UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CCE - DMA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL
EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Equações Algébricas e os Números Complexos

MARCELO ÉZIO RODRIGUES
Orientadora: Profa. Dra. Maria Elenice Rodrigues Hernandes

Maringá-PR
Fevereiro de 2015

MARCELO ÉZIO RODRIGUES

Equações Algébricas e os Números Complexos

Trabalho de Conclusão de Curso em forma de dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.
Área de concentração: Álgebra.

Orientadora: Profa. Dra. Maria Elenice Rodrigues Hernandes

Maringá
Fevereiro de 2015

Equações Algébricas e os Números Complexos

Marcelo Ézio Rodrigues

Trabalho de Conclusão de Curso em forma de dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre.

COMISSÃO JULGADORA

Profa. Dra. Maria Elenice Rodrigues Hernandes - Orientadora
Universidade Estadual de Maringá (UEM)

Profa. Dra. Neuza Teramon
Universidade Estadual de Londrina (UEL)

Profa. Dra. Josiane Cristina de Oliveira Faria
Universidade Estadual de Maringá (UEM)

Aprovada em: 23 de fevereiro de 2015.
Local de defesa: Sala 107, Bloco F-67, *campus* da Universidade Estadual de Maringá.

Dedico este trabalho a todos que acreditaram e me apoiaram ao longo desses dois anos de estudos, em especial a minha esposa, pelo companherismo e pela compreensão.

Agradecimentos

$\mathcal{A}$o concluir este trabalho, agradeço principalmente a Deus pela força e perseverança.

$\mathcal{A}$ minha família, meus pais e meus irmãos pelo apoio e compreensão.

$\mathcal{A}$ minha esposa Roselaine por me apoiar, incentivar e por estar sempre junto comigo.

$\mathcal{A}$ todos os colegas do mestrado pelo companherismo.

$\mathcal{A}$ todos os professores pela sua dedicação e empenho, especialmente a minha orientadora Professora Dra. Maria Elenice Rodrigues Hernandes, pela orientação deste trabalho.

$\mathcal{A}$ CAPES, pelo fundamental apoio financeiro.

“Os grandes feitos são conseguidos não pela força,

mas pela perseverança.”

Samuel Johnson.

Resumo

Este trabalho trata essencialmente da relação entre as Equações Algébricas e os Números Complexos: sua história, sua importância no desenvolvimento da Ciência e suas aplicações. Descrevemos de forma sucinta a história das equações algébricas até 4º grau e a sua contribuição para o surgimento dos números complexos, narrativa esta que se fez necessária para justificar que foi a partir da impossibilidade de resolver algumas equações do 3º grau que este conjunto foi criado, fato este que não é abordado no ensino médio. Procuramos ressaltar os principais personagens para que essa conquista fosse possível, dentre eles, destacamos: Tartaglia, Cardano, Bombelli, Euler, Gauss, entre outros.

Apresentamos em seguida as principais propriedades referente aos números complexos e como o ensino dos números complexos, no ensino médio, é quase que exclusivamente realizado por meio de uma abordagem algébrica, procuramos fazer uma relação com a geometria, apresentando algumas aplicações dos números complexos à geometria euclidiana plana, fazendo assim, uma contraposição a essa visão estritamente algébrica. Mostramos também que os números complexos podem ser aplicados em outras áreas, como a física, por exemplo.

Acreditamos que uma abordagem histórica, conjuntamente com a algébrica e suas possíveis aplicações possam contribuir para uma aprendizagem efetiva sobre os números complexos, tema este que revolucionou o conhecimento científico.

Palavras chave: Equações algébricas, raízes de equações algébricas, números complexos.

Abstract

This work deals with the relations between the Algebraic Equations and the Complex Numbers: its history, its importance in the development of science and its applications. We describe briefly the history of the algebraic equations up to degree 4 and its contribution to the emergence of complex numbers, such narrative it was necessary in order to justify that it was from the impossibility of solving some equations of the third degree that this set was created, a fact that is not addressed in high school. We give a special approach of some of the main characters of this history: Tartaglia, Cardano, Bombelli, Euler, Gauss, and others.

In that follows we present the main properties of complex numbers and how the approach of this topic, in high school, is almost exclusively performed by means of an algebraic point of view, we established a relation with the geometry, presenting some applications of complex numbers to plane euclidean geometry, with a contraposition to the strictly algebraic vision. We also present that the complex numbers can be applied in the other areas such physics, for instance.

We believe that a historical and algebraic approach and their possible applications may contribute to effective learning about the complex numbers, a topic that has revolutionized scientific knowledge.

keywords: algebraic equations, roots of algebraic equations, complex numbers.

Sumário

Introdução

Neste trabalho vamos abordar as relações existentes entre os números complexos e as equações algébricas. Faremos um resgate histórico dos principais fatos e colaboradores, para oferecer o respaldo necessário à ideia que os números complexos surgiram para solucionar problemas relacionados as equações do terceiro grau e não às equações quadráticas.

Ao relatarmos essa história, poderemos observar o caminho percorrido por um conceito matemático fundamental, até ser entendido e aceito. A resistência por parte dos matemáticos para aceitar a existência dos números complexos mesmo quando já os utilizavam, levou alguns matemáticos a procurar maneiras de evitar seu uso e foram necessários muitos anos para que este novo conceito fosse plenamente compreendido.

Os números complexos começaram a aparecer durante o século XVI com os matemáticos italianos, quando ainda se discutia sobre os números negativos e irracionais, diferente do que às vezes se encontra em livros didáticos, que levam os alunos a pensar que os conjuntos numéricos evoluíram em uma ordem natural: naturais, inteiros, racionais, reais e só então complexos. Outra explicação muitas vezes repassada é de que os números complexos foram inventados para resolver as equações do segundo grau. É uma explicação historicamente errada, pois matemáticos da época não teriam meios para buscar raízes em um campo numérico desconhecido.

Desde a antiguidade, os matemáticos buscam encontrar soluções para as equações algébricas e até meados de 1650 d.C., por forte influência dos gregos, as únicas raízes consideradas eram as que correspondiam às grandezas geométricas ou físicas, interpretando comprimentos, áreas, volumes, massas, etc, ou seja, números que correspondem hoje aos reais positivos.

Os matemáticos árabes e hindus, entre eles Bhaskara, foram de suma importância na resolução de equações do 2º grau. Reconheciam que as equações eram satisfeitas por dois valores, mas consideravam apenas a resposta positiva, desconsideravam as raízes negativas classificando como falsas. As únicas exceções eram em problemas de contabilidade, onde as raízes negativas eram interpretadas como dívidas. Os árabes foram de suma importância para a evolução e preservação do conhecimento matemático algébrico durante a idade média. Deram origem a palavra álgebra que constava no livro de Abu-Abdullah Muhammed al Khwarizmi.

Por volta de 1700 a.C. os matemáticos babilônios já conheciam regras para resolver equações do 2º grau, resolviam problemas como determinar dois números conhecendo sua soma s e seu produto p os quais são as raízes da equação $x^2 - sx + p = 0$, e portanto era necessário resolvê-la. Os gregos aperfeiçoaram as regras para resolução dessas equações e através da geometria conseguiram obter raízes irracionais, em uma época que os números irracionais não eram ainda conhecidos.

No século XV, o matemático francês François Viète se destaca por suas contribuições à aritmética, álgebra, trigonometria e geometria. Viète contribuiu enormemente para uma renovação simbólica da matemática, rompendo com os métodos geométricos propostos por seus antecessores e aperfeiçoando a álgebra dos árabes e hindus, que era expressa por meio de palavras ou abreviações delas.

Ainda neste século, a renovação conhecida por Renascença teve seu epicentro localizado na Itália, época em que surgiram os gênios matemáticos Scipione del Ferro, Girolamo Cardano, Niccoló Tartaglia, Ludovico Ferrari e outros tão importantes para o desenvolvimento das equações do 3º e 4º graus. Cardano e Tartaglia foram os principais protagonistas da história das equações do terceiro grau. Mas, o que ocorreu com as equações do 2º grau, onde o método de resolução ficou conhecido como Fórmula de Bhaskara, se repetiu com as equações do 3º grau, em que o método ficou conhecido como Fórmula de Cardano. A história dos números complexos está intimamente ligada com a busca das soluções para equações do terceiro grau. Uma história que possui vários aspectos interessantes para estudo e discussão nas aulas de matemática. Mas de que maneira estes conceitos estão relacionados?

Na verdade, ao chegar à fórmula de resolução de equações do terceiro grau, obtida por Cardano e Tartaglia, poderíamos considerar que este problema estava vencido. Mas a fórmula para resolver equações do terceiro grau começou a levantar dúvidas sobre sua aplicação. Não era difícil encontrar exemplos em que deparavam com uma raiz quadrada de número negativo, ou seja, para utilizar a fórmula deveriam ultrapassar essa barreira. Cardano, em 1545, ao tentar resolver a cúbica $x^3 - 15x - 4 = 0$, a qual era conhecida a raiz $x = 4$, constatou que a fórmula de Cardano-Tartaglia levava a seguinte indeterminação: $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$. E mais ainda, a fórmula conduzia a apenas uma de suas três soluções. Os matemáticos da época tinham um problema realmente muito sério para resolver, pois quando obtinham uma raiz negativa para uma equação do 2º grau, simplesmente diziam que a solução não existia. Mas agora, temos uma equação do 3º grau cuja solução existe, mas de algum modo é necessário compreender a extração de raízes quadradas de números negativos.

Para solucionar esses problemas, os mais célebres matemáticos dos séculos XVII, XVIII e início do XIX, dentre eles destacamos Bombelli, Euler e Gauss, tiveram que revolucionar a matemática e criar o que hoje chamamos de números complexos.

Bombelli provou a insuficiência dos números reais, ou seja, que os números reais não eram suficientes para resolver algumas equações, mas foi Euler que dominou os números complexos e que em particular consolidou o famoso i para representar $\sqrt{-1}$. E no século XVIII, Gauss apresenta um dos resultados mais importantes da teoria das equações algébricas conhecido como o Teorema Fundamental da Álgebra.

Hoje os números complexos podem ser estudados tanto do ponto de vista algébrico como geométrico, proporcionando um grande avanço da matemática e de outras áreas como a física, por exemplo. Seu estudo complementa a formação do estudante do ensino médio, pois possui várias aplicações em outras ciências e uma estreita relação com a geometria e trigonometria. Como seu tratamento formal é bastante simples isto possibilita a realização de demonstrações de diversos teoremas.

A busca de informações sobre as equações algébricas, para embasar teoricamente o surgimento do conjunto dos números complexos e às diversas possibilidades de aplicações desses números, culminaram com a realização desse trabalho, cuja estrutura é a seguinte:

No primeiro capítulo, apresentaremos alguns fatos históricos sobre os primórdios das equações algébricas na antiguidade e apresentamos alguns métodos de resolução de equações do segundo grau, em diferentes períodos.

Já no segundo capítulo partiremos da história da busca de soluções para as equações algébricas do terceiro grau, que foram as protagonistas para o surgimento dos números complexos, destacando a contribuição de diversos matemáticos italianos.

No terceiro capítulo, introduzimos o conjunto dos números complexos, descrevendo suas principais propriedades e observando que este conjunto abstrato, quando visto como pares de pontos, possui uma interpretação geométrica muito interessante. O principal resultado deste capítulo é o Teorema Fundamental da Álgebra que tantos matemáticos prenunciaram, mas foi Gauss que, brilhantemente, conseguiu provar que toda equação polinomial com coeficientes complexos, possui suas raízes neste conjunto.

O quarto capítulo apresentará de modo sucinto algumas aplicações na geometria e na física, das inúmeras proporcionadas pelos números complexos.

No apêndice A trataremos da relação entre as equações do terceiro grau e a trigonometria, proposta pelo matemático francês François Viète. Já no apêndice B apresentaremos brevemente como os matemáticos italianos abordaram o problema de determinar raízes de equações do 4º grau.

Capítulo 1

Equações Algébricas

As equações algébricas constituem uma das áreas mais importantes da matemática, uma vez que diversos problemas recaem na busca de solução para uma dada equação algébrica. As equações foram surgindo através da necessidade do homem de realizar contagens, calcular impostos, medir áreas, construir monumentos ou obras de engenharia, e foram evoluindo através dos povos até chegar às equações que utilizamos nos dias de hoje. Estas equações despertam o interesse da humanidade desde a antiguidade, no qual citamos os babilônicos, gregos, árabes e hindus. Mas as equações não estão restritas à matemática, visto que muitas fórmulas da física, química, entre outras áreas, utilizam as equações para expressar suas relações. Por este motivo, quando resolvemos uma equação, a resposta pode não representar apenas um número, mas também uma grandeza física.

Conduziremos este trabalho a fim de fazer uma construção histórica das equações algébricas até a sua contribuição para o surgimento dos números complexos.

Neste capítulo, iniciamos apresentando um panorama histórico sobre os primórdios das equações algébricas na antiguidade e apresentamos alguns métodos de resolução de equações do segundo grau, em diferentes períodos.

As principais referências utilizadas nesta abordagem foram [7],[8] e [1].

1.1 Um pouco sobre a história das equações algébricas

Nesta seção vamos descrever sucintamente as contribuições dos babilônicos, gregos, árabes e hindus nos primórdios da busca de soluções para equações algébricas. E ao longo do trabalho relatamos fatos históricos para contextualizar a evolução deste problema até o surgimento dos números complexos.

Vamos assumir conhecidos os conjuntos dos números naturais, inteiros, racionais e reais denotados respectivamentes por $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$.

Uma equação **polinomial** ou **algébrica** é aquela dada por

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0,$$

com $a_i \in \mathbb{R}$ para todo $i \in \mathbb{N}$ e $a_n \neq 0$. Dizemos que n é o grau da equação. Por exemplo,

$$2x + 5 = \frac{10}{3},$$

$$x^2 - \frac{3}{4}x + \sqrt{5} = 0,$$

$$x^3 - \sqrt{2}x^2 + \sqrt[3]{10}x + 5 = 0$$

são todas equações algébricas do primeiro, segundo e terceiro grau, respectivamente. E as equações,

$$x^2 + x - 2^x = 10,$$

$$\text{sen}^2 x + cos^2 x = 1,$$

$$\ln x = \exp^{-x} + \pi$$

não são equações algébricas.

1.2 Babilônios

Os babilônios foram um dos povos que habitaram a região da Mesopotâmia, palavra de origem grega que significa “terra entre rios”. Essa região localiza-se entre os rios Tigre e Eufrates no Oriente Médio, onde atualmente é o Iraque. Vários povos habitaram essa região entre os séculos V e I a.C., dentre eles destacamos: babilônios, assírios, sumérios, caldeus, amoritas e acádios.

A Babilônia foi uma cidade-Estado acadiana na Mesopotâmia, cujas ruínas são encontradas na atual cidade de Al Hillah, na província Babil, atual Iraque, cerca de 85 km ao sul de Bagdá. Uma grande contribuição dos súmerios foi o desenvolvimento da escrita cuneiforme, por volta de 4000 a.C.. Eles usavam placas de barro, onde cunhavam esta escrita.

Os escribas registraram durante muitos séculos a história e as transações comerciais dos mesopotâmicos e egípcios, e ao descreverem estes relatos precisavam realizar cálculos matemáticos. Deste modo tiveram de acrescentar à escrita os símbolos matemáticos. Os mais antigos documentos contendo registros numéricos datam do século IV a.C., mas ainda não traziam operações feitas com números. Estes registros somente foram encontrados em tabletes sumérios de 2200 a.C., utilizando um sistema de numeração sexagesimal e escrita cuneiforme. Os sumérios foram conquistados pelos acádios no final do III milênio a.C. e seus sucessores estabeleceram o chamado Império Babilônico. Um tablete Babilônico de cerca de 1700 a.C. foi encontrado no século XIX e fazia referência a vários conceitos matemáticos, como relações no triângulo retângulo, equações do primeiro e segundo graus, áreas, volumes e cálculos com grande precisão de $\sqrt{2}$.

Os mais famosos documentos matemáticos que venceram o tempo e chegaram aos dias de hoje são o *Papiro de Ahmes* (ou de Rhind) de 1650 a.C. e o *Papiro de Moscou* de 1850 a.C.. Neles estão descritos problemas de aritmética e geometria, demonstrando um conhecimento avançado para a época. Os documentos desta época não apresentavam a simbologia que utilizamos hoje, eram expressos através de palavras as quais hoje chamamos de álgebra retórica, mas podemos creditar aos egípcios a criação dos símbolos da soma e da subtração. Um dos problemas encontrados no *Papiro de Ahmes* é o seguinte: uma quantidade somada a seus dois terços, mais sua metade e mais sua sétima parte perfaz trinta e três. Qual é esta quantidade? Utilizando os símbolos atuais podemos escrever a seguinte equação:

$$x + \frac{2x}{3} + \frac{x}{2} + \frac{x}{7} = 33$$

que é uma equação do primeiro grau. Como exemplo de resolução de problema através da Algebra Retórica citamos os egípcios que utilizavam a **Regra da Falsa Posição** para responder seus problemas, um método um tanto trabalhoso em relação aos utilizados hoje. Vamos descrevê-lo através de um exemplo.

Exemplo 1.2.1 *Qual número que somado com sua quarta parte tem resultado 10?*

Pela regra da Falsa Posição, fazia-se uma tentativa inicial qualquer a respeito do número procurado e verificava-se o que acontecia. É claro que esta hipótese inicial deveria ser conveniente e dependia da sensibilidade do matemático. Para o exemplo acima vamos supor que o número procurado é 4*, somado com sua quarta parte teremos* $4 + 1 = 5$*, exatamente a metade de 10 que é o resultado. Portanto, o número procurado é o dobro de 4, ou seja, 8.*

Neste mesmo período, os babilônios já manipulavam operações algébricas e resolviam equações do 2º grau completas pelo método de completamento de quadrado, pois algumas fórmulas de fatoração já eram bem conhecidas.

1.3 Gregos

O Egito e a Mesopotâmia foram fontes de conhecimento para os matemáticos europeus. Os gregos entraram em contato com o Oriente Médio e reconheceram a utilidade da geometria, palavra de origem grega, que significa medida da terra. O primeiro matemático grego foi Tales de Mileto (circa 640 a.C. - 540 a.C.), da cidade Jônia de Mileto, colônia grega hoje em território turco. Devemos a ele a primeira e profunda transformação pela qual passou o pensamento matemático desde que o homem aprendeu a contar. A partir de Tales as verdades matemáticas começaram a ser demonstradas.

Os gregos desenvolveram uma visão geométrica dentro da álgebra. Para mostrar, por exemplo, a identidade

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

representavam $(a+b)^2$ como a área de um quadrado de lados $a+b$ (Figura 1.1). Para mais detalhes ver [19].

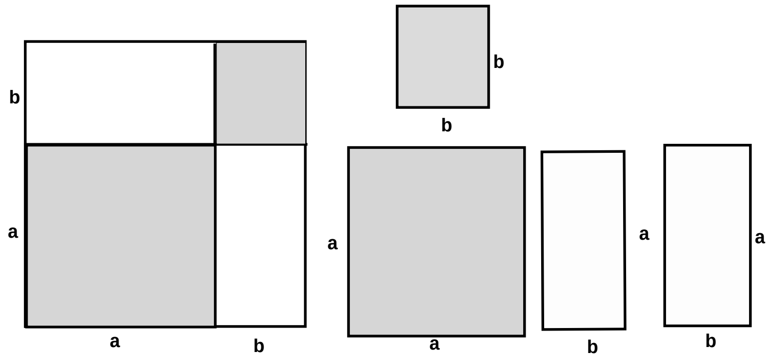

Figura 1.1: Quadrado de lado a+b

Veja que esta resolução ilustra bem o significado do método de completar quadrados.

Outro famoso matemático grego nascido na ilha de Samos, poucas décadas depois, foi Pitágoras (586 a.C.?-500 a.C.?), que demonstrou o teorema dos triângulos retângulos, hoje conhecido como Teorema de Pitágoras. Esta relação já era conhecida pelos chineses, egípcios e babilônios, mas foi Pitágoras o primeiro a provar tal resultado. A relação demonstrada por Pitágoras é que, em um triângulo retângulo, se a é a medida da hipotenusa e b e c são as medidas dos catetos então

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Esta foi a primeira vez a se utilizar uma equação do segundo grau na Europa, o que ocorreu bem mais tarde que os babilônios. Os pitagóricos obtiveram importantes resultados também na Aritmética, como progressões aritméticas e a soma dos quadrados de números naturais. Após Tales e Pitágoras, as descobertas na matemática avançaram rapidamente com muitos matemáticos de destaque, pois os gregos tiveram sua auto-estima engrandecida com as vitórias sobre o Império Persa em 490 a.C. e 480 a.C.. Em 338 a.C., Filipe II, da Macedônia, passou a controlar a maior parte do mundo grego. Com sua morte em 336 a.C., seu filho Alexandre de 20 anos passou a reinar e se sagrou o maior general de todos os tempos. Alexandre conquistou o Império Persa e chegou até o norte da Índia. Em 332 a.C. conquistou o Egito, fundou no delta do Nilo a cidade chamada de Alexandria. Após sua morte seu reino foi dividido em três partes, ficando o Egito sob o regime do general Ptolomeu I, o qual fundou a Universidade de Alexandria. Foi nesta universidade, por volta de 300 a.C., que surgiu um gênio, chamado Euclides, que se encarregou de sistematizar todo o conhecimento matemático da época, em uma obra conhecida como *Elementos*. Obra composta por 13 livros, neles os conhecimentos de geometria elementar foram descritos de forma rigorosa e dedutiva. Pelo fato de não terem um sistema adequado de numeração, os gregos não avançaram tanto em Aritmética como em Geometria, mas Euclides demonstrou importantes teoremas da Teoria dos Números, introduzindo os conceitos que se tornariam fundamentais para a resolução de equações. Nos *Elementos*, enunciou os cinco postulados de natureza geométrica e as cinco noções comuns. As noções comuns enunciadas por Euclides foram:

1) Coisas iguais a uma terceira são iguais entre si.

2) Se iguais forem somados a iguais, os resultados serão iguais.

3) Se iguais forem subtraídos de iguais, os resultados serão iguais.

4) Coisas coincidentes são iguais entre si.

5) O todo é maior do que a parte.

   Podemos aceitar uma sexta verdade, embora esta não tenha sido demonstrada por Euclides:

6) Iguais multiplicados ou divididos por iguais continuam iguais.

