PROFMAT

Departamento de Matemática
Universidade Federal do Paraná

81531-990, Curitiba, PR
Brazil

Logaritmos: uma abordagem didática

Simone Sotozono Alonso Ramos

Orientador: José Carlos Corrêa Eidam, Dr.
Curitiba
2015

Disponível via INTERNET:
http://www.mat.ufpr.br

Logaritmos: uma abordagem didática

Simone Sotozono Alonso Ramos
Departamento de Matemática - UFPR
81531-990, Curitiba, PR
Brazil
e-mail: simone.soto@gmail.com
Orientador: José Carlos Corrêa Eidam, Dr.

Resumo

Este trabalho abordará os Logaritmos de três formas: A tradicional, como expoente; estabelecendo uma relação entre uma progressão geométrica e uma progressão aritmética e definindo o logaritmo de e de forma natural, como área sob uma hipérbole, esta última sendo um interessante preâmbulo ao Cálculo Diferencial e Integral.

Para trazer estas três concepções, será apresentada uma abordagem histórica tornando o texto atraente a professores que busquem subsídios acerca do tema.

Por meio de situações problemas , onde a função logarítmica e sua inversa, a função exponencial se apresentem como os modelos matemáticos mais adequados devido as suas caracterizações, serão apresentadas as principais propriedades dessas funções e em especial da função e^x, que aparece naturalmente em vários fenômenos da natureza.

Será visto que a relevância inicial dos Logaritmos que era aumentar o poder das operações aritméticas, perdeu seu valor com a popularização das calculadoras e dos computadores, porém, não perdeu seu destaque no ensino da Matemática pois a função logarítmica e a função exponencial representam a única maneira de descrever matematicamente uma grandeza cuja taxa de variação é proporcional à quantidade dessa grandeza presente num dado momento.

Sumário

Introdução

Os Logaritmos fazem parte dos Conteúdos que devem ser ensinados no 1º ano do Ensino Médio e na maioria das vezes, o ensino deste tema se baseia em longas e tediosas resoluções de equações e inequações, indo contra as orientações dos PCN, 2000 [25] e das Diretrizes do Estado do Paraná, [12] tornando o tema frustrante para os estudantes e para o professor.

Este trabalho tem a finalidade de dar suporte para o Professor de Matemática no Ensino dos Logaritmos, propondo que o ensino das propriedades, definições e caracterizações das Funções Exponenciais e Logarítmicas sejam mostradas através do estudo variacional das grandezas envolvidas que modelam os fenômenos naturais e situações problemas onde existe uma grandeza cuja taxa de variação é proporcional à quantidade da mesma existente em um dado instante.

O essencial dos Logaritmos atualmente não é saber fazer uso de sua ferramenta de cálculo aritmético e sim entender que as Funções Exponenciais modelam fenômenos onde a variável dependente cresce ou decresce muito rapidamente enquanto as Funções Logarítmicas modelam fenômenos onde a variável dependente cresce ou decresce muito lentamente, sendo as variações de ambas as funções proporcionais à variável independente. Esta característica tem diversas aplicações em outras áreas além da Matemática, como Economia, Biologia, Física, Geografia, Agronomia, Química entre outras.

Para seguir esta temática, este trabalho se encontra organizado da forma brevemente descrita a seguir.

No Capítulo 1, são abordadas as orientações do Ministério da Educação (MEC) por meio dos PCNs (Parâmetros Curriculares Nacionais) [25] e das Diretrizes do Estado do Paraná, [12] a respeito das Funções Exponenciais e Logarítmicas com a finalidade de nortear a metodologia utilizada no trabalho.

No Capítulo 2, uma pequena abordagem histórica foi descrita, mostrando o desenvolvimento dos conceitos e propriedades dos Logaritmos e das Funções Exponenciais e Logarítmicas ao longo dos séculos, dando ênfase aos seus principais protagonistas.

No Capítulo 3, são apresentadas a definição de Logaritmo como Expoente e a definição geométrica, bem como as definições formais das Funções Exponenciais e Logarítmicas e suas caracterizações e como consequência; as propriedades, teoremas e observações dessas funções. Definimos também o número e e a função $y = e^x$.

No Capítulo 4, são apresentadas atividades que definem os logaritmos através de progressões aritméticas e geométricas, focando em sua principal propriedade: transformar produto em soma e apontando também a principal propriedade da função exponencial, inversa da função logarítmica, que é transformar soma em produto. A maioria dos colégios aborda as funções exponenciais e logarítmicas antes das Progressões Aritmética e Geométrica, mas como o auxílio dessas progressões torna o entendimento das ideias principais da função logarítmica e de sua inversa muito mais simples e natural e como as noções de progressões são facilmente apreendidas pelos estudantes do 1º ano do Ensino Médio em um curto espaço de tempo, o trabalho propõe que esse estudo das Progressões seja feito antes.

Ainda no Capítulo 4, são apresentados exemplos de situações problemas e aplicações que são modelados através de funções exponenciais e logarítmicas, estudando importantes propriedades dessas funções e a importância dos logaritmos naturais como modelos matemáticos de alguns fenômenos naturais.

A função exponencial e^x é apresentada como a única função cuja derivada é proporcional à própria função. Apesar deste não ser conteúdo ministrado no Ensino Médio, é muito importante que o Professor não tenha uma visão restrita do conteúdo que ministra, além do que, da forma como abordada, se torna uma introdução ao Cálculo Diferencial e Integral, o que seria muito enriquecedor aos estudantes segundo Ávila (1991) [2] :

> "Hoje em dia, com os computadores e as mini-calculadoras, não há porque preocupar-se com *tábuas de logaritmos* e seu uso. Gastava-se muito tempo com isso, treinando os alunos na resolução de triângulos e em outros cálculos envolvendo tabelas de logaritmos de funções trigonométricas. Eis aí um espaço a ser preenchido com outras coisas. Não que descartemos o logaritmo. Ele continua sendo muito importante, não mais para o cálculo numérico, mas como *função logarítmica*. Sua inversa, a função exponencial, é talvez a função mais importante de toda a Matemática, com muitas aplicações interessantes, como já mencionamos. O natural, como se vê, é levar o logaritmo para o contexto do Cálculo. Definido como área sob uma hipérbole, desta forma, ele é um interessante prelúdio ao Cálculo Integral."

Portanto, é importante que o estudante conheça o uso das *tábuas de logaritmos* devido a sua importância histórica, porém, de forma rápida e resumida, dando ênfase às funções logarítmicas e exponenciais por meio de situações problemas que as caracterizem, por isso o trabalho conta com dois anexos contendo uma tábua de logaritmos decimais (ANEXO B) e como usá-la para fazer multiplicações, divisões, potenciações e radiciações (ANEXO A).

O ANEXO C aborda a demonstração da soma dos n termos de uma progressão Geométrica (PG) e também o que acontece quando n tende ao infinito.

O último anexo (ANEXO D) contém as atividades do Capítulo 4 prontas para serem aplicadas aos alunos do Ensino Médio para facilitar o trabalho do professor que deseje aplicá-las.

1 A perspectiva do trabalho para abordagem do tema de Exponenciais e Logaritmos

A abordagem no Ensino dos Conteúdos previstos na disciplina de matemática são orientados por vários documentos. Neste capítulo será feito um breve levantamento sobre as orientações do Ministério da Educação (MEC) por meio dos PCNs (Parâmetros Curriculares Nacionais) [25] e das Diretrizes do Estado do Paraná, [12]. O objetivo principal desses documentos é de orientar os educadores por meio da normatização de alguns fatores fundamentais concernentes a cada disciplina. O foco do trabalho é o Nível Médio no ensino de Matemática, no que diz respeito ao ensino-aprendizagem de Funções, em particular as funções exponenciais e logarítmicas.

A partir da análise desses documentos, o trabalho adotará uma metodologia para abordar o conteúdo de logaritmos e funções exponenciais e logarítmicas.

1.1 Documentos Oficiais

Conforme PCN, 2000 [25]

> "O critério central é o da contextualização e da interdisciplinaridade, ou seja, é o potencial de um tema permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático, ou, ainda, a relevância cultural do tema, tanto no que diz respeito às suas aplicações dentro ou fora da Matemática, como à sua importância histórica no desenvolvimento da própria ciência.
> Um primeiro exemplo disso pode ser observado com relação às funções. O ensino isolado desse tema não permite a exploração do caráter integrador que ele possui. ...
> Além das conexões internas à própria Matemática, o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia. Cabe, portanto, ao ensino de Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações problema de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática".(pg.43)

Segundo as Diretrizes do Estado do Paraná, [12], as relações interdisciplinares são entendidas como necessárias para a compreensão da totalidade e

> "assume-se a Educação Matemática como campo de estudos que possibilita ao professor balizar sua ação docente, fundamentado numa ação crítica que conceba a Matemática como atividade humana em construção.
> Pela Educação Matemática, almeja-se um ensino que possibilite aos estudantes análises, discussões, conjecturas, apropriação de conceitos e formulação de ideias.

> Aprende-se Matemática não somente por sua beleza ou pela consistência de suas teorias, mas, para que, a partir dela, o homem amplie seu conhecimento e, por conseguinte, contribua para o desenvolvimento da sociedade.
>
> Cabe ao professor a sistematização dos conteúdos matemáticos que emergem das aplicações, superando uma perspectiva utilitarista, sem perder o caráter científico da disciplina e de seu conteúdo. Ir além do senso comum pressupõe conhecer a teoria científica, cujo papel é oferecer condições para apropriação dos aspectos que vão além daqueles observados pela aparência da realidade."(pg. 48)

Ainda nas Diretrizes do Estado do Paraná, [12] *"O estudo das Funções ganha relevância na leitura e interpretação da linguagem gráfica que favorece a compreensão das variações das grandezas envolvidas."*(pg. 59) e os conteúdos propostos devem ser abordados por meio de tendências metodológicas da Educação Matemática que fundamentam a prática docente, onde as mais utilizadas são abordadas na próxima seção.

1.2 Tendências Metodológicas da Educação Matemática

1. Resolução de Problemas

   Utilizar a resolução de problemas para envolver o aluno em situações da vida real pode ser muito benéfico para a aprendizagem, desde que esses problemas não sejam rotineiros e algorítmicos, ou seja, problemas resolvidos pela aplicação direta de um ou mais algoritmos anteriormente aprendidos, sem exigir estratégias para sua solução. Segundo Smole [31] , que chama esses problemas de *convencionais*,

   > "Quando adotamos os problemas convencionais como único material para o trabalho com Resolução de Problemas na escola, podemos levar o aluno a uma postura de fragilidade e insegurança diante de situações que exijam algum desafio maior. Ao se deparar com um problema no qual não identifica o modelo a ser seguido, só lhe resta desistir ou esperar a resposta de um colega ou do professor. Muitas vezes, ele resolverá o problema mecanicamente, sem ter entendido o que fez e confiar na resposta obtida, sendo incapaz de verificar se a resposta é ou não adequada aos dados apresentados ou à pergunta feita no enunciado.
   >
   > Desse modo, a primeira característica da perspectiva metodológica da Resolução de Problemas é considerar como problema toda situação que permita alguma problematização. Essas situações podem ser atividades planejadas, jogos, busca e seleção de informações, resolução de problemas não-convencionais e mesmo convencionais, desde que permitam o processo investigativo. ... A resposta correta é tão importante quanto a ênfase a ser dada ao processo de resolução, permitindo o aparecimento de diferentes soluções, comparando-as entre si e

tornando possível que alguns dos resolvedores verbalizem como chegaram à solução." (p. 89-94)

Smole [31] ainda diz que é essencial não separar Conteúdo e Metodologia, e *"as problematizações devem ter como objetivo alcançar algum conteúdo e um conteúdo deve ser aprendido, porque contém dentro de si questões que merecem ser respondidas."*(p. 94).

Sendo assim, o professor deve oportunizar um ambiente de discussão permanente, deixando que o aluno se expresse oralmente, através da escrita e de desenhos com o professor e com os colegas de sala.

Segundo Schoenfeld, [29] há muitas razões para os professores focarem no processo de resolução de problemas durante suas aulas. Além do aspecto motivador, ajuda o aluno no confronto com problemas em sua própria vida e ajuda a desmistificar a matemática ao fazer o aluno compreender os argumentos, permitindo enfrentar a matemática com menos apreensão.

Para Polya, [26] há quatro etapas no processo de resolução de problemas:

I *Compreensão do Problema*

Destacar dados e informações importantes para a solução do problema.

II *Estabelecimento de um Plano*

Obter possíveis ligações entre os dados e a incógnita; considerar problemas já resolvidos anteriormente que ajudem a obter a solução, enfim, traçar um plano de solução do problema

III *Execução do Plano*

Ao executar o plano de solução, verificar cada passo para ver se é possível demonstrar que ele está correto.

IV *Retrospecto*

Conferir os resultados obtidos, verificando se não é possível utilizar outra estratégia, se necessário para resolver o problema, até chegar a uma solução satisfatória.

2. Modelagem Matemática:

Para O'Shea e Berry em Borba, 1994 [8] Modelagem Matemática é : *"... o processo de escolher características que descrevam adequadamente um problema de origem não matemática, para chegar a colocá-lo numa linguagem matemática"* (p.55)

Para Burak, [10] Modelagem Matemática *"... constitui-se em um conjunto de procedimentos cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer predições e tomar decisões."* (p.62)

A Modelagem Matemática, segundo Bassanezi [5] é a *"arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real"*(p.16). Assim temos por entendimento que sempre é preciso a formulação de um *Modelo Matemático* e um *Modelo Matemático* para o autor [4]

> "é quase sempre um sistema de equações ou inequações algébricas, diferenciais, integrais, etc., obtido através de relações estabelecidas entre as variáveis consideradas essenciais ao fenômeno sobre análise e o processo de Modelagem pode ser interpretado como um método de investigação, como um processo que possibilita a aprendizagem de conteúdos matemáticos interligados aos de outras áreas" (p.31).

Vale ressaltar ainda que segundo Bassanezi [5] *"a modelagem matemática é apenas uma estratégia de aprendizagem, onde o mais importante não vai ser chegar no modelo e que ele já seja bem sucedido, mas, caminhar sobre as etapas onde o conteúdo matemático vai sendo sistematizado e aplicado."* (p.38) e ainda:

> " Modelagem é eficiente a partir do momento que nos conscientizamos que estamos sempre trabalhando com aproximações da realidade, ou seja, que estarmos sempre elaborando sobre representações de um sistema ou parte dele e consiste essencialmente na arte de transformar problemas da realidade e resolve-los, interpretando suas soluções na linguagem do mundo real ... A modelagem eficiente permite fazer previsões, tomar decisões, explicar, entender; enfim participar do mundo real com capacidade de influenciar em suas mudanças ... .Com a modelagem, o processo de ensino-aprendizagem não mais se dá no sentido único do professor para o aluno, mas como resultado da interação do aluno com seu ambiente natural"

A Concepção de Modelagem Matemática adotada será a definida por Bassanezi, pois o interesse desse trabalho na Modelagem é que seja mais uma alternativa para melhorar o processo de ensino-aprendizagem das funções logarítmicas e exponenciais. Vale citar também que ao se trabalhar com Modelagem, devem ser seguido alguns procedimentos próprios dessa tendência metodológica que Bassanezi [5] chama de *Atividades Intelectuais da Modelagem Matemática* , divididas em cinco etapas : *Experimentação, Abstração, Resolução, Validação e Modificação.*

3. Mídias Tecnológicas

Com o avanço da tecnologia, utilizar aplicativos informáticos para construir gráficos ou fazer cálculos; a internet como ferramenta de pesquisa ou mesmo a TV como forma de propiciar aos alunos um vídeo interessante sobre o conteúdo a ser explorado parece ser mais uma forma de melhorar o aprendizado dos alunos. Segundo Borba [6] o uso de mídias tem levantado novas questões, sejam em relações aos currículos, à experimentação matemática, às possiibilidades do surgimento de novos conceitos e de novas teorias matemáticas e cita *"que com a capacidade de geração de gráficos destas novas mídias há um deslocamento da ênfase algébrica dada ao estudo das funções para uma atenção maior à coordenação entre representações algébricas, gráficas e tubulares."* (p. 293)

Assim, os recursos tecnológicos favorecem a experimentação e a investigação matemática, potencializando as formas de resolução de problemas, inserindo diversas formas de ensinar e aprender, valorizando o processo de produção de conhecimentos.

4. Etnomatemática

A Etnomatemática, foi inicialmente mencionada em 1976 no Terceiro Congresso Internacional de Educação Matemática, ICM-3, em Karlsruhe, na Alemanha e o seu criador, o professor brasileiro Ubiratan D' Ambrósio [11] faz um estudo epistemológico da palavra : *" ... etnomatemática é a arte ou técnica (techné = tica) de explicar, de entender, de se desempenhar na realidade (materna) dentro de um contexto cultural próprio (etno)."* Este *programa* (assim chamado por D'Ambrósio) tem como ponto de partida a cultura local. Ou seja, cada grupo cultural tem sua identidade própria no pensar e no agir, logo, terá seu próprio modo de desenvolver o conhecimento matemático. Ferreira [15] complementa:

> "Através do conceito de etnomatemática chama-se a atenção para o fato de que a matemática, com as suas técnicas e verdades, constitui um produto cultural, salienta-se que cada povo, cada cultura e cada subcultura, desenvolve a sua própria matemática, em certa medida, específica."

Segundo Borba (1994) [8] é comum acreditar que não aconteceu nenhuma produção matemática fora da Europa, porém, vários povos demonstram a sua *própria matemática* que nem sempre coincidem com a forma científica de ver o mundo.

Borba (1987) [7] demonstrou isto através de sua experiência em uma favela de Campinas. Ele observou que as crianças, mesmo longe dos bancos escolares, possuíam o seu mundo de conhecimentos matemáticos e que não estavam tão distantes da matemática acadêmica quanto poderia se supor numa observação superficial.

Portanto, se a matemática pode ser encontrada fora da escola, esta chamada etnomatemática pode ser utilizada exatamente na escola como uma forma de explorar o conhecimento de nossos alunos, conduzindo-os ao conhecimento acadêmico. Porém, é importante ressaltar que para que isto aconteça devemos partir do contexto em que o aluno está inserido e não utilizando a realidade de um grupo, desconhecida por ele. Portanto, a busca da matemática na cultura do estudante, no seu dia-a-dia, presente na etnomatemática, pode ser um importante aliado do professor, não só como elemento motivador mas também como metodologia de ensino.

5. História da Matemática

Segundo Miguel e Miorim, [22]

> "a história - desde que devidamente constituída com fins explicitamente pedagógicos e organicamente articulada com as demais variáveis que intervêm no processo de ensino-aprendizagem escolar da Matemática - pode e deve se constituir ponto de referência tanto para a problematização pedagógica quanto para a transformação qualitativa da cultura escolar e da educação escolar e, mais particularmente, da cultura matemática que circula e da educação matemática que se promove e se realiza no interior da instituição escolar. ...
>
> Por outro lado, ... , seria necessário que evitássemos a reprodução pura e simples de propostas e práticas sem a necessária e devida reflexão e distanciamento crítico em relação a elas, ... É claro que é indispensável conhecer, respeitar e debater tais propostas. Mas isso não dispensa a realização de um esforço pessoal e adicional do próprio professor no sentido de transformá-las ou mesmo de produzir novas propostas personalizadas tendo em vista a natureza, as condições e os propósitos singulares da instituição escolar em cada situação concreta" (p. 152)

Nessa perspectiva, a História da Matemática deve ser abordada de forma a possibilitar o aluno a entender que o conhecimento matemático é um processo, construído historicamente a partir de necessidades reais e de situações concretas, dentro de um contexto histórico e o professor tem papel fundamental nessa abordagem.

6. Investigações Matemáticas

   As Investigações Matemáticas são problemas propostos de maneira aberta onde o aluno não possui uma heurística para solucioná-lo, diferentemente da Resolução de Problemas e da solução de exercícios onde é usado um conhecimento prévio preestabelecido. Isto faz com que uma mesma situação tenha objetos de investigações diferentes por diferentes grupos de alunos e às vezes, até mesmo com resultados diferentes. Para Ponte , Brocardo e Oliveira [27] *"as investigações matemáticas envolvem, naturalmente, conceitos, procedimentos e representações matemáticas, mas o que mais fortemente as caracteriza é este estilo de conjectura-teste-demonstração."* (p.10).

   Como são estabelecidas diferentes conjecturas, faz-se necessário verificar qual é a mais adequada à questão proposta, fazendo com que o aluno argumente com seus colegas e com o professor através de provas e refutações, fazendo com que o aluno aprenda coisas novas, que é o objetivo maior de toda ação pedagógica.

As Diretrizes [12] propõem um ensino onde o ideal seria, sempre que possível, promover uma articulação entre as tendências metodológicas citadas acima , sugerindo que tais tendências se articulem com enfoque nos conteúdos matemáticos, podendo a abordagem transitar por todas as tendências, como na figura a seguir.

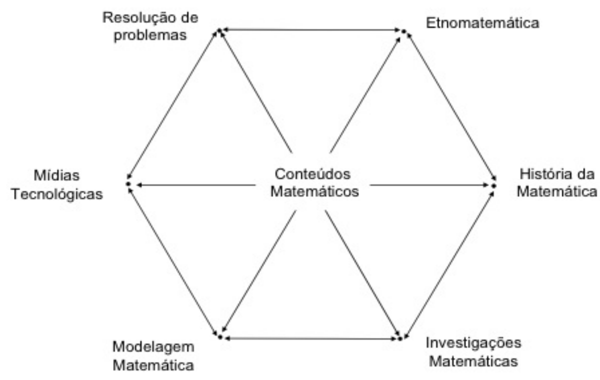

Figura 1: Articulação das Tendências Metodológicas da Educação Matemáticas.
Fonte: DCE [12]

1.3 A perspectiva metodológica adotada no trabalho

Os objetivos e a importância da Matemática no Ensino Médio devem ser constantemente questionados pelo Professor no intuito de melhorar a qualidade do ensino-aprendizagem de todos os seus alunos. Para que o estudo de Função Exponencial e Logaritmos no 1º Ano do Ensino Médio não tenha como único objetivo extrair elementos desconhecidos de equações algébricas, deve-se fazer um profundo estudo em como este assunto deve ser abordado pelo Professor em nossas escolas atualmente. Não existe metodologia pronta e acabada para o ensino da Matemática, portanto, o Professor tem papel essencial nesta busca permanente de uma melhor metodologia de ensino. Ele terá que se aprofundar em seus estudos e no contexto cultural, social e histórico de seus alunos, fazendo uso apropriado das tendências metodológicas (citadas acima ou não) para que haja um efetivo aprendizado. Sendo assim, este trabalho não está baseado em apenas uma tendência metodológica e não tem a pretensão de se aprofundar em qualquer uma delas. As tendências metodológicas devem ser pensadas como uma ferramenta para a melhoria do processo de ensino-aprendizagem, guiando o professor em seu trabalho ao ensinar Funções Exponenciais e Logarítmicas.

O trabalho adotará uma abordagem metodológica através da resolução de situações problemas modeladas pelas funções exponenciais e logarítmicas, caracterizadas por meio da análise das grandezas envolvidas, estudando seus comportamentos.

A calculadora, softwares de construção de gráficos como o Geogebra e vídeos sobre o assunto são importantes nessa abordagem para facilitar a compreensão do conteúdo pelos estudantes.

A História da Matemática, esquecida pelos livros didáticos e consequentemente pelos professores pode melhorar a aprendizagem dos estudantes quando o conhecimento matemático passa a ser entendido como fruto de uma construção humana através de erros e acertos para atender a certas demandas da sociedade na época de sua construção, tornando o assunto significativo e motivador. Quando o aluno percebe a Matemática como uma ciência que se encontra em desenvolvimento, ela deixa de ser temida por ser a disciplina que não aceita mudanças, reservada a uma minoria privilegiada intelectualmente. É importante frisar que este estudo não pode ser apenas um conhecimento de datas, nomes e locais, ele deve atuar como fonte de problematizações que auxiliem nos processos de ensino e de aprendizagem.

Não é necessário que o professor seja um especialista para utilizar História da Matemática em suas aulas, trazendo inúmeros benefícios aos estudantes, porém como a maioria se apoia apenas nos livros didáticos, a grande maioria ignora essa tendência metodológica. No próximo capítulo, o trabalho contextualiza historicamente os logaritmos e as funções exponenciais e logarítmicas para que o Professor possa utilizar desse conhecimento para melhorar o aprendizado dos alunos.

2 Desenvolvimento Histórico dos Logaritmos

De acordo com Zuffi [35] os professores do Ensino Médio apresentam visões diferentes sobre o conceito de função quando expressadas formalmente ou informalmente. Esta visão diferenciada pode trazer alguns obstáculos para o ensino de Função Exponencial e Logarítmica. Zuffi [35] cita também:

> “ Em nossa pesquisa, vimos que obstáculos epistemológicos que ocorriam com alunos, ... , também surgiram com os professores investigados. É comum que estes pensem nas funções somente em termos de equações e elementos desconhecidos a serem extraídos delas. Outro obstáculo evidenciou-se quando estes professores mostraram dificuldades em determinar quais eram as variáveis dependentes e independentes, para alguns casos propostos.
>
> Com relação à noção de número, configurou-se um outro obstáculo: embora a grande maioria dos casos de funções envolvesse o conjunto dos números reais, as variações de valores, propostas em sala de aula e nas entrevistas, pelos professores pesquisados, ocorriam sempre (e apenas) dentro do conjunto dos números racionais, ou, mais frequentemente ainda, dos números inteiros.
>
> ... é essencialmente a definição formal de Dirichlet, proposta no final do século passado, que chegou à sala de aula do ensino médio, hoje, quando esses professores se reportam aos seus aspectos mais formais. Ao mesmo tempo, perderam-se as conceituações históricas intermediárias, mas algumas destas, ainda que sem o conhecimento do professor, refletem-se nos exemplos apresentados e nas imagens conceituais formadas a partir destes exemplos, como foi o caso da definição de Euler.
>
> ... podemos concluir que a formação que temos proporcionado aos professores de Matemática do Ensino Médio, ... , ainda não tem conduzido estes professores a uma adequada reflexão sobre o uso que fazem da linguagem matemática. Esta não é uma visão vista, por eles, nem como uma construção histórica e dinâmica da Matemática como área do conhecimento humano, nem como ferramenta para resolver problemas da vida prática, ou de outras ciências.
>
> ...Os conhecimentos históricos podem, então, colaborar com professores para uma reflexão mais profunda sobre as ideias matemáticas. Particularmente com relação às funções, eles podem auxiliar o professor na distinção entre suas concepções pessoais no assunto, entre as diversas formalizações matemáticas, propostas ao longo dos séculos, e sobre como isso se relaciona ao aprendizado de seus alunos.”

Neste capítulo será realizado um estudo do desenvolvimento histórico dos logaritmos e das funções logarítmicas e exponenciais no intuito de ajudar o professor do Ensino Médio a refletir sobre como a construção histórica pode ajudar no aprendizado dos alunos atualmente.

2.1 Babilônios

Segundo Boyer [9] , os Babilônios, que viveram no vale mesopotâmico no quarto milênio antes de Cristo eram uma população de alto nível cultural e utilizavam o sistema de base sexagesimal, ainda empregado atualmente nas unidades de tempo e medida dos ângulos, apesar da nossa sociedade adotar o sistema decimal como padrão. O grande trunfo dos babilônios era utilizar uma notação que cobria não apenas os inteiros mas também as formas fracionárias. Esses registros estão em forma de tabelas e Boyer [9] diz:

> "Entre as tabelas babilônias encontram-se tabelas contendo potências sucessivas de um dado número, semelhantes às nossas tabelas de logaritmos, ou mais propriamente, de antilogaritmos. Tabelas exponenciais (ou logarítmicas) foram encontradas, em que são dadas as dez primeiras potências para as bases 9 ;16; 1,40 e 3,45 ; onde:
>
> $$1,40 = 1 \cdot 60^{-1} + 40 \cdot 60^{-2} = \left(\frac{10}{60}\right)^2$$
>
> $$3,45 = 3 \cdot 60^{-1} + 45 \cdot 60^{-2} = \left(\frac{15}{60}\right)^2$$
>
> Portanto, todos quadrados perfeitos. A questão posta em um problema, a que potência deve ser elevado um certo número para fornecer um número dado, equivale à nossa: qual o logaritmo de um número dado em um sistema com um certo número como base ?"

Os primeiros a descrever o conteúdo dessas tabelas dispostas em tabletes foram Neugebauer e Sachs em 1945 [23]. Apesar de bem danificado, o tablete MLC 2078 contém potências sucessivas de certas bases, perceptíveis em suas bordas preservadas:

1	**^{1}15-e**	**2**	**íb-si$_8$**
	^{2}30-e	**4**	**íb-si$_8$**
	^{3}45-e	**8**	**íb-si$_8$**
	^{4}1-e	**16**	**íb-si$_8$**
	^{5}*ga-mi-ru-um* níg (or: 4) *i du*(?) *uk* PI(?) . . . *ma*(?)		
	. . . *i du*(?) *uk*(?)		
2	**^{6}2-e**	**1**	**íb-si$_8$**
	^{7}4-e	**2**	**íb-si$_8$**
	^{8}8-e	**3**	**íb-si$_8$**
	^{9}16-e	**4**	**íb-si$_8$**
	^{10}32-e	**5**	**íb-si$_8$**
	^{11}1,4-e	**6**	**íb-si$_8$**
Left Edge:	**1,16^{96b}-e**	**32**	**íb-si$_8$**
	1,30-e	**1,4**	**íb-si$_8$**

Figura 2: Tábua MLC 2078. Fonte: Neugebauer [23]

Fica evidente o significado dos números em 1:

$$16^{0;15} = 2 \text{ ou em notações atuais } \log_{16} 2 = 0;15$$

$$16^{0;30} = 4 \text{ ou em notações atuais } \log_{16} 4 = 0;30$$

$$16^{0;45} = 8 \text{ ou em notações atuais } \log_{16} 8 = 0;45$$

$$16^{1} = 16 \text{ ou em notações atuais } \log_{16} 16 = 1$$

Nas duas linhas da borda esquerda (Left Edge):

$$16^{1;15} = 32 \text{ ou em notações atuais } \log_{16} 32 = 1;15$$

$$16^{1;30} = 1,4 \text{ ou em notações atuais } \log_{16} 1,4 = 1;30$$

E em 2:

$$2^{1} = 2 \text{ ou em notações atuais } \log_{2} 2 = 1$$

$$2^{2} = 4 \text{ ou em notações atuais } \log_{2} 4 = 2$$

$$2^{3} = 8 \text{ ou em notações atuais } \log_{2} 8 = 3$$

$$2^{4} = 16 \text{ ou em notações atuais } \log_{2} 16 = 4$$

$$2^{5} = 32 \text{ ou em notações atuais } \log_{2} 32 = 5$$

$$2^{6} = 1,4 \text{ ou em notações atuais } \log_{2} 1,4 = 6$$

Além da notação e da linguagem, as principais diferenças entre as tabelas antigas e as nossas são as lacunas entre os números, que são bem maiores que das nossas atuais; o uso de vários números como base em algumas situações e o uso que faziam dessas tabelas que eram bem específicos como por exemplo, para cálculo de juros compostos, áreas e volumes e não para cálculo de operações no geral.

Apesar das grandes lacunas em suas tabelas exponenciais, os babilônicos não hesitavam em interpolar por partes proporcionais para obter valores intermediários aproximados. Um exemplo prático desse costume é explicitado em um problema para saber quanto tempo levaria uma quantia em dinheiro para dobrar a 20 por cento ao ano. A resposta dada foi 3; 47 , 13, 20. Nota-se que o escriba usou a interpolação linear entre os valores de $(1,12)^3$ e $(1,12)^4$ usando a fórmula para Juros Compostos $M = P \cdot (1+i)^n$ onde $i = 0,2 = \dfrac{12}{60} = 0;12$ no sistema de base sexagesimal dos babilônios, logo 1,2 $=$ 1; 12 no sistema sexagesimal e então, ao usar a fórmula de Juros compostos no problema temos: $(1;12)^n = 2$. Se no sistema decimal temos: $(1,2)^3 =$ 1,728 e $(1,2)^4 =$ 2,0736 ; fazendo uma interpolação linear em notações modernas, temos:

$$\begin{cases} 1,728 = 3a + b \\ 2,0736 = 4a + b \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, encontramos a $=$ 0,3456 e b$=$ 0,6912.

Chegamos na reta $y = 0,3456x + 0,6912$. Como se pede $y = 2 \Rightarrow x \approx 3,787037$.

Para escrever 0,787037 na base sexagesimal :

$$0,787037 \cdot 60 = 47,22222 \Rightarrow 0,787037 \cdot 60 = 47 + 0,22222 \text{ (i)}$$

$$0,22222 \cdot 60 = 13,3332 \Rightarrow 0,22222 \cdot 60 = 13 + 0,3332 \text{ (ii)}$$

$$0,3332 \cdot 60 = 19,992 \Rightarrow 0,3332 \cdot 60 \approx 20 \text{ (iii)}$$

Substituindo (ii) em (i) e (iii) em (ii) :

$$0,787037 \cdot 60 = 47 + (13/60) + (0,3332/60) \Rightarrow$$

$$0,787037 \cdot 60 = 47 + (13/60) + (20/60^2) \Rightarrow$$

$$0,787037 \approx (47/60) + (13/60^2) + (20/60^3) \Rightarrow$$

$$0,787037 \approx 47 \cdot 60^{-1} + 13 \cdot 60^{-2} + 20 \cdot 60^{-3} \Rightarrow$$

Portanto, 3,787037 pode ser escrito na base sexagesimal como 3; 47 , 13 , 20. É o mesmo valor encontrado pela tabela dos babilônios, deixando claro que eles utilizavam a interpolação linear para chegar a um resultado bem próximo do correto para seus problemas. Os babilônios chegaram bem próximos à criação dos Logaritmos, mesmo não os conhecendo, chegaram a um valor bem próximo do correto através da interpolação linear, que sabemos hoje que é aproximadamente 3,8018 e eles encontraram 3,7870 (na base decimal).

