PROFMAT

Departamento de Matemática
Universidade Federal do Paraná

81531-990, Curitiba, PR
Brazil

UMA ABORDAGEM DE CONCEITOS GEOMÉTRICOS COM ÊNFASE ÀS RELAÇÕES MÉTRICAS EM UM TRIÂNGULO QUALQUER E SUAS APLICAÇÕES

por

Josiane Stresser Cardoso

29 de Agosto, 2014

Uma abordagem de conceitos geométricos com ênfase às relações métricas em um Triângulo Qualquer e suas aplicações

Josiane Stresser Cardoso

Departamento de Matemática -UFPR

019081-980, Curitiba, PR

Brazil

e-mail: josiscardoso@yahoo.com.br

Resumo

Neste artigo apresenta-se parte de um trabalho sobre as relações métricas em um triângulo qualquer e suas aplicações no cálculo das medidas das alturas, medianas, bissetrizes internas e externas, trianas, área de um triângulo qualquer, e estende-se o estudo ao cálculo da área de um quadrilátero convexo qualquer. Destacamos a importância de se ampliar os conceitos já trabalhados a respeito de triângulos específicos para um triângulo qualquer.

Palavras-chave: altura, mediana, bissetriz, trianas, triângulo qualquer.

1 Introdução

Nesse artigo apresentamos o estudo de alguns conceitos de geometria, mais especificamente no que se refere às relações métricas em triângulos quaisquer, visto que percebemos esta deficiência nos materiais didáticos disponíveis na atualidade, os quais, em sua maioria, restringem o assunto apenas a triângulos retângulos.

Em nossa prática, observamos que quase sempre o estudo da Geometria fica para o final de lista, na expectativa de uma sobra de tempo para a sua exploração com os educandos. Nosso estudo visa uma generalização de alguns conceitos bem simples trabalhados já no ensino básico, inclusive no Ensino Fundamental, tais como as relações métricas em um triângulo, o cálculo das medidas das bissetrizes e alturas em um triângulo qualquer. Observamos que, além desses conteúdos ficarem à espera de tempo para serem abordados, em sua maioria, estão restritos apenas a triângulos específicos, como retângulo, isósceles ou então equilátero. No livro de Ary Quintella, "Matemática para a quarta série ginasial" [9], utilizado por volta de 1970 nos anos finais do Ensino Fundamental, percebemos uma abordagem bem abrangente para esses conceitos, o que gostaríamos de, através deste, reintroduzir de forma genérica, ou seja, valendo para qualquer triângulo. Apresentamos também uma generalização do Teorema de Brahmagupta para a área de um quadrilátero convexo qualquer.

Esse artigo está dividido em cinco seções, sendo a primeira com definições de alguns conceitos de geometria que serão utilizadas na sequência; a segunda com demonstrações sucintas e teoremas como o Teorema de Stewart, Teorema da Bissetriz Interna e Externa; a terceira com as demonstrações dos cálculos das medidas das alturas, bissetrizes de um triângulo qualquer e outras aplicações, como os pontos notáveis; na quarta seção apresentamos uma generalização do Teorema de Brahmagupta. Na quinta seção, concluímos esse texto com as considerações finais sobre o trabalho desenvolvido.

1 Definições

Para facilitar a leitura e um melhor entendimento do que propomos, apresentamos inicialmente algumas notações e definições que serão adotadas no desenvolvimento do trabalho.

Em um triângulo de vértices A, B e C, consideramos:

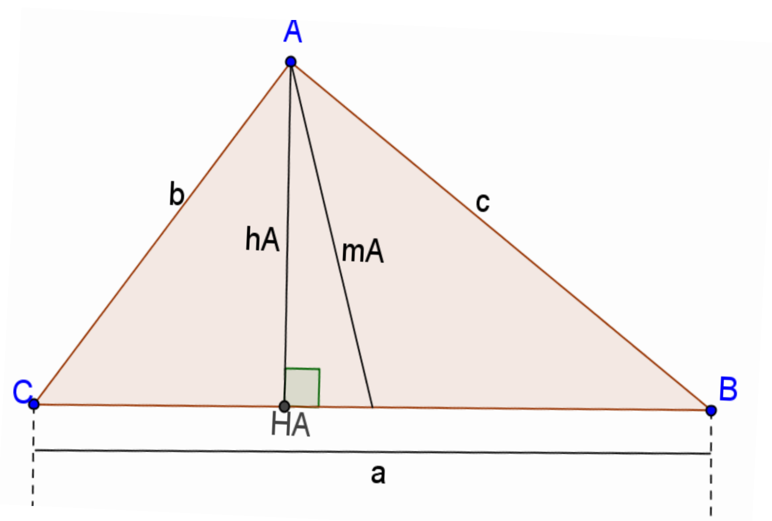
ΔABC – triângulo de vértices A, B e C.

h_x – altura referente ao vértice X.

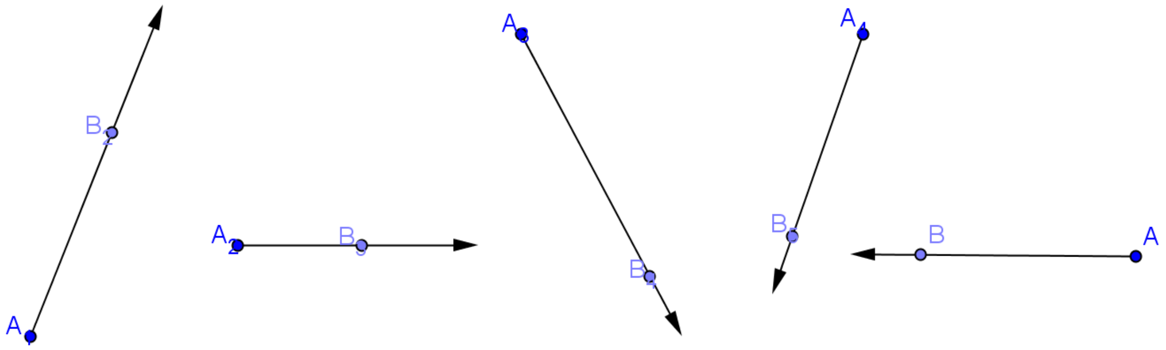
m_x – mediana relativa ao vértice X.

x – medida do lado oposto ao vértice X.

p = semiperímetro do triângulo.



Definição 1 Denotamos por $\overrightarrow{AB}$ a semirreta com origem em A que passa por B em linha reta e continua na mesma direção. A notação será dada sempre por uma seta, da esquerda para a direita, sobreposta às letras que indicam o ponto de origem e outro ponto qualquer que define sua direção. Por exemplo, todas as semirretas a seguir representamos por $\overrightarrow{AB}$.

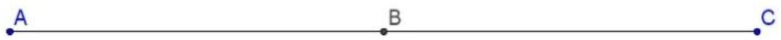


Definição 2 Sejam A e B dois pontos distintos. O segmento $\overline{AB}$ é o conjunto formado pelos pontos A e B juntamente com todos os pontos compreendidos entre A e B. Os pontos A e B são chamados extremidades de $\overline{AB}$. Denotamos um segmento pelas letras correspondentes aos pontos de suas extremidades, com uma barra no topo das mesmas. Por exemplo, $\overline{AB}$ indica a aparência do segmento com extremidades nos pontos A e B, como representado na figura a seguir:

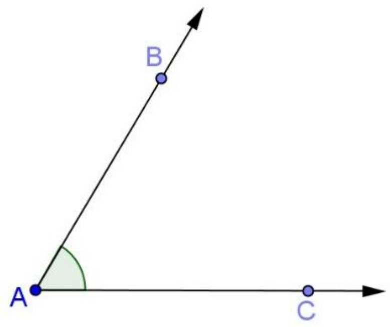
O número AB é chamado comprimento do segmento $\overline{AB}$.

Definição 3 Segmentos de reta congruentes são segmentos que possuem mesmo comprimento.

Definição 4 Um ponto B é chamado ponto médio de um segmento $\overline{AC}$ se B está ente A e C e $AB = BC$.



Definição 5 Ângulo é a região de um plano concebida pelo encontro de duas semirretas distintas com mesma origem. As duas semirretas são chamadas lados do ângulo e a origem comum das semirretas é chamada vértice do ângulo. Considerando as semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, o ângulo determinado por elas será representado por $B\hat{A}C$, $C\hat{A}B$.

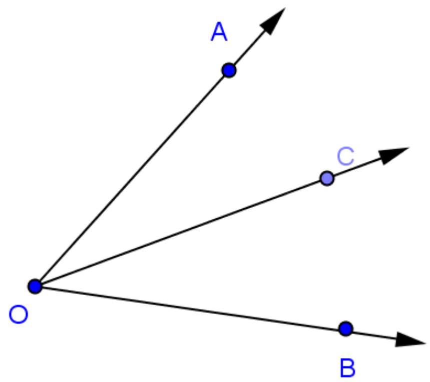


Definição 6 Ângulos congruentes são ângulos que possuem a mesma medida.

Definição 7 Seja o ângulo $A\hat{O}B$. Uma semirreta $\overrightarrow{OC}$ é uma bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$ se:

i) C está no interior do ângulo $A\hat{O}B$;

ii) $A\hat{O}C$ é congruente ao ângulo $B\hat{O}C$ (isto é, tem a mesma medida).



Definição 8 Sejam$P_1,\ P_2, \ldots, P_n\ \ (n \geq 3)$ n pontos distintos tais que os segmentos $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$, ..., $\overline{P_{n-1}P_n}$ e $\overline{P_nP_1}$, possuem as seguintes propriedades:

i) Nenhum par de segmentos se intercepta a não ser nas suas extremidades;

ii) Nenhum par de segmentos com extremidade comum está na mesma reta.

