UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CCE - DMA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL
EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Desigualdades envolvendo funções convexas à direita e funções côncavas à esquerda

ISSAO MASSAGO

Orientador: Prof. Dr. Juan Amadeo Soriano Palomino

Maringá-PR

2015

ISSAO MASSAGO

Desigualdades envolvendo funções convexas à direita e funções côncavas à esquerda

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.
Área de concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Juan Amadeo Soriano Palomino

Maringá-PR
2015

ISSAO MASSAGO

DESIGUALDADES ENVOLVENDO FUNÇÕES CONVEXAS À DIREITA E FUNÇÕES CÔNCAVAS À ESQUERDA

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. Juan Amadeo Soriano Palomino
DMA/Universidade Estadual de Maringá (Presidente)

Prof. Dr. Marcio Antonio Jorge da Silva
Universidade Estadual de Londrina

Profa. Dra. Luciene Parron Gimenes Arantes
DMA/Universidade Estadual de Maringá

Aprovada em: 27 de fevereiro de 2015.
Local de defesa: Auditório do DMA, Bloco F67, campus da Universidade Estadual de Maringá.

Dedico este a meu pai, Akira Massago, que sonhou comigo por este dia, mas seguiu para outro mundo há quase uma década.

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus, por permitir a materialização do sonho de muitos anos, a superação de dificuldades e obstáculos.

À SBM (Sociedade Brasileira de Matemática) pela iniciativa e coragem em criar o Mestrado em moldes diferentes dos conhecidos até então.

À Universidade Estadual de Maringá, instituição associada, que por meio do grupo administrativo, corpo docente e estruturas permitiram o bom funcionamento do curso.

À CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento do Pessoal de Nível Superior) pelo apoio financeiro.

Ao Governo do Estado do Paraná pelo afastamento concedido durante a realização do PROFMAT (Programa do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional).

Aos colegas do curso de PROFMAT - turma 2013, pela convivência.

Aos professores, os quais dedicaram seu tempo e sua sabedoria, acreditando nos educandos em busca de novos horizontes.

Ao meu orientador, Professor Dr. Juan Amadeo Soriano Palomino, por ter confiado na minha capacidade, pois de outra forma, jamais teria escolhido tema como este. A dedicação e paciência a mim dispensada durante todo tempo de elaboração até a finalização deste trabalho, ultrapassou em muito o papel do orientador. Ele acreditou na potencialidade do orientando mais do que o próprio orientando, pois os conhecimentos transmitidos e construídos em conjunto chegaram ao grau jamais pensados estar ao meu alcance.

À professora Dra. Luciene Parron Gimenes Arantes pelas sugestões valiosas que contribuíram em muito na finalização deste trabalho.

Por fim, meu mais sincero agradecimento a Suely, minha amada esposa, que precisou me aturar e assumir responsabilidades que não eram suas, resolvendo muitas vezes os problemas que não eram seus, para possibilitar minha permanência no curso, pois sem a sua compreensão e ajuda não teria outra escolha a não ser o abandono do tão sonhado PROFMAT, devido aos problemas alheios ao curso os quais surgiram durante a realização do mesmo, em especial, em meados de 2014.

“O que sabemos é uma gota; o que ignoramos é um oceano. Mas o que seria o oceano se não infinitas gotas?”

(Isaac Newton).

Resumo

A Matemática é vista, por muitos alunos, como um obstáculo intransponível. Porém, muitas vezes, o problema não está nos conteúdos ensinados na escola, mas sim na maneira como estes conteúdos são ensinados por muito dos professores. Assim, surge a necessidade em resgatar sua origem, ou melhor, a demonstração de regras e de fórmulas. As desigualdades, em especial, as que envolvem funções convexas à direita e funções côncavas à esquerda chamam atenção por envolverem sequências de procedimentos matemáticos para serem demonstrados, mesmo que cada passo a ser demonstrado, a princípio, seja não muito complexo. Sendo assim, estas desigualdades servem para exemplificar as demonstrações de teoremas, aparentemente simples, que exigem certos cuidados, como sequências de raciocínios matemáticos, além de conhecimentos prévios. O objetivo principal deste trabalho é obter de forma rigorosa, as desigualdades numéricas importantes através das funções convexas à direita e funções côncavas à esquerda.

Palavras chaves: Desigualdades numéricas, funções convexas, funções côncavas

Abstract

Mathematics is seen by many students as an insurmountable obstacle. However, frequently, the problem is not the content taught in school, but in the way these contents are taught by many of the teachers. Therefore, the need arises to rescue their origin, or rather, the demonstration of rules and formulas. Inequalities in particular those involving right convex functions and left concave functions deserve attention because they involve sequences of mathematical procedures to be demonstrated, even if each step to be shown, in principle, is not very complex. Thus, these inequalities serve to exemplify the apparently simple theorems of statements that require certain precautions, such as mathematical reasoning sequences, and prior knowledge. The main objective of this work is to strictly, the important numerical inequalities through the right convex functions and left concave functions.

Keywords: Numerical inequalities, convex functions, concave functions

Sumário

Introdução

Desde o início da nossa alfabetização, no nosso dia a dia, nos deparamos com certas desigualdades. A simples contagem envolve as desigualdades, pelo fato de fazer comparação. O fato de comparar algumas situações, como perguntar se R$ 50,00 é suficiente para comprar certa quantidade de um determinado produto, envolve desigualdades. Estas situações parecem óbvias, mas podem apresentar raciocínios complexos, escondendo raciocínios não tão simples como imaginamos.

Posteriormente, durante o processo de escolarização, esta mesma desigualdade aparece com denominação de inequações nos livros do Ensino Fundamental e em alguns dos livros do Ensino Médio.

Em muitos livros didáticos de Matemática do Ensino Fundamental, listados no final deste trabalho como analisados, a resolução das equações é feita por meio de comparações, ou melhor, usa o sistema de balança. Na resolução das inequações, quase sempre se resolve de forma análoga a de equações, sendo que alguns autores evitam casos em que essas precisam ser multiplicadas por fator negativo. No Ensino Médio, o estudo de gráfico das equações e das inequações aparece com frequência como estudo de sinais do gráfico das funções. Porém, muitas vezes se resume em simples aplicações de regras, o que leva os alunos a repetirem os modelos de soluções, podendo não contribuir muito no desenvolvimento do raciocínio dos alunos. E, ainda, tanto no Ensino Fundamental, como no Ensino Médio, observa-se que na maioria dos casos envolve apenas uma variável.

Como esta prática reduz o trabalho docente dos menos preparados, acaba sendo utilizada por alguns, uma vez que a demonstração de regras, fórmulas e sequências de raciocínio exigem mais dos professores.

> “Para construção de uma demonstração, deve-se selecionar e explicitar as evidências elementares que constituirão o ponto de partida necessário e que dependerão, fundamentalmente, do canal de comunicação que vier a ser estabelecido entre o emissor e o receptor de mensagem.” (MACHADO, 1991, p. 30)

É verdade que as demonstrações exigem mais dos docentes, contudo, elas contribuem no desenvolvimento dos educandos, pois levam a analisar situações problema apresentadas de forma lógica e sequencial, muitas vezes traduzindo em alegria para aqueles que conseguem construir estas sequências de raciocínios matemáticos, pois muitos sentem-se satisfeitos ao resolver o desafio proposto.

E, ainda, "[...] com material adequado e orientação específica, independente da série escolar, o aluno passará gostar de Matemática e estudá-la com prazer e ânimos dobrados" (KUMON, 2000, p. 18), tendo em vista que a aprendizagem ocorre quando os alunos gostam do que estão estudando, ou melhor, se estes não conseguem compreender os conteúdos estudados não demonstram o interesse, nem o prazer em estudar.

Antes de repensarmos nos materiais utilizados e metodologias de ensino, devemos refletir acerca do fracasso escolar e nossas reações diante deste fato, ou melhor,

> "Quando falamos de didática de manutenção do chamado quadro de 'fracasso escolar', nossa mente remete-nos a algo semelhante a uma revolução contra o sistema de ensino, pois gozamos de um campo de liberdade, vontade livre e autonomia, o que nos faz reagir e alimentar a vontade de progredir, crescer, aprender. No entanto, qual a origem do quadro de fracasso? O que significativamente se torna preocupante no quadro de fracasso?" (ROSA, 2004, p. 13)

Não temos muita liberdade na escolha dos conteúdos, tendo em vista a obrigatoriedade de se trabalhar os constantes nos parâmetros curriculares nacionais e estaduais e, ainda, nem sempre os livros didáticos distribuídos aos alunos na escola pública atendem a necessidade dos professores, uma vez que precisamos assinalar duas opções dentre as coleções de livros disponíveis no PNLD (Programa Nacional do Livro Didático), do Ministério da Educação, sendo de editoras distintas, mesmo que não atendam plenamente as necessidades dos docentes e dos educandos.

É importante afirmar que a maioria dos livros didáticos de Matemática do Ensino Médio, listados no final deste trabalho como analisados, não faz menção nem sobre tricotomia. Porém, este fato não isenta a responsabilidade dos professores da Educação Básica em empenhar na melhoria do ensino de matemática, pois não há nada que impeça o professor de adotar uma metodologia que vise à demonstração. E como as desigualdades parecem interessantes para as demonstrações as quais envolvem diferentes conhecimentos matemáticos, foram selecionados os conteúdos que abordam desigualdades envolvendo funções convexas à direita e funções côncavas à esquerda, pois nelas, ao mesmo tempo que trabalham desigualdades, envolvem as funções, contribuindo para analisarmos o raciocínio matemático que dá suporte para demonstrações.

O presente trabalho foi dividido de seguinte maneira:

∗ O Capítulo 1 contempla informações preliminares, ou melhor, definições e teoremas, os quais servem de suporte aos capítulos seguintes;

∗ O Capítulo 2 aborda a demonstração das desigualdades envolvendo funções convexas à direita e suas aplicações;

∗ O Capítulo 3 mostra a demonstração das desigualdades envolvendo funções côncavas à esquerda e suas aplicações;

∗ O Capítulo 4 trata da demonstração das desigualdades envolvendo funções côncavas à esquerda e convexas à direita e suas aplicações.

Cabe registrar, ainda, que do segundo ao quarto capítulo deste trabalho, nossa principal referência é o livro *Algebraic Inequalities Old and New Methods* [2], da autroria de Vasile Cîrtoaje.

Capítulo 1

Preliminares

As funções convexas e côncavas aparecem em alguns dos livros didáticos do Ensino Médio, listados como analisados no final deste trabalho, sendo estas, funções exponenciais e, em maioria dos casos, o seu objetivo é o estudo de sinais das funções quadráticas, mesmo que estas sejam utilizadas para demonstrar algumas desigualdades. Para definirmos estas funções, usaremos como base [1], [2] e [5].

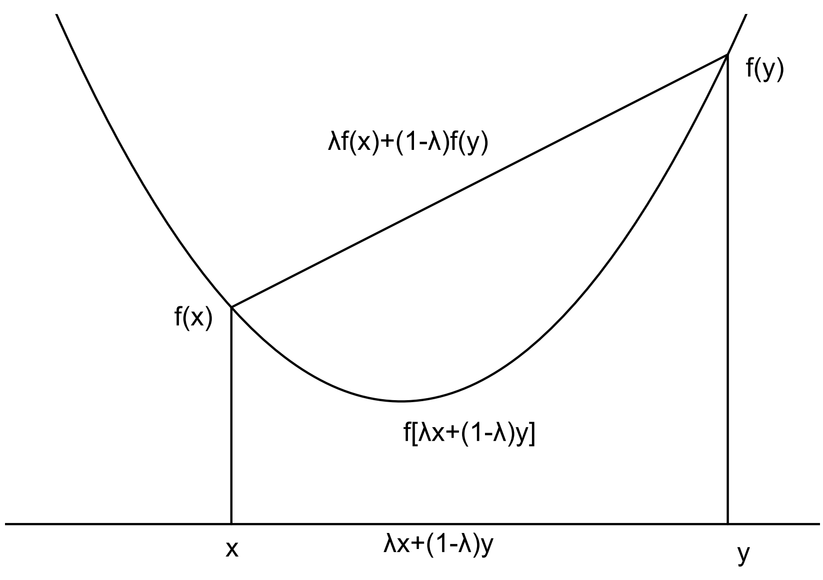
Neste trabalho, denotamos por I um intervalo contido em $\mathbb{R}$.

Definição 1.1. Uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é dita *convexa* em I quando dados $x, y \in I$ tais que $x \neq y$, tem-se que

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \tag{1.1}$$

para todo $\lambda \in [0, 1]$.

A Definição 1.1 pode ser facilmente compreendida através da figura abaixo.



Definição 1.2. Uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é dita *estritamente convexa* em I quando dados $x, y \in I$ tais que $x \neq y$, tem-se que

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y), \tag{1.2}$$

para todo $\lambda \in (0,1)$.

Exemplo 1.3. Dada a função $f(x) = x^2$, para todo $x \in \mathbb{R}$, mostraremos que f é estritamente convexa em $\mathbb{R}$.

Para $f(x) = x^2$, sendo todo $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $x \neq y$ e $\lambda \in (0,1)$, devemos provar que (1.2) é válida, ou seja,

$$(\lambda x + (1-\lambda)y)^2 < \lambda x^2 + (1-\lambda)y^2. \tag{1.3}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
\lambda x^2 + (1-\lambda)y^2 - (\lambda x + (1-\lambda)y)^2 &= \lambda x^2 + (1-\lambda)y^2 - \lambda^2 x^2 - 2\lambda(1-\lambda)xy - (1-\lambda)^2 y^2 \\
&= \lambda(1-\lambda)x^2 - 2\lambda(1-\lambda)xy + \lambda(1-\lambda)y^2 \\
&= \lambda(1-\lambda)(x^2 - 2xy + y^2) \\
&= \underbrace{\lambda}_{>0}\underbrace{(1-\lambda)}_{>0}\underbrace{(x-y)^2}_{>0} > 0,
\end{aligned}$$

provando (1.3).

Exemplo 1.4. Dada a função $f(x) = x^4$, para todo $x \in \mathbb{R}$, mostraremos que f é estritamente convexa em $\mathbb{R}$.

