



UNIVERSIDADE  
ESTADUAL DE LONDRINA

---

ANNA BARTH GIMENES OLIVEIRA

**GEOMETRIAS HIPERBÓLICA E ESFÉRICA:  
UMA PROPOSTA DIDÁTICA BASEADA NA RESOLUÇÃO DE  
PROBLEMAS**

---

Londrina  
2015

ANNA BARTH GIMENES OLIVEIRA

**GEOMETRIAS HIPERBÓLICA E ESFÉRICA:  
UMA PROPOSTA DIDÁTICA BASEADA NA RESOLUÇÃO DE  
PROBLEMAS**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Laerte Natti

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup> Ana Lúcia da Silva (co-orientadora)

Londrina  
2015

ANNA BARTH GIMENES OLIVEIRA

**GEOMETRIAS HIPERBÓLICA E ESFÉRICA:  
UMA PROPOSTA DIDÁTICA BASEADA NA RESOLUÇÃO DE  
PROBLEMAS**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Orientador: Prof. Dr. Paulo Laerte Natti  
Universidade Estadual de Londrina - UEL

---

Co-orientadora: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup> Ana Lúcia da Silva  
Universidade Estadual de Londrina - UEL

---

Prof. Dr. Jacques Duílio Brancher  
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Londrina, 14 de dezembro de 2015.

Ao meu filho Augusto, ficar ao seu lado  
me motivou a superar todos os  
obstáculos.

## **AGRADECIMENTO (S)**

À Deus pela minha existência, saúde e proteção durante as viagens;

À minha família pelo apoio incondicional, compreensão e paciência, principalmente no momentos mais difíceis;

Aos colegas de curso, pelo companheirismo e pela colaboração que tanto me ajudaram nessa caminhada;

Aos meus orientadores Prof. Dr. Paulo Laerte Natti e Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Ana Lucia da Silva pelo apoio e incentivo durante a elaboração desse trabalho;

A todos os professores do PROFMAT, turma 2013, pela generosidade de compartilhar seus conhecimentos e experiências;

Aos professores Dr. Eliandro Rodrigues Cirilo e Dr. Jacques Duílio Brancher pelas valiosas contribuições como membros da banca examinadora;

Aos que torceram por mim, parentes, amigos, colegas de trabalho, em fim, todos que contribuíram para que essa conquista fosse possível.

“Não há ramo da Matemática, por mais abstrato que seja, que não possa um dia vir a ser aplicado aos fenômenos do mundo real”.

Nikolai Ivanovich Lobachevsky

OLIVEIRA, Anna Barth Gimens. **Geometrias hiperbólica e esférica**: uma proposta didática baseada na Resolução de Problemas. 103 f. Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2015

## RESUMO

A problemática que motivou a presente pesquisa foi: Como contribuir para que o ensino das geometrias hiperbólica e esférica possa ser efetivado no ensino médio, tendo em vista que apesar de ser um conteúdo presente nas diretrizes curriculares do estado do Paraná, não é abordado devido a diversos fatores, entre eles destaca-se a falta de material didático que aborde o conteúdo nesse nível de ensino. O trabalho apresenta uma proposta didática, baseada na tendência metodológica Resolução de Problemas, como sugestão para a abordagem de tais geometrias com alunos do 3º ano do ensino médio. Essa proposta busca comparar os principais conceitos da geometria euclidiana, geometria hiperbólica e geometria esférica, destacando suas principais semelhanças e diferenças, bem como onde cada uma dessas geometrias se aplica.

**Palavras-chave:** Geometria euclidiana. Geometria hiperbólica. Geometria esférica. Resolução de Problemas.

OLIVEIRA, Anna Barth Gimens. **Hyperbolic and spherical geometries**: a didactic approach based on problem solving. 103 f. Dissertation submitted to the Professional Master in Mathematics in National Network – PROFMAT – State University of Londrina, Londrina, 2015.

### **ABSTRACT**

The problematic that motivated this research was: How to contribute to the teaching of hyperbolic and spherical geometries can be effected in high school, considering that despite being a content in the curriculum guidelines of the state of Paraná, this topic is not studied due to several factors, among them we highlight the lack of teaching materials that addresses the content at this level of education. The paper presents an educational proposal, based on methodological tendency of Problem Solving, as suggestions for addressing such geometries to the 3rd year high school students. This proposal seeks to compare the key concepts of Euclidean geometry, hyperbolic geometry and spherical geometry, emphasizing their main similarities and differences as well as where each of these geometries are applied.

**Key words:** Euclidean geometry. Hyperbolic geometry. Spherical geometry. Problem Solving.



## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

<b>Figura 1</b> – Espaço-tempo curvo devido à massa/energia da Terra .....	13
<b>Figura 2</b> – Uma helicóide na película de sabão .....	14
<b>Figura 3</b> – Retrato de Euclides de Alexandria .....	27
<b>Figura 4</b> – Representação geométrica para o quinto postulado de Euclides.....	29
<b>Figura 5</b> – Classificação dos triângulos quanto aos lados .....	32
<b>Figura 6</b> – Classificação dos triângulos quanto aos ângulos .....	32
<b>Figura 7</b> – Ângulo externo de um triângulo ABC .....	34
<b>Figura 8</b> – Construção do ângulo externo de um triângulo em função dos dois ângulos internos não adjacentes a ele .....	34
<b>Figura 9</b> – Soma dos ângulos internos de um triângulo .....	35
<b>Figura 10</b> – Um quadrilátero de Saccheri .....	38
<b>Figura 11</b> – Um quadrilátero de Lambert .....	39
<b>Figura 12</b> – Diferentes curvas com diferentes curvaturas .....	42
<b>Figura 13</b> – Curva com curvatura variável .....	43
<b>Figura 14</b> – Maior circunferência tangente à curva em P .....	44
<b>Figura 15</b> – Toro .....	45
<b>Figura 16</b> – Curvas que passam por P com seus respectivos círculos osculantes .	45
<b>Figura 17</b> – Curvatura de Gauss .....	46
<b>Figura 18</b> – Superfícies com curvatura positiva, negativa e nula.....	47
<b>Figura 19</b> – Uma catenóide na película de sabão .....	50
<b>Figura 20</b> – Superfícies com diferentes curvaturas .....	52
<b>Figura 21</b> – Pontos A, B e P sobre uma pseudoesfera.....	55
<b>Figura 22</b> – Paralelismo na Geometria Hiperbólica. Retas que não interceptam uma reta n dada .....	56
<b>Figura 23</b> – Ponto ideal .....	57
<b>Figura 24</b> – Reta que corta um triângulo ômega .....	59
<b>Figura 25</b> – Ângulo exterior menor do que o ângulo oposto interior .....	60
<b>Figura 26</b> – Ângulo exterior igual ao ângulo oposto interior .....	61
<b>Figura 27</b> – Quadrilátero de Saccheri em geometria hiperbólica.....	62
<b>Figura 28</b> – Em geometria hiperbólica os ângulos do topo de um Quadrilátero de Saccheri são agudos.....	63
<b>Figura 29</b> – Quadrilátero de Saccheri dividido em dois Quadriláteros de Lambert..	64

<b>Figura 30</b> – Soma dos ângulos internos de um triângulo retângulo na geometria hiperbólica.....	65
<b>Figura 31</b> – Soma dos ângulos internos de um triângulo em geometria hiperbólica.....	66
<b>Figura 32</b> – Pseudoesfera .....	66
<b>Figura 33</b> – Tractriz e pseudoesfera.....	67
<b>Figura 34</b> – Triângulos e retas paralelas na pseudoesfera.....	68
<b>Figura 35</b> – Menor segmento que une os pontos A e B em uma pseudoesfera.....	69
<b>Figura 36</b> – Paralelas passando por P em geometria hiperbólica .....	69
<b>Figura 37</b> – Triângulo em uma pseudoesfera com vértices nos pontos A, B e P ....	70
<b>Figura 38</b> – Superfície esférica de centro O e raio R.....	73
<b>Figura 39</b> – Elementos da esfera.....	74
<b>Figura 40</b> – Círculo máximo e círculo menor de uma esfera .....	74
<b>Figura 41</b> – Distância entre os pontos A e B sobre uma esfera.....	75
<b>Figura 42</b> – Retas perpendiculares em geometria esférica .....	75
<b>Figura 43</b> – Ângulo esférico numa superfície esférica.....	76
<b>Figura 44</b> – Triângulo esférico .....	77
<b>Figura 45</b> – Ângulos do topo do Quadrilátero de Saccheri em geometria esférica..	78
<b>Figura 46</b> – Construção geométrica para a determinação dos ângulos do topo do Quadrilátero de Saccheri.....	79
<b>Figura 47</b> – Soma dos ângulos internos de um triângulo retângulo em geometria esférica.....	81
<b>Figura 48</b> – Soma dos ângulos internos de um triângulo em geometria esférica ....	81
<b>Figura 49</b> – Globo terrestre.....	83
<b>Figura 50</b> – Ângulos de latitude e longitude .....	84
<b>Figura 51</b> – Localização de acordo com a latitude e longitude .....	85
<b>Figura 52</b> – Fusos horários no globo terrestre.....	86
<b>Figura 53</b> – Mapa de fusos horários legais.....	88
<b>Figura 54</b> – Trajetória completa do problema 3.....	89
<b>Figura 55</b> – Triângulos em superfícies com diferentes curvaturas .....	93
<b>Figura 56</b> – Soma dos ângulos internos de um triângulo .....	94

## LISTA DE QUADROS

<b>Quadro 1</b> – Classificação de superfícies de acordo com sua curvatura .....	48
<b>Quadro 2</b> – Superfícies não euclidianas .....	49
<b>Quadro 3</b> – Superfícies hiperbólicas.....	54
<b>Quadro 4</b> – Soma dos ângulos internos de triângulos.....	95
<b>Quadro 5</b> – Características das geometrias: euclidiana, hiperbólica e esférica.....	96

## LISTA DE ABREVIATURAS, SIGLAS E SÍMBOLOS

PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.
DCE	Diretrizes Curriculares da Educação Básica.
PNLD	Plano Nacional do Livro Didático.
$\overline{AB}$	Segmento de reta com extremidades nos pontos A e B.
$\overrightarrow{BM}$	Semirreta com extremidade no ponto B que passa pelo ponto M.
$\overleftrightarrow{CD}$	Reta que passa pelos pontos C e D.
$\triangle ABC$	Triângulo com vértices nos pontos A, B e C.
$AB\Omega$	Triângulo com vértices nos pontos A, B e o terceiro em um ponto ideal.
$\hat{A}$	Ângulo formado por retas que concorrem no ponto A.
$B\hat{M}A$	Ângulo formado por uma reta que passa pelo ponto B outra reta que passa pelo ponto A que concorrem no ponto M.
LAL	Lado – ângulo - lado (um dos casos de congruência de triângulos).
ALA	Ângulo – lado – ângulo (um dos casos de congruência de triângulos).
LLL	Lado – lado – lado (um dos casos de congruência de triângulos).
$LAA_0$	Lado – ângulo – ângulo oposto (um dos casos de congruência de triângulos retângulos).
=	Igual.
$\equiv$	Congruente.
>	Maior que.
<	Menor que.

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	<b>12</b>
<b>2</b>	<b>ALGUMAS CONSIDERAÇÕES SOBRE O ENSINO DE GEOMETRIA E A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS</b> .....	<b>16</b>
2.1	CONSIDERAÇÕES SOBRE O ENSINO DE GEOMETRIA .....	16
2.2	RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS .....	18
<b>3</b>	<b>O ENSINO TRADICIONAL DE GEOMETRIA</b> .....	<b>26</b>
3.1	ASPECTOS HISTÓRICOS DA GEOMETRIA EUCLIDIANA.....	26
3.2	A GEOMETRIA NO ENSINO MÉDIO .....	30
3.2	GEOMETRIA EUCLIDIANA .....	31
<b>4</b>	<b>INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA NA ESCOLA</b> .....	<b>36</b>
4.1	PROBLEMATIZAÇÃO INICIAL .....	36
4.2	GEOMETRIA PÓS EUCLIDES .....	37
4.2.1	Aspectos históricos da geometria pós Euclides .....	38
4.2.2	Curvatura .....	41
4.2.2.1	Curvatura de curvas .....	42
4.2.2.2	Curvatura de superfícies .....	46
4.2.2.3	Resolução do problema 1 .....	51
4.2.3	Distância entre dois pontos .....	52
4.3	GEOMETRIA HIPERBÓLICA APLICADA NA RESOLUÇÃO DE UM PROBLEMA .....	53
4.3.1	Geometria Hiperbólica.....	55
4.3.2	Uma possível solução para o problema 2 .....	67
4.4	GEOMETRIA ESFÉRICA APLICADA NA RESOLUÇÃO DE UM PROBLEMA .....	70
4.4.1	Geometria Esférica.....	71
4.4.2	Conceitos referentes à superfície da Terra .....	80
4.4.3	Uma possível solução para o problema 3 .....	85
4.5	ATIVIDADES DE COMPARAÇÃO ENTRE AS GEOMETRIAS .....	89

<b>5</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>96</b>
	<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>98</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Os primeiros registros da utilização da geometria estão intimamente ligados às situações do cotidiano, como aplicações a agricultura e às construções.

Os pioneiros a registrarem o uso de conceitos geométricos foram os egípcios e babilônios. Apesar de existirem trabalhos anteriores, a obra matemática mais reconhecida da antiguidade são os *Elementos* (300 a.C.), escrito por Euclides de Alexandria (século IV a.C.). Composta por treze volumes, a obra não trata apenas da geometria. Grande parte das informações nela contidos já eram conhecidos na época de sua escrita, o que a coloca em posição de destaque é que os conteúdos foram colocados de uma forma axiomática, ou seja, a teoria é construída a partir de axiomas, que são afirmativas aceitas sem demonstração.

No que diz respeito à geometria, Euclides, ao escrever os *Elementos*, considerou um conjunto de dez axiomas, a partir dos quais toda a teoria geométrica foi deduzida. Esse conjunto foi dividido em dois grupos, um contendo cinco noções comuns e o outro contendo cinco postulados.

Durante vários séculos, matemáticos se dedicaram a tentar demonstrar o quinto postulado de Euclides, a partir dos quatro primeiros, por acreditarem que se tratava de um teorema e não um postulado, porém, por anos, o máximo que alguns pesquisadores conseguiram foi encontrar afirmações equivalentes, ou seja, afirmações estas que ao se fazer uso, juntamente com os quatro primeiros postulados, torna possível desenvolver uma teoria que coincidia com a geometria euclidiana<sup>1</sup>.

Após essas tentativas sem sucesso, alguns matemáticos começaram a apresentar evidências de que pudesse existir uma geometria, estruturada logicamente, diferente daquela de Euclides. Apenas no século XIX essas suspeitas se confirmaram, dando origem à geometria hiperbólica e pouco tempo depois a geometria elíptica. Atualmente ambas fazem parte de um grupo de geometrias denominadas não-euclidianas<sup>2</sup>.

---

<sup>1</sup> Geometria euclidiana: Geometria baseada nos postulados definidos por Euclides.

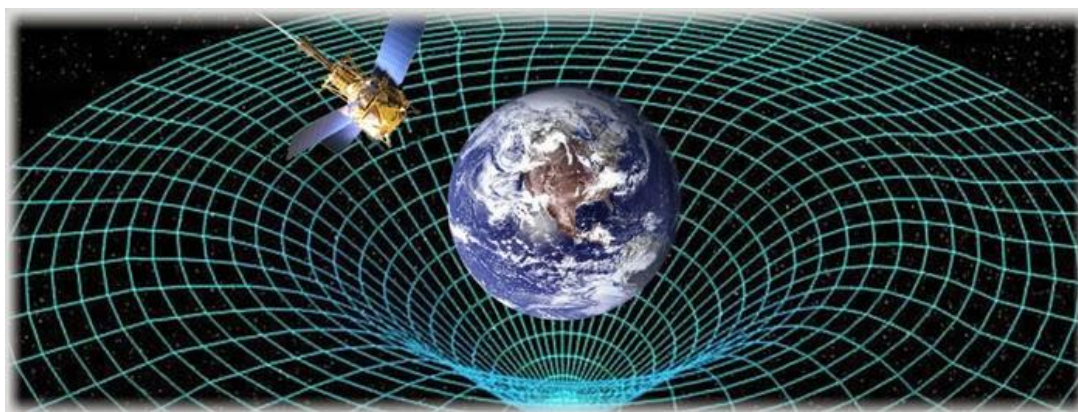
<sup>2</sup> Geometrias não-euclidianas: Geometrias baseadas em uma teoria diferente da descrita por Euclides.

