O BINÔMIO DE NEWTON

por:

José Osvaldo Tognato II

Curitiba

Outubro - 2013

O Binômio de Newton

José Osvaldo Tognato II

Orientador: Prof. Dr. Luiz Antonio Ribeiro de Santana

Departamento de Matemática – UFPR

019081-980, Curitiba, PR

Brasil

jostogii@gmail.com

03 de outubro de 2013

Resumo

Neste artigo pretende-se mostrar de forma clara e sucinta uma pesquisa realizada sobre o Binômio de Newton, um maravilhoso e elegante desenvolvimento algébrico no campo da Análise Combinatória. Este campo muito acrescentou como ferramenta no cálculo das probabilidades e na evolução do cálculo infinitesimal. O objetivo inicial é mostrar um breve histórico de suas possíveis origens, motivações, limitações e o por que de ser chamado “Binômio de Newton”, onde pretende-se responder a pergunta “Será que esta ferramenta foi mesmo de Newton?”. Assim espera-se sanar essas dúvidas dentro de sua pequena história. No contexto prático e técnico será observado o desenvolvimento atual da ferramenta em questão. Também, tem-se o tópico da visualização do ensino do Binômio de Newton nos dias de hoje, tomando como base o ensino básico nas escolas secundaristas. Ainda, serão apresentadas algumas aplicações do binômio perante certos ramos fundamentais da matemática, tais como probabilidades e cálculo diferencial. Dessa maneira, esse texto possui a pretensão de tornar agradável a apresentação deste tema matemático.

Palavras Chaves: Binômio de Newton, Binômio, Newton, Teorema Binomial, Análise Combinatória.

Introdução

"Se cheguei até aqui foi porque me apoiei nos ombros dos gigantes " . (NEWTON)

O aspecto que aponta este texto é o desejo de acumular algo bem fundamentado e escrito sobre um tema que mostra pouca bibliografia bem modelada e sustentada sobre o assunto. Também sente-se a dificuldade de apresentar ao aluno de hoje toda a praticidade de uma ferramenta que mostra, não só o conceito fundamental do binômio, mas também, uma gama de informações matemáticas, tanto a nível básico, quanto secundário. O poder do ensino deste tema vai além de seu complexo conceito, pode-se instigar no aluno que o aprende vários aprendizados decorrentes da construção desta ferramenta, aritmética básica, álgebra básica, análise combinatória, probabilidades, etc, que são aprendizados extremamente válidos para o enriquecimento do processo ensino-aprendizagem no ensino básico.

O objetivo deste trabalho consiste em apurar conceitos algébricos decorrentes da performance de vários matemáticos no intuito de aprimorar o estudo dos binômios algébricos. O artigo em si, mostrará na primeira seção os passos históricos da construção deste tema, desde a antiguidade até ao época de Isaac Newton, o qual perpetuou a ferramenta como Binômio de Newton, pois com grande habilidade fez do estudo do Teorema Binomial um mecanismo fundamental para chegar em seu grande objetivo — O Cálculo Diferencial e Integral — chamado por ele de método das fluxões. [4] e [9].

Já na segunda seção deste trabalho discorre-se sobre o processo das técnicas de ensino e da utilização mecânica do Binômio de Newton aplicada nas salas do Ensino Médio nos dias atuais. Vários exemplos são colocados a fim de que haja, por parte do leitor uma gama de base necessária para o pleno aprendizado desta ferramenta. Na terceira seção mostrar-se-á algumas aplicações as quais se pode colocar esta ferramenta, tanto de forma definitiva a encontrar uma solução, quanto de forma a auxiliar a busca por uma solução. Nesta parte também se mostra uma diversidade de exemplos para enriquecer as referências do aprendizado do tema. Com esta estrutura, chega-se ao fim o texto com suas considerações finais sobre o texto proposto, o Binômio de Newton.

1. Um breve passeio pela história – $(x + y)^n$

"Tenho a impressão de ter sido uma criança brincando à beira-mar, divertindo-me em descobrir uma pedrinha mais lisa ou uma concha mais bonita que as outras, enquanto o imenso oceano da verdade continua misterioso diante de meus olhos. " . (NEWTON)

A condução desta redação consiste em abordar um dos temas mais elegantes da História da Matemática: O Binômio de Newton. Sabe-se que esta ferramenta envolve grande dificuldade na aprendizagem proposta no ensino básico, porém a sua importância e utilidade são claras e notórias nos ramos fundamentais da Matemática Moderna. Na realidade, o Binômio de Newton era conhecido como Teorema Binomial, um desenvolvimento algébrico que teve seu início muito antes da época de Newton, mas somente o grande mestre conseguiu tomar plena posse desta maravilhosa ferramenta e de toda sua abundante elegância e potencialidade [9]. Newton conseguiu chegar onde outros não se arriscaram. Ele desenvolveu o teorema binomial com expoentes racionais conseguindo excelentes resultados no estudo das séries infinitas, donde partiu para o tão aclamado cálculo infinitesimal.