Para $f(x) = x^4$, sendo todo $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $x \neq y$ e $\lambda \in (0,1)$, devemos provar que (1.2) é válida, ou seja,

$$(\lambda x + (1-\lambda)y)^4 < \lambda x^4 + (1-\lambda)y^4. \tag{1.4}$$

Observemos que

$$\begin{aligned}
(\lambda x + (1-\lambda)y)^4 &= [(\lambda x + (1-\lambda)y)^2]^2 \\
&\underbrace{<}_{\text{por (1.3)}} [\lambda x^2 + (1-\lambda)y^2]^2 \\
&\underbrace{<}_{\text{por (1.3)}} \lambda x^4 + (1-\lambda)y^4,
\end{aligned}$$

o que implica em (1.4).

Exemplo 1.5. Dada a função $f(x) = e^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$, mostraremos que f é estritamente convexa em $\mathbb{R}$.

Para $f(x) = e^x$, sendo todo $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $x \neq y$ e $\lambda \in (0,1)$, devemos provar que

$$e^{\lambda x+(1-\lambda)y} < e^{\lambda x} + e^{(1-\lambda)y}. \tag{1.5}$$

Como

$$\begin{aligned} e^{\lambda x} + y^{(1-\lambda)y} - e^{\lambda x+(1-\lambda)y} &= e^{\lambda x} + \frac{e^y}{e^{\lambda y}} - \frac{e^{\lambda x}.e^y}{e^{\lambda y}} \\ &= \frac{e^{\lambda x}.e^{\lambda y} + e^y - e^{\lambda x}.e^y}{e^{\lambda y}} \\ &= \frac{e^{\lambda x(\lambda y - y)} + e^y}{e^{\lambda y}} \\ &= \frac{e^{\lambda x \lambda y} + e^{(\lambda x y)}.e^y}{e^{\lambda x y}.e^y} \\ &= \frac{\overbrace{e^{\lambda x \lambda y} + e^{(\lambda x+1)y}}^{>0}}{\underbrace{e^{(\lambda x+1)y}}_{>0}} > 0, \end{aligned}$$

provando (1.5).

Exemplo 1.6. Dada a função $f(x) = |x|$, para todo $x \in \mathbb{R}$, mostremos que f é convexa em $\mathbb{R}$.

Para $f(x) = |x|$, sendo todo $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $x \neq y$ e $\lambda \in [0,1]$, devemos provar que

$$|\lambda x + (1-\lambda)y| \leq \lambda|x| + (1-\lambda)|y|. \tag{1.6}$$

Pela desigualdade triangular, temos

$$\begin{aligned} |\lambda x + (1-\lambda)y| &\leq |\lambda x| + |(1-\lambda)y| \\ &= \lambda|x| + (1-\lambda)|y|, \end{aligned}$$

o que implica em (1.6).

A demonstração dos Teoremas 1.7 e 1.8 pode ser encontrada em [5].

Teorema 1.7 (Teorema da segunda derivada para função convexa)**.** *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ duas vezes derivável no intervalo aberto I. A função f é convexa em I se, e somente se, $f''(x) \geq 0$, para todo $x \in I$.*

Teorema 1.8 (Teorema da segunda derivada para função estritamente convexa)**.** *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ duas vezes derivável no intervalo aberto I e $f''(x) > 0$, para todo $x \in I$. Então, a função f é estritamente convexa em I.*

Observação 1.9. A recíproca do Teorema 1.8 não é verdadeira. Notemos que a função $f(x) = x^4$ é estritamente convexa em $\mathbb{R}$, para todo $\lambda \in (0,1)$, mas $f''(0) = 0$.

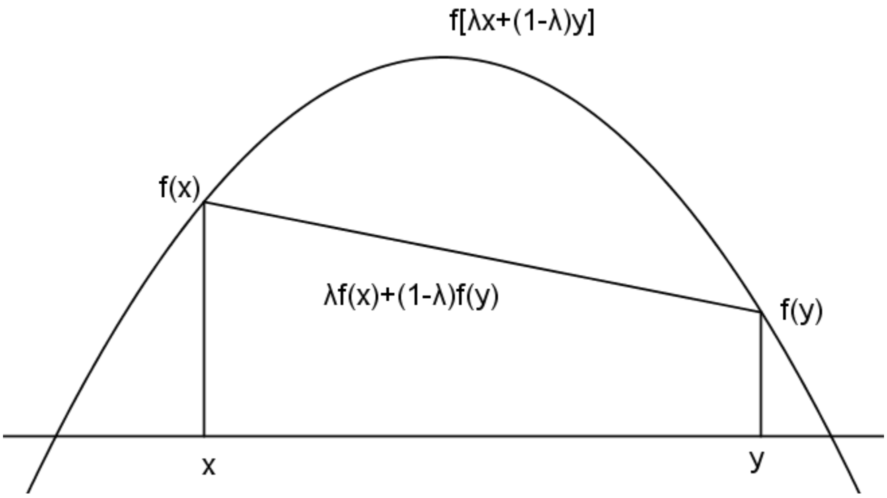
A função f é côncava em I quando $-f$ é convexa em I, conforme Definição 4.2 encontrada em [1]. Assim, obtemos resultados para funções côncavas de forma análoga às funções convexas.

Definição 1.10. Uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é dita *côncava* em I quando dados $x, y \in I$ tais que $x \neq y$, tem-se que

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y), \tag{1.7}$$

para todo $\lambda \in [0,1]$, isto é, se, e somente se, $-f$ é convexa em I.

A Definição 1.10 pode ser facilmente compreendida através da figura abaixo.



Definição 1.11. Uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é dita *estritamente côncava* em I quando dados $x, y \in I$ tais que $x \neq y$, tem-se que

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) > \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y), \tag{1.8}$$

para todo $\lambda \in (0,1)$, isto é, se, e somente se, $-f$ é estritamente convexa em I.

Teorema 1.12 (Teorema da segunda derivada para função côncava)**.** *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ duas vezes derivável no intervalo aberto I. A função f é côncava em I se, e somente se, $f''(x) \leq 0$, para todo $x \in I$.*

Teorema 1.13 (Teorema da segunda derivada para função estritamente côncava)**.** *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ duas vezes derivável no intervalo aberto I e $f''(x) < 0$, para todo $x \in I$. Então, a função f é estritamente côncava em I.*

Observação 1.14. A recíproca do Teorema 1.13 não é verdadeira. Notemos que a função $f(x) = -x^2$ é estritamente côncava em $\mathbb{R}$, para todo $\lambda \in (0,1)$, mas $f''(0) = 0$.

De acordo com [2] e [9], uma das consequências das funções convexas e côncavas é a Desigualdade de Jensen.

Teorema 1.15 (Desigualdade de Jensen)**.** *Sejam* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$*, números reais positivos.*

(i) Se f *é convexa em* I*, então, para quaisquer* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in I$*, se verifica*

$$\frac{\lambda_1 f(a_1) + \lambda_2 f(a_2) + \cdots + \lambda_n f(a_n)}{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n} \geq f\left(\frac{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n}{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n}\right).$$

(ii) Se f *é côncava em* I*, então, para quaisquer* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in I$*, se verifica*

$$\frac{\lambda_1 f(a_1) + \lambda_2 f(a_2) + \cdots + \lambda_n f(a_n)}{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n} \leq f\left(\frac{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n}{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n}\right).$$

A seguir, apresentaremos outra desigualdade conhecida como Desigualdade de Karamata embasada em [2].

Definição 1.16. Dizemos que um vetor $\vec{A} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ com $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ *majora* um vetor $\vec{B} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ com $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$ e escrevemos $\vec{A} \geq \vec{B}$ se

$$\begin{aligned} a_1 &\geq b_1 \\ a_1 + a_2 &\geq b_1 + b_2 \\ &\vdots \\ a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} &\geq b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1} \\ a_1 + a_2 + \cdots + a_n &= b_1 + b_2 + \cdots + b_n, \text{ para } n = 1, 2, 3, \cdots . \end{aligned}$$

Teorema 1.17 (Desigualdade de Karamata)**.** *Sejam* f *uma função convexa em* I *e um vetor* $\vec{A} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *com* $a_i \in I$ *majora um vetor* $\vec{B} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ *com* $b_i \in I$*, então,* $f(a_1) + f(a_2) + \cdots + f(a_n) \geq f(b_1) + f(b_2) + \cdots + f(b_n)$*,* $n = 1, 2, 3, \cdots$*.*

Dentre as funções convexas e côncavas, as funções convexas à direita e as côncavas à esquerda merecem atenção e são focos de estudo deste trabalho. As Definições 1.18 a 1.21 podem ser encontradas em [2].

Definição 1.18. *Uma função* $f : I \to \mathbb{R}$ é dita *convexa à direita em* I*, se existe* $s \in I$ *tal que* f *é convexa para* $x \geq s$, para todo $x \in I$.

Definição 1.19. *Uma função* $f : I \to \mathbb{R}$ é dita *convexa à esquerda em* I*, se existe* $s \in I$ *tal que* f *é convexa para* $x \leq s$, para todo $x \in I$.

Definição 1.20. *Uma função* $f : I \to \mathbb{R}$ é dita *côncava à esquerda em* I*, se existe* $s \in I$ *tal que* f *é côncava para* $x \leq s$, para todo $x \in I$.

Definição 1.21. *Uma função* $f : I \to \mathbb{R}$ é dita *côncava à direita em* I*, se existe* $s \in I$ *tal que* f *é côncava para* $x \geq s$, para todo $x \in I$.

Capítulo 2

Desigualdades envolvendo as funções convexas à direita

Mesmo que a grande maioria dos alunos da Educação Básica não estudem desigualdades envolvendo as funções convexas à direita, várias partes das demonstrações deste tipo de desigualdades são compreensíveis para esta clientela.

O teorema seguinte e seu corolário são úteis para provarmos uma grande classe de desigualdades do tipo Jensen envolvendo funções convexas à direita.

Teorema 2.1 (Teorema das desigualdades envolvendo funções convexas à direita)**.** *Seja $f(u)$ uma função definida em I e convexa para $u \geq s$, $s \in I$. Suponhamos que a desigualdade*

$$f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \geq nf\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) \tag{2.1}$$

é válida para todo $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ tais que $\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = s$ e $x_2 = x_3 = \cdots = x_n \geq s$, $n = 1, 2, 3, \cdots$. Então, a relação (2.1) é válida também para todo $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ tais que $\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq s$.

Demonstração: Sem perda de generalidade, assumiremos que $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ e vamos estudar dois casos.

1o caso: $x_1 \geq s$. Neste caso, temos $x_1 \geq s$, $x_2 \geq s$, $\cdots$, $x_n \geq s$. Daí, $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq ns$, ou seja, $\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq s$, $n = 1, 2, 3, \cdots$.

Aplicando a Desigualdade de Jensen para funções convexas (Teorema 1.15, (i)), temos

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n} \geq f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right),$$

ou seja,

$$f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \geq nf\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right),$$

para todo $x_i \in I$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ e $\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq s$.

2o caso: $x_1 < s < x_n$.

Afirmação 1: Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ tais que $\dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq s$, então, existe $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ de modo que $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_k < s < x_{k+1} \leq \cdots \leq x_n$.

De fato, suponhamos que a Afirmação 1 não seja verdadeira, isto é, existe $x_k \geq s$ ou $s \geq x_{k+1}$ para todo $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Assim, estudaremos os casos a seguir:

(i) Se $s \leq x_k$, para todo $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Em particular, para $k = 1$, temos $s \leq x_1$ que é contradição, pois $x_1 < s$.

(ii) Se $s \geq x_{k+1}$, para todo $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ e $s > x_1$. Em particular, para $k = n-1$, temos $s \geq x_n$ que é contradição, pois $s < x_n$.

Afirmação 2: Pela Afirmação 1 e considerando

$$S = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}, \; z = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_k}{k} \text{ e } t = \frac{x_{k+1} + x_{k+2} + \cdots + x_n}{n-k},$$

temos $S, z, t, \in I$, $kz + (n-k)t = nS$ e $z < s \leq S < t$ e, além disso, pela Desigualdade de Jensen para funções convexas (Teorema 1.15, (i)), obtemos

$$f(x_{k+1}) + f(x_{k+2}) + \cdots + f(x_n) \geq (n-k)f(t). \tag{2.2}$$

De fato, sejam $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_k < s < x_{k+1} \leq x_{k+2} \leq \cdots \leq x_n$. Como $nx_1 < x_1 + x_2 + \cdots + x_n < nx_n$, concluímos que $x_1 < \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = S < x_n$. Logo, $S \in (x_1, x_n) \subset I$.

Como $kx_1 \leq x_1 + x_2 + \cdots + x_k < ks$, concluímos que $x_1 \leq \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_k}{k} = z < s$. Logo, $z \in [x_1, s) \subset I$.

Analogamente, como $(n-k)s < x_{k+1} + x_{k+2} + \cdots + x_n \leq (n-k)x_n$, concluímos que $s < \dfrac{x_{k+1} + x_{k+2} \cdots + x_n}{n-k} = t \leq x_n$. Logo, $t \in (s, x_n] \subset I$.

Portanto, verificamos que S, z, $t \in I$.

Notemos, ainda, que $nS = x_1 + x_2 + \cdots + x_k + x_{k+1} + \cdots + x_n$, $kz = x_1 + x_2 + \cdots + x_k$ e $(n-k)t = x_{k+1} + x_{k+2} + \cdots + x_n$. Assim, $\underbrace{x_1 + x_2 + \cdots + x_k}_{kz} + \underbrace{x_{k+1} + x_{k+2} + \cdots + x_n}_{(n-k)t} = nS$, que implica em $kz + (n-k)t = nS$.

Agora, provemos que $z < s \leq S < t$.

Uma vez que $x_1 < s$, $x_2 < s$, $\cdots$, $x_k < s$, temos $x_1 + x_2 + \cdots + x_k < ks$, ou melhor, $z < s$. Ainda, como $S = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq s$, temos $z < s \leq S$ e sabendo que $\underbrace{x_1 + x_2 + \cdots + x_k}_{kz} + \underbrace{x_{k+1} + x_{k+2} + \cdots + x_n}_{(n-k)t} = nS$, temos $kz + (n-k)t = kS + (n-k)S$ que implica em $(n-k)t > (n-k)S$, ou seja, $t > S$. Portanto, $z < s \leq S < t$.

