UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

EM REDE NACIONAL - PROFMAT

(Mestrado)

Cleonice Salateski Simão

# Uma Introdução ao Estudo das Funções Elípticas de Jacobi

Maringá-PR

2013

Cleonice Salateski Simão

# Uma Introdução ao Estudo das Funções Elípticas de Jacobi

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Área de concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Fábio Matheus Amorin Natali

Maringá

2013

# Uma Introdução ao Estudo das Funções Elípticas de Jacobi

**Cleonice Salateski Simão**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre.

COMISSÃO JULGADORA

---

Prof. Dr. Fábio Matheus Amorin Natali - Orientador

Universidade Estadual de Maringá (UEM)

---

Prof. Dr. Cícero Lopes Frota

Universidade Estadual de Maringá (UEM)

---

Prof. Dra. Luci Harue Fatori

Universidade Estadual de Londrina (UEL)

Aprovada em: xx de março de 2013.

Local de defesa: Anfiteatro xxxxxx, Bloco F-67, *campus* da Universidade Estadual de Maringá.

# Agradecimentos

Agradeço:

À Deus, por tudo.

Ao meu marido Carlos Mauricio Simão, companheiro e amigo, que soube entender minha opção pelo estudo e, como ninguém, me apoiar nos momentos difíceis e comemorar a cada etapa vencida.

Aos meus filhos, Erika e Felipe, que souberam compreender e respeitar minha ausência em tantos momentos.

Ao meu orientador, Profº Dr. Fábio Matheus Amorin Natali, pela sugestão do tema, pelas orientações, confiança e paciência durante a realização deste trabalho.

À amiga Marly de Fátima Gonçalves Tavares Biezus, exemplo de vida profissional, pela amizade, apoio e traduções utilizadas nesta pesquisa.

À amiga Ivonete Mezzari Roque, pelo constante incentivo e aulas de Yoga que fortaleceram meu equilíbrio e minha autoconfiança.

À todos os colegas e professores do Mestrado Profissional em Matemática, pela amizade e excelente ambiente de estudo, discussão e troca de opiniões.

Em especial aos amigos: Amarildo Leite, Priscila Gleden, Roberto Spenthof e Ronaldo Menezes, pela companhia agradável nas viagens e pela cumplicidade e ajuda nos demais momentos. Vocês são responsáveis por grande parte das boas recordações que guardarei desse período da minha vida.

À CAPES, pelo fundamental apoio financeiro.

“Os grandes feitos são conseguidos não pela força,

mas pela perseverança.”

Samuel Johnson.

# Resumo

Este trabalho tem o objetivo de apresentar um texto introdutório sobre as Funções Elípticas de Jacobi e algumas aplicação. Com uma abordagem simples e objetiva dissertamos sobre esta lacuna existente na literatura acadêmica brasileira dentro das funções especiais. Iniciamos com uma pequena revisão da literatura no aspecto histórico, bem como dos matemáticos que mais contribuíram com tal assunto. Abordamos as definições e as propriedades das funções elípticas de Jacobi, e também das funções circulares e hiperbólicas, consideradas casos degenerados destas funções. A seguir, lembramos como o conhecimento das integrais elípticas nos ajuda na obtenção da retificação de um arco de elipse. Finalmente mostramos a aplicação mais conhecida destas funções e que, do ponto de vista histórico, tudo indica ter sido esta a razão pela qual as integrais desse tipo foram chamadas de elípticas: o comprimento do arco de uma elipse.

**Palavras chave:** Funções Especiais. Funções Elípticas de Jacobi. Elipse.

# Abstract

This work aims to present an introductory text about the Jacobi Elliptic Functions and some applications. With a simple and straightforward approach, we discurs about this gap in the Brazilian academic literature within the special functions. We begin with a brief review of the literature on the historical aspect as well as the mathematicians who contributed most to this subject. We approach the definitions and properties about Jacobi´s elliptic functions, and also the circular and hyperbolic functions, considered degenerate cases of these functions. Then we remember how knowledge of elliptic integrals helps us in getting the rectification of an arc of ellipse. Finally, we show the most known application of these functions and that, from the historical point of view, it seems that this was the reason why the integrals of this type were called elliptical: the arc length of an ellipse.

**Key words:** Special Functions. Jacobi's Elliptic Functions. Ellipse.

# Lista de Figuras

# Lista de Tabelas

# Sumário

# Justificativa Quanto ao Profmat

Um bom professor é aquele capaz de potencializar seus estudantes, quanto maior o conhecimento deste, tanto maior o número de ferramentas que terá para motivar seus alunos ao estudo. Então, o professor precisa ampliar seus conhecimentos, assumir a postura de examinar e refletir sobre o que já foi desenvolvido pela humanidade. O conhecimento fortalece o pensamento do professor, leva-o a pensar a um nível mais elevado, tornando-o um intelectual transformador, capaz de desenvolver uma prática educacional mais consistente e eficaz. Este passa a identificar situações singulares, processa melhor as informações, elabora diagnósticos mais precisos e toma decisões mais acertadas sobre as necessárias intervenções pedagógicas e curriculares.

Assim, o PROFMAT visa atender professores de Matemática que busquem aprimoramento em sua formação profissional. O Programa diz em seu regimento no artigo 1º que:

> O Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) tem como objetivo proporcionar formação matemática **aprofundada**, relevante e articulada com o exercício da docência no Ensino Básico, visando fornecer ao egresso qualificação certificada para o exercício da profissão de professor de Matemática. (grifo nosso)[1]
>
> [1] http://www.profmat-sbm.org.br/regimento.asp

Então, o professor torna-se capaz de exercer a profissão com competência e inovar quando amplia o próprio conhecimento. E sabemos que, para inovar é preciso conhecer e ter contato com a ampla produção de conhecimento já disponível.

Baseado no acima exposto, nosso trabalho sobre Funções Especiais vem trazer ao professor um pouco deste conhecimento dentro do espaço das Funções Especiais, do qual muitos não tiveram contato em suas graduações.

O artigo 28, do regimento do PROFMAT nos diz que o Trabalho de Conclusão de Curso deve ter impacto na prática didática do professor. E para que isso aconteça, é necessário que o conhecimento do professor vá além do mero conteúdo ensinado. Nosso trabalho apresenta um conhecimento adicional ao estudo de uma classe importante da teoria das funções, à saber, as funções elípticas Jacobianas, também conhecidas como funções trigonométricas generalizadas. É sabido que, a grande maioria dos professores de Matemática quando ensina as Funções Trigonométricas aos seus alunos da Educação Básica não tem noção que estas podem ser estudadas como casos desse tipo especial de função. Assim, trazemos uma pequena introdução destas, para que ele possa divulgar aos alunos mais curiosos e deslumbrados pela matemática, outras informações sobre tais Funções, incitando a busca por mais conhecimentos. Quem sabe até, ajudando a estimular a formação de novos profissionais da Matemática.

Portanto, um professor precisa buscar um aperfeiçoamento constante, deve assumir a postura de intelectual, desenvolver maior autoridade sobre o seu próprio trabalho e então, ajudar a instigar nos alunos a busca por este conhecimento. Para que este hábito possa ser cultivado, é necessário despertar a curiosidade e a capacidade de pesquisa do professor.

# Introdução

Segundo [5], o estudo e a obtenção das integrais elípticas e das funções elípticas de Jacobi trazem e facilitam o entendimento e as aplicações trazidas principalmente pela Geometria e pelo Cálculo Integral. Apesar de muitas grades curriculares não possuem este ramo da Matemática, as funções e integrais elípticas têm ressurgido com grande ênfase em inúmeros problemas e aplicações na Teoria dos Números, Álgebra, Dinâmica, Eletrostática e outros campos da Matemática e da Física, além das equações diferencias ordinárias não-lineares.

O nosso objetivo é, a partir de uma rápida apresentação histórica, apresentar um texto introdutório sobre as Funções Elípticas de Jacobi e aplicações. Este trabalho auxilia àqueles que pretendem apreciar e promover este assunto que, apesar de sua relevância, poucos tiveram contato na graduação. Parte deste trabalho foi desenvolvido em conjunto com a mestranda Priscila Gleden Novaes da Silva.

No capítulo 1 deste trabalho descreveremos, de forma resumida, um pouco da história do surgimento das funções elípticas de Jacobi, bem como dos matemáticos que tornaram possível os escritos sobre este assunto. São brevemente considerados neste texto as obras-padrão de Legendre, Abel e Jacobi. Segundo [9], o trabalho de Legendre deve ser considerado como a base da teoria das integrais elípticas e este deve ser considerado o fundador desta teoria. Devido as suas investigações foram estabelecidas as propriedades duplamente periódicas dessas funções por Abel e Jacobi.

Aquelas integrais que continham expressões que não podiam ser reduzidas às formas normais conhecidas foram denominadas integrais elípticas, e conforme [10] foi Legendre que as reduziu às três formas, denominadas canônicas. Segundo [6], Jacobi introduziu a notação da teoria das funções elípticas e chamou de funções elípticas às funções inversas das integrais elípticas de primeira ordem, da forma canônica.

No capítulo 2 exporemos os casos considerados degenerados das funções elípticas de Jacobi, os quais são as funções trigonométricas e as funções hiperbólicas. Abordamos estas funções como casos particulares das funções elípticas. Após, seguindo principalmente [4] e [7], abordamos as definições e as propriedades das funções elípticas de Jacobi, bem como suas derivadas e integrais.

Finalmente, como as integrais elípticas surgiram em problemas de determinação do comprimento de algumas curvas, em particular, no problema de determinação do comprimento da elipse. No capítulo 3 escolhemos mostrar que a retificação da elipse depende de uma integral elíptica conforme em [10], bem como o comprimento da elipse e calculamos alguns valores para que se possam comparar aproximações destes comprimentos. Faremos esta comparação usando a integral elíptica e uma série binomial.

Capítulo 1

# Breve História

A história das Integrais Elípticas e das Funções Elípticas de Jacobi que apresentamos neste texto consideram os matemáticos e os estudos que tornaram possível o desenvolvimento desta teoria.

## 1.1 Legendre, Abel e Jacobi

Os matemáticos mais importantes na história das Funções Elípticas de Jacobi foram Legendre, Abel e Jacobi. A seguir, apresentaremos uma pequena biografia de cada um deles.

### 1.1.1 Adrien Marie Legendre

Figura 1.1: Adrien Marie Legendre

Matemático Frances nasceu em 1752, viveu em Paris e faleceu em 1833. Seus principais trabalhos em matemática superior concentram-se em teoria dos números, funções elípticas, o método dos mínimos quadrados e integrais. É também conhecido na história da matemática elementar pelo seu tratado *Éléments de Géométrie*, que foi largamente traduzido. Esta é uma obra de grande estudo da geometria euclidiana e foi modelo para textos posteriores.

Segundo [6], Legendre publicou também o trabalho *Essai sur La Théorie dês Nombres* (1797-1798), que constitui a primeira abordagem exclusiva da teoria dos números. Após, escreveu o tratado *Exercises Du Calcul Integral* (1811-1819) em três volumes, que competiu com o semelhante trabalho de Euler. Em seguida, Legendre estendeu partes desse tratado em *Traité des Fonctions Elliptiques et des Intégrals eulériennes* (1825-1832), também em três volumes.