2.2 Arquimedes de Siracusa

Arquimedes de Siracusa (287 a. C. - 212 a. C.) em sua obra *Psammites* (Contador de areia) se dispõe a determinar o limite máximo de grãos de areia que cabem no universo de acordo com o modelo de universo adotado na época segundo Aristarco de Samos, tendo de criar notações para falar de números extremamente grandes. Arquimedes usou na época, o que chamou de miríade, 10^8. Para conseguir números grandes, ia aumentando sua ordem, de $(10^8)^{10^8}$ até $[(10^8)^{10^8}]^{10^8}$. Segundo Boyer [9]

> "Foi em conexão com esse trabalho sobre números imensos que Arquimedes mencionou, muito incidentalmente, o princípio que mais tarde levou à invenção dos logaritmos - a adição das *ordens* dos números (o equivalente de seus expoentes quando a base é 100 000 000) corresponde a achar o produto dos números."

2.3 Árabes

A matemática árabe foi fundamental no desenvolvimento da matemática da Europa Ocidental e a sua trigonometria, apesar de vir da Grécia, tinha muita influência da álgebra hindu e isso fez com que acrescentassem novas funções e fórmulas nos seus estudos trigonométricos. Dois árabes, ibn-Yunus (morreu em 1008) e ibn-al-Haitham *Alhazen* (956-1039) introduziram a fórmula :

$$2\cos(x)\cos(y) = \cos(x+y) + \cos(x-y)$$

Boyer [9] cita:

> "Essa é uma das quatro fórmulas de *produto para soma* que na Europa do século XVI serviram, antes da invenção dos logaritmos, para converter produtos em somas pelo método dito de *prosthaphaeresis* (adição e subtração em grego).

Além disso, o matemático árabe al-Khashi (morreu em 1436) possivelmente influenciado pelos chineses começou a usar as frações decimais, que posteriormente tomariam um papel central no cálculo de logaritmos, em detrimento das frações sexagesimais.

2.4 Nicolas Chuquet

Nicolas Chuquet (1445 - 1488) em sua importante obra *Triparty en la science des nombres* inventou uma notação exponencial de grande relevância. A *denominacion* ou potência de quantidade desconhecida era representada por um expoente associado aos coeficientes dos termos. Assim, a nossa representação moderna de $a \cdot x^n$ aparecia em *Triparty* como $.a.^n$. Por exemplo $5x$; $6x^2$ e $10x^3$ apareciam em *Triparty* como $.5.^1$; $.6.^2$ e $.10.^3$,respectivamente. Também aparecia em sua obra o expoente zero e os expoentes negativos onde nosso $9x^0$ fica $.9.^0$ e $9x^{-2}$ aparece como $.9.^{2m}$, isto é, .9. *seconds moins* (segundo menos em tradução literal)

Chuquet escreveu, por exemplo, que

$$\frac{.72.^1}{.8.^3} = .9.^{2m} \text{ ou em notação atual } \frac{72x}{8x^3} = 9x^{-2}$$

Chuquet também criou uma tabela com as potências do número dois, semelhante a tabela de logaritmos na base 2, que Boyer [9] comenta:

> "Sua observação sobre relações entre as potências do número dois se relaciona com essas leis, os índices dessas potências sendo colocados em uma tabela de 0 a 20, em que as somas dos índices correspondem aos produtos das potências. Exceto por serem grandes as lacunas entre as colunas, isso seria uma tabela de logaritmos na base 2 em miniatura. Durante o século seguinte, observações semelhantes às de Chuquet seriam repetidas várias vezes, e certamente tiveram um papel na invenção dos logaritmos."

2.5 John Napier

Na transição do Renascimento para a Modernidade, que segundo Boyer [9] vai aproximadamente de 1540 a 1690 houve a necessidade da simplificação de cálculos aritméticos e medidas geométricas para que a população, na sua maioria analfabeta, conseguisse participar das transações comerciais da época, havendo uma maior preocupação por parte dos matemáticos com os cálculos aritméticos. Segundo Maor [21] essa foi uma época de enorme expansão do conhecimento científico em todas as áreas. A Geografia, Física e Astronomia, livres de antigas crenças, mudaram a percepção que o Homem tinha do Universo. Esse desenvolvimento aumentava dados numéricos e os cientistas tinham que ficar cada vez mais tempo debruçados em contas enormes e tediosas, lhes trazendo a preocupação em facilitar essas contas. Entre os estudiosos mais importantes dessa época estão Galieu Galilei (1564 - 1642) , Henry Briggs (1561 - 1639) , Edmund Gunter (1581 - 1626) , William Oughtred (1574- 1660) , Simon Stevin (1548 - 1620), Jobst Bürgi (1552 - 1632) , Johannes Kepler (1571 - 1630) e Jonh Napier (1550 - 1617).

John Napier não era matemático profissional, era dono de terras na Escócia, ativista religioso e habilidoso na Engenharia Mecânica e preocupado com questões militares. Na Matemática, seu interesse maior era em cálculos numéricos e na trigonometria para ajudar em seus projetos mecânicos. Essa preocupação fica evidente em um trecho de sua obra *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (Uma descrição da maravilhosa regra dos logaritmos) de 1614 citado em Maor [21] :

> "Percebendo que não há nada mais trabalhoso na prática da Matemática, nem que mais prejudique e atrapalhe os calculadores, do que as multiplicações, as divisões, as extrações do quadrado e do cubo dos números muito grandes ... comecei a considerar em minha mente através de que tipo de arte certa e rápida poderia remover essas dificuldades."

Mirifici logarithmorum canonis descriptio consumiu 20 anos de sua vida e John Napier é lembrado até hoje não por suas obras religiosas nem pela invenção de suas máquinas e sim por causa dos logaritmos introduzidos nessa importante obra. Segundo Maor [21] John Napier teve reconhecimento universal e sua invenção foi adotada rapidamente por cientistas de toda Europa e até mesmo da China e um dos primeiros a utilizar os logaritmos com grande sucesso em cálculos complicados das órbitas planetárias foi Johannes Kepler. Sabe-se que Napier teve pelo menos duas fontes de inspiração para sua obra. Uma delas eram os cálculos efetuados nos observatórios astronômicos da Dinamarca que utilizavam as regras de *prosthaphaeresis* da trigonometria, quatro identidades também conhecidas como fórmulas de Werner, que transformavam um produto em uma soma ou diferença:

$$\text{(i) } 2\cos(x)\cdot\cos(y) = \cos(x+y) + \cos(x-y)$$

$$\text{(ii) } 2\sin(x)\cdot\sin(y) = \cos(x-y) - \cos(x+y)$$

$$\text{(iii) } 2\sin(x)\cdot\cos(y) = \sin(x+y) + \sin(x-y)$$

$$\text{(iv) } 2\cos(x)\cdot\sin(y) = \sin(x+y) - \sin(x-y)$$

As fórmulas de Werner eram usadas da seguinte maneira:

Para multiplicar 17365 por 69466 consultamos uma tabela trigonométrica com aproximação de 5 casas decimais e verificamos qual o valor mais próximo dos que quero multiplicar, porém os dois divididos por 10^5. Pela tabela consultada, temos :

$$\sin 10^0 = 0,17365 \text{ e } \cos 46^0 = 0,69466 \text{ e pela fórmula (iii) sabe-se que}$$

$$2\sin 10^0 \cdot \cos 46^0 = \sin(10^0 + 46^0) + \sin(10^0 - 46^0)$$

$$2 \cdot 0,17365 \cdot 0,69466 = \sin(56^0) + \sin(-36^0)$$

Como $\sin(-36^0) = \sin(324^0) = -\sin(36^0)$, basta consultar a tabela mais uma vez e teremos :

$$2 \cdot \frac{17365}{10^5} \cdot \frac{69466}{10^5} = 0,82904 + (-058779) \Rightarrow$$

$$17365 \cdot 69466 = \frac{0,24125}{2} \cdot 10^{10} \Rightarrow$$

$$17365 \cdot 69466 = 0,120625 \cdot 10^{10} \Rightarrow$$

$$17365 \cdot 69466 \approx 1206250000$$

Quanto mais precisa e com mais casas decimais fosse a tabela trigonométrica, mais próximo do resultado correto do produto se chegava, mas apesar destas identidades trigonométricas terem resultados satisfatórios de seus produtos, era complicado usá-las para calcular potências e raízes e isso fez com que a comunidade científica da época não desistisse de tentar descobrir novos métodos de efetuar essas operações com mais praticidade.

A outra inspiração de Napier eram as tabelas de potências sucessivas de um dado número dos trabalhos de Arquimedes em *Psammites* e de Michael Stifel (1487 - 1567) em seu livro *Arithmetica Integra* publicado em 1544 que conseguiu estabelecer a importante relação, conforme cita Maor [21]:

> "Se multiplicarmos quaisquer dois termos da progressão $1, q, q^2, \ldots$ o resultado será o mesmo que se *somarmos* os expoentes correspondentes. Por exemplo,
>
> $$q^2 \cdot q^3 = (q.q) \cdot (q \cdot q \cdot q) = q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q = q^5$$
>
> um resultado que poderíamos ter obtido somando os expoentes 2 e 3. De modo semelhante, dividir um termo de uma expressão geométrica por outro equivale a *subtrair* seus expoentes:
>
> $$\frac{q^5}{q^3} = \frac{q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q}{q \cdot q} = q^2 = q^{5-3}$$
>
> E assim temos a regra simples
>
> $$q^m \cdot q^n = q^{m+n} \text{ e } \frac{q^m}{q^n} = q^{m-m}$$
>
> Surge um problema, entretanto, se o expoente do denominador for maior do que o

do numerador, como em $\frac{q^3}{q^5}$; nossa regra nos daria $q^{3-5} = q^{-2}$, uma expressão que ainda não definimos. Para evitar essa dificuldade nós simplesmente definimos q^{-n} como sendo igual a $\frac{1}{q^n}$, de modo que $q^{3-5} = q^{-2} = \frac{1}{q^2}$, o que está de acordo com o resultado obtido se dividirmos q^3 por q^5 diretamente. (Note que, de modo a ser consistente com a regra $\frac{q^m}{q^n} = q^{m-m}$ quando m = n nós também precisamos definir $q^0 = 1$.)

Com essas definições nós agora podemos estender uma progressão geométrica (PG) infinitamente em ambas as direções:

$$\cdots q^{-3}, q^{-2}, q^{-1}, q^0, q, q^2, q^3 \cdots$$

Verificamos que cada termo é uma potência de uma razão comum q, e que os expoentes $\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots$ formam uma *progressão aritmética* (PA) ... Esta relação é a ideia-chave por trás dos logaritmos, mas onde Stifel tinha em mente apenas expoentes inteiros, a ideia de Napier era estendê-los para uma faixa contínua de valores."

Napier então queria transformar operações complicadas em operações mais simples. Obviamente, é muito mais fácil somar e subtrair que multiplicar e dividir. Note que para calcular $452 \cdot 28$ devemos fazer duas multiplicações e uma soma e para calcular $452 + 28$ fazemos apenas uma soma. Com base nisso e nas inspirações que seus antepassados deixaram na época, Napier almejava escrever qualquer número positivo como uma potência de algum dado número fixo (posteriormente chamado de base), então a multiplicação e a divisão de números seria o equivalente à adição ou à subtração de seus expoentes e além disso, elevar um número a enésima potência seria equivalente a somar o expoente n vezes a ele próprio, ou seja, multiplicá-lo por n e encontrar a enésima raiz de um número seria equivalente a n subtrações repetidas, ou seja, a divisão por n e assim as multiplicações ficariam reduzidas à somas; as divisões à subtrações; as potências à multiplicações e as raízes à divisões, facilitando muito as computações numéricas. Veja como exemplo a tabela contida em Maor [21] :

n	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2^n	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096

Tabela 1: Potências de 2

Se quisermos calcular quanto é $128 \cdot 32$; procuramos na tabela o expoente de 128 que é 7 e o expoente de 32 que é 5. Somamos os expoentes: $5 + 7 = 12$ e procuramos o expoente 12 na tabela que corresponde a 4096. Logo $128 \cdot 32 = 4096$. Analogamente, diminuímos os expoentes para resolver a divisão $\frac{128}{32}$. Achamos 7-5 = 2 e na tabela, o expoente 2 é 4, obtendo $\frac{128}{32} = 4$. Também utilizamos a tabela se quisermos calcular, por exemplo, $4^5=(2^2)^5$. Como $4 = 2^2$, usamos o expoente 2 e multiplicamos por 5 obtendo o expoente 10 e teremos na tabela 1024, logo $4^5 = 1024$. Analogamente, para calcular $\sqrt[3]{4096}$ fazemos o expoente de 4096 que é 12 dividido por 3 pois queremos a raiz cúbica e obtemos o expoente 4 e encontramos na tabela 16, ou seja $\sqrt[3]{4096} = 16$. Mas, se esse esquema perde seu valor se for usado apenas com inteiros, esse método só teria utilidade prática se pudesse ser usado também com frações. Para isso acontecer, basta preencher os espaços vazios da tabela e isso pode ser feito de duas maneiras: usando expoentes fracionários ou escolhendo como base um número suficientemente pequeno, de modo que suas potências cresçam bem lentamente e então as lacunas na tabela ficam sendo mínimas. Como na época de Napier os expoentes fracionários não eram inteiramente conhecidos, Napier ficou anos decidindo por qual número utilizar para criar sua tabela. Maor [21] também cita que Napier decidiu-se por 0,9999999 ou 1 - 10^{-7} provavelmente porque era comum na época dividir o raio de um círculo unitário em 10000000 ou 10^7 partes na trigonometria e então começou seu tedioso trabalho de subtrações repetidas para encontrar os termos sucessivos de sua progressão. Sua tabela inicial tinha 101 elementos e cada termo era obtido subtraindo-se do termo anterior a sua 10^7 parte:

PG	**Aproximação**	**PA**
10^7	10 000 000	0
$10^7 \cdot (1 - 10^{-7})$	9 999 999	1
$10^7 \cdot (1 - 10^{-7})^2$	9 999 998	2
$10^7 \cdot (1 - 10^{-7})^3$	9 999 997	3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$10^7 \cdot (1 - 10^{-7})^{100}$	9 999 900	100

Tabela 2: Primeira Tabela dos Logaritmos de Napier

Ele então repetiu o processo todo , começando com 10^7 novamente, mas agora usando a proporção $(1 - 10^{-5})$ que é a divisão entre o último e o primeiro número de sua primeira tabela :

$$\frac{9999990}{10000000} = 0,99999 = (1 - 10^{-5})$$

e obteve 51 elementos:

PG	**Aproximação**	**PA**
10^7	10 000 000	0
$10^7 \cdot (1 - 10^{-5})$	9 999 900	100
$10^7 \cdot (1 - 10^{-5})^2$	9 999 800	200
$10^7 \cdot (1 - 10^{-5})^3$	9 999 700	300
$10^7 \cdot (1 - 10^{-5})^4$	9 999 600	400
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$10^7 \cdot (1 - 10^{-5})^{49}$	9 995 101	4 900
$10^7 \cdot (1 - 10^{-5})^{50}$	9 995 001	5 000

Tabela 3: Segunda Tabela dos Logaritmos de Napier

A terceira tabela tinha vinte e um elementos, usando-se a proporção

$$\frac{9995001}{10000000} = 0,9995001 \approx 0,9995$$

e finalmente Napier criou mais 68 elementos, usando a proporção

$$\frac{9900493}{10000000} \approx 0,99$$

com o último elemento sendo então $10^7 \cdot (0,99)^{68} \approx 5048858$, perto da metade do número original:

PG	**Aproximação**	**PA**
10^7	10 000 000	0
$10^7 \cdot (0,9995)$	9 995 001	5 000
$10^7 \cdot (0,9995)^2$	9 990 002	10 000
$10^7 \cdot (0,9995)^3$	9 985 007	15 000
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$10^7 \cdot (0,9995)^{20} = 10^7.\ (0{,}99)$	9 900 473	200 000
$10^7 \cdot (0,99)^2$	9 801 000	400 000
$10^7 \cdot (0,99)^3$	9 702 299	600 000
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$10^7 \cdot (0,99)^{68}$	5 048 858	13 600 000

Tabela 4: Terceira Tabela dos Logaritmos de Napier

Para calcular o produto de dois números x e y utilizando as tabelas criadas por Napier, primeiramente procura-se os números a serem multiplicados na coluna da PG. De posse destes números, observa-se os números correspondentes na coluna da PA, soma-se esses números e essa soma terá correspondência a um número da coluna da PG. Daí basta multiplicarmos por 10^7, aumentando em 7 ordens decimais esse número.

Veja um exemplo para calcular $9999999 \cdot 9999998$

- Procura-se os dois números na tabela 2 e observa-se que a coluna da PA dos números em questão são 1 e 2, respectivamente.

PG	PA
$9999999 \cdot 9999998$	$\rightarrow 1 + 2$
$9999997 \cdot 10^7$	$\rightarrow 3$

- Logo $9999999 \cdot 9999998 \approx 9999997 \cdot 10^7 \approx 99999970000000$.

Para calcular a potência de um número, deve-se primeiramente procurar esse número na tabela na coluna da PG, então, observa-se o correspondente a ele na coluna da PA e multiplica-se esse termo pelo valor da potência desejada. Esse produto corresponderá a um número na coluna da PG, então este número aumentado em $7 \cdot$ (potência pedida menos um) ordens decimais será o resultado.

Veja o exemplo para calcular 9999700^{50}:

- Procura-se 9 999 700 na tabela 3 e observa-se que a coluna da PA do número em questão é 300.

PG	PA
9 999 700	$\rightarrow 300 \cdot 50$
$9985007 \cdot (10^7)^{50-1}$	$\rightarrow 15\ 000$

- Logo $9999700^{50} \approx 9985007 \cdot 10^{343}$.

Hoje, esta tarefa seria dada a um computador ou a uma calculadora, mas Napier não dispunha destas ferramentas e teve que fazer todos os cálculos com papel e pena, consumindo 20 anos de trabalho próprio com o cuidado de não cometer erros, portanto procurava minimizar o uso de frações decimais. Tendo completado seus cálculos, Napier batizou sua criação. Ele decidiu chamar o expoente de cada potência de *logaritmo*, significando número proporcional, oriundo da composição das palavras gregas : *logos* (ou razão) e *arithmos* (ou números). Então, exemplificando, se $10^7.(1 - 10^{-7})^2 = 9\ 999\ 998$, temos que o *logaritmo de Napier ou neperiano* de 9 999 998 é o expoente 2 e analogamente, o logaritmo neperiano de 9 999 999 é 1 , o logaritmo neperiano de 10 000 000 é 0 e assim por diante. Ou seja,

$$\text{Se } N = 10^7(1 - 10^{-7})^L \text{ então } L \text{ é o logaritmo neperiano de } N$$

Mexendo nessa equação, temos :

$$\frac{N}{10^7} = (1 - 10^{-7})^L \text{ ou } \frac{N}{10^7} = [(1 - 10^{-7})^{10^7}]^{\frac{L}{10^7}}$$

e como $(1 - 10^{-7})^{10^7}$ fica próximo de $\lim_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{n})^n = \frac{1}{e}$, teríamos no trabalho de Napier um sistema de logaritmos de base $1/e$; se dividirmos o número e o logaritmo por 10^7.

Mas devemos lembrar que Napier não possuía o conceito de base de um sistema de logaritmos como atualmente, pois sua definição era diferente da atual, a ideia de Napier era geométrica, como explica Boyer [9]:

Considere o segmento $\overline{AB}$ de comprimento 10^7 e uma semirreta $\overline{DE}$, de origem em D (Figura 3) Suponha que o ponto C se desloque sobre $\overline{AB}$ saindo de A e que o ponto F se desloque sobre $\overline{DE}$ saindo de D de forma que C e F saiam simultaneamente de A e D e com mesma velocidade inicial de 10^7. Admita que a velocidade do ponto C seja proporcional à medida $\overline{CB}$ e que a velocidade do ponto F seja constante a 10^7. Napier definiu $\overline{DF}$ como logaritmo de $\overline{CB}$. Seja $\overline{DF}$ = x e $\overline{CB}$ = y, tem-se que x é igual ao logaritmo de y. Boyer [9] também comenta que essa definição geométrica coincide com a descrição numérica dada antes. Para mostrar isso, usa as notações modernas :

$dx/dt = 10^7$ e $dy/dt = -y$ com $x_0 = 0$ e $y_0 = 10^7$.

Então, pela regra da cadeia, temos:

$$dy/dx = -y/10^7 \Rightarrow dy/y = -dx/10^7 \Rightarrow$$

$$\int dy/y = -1/10^7 \cdot \int dx \Rightarrow \ln y + k = -x/10^7$$

Portanto, pelas condições iniciais,

$$\ln y_0 + k = -x_0/10^7 \Rightarrow \ln 10^7 + k = 0 \Rightarrow k = -\ln 10^7$$

Logo, $\dfrac{-x}{10^7} = \ln y - \ln 10^7 \Rightarrow \dfrac{-x}{10^7} = \ln(y/10^7) \Rightarrow \dfrac{x}{10^7} = -\log_e(y/10^7) \Rightarrow$

$$\frac{x}{10^7} = -\frac{\log_{1/e}(y/10^7)}{\log_{1/e} e} \Rightarrow \frac{x}{10^7} = -\frac{\log_{1/e}(y/10^7)}{-1} \Rightarrow$$

$$\frac{x}{10^7} = \log_{1/e}(\frac{y}{10^7})$$

Ou seja, se as distâncias $\overline{DF}$ e $\overline{CB}$ fossem divididas por 10^7, a definição de Napier levaria a um sistema de logaritmos de base $1/e$, como citado anteriormente.

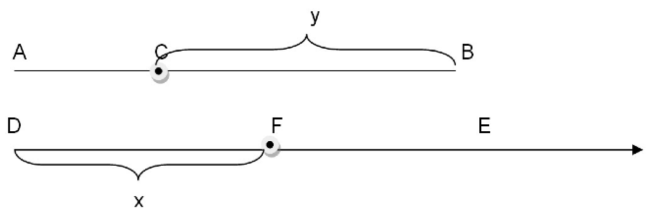

Figura 3: Segmento de reta e semirreta auxiliar para a geometria dos logaritmos de Napier

Observa-se então que os logaritmos neperianos decrescem conforme os números crescem e nos logaritmos naturais acontece o inverso, portanto, os dois logaritmos não são iguais como muitas vezes se afirma . Já vimos que na notação atual, o logaritmo neperiano possui a base $1/e$ e não e.

Napier faleceu em 1617 e além de seu primeiro trabalho publicado em 1614 já mencionado, seu filho Robert publicou postumamente em 1619 um outro trabalho *Mirifici logarithmorum canonis constructio* dando uma completa exposição dos métodos que usava para construir suas tabelas. Napier contribuiu também para a trigonometria esférica, defendeu o uso da vírgula para separar a parte inteira da fracionária e muito mais, porém nenhuma dessas contribuições se compara com o uso dos logaritmos. Segundo Maor [21]

> "Raramente, na história da ciência, uma nova ideia foi concebida de modo mais entusiástico. O reconhecimento universal caiu sobre seu inventor e a invenção foi adotada rapidamente por cientistas de toda a Europa e até mesmo da China."

2.6 Jobst Bürgi

Em 1620, Jobst Bürgi (1552 - 1632) publicou seu trabalho *Arithmetische und geometrische Progress - Tabulen* em Praga, 6 anos depois de Napier, porém é possível que a ideia de logaritmo tenha ocorrido a Bürgi já em 1588. Como não publicou sua ideia antes, não conseguiu ser reconhecido como o precursor da ideia.

Bürgi usou demonstrações puramente aritméticas e não geométricas como Napier, mas com os mesmos princípios fundamentais. Onde Napier usou a proporção $(1 - 10^7)$, ligeiramente menor que 1, Bürgi usou $(1 + 10^{-4})$, que é um pouco maior que 1. Então, os logaritmos de Bürgi aumentam à medida que os números aumentam, o contrário do que acontece com os de Napier e além disso, Bürgi multiplicava as potências desses números por 10^8 (Progressão geométrica de razão $1 + 10^{-4}$ e primeiro termo 10^8) e não por 10^7 e também multiplicava todos os seus índices de potências por 10 (progressão aritmética de razão 10 e primeiro termo 0), ou seja, se N é um número inteiro tal que

$$N = 10^8(1 + 10^{-4})^L$$

Bürgi chamava $10L$ de número vermelho e N de número preto, cores que usou na impressão. Note que, analogamente com os logaritmos de Napier, se dividirmos N por 10^8 e $10L$ por 10^5, teremos um sistema de logaritmos na base $(1 + 10^{-4})$ e como $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n = e$, os logaritmos de Bürgi são os logaritmos naturais coincidindo até a quarta casa decimal.

2.7 Henry Briggs

Henry Briggs (1561 - 1630) era professor de geometria do Gresham College em Londres e segundo Maor [21] ficou tão impressionado com os Logaritmos de Napier que foi até a Escócia para se encontrar pessoalmente com o grande inventor. Nesse encontro, Briggs propôs deixar as tabelas de Napier mais convenientes fazendo duas mudanças: tornando o logaritmo de 1 igual a zero ao invés de 10^7, e, ter o logaritmo de 10 igual a uma potência apropriada de 10. Napier já havia pensado anteriormente, segundo Boyer [9] *"em uma tabela usando log 1 = 0 e log 10 =* 10^{10} *(para evitar frações)"*. Os dois juntos, então, decidiram-se por $\log 10 = 1 = 10^0$. Estava criado o logaritmo briggsiano ou logaritmo comum que na notação moderna, isso quer dizer que se um número positivo N for escrito como

$$N = 10^L$$

então L é o logaritmo briggsiano ou *comum* de N, escritos como $\log_{10} N$ ou simplesmente $\log N$, surgindo o conceito de base, segundo Maor [21].

Napier já com idade avançada, não tinha mais forças para continuar esse trabalho e deixou a cargo de Briggs terminá-lo. Em 1617 Briggs publicou seu *Logarithmorum chilias prima* com os logaritmos de base 10 dos números de 1 a 1000, todos com 14 casas decimais. Em 1624 Briggs publicou seu *Arithmetica logarítmica* , ampliou sua tabela para todos os inteiros de 1 a

20000 e de 90000 a 100000 com uma precisão de quatorze casas decimais. Em 1628 o editor de livros Adriaan Vlacq preencheu o espaço entre 20000 e 90000 com a segunda edição de *Arithmetica logarítmica*, se tornando padrão por mais de 3 séculos. Segundo Boyer, é do livro de Briggs que provêm as palavras *mantissa* e *característica* usadas atualmente e o trabalho com logaritmos podia ser feito exatamente como hoje a partir de seu trabalho. Para mais detalhes, ver ANEXO A e ANEXO B.

A descoberta dos Logaritmos realmente se espalhou na comunidade científica e segundo Boyer [9] em 1616 uma tradução para o inglês do primeiro trabalho de Napier sobre logaritmos, feita por Edward Wright (1559 - 1615), voltada para uso de navegantes já continha alguns logaritmos naturais e em 1619 John Speidell calculou os logaritmos naturais das funções trigonométricas, publicando em seu *New Logarithmes*.

2.8 Edmund Gunter, Richard Delamain e William Oughtred

Depois da comunidade científica adotar os logaritmos, alguns inovadores criaram um engenho mecânico para fazer os cálculos usando os logaritmos. Segundo Maor [21] *"a ideia era usar uma régua, na qual os números poderiam ser colocados em espaços proporcionais aos seus logaritmos."* e o primeiro engenho surgiu em 1620 construído por Edmund Gunter (1581 - 1626) e Maor [21] diz que *"consistia em uma única escala logarítmica ao longo da qual distâncias podiam ser medidas e depois somadas ou subtraídas com um par de compassos."*

William Oughtred (1574 - 1660) teve a ideia de duas escalas logarítmicas se movendo, uma em relação a outra e parece ter inventado seu instrumento em 1622, mas publicado sua descrição apenas em 1632. Conforme Maor [21] *"Ele construiu duas versões: uma régua de cálculo linear e uma circular, onde as duas escalas eram marcadas em discos que podiam girar em torno de um eixo comum."* O grande intervalo de tempo para a publicação de seu engenho criou reivindicações quanto à prioridade na invenção da régua de cálculo.

Em 1630, Richard Delamain, aluno de Oughtred publicou *Grammelogia, or The Mathematicall Ring* descrevendo uma régua de cálculo circular de sua autoria, cuidando para patentear a criação, porém outro aluno de Oughtred, William Forster, afirmou que Delamain havia roubado a ideia de Oughtred. Nada ficou provado, mas hoje se aceita a ideia de que Oughtred foi o inventor da régua de cálculo, que foi a ferramenta que deu suporte a cientistas e engenheiros durante 350 anos. Apenas no início da década de 1970 com o aparecimento no mercado das primeiras calculadoras eletrônicas manuais é que ela foi perdendo sua utilidade gradativamente para em 1980 parar de ser fabricada. Já as tabelas de logaritmos ainda são encontradas no final dos livros de álgebra, mas também não demorará muito a ser esquecida. Mas então, porque ainda continuar ensinando logaritmos no Ensino Médio ? Os logaritmos perderam sua utilidade como ferramenta de cálculo, mas não nos outros ramos da Matemática. Segundo Maor [21]

> "se os logaritmos perderam seu papel central na matemática computacional, a *função logarítmica* permanece no centro de quase todos os ramos da matemática, pura ou aplicada. Ela aparece em uma variedade de aplicações que abrangem a

química, biologia, psicologia, arte e música."

2.9 Kepler, Cavalieri, Descartes, Fermat, Grégoire, Sarasa, Newton e Leibniz

No século XVII, depois das Tabelas de Logaritmos de Napier e Briggs, era comum ver matemáticos tentando resolver os problemas sobre quadraturas de curvas, que consiste em calcular a área de uma superfície fechada, a partir de inscrições e circunscrições de polígonos cuja área já é conhecida. Esse método já era explorado pelos gregos na Antiguidade. Segundo Maor [21] Arquimedes usou o método da exaustão para encontrar a área de um círculo (na época já conhecida) e a área da parábola, mas não teve sucesso com as outras curvas : elipse e hipérbole.

Em 1609, Johanes Kepler (1571 - 1630) publicou *Astronomia Nova* onde apresenta as conclusões de seus estudos sobre os planetas, hoje conhecidas como Primeira e Segunda Leis de Kepler. A segunda lei que diz que a linha ligando um planeta ao Sol varre áreas iguais em períodos de tempo iguais, portanto calcular a área de uma elipse tornou-se fundamental. Kepler calculou a área de uma elipse utilizando o *método dos indivisíveis*, batizado por ele próprio e estendeu essa aplicação para encontrar o volume de superfícies de revolução, como barris de vinho.

Boaventura Cavalieri (1598 - 1647), discípulo de Galileu Galilei, publicou *Directorium universale uranometricum* em 1632 com tabelas de senos, tangentes, secantes e seus logaritmos com oito casas decimais; porém é mais reconhecido por sua obra *Geometria Indivisibilibus* publicada em 1635 que, segundo Boyer [9] , *"o argumento em que se baseia o livro é essencialmente o sugerido por Oresme, Kepler e Galileu - que uma área pode se pensada como sendo formada de segmentos ou* indivisíveis *e que, de modo semelhante, volume pode ser considerado como composto de áreas que são volumes indivisíveis..."* e conseguiu calcular a área sob a curva y = x^n com n inteiro de 1 até 9.

René Descartes(1596 - 1650) em *La Geométrie* publicada em 1637 apresentou ao mundo a "Geometria Analítica", apesar do sistema de Descartes não ser retangular e sim oblíquo e de considerar apenas as coordenadas positivas. O objetivo de Descartes em sua obra era quase sempre uma construção geométrica e como nem todas as construções se constroem com régua e compasso, ele descreve cada ponto em um plano através de dois números e ao observar que a curva possui uma série de pontos com uma propriedade em comum ele relaciona a geometria com a álgebra.

Pierre de Fermat (1601 - 1665) estudava a quadratura de curvas cuja equação geral é $y = x^n$ onde n é um inteiro positivo. Fermat estimou a área sob cada curva através de retângulos cujas bases formam uma progressão geométrica decrescente (veja figura 4) semelhante ao método da exaustão de Arquimedes, porém sem evitar recorrer a uma série infinita e obteve sucesso não apenas com n inteiro de 1 até 9 como Cavalieri, mas para qualquer n inteiro e fracionário, exceto com $n = -1$.

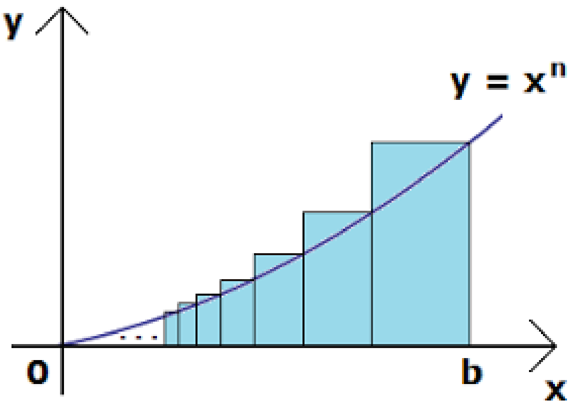

Figura 4: Método usado por Fermat para quadratura da curva $f(x){=}x^n$ com x$\neq$1. Fonte : FATOS [14].