Pela Desigualdade de Jensen para funções convexas (Teorema 1.15, (i)), temos que

$$\frac{f(x_{k+1}) + f(x_{k+2}) + \cdots + f(x_n)}{n-k} \geq f\left(\frac{x_{k+1} + x_{k+2} + \cdots + x_n}{n-k}\right),$$

para $x_{k+1} \leq x_{k+2} \leq \cdots \leq x_n$ e $t = \dfrac{x_{k+1} + x_{k+2} + \cdots + x_n}{n-k}$. Consequentemente,

$$f(x_{k+1}) + f(x_{k+2}) + \cdots + f(x_n) \geq (n-k)f(t).$$

Afirmação 3: Se $y_i = \dfrac{ns - x_i}{n-1}$, para $i = 1, 2, \ldots, k$, então,

$$f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_k) + (n-1)[f(y_1) + f(y_2) + \cdots + f(y_k)] \geq knf(s). \tag{2.3}$$

De fato, de acordo com a Afirmação 1, temos que $x_i < s$, para $i = 1, 2, \ldots, k$. Logo, $s < \dfrac{ns - x_i}{n-1} = y_i$, para $i = 1, 2, \ldots, k$.

Aplicando a Afirmação 2 ($s < t$), temos que

$$\begin{aligned} y_i \leq y_1 &= \frac{x_2 + x_3 + \cdots + x_k + x_{k+1} + \cdots + x_n}{n-1} = \frac{\overbrace{x_2 + x_3 + \cdots + x_k}^{(k-1)\text{ parcelas}} + (n-k)t}{n-1} \\ &< \frac{\overbrace{t + \cdots + t}^{(k-1)\text{ vezes}} + (n-k)t}{n-1} = \frac{(n-1)t}{n-1} = t. \end{aligned}$$

Assim, $s < y_i < t$ e, consequentemente, $y_i \in (s,t) \subset I$.

De acordo com a hipótese do Teorema 2.1, temos

$$f(x_i) + (n-1)f(y_i) \geq nf(s),$$

para $i = 1, 2, \ldots, k$. Logo,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k} (f(x_i) + (n-1)f(y_i)) &\geq \sum_{i=1}^{k} nf(s) \\ \sum_{i=1}^{k} f(x_i) + (n-1)\sum_{i=1}^{k} f(y_i) &\geq knf(s), \end{aligned}$$

ou melhor,

$$f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_k) + (n-1)[f(y_1) + f(y_2) + \cdots + f(y_k)] \geq knf(s).$$

Afirmação 4: Se $s_1 = \dfrac{(n+k-1)s - kz}{n-1}$, então,

$$s < s_1 \leq \frac{nS + (k-1)S - kz}{n-1} = \frac{(k-1)S + (n-k)t}{n-1} < t,$$

ou seja, $s_1 \in (s,t) \subset I$, e

$$f(s_1) + (k-1)f(s) \geq f(y_1) + f(y_2) + \cdots + f(y_k). \tag{2.4}$$

De fato, considerando $s > x_1$, $s > x_2$, $\ldots$, $s > x_k$, resulta em $ks > x_1 + x_2 + \cdots + x_k = kz$ e, ainda, temos

$$s_1 = \frac{(n+k-1)s - kz}{n-1} > \frac{(n-1)s}{n-1} = s.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} s_1 = \frac{(n+k-1)s - kz}{n-1} &\leq \frac{(n+k-1)S - kz}{n-1} = \frac{(k-1)S + (n-k)t}{n-1} \\ &< \frac{(k-1)t + (n-k)t}{n-1} = t. \end{aligned}$$

Assim, $s < s_1 < t$ e, consequentemente, $s_1 \in (s, t) \subset I$.

Como $s_1 > s > x_k \geq x_{k-1} \geq \cdots \geq x_2$, temos $s_1 > y_1$, pois

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{(n+k-1)s - kz}{n-1} \\ &= \frac{ns + (k-1)s - (x_k + x_{k-1} + \cdots + x_2 + x_1)}{n-1} \\ &= \frac{ns + (s - x_k) + (s - x_{k-1}) + \cdots + (s - x_2) - x_1}{n-1} \\ &> \frac{ns - x_1}{n-1} \\ &= y_1, \text{ e} \end{aligned}$$

ainda, $s_1 + s > y_1 + y_2$, pois

$$\begin{aligned} s_1 + s &= \frac{(n+k-1)s - kz}{n-1} + s \\ &= \frac{ns + (k-1)s - kz + ns - s}{n-1} \\ &= \frac{2ns + (k-2)s - (x_k + x_{k-1} + \cdots + x_2 + x_1)}{n-1} \\ &= \frac{2ns + (s - x_k) + (s - x_{k-1}) \cdots + (s - x_3) - x_2 - x_1}{n-1} \\ &> \frac{2ns - x_2 - x_1}{n-1} \\ &= \frac{n - x_1}{n-1} + \frac{n - x_2}{n-1} \\ &= y_1 + y_2. \end{aligned}$$

Seguindo o argumento acima, temos $s_1 + (k-2)s > y_1 + y_2 + \cdots + y_{k-1}$ e $s_1 + (k-1)s = y_1 + y_2 + \cdots + y_k$.

Desta forma, concluímos que

$$\begin{aligned} s_1 &> y_1 \\ s_1 + s &> y_1 + y_2 \\ &\vdots \\ s_1 + (k-2)s &> y_1 + y_2 + \cdots + y_{k-1} \\ s_1 + (k-1)s &= y_1 + y_2 + \cdots + y_k. \end{aligned}$$

Observamos, ainda, que

$$\frac{ns-x_1}{n-1} = y_1 \geq \frac{ns-x_2}{n-1} = y_2 \geq \cdots \geq \frac{ns-x_k}{n-1} = y_k.$$

Assim, o vetor $\vec{A} = (s_1, \underbrace{s, s, \ldots, s}_{(k-1)\text{-vezes}})$ majora o vetor $\vec{B} = (y_1, y_2, \ldots, y_k)$ e pela Desigualdade de Karamata (Teorema 1.17), temos

$$f(s_1) + \underbrace{f(s) + \cdots + f(s)}_{(k-1)\text{ vezes}} \geq f(y_1) + f(y_2) + \cdots + f(y_k),$$

ou melhor,

$$f(s_1) + (k-1)f(s) \geq f(y_1) + f(y_2) + \cdots + f(y_k).$$

Afirmação 5: Considerando $s > z$, temos

$$(n+k-1)f(s) + (n-k)f(t) \geq nf(S) + (n-1)f(s_1), \tag{2.5}$$

para todo $k < n$.

De fato, como $s \leq S < t$, temos

$$\frac{t-S}{t-s}s + \frac{S-s}{t-s}t = S$$

e

$$\frac{t-S}{t-s} + \frac{S-s}{t-s} = 1.$$

Em virtude da Desigualdade de Jensen para funções convexas (Teorema 1.15, (i)), temos

$$\frac{t-S}{t-s}f(s) + \frac{S-s}{t-s}f(t) \geq \left(\frac{t-S}{t-s} + \frac{S-s}{t-s}\right) f\left(\frac{\frac{t-S}{t-s}s + \frac{S-s}{t-s}t}{\frac{t-S}{t-s} + \frac{S-s}{t-s}}\right) = f(S). \tag{2.6}$$

Também

$$\frac{t-s_1}{t-s}s + \frac{s_1-s}{t-s}t = s_1$$

e

$$\frac{t-s_1}{t-s} + \frac{s_1-s}{t-s} = 1.$$

Como $s < s_1 < t$, pela Desigualdade de Jensen para funções convexas (Teorema 1.15, (i)), temos

$$\frac{t-s_1}{t-s}f(s) + \frac{s_1-s}{t-s}f(t) \geq \left(\frac{t-s_1}{t-s} + \frac{s_1-s}{t-s}\right) f\left(\frac{\frac{t-s_1}{t-s}s + \frac{s_1-s}{t-s}t}{\frac{t-s_1}{t-s} + \frac{s_1-s}{t-s}}\right) = f(s_1). \tag{2.7}$$

Adicionando (2.6) e (2.7) após multiplicados por n e $(n-1)$, respectivamente, temos

$$\left[\frac{n(t-S)}{t-s}+\frac{(n-1)(t-s_1)}{t-s}\right]f(s)+\left[\frac{n(S-s)}{t-s}+\frac{(n-1)(s_1-s)}{t-s}\right]f(t)$$
$$\geq nf(S)+(n-1)f(s_1).$$

Logo,

$$\left(\frac{2nt-Sn-(n-1)s_1-t}{t-s}\right)f(s)+\left(\frac{nS-2ns+(n-1)s_1+s}{t-s}\right)f(t)$$
$$\geq nf(S)+(n-1)f(s_1).$$

Como $(n-1)s_1=(n+k-1)s+kz$, temos

$$\left(\frac{2nt-Sn-[(n+k-1)s-kz]-t}{t-s}\right)f(s)+\left(\frac{nS-2ns+[(n+k-1)s-kz]+s}{t-s}\right)f(t)$$
$$\geq nf(S)+(n-1)f(s-1).$$

Considerando $kz=x_1+x_2+\cdots+x_k$, obtemos

$$\left(\frac{2nt-(x_1+x_2+\cdots+x_n)-(n+k-1)s+x_1+x_2+\cdots+x_k-t}{t-s}\right)f(s)$$
$$+\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n-2ns+(n+k-1)s-(x_1+x_2+\cdots+x_k)+s}{t-s}\right)f(t)$$
$$\geq nf(S)+(n-1)f(s_1),$$

ou seja,

$$\left(\frac{2nt-x_{k+1}-x_{k+2}-\cdots-x_n-(n+k-1)s-t}{t-s}\right)f(s)$$
$$+\left(\frac{x_{k+1}+x_{k+2}+\cdots+x_n-2ns+(n+k-1)s+s}{t-s}\right)f(t)$$
$$\geq nf(S)+(n-1)f(s_1).$$

Como $x_{k+1}+x_{k+2}+\cdots+x_n=(n-k)t$, temos

$$\left(\frac{2nt-(n-k)t-(n+k-1)s-t}{t-s}\right)f(s)+\left(\frac{(n-k)t-2ns+(n+k-1)s+s}{t-s}\right)f(t)$$
$$\geq nf(S)+(n-1)f(s_1),$$

que resulta em

$$\frac{(n+k-1)(t-s)}{t-s}f(s)+\frac{(n-k)(t-s)}{t-s}f(t)\geq nf(S)+(n-1)f(s_1),$$

ou seja,

$$(n+k-1)f(s)+(n-k)f(t)\geq nf(S)+(n-1)f(s_1).$$

Finalmente, utilizando as desigualdades das Afirmações 2 a 5, provaremos o Teorema 2.1.
Para isso, multiplicando (2.4) por $(n-1)$ e adicionando a (2.5), obtemos

$$\begin{aligned} &(n-1)f(s_1)+(n-1)(k-1)f(s)+(n+k-1)f(s)+(n-k)f(t) \\ \geq &(n-1)[f(y_1)+f(y_2)+\cdots+f(n_k)]+nf(S)+(n-1)f(s_1)+nf(S)+(n-1)f(s_1), \end{aligned}$$

ou melhor,

$$nkf(s)+(n-k)f(t)\geq (n-1)[f(y_1)+f(y_2)+\cdots+f(n_k)]+nf(S). \tag{2.8}$$

Adicionando, agora, (2.8) e (2.3), temos

$$\begin{aligned} &nkf(s)+(n-k)f(t)+f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_k)+(n-1)[f(y_1)+f(y_2)+\cdots+f(y_k)] \\ \geq &(n-1)[f(y_1)+f(y_2)+\cdots+f(y_k)]+nf(S)+knf(s), \end{aligned}$$

ou melhor,

$$(n-k)f(t)+f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_k)\geq nf(S). \tag{2.9}$$

Como $S=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$, adicionando (2.9) e (2.2), temos

$$(n-k)f(t)+f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_k)+f(x_{k+1})+\cdots+f(x_n)\geq nf(S)+(n-k)f(t),$$

que resulta em

$$f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)\geq f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right),$$

provando assim o teorema. □

A seguir, apresentaremos algumas observações e uma consequência do Teorema 2.1 que podem auxiliar o leitor na resolução de alguns exercícios.

Observação 2.2. *A desigualdade (2.1) é equivalente a*

$$f(x)+(n-1)f(y)\geq nf(s), \tag{2.10}$$

para todo $x,y\in I$ tais que $x\leq s\leq y$ e $x+(n-1)y=ns$.

De fato, sejam $x,y\in I$ tais que $x\leq s\leq y$ e $x+(n-1)y=ns$, e considerando $x_1=x$ e $x_2=x_3=\cdots=x_n=y$, temos $x_1+x_2+\cdots+x_n=x+(n-1)y=ns$, que implica em $\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=s$, para $x_2=x_3=\cdots=x_n=y\geq s$.

Por (2.1), temos

$$f(x) + (n-1)f(y) = f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \geq nf\left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}\right) = nf(s).$$

Reciprocamente, a condição (2.10) implica que dados $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ tais que $\dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = s$ e $x_2 = x_3 = \cdots = x_n \geq s$, temos

$$s = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{x_1 + \overbrace{x_2 + \cdots + x_2}^{n-1 \text{ vezes}}}{n} = \frac{x_1 + (n-1)x_2}{n}$$

e

$$ns = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = x_1 + \underbrace{x_2 + \cdots + x_2}_{(n-1) \text{ vezes}} = x_1 + (n-1)x_2.$$

Como $s \leq x_2$ e $ns = s + (n-1)s = x_1 + (n-1)x_2$, temos $s \geq x_1$. Logo, $x_1 \leq s \leq x_2$.

Considerando $x = x_1$, $y = x_2 = x_3 = \cdots = x_n$ e a condição (2.10), temos

$$\begin{aligned} f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) &= f(x) + \overbrace{f(y) + \cdots + f(y)}^{n-1 \text{ vezes}} \\ &= f(x) + (n-1)f(y) \\ &\geq nf\left(\frac{x + (n-1)y}{n}\right) \\ &= nf\left(\frac{ns}{s}\right) \\ &= nf(s) \\ &= nf\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right). \end{aligned}$$

Logo, (2.10) implica que (2.1) é válida. Portanto, as condições (2.10) e (2.1) são equivalentes para todo $x, y \in I$ tais que $x \leq s \leq y$ e $x + (n-1)y = ns$.

