



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CCE - DMA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL
EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL



O Princípio de Cavalieri e o volume da esfera

GREYCE CONTINI PILATI
Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Martins

Maringá-PR
2015

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL - PROFMAT

O Princípio de Cavalieri e o volume da esfera

GREYCE CONTINI PILATI
Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Martins

Maringá-PR
2015

O Princípio de Cavalieri e o volume da esfera

GREYCE CONTINI PILATI

Trabalho de Conclusão de Curso, na forma de dissertação, apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.
Área de concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Martins

Maringá

2015

GREYCE CONTINI PILATI

O PRINCÍPIO DE CAVALIERI E O VOLUME DA ESFERA

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:


Prof. Dr. Rodrigo Martins

DMA/Universidade Estadual de Maringá (Presidente)



Prof. Dra. Irene Magalhães Craveiro

Universidade Federal da Grande Dourados – Dourados - MS



Prof. Dra. Lilián Akemi Kato

DMA/Universidade Estadual de Maringá

Aprovada em: 5 de fevereiro de 2015.

Local de defesa: Auditório do DMA, Bloco F67, campus da Universidade Estadual de Maringá.

Dedico este trabalho a minha família que me apoiou neste período e principalmente ao meu esposo Alex Fabiano Pilati, pois sem seu companheirismo nada disso seria possível.

Agradecimentos

Agradeço a Deus pela oportunidade da realização de um sonho antigo.

A meu pai por ser um grande exemplo de empenho, superação e um incentivador constante.

A meu esposo e meus filhos que sofreram com a minha ausência e me apoiaram sempre.

A todos os colegas do mestrado pelo companherismo.

A todos os professores do Programa, por sua dedicação, especialmente ao professor Dr. Rodrigo Martins, pela orientação deste trabalho.

A CAPES, pelo apoio financeiro.

Ao governo do Estado do Paraná, pela licença concedida para cursar o segundo ano do mestrado.

“O aumento do conhecimento é como uma esfera dilatando-se no espaço: quanto maior a nossa compreensão, maior o nosso contato com o desconhecido. ”

Blaise Pascal.

Resumo

Neste trabalho, estimamos o volume da esfera por aproximações por de somas de Riemann utilizando cilindros, prismas de base quadrada e retangular e com a inscrição de sólidos geométricos na esfera de raio r . Mostramos a existência de um prisma de base quadrada cujo volume é igual ao volume da esfera, utilizando a quadratura do círculo. Além disso, demonstramos o princípio de Cavalieri para áreas e volumes e calculamos o volume da esfera tal como é abordado nos livros didáticos, que utilizam esse princípio como recurso.

Palavras chave: Espaço Euclidiano, Somas de Riemann, Sólidos de Platão.

Abstract

In this work, we estimate the volume of the sphere by using approximations of Riemann sums using cylinders, prisms of square and rectangular base and the inscribed of geometric solids in sphere of radius r . We showed the existence of a prism with square base whose volume is equal to the volume of the sphere, using the quadrature the circle. In addition demonstrate the principle of Cavalieri for areas and volumes and we calculate the volume of the sphere as is discussed in the textbooks, which use this principle as a resource.

Key words: Euclidean Space, Riemann sums, Sólids of Plato.

LISTA DE FIGURAS

2.1	Superfície esférica S	4
2.2	Interseção da reta r com o plano $z = 0$ e S	8
2.3	Interseção de π e S quando $d(C, \pi) < \rho$	9
2.4	S_1 e S_2 secantes.	11
2.5	S_1 e S_2 tangentes.	11
2.6	S_1 e S_2 disjuntas.	11
3.1	Partição de $[a, b]$ em n intervalos.	13
3.2	Partição de $[a, b]$ com $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$	13
3.3	Região A limitada por $x = a$, $x = b$, $y = 0$ e pelo gráfico de $y = f(x)$	15
3.4	Aproximação da área da região A por falta.	16
3.5	Aproximação da área da região A por excesso.	16
3.6	Sólido de base R e altura $f(c_i, d_i)$	17
4.1	Aproximação de metade da esfera com cilindros.	22
4.2	Representação do volume de metade da esfera com cilindros.	23
4.3	Interseção de $\frac{1}{4}$ do círculo maior da esfera e dos 25 quadrados de área $\frac{1}{25}$	25
4.4	Representação do volume de $\frac{1}{8}$ da esfera com prismas de base quadrada.	26
4.5	Interseção de $\frac{1}{4}$ do círculo maior da esfera e dos retângulos de área $\frac{1}{5n}$	28
4.6	Representação do volume de $\frac{1}{8}$ da esfera com prismas de base retangular para $n = 12$	30
4.7	Interseção de $\frac{1}{4}$ do círculo maior da esfera e dos quadrados e retângulos bases dos prismas.	32
5.1	Tetraedro, cubo e dodecaedro.	35
5.2	Tetraedro inscrito na esfera.	36
5.3	Tetraedro inscrito na esfera.	37
5.4	Cubo inscrito na esfera.	37
5.5	Cubo inscrito na esfera.	38
5.6	Dodecaedro inscrito na esfera.	39

5.7	Pirâmide com base pentagonal e face do dodecaedro.	39
5.8	Dodecaedro inscrito na esfera.	40
5.9	Icosaedro inscrito na esfera.	41
5.10	Pirâmide com base triangular.	42
5.11	Regiões R e S.	43
5.12	Interseção do plano β com os sólidos S e G.	45
5.13	Sólido G e os dois cones equiláteros.	45
5.14	Coroa circular e círculo de raio s	46
6.1	Esfera e cubo com volumes iguais.	47
6.2	Círculo Γ e triângulo ABC.	48
6.3	Paralelogramo ABDE.	48
6.4	Retângulo ABFG.	48
6.5	Semicircunferência Ω e triângulo retângulo AFH.	49
6.6	Quadrado BIHJ.	49
6.7	Esfera de raio r e volume V_e	50
6.8	Cone com área da base igual a πr^2 e altura $4r$	50
6.9	Pirâmide com área da base igual a πr^2 e altura $4r$	51

SUMÁRIO

1	Introdução	1
2	Preliminares	3
2.1	Espaço Euclidiano E^3	3
2.2	Noção intuitiva de área e volume	4
2.3	A superfície esférica	4
2.3.1	Interseção e posição relativa	7
3	A soma de Riemann	13
3.1	Partição de um intervalo	13
3.2	A integral de Riemann	14
3.2.1	Interpretação geométrica	15
3.3	Cálculo da área da circunferência por somas de Riemann	17
3.4	Teorema do valor médio para integrais	18
3.5	Teorema fundamental do cálculo	19
4	Aproximações do volume da esfera	22
4.1	Cálculo do volume da esfera com cilindros	22
4.2	Cálculo do volume da esfera com prismas	24
5	Comparações do volume da esfera com o de outros sólidos	35
5.1	Sólidos inscritos na esfera de raio r	35
5.2	O Princípio de Cavalieri e o volume da esfera	42
6	A quadratura do círculo e o volume da esfera	47
6.1	A quadratura do círculo	48
6.2	O volume da esfera	50
7	Considerações Finais	52
	Referências Bibliográficas	54

Introdução

Desde muito cedo construímos uma noção intuitiva de volume (que é o espaço ocupado pelo objeto). Primeiramente comparando objetos entre si, verificando qual deles ocupa mais espaço. Depois, tentando compará-lo com a unidade padrão: o cubo de aresta 1, (que tem volume 1 por definição).

Essa ideia intuitiva foi utilizada para o cálculo do volume de vários objetos, mas pareceu não ser eficaz quando o cálculo envolvia objetos arredondados e circulares, por exemplo, a esfera.

Existem maneiras simples de verificar volumes desses corpos, como mergulhá-los em recipientes cheios de água e calcular o líquido transbordado. Mas e se o objeto em questão for de um material permeável, ou grandioso o bastante que não caiba em um recipiente? Esse método se tornaria inviável.

Como prever a construção de um objeto esférico, suas dimensões? Para isso é preciso calcular o volume da esfera de forma geral, sistemática e eficiente. É no Ensino Médio que o volume da esfera e de outros corpos redondos são estudados mais formalmente e, de modo geral, os livros trazem a demonstração da fórmula do volume da esfera baseada no Princípio de Cavalieri. No entanto, um questionamento que podemos fazer é: Esta é a melhor forma de aprendê-lo?

É nesse contexto que figura este estudo, apresentar vários métodos que nos possibilitam mensurar o volume da esfera de forma eficaz, geral e sistemática, utilizando para tanto comparações com sólidos de volume já conhecidos como prismas, cubo, tetraedro, dodecaedro, cilindros, além do Princípio de Cavalieri.

No capítulo 2 abordaremos noções preliminares que subsidiarão o estudo sobre o volume da esfera. Iniciamos com a definição de espaço euclidiano, definimos intuitivamente área e volume, estudamos as equações geral e reduzida da superfície esférica, analisando as interseções dela com reta, plano e outra esfera.

Na sequência, fazemos o estudo de partição de um intervalo e da integral de Riemann, o que além de nos permitir uma interpretação geométrica, nos dá condições para realizar aproximações dos cálculos de área de figuras planas e de volume de sólidos geométricos obtidos

por somas infinitesimais, associando-os também às integrais simples e duplas, respectivamente. Com base nesses dados, calculamos a área do círculo com somas de Riemann. Aqui, ainda demonstramos o teorema fundamental do cálculo para integrais.

De posse dessas ferramentas, no capítulo 4, passamos ao estudo das aproximações do volume da esfera, com o objetivo de apresentar vários métodos de como fazê-lo. Como a área da circunferência já foi calculada anteriormente, realizamos a primeira aproximação utilizando a soma infinitesimal do volume de cilindros. Feito isso, obtemos também uma aproximação do volume da esfera com prismas de base quadrada, depois com prismas de base retangular e, ainda utilizando ambos, na tentativa de uma melhor aproximação do volume da esfera de raio 1.

No capítulo seguinte, efetuamos cálculos dos volumes do cubo, do tetraedro e do dodecaedro inscritos na esfera de raio r , comparando-os com o volume dessa esfera. Além disso, nesse capítulo, realizamos a demonstração do teorema de Cavalieri, mais conhecido como um Princípio, que é apresentado nos livros didáticos, porém não demonstrado nesse nível de ensino. E, com base nesse princípio, demonstramos o volume da esfera tal como é desenvolvido nos livros de Ensino Médio, na educação básica.

Para finalizar, no capítulo 6, abordamos um dos problemas clássicos da Matemática que é a quadratura do círculo que nos dá respaldo para mostrar a existência de um prisma de base quadrada, cujo volume pode ser calculado de maneira mais simplificada, com volume igual ao volume da esfera.

Tendo em vista todas as formas de aproximações do volume da esfera estudadas somos levados a acreditar que a demonstração utilizando o Princípio de Cavalieri, no nível médio, é a mais acessível para os alunos, pois baseia-se no cálculo do volume de um cilindro e de dois cones, além do uso do Teorema de Pitágoras e do cálculo da área de círculos, conteúdos estes, que são estudados anteriormente ao do volume da esfera, como veremos ao longo do trabalho.

Nesse contexto, nossas conclusões apontam que em consideração ao que foi estudado, entendemos que o professor deve oportunizar a compreensão de demonstrações matemáticas, pois conhecer o processo de construção do conhecimento desperta o interesse do educando em investigar, planejar, criar e testar hipóteses e analisar resultados, provocando uma visão diferenciada dos saberes desenvolvidos ao longo dos séculos.

Preliminares

Neste capítulo, abordaremos alguns conceitos que são necessários para um aprofundamento sobre o estudo da superfície esférica e que são primordiais para o estudo do cálculo do volume da esfera por aproximações ou comparações com outros sólidos. Não temos a pretensão de definir todos os conceitos, por exemplo funções, derivada, etc. Manteremos o foco apenas nos conceitos que contam, de certa forma, o percurso do trabalho, isto é, o desenvolvimento do conceito de volume até a mensuração do volume da esfera. Com isso, esperamos explicar ao leitor os motivos que nos levam a definir integral e não definir derivada, por exemplo.

2.1 Espaço Euclidiano E^3

O espaço Euclidiano E^3 é um espaço vetorial real tridimensional munido de um produto interno. O espaço \mathbb{R}^3 é um modelo desse tipo de espaço vetorial com o produto interno usual. Sejam $u = (x_1, x_2, x_3), v = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$, temos

$$u \cdot v = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3.$$

Na verdade, esta é a representação do nosso mundo real com as três dimensões (altura, largura e comprimento) com uma escala em cada dimensão dada pelos números reais na qual o produto interno nos permite calcular comprimento, ângulo, etc., em função dessa escala.

Nesse ambiente, temos a validade do Teorema de Pitágoras, portanto, a distância entre os pontos $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $B = (x_2, y_2, z_2)$ é dada por:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

para a qual vale a **desigualdade triangular**:

$$d(A, B) \leq d(A, X) + d(X, B).$$

Definição 2.1.1 *Distância de um ponto A a um subconjunto de E^3 é a menor distância de A aos pontos do subconjunto.*

2.2 Noção intuitiva de área e volume

Intuitivamente, a área de uma superfície plana é a quantidade de quadrados de uma unidade de área que cabem nessa superfície. Quando esses quadrados são insuficientes para determinar a superfície podemos usar uma porção menor desse quadrado unitário ($\frac{1}{100}$ de área do quadrado inicial, por exemplo) para continuar o preenchimento e assim sucessivamente, até que possamos determiná-la. Esse contexto nos remete ao cálculo infinitesimal utilizado por Arquimedes no século X e desenvolvido nas somas de Riemann.

Esse raciocínio também pode ser adotado para o cálculo de volume dos sólidos, basta tomar como unidade padrão um cubo de aresta 1 (com 1 unidade de volume) e tentar preencher o objeto. O volume restante poderá ser preenchido com cubos que representam frações do cubo inicial.

Assim, uma vez conhecida a área de uma superfície ou o volume de um sólido estes podem ser usados como novos modelos de comparação.

2.3 A superfície esférica

Durante centenas de anos, a observação da Lua e dos planetas próximos da Terra tem instigado a curiosidade dos homens. Como dimensionar esses astros sem tocá-los? Serão eles esferas perfeitas? Arquimedes, no século X, já estudava um método para o cálculo do volume de esferas.

Este é um sólido geométrico que, segundo os gregos antigos, representa equilíbrio e perfeição. Identificada em objetos do cotidiano ou confeccionados pelo homem ainda provoca a curiosidade e o fascínio diante de tamanha beleza e perfeição. Neste capítulo faremos um estudo sobre essa superfície.

Definição 2.3.1 *Superfície esférica S de centro C e raio ρ é o lugar geométrico dos pontos X de E^3 tais que $d(X, C) = \rho$.*

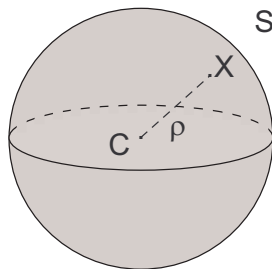


Figura 2.1: Superfície esférica S .

Notação: Sempre que dissermos superfície esférica S considere centro C e raio ρ .

Observação 2.3.2 No sistema ortogonal, seja $C = (x_0, y_0, z_0)$ e $X = (x, y, z)$, então $X \in S$ se e somente se

$$S : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \rho^2 \quad (2.1) \quad (\text{Equação reduzida da esfera})$$

pois no espaço euclidiano essa é a definição de distância entre dois pontos. Dessa forma, expandindo (2.1) temos:

$$S : x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0 \quad (\text{Equação geral da esfera})$$

onde $a = -2x_0$, $b = -2y_0$, $c = -2z_0$ e $d = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - \rho^2$.

Proposição 2.3.3 A equação $S : x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$ descreve uma superfície esférica se e somente se

$$a^2 + b^2 + c^2 - 4d \geq 0$$

e nesse caso: $C = (-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2})$ e $\rho = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 4d}}{2}$.

Demonstração: Pelo completamento de quadrados, temos:

$$\begin{aligned} x^2 + ax &= x^2 + \frac{2ax}{2} + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \\ y^2 + by &= \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

e

$$z^2 + cz = \left(z + \frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2.$$

Assim, reordenando a equação geral:

$$\begin{aligned} S : x^2 + ax + y^2 + by + z^2 + cz &= -d \implies \\ S : \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{c}{2}\right)^2 &= -d + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 \implies \\ S : \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{c}{2}\right)^2 &= -d + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} \implies \\ S : \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{c}{2}\right)^2 &= \frac{a^2 + b^2 + c^2 - 4d}{4}. \quad (2.2) \end{aligned}$$

A equação (2.2) tem solução se, e somente se, $a^2 + b^2 + c^2 - 4d \geq 0$.