Estavam enunciados os conceitos principais para as soluções das equações do primeiro grau. Dada a equação $4x + 5 = 25$, pela noção 3, se subtrairmos 5 em ambos os membros, a igualdade não irá se alterar. Logo,

$$4x + 5 - 5 = 25 - 5 \Rightarrow 4x = 20.$$

Utilizando a noção 6, se dividirmos os dois lados por 4, a igualdade se preserva. Assim temos,

$$\frac{4x}{4} = \frac{20}{4} \Rightarrow x = 5.$$

Utilizando as noções acima temos um método prático para a resolução de equações do 1^{o} grau, sem a necessidade do método da falsa posição. Esclarecemos também que quando resolvemos uma equação de maneira mecânica e dizemos que um número, quando troca de lado da igualdade, ele troca de sinal, é uma verdade aparente que está firmada nas noções idealizadas por Euclides.

Os gregos resolveram também equações do segundo grau utilizando noções de geometria, encontrando as soluções com auxílio de régua e compasso. Depois de Euclides, outros matemáticos de grande importância passaram pela universidade de Alexandria: Aristarco (310 a.C.-230 a.C.), Arquimedes (287 a.C.-212 a.C.), o maior gênio da Antiguidade e um dos três maiores de todos os tempos, Eratóstenes (274 a.C.-194 a.C.), Apolônio (262 a.C.-190 a.C.) e Hiparco (180 a.C.-125 a.C.), o criador da trigonometria.

Após a conquista do Egito por Roma, o desempenho da universidade foi abalado, e a escola de Alexandria continuou a existir por mais dois séculos. No entanto com a tomada dos bárbaros, a Europa entrou na Idade das trevas, e a arte da matemática passou a ser revelada por outros povos: os árabes e os hindus.

1.4 Árabes e Hindus

O mundo apresentava grandes turbulências nos primeiros séculos depois de Cristo. O Império Romano começou a ruir no final do século II e foi conquistado pelos bárbaros. As guerras tomaram conta e pouco sobrava para as criações científicas. Em 395 Roma foi dividida em duas partes: ocidental e oriental. A cultura acumulada sobreviveu apenas no lado oriental que ainda resistiu por séculos. O Egito caiu em 641, tomado pelos árabes, e mais de 600.000 manuscristos se perderam. No reinado do califa al-Mansur (754-775), que desejou construir uma nova Alexandria, ele atraiu sábios de várias regiões, e assim o progresso cultural voltou. Os árabes tiveram acesso ao sistema indiano de numeração e contribuíram para sua divulgação. Harum al-Rashid que reinou de 786 a 809, e seu filho que reinou entre 813 e 833, foram de suma importância para a tradução dos manuscritos gregos para a língua árabe. Assim foram salvas as obras de Euclides, Arquimedes, Apolônio, Cláudio Ptolomeu e outros grandes matemáticos. Fonte para a Europa reencontrar os ensinamentos matemáticos perdidos.

Um dos matemáticos importantes para o desenvolvimento da Álgebra foi Abu-Abdullah Muham-med ibn-Musa al-Khwarizmi (783-850), de quem herdamos as palavras algarismo e algoritmo, derivadas de seu nome, e a palavra álgebra. Escreveu o livro *Al-Kitab al-jabr wa'l Muqabalag* sobre equações, no qual empregou a palavra Al-jabr para designar operações como, por exemplo, $x - 10 = 5$ implica $x = 15$, significando uma restauração de $x - 10$ de modo a tornar-se a incógnita completa x, nascendo assim a palavra álgebra.

A preocupação com a compreensão de seu leitor fez com que Al-khwarizmi simplificasse a simbologia e popularizasse o sistema hindu de numeração, exercendo grande influência na Europa e mais tarde no mundo todo.

Muito antes do Império Mulçumano, os hindus já desenvolviam matemática de qualidade. Por volta de 250 a.C., durante o reinado do imperador Açoka, patrocinador do Budismo, eles começaram a usar os símbolos numéricos dos quais descendem os algarismos utilizados até hoje. Por volta do século V d.C., o sistema passou a contar com os dez símbolos, entre eles o zero, denominado sunya, que significa vazio, vácuo.

A Índia contribuiu com grandes matemáticos, entre eles: Varahamihira (circa 505); Brahmagupta (circa 630) e Bhaskara (1114-1185). Este último é lembrado até hoje pela contribuição na resolução de equações do segundo grau e é relacionado à Fórmula de Bhaskara.

Mas será que a fórmula utilizada nos dias de hoje pode ser creditada ao matemático hindu Bhaskara? Lembramos que a matemática da época não utilizava a álgebra necessária para tal fato. Em seu livro *Lilavati* era utilizado apenas estilo poético de elementos do cotidiano, dando continuidade aos problemas propostos por seus conterrâneos Brahmagupta, Shidara (991-?) e Aryabhata. Utilizavam linguagem verbal para apresentar os problemas e linguagem sincopada para resolver as equações.

A maioria dos livros textos de matemática do ensino fundamental apresenta a fórmula para resolução de equações do 2º grau como sendo do matemático hindu Bhaskara, e durante o ensino médio essa informação é reforçada, trazendo na bagagem que o conjunto dos números complexos foi criado para solucionar as equações do 2º grau. Essas duas afirmações são inadequadas, além de serem, provavelmente, uma prática apenas brasileira. O hábito de dar nome de Bhaskara à fórmula de resolução da equação do 2º grau se estabeleceu no Brasil por volta de 1960. Além disso, até cerca de 1650, as raízes eram divididas em verdadeiras (que correspondem hoje aos reais positivos) e falsas (que correspondem hoje aos reais negativos e não eram consideradas como legítimas), assim por que alguém iria buscar raízes num campo numérico desconhecido.

Os hindus utilizavam um método de completar quadrados para resolver equações do 2º grau, aceitavam a existência de raízes reais e negativas, e também que as equações de 2º grau com raízes reais têm duas raízes. Mesmo que tal aceitação tenha sido mais por falta da formalização destes conceitos (que eram muito abstratos), muito se avançou a partir desta aceitação.

No século IX, o matemático árabe Al-Khwarizmi resolveu alguns tipos de equações quadráticas por completamento de quadrados, justificando geometricamente os resultados, assim como os hindus, representando os termos da equação por quadrados e retângulos e completando o quadrado maior. Considerando que a fórmula atual de resolução das equações do 2º grau é obtida por meio de uma generalização de um método de completar quadrados, e como gregos, árabes e hindus utilizaram tal método em suas resoluções, parece razoável que a autoria de tal fórmula pudesse a eles ser atribuída.

Exemplo 1.4.1 *Dada a equação* $x^2 + 8x = 9$*, vamos encontrar geometricamente a solução positiva da mesma.*

Seja x *a medida do lado de um quadrado, logo sua área irá representar o termo* x^2*, e quatro retângulos de comprimento* x *e largura 2 irão representar o termo* $8x$*, conforme*

Figura (1.2).

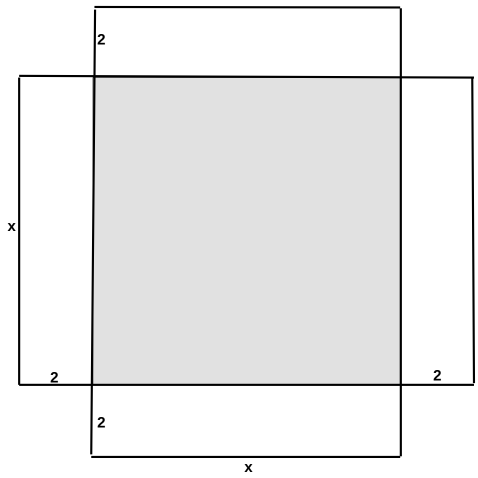

Figura 1.2: Área$= x^2 + 4(2x) = x^2 + 8x$

Temos então uma figura cuja área é 9 pois, $x^2 + 8x = 9$*. Para completar o quadrado, devemos adicionar mais quatro quadrados de lado 2, conforme Figura (1.3).*

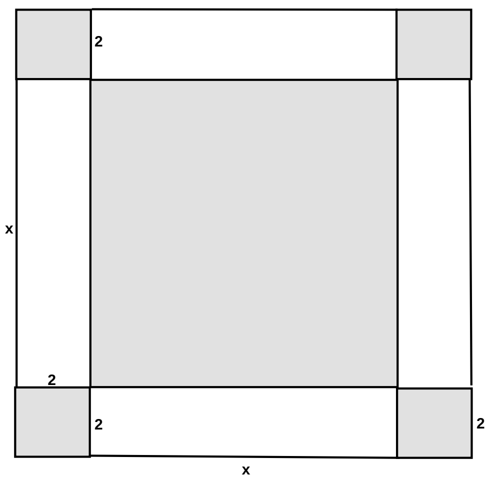

Figura 1.3: Área$= 9 + 4(4) = 25$

Temos então um quadrado de área 25, assim o lado do quadrado maior é 5. Portanto, da Figura (1.3) segue que $x = 5 - 2(2) = 5 - 4 = 1$*, ou seja, a raiz positiva da equação* $x^2 + 8x = 9$ *é* $x = 1$*. Nos métodos mais atuais teríamos que* $x = -9$ *também é solução, mas esta seria descartada nesta abordagem.*

1.5 Resolução de Equações do 2º Grau

Nesta seção vamos apresentar alguns métodos de resoluções de equações do 2º grau (ver [1] e [4].

1) Soma e Produto

Problemas que recaem numa equação quadrática estão entre os mais antigos da matemática. Em textos cuneiformes, escritos pelos babilônios há 4 mil anos atrás, podemos encontrar questões do tipo:

Questão 1.5.1 *Encontrar dois números conhecendo sua soma s e seu produto p.*

Em termos geométricos, precisamos determinar os lados de um retângulo conhecendo sua área p e a metade do seu perímetro s.

Seja um retângulo de comprimento x e largura y. Sabemos que $s = x + y$ e $p = x \cdot y$ logo, podemos escrever as seguintes relações

$$2s = x + x + y + y \quad e \quad p = x \cdot y.$$

Como $y = s - x$, substituindo y em $p = x.y$, teremos:

$$p = x(s - x) \Rightarrow p = xs - x^2 \Rightarrow x^2 - sx + p = 0.$$

Ou seja, um dos números procurados são as raízes da equação do 2º grau

$$x^2 - sx + p = 0.$$

Afirmação 1.5.2 *Se $m \in \mathbb{R}$ for raiz de $x^2 - sx + p = 0$ então $n = s - m$ também será raiz.*

Demonstração: Temos que

$$\begin{aligned} n^2 - sn + p &= (s-m)^2 - s(s-m) + p = s^2 - 2sm + m^2 - s^2 + sm + p \\ &= m^2 - sm + p = 0. \end{aligned}$$

■

Determinar as soluções da equação $x^2 - sx + p = 0$ foi objeto de estudo há milhares de anos. Até o fim do século 16, as resoluções eram feitas através de receitas, pois os coeficientes de uma equação não eram representados por letras (ver [11] para mais detalhes). Isto somente começou a ser feito pelo matemático francês Viète e será tratado no próximo tópico.

Os babilônios tinham a sua maneira para encontrar dois números conhecendo a soma e o produto entre eles. Enunciavam a seguinte regra: *Eleve ao quadrado a metade da soma,* *subtraia o produto e extraia a raiz quadrada da diferença. Some ao resultado a metade da soma. Isso dará o maior dos números procurados. Subtrai-o da soma para obter o outro número.*

Utilizando as notações atuais, podemos escrever

$$x = \frac{s}{2} + \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p}$$

e

$$s - x = \frac{s}{2} - \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p},$$

em que s representa a soma e p representa o produto. Sabemos que os números procurados são as raízes da equação $x^2 - sx + p = 0$.

Não foram encontrados registros da demonstração original, apenas indícios de que poderiam ser os seguintes argumentos que levaram a construção da regra acima:

Sejam m e n os números procurados na Questão (1.5.1), com $m \leqslant n$, por conveniência.

Os números m e n são equidistantes da média aritmética, pois conhecemos sua soma s, assim $\frac{s}{2} = \frac{m+n}{2}$. Se conhecermos a diferença $d = n - \frac{s}{2} = \frac{s}{2} - m$ teremos $m = \frac{s}{2} - d$ e $n = \frac{s}{2} + d$. Substituindo m e n em $p = m \cdot n$, teremos

$$p = \left(\frac{s}{2} - d\right)\left(\frac{s}{2} + d\right) = \left(\frac{s}{2}\right)^2 - d^2$$

assim

$$d^2 = \left(\frac{s}{2}\right)^2 - p \Rightarrow d = \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p},$$

já que como $m \leq n$ temos que $d \geq 0$.

Logo,

$$n = \frac{s}{2} + d = \frac{s}{2} + \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p} \quad \text{e} \quad m = \frac{s}{2} - d = \frac{s}{2} - \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p}.$$

Exemplo 1.5.3 *Gustavo tem um alambrado suficiente para fazer* $24m$ *de cerca. Ele pretende cercar um terreno retangular de* $32m^2$ *de área. Isso é possível? Quais serão as dimensões do terreno cercado?*

Sejam x *e* y *as dimensões procuradas. Logo,* $2x + 2y = 24$ *o que implica* $x + y = 12$ *e* $x \cdot y = 32$*. Fazendo* $y = 12 - x$ *e substituindo na outra equação teremos,*

$$x \cdot (12 - x) = 32 \Rightarrow 12x - x^2 - 32 = 0 \Rightarrow x^2 - 12x + 32 = 0.$$

Nesta situação temos, $a = 1$, $b = -12$ *e* $c = 32$. *Pela regra da soma e o produto os números procurados são:* $x = 4$ *e* $y = 8$ *ou* $x = 8$ *e* $y = 4$. *Logo, para* $x = 4$ *teremos* $y = 8$ *e para* $x = 8$ *teremos* $y = 4$. *Portanto, é possível cercar o terreno com as medidas indicadas e o mesmo terá medidas de* $8m$ *por* $4m$.

2) Completamento de quadrados

Qualquer equação completa do 2º grau, após operações algébricas, pode ser transformada em uma das formas particulares consideradas pelos matemáticos hindus ou árabes. Embora seja bastante conhecida sua dedução, vamos obter a fórmula de resolução de equações do 2º grau a partir de algumas transformações algébricas seguindo as orientações mencionadas por Bhaskara em sua obra *Vijaganita*.

Dada a equação genérica $ax^2 + bx + c = 0$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, vamos completar o quadrado obtendo um trinômio quadrado perfeito. Supondo o caso mais geral, somemos $-c$ a ambos os lados da equação, obtendo

$$ax^2 + bx = -c.$$

Dividindo os dois lados da equação por a, já que $a \neq 0$, teremos

$$x^2 + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a}.$$

Somemos, o termo $\frac{b^2}{4a^2}$ a ambos os membros:

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}.$$

Chegamos, afinal, a um quadrado perfeito no 1º membro,

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Como $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0$ e $4a^2 \geq 0$, a resolução de $ax^2 + bx + c = 0$ em $\mathbb{R}$ depende do sinal de $b^2 - 4ac$, chamado por isso, de discriminante da equação do 2º grau.

Se $b^2 - 4ac \geqslant 0$ temos

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}.$$

Logo

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2|a|},$$

pois $\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & \text{se} \quad a \geq 0 \\ -a & \text{se} \quad a \leq 0 \end{cases}$, logo em ambos os casos temos a conhecida fórmula

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a},$$

onde $\Delta = b^2 - 4ac$.

Exemplo 1.5.4 *Utilizando o mesmo Exemplo (1.5.3), queremos encontrar a solução para a equação $x^2 - 12x + 32 = 0$ e pela fórmula acima*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{12 \pm \sqrt{16}}{2} = 6 \pm 2.$$

Logo, $x = 8$ e $y = 4$ são as dimensões procuradas.

Relacionando a equação $x^2 - sx + p = 0$ com a equação do 2º grau na forma geral $ax^2 + bx + c = 0$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, teremos $a = 1$, $b = -s$ e $c = p$.

Sejam x_1 e x_2 as raízes da equação $x^2 - sx + p = 0$, logo

$$x_1 + x_2 = s \quad \text{e} \quad x_1 \cdot x_2 = p \Rightarrow x_1 + x_2 = -b \quad \text{e} \quad x_1 \cdot x_2 = c.$$

Mas, e quando $a \neq 1$?

Vamos demonstrar que $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ e $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

De fato, sejam $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, com $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$. Assim

$$\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{b^2 + b\sqrt{\Delta} - b\sqrt{\Delta} - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} \\ &= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}. \end{aligned}$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-b + \sqrt{\Delta} - b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}. \end{aligned}$$

Portanto, utilizando essas expressões podemos determinar as raízes de uma equação do 2º grau sem aplicar fórmulas, respeitando a formação dessa equação com base na soma e no produto das raízes. Essas relações podem ser empregadas mesmo que estejamos trabalhando com uma equação do 2° grau incompleta.

3) Método de Viète

Como vimos, a álgebra dos árabes e hindus era expressa por meio de palavras ou de abreviações de palavras. O processo de construção de uma simbologia algébrica, adequada ao trabalho com equações gerais, foi longo. Entre os matemáticos que se destacaram nessa construção podemos citar o matemático francês François Viète que nasceu em Fontenay (1540-1603). Na sua juventude, estudou e exerceu Direito, não sendo portanto um matemático por profissão, mas fez contribuições importantes à aritmética, álgebra, trigonometria e geometria. Todavia foi em Álgebra que ocorreram suas mais importantes contribuições. Viète utilizou vogal para representar uma quantidade desconhecida e uma consoante para representar uma quantidade conhecida. Como a resolução de equações já havia sido estudada e aperfeiçoada pelos árabes, Viète contribuiu para a renovação simbólica rompendo com os métodos geométricos propostos por seus antecessores. Não avançou mais, pois não aceitava coeficientes ou raízes negativas. Para mais detalhes ver, por exemplo, [1].

Para resolver a equação $x^2 + 2ax = b,\ com\ a, b \in \mathbb{R}, a > 0\ e\ b \geq 0$, Viète propõe uma substituição de variáveis, o que implica nas transformações da equação inicial em uma equação incompleta. Os passos, por ele dados, em linguagem atual seriam: seja $x + a = u$ onde u é uma incógnita auxiliar, então

$$u^2 = x^2 + 2ax + a^2.$$

Como $x^2 + 2ax = b$ então temos $u^2 = b + a^2$. Mas, $u = x + a$ então $(x + a)^2 = b + a^2$. Recorde que Viète não aceitava coeficientes nem raízes negativas. Deste modo

$$x + a = \sqrt{b + a^2} \Rightarrow x = \sqrt{b + a^2} - a.$$

Para resolver uma equação na forma geral o método de Viète seria:

Seja $ax^2 + bx + c = 0,\ com\ a, b, c \in \mathbb{R}, a > 0\ e\ b, c \geq 0$. Fazendo-se $x = u + v$, onde $u\ e\ v$ são incógnitas auxiliares, e substituindo na equação, temos

$$a(u + v)^2 + b(u + v) + c = 0$$

$$\Rightarrow a(u^2 + 2uv + v^2) + b(u + v) + c = 0.$$

Reescrevendo a igualdade como uma equação cuja incógnita é v, teremos

$$av^2 + (2au + b)v + au^2 + bu + c = 0.$$

Como queremos transformar a equação acima em uma equação incompleta do 2º grau, devemos ter $2au + b = 0$, ou seja, $u = \frac{-b}{2a}$ para anular o coeficiente de v. Logo, substituindo na equação acima teremos

$$av^2 + a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = 0.$$

Efetuando as operações ficaremos com

$$v^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Se $b^2 - 4ac \geq 0$ então

$$v = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Mas, como $x = u + v$ temos,

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

que é a fórmula de resolução de equações do 2º grau.

Após os novos elementos propostos por Viète, muitas mudanças ocorreriam na simbologia. Até que uma certa uniformidade fosse aceita, vários matemáticos apresentaram contribuições para chegarmos a álgebra de hoje. Podemos destacar o inglês Thomas Harriot e o filósofo francês René Descartes.

Observação 1.5.5 *Como os dados dos problemas eram sempre números positivos, por exemplo s e p que representavam a soma e o produto das medidas dos lados de um retângulo, os matemáticos não tinham a preocupação com eventuais soluções negativas fornecidas por suas regras. Mas com certeza ocorreram situações em que extrair raiz quadrada de números negativos se fez necessária para a resolução do problema, como no exemplo seguinte:*

Exemplo 1.5.6 *Encontrar dois números em que a soma e o produto são exatamente iguais a dois.*

Sejam, x e y os números procurados. Logo, $x + y = 2$ e $xy = 2$. Substituindo $y = 2 - x$ na equação $xy = 2$, teremos, $-x^2 + 2x - 2 = 0$, cujas raízes são,

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{-2}.$$

Situações como essas não levaram a criação de um novo conjunto numérico, que hoje conhecemos por números complexos. Em casos assim diziam simplesmente que os números procurados não existiam. Este argumento para os números reais é absolutamente correto. Os números complexos só viriam a aparecer no século XVI, com a resolução de equações do 3º grau, as quais, em muitos casos, a resolução através da fórmula fornecia as raízes por meio de uma expressão contendo raízes quadradas de números negativos.

Capítulo 2

Equações Algébricas do Terceiro Grau

Neste capítulo vamos descrever um pouco da história da busca de soluções para as equações algébricas do terceiro grau, que foram as protagonistas para o surgimento dos números complexos.

Pode-se pensar que o tema equações algébricas de grau maior ou igual a 3 são problemas que não interessam ao público dos ensinos básico e médio. Todavia uma série de problemas interessantes e simples do nosso dia-a-dia recaem no problema de resolver equações polinomiais. José Paulo Q. Carneiro, em [4], apresenta alguns desses problemas, e abaixo reproduzimos um deles. Consideremos a seguinte situação problema:

É possível construir um reservatório em forma de um prisma reto de base quadrada, com capacidade de 2000 litros, usando para paredes, fundo e tampa, $20m^2$ de um certo material? Quais devem ser as dimensões do reservatório?

Sejam x a medida da base e y a altura do prisma. Como o total do material a ser utilizado é $20m^2$, $2x^2$ é a área da base somada com a área da tampa e temos 4 vezes a área de cada parede que é dada por xy. Obtemos

$$2x^2 + 4xy = 20 \Rightarrow y = \tfrac{10-x^2}{2x} \ .$$

Sabendo que $2000l = 2m^3$, temos que o volume do prisma é $x^2y = 2$. Substituindo o valor de y em $x^2y = 2$, teremos

$$x^2(\tfrac{10-x^2}{2x}) = 2 \Rightarrow 10x - x^3 = 4 \Rightarrow x^3 - 10x + 4 = 0 \ .$$

O exemplo acima nos conduziu a uma equação do terceiro grau. São inúmeras as situações em que resolver equações do terceiro grau se fazem necessárias para encontrar a solução de um dado problema. É neste contexto que veremos a evolução da matemática na busca de soluções para equações algébricas de grau 3, cujo substancial avanço ocorreu com os trabalhos de vários matemáticos italianos do século XVI, os quais destacamos: Cardano, Tartaglia, Ferrari, Bombelli, entre outros. Ao longo deste capítulo vamos descrever a contribuição de cada um deles neste assunto. As principais referências deste capítulo são [3], [8], [13], [14] e [15].