O trabalho *Exercises Du Calcul Intégral* foi um dos grandes trabalhos de Legendre sobre funções elípticas, onde ele apresentou as propriedades básicas das integrais elípticas, bem como suas tabelas e também das funções beta e gama. E no trabalho *Fonctions Traité des Elliptiques*, reorganizou este material. Passou 40 anos trabalhando em funções elípticas, mas foi ofuscado pelos trabalhos de Abel e Jacobi.

### 1.1.2 Niels Henrik Abel

Figura 1.2: Niels Henrik Abel

Abel nasceu em Findö na Noruega, em 1802. De família pobre, estudou na Universidade de Oslo com a ajuda de professores. Obteve uma bolsa que lhe permitiu viajar para a Alemanha, a Itália e a França e escreveu diversos artigos em matemática.

Conforme [6], o canal de divulgação para seus artigos foi a revista conhecida como *Journal de Crelle*. E foi em 1827, no segundo volume desta revista que Abel apresentou o trabalho "teoria das funções duplamente periódicas". Como Legendre era pioneiro no desenvolvimento das funções elípticas ficou admirado com as descobertas de Abel, as quais foram realizadas concomitantemente a Jacobi.

Abel apresentou uma dissertação sobre integrais de funções algébricas, só publicada 12 anos após sua morte. Com pouca idade, descobriu que sofria de tuberculose, mas prosseguiu com suas pesquisas até a morte, em 1829. Não teve o reconhecimento devido em vida, contudo postumamente foi nomeado professor da Universidade de Berlim e ganhou um prêmio do Instituto Francês em 1841, por seus trabalhos com *Funções Elípticas*.

### 1.1.3 Carl Gustav Jakob Jacobi

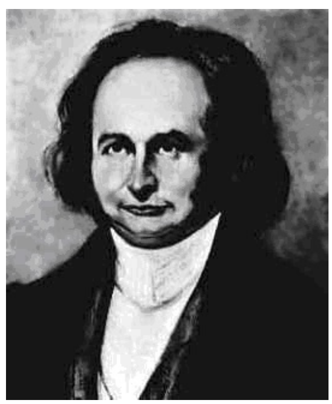

Figura 1.3: Carl Gustav Jakob Jacobi

No século XIX a Matemática era basicamente ligada à mecânica e à astronomia e Carl Gustav Jakob Jacobi e outros, foram os notáveis matemáticos que deram um novo impulso as atividades matemáticas fazendo-a avançar, na Alemanha.

Segundo [6] Jacobi nasceu em Potsdam em 1804 e era descendente de judeus. Em 1825 obteve seu doutorado na Universidade de Berlim e trabalhou como respeitável professor em Königsberg. Em 1842, com uma pensão do governo da Prússia, abdicou à sua cadeira em Königsberg e mudou-se para Berlim, onde viveu até 1851, ano de sua morte.

Entre as obras de Jacobi, é notável sua pesquisa que trata das funções elípticas, ele pesquisou simultaneamente ao matemático norueguês Abel e os resultados acordados, embora de forma totalmente independente, lançaram as bases da teoria destas funções. Jacobi com o trabalho *"Fundamenta nova theoria functionum el lipticarum"* em 1829, ano da morte de Abel, conseguiu atrair a atenção de toda a comunidade matemática e mereceu elogios até de Legendre. Este sucesso deveu-se a crucial idéia de iniciar suas descobertas com a inversão das integrais elípticas.

Com as profundas descobertas no estudo de funções elípticas Jacobi alcançou o seu lugar como um dos maiores matemáticos da época e deixou contribuições importantes que abrangem quase todas as áreas da matemática.

Jacobi foi um professor e matemático brilhante, fez contribuições significativas em teoria dos números, equações diferenciais e álgebra linear. Ajudou a difundir o emprego dos determinantes, com o trabalho *De determinantibus functionalibus* em 1841, onde introduziu artifícios matemáticos que simplificavam de modo considerável várias operações. Esse determinante funcional que aparece no teorema da mudança de variáveis para integrais passou a ser chamado Jacobiano em sua homenagem.

Para [3] Jacobi merece crédito por vários teoremas centrais relacionados com funções elípticas. A ele também devemos o estudo das *"funções theta de Jacobi"*, funções inteiras das quais as elípticas são quocientes.

## 1.2 Perspectiva Histórica das Funções Elípticas

O comprimento de arco de uma elipse, a determinação do período do pêndulo simples e a deflexão de uma barra elástica fina são alguns dos problemas encontrados no tempo em que é exigida a integração de funções irracionais para a sua solução. Como não é possível avaliar estas integrais em termos de funções elementares, eram obtidos resultados úteis em termos de séries infinitas, aproximações ou relacionando com o teorema de adição devido à Euler.

O primeiro relato de integrais elípticas foi em 1655, quando John Wallis (1616-1703) começou a estudar o comprimento do arco de uma elipse. Tanto John Wallis quanto Isaac Newton (1643-1727) publicaram uma série infinita de expansão para o comprimento de arco de elipse.

A teoria das integrais elípticas, desenvolvida por Fagnano, Euler e Legendre, foi extremamente complicada, envolvendo valores infinitos para cada integral elíptica como mostra [2]. Entre 1714 e 1718, Giulio Carlo de'Toschi di Fagnano (1682-1766) publicou no *Giornali dei Letterati d'Italia* uma série de artigos sobre a retificação de certas curvas (elipse, hipérbole, ciclóide e lemniscata) estudadas pelos irmãos James e John Bernoulli, nos quais demonstrou que a retificação das mesmas não poderia ser feita por meio de funções elementares, e sim através das integrais elípticas. E Leonhard Euler (1707-1783) mais tarde desenvolveria o trabalho de Fagnano, obtendo o teorema da adição de integrais para a lemniscata.

No final dos anos de 1700, Legendre publicou artigos sobre integrais elípticas, os quais tratavam de arcos elípticos. Ele apresentou as propriedades básicas das integrais elípticas e das funções beta e gama. Trabalhou com essas funções em suas aplicações à Mecânica, a rotação da Terra e atração de elipsóides além de outros problemas. Fez as famosas tabelas de integrais elípticas as quais foram calculadas por ele mesmo [3].

Ainda segundo [3], Carl Friedrich Gauss (1777-1855) também estudou a fundo as integrais elípticas. Papeis particulares de Gauss mostram que talvez já em 1800 ele tivesse descoberto a dupla periodicidade das funções elípticas. Porém só em 1827-1828 essa propriedade foi revelada pelo matemático Niels Henrik Abel numa memória no Journal de Creile. Abel também escreveu importantes generalizações das funções elípticas, bem como algumas propriedades importantes, mas infelizmente este trabalho só foi publicado após a sua morte.

Legendre passara quase quarenta anos estudando as integrais elípticas e desenvolveu muitas fórmulas incluindo a classificação das mesmas. Contudo, o trabalho de Legendre foi essencialmente despercebido pelos seus contemporâneos até 1827. Nessa época, dois jovens matemáticos, Abel e Jacobi colocaram o assunto em uma nova base que o revolucionaram completamente.

O que Legendre não vira, mas Gauss, Abel e Jacobi viram, é que invertendo a relação funcional das variáveis na integral elíptica obtemos uma nova função. E estas novas funções foram definidas como funções elípticas.

> Tão impressionado ficou Jacobi com a simplicidade que resultava da simples inversão da relação funcional em integrais elípticas que ele considerava o conselho, "Deve-se sempre inverter" como o segredo do sucesso na matemática. ([3], p.376).

Jacobi escreveu um tratado clássico sobre as funções elípticas, de grande importância em Física-Matemática, pois estas funções estão relacionadas com a energia cinética de corpos rígidos em rotação. Além disso, Jacobi foi o primeiro matemático a aplicar as funções elípticas a Teoria dos Números, provando o teorema sobre números poligonais de Fermat.

## 1.3 Formas Canônicas das Integrais Elípticas

Segundo [10] a expressão integral

$$\int \frac{F(x)}{\sqrt{P(x)}}dx$$

em que $P(x)$ representa um polinômio do quarto grau em $x$, e $F(x)$ uma função algébrica racional, não pode ser reduzida a formas normais conhecidas pelo cálculo integral. A sua redução origina três novas formas que, quando da impossibilidade de mais simples expressão, se calculam numericamente. Chamam-se integrais elípticas esses três termos de redução que também são chamadas formas canônicas.

Legendre demonstrou o fato de que todas as integrais elípticas podem ser reduzidas a formas canônicas. A integral elíptica de primeira ordem é definida como:

$$F(x,k) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{(1-k^2t^2)(1-t^2)}}dt \tag{1.1}$$

A integral elíptica de segunda ordem é definida por:

$$E(x,k) = \int_0^x \frac{1-k^2t^2}{\sqrt{(1-k^2t^2)(1-t^2)}}dt \tag{1.2}$$

A integral elíptica de terceira ordem é determinada por:

$$\Pi(x,n,k) = \int_0^x \frac{1}{(1+nt^2)\sqrt{(1-k^2t^2)(1-t^2)}}dt \tag{1.3}$$

A transformação $x = sen(\psi)$ converte as integrais elípticas de uma forma algébrica para uma forma trigonométrica. Neste trabalho estaremos interessados apenas em calcular as integrais elípticas completas de primeira e segunda ordem simbolizadas por $K(k)$ e $E(k)$, respectivamente, e definidas trigonometricamente como:

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 sen^2(\phi)}} d\phi \tag{1.4}$$

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 sen^2(\phi)} d\phi \tag{1.5}$$

As quais são particularidades das integrais elípticas

$$F(\psi, k) = \int_0^{\psi} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 sen^2(\phi)}} d\phi \tag{1.6}$$

$$E(\psi, k) = \int_0^{\phi} \sqrt{1 - k^2 sen^2(\phi)} d\phi \tag{1.7}$$

As quais são funções de dois argumentos: a amplitude $\psi$ e o módulo $k$ e limitadas por $0 \leq k \leq 1$ e $-\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$. De modo análogo é possível escrever a integral elíptica completa de terceira ordem de Legendre como:

$$\Pi(\psi, n, k) = \int_0^{\psi} \frac{1}{(1 - nsen^2(\phi))\sqrt{1 - k^2 sen^2(\phi)}} d\phi \tag{1.8}$$

Estas três formas de integrais elípticas assim como suas reduções a esses termos, encontram-se em [10].

Capítulo 2

# Funções Elípticas de Jacobi

As funções elípticas de Jacobi são definidas como as inversas da integral elíptica de primeira ordem. Assim chamamos a equação (1.1) de:

$$u = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{(1-k^2t^2)(1-t^2)}}dt \tag{2.1}$$

Temos que $u$ é uma função de $x$, isto é, $u = f(x)$, e Jacobi observou que invertendo a relação funcional entre $u$ e $x$, obtém uma função mais interessante e útil,

$$x = f^{-1}(u)$$

A integral (2.1) é definida em (1.6) também como:

$$u = \int_0^\psi \frac{1}{\sqrt{1-k^2sen^2(\phi)}}d\phi \tag{2.2}$$

onde $\psi$ é chamado de amplitude correspondente ao argumento $u$ e escrito como

$$\psi = am(u,k) = am\ u,$$

denotado assim por Jacobi.