Observação 2.3. *Seja* $g(t) = \dfrac{f(t) - f(s)}{t - s}$*, para* $t \neq s$ *e* $g(t) = 0$*, para* $t = s$*, e* $t,\ s \in I$*. Então, a condição (2.1) é equivalente à condição* $g(x) \leq g(y)$*, para todo* $x, y \in I$ *tais que* $x \leq s \leq y$ *e* $x + (n-1)y = ns$*.*

Para todo $x, y \in I$, sendo $x < s < y$ e $x + (n-1)y = ns$, temos

$$\begin{aligned} f(x) + (n-1)f(y) - nf(s) &= f(x) - f(s) + (n-1)[f(y) - f(s)] \\ &= (x-s)g(x) + (n-1)(y-s)g(y) \\ &= (x-s)g(x) + nyg(y) - yg(y) - nsg(y) + sg(y) \\ &= (x-s)g(x) - xg(y) + sg(y) \\ &= (s-x)[g(y) - g(x)], \end{aligned}$$

ou seja, provamos que

$$f(x) + (n-1)f(y) - nf(s) = (s-x)[g(y) - g(x)],$$

para todo $x, y \in I$ tais que $x < s < y$ e $x + (n-1)y = ns$.

Para $s = x$ ou $s = y$ e $x + (n-1)y = ns$, facilmente verificamos que

$$f(x) + (n-1)f(y) - nf(s) = (s-x)[g(y) - g(x)].$$

Portanto,

$$f(x) + (n-1)f(y) - nf(s) = (s-x)[g(y) - g(x)], \tag{2.11}$$

para todo $x, y \in I$ tais que $x \leq s \leq y$ e $x + (n-1)y = ns$.

Observação 2.4. *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ diferenciável em I. Então, dados $x, y \in I$ tais que $x \leq s \leq y$ e $x + (n-1)y = ns$, a condição*

$$f'(x) \leq f'(y), \tag{2.12}$$

implica que (2.1) é válida.

Para $s \in I$ fixo, definimos a função auxiliar

$$F(x) = f(x) + (n-1)f\left(\frac{ns - x}{n-1}\right) - nf(s), \tag{2.13}$$

para todo $x \in I$.

Derivando a equação (2.13) em relação a x, obtemos

$$F'(x) = f'(x) - f'\left(\frac{ns - x}{n-1}\right). \tag{2.14}$$

Da igualdade $x + (n-1)y = ns$, resulta

$$y = \frac{ns - x}{n-1}. \tag{2.15}$$

Assim, utilizando (2.12), (2.14) e (2.15), podemos escrever

$$F'(x) = f'(x) - f'(y) \leq 0$$

e, consequentemente, a função $F(x)$ é não-crescente para $x \leq s$.

Portanto,

$$F(x) \geq F(s) = 0, \text{ para } x \leq s. \tag{2.16}$$

De (2.13), (2.15) e (2.16), concluímos que

$$f(x) + (n-1)f(y) - nf(s) \geq 0,$$

ou seja,

$$f(x) + (n-1)f(y) \geq nf(s),$$

para todo $x, y \in I$ tais que $x \leq s \leq y$ e $x + (n-1)y = ns$.

Corolário 2.5 (Corolário das desigualdades envolvendo funções convexas à direita)**.** *Sejam $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ e $r>0$. Suponhamos que a função $g(u)=f(e^u)$ é convexa para $u\geq \ln r$ e a desigualdade*

$$f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_n)\geq f(\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}) \tag{2.17}$$

é válida para todo $a_1,a_2,\ldots,a_n>0$ tais que $\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=r$ e $a_2=a_3=\cdots=a_n\geq r$. Então, (2.17) é válida para todo $a_1,a_2,\ldots,a_n>0$ tais que $\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\geq r$.

Demonstração: Consideremos $r,a_1,a_2,\cdots,a_n$, como no enunciado e as seguintes relações

$$\begin{aligned}
s=\ln r &\Longleftrightarrow e^s=r\\
x_1=\ln a_1 &\Longleftrightarrow e^{x_1}=a_1\\
x_2=\ln a_2 &\Longleftrightarrow e^{x_2}=a_2\\
&\vdots\\
x_n=\ln a_n &\Longleftrightarrow e^{x_n}=a_n.
\end{aligned}$$

Em virtude das propriedades das funções exponenciais e logarítmicas, obtemos as seguintes expressões:

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\ln\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \tag{2.18}$$

$$e^{x_1+x_2+\cdots+x_n}=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \tag{2.19}$$

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=r\Longleftrightarrow\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=s \tag{2.20}$$

$$a_2=a_3=\cdots=a_n\geq r\Longleftrightarrow x_2=x_3=\cdots=x_n\geq s. \tag{2.21}$$

Como $g(u)=f(e^u)$ é convexa para $u\geq\ln r$, isto é, $g(u)$ é convexa para $u\geq s$, levando em conta (2.17) a (2.21), obtemos

$$g(x_1)+g(x_2)+\cdots+g(x_n)\geq ng\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right), \tag{2.22}$$

para todo $x_1,\,x_2,\,\cdots,\,x_n>0$ tais que $\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=s$ e $x_2=x_3=\cdots=x_n\geq s$.

Considerando (2.22) e aplicando o Teorema 2.1 para função g convexa à direita, temos:

$$g(x_1)+g(x_2)+\cdots+g(x_n)\geq ng\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right), \tag{2.23}$$

para todo $x_1,\,x_2,\,\cdots,\,x_n>0$ tais que $\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\geq s$.

Utilizando o mesmo argumento acima e levando em consideração (2.23), obtemos

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\geq s\Longleftrightarrow\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\geq r,$$

o que conclui a prova do corolário. $\square$

Observação 2.6. *A condição (2.17) é equivalente à condição*

$$f(x) + (n-1)f(y) \geq nf(r), \tag{2.24}$$

para todo $x, y > 0$ tais que $x \leq r \leq y$ e $xy^{n-1} = r^n$.

De fato, sejam

$$x, y > 0 \text{ tais que } x \leq r \leq y \text{ e } xy^{n-1} = r^n. \tag{2.25}$$

Considerando $a_1 = x$, $a_2 = a_3 = \cdots = a_n = y$ e usando (2.25), obtemos

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = \sqrt[n]{x \underbrace{y \cdots y}_{(n-1) \text{ vezes}}} = \sqrt[n]{xy^{n-1}} = \sqrt[n]{r^n} = r \text{ e } a_2 = a_3 = \cdots = a_n \geq r. \tag{2.26}$$

Considerando (2.26) e aplicando (2.17), temos

$$\begin{aligned} f(x) + (n-1)f(y) &= f(a_1) + f(a_2) + \cdots + f(a_n) \\ &\geq nf(\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}) \\ &= nf(r), \end{aligned}$$

provando que (2.17) implica em (2.24).

Reciprocamente, levando em conta que

$$a_1, a_2, \cdots, a_n > 0 \text{ tais que } \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = r \text{ e } a_2 = a_3 = \cdots = a_n \geq r. \tag{2.27}$$

Considerando $a_1 = x$, $a_2 = a_3 = \cdots = a_n = y$ e usando (2.27), obtemos

$$\sqrt[n]{xy^{n-1}} = \sqrt[n]{a_1 \underbrace{y \cdots y}_{(n-1) \text{ vezes}}} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = r \text{ e } x \leq r \leq y. \tag{2.28}$$

Considerando, agora, (2.28) e aplicando (2.24) resulta em

$$\begin{aligned} f(a_1) + f(a_2) + \cdots + f(a_n) &= f(x) + \underbrace{f(y) + \cdots + f(y)}_{(n-1) \text{ vezes}} \\ &= f(x) + (n-1)f(y) \\ &\geq nf(r) \\ &= nf(\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}), \end{aligned}$$

provando que (2.24) implica em (2.17).

Observação 2.7. *Seja $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ diferenciável em $(0, \infty)$. Então, dados $x, y \in I$ tais que $x \leq r \leq y$ e $xy^{n-1} = r^n$, a condição*

$$xf'(x) \leq yf'(y) \tag{2.29}$$

implica que (2.27) é válida.

De fato, sejam

$$x, y \in I \text{ tais que } x \leq r \leq y \text{ e } xy^{(n-1)} = r, \tag{2.30}$$

para $r \in I$ fixo, definimos a seguinte função auxiliar dada por

$$F(x) = f(x) + (n-1)f\left(r^{n-1}\sqrt{\frac{r}{x}}\right) - nf(r), \tag{2.31}$$

para todo $x \in I$.

Derivando a equação (2.31) em relação a x e usando (2.30), obtemos

$$F'(x) = f'(x) - \frac{r}{n}\sqrt[n-1]{\frac{r}{x}}f'(y) = \frac{xf'(x) - yf'(y)}{x}. \tag{2.32}$$

Considerando (2.29) e (2.32), temos

$$F'(x) \leq 0,$$

para $x \leq r$ e isto significa que a função $F(x)$ é não-crescente para $x \leq r$. Assim,

$$F(x) \geq F(r) = 0 \text{ para } x \leq r. \tag{2.33}$$

Tendo em vista (2.31) e (2.33), concluímos que

$$f(x) + (n-1)f(y) - nf(r) \geq 0,$$

ou melhor,

$$f(x) + (n-1)f(y) \geq nf(r),$$

para todo $x, y \in I$ tais que $x \leq r \leq y$ e $xy^{n-1} = r$.

A seguir, apresentaremos algumas aplicações do Teorema 2.1.

Proposição 2.8. *Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$, números reais não negativos tais que*

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n. \tag{2.34}$$

Então,

$$(n-1)(x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3) + n^2 \geq (2n-1)(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2). \tag{2.35}$$

Demonstração: Inicialmente, observemos que a desigualdade (2.35) pode ser escrita da seguinte forma:

$$f(u_1) + f(u_2) + \cdots + f(u_n) \geq nf\left(\frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}\right), \tag{2.36}$$

onde

$$f(u) = (n-1)u^3 - (2n-1)u^2,$$

para $u \geq 0$.

A segunda derivada de $f(u)$ é dada por

$$f''(u) = 6(n-1)u - 2(2n-1). \tag{2.37}$$

Pelo Teorema 1.7, f é convexa em intervalo aberto I se, e somente se, $f''(u) \geq 0$, $u \in I$.

Notemos que

$$6(n-1)u - 2(2n-1) \geq 0 \text{ se, e somente se, } u \geq \frac{2n-1}{3(n-1)}, \text{ para } n \neq 1,$$

ou seja,

$$f \text{ é convexa para } u \geq \frac{2n-1}{3(n-1)}, \text{ para } n \neq 1. \tag{2.38}$$

Usando a hipótese (2.34) temos que

$$s = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = 1 \geq \frac{2n-1}{3(n-1)}, n \neq 1. \tag{2.39}$$

A partir de (2.38) e (2.39), obtemos que f é convexa para $u \geq s$, para s dado em (2.39).

De acordo com o Teorema 2.1 é suficiente provar

$$f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \geq nf\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right), \tag{2.40}$$

para $\dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = s = 1$ e $x_2 = x_3 = \cdots = x_n \geq 1$.

De acordo com a Observação 2.2, (2.40) é equivalente a mostrar

$$g(x) \leq g(y), \text{ para } 0 \leq x < 1 < y \text{ e } x + (n-1)y = n, \tag{2.41}$$

onde

$$g(t) = \frac{f(t) - f(1)}{t-1} = (n-1)(t^2 + t + 1) - (2n-1)(t+1).$$

Com efeito, para $n \geq 2$, temos que

$$g(x) - g(y) = (x-y)[(n-1)(x+y+1) - 2n+1] = \underbrace{(n-2)}_{\geq 0}\underbrace{x}_{\geq 0}\underbrace{(x-y)}_{<0} \leq 0,$$

ou seja, (2.41) é válida.

Agora, levando em consideração a desigualdade (2.40) e aplicando o Teorema 2.1, obtemos

$$f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \geq nf\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right), \tag{2.42}$$

para todo $x_1, x_2, \cdots, x_n \in [0, \infty)$ tais que $\dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq 1$, para $n \geq 2$.

Para obtermos (2.35), basta usar (2.42).

A desigualdade (2.35) torna-se uma igualdade quando $n = 2$ ou, ainda, no caso em que $n \geq 3$, se $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$ ou $x_i = n$ e $x_j = 0$, $j \neq i$. $\square$

Proposição 2.9. *Sejam $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, números reais não negativos tais que*

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = r \geq \sqrt{\frac{n-1}{n}}.$$

Então,

$$\frac{1}{1 + x_1^2} + \frac{1}{1 + x_2^2} + \cdots + \frac{1}{1 + x_n^2} \geq \frac{n}{1 + r^2}. \tag{2.43}$$

Demonstração: Consideremos $f(u) = \dfrac{1}{1 + u^2}$, $u \geq 0$.

A segunda derivada de $f(u)$ é dada por $f''(u) = \dfrac{6u^2 - 2}{(1 + u^2)^3}$.

Assim, para $u \geq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, temos $f''(u) = \dfrac{6u^2 - 2}{(1 + u^2)^3} \geq 0$ e, consequentemente, f é convexa em $\left[\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \infty\right)$.

Pelo Teorema 2.1, temos

$$f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \geq nf\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right),$$

para $0 \leq x \leq s \leq y$ e $x + (n-1)y = ns$.

Se $n = 1$, temos $x_n = x_1 = r > 0$ e

$$g(x) - g(y) = \frac{1}{1 + x^2} - \frac{1}{1 + r^2} = \frac{1}{1 + x_1^2} - \frac{1}{1 + x_1^2} = 0.$$

Considerando $s = \sqrt{\dfrac{n-1}{n}} \geq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, a função f é convexa no intervalo $[s, \infty)$.

Pelo Teorema 2.1 e pela Observação 2.3, precisamos mostrar que $g(x) \leq g(y)$, para $0 \leq x \leq s \leq y$ e $x + (n-1)y = ns$.

Como $g(t) = \dfrac{f(t) - f(s)}{t - s}$, temos

$$g(t) = \frac{f(t) - f(s)}{t - s} = \frac{\dfrac{1}{1 + t^2} - \dfrac{1}{1 + s^2}}{t - s} = \frac{-t - s}{(1 + t^2)(1 + s^2)}$$

e, consequentemente, temos $g(x) = \dfrac{-x - s}{(1 + x^2)(1 + s^2)}$ e $g(y) = \dfrac{-y - s}{(1 + y^2)(1 + s^2)}$.

