesmo dia da semana que o dia 13 de fevereiro.

13/01 - 13/02	13/02 - 13/03	13/03 - 13/04	13/04 - 13/05	13/05 - 13/06	13/06 - 13/07	13/07 - 13/08	13/08 - 13/09	13/09 - 13/10	13/10 - 13/11	13/11 - 13/12

Questão 5: Se o dia 13 de fevereiro ocorre em uma sexta-feira em que dia da semana ocorre o dia 10 de janeiro?

Atividade: O jogo de Euclides

Questão 1: Nos exemplos 1, 2 e 3 os números iniciais são 31 e 7, 49 e 5, 50 e 8, as jogadas vencedoras são respectivamente, $[1, 0], [0, 1]$ e $[2, 0]$. Qual relação existe entre os números escolhidos e o número não nulo obtido na jogada vencedora? O número não nulo é o máximo divisor comum dos números iniciais.

Questão 2: Curiosamente o primeiro jogador ganhou as três partidas. Suponha que ao invés das jogadas feitas na primeira rodada ele tivesse jogado os pares $[17, 7]$ no primeiro exemplo, $[29, 5]$ no segundo exemplo e $[34, 8]$ no terceiro exemplo. Monte uma estratégia vencedora para o segundo jogador.

Questão 3: Nas partidas em que o primeiro jogador venceu ele entregou para o adversário os seguintes pares: Exemplo 1: $[10, 7], [3, 4]$.
Exemplo 2: $[4, 5]$.
Exemplo 3: $[10, 8]$.
Por outro lado as jogadas do segundo jogador (perdedor) foram:
Exemplo 1: $[3, 7], [3, 1]$.
Exemplo 2: $[4, 1]$.
Exemplo 3: $[2, 8]$.

a. A primeira coluna da tabela indica as jogadas do primeiro jogador(vencedor); divida o maior número do par pelo menor e insira o resultado aproximado na terceira coluna:

Ex.1	[10,7]	
Ex.1	[3,4]	
Ex.2	[4,5]	
Ex.3	[10,8]	

b. A primeira coluna da tabela indica as jogadas do segundo jogado(perdedor); divida o maior número do par pelo menor e insira o resultado aproximado na terceira coluna.

Ex.1	[3,7]	
Ex.1	[3,1]	
Ex.2	[4,1]	
Ex.3	[2,8]	

c. Na questão 2 você criou uma estratégia para que o segundo jogador vencesse a partir de uma jogada diferente da proposta nos exemplos pelo primeiro jogador. Monte duas tabelas, uma indicando na primeira coluna as jogadas propostas por você para o segundo jogador (vencedor) e a outra com as jogadas do primeiro jogador (perdedor). Assim como no exercício b. insira na terceira coluna o resultado aproximado da divisão do maior número do par jogado pelo menor.

Segundo jogador (vencedor):

Ex.1	[10,7]	
Ex.1	[3,4]	
Ex.2	[4,5]	
Ex.3	[10,8]	

Primeiro jogador (perdedor):

Ex.1	[17,7]	
Ex.1	[3,7]	
Ex.1	[3,1]	
Ex.2	[29,5]	
Ex.2	[4,1]	
Ex.3	[34,8]	
Ex.3	[2, 8]	

d. Qual foi o maior resultado encontrado na divisão dos número dos pares das jogadas do vencedor?

e. Qual foi o menor resultado encontrado na divisão dos número dos pares das jogadas do perdedor?

Atividade: Propriedades da sequência de Fibonacci.

Na tabela a seguir temos os seguintes elementos referentes a sequência de Fibonacci:

n: ordem do termo.

F_n: termo de ordem n.

F_{n-1}: termo de rdem $n-1$.

$\dfrac{F_n}{F_{n-1}}$: Razão entre o termo de ordem n e o anterior a ele, ou seja $n-1$.

Com o auxílio de uma calculadora, para a última coluna, preencha a tabela.

n	F_n	$F_n - 1$	$\frac{F_n}{F_n - 1}$

Questão 1: O que acontece com a razão de um termo pelo seu anterior à medida que o n aumenta?

Questão 2: Qual a conclusão a que podemos chegar?

Faça o preenchimento da tabela a seguir:

n: ordem do termo .

F_n: termo de ordem n.

N	F(n)
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
13	
14	
15	
16	
17	
18	
19	
20	
21	

Consulte a tabela acima e preencha as tabelas abaixo a seguir relacionando os termos $F(n)$ para n múltiplo de 3 e também múltiplos de 5.