Veremos que as funções elípticas reduzem-se às funções circulares quando $k = 0$ e às funções hiperbólicas quando $k = 1$, considerados casos degenerados destas funções.

Primeiramente vamos explorar esta idéia para funções circulares.

## 2.1 Funções Circulares

Delinearemos as propriedades das funções elípticas quando estas se reduzem ao círculo.

Coloque em (2.1) $k = 0$ e teremos:

$$u(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt \tag{2.3}$$

Note que em [1], do teorema sobre as derivadas das funções trigonométricas inversas obtemos a integral indefinida $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$ conhecida como sendo $arcsen(t)$.

Suponha que o limite superior da integral da equação (2.3) $x \in \mathbb{R}$ e esteja no intervalo $(-1, 1)$. Usaremos agora algumas ferramentas clássicas do Cálculo Diferencial e Integral. O leitor interessado pode consultar a referência [1]. Assim,

$$\lim_{x \to 1^-} u(x) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)}}dt = arcsen(1) - arcsen(0) = \frac{\pi}{2} \tag{2.4}$$

e

$$\lim_{x \to -1^+} u(x) = \int_0^{-1} \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)}}dt = arcsen(-1) - arcsen(0) = -\frac{\pi}{2}$$

e supondo $\sqrt{1-t^2} > 0$, temos o integrando positivo e a derivada de (2.3) também positiva e desta forma, caracterizamos $u(x)$ como estritamente crescente.

Assim, a equação (2.3) define $u$ como uma função $x$ que varia de $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$, enquanto $x$ varia de -1 até 1. De modo que $u$ é uma função ímpar de $x$. De fato, no lugar de (2.3) podemos colocar:

$$u = arcsen(x) \tag{2.5}$$

Pelo teorema da função inversa, a mesma equação define $x$ como uma função de $u$ que varia de -1 a 1 enquanto $u$ varia de $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$. Logo, $x$ é uma função ímpar de $u$, denotada por:

$$x = sen(u) \tag{2.6}$$

Também definimos $cos(u)$ como sendo a relação:

$$cos(u) = \sqrt{1 - sen^2(u)} \tag{2.7}$$

Note que a raiz quadrada é positiva para todo $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$, de modo que $cos(u)$ é uma função par. De (2.7) segue a identidade muito conhecida da trigonometria:

$$sen^2(u) + cos^2(u) = 1 \tag{2.8}$$

Estas definições nos fornecem $u = 0$ quando $x = 0$ e, como já visto em (2.4) quando $x = 1$, $u = \frac{\pi}{2}$. Em particular, note que $sen(0) = 0$, $cos(0) = 1$, $sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ e $cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

### 2.1.1 Derivadas

As derivadas de $sen(u)$ e $cos(u)$ são dadas por:

$$\frac{d}{du}sen(u) = cos(u) \tag{2.9}$$

$$\frac{d}{du}cos(u) = -sen(u) \tag{2.10}$$

Para provar (2.9), veja que, fazendo a diferenciação em (2.3) ficamos com

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

e pelo teorema da derivada da inversa, temos

$$\frac{d}{du}sen(u) = \frac{dx}{du} = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-sen^2(u)} = cos(u),$$

o que prova (2.9).

E para provar (2.10), diferenciando (2.8) ficamos com:

$$2sen(u)cos(u) + 2cos(u)\frac{d}{du}cos(u) = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{du}cos(u) = -sen(u)$$

e obtemos assim a equação (2.10).

### 2.1.2 Expansões de $sen(u)$ e $cos(u)$ em potências de $u$

Por diferenciação repetida e substituição nas séries de Maclaurin, podemos encontrar as expansões de $sen(u)$ e $\cos(u)$ em potências de $u$.

**Expansão da função $sen(u)$ em séries de Taylor em torno de $u = 0$**

Cálculo da função $sen(u)$ e suas derivadas em $u = 0$:

$$\begin{array}{rcr}
f(u) & = & sen(u) \\
f'(u) & = & cos(u) \\
f''(u) & = & -sen(u) \\
f'''(u) & = & -cos(u) \\
f^{(4)}(u) & = & sen(u)
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rcrcr}
f(0) & = & sen(0) & = & 0 \\
f'(0) & = & cos(0) & = & 1 \\
f''(0) & = & -sen(0) & = & 0 \\
f'''(0) & = & -cos(0) & = & -1 \\
f^{(4)}(0) & = & sen(0) & = & 0
\end{array}$$

As derivadas da função $sen(u)$ são cíclicas, de modo que

$$f^{(4)}(u) = f(u)$$

$$f^{(5)}(u) = f'(u)$$

e assim por diante.

Substituindo na expressão geral para a série de Taylor, resulta:

$$sen(u) = u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \frac{u^7}{7!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!} \text{ para todo } u$$

**Expansão da função $cos(u)$ em séries de Taylor em torno de $u = 0$.**

Cálculo da função $cos(u)$ e suas derivadas em $u = 0$:

$$\begin{array}{rclcrclcl} f(u) & = & cos(u) & \quad & f(0) & = & cos(0) & = & 1 \\ f'(u) & = & -sen(u) & & f'(0) & = & -sen(0) & = & 0 \\ f''(u) & = & -cos(u) & & f''(0) & = & -cos(0) & = & -1 \\ f'''(u) & = & sen(u) & & f'''(0) & = & sen(0) & = & 0 \\ f^{(4)}(u) & = & cos(u) & & f^{(4)}(0) & = & cos(0) & = & 1 \end{array}$$

Observar que, como no caso da função $sen(u)$, as derivadas da função $\cos(u)$ são repetitivas a partir da $4^a$ derivada. Substituindo na expressão geral para a série de Taylor, resulta:

$$cos(u) = 1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} - \frac{u^6}{6!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{u^{2n}}{(2n)!} \text{ para todo } u$$

### 2.1.3 Fórmulas da adição

As fórmulas da adição de arcos $sen(u)$ e $cos(u)$ são:

$$sen(u + v) = sen(u)\cos(v) + cos(u)sen(v) \tag{2.11}$$

$$cos(u + v) = cos(u)cos(v) - sen(u)sen(v) \tag{2.12}$$

Segundo [4] provaremos a fórmula da adição para (2.11):

Estando $u$, $v$ e $(u + v)$ entre $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ e considerando

$$z = sen(u)cos(v) + cos(u)sen(v),$$

diferenciando parcialmente temos:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = cos(u)cos(v) - sen(u)sen(v)$$

e

$$\frac{\partial z}{\partial v} = -sen(u)sen(v) + cos(u)cos(v)$$

Então, $\dfrac{\partial z}{\partial u} = \dfrac{\partial z}{\partial v}$ e podemos fazer $z = F(u+v)$, portanto

$$F(u+v) = sen(u)cos(v) + cos(u)sen(v)$$

onde $F(u+v)$ denota alguma função de $u+v$.

Se colocarmos $v = 0$ temos $F(u) = sen(u)$, e como $F$ e $sen(u)$ são funções de mesmo domínio, consequentemente $F(u+v) = sen(u+v)$ provando assim a equação (2.11).

Para provar (2.12), basta tomar a equação (2.11) juntamente com a equação (2.7) que teremos o esperado.

### 2.1.4 Expansão da definição de $sen(u)$ para todos os valores reais de $u$

Até aqui $u$ foi restrito ao intervalo $-\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}$, mas podemos definir $sen(u)$ para todos os valores de $u$. Uma maneira de fazer isto é fornecida pela fórmula da adição, que pode ser considerado como válido para todos os valores de $u$ e $v$. Assim, se colocarmos $u = u_1$ e $v = \frac{\pi}{2}$ em (2.11) obtemos:

$$sen\left(u_1 + \frac{\pi}{2}\right) = sen(u_1)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(u_1),$$

novamente fazendo nessa fórmula $u = u_1 + \frac{\pi}{2}$, ela pode ser reescrita como

$$sen(u) = \cos\left(u - \frac{\pi}{2}\right),$$

que define $sen(u)$ quando $\frac{\pi}{2} \leq u \leq \pi$. Dessa mesma forma podemos estender o intervalo dentro do qual $sen(u)$ é definida de forma a incluir todos os valores reais de $u$.

### 2.1.5 Aplicação: Cálculo da área de uma elípse usando funções circulares

**Exemplo 2.1.1.** *Encontre a área limitada pela elipse* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

**Solução:** Resolvendo a equação da elipse para $y$, temos:

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \Longleftrightarrow y = \frac{b}{a} \pm \sqrt{a^2 - x^2}$$

Como a elipse é simétrica em relação a ambos os eixos, a área total $A$ é quatro vezes a área do primeiro quadrante. Então a parte da elipse no primeiro quadrante é: $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, com $0 \leq x \leq a$. Assim,

$$\frac{1}{4}A = \int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}dx$$

portanto,

$$A = 4 \times \frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx$$

Para avaliar essa integral fazemos $x = asen(\theta)$ e $dx = a\cos(\theta)d\theta$. Veja que: se $x = 0$, $sen(\theta) = 0$, logo $\theta = 0$ e; se $x = a$, $sen(\theta) = 1$, logo $\theta = \frac{\pi}{2}$. Temos

$$A = 4\frac{b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2sen^2(\theta)}\,(acos(\theta))\,d\theta = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\theta)d\theta,$$

mas, $\cos^2(\theta) = \dfrac{1 + \cos(2\theta)}{2}$ e, substituindo, temos:

$$A = 2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1 + \cos(2\theta))d\theta$$

Assim, o valor desta integral definida é:

$$\begin{aligned} A &= 2ab\left[\theta + \frac{sen(2\theta)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 2ab\left[\left(\frac{\pi}{2} + \frac{sen(\pi)}{2}\right) - \left(0 + \frac{sen(0)}{2}\right)\right], \end{aligned}$$

e obtemos

$$A = ab\pi$$

$\square$

## 2.2 Funções Hiperbólicas

Delinearemos as propriedades das funções elípticas quando estas se reduzem a hipérbole. Considere $x \in (-1, 1)$. Fazendo $k = 1$ na equação (2.1) teremos

$$u(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-t^2)}}dt \quad \text{logo,} \quad u(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt, \tag{2.13}$$

Suponha $(1 - t^2) > 0$. Em [1] temos pelo Cálculo Integral que $\int \frac{1}{1-t^2}dt$ é conhecida como $arctgh(t)$ se $|t| < 1$.