Assim,

$$g(x) - g(y) = \frac{-x - s}{(1 + x^2)(1 + s^2)} - \frac{-y - s}{(1 + y^2)(1 + s^2)} = \frac{(x - y)[s(x + y) + xy - 1]}{(1 + s^2)(1 + x^2)(1 + y^2)}.$$

Como $x - y \leq 0$ e $(1+s^2)(1+x^2)(1+y^2) > 0$, precisamos provar, ainda, que $s(x+y)+xy-1 \geq 0$. Considerando $x+(n-1)y = ns$, temos $y = \dfrac{ns-x}{n-1}$ e, assim

$$s(x+y)+xy-1 = s\left(x + \frac{ns-x}{n-1}\right) + x\left(\frac{ns-x}{n-1}\right) - 1 = \frac{ns^2-n+1+x[2s(n-1)-x]}{n-1}.$$

Considerando $n \geq 2$, temos $n-1 \geq 2-1 = 1$, que leva a concluir que $2s(n-1)-x \geq 2s-x$ e, ainda, como $s \geq x$, temos $2s-x \geq 0$ e, consequentemente, $2s(n-1)-x \geq 0$.

Logo,

$$\begin{aligned} s(x+y)+xy-1 &= \frac{ns^2-n+1+x[2s(n-1)-x]}{n-1} \\ &\geq \frac{ns^2-n+1}{n-1} \\ &= \frac{n\left(\sqrt{\dfrac{n-1}{n}}\right)^2 - n + 1}{n-1} \\ &= \frac{n-1-n+1}{n-1} = 0. \end{aligned}$$

Assim, $g(x)-g(y) = \dfrac{\overbrace{(x-y)}^{\leq 0}\overbrace{[s(x+y)+xy-1]}^{\geq 0}}{\underbrace{(1+s^2)}_{>0}\underbrace{(1+x^2)}_{>0}\underbrace{(1+y^2)}_{>0}} \leq 0$, ou seja, $g(x) \leq g(y)$. Pela Observação 2.3, temos

$$f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n) \geq nf\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right),$$

para todo $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \left[\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \infty\right)$ tais que $\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} = r \geq \sqrt{\dfrac{n-1}{n}}$.

E, ainda, temos

$$\frac{1}{1+x_1^2}+\frac{1}{1+x_2^2}+\cdots+\frac{1}{1+x_n^2} \geq nf\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right),$$

para todo $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \left[\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \infty\right)$ e $\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} = r \geq \sqrt{\dfrac{n-1}{n}}$.

Em particular, considerando $\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} = r$, encontramos

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x_1^2}+\frac{1}{1+x_2^2}+\cdots+\frac{1}{1+x_n^2} &\geq nf\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right) \\ &= nf(r) = n \cdot \frac{1}{1+r^2} = \frac{n}{1+r^2}, \end{aligned}$$

concluindo a demonstração.

A desigualdade (2.43) torna-se uma igualdade quando $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = r$, e no caso em que $r = \sqrt{\dfrac{n-1}{n}}$, se $x_i = 0$ e $x_j = \sqrt{\dfrac{n}{n-1}}$, $j \neq i$. $\square$

Capítulo 3

Desigualdades envolvendo funções côncavas à esquerda

O teorema seguinte e seu corolário são úteis para provarmos uma grande classe de desigualdades do tipo Jensen envolvendo funções côncavas à esquerda.

Teorema 3.1 (Teorema das desigualdades envolvendo funções côncavas à esquerda)**.** *Seja $f(u)$ uma função definida em I e côncava para $u \geq s$, $u \in I$. Suponhamos que a desigualdade*

$$f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \leq nf\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) \tag{3.1}$$

é válida para todo $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ tais que $\dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = s$ e $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} \leq s$, $n = 1, 2, 3, \cdots$. Então, a relação (3.1) é válida também para todo $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ tais que $\dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \leq s$.

Demonstração: A demonstração é feita de forma análoga a das desigualdades envolvendo funções convexas à direita (Teorema 2.1), ou melhor, sem perda de generalidade, assumiremos que $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ e estudaremos dois casos.

1o caso: $x_n \leq s$. Neste caso, temos $x_1 \leq s$, $x_2 \leq s$, $\cdots$, $x_n \leq s$. Daí, $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq ns$, ou seja, $\dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \leq s$, $n = 1, 2, 3, \cdots$.

Aplicando a Desigualdade de Jensen para funções côncavas (Teorema 1.15, (ii)), temos:

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n} \leq f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right),$$

ou seja,

$$f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \leq nf\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right),$$

para todo $x_i \in I$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ e $\dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \leq s$.

2o caso: $x_1 < s < x_n$.

Afirmação 1: Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ tais que $\dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \leq s$, então, existe $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ de modo que $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_k < s < x_{k+1} \leq \cdots \leq x_n$.

De fato, suponhamos que a Afirmação 1 não seja verdadeira, isto é, existe $x_k \leq s$ ou $s \geq x_{k+1}$ para todo $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Assim, estudaremos os casos a seguir:

(i) Se $s \leq x_k$, para todo $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Em particular, para $k = 1$, temos $s \leq x_1$ que é contradição, pois $x_1 < s$.

(ii) Se $s \geq x_{k+1}$, para todo $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ e $s < x_n$. Em particular, para $k = n-1$, temos $s \geq x_n$ que é contradição, pois $s < x_n$.

Afirmação 2: Pela Afirmação 1 e considerando

$S = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$, $z = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_k}{k}$ e $t = \dfrac{x_{k+1} + x_{k+2} + \cdots + x_n}{n-k}$,

temos $S, z, t \in I$, $kz + (n-k)t = nS$ e $z < S \leq s < t$ e, além disso, pela Desigualdade de Jensen para funções côncavas (Teorema 1.15, (ii)) obtemos

$$f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_k) \leq kf(z) \tag{3.2}$$

De fato, sejam $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_k < s < x_{k+1} \leq x_{k+2} \leq \cdots \leq x_n$. Como $nx_1 < x_1 + x_2 + \cdots + x_n < nx_n$, concluímos que $x_1 < \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = S < x_n$. Logo, $S \in (x_1, x_n) \subset I$.

Como $kx_1 \leq x_1 + x_2 + \cdots + x_k < ks$, concluímos que $x_1 \leq \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_k}{k} = z < s$. Logo, $z \in [x_1, s) \subset I$.

Analogamente, como $(n-k)s < x_{k+1} + x_{k+2} + \cdots + x_n \leq (n-k)x_n$, concluímos que $s < \dfrac{x_{k+1} + x_{k+2} + \cdots + x_n}{n-k} = t \leq x_n$. Logo, $t \in (s, x_n] \subset I$.

Portanto, verificamos que $S, z, t \in I$.

Notemos, ainda, que $nS = x_1 + x_2 + \cdots + x_k + x_{k+1} + \cdots + x_n$, $kz = x_1 + x_2 + \cdots + x_k$ e $(n-k)t = x_{k+1} + x_{k+2} + \cdots + x_n$. Assim, $\underbrace{x_1 + x_2 + \cdots + x_k}_{kz} + \underbrace{x_{k+1} + x_{k+2} + \cdots + x_n}_{(n-k)t} = nS$, que implica em $kz + (n-k)t = nS$.

Agora, provemos que $z < S \leq s < t$.

Uma vez que $s < x_{k+1}$, $s < x_{k+2}$, $\cdots$, $s < x_n$, temos $(n-k)s < x_{k+1} + x_{k+2} + \cdots + x_n$, ou melhor, $s < t$. Ainda, como $S = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \leq s$, temos $S \leq s < t$ e sabendo que $\underbrace{x_1 + x_2 + \cdots + x_k}_{kz} + \underbrace{x_{k+1} + x_{k+2} + \cdots + x_n}_{(n-k)t} = nS$, temos $kz + (n-k)t = kS + (n-k)S$ que implica em $kz < kS$, ou seja, $z < S$. Portanto, $z < S \leq s < t$.

Pela Desigualdade de Jensen para funções côncavas (Teorema 1.15, (ii)), temos que

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_k)}{k} \leq f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_k}{k}\right),$$

para $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_k$ e $z = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_k}{k}$. Consequentemente,

$$f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_k) \leq kf(z).$$

Afirmação 3: Se $y_i = \dfrac{ns - x_i}{n-1}$, para $i = k+1, k+2, \ldots, n$, então,

$$f(x_{k+1}) + f(x_{k+2}) + \cdots + f(x_n) + (n-1)[f(y_{k+1}) + \cdots + f(y_n)] \leq (n^2 - nk)f(s). \quad (3.3)$$

De fato, de acordo com a Afirmação 1, temos que $x_i > s$ para $i = k+1, k+2, \ldots, n$. Logo, $y_i = \dfrac{ns - x_i}{n-1} < s$, para $i = k+1, k+2, \ldots, n$.

Aplicando a Afirmação 2 ($z < t$), temos que

$$\begin{aligned} y_i \leq y_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1} &= \frac{kz + \overbrace{x_{k+1} + x_{k+2} + \cdots + x_{n-1}}^{(n-k-1) \text{ termos}}}{n-1} \\ = \frac{kz + (n-k-1)t}{n-1} &< \frac{(n-1)t}{n-1} = t. \end{aligned}$$

Assim, $s < y_i < t$ e, consequentemente, $y_i \in (s, t) \subset I$.

De acordo com a hipótese do Teorema 3.1, temos

$$f(x_i) + (n-1)f(y_i) \leq nf(s),$$

para $i = k+1, k+2, \ldots, n$. Logo,

$$\sum_{i=k+1}^{n} (f(x_i) + (n-1)f(y_i)) \leq \sum_{k+1}^{n} nf(s)$$
$$\sum_{i=k+1}^{n} f(x_i) + (n-1) \sum_{i=k+1}^{n} f(y_i) \leq (n-k)nf(s),$$

ou melhor,

$$f(x_{k+1}) + f(x_{k+2}) + \cdots + f(x_n) + (n-1)[f(y_{k+1}) + f(y_{k+2}) + \cdots + f(y_n)] \leq (n^2 - nk)f(s).$$

Afirmação 4: Se $s_1 = \dfrac{(2n-k-1)s - (n-k)t}{n-1}$, então,

$$z < s_1 \leq \frac{nS + (n-k-1)s - (n-k)t}{n-1} = \frac{kz + (n-1)s - ks}{n-1} < \frac{(n-1)s}{n-1} = s,$$

ou seja, $s_1 \in (z, s) \subset I$, e

$$f(s_1) + (n-k-1)f(s) \leq f(y_{k+1}) + f(y_{k+2}) + \cdots + f(y_n). \quad (3.4)$$

De fato, considerando $s < x_{k+1}$, $s < x_{k+2}$, $\cdots$, $s < x_n$, resulta em $(n-k)s < x_{k+1} + x_{k+2} + \cdots + x_n = (n-k)t$ e, ainda, temos

$$s_1 = \frac{(2n-k-1)s - (n-k)t}{n-1} < \frac{(n-1)s}{n-1} = s.$$

Além disso,

$$s_1 = \frac{(2n-k-1)s-(n-k)t}{n-1} > \frac{(n-k)s+(n-1)z-(n-k)t}{n-1} = \frac{(n-1)z}{n-1} = z.$$

Assim, $z < s_1 < s$ e, consequentemente, $s_1 \in (z, s) \subset I$.

Como $s_1 < s < x_{k+1} \leq x_{k+2} \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n$, temos $s_1 < y_n$, pois

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{(2n-k-1)s-(n-k)t}{n-1} \\ &= \frac{ns+(n-k-1)s-(x_{k+1}+x_{k+2}+\cdots+x_{n-1}+x_n)}{n-1} \\ &= \frac{ns+(s-x_{k+1})+(s-x_{k+2})+\cdots+(s-x_{n-1})-x_n}{n-1} \\ &< \frac{ns-x_n}{n-1} = y_n, \text{ e} \end{aligned}$$

ainda, $s_1 + s < y_n + y_{n-1}$, pois

$$\begin{aligned} s_1+s &= \frac{(2n-k-1)s-(n-k)t}{n-1} + s \\ &= \frac{ns+(n-k-1)s-(n-k)t+ns-s}{n-1} \\ &= \frac{2ns+(n-k-2)s-(x_{k+1}+x_{k+2}+\cdots+x_n)}{n-1} \\ &= \frac{2ns+(s-x_{k+1})+(s-x_{k+2})+\cdots+(s-x_{n-2})-x_{n-1}-x_n}{n-1} \\ &< \frac{2ns-x_{n-1}-x_n}{n-1} \\ &= \frac{ns-x_n}{n-1} + \frac{ns-x_{n-1}}{n-1} \\ &= y_n + y_{n-1}. \end{aligned}$$

Seguindo o argumento acima, temos $s_1 + (n-k-2) < y_n + y_{n-1} + \cdots + y_{k+2}$ e $s_1 + (n-k-1)s = y_n + y_{n-1} + \cdots + y_{k+1}$.

Desta forma concluímos que

$$\begin{gathered} s_1 < y_n \\ s_1 + s < y_n + y_{n-1} \\ \vdots \\ s_1 + (n-k-2)s < y_n + y_{n-1} + \cdots + y_{k+2} \\ s_1 + (n-k-1)s = y_n + y_{n-1} + \cdots + y_{k+1}. \end{gathered}$$

Observamos, ainda, que

$$\frac{ns-x_n}{n-1} = y_n \leq \frac{ns-x_{n-1}}{n-1} = y_{n-1} \leq \cdots \leq \frac{ns-x_{k+1}}{n-1} = y_{k+1}.$$

Assim, o vetor $\vec{A} = (s_1, \underbrace{s, \ldots, s}_{(n-k-1)\text{ vezes}})$ é majorado pelo vetor $\vec{B} = (y_n, y_{n-1}, \ldots, y_{k+1})$ e pela Desigualdade de Karamata (Teorema 1.17), temos

$$f(s_1) + \underbrace{f(s) + \ldots + f(s)}_{(n-k-1)\text{ vezes}} \leq f(y_n) + f(y_{n-1}) + \cdots + f(y_{k+1}),$$

ou melhor,

$$f(s_1) + (n-k-1)f(s) \leq f(y_{k+1}) + f(y_{k+2}) + \cdots + f(y_n).$$

Afirmação 5: Considerando $s < t$, temos

$$(2n-k-1)f(s) + kf(z) \leq nf(S) + (n-1)f(s_1), \tag{3.5}$$

para todo $k < n$.