A reunião dos segmentos $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$, ... , $\overline{P_{n-1}P_n}$ e $\overline{P_nP_1}$, é chamado de polígono, denotado por $P_1P_2P_3 \ldots P_n$.

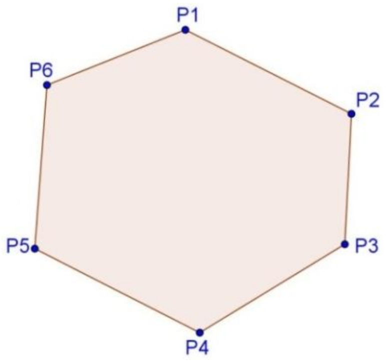
Os pontos $P_1, P_2, \ldots, P_n$ são chamados os vértices do polígono e os segmentos $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$, ... , $\overline{P_{n-1}P_n}$ e $\overline{P_nP_1}$ são os seus lados.

Definição 9 A soma dos comprimentos dos lados de um polígono é chamada de perímetro do polígono.

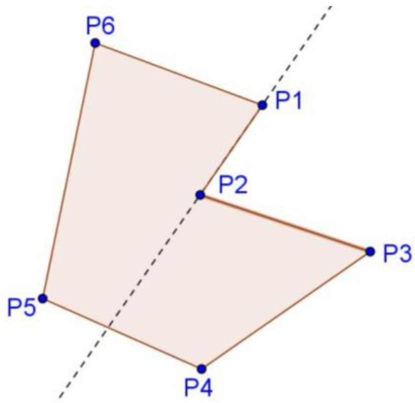
Definição 10 Um polígono é convexo se nenhum par de seus pontos está em semiplanos opostos relativamente a cada reta que contém um de seus lados.

Exemplos:

i) o polígono $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ é convexo.



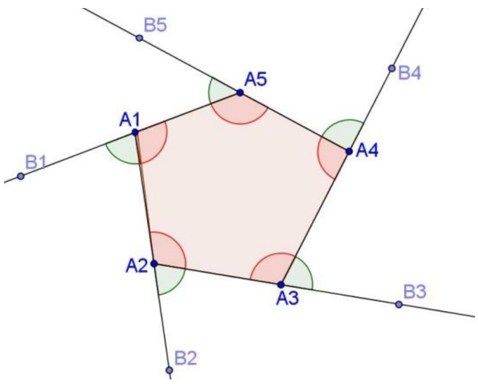
ii) o polígono $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ é não convexo ou côncavo.



Definição 11 Os ângulos internos de um polígono convexo $P_1P_2P_3\ldots P_n$, são $P_{i-1}\widehat{P_i}P_{i+1}$, $i = 2,\ldots,n-1$ e os ângulos $P_{n-1}\widehat{P_n}P_1$ e $P_n\widehat{P_1}P_2$.

Os ângulos externos de um polígono convexo são os ângulos formados pelas semirretas $\overrightarrow{P_iQ_i}$ e $\overrightarrow{P_iP_{i+1}}$, $i = 1, 2, 3,\ldots, n-1$e as semirretas $\overrightarrow{P_nQ_n}$ e $\overrightarrow{P_nP_1}$, tal que P_{i+1} está entre P_i e Q_{i+1}, do mesmo modo P_1 está entre P_n e Q_1.

Exemplo: Consideremos o polígono $A_1A_2A_3A_4A_5$ e os pontos B_1, B_2, B_3, B_4 e B_5, como representados a seguir:



Os ângulos $B_1\widehat{A_1}A_2$, $B_2\widehat{A_2}A_3$, $B_3\widehat{A_3}A_4$, $B_4\widehat{A_4}A_5$, $B_5\widehat{A_5}A_1$, são chamados ângulos externos do polígono $A_1A_2A_3A_4A_5$.

Definição 12 Podemos classificar os polígonos de acordo com o seu número de lados. Assim um polígono de 3 lados é chamado de triângulo; de 4 lados é chamado de quadrilátero; de 5 lados é chamado de pentágono; de 6 lados é chamado hexágono, etc.

Definição 13 Em relação à medida dos seus lados, os triângulos são classificados assim:

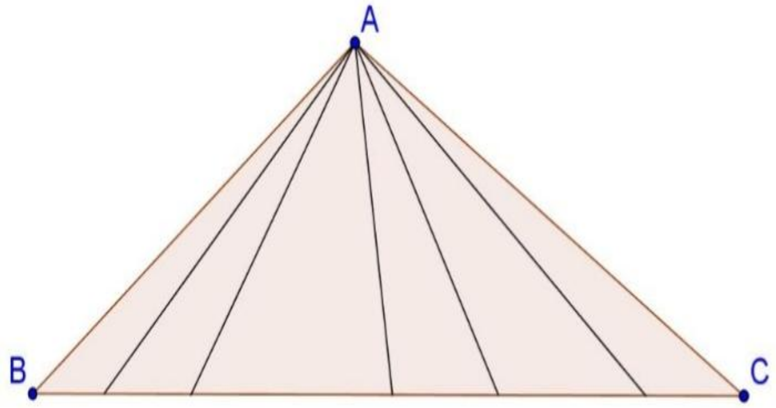
- Triângulo equilátero: 3 lados congruentes.
- Triângulo isósceles: 2 lados congruentes.
- Triângulo escaleno: 3 lados com medidas diferentes.

Em relação às medidas de seus ângulos internos, os triângulos são classificados assim:

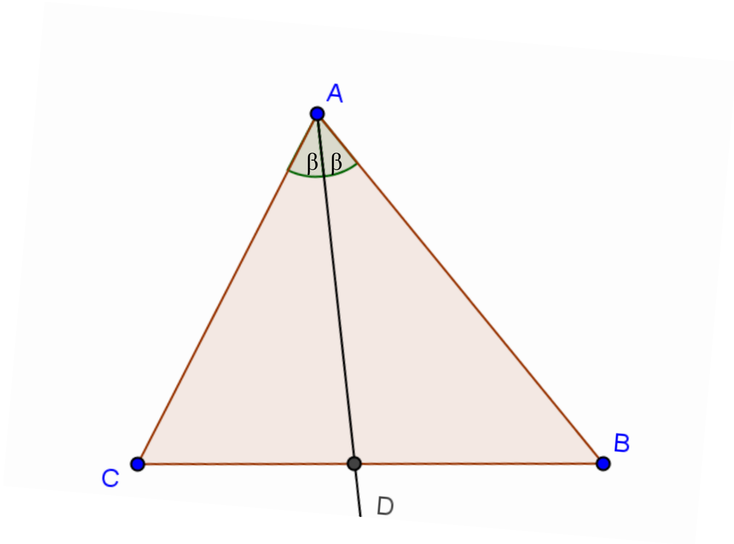
- Triângulo retângulo: possui um ângulo (interno) reto.
- Triângulo acutângulo: possui os três ângulos internos agudos.
- Triângulo obtusângulo: possui um ângulo interno obtuso.
- Triângulo equiângulo: possui os três ângulos internos congruentes.

Em um triângulo isósceles, temos dois lados congruentes, o outro lado é chamado base. Os dois ângulos que determinam a base são chamados ângulos da base. O ângulo oposto a base é chamado ângulo do vértice.

Definição 14 Cevianas de um triângulo são segmentos que tem uma extremidade em um vértice e outra na reta suporte ao lado oposto a este vértice.



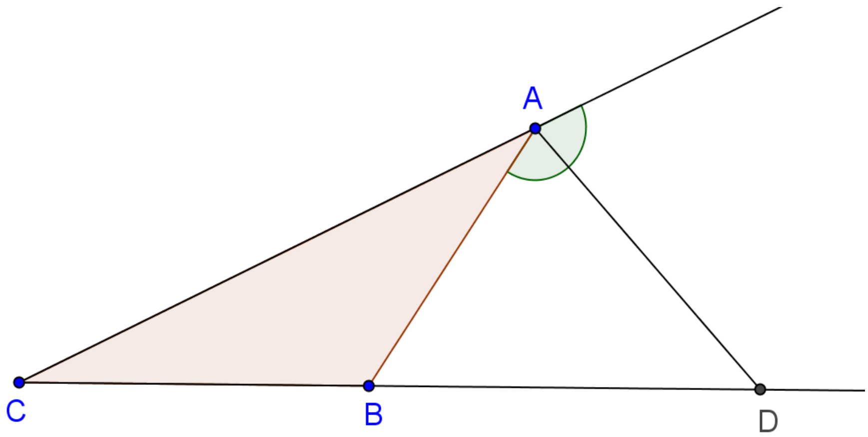
Definição 15 Uma bissetriz interna de um triângulo, é um segmento da bissetriz de um ângulo do triângulo, cujas extremidades são o vértice deste ângulo e um ponto do lado oposto.



- $\overline{AD}$ é a bissetriz do ângulo $B\hat{A}C$ do triângulo ABC.
- Todo triângulo possui três bissetrizes, e estas se interceptam em um único ponto denominado incentro.

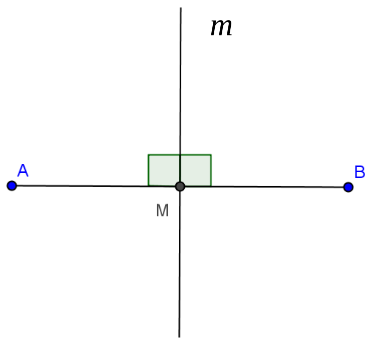
Definição 16 Uma bissetriz externa de um triângulo, é um segmento da bissetriz de um ângulo externo do triângulo, cujas extremidades são o vértice do ângulo e um ponto pertencente ao prolongamento do lado oposto.

Exemplo: Na figura a seguir $\overline{AD}$ é bissetriz externa correspondente ao vértice A.