Se imaginarmos a curva y$=x^n$ no intervalo de $x = 0$ até $x = b$ e subdividindo este intervalo em uma infinidade de subintervalos tomando os pontos de abcissa $b, b \cdot r, b \cdot r^2, \cdots$ onde r é uma quantia menor que 1 e aproximando a área através de retângulos obtidos por essas abcissas e suas respectivas ordenadas (veja figura 5), teremos retângulos cujas bases formam uma progressão geométrica infinita de razão r e cuja altura é a ordenada na curva.

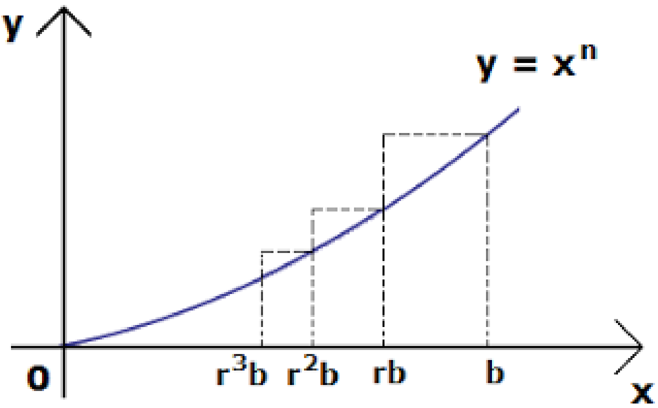

Figura 5: Método usado por Fermat para quadratura da curva $f(x){=}x^n$ com x $\neq$1. Fonte : FATOS [14].

Teremos uma infinidade de retângulos cujas bases formam uma Progressão Geométrica:

$$(b - rb); (rb - r^2b); (r^2b - r^3b); \cdots$$

e cujas alturas são :

$$b^n; (rb)^n; (r^2b)^n; \cdots$$

Calculando a soma das áreas dos retângulos temos:

$$b^n \cdot (b - rb) + (rb)^n \cdot (rb - r^2b) + (r^2b)^n \cdot (r^2b - r^3b) + \cdots =$$

$$b^{n+1} \cdot (1 - r) + b^{n+1} \cdot (1 - r) \cdot r^{n+1} + b^{n+1} \cdot (1 - r) \cdot (r^{n+1})^2 + \cdots$$

Portanto, a soma das áreas dos infinitos retângulos é a soma de uma Progressão Geométrica cujo primeiro termo é $b^{n+1} \cdot (1-r)$ e a razão é r^{n+1} e usando a fórmula do somatório para uma série geométrica infinita com razão entre 0 e 1 [1] temos que o resultado da soma das áreas de todos os retângulos é :

$$S_r = \frac{b^{n+1} \cdot (1-r)}{1-r^{n+1}} \tag{1}$$

onde o r subscrito significa que a área (S) ainda depende da escolha de r.

Fermat então raciocinou que se a largura dos retângulos fosse pequena, teria uma melhor aproximação da área sob a curva e para conseguir isso, deveria ter r próximo de 1. Note que quando $r \to 1$, a equação (1) torna-se indeterminada do tipo $0/0$ e Fermat contornou esse problema fatorando o denominador $1 - r^{n+1}$ como $(1-r) \cdot (1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n)$ e ao substituiir a forma fatorada do denominador na equação (1) podemos cancelar $(1-r)$ no numerador e no denominador e obtemos:

$$S_r = \frac{b^{n+1}}{1 + r + r^2 + r^3 + ... + r^n}$$

Quando tivermos $r \to 1$, cada parcela no denominador tende a 1 e finalmente chegamos em:

$$S = \frac{b^{n+1}}{n+1} \tag{2}$$

A equação (2) é conhecida atualmente no Cálculo Integral como a integral

$$\int_0^b x^n dx = \frac{b^{n+1}}{n+1}$$

Fermat também obteve sucesso para n com valores fracionários, tomando $n = p/q$ e para n com valores negativos diferentes de -1, Fermat usava um processo semelhante, mas tomando r como maior que 1 e aproximando de 1 por cima, sendo a área encontrada desde $x = b(b > 0)$ até o infinito, e se substituirmos n inteiro menor que 0 na equação (2) teremos um valor negativo, basta então verificar que a área é dada em módulo. Fermat percebeu que sua fórmula funcionava mesmo a curva $y = x^n$ sendo contínua em todos os reais e $y = x^{-n}$ apresentando uma descontinuidade em $x = 0$, tendendo ao infinito. Ela falhava apenas para $n = -1$, ou seja, para a curva da qual toda a família deriva seu nome: a Hipérbole $y = x^{-1} = 1/x$. Note que ao substituir $n = -1$ na equação (2), seu denominador $n + 1$ se torna 0. Sobre sua fórmula não funcionar para $n = -1$, segundo Maor [21] Fermat disse apenas: *"Eu digo que todas essas hipérboles infinitas, exceto a de Apolônio (a hipérbole $y = 1/x$), ou a primeira, podem ser quadradas pelo método da progressão geométrica, de acordo com um procedimento geral e uniforme."* Deve-se destacar que o trabalho de Fermat foi realizado cerca de trinta anos antes que Newton e Leibniz estabelecessem o Cálculo Integral.

[1] ver ANEXO C

Segundo Boyer [9] coube a Grégoire (ou Gregório) de Saint-Vincent (1584-1667) resolver o caso da hipérbole $y = 1/x$ em seu *Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni* (Obra geomérica sobre a quadratura do círculo e secções cônicas) publicado em 1647 compilado de textos científicos que foram esquecidos ao fugir de Praga em 1631. Grégoire foi o primeiro a notar que quando $n = -1$, a infinidade de retângulos utilizados na aproximação da área sob sua curva possuem, todos, a mesma área. De fato, para a curva $y = 1/x$, se escolher $x = b(b > 0)$ e construir uma infinidade de retângulos com bases formando uma progressão geométrica de razão $0 < r < 1$:

$$b(1-r); br(1-r); br^2(1-r); \cdots$$

e com alturas sendo as ordenadas em $x = b, br, br^2, \cdots$, ou seja:

$$1/b, 1/br, 1/br^2, \cdots$$

as áreas dos retângulos, começando em $x = b$, será :

$$b(1-r)/b = (1-r); br(1-r)/br = (1-r); br^2(1-r)/br^2 = (1-r); \cdots$$

Portanto as áreas dos retângulos serão sempre iguais a $(1 - r)$, ou seja, enquanto a abscissa cresce geometricamente, a área sob a curva cresce aritmeticamente (sempre com o mesmo aumento: $1 - r$), mesmo quando $r \to 1$ e isto implica que a relação entre a área e a distância é logarítmica. Maor [21] cita: *"se denotarmos A(t) a área sob a hipérbole, a partir de um ponto de referência fixo $x > 0$ (por conveniência geralmente escolhemos $x = 1$) até um ponto variável $x = t$, teremos $A(t) = \log t$."*

Foi Alfonso Anton de Sarasa (1618-1667), aluno de Grégoire, que escreveu esta relação explicitamente, registrando assim uma das primeiras ocasiões em que se fez uso de uma *função logarítmica*, lembrando que até então, os logaritmos eram considerados apenas uma ferramenta de cálculo. Porém, a fórmula ainda não estabelece nenhuma base para o logaritmo, vista no próximo capítulo.

Isaac Newton (1642-1727) desenvolveu o teorema binomial expandindo $(a + b)^n$ quando n é fracionário e negativo, estudando as séries infinitas e pensou na área da curva e o eixo horizontal (abcissas) como uma variável, formulando o Teorema Fundamental do Cálculo, publicado em 1693, bem depois de tê-lo desenvolvido, em seu ensaio *On the quadratura of curves* (Sobre as quadraturas das curvas).

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) publicou em 1684 sua obra *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quanec irrationales quantitates moratur* (Um novo método para máximos e mínimos e também para tangentes, que não é obstruído por quantidades irracionais) com uma notação diferente da de Newton, muito utilizada até hoje, mas com o mesmo princípio, dando origem ao Cálculo Diferencial e Integral que conhecemos hoje. Travou-se uma disputa acirrada para saber quem era de fato o percursor do Cálculo Diferencial e Integral, mas na verdade, como podemos notar, o Cálculo não foi concebido por apenas um homem como o Logaritmo, todos tiveram sua importância para o desenvolvimento do mesmo.

2.10 Leonhard Euler

Segundo Boyer [9] Leonhard Euler (1707 - 1783) foi o melhor construtor de notação matemática que se tem conhecimento. A linguagem e notação utilizada por Euler em seus livros e artigos é praticamente a mesma utilizada até hoje em diversas áreas da Matemática. Euler utilizou a letra e diversas vezes para representar a base do sistema de logaritmos naturais e apesar do conceito implícito deste número já ser conhecido desde a invenção dos logaritmos, nenhuma notação padronizada era comumente utilizada. Em 1731, Euler novamente utilizou a letra e para *"aquele número cujo logaritmo hiperbólico = 1"* em uma carta a Goldbach e finalmente o e apareceu impresso pela primeira vez em 1736 na obra *Mechanica* de Euler e então essa notação logo se tornou padrão. A letra π para representar a razão entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro , o símbolo i para $\sqrt{-1}$, $\sum$ para indicar somatória, $f(x)$ para uma função de x e muitas outras notações utilizadas até hoje são devidas à Euler. Euler também foi um dos pioneiros a definir logaritmos como expoentes como usamos hoje e também enunciou corretamente os logaritmos dos números negativos.

Um dos mais influentes trabalhos de Euler, dentre muitos, foi *Introdutivo in analysin infinitorum* publicada em 1748 e considerada o alicerce da moderna análise matemática. Maior [21] cita:

> "O *Introductio* pela primeira vez, chamava atenção para o papel central do número e e da função e^x na análise. (...) até a época de Euler, a função exponencial era considerada meramente o inverso da função logarítmica. Euler colocou as duas funções em uma base igual, dando-lhes definições independentes:
>
> $$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$
>
> $$\ln x = \lim_{n\to\infty} n(x^{1/n}-1)$$
>
> "

2.11 Análise do Desenvolvimento histórico dos Logaritmos

Apesar de Napier ter adotado uma base um tanto quanto complicada para as notações atuais, esse caminho fez com que chegasse muito próximo de descobrir um número que, um século depois, seria reconhecido como a base universal dos logaritmos: o número e. Na verdade, Napier chegou perto de descobrir o número $\frac{1}{e}$, como vimos anteriormente. Este número desempenha um papel fundamental na matemática, aparecendo naturalmente em alguns fenômenos e dando origem à importante Função Logarítmica que veremos no próximo capítulo.

3 Definições, Caracterizações e Propriedades das Funções Exponenciais e Logarítmicas.

Refletindo sobre todo o desenvolvimento histórico e sobre o que foi citado por Zuffi [35] no capítulo anterior, deve-se ter o cuidado de não tornar o estudo das funções logarítmicas e exponenciais apenas um exercício de manipulação algébrica sem desenvolver a capacidade de observação das variáveis.

Segundo Sá [28], nos livros didáticos mapeados em seu trabalho há praticamente a ausência do comportamento variacional das funções exponenciais e logarítmicas, abordando o assunto de forma predominantemente algébrica e que na grande maioria das vezes, a finalidade de estudar essas funções fica parecendo ser resolver equações e inequações ou construir gráficos, mas vimos que historicamente, ocorreu o inverso disto, ou seja, foi a partir de gráficos, tabelas de valores e/ou equações relacionando variáveis, que se procurava descobrir a "lei" que rege essa função.

Neste capítulo, daremos alternativas para abordar as funções exponenciais e logarítmicas estudando seu comportamento variacional, caracterizando-as e também definiremos o logaritmo não só como potência, mas também como área.

3.1 A Função Exponencial

Definiremos a Função Exponencial de acordo com Lima (2006,v.1)[18]:

Definição 1. Seja a um número real positivo e diferente de 1. A *função exponencial de base a*, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, indicada pela notação $f(x)=a^x$, deve ser definida de modo a ter as seguintes propriedades, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$:

(1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

(2) $a^1 = a$

(3) $x < y \Rightarrow a^x < a^y$ quando $a > 1$ e

$x < y \Rightarrow a^y < a^x$ quando $0 < a < 1$

As outras propriedades surgem em decorrência das 3 anteriores:

(4) A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, tal que $f(x) = a^x$, é ilimitada superiormente.

(5) A função exponencial é contínua

(6) A função exponencial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = a^x$, a $\neq 1$, é injetiva e sobrejetiva, ou seja, é bijetiva, logo, admite inversa.

As demonstrações e detalhes sobre as propriedades acima encontram-se em Lima (2006, v. 1) [18].

Observações importantes:

1. $f(x)$ nunca pode ser igual a zero, a menos que seja identicamente nula.

   De fato, uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que possui a propriedade (1) acima, caso exista algum $x_0 \in \mathbb{R}$, tal que $f(x_0) = 0$, teremos:

$f(x) = f(x_0 + (x - x_0)) = a^{x_0+(x-x_0)} = a^{x_0} \cdot a^{x-x_0} = f(x_0) \cdot f(x - x_0) = 0 \cdot f(x - x_0) = 0$, logo f será identicamente nula.

2. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem a propriedade (1) acima e não é identicamente nula então $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$

   De fato, $f(x) = f\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{2}\right) = f\left(\dfrac{x}{2}\right) \cdot f\left(\dfrac{x}{2}\right) = \left[f\left(\dfrac{x}{2}\right)\right]^2 > 0$

3. A propriedade (3) diz que a função exponencial deve ser crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$.

3.2 Caracterização da função exponencial

Todas as funções possuem propriedades características. Descobrimos essas propriedades analisando o comportamento variacional das variáveis envolvidas.

Considere uma progressão aritmética $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e admita x_0 um ponto qualquer do domínio de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$. Seja f definida por $y = f(x)$=a^x , $a > 0$ e $a \neq 1$, vamos tentar analisar o comportamento variacional de f, ou seja, vamos analisar o que acontece com $f(x)$ quando x sofre um incremento de, digamos, Δx. Chamamos então de variação de f em relação a Δx de: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Definimos então a taxa de variação relativa da função pela razão:

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{f(x)}$$

Como $f(x) = a^x$, temos que :

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{a^{(x+\Delta x)} - a^x}{a^x} = \frac{a^x \cdot a^{\Delta x} - a^x}{a^x} = \frac{a^x \cdot (a^{\Delta x} - 1)}{a^x}$$

Portanto, $\dfrac{\Delta y}{y} = a^{\Delta x} - 1$, concluindo que $\Delta y/y$ varia apenas em função de Δx, sendo constante.

Veja a Tabela 5 abaixo:

x	$f(x) = a^x$
$x + \Delta x$	$a^x \cdot a^{\Delta x}$
$x + \Delta x + \Delta x$	$a^x \cdot (a^{\Delta x})^2$
$x + \Delta x + \Delta x + \Delta x$	$a^x \cdot (a^{\Delta x})^3$
$\vdots$	$\vdots$
$x + n \cdot (\Delta x)$	$a^x \cdot (a^{\Delta x})^n$
$\vdots$	$\vdots$

Tabela 5: Variação de $f(x) = a^x$

Nota-se que se variarmos x sempre com a variação Δx, formamos uma progressão aritmética em x de razão Δx enquanto em y, a variação é uma progressão geométrica de razão $a^{\Delta x}$, ou seja, $f(\Delta x)$. É interessante que o aluno neste momento, crie tabelas com exemplos concretos, por exemplo, $y = 2^x$, $y = (1/3)^x$, ... e verifique que realmente isso acontece.(Atividade 4 da seção 4.1)

Agora, vamos caracterizar formalmente a Função Exponencial. A caracterização aqui proposta é a encontrada em Lima (2006, v.1) [18]:

Teorema 1. *(Caracterização da função exponencial)*

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ *uma* função monótona injetiva *, isto é, crescente ou decrescente, são equivalentes as seguintes informações:*

(1) $f(nx) = f(x)^n$ *para todo* $n \in \mathbb{Z}$ *e todo* $x \in \mathbb{R}$

(2) $f(x) = a^x$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$ *, onde* $a = f(1)$

(3) $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ *para quaisquer* $x, y \in \mathbb{R}$

Teorema 2. *(Caracterização das funções de tipo exponencial)*

Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ *uma* função monótona injetiva *que transforma toda progressão aritmética* $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ *numa progressão geométrica* $y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots$ *com* $y_n = f(x_n)$*, se pusermos* $b = f(0)$ *e* $a = f(1)/f(0)$ *teremos* $f(x) = b \cdot a^x$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

Teorema 3. *(Caracterização das funções de tipo exponencial através das progressões)*

Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ *uma* função monótona injetiva *tal que, para* $x, h \in \mathbb{R}$ *quaisquer, o acréscimo relativo* $[g(x + h) - g(x)]/g(x)$ *dependa apenas de* h*, mas não de* x*. Então, se* $b = g(0)$ *e* $a = g(1)/g(0)$*, tem-se* $g(x) = b \cdot a^x$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

As demonstrações dos teoremas da caracterização da Função do tipo exponencial encontram-se em Lima (2006, v.1) [18] para um leitor mais curioso.

3.3 Logaritmo como expoente de uma potência

Uma grande parte dos livros didáticos de Matemática do Ensino Médio define os logaritmos como expoentes, porém, há de se tomar alguns cuidados.

Conforme Lima (1996) [17] é necessário revisar as propriedades das potências, isso se justifica porque não utilizamos apenas os números naturais como expoentes e sim os reais, pois com a criação dos logaritmos podemos conseguir nos aproximar de qualquer número real positivo através de uma potência, lembrando que o expoente da mesma é um número racional. Foi utilizado em seu estudo bases reais positivas, pois para bases reais negativas e expoente racional, teríamos os casos de raízes de números negativos e índice par, o que traria confusão e muitas exceções.

Seja n um número natural e a um número real positivo, define-se a potência a^n por recorrência:

$$a^n = 1 \text{ se } n = 0 \text{ e}$$

$$a^n = a^{n-1} \cdot a \text{ se } n \geq 1$$

Portanto, para $m \in \mathbb{N}$ vale a propriedade fundamental:

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

   De fato:

   (i) Para n=1,
   $$a^m \cdot a^1 = a^m \cdot a = a^{m+1}$$

   (ii) Por outro lado, supondo que $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, temos que:

   $$a^m \cdot a^{n+1} = a^m \cdot (a^n \cdot a) = (a^m \cdot a^n) \cdot a = a^{m+n} \cdot a = a^{m+n+1}$$

   Demonstrando a propriedade 1 por indução matemática.

   Para que a propriedade 1 continue sendo satisfeita, devemos ter:

   $a^n \cdot a^{-n} = a^{n+(-n)} = a^0 = 1$, portanto:

2. $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

   Como a propriedade 1 vale para o produto de várias potências, com $m, n, p, q \in \mathbb{N}$, temos:

   $a^m \cdot a^n \cdot a^p \cdot a^q = a^{m+n+p+q}$.

   Em particular, podemos tomar um produto de p fatores iguais a a^n :

   $a^n \cdot a^n \cdot a^n \cdots a^n$ (p fatores) $= a^{np}$, ou seja :

3. $(a^n)^p = a^{n \cdot p}$

   Agora, para funcionar para todos os racionais da forma $r = p/q$, devemos ter $(a^{p/q})^q = a^{(p/q) \cdot q} = a^p$.

   Logo, $a^{p/q}$ dever ser o número real positivo cuja q-ésima potência é igual a a^p e por definição de raiz, afirmamos que:

4. $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$

Com as 5 propriedades, conseguimos definir a potência a^r para todo número racional r.

Note que mesmo com $r = p/q$ e $s = u/v$ fracionários ($q > 0$ e $v > 0$) , vale ainda a propriedade (1):

$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$

De fato, como

$(a^r)^q = a^p$ e $(a^s)^v = a^u \Rightarrow (a^r \cdot a^s)^{qv} = (a^r)^{qv} \cdot (a^s)^{qv} = a^{pv+uq}$

Portanto, $a^r \cdot a^s$ é o número cuja qv-ésima potência vale a^{pv+uq}, ou seja:

$a^r \cdot a^s = a^{(pv+uq)/qv}$ e como

$$\frac{pv+uq}{qv} = \frac{p}{q} + \frac{u}{v} = r+s, \text{ temos:}$$

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$

Com a definição de potência e das propriedades acima, define-se logaritmo desta forma:

Dados os números reais positivos a e x ; o logaritmo de x na base a denotado por $\log_a x$ terá o valor y de modo que :

$$\log_a x = y \Longleftrightarrow a^y = x$$

Desta definição usamos as propriedades das potências para os logaritmos e chegamos imediatamente na propriedade fundamental dos logaritmos:

$$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$$

De fato, se $u = \log_a x$ e $v = \log_a y$ então $a^u = x$ e $a^v = y$ logo,

$$xy = a^u \cdot a^v = a^{u+v}, \text{ ou seja,}$$

$$\log_a(xy) = \log_a(a^{u+v}) = u+v = \log_a x + \log_a y$$

Esta propriedade de transformar produtos em soma foi a motivação original para Napier e é o que caracteriza as funções logarítmicas como veremos adiante.

Porém, ao calcular $\log_{10} 7$ não encontramos um número racional como resposta, pois se o resultado for denotado por y, temos $10^y = 7$.

De fato, se y for um número racional, será da forma $y = p/q$ e teríamos

$10^{p/q} = 7 \Rightarrow 10^p = 7^q$ que é um absurdo pois 10^p é 1 seguido de p zeros e $7^q = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdots$ (q fatores) não tem essa forma. Portanto y é um número irracional. E daí o cuidado com esse tipo de abordagem: o que significa $10^{\sqrt{2}}$ ou 3^π ? A grande maioria dos professores não mostra aos alunos esse cálculo, utilizando apenas números racionais ou inteiros segundo comentado acima na citação de Zuffi [35]. Pode-se calcular esses valores por aproximação. Por exemplo, para exemplificar :

$$10^{\sqrt{2}} \approx 10^{1,414213\cdots}$$

$$10^{1,4} \approx 25,118864$$

$$10^{1,41} \approx 25,703958$$

$$10^{1,414} \approx 25,941794$$

$$10^{1,4142} \approx 25,953743$$

$$10^{1,41421} \approx 25,954340$$

$$10^{1,414213} \approx 25,954519$$

Portanto $10^{\sqrt{2}} \approx 25{,}954$ .Quanto mais próximo estiver o expoente de $\sqrt{2}$, mais próximo estará 10^r de $10^{\sqrt{2}}$.

A desvantagem deste tipo de definição é o risco de se trabalhar apenas a parte algébrica dos logaritmos, sem apresentar aos alunos sua verdadeira aplicação prática.

3.4 Funções Logarítmicas

Definiremos a Função Exponencial de acordo com Lima (2006, v.1) [18].

Definição 2. A função $f^{-1}: Y \to X$ é a *função inversa* da função $f: X \to Y$ quando se tem $f^{-1}(f(x)) = x$ e $f(f^{-1}(y)) = y$ para quaisquer $x \in X$ e $y \in Y$ e f^{-1} é inversa de f se, e somente se, f é inversa de f^{-1}.

Vimos na secção 3.1 que a função exponencial $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = a^x$, é uma correspondência biunívoca entre $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^+$, portanto possui uma função inversa, crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$, com a propriedade adicional:

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$$

Portanto, tomando como inversa da função exponencial f a função: $\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ que associa a cada número real positivo x o número real $\log_a x$, chamado o *logaritmo* de x na base a, ou seja, $\log_a(x) = \log_a x$. Por definição de função inversa, devemos ter:

$$\log_a(a^x) = x \text{ e } a^{\log_a x} = x$$

Assim, $\log_a y$ é o expoente ao qual se deve elevar a base a para obter o número y. Ou seja,

$$y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$$

Vimos também que

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

Além disso,

1. A Função logarítmica $\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$.

2. Como $a^0 = 1$, tem-se $\log_a 1 = 0$

3. Somente números positivos possuem logaritmo real pois a função $x \mapsto a^x$ somente assume valores positivos.

4. $\log_a x = \log_a b \cdot \log_b x$ (Fórmula da Mudança de Base para logaritmos)

   De fato, se tivermos $\log_a x = u$ e $\log_b x = v \Rightarrow a^u = x$ e $b^v = x$. Escrevendo $\log_a b = c$ teremos $a^c = b$, portanto:

$$x = a^u = b^v = (a^c)^v = a^{cv} \Rightarrow u = c \cdot v \Rightarrow \log_a x = \log_a b \cdot \log_b x$$

5. $y = \log_a x$ é uma função ilimitada, tanto superiormente quanto inferiormente.

   Isso acontece porque $\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é uma correspondência biunívoca, portanto sobrejetiva, ou mais precisamente:

   para $a > 1$,

$$\lim_{x \to \infty} \log_a x = +\infty \text{ e}$$

$$\lim_{x \to 0} \log_a x = -\infty$$

3.5 Caracterização das Funções Logarítmicas

Vamos primeiramente, tentar analisar a variação das funções logarítmicas através da Tabela 6 abaixo, com incremento Δx em x e verificando o que acontece com y:

x	$f(x) = \log_a x$
$x \cdot \Delta x$	$\log_a(x \cdot \Delta x) = \log_a x + \log_a \Delta x$
$x \cdot \Delta x \cdot \Delta x$	$\log_a(x \cdot \Delta x \cdot \Delta x) = \log_a x + 2 \cdot \log_a \Delta x$
$x \cdot \Delta x \cdot \Delta x \cdot \Delta x$	$\log_a(x \cdot \Delta x \cdot \Delta x \cdot \Delta x) = \log_a x + 3 \cdot \log_a \Delta x$
$\vdots$	$\vdots$
$x \cdot (n \cdot (\Delta x))$	$\log_a x + n \cdot \log_a \Delta x$
$\vdots$	$\vdots$

Tabela 6: Variação de $f(x) = a^x$

Note que se tivermos uma progressão geométrica de razão Δx no Domínio, teremos uma progressão aritmética de razão $f(\Delta x)$ no Contradomínio. Também é importante que o aluno construa tabelas de funções com exemplos concretos, como $y = \log_2^x, y = \log_{10}^x$, etc... ,para verificar e descobrir as relações existentes nas funções logarítmicas. (Atividade 5 da seção 4.1)

Depois desta verificação, devemos formalizar a caracterização das Funções Logarítmicas.

Já vimos que a principal característica da Função Logarítmica é transformar produtos em somas, vamos demonstrar que são as únicas que possuem essa propriedade. Esta caracterização se encontra em Lima (2006, v.1) [18].

Teorema 4. *(Caracterização das Funções logarítmicas). Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uma função monótona tal que $f(xy) = f(x) + f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^+$. Então existe $a > 0$ tal que $f(x) = \log_a x$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$.*

Demonstração. Admitamos f crescente e se for decrescente, será tratado analogamente. Temos que $f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1)$, logo $f(1) = 0$. Inicialmente, vamos supor que exista $a \in \mathbb{R}^+$ tal que $f(a) = 1$. Depois mostraremos que isto sempre acontece, logo não é uma hipótese adicional.

Como f é crescente e $f(a) = 1 > 0 = f(1)$, tem-se $a > 1$. Para todo $m \in \mathbb{N}$ vale:

$$f(a^m) = f(a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a) = f(a) + f(a) + f(a) + \dots + f(a) = 1 + 1 + 1 + \dots + 1 = m$$

Então, $0 = f(1) = f(a^m \cdot a^{-m}) = f(a^m) + f(a^{-m}) = m + f(a^{-m})$. Logo,

$$f(a^{-m}) = -m$$

Se $r = m/n$ com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$ então $r \cdot n = m$, portanto
$m = f(a^m) = f(a^{rn}) = f((a^r)^n) = n \cdot f(\cdot a^r)$. Ou seja,

$$f(a^r) = \frac{m}{n} = r$$

Se $x \in \mathbb{R}$ é irracional então, para $r, s \in \mathbb{Q}$ tem-se:

$$r < x < s \Rightarrow a^r < a^x < a^s \Rightarrow f(a^r) < f(a^x) < f(a^s) \Rightarrow r < f(a^x) < s$$

Assim, todo número racional r, menor do que x, é também menor que $f(a^x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo número racional s, maior do que x, é também maior que $f(a^x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto se $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é tal que $f(a^x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ então $f(y) = \log_a y$ para todo $y > 0$ pois $f(x) = a^x$ é uma função sobrejetiva de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^+$, com $a > 0$ e a $\neq 1$.

Consideremos agora o caso geral, em que se tem uma função crescente $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, tal que

$$g(x \cdot y) = g(x) + g(y) \text{ sem mais nenhuma hipótese.}$$

Então $g(1) = 0$ e, como $1 < 2$, devemos ter $g(2) = b > 0$. A nova função $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = g(x)/b$, é crescente, transforma somas em produtos e cumpre $f(2) = 1$. Logo, pela primeira parte da demonstração, tem-se $f(x) = \log_2 x$ para todo $x > 0$. Isto significa que, para todo $x > 0$ vale

$$x = 2^{f(x)} = 2^{g(x)/b} = (2^{1/b})^{g(x)} = a^{g(x)}; \text{ com } a = 2^{1/b}$$

Tomando $\log_a$ de ambos os membros da igualdade $a^{g(x)} = x$ tem-se, finalmente:

$$g(x) = \log_a x$$

$\square$

Como consequência do Teorema 4 acima, teremos uma série de propriedades importantes das funções logarítmicas:

Propriedade 3.1. *Uma função logarítmica $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é sempre injetiva, isto é, números positivos diferentes têm logaritmos diferentes.*

De fato, se $x, y \in \mathbb{R}^+$ são diferentes, então ou $x < y$ ou $y < x$. No primeiro caso, pelo Teorema 4, como f é monótona, vamos fixar como crescente, resulta que $f(x) < f(y)$. No segundo caso tem-se $f(y) < f(x)$. Em qualquer hipótese, de $x \neq y$ conclui-se $f(x) \neq f(y)$, portanto a função é injetiva.

Propriedade 3.2. *O logaritmo de 1 é zero.*

De fato, temos
$f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1)$, logo $f(1) = 0$.

Propriedade 3.3. *Os números maiores do que 1 têm logaritmos positivos e os números entre 0 e 1 têm logaritmos negativos.*

De fato, sendo f crescente, de $0 < x < 1 < y$ resulta $f(x) < f(1) < f(y)$, ou seja $f(x) < 0 < f(y)$.

Propriedade 3.4. *Para todo $x > 0$, tem-se $f(1/x) = -f(x)$.*

Como $x \cdot \dfrac{1}{x} = 1$ temos que $f(x) + f(1/x) = f(1) = 0$, portanto $f(1/x) = -f(x)$

Propriedade 3.5. *Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^+$, vale $f(x/y) = f(x) - f(y)$*

Como $f(x/y) = f(x \cdot 1/y) = f(x) + f(1/y) = f(x) - f(y)$

Propriedade 3.6. *Para todo $x \in \mathbb{R}^+$ e todo número racional $r = p/q$ tem-se $f(x^r) = r \cdot f(x)$*

Primeiro verificamos se a propriedade funciona para $r = n \in \mathbb{N}$.
(i) Para n = 1, temos:

$$f(x^1) = f(x) = 1 \cdot f(x)$$

(ii)Por outro lado, supondo $f(x^n) = n \cdot f(x)$, temos que:

$$f(x^{n+1}) = f(x^n \cdot x^1) = f(x^n) + f(x) = n \cdot f(x) + 1 \cdot f(x) = (n+1) \cdot f(x)$$

Demonstrando por indução matemática a propriedade para $n \in \mathbb{N}$

Quando $r = 0$, a propriedade também vale, pois como $x^0 = 1$ para todo número real positivo, temos que $f(x^0) = f(1) = 0 = 0 \cdot f(x)$.

Consideremos agora $r = -n$, $n \in \mathbb{N}$, então, para todo $x > 0$ temos $x^n \cdot x^{-n} = x^0 = 1$. Logo,
$f(x^n \cdot x^{-n}) = f(x^n) + f(x^{-n}) = f(1) = 0$ então,
$f(x^{-n}) = -f(x^n) = -n \cdot f(x)$.

Finalmente, o caso geral, em que $r = p/q$ onde $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$. Para todo $x \in \mathbb{R}^+$ teremos:
$(x^r)^q = (x^{p/q})^q = x^p$, logo $q \cdot f(x^r) = f((x^r)^q) = f(x^p) = p \cdot f(x)$ em decorrência do que já foi demonstrado anteriormente.

Da igualdade $q \cdot f(x^r) = p \cdot f(x)$ temos que $f(x^r) = (p/q) \cdot f(x)$, ou seja,

$$f(x^r) = r \cdot f(x)$$

Propriedade 3.7. *Uma função logarítmica $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é ilimitada superior e inferiormente.*

A afirmação acima significa que, dados arbitrariamente números reais α e β, é sempre possível achar números positivos x e y tais que $f(y) < \alpha$ e $f(x) > \beta$. Para provar que f é ilimitada superiormente, suponhamos dado um número β e devemos achar um número $x \in \mathbb{R}^+$ tal que $f(x) > \beta$. Vamos tomar um número natural n tão grande que $n > \dfrac{\beta}{f(2)}$. Como $f(2) > 0$ (Propriedade 3.3) temos que $n \cdot f(2) > \beta$. Usando a Propriedade 3.6, vemos que $n \cdot f(2) = f(2^n)$. Portanto $f(2^n) > \beta$. Agora, é só escolher $x = 2^n$ e segue que $f(x) > \beta$, mostrando que f é ilimitada superiormente.

Para provar que f é ilimitada inferiormente, basta lembrar que $f(1/x) = -f(x)$ (Propriedade 3.4). Dado qualquer número real α, podemos achar $x \in \mathbb{R}^+$ tal que $f(x) > -\alpha$, como mostrado anteriormente. Então pondo $y = 1/x$, teremos $f(y) = -f(x) < \alpha$.