A geometria euclidiana está presente em muitas situações cotidianas, por exemplo, mesmo sabendo que a Terra não é uma superfície<sup>3</sup> plana, podemos desprezar sua curvatura quando se trabalha com pequenas distâncias. Contudo, quando precisamos considerar grandes distâncias sobre a superfície da Terra, não é possível desconsiderar seu formato.

Nesse trabalho pretendemos evidenciar que o conhecimento dos conceitos da geometria esférica se faz indispensável para o planejamento de rotas de navegação marítima e aeronaves. Tendo a Terra um formato semelhante ao de uma esfera, sempre que possível, embarcações e aviões, descrevem trajetórias com o menor comprimento possível, tais rotas são as que seguem os arcos de círculos máximos da Terra. (MARATTA e SOUZA, 2011). Nessas situações não seria possível utilizar-se de conceitos de trajetória e distância em superfícies planas.

Com as teorias da Gravitação e da Relatividade Geral, Einstein indica que nas proximidades de um corpo material, tal como uma estrela, o espaço-tempo é curvo, sendo a matéria/energia responsável por tal curvatura, como pode ser observado na figura 1.

**Figura 1** - Espaço-tempo curvo devido à massa/energia da Terra.



Fonte: <http://www.galeriadometeorito.com/2013/09/novas-evidencias-sugerem-que-o-universo.html>

Acesso em 07/2015

Outra aplicação interessante das superfícies não-planas é a Teoria das Superfícies Mínimas, superfícies que minimizam localmente sua área, tais como

---

<sup>3</sup> O conceito de superfície será admitido como intuitivo, sua definição matemática formal não é objetivo desse trabalho.



os planos, as catenóides, as helicoides e a superfície de Costa<sup>4</sup>. Essas superfícies são aparentemente munidas de um princípio de economia, pois procuram encontrar as formas (perímetros, áreas) que minimizem a energia necessária para manter ou circunscrever uma dada região (área, volume). Algumas destas superfícies podem ser visualizadas através de películas de sabão. Veja a figura 2.

**Figura 02** – Uma helicóide na película de sabão.



Fonte: Autora.

Em estudos relacionados à óptica também observamos aplicações das geometrias não-euclidianas. A propagação da luz em meios não homogêneos, tais como em lentes, é curva. A propagação da luz na atmosfera, não homogênea devido à poluição e poeira ou devido aos gradientes de temperatura, geram deformações de imagens, tais como o aumento da Lua quando ela está próxima do horizonte e o fenômeno da projeção de núvens no asfalto de estradas em dias quentes.

Devido à importância e aplicabilidade das geometrias não-euclidianas acredita-se que o estudo dessas geometria não deva se restringir a alguns cursos no ensino superior. No estado do Paraná, de acordo com as Diretrizes Curriculares da Educação Básica: Matemática (PARANA, 2008), sua abordagem é sugerida já no Ensino Fundamental e posteriormente, também, no Ensino Médio.

---

<sup>4</sup> A superfície de Costa foi assim denominada em homenagem ao matemático brasileiro Celso José da Costa que a descobriu no ano de 1982.

Porém, apesar dessa recomendação, o estudo das geometrias não-euclidianas na Educação Básica não vem sendo efetivado. Acreditamos que a falta de segurança dos professores para abordar o tema e a falta de material didático adequado contribuem para tal realidade. De acordo com Ferreira (2011, p.15) "...poucos cursos de graduação em Matemática formam professores com capacitação para trabalhar esses temas em sala de aula."

As escolas públicas têm os livros didáticos ofertados gratuitamente pelo Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) como principal fonte de pesquisa. Dentre os livros didáticos disponíveis para o ano de 2014, nenhum deles abordava as geometrias não-euclidianas. Esses mesmos livros serão utilizados no triênio 2015 a 2017 para o ensino de Matemática no Ensino Médio.

Neste contexto, com o propósito de contribuir para a melhoria do ensino da geometria, apresentamos neste trabalho uma proposta didática baseada na tendência metodológica Resolução de Problemas, voltada para o ensino de algumas das geometrias não-euclidianas no Ensino Médio, mais especificamente, abordamos as principais características, semelhanças e diferenças entre a geometria euclidiana, geometria hiperbólica e geometria esférica. Para tanto o trabalho foi estruturado da seguinte forma:

- Capítulo 2: Apresentamos considerações sobre o ensino de geometria e as características da tendência metodológica Resolução de Problemas, que será empregada na proposta didática.

- Capítulo 3: Destacamos o desenvolvimento da geometria de Euclides ao longo da história, bem como os principais tópicos dessa geometria estudados na Educação Básica.

- Capítulo 4: Propomos uma sequência didática para a abordagem das geometrias hiperbólica e esférica em sala de aula, descrevendo suas principais características, a fim de evidenciar as semelhanças e diferenças apresentadas em relação à geometria euclidiana.

- Capítulo 5: Finalizamos com considerações a cerca do trabalho realizado, alguns objetivos, no que diz respeito a aprendizagem e possíveis encaminhamentos futuros para a proposta apresentada.

## 2 CONSIDERAÇÕES SOBRE O ENSINO DE GEOMETRIA E A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

A geometria consiste em uma das áreas de estudo da Matemática e sua importância é indiscutível, conseqüentemente seus conteúdos se fazem presente na matriz curricular em todas as etapas da Educação Básica.

No estado do Paraná, as orientações para o ensino de geometria, bem como conteúdos a serem abordados nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio, foram sistematizados em um documento denominado Diretrizes Curriculares da Educação Básica. Nas Diretrizes Curriculares os conteúdos da Matemática a serem estudados estão organizados em cinco conteúdos estruturantes: Números e Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometrias, Funções e Tratamento da Informação. Destacamos que “Entende-se por Conteúdos Estruturantes os conhecimentos de grande amplitude, os conceitos e as práticas que identificam e organizam os campos de estudo de uma disciplina escolar, considerados fundamentais para sua compreensão.” (PARANÁ, 2008, p.49).

No que diz respeito ao conteúdo estruturante Geometrias para o Ensino Médio, ele se subdivide nos seguintes tópicos: geometria plana, geometria espacial, geometria analítica e noções básicas de geometrias não-euclidianas. A seguir apresentamos algumas considerações sobre o ensino de geometria.

### 2.1 CONSIDERAÇÕES SOBRE O ENSINO DE GEOMETRIA

Apesar da recomendação, estudos que apontam que o ensino da geometria não ocorre de maneira satisfatória. Pavenello destaca que o abandono do ensino da geometria ocorreu de forma gradativa, mas se evidenciou a partir da promulgação de Lei 5692/71, que permite a cada professor montar seu programa “de acordo com a necessidade da clientela”. (PAVANELLO, 1993, p. 13). A mesma autora destaca:

A liberdade que essa Lei concedia às escolas quanto à decisão sobre os programas de diferentes disciplinas possibilitou que muitos professores de Matemática, sentindo-se inseguros para trabalhar com a geometria, deixassem de incluí-la em sua programação. Por

outro lado, mesmo dentre aqueles que continuaram a ensiná-la, muitos reservaram o final do ano letivo para abordagem em sala de aula – talvez numa tentativa, ainda que inconsciente, de utilizar a falta de tempo como desculpa pela não realização do trabalho programado com o tópico em questão. (PAVANELLO, 1993, p. 1).

A situação descrita anteriormente ainda retrata a realidade encontrada em grande parte das instituições de ensino público, ou seja, a liberdade de decisão concedida aos professores, quanto à escolha dos conteúdos a serem trabalhados, bem como a ordem de abordagem, possibilitam que alguns conteúdos sejam menos favorecidos.

Com relação às geometrias não-euclidianas o cenário é ainda pior. Apesar de sua abordagem ser sugerida nas DCE: “... grande parte não conhece o suficiente ou desconhecem as geometrias não-euclidianas, se sentindo inseguros em trabalhar com o tema, por isso não desenvolvem atividades que envolvam essas geometrias em sala de aula”. Essa postura por parte dos professores pode dificultar a efetivação do ensino das geometrias não-euclidianas na educação básica. Ripplinger e Bassoi (2010) relatam:

Neste conteúdo básico de forma geral, há dificuldades por parte de nós professores, tanto no que diz respeito às opções metodológicas pertinentes ao tema, essencialmente referente às noções básicas de Geometria não-euclidiana, bem como, na pertinência desse conteúdo para o ensino fundamental e médio. (RIPPLINGER e BASSOI, 2010, p.2).

Apesar da desconfiança por parte dos professores, quanto a pertinência do estudo das geometrias não-euclidianas na educação básica, “muitos problemas do cotidiano e do mundo científico só são resolvidos pelas geometrias não-euclidianas” (PARANÁ, 2008, p.56). Defendendo a importância da abordagem das geometrias não-euclidianas, Carvalho e Carvalho relatam:

Embora a Geometria de Euclides, pouco privilegiada pelos professores em suas aulas, pelo rigor de suas demonstrações e por ser facilmente aceita pelos nossos sentidos, se caracterize como modelo para a maioria das Ciências, muitos problemas do cotidiano só são resolvidos pelas Geometrias não Euclidianas. (CARVALHO e CARVALHO, 2011, p.1).

Neste trabalho nos dedicamos a apresentar uma proposta didática para a abordagem das geometrias hiperbólica e esférica no ensino médio, destacando suas semelhanças e diferenças comparadas com a geometria euclidiana. As Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná (2008, p.63), sugerem

que no ensino de Matemática “os conteúdos devem ser abordados por meio de tendências metodológicas da Educação Matemática que fundamentam a prática docente...”. Para o desenvolvimento da proposta didática utilizamos a metodologia de Resolução de Problemas.

## 2.2 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Resolver problemas é algo inerente à espécie humana. A busca por solução de problemas proporcionou o desenvolvimento de muitas ciências, entre elas destacamos a Matemática. Desta forma acreditamos que essa habilidade natural de solucionar problemas deve ser aproveitada no ensino. Buscando aproveitar essa característica natural de solucionar problemas, apresentando aos alunos situações que possam contribuir para que se tornem mais críticos e criativos, capazes de enfrentar situações em diferentes contextos e que possam aprender novos conhecimentos e habilidades de maneira autônoma, utilizamos a metodologia de ensino de Resolução de Problemas como aliada para que esses objetivos possam ser alcançados.

A Resolução de Problemas é uma metodologia que possibilita a aplicação de conhecimentos matemáticos em diferentes situações, que podem ser unicamente matemáticas ou não. Essa metodologia tem um problema em seu ponto de partida e o aprendizado do conteúdo matemático ocorrerá durante a sua solução. Nessa perspectiva, Allevalo e Onuchic (2009, p.9) descrevem:

Reitere-se que, nesta metodologia, os problemas são propostos aos alunos antes de lhes ter sido apresentado formalmente o conteúdo matemático necessário ou mais apropriado à sua resolução que, de acordo com o programa da disciplina para a série atendida, é pretendido pelo professor. Dessa forma, o ensino-aprendizagem de um tópico matemático começa com um problema que expressa aspectos-chave desse tópico e técnicas matemáticas devem ser desenvolvidas na busca de respostas razoáveis ao problema dado. A avaliação do crescimento dos alunos é feita, continuamente, durante a resolução do problema.

A busca por respostas pode trazer vários benefícios aos estudantes. Groenwald, Silva e Mora (2004, p.40) destacam:

O valor didático e pedagógico da resolução de problemas reside no fato de que essa tendência possibilita aos estudantes dedicarem-se de maneira independente e autônoma na busca de ideias e estratégias novas para alcançar uma solução adequada ao problema originalmente planejado.

Para Tenreiro e Vieira (2001), apud Groenwald, Silva e Mora (2004, p.41), “a resolução de problemas surge como um contexto para os alunos usarem as suas capacidades de pensamento, prioritariamente de pensamento crítico (formulação de hipóteses, análise, generalização, avaliação, entre outras habilidades)”.

Na obra *Didática da Resolução de Problemas*, Dante (1991) elenca os objetivos da Resolução de Problemas, reproduzidos a seguir:

- Fazer o aluno pensar produtivamente. Apresentar situações-problema que o envolvam, desafiem e motivem os alunos a querer resolvê-las.
- Desenvolver o raciocínio do aluno. Desenvolver no aluno a habilidade de raciocinar logicamente, utilizando de maneira inteligente e eficaz os recursos disponíveis para solucionar problemas em diversos contextos.
- Ensinar o aluno a enfrentar situações novas. Devido ao rápido avanço da tecnologia, fica difícil prever quais conceitos, habilidades e algoritmos matemáticos devem ser ensinados hoje para que os alunos possam utilizá-los no futuro. Desta forma se torna necessário, além dos conteúdos matemáticos, preparar os alunos para lidar com situações novas, desenvolvendo sua iniciativa, criatividade e independência através da resolução de problemas.
- Dar ao aluno a oportunidade de se envolver com as aplicações da Matemática. Possibilitar ao aluno a utilização de conceitos matemáticos no seu dia-a-dia favorecendo o desenvolvimento de atitudes positivas em relação à Matemática, pois não é suficiente resolver mecanicamente operações, é necessário saber como usá-las corretamente para resolver as situações-problema propostas.
- Tornar as aulas de Matemática mais interessantes e desafiadoras. Os alunos orientados e motivados pelo professor, individualmente ou em grupo, trabalham ativamente na busca soluções para problemas desafiadores, esquecendo o clássico esquema de explicar e repetir, pois o ato de resolver um problema sozinho lhe trará satisfação e, quanto maior o grau de dificuldade, maior será o prazer desse aluno em resolvê-lo.

- Equipar o aluno com estratégias para resolver problemas. Desenvolver estratégias que possam ser aplicadas em um grande número de situações, auxiliando na análise e solução de situações em que se procuram elementos desconhecidos.

- Dar uma boa base matemática às pessoas. É indiscutível a necessidade de formar cidadãos matematicamente alfabetizados, que saibam resolver problemas que envolvam conceitos matemáticos em diferentes contextos na vida diária, de maneira inteligente. Por esse motivo devemos desenvolver no aluno a capacidade de enfrentar situações-problema.

Uma proposta de ensino utilizando-se da Resolução de Problemas é amplamente defendida como uma forma eficiente de se ensinar Matemática. O modelo conhecido atualmente é fruto da dedicação de muitos estudiosos entre eles destacamos George Polya, considerado o precursor das pesquisas na área da resolução de problemas. Segundo Onuchic e Allevato (2011, p.77-78):

A pesquisa sobre Resolução de Problemas e as iniciativas de considerá-la como uma forma de ensinar Matemática receberam atenção a partir de Polya, considerado o pai da Resolução de Problemas. Em seu trabalho, Polya preocupou-se em descobrir como resolver problemas e como ensinar estratégias que levassem a enxergar caminhos para resolver problemas.

As ideias de Polya foram difundidas e aprofundadas ao longo do tempo em vários países. Nessa trajetória muitas dúvidas e divergências surgiram a respeito de como se ensinar a resolver problemas. Somente

...a partir dos Standards 2000<sup>5</sup> que os educadores matemáticos passaram a pensar numa metodologia de ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. Nessa concepção, o problema é visto como ponto de partida para a construção de novos conceitos e novos conteúdos; os alunos sendo co-construtores de seu próprio conhecimento e, os professores, os responsáveis por conduzir esse processo. (ONUCHIC e ALLEVATO, 2011, p.79-80).

Destacamos que um problema matemático é qualquer situação para a qual não se tenham regras pré-estabelecidas e que podem ser memorizadas para sua solução de forma mecânica. Para Dante (1991, p.10), um problema: “É qualquer situação que exija a maneira matemática de pensar e conhecimentos matemáticos para solucioná-lo”.

---

<sup>5</sup> Standards 2000: Projeto desenvolvido em meados da década de 90 para a elaboração de um novo documento orientador curricular para o ensino de Matemática.

Desta forma uma abordagem de acordo com Resolução de Problemas pode abranger situações de diferentes naturezas. Os problemas mais indicados são os que envolvem situações relacionadas ao cotidiano do aluno, pois:

A oportunidade de usar os conceitos matemáticos no seu dia-a-dia favorece o desenvolvimento de uma atitude positiva do aluno em relação à Matemática. Não basta saber fazer as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão. É preciso saber como e quando usá-las convenientemente na resolução de situações-problema. (DANTE, 1991, p.13).