- No caso de um triângulo isósceles, a bissetriz do ângulo externo relativa ao vértice, é paralela a base do triângulo, portanto não haverá intersecção desta com o prolongamento da base, neste caso, a medida da bissetriz externa relativa ao vértice não pode ser calculada. Se for triângulo equilátero, todas as bissetrizes dos ângulos externos do triângulo serão paralelas aos lados opostos, logo das bissetrizes externas do triângulo serão indefinidas.

Definição 17 A mediatriz de um segmento é a reta perpendicular ao segmento e que contém o seu ponto médio.



- m é a mediatriz do segmento $\overline{AB}$.
- Observamos que:

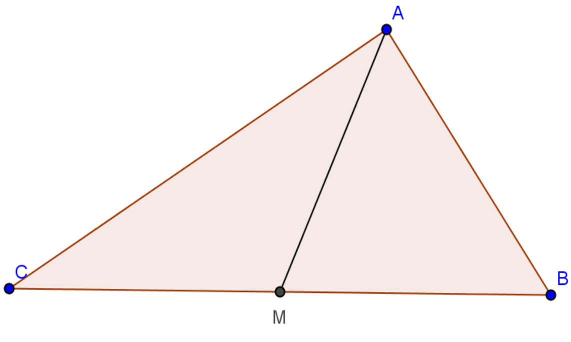
i) A mediatriz de um segmento é o conjunto dos pontos que equidistam das extremidades do segmento.

ii) As mediatrizes dos lados de um triângulo se interceptam num único ponto chamado circuncentro.

Definição 18 Uma mediana de um triângulo é um segmento que une um vértice ao ponto médio do lado oposto.

As três medianas de um triângulo se interceptam num único ponto denominado baricentro.

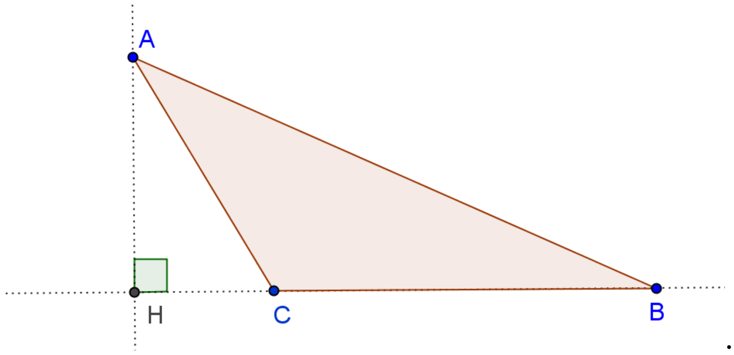
Exemplo: No triângulo ABC representado a seguir, M é ponto médio de $\overline{BC}$, então $\overline{AM}$ é a mediana relativa ao vértice A.



Definição 19 Uma altura de um triângulo ABC é o segmento perpendicular que une um vértice à reta que contém o lado oposto.

O prolongamento das alturas de um triângulo se interceptam num único ponto denominado ortocentro.

Unindo-se os pés das alturas em um triângulo, obtém-se um novo triângulo denominado triângulo órtico.



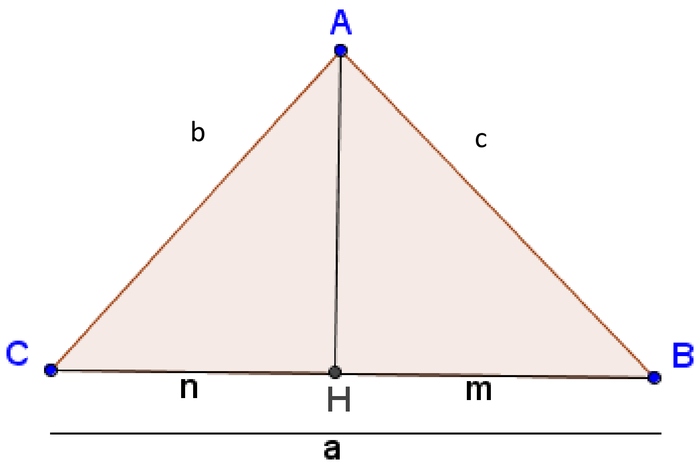
2 Demonstrações sucintas relacionadas à triângulo

Neste capítulo apresentamos algumas demonstrações de fórmulas simples, relacionadas ao triângulo, sendo este um dos polígonos de maior destaque na Geometria Euclidiana Plana.

2.1 Cálculo da relação entre lados num triângulo e uma projeção

Os ângulos internos de um triângulo podem ser classificados em: agudo, reto ou obtuso. A seguir estaremos verificando a relação entre os lados de um triângulo considerando essas três possibilidades.

- Consideremos primeiramente um triângulo ABC, de lados com medidas a, b e c, sendo $A\hat{B}C$ agudo. Tracemos então a altura em relação ao vértice A, o ponto de intersecção dessa altura com a reta $\overleftrightarrow{BC}$ chamemos de H, a medida da projeção de $\overline{AC}$ sobre $\overleftrightarrow{BC}$ de n, e a medida da projeção do lado $\overline{AB}$ sobre $\overleftrightarrow{BC}$ de m.



Temos agora dois triângulos retângulos: ΔABH e ΔAHC. Vamos aplicar a ambos o Teorema de Pitágoras:

$b^2 = n^2 + AH^2$ $\quad$ $(\boldsymbol{I})$

$c^2 = m^2 + AH^2$ $\quad$ $(\boldsymbol{II})$

Nesse caso, em que $A\hat{C}B$ é também um ângulo agudo, temos que $m + n = a \Rightarrow n = a - m$. Substituindo em (I) teremos:

$b^2 = (a - m)^2 + AH^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - 2am + m^2 + AH^2 (\boldsymbol{III})$

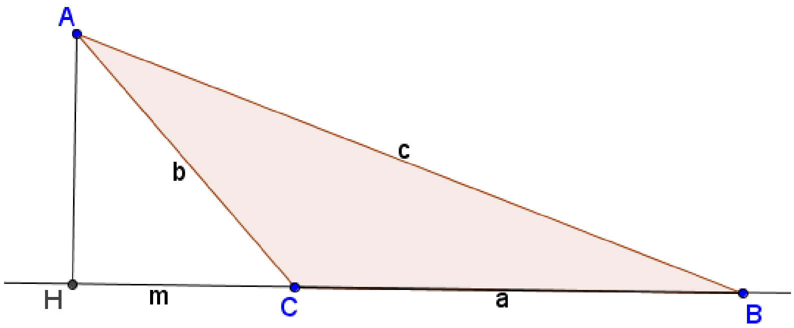
Da equação (II) temos $m^2 = c^2 - AH^2$, substituindo em $(\boldsymbol{III})$ obtemos:

$b^2 = a^2 - 2am + c^2 - AH^2 + AH^2$

$\Rightarrow \boldsymbol{b^2 = a^2 + c^2 - 2am}$

Se isolássemos m ao invés de n, obteríamos a relação: $c^2 = a^2 + b^2 - 2an$.

- Caso o triângulo ABC seja retângulo em B, a relação dada é direta: $b^2 = a^2 + c^2$ (Teorema de Pitágoras).
- Seja agora um triângulo ABC obtusângulo em C. Tracemos então a altura em relação ao vértice A, interceptando o prolongamento do lado $\overline{BC}$ em H. Seja também $HC = m$, que corresponde à projeção de $\overline{AC}$ sobre $\overrightarrow{BC}$.



Temos agora dois triângulos retângulos: ΔACHe ΔABH. Vamos aplicar a ambos o Teorema de Pitágoras:

$b^2 = m^2 + AH^2 \Rightarrow m^2 = b^2 - AH^2 \qquad (I)$

$c^2 = (a + m)^2 + AH^2 \qquad (II)$

Substituindo (I) em(II) teremos:

$c^2 = (a + m)^2 + AH^2 \Rightarrow c^2 = a^2 + 2am + (b^2 - AH^2) + AH^2$

$\Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 + 2am$

Se isolarmos b^2 na equação acima, temos:

$\Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 - 2am \Rightarrow b^2 = a^2 + c^2 - 2a(a + m)$, conforme observamos no primeiro caso.

2.1.1 Classificação de um triângulo em retângulo, obtusângulo ou acutângulo, conhecendo-se as medidas de seus lados

Considere o triângulo ABC de lados com medidas $a \geq b \geq c$, sendo $B\hat{A}C$ o ângulo interno oposto ao lado $\overline{BC}$ e m a projeção de $\overline{AB}$ sobre $\overleftrightarrow{AC}$. Das relações demonstradas no tópico 2.1 e do teorema de Pitágoras decorrem as seguintes conclusões:

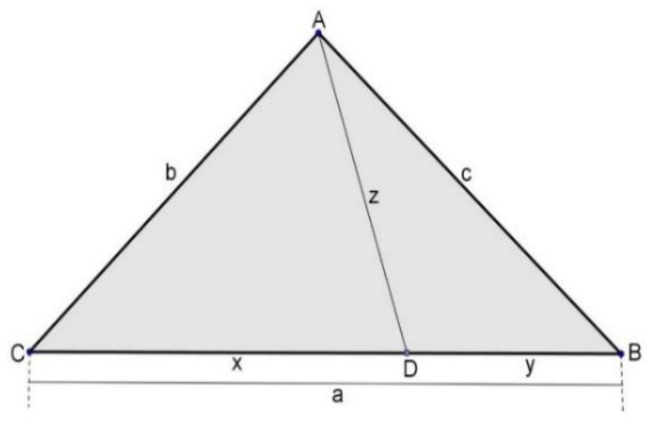
- Se $B\hat{A}C < 90°$, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bm \Rightarrow a^2 < b^2 + c^2$. Neste caso, como os outros ângulos são menores ou iguais a $B\hat{A}C$, temos que ΔABC é acutângulo.
- Se $B\hat{A}C > 90°$, $a^2 = b^2 + c^2 + 2bm \Rightarrow a^2 > b^2 + c^2$. Neste caso, temos que oΔABC é obtusângulo.
- Se $B\hat{A}C = 90°$, $a^2 = b^2 + c^2$. Neste caso, temos que o ΔABC é retângulo em A.