2.1 A Álgebra na Itália

O ocidente volta ao cenário com Gerbert d'Aurillac (950-1003), um francês que estudou na Espanha mulçumana por volta de 970, se familiarizou com a Astronomia e a Matemática dos árabes, em especial ao sistema de numeração por eles utilizado. De volta a Europa, tentou introduzir o novo sistema de numeração. Sob o nome de Silvestre II, foi nomeado Papa da Igreja Católica em Roma, e dessa privilegiada posição conseguiu colocar o assunto dos números em discussão. Mas, foi Adelard of Bath (1075-1160), um filósofo inglês que, ao viajar por vários países mulçumanos, conseguiu contrabandear e traduzir para o latim uma cópia dos Elementos de Euclides em árabe, colocando a Inglaterra em contato com a matemática grega e o sistema de numeração dos árabes.

Após as cruzadas que mobilizaram milhões de pessoas, os séculos XII e XIII foram um período de marcantes acontecimentos na Europa. Surgiram as primeiras universidades, e foi nesta época que viveu o maior matemático europeu da Idade Média: Leonardo de Pisa (1175-1250), conhecido também como Leonardo Fibonacci, que nasceu em Pisa e passou parte da juventude no norte da África, onde conheceu a cultura árabe. Se convenceu de que o método indo-arábico era melhor que os outros sistemas e passou a se dedicar para transmitir tal conhecimento a seus compatriotas italianos. Escreveu a obra *Liber Abaci* em 1202, sua primeira obra e descreveu o sistema numérico dos árabes. Sua obra teve ampla aceitação na Itália, e os números romanos começavam a deixar o palco para o sistema de numeração decimal.

Leonardo contribuiu para a construção da simbologia algébrica. As equações, que eram até então escritas utilizando muitas palavras, começaram a avançar para uma escrita mais moderna e prática. As palavras *res* e *radix* foram introduzidas para representar a incógnita, enquanto termos *census* e *cubus* representavam, respectivamente, seu quadrado e seu cubo, e *aequalis*, para representar a igualdade. Ainda empregou a letra R para indicar raiz quadrada e foi um dos primeiros a utilizar o traço horizontal para grafar as frações.

Com sua reputação alavancada por seus feitos, em 1225 Leonardo teve seus conhecimentos testados pelo Imperador Frederico II. Um dos problemas propostos para Leonardo foi o seguinte: encontrar, pelos métodos Euclideanos, um segmento x que satisfizesse a equação

$$x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0.$$

Leonardo provou que o problema não poderia ser resolvido com régua e compasso, instrumentos utilizados pelos Euclideanos, mas deu uma solução numérica aproximada, correta até a nona casa decimal: 1,3688081075.

Mais uma vez as equações do 3º grau desafiavam os matemáticos, que jamais se conformavam com problemas sem solução. As obras de Leonardo foram importantíssimas pois inspiraram muitos outros matemáticos.

Depois de Leonardo, a Itália teve a honra de conhecer Luca Paciolo (também conhecido por Pacioli) que nasceu em 1445, na mesma época em que Johannes Gutenberg (1398-1468) inventava a imprensa na Alemanha, tornando possível a multiplicação e divulgação dos livros. Fra (frei) Luca Paciolo foi o matemático responsável pela síntese do conhecimento matemático acumulado na Europa. Sua obra foi publicada em 1494, em Veneza, sob o título *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalita*, motivando inúmeros matemáticos. Teve contribuições para introdução de mais alguns símbolos na álgebra: incógnita foi chamada de *cosa*, depois abreviada para *co.* Quadrado e cubo foram denominados censo e cubo e depois abreviadas para ce. e cu., respectivamente.

Luca Paciolo cometeu alguns erros em seus trabalhos, um deles foi declarar que a solução das equações do terceiro grau era tão impossíveis quanto a quadratura do círculo. Estas afirmações foram verificadas e consideradas falsas poucas décadas depois, por dois matemáticos italianos, que tiveram suma importância para a resolução de equações do terceiro grau: Tartaglia e Cardano.

2.2 Cardano e Tartaglia

A história das equações do terceiro grau é marcada pela disputa entre dois gênios da matemática do século XVI, Cardano e Tartaglia. Um dos pensonagens dessa história é Niccolò Fontana que nasceu em Brescia na Itália (1499 ou 1500-1557). Em 1512 quando os franceses saquearam a cidade de Brescia, Niccolò foi ferido no rosto. Os ferimentos lhe causaram dificuldade na fala e lhe renderam o apelido de Tartaglia (gaguejar). Excepcional cientista e matemático, venceu as dificuldades financeiras e mostrou seu talento ao descobrir um método para resolução de equações do terceiro grau. No entanto, não foi o único a conseguir tamanho feito. Scipione del Ferro (1465-1526), professor de Bolonha, foi o primeiro a desenvolver um método para resolução de equações do terceiro grau. Por volta de 1510, Scipione encontrou uma forma geral de resolver as equações do tipo $x^3 + px + q = 0$. Embora tenha falecido sem publicar sua descoberta, Scipione ensinou seu método a dois de seus discípulos, Annibale della Nave e Antonio Maria Fior. Naquela época disputas entre intelectuais eram frequentes, e a sua posição na sociedade dependia de seu desempenho nesses debates, e Fior tentou adquirir notoriedade com as descobertas de seu mestre. Fior desafiou Tartaglia para uma disputa, em que cada um deveria propor trinta problemas ao outro e Fior, naturalmente, pretendia apresentar questões que dependessem daquele tipo de equação que julgava ele ser o único capaz de resolver.

Tartaglia aceitou o desafio mas, pouco antes do dia marcado para o desafio, descobriu que seu adversário possuia um método descoberto por Scipione del Ferro para resolver equações do terceiro grau. Dedicou então todas as suas forças para encontrar uma regra que resolvesse estas equações. Conseguiu em 10 de fevereiro de 1535 não somente encontrar tal método, mas foi muito mais longe.

Um equação do terceiro grau na forma geral é do tipo:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

com $a, b, c, d \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad a \neq 0$.

Os problemas propostos por Fior implicavam equações do tipo:

$$x^3 + px = q,$$

enquanto que Tartaglia propôs problemas variados. Aconteceu que Tartaglia desenvolveu um método que resolvia as equações da forma $x^3 + px + q = 0$, e também as da forma $x^3 + px^2 + q = 0$, que Fior não conhecia, ganhando assim o desafio. A notícia do triunfo de Tartaglia chegou até Girolamo Cardano (1501-1576), o outro personagem da história das equações do terceiro grau, nascido em Pavia, que se tornou um excelente cientista, se dedicando também à Astrologia. Na época estava escrevendo um livro englobando álgebra, aritmética e geometria, e acreditava ser impossível uma solução geral para equações do terceiro grau como lhe dissera outro matemático Luca Pacioli. Cardano resolveu pedir para que Tartaglia lhe revelasse seu método, o que foi negado pois queria ele mesmo publicar suas descobertas. Mas, Cardano usou de todos os meios possíveis para convencer Tartaglia a contar seu segredo, sobre juramento de que não iria publicar. O método foi revelado sob a forma de versos em troca do juramento solene de que Cardano jamais publicaria esse segredo.

Conhecendo o método de resolução, Cardano, com algum esforço, conseguiu demonstrar a validez da regra para resolver a equação $x^3 + px = q$. Mais ainda, ele estimulou seu discípulo Ludovico Ferrari (1522-1565) a estudar as equações de 4º grau. Ludovico desenvolveu um método para resolução de equações do 4º grau com a sua devida demonstração. De posse dos dois métodos, Cardano deve ter se sentido fortemente tentado a publicá-las, mas seu juramento o impedia.

Em 1544, Cardano e Ferrari realizaram uma viagem a Florença, e no caminho passaram em Bologna e fizeram uma visita a Annibale della Nave, que lhes mostrou um manuscrito de del Ferro que continha a famosa regra de Tartaglia. Ao saber que a fórmula de Tartaglia já existia há 30 anos, Cardano se sentiu desobrigado de cumprir seu juramento. A promessa foi quebrada e em 1545, Cardano publicou a fórmula juntamente com sua demonstração no seu livro *Ars Magna*. Estava iniciada uma richa que iria ultrapassar as gerações. O que aconteceu com as equações do 2º grau, em que o método de resolução ficou conhecido como Fórmula de Bhaskara, se repetiu com as equações do 3º grau, em que o método ficou conhecido como Fórmula de Cardano, embora Cardano não tenha esquecido de fazer as devidas atribuições de mérito aos respectivos descobridores.

O método de Tartaglia confiado a Cardano em versos, traduzindo para a linguagem algébrica de hoje, pode ser expresso em três casos possíveis:

$$x^3 + ax = b, \;\; x^3 = ax + b \quad \text{e} \quad x^3 + b = ax.$$

É conveniente lembrar que na época não eram considerados coeficientes negativos. Analisaremos a solução de uma destas equações.

1) Equação $x^3 + ax = b$

Utilizando as incógnitas auxiliares u e v e desenvolvendo o cubo do seguinte binômio teremos,

$$(u - v)^3 = u^3 - 3u^2v + 3uv^2 - v^3.$$

Colocando uv em evidência, temos:

$$(u - v)^3 = (u^3 - v^3) - 3uv(u - v),$$

assim

$$(u - v)^3 + 3uv(u - v) = u^3 - v^3.$$

Comparando com a forma geral $x^3 + ax = b$ temos $3uv = a$ e $u^3 - v^3 = b$. Logo podemos escrever,

$$(u - v)^3 + a(u - v) = b \Rightarrow x = u - v.$$

Devemos resolver então o seguinte sistema:

$$\begin{cases} uv = \frac{a}{3} \\ u^3 - v^3 = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^3v^3 = (\frac{a}{3})^3 \\ u^3 - v^3 = b. \end{cases}$$

Fazendo $u^3 = U$ e $v^3 = V$, teremos

$$\begin{cases} UV = (\frac{a}{3})^3 \\ U - V = b. \end{cases}$$

Temos então dois números U e $-V$ cuja a soma é b e cujo o produto $U \cdot (-V) = (\frac{a}{3})^3$, o que implica $U \cdot V = (-\frac{a}{3})^3$. Logo, U e $-V$ são as raízes da equação

$$x^2 - bx + \left(-\frac{a}{3}\right)^3 = 0,$$

basta lembrar de soma e produto. Utilizando a fórmula de resolução de equações do 2º grau temos:

$$x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4(\frac{-a}{3})^3}}{2} \Rightarrow x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{(\frac{b}{2})^2 + (\frac{a}{3})^3}\ .$$

Logo, podemos tomar uma dessas raízes como sendo U e a outra como $-V$. Sendo $u = \sqrt[3]{U}$ e $v = \sqrt[3]{V}$ então $x = u - v = \sqrt[3]{U} - \sqrt[3]{V} = \sqrt[3]{U} + \sqrt[3]{-V}$ que é a solução encontrada por Tartaglia. Substituindo o valor de U e V na expressão acima, temos a fórmula que ficou conhecida como Fórmula de Cardano ou de Tartaglia:

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}}, \tag{2.1}$$

que é uma solução da equação $x^3 + ax = b$.

Os outros dois casos podem ser reduzidos ao primeiro, mudando termos de um membro a outro da equação (ver [13]).

2) Equação geral

Vamos lembrar que, a princípio, Tartaglia solucionou equações do tipo $x^3 + px = q$, $x^3 + px^2 + q = 0$ e não a equação geral $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Todavia como nas equações do 2º grau, podemos reduzir qualquer equação do terceiro grau geral em um dos casos especiais acima. Por exemplo

$$x^3 + px = q$$

pode ser obtida de $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, fazendo uma mudança de variável de modo a anular o termo do 2º grau. A saber, tomando $x = y + m$ e substituindo na equação $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ teremos a seguinte igualdade:

$$a(y + m)^3 + b(y + m)^2 + c(y + m) + d = 0$$

$$\Rightarrow ay^3 + y^2(b + 3am) + y(3am^2 + 2bm + c) + (m^3a + bm^2 + cm + d) = 0.$$

Como queremos anular o termo do 2º grau devemos ter $b + 3am = 0$, o que implica $m = -\frac{b}{3a}$ *se* $a \neq 0$. A nova equação obtida em y será do tipo $y^3 + py + q = 0$, tomando

$$p = \frac{3am^2 + 2bm + c}{a} \quad \text{e} \quad q = \frac{am^3 + bm^2 + cm + d}{a}$$

e, equações deste tipo são possíveis de serem resolvidas e encontrar x, pois $x = y + m$. Assim, Tartaglia não apenas encontrou a solução das equações do tipo $x^3 + px = q$, mas deu uma resposta geral.

A demonstração ou caminho seguido por Tartaglia parte da seguinte ideia fundamental: Vamos supor que a solução procurada seja composta de 2 parcelas. Assim, escrevendo $x = A + B$ e elevando os dois lados ao cubo temos,

$$x^3 = (A+B)^3 \Rightarrow x^3 = A^3 + B^3 + 3AB(A+B).$$

Como $x = A + B \Rightarrow x^3 = A^3 + B^3 + 3ABx$, ou seja,

$$x^3 - 3ABx - (A^3 + B^3) = 0.$$

Comparando, a equação acima com a equação $x^3 + px + q = 0$, temos $p = -3AB$ e $q = -(A^3 + B^3)$ assim, $A^3B^3 = -\frac{p^3}{27}$ e $A^3 + B^3 = -q$. Agora temos um problema conhecido para resolver, pois A^3 e B^3 são dois números dos quais conhecemos a soma e o produto. Ou seja, as raízes da equação $y^2 + qy + (-\frac{p}{3})^3 = 0$ são dadas por

$$y = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + 4(\frac{p}{3})^3}}{2}$$

o que implica

$$A^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

e

$$B^3 = -\frac{q}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

Como $x = A + B$, então

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}. \tag{2.2}$$

Exemplo 2.2.1 *Aplicando o método acima na equação $x^3 - 6x - 9 = 0$, teremos, $p = -6$ e $q = -9$, assim*

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{-\left(-\tfrac{9}{2}\right) + \sqrt{\left(\tfrac{9}{2}\right)^2 + \left(-\tfrac{6}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\left(-\tfrac{9}{2}\right) - \sqrt{\left(\tfrac{9}{2}\right)^2 + \left(-\tfrac{6}{3}\right)^3}} \\ &= \sqrt[3]{\tfrac{9}{2} + \sqrt{\tfrac{49}{4}}} + \sqrt[3]{\tfrac{9}{2} - \sqrt{\tfrac{49}{4}}} = \sqrt[3]{\tfrac{9+7}{2}} + \sqrt[3]{\tfrac{9-7}{2}} \\ &= \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1} = 2 + 1 = 3. \end{aligned}$$

Fazendo a verificação, podemos constatar que $x = 3$ é uma das raízes da equação.

Exemplo 2.2.2 *Dada a equação completa $x^3 - 3x^2 + x + 5 = 0$ os coeficientes são: $a = 1, b = -3, c = 1$ e $d = 5$. Para transformar a equação acima em uma do tipo $x^3 + px + q = 0$*

devemos fazer as seguintes substituições: $x = y + m$ *sendo* $m = -\frac{b}{3a} = -\frac{(-3)}{3\cdot 1} = 1$. *Fazendo a substituição,* $x = y + 1$, *obtém-se a equação*

$$\begin{aligned}(y+1)^3 - 3(y+1)^2 + (y+1) + 5 &= y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - 3(y^2 + 2y + 1) + y + 6 \\ &= y^3 - 2y + 4 = 0\end{aligned}$$

em que $p = -2$ *e* $q = 4$. *Uma solução da equação em* y *utilizando a fórmula de Cardano ou Tartaglia é:*

$$\begin{aligned} y &= \sqrt[3]{-\tfrac{4}{2} + \sqrt{\left(\tfrac{4}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{-2}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\tfrac{4}{2} - \sqrt{\left(\tfrac{4}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{-2}{3}\right)^3}} \\ &= \sqrt[3]{-2 + \sqrt{\tfrac{100}{27}}} + \sqrt[3]{-2 - \sqrt{\tfrac{100}{27}}} = \sqrt[3]{-2 + \tfrac{10}{3\sqrt{3}}} + \sqrt[3]{-2 - \tfrac{10}{3\sqrt{3}}}.\end{aligned}$$

Logo $y = \sqrt[3]{-2 + \frac{10}{3\sqrt{3}}} + \sqrt[3]{-2 - \frac{10}{3\sqrt{3}}}$ *é raiz da equação* $y^3 - 2y + 4 = 0$. *Assim* $x = y + 1$ *é raiz da equação inicial. Todavia, é fácil verificar que* $y = -2$ *é raiz de* $y^3 - 2y + 4 = 0$, *concluindo que* $x = y + 1 = -2 + 1 = -1$ *é raiz da equação* $x^3 - 3x^2 + x + 5 = 0$. *Mas fatorando o polinômio acima temos*

$$x^3 - 3x^2 + x + 5 = (x+1)(x^2 - 4x + 5)$$

e é fácil verificar que $x^2 - 4x + 5 = 0$ *não possui raiz real, já que*

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 5 = 16 - 20 = -4.$$

Logo, x=-1 é a única raiz real da equação original. Portanto, segue da fórmula de Cardano e Tartaglia que

$$\sqrt[3]{-2 + \frac{10}{3\sqrt{3}}} + \sqrt[3]{-2 - \frac{10}{3\sqrt{3}}} = -2,$$

ou seja, a raiz obtida pela Fórmula (2.2) pode mascarar uma solução bem simples desta equação.

Exemplo 2.2.3 *Aplicando novamente o método de resolução, no exemplo que descrevemos ao iniciar este capítulo, ou seja,* $x^3 - 10x + 4 = 0$. *Aqui* $p = -10$ *e* $q = 4$. *Substituindo na fórmula teremos*

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{-\tfrac{4}{2} + \sqrt{\left(\tfrac{4}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{-10}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\tfrac{4}{2} - \sqrt{\left(\tfrac{4}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{-10}{3}\right)^3}} \\ &= \sqrt[3]{-2 + \sqrt{4 - \tfrac{1000}{27}}} + \sqrt[3]{-2 - \sqrt{4 - \tfrac{1000}{27}}} \\ &= \sqrt[3]{-2 + \sqrt{-\tfrac{892}{27}}} + \sqrt[3]{-2 - \sqrt{-\tfrac{892}{27}}},\end{aligned}$$

ou seja, o problema de construir um reservatório com aquelas medidas apenas será possível se as soluções desta equação forem números reais positivos. E temos pela fórmula acima uma raiz que a princípio não conseguimos identificar como sendo um número real, como fizemos no exemplo anterior.

Ao chegar à fórmula de resolução de equações do terceiro grau, podería-se achar que este problema estava vencido. Mas a fórmula para resolver equações do terceiro grau começou a levantar dúvidas sobre sua aplicação. No exemplo acima nos deparamos com uma raiz quadrada de número negativo, ou seja, para utilizar a fórmula devemos ultrapassar essa barreira. E mais ainda, no exemplo anterior, para a equação $x^3 - 6x - 9 = 0$ encontramos apenas uma de suas três soluções. Para solucionar esses problemas os mais célebres matemáticos dos séculos XVII, XVIII e início do XIX tiveram que revolucionar a matemática e criar o que hoje chamamos de números complexos.

2.3 Rafael Bombelli - Insuficiência dos Números Reais

Cardano, em 1545, ao tentar resolver a cúbica $x^3 - 15x - 4 = 0$, onde $p = -15$ e $q = -4$, e sendo conhecida a raiz $x = 4$, constatou que a fórmula de Tartaglia levava a seguinte indeterminação:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{-\left(\frac{-4}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{(-4)}{2}\right)^2 + \left(-\frac{15}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\left(\frac{-4}{2}\right) - \sqrt{\left(\frac{(-4)}{2}\right)^2 + \left(-\frac{15}{3}\right)^3}} \\ &= \sqrt[3]{2 + \sqrt{4 - 125}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{4 - 125}} = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}. \end{aligned}$$

Ou seja, a fórmula não conduzia para a solução conhecida $x = 4$. Hoje sabemos que as outras duas soluções são obtidas calculando as raízes da equação $x^2 + 4x + 1 = 0$, já que

$$x^3 - 15x - 4 = (x - 4)(x^2 + 4x + 1).$$

Logo, as raízes da cúbica são: $4, -2 + \sqrt{3}$ e $-2 - \sqrt{3}$. Os matemáticos da época tinham um problema realmente muito sério para resolver, pois, quando obtinham uma raiz negativa para uma equação do 2º grau, simplesmente diziam que a solução não existia. Mas agora, temos uma equação do 3º grau cuja solução existe, mas de algum modo é necessário compreender a extração de raízes quadradas de números negativos.

Alguns matemáticos, entre eles Cardano, estudaram métodos de resolução que evitassem o aparecimento de raízes quadradas negativas, obtendo poucos resultados, até que em 1890 Capeli provou que é impossível tal método. Vinte cinco anos mais tarde Bombelli, em 1572 provou a insuficiência dos números reais.

De um modo geral podemos entender o que aconteceu com a equação $x^3 - 15x - 4 = 0$.

Observação 2.3.1 *Sejam $m, n, r \in \mathbb{R}$. Dado o produto*

$$(x-m)(x-n)(x-r) = x^3 - (m+n+r)x^2 + (mn+nr+mr)x - mnr,$$

obtemos a equação do terceiro grau

$$x^3 - (m+n+r)x^2 + (mn+nr+mr)x - mnr = 0,$$

cujas raízes são: m, n e r.