N							
F(n)							

N							
F(n)							

Questão 3: Qual a relação entre $F(3)$ e $F(6)$, $F(9)$, $F(12)$, $F(15)$, $F(18)$, $F(21)$? E entre $F(5)$ e $F(10)$, $F(15)$, $F(20)$?

Questão 4: A que conclusão podemos chegar?

Questão 5: Calcule as seguintes somas:

a. S_5, do termo $F(1)$ ao $F(5)$.

b. S_8, do termo $F(1)$ ao $F(8)$.

c. S_{14}, do termo $F(1)$ ao $F(14)$.

Questão 6: Qual a relação entre $F(7)$ e S_5, $F(10)$ e S_8, $F(16)$ e S_{16}?

Questão 7: Generalize o resultado anterior.

Questão 8: Calcule a soma S_{21}, do termo $S(1)$ ao $S(21)$.

Questão 9: Calcule a soma S_{30}, do termo $S(1)$ ao $S(30)$.

Atividade: O retângulo de ouro e a sequência de Fibonacci

Os retângulos a seguir estão sendo desenhados a partir de quadrados cuja medida correspondem aos termos da sequência de Fibonacci.

- No primeiro retângulo pode ser usado apenas 1 quadrado de lado 1.
- No segundo retângulo podem ser usados um quadrado de lado 1 do passo anterior e um novo quadrado de lado 1.
- No terceiro retângulo podem ser usados os dois quadrados de lado 1 do passo anterior e um novo de lado 2. E assim por diante.

Note que os quadrados devem ser posicionados de forma que encaixem na figura gerando um novo retângulo. Na folha quadriculada desenhe os próximos quatro retângulos.

Questão 1: Quais as medidas dos retângulos desenhados?

Questão 2: Você conseguiria, sem desenhar, responder quais são as medidas dos próximos retângulos? Se a resposta for afirmativa, indique as medidas dos próximos três retângulos.

Questão 3: Indique a seguir a razão entre a medida maior e a medida menor de cada um dos retângulos:
Primeiro retângulo:
Segundo retângulo:
Terceiro retângulo:
Quarto retângulo:
Quinto retângulo:
Sexto retângulo:
Sétimo retângulo:
Oitavo retângulo:
Nono retângulo:

Questão 4: O que podemos concluir a respeito da razão entre as medidas dos lados dos retângulos?

Questão 5: Qual é um método eficiente para construir um retângulo de ouro?

Atividade: A Mágica de Fibonacci

Escolha em secreto dois números inteiros e o coloquem um na primeira linha e um na segunda da tabela a seguir. Complete as demais linhas (3^a a 10^a) fazendo a soma das duas linhas anteriores, formando assim uma sequência semelhante a de Fibonacci.

1°	
2°	
3°	
4°	
5°	
6°	
7°	
8°	
9°	
10°	

Perguntas: (Só revele a resposta quando for autorizado pelo professor)

a. Qual o termo da sétima linha?

b. Qual a soma dos termos que surgiram da 1^a até a 10^a linha?

c. Qual a razão entre o termo da décima linha pelo nono?

Desvendando o mistério

Como está evidenciado na regra, podemos escolher quaisquer números iniciais, sendo assim chame de x o primeiro número e de y o segundo. A seguir complete as demais linhas da tabela (3^a a 10^a) fazendo a soma das duas linhas anteriores.

1°	x
2°	y
3°	
4°	
5°	
6°	
7°	
8°	
9°	
10°	

1. Some os termos da 1^a a 10^a linha.

2. Note que 55 e 88 são múltiplos de 11, sendo assim, podemos escrever, $55x + 88y = 11(5x + 8y)$. Quem é $5x + 8y$? Qual a conclusão que podemos chegar.

Atividade: Equações Diofantinas

Questão 1: Numa criação de coelhos e galinhas contaram-se 400 pés. Quantas são as galinhas e quantos são os coelhos, sabendo que a diferença entre esses dois números é a menor possível?

Questão 2: É possível encontrar valores inteiros para x e y que satisfaçam a equação $4x + 6y = 3$?

Questão 3: Qual a idade do Sr. Pedro sabendo que ela pode ser expressa na forma $11x + 1$ ou na forma $8y + 3$ e $x, y \in \mathbb{Z}$.