Um aspecto relevante em uma proposta de ensino de matemática utilizando a Resolução de Problemas é a escolha do problema, segundo Polya (1995, p.4) “O problema deve ser bem escolhido, nem muito difícil nem muito fácil, natural e interessante...”, pois problemas muito simples podem não demandar esforço por parte do aluno ao solucioná-lo, desta forma o objetivo de desenvolver um conhecimento matemático não ocorrerá. Da mesma forma problemas com grau de dificuldade muito elevado, podem causar frustrações nos estudantes, podendo reforçar para os alunos o mito de que a Matemática é uma ciência de difícil compreensão e útil para poucos.

A importância da escolha do problema também é destacada por Dante (1991), que afirma que devemos tomar muito cuidado com a escolha do problema. Ele deve ser desafiador, de modo a deixar o aluno motivado e curioso para solucioná-lo, envolvendo situações reais, e ainda deve apresentar um nível de dificuldade adequado ao aluno, problemas com grau de dificuldade elevado podem causar frustrações e traumas no que diz respeito à resolução de problemas, à Matemática e até mesmo em relação a todas as atividades escolares.

Com relação à escolha do problema, Dante afirma que além do nível de dificuldade adequado, um bom problema deve apresentar as seguintes características:

- ser desafiador para o aluno;
- ser real para o aluno;
- ser interessante para o aluno;
- ser um problema realmente desconhecido e



- não consistir na aplicação evidente e direta de uma ou mais operações aritméticas. (DANTE, 1991)

A Resolução de Problemas, na perspectiva de Polya (1995, p.3), se divide em quatro fases.

Primeiro, temos que compreender o problema, temos de perceber claramente o que é necessário. Segundo, temos de ver como os diversos itens estão inter-relacionados, como a incógnita está ligada aos dados, para termos ideia da resolução, para estabelecermos um plano. Terceiro, executamos o nosso plano. Quarto, fazemos um retrospecto da resolução completa, revendo-a e discutindo-a.

Em sua obra *A Arte de Resolver Problemas*, Polya (1995) descreve detalhadamente as fases da resolução de um problema. Na primeira fase, denominada compreensão do problema, devemos identificar os dados, as incógnitas, a condicionante, verificar se é possível satisfazer a condicionante, se as informações são suficientes para solucionar o problema e se necessário traçar figuras e separar a condicionante. Na segunda fase, chamada estabelecimento de um plano, é sugerido verificar se já nos deparamos com alguma situação semelhante, caso afirmativo procurar uma forma de utilizar o problema já solucionado na resolução do problema proposto. Se não for possível resolver o problema proposto de maneira imediata, Polya recomenda a resolução de um problema correlato, imaginar um problema mais acessível ou um problema semelhante, caso essa estratégia não funcione é recomendado analisar as informações do problema separadamente, procurando solucionar uma parte ou buscando relações entre as incógnitas. A terceira fase, nomeada como execução do plano, é quando se deve executar o plano de resolução, verificando se os passos executados estão corretos e se é possível demonstrar a veracidade dos passos. Já na quarta e última fase, chamada retrospecto, devemos analisar se é possível verificar o resultado, se seria possível chegar ao resultado por um caminho diferente do que foi adotado e ainda se é possível a utilização do resultado ou do método de resolução em algum outro problema.

As quatro fases da resolução de um problema devem ser cuidadosamente seguidas, saltar etapas e chegar impulsivamente à solução consiste em um grande risco para o sucesso do processo. Pode ocorrer que o estudante se dedique aos cálculos matemáticos sem que ele compreenda o problema proposto. (POLYA, 1995)

Destacamos que em uma proposta para o ensino de Matemática, utilizando-se da Resolução de Problemas, o professor tem um papel fundamental. De acordo com Dante (1991, p.30), “ensinar a resolver um problema é uma tarefa mais difícil do que ensinar conceitos, habilidades e algoritmos matemáticos”. Nessa perspectiva o professor deve estar preparado para assumir uma postura diferente da habitual, pois

... o professor deve funcionar como incentivador e moderador das ideias geradas pelos próprios alunos. Nesse caso, as crianças participam ativamente “fazendo Matemática”, e não ficam passivamente “observando” a Matemática “ser feita” pelo professor. ... Enfim, aqui o papel do professor é manter o aluno pensando e gerando ideias produtivas. (DANTE, 1991, p. 52)

Essa diferença de estratégia pode ser um grande desafio para os professores, que devem abandonar a zona de conforto de aulas expositivas e resolução de exercícios, geralmente de fixação, como único método de resolução e resultados conhecidos, para adotar uma postura de colaborador, ajudando para que o conhecimento seja construído pelos alunos, podendo desta forma se deparar com situações inesperadas. Segundo Groenwald,

Os problemas constituem a essência e o dinamismo da Matemática. Em cada concepção didática os problemas ocupam um papel fundamental, porém os professores de Matemática estão familiarizados com uma imensa variedade de problemas intramatemáticos e poucos problemas extramatemáticos e menos ainda com um planejamento didático baseado na resolução de problemas. (GROENWALD, SILVA e MORA, 2004, p.40).

Pensando na resolução de problemas como metodologia de ensino de Matemática, Onuchic e Allevato (2011) relatam que através de pesquisas e cursos de formação para professores, constataram que os professores apresentam, por diferentes fatores, dificuldades em trabalhar conteúdos matemáticos com seus alunos e tentando contribuir para o desenvolvimento da metodologia descrevem um roteiro detalhado contendo nove etapas:

- preparação do problema;
- leitura individual;
- leitura em conjunto;
- resolução do problema;
- observar e incentivar;

- registro das resoluções na lousa;
- plenária;
- busca do consenso; e
- formalização do conteúdo.

Polya (1995, p. 124) destaca ainda que “no ensino da Matemática, podem fazer-se necessário problemas rotineiros, até mesmo muitos deles, mas deixar que os alunos nada mais façam é indesculpável.” Não estamos aqui defendendo o abandono da resolução de exercícios que possuem métodos memorizados de resolução, tendo em vista que estes são necessários em várias situações no processo de ensino-aprendizagem de Matemática, mas também acreditamos que sempre que possível devemos proporcionar oportunidades para que os alunos realizem atividades que os permitam agir de maneira mais criativa e autônoma.

Uma proposta de abordagem de conteúdos matemáticos através da Resolução de Problemas também favorece para que ocorram mudanças nos modelos tradicionais de avaliação, onde se acredita que os fatos ocorrem separadamente, primeiramente o ensino, depois a aprendizagem e finalmente a avaliação. Defendendo o avanço nesse sentido, Onuchic E Allevalo (2011, p.6) descrevem a metodologia da Resolução de Problemas como um processo como ensino-aprendizagem-avaliação:

A opção de utilizar a palavra composta ensino-aprendizagem-avaliação tem o objetivo de expressar uma concepção em que ensino e aprendizagem devem ocorrer simultaneamente durante a construção do conhecimento, tendo o professor como guia e os alunos como co-construtores desse conhecimento. Além disso, essa metodologia integra uma concepção mais atual sobre avaliação. Ela é construída durante a resolução do problema, integrando-se ao ensino com vistas a acompanhar o crescimento dos alunos, aumentando a aprendizagem e reorientando as práticas de sala de aula, quando necessário.

Finalmente citamos Polya (1995, p. 114) que afirma:

Ensinar a resolver problemas é educar a vontade. Na resolução de problemas que, para ele, não são muito fáceis, o estudante aprende a perseverar a despeito de insucessos, a apreciar pequenos progressos, a esperar pela ideia essencial e a concentrar todo o seu potencial quando esta aparecer. Se o estudante não tiver, na escola, a oportunidade de se familiarizar com as diversas emoções que

surtem na luta pela solução, a sua educação terá falhado no ponto mais vital...

Nesse sentido compreendemos que a metodologia de Resolução de Problemas pode ser uma aliada no estudo das geometrias não-euclidianas, o interesse em solucionar problemas motiva o aluno a buscar novas informações, explorar caminhos nunca antes percorridos por ele de forma independente, elaborando planos e buscando estratégias para que seu objetivo possa ser alcançado. Essa busca pode contribuir para o desenvolvimento de diferentes habilidades como a interpretação de texto, coleta e análise de dados sejam eles explícitos ou não, pensamento crítico para verificar se é possível a solução do problema proposto, bem como se a solução encontrada é coerente e por fim a criatividade. Durante o processo de solução do problema ocorre a consolidação da aprendizagem. A compreensão dessa metodologia auxilia no desenvolvimento completo do estudante, habilitando e encorajando este a solucionar problemas de diferentes naturezas.

### 3 O ENSINO TRADICIONAL DE GEOMETRIA.

O termo "geometria" deriva do grego *geometrein*, que significa medição da terra (*geo* = terra, *metrein* = medição), que tem em seu significado uma pista sobre a origem desse importante ramo da Matemática. A geometria se desenvolveu ao longo dos tempos devido à necessidade do homem de solucionar problemas cotidianos, como aqueles relacionados às medidas e divisões de terras, às áreas destinadas ao plantio, às marcações de terras devido às frequentes inundações, entre outros. Posteriormente, a geometria evoluiu para resolver problemas complexos, que demandaram conhecimentos mais sistematizados.

#### 3.1 ASPECTOS HISTÓRICOS DA GEOMETRIA EUCLIDIANA

Não se sabe ao certo quando se iniciou a utilização de conceitos geométricos. De acordo com Berlinghoff e Gouvêa (2010, p.9):

A matemática egípcia de 4 mil anos atrás era um corpo de conhecimentos já bem desenvolvido, de conteúdos semelhantes a algo que aprendemos sobre cálculo e geometria no ensino fundamental e médio hoje. Era registrada e ensinada por meio de problemas cuja intenção era serem exemplos a se imitar.

Há indícios de que procedimentos que envolviam conhecimentos geométricos já eram conhecidos na Babilônia, no período compreendido entre 2000 a.C a 1600 a.C. Segundo Eves (2004) “ A geometria babilônica se relaciona intimamente com a mensuração prática”. Nessa época os babilônios já utilizavam regras gerais para cálculo de área de retângulos, triângulos, trapézios assim como eram capazes de calcular volumes de alguns sólidos.

Inúmeros são os relatos encontrados na literatura a cerca do uso de conceitos geométricos pelos povos da antiguidade, mas:

Deve-se notar, contudo, que nenhum exemplo do que hoje chamamos demonstração pode ser encontrado na matemática oriental antiga. Em vez de um argumento encontra-se meramente a descrição de um processo. Instrui-se: “Faça assim e assim”. Além disso, exceto possivelmente em alguns casos, essas instruções não eram dadas na forma de regras gerais, mais simplesmente aplicadas a seqüências de casos específicos. (EVES, 2004, p.58)

A geometria começou a ser apresentada com as características que conhecemos hoje após o brilhante trabalho de Euclides de Alexandria (século IV a.C.). Pouco se sabe sobre sua história, desconhece-se a data e local de seu nascimento, mas acredita-se que Euclides foi criador e professor da Escola de Matemática de Alexandria e que sua formação matemática se deu provavelmente na Escola Platônica de Atenas.

**Figura 3** - Retrato de Euclides de Alexandria.



Fonte: <http://ecalculo.if.usp.br/historia/euclides.htm>. Acesso em 05/2015.

A notável contribuição de Euclides para o desenvolvimento da Matemática foi o livro os *Elementos* (300 a.C), que segundo Barbosa:

Ao lado da bíblia, é sem dúvida o livro mais reproduzido e estudado de todos os que já foram escritos na história do mundo ocidental. Mais de 1.000 edições dele já foram produzidas desde a invenção da imprensa e, antes disto, cópias manuscritas dominavam todo o ensino da matemática. (BARBOSA, 2012, p.71)

Eves (2004, p. 168) afirma que os *Elementos* de Euclides não tratam apenas de conteúdos de geometria, também contemplam conteúdos de teoria dos números e álgebra elementar. A obra é composta por treze livros que contém 465 proposições. A importância desse trabalho pode ser percebida levando em consideração que os *Elementos* norteiam o ensino de geometria até os dias atuais: “Os textos de geometria plana e espacial da escola secundária americana trazem basicamente o material que se encontra nos livros I, II, IV, VI, XI e XII dos *Elementos*”.

Apesar dos temas presentes na obra de Euclides já serem provavelmente conhecidos na época em que os *Elementos* foram escritos, os

conteúdos abordados foram apresentados de maneira inovadora, ou seja, a forma que conhecemos atualmente como postulacional. Eves (2004, p.168-169) destaca que:

... é provável que os Elementos de Euclides sejam, na sua maior parte, uma compilação altamente bem sucedida e um arranjo sistemático de trabalhos anteriores. Não há dúvidas de que Euclides teve de dar muitas demonstrações e aperfeiçoar outras tantas, mas o grande mérito de seu trabalho reside na seleção feliz de proposições e no seu arranjo numa sequência lógica, presumivelmente a partir de umas poucas suposições iniciais.

As suposições iniciais admitidas como verdadeiras por Euclides foram divididas em dois grupos: as noções comuns e os postulados. “A distinção entre eles não é muito clara. As noções comuns parecem ter sido consideradas como hipóteses aceitáveis a todas as ciências ou admissíveis por qualquer pessoa inteligente, enquanto que os postulados seriam hipóteses peculiares da Geometria.” (BARBOSA, 1995, p. 1-2). “Não se sabe com precisão que afirmações Euclides assumiu como seus postulados e axiomas nem, tampouco, quantos ele empregou, devido às mudanças e acréscimos feitos por editores subsequentes”. (EVES, 2004, p. 179). A seguir apresentamos as noções comuns e postulados segundo Euclides (2009):

#### **Noções comuns**

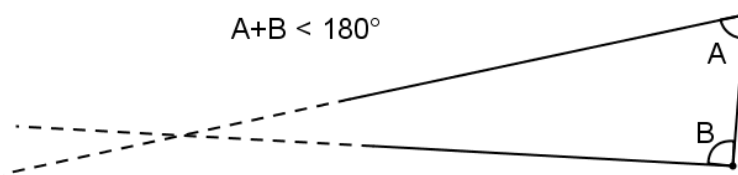
1. As coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si.
2. E, caso sejam adicionadas coisas iguais a coisas iguais, os todos são iguais.
3. E, caso de iguais sejam subtraídas iguais, as restantes são iguais.
4. E, caso iguais sejam adicionadas a desiguais, os todos são desiguais.
5. E os dobros da mesma coisa são iguais entre si.
6. E as metades da mesma coisa são iguais entre si.
7. E as coisas que se ajustam uma à outra são iguais entre si.
8. E o todo [é] maior do que a parte.
9. E duas retas não contêm uma área.

#### **Postulados**

1. Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.
2. Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta.
3. E, com todo centro e distância, descrever um círculo.
4. E serem iguais entre si todos os ângulos retos.
5. E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos (EUCLIDES, 2009, p. 98-99, 2009).

Euclides, que em sua obra apresentava a geometria de forma postulacional, provocou os matemáticos e motivou estudos por mais de dois mil anos. Em particular, o quinto postulado, representado na figura 4, foi ponto de divergência entre muitos estudiosos. Esse postulado ficou conhecido como Postulado das Paralelas e devido a aparente complexidade muitos se propuseram a demonstrá-lo.

**Figura 4** - Representação geométrica para o quinto postulado de Euclides.



Fonte: Autora.

Para melhor compreender os questionamentos realizados sobre a veracidade do quinto postulado se faz necessário compreender o que se entende por retas paralelas. Euclides as definia como: “paralelas são retas que, estando no mesmo plano, e se prolongadas ilimitadamente em cada um dos lados, em nenhum se encontram” (Euclides, 2009, p. 98). Tal definição sofreu algumas modificações em sua escrita, atualmente em grande quantidade de livros encontramos definições iguais ou semelhantes a: “duas retas são paralelas se, e somente se, são coincidentes (iguais) ou são coplanares e não têm nenhum ponto comum”. (DOLCE e POMPEO, 2005, p.61).

Intuitivamente compreende-se que as duas definições descritas acima são semelhantes. Ambas destacam que retas paralelas, contidas no mesmo plano, não possuem pontos de intersecção, a menos que sejam coincidentes, porém não afirmam quais são as características do plano no qual as retas estão contidas.