É possível que possamos afirmar que o Binômio de Newton faz jus ao título e nome, pois o desenvolvimento da expressão binomial nas mãos de Newton se torna quase tão moderna quanto em nossa época. Contudo, é necessário lembrar que a Matemática ao longo da história nunca se formatou de forma instantânea, e sim sempre foi moldada aos pedaços, com diversas colaborações de grandes matemáticos. Assim foi com as equações algébricas, geometria analítica, o cálculo, etc. Dessa forma devemos citar alguns pedaços dessa composição elegante da álgebra, a qual chamamos de Binômio de Newton.

Iniciando nossa busca pelas origens observa-se em primeiro plano, que antes da época de Newton, o nome descrito pelos estudiosos matemáticos era Teorema Binomial, o qual se deve citar alguns colaboradores. Ainda na Antiguidade, podemos citar outro grande mestre, o geômetra Euclides[1], que em seus livros escreveu sobre os produtos notáveis, a saber: o quadrado da soma e o quadrado da diferença, bem como sobre o cubo da soma e o cubo da diferença, sendo estas formas particulares de expressões binomiais. Mas é claro que o mestre Euclides, como sabemos hoje, tinha outros planos para estas expressões: o objetivo do geômetra era trabalhar com áreas e volumes. É óbvio dizer que Euclides tinha plena profundidade no conhecimento das expressões binomiais das quais tratava, mas nenhum cunho algébrico dos quais vemos em estudos posteriores.

1 Euclides (c. 330 a. C. - 260 a. C.) nasceu na Síria e estudou em Atenas. Foi um dos primeiros geômetras e é reconhecido como um dos matemáticos mais importantes da Grécia Clássica e de todos os tempos. Ainda é considerado com grande louvor o Pai da Geometria.

Mais tarde, em meados do século XIII, apareceu uma coleção de livros importantes na China durante a dinastia Tang, dentre eles fazemos menção a Yang Hui. A ele deve-se a mais antiga apresentação preservada do "Triângulo Aritmético de Pascal". Um outro chinês, Chu Shi-Kié, em 1303 faz uma abordagem do mesmo triângulo aritmético em seu livro. O interessante deste autor é que ele cita o triângulo como algo já antigo em seu tempo, portanto é possível então que o Teorema Binomial já fosse conhecido na China de longa data *[9]*. No arranjo de Chu, o qual pode ser observado na Figura 1, vemos os coeficientes das expansões binomiais até a oitava potência. Porém Chu não reivindicava crédito pelo triângulo, referindo-se a ele como um "diagrama do velho método para achar potências oitavas menores". Nas obras chinesas há cerca de 1100 referências a sistemas de tabulações para coeficientes binomiais. Por isso é também possível e provável que o conhecido Triângulo de Pascal tenha se originado na China, por esta data [4].