Note que se $x \to 1^-$ temos:

$$\lim_{x \to 1^-} u(x) = \lim_{x \to 1^-} \int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt = +\infty, \tag{2.14}$$

se $x \to -1^+$ temos:

$$\lim_{x \to -1^+} u(x) = \lim_{x \to -1^+} \int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt = -\infty$$

A equação (2.13) define $u$ como uma função ímpar de $x$ que, uma vez que o integrando é positivo e varia de $-\infty$ a $\infty$ enquanto $x$ varia de -1 a 1. Assim, podemos denotar:

$$u = arctgh(x)$$

Inversamente, a mesma equação define $x$ como uma função ímpar de $u$ que varia de -1 até 1 enquanto $u$ varia de $-\infty$ a $\infty$. Sendo assim:

$$x = tgh(u) \qquad \text{(lê-se: tangente hiperbólica de } u\text{).} \tag{2.15}$$

As funções hiperbólicas podem ser expressas em termos de $e^x$, assim como as funções hiperbólicas inversas podem ser expressas em termos dos logaritmos naturais. De fato, podemos expressar (2.13) como:

$$u = \frac{1}{2}ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| \text{ se } u \neq 1.$$

Definimos $sech(u)$ como sendo a relação:

$$sech(u) = \sqrt{1 - tgh^2(u)}. \tag{2.16}$$

Note que a raiz quadrada é positiva para todo $u$ de modo que $sech(u)$ é uma função par. De (2.16) segue a identidade hiperbólica:

$$sech^2(u) = 1 - tgh^2(u) \tag{2.17}$$

Como visto em (2.15), $u \to \infty$ quando $x \to 1$ e estas definições nos fornecem também, $u \to 0$ quando $x \to 0$.

### 2.2.1 Outras Funções Hiperbólicas

As funções tangente, cotangente, secante e cossecante hiperbólicas são definidas da seguinte forma:

$$tgh(u) = \frac{senh(u)}{cosh(u)} \tag{2.18}$$

$$cotgh(u) = \frac{cosh(u)}{senh(u)} \tag{2.19}$$

$$sech(u) = \frac{1}{cosh(u)} \tag{2.20}$$

$$cossech(u) = \frac{1}{senh(u)} \tag{2.21}$$

### 2.2.2 Identidades Hiperbólicas Fundamentais

As funções hiperbólicas, similares às funções trigonométricas, satisfazem também outras três identidades fundamentais além da equação (2.17):

$$cosh^2(u) - senh^2(u) = 1 \tag{2.22}$$

$$tgh(u) = \frac{1}{cotgh(u)} \tag{2.23}$$

$$cotgh^2(u) - cossech^2(u) = 1 \tag{2.24}$$

Para provar a identidade (2.22) basta substituir em (2.17) as definições (2.18) e (2.20). A identidade (2.23) segue imediatamente das definições (2.18) e (2.19). E a demonstração de (2.24) segue de (2.19) e de (2.21).

**Analogia entre a Identidade Trigonométrica Fundamental e a Hiperbólica**

Conforme [1] faremos uma analogia da identidade hiperbólica (2.22) com a identidade trigonométrica fundamental.

No circulo unitário $x^2 + y^2 = 1$ escrevemos $x = cos(u)$ e $y = sen(u)$, com $0 \leq u \leq 2\pi$, visto na figura abaixo:

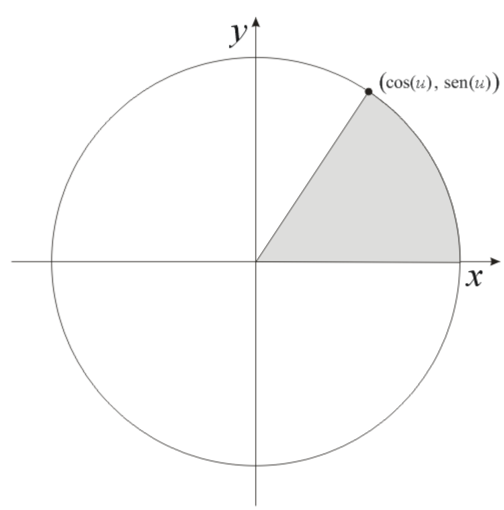


Figura 2.1: $x^2 + y^2 = cos^2(u) + sen^2(u) = 1$

Então $x^2 + y^2 = cos^2(u) + sem^2(u) = 1$ e como $0 \leq u \leq 2\pi$ interpretamos $u$ como o ângulo que vai do eixo $x$ positivo até o ponto $(cos(u), sen(u))$. Assim, as equações paramétricas $x = cosh(u)$ e $y = senh(u)$, com $-\infty < u < \infty$ e $x = cosh(u) > 0$, representa uma parte da curva $x^2 - y^2 = 1$ que podemos escrever:

$$x^2 - y^2 = cosh^2(u) - senh^2(u) = 1$$

conforme a figura abaixo da curva denominada hipérbole unitária.

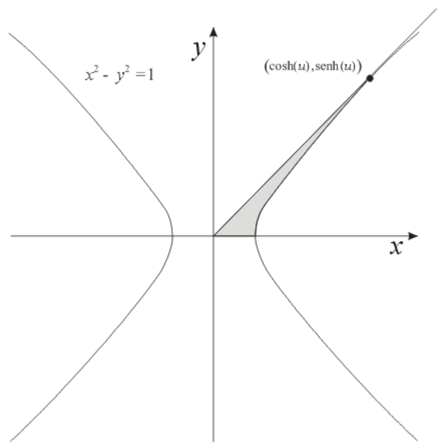


Figura 2.2: $x^2 - y^2 = cosh^2(u) - senh^2(u) = 1$

Os valores funcionais de *senh* e *cosh* têm a mesma relação com a hipérbole unitária que os valores de *sen* e *cos* tem com o circulo unitário. Então, como *sen* e *cos* são chamados de funções circulares, *senh* e *cosh* são chamados de funções hiperbólicas.

### 2.2.3 Derivadas

As derivadas de $tgh(u)$, $sech(u)$, $senh(u)$ e $cosh(u)$ são:

$$\frac{d}{du}tgh(u) = sech^2(u) \tag{2.25}$$

$$\frac{d}{du}sech(u) = -tgh(u)sech(u) \tag{2.26}$$

$$\frac{d}{du}senh(u) = cosh(u) \tag{2.27}$$

$$\frac{d}{du}cosh(u) = senh(u) \tag{2.28}$$

Para provar (2.25), derivamos (2.13) e ficamos com $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{1-x^2}$ e consequentemente

$$\frac{d}{du}tgh(u) = \frac{dx}{du} = 1 - x^2 = 1 - tgh^2(u)$$

e substituímos (2.17), obtendo (2.25).

A fim de provar (2.26), deriva-se (2.17) e teremos:

$$2sech(u)\frac{d}{du}sech(u) = -2tgh(u)\frac{d}{du}tgh(u),$$

e substituindo (2.25) fica:

$$2sech(u)\frac{d}{du}sech(u) = -2tgh(u)sech^2(u),$$

assim,

$$\frac{d}{du}sech(u) = -\frac{2tgh(u)sech^2(u)}{2sech(u)}$$

e obtemos (2.26).

Para provar (2.27): De (2.24) temos $cossech(u) = \sqrt{cotgh^2(u) - 1}$, de (2.23) trocamos $cotgh^2(u)$ por $\dfrac{1}{tgh^2(u)}$ e ficando

$$cossech(u) = \sqrt{\frac{1 - tgh^2(u)}{tgh^2(u)}},$$

que de (2.17) ficamos com

$$cossech(u) = \frac{sech(u)}{tgh(u)}$$

e substituímos em (2.21) ficando com:

$$senh(u) = \frac{tgh(u)}{sech(u)}$$

Derivando esta última expressão, pela regra do quociente, temos:

$$\begin{aligned}\frac{d}{du}senh(u) &= \frac{sech(u)sech^2(u) - tgh(u)(-tgh(u)sech(u))}{sech^2(u)} \\ &= \frac{sech^2(u) + tgh^2(u)}{sech(u)} \\ &= \frac{1}{sech(u)}\end{aligned}$$

e por (2.20) obtemos (2.27).

Prova de (2.28): A partir de (2.22) temos $cosh(u) = \sqrt{1 + senh^2(u)}$. E derivando esta expressão, ficamos com:

$$\frac{d}{du}cosh(u) = \frac{d}{du}\sqrt{1 + senh^2(u)} = -\frac{2senh(u)cosh(u)}{2\sqrt{1 + senh^2(u)}} = -senh(u)$$

### 2.2.4 Fórmulas da Adição

Outras identidades, tais como as funções hiperbólicas da soma de dois números são similares às identidades trigonométricas correspondentes. São elas:

$$senh(u + v) = senh(u)cosh(v) + cosh(u)senh(v)$$

$$cosh(u + v) = cosh(u)cosh(v) + senh(u)senh(v)$$

Suas demonstrações também podem ser feitas de forma análoga às trigonométricas correspondentes.

## 2.3 Funções Elípticas de Jacobi

As funções elípticas de Jacobi são definidas na equação (2.1) para $k$ e $x \in \mathbb{R}$, com $k \in (0, 1)$, com $x \in [-1, 1]$ e para $\sqrt{(1 - k^2t^2)(1 - t^2)} > 0$.

Veja que, em (2.1) temos:

$$\lim_{x \to 1^-} u(x) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1 - k^2t^2)(1 - t^2)}}dt = K(k) \qquad (2.29)$$

Assim, a equação (2.1) define $u$ como uma função ímpar de $x$ que, uma vez que o integrando é positivo, varia de 0 para $K$ enquanto $x$ varia de 0 a 1. Esta função foi denominada inicialmente por Jacobi como:

$$u = arcsen\ am(x)$$

E segundo [5], Christoph Gudermann (1798 - 1852) propôs escrever:

$$u = arcsn(x) \tag{2.30}$$

Inversamente, a mesma equação define $x$ como uma função ìmpar de $u$ que varia de 0 a 1, enquanto $u$ varia de 0 a $K$. Esta função foi denominada por Jacobi como $sen\ am(u)$ (lê-se: "seno amplitude de $u$"). E como proposto por Gudermann, escrevemos $sn(u)$ (lê-se: "senoidal de $u$") de modo que podemos colocar:

$$x = sn(u) \tag{2.31}$$

As funções $cn(u)$ (lê-se: "cnoidal de $u$") e $dn(u)$ (lê-se: "dnoidal de $u$") que foram inicialmente chamadas por Jacobi de $cos\ am(u)$ e $\delta\ am(u)$, respectivamentepodem, e são definidas pelas equações:

$$cn(u) = \sqrt{1 - sn^2(u)} \tag{2.32}$$

e

$$dn(u) = \sqrt{1 - k^2 sn^2(u)} \tag{2.33}$$

Assim, $sn(u)$, $cn(u)$ e $dn(u)$ são chamadas funções elípticas devido à conexão das funções com a elipse. E são chamadas funções elípticas de Jacobi porque foram utilizadas por Jacobi em seus estudos sobre funções de duplo período.

A função $sn(u)$ é considerada um "tipo"de função seno e $cn(u)$ e $dn(u)$ são "tipos"de função cosseno. As funções circulares são periódicas simples e as funções $sn(u)$, $cn(u)$ e $dn(u)$ são de duplo período, sendo um período real e outro imaginário. Nosso enfoque neste trabalho é com o argumento real.

O número $u$ é chamado de argumento das funções elípticas de Jacobi. O argumento $u$ é uma variável independente, mas no caso das funções circulares, este seria o ângulo $\theta$ no limite quando $k \to 0$, quando a elipse tornar-se um círculo.