Agora, comparando a equação (2.2) com a equação reduzida da superfície esférica, temos

$$\rho = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 4d}}{2} \quad \text{com } C = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2}\right).$$

■

Corolário 2.3.4 *Cada superfície esférica possui uma única equação geral.*

Demonstração: Suponhamos, pela proposição anterior, temos que

$$x^2 + y^2 + z^2 + a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

e

$$x^2 + y^2 + z^2 + a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

são equações da mesma superfície esférica. Assim,

$$C = \left(-\frac{a_1}{2}, -\frac{b_1}{2}, -\frac{c_1}{2}\right) = \left(-\frac{a_2}{2}, -\frac{b_2}{2}, -\frac{c_2}{2}\right)$$

e

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 - 4d_1}}{2} = \frac{\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 - 4d_2}}{2} \\ &\implies a_1 = a_2, b_1 = b_2, c_1 = c_2 \text{ e } d_1 = d_2. \end{aligned}$$

■

Definição 2.3.5 *Seja S uma superfície esférica, dizemos que P é um ponto:*

- Interior a S se $d(P, C) < \rho$;
- Exterior a S se $d(P, C) > \rho$.

Um conjunto de pontos é interior se todos os seus pontos são interiores a S .

Um conjunto de pontos é exterior se todos os seus pontos são exteriores a S .

Proposição 2.3.6 *Se A é interior e B é exterior à superfície esférica S , então S contém um ponto pertencente ao segmento AB .*

Demonstração: Sejam $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $B = (x_2, y_2, z_2) \in E^3$ e S uma superfície esférica de centro $C = (0, 0, 0)$. Temos que a equação geral de S é dada por:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2.$$

A equação da reta r , que contém os pontos A e B , é dada pelos pontos $X = (x, y, z)$, tais que $r = tA + (1 - t)B$, $t \in \mathbb{R}$, ou seja, $X = (x_2 + (x_1 - x_2)t, y_2 + (y_1 - y_2)t, z_2 + (z_1 - z_2)t)$. Então $X \in r \cap S$ se e somente

$$d^2(X, C) - \rho^2 = 0 \implies$$

$$(x_2 + (x_1 - x_2)t)^2 + (y_2 + (y_1 - y_2)t)^2 + (z_2 + (z_1 - z_2)t)^2 - \rho^2 = 0.$$

O primeiro membro dessa equação é um trinômio do segundo grau, onde:

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 > 0.$$

Vamos definir $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\varphi(t) = (x_2 + (x_1 - x_2)t)^2 + (y_2 + (y_1 - y_2)t)^2 + (z_2 + (z_1 - z_2)t)^2 - \rho^2$$

Observe que para $t = 0$, temos que $X = B$ e:

$$\varphi(0) = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - \rho^2 = d^2(B, C) - \rho^2 > 0$$

pois B é exterior a S.

Para $t = 1$, temos que $X = A$ e:

$$\varphi(1) = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - \rho^2 = d^2(A, C) - \rho^2 < 0$$

pois A é interior a S.

Temos que $\varphi(1) < 0 < \varphi(0)$, então segue do Teorema do Valor Intermediário, ver em [5], que existe $t \in (0, 1)$ tal que $\varphi(t) = 0$.

Como o grau de $\varphi(t)$ é igual a 2 e $\varphi(t)$ tem uma raiz real, então $\varphi(t)$ possui duas raízes reais distintas. Logo, $X \in S$ e X pertence ao segmento AB. ■

2.3.1 Interseção e posição relativa

Proposição 2.3.7 *Sejam r uma reta e S uma superfície esférica.*

a) *Se $d(C, r) > \rho$ então r é exterior a S e $r \cap S = \emptyset$.*

b) *Se $d(C, r) = \rho$, então $r \cap S = \{T\}$, ou seja, r é tangente à S e T é a projeção ortogonal de C sobre r .*

c) *Se $d(C, r) < \rho$, então $r \cap S = \{T_1, T_2\}$, ou seja, r é secante à S e o ponto médio do segmento T_1T_2 é a projeção ortogonal de C sobre r . Neste caso os pontos interiores do segmento AB são interiores a S e os pontos exteriores ao segmento AB também são exteriores a S .*

Demonstração:

a) Como $d(C, r)$ é a menor das distâncias do ponto C a todos os pontos da reta r, temos que para um ponto X de r,

$$d(C, X) \geq d(C, r) > \rho \Rightarrow d(C, X) > \rho.$$

Portanto, X é exterior a S .

b) e c) Sem perda de generalidade, considere S na origem, assim a equação geral de S é dada por:

$$S : x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2.$$

Seja $Q = (x_1, y_1, 0)$ o ponto de interseção de r com o plano $z = 0$ e $r : X = (x_1, y_1, t), \forall t \in \mathbb{R}$. Então $X \in r \cap S$ se e somente se

$$x_1^2 + y_1^2 + t^2 - \rho^2 = 0. \quad (2.3)$$

Como o segmento CQ é perpendicular a r , pelo Teorema de Pitágoras, temos:

$$d^2(C, r) = d^2(C, Q) = x_1^2 + y_1^2. \quad (2.4)$$

Substituindo (2.4) em (2.3), temos:

$$x_1^2 + y_1^2 + t^2 - \rho^2 = 0 \implies d^2(C, r) + t^2 - \rho^2 = 0 \implies t^2 = \rho^2 - d^2(C, r).$$

Assim, temos dois casos a considerar:

- Se $d(C, r) = \rho \implies t = 0$ e $r \cap S = \{Q\}$.

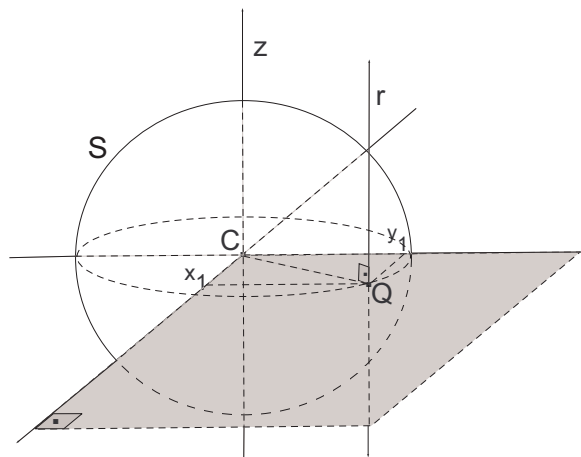


Figura 2.2: Interseção da reta r com o plano $z = 0$ e S .

- Se $d(C, r) < \rho \implies t = \pm \sqrt{\rho^2 - d^2(C, r)}$, ou seja, existem t_1, t_2 (simétricos em relação à Q) e $r \cap S = \{(x_1, y_1, t_1), (x_1, y_1, t_2)\}$. Logo Q é ponto médio do segmento AB e interno de S .

■

Proposição 2.3.8 *Sejam π um plano e S uma superfície esférica.*

a) Se $d(C, \pi) > \rho \implies \pi \cap S = \emptyset$, ou seja, π é exterior a S .

b) Se $d(C, \pi) = \rho \implies \pi \cap S = \{X\}$, ou seja, π é tangente a S e X é o ponto de tangência.

c) Se $d(C, \pi) < \rho$ então $\pi \cap S$ é uma circunferência de raio $\sigma = \sqrt{\rho^2 - d^2(C, \pi)}$ contida em π , cujo centro é a projeção ortogonal de C sobre π , ou seja, o plano π é secante a S .

Demonstração:

a) Se $X \in \pi \implies d(C, X) \geq d(C, \pi)$. Se $d(C, \pi) > \rho \implies d(C, X) > \rho$, ou seja, $\forall X \in \pi$ $d(C, X) > \rho \implies X \notin S \implies \pi \cap S = \emptyset$.

b) e c) Sabemos pelo Teorema de Pitágoras que:

- Se $d(C, \pi) = \rho$ então existe $X \in \pi$ tal que $d(C, X) = \rho$ e $\forall Y \in \pi - \{X\}$ temos que $d^2(C, Y) = d^2(C, X) + d^2(X, Y) = \rho^2 + d^2(X, Y)$. Assim $d(C, Y) > \rho \iff d(X, Y) > 0$.

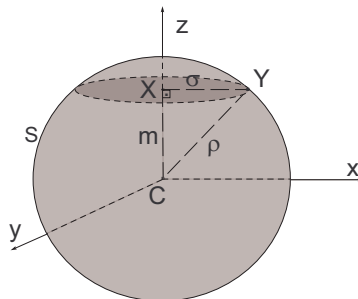


Figura 2.3: Interseção de π e S quando $d(C, \pi) < \rho$.

- Se $d(C, \pi) < \rho$ então existe $Y \in \pi$ tal que $d(C, Y) = \rho$. Assim, temos que $d^2(C, Y) = d^2(X, Y) + d^2(C, \pi) \implies d^2(X, Y) + d^2(C, \pi) = \rho^2 \implies d(X, Y) = \sqrt{\rho^2 - d^2(C, \pi)} \implies \sigma = \sqrt{\rho^2 - d^2(C, \pi)}$, onde σ é o raio da circunferência de centro X , contida em π .

■

Corolário 2.3.9 *Seja T um ponto da superfície esférica S . O plano π que contém T e é perpendicular ao segmento CT é o único plano tangente a S em T .*

Demonstração: Considere T a projeção ortogonal de C sobre π . Logo

$$d(C, \pi) = d(C, T) = \rho.$$

Portanto π é tangente a S em T .

Para a unicidade, suponha que π' é um plano tangente a S em T , então $\pi' \cap S = \{T\}$. Como

T é uma projeção ortogonal de C sobre π' , então \overline{CT} é um segmento perpendicular a π' . Como π e π' contêm T e são ortogonais a \overline{CT} então $\pi = \pi'$. ■

No espaço E^3 para determinar uma circunferência, além do centro e raio, precisamos de mais informações e uma delas pode ser o plano que a contém.

Sabemos, pela proposição anterior, que se π é um plano secante a S, temos que $\pi \cap S$ é uma circunferência de centro Q (projeção ortogonal de C sobre π) e raio $\sigma = \sqrt{\rho^2 - d(C, \pi)^2}$. Vale a recíproca: toda circunferência pode ser vista como a interseção do plano que a contém com uma superfície esférica e existem infinitas delas. Em particular, aquela que tem centro e raio iguais aos da circunferência é a esfera menor de todas, pois qualquer outra menor que ela não conteria a circunferência.

Sejam duas superfícies esféricas distintas

$S_1 : x^2 + y^2 + z^2 + a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ com centro C_1 e raio ρ_1 e

$S_2 : x^2 + y^2 + z^2 + a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ com centro C_2 e raio ρ_2 .

Suponha, sem perda de generalidade, $\rho_2 > \rho_1$ e $\delta = d(C_1, C_2)$.

A interseção $S_1 \cap S_2$ representada pelo sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 + a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

que é equivalente a

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ (a_2 - a_1)x + (b_2 - b_1)y + (c_2 - c_1)z + d_2 - d_1 = 0 \end{cases}$$

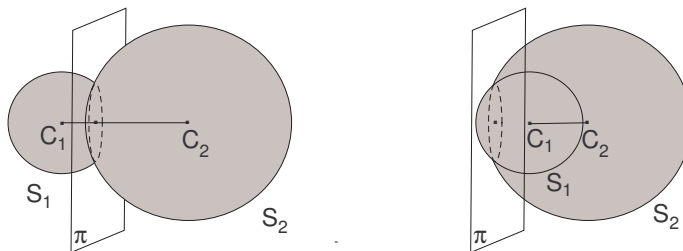
ou ainda,

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \\ (a_2 - a_1)x + (b_2 - b_1)y + (c_2 - c_1)z + d_2 - d_1 = 0 \end{cases}.$$

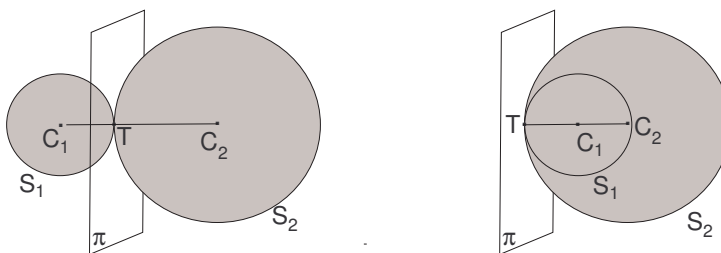
Se $C_1 = C_2$ então $\rho_1 \neq \rho_2$, pois S_1 e S_2 são superfícies esféricas distintas. Assim temos $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, $c_1 = c_2$ e $d_1 \neq d_2$ e um sistema impossível. Portanto, duas superfícies esféricas concêntricas distintas têm interseção vazia.

Se $C_1 \neq C_2$, temos $d(C_1, C_2) > 0$ e a equação $(a_2 - a_1)x + (b_2 - b_1)y + (c_2 - c_1)z + d_2 - d_1 = 0$ é a equação geral de um plano π , chamado de **plano radical** das superfícies esféricas S_1 e S_2 (não concêntricas). Portanto, $S_1 \cap S_2 = S_1 \cap \pi = S_2 \cap \pi$ e nessa situação há dois casos a considerar:

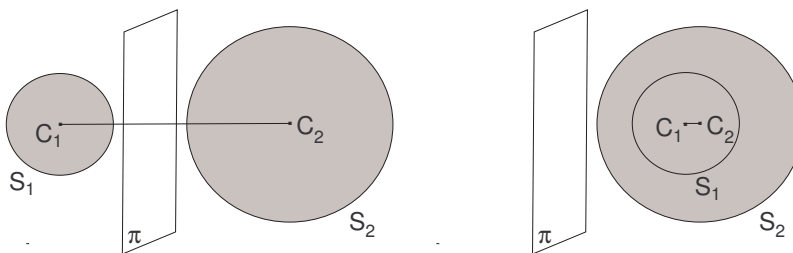
- $S_1 \cap S_2$ é uma circunferência Γ contida no plano radical cujo centro é $\overline{C_1 C_2} \cap \pi$. Neste caso, S_1 e S_2 são secantes.

Figura 2.4: S_1 e S_2 secantes.

- $S_1 \cap S_2 = \{T\}$ tal que $T = \overline{C_1 C_2} \cap \pi$, ou seja, T é o ponto de tangência das superfícies esféricas.

Figura 2.5: S_1 e S_2 tangentes.

No caso $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, S_1 e S_2 são disjuntas e π é exterior às duas superfícies esféricas.

Figura 2.6: S_1 e S_2 disjuntas.

Ainda podemos concluir que

$$d(C_1, \pi) < \rho_1 \iff d(C_2, \pi) < \rho_2 \implies S_1 \text{ e } S_2 \text{ são secantes.}$$

$$d(C_1, \pi) = \rho_1 \iff d(C_2, \pi) = \rho_2 \implies S_1 \text{ e } S_2 \text{ são tangentes.}$$

$d(C_1, \pi) > \rho_1 \iff d(C_2, \pi) > \rho_2 \implies S_1$ e S_2 são disjuntas.

Assim, para obter a interseção de duas superfícies esféricas basta trabalhar com uma delas e o plano π .

A soma de Riemann

As somas de Riemann abordam conceitos de divisões infinitesimais de áreas e volumes. No Brasil, esse conteúdo fazia parte do currículo do nível médio até a Reforma Capanema (1961). Estudar essas divisões infinitesimais no Ensino Médio auxiliaria o aluno na compreensão de conceitos de limite e séries, minimizando dificuldades no entendimento de conceitos que fogem da intuição e do senso comum.

3.1 Partição de um intervalo

Seja $[a, b]$ um intervalo. Uma partição de $[a, b]$ é um conjunto finito $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ onde $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$, que divide em n intervalos $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

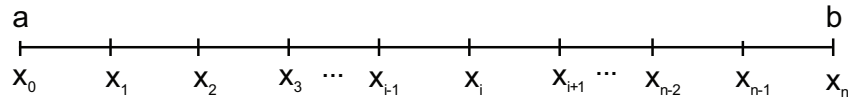


Figura 3.1: Partição de $[a, b]$ em n intervalos.

Os intervalos não precisam ser necessariamente iguais, mas aqui os consideraremos assim. A amplitude de cada intervalo é dada por $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Considere $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, para cada índice $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$.