De fato, como $z < S \leq s$, temos

$$\frac{S-z}{s-z} + \frac{s-S}{s-z} = S$$

e

$$\frac{S-z}{s-z} + \frac{s-S}{s-z} = 1.$$

Em virtude da Desigualdade de Jensen para funções côncavas (Teorema 1.15, (ii)), temos

$$\frac{S-z}{s-z}f(s) + \frac{s-S}{s-z}f(z) \leq \left(\frac{S-z}{s-z} + \frac{s-S}{s-z}\right) f\left(\frac{\frac{S-z}{s-z}s + \frac{s-S}{s-z}z}{\frac{S-z}{s-z} + \frac{s-S}{s-z}}\right) = f(S). \tag{3.6}$$

Também

$$\frac{s_1-z}{s-z}s + \frac{s-s_1}{s-z}z = s_1$$

e

$$\frac{s_1-z}{s-z}s + \frac{s-s_1}{s-z}z = 1.$$

Como $z < S \leq s$, pela Desigualdades de Jensen para funções convexas (Teorema 1.15, (ii)), temos

$$\frac{s_1-z}{s-z}f(s) + \frac{s-s_1}{s-z}f(z) \leq \left(\frac{s_1-z}{s-z} + \frac{s-s_1}{s-z}\right) f\left(\frac{\frac{s_1-z}{s-z}s + \frac{s-s_1}{s-z}z}{\frac{s_1-z}{s-z} + \frac{s-s_1}{s-z}}\right) = f(s_1). \tag{3.7}$$

Adicionando (3.6) e (3.7) após multiplicados por n e $(n-1)$, respectivamente, temos

$$\left[n\frac{S-z}{s-z} + (n-1)\frac{s_1-z}{s-z}\right] f(s) + \left[n\frac{s-S}{s-z} + (n-1)\frac{s-s_1}{s-z}\right] f(z)$$

$$\leq nf(S) + (n-1)f(s_1).$$

Logo,

$$\left(\frac{nS - 2nz + z + (n-1)s_1}{s-z}\right) f(s) + \left(\frac{2ns - nS - s + (n-1)s_1}{s-z}\right) f(z)$$
$$\leq nf(S) + (n-1)f(s_1).$$

Como $(n-1)s_1 = (2n-k-1)s - (n-k)t$, temos

$$\left(\frac{nS - 2nz + z + [(2n-k-1)s - (n-k)t]}{s-z}\right) f(s)$$
$$+ \left(\frac{2ns - nS - s - [(2n-k-1)s - (n-k)t]}{s-z}\right) f(z)$$
$$\leq nf(S) + (n-1)f(s_1).$$

Considerando $(n-k)t = x_{k+1} + x_{k+2} + \cdots + x_n$, obtemos

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n - 2nz + z + (2n-k-1)s - (x_{k+1} + x_{k+2} + \cdots + x_n)}{s-z}\right) f(s)$$
$$+ \left(\frac{2ns - (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) - s - (2n-k-1)s - (x_{k+1} + x_{k+2} + \cdots + x_n)}{s-z}\right) f(z)$$
$$\leq nf(S) + (n-1)f(s_1),$$

ou seja,

$$\left(\frac{kz + (2n-k-1)s - 2nz + z}{s-z}\right) f(s) + \left(\frac{2ns - nz - s - 2ns + ks + s}{s-z}\right) f(z)$$
$$\leq nf(S) + (n-1)f(s_1).$$

Como $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = kz$, temos

$$\left(\frac{(2n-k-1)s - (2nz-k-1)z}{s-z}\right) f(s) + \left(\frac{ks - kz}{s-z}\right) f(z) \leq nf(S) + (n-1)f(s_1)$$

que resulta em

$$\left(\frac{(2n-k-1)(s-z)}{s-z}\right) f(s) + \left(\frac{k(s-z)}{s-z}\right) f(z) \leq nf(S) + (n-1)f(s_1),$$

ou melhor,

$$(2n-k-1)f(s) + kf(z) \leq nf(S) + (n-1)f(s_1).$$

Finalmente, utilizando as desigualdades das Afirmações 2 a 5, provaremos o Teorema 3.1.

Para isso, multiplicando (3.4) por $(n-1)$ e adicionando a (3.5), obtemos

$$(n-1)f(s_1) + (n-1)(n-k-1)f(s) + (2n-k-1)f(s) + kf(z)$$

$$\leq (n-1)[f(y_{k+1}) + f(y_{k+2}) + \cdots + f(y_n)] + nf(S) + (n-1)f(s_1),$$

ou melhor,

$$(n^2 - nt)f(s) + kf(z) \leq (n-1)[f(y_{k+1}) + f(y_{k+2}) + \cdots + f(y_n)] + nf(S). \tag{3.8}$$

Adicionando, agora, (3.8) e (3.3), temos

$$(n^2 - nk)f(s) + kf(z) + f(x_{k+1}) + f(x_{k+2}) + \cdots + f(x_n) + (n-1)[f(y_{k+1}) + \cdots + f(y_n)]$$
$$\leq (n-1)[f(y_{k+1}) + f(y_{k+2}) + \cdots + f(y_n)] + nf(S) + (n^2 - nk)f(s),$$

ou melhor,

$$kf(z) + f(x_{k+1}) + f(x_{k+2}) + \cdots + f(x_n) \leq nf(S). \tag{3.9}$$

Como $S = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$, adicionando (3.9) e (3.2), temos

$$kf(z) + f(x_{k+1}) + f(x_{k+2}) + \cdots + f(x_n) + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_k) \leq nf(S) + kf(z),$$

que resulta em

$$f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \leq nf\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right),$$

provando assim o teorema. □

A seguir, apresentaremos algumas observações e uma consequência do Teorema 3.1 que podem auxiliar o leitor na resolução de alguns exercícios.

Observação 3.2. *A desigualdade (3.1) é equivalente a*

$$(n-1)f(x) + f(y) \leq nf(s), \tag{3.10}$$

para todo $x, y \in I$ tais que $x \leq s \leq y$ e $(n-1)x + y = ns$.

De fato, sejam $x, y \in I$ tais que $x \leq s \leq y$ e $(n-1)x + y = ns$, e considerando $s_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = x$ e $x_n = y$, temos $x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n = (n-1)x + y = ns$, que implica em $\dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n}{n} = s$, para $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} \leq s$.

Por (3.1), temos

$$(n-1)f(x) + f(y) = f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \leq nf\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) = nf(s).$$

Reciprocamente, a condição (3.10) implica que dados $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ tais que $\dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = s$ e $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} \leq s$, temos

$$s = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{\overbrace{x_1 + x_1 + \cdots + x_1}^{(n-1)\text{ vezes}} + x_n}{n} = \frac{(n-1)x_1 + x_n}{n}$$

e

$$ns = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \underbrace{x_1 + x_1 + \cdots + x_1}_{(n-1) \text{ vezes}} + x_n = (n-1)x + x_n.$$

Como $s \leq x_n$ e $ns = (n-1)s + s = (n-1)x_1 + x_n$, temos $s \geq x_1$. Logo, $x_1 \leq x \leq x_n$.

Considerando $x = x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1}$, $y = x_n$ e a condição (3.10), temos

$$\begin{aligned}
f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1}) + f(x_n) &= \overbrace{f(x) + f(x) + \cdots + f(x)}^{(n-1) \text{ vezes}} + f(y) \\
&= (n-1)f(x) + f(y) \\
&\leq nf\left(\frac{(n-1)x + y}{n}\right) \\
&= nf\left(\frac{ns}{n}\right) \\
&= nf(s) \\
&= nf\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right).
\end{aligned}$$

Logo, (3.10) implica que (3.1) é válida. Portanto, as condições (3.10) e (3.1) são equivalentes para todo $x, y \in I$ tais que $x \leq s \leq y$ e $(n-1)x + y = ns$.

Observação 3.3. *Seja* $g(t) = \dfrac{f(t) - f(s)}{t - s}$, *para* $t \neq s$ *e* $g(t) = 0$, *para* $t = s$, *e* $t, s \in I$. *Então, a condição (3.1) é equivalente a condição* $g(x) \geq g(y)$, *para todo* $x, y \in I$ *tais que* $x \leq s \leq y$ *e* $(n-1)x + y = ns$.

Para todo $x, y \in I$ tais que $x < s < y$ e $(n-1)x + y = ns$, temos

$$\begin{aligned}
(n-1)f(x) + f(y) - nf(s) &= (n-1)f(x) + f(y) - (n-1)f(s) - f(s) \\
&= (n-1)(x-s)g(x) + (y-s)g(y) \\
&= (n-1)(x-s)g(x) + [ns - (n-1)x - s]g(y) \\
&= (n-1)(x-s)g(x) + [(n-1)s - (n-1)x]g(y) \\
&= (n-1)(s-x)[g(y) - g(x)],
\end{aligned}$$

ou seja, provamos que

$$(n-1)f(x) + f(y) - nf(s) = (n-1)(s-x)[g(y) - g(x)],$$

para todo $x, y \in I$ tais que $x < s < y$ e $(n-1)x + y = ns$.

Para $s = x$ ou $s = y$ e $(n-1)x + y = ns$, facilmente verificamos que

$$(n-1)f(x) + f(y) - nf(s) = (n-1)(s-x)[g(y) - g(x)].$$

Portanto,

$$(n-1)f(x) + f(y) - nf(s) = (n-1)(s-x)[g(y) - g(x)], \tag{3.11}$$

para todo $x, y \in I$ tais que $x \leq s \leq y$ e $(n-1)x + y = ns$.

Observação 3.4. *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ diferenciável em I. Então, dados $x, y \in I$ tais que $x \leq s \leq y$ e $(n-1)x + y = ns$, a condição*

$$f'(x) \geq f'(y), \tag{3.12}$$

implica que (3.1) é válida.

Para $s \in I$ fixo, definimos a função auxiliar

$$F(y) = (n-1)f\left(\frac{ns-y}{n-1}\right) + f(y) - nf(s), \tag{3.13}$$

para todo $y \in I$.

Derivando a equação (3.13) em relação a y, obtemos

$$F'(y) = f'(y) - f'\left(\frac{ns-y}{n-1}\right). \tag{3.14}$$

Da igualdade $(n-1)x + y = ns$, resulta

$$x = \frac{ns-y}{n-1}. \tag{3.15}$$

Assim, utilizando (3.12), (3.14) e (3.15), podemos escrever

$$F'(y) = f'(y) - f'(x) \leq 0$$

e, consequentemente, a função $F(y)$ é não-crescente para $s \leq y$.

Portanto,

$$F(y) \leq F(s) = 0, \text{ para } s \geq y. \tag{3.16}$$

De (3.13), (3.15) e (3.16), concluímos que

$$(n-1)f(y) + f(y) - nf(s) \leq 0,$$

ou seja,

$$(n-1)f(y) + f(y) \leq nf(s),$$

para todo $x, y \in I$ tais que $x \leq s \leq y$ e $(n-1)x + y = ns$.

Corolário 3.5 (Corolário das desigualdades envolvendo funções côncavas à esquerda)**.** *Sejam* $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ *e* $r > 0$*. Suponhamos que a função* $g(u) = f(e^u)$ *é côncava para* $u = \ln r$ *e a desigualdade*

$$f(a_1) + f(a_2) + \cdots + f(a_n) \leq nf\,(\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}) \tag{3.17}$$

é válida para todo $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ *tais que* $\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = r$ *e* $a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-1} \leq r$*. Então,* (3.17) *é válida para todo* $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ *tais que* $\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq r$*.*

Demonstração: Consideremos $r, a_1, a_2, \cdots, a_n$, como no enunciado e as seguintes relações

$$\begin{aligned} s = \ln r &\Longleftrightarrow e^s = r \\ x_1 = \ln a_1 &\Longleftrightarrow e^{x_1} = a_1 \\ x_2 = \ln a_2 &\Longleftrightarrow e^{x_2} = a_2 \\ &\vdots \\ x_n = \ln a_n &\Longleftrightarrow e^{x_n} = a_n. \end{aligned}$$

Em virtude das propriedades das funções exponencias e logarítmicas, obtemos as seguintes expressões:

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = ln\,\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \tag{3.18}$$

$$e^{x_1 + x_2 + \cdots + x_n} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \tag{3.19}$$

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = r \Longleftrightarrow \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = s \tag{3.20}$$

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-1} \leq r \Longleftrightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} \leq s. \tag{3.21}$$

Como $g(u) = f(e^u)$ é côncava para $u \leq \ln r = s$, isto é, $g(u)$ é côncava para $u \leq s$, levando em conta (3.17) a (3.21), obtemos

$$g(x_1) + g(x_2) + \cdots + g(x_n) \leq ng\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right), \tag{3.22}$$

para todo $x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0$ tais que $\dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n}{n} = s$ e $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} \leq s$.

Considerando (3.22) e aplicando o Teorema 3.1 para função g côncava à esquerda, temos

$$g(x_1) + g(x_2) + \cdots + g(x_n) \leq ng\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right), \tag{3.23}$$

para todo $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ tais que $\dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \leq s$.

Utilizando o mesmo argumento acima e levando em consideração (3.23), obtemos

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \leq s \Longleftrightarrow \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq r,$$

o que conclui a prova do corolário. $\square$

Observação 3.6. *A condição (3.17) é equivalente à condição*

$$(n-1)f(x)+f(y)\leq nf(s), \tag{3.24}$$

para todo $x, y > 0$ tais que $x \leq r \leq y$ e $x^{n-1}y = r^n$.

De fato, sejam

$$x, y > 0 \text{ tais que } x \leq r \leq y \text{ e } x^{n-1}y = r^n. \tag{3.25}$$

Considerando $a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-1} = x$, $a_n = y$ e usando (3.25), obtemos

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} = \sqrt[n]{\underbrace{x\cdots x}_{(n-1)\text{ vezes}}y} = \sqrt[n]{x^{n-1}y} = \sqrt[n]{r^n} = r \text{ e } a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-1} = x \leq r. \tag{3.26}$$

Considerando (3.26) e aplicando (3.17), temos

$$\begin{aligned}(n-1)f(x)+f(y) &= f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_n)\\ &\leq nf\left(\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\right)\\ &= nf(r),\end{aligned}$$

provando que (3.17) implica em (3.24).

Reciprocamente, levando em conta que

$$a_1, a_2, \cdots, a_n > 0 \text{ tais que } \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} = r \text{ e } a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-1} \leq r. \tag{3.27}$$

Considerando $a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-1} = x \leq r$, $a_n = y$ e usando (3.27), obtemos

$$\sqrt[n]{x^{n-1}y} = \sqrt[n]{\underbrace{x\cdots x}_{(n-1)\text{ vezes}}y} = \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} = \sqrt[n]{r^n} = r \text{ e } x \leq r \leq y. \tag{3.28}$$

Considerando, agora, (3.28) e aplicando (3.24) resulta em

$$\begin{aligned}f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_n) &= \underbrace{f(x)+f(x)+\cdots+f(x)}_{(n-1)\text{ vezes}}+f(y)\\ &= (n-1)f(x)+f(y)\\ &= nf(r)\\ &= nf(\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}),\end{aligned}$$

provando que (3.24) implica em (3.17).