A correspondência biunívoca da função logarítmica também é importante:

Teorema 5. *Toda função logarítmica f é sobrejetiva, isto é, dado qualquer número real c, existe sempre um único número real positivo x tal que $f(x) = c$.*

A demonstração deste teorema pode ser vista em Lima (2006, v.1) [18].

Teorema 6. *Toda função logarítmica f é uma correspondência biunívoca (bijeção) entre $\mathbb{R}^+$ e $\mathbb{R}$, isto é, dado qualquer número real c, existe sempre um único número real positivo x tal que $f(x) = c$.*

Como $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é injetiva (Propriedade 3.1) e sobrejetiva (Teorema 5) segue que é bijetiva.

3.6 Definição Geométrica de Logaritmo

Conforme visto anteriormente, o procedimento para calcular área da hipérbole foi muito importante para o desenvolvimento da Matemática, principalmente no final século XVII e século XVIII. Atualmente, pode ajudar não só no Ensino da Geometria como pode dar uma noção de Cálculo ainda no Ensino Médio, sendo mais vantajoso para o aluno do que a definição do Logaritmo como expoente. Não se faz mais necessário ficar muito tempo se preocupando com as Tábuas de Logaritmos como antigamente e este espaço poderia ser ocupado com outras coisas. Segundo Ávila [2], que defende o ensino do Cálculo no Ensino Médio, *"O natural, como se vê, é levar o logaritmo para o contexto do Cálculo. Definido como área sob uma hipérbole, ele é um interessante prelúdio ao Cálculo Integral."* Usando este procedimento adaptado para as linguagens atuais, Lima (1996) [17] sugere introduzir a definição de área de uma faixa da hipérbole para posteriormente definir os logaritmos naturais usando essa definição.

3.6.1 Área de uma faixa da Hipérbole

Seja H o ramo positivo do gráfico da função $y = 1/x$, ou em símbolos atuais :

$H = \{(x, y); x > 0, y = 1/x\}$

Uma faixa de hipérbole é obtida quando fixamos dois números reais positivos a, b com $a < b$ e tomando a região do plano limitada pelas duas retas verticais $x = a$, $x = b$, pelo eixo das abscissas e pela hipérbole H. Usaremos H_a^b para indicar essa faixa, conforme figura 6 abaixo:

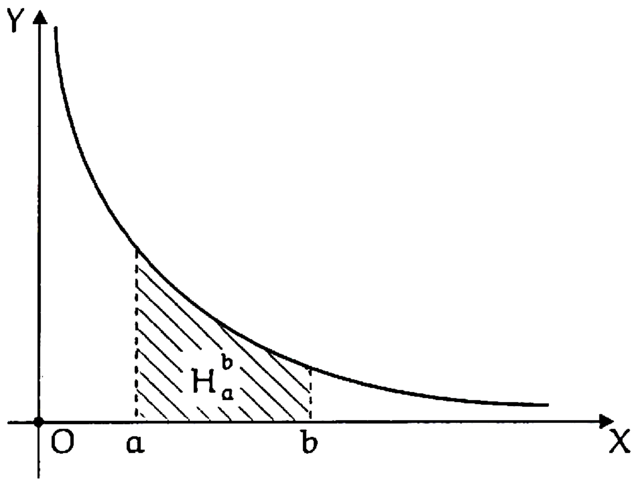

Figura 6: Faixa H_a^b entre $x = a$ e $x = b$.

Podemos calcular o valor aproximada da área de H_a^b decompondo o intervalo $[a, b]$ num número finito de intervalos justapostos e com base em cada um dos intervalos [c,d] da decomposição, onde $c < d$, consideramos o retângulo de altura igual a $1/d$ com o vértice superior direito desse retângulo tocando a hipérbole H, que chamaremos de retângulos inscritos na faixa H_a^b. Se somarmos a área de todos esses retângulos inscritos, teremos um valor aproximado por falta da área H_a^b. E analogamente, se ao invés de escolhermos retângulos com altura igual a $1/d$ escolhermos altura $1/c$, teremos retângulos circunscritos na faixa H_a^b e também:

Soma dos retângulos inscritos $< H_a^b <$ Soma dos retângulos circunscritos

Note que quanto maior o número de intervalos criados, mais próximo da área da faixa H_a^b conseguirei chegar.

Lima (1996) [17] sugere retângulos inscritos e *trapézios secantes* ao invés de retângulos circunscritos. O *trapézio secante* tem a mesma base [c,d] da decomposição do intervalo [a,b] e os dois lados verticais sendo $1/c$ e $1/d$, respectivamente, de modo que dois de seus vértices toquem a hipérbole H. Como a curva $y = 1/x$ tem a concavidade voltada para cima, esse trapézio contém a faixa H_c^d em seu interior e a soma das áreas dos trapézios assim obtidos dá uma aproximação por excesso da área de H_a^b melhor que a dos retângulos inscritos e circunscritos, obtendo uma melhor aproximação que a anterior:

Soma dos retângulos inscritos $< H_a^b <$ Soma dos *trapézios secantes* circunscritos

Veja exemplo de Lima (1996) [17] :

Vamos calcular a área aproximada de uma faixa H_1^3 .

Em uma primeira aproximação, decompomos o intervalo $[1, 3]$ em 4 intervalos justapostos e teremos os pontos intermediários $(1, 1); (3/2, 2/3); (2, 1/2); (5/2, 2/5)$ e $(3, 1/3)$ formando retângulos inscritos na faixa H_1^3, conforme Figura 7.

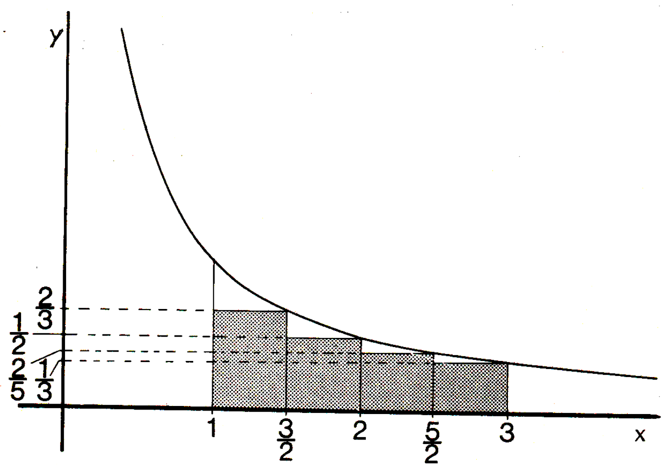

Figura 7: Primeira Aproximação por falta para a área H_1^3. Fonte: Lima (1996) [17]

Se somarmos a área dos quatro retângulos obtidos, teremos:

$$\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\right)+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\right)=$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{57}{60}=0,95$$

Se, porém decompormos o intervalo $[1,3]$ em 8 intervalos justapostos ao invés de 4, teremos os pontos intermediários $(1,1); (5/4,4/5); (6/4,4/6); (7/4,4/7); (2,1/2); (9/4,4/9); (10/4,4/10); (11/4,4/11)$ e $(3,1/3)$, conforme Figura 8.

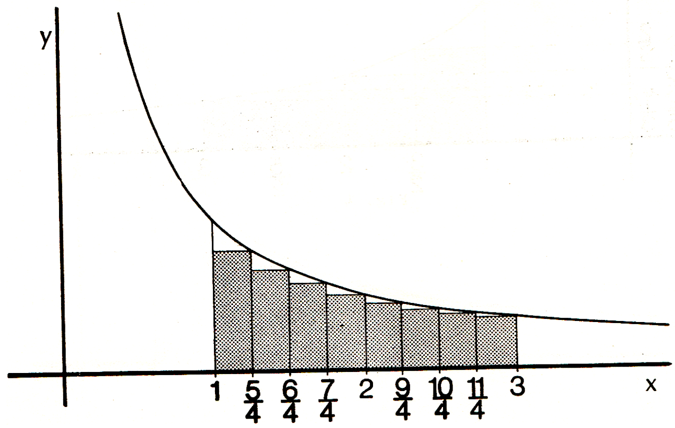

Figura 8: Uma melhor Aproximação por falta para a área H_1^3. Fonte: Lima (1996) [17]

Se somarmos a área dos oito retângulos obtidos, teremos:

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}=\frac{28271}{27720}\approx 1,0198$$

Agora, decompondo o intervalo [1,3] nos mesmos 8 intervalos anteriores de comprimentos iguais a 1/4 cada um e ao invés de retângulos inscritos, formarmos trapézios secantes com os pontos intermediários $(1,1); (5/4,4/5); (6/4,4/6); (7/4,4/7); (2,1/2); (9/4,4/9); (10/4,4/10);$

$(11/4, 4/11)$ e $(3, 1/3)$, conforme Figura 9, a área de cada um dos trapézios será igual a $1/8$ (metade do lado horizontal) vezes a soma dos lados verticais, que possuem medidas $1/x$ (pontos intermediários acima).

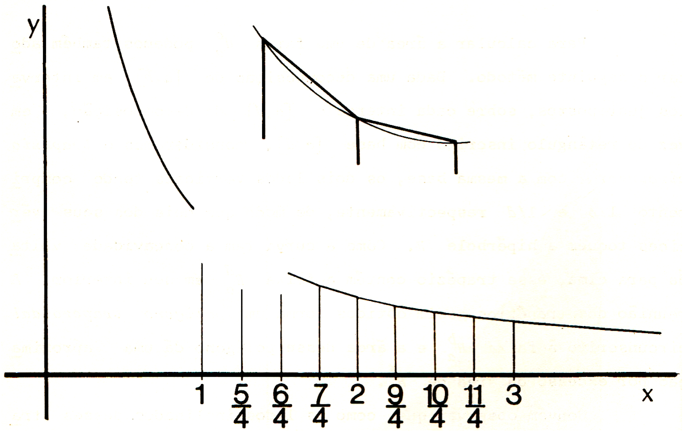

Figura 9: Aproximação por excesso de H_1^3 por trapézios secantes. Fonte: Lima (1996) [17]

E somando as áreas dos oito trapézios, teremos:

$$\frac{1}{8} \cdot [(1 + 4/5) + (4/5 + 4/6) + (4/6 + 4/7) + (4/7 + 1/2) + (1/2 + 4/9) +$$
$$+ (4/9 + 4/10) + (4/10 + 4/11) + (4/11 + 1/3)] =$$
$$\frac{1}{8} \cdot \left[\frac{61162}{6930}\right] = \frac{61162}{55440} \approx 1,1032$$

Portanto, podemos dizer que :

$$1,0198 < H_1^3 < 1,1032$$

Se aumentarmos o número de retângulos inscritos e trapézios secantes, decompondo o intervalo $[1, 3]$ em um número maior de subintervalos, teremos uma aproximação ainda melhor de H_1^3.

Em linguagem atual,

$$H_1^3 = \int_1^3 \frac{dx}{x} = [\ln x]_1^3 = \ln 3 - \ln 1 \approx 1,0986$$

Um dos mais importantes fatos a respeito das áreas das faixas de Hipérbole é expresso no teorema abaixo:

Teorema 7. *Seja qual for o número real, $k > 0$, as faixas H_a^b e H_{ka}^{kb} têm a mesma área.*

Demonstração. Os retângulos inscritos em H, cujas bases são os segmentos $[c, d]$ e $[ck, dk]$ do eixo das abscissas (Figura 10), têm a mesma área.

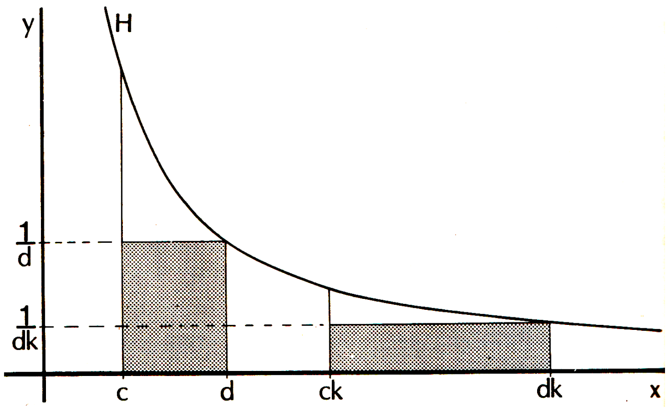

Figura 10: Os retângulos hachurados têm a mesma área. Fonte: Lima (1996) [17]

De fato, a área do primeiro é:

$$(d-c)\cdot\frac{1}{d}=1-\frac{c}{d}$$

E a área do segundo é :

$$(dk-ck)\cdot\frac{1}{dk}=1-\frac{c}{d}$$

Considerando agora as decomposições do intervalo $[a, b]$ e os retângulos inscritos na faixa H_a^b formados por estas decomposições, ao se multiplicar por k cada uma das abscissas dos pontos de subdivisão de $[a, b]$ obtém-se uma subdivisão do intervalo $[ak, bk]$ com triângulos inscritos na faixa H_{ka}^{kb} (Figura 11) e cada um dos retângulos da faixa H_a^b possui a mesma área do retângulos correspondente na faixa H_{ka}^{kb}.

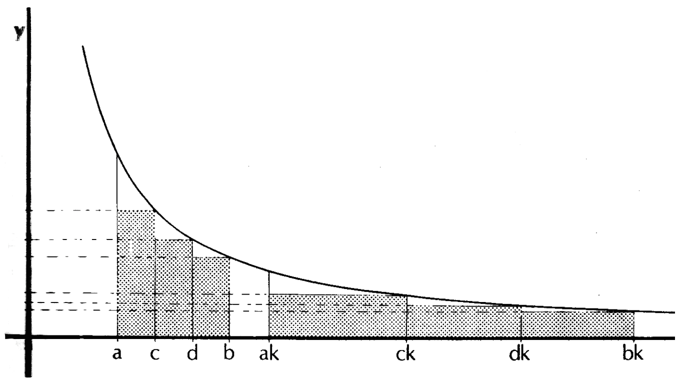

Figura 11: Fonte: Lima (1996) [17]

Concluímos então que a área das duas faixas possuem a mesma aproximação por falta e portanto, são iguais.

□

Uma importante consequência deste Teorema é poder restringir todas as áreas das faixas H_a^b às áreas das faixas H_1^c pois, tomando $k = 1/a$:

$$\text{Área}(H_a^b) = \text{Área}(H_1^{b/a}) = \text{Área}(H_1^c); \text{com c = b/a.} \tag{3}$$

Note que quando $a < b < c$, temos:

$$\text{Área}(H_a^b) + \text{Área}(H_b^c) = \text{Área}(H_a^c) \tag{4}$$

E, para manter a igualdade (4) acima válida sem restrições, convencionaremos:

$$\text{Área}(H_a^a) = 0 \text{ e } \text{Área}(H_a^b) = -\text{Área}(H_b^a)$$

Por exemplo, caso $c < a < b$ (Figura 12), temos:

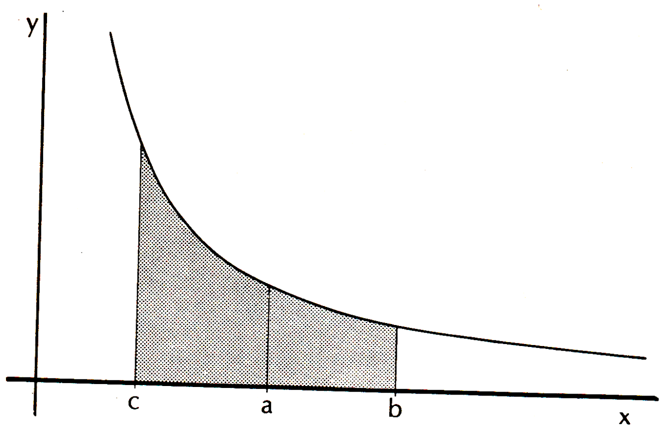

Figura 12: Fonte: Lima (1996) [17]

$$\text{Área}(H_b^c) = \text{Área}(H_c^a) + \text{Área}(H_a^b). \text{ Daí, segue:}$$

$$\text{Área}(H_a^b) - \text{Área}(H_c^b) = -\text{Área}(H_c^a), \text{ ou seja:}$$

$$\text{Área}(H_a^b) + \text{Área}(H_b^c) = \text{Área}(H_a^c) \text{ Equação (4)}$$

E analogamente, considerando áreas negativas como na convenção acima se faz com que a igualdade (4) seja válida para todos os outros casos: $a < c < b, b < a < c, b < c < a$ e $c < b < a$.

Se tivermos, por exemplo, $a = c$, ao substituir na igualdade (4), teremos:

$$\text{Área}(H_a^b) + \text{Área}(H_b^a) = \text{Área}(H_a^a) = 0, \text{ o que é evidente.}$$

Para os casos $a = b, b = c$ ou $a = b = c$, também é válida a igualdade (4), como pode ser verificada pelo leitor.

3.6.2 Logaritmos Naturais definidos como Área de uma faixa da Hipérbole

Definiremos o *Logaritmo Natural* como a área da faixa H_1^x para $x > 0$ e o denotaremos como $\ln x$:

Definição 3.

$$\ln x = \text{Área}(H_1^x), \text{com } x > 0$$

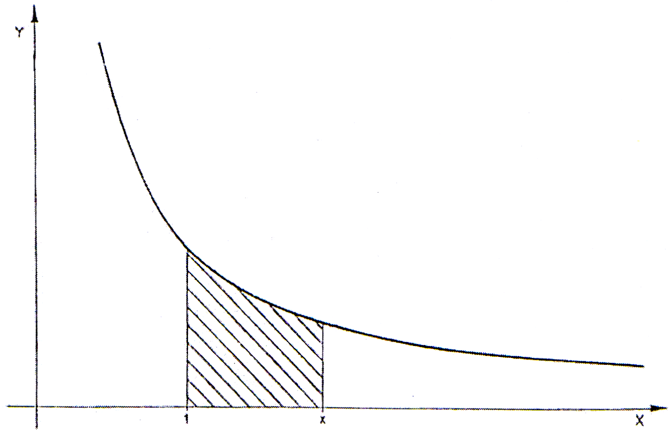

Figura 13: A área hachurada é $\ln x$. Fonte: Lima (1996) [17]

Observa-se que quando $x = 1$, H_1^1 reduz-se a um segmento de reta, logo tem área igual a zero, portanto:

$\ln 1 = 0$

$\ln x > 0$ se $x > 1$

$\ln x < 0$ se $0 < x < 1$

$\ln x$ não está definido se $x < 0$

Esse logaritmo aqui definido é o que muitos autores chamam de Logaritmo Neperiano em homenagem a Napier, mas vamos preferir chamá-lo de Logaritmo Natural. Como já foi visto, Napier não usou a base e.

Como exemplo, vamos calcular um valor aproximado para $\ln 2$ usando a definição acima.

Portanto, $\ln 2 =$ Área (H_1^2).

Vamos subdividir o intervalo $[1, 2]$ em 10 partes iguais e teremos os valores com aproximação de 4 casas decimais na Tabela abaixo:

x	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
1/x	1	0,909	0,8333	0,7692	0,7142	0,6666	0,625	0,5882	0,5555	0,5263	0,5

Tabela 7: Valores de x e 1/x

Utilizando o método visto anteriormente, a soma da área dos 10 retângulos inscritos obtidos pela decomposição será igual a 0,66873 e a soma da área dos 10 trapézios circunscritos será 0,6937, o que nos indica:

$$0,66873 < \ln 2 < 0,69370$$

Nota-se que a aproximação por trapézios circunscritos é melhor que a dos retângulos, pois $\ln 2 = 0,69314$ com aproximação de 5 casas decimais.

Fica assim definida uma função real

$$\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \text{ com } f(x) = \ln x$$

onde a cada número real x>0, a função ln faz corresponder seu logaritmo natural, $\ln x$, definido acima.

Teorema 8. $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *é uma função logarítmica.*

Demonstração. Pelo Teorema 4, a função logarítmica fica caracterizada por ser uma função monótona injetiva tal que $f(x \cdot y) = f(x)+f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$. Começaremos provando que

$$\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$$

Pela Definição de Logaritmo apresentada acima, $\ln(xy) = \text{Área}(H_1^{xy})$, e como já vimos que $\text{Área}(H_a^b) + \text{Área}(H_b^c) = \text{Área}(H_a^c)$ para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$, teremos:

$$\ln(xy) = \text{Área } (H_1^{xy}) = \text{Área } (H_1^x) + \text{Área } (H_x^{xy})$$

seja qual for a posição relativa dos pontos de abcissa $1, x, xy$ sobre o eixo das abcissas.

Além disso, pelo Teorema 5, e com $k = 1/x$, temos:

$$\text{Área } (H_x^{xy}) = \text{Área } (H_1^y) \text{ e segue-se que}$$

$$\text{Área } (H_1^{xy}) = \text{Área } (H_1^x) + \text{Área } (H_1^y), \text{ isto é,}$$

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y$$

Agora, provaremos que ln é uma função crescente. Dados $x, y \in \mathbb{R}^+$, dizer que $x < y$ significa afirmar que existe um número $a > 1$ tal que $y = ax$. Segue-se que

$$\ln y = \ln(ax) = \ln a + \ln x$$

Como $a > 1$, $\ln a > 0$. Portanto, $\ln y > \ln x$ e como $y > x$ por hipótese, temos uma função crescente, completando a demonstração.

□

As propriedades vistas na seção 3.5 são válidas agora e resultam nas seguintes regras de cálculo com logaritmos naturais, com x, y sendo números reais positivos e m um número natural:

Propriedade 3.8.

$$\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$$

Propriedade 3.9.

$$\ln\left(\frac{1}{y}\right) = -\ln y$$

Propriedade 3.10.

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$$

Propriedade 3.11.

$$\ln(x^m) = m \cdot \ln x$$

Propriedade 3.12.

$$\ln(\sqrt[m]{x}) = \frac{\ln x}{m}$$

Essas propriedades permitem reduzir cada operação aritmética a uma operação mais simples.

3.7 O número e

Devido ao Teorema 5, existe um único número real positivo cujo logaritmo natural é igual a 1. Tal número é representado pela letra e, que é a base dos logaritmos naturais, ou seja,

$$\ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$$

Como os números reais entre 0 e 1 possuem logaritmos negativos e números reais positivos maiores que 1 possuem logaritmos positivos, vemos que $e > 1$.

Lembrando-se do significado geométrico dos logaritmos naturais, vemos que a faixa H_1^e possui área 1.(Figura 14)

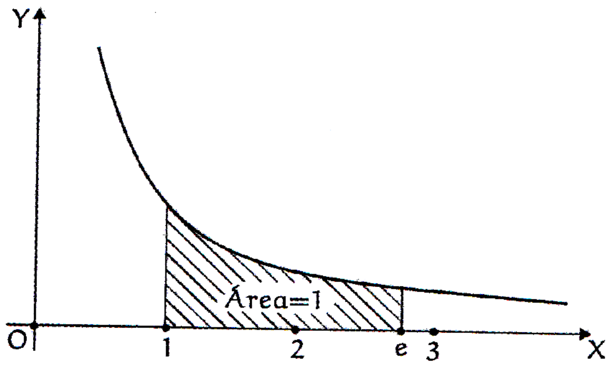

Figura 14: Número e. Fonte: Lima (1996) [17]

Vimos anteriormente que a faixa H_1^2 possui área menor que 1 e que a faixa H_1^3 possui área maior que 1, ou seja, $\ln 2 < 1 < \ln 3$ e concluímos que $2 < e < 3$. Pode-se demonstrar que o número e é irracional e um valor aproximado para e, com 12 algarismos decimais é:

$$e = 2,718281828459$$

Teorema 9. *Seja $r = p/q$ um número racional. Tem-se que $y = e^r$ se, e somente se, $\ln y = r$.*

Demonstração. Se y=e^r, então, $\ln y = r \cdot \ln e$ e como $\ln e = 1$, temos que $\ln y = r$.

Reciprocamente, seja $y > 0$ um número real tal que $\ln y = r$. Como $\ln(e^r) = r$ e ln é uma função biunívoca, concluímos que $y = e^r$. □

Logo, pelo menos para potências de expoente racional de e, o logaritmo natural de um número é o expoente ao qual se deve elevar a base e a fim de obter esse número.

3.7.1 O número e como limite

Conhecemos a definição de e como sendo :

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots = e$$

Isso significa que quando tomamos um número n suficientemente grande, a potência $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ aproxima-se de e, Veja a tabela abaixo:

n	$(1+1/n)^n$
2	2,25
5	2,48832
10	2,593742
100	2,704813
1000	2,716923
10^4	2,718145
10^5	2,718268
$\vdots$	$\vdots$
10^{10}	2,718282
$\vdots$	$\vdots$

Tabela 8: Aproximação para $(1+1/n)^n$

Agora, vamos demonstrar que

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Se tomarmos $x = 1/n$, com $n \neq 0$, temos $n = 1/x$ e $n \to \infty$ é o mesmo que $x \to 0$, pois quando n é suficientemente grande, $1/n$ tende a zero. Portanto demonstrar o limite acima equivale a demonstrar :

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e, (x \neq 0)$$

Primeiro, para o caso $x > 0$:

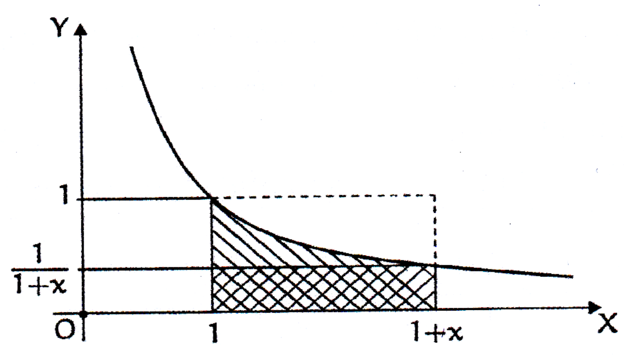

Figura 15: Fonte: Lima (1996) [17]

Temos que $\ln(1+x)$ é a área da faixa H_1^{1+x}. Observando a Figura 15 acima, vemos dois retângulos de mesma base x e de alturas $1/1+x$ e 1. Também notamos que $\ln x$ se encontra entre a área desses dois retângulos. A área do retângulo maior é x e a área do retângulo menor é $x/1+x$. Portanto, temos:

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$$

Dividindo por x:

$$\frac{1}{1+x} < \frac{\ln(1+x)}{x} < 1$$

Pela Propriedade 3.6, podemos escrever:

$$\frac{1}{1+x} < \ln[(1+x)]^{1/x} < 1$$

Tomando exponenciais de base em todos os membros da desigualdade acima, temos:

$$e^{1/(1+x)} < (1+x)^{1/x} < e, \text{ para todo } x > 0$$

Fazendo agora x tender a zero, $e^{1/(1+x)}$ tende a e e pelo Teorema do Confronto, [2] concluímos que:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e, \text{ se } x > 0$$

Seja agora $x < 0$. Como faremos x tender a zero, vamos supor que $x > -1$ e portanto, $x+1 > 0$. Então, podemos falar em $\ln(1+x)$ como sendo um número real. (Figura 16)

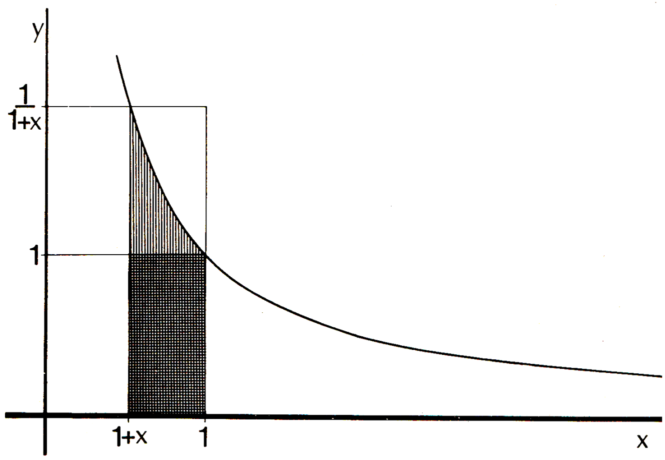

Figura 16: Fonte: Lima (1996) [17]

Na realidade, como $-1 < x < 0$, a área da faixa da hipérbole H_1^{1+x} será igual a - $\ln(1+x)$, a qual contém um retângulo de base $-x$ e altura 1 e está contida em outro retângulo de base

[2]O teorema do confronto estabelece a existência do limite de uma função real, contanto que no domínio de interesse essa função se encontre limitada (inferior e superiormente) por duas funções, ambas convergentes para o mesmo limite.

também igual a $-x$ e altura $1/1+x$. Concluímos que :

$$-x < \ln(1+x) < \frac{-x}{1+x}$$

Dividindo por $-x$ (note que $-x$ é um número positivo):

$$1 < \frac{\ln(1+x)}{x} < \frac{1}{1+x}$$

$$1 < \ln[(1+x)^{1/x}] < \frac{1}{1+x}$$

Tomando exponenciais de base e na desigualdade:

$$e < (1+x)^{1/x} < e^{1/1+x}$$

E como anteriormente, concluiremos que

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e, \text{ se } x < 0$$

Portanto, fica demonstrado que

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \tag{5}$$

Em particular, sendo $n = 1, 2, 3, \cdots$ valores inteiros, teremos:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Como a noção de área é intuitiva, conseguimos obter as desigualdades acima e esta é uma das vantagens de se interpretar os logaritmos através das áreas.

Note ainda que temos para $x \neq 0$:

Fazendo $u = ax$, temos $1/x = a/u$, Portanto, quando $x \to 0$, $u \to 0$, logo:

$$(1+ax)^{1/x} = (1+u)^{a/u} = [(1+u)^{1/u}]^a, \text{ donde}$$

$$\lim_{x\to 0}(1+ax)^{1/x} = \lim_{u\to 0}[(1+u)^{1/u}]^a = e^a$$

$$\lim_{x\to 0}(1+ax)^{1/x} = e^a \tag{6}$$

Ainda, se fizermos $y = 1/x \Rightarrow a/y = ax$ e quando $x \to 0$, $y \to \infty$, logo,

$$\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{a}{y}\right)^y = \lim_{x\to 0}(1+ax)^{1/x} = e^a \text{ [por(6)]}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a \tag{7}$$

De (7), se tomarmos $a = -1$ e x um número inteiro n, teremos que:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} = \frac{1}{e} \tag{8}$$

3.8 A Função Exponencial $y = e^x$

Definiremos agora a potência e^x, onde x é um número real qualquer.

Definição 4. Dado o número real x, e^x é o único número positivo cujo logaritmo natural é x.

O Teorema 6 garante a unicidade e existência de e^x. Geometricamente, $y = e^x$ é a abcissa que devemos tomar para que a faixa da hipérbole H_1^y tenha área x. (Figura 17)

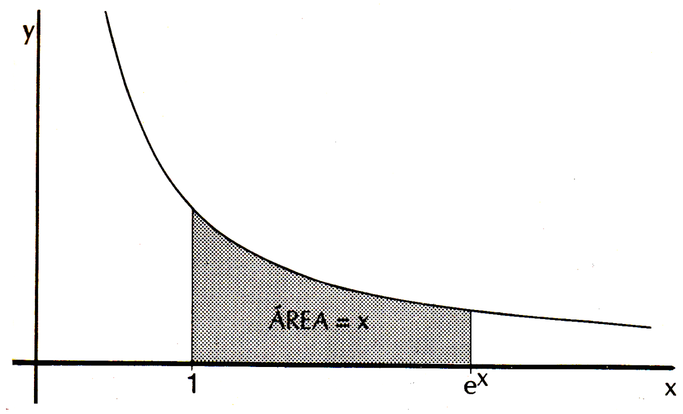

Figura 17: Fonte: Lima (1996) [17]

Vê-se que $e^x > 0$ para todo x, que $e^x > 1$ quando $x > 0$ e que $e^x < 1$ quando $x < 0$.

A equivalência abaixo é a definição de e^x :

$$y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$$

Pelo Teorema 9, quando $x = p/q$ é um número racional, o número y cujo logaritmo é x é precisamente $y = \sqrt[q]{e^p}$.

Em particular, para $n > 0$ inteiro:

$$e^n = e \cdot e \cdot e \cdot \cdots \cdot e \quad (n \text{ fatores})$$

$$e^{-n} = \frac{1}{e^n}$$

Agora também faz sentido e^x mesmo com x irracional. Por exemplo, $e^{\sqrt{2}}$ é o número $y > 0$ tal que a área de H_1^y vale $\sqrt{2}$, ou seja, basta achar o número cujo logaritmo mais se aproxima de 1,414.

A função $x \to e^x$ é definida para todos os reais, ou seja, seu domínio contém todos os números reais e é a função inversa da função logaritmo natural. isto quer dizer que valem as igualdades para todo $y > 0$ e para todo x real:

$$\ln(e^x) = x; \quad e^{\ln y} = y$$

3.8.1 Derivada da Função Exponencial

Nesta seção veremos como as funções exponenciais e logarítmicas estão ligadas a um grande número de fenômenos e situações naturais, onde se tem uma grandeza cuja taxa de variação é proporcional à quantidade da mesma existente no instante dado.

A taxa de variação de uma função f no intervalo de extremidades $x, x+h$ é, por definição, o quociente $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Quando h tende a zero, este quociente se torna o que conhecemos no Cálculo por *Derivada* da função f no ponto x, ou $f'(x)$ ou ainda dy/dx, que é um número real que significa a taxa instantânea de crescimento de f no ponto x. Esse número real, cujos valores aproximados são os quocientes $[f(x+h)-f(x)]/h$ para valores muito pequenos de h, tem sua representação geométrica como sendo a inclinação da reta tangente ao gráfico da função f no ponto x, ou seja,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

O sinal e o valor da derivada $f'(x)$ indicam a tendência da variação de f a partir do ponto x. Se $f'(x) > 0$, então $f(x+h)>f(x)$ para pequenos valores positivos de h. Se $f'(x) < 0$, tem-se, ao contrário, $f(x+h)<f(x)$ para pequenos valores positivos de h. Se $f'(x)$ é um número positivo muito grande, então f cresce rapidamente a partir de x e caso $f'(x)$ seja um número negativo muito pequeno, $f(x)$ decresce rapidamente a partir de x. A derivada é a noção fundamental do Cálculo Infinitesimal.