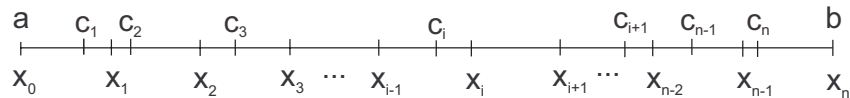


Figura 3.2: Partição de $[a, b]$ com $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

Seja f uma função definida em $[a, b]$. O número representado por

$$\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = f(c_1) \Delta x_1 + f(c_2) \Delta x_2 + \dots + f(c_n) \Delta x_n$$

denomina-se soma de Riemann de f , relativa à partição \mathcal{P} e aos pontos $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

Se $f(c_i) > 0$, $f(c_i)\Delta x_i$ será a área do retângulo determinado pelas retas $x = x_{i-1}$, $x = x_i$, $y = 0$ e $y = f(c_i)$. Se $f(c_i) < 0$, a área do retângulo será $-f(c_i)\Delta x_i$.

A soma de Riemann geometricamente é a diferença da soma das áreas dos retângulos formados acima do eixo x e a soma das áreas dos retângulos formados abaixo do eixo x .

3.2 A integral de Riemann

Seja f uma função em $[a, b]$. Como toda função contínua é integrável, ver [5], se existir L tal que dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, tal que

$|\sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i - L| < \varepsilon$ e $0 < \Delta x_i < \delta$, para toda partição \mathcal{P} de $[a, b]$ independente da escolha de c_i , ou seja:

$$\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i = L$$

então L é chamado de integral de Riemann de f em $[a, b]$ e o indicamos por:

$$L = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i \quad \text{com } \Delta x_i = \frac{[b-a]}{n}.$$

Exemplo: Calcular a soma de Riemann de $f : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, contínua e definida por $f(x) = x^2$. Em seguida calcular a integral de Riemann.

Considere a partição $[1, 3]$ dividida em n intervalos, e que cada intervalo $\Delta x_i = \frac{2}{n}$. Considere ainda $c_i = 1 + i \cdot \frac{2}{n}$.

Assim temos,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i &= f\left(1 + 1 \cdot \frac{2}{n}\right) \cdot \frac{2}{n} + f\left(1 + 2 \cdot \frac{2}{n}\right) \cdot \frac{2}{n} + \dots + f\left(1 + (n-1) \cdot \frac{2}{n}\right) \cdot \frac{2}{n} + f\left(1 + n \cdot \frac{2}{n}\right) \cdot \frac{2}{n} \\ &= \frac{2}{n} \left[\left(1 + 1 \cdot \frac{2}{n}\right)^2 + \left(1 + 2 \cdot \frac{2}{n}\right)^2 + \dots + \left(1 + (n-1) \cdot \frac{2}{n}\right)^2 + \left(1 + n \cdot \frac{2}{n}\right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Desenvolvendo os produtos notáveis, temos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i &= \frac{2}{n} \left[n \cdot 1 + \frac{4}{n} + 2 \cdot \frac{4}{n} + 3 \cdot \frac{4}{n} + \dots + n \cdot \frac{4}{n} + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \left(\frac{4}{n}\right)^2 + \left(\frac{6}{n}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2n}{n}\right)^2 \right] \\ &= \frac{2}{n} \left[n + \frac{1}{n} (4 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 4 + \dots + n \cdot 4) + \frac{1}{n^2} (2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + (2n)^2) \right]. \end{aligned}$$

Como

$$4 + 2.4 + 3.4 + \dots + n.4 = 2n^2 + 2n$$

e

$$2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + (2n)^2 = \frac{4n(n+1)(2n+1)}{6}$$

igualdades demonstradas por indução, temos que

$$\sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i = \frac{2}{n} \left[n + \frac{1}{n} \cdot (2n^2 + 2n) + \frac{1}{n^2} \left(\frac{4n(n+1)(2n+1)}{6} \right) \right].$$

Portanto a soma de Riemann é dada por:

$$\sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i = \frac{26}{3} + \frac{8}{n} + \frac{4}{3n^2}.$$

Calculando a integral de Riemann, temos:

$$\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i = \lim_{\frac{2}{n} \rightarrow 0} \frac{26}{3} + \frac{8}{n} + \frac{4}{3n^2} = \frac{26}{3}$$

que também pode ser calculada por:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_1^3 x^2 dx = \frac{26}{3}.$$

3.2.1 Interpretação geométrica

A integral de Riemann pode ser relacionada ao cálculo de áreas de regiões limitadas por funções contínuas.

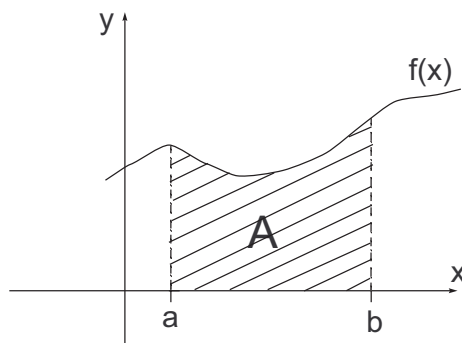


Figura 3.3: Região A limitada por $x = a$, $x = b$, $y = 0$ e pelo gráfico de $y = f(x)$.

Seja f uma função contínua em $[a, b]$, com $f(x) \geq 0$.

Vamos definir a área A limitada pelas retas $x = a$, $x = b$, $y = 0$ e pelo gráfico de $y = f(x)$.

Seja \mathcal{P} uma partição em $[a, b]$ e $c'_i, c''_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tais que $f(c'_i)$ é mínimo e $f(c''_i)$ é máximo no intervalo $[x_{i-1}, x_i]$.

A soma de Riemann $\sum_{i=1}^n f(c'_i)\Delta x_i$ é uma aproximação da área de A e observe que

$$\sum_{i=1}^n f(c'_i)\Delta x_i \leq A.$$

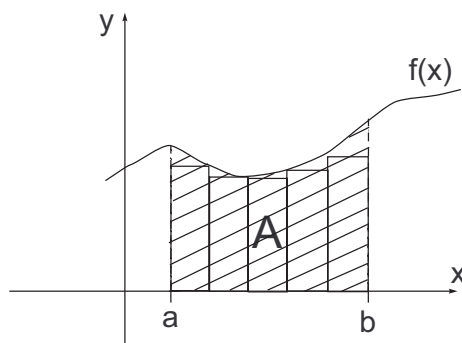


Figura 3.4: Aproximação da área da região A por falta.

Enquanto que $\sum_{i=1}^n f(c''_i)\Delta x_i$ é uma aproximação por excesso de A tal que

$$\sum_{i=1}^n f(c''_i)\Delta x_i \geq A.$$

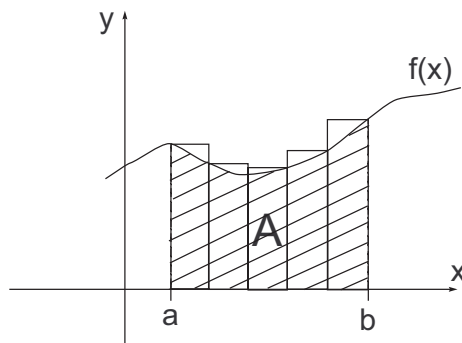


Figura 3.5: Aproximação da área da região A por excesso.

Assim, temos que

$$\sum_{i=1}^n f(c'_i)\Delta x_i \leq A \leq \sum_{i=1}^n f(c''_i)\Delta x_i.$$

Segue do Teorema do Confronto, ver em [5],

$$A = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(b-a)}{n} \sum_{i=1}^n f(c_i) = \int_a^b f(x)dx.$$

Observação 3.2.1 Analogamente, podemos definir o volume de áreas limitadas por aplicações $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Seja f uma função contínua. Suponha $f(x, y)$ não negativa. Seja R uma região da equação $z = f(x, y)$ e Δx_i e Δy_i partições referentes a largura x e ao comprimento y dessa região, respectivamente, e (c_i, d_i) um ponto arbitrário da região $\Delta x_i \Delta y_i$.

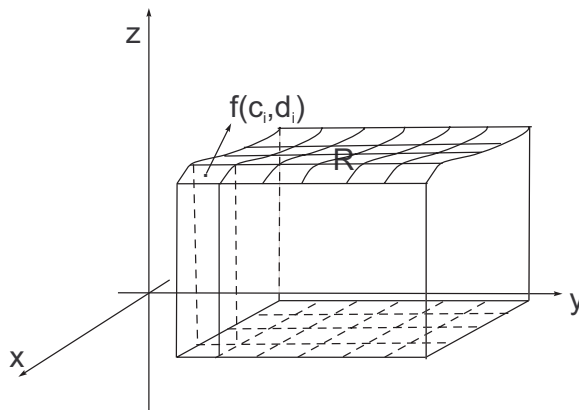


Figura 3.6: Sólido de base R e altura $f(c_i, d_i)$.

O sólido cuja base é a região R e a altura é $f(c_i, d_i)$ tem seu volume determinado por:

$$V = \lim_{\Delta x_i \Delta y_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i, d_i) \Delta x_i \Delta y_i = \int_R \int f(x, y) dx dy.$$

3.3 Cálculo da área da circunferência por somas de Riemann

Para iniciar os estudos sobre as aproximações do volume da esfera por somas de Riemann se faz necessário conhecer a área da circunferência.

Ao utilizar somas de Riemann é preciso escolher uma relação que seja uma função.

Por isso, e para simplificar os cálculos, vamos aplicá-la a $\frac{1}{4}$ da circunferência, com $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 1$, ou seja $R : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ para depois estender a aproximação da área obtida para a circunferência completa.

Seja $x^2 + y^2 = 1$ a equação da circunferência de raio 1. Temos que

$$y^2 = 1 - x^2 \implies |y| = \sqrt{1 - x^2}.$$

Tomando $x \in [0, 1]$ e $y \in [0, 1]$, temos:

$$y = \sqrt{1 - x^2}.$$

Calculando a área entre os eixos $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ e $y = \sqrt{1 - x^2}$ que corresponde a $\frac{1}{4}$ da circunferência, considerando $\Delta x_i = \frac{1}{5}$ e c_i o ponto médio do intervalo, temos:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^5 f(c_i)\Delta x_i &= f\left(0 + \frac{1}{10}\right) \cdot \frac{1}{5} + f\left(0 + \frac{1}{10} + \frac{1}{5}\right) \cdot \frac{1}{5} + f\left(0 + \frac{1}{10} + \frac{2}{5}\right) \cdot \frac{1}{5} + \\ &\quad + f\left(0 + \frac{1}{10} + \frac{3}{5}\right) \cdot \frac{1}{5} + f\left(0 + \frac{1}{10} + \frac{4}{5}\right) \cdot \frac{1}{5} \\ &= \frac{3\sqrt{11} + \sqrt{91} + 5\sqrt{3} + \sqrt{51} + \sqrt{19}}{50} = 0,792996955\dots \end{aligned}$$

Logo a área da circunferência é dada por:

$$= \frac{2(3\sqrt{11} + \sqrt{91} + 5\sqrt{3} + \sqrt{51} + \sqrt{19})}{25} = 3,171987824\dots$$

Generalizando. Consideremos a região entre os eixos $x = 0$, $x = r$, $y = 0$ e $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. Dividindo-a em n partes, temos $\Delta x_i = \frac{r}{n}$ e $c_i = \frac{ir}{n}$, então:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i &= f\left(\frac{r}{n}\right) \cdot \frac{r}{n} + f\left(2 \cdot \frac{r}{n}\right) \cdot \frac{r}{n} + f\left(3 \cdot \frac{r}{n}\right) \cdot \frac{r}{n} + \dots + f\left((n-1) \cdot \frac{r}{n}\right) \cdot \frac{r}{n} \\ &= \frac{r}{n} \left(\sqrt{r^2 - \frac{r^2}{n^2}} + \sqrt{r^2 - \frac{2^2 r^2}{n^2}} + \sqrt{r^2 - \frac{3^2 r^2}{n^2}} + \dots + \sqrt{r^2 - \frac{(n-1)^2 r^2}{n^2}} + \sqrt{r^2 - \frac{n^2 r^2}{n^2}} \right) \\ &= \left(\frac{r}{n}\right)^2 \left(\sqrt{n^2 - 1^2} + \sqrt{n^2 - 2^2} + \sqrt{n^2 - 3^2} + \dots + \sqrt{n^2 - (n-1)^2} + \sqrt{n^2 - n^2} \right). \end{aligned}$$

Logo,

$$\sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i = \left(\frac{r}{n}\right)^2 \sum_{i=1}^n \sqrt{n^2 - i^2}. \quad (3.1)$$

Seja A a área de um círculo de raio r . Como em (3.1) os cálculos correspondem a aproximação de $\frac{1}{4}$ da área do círculo A , segue que:

$$A = 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{r}{n}\right)^2 \sum_{i=1}^n \sqrt{n^2 - i^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} 4 \left(\frac{r}{n}\right)^2 \sum_{i=1}^n \sqrt{n^2 - i^2} = r^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n^2} \sum_{i=1}^n \sqrt{n^2 - i^2}$$

com

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n^2} \sum_{i=1}^n \sqrt{n^2 - i^2} = \pi$$

3.4 Teorema do valor médio para integrais

Teorema 3.4.1 *Seja f uma função contínua em $[a, b]$, então existe $\Theta \in [a, b]$ tal que*

$$f(\Theta) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Demonstração: Como f é contínua em $[a, b]$, f tem valores máximo e mínimo absolutos em $[a, b]$, ou seja, existem $x_1, x_2 \in [a, b]$ tal que $f(x_1) = m$ é mínimo e $f(x_2) = M$ é máximo absoluto.

Então temos que $\forall t \in [a, b]$

$$m \leq f(t) \leq M.$$

Seja $f(x) > 0$. Como a integral definida calcula a área sob o gráfico, temos que: A área do retângulo $a \leq x \leq b$ e altura m é: $(b - a) \cdot m$ e a área do retângulo $a \leq x \leq b$ e altura M é $(b - a) \cdot M$, então

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(t) dt \leq M(b - a).$$

Como $b - a > 0$, então

$$m \leq \frac{1}{b - a} \int_a^b f(t) dt \leq M \implies$$

$$f(x_1) \leq \frac{1}{b - a} \int_a^b f(t) dt \leq f(x_2).$$

Temos que f é contínua em $[x_1, x_2]$, então segue do Teorema do Valor Médio, ver [5], que existe $\Theta \in [a, b]$ tal que

$$f(\Theta) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(t) dt.$$

■

3.5 Teorema fundamental do cálculo

A demonstração desse teorema subsidiará os estudos sobre o Princípio de Cavalieri.

Teorema 3.5.1 *Seja f uma função contínua em $[a, b]$.*

Se a função F é definida por

$$F(x) = \int_a^b f(t) dt$$

para todo x em $[a, b]$, então

$$F'(x) = f(x).$$

Além disso, se $F'(x) = f(x)$ então

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a).$$

Demonstração: Precisamos calcular $F'(x)$ e verificar que $F'(x) = f(x)$.

Temos, por definição, que

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{h}.$$

Suponhamos, sem perda de generalidade $h > 0$.

Temos

$$\begin{aligned} \frac{\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{h} &= \frac{\int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{h} \\ &= \frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt = \frac{1}{(x+h) - x} \int_x^{x+h} f(t)dt. \end{aligned}$$

Pelo Teorema 3.4.1 temos que existe Θ dependente de h , tal que

$$\frac{1}{(x+h) - x} \int_x^{x+h} f(t)dt = f(\Theta(h))$$

para algum Θ onde $x \leq \Theta(h) \leq x+h$.

Como

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} x = x = \lim_{h \rightarrow 0^+} x+h \quad \text{e } x \leq \Theta(h) \leq x+h$$

então segue, pelo Teorema do Confronto, ver [5], que:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \Theta(h) = x.$$

Assim,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} f(\Theta(h)).$$

Sendo f contínua em $[a, b]$, temos

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} f(\Theta(h)) = f\left(\lim_{h \rightarrow 0^+} \Theta(h)\right) = f(x)$$

De modo análogo prova-se que

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} f(\Theta(h)) = f\left(\lim_{h \rightarrow 0^-} \Theta(h)\right) = f(x).$$

Logo, os limites laterais existem e são iguais, portanto:

$$F'(x) = f(x).$$

Agora considere um intervalo $[a, b]$ e uma partição $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ tal que

$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ e $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Temos

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= F(x_n) - F(x_0) \\ &= F(x_n) - F(x_{n-1}) + F(x_{n-1}) - F(x_{n-2}) + F(x_{n-2}) - \dots - F(x_1) + F(x_1) - F(x_0) \end{aligned}$$

Associando os termos dois a dois, temos

$$F(b) - F(a) = [F(x_n) - F(x_{n-1})] + [F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})] + \dots + [F(x_2) - F(x_1)] + [F(x_1) - F(x_0)]$$

Note que a expressão acima pode ser escrita como

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n [F(x_i) - F(x_{i-1})].$$

Segue do Teorema do Valor Médio para derivadas, ver [5], que existe $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tal que

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(c_i)(x_i - x_{i-1}) = f(c_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Dessa forma,

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n [F(x_i) - F(x_{i-1})] = \sum_{i=1}^n f(c_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i$$

que é uma soma de Riemann de f em $[a, b]$. Quando $\Delta x_i \rightarrow 0$, temos

$$F(b) - F(a) = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx.$$

■

Aproximações do volume da esfera

Neste capítulo, apresentaremos vários métodos que nos possibilitam mensurar o volume da esfera, partindo de aproximações realizadas com somas de Riemann e cilindros, depois com prismas de base quadrada e retangular, com sólidos inscritos na esfera e, por fim, com a utilização do princípio de Cavalieri e a demonstração dos livros de Ensino Médio.