Observação 3.7. *Seja $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ diferenciável em $(0,\infty)$. Então, dados $x, y \in I$ tais que $x \le r \le y$ e $x^{n-1}y = r$, a condição*

$$xf'(x) \le yf'(y) \tag{3.29}$$

implica que (3.17) é válida.

De fato, sejam

$$x, y \in I \text{ tais que } x \le r \le y \text{ e } x^{n-1}y = r, \tag{3.30}$$

para $r \in I$ fixo, definimos a seguinte função auxiliar dada por

$$F(y) = f(y) + (n-1)f\left(r \sqrt[n-1]{\frac{r}{y}}\right) - nf(r), \tag{3.31}$$

para todo $x \in I$.

Derivando a equação (3.31) em relação a y e usando (3.30), obtemos

$$F'(y) = f'(y) - \frac{r}{y}\sqrt[n-1]{\frac{r}{y}}f'(x) = \frac{yf'(y) - xf'(x)}{y}. \tag{3.32}$$

Considerando (3.29) e (3.32), temos

$$F'(y) \ge 0,$$

para $x \le r \le y$ e isto significa que a função $F(y)$ é não-crescente para todo $y \ge r$. Assim,

$$F(y) \ge F(r) = 0 \text{ para } y \ge r. \tag{3.33}$$

Tendo em vista (3.31) e (3.33), concluímos que

$$(n-1)f(x) + f(y) - f(r) \le 0,$$

ou ainda,

$$(n-1)f(x) + f(y) \le f(r),$$

para todo $x, y \in I$ tais que $x \le r \le y$ e $x^{n-1}y = r$.

A seguir, apresentaremos algumas aplicações do Teorema 3.1.

Proposição 3.8. *Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$, números reais não negativos tais que*

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n. \tag{3.34}$$

Então,

$$(x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3) + n^2 \le (n+1)(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2). \tag{3.35}$$

Demonstração: Inicialmente, observemos que a desigualdade (3.35) pode ser escrita de seguinte forma:

$$f(u_1) + f(u_2) + \cdots + f(u_n) \leq nf\left(\frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}\right), \tag{3.36}$$

onde

$$f(u) = u^3 + n^2 \leq (n+1)u^2,$$

para $u \geq 0$.

A segunda derivada de $f(u)$ é dada por

$$f''(u) = 6u - 2(n+1). \tag{3.37}$$

Pelo Teorema 1.12, f é côncava em intervalo aberto I se, e somente se, $f''(u) \leq 0$, $u \in I$.

Notemos que

$$6u - 2(n+1) \leq 0 \text{ se, e somente se, } u \leq \frac{n+1}{3},$$

ou seja,

$$f \text{ é côncava para } u = \frac{n+1}{3}. \tag{3.38}$$

Usando a hipótese (3.34), temos que

$$s = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = 1 \leq \frac{n+1}{3}. \tag{3.39}$$

A partir de (3.38) e (3.39), obtemos que f é côncava para $u \leq s$, para s dado em (3.39).

De acordo com o Teorema 3.1 é suficiente provar

$$f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1}) + f(x_n) \leq nf\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right), \tag{3.40}$$

para $\dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = s = 1$ e $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} \leq s = 1 \leq x_n$.

De acordo com a Observação 3.2, (3.40) é equivalente a mostrar

$$g(x) \geq g(y), \text{ para } 0 \leq x \leq 1 \leq y \text{ e } (n-1)x + y = ns, \tag{3.41}$$

onde

$$g(t) = \frac{f(t) - f(s)}{t - s} = \frac{t^3 - (n+1)t^2 + n}{t - 1} = t^2 - nt - n.$$

Com efeito, para $n \geq 2$, temos que

$$g(x) - g(y) = x^2 - nx - n - y^2 + ny + n = \underbrace{(y-x)}_{\geq 0}\underbrace{(n-2)}_{\geq 0}\underbrace{x}_{\geq 0} \geq 0,$$

ou seja, (3.41) é válida.

Agora, levando em consideração a desigualdade (3.40) e aplicando o Teorema 3.1, obtemos

$$f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1}) + f(x_n) \leq nf\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right), \tag{3.42}$$

para todo $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [0, \infty)$ tais que $\dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \leq 1$, para $n \geq 2$.

Para obtermos (3.35), basta usar (3.42).

A desigualdade (3.35) torna-se uma igualdade quando $n = 2$ ou, ainda, no caso em que $n \geq 3$, se $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$ ou $x_i = n$ e $x_j = 0$, $j \neq i$. □

Proposição 3.9. *Sejam $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, números reais não negativos tais que*

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = r \leq \sqrt{\frac{n-1}{n^2 - n + 1}}.$$

Então,

$$\frac{1}{1 + x_1^2} + \frac{1}{1 + x_2^2} + \cdots + \frac{1}{1 + x_n^2} \leq \frac{n}{1 + r^2}. \tag{3.43}$$

Demonstração: Consideremos $f(u) = \dfrac{1}{1 + u^2}$, $u \geq 0$.

A segunda derivada de $f(u)$ é dada por $f''(u) = \dfrac{6u^2 - 2}{(1 + u^2)^3}$.

Assim, para $u \leq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, temos $f''(u) = \dfrac{6u^2 - 2}{(1 + u^2)^3} \leq 0$ e, consequentemente, f é côncava em $\left[0, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right]$.

Pelo Teorema 3.1, temos

$$f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \leq nf\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right),$$

para $0 \leq x \leq s \leq y$ e $x + (n-1)y = ns$.

Se $n = 1$, temos $x_n = x_1 = r > 0$ e

$$g(x) - g(y) = \frac{1}{1 + x^2} - \frac{1}{1 + r^2} = \frac{1}{1 + x_1^2} - \frac{1}{1 + x_1^2} = 0.$$

Considerando $s = \sqrt{\dfrac{n-1}{n^2 - n + 1}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, a função f é côncava no intervalo $[0, s]$.

Pelo Teorema 3.1 e pela Observação 3.3, precisamos mostrar que $g(x) \geq g(y)$, para $0 \leq x \leq s \leq y$ e $(n-1)x + y = ns$.

Como $g(t) = \dfrac{f(t) - f(s)}{t - s}$, temos

$$g(t) = \frac{f(t) - f(s)}{t - s} = \frac{\dfrac{1}{1+t^2} - \dfrac{1}{1+s^2}}{t - s} = \frac{-t - s}{(1+t^2)(1+s^2)}$$

e, consequentemente, temos $g(x) = \dfrac{-x - s}{(1+x^2)(1+s^2)}$ e $g(y) = \dfrac{-y - s}{(1+y^2)(1+s^2)}$.
Assim,

$$g(x) - g(y) = \frac{-x - s}{(1+x^2)(1+s^2)} - \frac{-y - s}{(1+y^2)(1+s^2)} = \frac{(x-y)[s(x+y) + xy - 1]}{(1+s^2)(1+x^2)(1+y^2)}.$$

Como $x - y \leq 0$ e $(1+s^2)(1+x^2)(1+y^2) > 0$, precisamos provar, ainda, que $s(x+y) + xy - 1 \leq 0$. Considerando $(n-1)x + y = ns$, temos $y = ns - (n-1)x$ e, assim

$$\begin{aligned} s(x+y) + xy - 1 =& s[x + ns - (n-1)x] + x[ns - (n-1)x] - 1 \\ =& \frac{(n^2 - n + 1)s^2 - n + 1 - [(n-1)x - s]^2}{n - 1}. \end{aligned}$$

Considerando $n \geq 2$, temos $n - 1 \geq 2 - 1 = 1$ que leva a concluir que $[(n-1)x - s]^2 \geq 0$ e $-[(n-1)x - s]^2 \leq 0$. Logo,

$$\begin{aligned} s(x+y) + xy - 1 &= \frac{(n^2 - n + 1)s^2 - n + 1 - [(n-1)x - s]^2}{n - 1} \\ &\leq \frac{(n^2 - n + 1)s^2 - n + 1}{n - 1} \\ &= \frac{(n^2 - n + 1)\left(\sqrt{\dfrac{n-1}{n^2 - n + 1}}\right)^2 - n + 1}{n - 1} \\ &= \frac{n - 1 - n + 1}{n - 1} = 0. \end{aligned}$$

Assim, $g(x) - g(y) = \dfrac{\overbrace{(x-y)}^{\leq 0}\overbrace{[s(x+y) + xy - 1]}^{\leq 0}}{\underbrace{(1+s^2)}_{>0}\underbrace{(1+x^2)}_{>0}\underbrace{(1+y^2)}_{>0}} \geq 0$, ou seja, $g(x) \geq g(y)$. Pela Observação 3.3, temos

$$f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \leq nf\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right),$$

para todo $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \left[0, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right]$ tais que $\dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = r \leq \sqrt{\dfrac{n-1}{n^2 - n + 1}}$.

E, ainda, temos

$$\frac{1}{1+x_1^2}+\frac{1}{1+x_2^2}+\cdots+\frac{1}{1+x_n^2}\leq nf\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right),$$

para todo $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ e $\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} = r \leq \sqrt{\frac{n-1}{n^2-n+1}}$.

Em particular, considerando $\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} = r$, encontramos

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x_1^2}+\frac{1}{1+x_2^2}+\cdots+\frac{1}{1+x_n^2} &\leq nf\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)\\ &= nf(r) = n\cdot\frac{1}{1+r^2} = \frac{n}{1+r^2},\end{aligned}$$

concluindo a demonstração.

A desigualdade (3.43) torna-se uma igualdade quando $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = r$, e no caso em que $r = \sqrt{\frac{n-1}{n^2-n+1}}$, se $x_i = (n-1)r$ e $x_j = \frac{r}{n-1}$, $j \neq i$.

$\square$

Capítulo 4

Desigualdades envolvendo funções côncavas à esquerda e convexas à direita

Agora, faremos a demonstração das desigualdades envolvendo função côncava à esquerda e convexa à direita.

Teorema 4.1 (Teorema das desigualdades envolvendo função côncava à esquerda e convexa à direita)**.** *Sejam a, c, S, números reais não negativos tais que $a < c$ e $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ uma função côncava em $[a, c]$ e convexa em $[c, \infty)$. Então, considerando*

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a, \infty) \text{ tais que } x_1 + x_2 + \cdots + x_n = S,$$

a expressão

$$E = f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \tag{4.1}$$

é maximal, isto é, $f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1}) + f(x_n) \leq (n-1)f(x_1) + f(x_n)$, para $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} \leq x_n$.

Demonstração: Sem perda de generalidade, assumiremos que $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$ e estudaremos dois casos.

1º caso: Suponhamos que $x_n \leq c$. Neste caso, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a, c]$. Como $f : [a, c] \to \mathbb{R}$ é uma função côncava, pela Desigualdade de Jensen para funções côncavas (Teorema 1.15, (ii)), temos

$$E = f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \leq nf\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)$$

e, se $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = x_n$, então,

$$E = f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \leq nf\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= nf\left(\frac{\overbrace{x_n + x_n + \cdots + x_n}^{n \text{ parcelas}}}{n}\right) \\
&= nf(x_n) \\
&= \overbrace{f(x_n) + f(x_n) + \cdots + f(x_n)}^{n \text{ parcelas}} \\
&= f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) = E,
\end{aligned}
$$

que leva a concluir que a expressão E é maximal quando $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

2º caso: $x_1 \leq c < x_n$. Neste caso, existe $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ tal que $a \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_k \leq c < x_{k+1} \leq \cdots \leq x_n$. Considerando $a_1 = x_{k+1} + x_{k+2} + \cdots + x_n - (n-k-1)c$, $a_2 = a_3 = \cdots = a_{n-k} = c$ e $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_{n-k}$, temos $a_1 > x_n$, pois

$$
\begin{aligned}
a_1 &= x_{k+1} + x_{k+2} + \cdots + x_n - (n-k-1)c \\
&= \underbrace{x_{k+1} - c}_{>0} + \underbrace{x_{k+2} - c}_{>0} + \cdots + \underbrace{x_{n+1} - c}_{>0} + x_n \\
&> x_n,
\end{aligned}
$$

e, ainda, $a_1 + a_2 > x_{n-1} + x_n$, pois

$$
\begin{aligned}
a_1 + a_2 &= x_{k+1} + x_{k+2} + \cdots + x_n - (n-k-1)c + c \\
&= x_{k+1} + x_{k+2} + \cdots + x_n - (n-k-2)c \\
&= \underbrace{x_{k+1} - c}_{>0} + \underbrace{x_{k+2} - c}_{>0} + \cdots + \underbrace{x_{n-2} - c}_{>0} + x_{n-1} + x_n \\
&> x_{n-1} + x_n.
\end{aligned}
$$

Seguindo o argumento acima, temos $a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-k-1} > x_{k+2} + \cdots + x_n$.

Por fim, $a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-k} = x_{k+1} + x_{k+2} + \cdots + x_n$.