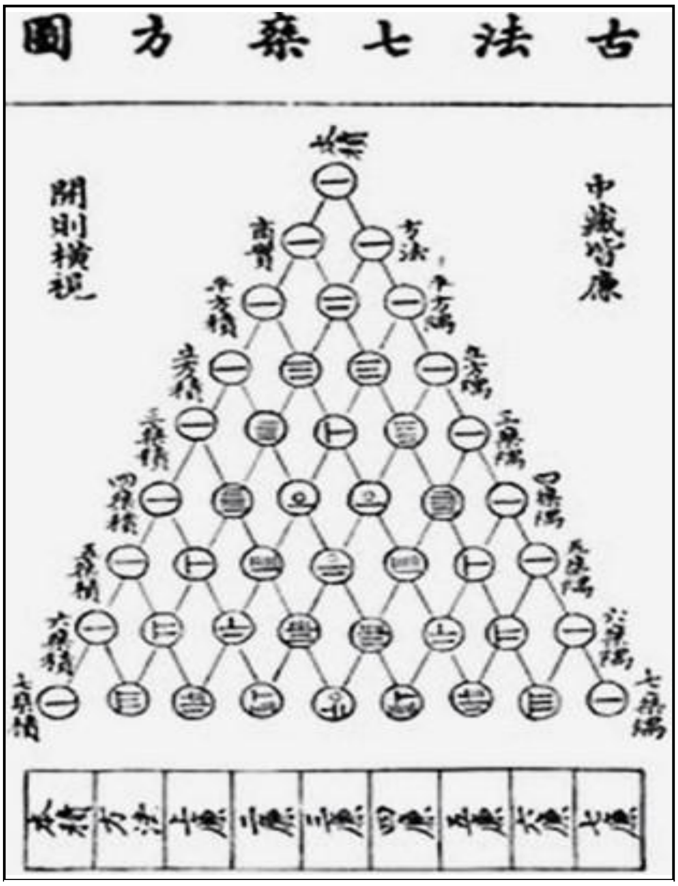

Figura 1: O triângulo aritmético de Chu Shi-Kié. [9]

No século XV encontra-se a menção a um matemático da corte de Ulugh-Beg, cujo nome era Al Kashi, o qual teve papel importante nos cálculos de aproximações para π. Foi ele o primeiro autor árabe que se tem notícia de lidar com o Teorema Binomial utilizando-o na forma de Triângulo de Pascal [4].

No século XVII, mais precisamente em 1623, nasceria uma das maiores promessas da história da Matemática: o jovem Blaise Pascal, um prodígio que aprendera precocemente sobre geometria e viria a se encantar com diversos ramos da Matemática. Entre muitos de seus trabalhos está o estudo das Probabilidades, nos quais Pascal as utilizava como ferramenta em um de seus escritos, Traté du Triangle Arithmétique, o Tratado do Triângulo Aritmético. Esse tratado fora escrito em 1653 e publicado somente em 1665. Pascal construía seu "Triângulo Aritmético", um artifício incrível onde os números ao longo de uma mesma linha ou diagonal eram os coeficientes sucessivos de uma expansão binomial de $(a + b)^n$ [9]. A determinação dos coeficientes binomiais era uma das aplicações que Pascal fazia no seu triângulo. Ele também o usava particularmente em suas discussões sobre probabilidades, mais especificamente para determinar o número de combinações de *n* objetos tomados *p* de cada vez, o que ele corretamente afirmava ser:

$$\frac{n!}{p!\ (n-p)!}$$

onde *n!* é a notação[2] atual do produto: $n(n-1)(n-2)...(3)(2)(1),\ n \in IN$.

1.1 O Triângulo Aritmético

Como já foi citado anteriormente, o Triângulo Aritmético já fora mostrado antes pelos escritores chineses, mas Pascal foi considerado por muito tempo como o primeiro descobridor deste triângulo no mundo ocidental. Então devido a esse fato e a suas aplicações, essa ferramenta ficou conhecida como Triângulo de Pascal.

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}$$

Figura 2: Desenvolvimento das primeiras oito linhas do Triângulo Aritmético.

O Triângulo de Pascal é um agrupamento de números escritos em formato triangular, no qual a *n*-ésima linha representa os coeficientes binomiais da expansão binomial algébrica de $(x+a)^n$, onde *n* é um número natural qualquer. Portanto, da Antiguidade até a era de Newton, qualquer matemático poderia expandir um binômio algébrico utilizando as linhas deste triângulo, desde que o expoente fosse natural.

Por exemplo, para: $(x+a)^n$, com $n \in IN$, teríamos:

2 O símbolo *n!*, chamado de fatorial de *n*, foi introduzido em 1808 por Christian Kramp (1760-1820) de Strasburgo, que o escolheu para contornar dificuldades gráficas verificadas com um símbolo previamente usado.

$$(x+a)^n = k_0.x^n.a^0 + k_1.x^{n-1}.a^1 + k_2.x^{n-2}.a^2 + \ldots + k_{n-1}.x^1.a^{n-1} + k_n.x^0.a^n$$

onde k_i, $0 \leq i \leq n$, $k \in IN$, é o valor numérico do que conhecemos hoje por binomial de n sobre p, e cuja notação correspondente é $\binom{n}{p}$. Todos esses valores: k_0 , k_1 , ... , k_n, localizam-se na n-ésima linha do triângulo aritmético, conforme verificamos na Figura 2.

0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Figura 3: Desenvolvimento de algumas linhas do Triângulo de Pascal.