4.1 Cálculo do volume da esfera com cilindros

Sabemos que o volume de um cilindro reto é dado pelo produto da área da base pela sua altura, ou seja, $V_c = \pi r^2 h$ em que r é o raio da base e h é a altura do cilindro. Para calcularmos uma aproximação do volume esférico, nessa sessão, consideraremos várias “fatias cilíndricas” que se aproximam da metade do volume da esfera e depois estenderemos esse raciocínio para o volume total.

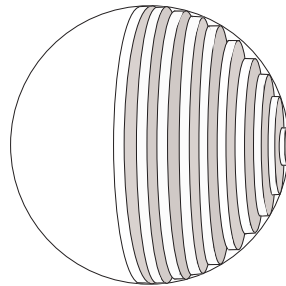


Figura 4.1: Aproximação de metade da esfera com cilindros.

Considere a região da esfera de raio 1 e $C = (0, 0, 0)$ e $x = 0$. Considere o intervalo $[0, 1]$ dividido em 10 subintervalos iguais e sejam y_n , $n = 1, 2, \dots, 10$ os pontos médios de cada um desses intervalos. Temos que a altura de cada cilindro será de $\frac{1}{10}$ e o raio de cada cilindro corresponde à coordenada z_n calculada a partir de y_n nos 10 intervalos tomados.

Assim temos:

- para $y_1 = \frac{1}{20}$, $z_1^2 = \frac{399}{400}$, pois $x^2 + y^2 + z^2 = 1 \implies 0^2 + \left(\frac{1}{20}\right)^2 + z^2 = 1$

- para $y_2 = \frac{3}{20}$, $z_2^2 = \frac{391}{400}$;
- para $y_3 = \frac{5}{20}$, $z_3^2 = \frac{375}{400}$;
- para $y_4 = \frac{7}{20}$, $z_4^2 = \frac{351}{400}$;
- \vdots
- para $y_{10} = \frac{19}{20}$, $z_{10}^2 = \frac{39}{400}$.

Assim, o volume dos cilindros, representado na figura 4.2 é dado por:

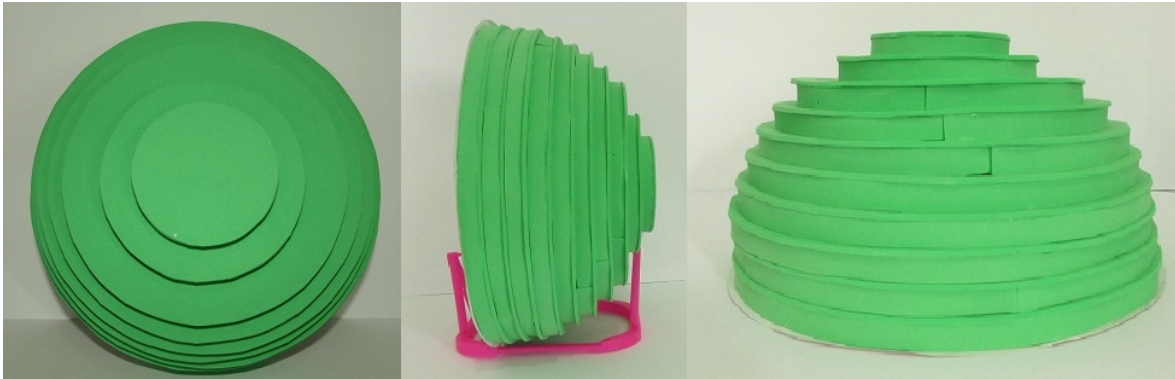


Figura 4.2: Representação do volume de metade da esfera com cilindros.

Fonte: A autora.

$$V = \pi \cdot \frac{399}{400} \cdot \frac{1}{10} + \pi \cdot \frac{391}{400} \cdot \frac{1}{10} + \pi \cdot \frac{375}{400} \cdot \frac{1}{10} + \dots + \pi \cdot \frac{111}{400} \cdot \frac{1}{10} + \pi \cdot \frac{39}{400} \cdot \frac{1}{10} = \frac{267}{400} \pi.$$

Para facilitar os cálculos consideramos apenas metade esfera, dessa forma, temos que multiplicar o resultado obtido por 2. Logo, o volume aproximado da esfera de raio 1 é dado por:

$$V_e = 2 \cdot \frac{267}{400} \pi = \frac{267}{200} \pi$$

Considere agora uma superfície esférica de raio r e $C = (0, 0, 0)$, $x = 0$ e seja $y \in [0, r]$. Vamos dividir $[0, r]$ em n intervalos de comprimentos iguais, ou seja, de $\frac{r}{n}$ de comprimento, que corresponde a altura de cada cilindro. Considere ainda os pontos médios de cada um desses intervalos para calcular a coordenada z , que representa o raio de cada um dos cilindros tomados. Com isso, temos:

- para $y_1 = \frac{r}{2n}$, $z_1^2 = \frac{r^2(4n^2-1)}{4n^2}$;
- para $y_2 = \frac{3r}{2n}$, $z_2^2 = \frac{r^2(4n^2-3^2)}{4n^2}$;

- para $y_3 = \frac{5r}{2n}$, $z_3^2 = \frac{r^2(4n^2-5^2)}{4n^2}$;
- ⋮
- para $y_n = \frac{(2n-1)r}{2n}$, $z_n^2 = \frac{r^2(4n^2-(2n-1)^2)}{4n^2}$.

Logo, o volume aproximado da região é dado por:

$$V = \pi \cdot \frac{r^2(4n^2-1)}{4n^2} \cdot \frac{r}{n} + \pi \cdot \frac{r^2(4n^2-3^2)}{4n^2} \cdot \frac{r}{n} + \pi \cdot \frac{r^2(4n^2-5^2)}{4n^2} \cdot \frac{r}{n} + \dots + \pi \cdot \frac{r^2(4n^2-(2n-1)^2)}{4n^2} \cdot \frac{r}{n}$$

ou seja

$$V = \frac{\pi r^3}{4n^3} \sum_{i=1}^n (4n^2 - (2i-1)^2). \quad (4.1)$$

Como a equação (4.1) representa a aproximação do volume de metade de uma esfera de raio r , temos que o volume da esfera é dado por:

$$V_e = 2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi r^3}{4n^3} \sum_{i=1}^n (4n^2 - (2i-1)^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi r^3}{2n^3} \sum_{i=1}^n (4n^2 - (2i-1)^2).$$

4.2 Cálculo do volume da esfera com prismas

Agora, estudaremos o volume aproximado da esfera por prismas, primeiro os de base quadrada e depois com base retangular. Destacamos aqui que, para efetuarmos menos cálculos e realizá-los de maneira mais sucinta consideraremos apenas $\frac{1}{8}$ da esfera de raio 1, porque além de facilitar as contas consideramos a representação de um octante da esfera no sistemas de coordenadas do espaço euclidiano E^3 com centro $C = (0, 0, 0)$. E depois disso, estenderemos o resultado obtido para toda a esfera.

Considere a região onde $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 1$ e $0 \leq z \leq 1$. Assim, teremos uma aproximação de $\frac{1}{8}$ do volume da esfera.

Considere o plano formado pelos eixos x e y . Sejam $x \in [0, 1]$ e $y \in [0, 1]$ e seus intervalos divididos em 5 partes iguais. Teremos um quadrado de 1×1 dividido em 25 quadrados com área individual de $\frac{1}{25}$. Em seguida, calculamos as coordenadas de Z_{ij} , com $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ que é ponto de interseção das diagonais de cada um desses quadrados.

Então, temos que no quadrado:

- para $x = \frac{1}{5}$, $y = \frac{1}{5}$ o ponto de interseção das diagonais tem coordenadas $Z_{11} = (\frac{1}{10}, \frac{1}{10})$;
- para $x = \frac{1}{5}$, $y = \frac{2}{5}$ temos $Z_{12} = (\frac{1}{10}, \frac{3}{10})$;
- para $x = \frac{1}{5}$, $y = \frac{3}{5}$ temos $Z_{13} = (\frac{1}{10}, \frac{5}{10})$;
- ⋮

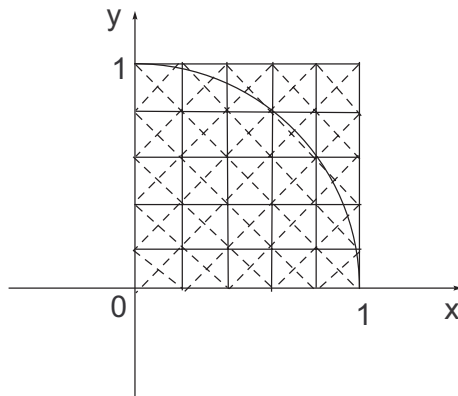


Figura 4.3: Interseção de $\frac{1}{4}$ do círculo maior da esfera e dos 25 quadrados de área $\frac{1}{25}$.

- para $x = \frac{i}{5}, y = \frac{j}{5}$ temos $Z_{ij} = (\frac{2i-1}{10}, \frac{2j-1}{10})$;
- para $x = 1, y = 1$ temos $Z_{55} = (\frac{9}{10}, \frac{9}{10})$.

Consideremos agora a região formada por $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ com $z > 0$ em interseção com o quadrado de 1×1 acima citado. Logo, para cada ponto Z_{ij} , teremos um valor para z na equação $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, com $1 - x^2 - y^2 > 0$. Este valor será a altura dos prismas de base quadrada. Assim, temos:

- para $Z_{11} = (\frac{1}{10}, \frac{1}{10})$, $z = \sqrt{\frac{98}{100}}$, pois: $(\frac{1}{10})^2 + (\frac{1}{10})^2 + z^2 = 1 \implies z^2 = 1 - \frac{1}{100} - \frac{1}{100}$;
- para $Z_{12} = (\frac{1}{10}, \frac{3}{10})$, $z = \sqrt{\frac{90}{100}}$, pois: $(\frac{1}{10})^2 + (\frac{3}{10})^2 + z^2 = 1 \implies z^2 = 1 - \frac{1}{100} - \frac{3^2}{100}$;
- para $Z_{13} = (\frac{1}{10}, \frac{5}{10})$, $z = \sqrt{\frac{74}{100}}$, pois: $(\frac{1}{10})^2 + (\frac{5}{10})^2 + z^2 = 1 \implies z^2 = 1 - \frac{1}{100} - \frac{5^2}{100}$;
- para $Z_{ij} = (\frac{2i-1}{10}, \frac{2j-1}{10})$, pois: $(\frac{2i-1}{10})^2 + (\frac{2j-1}{10})^2 + z^2 = 1 \implies z^2 = 1 - \frac{(2i-1)^2}{100} - \frac{(2j-1)^2}{100}$;
- para $Z_{55} = (\frac{9}{10}, \frac{9}{10})$, $z \notin \mathbb{R}$, pois: $(\frac{9}{10})^2 + (\frac{9}{10})^2 + z^2 = 1 \implies z^2 = 1 - \frac{9^2}{100} - \frac{9^2}{100}$.

Calculando a soma do volume de cada um dos prismas de base quadrada, temos:

$$V = \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{100} - \frac{1}{100}} + \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{100} - \frac{3^2}{100}} + \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{100} - \frac{5^2}{100}} + \dots$$

$$+ \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \sqrt{1 - \frac{9^2}{100} - \frac{1^2}{100}} + \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \sqrt{1 - \frac{9^2}{100} - \frac{3^2}{100}}$$

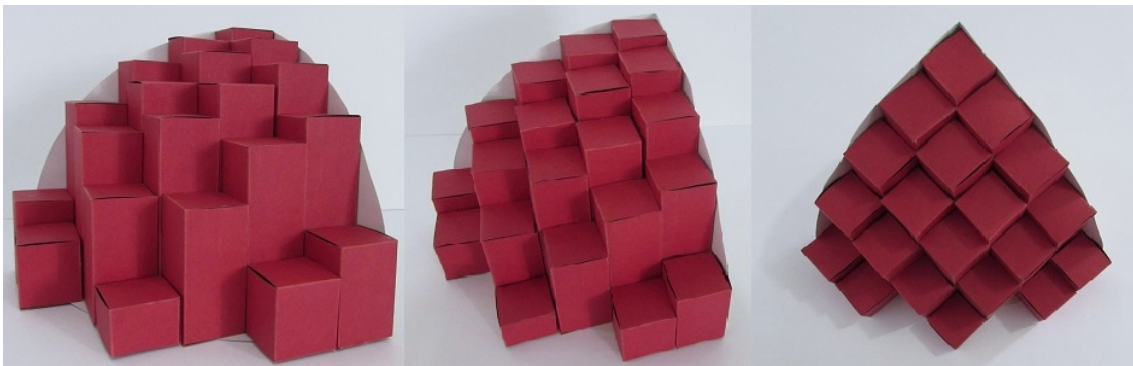


Figura 4.4: Representação do volume de $\frac{1}{8}$ da esfera com prismas de base quadrada.

Fonte: A autora.

Logo,

$$V \cong 0,522255335... \quad (4.2)$$

Agora para obtermos o volume aproximado da esfera de raio 1, basta multiplicar o resultado obtido em (4.2) por 8:

$$V_e \cong 8 \times 0,522255335 \cong 4,178042686...$$

Generalizando. Consideremos o plano formado pelos eixos x e y . Sejam $x \in [0, r]$ e $y \in [0, r]$ e seus intervalos divididos em n partes iguais. Teremos um quadrado de lado r dividido em quadrados com área individual de $(\frac{r}{n})^2$. Em seguida, calculamos as coordenadas Z_{ij} , com $i, j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ que é o ponto de interseção das diagonais de cada um desses quadrados. Assim, temos que no quadrado:

- para $x = \frac{r}{n}$, $y = \frac{r}{n}$ o ponto de interseção das diagonais tem coordenadas $Z_{11} = (\frac{r}{2n}, \frac{r}{2n})$;
- para $x = \frac{r}{n}$, $y = \frac{2r}{n}$ temos $Z_{12} = (\frac{r}{2n}, \frac{3r}{2n})$;
- para $x = \frac{r}{n}$, $y = \frac{3r}{n}$ temos $Z_{13} = (\frac{r}{2n}, \frac{5r}{2n})$;
- \vdots
- para $x = \frac{ir}{n}$, $y = \frac{jr}{n}$ temos $Z_{ij} = (\frac{(2i-1)r}{2n}, \frac{(2j-1)r}{2n})$;
- \vdots
- para $x = r$, $y = r$ temos $Z_{nn} = (\frac{(2n-1)r}{2n}, \frac{(2n-1)r}{2n})$.

Considere a região de interseção formada por $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, com $z > 0$ e o quadrado $r \times r$. Assim, temos que para cada ponto Z_n haverá um z , que representa a altura do prisma de base quadrada. Portanto:

- para $Z_{11} = (\frac{r}{2n}, \frac{r}{2n})$, temos $z = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4n^2} - \frac{r^2}{4n^2}}$, pois $(\frac{r}{2n})^2 + (\frac{r}{2n})^2 + z^2 = r^2$;
- para $Z_{12} = (\frac{r}{2n}, \frac{3r}{2n})$, temos $z = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4n^2} - \frac{9r^2}{4n^2}}$, pois $(\frac{r}{2n})^2 + (\frac{3r}{2n})^2 + z^2 = r^2$;
- para $Z_{13} = (\frac{r}{2n}, \frac{5r}{2n})$, temos $z = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4n^2} - \frac{25r^2}{4n^2}}$, pois $(\frac{r}{2n})^2 + (\frac{5r}{2n})^2 + z^2 = r^2$;
- \vdots
- para $Z_{ij} = (\frac{(2i-1)r}{2n}, \frac{(2j-1)r}{2n})$, temos $z = \sqrt{r^2 - \frac{(2i-1)^2 r^2}{4n^2} - \frac{(2j-1)^2 r^2}{4n^2}}$;
- \vdots
- para $Z_{nn} = (\frac{(2n-1)r}{2n}, \frac{(2n-1)r}{2n})$, temos que $z \notin \mathbb{R}$, pois $z = \sqrt{r^2 - \frac{(2n-1)^2 r^2}{4n^2} - \frac{(2n-1)^2 r^2}{4n^2}}$.