Veremos o que acontece com a função $y = b^x$, com b sendo um número real positivo e diferente de 1:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{b^{x+h}-b^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{b^x \cdot b^h - b^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{b^x(b^h-1)}{h}$$

e como o fator b^x não depende de h, podemos colocá-lo fora do limite:

$$f'(x) = b^x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{b^h-1}{h}$$

Como $f'(0) = b^0 \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{b^h-1}{h}$, temos:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{b^h-1}{h}$$

Ou seja, o limite é o valor da derivada de f em 0, portanto, se a função exponencial

$f(x) = b^x$ for derivável em 0, será derivável em toda a parte e

$$f'(x) = f'(0)b^x \tag{9}$$

Stewart[33] cita: "Essa equação diz que a taxa de variação de qualquer função exponencial é proporcional à própria função."

Ao escolher $f'(0) = \lim_{h \to 0} \dfrac{b^h - 1}{h} = 1$, a derivada desta função será ela mesma, tornando a equação bem simples, seria uma escolha "natural" de b.

Observando a tabela abaixo, veremos o que acontece com a base b e com $f'(0)$:

h	$\dfrac{2^h - 1}{h}$	$\dfrac{3^h - 1}{h}$
0,1	0,717734	1,161232
0,01	0,695555	1,104669
0,001	0,693387	1,099216
0,0001	0,693171	1,098673
0,00001	0,693149	1,098618
0,000001	0,693147	1,098612
0,0000001	0,693147	1,098612
0,00000001	0,693147	1,098612

Tabela 9: Valores numéricos de $f'(0)$ para $b = 2$ e $b = 3$ com 6 casas decimais

Essa tabela é uma evidência numérica de que $f'(0)$ existe para $b = 2$ e $b = 3$ e :

Para $b = 2$, $f'(0) = \lim_{h \to 0} \dfrac{2^h - 1}{h} \approx 0,693147$

Para $b = 3$, $f'(0) = \lim_{h \to 0} \dfrac{3^h - 1}{h} \approx 1,098612$

Portanto, da equação (9) obtemos:

$$\frac{d}{dx}(2^x) \approx (0,69)2^x \text{ e } \frac{d}{dx}(3^x) \approx (1,10)3^x$$

Agora fica aceitável admitir que exista um número b entre 2 e 3 para o qual $f'(0) = 1$. Fazendo as mesmas contas da Tabela 9 para b = 2,71828, chegamos em f'(0) $\approx$ 1 e este é o número que Euler chamou de e. Portanto, a base "natural" procurada é o e. E, mais uma vez da equação (9) como $f'(0) = 1$ para $b = e$, obtemos :

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x \tag{10}$$

Geometricamente, a área da faixa da hipérbole $H_1^{e^h} = \ln e^h = h$

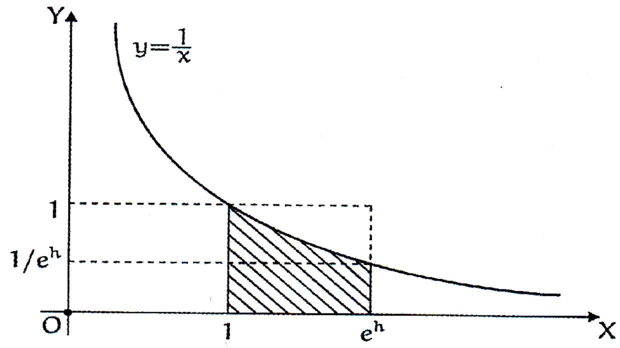

Figura 18: Área da faixa de hipérbole $H_1^{e^h}$ .Fonte: Lima (2006, v.1) [18]

Observando a figura acima, vemos que a área da faixa da hipérbole $H_1^{e^h}$ está compreendida entre um retângulo de área $(e^h - 1)/e^h$ e outro de área $e^h - 1$. Portanto,

$$\frac{e^h - 1}{e^h} < h < e^h - 1$$

Supondo $h > 0$ e dividindo as duas desigualdades por $e^h - 1$, obtemos:

$$\frac{1}{e^h} < \frac{h}{e^h - 1} < 1$$

Quando h tende a 0, a potência e^h tende a 1, portanto, segue das desigualdades acima que

$$\lim_{h \to 0} [h/(e^h - 1)] = 1,$$

$$\text{portanto, } \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

Analogamente, temos h tendendo a zero por valores negativos. Portanto:

$$f'(x) = e^x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x$$

Como $b = e^{\ln b}$ podemos escrever a função b^x como $(e^{\ln b})^x = e^{\ln b \cdot x}$, ou seja, podemos escrever qualquer função exponencial na base e e mais geralmente, se $f(x) = c \cdot e^{\alpha x}$,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{c \cdot e^{\alpha(x+h)} - c \cdot e^{\alpha x}}{h} = c \cdot e^{\alpha x} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{e^{\alpha h} - 1}{h} = \alpha c \cdot e^{\alpha x} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{e^{\alpha h} - 1}{\alpha h}$$

Escrevendo $k = \alpha h$, vemos que $h \to 0 \Leftrightarrow k \to 0$. Portanto,

$$\alpha c \cdot e^{\alpha x} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{e^{\alpha h} - 1}{\alpha h} = \alpha c \cdot e^{\alpha x} \cdot \lim_{k \to 0} \frac{e^k - 1}{k} = \alpha c \cdot e^{\alpha x}$$

Isto conclui a demonstração de que a derivada da função $f(x) = c \cdot e^{\alpha x}$ é $\alpha \cdot f(x)$, ou seja, a taxa de variação de qualquer função exponencial é proporcional à própria função e se

$f(x) = e^x$, o fator de proporcionalidade é igual a 1, tornando-a igual a sua própria derivada e a importância desta propriedade está na aplicação deste tipo de função.

A função exponencial $f(x) = e^x$ é a única (salvo uma constante multiplicativa) que contém a propriedade de ser igual à sua própria derivada e a importância desta propriedade está na aplicação deste tipo de função. Encontramos diversos fenômenos naturais nos quais a taxa de mudança de alguma quantidade é proporcional à própria quantidade tais como crescimento populacional, taxa de decaimento de uma substância radioativa, dinheiro aplicado continuamente, etc.. que veremos com mais detalhes nas Atividades do próximo Capítulo.

4 Propostas de Atividades para o ensino de Funções Exponenciais e Logarítmicas para o Ensino Médio

Na maioria dos livros didáticos de Matemática do Ensino Médio atuais, o Ensino dos Logaritmos vem antes do Ensino das Progressões Aritmética e Geométrica e como a maioria dos professores prefere seguir a cronologia do livro didático, a maioria das ementas dos Professores de Matemática do Ensino Médio também seguem esta ordem, não sendo possível caracterizar as funções exponenciais e logarítmicas de forma adequada. Portanto, a primeira mudança será estudar as Progressões Aritmética e Geométrica antes dos Logaritmos.

Depois, deve-se mostrar as principais propriedades das funções do tipo exponencial e logarítmica através do conceito de Progressão Aritmética (PA) e Progressão Geométrica (PG), usando os Teoremas 1, 2, 3 e 4 vistos acima para caracterizá-las para que o aluno consiga finalmente entender porque determinados fenômenos são modelados por essas funções.

Conforme visto no Capítulo 1, é importante que as Atividades propostas sejam elaboradas sempre pensando na articulação das Tendências Metodológicas vistas. Aqui, iremos explorar essas tendências articuladamente e naturalmente, conforme o desenvolvimento e resolução das atividades propostas.

Utilizaremos a notação log para indicar $\log_{10}$, ou seja $\log x$ para indicar $\log_{10} x$ como no Anexo A e $\ln x$ para indicar $\log_e x$.

No APÊNDICE D as atividades aqui desenvolvidas são disponibilizadas prontas para serem trabalhadas com os alunos do 1º ano do Ensino Médio para facilitar o trabalho do Professor.

4.1 Comportamento variacional das funções exponenciais e logarítmicas

Após o estudo das Progressões, vamos primeiramente estudar o comportamento variacional das funções exponenciais e logarítmicas para tentar caracterizá-las. Para isso, o melhor seria analisar alguns gráficos e tabelas.

As atividades alternativas propostas nesta seção se baseiam em Fraenkel [16] e Simões [30]

Atividade 1. Comportamento da Função Exponencial.

A) Plote uma função exponencial qualquer usando o Software Geogebra e imprima.

B) Marque no eixo Y uma PG qualquer

C) Usando a curva da função exponencial como referência, ache no eixo X os valores correspondentes aos termos da PG escolhida anteriormente no eixo Y.

D) Qual a conclusão que podemos tirar sobre estes valores no eixo X?

Uma das soluções comentada:

Vamos escolher a função $y = e^x$ e vamos imprimir uma parte do seu gráfico usando o programa Geogebra no computador (foi escolhido o Geogebra por ser um Software livre e instalado na maioria dos computadores das escolas públicas do Estado do Paraná, porém nada impede de outro software de construção de gráficos de funções ser utilizado, a escolha é do Professor) escolhendo a PG de razão 2 com primeiro termo sendo 1 no eixo Y. (Figura 19)

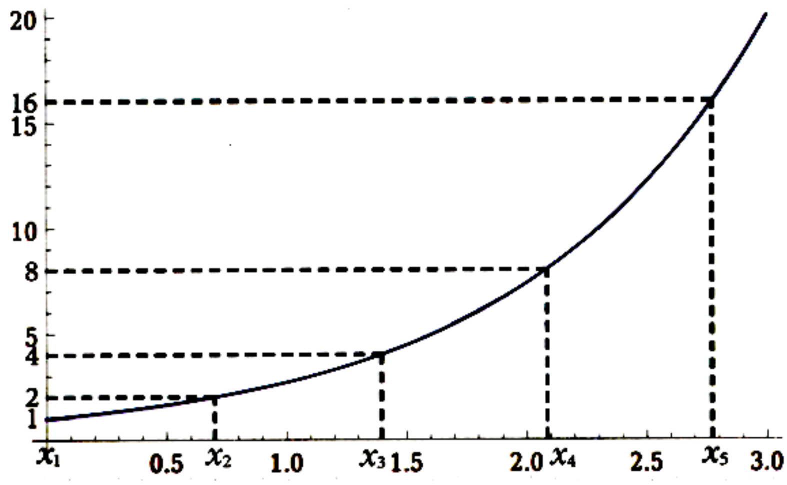

Figura 19: Gráfico de $y = e^x$ com PG no eixo Y. Fonte: Simões [30]

Sendo assim, usando uma régua, marcamos os valores $(1, 2, 4, 8, 16, ...)$ no eixo Y e usando como referência a função exponencial, marcamos $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, ...)$ no eixo X obtendo os valores aproximados :

y	x_n
1	$x_1 = 0$
2	$x_2 = 0{,}7$
4	$x_3 = 1{,}4$
8	$x_4 = 2{,}1$
16	$x_5 = 2{,}8$
$\vdots$	$\vdots$

Tabela 10: Aproximação para $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, ...)$

Note que os valores são aproximados, mas se calcularmos a diferença entre eles veremos que tudo indica ser uma PA.

Os alunos podem usar outras funções exponenciais e escolher outras PGs no eixo Y e notarão a mesma coisa: $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \cdots)$ parece formar uma PA, o que podemos constatar ser verdade, pois se $y = e^x$ então $\ln y = x$ e teremos com aproximação de 4 casas decimais:

y	x_n
1	$x_1 = 0$
2	$x_2 = \ln 2 = 0,6931$
4	$x_3 = 2 \cdot \ln 2 = 1,3862$
8	$x_4 = 3 \cdot \ln 2 = 2,0794$
16	$x_5 = 4 \cdot ln2 = 2,7725$
$\vdots$	$\vdots$

Tabela 11: Valores exatos para $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \cdots)$

Portanto, $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \cdots)$ forma uma PA de razão $\ln 2$.

Atividade 2. Calculadora Rudimentar.

A) Complete a Tabela abaixo com uma PA qualquer que comece com 0 na coluna do meio e com uma PG qualquer que comece com 1 na terceira coluna.

B) Multiplique o termo da PG da linha 4 pelo termo da linha 9

C) Multiplique o termo da PG da linha 2 pelo termo da linha 11

D) Multiplique o termo da PG da linha 3 pelo termo da linha 11

E) Multiplique o termo da PG da linha 7 pelo termo da linha 12

F) Multiplique o termo da PG da linha 7 pelo termo da linha 5

Observação: Nesta atividade não será permitido o uso de calculadoras.

Linha	PA	PG
1	0	1
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17		
18		
19		
20		

Tabela 12: Calculadora Rudimentar a ser completada

Uma das soluções comentada:

Vamos escolher 2 como razão da PA e 3 como razão da PG, mas poderíamos ter escolhido qualquer razão para a PA e para a PG.

Linha	PA	PG
1	0	1
2	2	3
3	4	9
4	6	27
5	8	81
6	10	243
7	12	729
8	14	2 187
9	16	6 561
10	18	19 683
11	20	59 049
12	22	177 147
13	24	531 441
14	26	1 594 323
15	28	4 782 969
16	30	14 348 907
17	32	43 046 721
18	34	129 140 163
19	36	387 420 489
20	38	1 162 261 467

Tabela 13: Calculadora Rudimentar

B) $27 \cdot 6561 = 177147$

C) $3 \cdot 59049 = 177147$

D)$9 \cdot 59049 = 531441$

E) $729 \cdot 177147 = 129140163$

F) $729 \cdot 81 = 59049$

Neste ponto, o professor deve observar se algum aluno já percebeu que multiplicar um termo da PG por outro termo da PG é equivalente a somar o termo da PA ao lado do primeiro termo da PG ao termo da PA ao lado do segundo termo da PG e que o resultado da adição na PA cai na mesma linha que o resultado da multiplicação. Se ainda ninguém tiver feito esta descoberta importante, o professor deve continuar pedindo multiplicações por dois termos da PG.

Quando for feito essa descoberta, os alunos acabam se cansando de chamar o termo da PA, ao lado da PG de *termo da PA ao lado do termo da PG da linha tal* e é neste momento que o professor aproveita para chamar esse termo de *Logaritmo* como os antigos faziam. Neste momento, é interessante contar um pouco da História dos Logaritmos e que era esse o modo dos antigos fazerem contas mais compridas. Os alunos também vão descobrir que para dividir basta diminuir os termos respectivos da PA (Logaritmos) e que na Tabela chamada de Calculadora Rudimentar não é possível fazer todas as contas, por exemplo, $17 \cdot 81$ pois o 17 não aparece na PG. Portanto, este é o momento de revisar as propriedades das potências com cuidado e resolver vários exercícios para fixá-las.

Outros questionamentos sobre a Tabela 12 vão surgir, vejamos:

G) A soma de dois termos da PA é sempre um termo da mesma PA?

Resposta:

Se o primeiro termo da PA for igual a zero, a resposta é afirmativa. Veja:

Consideremos uma PA onde o primeiro termo $a_1 = 0$ e a razão é r e seu termo genérico será:

$$a_n = (n-1)r \tag{11}$$

Sejam quaisquer dois termos desta PA, a_s e a_t, então, somando os dois termos, temos:

$$a_s + a_t = (s-1)r + (t-1)r = [(s+t-1)-1]r = a_{s+t-1}$$

Logo, a soma de dois termos a_s e a_t resulta no termo a_{s+t-1} dessa mesma PA.

H) O produto de dois termos da PG ao lado de dois termos da PA resulta sempre em um termo da própria PG ?

Resposta:

Vejamos, seja a PG de razão q e primeiro termo $g_1 = 1$, seu termo genérico será:

$$g_n = q^{n-1} \tag{12}$$

Agora, vamos multiplicar os termos g_s e g_t que estão ao lados dos termos a_s e a_t da PA respectivamente e teremos:

$$g_s \cdot g_t = q^{s-1} \cdot q^{t-1} = q^{(s+t-1)-1} = g_{s+t-1}$$

Portanto, o produto de dois termos da PG é também um termo da PG e esse produto fica na mesma linha da soma de dois termos da PA.

I) Existe alguma relação entre os termos genéricos a_n da PA e g_n da PG ?

Resposta:

Agora, vamos lembrar as propriedades das potências e que na função exponencial, uma PG no eixo Y é transformada em uma PA no eixo X e veremos que temos uma função exponencial na Tabela 12, só não conhecemos sua base. No eixo X temos os termos da

PA e no eixo Y temos os termos da PG. Logo, se chamarmos a base de b, onde $b > 0$ e $b \neq 1$, teremos:

$$g_n = b^{a_n} \tag{13}$$

Note que $g_1 = b^{a_1}$ só é válido quando $a_1 = 0$ e $g_1 = 1$ pois $b^0 = 1$.

E ainda, substituindo as equações (9) e (10) em (11):

$$q^{n-1} = b^{(n-1)r}$$

Portanto, elevando os dois membros da igualdade por 1/[(n-1)r], teremos:

$$q^{1/r} = b$$

Portanto, substituindo na equação (11), teremos:

$$g_n = q^{a_n/r} = (\sqrt[r]{q})^{a_n} \tag{14}$$

E como chamamos os termos da PA de *Logaritmo*, de (12) vem a definição principal:

$$g_n = (\sqrt[r]{q})^{a_n} \Leftrightarrow a_n = log_{\sqrt[r]{q}}^{g_n} \tag{15}$$

Agora, fica claro porque o produto de dois termos da PG pode ser calculado com a soma de dois termos da PA, pois, por (12):

$$g_s \cdot g_t = (\sqrt[r]{q})^{a_s} \cdot (\sqrt[r]{q})^{a_t} =$$

$$(\sqrt[r]{q})^{a_s + a_t} = (\sqrt[r]{q})^{a_{s+t-1}} = g_{s+t-1}$$

Neste ponto, é importante perceber que se vale qualquer PA começando com 0 e qualquer PG começando com 1, quanto mais simples for a PA e PG escolhidas, melhor, pois se vamos usar a soma para calcular multiplicações, nada melhor que a PA seja o mais simples possível, por exemplo com razão 1 e que a PG cresça lentamente, por exemplo, com razão 2.

Atividade 3. Comportamento da Função Logarítmica.

A) Plote uma função logarítmica qualquer usando o Software Geogebra e imprima.

B) Marque no eixo X uma PG com primeiro termo igual a 1 e razão 2

C) Usando a curva da função logarítmica como referência, ache no eixo Y os valores correspondentes aos termos da PG escolhida anteriormente no eixo Y.

D) Qual a conclusão que podemos tirar sobre estes valores no eixo Y?

Uma das soluções comentada:

Vamos plotar a função $y = \ln x$ num software do computador, por exemplo, o Geogebra e imprimir, depois marcar a PG no eixo X, produzindo a Figura 20:

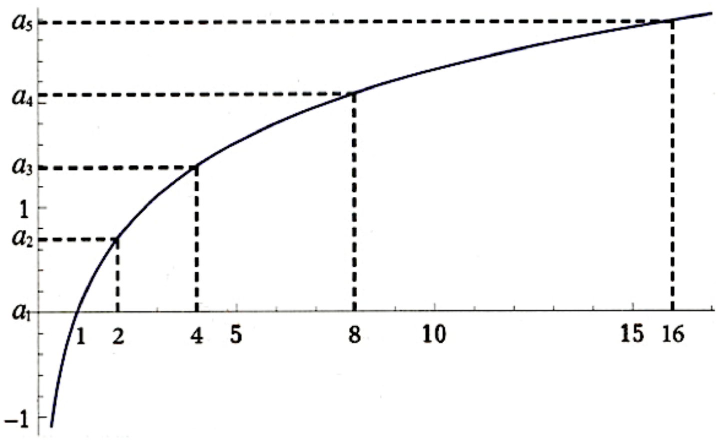

Figura 20: Gráfico de $y = \ln x$ com PG no eixo X. Fonte: Simões [30]

Vamos observar que os valores de $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ ficam próximos de :

n	$g_n =$	$a_n \approx$
1	1	0
2	2	0,7
3	4	1,4
4	8	2,1
5	16	2,8
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Tabela 14: Valores aproximados para $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \cdots)$

Portanto, temos uma PA no eixo Y, ou seja, a função logarítmica transforma PG no eixo X em PA no eixo Y, ou seja, transforma produtos em soma. De fato:

x	a_n
1	$x_1 = \ln 1 = 0$
2	$a_2 = \ln 2 = 0,6931$
4	$a_3 = 2 \cdot \ln 2 = 1,3862$
8	$a_4 = 3 \cdot \ln 2 = 2,0794$
16	$a_5 = 4 \cdot \ln 2 = 2,7725$
$\vdots$	$\vdots$

Tabela 15: Valores exatos para $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \cdots)$

Uma PG de razão 2 no eixo X é transformada em uma PA de razão $\ln 2$ no eixo Y pela função y= $\ln x$.

Agora, o aluno está pronto para ser apresentado aos Teoremas 1, 2, 3 e 4 que caracterizam as funções exponenciais e logarítmicas.

Atividade 4. Caracterização da Função Exponencial.

Complete a tabela abaixo para a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = 3^x$ e $\Delta x = 1$

x	$f(x) = 3^x$	$f(x + \Delta x)$	$f(x + \Delta x) - f(x)$	$\dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{f(x)}$
0				
1				
2				
3				
4				
5				
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k				

Solução comentada:

x	$f(x) = 3^x$	$f(x + \Delta x)$	$f(x + \Delta x) - f(x)$	$\dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{f(x)}$
0	$f(0)=3^0=1$	$f(0+1) = 3$	$2 = 2 \cdot 3^0$	2
1	$f(1)=3^1=3$	$f(1+1)=9$	$6 = 2 \cdot 3^1$	2
2	$f(2)=3^2=9$	$f(2+1)=27$	$18 = 2 \cdot 3^2$	2
3	$f(3)=3^3=27$	$f(3+1)=81$	$54 = 2 \cdot 3^3$	2
4	$f(4)=3^4=81$	$f(4+1) = 243$	$162 = 2 \cdot 3^4$	2
5	$f(5)=3^5=243$	$f(5+1)=729$	$486 = 2 \cdot 3^5$	2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k	$f(k) = 3^k$	$f(k+1) = 3^{k+1}$	$2 \cdot 3^k$	2

Tabela 16: Variação de $f(x) = 3^x$ e $\Delta x = 1$

Da Tabela 16, devemos observar com os alunos :

i) Os valores de x, no eixo X, formam uma PA de razão igual a 1 e primeiro termo igual a 0 e seu termo genérico é $a_n = n - 1$

ii) Os valores de y, no eixo Y, formam uma PG de razão igual a 3 e primeiro termo igual a 1 e seu termo genérico é $g_n = 3^{n-1}$

iii) Por i) e ii) temos que $g_n = 3^{a_n} = f(a_n)$, ou seja, $y_n = f(a_n)$ e o Teorema 2 pode ser verificado se pusermos $b = f(0) = 1$ e $a = f(1)/f(0) = 3$, teremos $f(x) = 3^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

iv) Observamos também que o acréscimo relativo $[f(x+\Delta x)-f(x)]/f(x) = [3^x \cdot (3^{\Delta x} - 1)]/3^x = 3^{\Delta x} - 1$ depende apenas de Δx, mas não de x, logo, o Teorema 3 pode ser verificado, tomando $h = \Delta x$ se $b = f(0) = 1$ e $a = f(1)/f(0) = 3$ temos $f(x) = 3^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Note que foi escolhido $f(x) = 3^x$ e $\Delta x = 1$ para simplificar o exemplo, mas poderíamos usar qualquer outra função exponencial e qualquer outro valor real para Δx.

Atividade 5. Caracterização das Funções Logarítmicas

Complete a tabela abaixo para a função $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log_3 x$ e $\Delta x = 1$

x=3^i	$f(3^i) = \log_3 3^i$	$f(3^{i+\Delta x})$	$f(3^i \cdot 3^{i+\Delta x})$	$f(3^i) + f(3^i + \Delta x)$
$3^0 = 1$				
$3^1 = 3$				
$3^2 = 9$				
$3^3 = 27$				
$3^4 = 81$				
$3^5 = 243$				
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
3^n				

Solução comentada:

Como $\log_x a^n = n \cdot \log_x a$ e $\log_x x = 1$, temos que $\log_x x^i = i$, então:

$x = 3^i$	$f(3^i)$ $=\log_3 3^i = i$	$f(3^{i+\Delta x})$ $=i + \Delta x$	$f(3^i \cdot 3^{i+\Delta x})$ $=2i + \Delta x$	$f(3^i) + f(3^i + \Delta x)$ $=2i + \Delta x$
3^0=1	0	1	1	1
3^1=3	1	2	3	3
3^2=9	2	3	5	5
3^3=27	3	4	7	7
3^4=81	4	5	9	9
3^5=243	5	6	11	11
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
3^n	n	n + 1	2n + 1	2n + 1

Tabela 17: Variação de $f(x) = \log_3^x$ e $\Delta x = 1$

Da Tabela 17, devemos observar com os alunos :

i) Os valores de x, no eixo X, formam uma PG de razão igual a 3 e primeiro termo igual a 1 e seu termo genérico é $g_n = 3^{n-1}$.

ii) Os valores de y, no eixo Y, formam uma PA de razão igual a 1 e primeiro termo igual a 0 e seu termo genérico é $a_n = n - 1$

iii) Por i) e ii) temos que $g_n = 3^{a_n}$, ou seja, $x_n = 3^{f(x_n)}$.

iv) Como $f(3^i \cdot 3^{i+\Delta x}) = f(3^i) + f(3^i + \Delta x)$,o Teorema 4 pode ser verificado fazendo $x = 3^i$ e $y = 3^i + \Delta x$, temos que $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$.

Note que foi escolhido $f(x) = \log_3^x$ e $\Delta x = 1$ para simplificar o exemplo, mas poderíamos usar qualquer outra função logarítmica e qualquer outro valor real para Δx.

A próxima atividade servirá para o aluno analisar o crescimento rápido das funções exponenciais e o crescimento lento das funções logarítmicas.

Atividade 6. Crescimento das Funções Exponenciais e Logarítmicas

Baseada em Ávila [1]

Construa uma tabela com 3 colunas, sendo a primeira valores para x, a segunda valores para $y = x^2$ e a terceira valores para $y = e^x$. Atribua valores para $x : x = 0; x = 3; x = 5; x = 10; x = 15; x = 20; x = 30,5; x = 41,4$ e $x = 42,9$. Use uma calculadora (aproximação de 4 casas decimais) e veja o que acontece com a segunda e terceira colunas da tabela.

Dados interessantes:

Distância da Terra ao Sol ≈ 149 600 000 km

1 ano - luz ≈ 9 467 280 000 000 km

Distância da estrela mais próxima do Sol: 4,3 anos luz ≈ 40 709 304 000 000 km

Solução comentada:

x	$y = x^2$	$y = e^x$
0	0	1
3	9	20,08
5	25	148,41
10	100	22 026,46
15	225	3 269 017,37
20	400	485 165 195,41
30,5	930,25	17 619 017 951 355.6
41,4	1 713,96	954 534 326 273 204 860
42,9	1 840,41	4 277 926 057 321 130 000

Tabela 18: Crescimento da Função exponencial

Se fossemos marcar em um gráfico, e fizéssemos as medidas em centímetros, para x=5 cm, marcaremos 25 cm na vertical para $y = x^2$ e 148cm (quase 1,5 m) para a função exponencial. Quando x= 10 cm, marcaremos na vertical 100cm = 1m para $y = x^2$ e e^x terá mais de 220 m, isso é a altura de um prédio de mais de 70 andares. Quando x= 30,5cm, marcaremos na vertical um pouco mais de 9m para $y = x^2$ e e^x terá mais que a distância da Terra ao Sol. E quando x estiver próximo de 40cm e x^2 próximo dos 1700m, e^x estará assumindo o valor de 1 ano luz e 4,3 anos luz quando x estiver próximo dos 43 cm.

Esses cálculos mostram o quão rapidamente cresce a função exponencial. Entretanto, como a função inversa da exponencial é a logarítmica, temos que a terceira coluna da Tabela acima é x e a primeira coluna representa os valores correspondentes de $\ln x$, mostrando o vagaroso crescimento da função logarítmica.

x	$y = \ln x$
1	0
20,08	3
148,41	5
22 026,46	10
3 269 017,37	15
485 165 195,41	20
17 619 017 951 355.6	30,5
954 534 326 273 204 860	41,4
4 277 926 057 321 130 000	42,9

Tabela 19: Crescimento da Função Logarítmica

Agora, teremos que andar 220m na horizontal para subir 10cm, mais de 4800 km na horizontal para subir apenas 20cm, 1 ano-luz na horizontal para subir pouco mais de 40cm e assim por diante, mostrando quão vagaroso é o crescimento da função $y = \ln x$.

Atividade 7. O problema do Jogo de Xadrez.

Baseada em Tahan [34] e Ávila [1]

Reza a lenda que um rei gostava muito do jogo de xadrez e quis premiar seu inventor e disse que ele poderia pedir o que desejasse como recompensa. O inventor, humilde, recusou várias vezes a oferta, mas o Rei continuava insistindo. Então, o inventor fez o seguinte pedido: 1 grão de trigo pela primeira casa do tabuleiro, 2 grãos de trigo pela segunda, 4 grãos pela terceira e assim por diante, sempre dobrando o número de grãos de trigo a cada casa. O Rei pediu um saco de grãos de trigo e quando começou a calcular, viu que não era tão simples. Pediu então aos matemáticos da corte que calculassem a quantidade de grãos de trigo. Algum tempo depois, os súditos informaram ao Rei que não havia trigo suficiente em seu reino para atender àquele pedido. Mais do que isso, os matemáticos da corte disseram ao Rei que nem se todo o Reino fosse todo coberto de trigo, as safras colhidas durante 2000 anos não seriam suficientes para pagar o inventor. Mas o inventor perdoou publicamente a dívida do Rei e virou seu conselheiro.

Quantos dígitos tem o número que expressa a dívida do Rei em grãos de trigo?

Solução comentada:

Note que sendo N o número total de grãos de trigo solicitado pelo inventor do jogo e como o tabuleiro do jogo de xadrez tem 64 casas, teremos :

$N = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{63}$

Logo, N é a soma dos 64 primeiros termos de uma PG de razão igual a 2 e primeiro termo igual a $1 = 2^0$. Como a soma dos termos de uma PG (S_n) de razão q $\neq 1$ e primeiro termo a_1

é dada por :

$$S_n = \frac{a_1(q^{n+1}-1)}{q-1} \quad ^3,$$

teremos: N = 2^{64} - 1.

Para calcular o valor de 2^{64} poderíamos recorrer ao valor de $\log 2 = 0{,}301030$ (Anexo B) e fazer:

$\log 2^{64} = 64\ .\ \log 2 \approx 19{,}26592$, ou seja, $10^{19{,}2652} \approx 2^{64}$

Isso significa que 2^{64} é um número entre 10^{19} e 10^{20}, ou seja, N = 2^{64} - 1 será um número com 20 casas decimais. Podemos calcular seu valor aproximado por interpolação linear, explicado no Anexo A, mas a título de curiosidade em uma calculadora científica, teremos:

$$N = 18446744073709551615$$

Talvez o aluno não tenha ideia do que 18,5 quintilhões represente. Segundo Ormond [24], 1000 grãos de trigo pesam aproximadamente 35 gramas, ou seja, 18,5 quintilhões de grãos de trigos pesariam aproximadamente 645,63 bilhões de toneladas e como a produção mundial de trigo para a safra 2013-14 foi estimada em 711,42 milhões de toneladas pelo Departamento de Agricultura dos Estados Unidos (USDA), seriam necessários mais de 900 anos dessa produção para pagar o inventor do jogo de xadrez. De acordo com Ávila [1] *"seguramente, todo o trigo que tem sido cultivado nos últimos 10000 anos, isto é, desde o início da agricultura em nosso planeta, não seria suficiente para atender ao pedido do inventor."*

4.2 Aplicações das Funções Exponenciais e Logarítmicas

Após ter estudado o comportamento variacional das Funções Exponenciais e Logarítmicas, caracterizando-as através de suas propriedades, os alunos deverão ver alguns exemplos de aplicações das mesmas.

Aqui é importante lembrar aos alunos que as funções exponenciais se tornam o modelo matemático mais adequado aos fenômenos nos quais um pequeno aumento no valor da variável independente provoca um acentuado aumento na variável dependente e a função logarítmica como inversa da função exponencial, se torna o modelo mais adequado aos fenômenos em que um grande aumento na variável independente produz um pequeno aumento na variável dependente.

Nesta seção veremos como a funções exponenciais e logarítmicas estão ligadas a um grande número de fenômenos e situações naturais, onde se tem uma grandeza cuja taxa de variação é proporcional à quantidade da mesma existente no instante dado, com o número e aparecendo "naturalmente".

Portanto, a função exponencial e sua inversa, a função logarítmica são os modelos corretos para representar diversos fenômenos naturais nos quais a taxa de mudança de alguma quantidade é proporcional à própria quantidade, como visto na seção 3.8.1 e por isso o estudo dessas

[3] mais detalhes em ANEXO C

funções nunca deixarão de serem importantes, mesmo o logaritmo perdendo sua utilidade como ferramenta de cálculo. Além disso, os logaritmos são adequados e utilizados em diversas escalas importantes. Exemplificaremos alguns desses exemplos nessa seção, baseados em Lima(1996) [17].