Por exemplo, ao considerarmos o desenvolvimento de $(x+a)^6$, temos:

$$(x+a)^6 = k_0.x^6.a^0 + k_1.x^5.a^1 + k_2.x^4.a^2 + k_3.x^3.a^3 + k_4.x^2.a^4 + k_5.x^1.a^5 + k_6.x^0.a^6,$$

Cujos valores: k_0, k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 e k_6, localizam-se na linha 6 do triângulo aritmético, conforme verificamos na Figura 3.

Observando que na linha 6, os valores 1, 6, 15, 20, 15, 6 e 1 são correspondentes aos coeficientes k_0, k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 e k_6, podemos efetuar as devidas substituições, para obtermos finalmente

$$(x+a)^6 = 1.x^6.a^0 + 6.x^5.a^1 + 15.x^4.a^2 + 20.x^3.a^3 + 15.x^2.a^4 + 6.x^1.a^5 + 1.x^0.a^6,$$

isto é,

$$(x+a)^6 = x^6 + 6ax^5 + 15a^2x^4 + 20a^3x^3 + 15a^4x^2 + 6a^5x + a^6.$$

Em todos os lugares do mundo encontram-se várias denominações para o Triângulo Aritmético: Os chineses chamam-no de Triângulo de Yang Hui, os italianos o definiram como Triângulo de Tartaglia, e os franceses de Triângulo de Pascal, onde já se leu inclusive Triângulo de Tartaglia-Pascal. O que é bem verdade, é que se trata do Triângulo Aritmético, uma ferramenta prática e simples para expandir os binômios a qualquer n-ésima potência natural.

A fama do nome Triângulo de Pascal deve-se ao fato de que Blaise Pascal foi o primeiro que montou o triângulo de forma explicita, em função dos binomiais, com arranjos bem claros do verdadeiro significado do Triângulo Aritmético. Dessa forma, podemos visualizá-lo como é apresentado na Figura 4:

$$\binom{1}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

$$\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}$$

$$\binom{6}{0} \quad \binom{6}{1} \quad \binom{6}{2} \quad \binom{6}{3} \quad \binom{6}{4} \quad \binom{6}{5} \quad \binom{6}{6}$$

$$\binom{7}{0} \quad \binom{7}{1} \quad \binom{7}{2} \quad \binom{7}{3} \quad \binom{7}{4} \quad \binom{7}{5} \quad \binom{7}{6} \quad \binom{7}{7}$$

$$...$$

$$...$$

$$\binom{n}{0} \quad \binom{n}{1} \quad \binom{n}{2} \quad \binom{n}{3} \quad \binom{n}{4} \quad \cdots \quad \binom{n}{n-2} \quad \binom{n}{n-1} \quad \binom{n}{n}$$

Figura 4: Desenvolvimento de algumas linhas do Triangulo de Pascal, identificando nas linhas os números binomiais..

Pascal conseguiu estudar e desenvolver este triângulo em correspondência e cumplicidade com Pierre de Fermat[3]. Por meio de seus estudos, os dois matemáticos desenvolveram avanços muito significativos, formulando a Teoria das Probabilidades. Também criaram tabelas de amortização para seguros, decomposição de partículas subatômicas, etc [9].

3 Pierre de Fermat, matemático francês, considerado o "príncipe dos amadores", co-fundador da Geometria Analítica, fez avanços importantes na Teoria dos Números e no estudo das Probabilidades. Ficou famoso pelo Último Teorema de Fermat, este que levou 326 anos para ser comprovado e demonstrado.

Do Triângulo de Pascal surgiram novas descobertas e curiosidades aritméticas incríveis. Por meio desta nova visualização com números binomiais, podemos citar a Relação de Stifel[4], sequências diversas, somas diversas, etc. conforme segue abaixo.