Note que em (2.1), $u = 0$ quando $x = 0$ e como visto em (2.29), $u = K$ quando $x = 1$ temos, em particular:

| $u$ | $sn(u)$ | $cn(u)$ | $dn(u)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| $K$ | 1 | 0 | $k'$ |

Tabela 2.1: Valores de $sn$, $cn$ e $dn$ para $u = 0$ e $u = K$

O número $k$ é chamado de parâmetro ou de módulo destas funções. Geralmente, omite-se o módulo $k$ e escreve-se $sn(u) = sn(u, k)$, usando $k$ somente quando se quer evidenciá-lo. Baseado na tabela (2.1) e em (2.33) encontramos

$$k' = \sqrt{1 - k^2},$$

então,

$$k^2 + (k')^2 = 1 \tag{2.34}$$

assim $k$‘ é chamado de módulo complementar.

### 2.3.1 Identidades

Encontramos relações entre as funções elípticas similares às encontradas na trigonometria. São elas:

$$sn^2(u) + cn^2(u) = 1 \tag{2.35}$$

$$dn^2(u) + k^2 sn^2(u) = 1 \tag{2.36}$$

$$dn^2(u) = k^2 cn^2(u) + (k')^2 \tag{2.37}$$

$$cn^2(u) + (k')^2 sn^2(u) = dn^2(u) \tag{2.38}$$

Provas de (2.35) e (2.36): Da equação (2.32) segue a identidade (2.35). E da equação (2.33) segue a identidade (2.36).

Prova de (2.37): Colocando (2.35) em (2.36) ficamos com:

$$dn^2(u) + k^2 - k^2 cn^2(u) = 1,$$

isto é,

$$dn^2(u) = -k^2 cn^2(u) + 1 - k^2$$

e substituindo nesta expressão (2.34) obtemos a identidade (2.37).

Prova de (2.38):

Na equação (2.37) substituímos (2.34) e ficamos com

$$dn^2(u) = cn^2(u) - (k')^2 cn^2(u) + (k')^2,$$

então, usando a (2.35) obtemos a identidade (2.38).

### 2.3.2 Outras Funções Elípticas Jacobianas

As outras nove funções elípticas jacobianas são definidas a partir da notação de J. W. L. Glaisher (1848-1928). Elas são definidas com os quocientes das funções elípticas de Jacobi, como indicadas em [8]:

$$ns(u) = \frac{1}{sn(u)} \qquad sd(u) = \frac{sn(u)}{dn(u)} \qquad sc(u) = \frac{sn(u)}{cn(u)}$$

$$nc(u) = \frac{1}{cn(u)} \qquad cs(u) = \frac{cn(u)}{sn(u)} \qquad cd(u) = \frac{cn(u)}{dn(u)}$$

$$nd(u) = \frac{1}{dn(u)} \qquad ds(u) = \frac{dn(u)}{sn(u)} \qquad dc(u) = \frac{dn(u)}{cn(u)}$$

### 2.3.3 Derivadas

As derivadas das funções $sn(u)$, $cn(u)$ e $dn(u)$ são dadas por:

**i)**

$$\frac{d}{du}sn(u) = cn(u)dn(u) \tag{2.39}$$

**ii)**

$$\frac{d}{du}cn(u) = -sn(u)dn(u) \tag{2.40}$$

**iii)**

$$\frac{d}{du}dn(u) = -k^2 sn(u)cn(u) \tag{2.41}$$

Prova de (2.39): Sabemos que $x = sn(u)$ e de (2.1) temos que:

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(1-k^2x^2)(1-x^2)}} \text{ e portanto } \frac{dx}{du} = \sqrt{(1-k^2x^2)(1-x^2)}$$

e de (2.32) e (2.33) segue (2.39).

Prova de (2.40): Pelas regras da diferenciação temos:

$$\frac{d}{du}cn(u) = \frac{d}{du}\sqrt{1-sn^2(u)} = \frac{2sn(u)dn(u)cn(u)}{2\sqrt{1-sn^2(u)}} = -sn(u)dn(u)$$

Prova de (2.41):

$$\begin{aligned}
\frac{d}{du}dn(u) &= \frac{d}{du}\sqrt{1-k^2sn^2(u)} \\
&= \frac{2k^2sn(u)dn(u)cn(u)}{2\sqrt{1-k^2sn^2(u)}} \\
&= -\frac{k^2sn(u)dn(u)cn(u)}{dn(u)} \quad = \quad -k^2sn(u)cn(u)
\end{aligned}$$

□

### 2.3.4 Expansão em Séries de Potências de $u$.

As expansões de $sn(u)$, $cn(u)$ e $dn(u)$ em potências de $u$ são as seguintes:

$$sn(u) = u - \frac{(1+k^2)u^3}{3!} + \frac{(1+14k^2+k^4)u^5}{5!} + ... \tag{2.42}$$

$$cn(u) = 1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{(1+4k^2)u^4}{4!} - ... \tag{2.43}$$

$$dn(u) = 1 - \frac{k^2u^2}{2!} + \frac{(4+k^2)u^4}{4!} - ... \tag{2.44}$$

**Demonstração:** Iremos fazer a demonstração de (2.42).

Calculando as derivadas sucessivas de $sn(u)$ temos:

$$\frac{d}{du}sn(u) = cn(u)dn(u)$$

$$\frac{d^2}{du}sn(u) = -sn(u)dn^2(u) - k^2sn(u)cn^2(u)$$

$$\begin{aligned}\frac{d^3}{du}sn(u) &= -cn(u)dn^3(u) + 2k^2dn(u)sn^2(u) - k^2dn(u)cn^3(u)+ \\ &+2k^2sn^2(u)dn(u)cn(u)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^4}{du}sn(u) &= sn(u)dn^4(u) + 3k^2cn^2(u)dn(u)sn(u) - 2k^4sn^3(u)cn^2(u)+ \\ &+4k^2sn(u)dn^2(u)cn^2(u) - 2k^2dn^2(u)sn^3(u) + k^4cn^4(u)sn(u)+ \\ &+3k^2cn(u)sn(u)dn^2(u) - 2k^4sn^3(u)cn^2(u) + 4k^2sn(u)dn^2(u)cn^2(u)- \\ &-2k^2sn^3(u)dn^2(u)\end{aligned}$$

Para reduzirmos o trabalho e o tamanho das expressões, na derivada quinta apenas nos interessa os termos em que $sn(u)$ não figuram, pois quando substituirmos $u = 0$ sabemos que tais termos irão zerar. Portanto, faz sentido derivarmos na expressão acima apenas os termos em que $sn(u)$ aparecem com potência um. Assim:

$$
\begin{aligned}
\frac{d^5}{du} sn(u) \quad = \quad & sn(u)dn^4(u) + 3k^2cn^2(u)dn(u)sn(u) + 4k^2sn(u)dn^2(u)cn^2(u) + \\
& + k^4cn^4(u)sn(u) + 3k^2cn(u)sn(u)dn^2(u) + 4k^2sn(u)dn^2(u)cn^2(u) + \\
& + cn(u)dn^5(u) - 4k^2sn^2(u)cn(u)dn(u) - 6k^2sn^2(u)cn(u)dn^2(u) - \\
& - 3k^4cn^3(u)sn^2(u) + 3k^2cn^3(u)dn^2(u) + 4k^2cn^3(u)dn^3(u) - \\
& - 8k^4sn^2(u)dn(u)cn^3(u) - 8k^2sn^2(u)dn^3(u)cn(u) - 4k^4cn(u)sn^2(u)dn(u) + \\
& + k^4cn^5(u)dn(u) - 3k^2sn^2(u)dn^3(u) + 3k^2cn^2(u)dn^3(u) - \\
& - 6k^4cn^2(u)sn^2(u)dn(u) + 4k^2cn^3(u)dn^3(u) - 8k^4cn^3(u)sn^3(u)dn(u) - \\
& - 8k^2sn^2(u)dn^3(u)cn(u).
\end{aligned}
$$

Fazendo $u = 0$, conforme quadro (1) em 2.3., substituindo na série de Maclaurin obtemos (2.42). $\square$

As séries de potencias podem ter quantos termos queiramos e podemos ver em [7] que estas séries avançam até quinze termos. Poucos são os detalhes conhecidos sobre tais expansões e que, ao que parece, não há nenhuma fórmula de recorrência para tais coeficientes.

### 2.3.5 Fórmulas da Adição

As fórmulas da Adição para as funções elípticas $sn(u)$, $cn(u)$ e $dn(u)$ são:

**i)**

$$sn(u+v) = \frac{sn(u)cn(u)dn(u) + sn(v)cn(v)dn(v)}{1 - k^2sn^2(u)sn^2(v)} \tag{2.45}$$

**ii)**

$$cn(u+v) = \frac{cn(u)cn(v) - sn(u)sn(v)dn(u)dn(v)}{1 - k^2sn^2(u)sn^2(v)} \tag{2.46}$$

**iii)**

$$dn(u+v) = \frac{dn(u)dn(u) - k^2sn(u)sn(v)cn(u)cn(v)}{1 - k^2sn^2(u)sn^2(v)} \tag{2.47}$$

Provas conforme [4]

Prova de (2.45):

Colocamos por brevidade, $s_1 = sn(u)$, $s_2 = sn(v)$, $c_1 = cn(u)$, $c_2 = cn(v)$, $d_1 = dn(u)$, $d_2 = dn(v)$ e $\Delta = 1 - k^2 sn^2(u) sn^2(v)$. Também colocaremos:

$$z = \frac{(s_1 c_2 d_2 + s_2 c_1 d_1)}{\Delta} \tag{2.48}$$

Então, por diferenciação parcial em relação a $u$, conseguimos em (2.48) pela regra do quociente:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\Delta(c_1 d_1 c_2 d_2) + (s_1 c_2 d_2)(2k^2 s_1 c_1 d_1 s_2^2) - \Delta(k^2 c_1^2 s_2 s_1 + s_1 s_2 d_1^2) + (s_2 c_1 d_1)(2k^2 s_1 c_1 d_1 s_2^2)}{\Delta^2}$$

Desse modo,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial u}\Delta^2 &= \Delta\left[(c_1 d_1 c_2 d_2) - s_1 s_2(d_1^2 + k^2 c_1^2)\right] + (2k^2 s_1 c_1 d_1 s_2^2)(s_1 c_2 d_2 + s_2 c_1 d_1) \\
&= (c_1 d_1 c_2 d_2)\left(\Delta + 2k^2 s_1^2 s_2^2\right) - s_1 s_2\left[\Delta(d_1^2 + k^2 c_1^2) - (2k^2 s_2^2 c_1^2 d_1^2)\right] \\
&= (c_1 d_1 c_2 d_2)(\Delta + 2k^2 s_1^2 s_2^2 + k^2 s_1^2 s_2^2) - s_1 s_2[\Delta d_1^2 + \Delta(k^2 c_1^2) - \\
&\quad -(k^2 s_2^2 c_1^2 d_1^2) - (k^2 s_2^2 c_1^2 d_1^2)].
\end{aligned}$$