A longa busca por uma demonstração para a afirmação feita por Euclides (Postulado das Paralelas) proporcionou muitos avanços para a Matemática, uma das contribuições que podem ser citadas foi a descoberta de várias afirmações equivalentes ao quinto postulado, tais afirmações são denominadas substitutos. Afirmar que uma proposição P é um substituto para o quinto postulado “quer dizer



que a teoria desenvolvida usando os quatro primeiros postulados e mais a proposição P coincide com a Geometria de Euclides.” (BARBOSA, 1995, p.9).

Segundo Berlinghoff e Gouvêa o substituto do postulado das paralelas de Euclides de mais destaque é conhecido como Postulado de Playfair, pois se atribui ao escocês John Playfair a sua popularização no século XVII. O postulado de Playfair diz que “por um ponto fora de uma reta, existe exatamente uma reta paralela à reta dada” (BERLINGHOFF e GOUVÊA, 2010, p. 198). Tal afirmação ficou tão conhecida, que muitos livros atuais a apresentam como Postulado das Paralelas.

A seguir faremos uma breve análise sobre o ensino de geometria no ensino médio, bem como mostraremos definições e teoremas que permeiam a geometria descrita por Euclides.

### 3.2 A GEOMETRIA NO ENSINO MÉDIO

Para o ensino médio, o Conteúdo Estruturante Geometrias se desdobra nos seguintes conteúdos: geometria plana, geometria espacial, geometria analítica e geometrias não-euclidianas. Com a finalidade de que o aluno:

- Amplie e aprofunde os conhecimentos de geometria plana e espacial;
- Determine posições e medidas de elementos geométricos através da geometria analítica;
- Perceba a necessidade das geometrias não-euclidianas para a compreensão de conceitos geométricos, quando analisados em planos diferentes do plano de Euclides;
- Compreenda a necessidade das geometrias não-euclidianas para o avanço das teorias científicas;
- Articule ideias geométricas em planos de curvatura nula, positiva e negativa;
- Conheça os conceitos básicos da geometria elíptica, hiperbólica e fractal. (PARANÁ, 2008)

O que se verifica, na realidade, é que apenas uma pequena parte desses conteúdos é abordada adequadamente. Mais, durante o ensino médio o aluno é levado a conhecer o caráter dedutivo da geometria, mas por muitas vezes, sem o cuidado necessário, propondo como ponto de partida, um conjunto de axiomas insuficiente para as demonstrações posteriores. Outro agravante é a tentativa de introdução da geometria de uma forma dedutiva difere das práticas usuais de outros campos da matemática escolar. Enfim, no ensino de geometria, encerrado o período em que se estudam os axiomas e teoremas, raramente se voltará a ter contato com uma dedução (BRASIL, 2014).

Assim, apesar da recomendação da inserção das diferentes geometrias no currículo, o que prevalece é o estudo da geometria euclidiana. A seguir, algumas das propriedades da geometria euclidiana serão apresentadas.

### 3.3 GEOMETRIA EUCLIDIANA

Denomina-se como geometria euclidiana, a geometria baseada nos postulados de Euclides, incluindo o quinto, que equivale a afirmar que por um ponto fora de uma reta, pode ser traçada apenas uma reta paralela à reta dada.

A seguir apresentamos alguns conceitos básicos da geometria euclidiana.

**Definição 3.1- Distância entre dois pontos:** Dados dois pontos  $A$  e  $B$  no plano, temos que a menor distância entre os pontos  $A$  e  $B$  será a medida do segmento de reta que tem os dois pontos como extremidade.

**Definição 3.2 – Retas concorrentes:** Duas retas são concorrentes se, e somente se, elas têm um único ponto em comum.

**Definição 3.3 – Retas paralelas:** Duas retas são paralelas se, e somente se, são coincidentes ou são coplanares e não têm nenhum ponto em comum.

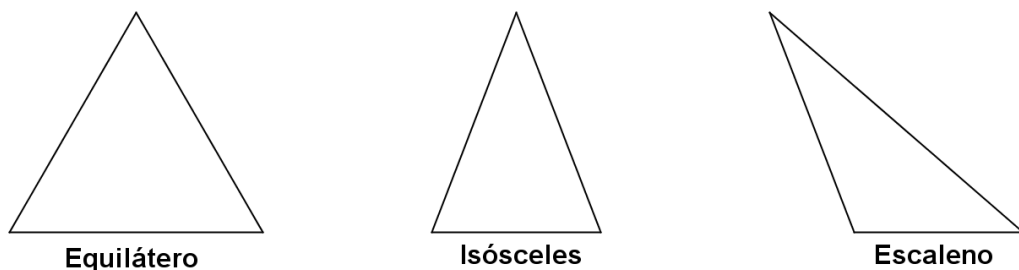
**Definição 3.4 - Triângulo:** Dados três pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  não colineares a reunião dos segmentos  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{BC}$  chama-se triângulos  $ABC$ .

**Definição 3.5 – Região triangular:** A reunião do triângulo com seu interior denomina-se região triangular ou superfície do triângulo.

Quanto aos lados os triângulos (figura 5), eles podem ser classificados como:

- equilátero, quando seus três lados são congruentes,
- isósceles, quando têm dois lados congruentes e
- escaleno, quando não há dois lados quaisquer congruentes.

**Figura 5 - Classificação dos triângulos quanto aos lados.**

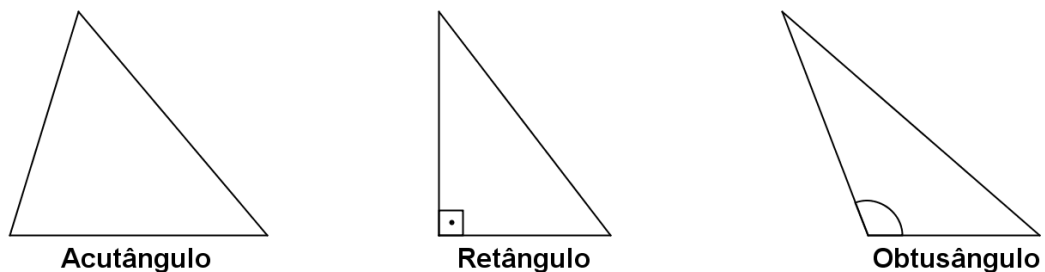


Fonte: Autora.

Os triângulos podem ainda serem classificados de acordo com seus ângulos (figura 6) em:

- retângulo, se possui um ângulo reto,
- acutângulo, se possui os três ângulos agudos e
- obtusângulo, se possui um ângulo obtuso.

**Figura 6 - Classificação dos triângulos quanto aos ângulos.**



Fonte: Autora.

**Definição 3.6 – Triângulos congruentes:** Um triângulo é congruente a outro se, e somente se, é possível estabelecer correspondência entre

seus vértices, de modo que seus lados e seus ângulos são ordenadamente congruentes aos vértices e ângulos do outro.

Os casos de congruência entre triângulos, na geometria euclidiana, serão descritos a seguir:

- 1° caso – LAL – Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes dois lados e ângulo compreendido, então eles são congruentes.
- 2° caso – ALA – Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado e os dois ângulos a ele adjacentes, então esses triângulos são congruentes.
- 3° caso – LLL – Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes os três lados, então esses triângulos são congruentes.
- 4° caso – LAA<sub>0</sub> – Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado, um ângulo adjacente e o ângulo oposto a esse lado, então esses triângulos são congruentes.
- Caso especial de congruência de triângulos retângulos – Se dois triângulos retângulos têm ordenadamente congruentes um cateto e a hipotenusa, então esses triângulos são congruentes.

As respectivas demonstrações dos casos de congruências entre triângulos foram omitidas nesse trabalho, mas podem ser encontradas em Dolce e Pompeo (2005).

**Teorema 3.1:** Todo ângulo externo de um triângulo mede mais do que qualquer dos ângulos internos a ele não adjacentes.

**Demonstração:** Baseada em Dolce e Pompeo (2005).

Considere o triângulo  $ABC$  da figura 7, onde  $M$  é ponto médio de  $\overline{AC}$  e  $P$  um ponto pertencente à semi-reta  $\overline{BM}$  tal que  $\overline{BM} \equiv \overline{MP}$ . Note que  $\Delta BAM \equiv \Delta PCM$ , pois os lados  $BM$  e  $PM$  são congruente,  $\widehat{BMA} \equiv \widehat{PMC}$  devido a serem opostos pelo vértice e os lados  $AM$  e  $CM$  são congruente. Logo

$$\widehat{BAM} \equiv \widehat{PCM} . \quad (1)$$

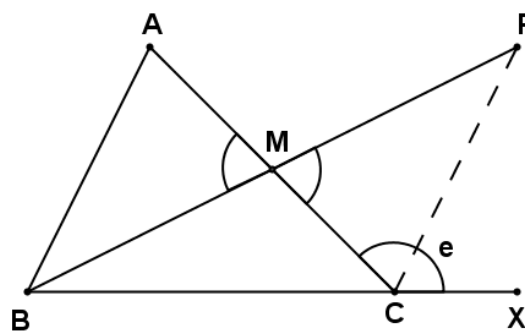
Temos ainda que o ângulo  $\hat{e} = \widehat{ACX}$  é maior que o ângulo  $\widehat{PCM}$ , pois o ponto  $P$  é interno a esse ângulo, logo

$$\hat{e} > P\hat{C}M \quad . \quad (2)$$

De (1) e (2) decorre que  $\hat{e} > \hat{A}$ .

Analogamente, tomando o ponto médio de  $\overline{BC}$  e usando ângulos opostos pelo vértice concluímos que:  $\hat{e} > \hat{B}$ .

**Figura 7** - Ângulo externo de um triângulo ABC.



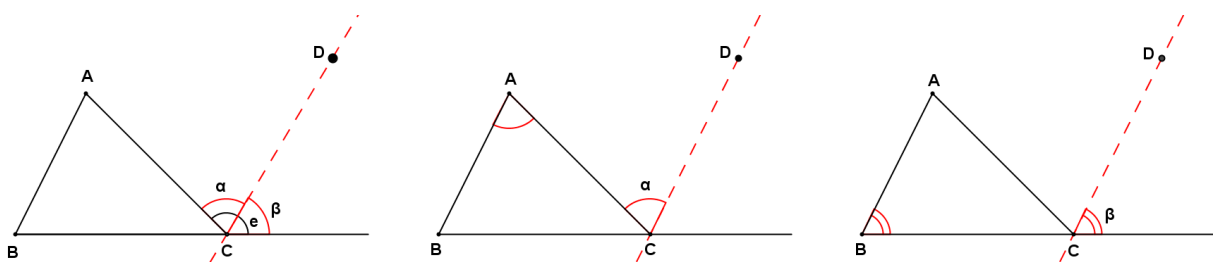
Fonte: Autora.

**Teorema 3.2:** Em todo triângulo, qualquer ângulo externo é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.

**Demonstração:** Baseada em Dolce e Pompeo (2005).

Pelo vértice  $C$  do triângulo  $ABC$  da figura 8, conduzimos a reta  $\overleftrightarrow{CD}$  paralela à reta  $\overleftrightarrow{AB}$ , determinando os ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  na figura 8.

**Figura 8** – Construção do ângulo externo de um triângulo em função dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.



Fonte: Autora.

Como as retas  $\overleftrightarrow{AB}$  e  $\overleftrightarrow{CD}$  são paralelas, podemos afirmar que  $\alpha \equiv \hat{A}$  e  $\beta \equiv \hat{B}$ , pois os ângulos  $\alpha$  e  $\hat{A}$  são alternos e  $\beta$  e  $\hat{B}$  são correspondentes, veja figura 8. Logo, podemos afirmar que  $\alpha + \beta = \hat{A} + \hat{B}$ , ou seja,  $\hat{e} = \hat{A} + \hat{B}$ .

**Teorema 3.3:** A soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é  $180^\circ$ .

**Demonstração:** Sendo  $\hat{e}$  o ângulo externo adjacente ao vértice C, os ângulos  $\hat{e}$  e  $\hat{C}$  são suplementares (figura 9), logo

$$\hat{e} + \hat{C} = 180^\circ . \quad (3)$$

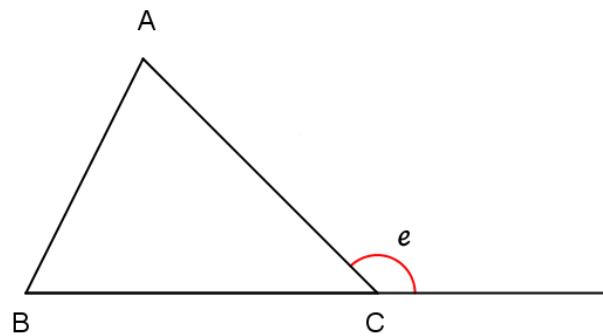
Do teorema 3.2 podemos afirmar que

$$\hat{e} = \hat{A} + \hat{B} . \quad (4)$$

Substituindo (3) em (4) concluímos:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ . \quad (5)$$

**Figura 9** - Soma dos ângulos internos de um triângulo.



Fonte: Autora.

## 4. INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA NA ESCOLA

A proposta descrita a seguir, é indicada para alunos do 3º ano do Ensino Médio e tem por objetivo tornar evidente aos mesmos a existência de outras geometrias além da euclidiana, bem como destacar as características básicas das geometrias hiperbólica e esférica.

Para tal utilizamos a metodologia da Resolução de Problemas. Propomos problemas, que não possuem solução possível quando é utilizada apenas conceitos da geometria euclidiana. Na sequência apresentamos as definições e teoremas necessários para justificar as características peculiares da geometria que será empregada na solução, tais como números de paralelas a uma reta dada e soma dos ângulos internos de triângulos. Durante o desenvolvimento da teoria sugerimos algumas atividades que possibilitam a fixação de conceitos que serão indispensáveis para a solução dos problemas. Para finalizar apresentamos uma solução possível para o problema. Recomendamos que para a resolução dos problemas sejam seguidas as nove etapas destacadas no final do capítulo 2.

Algumas demonstrações de teoremas empregam propriedades matemáticas que podem ser desconhecidas pelos alunos, contudo por serem indispensáveis para a constatação de propriedades que diferem nas geometrias euclidiana, hiperbólica e esférica, não puderam ser omitidas, mas destacamos que tais propriedades podem ser verificadas experimentalmente com as atividades propostas no final desse capítulo.

### 4.1 PROBLEMATIZAÇÃO INICIAL

Sem a pretensão de resolução imediata, inicialmente propomos o questionamento: Dados uma reta  $r$  e um ponto  $P$ , que não pertence a  $r$ , quantas paralelas a  $r$  podem ser traçadas por  $P$ ?

A princípio a pergunta parece simples, levando em conta apenas os conceitos geométricos mais difundidos na Educação Básica. Porém antes de respondermos, algumas outras indagações auxiliares se fazem necessárias:

- O que é uma reta?
- O que são retas paralelas?
- As retas são sempre retilíneas?
- Retas são sempre infinitas?
- Onde a reta  $r$  e o ponto  $P$  estão localizados?
- É possível que a reta  $r$  e o ponto  $P$  estejam em uma superfície que não seja plana?
- Os conceitos geométricos válidos para superfícies planas também são verdadeiros em superfícies não planas?
- Existem geometrias que se aplicam em superfícies que não são planas?

Como afirmado anteriormente, de acordo com o quinto postulado de Euclides, existe apenas uma paralela a  $r$  passando por  $P$ , mas tal afirmação intrigou inúmeros estudiosos por séculos. Por apresentar um enunciado mais elaborado que os quatro axiomas anteriores, acreditava-se que se tratava de um teorema e não um axioma. A tentativa de demonstra-lo levou a descobertas que mudaram os rumos do estudo da geometria.

Para responder aos questionamentos anteriores precisamos conhecer como se desenvolveu a geometria de Euclides.

## 4.2 GEOMETRIA PÓS EUCLIDES

Nesta seção apresentamos o contexto histórico em que geometrias diferentes da euclidiana foram descobertas.

### 4.2.1 Aspectos históricos da geometria pós Euclides

Barbosa (1995) destaca que as tentativas de demonstração do quinto postulado, ou sua substituição através da adoção de outra definição para



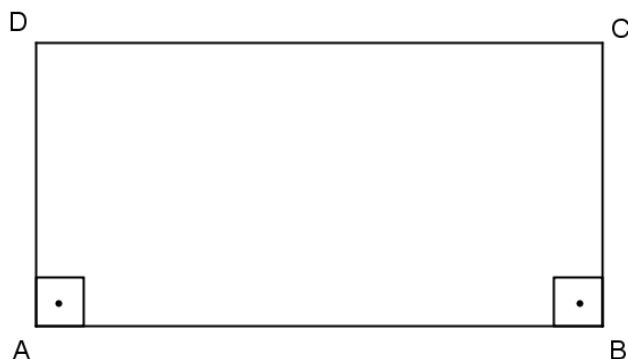
retas paralelas, teve início ainda na época de Euclides e se estendeu ao longo dos séculos, sendo destacadas as tentativas de Ptolomeu de Alexandria (90-168), Proclus de Constantinopla (412-485), Nasir Eddin al-Tusi (1201-1274) e Jonh Wallis (1616-1703).