A Relação de Stifel, também conhecida como Relação de Stifel-Pascal é uma regra simples utilizada para os números binomiais, a qual podemos enunciar da seguinte forma:

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1},$$

onde *p*,*n* são números naturais com $0 \leq p \leq n-1$, e cuja verificação podemos fazer ao utilizarmos a definição dos números binomiais, a saber:

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \frac{n!}{p!\ (n-p)!} + \frac{n!}{(p+1)!\ \big(n-(p+1)\big)!} = \frac{n!}{p!\ (n-p)!} + \frac{n!}{(p+1)!\ (n-p-1)!}$$

$$= \frac{n!\,(p+1) + n!\,(n-p)}{(p+1)!\ (n-p)!} = \frac{n!\,p + n! + n!\,n - n!\,p}{(p+1)!\ (n-p)!} = \frac{n! + n!\,n}{(p+1)!\,(n-p)!}$$

$$\frac{n!\,(n+1)}{(p+1)!\ (n-p)!} = \frac{(n+1)!}{(p+1)!\ (n-p)!} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Ainda podemos provar esta relação por raciocínio combinatório, como segue: aceitando que o número $\binom{n}{p}$ pode ser interpretado como a quantidade de subconjuntos de *p* elementos que um dado conjunto de *n* elementos possui, temos que ao escolhermos ao acaso um elemento qualquer, podemos classificar os subconjuntos de *p* elementos de duas formas disjuntas: aqueles no qual o dado elemento está presente; e aqueles no qual este elemento não está presente. As quantidades de subconjuntos em cada forma são respectivamente $\binom{n-1}{p-1}$ (se o elemento está presente, basta escolher os *p*-1 restantes) e $\binom{n-1}{p}$ (excluindo o dado elemento e escolhendo os *p* elementos desejados para o subconjunto nos restantes). Com isso, temos

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p},$$

que é uma forma alternativa de escrever a relação desejada.

Verificada a validade sem contestação da Relação de Stifel, pode-se verificar no Triângulo Aritmético que sua construção se torna simples e fácil por meio desta regra. Observamos na figura seguinte como é utilizado processo de Stifel no referido triângulo:

---

4 Michael Stifel foi um matemático alemão que imortalizou seu nome devido a invenção da regra sobre binomiais observada no Triângulo de Pascal, definida como Relação de Stifel-Pascal.

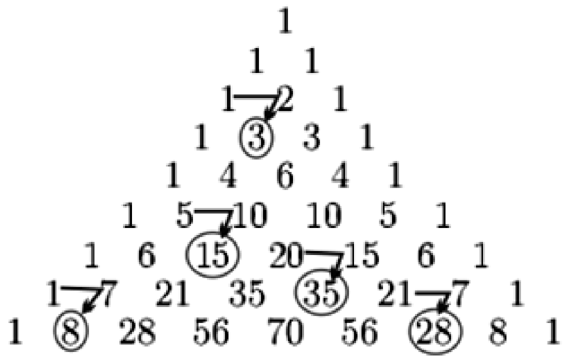

Figura 5: Obtenção dos números binomiais pelo uso da Relação de Stifel.

Dessa forma, vemos que é perfeitamente possível desenvolver um binômio $(x + a)^n$ por meio do triângulo aritmético, mesmo que n seja razoavelmente grande, montando o Triângulo Aritmético até a linha n. Dessa forma encontramos os coeficientes necessários para desenvolvermos o binômio desejado.

1.2 Isaac Newton

Com os resquícios históricos que foram citados, observa-se claramente que o Teorema Binomial toma sua plenitude com potencial e forma a partir dos estudos do grande mestre Isaac Newton.

Isaac Newton, como todos já ouvimos, é considerado um dos maiores matemáticos da história, senão o maior de todos. Newton, um cavaleiro da coroa da Inglaterra, nasceu na aldeia de Woolshorpe no dia de natal de 1642, ano da morte de Galileu, uma coincidência histórica criada pelo destino citada em muitos artigos e livros de História da Matemática. Pelo fim de 1664 Newton parece ter atingido as fronteiras do conhecimento matemático e estava pronto para fazer contribuições próprias. Suas primeiras descobertas, datando dos primeiros meses de 1665, resultaram no fato de saber exprimir funções em termos de séries infinitas.

Em boa parte dos anos de 1665 e 1666, com o grau AB. obtido por Newton, o Trinity College foi fechado em virtude da peste, e Newton foi para casa para viver e pensar. O resultado foi incrivelmente produtivo, considerado como o maior período de descobertas matemáticas na história. Foram nesses meses onde Newton afirmou ter feito suas principais descobertas, dentre as quais destacamos:

1. O Teorema Binomial;
2. O Cálculo Diferencial e Integral;
3. A Lei da Gravitação;
4. A natureza das cores.

Hoje o Teorema Binomial é tão evidente aos nossos olhos que nos perguntamos por que tardou tanto tempo sua descoberta. A diferença entre o que se usava até a época de Newton e o que o mestre fez se diferencia pela notação utilizada. Os coeficientes binomiais para potências inteiras já eram conhecidos, sendo que Cardano[5] e Pascal tinham ciência da técnica, porém não utilizavam a notação exponencial de Descartes[6]. Portanto, eles não possuíam ferramentas suficientes para fazer a transição simples de uma potência inteira para uma potência fracionária. Mais tarde foi com Wallis[7] que os expoentes fracionários entraram em uso comum, mas mesmo ele foi ineficaz em escrever expansões para certos binômios estudados na época como $(x - x^2)^{\frac{1}{2}}$ ou para $(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$. Coube a Newton fornecer as expansões como parte de seu método de séries infinitas.