2.2 Teorema de Stewart

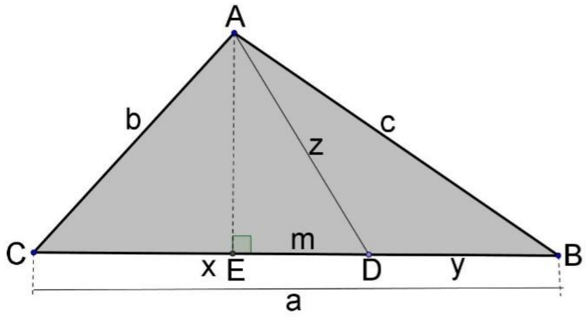
Matthew Stewart, matemático do século XVIII, nasceu no ano de 1717 em uma pequena ilha da Escócia chamada Bute. Educado em Rothesay Grammar School, entrou na Universidade de Glasgow em 1734, onde estudou a geometria antiga. Em 1746 Matthew Stewart publicou o teorema, hoje conhecido como Teorema de Stewart, o qual relaciona os comprimentos dos lados de um triângulo com o comprimento de uma ceviana.

Teorema de Stewart: *Dado um triângulo ABC qualquer, cujos lados têm medidas $AB = c$, $AC = b$ e $BC = a$. Seja D um ponto qualquer do lado $\overline{BC}$, com $AD = z$, vale a relação:*

$$b^2y + c^2x - z^2a = axy, \text{ onde } x = CD \text{ e } y = BD.$$



Demonstração: Dado ΔABC de lados com medidas a, b, c e d. Seja D um ponto qualquer sobre o lado $\overline{BC}$ e E o pé da perpendicular a $\overline{BC}$ que contém A, conforme indicados na figura.



Consideremos:

- $AD = z$
- $CD = x$
- $DB = y$
- $ED = m$

Considerando os triângulos ACD eABD, obtemos as seguintes relações:

$\Delta ACD \Rightarrow b^2 = x^2 + z^2 - 2xm$ (Multiplicando por y)

$\Rightarrow b^2 y = x^2 y + z^2 y - 2xym$

$\Delta ABD \Rightarrow c^2 = y^2 + z^2 + 2ym$ (Multiplicando por x)

$\Rightarrow c^2 x = y^2 x + z^2 x + 2xym$

$$\Rightarrow \begin{cases} b^2 y = x^2 y + z^2 y - 2xym \\ c^2 x = y^2 x + z^2 x + 2xym \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos:

$\Rightarrow b^2 y + c^2 x = x^2 y + y^2 x + z^2(x + y)$

$\Rightarrow b^2 y + c^2 x = xy(x + y) + z^2(x + y)$

Considerando que $x + y = a$, temos:

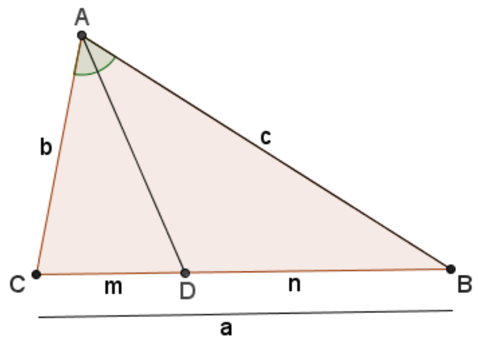
$\Rightarrow b^2 y + c^2 x = xya + z^2 a$

De onde vem a relação: $b^2 y + c^2 x - z^2 a = axy$ $\square$

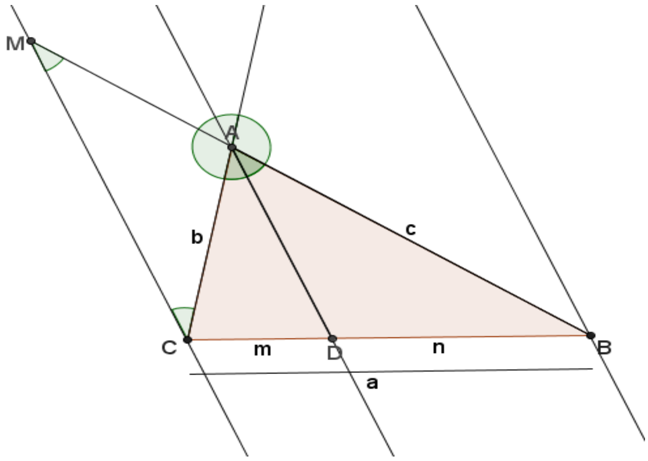
2.3 Teorema da bissetriz interna

Dado um triângulo ABC qualquer, seja D ponto de intersecção da bissetriz interna do ângulo $B\hat{A}C$ com o segmento $\overline{BC}$. Considerando $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $CD = m$ e $DB = n$, então vale a relação:

$$\frac{m}{b} = \frac{n}{c} = \frac{m + n}{b + c}$$



Demonstração: Seja ABC um triângulo de lados com medidas a, b e c. Tracemos então a bissetriz em relação ao vértice A. O ponto de intersecção dessa bissetriz com o lado $\overline{BC}$ chamemos de D e consideremos $CD = m$ e $DB = n$. Tracemos então as paralelas a $\overline{AD}$ passando pelos vértices C e B. Se prolongarmos o segmento $\overline{AB}$ na direção do vértice A, interceptamos a paralela que passa pelo vértice C num ponto M. Temos então o triângulo MAC.



Como $\overline{AD}$ é bissetriz interna relativa ao vértice A, os ângulos $C\hat{A}D$ e $D\hat{A}B$ são congruentes. Temos então que os ângulos $A\hat{C}M$ e $C\hat{A}D$ são ângulos alternos internos, portanto ângulos congruentes, e também $D\hat{A}B$ é congruente a $C\hat{M}A$, pois são ângulos correspondentes. Logo os ângulos $A\hat{C}M$ e $C\hat{M}A$ são congruentes. Concluímos então que o triângulo MAC é isósceles de base $\overline{CM}$, assim $MA = CA = b$.

Utilizando o Teorema de Tales, temos:

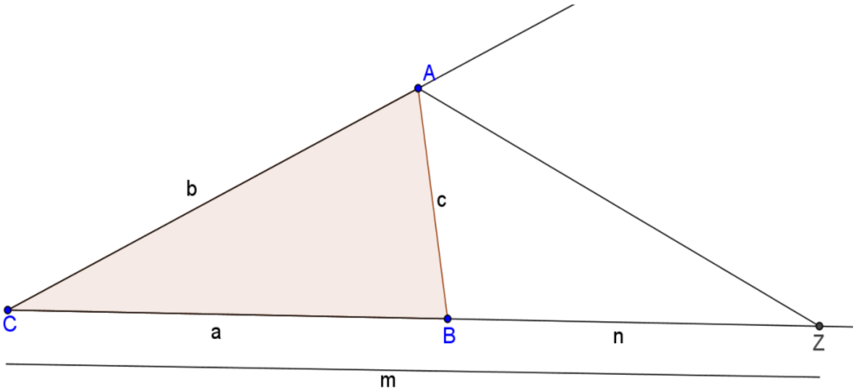
$$\frac{m}{b} = \frac{n}{c} = \frac{m+n}{MA+c} \Rightarrow \frac{m}{b} = \frac{n}{c} = \frac{a}{b+c}$$

□

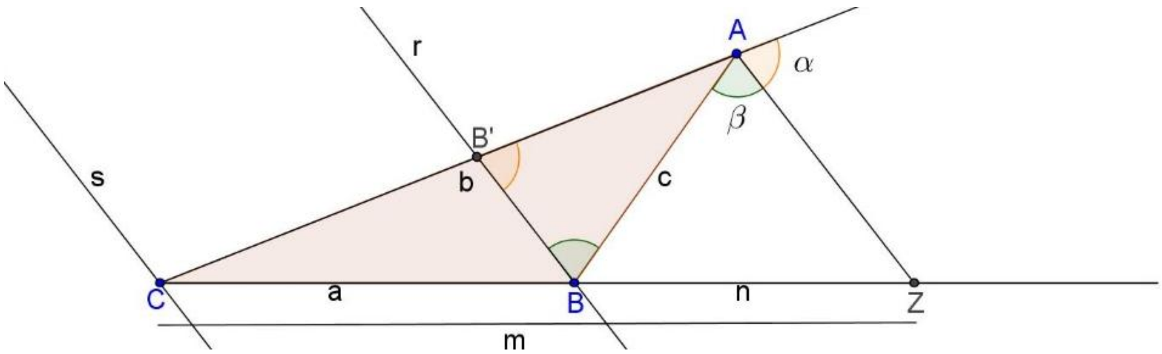
2.4 Teorema da Bissetriz Externa

Teorema: *Dado um triângulo ABC e Z ponto de intersecção da bissetriz externa do ângulo correspondente ao vértice A com a reta definida pelo segmento $\overline{BC}$, sendo $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $BZ = n$ e $CZ = m$, vale a seguinte relação:*

$$\frac{b}{m} = \frac{c}{n} = \frac{b-c}{a}$$



*Demonstração***:** Seja $\overline{AZ}$ bissetriz externa relativa ao vértice A do triângulo ABC, onde $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $BZ = n$ e $CZ = m$. Sejam r es retas paralelas a $\overline{AZ}$ passando por B e C, respectivamente. Consideremos o ponto B' na intersecção da reta r com o lado $\overline{AC}$ e os ângulos α e β, conforme indicados na figura.



Como $\overline{AZ}$é bissetriz externa relativa ao vértice A, temos que α = β.