Logo, a soma do volume de cada um dos prismas de base quadrada é dado por:

$$V = \frac{r^3}{2n^3} \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^n \sqrt{4n^2 - (2i-1)^2 - (2j-1)^2} \quad (4.3)$$

com $4n^2 > (2i-1)^2 + (2j-1)^2$.

Como o volume encontrado em (4.3) corresponde à aproximação de $\frac{1}{8}$ da esfera de raio r , basta multiplicá-lo por 8 para assim obter o volume de uma esfera de raio r , que é dado por:

$$\begin{aligned} V_e &= 8 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^3}{2n^3} \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^n \sqrt{4n^2 - (2i-1)^2 - (2j-1)^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4r^3}{n^3} \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^n \sqrt{4n^2 - (2i-1)^2 - (2j-1)^2} \end{aligned}$$

com $4n^2 > (2i-1)^2 + (2j-1)^2$.

Agora, do mesmo modo que realizamos anteriormente, calcularemos a aproximação do volume da esfera com prismas de base retangular. Para minimizar a quantidade de cálculos efetuados consideraremos apenas $\frac{1}{8}$ do volume da esfera de raio 1, por ser a representação de um dos octantes da esfera de centro $C = (0, 0, 0)$ no espaço euclidiano E^3 , com $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ e $0 \leq z \leq 1$, lembrando que posteriormente o raciocínio será desenvolvido para a aproximação de todo o volume da esfera.

Considere uma região limitada por $x = 0$, $y = 0$, e $x^2 + y^2 = 1$. Seja o intervalo $y = [0, 1]$ dividido em 5 partes iguais e o intervalo $x = [0, 1]$ dividido em n partes iguais. Assim temos retângulos de área $\frac{1}{5n}$. O encontro das diagonais desses retângulos são os pontos Z_{i1} , Z_{j2} , Z_{k3} , Z_{l4} , Z_{m5} com $i, j, k, l, m \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$. Então, temos

- para $x = \frac{1}{n}$, $y = \frac{1}{5}$ o ponto de interseção das diagonais tem coordenadas $Z_{11} = (\frac{1}{2n}, \frac{1}{10})$;

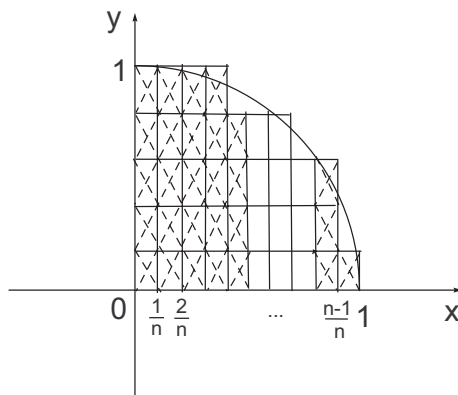


Figura 4.5: Interseção de $\frac{1}{4}$ do círculo maior da esfera e dos retângulos de área $\frac{1}{5n}$.

- para $x = \frac{2}{n}$, $y = \frac{1}{5}$ temos $Z_{21} = (\frac{3}{2n}, \frac{1}{10})$;
 \vdots
- para $x = \frac{i}{n}$, $y = \frac{1}{5}$ temos $Z_{i1} = (\frac{2i-1}{2n}, \frac{1}{10})$ com $\frac{2i-1}{2n} \leq \frac{3\sqrt{11}}{10}$;
- $x = \frac{1}{n}$, $y = \frac{2}{5}$ o ponto de interseção das diagonais tem coordenadas $Z_{12} = (\frac{1}{2n}, \frac{3}{10})$;
- para $x = \frac{2}{n}$, $y = \frac{2}{5}$ temos $Z_{22} = (\frac{3}{2n}, \frac{3}{10})$;
 \vdots
- para $x = \frac{j}{n}$, $y = \frac{2}{5}$ temos $Z_{j2} = (\frac{2j-1}{2n}, \frac{3}{10})$ com $\frac{2j-1}{2n} \leq \frac{\sqrt{91}}{10}$;
- $x = \frac{1}{n}$, $y = \frac{3}{5}$ o ponto de interseção das diagonais tem coordenadas $Z_{13} = (\frac{1}{2n}, \frac{5}{10})$;
- para $x = \frac{2}{n}$, $y = \frac{3}{5}$ temos $Z_{23} = (\frac{3}{2n}, \frac{5}{10})$;
 \vdots
- para $x = \frac{k}{n}$, $y = \frac{3}{5}$ temos $Z_{k3} = (\frac{2k-1}{2n}, \frac{5}{10})$ com $\frac{2k-1}{2n} \leq \frac{\sqrt{75}}{10}$;
- $x = \frac{1}{n}$, $y = \frac{4}{5}$ o ponto de interseção das diagonais tem coordenadas $Z_{14} = (\frac{1}{2n}, \frac{7}{10})$;
- para $x = \frac{2}{n}$, $y = \frac{4}{5}$ temos $Z_{24} = (\frac{3}{2n}, \frac{7}{10})$;
 \vdots
- para $x = \frac{l}{n}$, $y = \frac{4}{5}$ temos $Z_{l4} = (\frac{2l-1}{2n}, \frac{7}{10})$ com $\frac{2l-1}{2n} \leq \frac{\sqrt{51}}{10}$;

- $x = \frac{1}{n}, y = \frac{5}{5} = 1$ o ponto de interseção das diagonais tem coordenadas $Z_{15} = (\frac{1}{2n}, \frac{9}{10})$;
- para $x = \frac{2}{n}, y = \frac{5}{5}$ temos $Z_{25} = (\frac{3}{2n}, \frac{9}{10})$;
- \vdots
- para $x = \frac{l}{n}, y = \frac{5}{5}$ temos $Z_{m5} = (\frac{2m-1}{2n}, \frac{9}{10})$ com $\frac{2m-1}{2n} \leq \frac{\sqrt{19}}{10}$.

Esses pontos $Z_{i1}, Z_{j2}, Z_{k3}, Z_{l4}, Z_{m5}$ possibilitam o cálculo da altura z de cada prisma de base retangular na equação $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z > 0$, ou seja:

- $Z_{11} = (\frac{1}{2n}, \frac{1}{10}) \implies z = \sqrt{1 - \frac{1}{4n^2} - \frac{1}{100}}$;
- $Z_{21} = (\frac{3}{2n}, \frac{1}{10}) \implies z = \sqrt{1 - \frac{9}{4n^2} - \frac{1}{100}}$;
- \vdots
- $Z_{i1} = (\frac{2i-1}{2n}, \frac{1}{10}) \implies z = \sqrt{1 - \frac{(2i-1)^2}{4n^2} - \frac{1}{100}}$;
- $Z_{12} = (\frac{1}{2n}, \frac{3}{10}) \implies z = \sqrt{1 - \frac{1}{4n^2} - \frac{9}{100}}$;
- $Z_{22} = (\frac{3}{2n}, \frac{3}{10}) \implies z = \sqrt{1 - \frac{9}{4n^2} - \frac{9}{100}}$;
- \vdots
- $Z_{j2} = (\frac{2j-1}{2n}, \frac{3}{10}) \implies z = \sqrt{1 - \frac{(2j-1)^2}{4n^2} - \frac{9}{100}}$;
- $Z_{13} = (\frac{1}{2n}, \frac{5}{10}) \implies z = \sqrt{1 - \frac{1}{4n^2} - \frac{25}{100}}$;
- \vdots
- $Z_{k3} = (\frac{2k-1}{2n}, \frac{5}{10}) \implies z = \sqrt{1 - \frac{(2k-1)^2}{4n^2} - \frac{25}{100}}$;
- $Z_{14} = (\frac{1}{2n}, \frac{7}{10}) \implies z = \sqrt{1 - \frac{1}{4n^2} - \frac{49}{100}}$;
- \vdots
- $Z_{l4} = (\frac{2l-1}{2n}, \frac{7}{10}) \implies z = \sqrt{1 - \frac{(2l-1)^2}{4n^2} - \frac{49}{100}}$;
- $Z_{15} = (\frac{1}{2n}, \frac{9}{10}) \implies z = \sqrt{1 - \frac{1}{4n^2} - \frac{81}{100}}$;
- \vdots

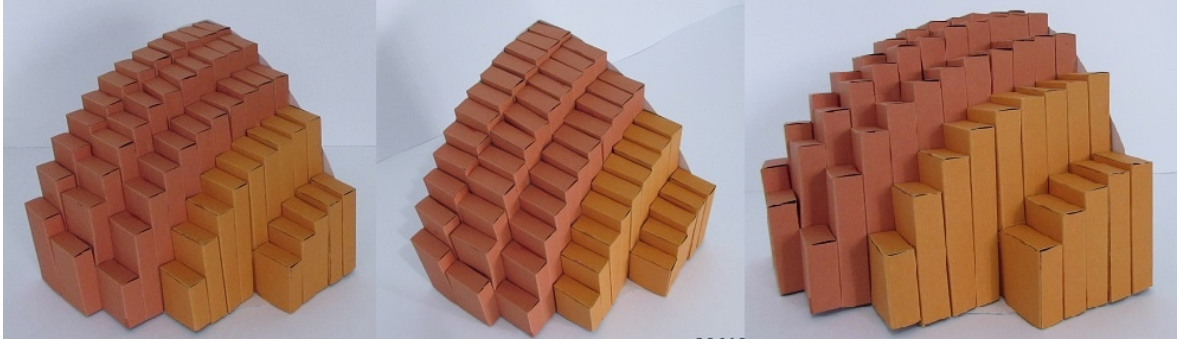


Figura 4.6: Representação do volume de $\frac{1}{8}$ da esfera com prismas de base retangular para $n = 12$.

Fonte: A autora.

- $Z_{m5} = \left(\frac{2m-1}{2n}, \frac{9}{10}\right) \implies z = \sqrt{1 - \frac{(2m-1)^2}{4n^2} - \frac{81}{100}}$.

Portanto a soma dos volumes dos prismas de base retangular da região que corresponde a $\frac{1}{8}$ da esfera de raio 1 é dada por:

$$V = \frac{1}{5n} \left(\sum_{i=1}^n \sqrt{1 - \frac{(2i-1)^2}{4n^2} - \frac{1}{100}} + \sum_{j=1}^n \sqrt{1 - \frac{(2j-1)^2}{4n^2} - \frac{9}{100}} \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^n \sqrt{1 - \frac{(2k-1)^2}{4n^2} - \frac{25}{100}} + \sum_{l=1}^n \sqrt{1 - \frac{(2l-1)^2}{4n^2} - \frac{49}{100}} + \sum_{m=1}^n \sqrt{1 - \frac{(2m-1)^2}{4n^2} - \frac{81}{100}} \right) \quad (4.4)$$

com

$$\frac{(2i-1)^2}{4n^2} \leq \frac{99}{100}, \quad \frac{(2j-1)^2}{4n^2} \leq \frac{91}{100}, \quad \frac{(2k-1)^2}{4n^2} \leq \frac{75}{100}, \quad \frac{(2l-1)^2}{4n^2} \leq \frac{51}{100} \text{ e } \frac{(2m-1)^2}{4n^2} \leq \frac{19}{100}.$$

Assim, o volume aproximado de uma esfera de raio 1, é dado por 8 vezes o resultado de (4.4):

$$V = 8 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{5n} \left(\sum_{i=1}^n \sqrt{1 - \frac{(2i-1)^2}{4n^2} - \frac{1}{100}} + \sum_{j=1}^n \sqrt{1 - \frac{(2j-1)^2}{4n^2} - \frac{9}{100}} \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^n \sqrt{1 - \frac{(2k-1)^2}{4n^2} - \frac{25}{100}} + \sum_{l=1}^n \sqrt{1 - \frac{(2l-1)^2}{4n^2} - \frac{49}{100}} + \sum_{m=1}^n \sqrt{1 - \frac{(2m-1)^2}{4n^2} - \frac{81}{100}} \right) \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8}{5n} \left(\sum_{i=1}^n \sqrt{1 - \frac{(2i-1)^2}{4n^2} - \frac{1}{100}} + \sum_{j=1}^n \sqrt{1 - \frac{(2j-1)^2}{4n^2} - \frac{9}{100}} \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^n \sqrt{1 - \frac{(2k-1)^2}{4n^2} - \frac{25}{100}} + \sum_{l=1}^n \sqrt{1 - \frac{(2l-1)^2}{4n^2} - \frac{49}{100}} + \sum_{m=1}^n \sqrt{1 - \frac{(2m-1)^2}{4n^2} - \frac{81}{100}} \right)$$

com

$$\frac{(2i-1)^2}{4n^2} \leq \frac{99}{100}, \frac{(2j-1)^2}{4n^2} \leq \frac{91}{100}, \frac{(2k-1)^2}{4n^2} \leq \frac{75}{100}, \frac{(2l-1)^2}{4n^2} \leq \frac{51}{100} \text{ e } \frac{(2m-1)^2}{4n^2} \leq \frac{19}{100}.$$

Generalizando, o volume de uma esfera de raio r pode ser calculado por:

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8r^3}{5n} \left(\sum_{i=1}^n \sqrt{1 - \frac{(2i-1)^2}{4n^2} - \frac{1}{100}} + \sum_{j=1}^n \sqrt{1 - \frac{(2j-1)^2}{4n^2} - \frac{9}{100}} \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^n \sqrt{1 - \frac{(2k-1)^2}{4n^2} - \frac{25}{100}} + \sum_{l=1}^n \sqrt{1 - \frac{(2l-1)^2}{4n^2} - \frac{49}{100}} + \sum_{m=1}^n \sqrt{1 - \frac{(2m-1)^2}{4n^2} - \frac{81}{100}} \right)$$

com

$$\frac{(2i-1)^2}{4n^2} \leq \frac{99}{100}, \frac{(2j-1)^2}{4n^2} \leq \frac{91}{100}, \frac{(2k-1)^2}{4n^2} \leq \frac{75}{100}, \frac{(2l-1)^2}{4n^2} \leq \frac{51}{100} \text{ e } \frac{(2m-1)^2}{4n^2} \leq \frac{19}{100}.$$

Apresentamos aqui, a aproximação do volume da esfera com prismas de base quadrada e retangular e, como realizado nas sessões anteriores, para simplificar os cálculos, tomamos $\frac{1}{8}$ da esfera de raio 1, com $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$ e $x^2 + y^2 \leq 1$, estendendo, posteriormente, o resultado obtido para mensurar o volume da esfera de raio 1. A diferença deste cálculo está em que toda área da base do prisma deve estar contida na esfera.

Considere uma região limitada por $x = 0$, $y = 0$, e $x^2 + y^2 \leq 1$. Sejam os intervalos $x = [0, 1]$ e $y = [0, 1]$ divididos em 6 partes iguais, pois nos dão uma melhor aproximação do que em 5 partes, quantidade na qual dividimos os intervalos anteriores.

Sejam $Z_i = (x, y)$, com $i \in \{1, 2, 3, \dots, 30\}$, os pontos médios de x e y de cada intervalo, que representam as coordenadas na equação $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ na qual z corresponde a altura dos primas de base quadrada e dos prismas de base retangular.

Para $y \in [0, \frac{1}{6}]$,

- e $x \in [0, \frac{1}{6}]$ $Z_1 = (\frac{1}{12}, \frac{1}{12})$ e $z = \sqrt{1 - (\frac{1}{12})^2 - (\frac{1}{12})^2}$;
- e $x \in [\frac{1}{6}, \frac{2}{6}]$ $Z_2 = (\frac{3}{12}, \frac{1}{12})$ e $z = \sqrt{1 - (\frac{3}{12})^2 - (\frac{1}{12})^2}$;
- \vdots
- e $x \in [\frac{4}{6}, \frac{5}{6}]$ $Z_5 = (\frac{9}{12}, \frac{1}{12})$ e $z = \sqrt{1 - (\frac{9}{12})^2 - (\frac{1}{12})^2}$;
- e $x \in [\frac{5}{6}, \frac{\sqrt{35}}{6}]$ $Z_6 = (\frac{5+\sqrt{35}}{12}, \frac{1}{12})$ e $z = \sqrt{1 - (\frac{5+\sqrt{35}}{12})^2 - (\frac{1}{12})^2} = \sqrt{1 - \frac{61+10\sqrt{35}}{144}}$.