O Teorema Binomial foi descrito em duas cartas de 1676 de Newton a Henry Oldenburg[8], secretário da Royal Society, e publicado por Wallis dando crédito a Newton. A notação utilizada com certeza não foi das mais modernas, parecendo confusa nos dias de hoje e indicando claramente que a transição dos expoentes inteiros para fracionários veio através de muitas tentativas e erros pelas mãos do grande mestre. Mais especificamente, observemos a expressão abaixo, retirada de *(EVES, 2004)*:

$$(P + PQ)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{(m-n)}{2n}BQ + \frac{(m-2n)}{3n}CQ + \frac{(m-3n)}{4n}DQ + \ldots$$

onde $P + PQ$ representa uma quantidade cuja raiz, ou potência, ou cuja raiz de uma potência se quer achar. P denota o primeiro termo desta quantidade, Q denota os termos restantes divididos por essa primeira e *m/n* é o índice numérico das potências de $P + PQ$. Os termos *A*, *B*, *C*, *D*, etc. representam o primeiro termo: $P\frac{m}{n}$, *B* representa o segundo: $\frac{m}{n}AQ$, *C* representa o terceiro termo, e assim por diante. O ajuste da expansão binomial, com as restrições devidas, e para todos os valores complexos do expoente só seria estabelecido mais de 150 anos depois pelo matemático N. H. Abel[9].

---

5 Girolamo Cardano, foi um cientista, matemático, filósofo e médico do século XVI, foi o primeiro a introduzir as idéias gerais da Teoria das Equações Algébricas.

6 Renée Descartes, filósofo e matemático do século XVII, considerado o pai da filosofia Moderna e inventor da Geometria Analítica

7 John Wallis foi um matemático britânico do século XVII que colaborou com trabalhos que incitaram as descobertas de Isaac Newton.

8 Henry Oldenburg foi um filósofo natural e diplomata alemão, foi o primeiro secretário da Royal Society.

9 Niels Henrik Abel foi um matemático norueguês, responsável pela prova da impossibilidade na resolução das equações algébricas do quinto grau usando raízes. Sua vida foi marcada por desencontro, injustiça e tragédia.

A partir daí Newton observou que era possível operar com séries infinitas de modo muito semelhante ao usado por expressões polinomiais finitas. A generalidade desta nova análise infinita foi confirmada quando ele extraiu a raiz quadrada de $(1 - x^2)$ pelo processo algébrico usual e depois, verificando por interpolação, o binômio $(1 - x^2)^{-1}$. Isto quer dizer que aplicando o teorema binomial para $n = -1$ obtinha o mesmo resultado. Com isso Newton descobrira uma ferramenta incrível para lidar com as séries infinitas de forma genérica com a mesma consistência dos processos anteriores, e que o teorema binomial estava também sujeito às mesmas leis gerais da álgebra clássica de quantidades finitas. Dessa forma as séries infinitas já não deviam mais ser consideradas apenas como instrumentos de aproximações. Wallis as definiu da seguinte forma:

> *"Essas séries infinitas ou séries convergentes indicam a designação de alguma quantidade particular por uma Progressão regular de quantidades, que continuamente se aproximam dela, e que se prolongadas infinitamente devem ser iguais a ela."*

BOYER, Carl B. História da Matemática. Blucher, 3ª ed. pg. 271, São Paulo, 2010.