Considerando $\vec{A} = (a_1, a_2, \ldots, a_{n-k})$ e $\vec{B} = (x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{k+1})$, temos $\vec{A}$ majora $\vec{B}$ e pela Desigualdade de Karamata para função convexa (Teorema 1.17), temos

$$
f(a_1) + f(a_2) + \cdots + f(a_n) \geq f(x_n) + f(x_{n-1}) + \cdots + f(x_{k+1}). \tag{4.2}
$$

Considerando $a_1 = x_{k+1} + x_{k+2} + \cdots + x_n - (n-k-1)c$ e $a_2 = a_3 = \cdots = a_{n-k} = c$, a desigualdade (4.2) é equivalente a

$$
f(x_{k+1} + x_{k+2} + \cdots + x_n - (n-k-1)c) + (n-k-1)f(c) \geq f(x_n) + f(x_{n-1}) + \cdots + f(x_{k+1}),
$$

ou melhor,

$$
f(x_{k+1}) + \cdots + f(x_n) \leq (n-k-1)f(c) + f(x_{k+1} + x_{k+2} + \cdots + x_n - (n-k-1)c). \tag{4.3}
$$

Como $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_k \le c$, pela Desigualdade de Jensen para função côncava (Teorema 1.15, (ii)), temos

$$\begin{aligned}
&(n-k-1)f(c)+f(x_1)+\cdots+f(x_k)\\
\le&(n-k-1+k)f\left(\frac{(n-k-1)c+x_1+x_2+\cdots+x_k}{n-k-1+k}\right)\\
=&(n-1)f\left(\frac{(n-k-1)c+x_1+x_2+\cdots+x_k}{n-1}\right).
\end{aligned}\tag{4.4}$$

Adicionando (4.3) e (4.4), temos

$$\begin{aligned}
f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)\le&(n-1)f\left(\frac{(n-k-1)c+x_1+x_2+\cdots+x_k}{n-1}\right)\\
&+f(x_{k+1}+x_{k+2}+\cdots+x_n-(n-k-1)c).
\end{aligned}$$

Substituindo $\dfrac{(n-k-1)c+x_1+x_2+\cdots+x_k}{n-1}$ por x e $x_{k+1}+\cdots+x_n-(n-k-1)c$ por y, temos

$$f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{n-1})+f(x_n)\le(n-1)f(x)+f(y).$$

E, ainda, como

$$\begin{aligned}
x&=\frac{(n-k-1)c+x_1+x_2+\cdots+x_k}{n-1}\\
&=\frac{(n-1)c+x_1+x_2+\cdots+x_k-kc}{n-1}\\
&=\frac{(n-1)c}{n-1}+\frac{\overbrace{(x_1-c)}^{\le 0}+\overbrace{(x_2-c)}^{\le 0}+\cdots+\overbrace{(x_k-c)}^{\le 0}}{n-1}\le c
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
y&=x_{k+1}+x_{k+2}+\cdots+x_n-(n-k-1)c\\
&=x_{k+1}+x_{k+2}+\cdots+x_n-(n-k)c-c\\
&=\underbrace{(x_{k+1}-c)}_{>0}+\underbrace{(x_{k+2}-c)}_{>0}+\cdots+\underbrace{(x_n-c)}_{>0}+c>c,
\end{aligned}$$

temos $x\le c<y$ e E é maximal quando $x_1+x_2+\cdots+x_n=(n-1)x+y$, pois

$$E=f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)\le(n-1)f(x)+f(y).$$

Considerando $k=n-1$, temos $x=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{n-1}$ e $y=x_n$.

Assim, a expressão E é equivalente a

$$f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{n-1})+f(x_n)\le(n-1)f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{n-1}\right)+f(x_n)$$

$$
\begin{aligned}
&= (n-1) f\left(\frac{\overbrace{x_{n-1} + x_{n-1} + \cdots + x_{n-1}}^{(n-1) \text{ parcelas}}}{n-1}\right) + f(x_n) \\
&= (n-1) f(x_{n-1}) + f(x_n) \\
&= \underbrace{f(x_{n-1}) + f(x_{n-1}) + \cdots + f(x_{n-1})}_{(n-1) \text{ parcelas}} + f(x_n) \\
&= f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1}) + f(x_n) = E,
\end{aligned}
$$

que leva a concluir que a expressão E é maximal quando $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} < x_n$.
□

Proposição 4.2. *Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$, números reais não negativos tais que $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n$. Então,*

$$2(x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3) + n^2 \leq (2n+1)(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2). \tag{4.5}$$

Demonstração: Como $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n$, temos $s = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = 1$ e para $(n-1)x + y = ns$, temos $(n-1)x + y = n$ e $y = n - (n-1)x$.

E, ainda, a desigualdade (4.5) é equivalente a

$$2(x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3) + n^2 - (2n+1)(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) \leq 0. \tag{4.6}$$

Escrevendo a desigualdade (4.6) como $f(u_1) + f(u_2) + \cdots + f(u_n) \leq 0$ e considerando $f(u) = 2u^3 - (2n+1)u^2 + n$, temos $f''(u) = 2(6u - 2n - 1)$.

Para $u \leq \dfrac{2n-1}{6}$, temos $f''(u) \leq 0$ e para $u \geq \dfrac{2n-1}{6}$, temos $f''(u) \geq 0$, ou melhor, f é côncava em $\left[0, \dfrac{2n+1}{6}\right]$ e convexa em $\left[\dfrac{2n+1}{6}, \infty\right)$.

Pelo Teorema das desigualdades envolvendo funções côncavas à esquerda e convexas à direita (Teorema 4.1), devemos provar que

$E = f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)$ é maximal para $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} \leq x_n$.

Definimos $g(t) = \dfrac{f(t) - f(s)}{t - s}$, para $0 \leq x \leq s \leq y$ e $(n-1)x + y = ns$, temos

$$2x^3 + n = (2n+1)x^2, \text{ se } n = 1$$

e

$$(n-1)f(x) + f(y) = (n-1)[2x^3 - (2n+1)x^2 + n] + 2y^3 - (2n+1)y^2 + n, \text{ se } n \geq 2.$$

Substituindo y por $n - (n-1)x$, temos

$$(n-1)[2x^3 - (2n+1)x^2 + n] + 2[n - (n-1)x]^3 - (2n+1)[n - (n-1)x]^2 + n$$

$=n(n-1)x[2(-n+2)x^2+(4n-7)x-2n+2].$

Como $n \geq 2$, $n-1 \geq 2-1 = 1 > 0$ e $x > 0$, basta provar que

$$2(-n+2)x^2+(4n-7)x-2n+2 \leq 0$$

que equivale a

$$2(n-2)x^2-(4n-7)x+2n-2 \geq 0.$$

Como

$$2(n-2)x^2-(4n-7)x+2n-2 = 2(x-1)^2(n-2)-(x-2)$$

e considerando $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n$, temos

$$\begin{aligned}
&2(x-1)^2(n-2)-(x-2)\\
&= 2(n-1)^2(n-2)-(n-2)\\
&= (2n^2-4n+1)(n-2)\\
&\geq (2n^2-4n)(n-2)\\
&= \underbrace{2n}_{>0}\underbrace{(n-2)^2}_{\geq 0}\\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

Assim, $(n-1)f(x)+f(y) \leq 0$ e, consequentemente,

$$2(x_1^3+x_2^3+\cdots+x_n^3)+n^2-(2n+1)(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2) \leq 0,$$

ou melhor,

$$2(x_1^3+x_2^3+\cdots+x_n^3)+n^2 \leq (2n+1)(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2).$$

A desigualdade (4.5) torna-se uma igualdade quando $x_i = n$ e $x_j = 0$, $j \neq i$. □

Proposição 4.3. *Sejam x, y, z, números reais positivos tais que $x+y+z=3$. Então,*

$$8\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+9 \geq 10(x^2+y^2+z^2). \tag{4.7}$$

Demonstração: Primeiramente, notemos que a desigualdade (4.7) é equivalente a

$$10(x^2+y^2+z^2)-8\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \leq 9 \tag{4.8}$$

e pode ser escrita como $f(x)+f(y)+f(z) \leq 9$.

Considerando $f(u) = 10u^2 - \dfrac{8}{u}$, temos $f''(u) = \dfrac{20u^3-16}{u^3}$.

Para $u \leq \sqrt[3]{\dfrac{4}{5}}$, temos $f''(u) \leq 0$ e para $u \geq \sqrt[3]{\dfrac{4}{5}}$, temos $f''(u) \geq 0$, ou melhor, f é côncava em $\left(0, \sqrt[3]{\dfrac{4}{5}}\right]$ e convexa em $\left[\sqrt[3]{\dfrac{4}{5}}, \infty\right)$.

Pelo Teorema das desigualdades envolvendo funções côncavas à esquerda e convexas à direita (Teorema 4.1), $E = f(x) + f(y) + f(z)$ é maximal para $x = y \leq z$.

Para $x = y \leq z$ e $x+y+z = 3$, temos $z = 3-2x$ e, consequentemente, $6-5x \geq 1 > 0$. Assim,

$$
\begin{aligned}
8\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right]+9-10(x^2+y^2+z^2) &= 8\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{3-2x}\right]+9-10[x^2+x^2+(3-2x)^2] \\
&= \frac{3\overbrace{(2x-1)^2}^{\geq 0}[10\overbrace{(x-1)^2}^{\geq 0}+\overbrace{(6-5x)}^{>0}]}{\underbrace{x}_{>0}\underbrace{(3-2x)}_{>0}},
\end{aligned}
$$

o que leva a concluir que

$$8\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+9-10(x^2+y^2+z^2) \geq 0,$$

ou seja,

$$8\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+9 \geq 10(x^2+y^2+z^2).$$

A desigualdade (4.7) torna-se uma igualdade quando x ou y ou z for igual a 2 e demais forem iguais a $\dfrac{1}{2}$. $\square$

Considerações finais

As desigualdades, na Educação Básica, principalmente no Ensino Fundamental, estão sendo tratadas como algo simples, tendo em vista que muitas vezes não há preocupação quanto a demonstrações das mesmas. Frequentemente nos deparamos com exercícios do tipo "siga"e "resolva como no modelo". Esta prática é classificada pelo educador Paulo Freire como educação bancária, uma vez que ocorre a busca de informações adquiridas de forma mecânica pelos educandos. Porém, o papel da escola deve ir além, ou melhor, deve levar à compreensão dos conteúdos. Como professor da Educação Básica, sempre tive preocupação em demonstrar aos educandos, fórmulas, teoremas, regras e propriedades apresentadas, por acreditar que desta forma os conteúdos vivenciados seriam melhor assimilados pelos educandos.

As desigualdades e suas propriedades, ou melhor, tricotomia, transitividade, monotonicidade da adição e da multiplicação, mesmo que no início, podem apresentar algumas dificuldades aos educandos, no entanto não podem ser dispensadas. As demonstrações das desigualdades envolvendo funções convexas à direita, desigualdades envolvendo funções côncavas à esquerda e desigualdades envolvendo funções côncavas à esquerda e convexas à direita, mostram a importância dos conteúdos anteriores, pois exigem desde os conceitos simples de adição até os conceitos mais complexos.

Podemos observar que as demonstrações auxiliam na prova de certos teoremas, como apresentamos neste trabalho. No entanto, muitas vezes são consideradas pelos educadores como algo pronto, e repassamos aos educandos como se fosse algo indiscutível. Porém, precisamos nos preocupar com um certo rigor matemático e procurar proporcionar um ensino de qualidade e conduzir nossos alunos à análise crítica do conteúdo apresentado, pois só assim, eles aprenderão a construir conhecimentos matemáticos.

Desta forma, esperamos que as demonstrações apresentadas neste trabalho contribuam para reflexão dos professores, quanto a sua prática pedagógica, mudando, assim, a atitude deste educadores. Certamente, será despertado nos alunos o gosto pelo estudo da matemática, pois estes passarão a encarar a matemática como um desafio e não como algo intocável e indiscutível.

Referências bibliográficas

[1] AMORIM, Ronan Gomes de. **Introdução à Análise Convexa: Conjuntos e Funções Convexas**. Dissertação de Mestrado Profissional m Matemática em Rede Nacional – PROFMAT. Universidade Federal de Góais. Goiânia, 2013. p. 57 a 59. Disponível em `http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/handle/123456789/542`. Acesso em 16/01/2015.

[2] CIRTOAJE, Vasile, **Algebraic Inequalities**, GIL publishing house, Zalău, Romania, 2006. p. 141 a 192 e 476 a 480.

[3] FREIRE, Paulo. **Pedagogia do oprimido**. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2007.

[4] KUMON, Toru. **Estudo gostoso de Matemática: o segredo do método Kumon (Título original: 公文式算数の秘密)**. Tradução de Silvia Shiota. 7ª edição. Rio de Janeiro: Ediouro Publicações S.A., 2000.

[5] LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise – Volume 1**. 14ª edição. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2013. Projeto Euclides. p. 286 a 289.

[6] LIMA, Elon Lages. **Números e Funções**. 1a edição. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.

[7] MACHADO, Nílson José. **Matemática e Língua Moderna: análise de uma impregnação mútua**. 2ª edição.São Paulo: Cortez Editora, 1991.

[8] ROSA, Maurício. **Role Playing Game Eletrônico: uma tecnologia lúdica para aprender e ensinar Matemática**. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2004. Disponível em `http://www.athena.biblioteca.unesp.br/exlibris/bd/brc/33004137031P7/2004/rosa_m_me_rcla.pdf`. Acesso em 10/05/20072007.

[9] VELAME, Gabriel Carvalho. **Uma abordagem sobre desigualdades e suas aplicações**. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática. Universidade

Federal do Recôncavo da Bahia. Cruz das Almas, 2014. p. 28 a 29. Disponível em http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/1117/2012_00897_GABRIEL_CARVALHO_VELAME.pdf?sequence=1. Acesso em 16/01/2015.

Relação dos livros didáticos analisados

DANTE, Luiz Roberto. **Projeto Teláris: Matemática – 7º ano**. São Paulo: Editora Ática, 2013.

GIOVANI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto; GIOVANI JÚNIOR, José Ruy. **Matemática Fundamental Uma Nova Abordagem: Ensino Médio: Volume único**. São Paulo: Editora FTD S.A, 2002.

GIOVANI, José Ruy; CASTRUCCI, Benedito; GIOVANI JÚNIOR, José Ruy. **A Conquista da Matemática: a + nova – 6ª série (Coleção a conquista da Matemática)**. 1ª edição. São Paulo: Editora FTD S.A., 2002.

LONGEN, Adilson. **Matemática Ensino Médio – 1ª série**. 1ª edição. Curitiba: Editora Positivo Ltda., 2004.

MACHADO, Nilson José. **Matemática e Língua Materna (Análise de uma impregnação mútua)**. 2ª edição. São Paulo: Cortez Editora, 1991.

PEREIRA, Tânia Michel. **Matemática 6ª série: Melhoria do Ensino de Ciências e Matemática**. Ijuí: Livraria UNIJUÍ Editora, 1990.

SANTOS, Carlos Alberto Marcondes dos; GENTIL, Nelson; GRECO, Sérgio Emílio. **Matemática Série Novo Ensino Médio: Volume único**. 6ª edição. São Paulo: Editora Ática, 2000.

SILVA, Claudio Xavier da; BARRETO FILHO, Benigno. **Matemática aula por aula – 1ª série**. 2ª edição revisada. São Paulo: Editora FTD S.A., 2005.

SOUZA, Joamir Roberto de. **Novo Olhar Matemática – Volume 1**. 1ª edição. São Paulo: Editora FTD S.A., 2010.