Considerando $\overline{AZ}$ // $\overline{BB}$', temos:

$A\widehat{B'}B = \alpha$ (ângulos correspondentes)

$A\hat{B}B' = \beta$ (alternos internos)

Portanto $A\widehat{B'}B = \alpha = \beta = A\hat{B}B'$.

Observamos então que o triângulo ABB' é isósceles de base $\overline{BB}$', com $AB' = AB$. Segue, pelo Teorema de Tales:

$$\frac{AC}{CZ} = \frac{AB'}{BZ} = \frac{B'C}{BC} \Rightarrow \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{m}} = \frac{c}{n} = \frac{b-c}{a}$$

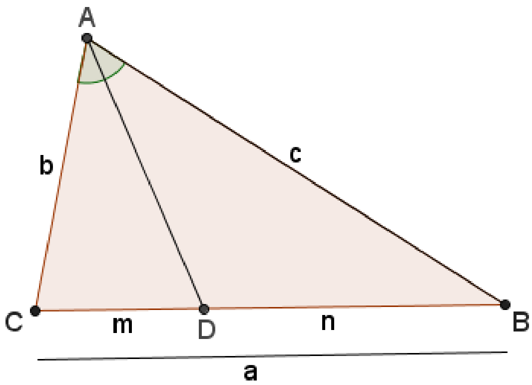
□

3 Cálculo das medidas das bissetrizes e alturas de um triângulo qualquer

Muitos dos problemas envolvendo triângulos estão relacionados as suas alturas e bissetrizes. Sendo assim apresentaremos nesta seção demonstrações detalhadas do cálculo de suas medidas em um triângulo qualquer.

3.1 Cálculo das medidas das bissetrizes internas de um triângulo qualquer

Seja o triângulo ABC de lados com medidas a, b e c. Tracemos a bissetriz interna em relação ao vértice A, o ponto de interseção dessa bissetriz com o lado $\overline{BC}$ chamemos de D, consideremos $CD = m$ e $DB = n$, conforme indicados na figura a seguir:



Aplicando o Teorema de Stewart no triângulo ABC temos:

$$\Rightarrow c^2m + b^2n - AD^2a = amn$$

Vamos fazer algumas manipulações algébricas nesta equação para obtermos a medida do segmento $\overline{AD}$, que é a bissetriz interna relativa ao vértice A.

Pelo Teorema das Bissetrizes Internas, temos que:

$$\frac{m}{b} = \frac{n}{c} = \frac{m+n}{b+c} = \frac{a}{b+c}$$

De onde obtemos:

$$m = \frac{ab}{b+c} \text{ e } n = \frac{ac}{b+c}$$

Substituindo m e n encontrados acima na Relação de Stewart temos:

$$c^2m + b^2n - AD^2a = amn$$

$$\Rightarrow c^2\left(\frac{ab}{b+c}\right)+b^2\left(\frac{ac}{b+c}\right)-AD^2a=a\left(\frac{ab}{b+c}\right)\left(\frac{ac}{b+c}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{c^2ab}{b+c}+\frac{b^2ac}{b+c}-AD^2a=\frac{a^3bc}{(b+c)^2}$$

Simplificando o fator a temos:

$$\Rightarrow \frac{c^2b}{b+c}+\frac{b^2c}{b+c}-AD^2=\frac{a^2bc}{(b+c)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{cb(c+b)}{b+c}- \ AD^2=\frac{a^2bc}{(b+c)^2}$$

$$\Rightarrow cb \ - \ \frac{a^2bc}{(b+c)^2}= \ AD^2$$

$$\Rightarrow bc\left(1-\frac{a^2}{(b+c)^2}\right)=AD^2$$

$$\Rightarrow bc\left(\frac{(b+c)^2-a^2}{(b+c)^2}\right)=AD^2$$

$$\Rightarrow \frac{bc(b+c+a)(b+c-a)}{(b+c)^2}=AD^2$$

Mas $a+b+c=2p$ (perímetro do triângulo ABC), que implica em:

$b+c-a=b+c+a-2a=2p-2a=2(p-a)$

Substituindo então temos:

$$\Rightarrow \frac{bc.2p.2(p-a)}{(b+c)^2}=AD^2$$

$$\Rightarrow \frac{bc.4p(p-a)}{(b+c)^2}=AD^2$$

Extraindo a raiz quadrada, obtemos a medida da bissetriz interna referente ao vértice A:

$$\Rightarrow AD=\frac{2\sqrt{bcp(p-a)}}{b+c}$$

Analogamente encontramos as medidas das bissetrizes internas em relação aos vértices B e C:

$$\Rightarrow BE = \frac{2\sqrt{acp(p-b)}}{a+c}$$

Onde E é o pé da bissetriz do ângulo relativo ao vértice B.

$$\Rightarrow CF = \frac{2\sqrt{abp(p-c)}}{a+b}$$

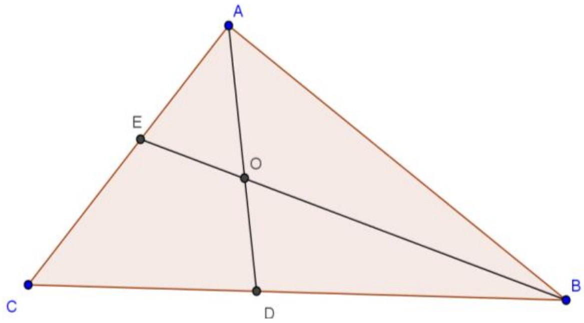
Onde F é o pé da bissetriz do ângulo relativo ao vértice C. □

3.1.1 Incentro

O incentro de um triângulo é equidistante a seus lados, sendo portanto o centro de uma circunferência inscrita a este.

Teorema: *As bissetrizes dos ângulos de um triângulo se interceptam num único ponto do seu interior o qual é equidistante dos seus lados.*

Demonstração: Considere um triângulo ABC e as bissetrizes $\overline{AD}$ e $\overline{BE}$. Eles se cruzam no interior do triângulo num ponto que chamaremos de O, conforme a figura:



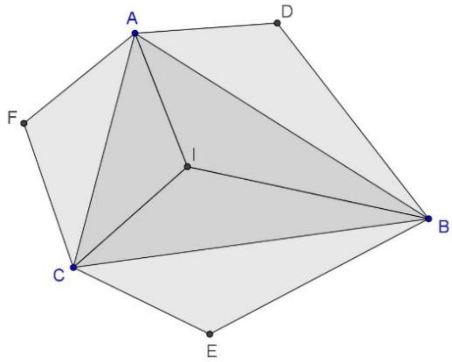
Como O está sobre a bissetriz $\overline{AD}$, ele é equidistante de $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$; da mesma forma O está sobre $\overline{BE}$ e é equidistante de $\overline{BA}$ e $\overline{BC}$. Assim o ponto O é equidistante dos três lados do triângulo.

Como $\overrightarrow{CO}$ divide o ângulo $A\hat{C}B$ e passa pelo ponto O, então $\overrightarrow{CO}$ é equidistante de $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$. Assim $\overrightarrow{CO}$ é bissetriz do ângulo $A\hat{C}B$.

Logo, o ponto O é o encontro das três bissetrizes do triângulo. □

3.1.2 Refletindo as bissetrizes internas sobre os lados de um triângulo qualquer

Considere um triângulo ABC qualquer, sendo I o seu incentro. Vamos analisar as propriedades existentes entre os polígonos e segmentos definidos após refletirmos as bissetrizes internas do triângulo ABC sobre seus lados.



O triângulo ABD resulta da reflexão do triângulo ABI em relação ao lado $\overline{AB}$. Do mesmo modo os triângulos BCE e ACF são obtidos pela reflexão dos triângulos BCI e ACI em relação aos lados $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$, respectivamente. Vamos observar algumas propriedades relativas aos triângulos ABC e DEF e ao hexágono $ADBECF$, assim construídos.

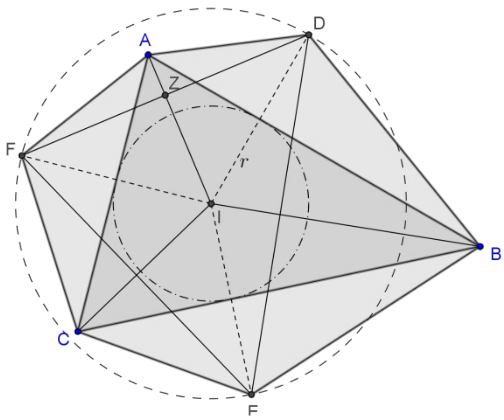
P1) A área do hexágono $ADBECF$ corresponde ao dobro da área do triângulo ABC.

P2) $DI = EI = FI = 2r$, onde r é o raio da circunferência inscrita no ΔABC.

P3) I é também o centro da circunferência circunscrita ao ΔDEF, cujo raio é $2r$.

P4) $\begin{cases} CE = CF = CI \\ AD = AF = AI \\ BD = BE = BI \end{cases}$

P5) Seja $Z = \overline{DF} \cap \overline{AI} \Longrightarrow \Delta ADZ \cong \Delta AFZ$ (por L.A.L).