Por outro lado, o trabalho desenvolvido por Girolamo Saccheri (1667-1733) tentava negar o quinto postulado, substituindo-o por outro que lhe fosse contraditório. Nessa perspectiva ele chegou a conclusões que acreditava que não fossem contraditórias, o que indicaria a existência de uma geometria diferente da euclidiana. Partes desses resultados estão em seu livro publicado em Milão em 1733 e redescoberto em 1889 por Eugenio Beltrami (1835-1900). Em sua obra Saccheri utilizava o método da prova pela redução a um absurdo<sup>6</sup>, o que o levou rumo à descoberta das geometrias diferentes da descrita por Euclides. Segundo Barbosa (1995, p.2) “Sua contribuição é considerada mais importante do que todas as anteriores, por ter sido a primeira a contemplar a possibilidade de hipóteses outras que as de Euclides e trabalhar com um grande número de suas consequências”.

Uma grande contribuição de Saccheri para o desenvolvimento da geometria foi a definição de um quadrilátero com características especiais. Tal quadrilátero recebeu o nome de Quadrilátero de Saccheri, figura 10.

**Definição 4.1 – Quadrilátero de Saccheri.** Quadrilátero que tem dois ângulos retos e dois lados congruentes.

**Figura 10** - Um quadrilátero de Saccheri.



Fonte: Autora.

---

<sup>6</sup> Redução ao absurdo: técnica de demonstração matemática que consiste em assumir como verdadeira a afirmação contrária à que se deseja provar e chegar a uma contradição.

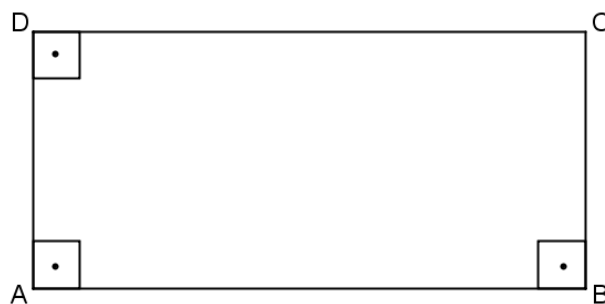
No Quadrilátero de Saccheri, figura 10, os elementos recebem as seguintes denominações:  $AB$  é o lado base,  $AD$  e  $BC$  são lados congruentes e  $DC$  é o lado topo do quadrilátero.

Saccheri provou, com argumentos simples, que os ângulos  $\hat{C}$  e  $\hat{D}$  são iguais, logo que existem três possibilidades: os referidos ângulos são agudos, retos ou obtusos. Tais possibilidades foram nomeadas por Saccheri como hipótese do ângulo agudo, hipótese do ângulo reto e hipótese do ângulo obtuso. Ele jamais conseguiu provar a hipótese dos ângulos mencionados não serem retos, mas segundo Carmo (1987), um ponto importante de seu trabalho é que na tentativa de negar o Quinto postulado, resultados importantes foram descobertos, por exemplo: na hipótese do ângulo agudo, duas retas paralelas não são equidistantes.

De forma semelhante à Saccheri, o suíço-alemão Johann Heinrich Lambert (1728-1777), tentou provar o quinto postulado utilizando um argumento indireto e um quadrilátero com características específicas. Tal quadrilátero é conhecido como Quadrilátero de Lambert, figura 11. (COUTINHO, 2001)

**Definição 4.2 – Quadrilátero de Lambert.** Quadrilátero com três ângulos retos.

**Figura 11** - Um quadrilátero de Lambert.



Fonte: Autora.

Em seus estudos Lambert “obteve proposições estranhas, porém nenhuma contradição. Entre as proposições assim obtidas, deve ser destacada aquela que afirma que a diferença para dois ângulos retos da soma dos ângulos internos de um triângulo não é zero, como na geometria usual, porém proporcional à área do triângulo”. (CARMO, 1987, p. 30).

Outro matemático a dar grande contribuição para o desenvolvimento da geometria foi Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Ele também se dedicou à tentativa de demonstrar o quinto postulado pelo método da redução ao absurdo e em uma carta escrita a Taurinos em 1824, descrevia haver provado que em superfícies com curvatura negativa constante, se considerarmos como retas as curvas que realizam a menor distância entre dois pontos, a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor que  $180^\circ$  e essa diferença é proporcional à sua área. Tal conclusão coincidia com as de Lambert, mencionadas anteriormente e indicava a possibilidade de uma geometria onde o postulado das paralelas não fosse válido. Gauss, nunca publicou suas conclusões, por temer a repercussão que causariam. (CARMO, 1987).

O húngaro Wolfgang Bolyai (1775-1856) foi mais um dos que se propuseram a tentar provar o quinto postulado, mas não obteve êxito nessa proposta. Ficou conhecido por ser pai de Johann Bolyai (1802-1860) que herdou o interesse pelo quinto postulado. Johann Bolyai afirmava que ao negar o quinto postulado, duas hipóteses devem ser analisadas: poderia não existir reta paralela a uma reta dada, passando por um ponto não pertencente a ela, fato que não pode ocorrer, pois os quatro postulados anteriores garantem a existência de tal reta, ou poderia haver mais de uma reta paralela a uma reta dada passando por um ponto não pertencente a ela. Barbosa (1995) afirma que “..iniciando desse ponto, Bolyai observou a existência de uma infinidade delas. Os resultados que se seguiram desta observação..., constituíam o cerne da nova Geometria” (BARBOSA, 1995, p. 41).

Johann Bolyai fez ainda observações importantes a cerca da independência dos quatro primeiros postulados que “...valem em qualquer Geometria, não importando qual hipótese fosse assumida a respeito das paralelas. Isso ele considerou como base de uma Geometria absoluta para o espaço” (BARBOSA, 1995, p.42). O jovem Johann Bolyai publicou suas conclusões em 1832, mas ficou desapontado quando por carta ficou sabendo que Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855) afirmava que já havia feito as mesmas descobertas.

Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1793-1856) sugeriu no ano de 1826, durante uma conferência na Universidade de Kasan, a existência de “uma nova Geometria na qual mais de uma reta paralela a uma reta dada podiam ser traçadas por um ponto e onde a soma dos ângulos de um triângulo seria menor que dois

retos” (BARBOSA, 1995, p. 44). Seus estudos foram publicados, mas não atraíram muita atenção na época e Lobachevsky faleceu sem ver sua grande contribuição para o desenvolvimento da Matemática ser reconhecida. Porém o esforço de Lobachevsky não foi em vão, atualmente se atribui a ele, juntamente com Bolyai, a descoberta de uma Geometria diferente da euclidiana, que ficou conhecida como Geometria Hiperbólica.

Após o reconhecimento de que existia uma geometria diferente da euclidiana, acreditava-se na possibilidade da existência de outras geometrias. “O matemático alemão Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) respondendo a esta pergunta criou a Geometria Elíptica” (COUTINHO, 2001, p. 73).

Nesse trabalho estudaremos a geometria hiperbólica de Lobachevsky e Bolyai e a Geometria Esférica, que é um caso particular da Geometria de Riemann, aplicada a superfícies esféricas. Basicamente ambas diferem da Geometria Euclidiana pela substituição do quinto postulado. Ressaltamos que existem outras geometrias consistentes, além das que estão descritas nesse trabalho, como a geometrias dos fractais, por exemplo.

Para o estudo e comparação entre diferentes geometrias faz-se necessário à compreensão do conceito de curvatura, para que possamos distinguir em que tipo de superfície cada uma das geometrias se aplica. O estudo desse conceito será apresentado na próxima seção.

#### 4.2.2 Curvatura

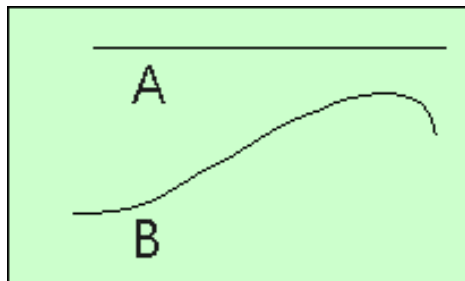
Uma definição possível para a curvatura de uma superfície é a medida escalar da taxa de variação da direção do vetor normal unitário em torno da superfície. Para compreender o conceito formal de curvatura é necessário um conhecimento vetorial superior ao adquirido até o nível de ensino ao qual propomos esse trabalho.

Para classificarmos superfícies de acordo com sua curvatura, descrevermos, a seguir, o procedimento realizado para o cálculo de curvatura de curvas e superfícies, bem como formas práticas para classificá-las como nulas, positivas e negativas.

#### 4.2.2.1 Curvatura de curvas

Com a finalidade de facilitar a compreensão do conceito de curvatura, Dario (2014), apresenta primeiramente o conceito de curvatura para curvas. Curvas representam o caminho percorrido por um ponto que se move no espaço. Observando as curvas A e B da figura 12, podemos afirmar que a curva B é “torta”, enquanto a curva A é retilínea.

**Figura 12** - Diferentes curvas com diferentes curvaturas.



Fonte: <http://www.seara.ufc.br/donafifi/gausseeuler/gausseeuler1.htm>. Acesso em 05/2015.

Segundo Minhós (2011) apud Dário (2014):

...ao procurar, intuitivamente, uma medida da curvatura de uma curva, devemos observar algumas intuições:

1 – A curvatura de uma linha reta deve ser zero, e

2 – A curvatura de uma circunferência deve ser constante, e inversamente proporcional ao seu raio. (DÁRIO, 2014, p. 27).

Intuitivamente, todas diferentes circunferências têm curvatura constante, ou seja, é a mesma para todos os pontos pertencentes à circunferência. Além disso, a circunferência que possui menor raio é mais “encurvada” que a circunferência que possui raio maior.

**Definição 4.3 - Curvatura de uma circunferência.** A curvatura  $C$  de uma circunferência é inversamente proporcional ao seu raio  $R$ , logo é dada por

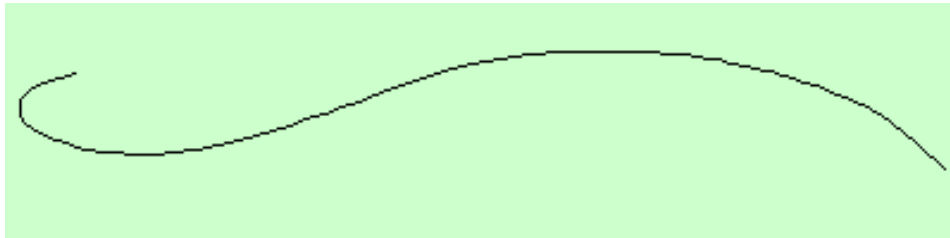
$$C = \frac{1}{R}.$$

Por exemplo, se uma circunferência possui raio 4 cm, temos que sua curvatura é  $C = \frac{1}{4} \text{ cm}^{-1} = 0,25 \text{ cm}^{-1}$ .

Desta forma, podemos afirmar que quanto maior o raio de uma circunferência, menor é sua curvatura. Uma consequência dessa afirmação é que quando o raio de uma circunferência tende ao infinito, sua curvatura tende a zero, ou seja, seu traçado se aproxima ao de uma reta.

De posse de ferramentas para calcular a curvatura de uma curva com curvatura constante, passaremos ao estudo de curvas com curvaturas variáveis, como a da figura 13.

**Figura 13** - Curva com curvatura variável.



Fonte: <http://www.seara.ufc.br/donafifi/gausseeuler/gausseuler1.htm>. Acesso em 05/2015.

A curvatura de curvas desse tipo varia, de modo que o estudo da curvatura será feito para pontos pertencentes à curva. Desta forma, para encontrarmos a curvatura da curva em um ponto  $P$ , pertencente à curva, adotamos o seguinte procedimento:

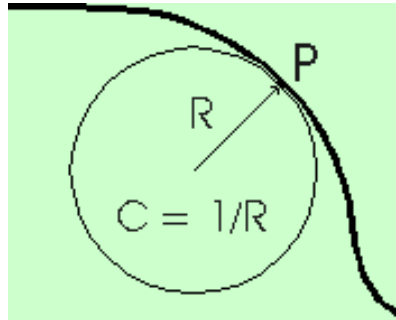
...desenhamos uma circunferência no lado côncavo da curva de tal modo que o único ponto em comum entre a curva e a circunferência seja o próprio ponto  $P$ . Provavelmente existem várias circunferências com essa característica, mas tomamos aquela que tem o maior raio possível. (SEARA DA CIÊNCIA, disponível em: <http://www.seara.ufc.br/donafifi/gausseeuler/gausseuler1.htm>, acesso em 05/2015).

**Definição 4.4 - Círculo Osculante.** Maior circunferência situada no lado côncavo<sup>7</sup> de uma curva, tangente a ela em um ponto.

<sup>7</sup> Côncavo: adjetivo de uma curva ou superfície mais profunda no centro que nas extremidades.

**Definição 4.5 - Curvatura de uma curva em um ponto.** A curvatura  $C$  da curva no ponto  $P$  será igual à curvatura do círculo osculante nesse mesmo ponto, ou seja,  $C = \frac{1}{R}$ , onde  $R$  é o raio do círculo osculante (figura 14).

**Figura 14** – Maior circunferência tangente à curva em  $P$ .



Fonte: <http://www.seara.ufc.br/donafifi/gausseeuler/gausseeuler1.htm>. Acesso em 05/2015.

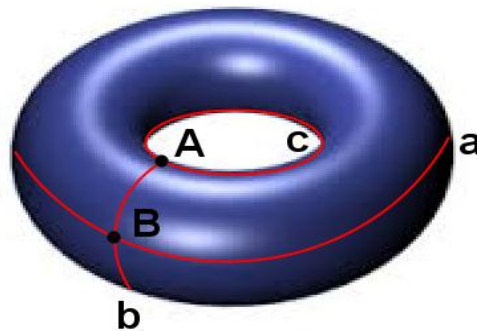
Logo, de acordo com Dário (2014, p.28): “...podemos medir a curvatura de qualquer ponto de qualquer curva, basta encontrar o raio da maior circunferência que tangencia a curva no ponto  $P$ , em seu lado côncavo e encontrar o inverso do raio desta circunferência”. Como indicado na figura 14.

A seguir propomos um problema que envolve o conceito de curvatura.

**Problema 1:** Na figura 15 visualizamos uma superfície denominada toro. Seu formato é encontrado em diferentes objetos no cotidiano, como câmaras de pneus, boias, entre outros. Os círculos  $a$ ,  $b$  e  $c$  destacados possuem raios 4 cm, 1 cm e 2 cm, respectivamente. Com base nessas informações responda:

- a) Qual a curvatura dessa superfície, no ponto  $A$ ?
- b) Qual a curvatura dessa superfície, no ponto  $B$ ?
- c) O toro possui curvatura constante?

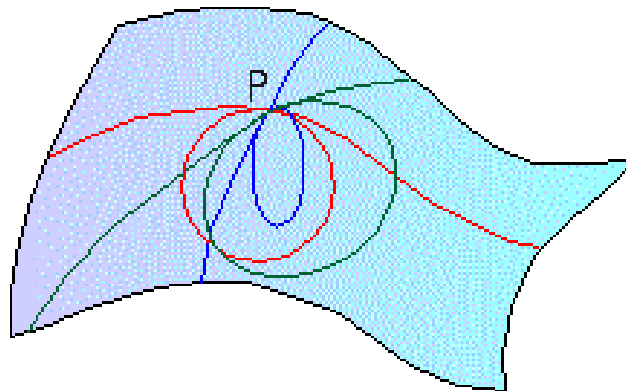
**Figura 15 – Toro.**



Fonte: Adaptada pela autora.<sup>8</sup>

Apesar das informações iniciais a respeito do conceito de curvatura e da forma como se determina a curvatura para curvas percebemos que para superfícies a estratégia de encontrar a curvatura do círculo osculante não funciona, já que por um ponto  $P$  da superfície passam infinitas curvas diferentes, cada uma com seu respectivo círculo osculante, como mostrado na figura 16.