Fazendo $m+n+r=0$ ou $r=-(m+n)$, teremos uma equação do terceiro grau sem o termo x^2. Assim, $(x-m)(x-n)(x+(m+n))=0$, terá como raízes m,n e $-(m+n)$, e efetuando as operações a equação obtida equivale a

$$x^3 + (mn-(m+n)^2)x + mn(m+n) = 0.$$

Comparando com a equação $x^3+px+q=0$, teremos $p = mn-(m+n)^2$ e $q = mn(m+n)$, donde, aplicando a Fórmula (2.2) teremos:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{-\tfrac{mn(m+n)}{2} + \sqrt{(\tfrac{mn(m+n)}{2})^2 + (\tfrac{mn-(m+n)^2}{3})^3}} \\ &+ \sqrt[3]{-\tfrac{mn(m+n)}{2} - \sqrt{(\tfrac{mn(m+n)}{2})^2 + (\tfrac{mn-(m+n)^2}{3})^3}}. \end{aligned}$$

Lembrando que a expressão acima deve nos conduzir a m, n ou $-(m+n)$, que são as soluções conhecidas. Estudando a expressão que se encontra dentro do radical quadrático e chamando-o de Δ temos:

$$\Delta = \left(\frac{mn(m+n)}{2}\right)^2 + \left(\frac{mn-(m+n)^2}{2}\right)^3$$

assim,

$$\Delta = \frac{-4m^6 - 12m^5n + 3m^4n^2 + 26m^3n^3 + 3m^2n^4 - 12mn^5 - 4n^6}{108}.$$

Portanto,

$$\Delta = \frac{-(m-n)^2(2m+n)^2(m+2n)^2}{108}.$$

Logo, para m e n reais, podemos concluir que Δ nunca será positivo. Esta é uma demonstração surpreendente, pois já sabemos que a equação do 3º grau que estamos considerando possui 3 raízes reais. Todavia a fórmula de Cardano ou Tartaglia nos diz que para encontrar m e n reais é necessário compreender raízes quadradas de números negativos, tema este que se julgou impossível durante muitos anos.

Para equações do 2º grau temos duas raízes reais distintas quando o discriminante $\Delta > 0$. Agora para as equações de 3º grau teremos que ter este outro $\Delta < 0$ para encontrar três raízes reais distintas.

Devido a estes fatos fica evidente que os números existentes não eram suficientes para dar continuidade ao estudo da álgebra. Estamos diante de um novo tipo de número, diferente de tudo o que se conhecia até o momento. A evolução dos números durante a história da humanidade já havia passado por problemas familiares a este. De fato, os primeiros números a surgir foram os utilizados na contagem, hoje batizados de números naturais. Os números fracionários surgiram bem mais tarde e já envolviam uma certa dose de abstração. As dificuldades enfrentadas para partir dos números naturais e chegar aos da forma $\frac{a}{b}$ (com a e b inteiros e $b \neq 0$) não foram poucas. Um outro importante conceito numérico de grande evolução foi a passagem nos números racionais para os números irracionais. A história nos conta que foram os discípulos de Pitágoras os primeiros a demonstrar que $\sqrt{2}$ não era um número da forma $\frac{a}{b}$ e esta constatação provocou grande perplexidade entre os matemáticos gregos. Somente dois séculos mais tarde Eudóxio conseguiu dar um embasamento teórico para os números irracionais e responder as principais dúvidas.

Novamente a história estava diante de um dilema e precisava romper as barreiras. Quem primeiro enxergou através do véu foi Rafael Bombelli, nascido em Bolonha, Itália, em 1530. Bombelli era engenheiro hidráulico e estava sempre disposto a pensar coisas novas.

Bombelli estudou a equação $x^3 - 15x - 4 = 0$ e aplicou a fórmula de Cardano ou Tartaglia. Ele relacionou $x = 4$, que é uma das raízes, com os resultados $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$ obtidos por meio da fórmula. Revelou em seu livro *L'Algebra parte Maggiore dell'Arithmetica* em 1572, que os números $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}$ e $\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$ deveriam ser da forma $a+\sqrt{-b}$ e $a-\sqrt{-b}$ respectivamente, e estabeleceu as seguintes regras:

$$\begin{gathered}(\sqrt{-1})(\sqrt{-1}) = -1 \ e \\ (a+b\sqrt{-1}) + (c+d\sqrt{-1}) = (a+c) + (b+d)\sqrt{-1}.\end{gathered} \tag{2.3}$$

Assim ele supôs que

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = a+\sqrt{-b}, \tag{2.4}$$

$$\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = a-\sqrt{-b}. \tag{2.5}$$

Alguns autores que apresentam este problema, colocam que como Bombelli sabia que 4 era raiz então $a+\sqrt{-b}+a-\sqrt{-b} = 4$, o que implica em $a = 2$ e daí é possível concluir que $b = 1$. Vamos tentar apresentar uma outra possível solução deste problema, já que as suposições (2.4) e (2.5) já são suposições muito peculiares.

Queremos determinar a e b satisfazendo as relações acima. Elevando ambos os membros ao cubo, temos: $(a+\sqrt{-b})^3 = 2+\sqrt{-121}$ e $(a-\sqrt{-b})^3 = 2-\sqrt{-121}$. Logo,

$$a^3 - 3ab + (3a^2 - b)\sqrt{-b} = 2+\sqrt{-121}, \tag{2.6}$$

$$a^3 - 3ab - (3a^2 - b)\sqrt{-b} = 2 - \sqrt{-121}. \tag{2.7}$$

Somando a Equação (2.6) com a Equação (2.7), obtemos $2a^3 - 6ab = 4$, ou seja,

$$a^3 - 3ab = 2. \tag{2.8}$$

Por outro lado, multiplicando (2.4) e (2.5), temos

$$\begin{array}{rrcl} & \left(\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}\right) & = & (a+\sqrt{-b})\cdot(a-\sqrt{-b}) \\ \Leftrightarrow & \sqrt[3]{4+121} & = & a^2+\sqrt{-b}\cdot(-\sqrt{-b}) \\ \Leftrightarrow & \sqrt[3]{125} & = & a^2+b, \end{array}$$

ou seja,

$$a^2 + b = 5. \tag{2.9}$$

De (2.9) segue que $b = 5 - a^2$, o qual, substituindo em (2.8) obtemos

$$a^3 - 3a(5 - a^2) = 2 \Rightarrow a^3 - 15a + 3a^3 = 2 \Rightarrow 4a^3 - 15a - 2 = 0.$$

Neste caso, considerando os divisores de 2, é fácil verificar que 2 é raiz da equação acima. Não iremos nos preocupar com as demais raízes pois elas não serão racionais.

E com $a = 2$ temos que

$$b = 5 - a^2 = 5 - 4 = 1.$$

Logo

$$(2+\sqrt{-1})^3 = 2+\sqrt{-121} \ \ e \ \ (2-\sqrt{-1})^3 = 2-\sqrt{-121}.$$

Como a relação é supreendente, vamos verificar a primeira igualdade:

$$\begin{array}{rcl} (2+\sqrt{-1})^3 & = & (2+\sqrt{-1})^2(2+\sqrt{-1}) = (4+4\sqrt{-1}+\sqrt{-1}\sqrt{-1})(2+\sqrt{-1}) \\ & = & (3+4\sqrt{-1})(2+\sqrt{-1}) = (6+3\sqrt{-1}+8\sqrt{-1}+4(-1)) \\ & = & 2+11\sqrt{-1} = 2+\sqrt{-11^2} = 2+\sqrt{-121}. \end{array}$$

Conclui-se que a raiz $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$ da equação $x^3 - 15x - 4 = 0$ é na verdade

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = (2+\sqrt{-1}) + (2-\sqrt{-1}) = 4.$$

Bombelli estabeleceu a base para o desenvolvimento de um grande ramo da matemática com milhares de aplicações: A Teoria dos Números Complexos.

Observação 2.3.2 *Ao matemático Cardano, se não foi o criador da fórmula de resolução de equações do terceiro grau, podemos creditar a honra de ser o primeiro a fazer operações com números complexos, pois, em seu livro Ars Magna, escreveu que era impossível encontrar* *dois números cuja a soma é 10 e o produto 40. Resolveu o problema da seguinte maneira: Sejam* x *e* y *os números procurados, logo*

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ xy = 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 100 \\ 4xy = 160. \end{cases}$$

Subtraindo a primeira equação da segunda teremos

$$x^2 - 2xy + y^2 = -60 \Rightarrow (x - y)^2 = -60$$

$$\Rightarrow x - y = \pm\sqrt{-60} = \pm 2\sqrt{-15}.$$

Assim, temos um novo sistema

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = \pm 2\sqrt{-15} \end{cases} \Rightarrow \Big\{ \; 2x = 10 \pm 2\sqrt{-15}.$$

Portanto, os números procurados são

$$x = 5 \pm \sqrt{-15} \quad e \quad y = 5 \mp \sqrt{-15}.$$

Podemos verificar que esses números somam 10 e que seu produto é 40. Na época Cardano não deu valor ao resultado encontrado, mal sabia ele que este resultado iria fazer parte de algo maior (ver [14]).

Capítulo 3

O Conjunto dos Números Complexos

No capítulo anterior vimos que o conjunto dos números reais não era suficiente para compreender, por exemplo, como soluções reais para equações do 3º grau poderiam ser expressas como raízes quadradas de números negativos. Houve um incrível desenvolvimento da Álgebra quando os matemáticos compreenderam que as raízes de um polinômio com coeficientes reais deveriam ser procuradas num conjunto "maior"(que contivesse os reais). Na verdade já sabíamos que se temos um polinômio com coeficientes inteiros, suas raízes não são necessariamente inteiras, podem ser números irracionais.

A história dos números complexos começou a florescer no século XVI na Europa, e teve a contribuição de diversos matemáticos. Todavia seu maior protagonista foi o suíço Leonhard Paul Euler (1707-1783), que nasceu na Basiléia, e foi o matemático que mais obras produziu e publicou em todos os tempos. Discípulo de Jean Bernoulli, Euler possuía uma mémoria excelente, falava diversos idiomas, memorizava tabelas logarítmicas e trigonométricas e realizou trabalhos de suma importância para o avanço da matemática. Era uma pessoa de personalidade agradável e continuou a publicar suas descobertas mesmo após ter perdido a visão. Ele ficou completamente cego nos últimos 18 anos de sua vida.

Pesquisou e publicou sobre Cálculo, Teoria dos Números, Álgebra, Mecânica, Óptica, Teoria das Probabilidades, Topologia, Cálculo das Variações, Música e Números Complexos, assunto que abordaremos com mais detalhes.

Euler foi importante na consolidação da simbologia moderna, pois além de criar vários símbolos novos, seus livros escritos há mais de 250 anos transpiravam atualidade e consagraram os símbolos utilizados até hoje. Símbolos como $\sum$ para a somatoria, $f(x)$ para funções, a letra grega π para a constante da circunferência, além do famoso i significando $\sqrt{-1}$, usado pela primeira vez em 1777, a letra e para representar a base dos logaritmos naturais, entre outros.

A insuficiência dos números reais foi demonstrada pela primeira vez por Bombelli, mas outros matemáticos também avançaram no estudo da raiz imaginária. Leibniz constatou que a expressão $\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}$ tem resultado $\sqrt{6}$, mas não estava convencido do resultado. Newton não se interessou pelos números complexos pois era apaixonado pelos números reais. Outros pesquisadores como Abraham DeMoivre, os irmãos Bernoulli, estudaram dedicamente os números complexos, mas foi Euler que alcançou maior êxito neste objetivo, deixando pouca coisa a acrescentar. Por isso é considerado o matemático que dominou os números complexos.

Progressos chaves na Física moderna não teriam sido possíveis sem o uso dos números complexos, como por exemplo, o estudo das correntes alternadas, a teoria da relatividade, o processamento de sinais, a dinâmica dos fluidos e a mecânica quântica. Sem dúvida, o conjunto dos números complexos revolucionou o mundo científico e por isso se faz tão importante quebrar as barreiras que envolvem este conceito, na busca de uma melhor abordagem deste assunto no ensino médio, quem não se sente motivado a estudar este conjunto não sabe onde este conhecimento será necessário. No máximo, imaginam que é um conjunto importante para buscar as raízes para as equações do segundo grau.

Neste capítulo vamos introduzir o conjunto dos números complexos, descrever suas principais propriedades e alguns resultados fundamentais como o Teorema Fundamental da Álgebra. Mais detalhes ver [3], [7] e [8].

3.1 Números Complexos e suas Operações

Vamos definir o conjunto dos **números complexos**, denotado por $\mathbb{C}$, como o conjunto de todos os elementos da forma $a+bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e tal que $i^2 = -1$. Para $b = 0$ temos $z = a$, verificando assim que os números reais estão contidos no conjunto dos números complexos.

Dizemos que dois números complexos $a + bi$ e $c + di$ são iguais se, e somente se, $a = c$ e $b = d$. Ou seja, um número complexo $a + bi$ está completamente determinado por a e b.

Dado um número complexo $z = a + bi$, dizemos que a é a parte real de z e b é a parte imaginária de z. Podemos usar a seguinte notação: $Re(a + bi) = a$ e $Im(a + bi) = b$.

Queremos definir as operações de soma e produto de números complexos, de tal maneira que, restrito aos números reais, recuperemos as operações já conhecidas, e além disso, que estas satisfaçam as propriedades básicas, como associatividade, comutatividade, distributividade, entre outras.

Dados $z = a + bi$ e $w = c + di$ em $\mathbb{C}$, definimos a soma $z + w$ e o produto $z \cdot w$ por:

$$z + w = a + bi + c + di = a + c + (b + d)i \quad \text{e}$$

$$z \cdot w = (a + bi) \cdot (c + di) = ac - bd + (ad + bc)i.$$

Posteriormente vamos apresentar as propriedades destas operações e dar uma interpretação geométrica para a soma e o produto de números complexos.

William Rowan Hamilton (1805-1865) foi um matemático, físico e astrônomo irlândes, que deu uma elegante abordagem aos números complexos como pares de números reais, desmistificando o que significava trabalhar com os números complexos e dando uma interpretação geométrica para aquele objeto.

Como um número complexo $a + bi$ fica completamente determinado pelos números reais a e b, ocorreu a Hamilton representá-lo simplesmente pelo par ordenado de números reais (a, b). Definiu-se então que dois pares de números reais (a, b) e (c, d) são iguais, ou seja, $(a, b) = (c, d)$ se, e somente se, $a = c$ e $b = d$.

A adição e a multiplicação de tais pares foram definidas por ele, correspondendo ao que definimos anteriormente:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \quad \text{e}$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Com essas definições, é fácil mostrar que a adição e a multiplicação de pares ordenados de números reais são comutativos e associativos, e que a multiplicação é distributiva com relação à adição.

Portanto, a cada número complexo $z = a + bi$ podemos corresponder um único par ordenado (a, b), e vice-versa. Em particular, cada número real corresponde o par $(a, 0)$, uma vez que, $a = a + 0 \cdot i$. E ao complexo i, cuja única maneira de se escrever da forma $a + bi$ é $i = 0 + 1 \cdot i$, corresponde o par ordenado $(0, 1)$.

Numa linguagem atual de geometria analítica, podemos corresponder a cada número complexo $z = a + bi$ um único ponto (a, b) do plano cartesiano cujas coordenadas são a e b, ou ainda o vetor (segmento orientado) de origem O do sistema de coordenadas e extremidade (a, b), ou seja, podemos representar z pelo vetor $\overrightarrow{Oz}$ (Figura (3.1)).

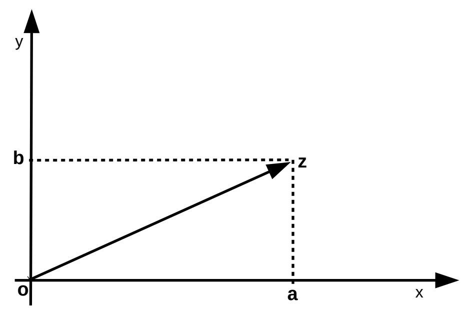

Figura 3.1:

Herdando as propriedades das operações de soma e multiplicação de números reais, é fácil verificar que as operações de adição e multiplicação de números complexos satisfazem as seguintes propriedades:

- **Adição**

  Dados $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ temos:

  A.1 Associatividade: $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$.

  A.2 Comutatividade: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.

  A.3 A adição admite um único elemento neutro, $0 = 0 + 0i$, assim $0 + z = z$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

  A.4 Para todo $z = a + bi \in \mathbb{C}$ existe um único $-z = -a - bi$ tal que $-z + z = 0$. Dizemos que $-z$ é o oposto de z.

  Geometricamente, a soma de dois números complexos é representado por um vetor cujas componentes são as somas das componentes dos vetores dados, ou seja, a soma é representada pela diagonal do paralelogramo construído sobre os vetores dados, como visto num curso de geometria analítica (Figura (3.2)).

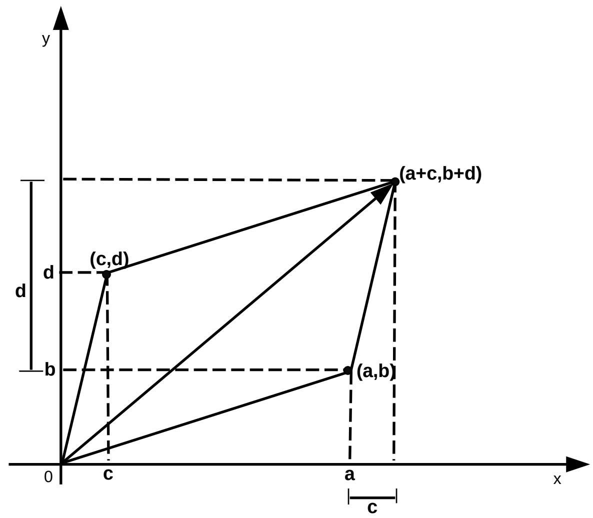

Figura 3.2:

Quando um conjunto satisfaz as propriedades A.1, A.3 e A.4 acima, dizemos que tal conjunto é um grupo. Se a propriedade A.2 é verificada tal conjunto é chamado de grupo abeliano. Portanto, $\mathbb{C}$ munido da adição é um grupo abeliano.

- **Diferença**

  Sejam $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ em $\mathbb{C}$ e de modo natural definimos

$$z_2 - z_1 = z_2 + (-z_1),$$

onde $-z_1$ é o oposto de z_1. Assim,

$$z_2 - z_1 = c + di + (-a - bi) = c - a + (d - b)i.$$

De modo análogo ao que fizemos para a soma, podemos interpretar geometricamente a diferença de dois números complexos. Veja que z_1 *e* z_2 são representados pelos vetores $\overrightarrow{OA} = (a, b)$ e $\overrightarrow{OB} = (c, d)$, respectivamente. Assim $z_2 - z_1$ é representado pelo vetor

$$\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB},$$

ou seja, $\overrightarrow{AB} = (c, d) - (a, b) = (c - a, d - b)$ (Figura 3.3).

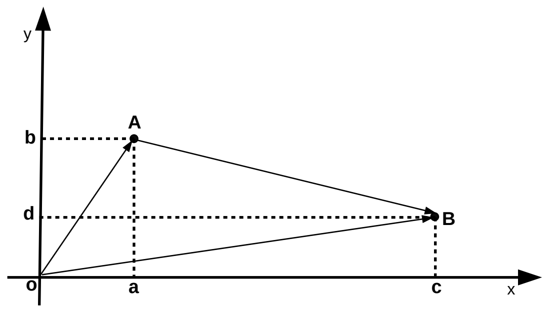

Figura 3.3:

- **Multiplicação**

  A multiplicação de números complexos, a qual é definida por:

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i,$$

satisfaz para quaisquer números z_1, z_2 *e* z_3 em $\mathbb{C}$ as seguintes propriedades:

M.1 Associatividade: $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$.

M.2 Comutatividade: $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$.

M.3 Distributividade: $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$.

M.4 A multiplicação admite a existência do elemento neutro $1 = 1 + 0i$, tal que, $1 \cdot z = z$.

M.5 Para todo $z \in \mathbb{C}$ se $z \neq 0$ existe um único $z^{-1} \in \mathbb{C}$ tal que $z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z = 1$.

As 4 primeiras propriedades acima são de fácil verificação, já para a última propriedade vamos enunciar mais alguns resultados, para então obter $z^{-1} \in \mathbb{C}$ com $z \neq 0$. Uma interpretação geométrica para a multiplicação de números complexos será dada através da representação trigonométrica dos números complexos.

3.2 Módulos e Conjugados

Dado um número complexo $z = a + bi$, vamos definir $\overline{z} = a - bi$ como o conjugado do número complexo z. O conjugado $\overline{z}$ de z é representado pelo simétrico de z em relação ao eixo Ox (Figura (3.4)).

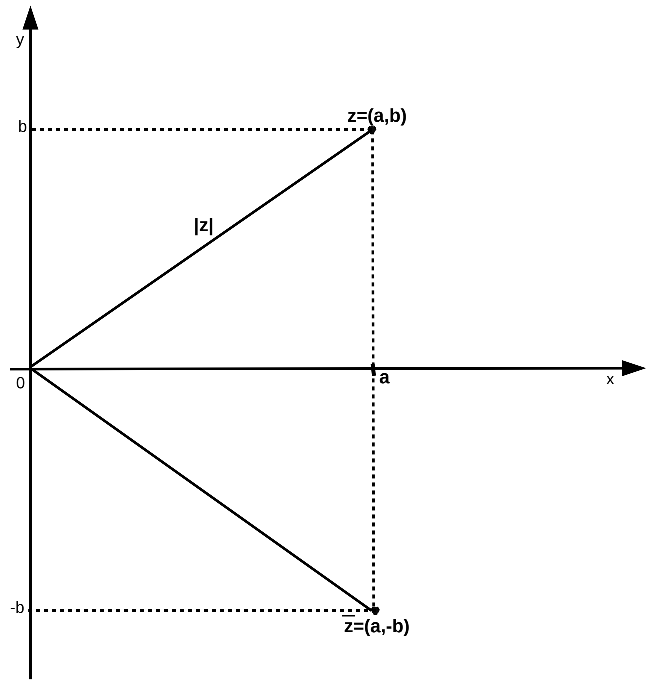

Figura 3.4:

Denominamos o módulo de $z = a + bi$ o número real não negativo

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Geometricamente, $|z|$ mede a distância da origem até z, isto é, mede o módulo do vetor que representa o complexo z.

Temos a seguinte relação entre módulo e conjugado :

$$z \cdot \overline{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

Este resultado pode ser verificado pelo Teorema de Pitágoras.

Representando o inverso z^{-1} de um número complexo z por $\frac{1}{z}$, temos que se $z = a + bi$ então,

$$\frac{1}{z} = \frac{1 \cdot \overline{z}}{z \cdot \overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a + bi} = \left(\frac{1}{a + bi}\right)\left(\frac{a - bi}{a - bi}\right) = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}.$$

Desta forma dados dois números complexos z_1 e z_2 com $z_2 \neq 0$, podemos definir o quociente de z_1 por z_2 como sendo

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2}.$$

Na prática, efetuamos a divisão multiplicando ambos os membros pelo conjugado do denominador.

O conjugado de um número complexo possui algumas propriedades, que serão enunciadas abaixo.

Proposição 3.2.1 *Sejam z_1 e z_2 números complexos, então*

a) $\overline{(z_1 + z_2)} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$;

b) $\overline{(z_1 z_2)} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$.

Demonstração: Sejam $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ em $\mathbb{C}$.