Apesar de que Newton não ter publicado o Teorema Binomial, nem o ter comprovado por meio de prova rígida, ele redigiu e publicou exposições de sua análise infinita. A primeira publicação se chamaria *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*, escrita em 1669 e publicada em 1711. Nela encontramos a citação de sua genialidade:

> *"E tudo que a análise comum, isto é, a álgebra executa por meio de equações com número finito de termos, desde que possa ser feito, esse novo método sempre pode executar por meio de equações infinitas. Por isso não hesitei em dar a isso o nome de* ***Análise*** *também. Pois os raciocínios aqui não são menos certos que na outra; nem as equações menos exatas; embora nós mortais cujos poderes de raciocínio estão restritos a limites estreitos, não possamos nem exprimir, nem conceber todos os termos dessas equações de modo a saber exatamente delas as quantidades que queremos... Para concluir, podemos decidir com justiça que pertence à Arte Analítica, aquilo por cuja ajuda as Áreas e Comprimentos etc. Das Curvas podem ser exata e geometricamente determinados."*

BOYER, Carl B. História da Matemática. Blucher, 3ª ed. pg. 272, São Paulo, 2010.

A partir desta idéia, concretizada por Newton, muitos outros estudiosos, já encorajados pelos trabalhos do grande mestre não mais evitaram os trabalhos com processos infinitos, pois tinham base sólida e comprovada de que desenvolver o infinito também fazia parte de uma estrutura da Matemática sólida e pura. Obviamente, o objetivo de Newton em trabalhar com séries infinitas destinou o cientista á sua grande descoberta, a qual revolucionou a matemática de forma profunda e contundente, o cálculo infinitesimal.

No que se refere a notação moderna do Teorema Binomial não se sabe muita coisa, pois muitos matemáticos trabalharam em volta do tema. Há muitas variações simbólicas e não sabemos ao certo a quem devemos mencionar sobre a criação de tal notação. Por exemplo, hoje quando falamos dos coeficientes binomiais que aparecem no triângulo aritmético de Pascal, sabemos que eles podem ser verificados por uma fórmula simples. Veja que se quisermos calcular o número de combinações de *n* elementos distintos tomados de *p* em *p*, fazemos o que já foi citado neste artigo, mas com a seguinte simbologia:

$$C_{n,p} = C_n^p = \frac{n!}{p!\ (n-p)!}.$$

Mas foi com um grande matemático que vemos a notação de binomial ser elaborada, nos estudos de Euler[10] sobre probabilidades, escreveu que achava útil representar a expressão: $\frac{n(n-1)...(n-p+1)}{(1.2.3...p)}$ por $\left[\frac{n}{p}\right]$ e que de forma desconhecida passou a ser escrita da forma $\binom{n}{p}$, o que hoje representa um número binomial n sobre p, que nada mais é do que:

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!},$$

o que sugere não só combinações de *n* elementos distintos tomados de *p* em *p*, pois aí estaríamos trabalhando apenas com números naturais, mas agora podemos desenvolver coeficientes reais com toda a precisão que Newton nos reservou dentro do estudo de séries infinitas.

Em nossos dias vemos a expansão binomial de uma forma limpa e prática, sendo considerada um dos desenvolvimentos mais lindos e elegantes da matemática, vista com simplicidade em todos os níveis de ensino e pesquisa:

$$(x+a)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p x^{n-p}.$$

[10] Leonhard Paul Euler foi um grande matemático e físico suíço de língua alemã que passou a maior parte de sua vida na Rússia e na Alemanha. Euler fez importantes descobertas em campos variados nos cálculos e grafos. Ficou famoso por trabalhos em Mecânica, Óptica e Astronomia. Calcula-se que toda sua obra varia de 60 a 80 volumes.

Conclusão

Com todos os subsídios apresentados neste artigo, podemos chegar a conclusão de que o Binômio de Newton é um aspecto da Matemática no ensino básico, que agrega grande profundidade no processo de ensino-aprendizagem. Os caminhos que levam esta ferramenta a concluir um objetivo, ou seja, chegar a uma solução de um problema, dependem de vários conceitos, que se estiverem falhos, devem ser revisados e absorvidos para que o aprendizado tenha pleno sucesso. Em busca deste sucesso é que o Binômio de Newton colabora no aprendizado do estudante, pois além, de agregar o conceito fundamental de suas aplicações, os conhecimentos secundários e paralelos também devem revistos.

Após estudar esta pequena e grandiosa ferramenta sobre um ramo específico da Matemática, o Binômio de Newton, observa-se como é viva a existência da Matemática na História. Assim como todo o progresso, todas as realizações sociais, independências federativas de várias nações, libertações de etnias raciais, religiosas, todas essas questões tiveram sua imensa caminhada na história até os dias de hoje para que encontrassem uma luz, um significado, um encontro aos seus objetivos, desta forma é a caminhada Matemática em direção aos seus pontuais objetivos e alvos. Com cada pesquisa, leitura, ou a simples audiência de ensinamentos matemáticos percebemos as grandes implicações vividas pelos protagonistas dos conhecimentos científicos. Newton fez realizações grandiosas de seus estudos, deixou um legado surpreendente e o que podemos fazer por ele é simplesmente honrá-lo tentando prolongar este legado mais e mais por muito tempo, para que a Matemática se aplique com cada vez mais profundidade e sua história se prolongue até os confins da humanidade.