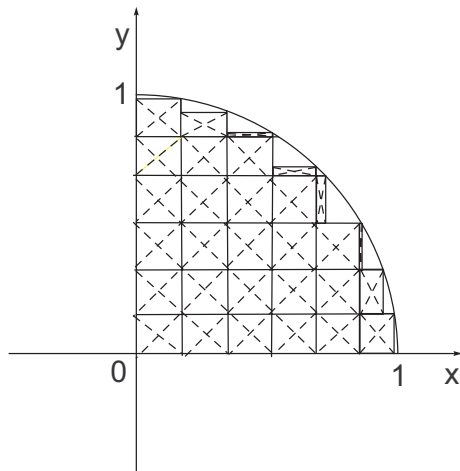


Figura 4.7: Interseção de $\frac{1}{4}$ do círculo maior da esfera e dos quadrados e retângulos bases dos prismas.

Para $y \in [\frac{1}{6}, \frac{2}{6}]$,

- e $x \in [0, \frac{1}{6}]$ $Z_7 = (\frac{1}{12}, \frac{3}{12})$ e $z = \sqrt{1 - (\frac{1}{12})^2 - (\frac{3}{12})^2}$;
- e $x \in [\frac{1}{6}, \frac{2}{6}]$ $Z_8 = (\frac{3}{12}, \frac{3}{12})$ e $z = \sqrt{1 - (\frac{3}{12})^2 - (\frac{3}{12})^2}$;
- \vdots
- e $x \in [\frac{4}{6}, \frac{5}{6}]$ $Z_{11} = (\frac{9}{12}, \frac{3}{12})$ e $z = \sqrt{1 - (\frac{9}{12})^2 - (\frac{3}{12})^2}$;
- e $x \in [\frac{5}{6}, \frac{\sqrt{32}}{6}]$ $Z_{12} = (\frac{5+\sqrt{32}}{12}, \frac{3}{12})$ e $z = \sqrt{1 - \frac{66+10\sqrt{32}}{144}}$.

Para $y \in [\frac{2}{6}, \frac{3}{6}]$,

- e $x \in [0, \frac{1}{6}]$ $Z_{13} = (\frac{1}{12}, \frac{5}{12})$ e $z = \sqrt{1 - (\frac{1}{12})^2 - (\frac{5}{12})^2}$;
- \vdots
- e $x \in [\frac{4}{6}, \frac{5}{6}]$ $Z_{17} = (\frac{9}{12}, \frac{5}{12})$ e $z = \sqrt{1 - (\frac{9}{12})^2 - (\frac{5}{12})^2}$;
- e $x \in [\frac{5}{6}, \frac{\sqrt{27}}{6}]$ $Z_{18} = (\frac{5+\sqrt{27}}{12}, \frac{5}{12})$ e $z = \sqrt{1 - \frac{77+10\sqrt{27}}{144}}$.

Para $y \in [\frac{3}{6}, \frac{4}{6}]$,

- e $x \in [0, \frac{1}{6}]$ $Z_{19} = (\frac{1}{12}, \frac{7}{12})$ e $z = \sqrt{1 - (\frac{1}{12})^2 - (\frac{7}{12})^2}$;
- \vdots
- e $x \in [\frac{3}{6}, \frac{4}{6}]$ $Z_{22} = (\frac{7}{12}, \frac{7}{12})$ e $z = \sqrt{1 - (\frac{7}{12})^2 - (\frac{7}{12})^2}$;

- e $x \in [\frac{4}{6}, \frac{\sqrt{20}}{6}]$ $Z_{23} = (\frac{4+\sqrt{20}}{12}, \frac{7}{12})$ e $z = \sqrt{1 - \frac{85+8\sqrt{20}}{144}}$.

Para $y \in [\frac{4}{6}, \frac{5}{6}]$,

- e $x \in [0, \frac{1}{6}]$ $Z_{24} = (\frac{1}{12}, \frac{9}{12})$ e $z = \sqrt{1 - (\frac{1}{12})^2 - (\frac{9}{12})^2}$;

- $x \in [\frac{1}{6}, \frac{2}{6}]$ $Z_{25} = (\frac{3}{12}, \frac{9}{12})$ e $z = \sqrt{1 - (\frac{3}{12})^2 - (\frac{9}{12})^2}$;

- $x \in [\frac{2}{6}, \frac{3}{6}]$ $Z_{26} = (\frac{5}{12}, \frac{9}{12})$ e $z = \sqrt{1 - (\frac{5}{12})^2 - (\frac{9}{12})^2}$.

Para $x \in [\frac{3}{6}, \frac{4}{6}]$, $y \in [\frac{4}{6}, \frac{\sqrt{20}}{6}]$ e $Z_{27} = (\frac{7}{12}, \frac{4+\sqrt{20}}{12})$ e $z = \sqrt{1 - \frac{85+8\sqrt{20}}{144}}$.

Para $x \in [\frac{2}{6}, \frac{3}{6}]$, $y \in [\frac{5}{6}, \frac{\sqrt{27}}{6}]$ e $Z_{28} = (\frac{5}{12}, \frac{5+\sqrt{27}}{12})$ e $z = \sqrt{1 - \frac{77+10\sqrt{27}}{144}}$.

Para $x \in [\frac{1}{6}, \frac{2}{6}]$, $y \in [\frac{5}{6}, \frac{\sqrt{32}}{6}]$ e $Z_{29} = (\frac{3}{12}, \frac{5+\sqrt{32}}{12})$ e $z = \sqrt{1 - \frac{66+10\sqrt{32}}{144}}$.

Por fim, para $x \in [0, \frac{1}{6}]$, $y \in [\frac{5}{6}, \frac{\sqrt{35}}{6}]$ e $Z_{30} = (\frac{1}{12}, \frac{5+\sqrt{35}}{12})$ e $z = \sqrt{1 - \frac{61+10\sqrt{35}}{144}}$.

Com exceção das regiões de alturas relativas aos pontos $Z_6, Z_{12}, Z_{18}, Z_{23}, Z_{27}, Z_{28}, Z_{29}, Z_{30}$ todos as outras tem área igual a $\frac{1}{36}$.

É possível verificar também que a área de Z_6 é igual a área de Z_{30} , a de Z_{12} a de Z_{29} , a de Z_{18} a de Z_{28} e a de Z_{23} a de Z_{27} .

A área de Z_6 é $\frac{1}{6} \times \frac{\sqrt{35}-5}{6}$, pois $\frac{\sqrt{35}-5}{2} - \frac{5}{6} = \frac{\sqrt{35}-5}{6}$, a área de Z_{12} é $\frac{1}{6} \times \frac{\sqrt{32}-5}{6}$, a área de Z_{18} é $\frac{1}{6} \times \frac{\sqrt{27}-5}{6}$ e a área de Z_{23} é $\frac{1}{6} \times \frac{\sqrt{20}-4}{6}$.

Portanto, o volume aproximado de $\frac{1}{8}$ da esfera de raio 1 é de:

$$\begin{aligned}
 V = & \frac{1}{36} \left(\sqrt{1 - \left(\frac{1}{12}\right)^2 - \left(\frac{1}{12}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{3}{12}\right)^2 - \left(\frac{1}{12}\right)^2} + \dots + \sqrt{1 - \left(\frac{9}{12}\right)^2 - \left(\frac{1}{12}\right)^2} \right. \\
 & + \sqrt{1 - \left(\frac{1}{12}\right)^2 - \left(\frac{3}{12}\right)^2} + \dots + \sqrt{1 - \left(\frac{9}{12}\right)^2 - \left(\frac{3}{12}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{1}{12}\right)^2 - \left(\frac{5}{12}\right)^2} \\
 & + \dots + \sqrt{1 - \left(\frac{9}{12}\right)^2 - \left(\frac{5}{12}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{1}{12}\right)^2 - \left(\frac{7}{12}\right)^2} + \dots + \sqrt{1 - \left(\frac{7}{12}\right)^2 - \left(\frac{7}{12}\right)^2} \\
 & + \sqrt{1 - \left(\frac{1}{12}\right)^2 - \left(\frac{9}{12}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{3}{12}\right)^2 - \left(\frac{9}{12}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{5}{12}\right)^2 - \left(\frac{9}{12}\right)^2} \\
 & \left. + 2 \cdot \frac{\sqrt{35}-5}{36} \cdot \left(\sqrt{1 - \frac{61+10\sqrt{35}}{144}} \right) + 2 \cdot \frac{\sqrt{32}-5}{36} \cdot \left(\sqrt{1 - \frac{66+10\sqrt{32}}{144}} \right) \right)
 \end{aligned}$$

$$+2 \cdot \frac{\sqrt{27} - 5}{36} \cdot \left(\sqrt{1 - \frac{77 + 10\sqrt{27}}{144}} \right) + 2 \cdot \frac{\sqrt{20} - 4}{36} \cdot \left(\sqrt{1 - \frac{85 + 8\sqrt{20}}{144}} \right).$$

Ou seja,

$$V \cong 0,518556661... \quad (4.5)$$

Como essa região corresponde a $\frac{1}{8}$ de uma esfera de raio 1, temos que o volume aproximado da esfera é de 8 vezes o valor encontrado em (4.5), ou seja:

$$V_e \cong 8 \times 0,518556661... \cong 4,1484533288...$$

Comparações do volume da esfera com o de outros sólidos

Uma forma de obtermos uma aproximação do volume da esfera é a de inscrever outros sólidos com volume conhecido e calcular seu volume em função do raio da esfera circunscrita. Optamos em destacar a inscrição de alguns sólidos platônicos: o tetraedro, o cubo e o dodecaedro. O octaedro não foi incluído pois ocupa um volume menor que o cubo inscrito na esfera de raio r . Para nossa surpresa, o icosaedro ocupa um volume menor do que o dodecaedro inscrito na esfera de raio r , motivo pelo qual incluímos, nesse capítulo, os cálculos que nos levaram a esse resultado. Outro método de comparação, que nos dá com exatidão o volume da esfera, pode ser encontrado em livros do Ensino Médio, como [4] e [10]. Essa demonstração utiliza o Princípio de Cavalieri como ponto fundamental.

5.1 Sólidos inscritos na esfera de raio r

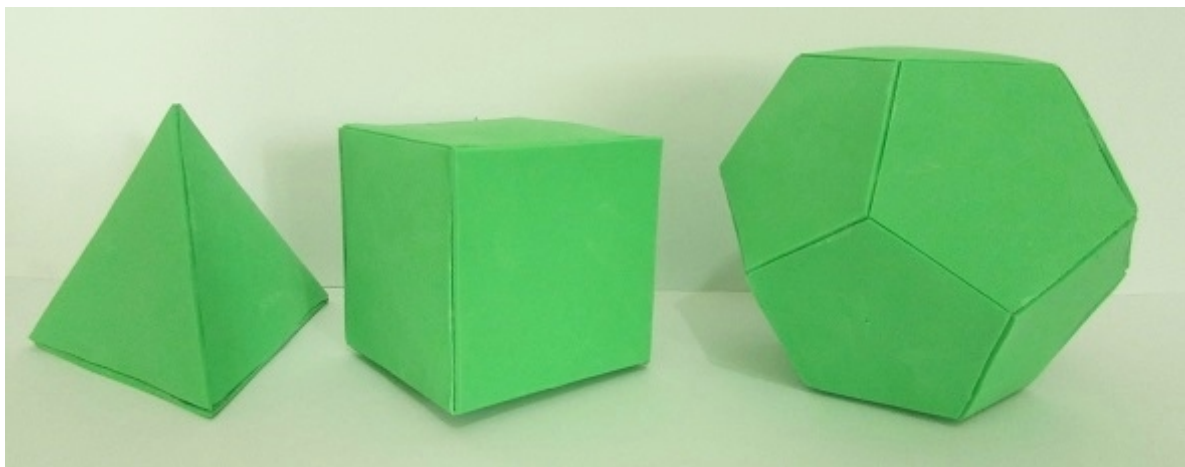


Figura 5.1: Tetraedro, cubo e dodecaedro.

Fonte: A autora.

Utilizamos, nessa seção, alguns dos sólidos platônicos: o tetraedro, o cubo, o dodecaedro e o icosaedro inscritos na esfera, obtendo o volume desses sólidos inscritos na esfera em função do raio r .

Seja uma esfera de raio r e um tetraedro inscrito.

Sejam H a altura do tetraedro, h a altura da face do tetraedro, a a aresta do tetraedro.

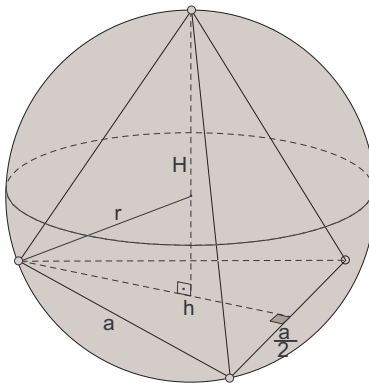


Figura 5.2: Tetraedro inscrito na esfera.

Pelo teorema de Pitágoras, temos

$$H^2 + \left(\frac{2}{3}h\right)^2 = a^2 \quad (5.1)$$

e

$$h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 \implies h^2 = \frac{3a^2}{4} \quad (5.2)$$

Segue de (5.1) e (5.2):

$$H^2 = a^2 - \frac{a^2}{3} \implies H = a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Temos, das propriedades do tetraedro inscrito na esfera, que a distância do centro do tetraedro ao seu vértice corresponde ao raio r da esfera, dessa forma:

$$(H - r)^2 + \left(\frac{2}{3}h\right)^2 = r^2.$$

Segue de (5.1) temos que $\left(\frac{2}{3}h\right)^2 = a^2 - H^2$, assim,

$$(H - r)^2 + a^2 - H^2 = r^2 \implies a = \frac{2\sqrt{6}}{3}r.$$

Como o volume do tetraedro é um terço do produto da área da base pela altura, temos:

$$V_t = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} \cdot a \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3$$

que pode ser expresso em função de r , ou seja,

$$V_t = \frac{\sqrt{2} \left(\frac{2\sqrt{6}}{3} r \right)^3}{12} = \frac{8\sqrt{3}}{27} r^3.$$

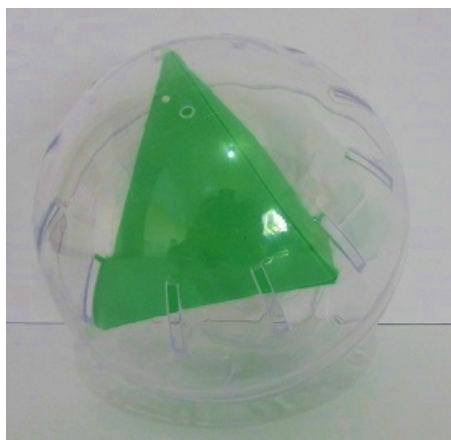


Figura 5.3: Tetraedro inscrito na esfera.

Fonte: A autora.

Como sabemos que o volume da esfera é $\frac{4}{3}\pi r^3$, temos que $V_t = 12,25\%V_e$.

Seja um cubo inscrito em uma esfera de raio r , conforme a figura 5.4. Sejam D a diagonal do cubo, d a diagonal da face e a a aresta do cubo.

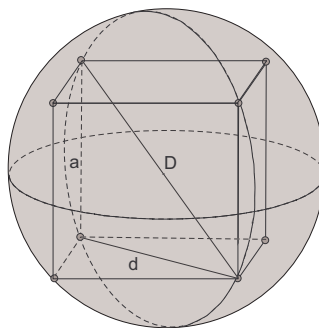


Figura 5.4: Cubo inscrito na esfera.

Temos que $r = \frac{1}{2}D$, ou seja, $D = 2r$. Segue do Teorema de Pitágoras:

$$D^2 = a^2 + (a\sqrt{2})^2,$$

e assim

$$D = a\sqrt{3}.$$

Dessa forma,

$$2r = a\sqrt{3},$$

ou seja

$$a = \frac{2r\sqrt{3}}{3}.$$

Calculando o volume do cubo temos:

$$V_c = a^3 = \left(\frac{2r\sqrt{3}}{3}\right)^3 = \frac{8r^3\sqrt{3}}{9}.$$



Figura 5.5: Cubo inscrito na esfera.

Fonte: A autora.

Sabemos que o volume da esfera é de $\frac{4}{3}\pi r^3$, comparando os volumes dos dois sólidos geométricos, temos: $V_c = 36,75\%V_e$.

Agora considere um dozeaedro inscrito em uma esfera de raio r .

Sabemos que o dozeaedro é formado por 12 pirâmides retas de base pentagonal, ver [2]. Sejam r a aresta lateral da pirâmide, a a aresta do pentágono e h a altura da pirâmide. Sejam ainda, c o apótema da base e b a distância do centro do pentágono até um de seus vértices.

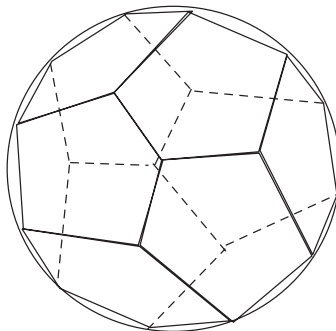


Figura 5.6: Dodecaedro inscrito na esfera.