(a) Vimos que $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$. Assim

$$\overline{z_1 + z_2} = (a + c) - (b + d)i = (a - bi) + (c - di) = \overline{z_1} + \overline{z_2}.$$

(b) Por outro lado, $z_1 z_2 = (ac - bd) + (bc + ad)i$. Assim

$$\overline{(z_1 z_2)} = (ac - bd) - (bc + ad)i = (a - bi)(c - di) = \overline{z_1}\ \overline{z_2}.$$

■

Corolário 3.2.2 *Dados $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ então $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.*

Demonstração: Da relação $z \cdot \overline{z} = |z|^2$ e pela proposição acima temos

$$\begin{aligned} |z_1 \cdot z_2|^2 &= z_1 z_2 \cdot \overline{z_1 z_2} = z_1 z_2 \cdot \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \\ &= z_1 \overline{z_1} \cdot z_2 \overline{z_2} = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2 = (|z_1| \cdot |z_2|)^2. \end{aligned}$$

Como módulo de um número é um número real positivo ou nulo, podemos extrair a raiz quadrada em ambos os membros da igualdade acima, assim

$$\sqrt{|z_1 \cdot z_2|^2} = \sqrt{(|z_1| \cdot |z_2|)^2} \Rightarrow |z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|.$$

■

Um grupo abeliano que admite as propriedades M.1 e M.3 da multiplicação é denominado anel. Se a propriedade M.4 é verificada chamamos de anel com unidade. Agora se a propriedade M.2 é válida em um anel com unidade, então o anel é dito comutativo com unidade. Mas, se a propriedade M.5 se verifica, um anel comutativo com unidade é chamado de corpo. Portanto, $\mathbb{C}$ é um corpo.

3.3 Ordenação dos números complexos

Apesar do conjunto dos números reais estar contido no conjunto dos números complexos nem toda propriedade válida em $\mathbb{R}$ é válida em $\mathbb{C}$. Nesta seção vamos observar que, apesar do conjunto $\mathbb{R}$ ser ordenado, o mesmo não ocorre com os complexos.

Podemos nos perguntar qual dos dois números complexos $4+5i$ ou $5+4i$ é o maior?

Um corpo F munido com as operações " $+$ " e " $\cdot$ " é dito ordenado se existe uma relação $\prec$ entre os elementos de F tal que, dados $a, b, c \in F$ temos:

1. $a \prec b$ ou $a \succ b$ ou $a = b$, ocorrendo apenas uma das possibilidades.

2. Se $a \prec b$ e $b \prec c$ então $a \prec c$.

3. Se $a \prec b$ então $a + c \prec b + c$, para todo $c \in F$.

4. Se $a \prec b$ então $c \cdot a \prec c \cdot b$ para todo $c \succ 0$.

Para os números reais podemos definir $a \succ b$ se, e somente se, $a > b$. Analogamente, podemos tentar estabelecer uma relação de ordem em $\mathbb{C}$. Uma possibilidade seria: dados $a + bi$ e $c + di$ em $\mathbb{C}$ então dizemos que

$$a + bi \prec c + di$$

se $a < c$ ou $a = c$ e $b < d$.

Exemplo 3.3.1 *Pela definição acima teríamos que* $4 + 5i \prec 5 + 4i$ *e que* $4 - 5i \succ 0$. *Logo multiplicando* $4 - 5i$ *de ambos os lados da desigualdade acima, não alteramos a mesma, isto é,*

$$(4 + 5i)(4 - 5i) \prec (5 + 4i)(4 - 5i).$$

Efetuando o produto temos que $41 \prec 40 - 9i$, *uma contradição, pois da forma que definimos* $\prec$, *deveríamos ter* $41 \succ 40 - 9i$.

Vamos provar que para o conjunto dos números complexos não podemos definir uma relação $\prec$ que satisfaça as propriedades acima. Para tanto comecemos deduzindo as seguintes propriedades de um corpo ordenado:

Proposição 3.3.2 *Sejam* F *um corpo ordenado e* $x \in F$.

(a) $x \succ 0$ *se, e somente se,* $-x \prec 0$;

(b) Se $x \neq 0$, *então* $x^2 \succ 0$.

Demonstração:

a) De fato, $x \succ 0 \Leftrightarrow x + (-x) \succ 0 + (-x) \Leftrightarrow 0 \succ -x$.

b) Como $x \neq 0$ temos $x \succ 0$ ou $x \prec 0$. Se $x \succ 0$, então multiplicando por x em ambos os lados teremos que $x^2 \succ 0$. Se $x \prec 0$, então pela propriedade anterior temos que $-x \succ 0$, multiplicando por $-x$ temos $(-x)^2 \succ 0$, mas $x^2 = (-x)^2$ o que prova a afirmação.

■

Suponha que $\mathbb{C}$ admita uma relação $\prec$ que o torne um corpo ordenado. Pela propriedade acima temos que $i^2 \succ 0$ e $1 = 1^2 \succ 0$ assim $-1 \prec 0$. No entanto, $-1 = i^2 \succ 0$ chegando a uma contradição. Portanto, $\mathbb{C}$ não é um corpo ordenado.

3.4 Fórmula de DeMroive

Ao escrever um número complexo z da seguinte maneira

$$z = a + bi = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + i\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) \tag{3.1}$$

é possível relacionar os números complexos com a trigonometria, para então finalmente conseguir resolver as equações do terceiro grau. De fato, observe que $\frac{z}{|z|}$ é um número cujo módulo é 1, pois

$$\left|\frac{z}{|z|}\right| = \frac{|z|}{|z|} = 1 \Rightarrow \left|\frac{a+bi}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| = 1.$$

Logo,

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{e} \quad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

são números entre -1 e $+1$, e a soma de seus quadrados

$$\frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = 1.$$

Logo, podem ser relacionados com o seno e o cosseno de um ângulo θ Figura (3.5), denominado argumento de z. Representando o módulo de z, dado por $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$, pela letra grega ρ, segue das relações no triângulo retângulo (Figura (3.5)) que

$$\begin{aligned} \text{sen}\theta &= \tfrac{b}{\rho} = \tfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{e} \\ \cos\theta &= \tfrac{a}{\rho} = \tfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \end{aligned}$$

logo $b = \rho\,\text{sen}\theta$ e $a = \rho\cos\theta$.

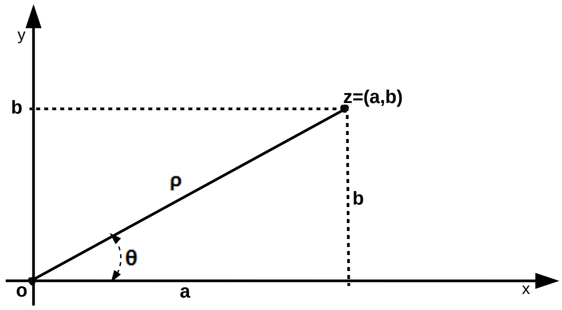

Figura 3.5:

Segue então da Equação (3.1) que

$$z = \rho(\cos\theta + i\,\text{sen}\theta),$$

chamada forma trigonométrica do número complexo z.

Observe que substituindo θ por $\theta + 2k\pi$, onde $k \in \mathbb{Z}$, o número complexo z não se altera. Em muitos casos é conveniente utilizar a expressão mais geral

$$z = \rho(\cos(\theta + 2k\pi) + i\,\text{sen}(\theta + 2k\pi)).$$

A forma trigonométrica dos números complexos tem uma importante consequência, permite obter uma interpretação geométrica para a multiplicação de números complexos.

Primeiramente vamos interpretar a multiplicação de dois números complexos unitários, ou seja, módulo 1. Dado, $w_1 = \cos\theta_1 + i\,\text{sen}\theta_1$ um número complexo unitário, este pode ser representado por um ponto do círculo unitário (centro na origem e raio 1). Sabemos que $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \text{sen}x\,\text{sen}y$ e $\text{sen}(x+y) = \text{sen}x \cos y + \text{sen}y \cos x$. Assim $\cos(x+\frac{\pi}{2}) = \cos x \cos\frac{\pi}{2} - \text{sen}x\,\text{sen}\frac{\pi}{2} = -\,\text{sen}x$ e $\text{sen}(x+\frac{\pi}{2}) = \text{sen}x\cos\frac{\pi}{2} + \text{sen}\frac{\pi}{2}\cos x = \cos x$, donde temos que

$$\begin{aligned} iw_1 &= i(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\theta_1) = -\,\text{sen}\theta_1 + i\cos\theta_1 \\ &= \cos\left(\theta_1 + \tfrac{\pi}{2}\right) + i\,\text{sen}\left(\theta_1 + \tfrac{\pi}{2}\right), \end{aligned}$$

e assim podemos concluir que multiplicar w_1 por i significa efetuar no ponto w_1 uma rotação positiva de $\frac{\pi}{2}$.

Seja $w_2 = \cos\theta_2 + i\,\text{sen}\theta_2$ outro ponto no círculo unitário. Assim

$$w_2 w_1 = (\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\theta_2)w_1 = \cos\theta_2 w_1 + \,\text{sen}\theta_2 i w_1.$$

Já vimos que o vetor w_1 e iw_1 são perpendiculares pois iw_1 é obtido de w_1 fazendo uma rotação de $\frac{\pi}{2}$. Assim $\cos\theta_2 w_1$ (que é um múltiplo de w_1) também é perpendicular à iw_1 e consequentemente à $\text{sen}\theta_2 iw_1$. Como w_2w_1 é a soma de $\cos\theta_2 w_1$ e $\text{sen}\theta_2 iw_1$ temos que w_2w_1 é a diagonal do paralelogramo determinado por estes vetores.

Fazendo a interpretação em um sistema de coordenadas xOy cujo eixo Ox coincide com Ow_1, temos que o ângulo de w_1 com w_2w_1 é θ_2 (Figura (3.6)).

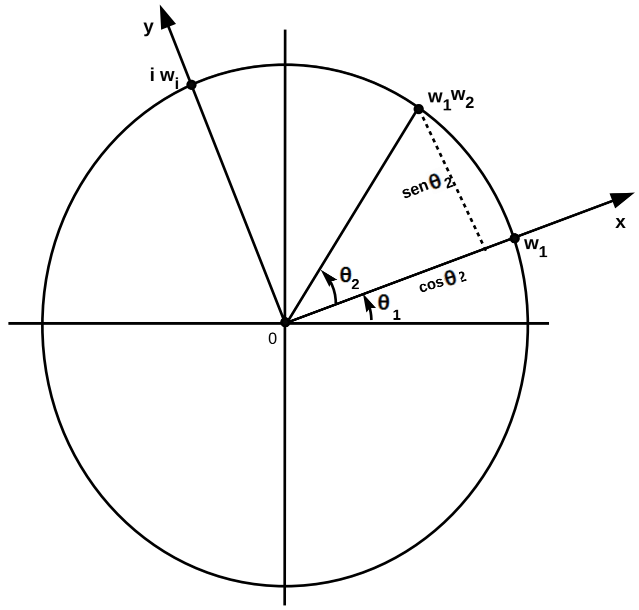

Figura 3.6:

Podemos concluir que multiplicar dois complexos unitários w_1 e w_2, geometricamente, significa dar a um deles uma rotação positiva de ângulo igual ao ângulo do outro.

No caso dos vetores z_1, z_2 não serem unitários, segue da forma trigonométrica que

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\theta_1) = r_1w_1,$$

$$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\theta_2) = r_2w_2,$$

com $|w_1| = |w_2| = 1$, $r_1 = |z_1|$ e $r_2 = |z_2|$. Logo, o produto é dado por

$$z_1z_2 = r_1r_2w_1w_2.$$

Mas sabemos interpretar geometricamente o que significa w_1w_2 já que eles são unitários. Logo, z_1z_2 é simplesmente um múltiplo de w_1w_2, pelo elemento r_1r_2.

Utilizando as operações de números complexos obtemos as seguintes relações:

Proposição 3.4.1 *Dados* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, *da forma* $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\theta_1)$ *e* $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\theta_2)$ *então* $z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\,\mathrm{sen}(\theta_1+\theta_2))$.

Demonstração: Temos que

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 + i^2\,\mathrm{sen}\theta_1\,\mathrm{sen}\theta_2) + i(\,\mathrm{sen}\theta_1\cos\theta_2 + \,\mathrm{sen}\theta_2\cos\theta_1)).$$

Como $i^2 = -1$ e além disso $\cos(\theta_1+\theta_2) = \cos\theta_1\cos\theta_2 - \,\mathrm{sen}\theta_1\,\mathrm{sen}\theta_2$ e $\mathrm{sen}(\theta_1+\theta_2) = \mathrm{sen}\theta_1\cos\theta_2 + \,\mathrm{sen}\theta_2\cos\theta_1$ substituindo teremos,

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\,\mathrm{sen}(\theta_1+\theta_2)). \tag{3.2}$$

■

A importante relação acima proporciona a multiplicação de dois números complexos, em formas trigonométicas, onde multiplicam-se os módulos e somam-se os argumentos. Mais ainda, a potenciação de um número complexo que é o produto dele por ele mesmo n vezes.

A fórmula abaixo ficou conhecida como fórmula de DeMroive, mas tal resultado já era conhecido antes dele.

Corolário 3.4.2 *(Fórmula de DeMroive) Seja* $z = \rho(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\theta)$ *então*

$$z^n = \rho^n(\cos(n\theta) + i\,\mathrm{sen}(n\theta)).$$

Demonstração: Dado $z \in \mathbb{C}$ na forma trigonométrica, ou seja, $z = \rho(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\theta)$ temos que

$$z^n = (\rho(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\theta))^n = \rho^n(\cos(n\theta) + i\,\mathrm{sen}(n\theta)),$$

onde a última igualdade segue aplicando a Proposição (3.4.1) n vezes. ■

Utilizando a relação acima que calcula a potência de um número complexo, foi estudado como calcular a operação inversa, ou seja, a raiz enésima de um número complexo. Ao realizar este estudo, Euler descobriu algo surpreendente: qualquer número complexo não nulo tem exatamente n raízes enésimas, com $n \in \mathbb{Z}$. Não foi díficil aceitar que um número positivo tem duas raízes quadradas, mas não se esperava que um número tivesse 3 raízes cúbicas, 4 raízes quartas, 5 raízes quintas, assim por diante.

Proposição 3.4.3 *Dado* $z = \rho(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\theta)$ *não nulo então* z *possui* n *raízes enésimas, com* $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Dado $z = \rho(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\theta)$ temos que a sua raiz enésima será dada por

$$\sqrt[n]{z} = \rho'(\cos\phi + i\,\mathrm{sen}\phi).$$

Ao elevar os dois lados à potência n temos,

$$(\sqrt[n]{z})^n = \rho'^n(\cos(n\phi) + i\,\text{sen}(n\phi)) \Rightarrow z = \rho'^n(\cos(n\phi) + i\,\text{sen}(n\phi)).$$

Igualando com a relação $z = \rho(\cos\theta + i\,\text{sen}\theta)$ teremos,

$$\rho'^n = \rho \Rightarrow \rho' = \sqrt[n]{\rho}$$

e

$$\begin{cases} \cos(n\phi) = cos\theta \\ \text{sen}(n\phi) = \text{sen}\theta. \end{cases}$$

Isto não significa que os ângulos $n\phi$ e θ sejam iguais, deve-se levar em consideração os arcos côngruos. Assim,

$$n\phi = \theta + 2k\pi \Rightarrow \phi = \frac{\theta}{n} + k\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

com $k \in \mathbb{Z}$. Ao variar o valor de k, serão obtidos diferentes valores de ϕ, e assim, diferentes raízes enésimas do número z. Mas, então teríamos infinitas raízes? Para responder esta questão podemos fazer k variar entre os valores $0, 1, 2, 3, ..., n-1, n, n+1, ...$ e estudar os seguintes resultados

$$k = 0 \Rightarrow \phi_1 = \frac{\theta}{n}$$

$$k = 1 \Rightarrow \phi_2 = \frac{\theta}{n} + \left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

$$k = 2 \Rightarrow \phi_3 = \frac{\theta}{n} + 2\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

$$k = 3 \Rightarrow \phi_4 = \frac{\theta}{n} + 3\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

$$...$$

$$k = n-1 \Rightarrow \phi_n = \frac{\theta}{n} + (n-1)\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

$$k = n \Rightarrow \phi_{n+1} = \frac{\theta}{n} + n\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \frac{\theta}{n} + 2\pi$$

$$k = n+1 \Rightarrow \phi_{n+2} = \frac{\theta}{n} + (n+1)\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n} + 2\pi.$$

Observe que todo inteiro k com $k \geq 0$ pode ser escrito como

$$k = r + sn,$$

com $r = 0, \ldots, n-1$ e $s \in \mathbb{Z}$ com $s \geq 0$. Logo,

$$\frac{\theta}{n} + k\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \frac{\theta}{n} + (r + sn)\frac{2\pi}{n} = \frac{\theta}{n} + r\frac{2\pi}{n} + s2\pi = \phi_r + s2\pi,$$

com $\phi_r = \frac{\theta}{n} + r\frac{2\pi}{n}$ e $r = 0, \ldots, n-1$. Entretanto, sabemos que

$$cos(\phi_r + s2\pi) = cos(\phi_r) \;\text{ e }\; sen(\phi_r + s2\pi) = sen(\phi_r).$$

Assim, a partir de $k = n$ os ângulos começam a se diferenciar apenas por múltiplos inteiros de 2π, ou seja, as raízes enésimas de $\rho'(\cos\phi + i\,\text{sen}\phi)$ também passam a se repetir, de modo que existem apenas n raízes distintas, demonstrando assim o resultado descoberto por Euler. ■

Exemplo 3.4.4 *Calculemos as raízes cúbicas de 27 e -27. Podemos escrever o número 27 da seguinte forma:*

$$27 = a + ib = 27 + i0 \Rightarrow a = 27 \quad e \quad b = 0,$$

assim,

$$\text{sen}\theta = \frac{0}{\sqrt{27^2 + 0^2}} = 0 \quad e \quad \cos\theta = \frac{27}{\sqrt{27^2 + 0^2}} = 1.$$

O que implica que $\theta = 0$. Logo, $\rho = \sqrt{27^2 + 0^2} = 27$ e assim $\rho' = \sqrt[3]{27} = 3$. Portanto, as 3 raízes cúbicas de 27 são:

$$\sqrt[3]{27} = \begin{cases} \bullet 3\left(\cos\frac{0}{3} + i\,\text{sen}\frac{0}{3}\right) = 3 \\ \\ \bullet 3\left(\cos\left[\frac{0}{3} + \left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]\right) + i\,\text{sen}\left[\frac{0}{3} + \left(\frac{2\pi}{3}\right)\right] \\ = 3\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i \\ \\ \bullet 3\left(\cos\left[\frac{0}{3} + 2\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]\right) + i\,\text{sen}\left[\frac{0}{3} + 2\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right] \\ = 3\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i. \end{cases}$$

Para -27, procedendo da mesma maneira teremos:

$$-27 = a + ib = -27 + i0 \Rightarrow a = -27 \quad e \quad b = 0,$$

assim,

$$\text{sen}\theta = \frac{0}{\sqrt{(-27)^2 + 0^2}} = 0 \quad e \quad \cos\theta = \frac{-27}{\sqrt{(-27)^2 + 0^2}} = -1.$$

Logo, $\theta = \pi$ e $\rho = \sqrt{(-27)^2 + 0^2} = 27 \Rightarrow \rho' = 3$. Logo, as 3 raízes cúbicas de -27 serão:

$$\sqrt[3]{-27} = \begin{cases} \bullet 3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{3}\right) = 3\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i \\ \\ \bullet 3\left(\cos\left[\frac{\pi}{3} + \left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]\right) + i\,\text{sen}\left[\frac{\pi}{3} + \left(\frac{2\pi}{3}\right)\right] \\ = 3\,(-1 + 0i) = -3 \\ \\ \bullet 3\left(\cos\left[\frac{\pi}{3} + 2\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]\right) + i\,\text{sen}\left[\frac{\pi}{3} + 2\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right] \\ = 3\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i. \end{cases}$$

Passados quase dois séculos, finalmente era possível extrair raízes de números negativos e também de números complexos. Euler descobriu uma maneira de superar os mistérios que intrigaram Bombelli e muitos outros matemáticos que tentaram aplicar a fórmula de Cardano.

As equações algébricas sofreram uma revolução após as descobertas de Euler, ganhando novo impulso. Mas, entre os vários estudos de Euler, o mais notável na área dos números complexos, é hoje considerada a mais bela equação da matemática.

A fórmula de DeMoivre diz que:

$$(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\theta)^n = \cos(n\theta) + i\,\mathrm{sen}(n\theta).$$

Fazendo $f(\theta) = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\theta$, podemos reescrever o resultado acima da seguinte maneira,

$$[f(\theta)]^n = f(n\theta).$$

A propriedade acima é válida para funções exponenciais, e isto pode ter levado Euler a pensar que $\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\theta$, deveria ser algum tipo de função exponencial de uma variável complexa. Demonstrou então que:

$$\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\theta = e^{i\theta}.$$

Esta relação causou surpresa pois, o número e, que nasceu de um estudo sobre juros, estava agora relacionado com potências de números imaginários e funções trigonométicas. Fazendo $\theta = \pi$, ficaremos com

$$\cos\pi + i\,\mathrm{sen}\pi = e^{i\pi},$$

ou seja,

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Esta equação une em uma única fórmula os 5 mais famosos números da matemática: $0, 1, e, \pi \quad \text{e} \quad \sqrt{-1}$. Esta é considerada a mais bela equação de toda a matemática.

Por isso e por tantos outros resultados que o grande Laplace (1749-1827) um dos maiores matemáticos de todos os tempos, dizia aos matemáticos mais novos: "Leiam Euler, leiam Euler, é o mestre de todos nós!".

3.5 Raízes da Unidade

Ao realizarmos o cálculo de $\sqrt[n]{1}$ teremos como soluções

$$w_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \cdot \text{ sen}\left(\frac{2k\pi}{n}\right); k = 0, 1, \ldots, n-1$$

os quais utilizando a relação de Euler também podem ser ser escritas como

$$e^{\frac{2k\pi i}{n}} \quad \text{para} \quad k = 0, ..., n-1.$$

As expressões são denominados raízes n-ésimas da unidade. Podemos observar que

$$\left|e^{\frac{2k\pi i}{n}}\right| = \left|\cos\left(\frac{2k\pi i}{n}\right) + i \cdot \text{ sen}\left(\frac{2k\pi i}{n}\right)\right| = \sqrt{\cos^2\left(\frac{2k\pi i}{n}\right) + \text{ sen}^2\left(\frac{2k\pi i}{n}\right)} = \sqrt{1} = 1,$$

ou seja, todas as raízes n-ésimas da unidade possuem módulo 1. Portanto, podemos representar geometricamente tais valores. A extremidade do vetor ocupará um ponto da circunferência de centro na origem e raio 1. Como o argumento de $e^{\frac{2k\pi i}{n}}$ é $\frac{2k\pi}{n}$, temos que os pontos das extremidades dos vetores correspondentes indicam um modo de dividir a circunferência em n partes iguais.