Lembrando que $\Delta = 1 - k^2 s_1^2 s_2^2$, então: $\Delta + k^2 s_1^2 s_2^2 = 1$. Assim temos:

$$\frac{\partial z}{\partial u}\Delta^2 = (c_1 d_1 c_2 d_2)(1 + k^2 s_1^2 s_2^2) - s_1 s_2\left[d_1^2(\Delta - k^2 s_2^2 c_1^2) + k^2 c_1^2(\Delta - s_2^2 d_1^2)\right]$$

Sabendo ainda que:

$$\Delta - k^2 s_2^2 c_1^2 = 1 - k^2 s_1^2 s_2^2 - k^2 s_2^2 c_1^2 = 1 - k^2 s_2^2(s_1^2 + c_1^2) = d_2^2,$$

e de (2.35) e (2.36) teremos $s_1^2 + c_1^2 = 1$, assim como $d_2^2 + k^2 s_2^2 = 1$. E ainda temos:

$$\Delta - s_2^2 d_1^2 = 1 - k^2 s_1^2 s_2^2 - s_2^2 d_1^2 = 1 - s_2^2(k^2 s_1^2 + d_1^2) = c_2^2.$$

Então, substituindo na última expressão de $\dfrac{\partial z}{\partial u}\Delta^2$ ficamos:

$$\frac{\partial z}{\partial u}\Delta^2 = c_1 d_1 c_2 d_2(1 + k^2 s_1^2 s_2^2) - s_1 s_2(d_1^2 d_2^2 + k^2 c_1^2 c_2^2)$$

Vemos assim que $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ é simétrico em $u$ e $v$, e já que $z$ também é simétrico, segue que $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ será o mesmo como $\dfrac{\partial z}{\partial u}$. Por isso, $z$ satisfaz a equação diferencial parcial $\dfrac{\partial z}{\partial u} = \dfrac{\partial z}{\partial v}$. Consequentemente, $z = f(u+v)$, onde $f(u+v)$ indica alguma função de $u+v$, e, por (2.48), temos:

$$f(u+v) = \frac{(s_1c_2d_2) + (s_2c_1d_1)}{\Delta}$$

Colocando $v = 0$ teremos $f(u) = sn(u)$, e deste modo $f(u+v) = sn(u+v)$, o que prova (2.45).

Prova de (2.46):

Por (2.35) e (2.45) temos:

$$\begin{aligned} cn^2(u+v) &= 1 - sn^2(u+v) \\ &= 1 - \frac{(s_1c_2d_2 + s_2c_1d_1)^2}{(1-k^2s_1^2s_2^2)^2} \\ &= \frac{(1-k^2s_1^2s_2^2)^2 - (s_1c_2d_2 + s_2c_1d_1)^2}{(1-k^2s_1^2s_2^2)^2} \end{aligned}$$

Colocamos do lado direito do numerador $(1-k^2s_1^2s_2^2)^2 = (c_1^2 + s_1^2d_2^2)(c_2^2 + s_2^2d_1^2)$, então a expressão se reduz para:

$$cn^2(u+v) = \frac{(c_1c_2 - s_1s_2d_1d_2)^2}{(1-k^2s_1^2s_2^2)^2},$$

e ao assumir as raízes quadradas de ambos os lados e removendo a ambiguidade de sinal colocando $v = 0$, deduz-se (2.46).

Prova de (2.47):

Por (2.36) e (2.45) temos:

$$\begin{aligned} dn^2(u+v) &= 1 - k^2 sn^2(u+v) \\ &= 1 - \frac{k^2\left(s_1c_2d_2 + s_2c_1d_1\right)^2}{\left(1-k^2s_1^2s_2^2\right)^2} \\ &= \frac{(1-k^2s_1^2s_2^2)^2 - k^2(s_1c_2d_2+s_2c_1d_1)^2}{(1-k^2s_1^2s_2^2)^2} \end{aligned}$$

No lado direito do numerador substituímos:

$$(1-k^2s_1^2s_2^2)^2 = (d_1^2 + k^2s_1^2c_2^2)(d_2^2 + k^2s_2^2c_1^2),$$

e depois de feita uma pequena redução obtém-se (2.47).

Considerando as fórmulas da adição podemos ver que, se tomarmos $k = 0$ em (2.45) obtemos:

$$\begin{aligned} sn(u+v) &= \frac{sn(u)cn(v)dn(v) + sn(v)cn(u)dn(u)}{1-0} \\ &= sn(u)cn(v)dn(v) + sn(v)cn(u)dn(u) \end{aligned}$$

vemos que em $k = 0$, temos $sn(u) = sen(u)$, $cn(u) = cos(u)$ e $dn(u) = 1$, ficamos com:

$$\begin{aligned} sn(u+v) &= sn(u)cn(v)dn(v) + sn(v)cn(u)dn(u) \\ &= sen(u)cos(v) + sen(v)cos(u) \\ &= sen(u+v) \end{aligned}$$

Também em (2.46) e (2.47) obtemos:

$$\begin{aligned} cn(u+v) &= \frac{cn(u)cn(v) - sn(u)dn(v)sn(v)dn(v)}{1-k^2sn^2(u)sn^2(v)} \\ &= cn(u)cn(v) - sn(u)sn(v) \\ &= cos(u+v) \end{aligned}$$

e $dn(u+v) = 1$.

Vemos, desta forma, que estas funções dependem também do parâmetro $k$.

### 2.3.6 Expansões das definições de $sn(u)$, $cn(u)$ e $dn(u)$ para todos os valores reais de $u$ e periodicidade

As fórmulas da adição podem ser usadas para estender as definições das funções elípticas para valores de $u$ além do alcance $-K \leq u \leq K$. Verificaremos que as funções continuam satisfazendo as mesmas identidades como quando fora do intervalo restrito [4].

Colocando $v = K$ em (2.45) e usando a tabela (2.1), obtemos:

$$sn(u+K) = \frac{sn(u)cn(K)dn(K) + sn(K)cn(u)dn(u)}{1 - k^2 sn^2(u)sn^(K)} = \frac{cn(u)dn(u)}{dn^2(u)} = \frac{cn(u)}{dn(u)}$$

Também em (2.46) ficamos com:

$$cn(u+K) = \frac{cn(u)cn(K) - sn(u)sn(K)dn(u)dn(K)}{1 - k^2 sn^2(u)sn^(K)} = \frac{k' sn(u)dn(u)}{dn^2(u)} = -\frac{k' sn(u)}{dn(u)}$$

E também em (2.47) teremos:

$$dn(u+K) = \frac{dn(u)dn(K) - k^2 sn(u)sn(K)cn(u)cn(K)}{1 - k^2 sn^2(u)sn^(K)} = \frac{k' dn(u)}{dn^2(u)} = -\frac{k'}{dn(u)}$$

Ao colocar $u = K$ veremos que

$$sn(2K) = 0 \ , \ cn(2K) = -1 \ , \ dn(2K) = 1 \tag{2.49}$$

Assim como, ao colocar $v = 2K$ em (2.45), (2.46) e (2.47) e usando (2.49) ficamos com:

$$sn(u+2K) = -sn(u) \tag{2.50}$$

$$cn(u+2K) = -cn(u) \tag{2.51}$$

$$dn(u+2K) = dn(u) \tag{2.52}$$

De (2.52) vemos que $dn(u)$ é uma função periódica, com período $2K$. E de (2.50) e (2.51) recolocamos $u$ por $u + 2K$, assim teremos:

$$sn(u + 4K) = sn(u)$$

$$cn(u + 4K) = cn(u)$$

E vemos que $sn(u)$ e $cn(u)$ também são funções periódicas, com período $4K$. Como mostra o gráfico abaixo:

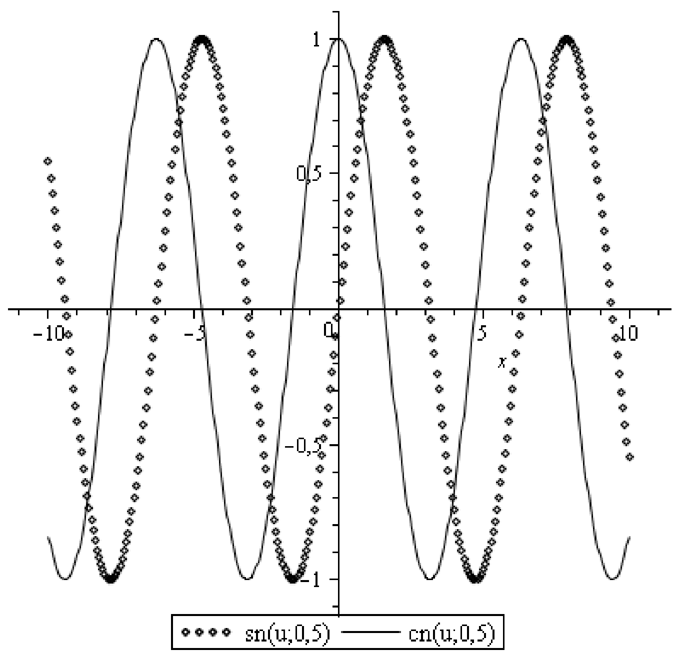


Figura 2.3: Gráfico de $sn(u; 0, 5)$ e $cn(u; 0, 5)$

Veja que nestas funções, como característica distintiva, seu período não é um número absoluto, como nas trigonométricas, pois conforme $K$ varie o período dependerá do valor do módulo. Outra diferença é que essas funções são duplamente periódicas, pois têm, além do período $4K$, um segundo período imaginário, o qual não é foco de estudo neste trabalho.

### 2.3.7 Gráficos

Os gráficos das funções $sn(u)$, $cn(u)$ e $dn(u)$ podem ser esboçados para todos os valores reais de $u$. Indicaremos alguns gráficos[1] tanto para valores positivos, quanto para valores negativos de $u$. É para lembrar que $sn(u)$ é uma função ímpar e que $cn(u)$ e $dn(u)$ são funções pares.

As figuras (2.4) a (2.6), apresentam as três funções elípticas jacobianas quando fazemos o parâmetro $k = 0$.