Pela lei dos cossenos, [4], temos:

$$a^2 = 2b^2 - 2b^2 \cos 72,$$

ou seja

$$b^2 = \frac{a^2}{2(1 - \cos 72)}. \quad (5.3)$$

Pelo Teorema de Pitágoras, temos:

$$r^2 = h^2 + b^2 \implies h = \sqrt{r^2 - b^2}. \quad (5.4)$$

Segue de (5.3) e (5.4) que

$$h = \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{2(1 - \cos 72)}}.$$

Consideremos também que o dodecaedro pode ser decomposto em um cubo de diagonal $2r$ e seis sólidos iguais, ver [2]. Esse cubo possui aresta $l = \frac{2r}{\sqrt{3}}$. A aresta desse cubo forma um triângulo isósceles com duas arestas do dodecaedro com ângulo entre elas de 108° . Assim, pela lei dos cossenos, temos que:

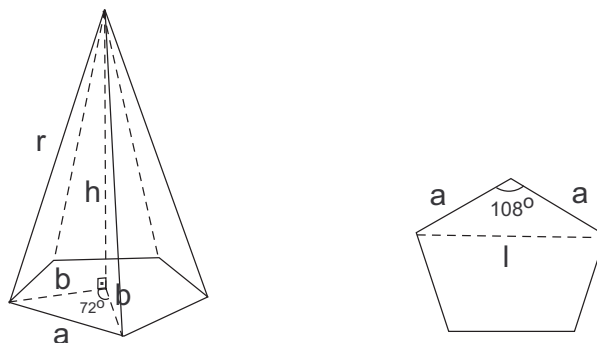


Figura 5.7: Pirâmide com base pentagonal e face do dodecaedro.

$$l^2 = 2a^2 - 2a^2 \cos 108 \implies \frac{4r^2}{3} = 2a^2(1 - \cos 108) \implies a^2 = \frac{2r^2}{3(1 - \cos 108)}. \quad (5.5)$$

O apótema da base pode ser calculado por:

$$b^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + c^2 \implies c = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}},$$

e por (5.3), temos

$$c = a \sqrt{\frac{1}{2(1 - \cos 72)} - \frac{1}{4}}.$$

Como volume do dodecaedro é equivalente ao volume de 12 pirâmides pentagonais, temos

$$V_d = 12 \cdot 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{a \cdot c}{2} \cdot h \implies$$

$$V_d = 10a^2 \sqrt{\frac{1}{2(1 - \cos 72)} - \frac{1}{4}} \cdot \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{2(1 - \cos 72)}}.$$

E por (5.5), temos

$$V_d = \frac{20r^3}{3(1 - \cos 108)} \cdot \sqrt{\frac{1}{2(1 - \cos 72)} - \frac{1}{4}} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{3(1 - \cos 72)(1 - \cos 108)}}.$$

Como $\cos 72 = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ e $\cos 108 = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$, após algumas manipulações algébricas, temos:

$$V_d = \frac{40r^3}{3(3 + \sqrt{5})} \sqrt{\frac{9 + 4\sqrt{5}}{15}}.$$



Figura 5.8: Dodecaedro inscrito na esfera.

Fonte: A autora.

Comparando o volume do dodecaedro inscrito na esfera de raio r e a própria esfera que tem volume de $\frac{4}{3}\pi r^3$, temos:

$$V_d = 66,49\%V_e.$$

Observação 5.1.1 *O icosaedro inscrito na esfera de raio r apresenta um volume menor do que o do dodecaedro inscrito na mesma esfera.*

Considere um icosaedro inscrito na esfera de raio r . Seja l a aresta da face do icosaedro.

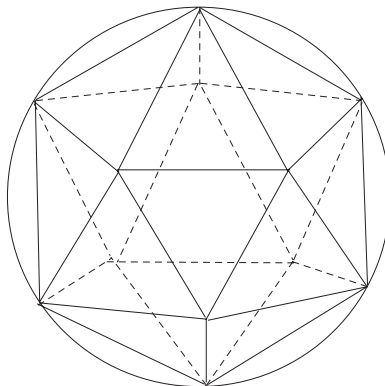


Figura 5.9: Icosaedro inscrito na esfera.

Sabemos, por [2], que o icosaedro pode ser decomposto em 20 pirâmides de base triangular, e tem volume igual a

$$V_i = \frac{5}{12}(3 + \sqrt{5})l^3. \quad (5.6)$$

Cada face do icosaedro é um triângulo equilátero de lado l e área equivalente a $\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$. Sejam H a altura da pirâmide e r a aresta da pirâmide, que corresponde ao raio r da esfera.

Temos que o volume do icosaedro é dado por 20 pirâmides de base com arestas l e altura H . Assim, temos

$$V_i = 20 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{4} H. \quad (5.7)$$

Segue de (5.6) e (5.7) que:

$$\frac{5}{12}(3 + \sqrt{5})l^3 = 20 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{4} H \implies H = \frac{(3 + \sqrt{5})l}{4\sqrt{3}}. \quad (5.8)$$

Pelo Teorema de Pitágoras, na pirâmide, temos:

$$H^2 + \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} l\right)^2 = r^2 \implies H = \sqrt{r^2 - \frac{1}{3}l^2} \quad (5.9)$$

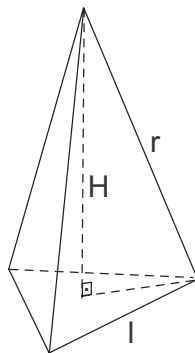


Figura 5.10: Pirâmide com base triangular.

De (5.8) e (5.9), temos

$$\frac{(3 + \sqrt{5})l}{4\sqrt{3}} = \sqrt{r^2 - \frac{1}{3}l^2}.$$

Após algumas manipulações algébricas, temos

$$l = 2r \sqrt{\frac{2}{5 + \sqrt{5}}}. \quad (5.10)$$

De (5.10) e (5.6) segue que

$$V_i = \frac{5}{12}(3 + \sqrt{5}) \cdot \left(2r \sqrt{\frac{2}{5 + \sqrt{5}}} \right)^3.$$

Comparando o volume do icosaedro inscrito na esfera de raio r e a própria esfera que tem volume de $\frac{4}{3}\pi r^3$, temos:

$$V_i = 60,54\%V_e.$$

Como os volumes dos sólidos platônicos, quando comparados ao volume da esfera de raio r , nos dão uma aproximação de, no máximo 66,49%, vamos abordar o Princípio de Cavalieri, na sessão seguinte e apresentar sua utilização no cálculo do volume da esfera.

5.2 O Princípio de Cavalieri e o volume da esfera

O “princípio” de Cavalieri é na verdade um teorema, que ele demonstra primeiro para áreas e depois para volumes. O texto original, de Cavalieri, encontra-se em latim, mas também foi traduzido para o inglês. Nele, ao que parece o matemático é repetitivo mostrando a preocupação em esclarecer bem as ideias. No entanto, a demonstração é de difícil entendimento devido a ausência de simbologia matemática e o uso de uma linguagem arcaica, mesmo no texto traduzido para o inglês, encontrado em [9].

Segundo o matemático, quaisquer figuras planas desenhadas entre as mesmas retas paralelas equidistantes são iguais ou proporcionais, bem como sólidos equidistantes dos mesmos planos paralelos.

Devido a essa dificuldade, para fazermos a demonstração do teorema de Cavalieri utilizaremos somas de Riemann.

Teorema 5.2.1 *Teorema de Cavalieri para áreas:*

Considere R e S duas regiões do plano em um sistema de coordenadas Oxy , onde R é a região limitada por $x = 0$, $x = b$ e pelos gráficos de funções contínuas $y = f_1(x)$ e $y = f_2(x)$ com $0 \leq x \leq b$ e $f_1(x) \leq f_2(x)$ para $x \in \mathbb{R}$, e a região S é limitada por $x = 0$, $x = b$ e pelos gráficos das funções contínuas $y = g_1(x)$ e $y = g_2(x)$ com $0 \leq x \leq b$ e $g_1(x) \leq g_2(x)$ para todo x real.

Suponhamos que existe $k > 0$ tal que $f_2(x) - f_1(x) = k[g_2(x) - g_1(x)]$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

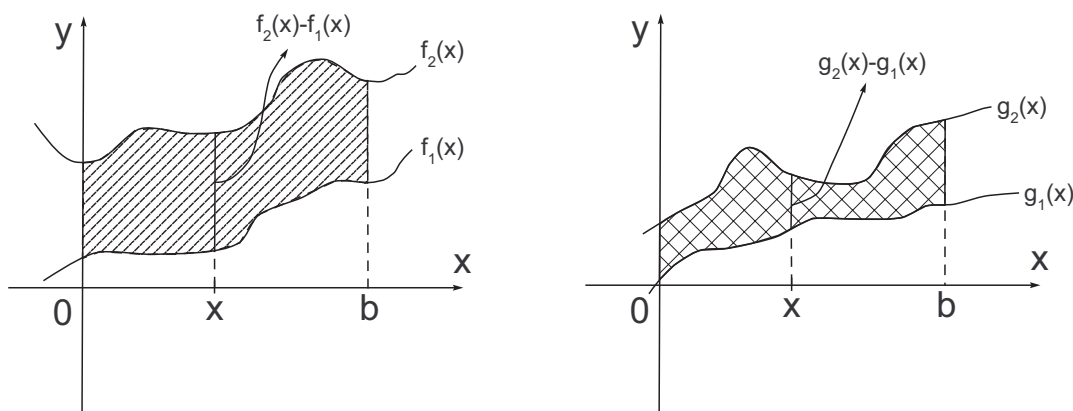


Figura 5.11: Regiões R e S .

Então a área da região R (A_R) é igual a k vezes a área da região S (A_S), ou seja: $A_R = kA_S$.

Demonstração: Considere R a região limitada por $x = 0$, $x = b$, $y = f_1(x)$ e $y = f_2(x)$, com $f_1(x) \leq f_2(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Considere S a região limitada por $x = 0$, $x = b$, $y = g_1(x)$ e $y = g_2(x)$, com $g_1(x) \leq g_2(x)$. Utilizando Somas de Riemann podemos calcular a área das regiões R e S .

Seja $x \in [0, b]$, temos que a área da região R é dada por:

$$A_R = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f_2(c_i) \Delta x_i - \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f_1(c_i) \Delta x_i.$$

Pelas propriedades dos limites, ver [3], temos

$$A_R = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [f_2(c_i) - f_1(c_i)] \Delta x_i.$$

Suponhamos que existe $k > 0$ tal que $f_2(x) - f_1(x) = k[g_2(x) - g_1(x)]$, dessa forma temos

$$A_R = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n k[g_2(c_i) - g_1(c_i)]\Delta x_i.$$

Como k é uma constante, temos

$$A_R = k \cdot \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [g_2(c_i) - g_1(c_i)]\Delta x_i.$$

Assim,

$$= k \cdot \left[\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g_2(c_i)\Delta x_i - \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g_1(c_i)\Delta x_i \right] = k \cdot A_S.$$

■

Teorema 5.2.2 *Teorema de Cavalieri para volumes:*

Considere o sistema de coordenadas Oxy e sejam R e S dois sólidos finitos e limitados por $z = 0$, $z = c > 0$ e por funções do tipo $y = f_1(x, z)$, $x = g_1(y, z)$ e $y = f_2(x, z)$, $x = g_2(y, z)$, respectivamente. Considere α um plano, paralelo a z , que intercepta ambos os sólidos em $z = t$. Sejam R_t e S_t as interseções dos sólidos R e S com o plano α . Suponhamos que exista um $k > 0$ tal que $A_{R_t} = k \cdot A_{S_t}$ para todo t , $0 \leq t \leq c$. Então $V(R) = k \cdot V(S)$.

Demonstração:

O volume do sólido R pode ser calculado por:

$$V(R) = \lim_{c \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^c A_{R_t}.$$

Por hipótese, temos $A_{R_t} = k \cdot A_{S_t}$.

Logo

$$V(R) = \lim_{c \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^c A_{R_t} = \lim_{c \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^c k \cdot A_{S_t} = k \cdot \lim_{c \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^c A_{S_t} = k \cdot V(S).$$

■

Levando-se em consideração o teorema 5.2.2, segue a demonstração do volume da esfera desenvolvida no nível básico de ensino:

Proposição 5.2.3 *O volume V de uma esfera de raio r é dado por:*

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Demonstração: Considere uma superfície esférica S de raio r , apoiada em um plano horizontal α e ao lado um cilindro equilátero C de raio da base r também sobre esse mesmo plano. Do cilindro C vamos retirar dois cones iguais, com bases que coincidem com as do

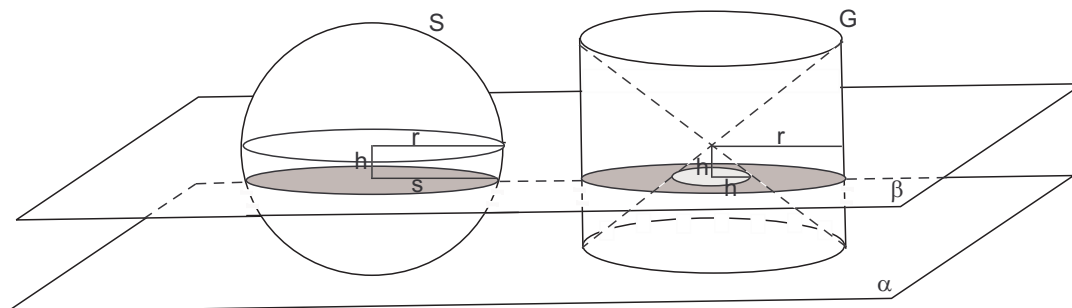


Figura 5.12: Interseção do plano β com os sólidos S e G .

cilindro e vértices no ponto médio de seu eixo, cujo volume corresponde a $\frac{1}{3}\pi r^3$. Seja G o sólido obtido.

Seja β um plano paralelo a α , que intercepta a superfície esférica e o sólido G , distante h de seus centros (independente de ser abaixo ou acima destes), determinando na superfície esférica uma circunferência de raio s e no sólido G uma coroa circular limitada por duas circunferências, uma de raio r e outra de raio h (já que os cones retirados também eram equiláteros).

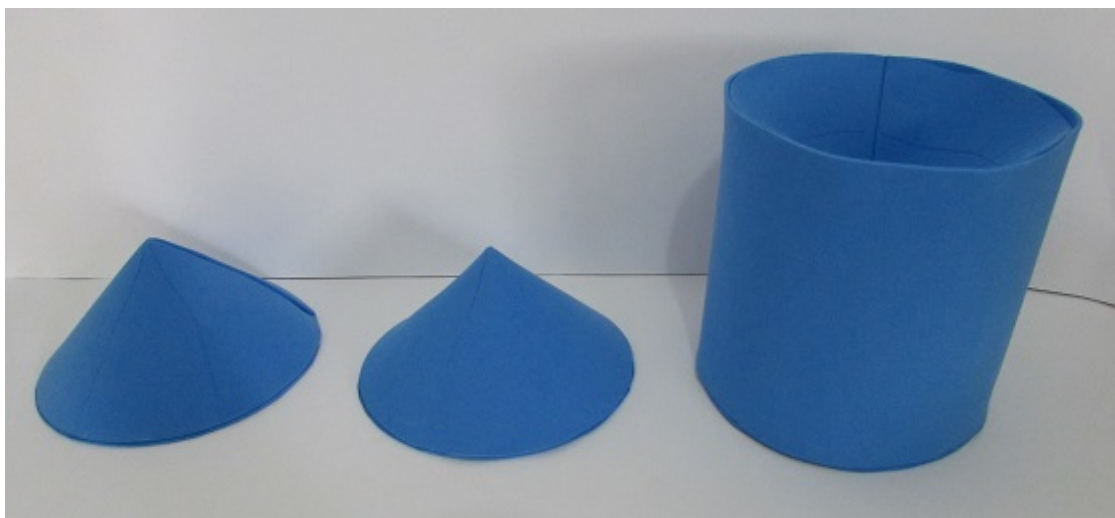


Figura 5.13: Sólido G e os dois cones equiláteros.

Fonte: A autora.

A área do círculo de $S \cap \beta$ é πs^2 .

Temos que $s^2 + h^2 = r^2$ ou seja, $s^2 = r^2 - h^2$. Logo,

$$\pi s^2 = \pi(r^2 - h^2).$$

Dessa forma, a área da coroa circular é $\pi r^2 - \pi h^2$, que é igual a área do círculo de raio s .