Exemplo 3.5.1 *O número 1 possui cinco raízes de ordem 5. Vamos calculá-las.*

Temos que

$$1 = cos(2k\pi) + i\,\text{sen}(2k\pi) = \cos(k360^{\text{o}}) + i\,\text{sen}(k360^{\text{o}}).$$

Uma raiz quíntupla de 1 é da forma

$$w_k = \cos\left(\frac{k360^{\text{o}}}{5}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{k360^{\text{o}}}{5}\right) \quad \text{para} \quad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Assim teremos:
Para $k = 0$ temos $w_0 = \cos 0 + i\,\text{sen}0 = 1$.
Para $k = 1$ temos $w_1 = \cos 72^{\text{o}} + i\,\text{sen}72^{\text{o}}$.
Para $k = 2$ temos $w_2 = \cos 144^{\text{o}} + i\,\text{sen}144^{\text{o}}$.
Para $k = 3$ temos $w_3 = \cos 216^{\text{o}} + i\,\text{sen}216^{\text{o}}$.
Para $k = 4$ temos $w_4 = \cos 288^{\text{o}} + i\,\text{sen}288^{\text{o}}$.

Logo, podemos representar geometricamente tais valores sobre o círculo unitário, dividindo-o em cinco partes iguais (Figura 3.7).

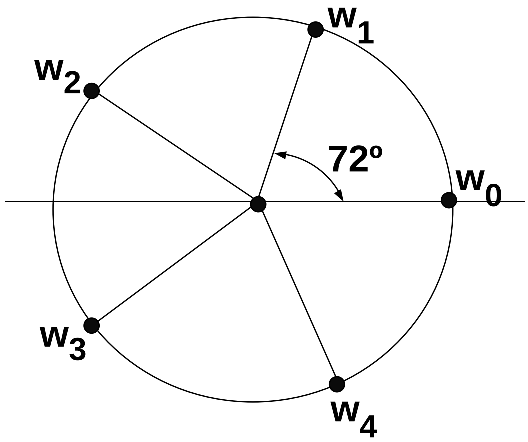

Figura 3.7:

Ou seja, a partir da raiz w_0, todas as demais são obtidas fazendo uma rotação de 72º.

3.6 Teorema Fundamental da Álgebra

O alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855) é considerado o maior matemático de todos os tempos, podendo ser comparado com Isaac Newton (1642-1727) e Arquimedes que viveu no século III a.C., um privilégio para poucos. Carl Friedrich Gauss nasceu em Brunswick em 1777, teve uma infância modesta e dependeu dos esforços da mãe para ter acesso aos estudos. Aos 3 anos, já corrigia as contas realizadas por seu pai e aos 9, calculou com enorme facilidade a soma dos números de 1 a 100. Verificou que poderia agrupar os números $(100+1), (99+2), (98+3)$, etc, de modo que a soma seria sempre 101, e como o total de pares formado é 50 então o total procurado é $50 \cdot 101 = 5050$. Durante sua adolescência demonstrou ter conhecimento suficiente para discutir sobre os axiomas dos *Elementos*, questionou a independência do postulado das paralelas, o que possibilitou mais tarde a origem de outros tipos de geometrias. Demonstrou o teorema geral das potências binomiais descoberto por Newton mas não demonstrado. Essas descobertas chegaram ao conhecimento de Ferdinand, Duque de Brunswick, que passou a contribuir para que Gauss estudasse nas melhores escolas até o seu doutorado.

Gauss era um prodígio linguístico, assim como Euler, fazendo com que ficasse com dúvida se iria cursar Matemática ou Filologia. Um acontecimento histórico fez com que optasse pela Matemática. Em 1795, aos 18 anos, demonstrou a possibilidade de se construir com régua e compasso um polígono regular de 17 lados, fato este em aberto desde a Grécia Clássica. Provou ainda que as construções somente são possíveis quando os números de lados dos polígonos são primos da forma $2^{2^n} + 1$.

Ao longo de sua vida, Gauss contribuiu para o desenvolvimento da Matemática em praticamente todas as áreas, produzindo trabalhos no campo do Cálculo Integral e Diferencial, Teoria das Probabilidades, Estatística, Geometria, Teoria das Funções de Variáveis Complexas, Astronomia, Geometria Diferencial e Eletromagnetismo. Mas, seu campo preferido era o da Teoria dos Números, paixão que fica claro em uma de suas frases:

"A matemática é a Rainha das Ciências e a Teoria dos números é a Rainha da Matemática".

Nesta área publicou aos 24 anos uma de suas obras primas, a *Disquisitiones Arithmeticae* (Pesquisas Aritméticas), livro de beleza e profundidade incomparáveis. Não tinha pressa em publicar as suas descobertas, pois era muito perfeccionista desejando fazer delas verdadeiras obras de arte, e também porque procurava evitar polêmicas com quem não comprendia seus trabalhos. Levou uma vida austera e recatada e a única recompensa que buscava parece ter sido a satisfação de desvendar os mistérios da Ciência.

Gauss sempre fez o melhor possível em suas pesquisas, em sua tese de Doutorado de 1799, apresentada aos 21 anos, não foi diferente. Sendo considerada por muitos a maior tese de doutorado em matemática, nos apresenta um dos resultados mais importantes da teoria das equações algébricas conhecido como o Teorema Fundamental da Álgebra, na qual utilizou propriedades topológicas da reta e do plano, que não tinham sido ainda explicitadas em sua época. A expressão número complexo também foi introduzida por Gauss. Este importante Teorema afirma que:

Teorema 3.6.1 *(Teorema Fundamental da Álgebra) Toda equação polinomial dada da forma* $a_n x^n + ... + a_1 x + a_0 = 0$, *com* $a_i \in \mathbb{C}$, $i = 0, 1, ..., n$ *possui exatamente* n *raízes complexas, se contarmos suas multiplicidades.*

Essa era uma suspeita que rondava os matemáticos, desde os tempos de Cardano, que equações do 3º grau, 4º grau e assim por diante tinham 3 raízes, 4 raízes, respectivamente. Euler demonstrou, como vimos na seção anterior, que qualquer número real ou complexo, tem n raízes enésimas com $n \in \mathbb{Z}$, chegando próximo de descobrir o número de raízes das equações polinomiais de grau n. Vários matemáticos enunciaram que elas têm exatamente n raízes sem, no entanto, conseguirem demonstrar.

A primeira formulação escrita deste teorema foi dada por Peter Roth, cujo local e data onde nasceu é desconhecida. Sabe-se que ele trabalhou em Nuremberg, na Alemanha, até sua morte em 1617. Ele afirma em seu livro *Arithmetica Philosophica* em 1600, que uma equação tem no máximo tantas raízes quanto seu grau. Observe que isto ocorreu 199 anos antes da prova de Gauss.

Albert Girard (1595-1632) enunciou em 1629 no seu livro *L'Invention Novelle en Algèbre*, que uma equação algébrica completa de grau n possui n raízes. Girard quando questionado sobre a necessidade destas soluções impossíveis (raízes complexas) respondeu: "para três aspectos: para a validade das regras gerais, devido à sua utilidade e por não haver outras soluções".

René Descartes (1596-1650) em seu *La Géométrie* aceitava que uma equação tem tantas raízes quanto seu grau, se admitirmos as raízes imaginárias. Descartes introduziu em seu livro a denominação números imaginários. Com sua célebre afirmação: "nem as raízes verdadeiras nem as falsas (negativas) são sempre reais, por vezes elas são imaginárias". Para ele as raízes negativas podiam ser tornadas reais transformando a equação em outra de raízes positivas, mas isso não podia ser feito com raízes complexas.

O matemático francês Jean Baptiste le Rond d'Alembert (1717-1783) publicou em 1746 algo que considerou uma prova do teorema, ficando conhecido na França como Teorema de d'Alembert. Em verdade, a demonstração de D'Alembert não mostra nem que existem raízes da equação. Ele demonstra qual a forma das raízes, se elas existirem. O mérito de D'Alembert foi o de divulgar os números complexos. D'Alembert partiu de uma origem humilde e alcançou o ápice da fama na sociedade francesa pela grandeza de seu talento. Uma vez ou outra se deixou levar pela vaidade, ficando em conflito com o afável Euler, por divergência em torno das equações diferenciais que deveriam reger as vibrações de uma corda tensionada. No final se reconciliaram e declarou que ninguém estava à altura de substituir Euler como matemático oficial do reino.

Em [3] (Apêndice C) de João Bosco Pitombeira de Carvalho, ele afirma que:

> "Uma contribuição importante de D'Alembert, foi esclarecer que tipos de números complexos podem ser obtidos ao se resolver equações algébricas. Como consequência da percepção ainda imprecisa dos números complexos, os matemáticos do século XVIII acreditavam que, resolvendo equações algébricas diferentes, e em particular extraindo raízes de números complexos, se obteriam diferentes "tipos" dessas "quantidades". D'Alembert mostrou, em 1747, que qualquer expressão algébrica de um número complexo $a + b\sqrt{-1}$ é também um número da forma $a + b\sqrt{-1}$. Expressão algébrica, para D'Alembert, incluía elevar um número complexo a uma potência complexa. Sua demonstração só não é correta para o caso $(a + b\sqrt{-1})^{c+d\sqrt{-1}}$."

As obras de d'Alembert na Física e na Matemática foram grandiosas, inspirando matemáticos franceses como Lagrange, Laplace, Legendre, Cauchy entre outros.

Euler, em 1749, fez investigações sobre o Teorema Fundamental da Álgebra atingindo um outro nível. Ele estudou as operações com números complexos, incluindo potências imaginárias, logaritmos de números complexos, funções trigonométricas de argumento complexo, etc. Ele mostrou que se $a+\sqrt{-1}$ é raiz de uma equação então $a-\sqrt{-1}$ também será, ou seja, se uma equação possui raiz complexa, ela possui um fator da forma x^2+kx+r, mostrando em seguida que toda equação de grau ímpar tem pelo menos uma raiz real, e que equações de grau par ou não possui raízes reais ou possui pares dessas raízes. Demonstrou também que todas as raízes não reais são da forma $a+b\sqrt{-1}$.

Logo, a tese de Gauss foi recebida com grande perplexidade pela comunidade acadêmica, pois nela continha uma demonstração inquestionável do Teorema Fundamental da Álgebra e além disso, estuda criticamente as provas precedentes de d'Alembert (1746), Euler (1749), Foncenet (1759) e Lagrange (1772) as quais eram insatisfatórias, segundo ele.

Segundo o Teorema Fundamental da Álgebra toda equação polinomial de coeficientes reais ou complexos tem, no campo complexo, pelo menos uma raiz. Seja o polinômio:

$$P(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0.$$

Pelo mencionado no teorema existe pelo menos um número complexo k_1 para o qual $P(k_1) = 0$.

Segue da álgebra elementar que o resto da divisão de qualquer polinômio por $x-\alpha$ é exatamente $P(\alpha)$. Assim, se $P(k_1)=0$ então $P(x)$ é divisível por $x-k_1$ e o polinômio pode ser escrito como o produto de $x-k_1$ por um polinômio de grau $n-1$. Para o polinômio de grau $n-1$ também é válido o Teorema Fundamental da Álgebra, ou seja, ele é divisível por pelos menos um fator $x-k_2$. Logo temos que, $P(x)$ pode ser reescrito como o produto de n binômios do tipo $x-k_j$ com $j=1,2,3,...,n$. Como existem n valores de x que anulam cada um dos n binômios, o polinômio $P(x)$ de grau n tem exatamente n raízes, que podem ser repetidas pois nada obriga que os n $k_j^{'s}$ sejam todos diferentes entre si.

Observe que o Teorema Fundamental da Álgebra nos diz que um polinômio de grau n admite em $\mathbb{C}$, n raízes complexas, mas não nos dá uma pista de como obtê-las. E isso é, em geral, um problema muito difícil, a medida que o grau aumenta.

O resultado abaixo nos auxilia na busca de raízes racionais de polinômios com coeficientes racionais.

Primeiramente considere o seguinte polinômio com coeficientes racionais

$$q(x) = \frac{b_n}{c_n}x^n + \ldots + \frac{b_1}{c_1}x + \frac{b_0}{c_0} \quad \text{onde} \quad b_i, c_i \in \mathbb{Z} \ \forall\, i = 0, 1, \ldots, n.$$

Como $c_i \neq 0$ para todo $i = 0, \ldots, n$ multiplique o polinômio acima por $c_n \ldots c_1 c_0$. Assim

$$p(x) = (c_n \ldots c_1 c_0) \cdot q(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0,$$

com $a_i = c_n \ldots c_{i-1} c_{i+1} \ldots c_1 c_0 \cdot b_i \in \mathbb{Z}$. E veja que α é raiz de $q(x)$ se, somente se, α é raiz de $p(x)$. Deste modo, com o intuito de procurar raízes de polinômios com coeficientes racionais, basta analisar o caso de polinômios com coeficientes inteiros. Abaixo vamos considerar conhecido o conceito de um inteiro dividir outro (ver [16]).

Proposição 3.6.2 *Seja $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ um polinômio com coeficientes inteiros. Se $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q}$ com $mdc(\alpha, \beta) = 1$ é raiz de $p(x)$ então $\alpha | a_0$ e $\beta | a_n$.*

Demonstração: Suponha $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q}$ raiz de $p(x)$, assim $0 = p(\frac{\alpha}{\beta}) = a_n (\frac{\alpha}{\beta})^n + \ldots + a_1 (\frac{\alpha}{\beta}) + a_0$. Assim,

$$0 = \beta^n \cdot p\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} \beta + \ldots + a_1 \alpha \beta^{n-1} + a_0 \beta^n. \tag{3.3}$$

Logo, $-a_n \alpha^n = \beta(a_{n-1} \alpha^{n-1} + \ldots + a_1 \alpha \beta^{n-2} + a_0 \beta^{n-1})$. Ou seja, β divide $a_n \alpha^n$ $(\beta | a_n \alpha^n)$, mas $mdc(\alpha, \beta) = 1$, ou seja, $\beta \nmid \alpha$ e portanto $\beta | a_n$. Analogamente, segue de (3.3) que

$$-a_0 \beta^n = \alpha(a_n \alpha^{n-1} + a_{n-1} \alpha^{n-2} \beta + \ldots + a_1 \beta^{n-1}).$$

Logo, $\alpha | a_0 \beta^n$, mas como α e β são primos entre si, segue que $\alpha | a_0$. ■

Exemplo 3.6.3 *Queremos saber se o polinômio $P(x) = x^5 - 10x^4 + 54x^3 - 132x^2 + 137x - 50$ possui raízes racionais. Pelo resultado acima se existirem soluções racionais elas serão os divisores de -50, ou seja,*

$$\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10, \pm 25, \pm 50.$$

Testanto para $x = 1$ temos que $P(1) = 0$, logo 1 é raiz do polinômio. Podemos reescrever $P(x)$ como o seguinte produto:

$$P(x) = (x - 1)(x^4 - 9x^3 + 45x^2 - 87x + 50).$$

Verificando $x = 2$ no polinômio $Q(x) = x^4 - 9x^3 + 45x^2 - 87x + 50$ temos que $Q(2) = 0$, logo 2 é raiz de $Q(x)$. Assim, podemos reescrever $P(x)$ como o produto dos seguintes polinômios:

$$P(x) = (x - 1)(x - 2)(x^3 - 7x^2 + 31x - 25).$$

Tomando $T(x) = x^3 - 7x^2 + 31x - 25$ podemos verificar que $T(1) = 0$, ou seja, 1 é raiz de $T(x)$. Logo, $P(x)$ será encontrado através do seguinte produto:

$$P(x) = (x - 1)^2 (x - 2)(x^2 - 6x + 25).$$

Fazendo $N(x) = x^2 - 6x + 25$ *e resolvendo a equação* $x^2 - 6x + 25 = 0$ *temos que, as raízes do polinômio são:* $(x - (3 + 4i))$ *e* $(x - (3 - 4i))$. *Reescrevendo* $P(x)$ *teremos:*

$$P(x) = (x - 1)^2(x - 2)(x - (3 + 4i))(x - (3 - 4i)).$$

Portanto, as raízes do polinômio $P(x)$ *são* $1, 1, 2, 3 - 4i$ *e* $3 + 4i$.

Portanto, Gauss ao demonstrar que as equações polinomiais têm pelo menos uma raiz no campo complexo, prova na verdade que elas têm exatamente n raízes, sendo n o grau do polinômio. Gauss voltou a estudar este teorema, apresentando outras 3 demonstrações, todas de difícil compreensão. Duas delas eram explicitamentes topológicas. A primeira demonstração deste Teorema, que aparece na sua Tese, ele utiliza estas técnicas topológicas. A mais fácil demonstração disponível foi encontrada por Argand em 1815 e simplificada por Cauchy (ver [8] pág. 117).

Não vamos apresentar nenhuma demonstração deste teorema por serem longas, ou por ser necessário introduzir muitos conceitos, fugindo do nosso propósito.

Muitas consequências do Teorema Fundamental da Álgebra são obtidas, dentre elas destacamos:

Corolário 3.6.4 *Seja* $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ *um polinômio com coeficientes reais. Seja* $z = a + bi \in \mathbb{C}$ *raiz de* $p(x)$ *então* $\overline{z} = a - bi$ *também o é.*

Demonstração: De fato, se z é raiz de $p(x)$ então $p(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$, o que implica $\overline{a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0} = \overline{0}$. Donde segue da Proposição (3.2.1) que

$$\overline{a_n}\,\overline{z^n} + \ldots + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} = \overline{0}.$$

Mas $a_i \in \mathbb{R}$, $\forall i = 0, 1, \ldots, n$. Logo, $a_n \overline{z}^n + \ldots + a_1 \overline{z} + a_0 = 0$, ou seja, $p(\overline{z}) = 0$, como queríamos provar. ∎

Assim, para todo polinômio com coeficientes reais, suas raízes imaginárias aparecem aos pares, isto é, uma raiz e sua conjugada. O que não ocorre com polinômios com coeficientes complexos.

Exemplo 3.6.5

1. *O polinômio* $p(x) = x - i = 0$ *possui uma única raiz* $x = i$ *imaginária pura.*

2. *Dado* $q(x) = x^2 - ix + 1 = 0$ *é fácil verificar que*

$$x = \frac{i \pm \sqrt{(-i)^2 - 4}}{2} = \frac{i \pm \sqrt{-5}}{2} = \frac{i \pm i\sqrt{5}}{2}$$

são as raízes de $q(x)$. *Ou seja,*

$$x_1 = \frac{i}{2}(1 + \sqrt{5}) \quad e \quad x_2 = \frac{i}{2}(1 - \sqrt{5}).$$

Corolário 3.6.6 *Toda equação polinomial com coeficientes reais de grau ímpar tem pelo menos uma raiz real.*

Demonstração: Segue do Teorema Fundamental da Álgebra que dado um polinômio $p(x)$ de grau n, ele possui n raízes em $\mathbb{C}$. Entretanto segue do corolário anterior que as raízes complexas aparecem aos pares. Como o grau de $p(x)$ é ímpar, segue que $p(x)$ admite pelo menos uma raiz real. ■

Também com base no Teorema Fundamental da Álgebra, o matemático checo Bernhard Bolzano (1781-1848) provou um importante teorema.

Teorema 3.6.7 *(Teorema de Bolzano) Dados uma equação $P(x) = c_n x^n + ... + c_1 x + c_0$, com $c_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2, ..., n$, e dois números reais a e b com $(a < b)$, se $P(a)$ e $P(b)$ tiverem o mesmo sinal, o número de raízes reais de $P(x)$ (eventualmente repetidas) no intervalo (a, b) será par; se $P(a)$ e $P(b)$ tiverem sinais opostos, o número de raízes de $P(x)$ em (a, b) será ímpar.*

O que Bolzano descobriu era de suma importância mas, incompleta pois não permitia saber com exatidão quantas raízes reais existiam no intervalo. Somente em 1829 o matemático suíço Charles Sturm apresentou um método que permitia saber quantas raízes reais possuíam uma equação em um intervalo (a, b). Este trabalho foi publicado no Bulletin de Ferrussac com o título *"Mémoire sur la résolution des équations numériques"*. A demonstração do chamado Teorema de Sturm é relativamente simples mas, por utilizar técnicas do Cálculo Diferencial, não será aqui apresentada. Uma demonstração detalhada do Teorema de Sturm com propriedades e aplicações pode ser encontrada, por exemplo, em [17].

Estes são alguns exemplos que ilustram a importância do Teorema Fundamental da Álgebra no desenvolvimento do estudo de soluções para as equações algébricas. Uma abordagem mais completa pode ser encontrada em [8].

Capítulo 4

Aplicações dos Números Complexos

No decorrer dos capítulos anteriores, vimos que os números complexos surgiram no século XVI para resolução de equações algébricas de 3º grau. A partir de então os números complexos foram utilizados de forma tímida para viabilizar os cálculos, evoluíram com a possibilidade de representação geométrica, e hoje permitem a junção de vários resultados dispersos da Matemática. Daí por diante, os números complexos passam a ser inseridos em vários ramos do conhecimento humano, da matemática e de outras ciências.

Podemos citar por exemplo sua utilidade na Aerodinâmica. Kutta, em 1902, e Joukowski, em 1906, obtiveram independentemente a hoje conhecida fórmula de Kutta e Joukovski, utilizando transformações geométricas. Eles construíram uma curva fechada no plano complexo que representa o perfil de uma asa de avião e, usando o princípio de Bernoulli (1738) e a teoria de funções complexas, deduziram uma fórmula envolvendo exponencial complexa, que permitiu calcular a força de levantamento responsável pela sustentação do vôo. Os números complexos possibilitaram uma demonstração matemática para o vôo (para aprofundamento teórico ver [2]).

Os números complexos também são encontrados nos fractais. Temos que procedimentos (algoritmos) recursivos (iterativos ou recorrentes) no plano complexo criam figuras invariantes por escala, denominadas fractais. As figuras geométricas possuem dimensão fracionária e servem como ferramenta para descrever as formas irregulares da superfície da terra, modelar fenômenos, aparentemente imprevisíveis, de natureza meteorológica, astronômica, econômica, biológica, etc.

O conjunto de Mandelbrot é uma das mais conhecidas imagens fractais. A figura pode ser criada a partir da iteração de números complexos, escritos como $a+bi$, onde as coordenadas a (horizontal) e b (vertical) representam duas quantidades independentes (pontos na tela do computador).