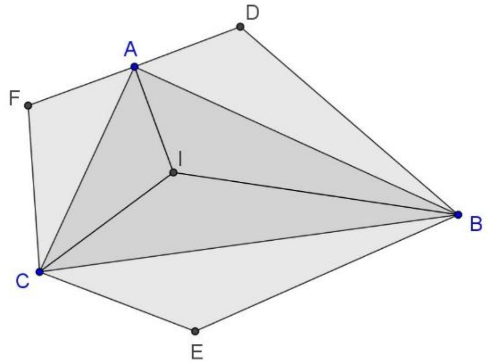


P6) Como consequência de P5: $\begin{cases} \overleftrightarrow{\mathrm{AI}} \text{ é a mediatriz de } \overline{DF} \\ \overleftrightarrow{\mathrm{BI}} \text{ é a mediatriz de } \overline{DE} \\ \overleftrightarrow{\mathrm{CI}} \text{ é a mediatriz de } \overline{EF} \end{cases}$

P7) Temos também que $\begin{cases} \overline{ID} \perp \overline{AB} \\ \overline{IE} \perp \overline{BC} \\ \overline{IF} \perp \overline{AC} \end{cases}$

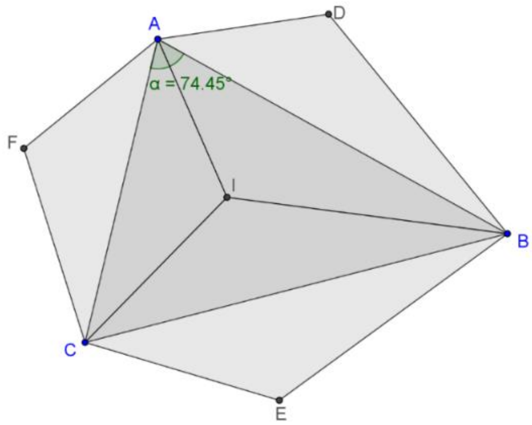
P8) Em relação aos ângulos internos do ΔABC, observamos que:

i) Se o ΔABC for retângulo em A, no lugar do hexágono $ADBECF$ teremos o pentágono $DBECF$.

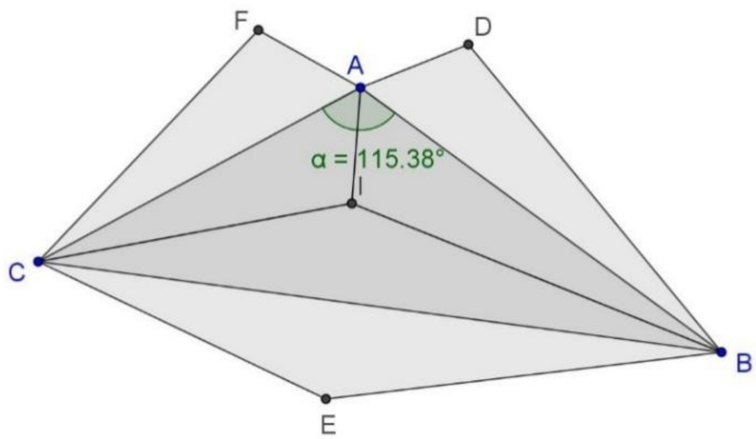


De fato, considerando o ΔABC retângulo em A, teremos $C\hat{A}B = 90° \Longrightarrow F, A$ e D são pontos colineares onde A é ponto médio do segmento $\overline{FD}$. Nesse caso, como A não será mais vértice, o hexágono $ADBECF$ dará lugar ao pentágono $DBECF$.

ii) Se o ΔABC for acutângulo, ou seja, não possuir ângulo interno maior ou igual a 90°, o hexágono $ADBECF$ será convexo.

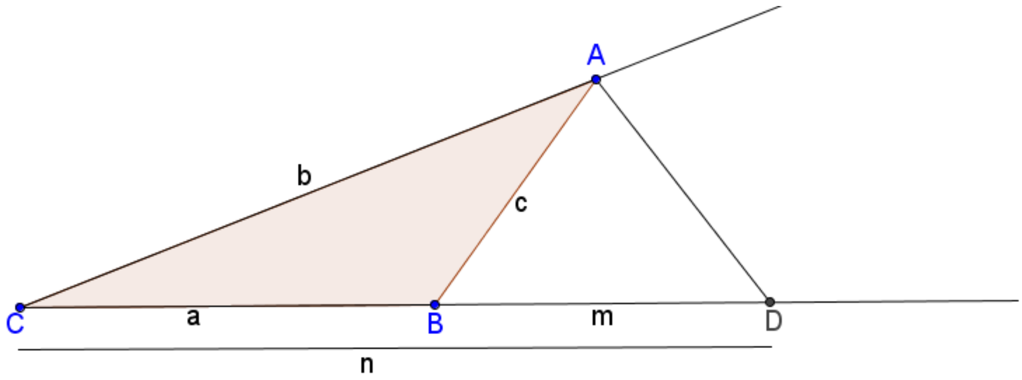


iii) Se o ΔABC for obtusângulo, ou seja, possuir um ângulo obtuso, o hexágono $ADBECF$ será côncavo no vértice cujo ângulo é obtuso.



3.2 Cálculo das medidas das bissetrizes externas de um triângulo qualquer

Consideremos um triângulo ABC de lados com medidas $BC = a$, $AC = b$ e $AB = c$. Seja $\overline{AD}$ a bissetriz externa em relação ao vértice A, onde D é o ponto de interseção dessa bissetriz com a semirreta $\overrightarrow{CB}$. Chamemos BD de m e CD de n, conforme indicados na figura a seguir:



Aplicando o Teorema de Stewart no triângulo ACD, temos:

$$b^2m + AD^2a - c^2n = amn$$

Pelo Teorema das Bissetrizes Externas vale as seguintes relações:

$$\frac{b}{n} = \frac{c}{m} = \frac{b-c}{a} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{m} = \dfrac{\mathrm{ac}}{\mathrm{b-c}} \\ \mathrm{n} = \dfrac{\mathrm{ab}}{\mathrm{b-c}} \end{cases}$$

Substituindo os valores de m e n na relação dada pelo Teorema de Stewart, temos:

$$\Rightarrow b^2\frac{ac}{b-c} + AD^2a - c^2\frac{ab}{b-c} = a\frac{ab}{(b-c)}\frac{ac}{(b-c)}$$

$$\Rightarrow \frac{ab^2c}{b-c} + AD^2a - \frac{c^2ab}{b-c} = \frac{a^3bc}{(\mathrm{b}-\mathrm{c})^2}$$

Simplificando o fator a temos:

$$\Rightarrow \frac{b^2c}{b-c} + AD^2 - \frac{c^2b}{b-c} = \frac{a^2bc}{(\mathrm{b}-\mathrm{c})^2}$$

$$\Rightarrow \frac{bc(b-c)}{b-c} + AD^2 = \frac{a^2bc}{(\mathrm{b}-\mathrm{c})^2}$$

$$\Rightarrow AD^2 = \frac{a^2bc}{(\mathrm{b}-\mathrm{c})^2} - bc$$

$$\Rightarrow AD^2 = bc\left[\frac{a^2}{(\mathrm{b}\ - \mathrm{c})^2} - 1\right]$$

$$\Rightarrow AD^2 = \frac{bc[\mathrm{a}^2 - (\mathrm{b} - \mathrm{c})^2]}{(\mathrm{b}\ - \mathrm{c})^2}$$

$$\Rightarrow AD^2 = \frac{bc[(\mathrm{a} + \mathrm{b} - \mathrm{c})\,(\mathrm{a} - \mathrm{b} + \mathrm{c})]}{(\mathrm{b}\ - \mathrm{c})^2}$$

Mas $a + b + c = 2p \Longrightarrow \begin{cases} a + b - c = a + b + c - 2c = 2p - 2c = 2(p - c) \\ a - b + c = a + b + c - 2b = 2p - 2b = 2(p - b) \end{cases}$

Logo,

$$\Rightarrow AD^2 = \frac{bc.[2(\mathrm{p} - \mathrm{c})2\,(\mathrm{p} - \mathrm{b})]}{(\mathrm{b}\ - \mathrm{c})^2}$$

$$\Rightarrow AD^2 = \frac{bc.[4(\mathrm{p} - \mathrm{b})\,(\mathrm{p} - \mathrm{c})]}{(\mathrm{b}\ - \mathrm{c})^2}$$

Extraindo a raiz quadrada, obtemos a medida da bissetriz externa referente ao vértice A:

$$\Rightarrow AD = \frac{2\sqrt{bc(p - b)\,.(p - c)}}{|\,b - c\,|}$$

Analogamente encontramos as medidas das bissetrizes externas em relação aos vértices B e C:

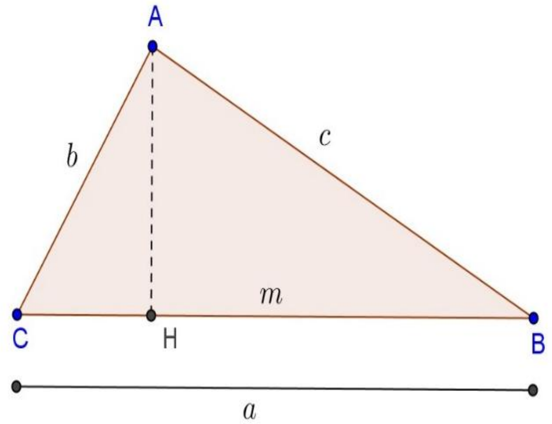
$$\Rightarrow BD` = \frac{2\sqrt{ac(p - a)\,.(p - c)}}{|\,a - c\,|}$$

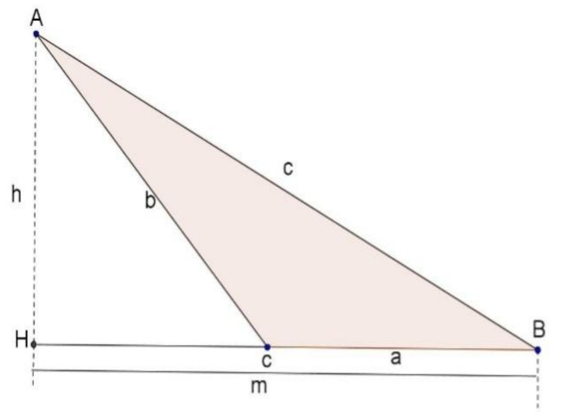
$$\Rightarrow CD'' = \frac{2\sqrt{ab(p - a)\,.(p - b)}}{|\,a - b\,|}$$