**Figura 16 -** Curvas que passam por  $P$  com seus respectivos círculos osculantes.



Fonte: <http://www.seara.ufc.br/donafifi/gausseeuler/gausseeuler2.htm>. Acesso em 05/2015.

Para solucionar esse problema Carl Friedrich Gauss (1777-1855) definiu um procedimento para medir a curvatura de superfícies, que será apresentado a seguir.

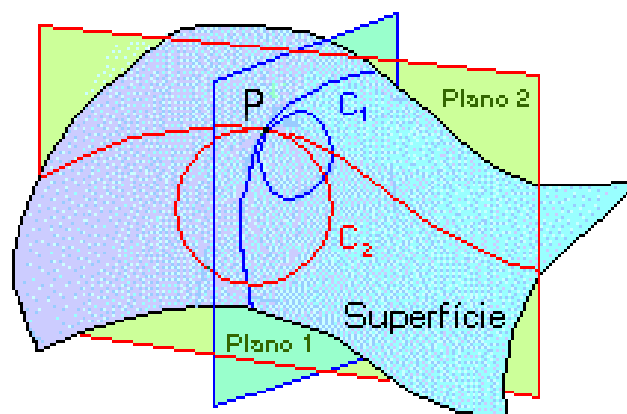
<sup>8</sup> Fonte da imagem original: < [https://it.wikipedia.org/wiki/Curvatura\\_gaussiana](https://it.wikipedia.org/wiki/Curvatura_gaussiana)>. Acesso em 08/2015.



#### 4.2.2.2 Curvatura de superfícies

**Definição 4.6 – Curvatura de Gauss:** Seja  $P$  um ponto qualquer pertencente a uma superfície  $S$ . Traçamos por  $P$  um plano 1 de forma que esse plano contenha o ponto  $P$  e o menor círculo osculante possível ( $C_1$  – figura 17). Da mesma forma traçamos por  $P$  um plano 2 de forma que esse plano contenha o ponto  $P$  e o maior círculo osculante possível ( $C_2$  – figura 17). A curvatura de  $S$  em  $P$  é igual ao produto das curvaturas de  $C_1$  e  $C_2$ .

**Figura 17 - Curvatura de Gauss.**



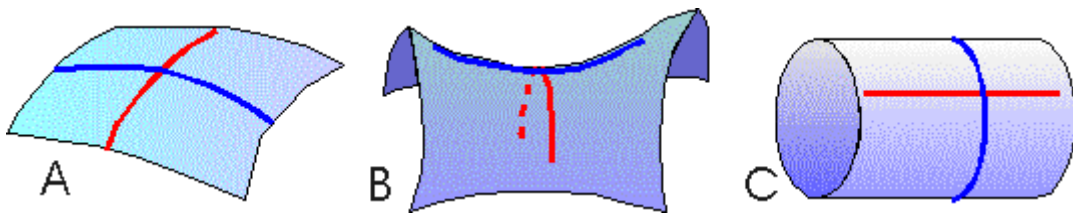
Fonte: <http://www.seara.ufc.br/donafifi/gausseeuler/gausseuler2.htm>. Acesso em 05/2015.

Desta forma é possível calcular a curvatura de qualquer ponto  $P$  em uma dada superfície. Destacamos ainda que em se tratando de curvatura de Gauss, há três casos para análise: superfícies com curvaturas positivas, negativas ou nulas. A classificação ocorre de acordo com os critérios a seguir:

- Superfícies com curvatura positiva são as que possuem curvas de máxima e mínima curvatura do mesmo lado da superfície, ou seja, os círculos osculantes localizam-se do mesmo lado da superfície (figura 18A).
- Superfícies com curvatura negativa têm curvas de máxima e mínima curvatura em lados opostos da superfície, ou seja, os círculos osculantes ficam em lados opostos da superfície (figura 18B).

- Superfícies com curvatura nula apresenta pelo menos um dos círculos osculantes com curvatura zero, isto é, uma reta. O plano é um exemplo de superfície com curvatura nula, pois todas as suas intersecções com outros planos passando por qualquer um de seus pontos, formam retas. Existem outras superfícies que atendem a essa especificidade. Para ser classificada como superfícies com curvatura nula basta que apenas um círculo osculante tenha curvatura zero, como representado no cilindro. (figura 18C).

**Figura 18** - Superfícies com curvatura positiva, negativa e nula.




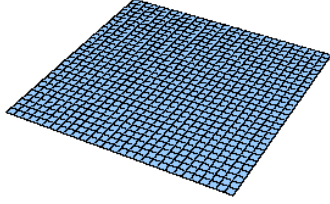
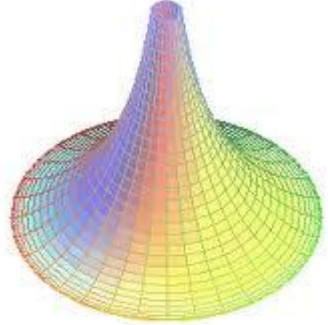
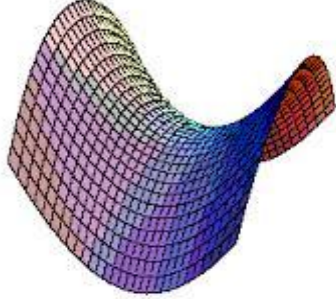

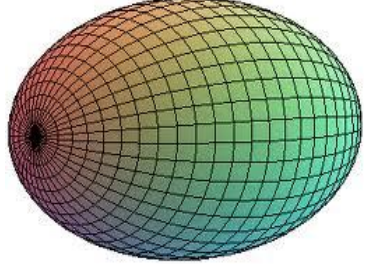
Fonte: <http://www.seara.ufc.br/donafifi/gausseuler/gausseuler2.htm>. Acesso em 05/2015.

Segundo Silva (2011), de forma bastante simplificada, basta identificarmos o plano (euclidiano) como uma superfície com curvatura zero, a esfera ou o elipsoide (formato de um ovo) como uma superfície com curvatura positiva e a superfície em forma de sela como uma superfície com curvatura negativa.

A seguir propomos uma atividade que tem por objetivo possibilitar aos alunos classificar a curvatura das diferentes superfícies como: nula, positiva ou negativa, para posteriormente identificar suas propriedades e particularidades para estudos geométricos.

**ATIVIDADE 1:** Observe as figuras no quadro 1 e classifique a curvatura de cada uma delas como nula, positiva ou negativa.

**Quadro 1** - Classificação de superfícies de acordo com sua curvatura.

Superfície esférica <sup>9</sup>	Plano <sup>10</sup>	Pseudo-esfera <sup>11</sup>
		
Curvatura:	Curvatura:	Curvatura:
Sela <sup>12</sup>	Hiperbolóide <sup>13</sup>	Elipsóide <sup>14</sup>
		
Curvatura:	Curvatura:	Curvatura:

Fonte: Autora.

No quadro 2 evidenciamos algumas outras superfícies com curvaturas não-nulas.

<sup>9</sup> Fonte: <<http://geomate1451.blogspot.com.br/>>. Acesso em 07/2015.

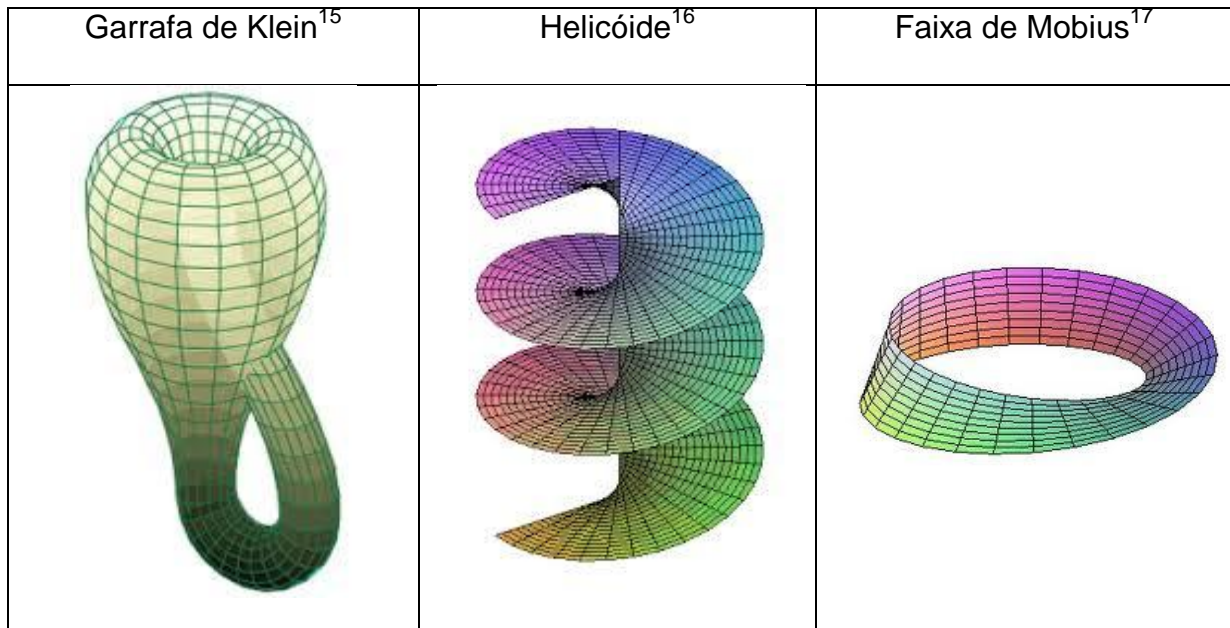
<sup>10</sup> Fonte: <[http://www.math.ist.utl.pt/~lgodin/GEOII/Geometria/geometry\\_surfaces.html](http://www.math.ist.utl.pt/~lgodin/GEOII/Geometria/geometry_surfaces.html)>. Acesso em 01/2015

<sup>11</sup> Fonte: <<http://www.dmm.im.ufrj.br/~risk/diversos/tractrix.htm>>. Acesso em 01/2015.

<sup>12</sup> Fonte: <[http://www.math.ist.utl.pt/~lgodin/GEOII/Geometria/geometry\\_surfaces.html](http://www.math.ist.utl.pt/~lgodin/GEOII/Geometria/geometry_surfaces.html)>. Acesso em 01/2015.

<sup>13</sup> Fonte: <<http://experienciasnamatematica.blogspot.com.br/2010/10/historia-da-geometria-4-de-5.html>>. Acesso em 01/2015

<sup>14</sup> Fonte: <<http://www.urbipedia.org/index.php?title=Elipsoide>>. Acesso em 11/2014

**Quadro 2** - Superfícies não euclidianas.

Fonte: Autora.

Na sequência propomos uma atividade que tem por objetivo proporcionar reflexões a respeito do significado da curvatura de uma superfície.

**ATIVIDADE 2:** Para um determinado ponto, uma superfície possui curvatura positiva de  $0,1 \text{ cm}^{-2}$ . Quais os valores possíveis para curvatura dos círculos de máxima e mínima curvatura? Faça um esboço de uma superfície que seja compatível com uma dessas possibilidades.

A brincadeira de produzir películas de sabão pode possibilitar a visualização de algumas superfícies com diferentes curvaturas, basta seguir as instruções contidas na próxima atividade. Para sua realização serão necessárias duas argolas com cabo, metálicas ou plásticas, água detergente e uma vasilha para colar a mistura de água e detergente, que deve ter tamanho suficiente para que as argolas caibam em seu interior.

<sup>15</sup> Fonte: <<https://outrodoutro.wordpress.com/2009/10/04/a-garrafa-de-klein/>>. Acesso em 12/2015.

<sup>16</sup> Fonte: <<https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Helicoide.png>>. Acesso em 08/2015.

<sup>17</sup> Fonte: <<http://miltonborba.org/CVE/Moebius.htm>>. Acesso em 08/2015.

**ATIVIDADE 3:** Siga as instruções:

**a)** Mergulhe uma argola circular na mistura de água e detergente. Quais as características da superfície formada pela película na argola, antes que seja deformada pelo ar?

**b)** Assopre a película formada no interior de uma argola. Quais as características de tal superfície?

**c)** Com a mistura de água e detergente e duas argolas circulares podemos observar outra superfície. Segure as argolas sobrepostas de forma concêntrica, mergulhe as argolas na mistura de água e detergente, estoure a película formada na parte interior das argolas, afaste lentamente as argolas. Quais as características da película formada?

**d)** De acordo com a curvatura, como podem ser classificadas as películas formadas seguindo as instruções dos itens a, b e c?

Com os procedimentos descritos nas atividades é possível a visualização do plano, da esfera e da catenóide (figura 19), que possuem curvatura nula, positiva e negativa, respectivamente.

**Figura 19** – Uma catenóide na película de sabão.



Fonte: Autora.

Acreditamos que as informações apresentadas até o momento são suficientes para solucionar o problema 1, a seguir apresentamos uma solução para o mesmo.

#### 4.2.2.3 Resolução do problema 1

Para essa resolução utilizamos os critérios estabelecidos por Gauss.

**a) Qual a curvatura dessa superfície, no ponto A?**

De acordo com os critérios estabelecidos por Gauss, descritos anteriormente, para calcular a curvatura de uma superfície em um determinado ponto, basta multiplicarmos a curvatura do menor e do maior círculo osculante que passam pelo ponto. Para tal precisamos encontrar os círculos de maior e menor curvatura que passam por esse ponto. Especificamente para o ponto A temos que o círculo de maior curvatura é círculo  $c$  com raio 2 cm e que o círculo de menor curvatura é o círculo  $b$  com raio 1 cm. Dessa forma a curvatura  $C_A$  no ponto A é dada por:

$$C_A = -\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} = -0,5 \text{ cm}^{-2}$$

pois as curvas de maior e menor curvatura estão localizadas em lados opostos da superfície, logo temos que em A a superfície possui curvatura negativa.

**b) Qual a curvatura dessa superfície, no ponto B?**

Pensando de forma análoga ao item anterior, temos que os círculos de maior e menor curvatura que passa pelo ponto B são respectivamente os círculos  $a$  com raio 4 cm e  $b$  com raio 1 cm. Logo, a curvatura  $C_B$  no ponto B é positiva dada por:

$$C_B = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4} = 0,25 \text{ cm}^{-2}$$

**c) O toro possui curvatura constante?**

Não, a curvatura em um toro varia de acordo com a localização dos pontos escolhidos.

Outro conhecimento que se faz indispensável para compreensão dos conceitos geométricos que serão desenvolvidos na próxima seção é o da

distância entre pontos, para tal, na subseção a seguir faremos uma explanação sobre o tema.

#### 4.2.3 Distância entre dois pontos

A distância entre dois pontos de uma superfície, independentemente de sua curvatura, é definido como a menor distância entre os pontos. Segue o conceito de geodésica.

**Definição 4.7 – Geodésica:** Dados dois pontos em uma superfície, as linhas de comprimento mínimo que unem estes pontos denomina-se geodésica.

Tal conceito permite concluir que a linha de menor comprimento que une dois pontos nem sempre será uma reta.

A atividade 4 pode proporcionar a visualização de geodésicas em diferentes superfícies. Para sua realização serão necessárias três superfícies de isopor como as da figura 20, papel e caneta.

**Figura 20** - Superfícies com diferentes curvaturas.



Fonte: Autora.

**ATIVIDADE 4:** De posse de superfícies semelhantes às da figura 20, faça o que se pede:

**a)** Sobre a superfície plana, desenhe dois pontos distintos A e B, trace uma linha ligando os pontos de modo que a distância percorrida seja a menor possível. Descreva o formato da linha desenhada?

**b)** Sobre a superfície com curvatura positiva, desenhe dois pontos distintos C e D, trace uma linha ligando os pontos de modo que a distância percorrida seja a menor possível. Qual foi o formato da linha desenhada?

**c)** Sobre a superfície com curvatura negativa, desenhe dois pontos distintos E e F, trace uma linha ligando os pontos de modo que a distância percorrida seja a menor possível. Descreva o formato da linha desenhada?

**d)** A superfície em que se encontram os pontos interfere no formato da linha que descreve a menor distância possível entre eles. Explique.

Após a constatação de que existem outras geometrias além da euclidiana, e que o fator determinante entre qual geometria utilizar é a curvatura da superfície em que se encontram os elementos, a seguir apresentamos o problema 2 que envolve conceitos da geometria hiperbólica, acompanhado das definições e propriedades que a caracteriza.