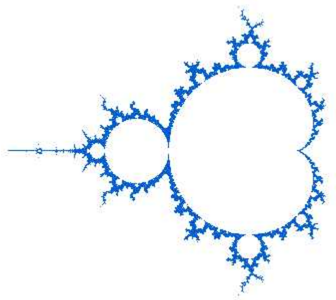

Figura 4.1: A iteração é feita com a fórmula: $z(n+1) = z(n) \cdot z(n) + c$, onde z e c são números complexos.

Exemplo 4.0.8 *O quadrado de Sierpinski é uma figura plana desenvolvida por Waclaw Sierpinski, as características desta figura atualmente são definidas como fractais, podemos iniciar o procedimento (iteração) com um quadrado de lado L. Em seguida, dividimos seus lados em 3 partes iguais, obtendo 9 quadrados de lados L/3. Retiramos o quadrado central, repetimos o processo em cada quadrado restante e assim por diante. Obtemos, então, o quadrado de Sierpinski.*

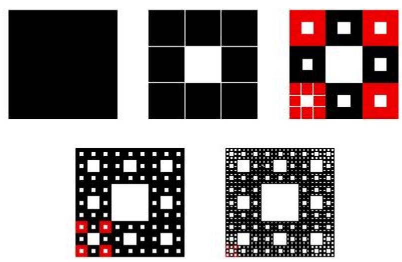

Figura 4.2: Quadrado de Sierpinski

4.1 Aplicações dos Números Complexos na Geometria Plana

Nesta seção, utilizaremos resultados obtidos anteriormente para apresentar a demonstração de teoremas da geometria plana e para solucionar problemas geométricos.

Teorema 4.1.1 *(Lei dos Cossenos) Em um triângulo ABC qualquer, temos que*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A},$$

onde a, b e c são as medidas dos lados opostos aos vértices A, B e C, respectivamente.

Demonstração: Suponha que seja dado um sistema de coordenadas xOy de modo que A coincida com a origem O e OB coincida com o eixo Ox. Sejam $z_1 = \rho_1$ o número complexo representado por B e $z_2 = \rho_2(\cos\alpha + i\,\text{sen}\alpha)$ o número complexo representado por C, (Figura (4.3)).

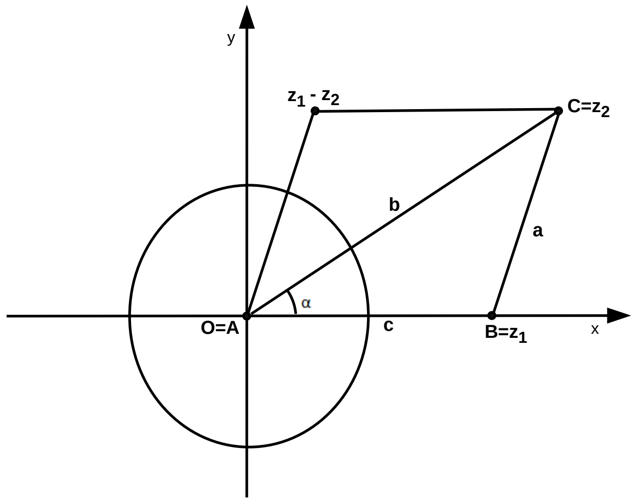

Figura 4.3:

Assim temos, $|z_1 - z_2|^2 = a^2$ e

$$|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2}) = z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} - (z_2\overline{z_1} + z_1\overline{z_2}).$$

Como

$$z_2\overline{z_1} = \rho_1\rho_2(\cos\alpha + i\,\text{sen}\alpha),$$

$$z_1\overline{z_2} = \rho_1\rho_2(\cos\alpha - i\,\text{sen}\alpha),$$

temos

$$z_2\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} = \rho_1\rho_2(2\cos\alpha)$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} |z_1 - z_2|^2 = a^2 &= |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\rho_1\rho_2\cos\alpha \\ &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}. \end{aligned}$$

■

Os números complexos podem ser utilizados em problemas da Geometria que envolvem rotações. Este mesmo comportamento, antes exercido por uma matriz de rotação, pode ser agora também exercido pelos números complexos, pois na multiplicação de dois complexos na forma trigonométrica, multiplicam-se os módulos e somam-se os argumentos. Portanto, se um ponto (a, b) qualquer deve ser rotacionado em relação a origem, de ângulo α no sentido anti-horário, basta multiplicar o numero complexo $a + bi$ pelo complexo $1 \cdot (\cos\alpha + i \cdot \text{sen}\alpha)$ (ver a interpretação geométrica da multiplicação de números complexos na seção (3.4)).

Exemplo 4.1.2 *Encontre as novas coordenadas do ponto $A = (4,7)$ após uma rotação de 90^o no sentido anti-horário em relação a origem. O vetor $\overrightarrow{OA} = (4,7)$ representa geometricamente o complexo $z = 4 + 7i$.*

Para fazer uma rotação de 90^o no sentido anti-horário, precisamos multiplicar z por $1(\cos 90^o + i\,\text{sen}90^o)$. Como $1(\cos 90^o + i\,\text{sen}90^o) = i$, então basta multiplicar z por i. Assim temos

$$i \cdot (4 + 7i) = -7 + 4i = (-7, 4).$$

Portanto, as coordenadas do ponto A', após uma rotação de 90^o do ponto A, são -7 e 4, ou seja, $A' = (-7, 4)$ (Figura (4.4)).

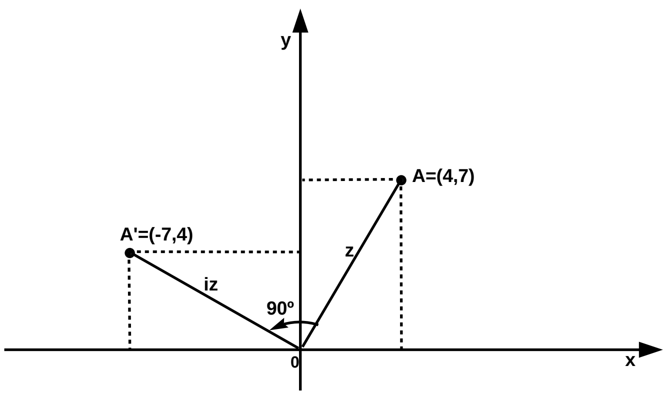

Figura 4.4: Rotação de 90º

Exemplo 4.1.3 *Consideremos o problema de determinar o vértice C do triângulo equilátero ABC, onde são dados os vértices $A = (1,2)$ e $B = (3,5)$.*

Neste caso temos duas soluções possíveis, C_1 e C_2 (Figura (4.5)).

O vetor $\overrightarrow{AC_1}$ é obtido quando giramos o vetor $\overrightarrow{AB}$ de 60^o em torno de sua origem, ou seja,

$$\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB}(\cos 60^o + i\,\text{sen}60^o).$$

Se O é a origem do nosso sistema de coordenadas, temos

$$\overrightarrow{OC_1} - \overrightarrow{OA} = (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OC_1} - (1 + 2i) = ((3 + 5i) - (1 + 2i))\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OC_1} = \frac{4-3\sqrt{3}}{2} + i\frac{7+2\sqrt{3}}{2}.$$

Portanto,

$$C_1 = \left(\frac{4-3\sqrt{3}}{2}, \frac{7+2\sqrt{3}}{2}\right).$$

E assim, C_2 é obtido girando $\overrightarrow{AB}$ de -60^o em torno do ponto A. Outros exemplos podem ser obtidos em [6].

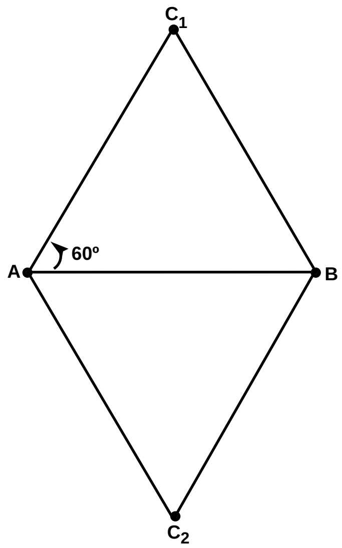

Figura 4.5: Triângulo Equilátero ABC_1 ou ABC_2

No trabalho de Robson Coelho Neves em [18], podemos encontrar uma lista de teoremas e exercícios de aplicações dos números complexos na geometria plana.

4.2 Números Complexos e Física

Os números complexos tem aplicações em diversos ramos da física. Logo, é importante mostrar a sua utilidade para despertar o interesse e a curiosidade por parte dos estudantes, que não se sente motivado a estudar este conjunto pois não sabe para que será necessário, mas quem no ensino superior seguir a área de Engenharia Elétrica, de Controle e Mecânica provavelmente vão manipular novamente estes números.

O cientista Stephen Hawking aplicou números complexos na sua teoria do buraco negro. Os complexos aparecem neste estudo para dar sentido ao tempo imaginário que é um dos aspectos da sua teoria.

Na Engenharia de Controle, são utilizados para desenvolver um sistema de controle da quantidade de água e da taxa de saída, existe uma válvula que controla a taxa de entrada da água num tanque e existe uma vazão para outro tanque. Para controlar o nível de água de cada tanque, existe um modelo matemático que faz este controle, abrindo e fechando as válvulas através de um sistema elétrico, que processa segundo este modelo matemático. Dependendo do comportamento da função modelo temos duas opções: se tivermos o número complexo com a parte real negativa, conforme aumenta o tempo a resposta da função vai se estabilizando, convergindo para um valor. Se a parte real for positiva, conforme aumenta o tempo, a resposta da função oscila e diverge. Também podemos aplicar este modelo para controlar temperaturas de tanques, fornos, ou seja, quando envolve dois tanques e tem algo para ser controlado, temos um sistema de 2ª ordem e nele surgirá os números complexos.

Os campos eletromagnéticos possuem uma componente elétrica e outra magnética, assim é preciso um par de números reais (este par pode ser visto como um número complexo) para descrever este fenômeno.

Na eletrônica e na eletricidade, a análise de circuitos de corrente alternada é feita com a ajuda dos números complexos. Grandezas como a Impedância (em ohms) e a Potência Aparente (em volt-ampère) são exemplos de quantidades complexas. Deve-se ao cientista alemão Hermann Von Helmholtz (1821-1824) o pioneirismo na aplicação de números complexos à teoria de circuitos elétricos. A aplicação de corrente alternada foi divulgada nos Estados Unidos por Arthur Edwin (1861-1939) e Charles Steinmetz (1865-1923) com auxílio de Julius Berg (1871-1941) no final do século XIX. Em 1823, Edwin admitiu o termo Impedância (oposição que um circuito elétrico faz à passagem de corrente quando é submetido a uma tensão) assim como os números complexos para os componentes dos circuitos elétricos de corrente alternada, o que foi seguido por Steinmetz. Desde então, os números complexos passaram a ser fundamentais no desenvolvimento da Engenharia Elétrica, enquanto ramo científico (ver detalhes em [12]).

Os números complexos são utilizados em análise de circuitos de corrente alternada, facilitando os cálculos. A fórmula $U = Ri$, utilizada no ensino médio com números reais, passa a ser representada como $U = Zi$ no campo dos números complexos, em que U é a tensão, Z a impedância e i a corrente elétrica. A impedância é o número complexo $Z = R + jX$, ou na forma trigonométrica $Z = |Z|(\cos\theta + j\,\text{sen}\theta)$, onde $j^2 = -1$ e θ é o ângulo de defasagem entre a tensão aplicada e a corrente no circuito, $|Z|$ é o módulo, R é a resistência elétrica (em ohm) e X é a resultante (em ohm) das reatâncias indutivas e capacitivas do circuito. Para que não haja confusão entre i, símbolo da corrente elétrica, e i, unidade imaginária, os engenheiros elétricos usam j como unidade imaginária. Além disso, usam a notação $|Z|\angle\theta$ para a forma trigonométrica $|Z|(\cos\theta + j\,\text{sen}\theta)$ do número complexo Z (mais informações em [6]).

Exemplo 4.2.1 *Uma fonte de tensão de uma residência, de valor eficaz* $220\angle 0^o$, *alimenta uma carga de impedância* $Z = 10 + 10j$ *ohm. Qual a corrente elétrica fornecida pela fonte?*

Da relação $U = Zi$, *temos* $i = \frac{U}{Z}$.

Para realizarmos essa operação, vamos escrever U *e* Z *na forma trigonométrica. Assim,* $U = 220\angle 0^o = 220(\cos 0^o + j\,\text{sen}0^o)$ *e precisamos agora obter a forma trigonométrica de* Z. *Como,* $Z = 10 + 10j$ *implica* $|Z| = \sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2}$, *logo*

$$\cos\theta = \frac{10}{10\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad e \quad \text{sen}\theta = \frac{10}{10\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

o que implica em $\theta = 45^o$, *portanto*

$$Z = 10\sqrt{2}(\cos 45^o + j\,\text{sen}45^o) = 10\sqrt{2}\angle 45^o.$$

Agora calculando a corrente elétrica temos:

$$\begin{aligned} i &= \tfrac{220(\cos 0^o + j\,\text{sen}0^o)}{10\sqrt{2}(\cos 45^o + j\,\text{sen}45^o)} = 11\sqrt{2}\tfrac{e^{j0^o}}{e^{j45^o}} = 11\sqrt{2}e^{j(0^o - 45^o)} \\ &= 11\sqrt{2}(\cos(-45^o) + j\,\text{sen}(-45^o)) = 11\sqrt{2}\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2} - \tfrac{\sqrt{2}}{2}j\right) = 11 - 11j \end{aligned}$$

ou

$$i = 11\sqrt{2}\angle -45^o.$$

4.3 Resolução da Equação $x^3 - 15x - 4 = 0$

Conhecemos as ferramentas necessárias para trabalhar com os números complexos, enunciamos o Teorema Fundamental da Álgebra, portanto sabemos que equações do 3º grau possuem 3 raízes, logo podemos imaginar que temos informação suficiente para resolver qualquer equação do 3º grau. Em particular a equação $x^3 - 15x - 4 = 0$ que ao utilizarmos a Fórmula de Cardano ou Tartaglia chegamos a seguinte expressão $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ que foi "rudemente"resolvida no passado por Bombelli.

Utilizando o método de Euler para extrair as duas raízes cúbicas teremos: $2 + \sqrt{-121} = 2 + 11i$, logo para $a = 2$ e $b = 11$ teremos $\rho = |2 + 11i| = \sqrt{2^2 + 11^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$ e $\cos\theta = \frac{2}{5\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{25}$ e $\text{sen}\theta = \frac{11}{5\sqrt{5}} = \frac{11\sqrt{5}}{25}$ o que implica $\theta = arc\cos\frac{2\sqrt{5}}{25}$.

Recordemos (ver Proposição (3.4.3)) que se $z = \rho(\cos\theta + i\,\text{sen}\theta)$ então $\sqrt[n]{z} = \rho'(\cos\phi + i\,\text{sen}\phi)$, onde $\rho' = \sqrt[n]{\rho}$ e $\phi = \frac{\theta}{n} + k\left(\frac{2\pi}{n}\right), k = 0, 1, \ldots, n-1$. Logo, $\rho' = \sqrt[3]{5\sqrt{5}} = \sqrt[3]{5 \cdot 5^{\frac{1}{2}}} = (5^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{3}} = \sqrt{5}$ e $\phi = \frac{\theta}{3} + k\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ com $k = 0, 1, 2$.

Portanto as raízes cúbicas de $2 + \sqrt{-121} = 2 + 11i$ são:

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = \begin{cases} \bullet\sqrt{5}\left(\cos\frac{\theta}{3} + i\,\text{sen}\frac{\theta}{3}\right); \\ \bullet\sqrt{5}\left(\cos\left(\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)\right); \\ \bullet\sqrt{5}\left(\cos\left(\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3}\right)\right). \end{cases}$$

Analogamente $2 - \sqrt{-121} = 2 - 11i$ é tal que seu comprimento é $\rho_1 = \sqrt{2^2 + (-11)^2} = 5\sqrt{5}$ e seu argumento θ_1 é dado por:

$$\cos\theta_1 = \frac{2}{5\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{25} \quad \text{e} \quad \text{sen}\theta_1 = -\frac{11}{5\sqrt{5}} = -\frac{11\sqrt{5}}{25}.$$

Como $\cos\theta_1 = \cos\theta$ e $\text{sen}\theta_1 = -\text{sen}\theta$ temos que $\theta_1 = -\theta$ onde $-\theta$ significa percorrer o círculo trigonométrico no sentido horário. Assim,

$$\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = \sqrt[3]{2 - 11i} = \rho_1'(\cos\phi_1 + i\,\text{sen}\phi_1),$$

com

$$\rho_1' = \sqrt[3]{\rho_1} = \sqrt{5} \quad \text{e} \quad \phi_1 = \frac{\theta_1}{3} + k\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\theta}{3} + k\left(\frac{2\pi}{3}\right), k = 0, 1, 2.$$

Logo,

$$\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = \begin{cases} \bullet\sqrt{5}\left(\cos\left(-\frac{\theta}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(-\frac{\theta}{3}\right)\right); \\ \bullet\sqrt{5}\left(\cos\left(-\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(-\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)\right); \\ \bullet\sqrt{5}\left(\cos\left(-\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(-\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3}\right)\right). \end{cases}$$

É fácil verificar que $\cos\left(-\frac{\theta}{3}\right) = \cos\left(\frac{\theta}{3}\right)$ e $\text{sen}\left(-\frac{\theta}{3}\right) = -\,\text{sen}\left(\frac{\theta}{3}\right)$, e observe que $\frac{2\pi}{3} = 120^{\text{o}}$ e $\frac{4\pi}{3} = 240^{\text{o}}$, ou ainda, $-\frac{4\pi}{3} = -240^{\text{o}} = \frac{2\pi}{3}$. Logo,

$$\begin{aligned} \cos\left(-\tfrac{\theta}{3} + \tfrac{2\pi}{3}\right) &= \cos\left(-\tfrac{\theta}{3} - \tfrac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\tfrac{\theta}{3} + \tfrac{4\pi}{3}\right), \\ \text{sen}\left(-\tfrac{\theta}{3} + \tfrac{2\pi}{3}\right) &= \text{sen}\left(-\tfrac{\theta}{3} - \tfrac{4\pi}{3}\right) = -\,\text{sen}\left(\tfrac{\theta}{3} + \tfrac{4\pi}{3}\right), \\ \cos\left(-\tfrac{\theta}{3} + \tfrac{4\pi}{3}\right) &= \cos\left(-\tfrac{\theta}{3} - \tfrac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\tfrac{\theta}{3} + \tfrac{2\pi}{3}\right), \\ \text{sen}\left(-\tfrac{\theta}{3} + \tfrac{4\pi}{3}\right) &= \text{sen}\left(-\tfrac{\theta}{3} - \tfrac{2\pi}{3}\right) = -\,\text{sen}\left(\tfrac{\theta}{3} + \tfrac{2\pi}{3}\right). \end{aligned}$$

Assim,

$$\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = \begin{cases} \bullet\sqrt{5}\left(\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) - i\,\text{sen}\left(\frac{\theta}{3}\right)\right); \\ \bullet\sqrt{5}\left(\cos\left(\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3}\right) - i\,\text{sen}\left(\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3}\right)\right); \\ \bullet\sqrt{5}\left(\cos\left(\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) - i\,\text{sen}\left(\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)\right). \end{cases}$$

Ou seja, as raízes cúbicas de $2-\sqrt{-121}$ são as conjugadas das raízes cúbicas de $2+\sqrt{-121}$.

Entretanto, sabemos que todas as raízes de $x^3 - 15x - 4 = 0$ são reais, logo as únicas combinações de $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$ com $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ que anulam as partes imaginárias são:

$$\begin{array}{ll} \bullet & \sqrt{5}\left(\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{3}\right)\right) \\ + & \sqrt{5}\left(\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) - i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{3}\right)\right) = 2\sqrt{5}\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \bullet & \sqrt{5}\left(\cos\left(\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)\right) \\ + & \sqrt{5}\left(\cos\left(\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) - i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)\right) = 2\sqrt{5}\cos\left(\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \bullet & \sqrt{5}\left(\cos\left(\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3}\right)\right) \\ + & \sqrt{5}\left(\cos\left(\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3}\right) - i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3}\right)\right) = 2\sqrt{5}\cos\left(\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3}\right). \end{array}$$

Como $\cos\theta = \frac{2\sqrt{5}}{25} \cong 0,17888543816$ então $\theta = 79^o 41' 57''$ e $\frac{\theta}{3} \cong 26^o 33' 59''$, as três raízes serão aproximadamente:

$$\begin{aligned} R_1 &= 2\sqrt{5}\cos\tfrac{\theta}{3} \cong 3,999999, \\ R_2 &= 2\sqrt{5}\cos\left(\tfrac{\theta}{3} + \tfrac{2\pi}{3}\right) \cong -3,73205, \\ R_3 &= 2\sqrt{5}\cos\left(\tfrac{\theta}{3} + \tfrac{4\pi}{3}\right) \cong -0,267949. \end{aligned}$$

Estes resultados trazem certo desapontamento, pois após mais de duzentos anos de esforços na pesquisa de números complexos temos ainda soluções aproximadas.

Hoje podemos calcular as raízes da equação $x^3 - 15x - 4 = 0$ utilizando outros métodos. Por exemplo: sabemos que se existem soluções racionais para esta equação, os candidatos serão: $\pm 1, \pm 2$ ou ± 4 (ver Proposição(3.6.2)).

Testando as possíveis raízes na equação, poderemos constatar que $x = 4$ é raiz da equação. Logo, podemos reescrever a equação acima como o seguinte produto:

$$x^3 - 15x - 4 = (x-4)(x^2 + 4x + 1).$$

Resolvendo a equação $x^2 + 4x + 1 = 0$ temos que as raízes são: $x_1 = -2 + \sqrt{3}$ e $x_2 = -2 - \sqrt{3}$. Assim, as raízes exatas são: 4, $-2 + \sqrt{3}$ e $-2 - \sqrt{3}$.

Embora os números complexos tenham nascido para solucionar os problemas relacionados às equações do terceiro grau, eles não trouxeram maiores benefícios neste assunto em relação aos demais métodos, como o de Newton e o de Viète. Mas foi em outros campos da Matemática e da Física que os números complexos puderam demonstrar sua verdadeira força e sua condição de indispensabilidade nas ciências exatas.

Conclusão

O presente trabalho abordou, inicialmente, a parte histórica das Equações Algébricas para podermos estabeler a sua relação com o conjuto dos Números Complexos. Portanto, no capítulo 1 traçamos um panorama histórico sobre os primórdios das equações algébricas e apresentamos alguns métodos de resolução de equações do segundo grau, em diferentes períodos.