Observação: No caso de termos um triângulo com dois de seus lados congruentes, a bissetriz externa do ângulo formado por esses dois lados, será paralela ao terceiro, logo sua medida é indeterminada, visto que não terá ponto de intersecção com a reta definida pela base. Desse modo, verificamos que se o ΔABC for equilátero, ou seja, $a = b = c$, as medidas de suas bissetrizes externas serão também indeterminadas. Caso o ΔABC possua, dois de seus lados congruentes, não será possível determinar a medida da bissetriz externa referente ao ângulo definido por esses dois lados. □

3.3 Cálculo das medidas das alturas de um triângulo qualquer

Dado um triângulo ABC qualquer, vamos calcular a altura h_a em relação ao lado $\overline{BC}$. Analisemos os casos 1 e 2, como representados a seguir:





Caso 1: ΔABC acutângulo

Caso 2: ΔABC obtusângulo em C

Em ambos os casos, temos:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2am \Rightarrow m = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras no ΔAHB, tem-se:

${h_a}^2 = c^2 - m^2$, substituindo m, obtemos:

$$\Rightarrow {h_a}^2 = c^2 - \frac{(a^2 + c^2 - b^2)^2}{4a^2}$$

$$\Rightarrow {h_a}^2 = \frac{4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2}{4a^2}$$

Fatorando,

$$\Rightarrow {h_a}^2 = \frac{(2ac + a^2 + c^2 - b^2).(2ac - a^2 - c^2 + b^2)}{4a^2}$$

$$\Rightarrow {h_a}^2 = \frac{[(a + c)^2 - b^2].[b^2 - (a - c)^2]}{4a^2}$$

$$\Rightarrow {h_a}^2 = \frac{(a + c + b).(a + c - b).(b + a - c).(b - a + c)}{4a^2}$$

Considerando que $a + b + c = 2p$, tem-se:

$$\Rightarrow {h_a}^2 = \frac{2p \,.\, 2(p - b) \,.\, 2(p - c) \,.\, 2(p - a)}{4a^2}$$

$$\Rightarrow {h_a}^2 = \frac{4p\,.(p-a)\,.(p-b)\,.(p-c)}{a^2}$$

$$\Rightarrow h_a = \frac{2\,\sqrt{p(p-a)\,.(p-b)\,.(p-c)}}{a}$$

Analogamente, tem-se:

$$h_b = \frac{2\,\sqrt{p(p-a)\,.(p-b)\,.(p-c)}}{b}$$

$$h_c = \frac{2\,\sqrt{p(p-a)\,.(p-b)\,.(p-c)}}{c}$$

□

Como consequência desse resultado, apresentamos a seguir o Teorema de Herão, o qual determina a área de um triângulo qualquer em função das medidas de seus lados. Faremos uso da relação encontrada para o cálculo das alturas na demonstração desse importante Teorema.

3.3.1 Teorema de Herão

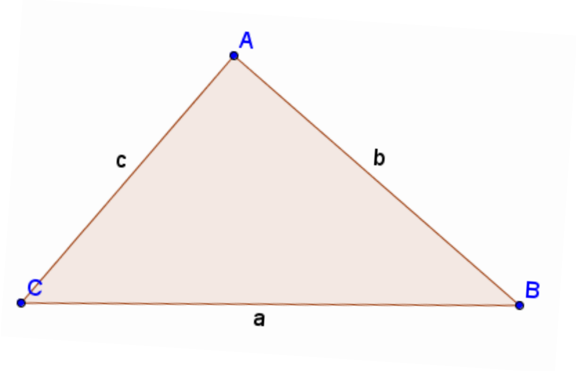
O Teorema que será abordado já era utilizado muito antes de Herão por Arquimedes, que sem dúvida tinha uma prova dela, mas a demonstração de Herão em sua obra “A Métrica” é a mais antiga que temos.

Heron, Hero, ou Herão, de Alexandria, possivelmente nascido em Alexandria, no Egito, esteve ativo em torno do ano 62 d.C., desenvolveu excelentes trabalhos que lhe deram destaque como Engenheiro, Físico e Matemático. Na história da Matemática é conhecido, sobretudo, pela fórmula que leva o seu nome, a qual permite calcular a área de um triângulo qualquer a partir das medidas de seus lados. Embora agora seja em geral provada trigonometricamente, a prova de Herão é convencionalmente geométrica.

Quando relacionamos com nossa prática docente, percebemos que este Teorema é pouco mencionado, a área de um triângulo parece depender única e exclusivamente das medidas da base e da altura, o que não é verdade. Através deste, podemos ampliar o conceito e deixar a área apenas em função dos lados do triângulo. Introduzindo este Teorema no currículo básico, estaremos proporcionando aos alunos mais uma possibilidade para o cálculo da área de um triângulo qualquer, estimulando a escolha por parte deles, na busca de uma estratégia para a resolução de problemas envolvendo triângulos.

Teorema de Herão: *Dado um triângulo qualquer* ABC, *de lados* $AB = c$, $AC = b$ *e* $BC = a$, *sua área é dada por:*

$A = \sqrt{p(p-a).(p-b).(p-c)}$ *, onde p é o semiperímetro do triângulo dado.*



Demonstração: Seja um triângulo qualquer ABC, de lados com medidas $AB = c$, $AC = b$ e $BC = a$, sua área corresponde a:

$$A = \frac{base\ .altura}{2}$$

Tomemos $\overline{BC}$ como base, e h_a altura relativa ao lado $\overline{BC}$. Segue:

$$A = \frac{BC\ .ha}{2}$$

Como já calculado anteriormente,

$$h_a = \frac{2\sqrt{p(p-a).(p-b).(p-c)}}{a}$$

Logo,

$$\Rightarrow A = \frac{a}{2}.\frac{2\sqrt{p(p-a).(p-b).(p-c)}}{a}$$

$$\Rightarrow A = \sqrt{p(p-a).(p-b).(p-c)} \qquad \square$$

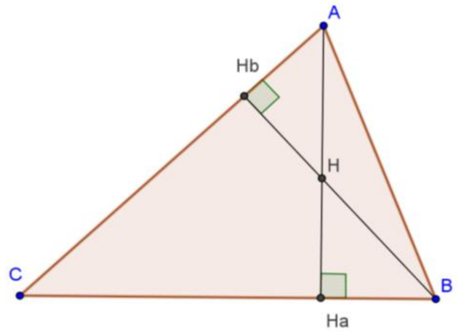
Na seção 4, como uma extensão do Teorema de Herão, apresentamos uma generalização do Teorema de Brahmagupta, o qual fornece uma fórmula para o cálculo da área de um quadrilátero cíclico em função das medidas de seus lados.

3.3.2 Ortocentro

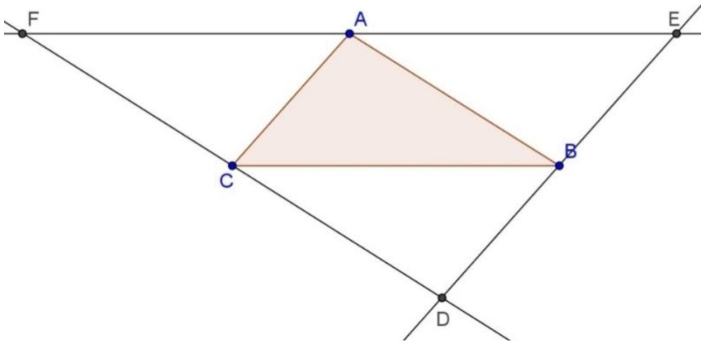
Vamos provar agora, além da existência, a unicidade do ortocentro.

Teorema: *Os prolongamentos das alturas de um triângulo se interceptam em um único ponto, que chamamos de ortocentro*.

Demonstração: Seja um triângulo ABC, e consideremos as alturas referentes aos vértices A e B, sendo H_a o pé da altura em relação ao vértice A e H_b o pé da altura referente ao vértice B. As duas alturas se encontram num ponto, que chamaremos de H, conforme indicado na figura:



Para o triângulo ABC, considere as retas paralelas aos lados passando pelos vértices opostos a esses lados. Considere D o ponto de intersecção das paralelas aos lados $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, E o ponto de intersecção das paralelas aos lados $\overline{CA}$ e $\overline{CB}$, e por fim F o ponto de intersecção das paralelas aos lados $\overline{BA}$ e $\overline{BC}$. Como os lados do triângulo não são paralelos, essas paralelas traçadas também não serão, sendo assim, elas formarão um novo triângulo: ΔDEF.

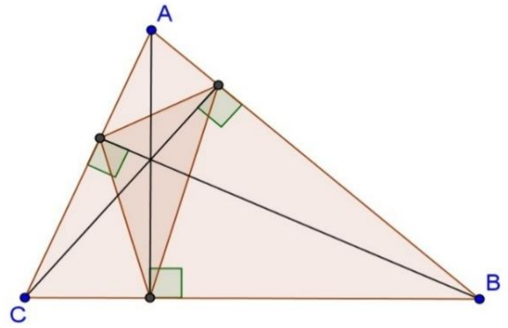


Como $\overline{AF}$ é paralela a $\overline{BC}$ o ângulo $A\hat{C}B = C\hat{A}F$, por serem alternos internos, de igual modo observamos que $B\hat{A}C = A\hat{C}F$, assim os triângulos ABC e CFA são congruentes pelo critério ALA (ângulo-lado-ângulo).

O mesmo acontece para os triângulos ABC e BEA, e para ABC e DCB.