#### 4.3 GEOMETRIA HIPERBÓLICA APLICADA NA RESOLUÇÃO DE UM PROBLEMA

**PROBLEMA 2:** Frequentemente nos deparamos com construções e objetos que possuem formatos inusitados, como por exemplo as fotografias do quadro 3.



### Quadro 3 – Superfícies hiperbólicas.

		
Catedral de Brasília <sup>18</sup>	Torre para água <sup>19</sup>	Corneta <sup>20</sup>

Fonte: Autora.

As imagens se assemelham total ou parcialmente a uma superfície denominada pseudoesfera, apresentada na figura 21, onde estão destacados três pontos: A, B e P.

**a)** Quais as características do segmento que une os pontos A e B, descrevendo a menor distância entre eles?

**b)** É possível traçar pelo ponto P paralelas à reta que contém os pontos A e B?

**c)** Descreva e destaque as principais características do polígono que se forma unindo-se os pontos A, B e P.

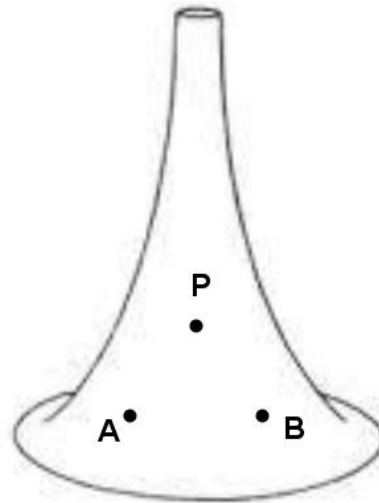
**d)** É possível construir um quadrado ou retângulo sobre a superfície da figura 21. Justifique.

<sup>18</sup> Fonte: < <https://architetur.wordpress.com/2009/10/09/catedral-de-brasilia/>>. Acesso em 07/2015.

<sup>19</sup> Fonte: <[http://geometrica.com/pt/Construcoes\\_gridshells](http://geometrica.com/pt/Construcoes_gridshells)>. Acesso em 07/2015.

<sup>20</sup> Fonte: <<http://www.izzomusical.com.br/produto/corneta-sib-laqueada-dolphin>>. Acesso em 07/2015.

**Figura 21** - Pontos A, B e P sobre uma pseudoesfera.



Fonte: Autora.<sup>21</sup>

Antes da tentativa de solucionar o problema, algumas observações parecem pertinentes: Com relação à curvatura, como podemos classificar as superfícies do quadro 3? A geometria estudada até o momento (Euclidiana) é suficiente para responder aos questionamentos?

Apesar de afirmado anteriormente a existência de uma geometria que se aplique a superfícies como as do problema 2, porém, para solucioná-lo precisamos esclarecer quais são suas características e propriedades. A seguir apresentamos algumas definições e teoremas a cerca da geometria hiperbólica.

#### 4.3.1 Geometria Hiperbólica

Da mesma forma como na geometria hoje denominada Euclidiana, que parte de afirmações mais simples admitidas como verdade e utiliza tais afirmações para demonstrar outras mais complexas, formando um sistema denominado dedutivo, a geometria hiperbólica também admite como verdadeiras, sem demonstração, algumas afirmações iniciais. O conjunto de postulados da geometria hiperbólica é formado pelos quatro primeiros postulados de Euclides,

<sup>21</sup> Fonte imagem original: < <http://ficus.pntic.mec.es/~igas0008/Nombre/Propio/pag11.htm>>. Acesso em 11/2014

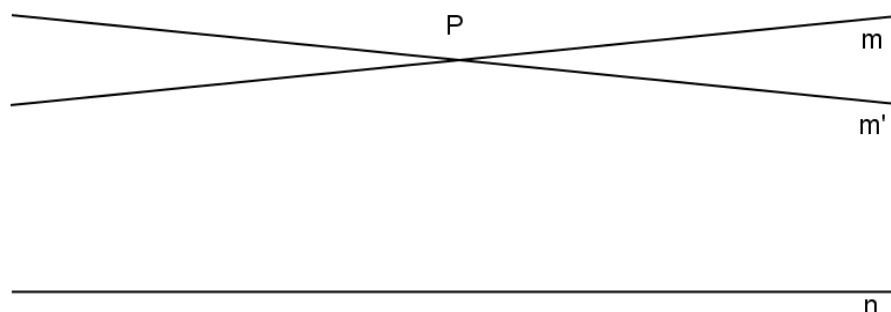
alterando apenas o quinto. Na geometria hiperbólica o quinto postulado é enunciado de várias formas, por exemplo: “Por um ponto, fora de uma reta, podem ser traçadas pelo menos duas retas que não encontram a reta dada”. Tal postulado é conhecido como Postulado de Lobachevsky (BARBOSA, 1995, p.47).

A seguir elencaremos algumas definições e teoremas que envolvem os conceitos básicos da geometria hiperbólica.

**Definição 4.8 – Distância entre dois pontos:** Dados dois pontos distintos  $A$  e  $B$  sobre uma superfície com curvatura negativa, a distância entre esses pontos é a curva de menor comprimento que contém esses pontos.

**Definição 4.9 – Retas paralelas:** Dados uma reta  $n$  e um ponto  $P$  fora desta reta, são denominadas retas paralelas à reta  $n$  as duas retas  $m$  e  $m'$  que passam por  $P$  e que separam o conjunto das retas que interceptam  $n$  do conjunto das que não interceptam  $n$  (figura 22).

**Figura 22** - Paralelismo na Geometria Hiperbólica. Retas que não interceptam uma reta  $n$  dada.



Fonte: Autora.

Segundo o Postulado de Lobachevsky existem ao menos duas retas passando por um ponto  $P$  que não interceptam uma reta  $n$  dada. Note que na realidade existem infinitas retas com essa característica. Considere duas retas  $m$  e  $m'$  que passam pelo ponto  $P$  e não interceptam a reta  $n$ . Note que  $m$  e  $m'$  formam quatro ângulos, e um deles contém a reta  $n$ . Todas as retas traçadas por  $P$ , contidas no par de ângulos opostos pelo vértice, onde nenhum deles contém  $n$ , são exemplos de retas que também não interceptam a reta  $n$ , logo existem infinitas retas com essa propriedade (Barbosa, 1995).

Apesar de existirem infinitas retas passando pelo ponto  $P$  que não interceptam a reta  $n$ , não afirmamos que existem infinitas retas paralelas a  $n$  passando por  $P$ , pois na Geometria Hiperbólica, a definição de retas paralelas difere da definição dada na geometria Euclidiana. Vejamos os resultados abaixo.

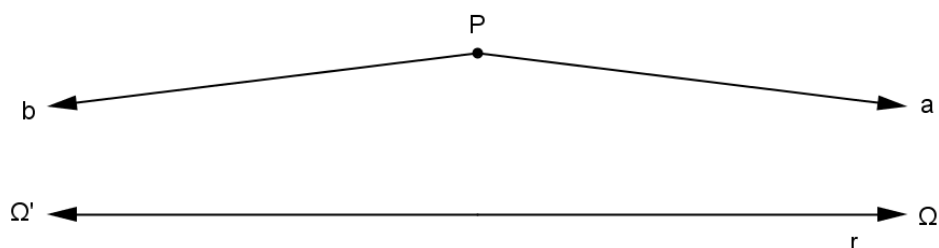
**Definição 4.10 – Ponto ideal:** Ponto comum a duas retas paralelas.

A noção de ponto ideal será utilizada a seguir na demonstração de teoremas a cerca da Geometria Hiperbólica. Para facilitar a compreensão de seu significado Barbosa descreve:

Vamos acrescentar dois pontos a cada reta do plano, os quais, na ordenação destas retas, localizam-se, um, antes de todos os seus pontos, e o outro, depois de todos eles. (É o mesmo procedimento usado para incluir os pontos  $+\infty$  e  $-\infty$  no conjunto dos números reais.) Eles serão denominados pontos ideais. Admitiremos que estes novos pontos são adicionados de modo que retas paralelas tenham em comum um ponto ideal na direção do paralelismo, ou seja, o mesmo ponto ideal é adicionado a retas paralelas, no lado do paralelismo. Assim, duas retas são paralelas se têm um ponto ideal em comum. (BARBOSA, 1995, p.55).

Complementando a noção de ponto ideal, Coutinho (2001) destaca: para cada reta  $r$  existem dois pontos ideais distintos,  $\Omega$  e  $\Omega'$ , conforme a figura 23.

**Figura 23 - Ponto ideal**



Fonte: Autora.

Caso  $\Omega$  e  $\Omega'$  não fossem distintos, teríamos uma única reta paralela a  $r$  passando por  $P$ , contrariando assim o Postulado de Lobachevsky.

**Definição 4.11 – Triângulo ou triângulo ordinário:** Dados três pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  não colineares em uma superfície hiperbólica, à reunião das três geodésicas que unem os pontos  $A$  com  $B$ ,  $B$  com  $C$  e  $C$  com  $A$  chama-se triângulo ou triângulo ordinário  $ABC$ .

**Definição 4.12 – Triângulos ômegas ou triângulos hiperbólicos:**

Triângulos com um dos vértices num ponto ideal. (Coutinho, 2001 p.47).

**Definição 4.13 – Triângulos Generalizados:**

Triângulos formados por dois pontos ordinários e por um ponto ideal, ou por dois pontos ideais e um ponto ordinário, ou até por três pontos ideais. (Barbosa, 1995, p.56).

Nas demonstrações a seguir utilizaremos apenas triângulos generalizados formados por dois pontos ordinários e um ponto ideal, denominados por Coutinho (2001), triângulos ômegas ou triângulos hiperbólicos. Dedicaremos atenção especial às propriedades desse tipo de triângulos.

**Definição 4.14 – Triângulos hiperbólicos congruentes:**

Dois triângulos hiperbólicos são congruentes se seus ângulos correspondentes são congruentes e existe uma correspondência entre seus vértices, de modo que seus vértices finitos se correspondam, e sejam congruentes.

A seguir descreveremos os critérios de congruência para Triângulos Ômegas, suas respectivas demonstrações foram omitidas nesse texto, mas podem ser encontradas em Barbosa (1995).

- Dois triângulos ômegas  $AB\Omega$  e  $A'B'\Omega'$  são congruentes se os lados de extensão finita são congruentes e se o par de ângulos correspondentes  $\hat{A}$  e  $\hat{A}'$  ou  $\hat{B}$  e  $\hat{B}'$  são congruentes.
- Dois triângulos ômegas  $AB\Omega$  e  $A'B'\Omega'$  são congruentes se os dois pares de ângulos  $\hat{A}$  e  $\hat{A}'$ ,  $\hat{B}$  e  $\hat{B}'$  são congruentes.
- Dois triângulos ômegas  $AB\Omega$  e  $A'B'\Omega'$  são congruentes se os lados de extensão finita são congruentes e os pares de ângulos  $\hat{B}$  e  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}'$  e  $\hat{A}'$  são congruentes.

**Teorema 4.1:** Em geometria hiperbólica, se uma reta corta um triângulo ômega por um de seus vértices, ou por outro ponto que não vértice, então intercepta o lado oposto.

**Demonstração:** Coutinho (2001).

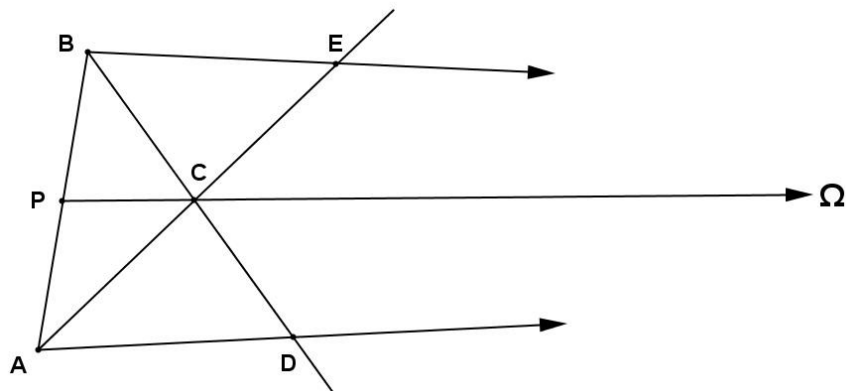
Seja  $AB\Omega$  um triângulo ômega e seja  $C$  um ponto qualquer no interior desse triângulo.

É possível observar na figura 24, as retas  $BC$  e  $AC$  interceptam os lados opostos porque  $B\Omega$  é a primeira reta por  $B$  que não intercepta  $AD$  e esta é primeira reta que não intercepta  $BE$ .

Se uma reta  $C\Omega$  corta o triângulo ômega pelo vértice ideal, ela intercepta  $AB$ , devido ao axioma de Pasch<sup>22</sup> aplicado ao triângulo  $ABC$ , que não é ômega.

Considere um ponto  $P$  no segmento que une os vértices  $A$  e  $B$  e seja  $PC$  a primeira reta que passa por  $P$  e não intercepta  $AD$ . Então  $PD$ , a reta que corta o triângulo  $AB\Omega$  em  $P$ , intercepta  $AD$ .

**Figura 24** - Reta que corta um triângulo ômega.



Fonte: Autora.

Logo, em geometria hiperbólica, se uma reta corta um triângulo ômega por um de seus vértices, ou por outro ponto que não um vértice, então intercepta o lado oposto.

**Teorema 4.2:** Para qualquer triângulo ômega  $AB\Omega$  as medidas dos ângulos exteriores formados pelo prolongamento de  $AB$  são maiores do que as medidas dos ângulos opostos interiores.

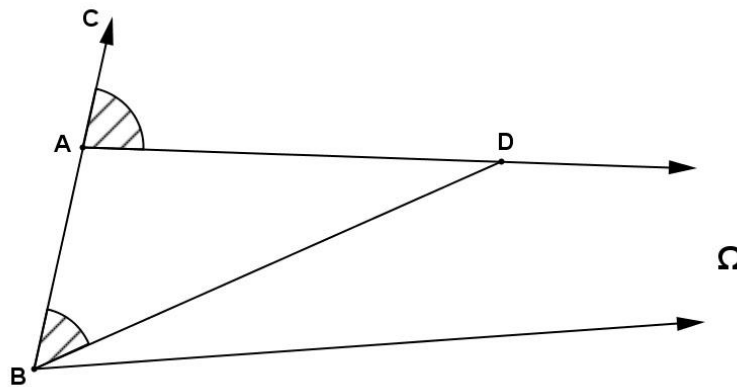
<sup>22</sup> Axioma de Pasch: um reta cortando um triângulo por um de seus vértices, ou em um outro ponto qualquer, interceptará o lado oposto.

**Demonstração:** Coutinho (2001).

Seja  $AB\Omega$  um triângulo ômega, supondo a medida do ângulo exterior menor ou igual à medida de um ângulo oposto interior temos:

I) Medida do ângulo exterior menor que a medida de um ângulo oposto interior – De acordo com a figura 25, pode-se construir um ângulo  $C\hat{B}D$ , congruente ao ângulo  $C\hat{A}\Omega$ . Mas isso é absurdo, pois  $ABD$  é um triângulo euclidiano, onde um ângulo exterior não pode ser congruente a um ângulo oposto interno.

**Figura 25** - Ângulo exterior menor do que o ângulo oposto interior.



Fonte: Autora.

II) Medida do ângulo exterior igual a medida de um ângulo oposto interior – Na figura 26,  $D$  é o ponto médio de  $AB$ .

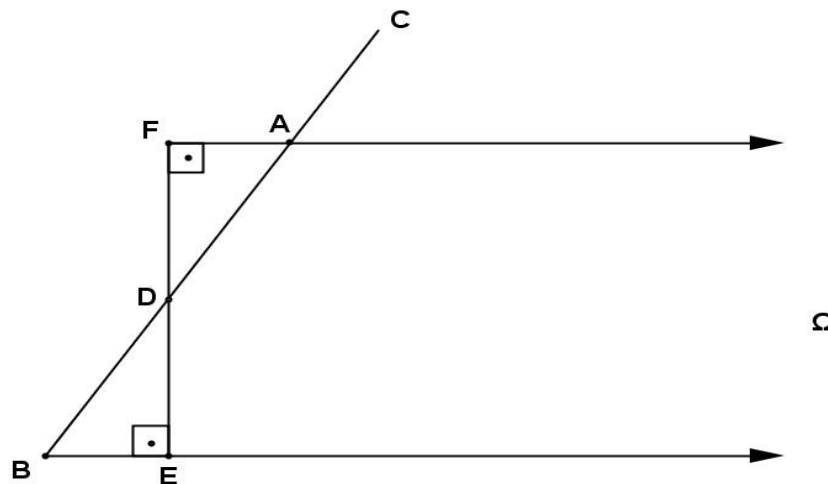
Traça-se  $DE$  perpendicular a  $B\Omega$  e marca-se o ponto  $F$  em  $A\Omega$  de forma que  $AF = BE$ . Desta forma os triângulos  $BDE$  e  $ADF$  são congruentes.