Concluiu-se, no capítulo 2, que são inúmeras as situações em que resolver equações do terceiro grau se fazem necessárias para encontrar a solução de um dado problema, e que os números complexos surgiram da necessidade de encontrar soluções para equações cúbicas e não quadráticas. Neste contexto, podemos observar a evolução da matemática na busca de soluções para equações algébricas de grau 3, cujo substancial avanço ocorreu com os trabalhos de vários matemáticos italianos do século XVI, os quais destacamos: Cardano, Tartaglia, Ferrari, Bombelli, entre outros. Ao manipularem a fórmula da Cardano ou Tartaglia chegaram a uma indeterminação, e manipular com raízes quadradas de números negativos era necessário para encontrar a solução de equações do terceiro grau. Ao longo deste capítulo descrevemos a contribuição de cada um deles neste assunto.

Após muitos anos de estudo com a colaboração de diversos matemáticos entre eles, Bombelli, Euler e Gauss os números complexos foram ganhando formato, mas a atual identidade só foi possível após a sua interpretação geométrica. No capítulo 2 concluímos também que o conjunto dos números reais não era suficiente para resolver algumas equações, por exemplo. A insuficiência dos números reais foi demonstrada pela primeira vez por Bombelli, mas outros matemáticos também avançaram no estudo da raiz imaginária. No capítulo 3 introduzimos o conjunto dos números complexos, descrevendo suas principais propriedades e alguns resultados fundamentais como o Teorema Fundamental da Álgebra.

Já no capítulo 4 destacamos as aplicações dos números complexos na matemática e em outras áreas. Progressos chaves na Física moderna não teriam sido possíveis sem o uso dos números complexos, como por exemplo, em correntes alternadas, a teoria da relatividade, o processamento de sinais, a dinâmica dos fluidos e a mecânica quântica. Sem dúvida, o conjunto dos números complexos revolucionou o mundo científico e por isso é importante quebrar as barreiras que envolvem este conceito, na busca de melhorar a abordagem deste assunto no ensino médio, para o estudante que não se sente motivado a estudar este conjunto pois não sabe para que será necessário. Com certeza os números complexos são bem mais importantes do que apenas para buscar as raízes para as equações do segundo grau. Concluímos também que apesar de o surgimento dos números complexos estar relacionado com a resolução das equações do terceiro grau, eles não trouxeram maiores benefícios neste assunto em relação a outros métodos. Mas foi em outros campos da Matemática e da Física que os números complexos puderam demonstrar sua verdadeira força e sua condição de indispensabilidade nas ciências exatas.

Acreditamos que o trabalho desenvolvido contribuirá para que o processo de ensino aprendizagem do conteúdo matemático números complexos ocorra de uma forma que os alunos compreendam e possam aplicá-lo para resolver problemas.

Apêndice A

Equações do Terceiro Grau e a Trigonometria

François Viète, matemático francês do século XVI, obteve importantes resultados no campo das equações algébricas, como o método de resolução para equações do 2º grau citado em capítulos anteriores. Na trigonometria deduziu fórmulas que utilizamos até os dias de hoje como, por exemplo,

$$\operatorname{sen} A + \cos B = 2 \operatorname{sen} \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}.$$

Nas equações algébricas, Viète tinha extrema facilidade para fazer substituições de modo a obter problemas mais fáceis de resolver. Utilizou em seus estudos a mesma ideia que transformava a equação $ax^3+bx^2+cx+d=0$ em outra sem o termo do 2º grau, fazendo $x = y - (\frac{b}{3a})$. Com sua extrema habilidade em realizar substituições, Viète conseguiu encontrar um outro método para a resolução de equações do 3º grau (ver [8]).

Dada a equação $x^3+px+q=0$, assim como nas equações do 2º grau, Viète introduziu a incógnita auxiliar z, de modo que

$$x = z - \frac{p}{3z}.$$

Fazendo as devidas substituições teremos,

$$\left(z - \frac{p}{3z}\right)^3 + p\left(z - \frac{p}{3z}\right) + q = 0$$

$$\Rightarrow z^3 - 3z^2\frac{p}{3z} + 3z\frac{p^2}{9z^2} - \frac{p^3}{27z^3} + pz - \frac{p^2}{3z} + q = 0 \Rightarrow z^3 - \frac{p^3}{27z^3} + q = 0,$$

donde obtemos a equação,

$$27z^6 + 27qz^3 - p^3 = 0$$

que é uma equação do 2º grau em z^3. Deste modo, obtemos a solução

$$\begin{aligned} z^3 &= \tfrac{-27q \pm \sqrt{(27q)^2 + 4\cdot 27\cdot p^3}}{2\cdot 27} \\ &= -\tfrac{q}{2} \pm \sqrt{\tfrac{(27q)^2+4\cdot 27\cdot p^3}{(2\cdot 27)^2}} = -\tfrac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\tfrac{q}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{p}{3}\right)^3}, \end{aligned}$$

donde obtemos que

$$x = z - \frac{p}{3z} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^2}} - \frac{p}{3\sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^2}}}.$$

O método elaborado por Viète é correto e pode ser demonstrado que é equivalente ao desenvolvido por Tartaglia, no entanto, os problemas relacionados a raízes negativas e a quantidade de soluções continuavam a aparecer.

Ao tentar resolver a equação cúbica $x^3 - 15x - 4 = 0$, cujas raízes não haviam sido encontradas pela fórmula de Cardano ou por sua própria fórmula, encontrou uma solução trigonométrica para a equação.

Tratando-se de Viète, o caminho seguido não poderia ser outro senão a substituição de incógnitas. Tartaglia utilizou a substituição $x = A + B$ para desenvolver seu método mas, pelo método trigonométrico, Viète substituiu x por $k\cos\theta$.

Assim a equação $x^3 + px + q = 0$ pode ser escrita da seguinte maneira:

$$(k\cos\theta)^3 + p(k\cos\theta) + q = 0 \Rightarrow \cos^3\theta k^3 + p(k\cos\theta) + q = 0,$$

assim

$$\cos^3\theta + \frac{p}{k^2}\cos\theta + \frac{q}{k^3} = 0. \tag{A.1}$$

Como Viète conhecia as relações trigonométricas, ele sabia que

$$\cos 3\theta = \cos\theta(4\cos^2\theta - 3) \Rightarrow \cos^3\theta - \frac{3}{4}\cos\theta - \frac{\cos 3\theta}{4} = 0.$$

Relacionando as igualdades acima com a Equação (A.1) teremos

$$\frac{p}{k^2} = -\frac{3}{4} \Rightarrow k^2 = -\frac{4p}{3} \Rightarrow k = \pm 2\sqrt{-\frac{p}{3}}$$

e

$$\frac{q}{k^3} = -\frac{\cos 3\theta}{4} \Rightarrow \cos 3\theta = -\frac{4q}{k^3} = \frac{-4q}{\pm 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\left(-\frac{4p}{3}\right)}.$$

Temos então o valor de $\cos 3\theta$ em função de p e q, assim, podemos determinar $\cos\theta$ através da tabela trigonométrica, e portando teremos o valor de x, que é $k\cos\theta$. A grande vantagem destas relaçoes é que podemos encontrar o valor de x, nas equações em que a fórmula de Cardano conduzia a raiz quadrada de números negativos. Ou seja, Viète descobrira uma forma de driblar os números complexos, visto que não conseguia trabalhar com eles.

Voltando a equação $x^3 - 15x - 4 = 0$, temos $p = -15$ e $q = -4$. Logo, $k = \pm 2\sqrt{\frac{15}{3}} = \pm 2\sqrt{5}$.

Utilizando $k = 2\sqrt{5}$ temos,

$$\cos 3\theta = \left(\frac{-4(-4)}{(2\sqrt{5})^3}\right) = \left(\frac{2\sqrt{5}}{25}\right) \cong 0,178885438.$$

Na época Viète deduziu através das tabelas trigométricas que 3θ poderia ser $79^o41'57''$, hoje sabemos que a equação trigonométrica $\cos x = m$, com $-1 \leq m \leq 1$, tem infinitas soluções, do tipo $x = 2\pi n \pm \alpha$, onde α é o menor dos arcos positivos para os quais $\cos\alpha = m$. Assim, concluiu que $\theta \cong 26^o33'59''$ e $\cos\theta \cong 0,894427$. E portanto,

$$x \cong 2\sqrt{5} \cdot 0,894427 \cong 3,999999,$$

sendo o valor exato 4.

Logo, para $k = -2\sqrt{5}$ temos,

$$\cos 3\theta = \left(\frac{-4(-4)}{(-2\sqrt{5})^3}\right) = \left(-\frac{2\sqrt{5}}{25}\right) \cong -0,178885438.$$

Então, $3\theta \cong 100^o18'03''$ e $\theta \cong 33^026'01'' \Rightarrow \cos\theta \cong 0,834512$, isto ignorando a multiplicidade de ângulos que satisfazem esta relação.

Portanto,

$$x \cong -2\sqrt{5} \cdot 0,834512 \cong -3,732051,$$

sendo o valor exato $-2-\sqrt{3}$.

A terceira solução da equação $x^3 - 15x - 4 = 0$, somente será encontrada se levarmos em consideração todos os arcos que satisfazem as equações trigonométricas $\cos 3\theta = \frac{2\sqrt{5}}{25}$ e $\cos 3\theta = -\frac{2\sqrt{5}}{25}$, embora o resultado seja um número aproximado.

Resolvendo novamente, mas agora considerando todos os arcos teremos, $k = 2\sqrt{5}$ então $\cos 3\theta \cong 0,178885438$, e assim $3\theta \cong 2n\pi + 79^o41'57''$ com $n \in \mathbb{Z}$, logo

$$\theta \cong \frac{2n\pi}{3} + 26^o33'59'' \quad \text{e} \quad \cos\theta \cong \cos\left(\frac{2\pi n}{3} + 26^o33'59''\right).$$

Variando o valor de n teremos exatamente três valores diferentes para $\cos\theta$, fazendo $n = 0$ teremos,

$$\cos(26^o33'59'') \cong 0,894427,$$

para $n = 1$,

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3} + 26^o33'59''\right) \cong -0,834512$$

e para $n = 2$

$$\cos\left(\frac{4\pi}{3} + 26^o33'59''\right) \cong -0,059915.$$

Assim as soluções serão:

$$x_1 \cong 2\sqrt{5} \cdot 0,894427 \cong 3,999999$$

$$x_2 \cong -2\sqrt{5} \cdot 0,834512 \cong -3,732051$$

$$x_3 \cong 2\sqrt{5} \cdot (-0,059915) \cong -0,267949$$

sendo os valores exatos, 4, $-2-\sqrt{3}$ e $-2+\sqrt{3}$ respectivamente.

Para $k = -2\sqrt{5}$ e $\cos\theta \cong -0,178885438$, chegaríamos aos mesmos resultados.

Viète obteve uma importante interpretação para o problema, mas além de não ser algébrica, não resolvia a questão das raízes quadradas de números negativos. Além disso, não era válida para todas as equações, por exemplo, se aplicado na equação $x^3-11x-20=0$, onde $p=-11$ e $q=-20$ teremos,

$$\cos 3\theta = \pm\frac{\frac{q}{2}}{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3}} = \pm\frac{-10}{\sqrt{\left(-\frac{11}{3}\right)^3}} \cong \pm 1,42427$$

e portanto não existe ângulo que satisfaça tal igualdade pois $-1 \leqslant \cos\theta \leqslant 1$.

Os estudos de Viète avançaram bastante, mas a solução definitiva para as equações do terceiro grau somente viriam anos mais tarde, quando o matemático Leonhard Euler dominou os números complexos.

Apêndice B

Equações do 4º Grau

Vamos apresentar brevemente como os matemáticos italianos abordaram o problema de determinar raízes de uma equação do 4º grau.

Ludovico Ferrari, nascido na cidade de Bolonha em 1522, foi discípulo e secretário de Cardano, como citado anteriormente. Sua brilhante inteligência lhe proporcionou, à partir dos 18 anos, a oportunidade de ensinar por conta própria em Milão. Morreu cedo, aos 38 anos, logo após tornar-se professor de matemática na Universidade de Bolonha.

Foi proposto a Cardano o seguinte desafio que envolvia a seguinte equação:

$$x^4 + 6x^2 - 60x + 36 = 0$$

Não conseguindo obter êxito na resolução, Cardano passou o problema ao jovem Ferrari, que inspirado, conseguiu encontrar um método para a solução das equações do quarto grau.

Uma equação do quarto grau na forma geral é do tipo:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0,$$

com $a, b, c, d, e \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad a \neq 0$. Tal equação sempre pode ser transformada em outra do tipo:

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0$$

fazendo $x = y + m$ e calculando m de modo a anular o termo de 3º grau, uma vez que ao resolver a equação incompleta acima, também irá solucionar a equação completa.

Ferrari estudou a equação

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

e como nas equações do 2º grau, tentou reagrupar de forma a obter quadrados perfeitos.

A equação foi reescrita da seguinte forma:

$$x^4 + (p + \alpha)x^2 + (r + \beta) = \alpha x^2 - qx + \beta \tag{B.1}$$

sendo α e β números a serem determinados de forma que os dois lados da igualdade se tornem quadrados perfeitos. Para isso é necessário que os discriminantes dos trinômios sejam iguais a zero, ou seja,

$$(p + \alpha)^2 - 4(r + \beta) = 0 \tag{B.2}$$

para o trinômio $x^4 + (p+\alpha)x^2 + (r+\beta)$. Para o trinômio $\alpha x^2 - qx + \beta$ teremos

$$q^2 - 4\alpha\beta = 0 \Rightarrow \beta = \frac{q^2}{4\alpha}. \tag{B.3}$$

Substituindo (B.3) na Equação (B.2) teremos,

$$(p+\alpha)^2 - 4\left(r + \frac{q^2}{4\alpha}\right) = 0 \Rightarrow (p+\alpha)^2 - 4r - \frac{q^2}{\alpha} = 0$$

assim,

$$\alpha^3 + 2p\alpha^2 + (p^2 - 4r)\alpha - q^2 = 0 \tag{B.4}$$

chegando a uma equação do terceiro grau em α. Logo, podemos encontrar o valor de α utilizando a fórmula de resolução de equações do terceiro grau e em seguida o valor de β. Temos que a equação (B.1) é da forma

$$(x^2 + \lambda)^2 = (\gamma x + \mu)^2$$

para algum $\lambda, \gamma, \mu \in \mathbb{R}$. Assim, extraindo a raiz quadrada em ambos os lados teremos duas equações do 2º grau, onde cada uma delas fornece duas raízes, logo o método fornece as 4 soluções da equação do 4º grau inicial.

O método é muito elegante e eficiente, mas também bastante trabalhoso. O grande feito de Ferrari foi demonstrar que era possível resolver equações do 4º grau utilizando apenas operações algébricas.

Mas, o que aconteceria se a equação do 3º grau em α tivesse 3 raízes? Poderia acontecer de uma equação do 4º grau ter 12 raízes? A resposta é não. Sejam x_1,x_2,x_3 e x_4 as quatro raízes da equação do 4º grau. O método de Ferrari consiste em reduzir a equação do 4º grau em um par de equações do 2º grau, sendo que cada uma delas fornece duas raízes. Como as soluções x_1,x_2,x_3 e x_4 podem ser agrupadas em dois grupos duas a duas de três maneiras, temos que α corresponde a apenas uma das 3 formas diferentes, mas estas são sempre as mesmas, independente da raiz α adotada.

Exemplo B.0.1 *Dada a equação $x^4 - 15x^2 - 10x + 24 = 0$ com $p = -15$, $q = -10$ e $r = 24$. Para aplicar o método de Ferrari será necessário encontrar α e β tais que*

$$x^4 - (15-\alpha)x^2 + (24+\beta) = \alpha x^2 + 10x + \beta \tag{B.5}$$

com ambos os lados da igualdade quadrados perfeitos. Assim, pelas equações (B.2) e (B.3) temos

$$(15-\alpha)^2 - 4(24+\beta) = 0$$

e

$$10^2 - 4\alpha\beta = 0 \Rightarrow \beta = \frac{25}{\alpha}.$$

Substituindo o valor de β na equação $(15-\alpha)^2 - 4(24+\beta) = 0$ teremos pela Equação (B.4)

$$\alpha^3 - 30\alpha^2 + 129\alpha - 100 = 0.$$

Esta é uma equação do terceiro grau, a qual verificamos por inspeção que $\alpha_1 = 1$ é raiz. Fatorando o polinômio obtemos,

$$\alpha^3 - 30\alpha^2 + 129\alpha - 100 = (\alpha - 1)(\alpha^2 - 29\alpha + 100).$$

E é fácil verificar que as raízes da equação $\alpha^2 - 29\alpha + 100 = 0$ são

$$\alpha = \frac{29 \pm \sqrt{441}}{2} = \frac{29 \pm 21}{2}.$$

Ou seja, $\alpha_2 = 4$ e $\alpha_3 = 25$.

Resta agora analisar cada um dos valores de α.

Para $\alpha_1 = 1$, temos $\beta_1 = \frac{q^2}{4\alpha_1} = \frac{100}{4} = 25$, o qual substituindo na Equação (B.5), temos

$$x^4 - (15-1)x^2 + (24+25) = x^2 + 10x + 25$$

$$\Rightarrow x^4 - 14x^2 + 49 = x^2 + 10x + 25 \Rightarrow (x^2-7)^2 = (x+5)^2.$$

Extraindo a raiz quadrada de ambos os lados, teremos

$$\sqrt{(x^2-7)^2} = \sqrt{(x+5)^2} \Rightarrow |x^2 - 7| = |x+5|,$$

ou seja,

$$x^2 - 7 = x + 5 \Rightarrow x^2 - x - 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -3, \end{cases}$$

ou

$$x^2 - 7 = -(x+5) \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_3 = -2 \\ x_4 = 1. \end{cases}$$

Para $\alpha_2 = 4$, temos $\beta_2 = \frac{q^2}{4\alpha_2} = \frac{100}{16} = \frac{25}{4}$. Substituindo na Equação (B.5), temos

$$x^4 - (15-4)x^2 + (24 + \frac{25}{4}) = 4x^2 + 10x + \frac{25}{4}$$

$$\Rightarrow x^4 - 11x^2 + \frac{121}{4} = 4x^2 + 10x + \frac{25}{4} \Rightarrow \left(x^2 - \frac{11}{2}\right)^2 = \left(2x + \frac{5}{2}\right)^2,$$

extraindo a raiz quadrada, teremos

$$x^2 - \frac{11}{2} = 2x + \frac{5}{2} \Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -2, \end{cases}$$

ou

$$x^2 - \frac{11}{2} = -\left(2x + \frac{5}{2}\right) \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 1 \\ x_4 = -3. \end{cases}$$

Para $\alpha_3 = 25$, *temos* $\beta_3 = \frac{q^2}{4\alpha_3} = \frac{100}{100} = 1$. *Substituindo na Equação (B.5), obtemos*

$$x^4 - (15 - 25)x^2 + (24 + 1) = 25x^2 + 10x + 1$$

$$\Rightarrow x^4 + 10x^2 + 25 = 25x^2 + 10x + 1 \Rightarrow (x^2 + 5)^2 = (5x + 1)^2,$$

donde concluimos que

$$x^2 + 5 = 5x + 1 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 1, \end{cases}$$

ou

$$x^2 + 5 = -(5x + 1) \Rightarrow x^2 + 5x + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_3 = -3 \\ x_4 = -2. \end{cases}$$

Portanto, as raízes da equação $x^4 - 15x^2 - 10x + 24 = 0$ *são -3, -2, 1 e 4, sendo diferente apenas a maneira de reagrupar os termos da equação* $x^4 - 15x^2 - 10x + 24 = 0$, *ou seja, as equações*

$$(x^2 - 7)^2 = (x + 5)^2, \left(x^2 - \frac{11}{2}\right)^2 = \left(2x + \frac{5}{2}\right)^2 \quad e \quad (x^2 + 5)^2 = (5x + 1)^2,$$

são todas equivalentes à equação original.

Referências Bibliográficas

[1] Amaral, J. T., *Método de Viète para resolução de equações do 2º grau*, Revista do Professor de Matemática Nº 13, SBM, 1988.

[2] Avila, G., *Variáveis Complexas e Aplicações*, Rio de Janeiro; LTC, 2003.

[3] Carmo, M. P., Morgado, A. C. e Wagner, E., *Trigonometria e Números Complexos*, Rio de Janeiro; SBM, 2005.

[4] Carneiro, J. P. Q., *Equações algébricas de grau maior que dois: assunto para o ensino médio*, Revista do Professor de Matemática Nº 40, SBM, 1999.

[5] Carvalho, P. C. P., Lima, E. L., Morgado, A. C. e Wagner, E., *A Matemática do Ensino Médio, Volume 3*, Rio de Janeiro; SBM, 2006.

[6] Dante, L. R., *Matemática: Contexto e Aplicações, Volume 3*, São Paulo; Ática, 2011.

[7] Eves, H., *Introdução à História da Matemática*, Campinas-SP; Editora da UNICAMP, 2004.

[8] Garbi, G. G., *O Romance das Equações Algébricas*, São Paulo; Editora Livraria da Física, 2010.

[9] Hernandes, M. E., *Aspectos algébricos dos números complexos*, Notas de aula, UEM, 2014.

[10] Lima, E. L., *Meu Professor de Matemática e outras histórias*, Rio de Janeiro; SBM, 2012.

[11] Lima, E. L., *Números e Funções Reais*, Rio de Janeiro; SBM, 2013.

[12] Matemática Complexa, *Aplicação dos Números Complexos.* Disponível em <https://sites.google.com/site/matematicacomplexa/> (Acesso em 20/01/15 às 11h).

[13] Milies, C. P., *A Solução de Tartaglia para a equação do terceiro Grau*, Revista do Professor de Matemática Nº 25, SBM, 1994.

[14] Milies, C. P., *A emergência dos números complexos*, Revista do Professor de Matemática Nº 24, SBM, 1993.

[15] Moreira, C. G. T. A., *Uma solução das equações do 3º e do 4º graus*, Revista do Professor de Matemática Nº 25, SBM, 1994.

[16] Muniz Neto, A. C., *Tópicos de Matemática Elementar: teoria dos números, Volume 5*, Rio de Janeiro; SBM, 2012.

[17] Nader, F.N., *Teorema de Sturm: Uma demonstração detalhada do Teorema de Sturm com Propriedades e Aplicações*, Trabalho de Conclusão de Curso - PROFMAT, 2014.

[18] Neves, R. C., *Aplicações de Números Complexos em Geometria*, Trabalho de Conclusão de Curso - PROFMAT, 2014.

[19] Pastor, A. L. P., *Equações do 2º grau: completando quadrados*, Revista do Professor de Matemática Nº 06, SBM, 1985.