Exemplo 1. Juros Contínuos

Um capital C, empregado a uma taxa de i por cento ao ano, rende no fim de um ano, juros no valor de $i \cdot C/100$. Seja α=$i/100$, temos que após um ano, C renderá $\alpha \cdot C$ de juros e o capital se tornará

$$C + \alpha \cdot C = C \cdot (1 + \alpha)$$

Passado dois anos, o capital se tornará

$$C \cdot (1 + \alpha) + [C \cdot (1 + \alpha)] \cdot \alpha = [C \cdot (1 + \alpha)] \cdot (1 + \alpha) = C \cdot (1 + \alpha)^2$$

Portanto, em m anos, o capital será de

$$C \cdot (1 + \alpha)^m$$

Tomando uma fração, digamos, $1/n$ do ano, seria justo que o juros fosse de $\alpha \cdot C/n$, de modo que decorrida a fração $1/n$ de ano, o capital C se transforma em

$$C \cdot (1 + \alpha/n)$$

Depois de mais $1/n$ de ano, obtemos

$$C \cdot (1 + \alpha/n)^2$$

Prosseguindo desta maneira, depois de decorrido cada um desses períodos de $1/n$ de ano, ao chegaremos ao fim do ano e ao invés de $C \cdot (1 + \alpha)$ obteremos

$$C \cdot (1 + \alpha/n)^n$$

Note que se n tender ao infinito, ou seja, com os juros capitalizados a cada instante, *continuamente*, teremos pela equação (7) da seção 3.7:

$$\lim_{n \to \infty} C \cdot \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n = C \cdot e^\alpha$$

Essa forma de transação, onde os juros são capitalizados continuamente da forma como apresentamos acima, chamamos de *Juros Contínuos*.

Assim, por exemplo, o capital de R$1,00 empregado a juros contínuos de 100% ao ano, será transformado em e reais $\approx$ 2,72 reais ao invés de 2 reais na taxa de 100% ao ano.

Se a taxa de juros é de i % ao ano, com $\alpha = i/100$, então um capital C empregado a essa taxa será transformado, depois de t anos em:

$$\lim_{n\to\infty} C \cdot \left(1 + \frac{\alpha t}{n}\right)^n = C \cdot e^{\alpha t}$$

Atividade 8. Em quanto tempo um capital C a juros contínuos de 0,6 % ao mês (aproximadamente o rendimento da Caderneta de Poupança atual) será dobrado?

Solução comentada:

Para que C dobre seu valor depois de t meses, deverá ocorrer: $C \cdot e^{0{,}006t} = 2C$. Ou seja,

$$e^{0{,}006t} = 2 \to \ln(e^{0{,}006t}) = \ln 2 \to 0,006t \cdot \ln e = \ln 2 \to 0,006t \cdot 1 = \ln 2$$

Portanto, $t \approx 115,52$; ou seja; seriam necessários aproximadamente 9 anos e 8 meses para conseguir dobrar o capital C nessa taxa aplica à juros contínuos. Note que esse tempo não depende de C, o capital inicial. Fixada a taxa de juros, leva-se o mesmo para dobrar um capital 1 milhão de reais ou um capital de 1 real.

De modo geral, este raciocínio serve para mostrar que se um capital for aplicado a taxa de $\alpha = i/100$ ao mês, então o capital inicial C leva $t = \ln b/\alpha$ para tornar-se b vezes C.

Há uma regra prática usada para estimar o tempo t necessário para que um capital C aplicado a uma taxa $i\%$ dobre de valor conhecida como *Regra dos 70.* A Regra diz que

$$t = \frac{70}{i}$$

É uma maneira rápida de se obter o tempo aproximado para que o Capital dobre de valor. Observando o exemplo acima, temos que

$$t = \frac{\ln 2}{i/100} \Rightarrow t \approx \frac{0,70}{i/100} \Rightarrow t \approx \frac{70}{i}$$

O 70 vem do valor de $\ln 2$ e se usássemos a regra para resolver o problema acima teríamos um valor bem próximo do real:

$$t = \frac{70}{0,06} \Rightarrow t \approx 116,6$$

Essa regra pode ser utilizada para estimar o tempo necessário para dobrar um crescimento exponencial ou reduzir à metade um decrescimento exponencial (meia-vida).

Exemplo 2. Perdas Contínuas

Agora, imagine que ao invés de aumentar o capital C a uma taxa de i % ao ano, com $\alpha = i/100$, esse capital C fosse diminuindo continuamente na mesma taxa, dando prejuízo. Usando o mesmo raciocínio anterior, veríamos que que um capital C, sujeito a um prejuízo contínuo de i % ao ano, no fim de t anos fica reduzido (por (8) da seção 3.8) a

$$\lim_{n\to\infty} C \cdot \left(1 - \frac{\alpha t}{n}\right)^n = C \cdot e^{-\alpha t}$$

Em particular, C estará reduzido à b-ésima parte em t anos de forma que $e^{-\alpha t} = 1/b$. Isto é,

$$t = \frac{\ln b}{\alpha}$$

Exemplo 3. Crescimento Populacional

O crescimento populacional de certa comunidade pode ser modelado por meio de funções exponenciais pois este aumento é proporcional a população presente no instante inicial da medida, que é uma característica de uma função do tipo exponencial.

Por exemplo, se certa espécie de peixes em um lago com população inicial igual a P_0, apresenta um crescimento de i % ao ano, com $\alpha = i/100$ e $P(t)$ é a população dessa espécie neste lago depois de um tempo t, então analogamente ao exemplo de Juros Contínuos, teremos:

$$P(t) = \lim_{n\to\infty} P_0 \cdot \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n = P_0 \cdot e^{\alpha t}$$

Note que o crescimento é contínuo, Se a taxa de crescimento é de 10% ao ano e a população inicial é de 1000 peixes, não acontecerá o fenômeno de se manter os 1000 peixes durante 364 dias e apenas no 365º dia termos 1100 peixes no lago. Esse processo é gradativo, contínuo. A taxa de crescimento será proporcional a uma certa quantidade em determinado momento. Por isso, ocorre de modo análogo ao tratado no exemplo de Juros Contínuos.

Atividade 9. Lima (1996) [17], p.99

Suponha que uma cultura de 100 bactérias se reproduz em condições favoráveis. Doze horas mais tarde contamos 500 bactérias na cultura. Quantas bactérias haverá dois dias depois do início da experiência?

Solução comentada:

Sendo no instante $t = 0$ a população inicial de bactérias igual a $P_0 = 100$, teremos a população de bactérias no instante t em horas igual a:

$$P(t) = 100 \cdot e^{\alpha t}$$

e como $P(12) = 500$, temos:

$$100 \cdot e^{\alpha \cdot 12} = 500 \to \ln e^{\alpha \cdot 12} = \ln 5 \to 12 \cdot \alpha \cdot (\ln e) = \ln 5 \to \alpha \cdot 1 = \ln 5/12 \to$$

$$\alpha = \ln 5/12$$

Portanto, $P(t) = 100 \cdot e^{(\ln 5/12)t}$

2 dias depois, quando $t = 48$, ou seja, depois de 48 horas do tempo inicial, teremos:

$P(48) = 100 \cdot e^{(\ln 5/12)\cdot 48} \approx 100 \cdot 624,999999 \approx 62500$ bactérias.

Note a tabela tempo versus número de bactérias onde o tempo cresce conforme uma PA e o número de bactérias cresce conforme uma PG, característica das funções do tipo exponencial:

t em horas	Número de bactérias
0	100
12	500
24	2500
36	12500
48	62500

Tabela 20: Crescimento da População de bactérias em horas

Exemplo 4. Desintegração radioativa

Os átomos de uma substância radioativa (como o rádio ou o urânio) possuem uma tendência natural a se desintegrarem, emitindo partículas e transformando-se em outra substância não radioativa. Assim sendo, com o passar do tempo, a quantidade de substância original diminui e a massa da nova substância transformada aumenta.

Em um determinado momento, a quantidade de matéria que se desintegra de um corpo radioativo é proporcional à massa da substância original presente no corpo naquele momento. A constante de proporcionalidade α é determinada experimentalmente e cada substância radioativa tem sua constante de desintegração α. Essa é uma característica das funções exponenciais e como a desintegração da substância radioativa também é um processo contínuo, o modelo será análogo ao das Perdas Contínuas.

Seja um corpo de massa M_0, formado por uma substância radioativa cuja taxa de desintegração é α então $M(t)$, a massa do corpo depois de um tempo t, será:

$$M(t) = \lim_{n\to\infty} M_0 \cdot \left(1 - \frac{\alpha t}{n}\right)^n = M_0 \cdot e^{-\alpha t}$$

Na prática, a constante α fica determinada a partir de um número básico, chamado de *meia-vida* da substância. A *meia-vida* de uma substância radioativa é o tempo necessário para que se desintegre a metade da massa de um corpo formado por aquela substância. Por exemplo, o Polônio 218 tem meia-vida igual a 2 minutos e 45 segundos. Os isótopos do rádio 226 tem meia-vida de 1620 anos e os isótopos do urânio têm uma meia-vida da ordem de 10^9 anos.

Portanto, se conhecemos a meia-vida do elemento radioativo, sabemos em quanto tempo sua massa inicial se reduz à metade, ou seja, sendo $t_{1/2}$ a meia-vida do elemento, sabemos que :

$$\frac{1}{2}M_0 = M_0 \cdot e^{-\alpha t_{1/2}} \to \ln\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{M_0}{M_0} = -\alpha \cdot t_{1/2} \cdot \ln e$$

Ou seja,

$$\alpha = \frac{\ln 2}{t_{1/2}}$$

Atividade 10. O acidente da usina nuclear de Fukushima, no Japão em abril de 2011, acendeu o alerta sobre o risco para a saúde humana de acidentes nucleares . O acidente liberou altas doses de elementos radioativos na água e no solo da região, fazendo com que milhares de pessoas sobreviventes do Tsunami que provocou o acidente na Usina deixassem suas casas na região. Entre os elementos radioativos liberados pelo acidente estão o Iodo 131, Césio 137 e o Estrôncio 90, que causam sérios danos à saúde dos seres humanos, como câncer.

Em abril de 2011, foram detectados 570 becquerels de Estrôncio 90 por kg de solo na região da usina de Fukushima, valor que corresponde a cerca de 130 vezes a concentração normal do solo daquela região. Determine qual será a concentração de Estrôncio 90 daqui a 116 anos, sabendo que a meia-vida desse elemento é de 29 anos e se depois desse tempo, a concentração do solo da região já estará próximo da normalidade .

Solução comentada:

Como vimos anteriormente,

$$M(t) = M_0 \cdot e^{-\alpha t} \text{ com } \alpha = \frac{\ln 2}{t_{1/2}}$$

Portanto, $\alpha = \ln 2/29$ e $M(116) = 570 \cdot e^{(-\ln 2/29)\cdot 116} \approx 35,625$

Ou seja, depois de 116 anos, a concentração será de aproximadamente 35,625 becquerels de Estrôncio 90 por kg de solo na região da usina de Fukushima.

A concentração normal é de $570/130 \approx$ 4,38 becquerels de Estrôncio 90 por kg de solo na região da usina de Fukushima, portanto mais de 35 becquerels por kg está longe da concentração normal. Para conseguirmos a concentração normal, devemos ter:

$$4,38 = 570 \cdot e^{-(\ln 2/29)t} \to \ln(4,38/570) = \frac{-\ln 2 \cdot t}{29} \cdot \ln e \to t \approx 203,64$$

Portanto, seriam necessários mais de 200 anos para que a concentração de 570 becquerels de Estrôncio 90 por kg de solo voltasse ao normal na região de Fukushima.

Veja a tabela da Desintegração do Estrôncio 90 conforme os anos se passam, Uma PA transformada em PG:

t em anos	Quantidade de Estrôncio 90 em becquerels por kg
0	570
29	285
58	142,5
87	71,25
116	35,625
145	17,8125
174	8,90625
203	4,453125

Tabela 21: Desintegração do Estrôncio 90 em anos

Exemplo 5. Eliminação do álcool pelo organismo

A eliminação do álcool pelo organismo, feita uma parte pelos rins e pulmões e outra pelo metabolismo, varia muito de pessoa para pessoa conforme o peso e o sexo. Mas, analogamente à desintegração radioativa, a eliminação é contínua e proporcional à sua quantidade em determinado instante, característica das funções exponenciais.

Analisaremos a situação com uma atividade :

Atividade 11. (Adaptada de ENEM-2003)

Os acidentes de trânsito, no Brasil, em sua maior parte são causados por erro do motorista. Em boa parte deles, o motivo é o fato de dirigir após o consumo de bebida alcoólica. A ingestão de uma lata de cerveja provoca uma concentração de aproximadamente 0,3 g/L de álcool no sangue. A tabela abaixo mostra os efeitos sobre o corpo humano provocados por bebidas alcoólicas em função de níveis de concentração de álcool no sangue:

Concentração de álcool no sangue (g/L)	**Efeitos**
0,1 - 0,5	Sem influência aparente, ainda que com alterações clínicas
0,3 - 1,2	Euforia suave, sociabilidade acentuada e queda da atenção
0,9 - 2,5	Excitação, perda de julgamento crítico, queda da sensibilidade e das reações motoras
1,8 - 3,0	Confusão mental e perda da coordenação motora
2,7 - 4,0	Estupor, apatia, vômitos e desequilíbrio ao andar
3,5 - 5,0	Coma e morte possível

Tabela 22: Efeitos das bebidas alcoólicas. Fonte: (ENEM- 2003) Revista Pesquisa FAPESP nº 57, setembro 2000

Atualmente no Brasil, conforme a Resolução 432/2013 do Conselho Nacional de Trânsito (CONTRAN), o limite tolerável da concentração de álcool em g/L de sangue é zero, ou seja, é crime dirigir logo após comer um bombom de licor. É aceitável apenas a margem de erro do bafômetro de 0,05 g/L . Supondo que a meia-vida do álcool em um indivíduo seja de 2 horas e esse indivíduo beba 6 latas de cerveja rapidamente, demorará quanto tempo para a concentração de álcool no sangue chegar a 0,05 g/L depois que ele parou de beber ? Qual o provável efeito do álcool ingerido pelo indivíduo?

Solução comentada:

Como a meia-vida do álcool no sangue deste indivíduo é 2 horas, temos que $\alpha = \ln 2/2$ e $Q(t) = Q_0 \cdot e^{\left(\frac{-\ln 2}{2}\right)\cdot t}$ representa o decrescimento da taxa de álcool no sangue conforme o tempo t, depois de parar de beber. Como o indivíduo parou de beber depois ingerir 6 latas de cerveja, a sua taxa de álcool no sangue em t_0 é de $0,3 \cdot 6 = 1,8$g/L. Para que essa taxa caia para 0,05 g/L é necessário:

$$0,05 = 1,8 \cdot e^{\left(-\frac{\ln 2}{2}\right)\cdot t} \to 0,0277777 = e^{\left(-\frac{\ln 2}{2}\right)\cdot t} \to$$

$$\ln 0,0277777 = \left(-\frac{\ln 2}{2}\right) \cdot t \cdot \ln e \to t \approx -\frac{2 \cdot \ln 0,0277777}{\ln 2} \to t \approx 10,3398$$

E como 10,3398 $\approx$ 10 horas e 20 minutos , seriam necessárias mais de 10 horas para as taxas de álcool no sangue do indivíduo voltarem ao normal.

Tomando as 6 latas de cerveja, é bem provável que o indivíduo tenha excitação, perda de julgamento crítico, queda da sensibilidade e das reações motoras.

Exemplo 6. O método do Carbono 14 (C^{14})

O Carbono 14, indicado por C^{14}, é um isótopo radioativo do carbono, formado na atmosfera devido ao bombardeio da Terra por raios cósmicos. Através dos tempos, a quantidade de C^{14} na atmosfera tem-se mantido constante porque sua produção é compensada por sua desintegração. Os seres vivos absorvem e perdem C^{14} de modo que, em cada espécie, a taxa de C^{14} também se mantém constante. Quando o ser morre, a absorção cessa mas o C^{14} nele existente continua a desintegrar-se continuamente. Este fato pode ser usado para determinar a idade de um fóssil ou de um objeto muito antigo comparando a quantidade de C^{14} de materiais idênticos atuais com os antigos. Para isso, é necessário saber que a meia-vida do C^{14} é de 5730 anos, portanto,

$$\alpha = \frac{\ln 2}{5730}; \ \ M(t) = M_0 \cdot e^{-\left(\frac{\ln 2}{5730}\right)\cdot t}$$

Atividade 12. O Sudário de Turim.

Em 1988, o Vaticano permitiu que o Sudário, tecido ao qual se acreditava ter envolvido o corpo de Cristo, fosse datado por três organizações independentes, a Universidade de Oxford, a Universidade do Arizona e o Instituto Federal de Tecnologia Suíço, através do teste do Carbono 14. Os três testes mostraram que o tecido do Santo Sudário continha aproximadamente 92% do Carbono 14 em comparação com um tecido idêntico atual. Qual a idade aproximada, encontrada pelos testes, do Sudário?

Solução comentada:

$$M(t) = M_0 \cdot e^{-\left(\frac{\ln 2}{5730}\right)\cdot t} \to 0,92 \cdot M_0 = M_0 \cdot e^{-\left(\frac{\ln 2}{5730}\right)\cdot t}$$

$$\ln 0,92 = -\left(\frac{\ln 2}{5730}\right) \cdot t \cdot \ln e$$

Portanto, $t \approx$ 689,28 anos, ou seja, como a quantidade de C^{14} tinha se reduzido a 92% da quantidade de um tecido idêntico de 1988, o tecido naquela época teria aproximadamente 689 anos, o que constatava que o Sudário era do ano de 1300, aproximadamente. Os três testes calcularam sua margem de erro e concluíram que o Sudário era da época de 1260 - 1390, portanto, não poderia ser o mesmo que cobriu o corpo de Cristo.

Porém, a polêmica não acabou aí. Vários outros pesquisadores do Sudário alegam sua legitimidade. Alguns dizem que a pequena amostra retirada do tecido era na verdade um pedaço remendado e restaurado, outros dizem que um incêndio danificou a peça e mudou suas taxas de C^{14}, outros dizem que fungos que atacaram o tecido também mudaram as taxas de C^{14} e muitos outros pesquisadores contestam o exame pelo método do C^{14} feito em 1988.

Exemplo 7. Resfriamento de um corpo

Uma situação análoga à da Desintegração radioativa é a de um objeto aquecido, colocado num meio mais frio (ar ou água, por exemplo). Como o objeto possui massa bem menor que a do meio que a contém, a temperatura desse meio permanece constante, sem ser afetada pela presença do objeto mais quente. A *Lei do resfriamento de Newton* afirma que, nessas condições a diferença de temperatura D, entre o objeto e o meio que o contém, decresce com uma taxa de variação proporcional a essa própria diferença, o que caracteriza uma função exponencial. Como D decresce continuamente, se tivermos uma temperatura inicial do objeto D_0 que é a diferença entre a temperatura do objeto e o meio que o contém no instante $t = 0$, teremos:

$$D(t) = D_0 \cdot e^{-\alpha t},$$

onde a constante α depende do material que é constituída a superfície do objeto.

Atividade 13. Lima (1996) [17] p. 100

O corpo de uma vítima de assassinato foi descoberto às 23 horas. O médico da polícia chegou às 23:30 horas e imediatamente tomou a temperatura do cadáver, que era de 34,8º Celsius. Uma hora mais tarde ele tomou a temperatura outra vez e encontrou 34,1º Celsius. A temperatura do quarto era mantida constante a 20º Celsius. Use a lei de resfriamento de Newton para estimar a hora em que se deu a morte. Admita que a temperatura normal de uma pessoa viva é de 36,5º Celsius.

Solução comentada:

Seja t o tempo transcorrido em horas a partir do momento da morte, temos que $D(t) = D_0 \cdot e^{-\alpha t}$ e $D_0 = 36,5^o - 20^o = 16,5^o$. Logo,

$$D(t) = 16,5^o \cdot e^{-\alpha t}$$

Considerando t_1 o tempo transcorrido desde a morte da vítima até às 23:30 horas, então $D(t_1) = 34,8^o - 20^o = 14,8^o$. Portanto, 14,8º=16,5º·$e^{-\alpha t_1}$ $\rightarrow 0,89697 = e^{-\alpha t_1} \rightarrow -\alpha t_1 \cdot \ln e = \ln 0,8967$

$$-\alpha t_1 = \ln 0,8967$$

Uma hora depois, temos $D(t_1 + 1) = 34,1^o - 20^o = 14,1^o \rightarrow 14,1^o = 16,5^o \cdot e^{-\alpha(t_1+1)} \rightarrow \ln 0,854545 = -\alpha(t_1 + 1) \cdot \ln e \rightarrow (-\alpha t_1) \cdot (-\ln 0,854545) = \alpha$ e como $-\alpha t_1$=$\ln 0,89697$, temos que

$\alpha = \ln 0,89697 - \ln 0,854545 \rightarrow$

$$\alpha \approx 0,04845$$

Como $-\alpha t_1 = \ln 0,8967$ e $\alpha \approx$ 0,04845 temos que $t_1 \approx$ -0,109034/-0,04845. Logo,

$$t_1 \approx 2,25$$

E como 2,25 horas $\approx$ 2 horas e 15 minutos, a morte da vítima ocorreu aproximadamente 2 horas e 15 minutos antes das 23: 30 horas, ou seja, por volta das 21:15 horas do mesmo dia.

Exemplo 8. Intensidade Sonora

O nível de intensidade sonoro, mais conhecido como volume do som, é uma sensação que distingui o som fraco (baixa intensidade) do som forte (alta intensidade) e está relacionado logaritmicamente com a intensidade e com a distância da fonte sonora. Portanto, quanto maior a intensidade sonora da fonte, mais energia ela propaga e consequentemente mais alto o som será percebido por nosso ouvidos. O volume é medido na unidade bel, em homenagem ao cientista britânico Alexander Graham Bell que realizou diversos estudos com o som, linguagem gestual e surdez. Porém sua maior contribuição para o mundo foi o telefone.

Como o ser humano é muito sensível a escala bel, seu submúltiplo é mais utilizado:

1 decibel = 0,1 bel = 1Db.

O nível de intensidade sonoro (N) em decibéis, pode ser representado pela equação:

$$N = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0}$$

onde I_0 é chamada mínima intensidade sonora física, ou limiar de audibilidade, o menor valor da intensidade sonora ainda audível.

$I_0 = 10^{-12} W/m^2$ e I é a intensidade sonora da fonte em W/m^2

A máxima intensidade sonora física, ou limiar de dor, o maior valor da intensidade sonora suportada pelo ouvido é 1 W/m^2

Veja exemplos de nível de intensidade sonoro em decibéis:

Murmúrio: 20 dB

Música suave: 40 dB

Conversa comum: 65 dB

Rua barulhenta: 90 dB

Máquina de cortar grama: 90 dB

Buzina de automóvel: 110 dB

Avião próximo: 100 dB.

Volume máximo em alguns aparelhos de MP3: 120 dB

Qualquer som acima de 85 dB pode causar perda de audição, e a perda depende tanto da potência do som como do período de exposição. A portaria Brasileira do Ministério do Trabalho nº 3214/78 fixa o máximo permitido de 85 dB para 8 horas de jornada de trabalho em ambientes industriais onde existe ruído de máquinas e processos ruidosos. Uma boa maneira de saber que se está ouvindo um som de 85 dB, é quando você tem de elevar a voz para outra pessoa conseguir lhe ouvir.

Se você se expuser a um som de 90 dB, por 8 horas, pode causar danos aos seus ouvidos; mas se a exposição for a um som de 140 dB, um segundo já é o bastante para causar danos (e chega a causar dor).

Segundo Souza, [32] ao dobrarmos a distância em relação à fonte do som, o nível sonoro diminui 6 decibéis.

Atividade 14. Quantos decibéis gera uma banda de rock que emite uma intensidade sonora de $10^{-1}W/m^2$?

Solução comentada:

$$N = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right) = 10 \cdot \log\left(\frac{10^{-1}}{10^{-12}}\right) = 10 \cdot 11 \cdot \log 10 = 110$$

Portanto, a banda de rock gera 110 decibéis.

Atividade 15. Qual a intensidade sonora em W/m^2 que emite um aparelho de MP3 que gera 120 decibéis ?

Solução comentada:

$$120 = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right) \rightarrow 12 = \log I - \log 10^{-12} \rightarrow 12 = \log I - (-12) \cdot \log 10 \rightarrow 12 = \log I + 12 \cdot 1$$

Logo, $\log I = 0 \rightarrow I = 10^0 \rightarrow I = 1$ kWh.

Portanto, a intensidade do aparelho de MP3 é de 1 kWh em seu volume máximo, que é a máxima intensidade sonora suportada pelo ouvido. Daí o cuidado em não escutar no volume máximo esse tipo de aparelho, lembrando que esses aparelhos usam o fone de ouvido, aumentando sua intensidade pois, quanto mais próximo da fonte do som, maior sua intensidade.

Atividade 16. Aumentando em 1 decibel a intensidade sonora de uma fonte, de quando é aumentada sua intensidade em kWh ?

Solução comentada:

Seja I_k a intensidade sonora em kWh quando o nível sonoro é k decibéis e I_{k+1} a intensidade sonora em kWh quando o nível sonoro é $k+1$ decibéis, temos que:

$$k = 10 \cdot \log\left(\frac{I_k}{10^{-12}}\right) \rightarrow \frac{k}{10} = \log I_k - \log 10^{-12} \rightarrow$$

$$\frac{k}{10} = \log I_k - (-12) \cdot \log 10 \rightarrow \log I_k = \frac{k}{10} - 12 \rightarrow I_k = 10^{\frac{k}{10}-12}$$

Analogamente, $k+1 = 10 \cdot \log\left(\frac{I_{k+1}}{10^{-12}}\right) \rightarrow \frac{k+1}{10} = \log I_{k+1} - \log 10^{-12} \rightarrow$

$$\frac{k+1}{10} = \log I_{k+1} - (-12) \cdot \log 10 \rightarrow \log I_{k+1} = \frac{k+1}{10} - 12 \rightarrow I_{k+1} = 10^{\frac{k+1}{10}-12}$$

$$I_{k+1} = 10^{\frac{k-119}{10}}$$

Portanto, $\dfrac{I_{k+1}}{I_k} = \dfrac{10^{\frac{k-119}{10}}}{10^{\frac{k}{10}-12}} = \dfrac{10^{\frac{k-119}{10}}}{10^{\frac{k-120}{10}}} = 10^{\frac{k-119-(k-120)}{10}} = 10^{\frac{1}{10}}$

$$\frac{I_{k+1}}{I_k} = \sqrt[10]{10}$$

Ou seja, o aumento de 1 decibel no nível sonoro de uma fonte sonora faz com que a sua intensidade I seja $\sqrt[10]{10}$ kWh vezes maior. Este é um exemplo de Escala Logarítmica.

Exemplo 9. A escala Richter

Souza [32] fala sobre a Escala Richter:

> O terremoto é um fenômeno natural decorrente de movimentos da crosta terrestre, geralmente resultantes do choque entre duas placas tectônicas, que liberam grande quantidade de energia e ocasionam tremores na Terra.
>
> A partir da quantidade de energia liberada por um terremoto, é possível determinar, utilizando um aparelho chamado sismógrafo, sua magnitude na escala Richter, desenvolvida em 1935 pelo sismólogo norte-americano Charles Richter (1900 - 1985). Para sua elaboração, esse sismólogo atribuiu aos terremotos mais fracos, que já haviam sido registrados, valores próximos de zero, e adotou uma escala logarítmica.
>
> De acordo com o grau de magnitude registrado na escala Richter, um terremoto pode acarretar as seguintes consequências:

Magnitude(graus)	**Possíveis Efeitos**
menor que 3,0	Tremores pequenos, geralmente não perceptíveis, registrados por equipamentos apropriados.
3,0 - 5,9	Abalos perceptíveis sem a utilização de equipamentos, mas pouco destruidores. Pode derrubar objetos e trincar paredes.
6,0 - 8,9	Terremoto destrutivo que pode acarretar severos danos às construções e provocar grandes rachaduras no solo.
9,0 ou maior	Tremores muitos fortes, causa a destruição quase total.

A escala Richter é um exemplo interessante do crescimento logarítmico como veremos na Atividade a seguir:

Atividade 17. Extraída de Lima (2012) [20]

Em algumas situações para expressar certas grandezas, é mais conveniente empregar as chamadas escalas logarítmicas do que as escalas lineares convencionais. Este é o caso, por exemplo, da Escala Richter de terremotos. Na Escala Richter, a intensidade I, expressa em graus, é definida da seguinte forma:

$$I = \frac{2}{3} \cdot \log\left(\frac{E}{E_0}\right)$$

Em que E representa a energia liberada pelo terremoto, medida em kWh e $E_0 = 10^{-3}$ kWh

(a) Qual é a energia liberada por um terremoto de 3 graus na escala Richter? E por um terremoto de 9 graus?

(b) Qual é a relação entre a energia liberada por um terremoto de grau k e a energia liberada por um terremoto de grau $(k+1)$ na escala Richter?

(c) Porque você acha que é conveniente usar a escala logarítmica, no caso da medição da intensidade dos terremotos?

Solução comentada:

(a)

para $I = 3$,

Como $I = \dfrac{2}{3}\log\left(\dfrac{E}{E_0}\right)$, então $3 = \dfrac{2}{3}\log\left(\dfrac{E}{10^{-3}}\right)$

$$\frac{9}{2} = \log(\frac{E}{10^{-3}})$$

$$10^{9/2} = \frac{E}{10^{-3}}$$

$$E = 10^{-3} \cdot 10^{9/2} \rightarrow E = 10^{\frac{3}{2}}$$

$$\text{Portanto, } E = 10\sqrt{10} \text{ kWh para } I = 3$$

Para I = 9, temos:

$$9 = \frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{10^{-3}}\right)$$

$$\frac{27}{2} = \log\left(\frac{E}{10^{-3}}\right)$$

$$10^{27/2} = \frac{E}{10^{-3}}$$

$$E = 10^{-3} \cdot 10^{27/2} \rightarrow E = 10^{\frac{21}{2}}$$

$$\text{Portanto, } E = 10^{10}\sqrt{10} \text{ kWh para } I = 9$$

(b) Seja E_k a energia liberada por um terremoto de grau k, temos

$$k = \frac{2}{3}\log\left(\frac{E_k}{10^{-3}}\right)$$

$$\frac{3k}{2} = \log E_k - \log 10^{-3}$$

$$\frac{3k}{2} = \log E_k - (-3)$$

$$\log(E_k) = \frac{3k}{2} - 3$$

$$\log(E_k) = \frac{3k-6}{2} \tag{16}$$

Seja E_{k+1} a energia liberada por um terremoto de grau $k+1$, temos

$$k + 1 = \frac{2}{3}\log\left(\frac{E_{k+1}}{10^{-3}}\right)$$

$$\frac{3(k+1)}{2} = \log(E_{k+1}) - \log 10^{-3}$$

$$\frac{3k+3}{2} = \log(E_{k+1}) - (-3)$$

$$\log(E_{k+1}) = \frac{3k+3}{2} - 3$$

$$\log(E_{k+1}) = \frac{3k-3}{2} \tag{17}$$

Das equações (14) e (15) temos que :

$$\log(E_{k+1}) - \log(E_k) = \frac{3k-3}{2} - \frac{3k-6}{2}$$

$$\log\left(\frac{E_{k+1}}{E_k}\right) = \frac{3}{2}$$

$$\frac{E_{k+1}}{E_k} = 10^{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{E_{k+1}}{E_k} = 10\sqrt{10} \tag{18}$$

Portanto, podemos ver por (16) que o aumento de 1 grau na intensidade I de um terremoto faz com que a sua energia liberada E seja $10\sqrt{10}$ vezes maior. Isso ajuda a responder (c), pois se usássemos uma escala linear, precisaríamos de números muito grandes para representar a intensidade I.

Exemplo 10. pH de uma solução

O termo pH (Potencial hidrogeniônico) foi introduzido em 1909 pelo bioquímico dinamarquês Sören Peter Mauritz Sörensen (1868 - 1939) e permite expressar a acidez, neutralidade ou basicidade de uma solução aquosa por meio da concentração de íons de hidrogênio, em mol/L.

O pH da piscina, do aquário deve ser controlado e até mesmo o pH do sangue deve manter valores entre 7,35 e 7,45 onde uma variação de 0,4 pode ser fatal.

Sörensen definiu pH como sendo o logaritmo decimal (base 10) do inverso da concentração hidrogeniônica. Veja :

$$pH = \log\left(\frac{1}{[H^+]}\right) = \log 1 - \log[H^+] = 0 - \log[H^+] = -\log[H^+]$$

Portanto, $pH = -\log[H^+]$.

Segundo Souza [32], a partir desta definição, da obtenção experimental do produto iônico da água ($[H^+] \cdot [OH^-]$), que corresponde a $1 \cdot 10^{-14}$ a 25º C, e do pOH, determinado por meio do logaritmo decimal do inverso da concentração de íons hidroxila $[OH^-]$ em mol/L, isto é, $pOH = -\log[OH^-]$, foi obtida a relação:

$$pH + pOH = -\log[H^+] + (-\log[OH^-]) = -(\log[H^+] + \log[OH^-]) =$$

$$-(\log([H^+]\cdot[OH^-])) = -(\log(1\cdot 10^{-14})) = -(-14) = 14$$

Ou seja, pH + pOH = 14 e então foi desenvolvida uma escala logarítmica de 0 a 14, por meio da qual uma solução aquosa a 25º C pode ser classificada em ácida, neutra ou básica:

- Solução ácida: pH < 7
- Solução neutra: pH = 7
- Solução básica: pH > 7

Souza [32] complementa: "A utilização do pH na indústria permitiu que processos como produção de vacinas, fermentações, produções produção de leite e derivados fossem realizados por meio de procedimentos mais adequados. Assim, o pH adquiriu importância no segmento industrial, permanecendo até os dias atuais, nos quais estudos envolvendo pH não são mais exclusividade dos químicos, sendo realizados também por profissionais de diversas áreas, como farmacêuticos, geólogos e agrônomos."