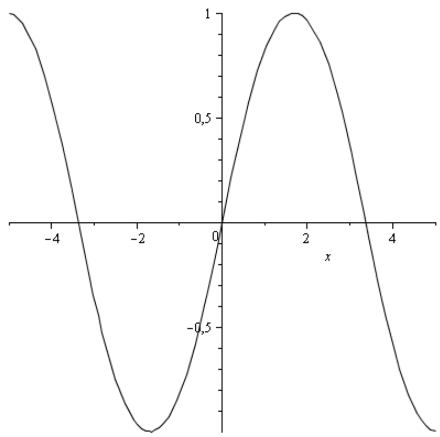


Figura 2.4: $sn(u;0) = sen(u)$

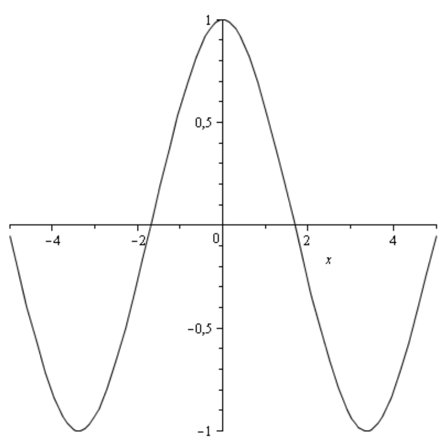


Figura 2.5: $cn(u;0) = cos(u)$

[1]Construídos através do aplicativo maple 13

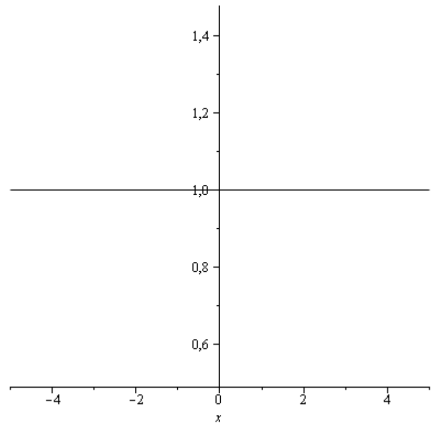


Figura 2.6: $dn(u;0) = 1$

Em concordância com a teoria dessas funções, vemos que para $k = 0$, temos $sn(u,0) = sen(u)$, $cn(u,0) = cos(u)$ e $dn(u,0) = 1$. As duas primeiras funções se degeneram nas conhecidas funções trigonométricas e $dn(u,0)$ é constante.

As figuras (2.7) a (2.9), apresentam as três funções elípticas jacobianas quando fazemos o parâmetro $k = 1$.

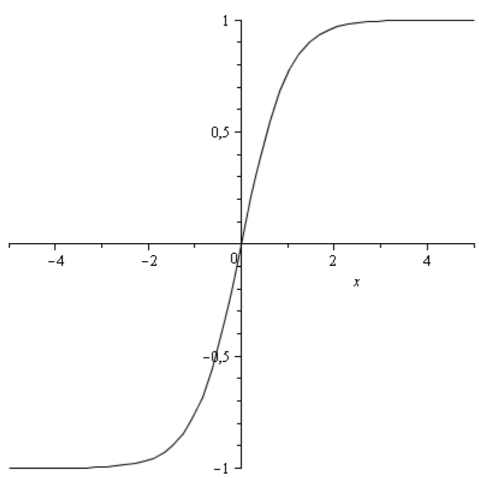


Figura 2.7: $sn(u;1) = tgh(u)$

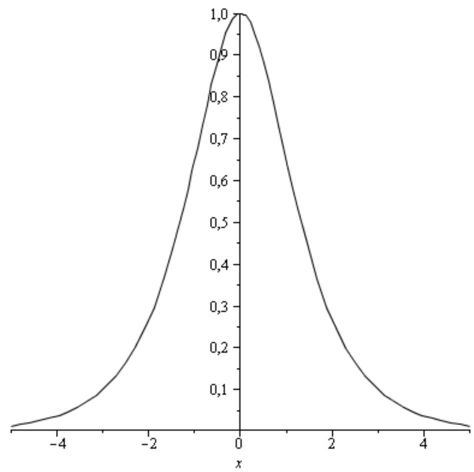


Figura 2.8: $cn(u;1) = sech(u)$

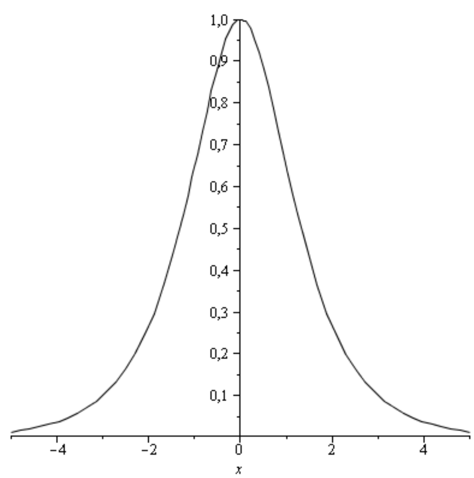


Figura 2.9: $dn(u;1) = sech(u)$

Note que para $k = 1$ temos$sn(u, 1) = tgh(u)$, $cn(u, 1) = dn(u, 1) = sech(u)$, isto é, elas se degeneram nas conhecidas funções hiperbólicas.

As figuras (2.10) à (2.12), apresentam as funções elípticas jacobianas $sn(u)$, $cn(u)$ e $dn(u)$ quando fazemos o parâmetro $k = 0,5$ e $k = 0,8$. Nestes gráficos, a linha contínua representa a função para $k = 0,8$ e a linha pontilhada para $k = 0,5$.

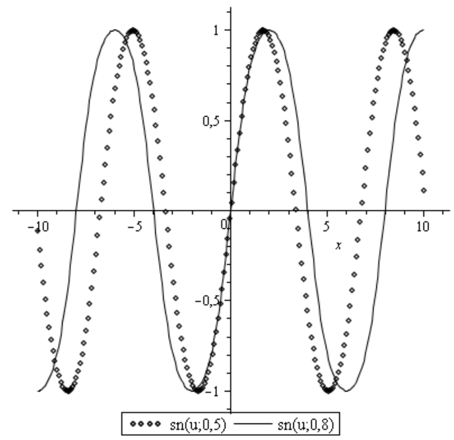


Figura 2.10: $sn(u; 0.5)$ e $sn(u; 0, 8)$

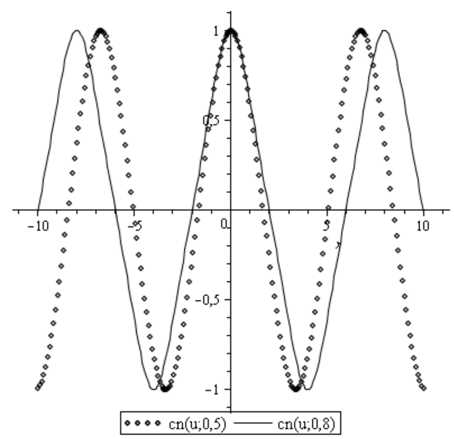


Figura 2.11: $cn(u; 0.5)$ e $cn(u; 0, 8)$

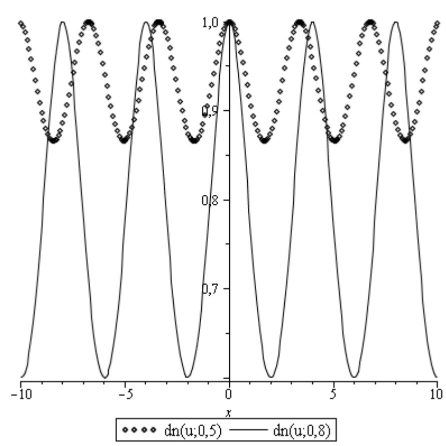


Figura 2.12: $dn(u; 0.5)$ e $dn(u; 0, 8)$

Tome o cuidado de não considerar os gráficos de $sn(u)$ e $cn(u)$ um como meramente o deslocamento do outro, eles não têm os mesmos formatos.
Para visualizar gráficos das outras nove funções elípticas jacobianas veja em [8].

### 2.3.8 Integrais Elípticas

Como já sabemos, originalmente o nome "integral elíptica"foi devido ao problema de retificar a elipse e essa dependia de uma integral expressa por uma das três formas canônicas já vistas em (1.1), (1.2) e (1.3). Veremos tal problema adiante

Se colocarmos $x = sen(\phi)$ e tomarmos o limite inferior de integração para ser zero, essas integrais tomam a forma como em (1.6), (1.7) e (1.8). Além disso, se colocarmos

$$sn(u) = x = sen(\phi),$$

elas tomam as formas:

$$F(\phi, k) = u \tag{2.53}$$

$$E(\phi, k) = E(u) = \int_0^u dn^2(u)du \tag{2.54}$$

$$\Pi(\phi, n, k) = \int_0^u \frac{1}{1 + n\ sn^2(u)}du \tag{2.55}$$

Neste trabalho aplicaremos exemplos em que as formas integradas envolvem (2.53) ou (2.54), ou melhor, integrais estritamente elípticas, que podem ser expressas em termos de integrais de primeira ou de segunda ordem.

Vejamos alguns exemplos de integrais em que os integrandos são funções elípticas.

**Exemplo 2.3.1.** *Calcular* $\int sn(u)du$.

**Solução:** Esta é uma integral elementar, pois fazendo $sn(u) = x$, temos que $u = arcsn(x)$ e $du = \dfrac{1}{\sqrt{(1-k^2x^2)(1-x^2)}}$ tal que:

$$\int sn(u)du = \int \frac{x}{\sqrt{(1-k^2x^2)(1-x^2)}}dx,$$

a partir de sua expressão em termos de $t$, fazendo $t = x^2$ implica que $x = \sqrt{t}$ e $dx = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}dt$ ficamos com:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{(1-k^2t)(1-t)}}dt &= \frac{1}{k}log\left[\sqrt{1-k^2t} - k\sqrt{1-t}\right] \\
&= \frac{1}{k}log\left[dn(u) - k\ cn(u)\right]
\end{aligned}$$

□

**Exemplo 2.3.2.** *Calcular* $\int cn(u)du$.

**Solução:** De (2.41) temos $\dfrac{d}{du}dn(u) = -k^2 sn(u)cn(u)dn(u)$, e de (2.36) temos

$$k\ sn(u) = \sqrt{1-dn^2(u)}.$$

Conforme [9] temos sem dificuldade:

$$\begin{aligned}
\int cn(u)du &= -\frac{1}{k^2}\int \frac{-k^2cn(u)sn(u)}{sn(u)}du \\
&= -\frac{1}{k}\int \frac{-k^2cn(u)sn(u)}{k\ sn(u)}du \quad = \quad -\frac{1}{k}\int \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}dv.
\end{aligned}$$

(Se $v = dn(u)$) a última integral é:

$$\frac{1}{k}arcos(v) = \frac{1}{k}arcos(dn(u)) = \frac{1}{k}arcsen(k\ sn(u))$$

□

**Exemplo 2.3.3.** *Calcular* $\int dn(u)du.$

**Solução:** Podemos fazer $\int \frac{cn(u)dn(u)}{cn(u)}du = \int \frac{d(sen(u)}{\sqrt{1-sn^2(u)}}$ de (2.35) e (2.39). Fazendo $v = sn(u)$ temos que:

$$\int dn(u)du = \int \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}dv = arcsen(sn(u))$$

□

**Exemplo 2.3.4.** *Calcular* $\int sn^2(u)du.$

**Solução:** De (2.36) temos $sn^2(u) = \frac{1-dn^2(u)}{k^2}$, sendo assim

$$\int \frac{1-dn^2(u)}{k^2} = \frac{1}{k^2}[u - E(u)] = \frac{u - E(u)}{k^2}.$$

□

**Exemplo 2.3.5.** *Calcular* $\int cn^2(u)du.$

**Solução:** De (2.37) temos: $cn^2(u) = \frac{dn^2(u) - (k')^2}{k^2}$ então,

$$\begin{aligned}
\int \frac{dn^2(u) - (k')^2}{k^2}du &= \frac{1}{k^2}\left[\int dn^2(u)du - (k')^2 \int du\right] \\
&= \frac{1}{k^2}\left[E(u) - (k')^2 u\right] \\
&= \frac{-(k')^2 u + E(u)}{k^2}
\end{aligned}$$

□

Capítulo 3

# Aplicação

## 3.1 Retificação de um Arco de Elipse

Vejamos como o conhecimento das integrais elípticas nos ajudam para a obtenção de um arco de elipse retificado [10].