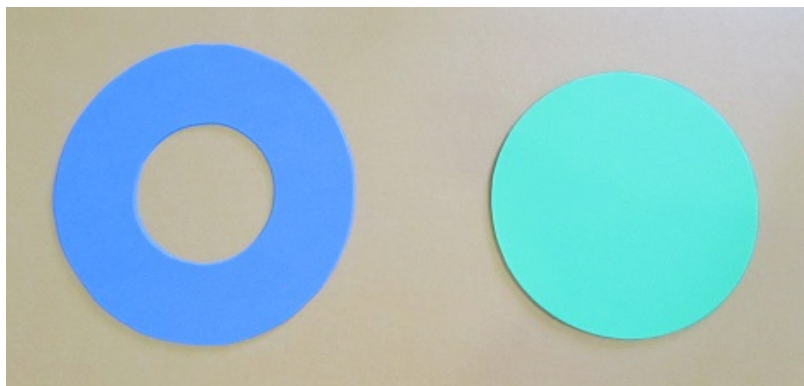


Figura 5.14: Coroa circular e círculo de raio s .

Fonte: A autora.

Assim, concluímos, pelo Princípio de Cavalieri, que S e G , têm o mesmo volume.

Portanto, basta calcular o volume do sólido G para obtermos o volume de S .

Temos que o volume de S é dado pela diferença entre o volume do cilindro C e o volume dos dois cones iguais, equiláteros, retirados anteriormente, ou seja:

$$V_G = \pi r^2 \cdot 2r - 2 \cdot \frac{1}{3} \pi r^3.$$

Portanto,

$$V_S = V_G = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

■

A quadratura do círculo e o volume da esfera



Figura 6.1: Esfera e cubo com volumes iguais.

Fonte: A autora.

Um meio para calcular o volume da esfera seria também transformá-la em outro sólido cujo cálculo do volume é mais simples, como um prisma, por exemplo. Para isso, faz-se necessário primeiro estudarmos um problema clássico da Matemática conhecido como a quadratura do círculo, que consiste em construir um quadrado de mesma área de um círculo dado, utilizando apenas régua e compasso. Este problema mobilizou matemáticos durante séculos, principalmente os gregos, por seu desafio intelectual.

Desde o século XIX sabemos que a quadratura do círculo não possui solução apenas com uso de régua e compasso, pois π é um número transcendente, demonstrado por Ferdinand Von Lindemann em 1882, ou seja, π não é solução de nenhuma equação algébrica com coeficientes racionais, ver [8]. Isso não significa que esse quadrado não exista, ele apenas não pode ser obtido somente com o uso de régua e compasso.

6.1 A quadratura do círculo

Seja Γ uma circunferência dada de raio r . Considere um triângulo retângulo ABC de ângulo reto em C , com altura r e base $\overline{AB} = 2\pi r$, que obtemos ao rolar a circunferência Γ sobre uma reta suporte.

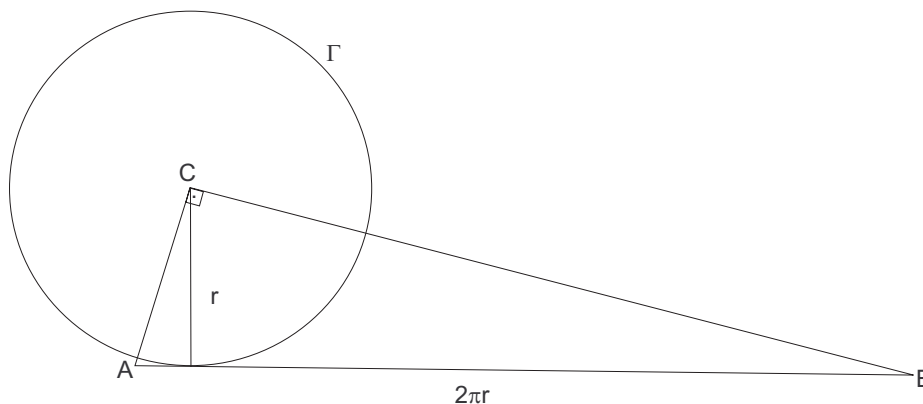


Figura 6.2: Círculo Γ e triângulo ABC .

A área A_t do triângulo ABC é a mesma área A_c do círculo limitado pela circunferência Γ .

Podemos encontrar um paralelogramo $ABDE$ de base AB e altura $\frac{r}{2}$ cuja área é igual a área um triângulo desenhado na figura 6.2.

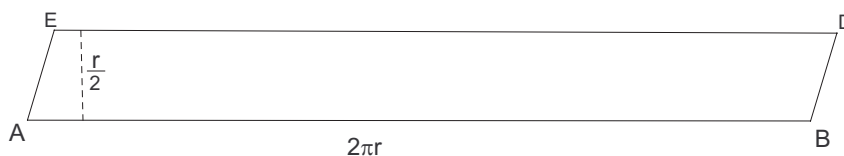


Figura 6.3: Paralelogramo $ABDE$.

Esse paralelogramo, por sua vez, pode ser transformado em um retângulo $ABFG$ de base AB e altura $\frac{r}{2}$, como ilustrado na figura 6.4.

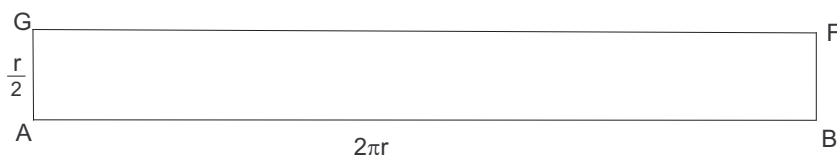


Figura 6.4: Retângulo $ABFG$.

Considere o segmento de medida $\overline{AB} + \overline{BF} = \overline{AF}$ como o diâmetro de uma semicircunferência Ω . Nela, construímos um triângulo retângulo AFH de base AF e altura passando

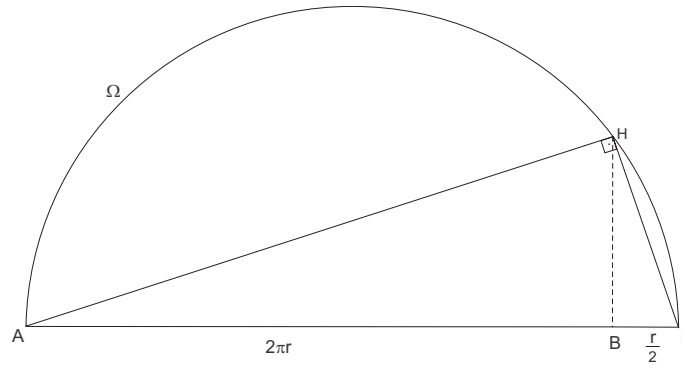


Figura 6.5: Semicircunferência Ω e triângulo retângulo AFH.

por B e que intercepta Ω no ponto H.

Pelas relações métricas no triângulo retângulo AFH, ver [4], temos:

$$\overline{BH}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{BF}$$

E como a área do retângulo ABFG é dada por $\overline{AB} \cdot \overline{BF}$, temos que:

$$A_{\Gamma} = \overline{BH}^2,$$

completando assim a quadratura do círculo.

Portanto, o quadrado BHIJ, de lado com medida \overline{BH} tem mesma área do círculo limitado pela circunferência Γ .

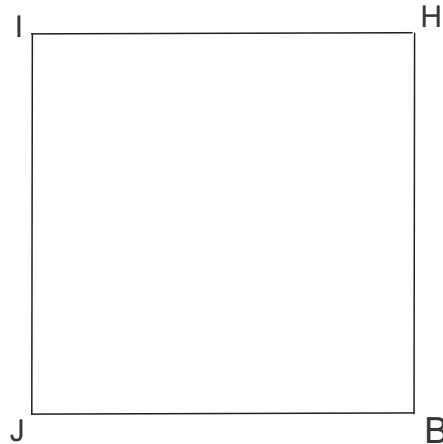


Figura 6.6: Quadrado BHIJ.

6.2 O volume da esfera

Considere uma esfera S de raio r e volume V_e .

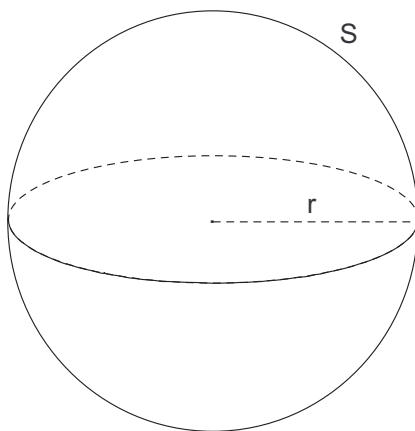


Figura 6.7: Esfera de raio r e volume V_e .

Com o círculo máximo de S , construímos um cone de altura igual a $4r$.

O volume do cone é dado por $V_c = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot 4r = \frac{4}{3} \pi r^3 = V_e$.

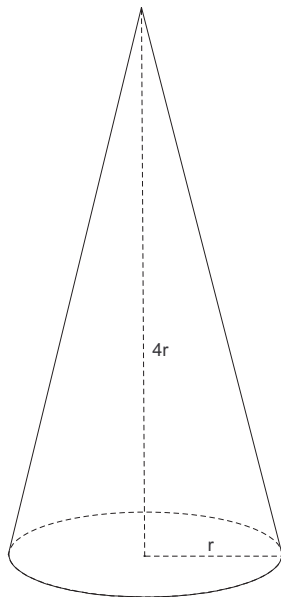


Figura 6.8: Cone com área da base igual a πr^2 e altura $4r$.

O círculo máximo da esfera que representa a base do cone pode sofrer uma quadratura e então podemos comparar o volume do cone com o volume de uma pirâmide de base quadrada $ABCD$ e altura $4r$, pois seu volume é dado por $\frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot 4r$.

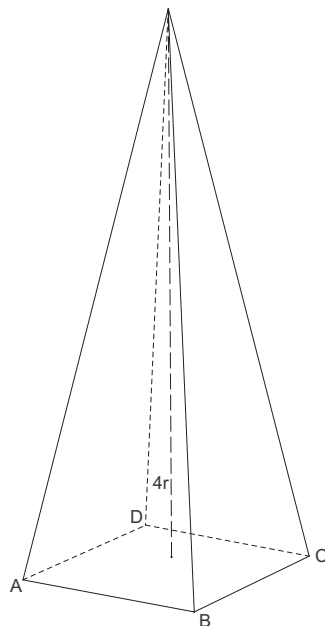
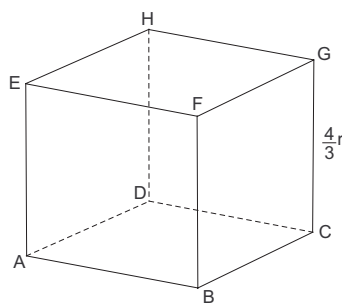


Figura 6.9: Pirâmide com área da base igual a πr^2 e altura $4r$.

E como o volume da pirâmide é dado por $\frac{1}{3}$ do volume do prisma de mesma base, podemos construir um prisma ABCDEFGH com base ABCD igual à da pirâmide e altura correspondente a $\frac{1}{3}$ de $4r$.



Assim, encontramos um prisma de base quadrada cujo volume é o mesmo da esfera, ou seja, $\frac{4}{3}\pi r^3$.

Considerações Finais

É de fundamental importância que reflitamos os cálculos obtidos nas tentativas de aproximação do volume da esfera apresentados ao longo do texto.

Utilizando as somas de Riemann e os cilindros na aproximação do volume da esfera obtivemos um resultado satisfatório, que para $n = 10$ nos dá uma aproximação com menos de 0,2% de erro.

Com os prismas de base quadrada tivemos um processo mais trabalhoso para o cálculo do volume aproximado da esfera. Consideramos os prismas cujos centros das bases estavam dentro do círculo máximo da esfera, o que gerou algumas condições de existência e exigiu maior minúcia nos cálculos.

Os cálculos realizados para a aproximação do volume da esfera através de prismas de base retangular também se mostraram exaustivos e com várias condições de existência, pois neste caso, também consideramos os primas retangulares cujo centro da base estivesse contido no círculo máximo da esfera.

Além disso, ao utilizar prismas de base quadrada e retangular, que estivessem com a base contida no círculo máximo da esfera, para encontrar uma aproximação do volume da esfera de raio 1, o processo além de cansativo tornou-se difícil de generalização.

Isso não significa que o aluno do Ensino Médio não possa compreender as tentativas de calcular o volume da esfera, realizadas ao longo do texto, com base no cálculo infinitesimal. Pelo contrário, pois ao estudar progressões aritméticas e geométricas o aluno constrói conceitos de limites e somas infinitesimais mesmo sem a formalização desses conceitos. Sem contar que esses conteúdos eram abordados no ensino básico até a Reforma Capanema, em 1961.

Comparar volumes de objetos conhecidos aos volumes de objetos desconhecidos é uma forma de mensurá-los. É nesse intuito que realizamos os cálculos dos volumes de alguns sólidos de Platão inscritos na esfera de raio r .

Calculados os volumes do tetraedro, do cubo, do dodecaedro e do icosaedro inscritos na esfera de raio r percebemos que o tetraedro, o cubo e o dodecaedro apresentaram um volume crescente em relação ao volume da esfera. No entanto, para nossa surpresa, o icosaedro tem

um volume menor do que o volume do dodecaedro inscrito na mesma esfera. Dessa forma, percebemos que o aumento do volume do objeto inscrito na esfera não depende somente da quantidade de faces que o compõe, mas também de quantos lados essas faces possuem.

Pelo fato de obtermos uma aproximação do volume da esfera de no máximo 66,49% com a inscrição dos sólidos platônicos na esfera de raio r , passamos a estudar o Princípio de Cavalieri e a demonstração do volume da esfera abordada nos livros didáticos.

Essa demonstração toma como base a comparação de “fatias” da esfera com “fatias” de um sólido formado por um cilindro de altura igual ao diâmetro da esfera e base igual ao círculo máximo da esfera retirados dois cones equiláteros de altura e raio da base iguais a r . Essas “fatias” estão relacionadas por áreas de círculos, coroas circulares e pelo Teorema de Pitágoras, conteúdos abordados nos anos finais do Ensino Fundamental.

Destacamos também a apresentação de um prisma de base quadrada de mesmo volume da esfera que pode ser obtido baseando-se na Quadratura do Círculo, problema histórico da Matemática.

Por todos os aspectos apresentados anteriormente, somos levados a acreditar que entre os métodos desenvolvidos ao longo do texto para calcular o volume da esfera, aquele que utiliza o Princípio de Cavalieri é o mais acessível para os alunos, pois se baseia em conhecimentos já adquiridos pelos estudantes, além da precisão dos resultados, sendo uma demonstração de possível entendimento, com cálculos simples e que dependem apenas do raio da esfera.

Vale destacar a importância de pesquisarmos, enquanto educadores, formas diferentes de conduzir o conteúdo daquelas apresentadas nos livros didáticos adotados, pois nosso objetivo principal é mediar o processo de ensino-aprendizagem, auxiliando a formação de um cidadão crítico e atuante.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Camargo, Ivan de. Boulos, Paulo. *Geometria analítica*. São Paulo: Pearson, 2005.
- [2] Carneiro Jr, Mario Pinto. *Algumas técnicas de construção de alguns poliedros e suas aplicações no ensino*. Disponível em <http://bit.proformat-sbm.org.br/xmlui/handle/123456789/1510>. Acesso em: nov. 2014.
- [3] Guidorizzi, Hamilton L. *Um Curso de Cálculo*. Volume 1. Rio de Janeiro: LTC Editora, 2008.
- [4] Iezzi, Gelson et. al. *Matemática: ciência e aplicações*. Volume 2. São Paulo: Saraiva, 2010, p.241-242.
- [5] Leithold, Louis. *O Cálculo com Geometria Analítica*. Volume 1. São Paulo: Harbra, 1994.
- [6] Muniz Neto, Antônio Caminha. *Geometria - Coleção Profmat*. SBM, 2013.
- [7] Paterlini, Roberto Ribeiro. *Os Teoremas de Cavalieri*. Disponível em http://www.dm.ufscar.br/~ptlini/paterlini_cavalieri.pdf. Acesso: out. 2014.
- [8] Santos, Gilvaneide Lucena dos. *Número π : histórico, sua irracionalidade e transcendência*. Disponível em <http://www.ucb.br/sites/100/103/TCC/12005/GilvaneideLucenadosSantos.pdf>. Acesso: jan. 2015.
- [9] Smith, David Eugene. *A source book in Mathematics*. Nova Iorque: McGRAW-HILL Book Company, 1929, p.605-609.
- [10] Souza, Joamir R. de. *Novo olhar matemática*. Volume 3. São Paulo: FTD, 2010, p.134.