Atividade 18. Adaptada de Souza [32] p. 182

Um agrônomo, ao verificar as condições do solo para início de um plantio, oferece ao produtor informações sobre o nível de nutrientes, o conteúdo orgânico e o pH do solo, que quando representado por um valor entre 6 e 7 (solução neutra) tende a ser mais fértil.

Em uma propriedade rural, a concentração de íons de hidrogênio apresentou $10^{-4,4}$ mol/L. Sabendo que a produtividade máxima foi obtida quando a concentração de íons de hidrogênio apresentou $10^{-6,4}$ mol/L, de quanto será a correção desse solo em pH para conseguir a produtividade máxima ?

Solução comentada:

pH do solo a ser corrigido = - $\log[H^+] = -\log(10^{-4,4}) = -(-4,4)\cdot\log 10 = 4,4\cdot 1 = 4,4$

pH do solo fértil = - $\log[H^+] = -\log(10^{-4,4}) = -(-6,4)\cdot\log 10 = 6,4\cdot 1 = 6,4$

A correção será de 6,4 - 4,4 = 2 pH, para mais. O pH deverá ser aumentado em 2 pontos, deixando o solo mais básico e menos ácido.

Atividade 19. O que acontece com a concentração de íons de hidrogênio de uma solução aquosa quando é aumentada 1 unidade de seu pH?

Solução comentada:

Se o pH da solução aquosa é k, k = - $\log[H^+]$, então, $[H^+] = 10^{-k}$.

Se o pH da solução aquosa é $k+1$, $k+1 = -\log[H^+]$, então, $[H^+] = 10^{-(k+1)}$

Portanto, se dividirmos a concentração de íons de hidrogênio da solução aquosa de pH = $k+1$ pela concentração de íons de hidrogênio da solução aquosa de pH = k teremos :

$$\frac{10^{-k-1}}{10^{-k}} = \frac{10^{-k}\cdot 10^{-1}}{10^{-k}} = 10^{-1}$$

Portanto, a concentração de íons de hidrogênio da solução aquosa de pH = $k+1$ é $10^{-1} = 1/10$ vezes a a concentração de íons de hidrogênio da solução aquosa de pH = k

Temos então mais um exemplo de Escala Logarítmica onde o aumento de 1 pH faz com que a concentração de íons de hidrogênio da solução seja dividida por 10.

Exemplo 11. Escala musical temperada

A Música tem ligações muito fortes com a Matemática, uma delas diz respeito à escala musical temperada onde cada oitava contém 12 semitons (notas) : DÓ, DÓ#, RÉ, RÉ#, MI, FÁ, FÁ#, SOL, SOL#, LÁ, LÁ# e SI. Um piano comum é composto por sete oitavas $(7 \cdot 12 = 84)$ mais uma terça menor (LÁ, LÁ#, SI e DÓ) totalizando 88 teclas, dispostas da seguinte forma: Inicia-se pelas notas LÁ, LÁ# e SI seguidas da Primeira até a Sétima Oitava e termina com DÓ. Portanto, não existe apenas um Dó no piano e sim oito. A mesma nota pode ser mais aguda ou mais grave, o que as difere são suas frequências medidas em Hertz. A mesma nota em uma oitava é separada pelo dobro da freqüência da mesma nota na próxima oitava , sendo a de freqüência mais alta mais aguda. Portanto, o DÓ da quarta oitava tem o dobro da frequência (em Hertz) do DÓ da terceira oitava, o mesmo acontecendo com todas as outras 11 notas, resultando que o DÓ da Quarta Oitava apresenta som mais agudo que o DÓ da Terceira e assim por diante.

Atividade 20. Sabendo que a frequência da nota LÁ da Quarta Oitava (LÁ central) é de 440 Hertz, construa uma tabela com as freqüências dos 12 semitons da Quarta Oitava (Oitava Central).

FREQUÊNCIA	SEMITONS DA QUARTA OITAVA
	DÓ
	DÓ#
	RÉ
	RÉ#
	MI
	FÁ
	FÁ#
	SOL
	SOL#
	LÁ
	LÁ#
	SI

Solução comentada:

Como a nota FÁ da Quarta Oitava tem o dobro da frequência da nota FÁ da Terceira Oitava, a nota FÁ da Terceira Oitava tem frequência de 220Hertz. Como são doze notas entre as notas FÁ da Terceira Oitava e FÁ da Quarta Oitava, existe um número real α tal que :

$$220 \cdot \alpha^{12} = 440 \rightarrow \alpha^{12} = 2 \rightarrow \alpha = \sqrt[12]{2}$$

Ou seja, isso equivale a dizer que de um semitom para o próximo, a frequência é multiplicada por $2^{1/12}$, formando uma PG de razão $2^{1/12}$. Na quarta oitava, conhecemos a frequência da nota

LÁ, portanto, para conhecer as frequências das notas da direita no piano, basta multiplicarmos por $2^{1/12}$ e analogamente, dividimos por $2^{1/12}$ para conhecer as notas da esquerda e assim conseguimos calcular a frequência das 88 notas do piano. Veja as frequências da Quarta Oitava (Oitava Central) na Tabela:

FREQUÊNCIA	NOTAS
277,18/ $2^{1/12} \approx$ 261,63	**DÓ**
293,66/ $2^{1/12} \approx$ 277,18	**DÓ#**
311,13/ $2^{1/12} \approx$ 293,66	**RÉ**
329,63 / $2^{1/12} \approx$ 311,13	**RÉ#**
349,23 / $2^{1/12} \approx$ 329,63	**MI**
369,99/ $2^{1/12} \approx$ 349,23	**FÁ**
392,00/ $2^{1/12} \approx$ 369,99	**FÁ#**
415,30/ $2^{1/12} \approx$ 392,00	**SOL**
440/ $2^{1/12} \approx$ 415,30	**SOL#**
440	**LÁ**
$440 \cdot 2^{1/12} \approx$ 466,16	**LÁ#**
$466,16 \cdot 2^{1/12} \approx$ 493,87	**SI**

Atividade 21. Crie uma fórmula matemática que relacione a tecla do piano e sua frequência em Hertz e calcule a frequência em Hertz da 88^a tecla do piano.

Solução comentada:

Veja que o DÓ central, da Quarta Oitava tem frequência de 261,63 Hertz aproximadamente, logo o Dó da Terceira Oitava terá Frequência de 130,81 Hertz; o DÓ da Segunda Oitava 65,40 Hertz e o DÓ da Primeira Oitava terá frequência de 32,70 hertz. Se dividirmos 32,70 sucessivamente por $2^{1/12}$ teremos 30,87; 29,14 e 27,50 resultando nas frequências em Hertz das notas SI, LÁ # e LÁ respectivamente. Portanto, a primeira nota do piano, LÁ tem frequência aproximada de 27,50 Hertz e esta frequência vai aumentando conforme uma PG de razão $2^{1/12}$ a cada tecla. Chamando de t_1 a primeira tecla do piano, a nota LÁ (a mais grave do piano) e $F(t_n)$ a frequência em Hertz da tecla (t_n) com n inteiro de 1 a 88, temos que:

$$F(t_n) = 27,50 \cdot [2^{1/12}]^{n-1} = 27,50 \cdot 2^{(n-1)/12}$$

Portanto, a 88^a tecla do piano (t_{88}), a última, que é a nota DÓ, a mais aguda do piano terá frequência de $27,50 \cot 2^{87/12} \approx$ 4186,00 Hertz. Fica caracterizada então uma escala logarítmica onde o aumento de um semitom na Oitava produz uma frequência $2^{1/12}$ vezes maior.

Baseado em Dunne e McConnel [13]:

A Música costuma despertar o interesse dos estudantes e sua ligação com a Matemática não acaba com a Escala Cromática usada no Ocidente. Pitágoras (579-520 a.C.) mostrou que os sons que chamamos de harmônicos, agradáveis, obedecem a uma relação matemática simples. Segundo conta a lenda, ao passar em frente a uma oficina de um ferreiro, Pitágoras percebeu que as batidas de martelos de diferentes pesos produziam sons que eram agradáveis ao ouvido. Para pesquisar estes sons, Pitágoras teria esticado uma corda musical que produzia um determinado som que tomou como fundamental, o tom. Fez marcas na corda que a dividiam em doze secções iguais e este instrumento mais tarde seria chamado de monocórdio, o qual se assemelha a um violão, mas tem apenas uma corda.

Pitágoras demonstrou que o tom de uma corda, quando soada na metade de seu comprimento, é uma oitava acima do som da corda livre, assim satisfazendo uma razão de 1:2. Quando a corda é soada em $2/3$ de seu comprimento, o som é uma quinta mais alto; em $3/4$, uma quarta mais alto.

Pitágoras construiu as 12 notas da escala cromática usando duas regras:

1. Dobrando a frequência, move-se uma Oitava
2. Multiplicando a frequência por $\dfrac{3}{2}$ move-se uma Quinta Justa.

Exemplificando, da nota Dó Central, deve-se mover até a nota Dó da Quinta Oitava (12 semitons) para obter uma Oitava e até a nota Sol da Oitava Central (7 semitons) para obter uma Quinta. O problema é que 7 Oitavas ($7 \cdot 12 = 84$ semitons) coincide com 12 Quintas ($12 \cdot 7 = 84$ semitons) e teremos a frequência multiplicada por $2^7 = 128$ e por $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{12} \approx 129,74$. Essa discrepância é conhecida como Coma Pitagórico. Especialistas em acústica usam uma outra escala logarítmica para medir seus intervalos dividindo a oitava em 1200 partes iguais, gerando o "cent" (c). Logo,

$$c^{100} = 2^{1/12} \Rightarrow 100 \cdot \log_2 c = \frac{1}{12} \Rightarrow 1c = 2^{1/1200}$$

Se I é o intervalo, ou seja, a razão entre duas frequências, o número de cents do intervalo é:

$$1200 \log_2 I$$

E como a Coma Pitagórica produz um intervalo de $I = \dfrac{(3/2)^{12}}{2^7} = \dfrac{3^{12}}{2^{19}}$ e como

$$1200 \log_2 \frac{3^{12}}{2^{19}} \approx 23,5 cents$$

A coma pitagórica representa 23,5 % de um semiton. Medida em cents, a Quinta de Pitágoras é

$$1200 \log_2 \left(\frac{3}{2}\right) \approx 702,0 \text{ cents}$$

E na escala cromática, com intervalos iguais:

$$1200 \log_2 2^{7/12} = 1200 \cdot \left(\frac{7}{12}\right) = 700 \text{ cents}$$

São apenas 2 cents de diferença. O limiar de distinção do ouvido humano é sensivelmente 2 ou 3 cents, porém um músico com ouvido apurado consegue perceber a diferença. O problema com as quintas e oitavas é resolver a equação $2^x = 3^y$ onde x e y são números inteiros. Aplicando $\log_2$ dos dois lados da igualdade, teremos: $x \cdot \log_2 2 = y \cdot \log_2 3$ e como $\log_2 2 = 1$, temos:

$$\frac{x}{y} = \log_2 3$$

Porém, não se resolve esta equação com x e y inteiros ou racionais. $\log_2 3$ é um número irracional e o máximo que conseguimos é aproximar esse valor para 1,5849625007. Se utilizarmos as frações contínuas para aproximar $\log_2 3$ de um número racional, depois de alguns cálculos, teremos: $\log_2 3 = [1, 1, 1, 2, 2, 3, 1, 5, 2, 23, 2, 2, 1, \cdots]$ que convergem para:

$$1, 2, \frac{3}{2}, \frac{8}{5}, \frac{19}{12}, \frac{65}{41}, \frac{84}{53}, \frac{485}{306}$$

Usando a quarta aproximação, temos:

$$3 = 2^{\log_2 3} \approx 2^{19/12} \Rightarrow 3 = 2^{(12+7)/12} \Rightarrow \frac{3}{2} \approx 2^{7/12}$$

Isso diz que obtemos uma aproximação da Quinta dividindo a Oitava em doze intervalos iguais e usando sete deles, como no Piano. A Música Ocidental adotou, digamos por acidente, a quarta melhor aproximação da Escala Pitagórica usando temperamentos iguais.

É possível ter escalas onde a Oitava não é dividida em 12 intervalos e já se tentou essa divisão em várias partes, porém ou as notas não soaram agradáveis ou o ouvido humano não conseguia distinguí-las. Por exemplo, a escala Chinesa tem 5 notas em sua Oitava e curiosamente, o 5 é a terceira aproximação vista acima.

Observando a quinta fração de convergência e continuando o raciocínio, poderíamos dividir a oitava em 41 intervalos e a Quinta seria representada por aproximadamente 24 intervalos dos 41 da Oitava:

$$\frac{3}{2} \approx 2^{24/41}$$

Mas será que o som seria agradável? O problema maior é que o ouvido humano não distinguiria uma nota da outra. Até agora, dividir a Oitava em intervalos de 12 semitons foi a forma mais harmoniosa de resolver o problema. De qualquer forma, a aproximação dos números reais em números racionais é uma forma de tentar solucionar o problema, pois para afinação dos instrumentos é necessário um número racional, além de ser necessário adequar as notas ao ouvido humano de forma harmoniosa.

Considerações finais

O Ensino das funções reais no Ensino Médio , em particular as Funções Exponenciais e Logarítmicas, definitivamente não vem obtendo êxito, haja vista as imensas dificuldades enfrentadas pelos estudantes neste tópico e a quantidade excessiva de autores que estudam o caso.

A ausência do desenvolvimento histórico da construção do conhecimento matemático nos livros didáticos passa a ideia de que a Matemática é uma disciplina pronta e acabada destinada à raros intelectuais, prejudicando a aprendizagem.

A maioria dos livros didáticos, segundo Sá [28] peca ao não estudar o comportamento variacional das funções exponenciais e logarítmicas dando ênfase aos processos algébricos das funções. Alguns autores resumem o estudo das funções a simplesmente resoluções de equações e inequações algébricas. Historicamente, ocorreu exatamente o inverso, foi a partir de gráficos e tabelas relacionando as variáveis envolvidas que se tentava chegar à "lei" que regia a função.

Este trabalho sugere realizar a caracterização das funções exponenciais e logarítmicas a partir do estudo de seus comportamentos variacionais, buscando um enfoque menos algébrico e centrando em atividades que incentivem a busca por padrões e regularidades no estudo das variações das grandezas estudadas. A função logarítmica e sua inversa, a função exponencial são vistas como modelo matemático mais adequado devido às suas caracterizações, evitando recorrer ao uso de fórmulas prontas. Particularmente, a função e^x se mostra um importante modelo matemático para os fenômenos da natureza e do cotidiano e como o número e aparece em diversas situações, preferiu-se o uso da base e nas soluções dos problemas, sem a necessidade de fórmulas prontas.

Como a ideia principal da função logarítmica é transformar produto em soma e como os teoremas das caracterizações dependem da Progressão Aritmética (PA) e da Progressão Geométrica (PG), faz-se necessário que o estudante aprenda PA e PG antes das Funções Exponenciais e Logarítmicas, mudando a cronologia de como é ensinado atualmente. Segundo Simões [30] *"se um autor inclui PA e PG antes dos Logaritmos, seu livro vende menos."* e a maioria dos professores prefere seguir o livro didático.

Historicamente, os matemáticos já possuíam algoritmos que permitiam o cálculo de integrais de algumas funções, antes mesmo da criação do Cálculo Diferencial e Integral. Limitações desse algoritmo e a busca de melhorá-los permitiu que se fizesse a definição de um logaritmo especial, chamado de logaritmo natural, para posteriormente ser concebido o Cálculo Diferencial e Integral. Além de ser uma pré-apresentação do Cálculo, esse conhecimento traria aos estudantes enormes benefícios segundo Ávila (1991) [2] e Lima (1996) [17].

Outra preocupação do trabalho é a de articular as Tendências Metodológicas propostas no Capítulo 1. Por isso, as atividades são na forma de situações-problemas. O professor deve sempre antes de fazer uso das Atividades propostas, analisar o perfil de seus estudantes, para que a atividade não saia demais do contexto sociocultural do aluno. O uso de calculadoras é indispensável durante todo o trabalho, agilizando e facilitando o processo, portanto o professor deve estar atento ao planejamento de suas aulas, providenciando as calculadoras antecipadamente e certificando-se que os alunos saibam utiliza-las, caso contrário, o resultado não será satisfatório. O mesmo acontece ao utilizar de softwares computacionais como o Geogebra, a aula deverá ser muito bem planejada, antecipando as coordenadas para os alunos de como utilizar o Software.

É importante frisar que o ensino dos logaritmos como mero instrumento de cálculo é passado. Com o advento das potentes e baratas calculadoras portáteis, este uso dos logaritmos perdeu seu sentido. Porém, seu ensino nunca deixará de ser importante porque as variações exponenciais e logarítmicas modelam fenômenos onde o crescimento e o decrescimento de uma grandeza são proporcionais ao valor desta grandeza num dado momento e também por ser muito útil e adequada para certas escalas.

Este trabalho mostra a ligação importante que as funções logarítmicas e exponenciais possuem com outros conhecimentos não só da Matemática como com muitas outras áreas, dando a oportunidade ao professor de relacionar esses conhecimentos, tornando o assunto mais significativo ao aluno. Sendo assim, espero que seja útil para muitos professores da educação básica e também para autores de livros didáticos.

Referências

[1] ÁVILA, Geraldo. *Números muito grandes.* Revista do Professor de Matemática. São Paulo, v. 25, p. 1-9, 1º semestre de 1994.

[2] ÁVILA, Geraldo. *O Ensino do Cálculo no 2º Grau.* Revista do Professor de Matemática. São Paulo, v. 18, p. 1-9, 1º semestre de 1991.

[3] BARBOSA, J.C. *Modelagem Matemática: O que é? Por Que? Como?* In: *Veritati,* n.4, p.73-80, 2004.

[4] BASSANEZI, R C. *Modelagem Matemática.* Dynamis, Blumenau, V.I, nº 7, p.55 a 83,abr/jun.1994

[5] BASSANEZI, R.C. *Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática.* São Paulo: Ed Contexto, 2002.

[6] BORBA, Marcelo de Carvalho *Tecnologias informáticas na educação matemática e reorganização do pensamento* In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. *Pesquisa em Educação Matemática : Concepções e Perspectivas* São Paulo, UNESP, 1999.

[7] BORBA, Marcelo de Carvalho. 1987. *Um estudo etnomatemático: sua incorporação na elaboração de uma proposta pedagógica para o "Núcleo-Escola"da favela da Vila Nogueira-São Quirino.* Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. UNESP, Rio Claro, 1987.

[8] BORBA, Marcelo de Carvalho ; LOPES, Anemari Roesler Luersen Vieira. *Tendências em Educação Matemática. Roteiro* , Revista da UNOESC. Vol XVI, nº 32, pp.49-61. Santa Catarina, jul/Dez 1994.

[9] BOYER, Carl B. *História da Matemática* Tradução de Helena Castro. São Paulo, Blucher, 2012.

[10] BURAK, D. *Modelagem Matemática: ações e interações no processo de ensino-aprendizagem.* Tese (Doutorado em Educação), Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1992.

[11] D' AMBRÓSIO, Ubiratan . *Etnomatemática: Um Programa.* Educação matemática em revista, SBEM-1993, Ano I, número I, p. 5-11.

[12] DCE-SECRETARIA DE EDUCAÇÃO DO ESTADO DO PARANÁ. *Diretrizes Curriculares da Educação Básica: Matemática.*Paraná :Departamento de Educação Básica, 2008.

[13] DUNNE,Edward; MCCONNEL, Mark. *Pianos and Continued Fractions.* Mathematics Magazine, Vol. 72, Number 2, April 1999, pp. 104-115. Published by Mathematical Association of America (MAA).

[14] FATOS;Método de Fermat para Quadraturas. Disponível em: http://fatosmatematicos.blogspot.com.br/2011/12/o-metodo-de-fermat-para-quadratura-de.html. Acesso em 15/02/2015.

[15] FERREIRA, Eduardo Sebastiani. *Cidadania e Educação Matemática.* Educação matemática em revista, SBEM 1993, Ano I, número 1. p. 17.

[16] FRAENKEL, Renato. *Logaritmos- Um curso alternativo.* Revista do Professor de Matemática. São Paulo, v. 04, p.16-20, 1º semestre 1984.

[17] LIMA, Elon Lages. *Logaritmos* Coleção do Professor de Matemática, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 1996.

[18] LIMA, Elon Lages; CARVALHO,Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto Cesar. *A Matemática no Ensino Médio-volume 1* Coleção do Professor de Matemática, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2006.

[19] LIMA, Elon Lages; CARVALHO,Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto Cesar. *A Matemática no Ensino Médio-volume 2* Coleção do Professor de Matemática, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2006.

[20] LIMA, Elon Lages. *Números e Funções reais.*Coleção do Professor de Matemática, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2012.

[21] MAOR, Eli. *e : A História de um número* Tradução de Jorge Calife. Rio de Janeiro, Record, 2006.

[22] MIGUEL, Antonio; MIORIM, Maria Ângela. *História na Educação Matemática: Propostas e Desafios.* Belo Horizonte, Autêntica, 2004.

[23] NEUGEBAUER, O.; SACHS,A. *Mathematical Cuneiform Texts.* American Oriental Society and The American Schools of Oriental Research. New Haven, Connecticut, 1945.

[24] ORMOND, Antonio Tassio Santana; NUNES, João Angelo Silva; CNEPPELE, Carlos; SILVA, Samara Lorâine Soares da; PEREIRA, Marcel Thomas Job. *Análise das características físicas de sementes de trigo.* Disponível em http://www.conhecer.org.br/enciclop/2013b/CIENCIAS%20AGRARIAS/ANALISE %20DE%20CARACTERISTICAS.pdf. Acesso em 05/03/2015

[25] PCN- BRASIL- MEC. *Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio- parte III- Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias* Brasília:MEC, 2000.

[26] POLYA, George. *A arte de resolver problemas : um novo aspecto do método matemático* Tradução e adaptação de Heitor Lisboa de Araujo. Rio de Janeiro, Interciência, 1995.

[27] PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. *Investigações Matemáticas na sala de aula.* Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

[28] SÁ, Sandro Lopes de Souza. *Um mapeamento do ensino de Funções Exponenciais e Logarítmicas no Ensino Básico*. Monografia para a Especialização em Matemática para Professores do Ensino Fundamental e Médio. Niterói: Universidade Federal Fluminense. 2005.

[29] SCHOENFELD, Alan H. *Heurísticas na sala de aula*. In: KRULIK, S.; REYS, R. E. *A Resolução de Problemas na matemática escolar*. São Paulo, Ed. Atual, 1997.

[30] SIMÕES,Márcio; SÔNEGO,Dubes. *Como Estudar e Ensinar Logaritmos? A coisa sem sentido tem sentido há séculos*. Cálculo: Matemática para todos. São Paulo, v. 33, n. 33, p. 42-54, out. 2013.

[31] SMOLE, Katia Stocco e DINIZ, Maria Ignez. *Ler, escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender matemática* Porto Alegre, Ed. Artmed, 2001.

[32] SOUZA, Joamir Roberto de. *Novo olhar Matemática*. Coleção Novo Olhar, v. 1. São Paulo, Editora FTD, 2010.

[33] STEWART, James. *Cálculo, volume 1*. São Paulo, Cengage Learning, 2013.

[34] TAHAN, Malba. *O homem que calculava*. Rio de Janeiro: Record, 2008.

[35] ZUFFI, Edna Maura. *Alguns aspectos do desenvolvimento histórico do Conceito de Função* Educação Matemática em Revista (São Paulo), São Paulo, v. Ano 8, n. 9, p. 10-16, 2001.

ANEXO A - Logaritmos Decimais

Os logaritmos decimais (de base 10) eram muito utilizados antes da criação das calculadoras. Até que o uso das mesmas se tornasse popular, os logaritmos decimais eram frequentemente utilizados para facilitar os cálculos aritméticos e é isto que será abordado neste anexo.

Utilizaremos a notação log para indicar $\log_{10}$, ou seja $\log x$ para indicar $\log_{10}^{x}$. Na seção 3.4 vimos que :

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10},\text{ para todo } x > 0$$

Podemos representar um número positivo x da seguinte forma:

$$x = a \cdot 10^n,\text{ com } 1 \leq a < 10 \text{ e } n \in \mathbb{Z}$$

Assim,

$$\log x = \log a + \log(10^n)$$

$$\log x = \log a + n \cdot \log 10$$

$$\log x = \log a + n$$

Como $1 \leq a < 10, \log a$ é um número compreendido entre 0 e 1, podendo ser igual a 0, então:

$$\log x = \log a + n,\text{ com } 0 \leq \log a < 1$$

Nessas condições, chama-se:

$\log a$ de mantissa do logaritmo de x e

n de característica de $\log x$

Portanto,

$$\log x = \text{ mantissa } + \text{ característica}$$

A mantissa é sempre um número compreendido entre 0 e 1, podendo ser igual a 0 mas não igual a 1 e a característica é um número inteiro, o qual pode ser encontrado pela posição da vírgula no desenvolvimento de x como fração decimal.Por exemplo:

$$\log 178,4 = \log(1,784 \cdot 10^2) = \log 1,784 + \log 10^2 = \log 1,784 + 2$$

$$\log 0,001784 = \log(1,784 \cdot 10^{-3}) = \log 1,784 + \log 10^{-3} = \log 1,784 - 3$$

Note que se os números decimais diferem apenas pela posição da vírgula, então possuem a mesma mantissa e para achar a mantissa, basta consultar uma tábua de logaritmos decimais e como $1 \leq a < 10$, as tábuas de logaritmos só precisam trazer os logaritmos decimais entre 1 e 10.(Anexo B)

No Anexo B consta uma tábua de logaritmos decimais de 1,00 até 9,99 com seis casas decimais. Vamos dar alguns exemplos usando a tábua do Anexo B.

Exemplo 12. $\log 45,3 = \log(4,53 \cdot 10) = \log 4,53 + 1$

Procurando no Anexo B, $\log 4,53 = 0,656098$, portanto

$\log 45,3 =$ 1,656098

Vemos que, o logaritmo de um número maior ou igual a 1, basta tomar a mantissa como parte fracionária e a característica como parte inteira.

Exemplo 13. $\log 0,000453 = \log(4,53 \cdot 10^{-4}) = \log 4,53$ - 4

Procurando no Anexo B, $\log 4,53 =$ 0,656098, portanto

$\log 0,000453 =$ -3,343902 ou $\overline{4}$,656098

Portanto, utilizaremos a barra para indicar característica negativa.

Para conseguir calcular logaritmos de números com mais de 2 casas decimais, que não consta em nossa tábua no Anexo B, pode-se utilizar a Interpolação Linear, supondo que o gráfico de $y = \log x$ é uma reta entre os dois pontos mais próximos do número desejado. Não é verdade que seja uma reta, porém o erro cometido será menor que os valores mais próximos que constam na tábua.

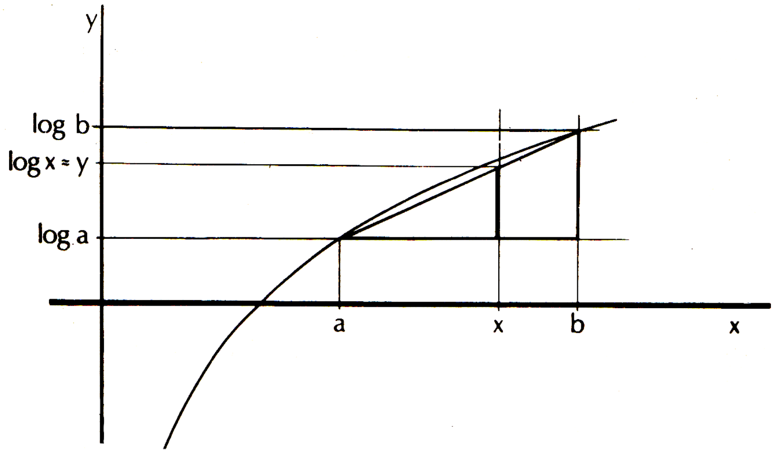

Figura 21: Fonte: Lima (1996) [17]

Como a base 10 é maior que 1, a função $y = \log x$ é crescente e escolhendo dois números a e b tal que $a < x < b$ como na Figura 21 acima, teremos dois triângulos semelhantes que fornecem:

$$\frac{\log b - \log a}{b - a} = \frac{y - \log a}{x - a}, \text{ portanto,}$$

$$\log x \approx \log a + \frac{(x - a)}{(b - a)} \cdot (\log b - \log a)$$

ou ainda :

$$x \approx a + \frac{(\log x - \log a)}{(\log b - \log a)} \cdot (b - a), \text{ com } \log a < \log x < \log b$$

Veja o exemplo abaixo:

Exemplo 14. Como $5,78 < 5,783 < 5,79$:

$$\log 5,783 \approx \log 5,78 + \frac{(5,783 - 5,78)}{(5,79 - 5,78)} \cdot (\log 5,79 - \log 5,78)$$

$$= 0,761928 + 0,3 \cdot (0,762679 - 0,761928) = 0,761928 + 0,3 \cdot 0,000751$$

$$= 0,761928 + 0,0002253$$

$$= 0,7621533$$

E conseguimos chegar a um valor bem próximo do que queremos.

Vejamos agora como calcular produtos, quocientes, potências e raízes por meio dos logaritmos decimais:

Exemplo 15. Multiplicação

Calcular o produto

$x = 6051 \cdot 5,783 \cdot 0,00453$ Sabemos que

$$\log x = \log(6051 \cdot 5,783 \cdot 0,00453) = \log 6051 + \log 5,783 + \log 0,00453$$

Utilizando a tábua de logaritmos e o método da interpolação linear, obtém-se:

$$\log 6051 \approx 3,7818268$$

$$\log 5,783 \approx 0,7621533$$

$$\log 0,00453 \approx \overline{3},656098$$

Somando os valores dos logaritmos:

$$\log x = 2,2000781 \Rightarrow x = 10^{2,2000781} \Rightarrow x = 10^2 \cdot 10^{0,2000781}$$

Se chamarmos $u = 10^{0,2000781}$, ou seja, $\log u = 0,2000781$(neste caso, u também é conhecido como *Antilogaritmo* de 0,200781 ou simplesmente *antilog* 0,200781), como $0,198657 < 0,2000781 < 0,201397$ concluímos que $\log 1,58 < \log u < \log 1,59$ (pela tábua de logaritmos do Anexo B)

Por interpolação linear:

$$u \approx 1,58 + \frac{(\log u - \log 1,58)}{(\log 1,59 - \log 1,58)} \cdot (1,59 - 1,58) \Rightarrow$$

$$u \approx 1,58 + \frac{(0,200781 - 0,198657)}{(0,201397 - 0,198657)} \cdot (1,59 - 1,58) \Rightarrow$$

$$u \approx 1,5877518248 \text{ e como } x \approx 10^2 \cdot u \Rightarrow$$

$$x \approx 158,77518248$$

Exemplo 16. Divisão

Calcule o quociente:

$$x = \frac{53,18}{578,3}$$

Temos que $\log x = \log 53,18$ - $\log 578,3$

Usando a tábua logarítmica do Anexo B e a interpolação linear, obtemos :

$\log 53,18 \approx 1,7257486$ e $\log 578,3 \approx 2,7621533$

Logo, $\log x \approx (1 + 0,7257486) - (2 + 0,7621533)$

$= (1 - 0,7621533) + (0,7257486 - 2) = 0,2378467 + 0,7257486 - 2$

$= \overline{2},9635953$. Portanto,

$\log x \approx \overline{2},9635953$ e x procurado é o *antilog* $\overline{2},9635953$

Sendo $\log x = \overline{2},9635953 = -2 + 0,9635953$, temos que $x = 10^{-2} \cdot 10^{0,9635953}$.

Chamando de $u = 10^{0,9635953} \Rightarrow \log u = 0,9635953$ e $x = 10^{-2} \cdot u$

Na tábua de logaritmos do Anexo B, temos que

$\log 9,19 = 0,963316$ e $\log 9,20 = 0,963788$, portanto, por interpolação linear,

$u \approx 9,19059174$ e como $x \approx 10^{-2} \cdot u$ concluímos que

$$x \approx 0,09190592$$

Exemplo 17. Potência

Calcular a potência $x = (1,12)^{20}$

Temos $\log x = 20 \cdot \log 1,12 = 20 \cdot 0,049218 = 0,98436$

Portanto

$$x = \textit{antilog}\ 0,98436 \approx 9,646288$$

Exemplo 18. Radiciação

Calcule $x = \sqrt[8]{189}$

$$\text{Sabemos que } \log x = \frac{\log 189}{8} = \frac{2,276462}{8} = 0,28455775$$

$$\text{Portanto, } x = \textit{antilog}\ 0,28455775 \approx 1,9255707$$

Na radiciação e na potenciação é que os logaritmos se mostravam mais úteis e é óbvio que a popularização das calculadoras eletrônicas fez deste capítulo apenas uma página da História. Atualmente, a importância fica com as funções logarítmicas e suas propriedades e não como instrumento de cálculo aritmético.