Logo temos que $FA = AE$, $EB = BD$ e $DC = CF$. Portanto, o prolongamento das alturas do triângulo ABC são as mediatrizes do triângulo DEF, e se interceptam num ponto, que chamamos de ortocentro. $\square$

Observação: Unindo-se os pés das alturas de um triângulo ABC qualquer, obtém-se o chamado triângulo órtico ou pedal. As alturas do triângulo ABC são as bissetrizes do triângulo órtico.

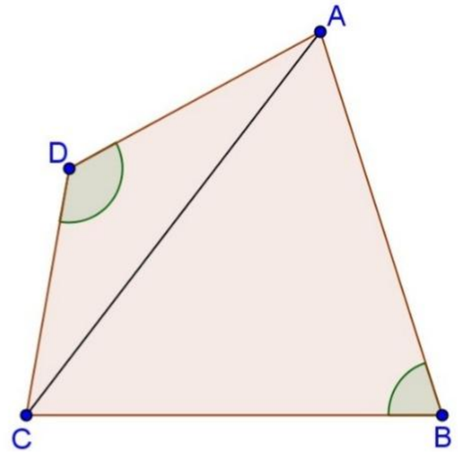


4 Uma generalização do Teorema de Brahmagupta

Brahmagupta Foi um matemático e astrônomo da Índia Central que nasceu no ano de 598. Ele demonstrou a solução geral para a equação do segundo grau em números inteiros (as diofantinas) e desenvolveu métodos algébricos gerais para aplicação na Astronomia, em sua principal obra, *Brahmasphutasidanta* (650). Em seu livro, *Brahmasphutasidanta*, eleva o zero à categoria dos *samkhya* (ou seja, dos números) ao dar as primeiras regras para se calcular com o zero: um número multiplicado por zero resulta em zero; a soma e a diferença de um número com zero resulta neste número; etc. Entre suas descobertas está a generalização natural da fórmula de Heron para os quadriláteros cíclicos, tão importante, que é considerada a mais notável descoberta da geometria hindu.

Teorema de Brahmagupta: *A medida da área de um quadrilátero cíclico de lados a, b, c e d, cujo semiperímetro é denotado por p, é dada por:*

$$A = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$



Demonstração: Seja ABCD um quadrilátero convexo qualquer de lados $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ e $AD = d$.

Consideremos as seguintes relações:

i) Pela lei dos cossenos, temos:

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{B} = AC^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos\hat{D}$$

$$\Rightarrow ab\cos\hat{B} - cd\cos\hat{D} = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2}$$

ii) $-1 \leq cos(\hat{B} + \hat{D}) \leq 1$, da primeira desigualdade, segue

$$\Rightarrow -1 \leq Cos\hat{B}.cos\hat{D} - sen\hat{B}.sen\hat{D}$$

Adicionando $(sen\hat{B}.sen\hat{D} + 1)$ em ambos os membros da desigualdade, temos:

$$\Rightarrow sen\hat{B}.sen\hat{D} \leq 1 + Cos\hat{B}.cos\hat{D}$$

A área do quadrilátero $ABCD$ é dada pela soma das áreas dos triângulos ABC e ADC, que corresponde a:

$$A = \frac{1}{2}.ab.sen\hat{B} + \frac{1}{2}cd.sen\hat{D}$$

$$2A = ab.sen\hat{B} + cd.sen\hat{D}$$

Elevando ao quadrado ambos os membros, segue que:

$$\Rightarrow 4A^2 = a^2b^2sen^2\hat{B} + 2abcd.sen\hat{B}sen\hat{D} + c^2d^2sen^2\hat{D}$$

Aplicando a relação (ii),

$$\Rightarrow 4A^2 \leq a^2b^2(1 - cos^2\hat{B}) + 2abcd.(1 + Cos\hat{B}.cos\hat{D}) + c^2d^2(1 - cos^2\hat{D})$$

$$\Rightarrow 4A^2 \leq a^2b^2 - a^2b^2cos^2\hat{B} + 2abcd + 2abcd.Cos\hat{B}.cos\hat{D} + c^2d^2 - c^2d^2cos^2\hat{D}$$

$$\Rightarrow 4A^2 \leq (ab + cd)^2 - (ab.cos\hat{B} - cd.cos\hat{D})^2$$

Aplicando a relação (i),

$$\Rightarrow 4A^2 \leq (ab + cd)^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow 4A^2 \leq \frac{4(ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2}{4}$$

$$\Rightarrow A^2 \leq \frac{[2(ab + cd) - a^2 - b^2 + c^2 + d^2].[2(ab + cd) + a^2 + b^2 - c^2 - d^2]}{16}$$

$$\Rightarrow A^2 \leq \frac{[2ab + 2cd - a^2 - b^2 + c^2 + d^2] \, . [2ab \ + \ 2cd + a^2 + b^2 - c^2 - d^2]}{16}$$

$$\Rightarrow A^2 \leq \frac{[(c+d)^2 - (a-b)^2] \, . [(a+b)^2 - (c-d)^2]}{16}$$

$$\Rightarrow A^2 \leq \frac{(c+d+b-a).(c+d+b+a).(a+b-c+d).(a+b+c-d)}{16}$$

Usando o fato de que $2p = a + b + c + d$, temos:

$$\Rightarrow A^2 \leq \frac{(2p-2a).(2p-2b).(2p-2c).(2p-2d)}{16}$$

$$\Rightarrow A^2 \leq \frac{2(p-a).2(p-b).2(p-c).2(p-d)}{16}$$

$$\Rightarrow A^2 \leq \frac{16(p-a).(p-b).(p-c).(p-d)}{16}$$

$$\Rightarrow A^2 \leq (p-a).(p-b).(p-c).(p-d)$$

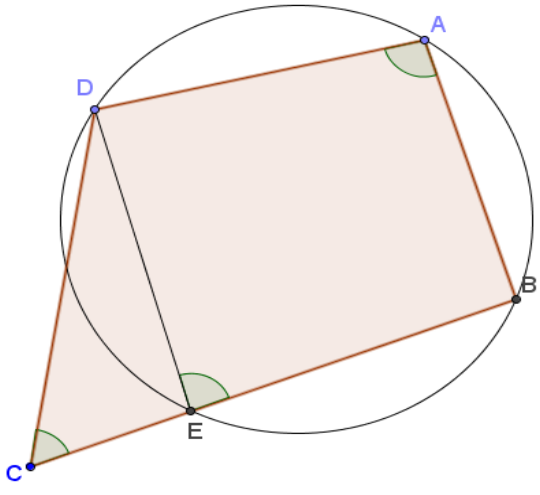
$$\Rightarrow A \leq \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

Logo, a área de qualquer quadrilátero convexo fica limitada por $\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$.

A igualdade ocorre quando $cos(\hat{B} + \hat{D}) = -1$, ou seja, quando $\hat{B} + \hat{D} = 180°$. Neste caso, observamos que o quadrilátero $ABCD$ é cíclico.

De fato, considerando o quadrilátero $ABCD$ com ângulos opostos suplementares, e o círculo γ que contém $B,\ A$ e D.

Supondo, por absurdo, que C está no exterior do círculo, então $\overline{BC} \cap \gamma \ = \ \{E\}$.



Considerando os ângulos $\hat{A}, \hat{C}$ e $\hat{E}$, como indicados na figura, temos $\hat{A} + \hat{C} = 180^o$, logo $\hat{A} + \hat{C} = 180° = \hat{A} + \hat{E} \Rightarrow \hat{C} = \hat{E}$. Absurdo, pois $\hat{E}$ é ângulo externo do triângulo DCE, logo é maior que $\hat{C}$. De modo análogo para C no interior do círculo. Logo C pertence a ɤ, e o quadrilátero ABCD é cíclico.

Portanto, a medida da área de um quadrilátero cíclico de lados com medidas a, b, c e d, cujo semiperímetro é denotado por p, é:

$$A = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

□

5 Considerações Finais

Nesse artigo, demonstramos alguns teoremas importantes relacionados a triângulos, visto que na maioria dos livros didáticos atuais não encontramos tais teoremas, nem cálculo das medidas de alturas, bissetrizes ou medianas de triângulos quaisquer, quanto mais suas demonstrações.

Visando sua aplicação em sala de aula, organizamos este material de modo que os conteúdos aqui abordados possam ser trabalhados inclusive no Ensino Fundamental, para que não fiquem restritos apenas a triângulos específicos.

Quando estendemos o estudo geométrico a um nível genérico, mostramos aos alunos a beleza da matemática aplicada à Geometria, além de aguçarmos sua curiosidade pelas generalizações de conceitos já vistos de forma restrita.

Referências

[1] ANGLIN, W.S. *Mathematics: A Concise History and Philosophy***.** New York, Springer Verlag, 1994.

[2] COXETER, H.S.M. *IntrodutionTo Geometry***,** John Wiley & Sons. New York,1961.

[3] DOLCE, Osvaldo; POMPEU, José N. *Fundamentos de Matemática Elementar, 9: geometria plana*. Ed. São Paulo: Atual, 2004.

[4]GARBI, Gilberto Geraldo.*C.Q.D.:explicações e demonstrações sobre conceitos, teorema e fórmulas essenciais da geometria*.Editora Livraria da Física. São Paulo, 2010.

[5] GERDES,Paulus. *Aventuras no Mundo dos Triângulos*,2ª edição.Lulu.com,2008.

[6] GUELLI,C.A.,IEZZI,G. e DOLCE,O.*Geometria Métrica*.Editora Moderna. São Paulo, [19--?].

[7]MOISE, Edwin E.*Geometria Moderna*.Editora Edgard BlucherLtda, São Paulo, 1975.

[8] MUNIZ NETO, A.C.: *Notas PROFMAT-Geometria I*, SBM, Rio de Janeiro, 2012.

[9] QUINTELLA,Ary.*Matemática para a quarta série ginasial*,54ª edição.CompanhiaEditora Nacional. São Paulo, 1963.