O que sabemos é uma gota;
o que ignoramos é um oceano.
ISAAC NEWTON. 1642 - 1727

Referências Bibliográficas

[1] BACHX, Arago de Carvalho; POPPE, Luiz M. B. TAVARES, Raymundo N. O. **Prelúdio à Análise Combinatória**. São Paulo: Nacional, 1975.

[2] BARRETO FILHO, Benigno. **Matemática Ensino Médio**. São Paulo: FTD, v. Único, 2000.

[3] BARROSO, Juliane Matsubara. **Conexões com a Matemática**. São Paulo: Moderna, v. 2, 2010.

[4] BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. 2. ed. Brasil: Edgard Blucher IV, 1996.

[5] CERQUEIRA, Dermeval Santos; CRUZ, Eduardo Sales; TRAMBAIOLLI, Egidio Neto. **O Universo da Matemática Ensino Médio**. São Paulo: Escala Educacional, v. Único, 2007.

[6] COOLIDGE, J. L. **The Story of the Binomial Theorem**. Harvard University: p.147-157, mar. 1949.

[7] DANTE, Luiz Roberto. **Matemática Ensino Médio** São Paulo: Moderna, v. Único, 2005.

[8] DRUCK, Sueli. **Coleção Explorando o Ensino da Matemática**. Brasília: MEC, v. 2, 2004.

[9] EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Campinas: Unicamp, SP, 2004.

[10] GARBI, Gilberto G. **O Romance das Equações Algébricas**. 4. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2010.

[11] GIOVANNI, José Ruy. **Matemática Fundamental**: uma nova abordagem Ensino Médio. São Paulo: FTD, v. Único, 2002.

[12] HAZZAN, Samuel. **Fundamentos da Matemática Elementar**: Combinatória Probabilidade. 6. ed. São Paulo: Atual, v. 5, 1993.

[13] KARLSON, Paul. **A Magia dos Números**. Rio de Janeiro: Globo,1961.

[14] LIMA, Elon Lages. et al. **A Matemática do Ensino Médio**. Rio de janeiro: SBM, v. 2, 2009.

[15] LIMA, Elon Lages. et al. **A Matemática do Ensino Médio**. Rio de janeiro: SBM, v. 4, 2010.

[16] MATHEMATICAL DATABASE. **Binomial Theorem**. 2003. Disponível em: <http://www.mathdb.org/notes_download/elementary/algebra/ae_A3.pdf>. Acesso em: 12 mar. 2013.

[17] MATHEMATICAL INTENTIONS. **The Binomial Series of Isaac Newton**. EUA: 2009. Disponível em: <http://www.quadrivium.info/MathInt/Notes/WallisNewtonRefs.pdf> Acesso em 20 Dez. 2012.

[18] MATH IS FUN. **Enjoy Learning**: Binomial Theorem. EUA: 2013. Disponível em: <http://www.mathsisfun.com/algebra/binomial-theorem.html>. Acesso em: 12 abr. 2013.

[19] MIKE CYNN. **Pascal's Triangle**. EUA: 1998. Disponível em: <http://mike.cynn.com/applets/pascal>. Acesso em: 15 jan. 2013.

[20] MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: ensino médio. Brasília: MEC, 1999.

[21] PAIVA, Manoel. **Matemática Ensino Médio**. São Paulo: Moderna, v. Único, 2003.

[22] SIMMONS, George F. **Cálculo com Geometria Analítica**. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

[23] THE NUMBER WARRIOR. **Q*Bert Teaches the Binomial Theorem**. EUA: 2010. Disponível em:<http://numberwarrior.wordpress.com/2010/05/23/qbert-teaches-the-binomial-theorem/>. Acesso em: 25 jan. 2013.

[24] UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE. **O Triângulo de Pascal**: matemática análise de dados e probabilidade. Rio de Janeiro: 2009. Disponível em: <http://www.uff.br/cdme/pascal/pascal-html/pascal-br.html>. Acesso em: 04 fev. 2013.