ANEXO B - Tábua de logaritmos decimais de 1,00 até 9,99

Tábua de Logaritmos Decimais (Mantissas)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	000000	004321	008600	012837	017033	021189	025306	029384	033424	037426
11	041393	045323	049218	053078	056905	060698	064458	068186	071882	075547
12	079181	082785	086360	089905	093422	096910	100371	103804	107210	110590
13	113943	117271	120574	123852	127105	130334	133539	136721	139879	143015
14	146128	149219	152288	155336	158362	161368	164353	167317	170262	173186
15	176091	178977	181844	184691	187521	190332	193125	195900	198657	201397
16	204120	206826	209515	212188	214844	217484	220108	222716	225309	227887
17	230449	232996	235528	238046	240549	243038	245513	247973	250420	252853
18	255273	257679	260071	262451	264818	267172	269513	271842	274158	276462
19	278754	281033	283301	285557	287802	290035	292256	294466	296665	298853
20	301030	303196	305351	307496	309630	311754	313867	315970	318063	320146
21	322219	324282	326336	328380	330414	332438	334454	336460	338456	340444
22	342423	344392	346353	348305	350248	352183	354108	356026	357935	359835
23	361728	363612	365488	367356	369216	371068	372912	374748	376577	378398
24	380211	382017	383815	385606	387390	389166	390935	392697	394452	396199
25	397940	399674	401401	403121	404834	406540	408240	409933	411620	413300
26	414973	416641	418301	419956	421604	423246	424882	426511	428135	429752
27	431364	432969	434569	436163	437751	439333	440909	442480	444045	445604
28	447158	448706	450249	451786	453318	454845	456366	457882	459392	460898
29	462398	463893	465383	466868	468347	469822	471292	472756	474216	475671
30	477121	478566	480007	481443	482874	484300	485721	487138	488551	489958
31	491362	492760	494155	495544	496930	498311	499687	501059	502427	503791
32	505150	506505	507856	509203	510545	511883	513218	514548	515874	517196
33	518514	519828	521138	522444	523746	525045	526339	527630	528917	530200
34	531479	532754	534026	535294	536558	537819	539076	540329	541579	542825
35	544068	545307	546543	547775	549003	550228	551450	552668	553883	555094
36	556303	557507	558709	559907	561101	562293	563481	564666	565848	567026
37	568202	569374	570543	571709	572872	574031	575188	576341	577492	578639
38	579784	580925	582063	583199	584331	585461	586587	587711	588832	589950
39	591065	592177	593286	594393	595496	596597	597695	598791	599883	600973
40	602060	603144	604226	605305	606381	607455	608526	609594	610660	611723
41	612784	613842	614897	615950	617000	618048	619093	620136	621176	622214
42	623249	624282	625312	626340	627366	628389	629410	630428	631444	632457
43	633468	634477	635484	636488	637490	638489	639486	640481	641474	642465
44	643453	644439	645422	646404	647383	648360	649335	650308	651278	652246
45	653213	654177	655138	656098	657056	658011	658965	659916	660865	661813
46	662758	663701	664642	665581	666518	667453	668386	669317	670246	671173
47	672098	673021	673942	674861	675778	676694	677607	678518	679428	680336
48	681241	682145	683047	683947	684845	685742	686636	687529	688420	689309
49	690196	691081	691965	692847	693727	694605	695482	696356	697229	698101
50	698970	699838	700704	701568	702431	703291	704151	705008	705864	706718
51	707570	708421	709270	710117	710963	711807	712650	713491	714330	715167
52	716003	716838	717671	718502	719331	720159	720986	721811	722634	723456
53	724276	725095	725912	726727	727541	728354	729165	729974	730782	731589
54	732394	733197	733999	734800	735599	736397	737193	737987	738781	739572

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	740363	741152	741939	742725	743510	744293	745075	745855	746634	747412
56	748188	748963	749736	750508	751279	752048	752816	753583	754348	755112
57	755875	756636	757396	758155	758912	759668	760422	761176	761928	762679
58	763428	764176	764923	765669	766413	767156	767898	768638	769377	770115
59	770852	771587	772322	773055	773786	774517	775246	775974	776701	777427
60	778151	778874	779596	780317	781037	781755	782473	783189	783904	784617
61	785330	786041	786751	787460	788168	788875	789581	790285	790988	791691
62	792392	793092	793790	794488	795185	795880	796574	797268	797960	798651
63	799341	800029	800717	801404	802089	802774	803457	804139	804821	805501
64	806180	806858	807535	808211	808886	809560	810233	810904	811575	812245
65	812913	813581	814248	814913	815578	816241	816904	817565	818226	818885
66	819544	820201	820858	821514	822168	822822	823474	824126	824776	825426
67	826075	826723	827369	828015	828660	829304	829947	830589	831230	831870
68	832509	833147	833784	834421	835056	835691	836324	836957	837588	838219
69	838849	839478	840106	840733	841359	841985	842609	843233	843855	844477
70	845098	845718	846337	846955	847573	848189	848805	849419	850033	850646
71	851258	851870	852480	853090	853698	854306	854913	855519	856124	856729
72	857332	857935	858537	859138	859739	860338	860937	861534	862131	862728
73	863323	863917	864511	865104	865696	866287	866878	867467	868056	868644
74	869232	869818	870404	870989	871573	872156	872739	873321	873902	874482
75	875061	875640	876218	876795	877371	877947	878522	879096	879669	880242
76	880814	881385	881955	882525	883093	883661	884229	884795	885361	885926
77	886491	887054	887617	888179	888741	889302	889862	890421	890980	891537
78	892095	892651	893207	893762	894316	894870	895423	895975	896526	897077
79	897627	898176	898725	899273	899821	900367	900913	901458	902003	902547
80	903090	903633	904174	904716	905256	905796	906335	906874	907411	907949
81	908485	909021	909556	910091	910624	911158	911690	912222	912753	913284
82	913814	914343	914872	915400	915927	916454	916980	917506	918030	918555
83	919078	919601	920123	920645	921166	921686	922206	922725	923244	923762
84	924279	924796	925312	925828	926342	926857	927370	927883	928396	928908
85	929419	929930	930440	930949	931458	931966	932474	932981	933487	933993
86	934498	935003	935507	936011	936514	937016	937518	938019	938520	939020
87	939519	940018	940516	941014	941511	942008	942504	943000	943495	943989
88	944483	944976	945469	945961	946452	946943	947434	947924	948413	948902
89	949390	949878	950365	950851	951338	951823	952308	952792	953276	953760
90	954243	954725	955207	955688	956168	956649	957128	957607	958086	958564
91	959041	959518	959995	960471	960946	961421	961895	962369	962843	963316
92	963788	964260	964731	965202	965672	966142	966611	967080	967548	968016
93	968483	968950	969416	969882	970347	970812	971276	971740	972203	972666
94	973128	973590	974051	974512	974972	975432	975891	976350	976808	977266
95	977724	978181	978637	979093	979548	980003	980458	980912	981366	981819
96	982271	982723	983175	983626	984077	984527	984977	985426	985875	986324
97	986772	987219	987666	988113	988559	989005	989450	989895	990339	990783
98	991226	991669	992111	992554	992995	993436	993877	994317	994757	995196
99	995635	996074	996512	996949	997386	997823	998259	998695	999131	999565

ANEXO C - Fórmula da Soma dos n Primeiros Termos de uma Progressão Geométrica (PG).

Baseada em Lima (2006, v.2) [19]

Dada uma $PG(g_1, g_2, g_3, ...g_n)$ com razão $q \neq 1$, temos que $g_n = g_1 \cdot q^{n-1}$.

Seja $S_n = g_1 + g_2 + g_3 + ... + g_n$,

$q \cdot S_n = g_2 + g_3 + g_4 + ... + g_{n+1}$ e

$S_n - q \cdot S_n = a_1 - a_{n+1} \Rightarrow S_n \cdot (1-q) = a_1 - a_1 \cdot q^n$. Portanto,

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

Nas progressões geométricas em que $|q| < 1$, a soma dos n primeiros termos tem um limite finito quando $n \to \infty$.

Note que como $|q|$ é um número entre 0 e 1, temos que $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$, logo,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = a_1 \cdot \left(\frac{1-0}{1-q}\right), \text{ ou seja,}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}$$

O que nos dá a fórmula da soma dos termos de uma PG infinita quando o módulo da sua razão está entre 0 e 1.

ANEXO D - Atividades sobre Funções Exponenciais e Logarítmicas para os alunos do 1º Ano do Ensino Médio.

1. Comportamento da Função Exponencial.

   a) Plote uma função exponencial qualquer usando o Software Geogebra e imprima.

   b) Marque no eixo Y uma PG qualquer

   c) Usando a curva da função exponencial como referência, ache no eixo X os valores correspondentes aos termos da PG escolhida anteriormente no eixo Y.

   d) Qual a conclusão que podemos tirar sobre estes valores no eixo X?

y (PG)	x_n
	$x_1 =$
	$x_2 =$
	$x_3 =$
	$x_4 =$
	$x_5 =$
$\vdots$	$\vdots$

2. Calculadora Rudimentar.

   PARTE I

   a) Complete a Tabela abaixo com uma PA qualquer que comece com 0 na coluna do meio e com uma PG qualquer que comece com 1 na terceira coluna.

   b) Multiplique o termo da PG da linha 4 pelo termo da linha 9

   c) Multiplique o termo da PG da linha 2 pelo termo da linha 11

   d) Multiplique o termo da PG da linha 3 pelo termo da linha 11

   e) Multiplique o termo da PG da linha 7 pelo termo da linha 12

   f) Multiplique o termo da PG da linha 7 pelo termo da linha 5

   Observação: Nesta atividade não será permitido o uso de calculadoras.

Linha	PA	PG
1	0	1
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17		
18		
19		
20		

PARTE II

a) A soma de dois termos da PA é sempre um termo da mesma PA?

b) O produto de dois termos da PG ao lado de dois termos da PA resulta sempre em um termo da própria PG ?

c) Existe alguma relação entre os termos genéricos a_n da PA e g_n da PG ?

3. Comportamento da Função Logarítmica.

a) Plote uma função logarítmica qualquer usando o Software Geogebra e imprima.

b) Marque no eixo X uma PG com primeiro termo igual a 1 e razão 2

c) Usando a curva da função logarítmica como referência, ache no eixo Y os valores correspondentes aos termos da PG escolhida anteriormente no eixo Y.

d) Qual a conclusão que podemos tirar sobre estes valores no eixo Y?

x (PG)	y_n
1	$y_1 =$
2	$y_2 =$
4	$y_3 =$
8	$y_4 =$
16	$y_5 =$
$\vdots$	$\vdots$

4. Caracterização da Função Exponencial.

   Complete a tabela abaixo para a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = 3^x$ e $\Delta x = 1$.

x	$f(x) = 3^x$	$f(x + \Delta x)$	$f(x + \Delta x) - f(x)$	$\dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{f(x)}$
0				
1				
2				
3				
4				
5				
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k				

5. Caracterização das Funções Logarítmicas

   Complete a tabela abaixo para a função $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log_3 x$ e $\Delta x = 1$

x=3^i	$f(3^i) = \log_3 3^i$	$f(3^{i+\Delta x})$	$f(3^i \cdot 3^{i+\Delta x})$	$f(3^i) + f(3^i + \Delta x)$
$3^0 = 1$				
$3^1 = 3$				
$3^2 = 9$				
$3^3 = 27$				
$3^4 = 81$				
$3^5 = 243$				
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
3^n				

6. Crescimento das Funções Exponenciais e Logarítmicas

   Construa uma tabela com 3 colunas, sendo a primeira valores para x, a segunda valores para $y = x^2$ e a terceira valores para $y = e^x$. Atribua valores para $x : x = 0; x =$

$3; x = 5; x = 10; x = 15; x = 20; x = 30,5; x = 41,4$ e $x = 42,9$. Use uma calculadora (aproximação de 4 casas decimais) e veja o que acontece com a segunda e terceira colunas da tabela.

Dados interessantes:

Distância da Terra ao Sol $\approx$ 149 600 000 km

1 ano - luz $\approx$ 9 467 280 000 000 km

Distância da estrela mais próxima do Sol: 4,3 anos luz $\approx$ 40 709 304 000 000 km

x	$y = x^2$	$y = e^x$
0		
3		
5		
10		
15		
20		
30,5		
41,4		
42,9		

7. O problema do Jogo de Xadrez.

   Reza a lenda que um rei gostava muito do jogo de xadrez e quis premiar seu inventor e disse que ele poderia pedir o que desejasse como recompensa. O inventor, humilde, recusou várias vezes a oferta, mas o Rei continuava insistindo. Então, o inventor fez o seguinte pedido: 1 grão de trigo pela primeira casa do tabuleiro, 2 grãos de trigo pela segunda, 4 grãos pela terceira e assim por diante, sempre dobrando o número de grãos de trigo a cada casa. O Rei pediu um saco de grãos de trigo e quando começou a calcular, viu que não era tão simples. Pediu então aos matemáticos da corte que calculassem a quantidade de grãos de trigo. Algum tempo depois, os súditos informaram ao Rei que não havia trigo suficiente em seu reino para atender àquele pedido. Mais do que isso, os matemáticos da corte disseram ao Rei que nem se todo o Reino fosse todo coberto de trigo, as safras colhidas durante 2000 anos não seriam suficientes para pagar o inventor. Mas o inventor perdoou publicamente a dívida do Rei e virou seu conselheiro.

   Quantos dígitos tem o número que expressa a dívida do Rei em grãos de trigo?

8. Juros Contínuos:

   Um capital C, empregado a uma taxa de i por cento ao ano, rende no fim de um ano, juros no valor de $i \cdot C/100$. Seja $\alpha = i/100$, temos que após um ano, C renderá $\alpha \cdot C$ de juros e o capital se tornará

$$C + \alpha \cdot C = C \cdot (1 + \alpha)$$

Passado dois anos, o capital se tornará

$$C \cdot (1+\alpha) + [C \cdot (1+\alpha)] \cdot \alpha = [C \cdot (1+\alpha)] \cdot (1+\alpha) = C \cdot (1+\alpha)^2$$

Portanto, em m anos, o capital será de

$$C \cdot (1+\alpha)^m$$

Tomando uma fração, digamos, $1/n$ do ano, seria justo que o juros fosse de $\alpha \cdot C/n$, de modo que decorrida a fração $1/n$ de ano, o capital C se transforma em

$$C \cdot (1+\alpha/n)$$

Depois de mais $1/n$ de ano, obtemos

$$C \cdot (1+\alpha/n)^2$$

Prosseguindo desta maneira, depois de decorrido cada um desses períodos de $1/n$ de ano, ao chegaremos ao fim do ano e ao invés de $C \cdot (1+\alpha)$ obteremos

$$C \cdot (1+\alpha/n)^n$$

Note que se n tender ao infinito, ou seja, com os juros capitalizados a cada instante, *continuamente*,

$$\lim_{n\to\infty} C \cdot \left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n = C \cdot e^{\alpha}$$

Essa forma de transação, onde os juros são capitalizados continuamente da forma como apresentamos acima, chamamos de *Juros Contínuos*.

Assim, por exemplo, o capital de R\$1,00 empregado a juros contínuos de 100% ao ano, será transformado em e reais $\approx$ 2,72 reais ao invés de 2 reais na taxa de 100% ao ano.

Se a taxa de juros é de i % ao ano, com $\alpha = i/100$, então um capital C empregado a essa taxa será transformado, depois de t anos em:

$$\lim_{n\to\infty} C \cdot \left(1+\frac{\alpha t}{n}\right)^n = C \cdot e^{\alpha t}$$

Perdas Contínuas:

Agora, imagine que ao invés de aumentar o capital C a uma taxa de i % ao ano, com $\alpha = i/100$, esse capital C fosse diminuindo continuamente na mesma taxa, dando prejuízo. Usando o mesmo raciocínio anterior, veríamos que que um capital C, sujeito a um prejuízo contínuo de i % ao ano, no fim de t anos fica reduzido a

$$\lim_{n\to\infty} C \cdot \left(1 - \frac{\alpha t}{n}\right)^n = C \cdot e^{-\alpha t}$$

Em particular, C estará reduzido à b -ésima parte em t anos de forma que $e^{-\alpha t} = 1/b$. Isto é,

$$t = \frac{\ln b}{\alpha}$$

a)Em quanto tempo um capital C a juros contínuos de 0,06 % ao mês (aproximadamente o rendimento da Caderneta de Poupança atual) será dobrado?

9. Crescimento Populacional

   O crescimento populacional de certa comunidade pode ser modelado por meio de funções exponenciais pois este aumento é proporcional a população presente no instante inicial da medida, que é uma característica de uma função do tipo exponencial.

   Por exemplo, se certa espécie de peixes em um lago com população inicial igual a P_0, apresenta um crescimento de i % ao ano, com $\alpha = i/100$ e $P(t)$ é a população dessa espécie neste lago depois de um tempo t, então analogamente ao exemplo de Juros Contínuos, teremos:

$$P(t) = \lim_{n\to\infty} P_0 \cdot \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n = P_0 \cdot e^{\alpha t}$$

   Note que o crescimento é contínuo, Se a taxa de crescimento é de 10% ao ano e a população inicial é de 1000 peixes, não acontecerá o fenômeno de se manter os 1000 peixes durante 364 dias e apenas no 365º dia termos 1100 peixes no lago. Esse processo é gradativo, contínuo. A taxa de crescimento será proporcional a uma certa quantidade em determinado momento. Por isso, ocorre de modo análogo ao tratado no exemplo de Juros Contínuos.

   a) Suponha que uma cultura de 100 bactérias se reproduz em condições favoráveis. Doze horas mais tarde contamos 500 bactérias na cultura. Quantas bactérias haverá dois dias depois do início da experiência?

10. Desintegração Radioativa

    Os átomos de uma substância radioativa (como o rádio ou o urânio) possuem uma tendência natural a se desintegrarem, emitindo partículas e transformando-se em outra substância não radioativa. Assim sendo, com o passar do tempo, a quantidade de substância original diminui e a massa da nova substância transformada aumenta.

    Em um determinado momento, a quantidade de matéria que se desintegra de um corpo radioativo é proporcional à massa da substância original presente no corpo naquele momento. A constante de proporcionalidade α é determinada experimentalmente e cada substância radioativa tem sua constante de desintegração α. Essa é uma característica das funções exponenciais e como a desintegração da substância radioativa também é um processo contínuo, o modelo será análogo ao das Perdas Contínuas.

Seja um corpo de massa M_0, formado por uma substância radioativa cuja taxa de desintegração é α então $M(t)$, a massa do corpo depois de um tempo t, será:

$$M(t) = \lim_{n\to\infty} M_0 \cdot \left(1 - \frac{\alpha t}{n}\right)^n = M_0 \cdot e^{-\alpha t}$$

Na prática, a constante α fica determinada a partir de um número básico, chamado de *meia-vida* da substância. A *meia-vida* de uma substância radioativa é o tempo necessário para que se desintegre a metade da massa de um corpo formado por aquela substância. Por exemplo, o Polônio 218 tem meia-vida igual a 2 minutos e 45 segundos. Os isótopos do rádio 226 tem meia-vida de 1620 anos e os isótopos do urânio têm uma meia-vida da ordem de 10^9 anos.

Portanto, se conhecemos a meia-vida do elemento radioativo, sabemos em quanto tempo sua massa inicial se reduz à metade, ou seja, sendo $t_{1/2}$ a meia-vida do elemento, sabemos que :

$$\frac{1}{2}M_0 = M_0 \cdot e^{-\alpha t_{1/2}} \to \ln\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{M_0}{M_0} = -\alpha \cdot t_{1/2} \cdot \ln e$$

Ou seja,

$$\alpha = \frac{\ln 2}{t_{1/2}}$$

a) O acidente da usina nuclear de Fukushima, no Japão em abril de 2011, acendeu o alerta sobre o risco para a saúde humana de acidentes nucleares . O acidente liberou altas doses de elementos radioativos na água e no solo da região, fazendo com que milhares de pessoas sobreviventes do Tsunami que provocou o acidente na Usina deixassem suas casas na região. Entre os elementos radioativos liberados pelo acidente estão o Iodo 131, Césio 137 e o Estrôncio 90, que causam sérios danos à saúde dos seres humanos, como câncer.

Em abril de 2011, foram detectados 570 becquerels de Estrôncio 90 por kg de solo na região da usina de Fukushima, valor que corresponde a cerca de 130 vezes a concentração normal do solo daquela região. Determine qual será a concentração de Estrôncio 90 daqui a 116 anos, sabendo que a meia-vida desse elemento é de 29 anos e se depois desse tempo, a concentração do solo da região já estará próximo da normalidade .

11. Eliminação de drogas no organismo

A eliminação do álcool pelo organismo, feita uma parte pelos rins e pulmões e outra pelo metabolismo, varia muito de pessoa para pessoa conforme o peso e o sexo. Mas, analogamente à desintegração radioativa, a eliminação é contínua e proporcional à sua quantidade em determinado instante, característica das funções exponenciais.

Os acidentes de trânsito, no Brasil, em sua maior parte são causados por erro do motorista. Em boa parte deles, o motivo é o fato de dirigir após o consumo de bebida alcoólica. A ingestão de uma lata de cerveja provoca uma concentração de aproximadamente 0,3 g/L de álcool no sangue. A tabela abaixo mostra os efeitos sobre o corpo humano provocados por bebidas alcoólicas em função de níveis de concentração de álcool no sangue:

Concentração de álcool no sangue (g/L)	**Efeitos**
0,1 - 0,5	Sem influência aparente, ainda que com alterações clínicas
0,3 - 1,2	Euforia suave, sociabilidade acentuada e queda da atenção
0,9 - 2,5	Excitação, perda de julgamento crítico, queda da sensibilidade e das reações motoras
1,8 - 3,0	Confusão mental e perda da coordenação motora
2,7 - 4,0	Estupor, apatia, vômitos e desequilíbrio ao andar
3,5 - 5,0	Coma e morte possível

Efeitos das bebidas alcoólicas. Fonte: (ENEM- 2003) Revista Pesquisa FAPESP nº 57, setembro 2000

Atualmente no Brasil, conforme a Resolução 432/2013 do Conselho Nacional de Trânsito (CONTRAN), o limite tolerável da concentração de álcool em g/L de sangue é zero, ou seja, é crime dirigir logo após comer um bombom de licor. É aceitável apenas a margem de erro do bafômetro de 0,05 g/L . Supondo que a meia-vida do álcool em um indivíduo seja de 2 horas e esse indivíduo beba 6 latas de cerveja rapidamente, demorará quanto tempo para a concentração de álcool no sangue chegar a 0,05 g/L depois que ele parou de beber ? Qual o provável efeito do álcool ingerido pelo indivíduo?

12. O método do Carbono 14 (C^{14})

O Carbono 14, indicado por C^{14}, é um isótopo radioativo do carbono, formado na atmosfera devido ao bombardeio da Terra por raios cósmicos. Através dos tempos, a quantidade de C^{14} na atmosfera tem-se mantido constante porque sua produção é compensada por sua desintegração. Os seres vivos absorvem e perdem C^{14} de modo que, em cada espécie, a taxa de C^{14} também se mantém constante. Quando o ser morre, a absorção cessa mas o C^{14} nele existente continua a desintegrar-se continuamente. Este fato pode ser usado para determinar a idade de um fóssil ou de um objeto muito antigo comparando a quantidade de C^{14} de materiais idênticos atuais com os antigos. Para isso, é necessário saber que a meia-vida do C^{14} é de 5730 anos, portanto,

$$\alpha = \frac{\ln 2}{5730}; \;\; M(t) = M_0 \cdot e^{-\left(\frac{\ln 2}{5730}\right)\cdot t}$$

Em 1988, o Vaticano permitiu que o Sudário, tecido ao qual se acreditava ter envolvido o corpo de Cristo, fosse datado por três organizações independentes, a Universidade de Oxford, a Universidade do Arizona e o Instituto Federal de Tecnologia Suíço, através do teste do Carbono 14. Os três testes mostraram que o tecido do Santo Sudário continha aproximadamente 92% do Carbono 14 em comparação com um tecido idêntico atual. Qual a idade aproximada, encontrada pelos testes, do Sudário?

13. Resfriamento de corpo

    Uma situação análoga à da Desintegração radioativa é a de um objeto aquecido, colocado num meio mais frio (ar ou água, por exemplo). Como o objeto possui massa bem menor que a do meio que a contém, a temperatura desse meio permanece constante, sem ser afetada pela presença do objeto mais quente. A *Lei do resfriamento de Newton* afirma que, nessas condições a diferença de temperatura D, entre o objeto e o meio que o contém, decresce com uma taxa de variação proporcional a essa própria diferença, o que caracteriza uma função exponencial. Como D decresce continuamente, se tivermos uma temperatura inicial do objeto D_0 que é a diferença entre a temperatura do objeto e o meio que o contém no instante $t = 0$, teremos:

$$D(t) = D_0 \cdot e^{-\alpha t},$$

    onde a constante α depende do material que é constituída a superfície do objeto.

    O corpo de uma vítima de assassinato foi descoberto às 23 horas. O médico da polícia chegou às 23:30 horas e imediatamente tomou a temperatura do cadáver, que era de 34,8º Celsius. Uma hora mais tarde ele tomou a temperatura outra vez e encontrou 34,1º Celsius. A temperatura do quarto era mantida constante a 20º Celsius. Use a lei de resfriamento de Newton para estimar a hora em que se deu a morte. Admita que a temperatura normal de uma pessoa viva é de 36,5º Celsius.

14. Intensidade Sonora

    O nível de intensidade sonoro, mais conhecido como volume do som, é uma sensação que distingui o som fraco (baixa intensidade) do som forte (alta intensidade) e está relacionado logaritmicamente com a intensidade e com a distância da fonte sonora. Portanto, quanto maior a intensidade sonora da fonte, mais energia ela propaga e consequentemente mais alto o som será percebido por nosso ouvidos. O volume é medido na unidade bel, em homenagem ao cientista britânico Alexander Graham Bell que realizou diversos estudos com o som, linguagem gestual e surdez. Porém sua maior contribuição para o mundo foi o telefone.

    Como o ser humano é muito sensível a escala bel, seu submúltiplo é mais utilizado:

    1 decibel = 0,1 bel = 1Db.

    O nível de intensidade sonoro (N) em decibéis, pode ser representado pela equação:

$$N = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0}$$

onde I_0 é chamada mínima intensidade sonora física, ou limiar de audibilidade, o menor valor da intensidade sonora ainda audível.

$I_0 = 10^{-12} W/m^2$ e I é a intensidade sonora da fonte em W/m^2

A máxima intensidade sonora física, ou limiar de dor, o maior valor da intensidade sonora suportada pelo ouvido é 1 W/m^2

Veja exemplos de nível de intensidade sonoro em decibéis:

Murmúrio: 20 dB

Música suave: 40 dB

Conversa comum: 65 dB

Rua barulhenta: 90 dB

Máquina de cortar grama: 90 dB

Buzina de automóvel: 110 dB

Avião próximo: 100 dB.

Volume máximo em alguns aparelhos de MP3: 120 dB

Qualquer som acima de 85 dB pode causar perda de audição, e a perda depende tanto da potência do som como do período de exposição. A portaria Brasileira do Ministério do Trabalho nº 3214/78 fixa o máximo permitido de 85 dB para 8 horas de jornada de trabalho em ambientes industriais onde existe ruído de máquinas e processos ruidosos. Uma boa maneira de saber que se está ouvindo um som de 85 dB, é quando você tem de elevar a voz para outra pessoa conseguir lhe ouvir.

Se você se expuser a um som de 90 dB, por 8 horas, pode causar danos aos seus ouvidos; mas se a exposição for a um som de 140 dB, um segundo já é o bastante para causar danos (e chega a causar dor).

Ao dobrarmos a distância em relação à fonte do som, o nível sonoro diminui 6 decibéis

a) Quantos decibéis gera uma banda de rock que emite uma intensidade sonora de $10^{-1} W/m^2$?

b) Qual a intensidade sonora em W/m^2 que emite um aparelho de MP3 que gera 120 decibéis ?

c) Aumentando em 1 decibel a intensidade sonora de uma fonte, de quando é aumentada sua intensidade em kWh ?

15. Escala Richter

O terremoto é um fenômeno natural decorrente de movimentos da crosta terrestre, geralmente resultantes do choque entre duas placas tectônicas, que liberam grande quantidade de energia e ocasionam tremores na Terra.

A partir da quantidade de energia liberada por um terremoto, é possível determinar, utilizando um aparelho chamado sismógrafo, sua magnitude na escala Richter, desenvolvida em 1935 pelo sismólogo norte-americano Charles Richter (1900 - 1985). Para sua elaboração, esse sismólogo atribuiu aos terremotos mais fracos, que já haviam sido registrados, valores próximos de zero, e adotou uma escala logarítmica.

De acordo com o grau de magnitude registrado na escala Richter, um terremoto pode acarretar as seguintes consequências:

Magnitude(graus)	**Possíveis Efeitos**
menor que 3,0	Tremores pequenos, geralmente não perceptíveis, registrados por equipamentos apropriados.
3,0 - 5,9	Abalos perceptíveis sem a utilização de equipamentos, mas pouco destruidores. Pode derrubar objetos e trincar paredes.
6,0 - 8,9	Terremoto destrutivo que pode acarretar severos danos às construções e provocar grandes rachaduras no solo.
9,0 ou maior	Tremores muitos fortes, causa a destruição quase total.

Em algumas situações para expressar certas grandezas, é mais conveniente empregar as chamadas escalas logarítmicas do que as escalas lineares convencionais. Este é o caso, por exemplo, da Escala Richter de terremotos. Na Escala Richter, a intensidade I, expressa em graus, é definida da seguinte forma:

$$I = \frac{2}{3} \cdot \log\left(\frac{E}{E_0}\right)$$

Em que E representa a energia liberada pelo terremoto, medida em kWh e $E_0 = 10^{-3}$ kWh

(a) Qual é a energia liberada por um terremoto de 3 graus na escala Richter? E por um terremoto de 9 graus?

(b) Qual é a relação entre a energia liberada por um terremoto de grau k e a energia liberada por um terremoto de grau $(k+1)$ na escala Richter?

(c) Porque você acha que é conveniente usar a escala logarítmica, no caso da medição da intensidade dos terremotos?

16. pH de uma solução

O termo pH (Potencial hidrogeniônico) foi introduzido em 1909 pelo bioquímico dinamarquês Sören Peter Mauritz Sörensen (1868 - 1939) e permite expressar a acidez, neutralidade ou basicidade de uma solução aquosa por meio da concentração de íons de hidrogênio, em mol/L.

O pH da piscina, do aquário deve ser controlado e até mesmo o pH do sangue deve manter valores entre 7,35 e 7,45 onde uma variação de 0,4 pode ser fatal.

Sörensen definiu pH como sendo o logaritmo decimal (base 10) do inverso da concentração hidrogeniônica. Veja :

$$pH = \log\left(\frac{1}{[H^+]}\right) = \log 1 - \log[H^+] = 0 - \log[H^+] = -\log[H^+]$$

Portanto, $pH = -\log[H^+]$.

A partir desta definição, da obtenção experimental do produto iônico da água ($[H^+].[OH^-]$), que corresponde a $1 \cdot 10^{-14}$ a 25º C, e do pOH, determinado por meio do logaritmo decimal do inverso da concentração de íons hidroxila $[OH^-]$ em mol/L, isto é, $pOH = -\log[OH^-]$, foi obtida a relação:

$$pH + pOH = -\log[H^+] + (-\log[OH^-]) = -(\log[H^+] + \log[OH^-]) =$$

$$-(\log([H^+] \cdot [OH^-])) = -(\log(1.10^{-14})) = -(-14) = 14.$$

Ou seja, pH + pOH = 14 e então foi desenvolvida uma escala logarítmica de 0 a 14, por meio da qual uma solução aquosa a 25º C pode ser classificada em ácida, neutra ou básica:

- Solução ácida: pH $<$ 7
- Solução neutra: pH $=$ 7
- Solução básica: pH $>$ 7

a) Um agrônomo, ao verificar as condições do solo para início de um plantio, oferece ao produtor informações sobre o nível de nutrientes, o conteúdo orgânico e o pH do solo, que quando representado por um valor entre 6 e 7 (solução neutra) tende a ser mais fértil.

Em uma propriedade rural, a concentração de íons de hidrogênio apresentou $10^{-4,4}$ mol/L. Sabendo que a produtividade máxima foi obtida quando a concentração de íons de hidrogênio apresentou $10^{-6,4}$ mol/L, de quanto será a correção desse solo em pH para conseguir a produtividade máxima ?

b) O que acontece com a concentração de íons de hidrogênio de uma solução aquosa quando é aumentada 1 unidade de seu pH?

17. Escala Musical Temperada

A Música tem ligações muito fortes com a Matemática, uma delas diz respeito à escala musical temperada onde cada oitava contém 12 semitons (notas) : DÓ, DÓ#, RÉ, RÉ#, MI, FÁ, FÁ#, SOL, SOL#, LÁ, LÁ# e SI. Um piano comum é composto por sete oitavas ($7 \cdot 12 = 84$) mais uma terça menor (LÁ, LÁ#, SI e DÓ) totalizando 88 teclas, dispostas da seguinte forma: Inicia-se pelas notas LÁ, LÁ# e SI seguidas da Primeira até a Sétima Oitava e termina com DÓ. Portanto, não existe apenas um Dó no piano e sim oito. A mesma nota pode ser mais aguda ou mais grave, o que as difere são suas frequências medidas em Hertz. A mesma nota em uma oitava é separada pelo dobro da freqüência da mesma nota na próxima oitava , sendo a de freqüência mais alta mais aguda. Portanto, o DÓ da quarta oitava tem o dobro da frequência (em Hertz) do DÓ da terceira oitava, o mesmo acontecendo com todas as outras 11 notas, resultando que o DÓ da Quarta Oitava apresenta som mais agudo que o DÓ da Terceira e assim por diante.

a) Sabendo que a frequência da nota LÁ da Quarta Oitava (LÁ central) é de 440 Hertz, construa uma tabela com as freqüências dos 12 semitons da Quarta Oitava (Oitava Central).

FREQUÊNCIA	SEMITONS DA QUARTA OITAVA
	DÓ
	DÓ#
	RÉ
	RÉ#
	MI
	FÁ
	FÁ#
	SOL
	SOL#
	LÁ
	LÁ#
	SI

b) Crie uma fórmula matemática que relacione a tecla do piano e sua frequência em Hertz e calcule a frequência em Hertz da 88^a tecla do piano.