Questão 4: De quantas maneiras posso efetuar o pagamento de $R\$ \, 1.000,00$, utilizando-se de exatamente 30 notas entre os valores de $R\$ \, 10,00$, $R\$ \, 20,00$ e $R\$ \, 50,00$.

Atividade: Mágica com os números.

Questão 1: Qual o resto deixado pelo número escolhido quando dividido por 9?

Questão 2: Qual o resto deixado pelo número escolhido quando dividido por 10?

Questão 3: Qual é o resto deixado pelo número escolhido quando dividido por 11?

Atividade: Encontrem padrões no seguinte quadrado:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Questão 1: Qual a maior soma que pode ser obtida com três números diferentes com os números de 1 a 9?

Questão 2: Qual a menor soma que pode ser obtida com 3 números diferentes com os números de 1 a 9?

Questão 3: Pode ser utilizado um número mais de uma vez?

Questão 4: Compare as somas dos números em linhas, colunas e diagonais. O que podemos dizer a respeito delas?

Questão 5: O que podemos dizer sobre a disposição dos número pares e ímpares?

Questão 6: Qual a soma dos cantos superior esquerdo e inferior direito? Onde mais encontramos esta soma?

Questão 7: Qual a soma de todos os números? Qual a relação desta soma com a somas das colunas, linhas ou diagonais?

Atividade: Construindo um quadrado mágico.

Questão 1: Contrua todos os possíveis quadrados mágicos, como os número de $1-9$.

Atividade: Generalizando quadrado mágicos de ordem 3

Questão 1: Dado um quadrado mágico de ordem 3, ou seja 3×3. Verifique:

b	c	d
e	a	f
g	h	i

a. A constante mágica (valor da soma de cada linha, coluna e diagonal) é um terço da soma de todos os nove números dispostos no quadrado mágico.

b. A constante mágica é o triplo do valor central.

c. A soma dos elementos dos quatro cantos é quatro vezes o valor central.

d. A soma dos elementos do centro de cada alinhamento periférico é igual a soma dos elementos dos quatro cantos.

e. Soma de dois elementos extremos de um alinhamento que passe pelo centro é igual ao dobro do valor central.

Questão 2: Complete os seguintes quadrados mágicos:

6	17	
	11	7
12		

	2	
		20
11	26	

Atividade: Operações com quadrados mágicos.

Questão 1: Considere os quadrados mágicos, formados por duas sequências diferentes, responda:

6	1	8
7	5	3
2	9	4

10	2	9
6	7	8
5	12	4

a. Se multiplicarmos por dois todos os elementos dos quadrados mágicos o que acontece com a constante mágica?

b. Se somarmos dois em todos os termos dos quadrados mágicos o que acontece com cada constante mágica?

c. Se somarmos os dois quadrados o resultado ainda é um quadrado mágico?

Questão 2: Vamos generalizar as propriedades vistas na primeira atividade:

a	b	c
d	e	f
g	h	i

a. Se multiplicarmos por uma constante k todos os elementos de um quadrado mágico a constante mágica fica multiplicada por k.

b. Se somarmos uma constante k em todos os elementos de um quadrado mágico então a constante mágica fica somada $3 \times k$.

c. Se somarmos dois quadrados mágicos, formados por sequências distintas entre si, então o resultado ainda é um quadrado mágico.

Atividade: Progressão Aritmética e quadrados mágicos

Questão 1: Monte três quadrados mágicos com os seguintes conjuntos de números: $(2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)$, $(1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17)$, $(2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18)$.

Questão 2: Qual a constante mágica para cada conjunto:

Questão 3: Qual a relação entre os três conjuntos e o conjunto $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$?

Questão 4: Qual a razão de cada conjunto?

Questão 5: Como podemos relacionar a montagem do quadrado tradicional (com os valores de 1 a 9) com a montagem dos quadrados mágicos com os três novos conjuntos?

Questão 6: Considere o seguinte quadrado mágico, subtraia o termo central 5 de todos os números:

4	3	8
9	5	1
2	7	6

Questão 7: Sabendo que temos uma P.A. como encontrar a constante mágica do quadrado formado por ela?

Questão 8: Será que a soma dos nove termos da P.A. (formada por inteiros positivos) é sempre divisível por 3?

Questão 9: Construa um quadrado mágico cujo termo central seja 11.

Questão 10: Complete o seguinte quadrado mágico:

		10
40		20

Questão 11: Construa um quadrado mágico cuja constante mágica seja 51.