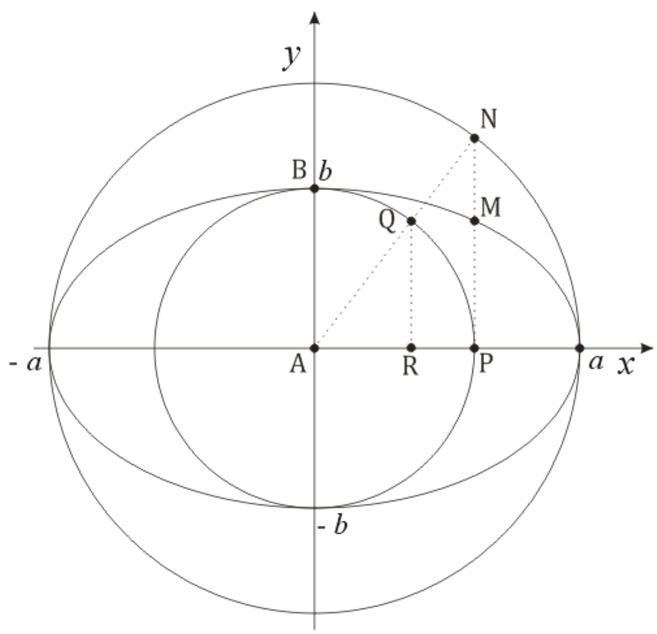


Figura 3.1: Elipse com dois círculos concentricos

Conforme a figura (3.1), seja $BM = s$, o arco que se pretende conhecer, contado a partir da extremidade $B$ do eixo menor. Sabe-se que, traçados os dois círculos concêntricos com a elipse, e cujos raios são os dois semi-eixos $a$ e $b$, um ponto qualquer da elipse $M$, tem a mesma abscissa que o ponto $N$ do círculo exterior, e a mesma ordenada que o ponto $Q$ do círculo interior dado pela sua intersecção com o raio $AN$. Temos, portanto, representando por $x$ e $y$ as coordenadas de $M$, e por $\phi$ o ângulo $B\hat{A}N$,

$$x = asen(\phi)$$

$$y = bcos(\phi)$$

Logo,

$$\begin{aligned}
(ds)^2 &= (dx)^2 + (dy)^2 \\
&= (a^2cos^2(\phi) + b^2sen^2(\phi))d\phi^2 \\
&= \left[a^2(1 - sen^2(\phi)) + b^2sen^2(\phi)\right] d\phi^2 \\
&= \left[a^2 - a^2sen^2(\phi) + b^2sen^2(\phi)\right] d\phi^2 \\
&= \left[a^2 - (a^2 - b^2)sen^2(\phi)\right] d\phi^2 \\
&= a^2 \left[1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} sen^2(\phi)\right] d\phi^2
\end{aligned}$$

Lembrando que $\dfrac{a^2 - b^2}{a^2} = k^2$, e $k$ é a excentricidade da elipse, pois uma elipse com centro na origem é dada por:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Como a excentricidade $k = \varepsilon = \dfrac{c}{a}$ e $a^2 = b^2 + c^2$, então $\varepsilon = \sqrt{1 - \dfrac{b^2}{a^2}}$ onde $k$ é o parâmetro das funções elípticas. Deste modo, $0 \leq k \leq 1$, quando $k = 0$ temos a trigonometria ordinária, e quando $k = 1$ temos as funções hiperbólicas, como já visto. Assim teremos:

$$ds^2 = a^2 \left[1 - k^2sen^2(\phi)\right] d\phi^2,$$

desse modo,

$$ds = a\sqrt{1 - k^2sen^2(\phi)}d\phi.$$

Portanto:

$$s = a \int_0^{\psi} \sqrt{1 - k^2sen^2(\phi)}d(\phi) \tag{3.1}$$

que é a mesma função (1.7), podemos então colocar

$$s = aE(\psi, k)$$

Vemos aqui que a retificação da elipse depende de uma integral elíptica de segunda ordem.

## 3.2 Comprimento da elipse

Por [4] usando, sem perda de generalidade, uma elipse com centro na origem definida por:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

como a excentricidade $k = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$, as coordenadas de qualquer ponto pode ser escrito por:

$$x = asen(\phi)$$

$$y = bcos(\phi)$$

Se chamarmos de $L$ o perímetro e $\psi = \frac{\pi}{2}$, usando (3.1) e pela simetria da elipse nos quatro quadrante, teremos:

$$L = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 sen^2(\phi)} d(\phi), \tag{3.2}$$

e, portanto:

$$L = 4aE(k),$$

onde $k$ é a excentricidade.

Por exemplo, tomando os valores de uma integral elíptica completa $E = E(k)$, a partir do aplicativo maple 13 encontramos, aproximadamente:

| $k$ | $E$ | $L$ |
|---|---|---|
| $0$ | $\frac{\pi}{2}$ | $2\pi a = 6,283185537a$ |
| $\frac{1}{2}$ | $1,467462209$ | $5,869848836a$ |
| $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $1,211056032$ | $4,84424128a$ |
| $1$ | $1$ | $4a$ |

Tabela 3.1: Alguns valores de $E = E(k)$ e de $L$.

## 3.3 Aproximação para o comprimento da elipse

A integral dada em (3.2) é uma integral elíptica que pode ser expressa em termos de funções elementares. Para obter uma fórmula para comprimento da elipse, iremos expandir o integrando através da série binomial, ou seja,

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)x^3}{3!} + ...$$

Fazendo $n = \frac{1}{2}$ e $x = -k^2 sen^2(\phi)$ nesta expressão, obtemos:

$$(1 - k^2 sen^2(\phi))^{\frac{1}{2}} \cong 1 - \frac{k^2 sen^2(\phi)}{2} + \frac{k^4 sen^4(\phi)}{8} - \frac{k^6 sen^6(\phi)}{16} \tag{3.3}$$

Substituindo (3.3) em (3.2) e integrando termo a termo, obtemos a fórmula aproximada para calcular o comprimento de uma elipse em função de sua excentricidade $k$ e do seu eixo maior $a$, isto é,

$$L \cong a\pi \left[ 2 - \frac{k^2}{2} + \frac{3k^4}{32} - \frac{5k^6}{128} \right] \tag{3.4}$$

## 3.4 Comparação dos valores para o comprimento da elipse

Pelas fórmulas utilizadas acima que permitem estimar o comprimento $L$ de uma elipse, fizemos uma tabela comparativa de seus valores:

| | $L$ | $L$ |
|---|---|---|
| $k$ | Pela Integral Elíptica (3.2) | Pela Aproximação (3.4) |
| $0$ | $2a\pi$ | $2a\pi$ |
| $\frac{1}{2}$ | $5,869848836a$ | $5,87016098a$ |
| $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $4,84424128a$ | $5,26577255a$ |
| $1$ | $4a$ | $4,884194829a$ |

Tabela 3.2: Alguns valores para comprimento da elipse

Capítulo 4

# Considerações Finais

Consciente da limitada atenção dada ao estudo das funções elípticas de Jacobi no ensino da matemática no nosso país, esta dissertação sugere uma possível contribuição: servir como fonte de consulta para aqueles que desejam ampliar e dar maior atenção ao assunto. Visto que quase não há literatura sobre este assunto no Brasil, o texto possui uma exposição extremamente simples, através de uma argumentação prática e acima de tudo acessível. Embora algumas demonstrações possam até serem longas, elas utilizam ferramentas usuais da geometria euclidiana e do cálculo diferencial e integral.

Este trabalho sugere possíveis ampliações na abordagem do ensino das funções especiais. Tais propostas são exemplificadas a seguir:

- Efetuar na graduação, mesmo que de maneira breve e simples, a ligação entre as três funções: elíptica, trigonométrica e hiperbólica. Estas três funções são descritas normalmente sem interligação, mas elas podem ser objetos de estudo através das inversas das integrais elípticas. Pois, como vimos, as funções elípticas de Jacobi são funções especiais chamadas "intermediárias", pois podemos obter através do módulo (que depende da excentricidade da elipse), as referidas funções trigonométricas e também as funções hiperbólicas.

- Efetuar a ligação existente entre a elipse e as funções elípticas. Mostrar que a retificação da elipse depende de uma integral elíptica bem como o seu perímetro. Desta maneira podemos explanar este assunto, mesmo que de forma superficial, para qualquer estudante mais curioso. Pois estes podem perguntar: se calculamos o perímetro do círculo como podemos calcular este para a elipse?

As funções elípticas possuem muitas aplicações práticas. Entretanto, neste trabalho calculamos o comprimento da elipse para alguns valores e para fazer uma comparação escolhemos utilizar uma série binomial com apenas quatro termos. Vemos aí a possibilidade de se expandir a série binomial em mais termos para que a aproximação seja melhor em relação à integral elíptica.

Enfim, este assunto é potencialmente mais amplo que a abordagem mostrada aqui e muitas outras aplicações podem ser exploradas com o estudo das funções elípticas de Jacobi.

# Bibliografia


[1] ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. *Cálculo*. Tradução: Claus Ivo Doering. 8. ed. - Porto Alegre: Bookman, 2007.

[2] BARROS, José. *A Brief History of Elliptic Integral Addition Theorems*. Disponível em:¡ http://www.rose-hulman.edu/mathjournal/archives/2009/vol10-n2/paper2/v10n2-2pd.pdf¿ acesso em: 02 de jan. de 2013.

[3] BOYER, Carl Benjamin. *História da Matemática*. 1906. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blucher, Ed. Da Universidade de São Paulo, 1974.

[4] BOWMAN, Frank, *Introduction to elliptic functions with applications*, Dover publications, NY, (1961).

[5] DIXON, Alfred Cardew, *The Elementary Properties of the Elliptic Functions*, with examples. Macmillan & Co. NY, 1894

[6] EVES, Howard. *Introdução à História da Matemática*. Tradução: Hygino H. Domingues. -Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004.

[7] FILHO, A. Ribeiro; VASCONCELOS, D. S.. *Introdução ao Cálculo das Funções Elípticas Jacobianas*. UFBA, 1994

[8] FILHO, A. Ribeiro; VASCONCELOS, D. S.. *Reminiscências e Calculo de Algumas Funções e Integrais Elípticas*. Artigo 3, Revista Matemática Universitária Nº 15, SBM, 1993.

[9] HANCOCK, Harris. *Elliptic Integrals*. New York: Wiley, 1917

[10] PIEDADE, Antonio Zeferino Candido da. *Integraes e Funcções Ellipticas*. Dissertação inaugural para o ato de conclusões magnas na Faculdade de Mathematica. COIMBRA: imprensa da universidade, Portugal, 1875.