Note que os pontos  $F$ ,  $D$  e  $E$  estão sobre uma mesma reta. Logo temos que  $AF$  é paralelo à reta  $B\Omega$ , com o ângulo  $\hat{F}$  de paralelismo reto, o que não é possível, pois em geometria hiperbólica, o ângulo de paralelismo<sup>23</sup> é agudo.

<sup>23</sup> Em geometria hiperbólica, o ângulo de paralelismo é agudo e variável. Para visualização de tal afirmação é necessário o conhecimento do Modelo de Klein, um modelo plano para representação da geometria hiperbólica que não será abordado no presente trabalho. Pode ser encontrado em Barbosa (1995).

Portanto, para quaisquer triângulos ômega as medidas dos ângulos exteriores formados pelo prolongamento do lado que une os pontos ordinários são maiores do que as medidas dos ângulos opostos interiores.

**Figura 26** - Ângulo exterior igual ao ângulo oposto interior.



Fonte: Autora.

A seguir demonstramos propriedades dos Quadriláteros de Saccheri e Lambert que servirão de ferramentas para a demonstração da soma dos ângulos internos de um triângulo na geometria hiperbólica. Destacamos que na geometria hiperbólica um Quadrilátero de Saccheri não possui os ângulos do topo retos, da mesma forma como o quarto ângulo do Quadrilátero de Lambert não possui tal medida.

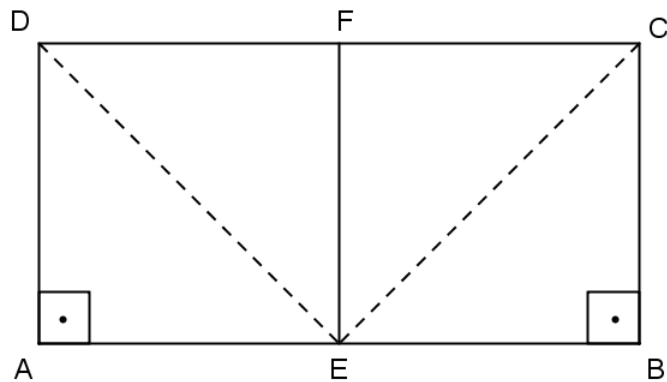
**Teorema 4.3:** Em geometria hiperbólica o segmento que une os pontos médios da base e do topo do Quadrilátero de Saccheri é perpendicular a ambos.

**Demonstração:** Coutinho (2001).

Seja ABCD um Quadrilátero de Saccheri, onde E é o ponto médio do segmento  $\overline{AB}$  e F o ponto médio do segmento  $\overline{CD}$ , conforme a figura 27. Ligando os pontos C e D a E, formamos dois triângulos congruentes  $ADE$  e  $BCE$ , logo  $DE$  é congruente a  $CE$ , e como F é ponto médio de  $\overline{CD}$ , segue que  $\overline{EF}$  é mediatriz do segmento  $\overline{CD}$  e, portanto, perpendicular a esse segmento.



**Figura 27** - Quadrilátero de Saccheri em geometria hiperbólica.



Fonte: Autora.

Como os triângulos  $ADE$  e  $BCE$  são congruentes temos que os ângulos  $B\hat{E}C$  e  $A\hat{E}D$  são congruentes, da mesma forma os ângulos  $C\hat{E}F$  e  $D\hat{E}F$  são congruentes devido à congruência dos triângulos  $CEF$  e  $DEF$ .

Devido às congruências destacadas acima podemos afirmar:

$$B\hat{E}F = B\hat{E}C + C\hat{E}F = A\hat{E}D + D\hat{E}F = A\hat{E}F$$

Desta forma como os ângulos  $B\hat{E}F$  e  $A\hat{E}F$  são congruentes e suplementares temos que o segmento  $\overline{FE}$  é perpendicular á base  $AB$ .

**Teorema 4.4:** Em geometria hiperbólica os ângulos do topo do Quadrilátero de Saccheri são congruentes e agudos.

**Demonstração:** Coutinho (2001).

I) Congruência dos ângulos do topo – Da figura 27 temos que os ângulos  $B\hat{C}E$  e  $A\hat{D}E$  são congruentes da mesma forma que os ângulos  $E\hat{C}F$  e  $E\hat{D}F$  também o são. Logo concluímos que:

$$B\hat{C}F = B\hat{C}E + E\hat{C}F = A\hat{D}E + E\hat{D}F = A\hat{D}F$$

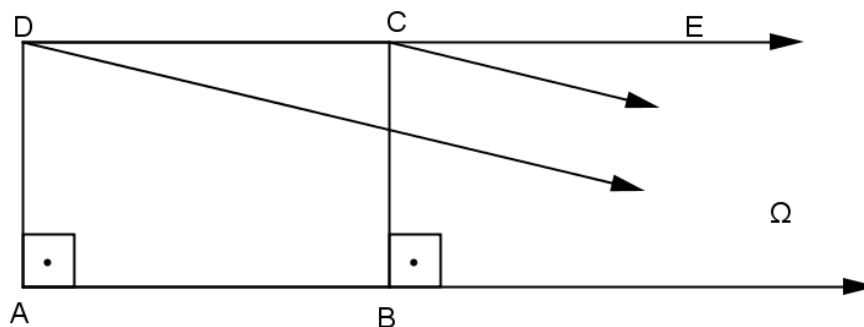
Portanto os ângulos do topo do Quadrilátero de Saccheri são congruentes.

II) Os ângulos do topo são agudos – Sejam  $C\Omega$  e  $D\Omega$  retas paralelas à reta  $AB$ , conforme a figura 28. Temos então que  $CD\Omega$  é um triângulo.  $E\hat{C}\Omega$  é um

ângulo externo desse triângulo, logo sua medida é maior que a do ângulo interno  $C\hat{D}\Omega$ .

Podemos afirmar ainda que  $A\hat{D}\Omega = B\hat{C}\Omega$ , pois são ângulos de paralelismo para uma mesma distância, por serem  $AD$  e  $BC$  lados de um Quadrilátero de Saccheri.

**Figura 28** - Em geometria hiperbólica os ângulos do topo de um Quadrilátero de Saccheri são agudos.



Fonte: Autora.

Desta forma temos que:

$$E\hat{C}\Omega + B\hat{C}\Omega > C\hat{D}\Omega + A\hat{D}\Omega$$

Ou seja

$$B\hat{C}E > C\hat{D}A = B\hat{C}D$$

Como os ângulos  $B\hat{C}E$  e  $B\hat{C}D$  são suplementares<sup>24</sup> podemos afirmar que o ângulo  $B\hat{C}D$  é agudo.

Acima demonstramos que os ângulos  $A\hat{D}C$  e  $B\hat{C}D$  são congruentes, logo os ângulos do topo de um quadrilátero de Saccheri são agudos.

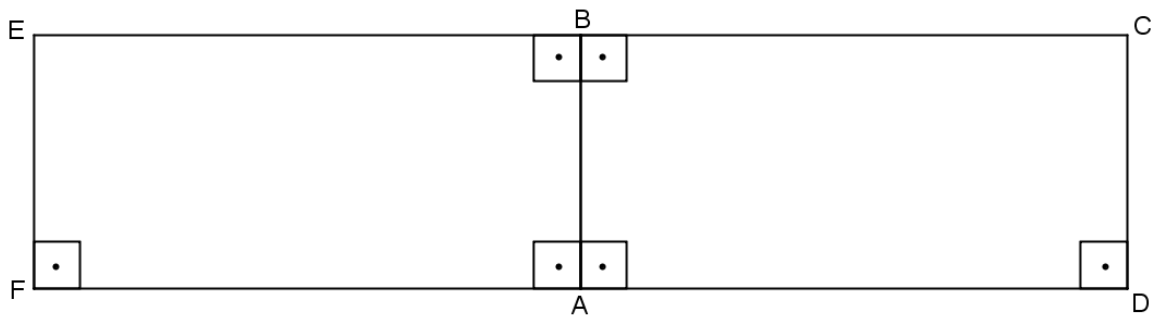
**Teorema 4.5:** Em geometria hiperbólica o quarto ângulo do Quadrilátero de Lambert é agudo.

<sup>24</sup> Ângulos suplementares são aqueles cuja soma resulta em  $180^\circ$ .

**Demonstração:** Coutinho (2001).

Basta observarmos que o Quadrilátero de Saccheri pode ser dividido em dois Quadriláteros de Lambert, pois o segmento que liga os pontos médios da base e do topo do Quadrilátero de Saccheri é perpendicular a ambos.

**Figura 29** - Quadrilátero de Saccheri dividido em dois Quadriláteros de Lambert.



Fonte: Autora.

Na figura 29, temos que  $ABCD$  e  $ABEF$  são os dois Quadriláteros de Lambert do Quadrilátero de Saccheri  $CDFE$ . Como, pelo teorema 4.4 os ângulos do topo do Quadrilátero de Saccheri são agudos, temos que o quarto ângulo do Quadrilátero de Lambert é agudo. Portanto em geometria hiperbólica, não existem retângulos, pois os quadriláteros que têm três ângulos retos, necessariamente possuem o quarto ângulo agudo.

**Teorema 4.6:** Em geometria hiperbólica a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo retângulo é menor que  $180^\circ$ .

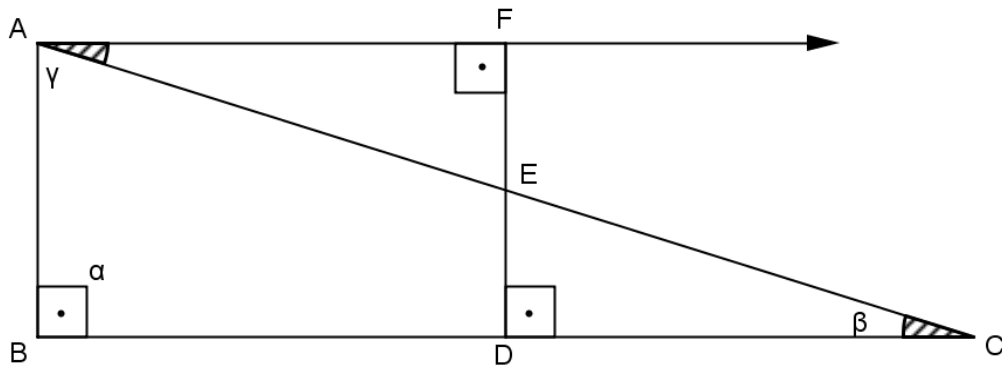
**Demonstração:** Coutinho (2001).

Considerando o triângulo retângulo  $ABC$  (figura 30), onde  $E$  é o ponto médio da hipotenusa  $AC$ . Seja o segmento  $ED$  perpendicular a  $BC$ .

O segmento  $AF$  foi construído de modo que  $C\hat{A}F = A\hat{C}B$  e  $DC = AF$ , desta forma obtemos os triângulos congruentes  $AFE = DEC$ . Logo os pontos  $E, F$  e  $D$  estão alinhados e o ângulo em  $F$  é reto. Consequentemente,  $ABDF$  é um Quadrilátero de Lambert com ângulo agudo em  $A$ , isto é  $B\hat{A}C + C\hat{A}F < 90^\circ$ .

Como  $C\hat{A}F$  é congruente ao ângulo interno  $A\hat{C}B$  do triângulo retângulo, segue que:  $\alpha + \beta + \gamma < 180^\circ$ , com  $\alpha = A\hat{B}C$ ,  $\beta = B\hat{C}A$  e  $\gamma = C\hat{A}B$ .

**Figura 30** - Soma dos ângulos internos de um triângulo retângulo na geometria hiperbólica.



Fonte: Autora.

**Teorema 4.7:** Em geometria hiperbólica a soma das medidas dos ângulos internos de qualquer triângulo é menor que  $180^\circ$ .

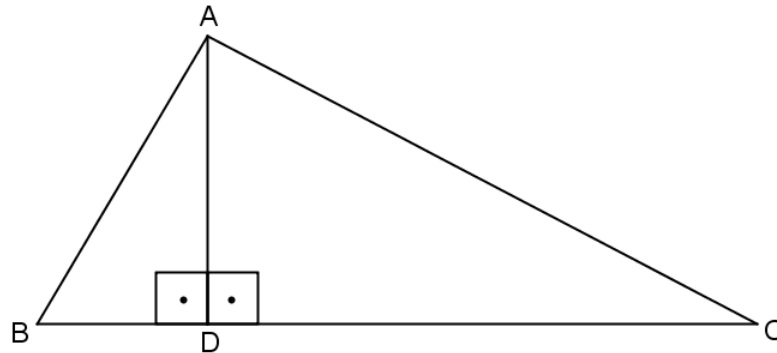
**Demonstração:** Coutinho (2001).

Como tal afirmação já foi demonstrada para triângulos retângulos, basta provarmos que propriedade estende-se a quaisquer outros triângulos.

Seja  $ABC$  um triângulo não retângulo, como o da figura 31. Traçando o segmento  $AD$  perpendicular à base  $BC$ , o triângulo inicial fica dividido em dois triângulos retângulos em  $D$ ,  $ADC$  e  $ADB$ , cujas somas das medidas dos ângulos internos é menor que  $180^\circ$ .

Desta forma concluímos:  $2\hat{D} + \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} < 360^\circ$ , ou seja,  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} < 180^\circ$ .

**Figura 31** - Soma dos ângulos internos de um triângulo em geometria hiperbólica.



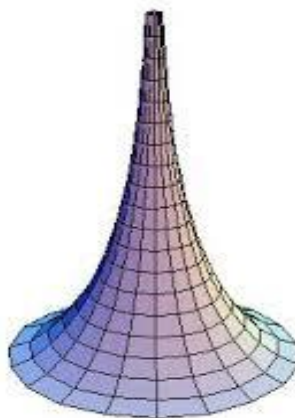
Fonte: Autora.

Com base nas definições e teoremas elencados anteriormente é possível destacarmos algumas características da geometria hiperbólica:

- por um ponto fora de uma reta passam mais de uma reta paralela à reta dada, existem pelo menos duas retas com essa propriedade,
- as retas paralelas não são equidistantes,
- a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre menor que  $180^\circ$ .

Um modelo no qual os conceitos da geometria hiperbólica se aplica é a pseudo-esfera (Figura 32), uma superfície com curvatura negativa. Segundo Silva (2011) este foi o primeiro modelo exibido para a geometria não euclidiana e foi apresentado pelo matemático italiano Eugenio Beltrami (1835-1900).

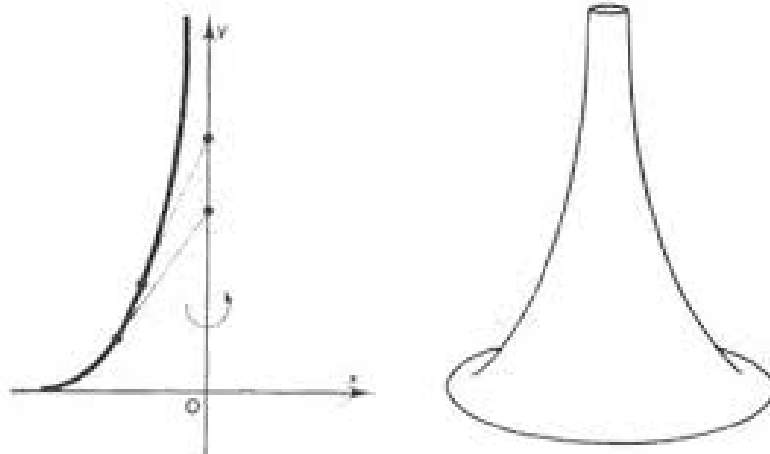
**Figura 32-** Pseudoesfera.



Fonte: Fonte: <<http://elblogdejuanjo.wordpress.com/2007/06/11/la-geometria-no-euclidiana-y-la-geometria-de-n-dimensiones/>>. Acesso em 04/11/2014.

Segundo Silva (2011, p.26): “A pseudoesfera é uma superfície gerada pela revolução de uma curva conhecida como tractriz em torno de uma reta ou eixo (sua assíntota).” Veja figura 33.

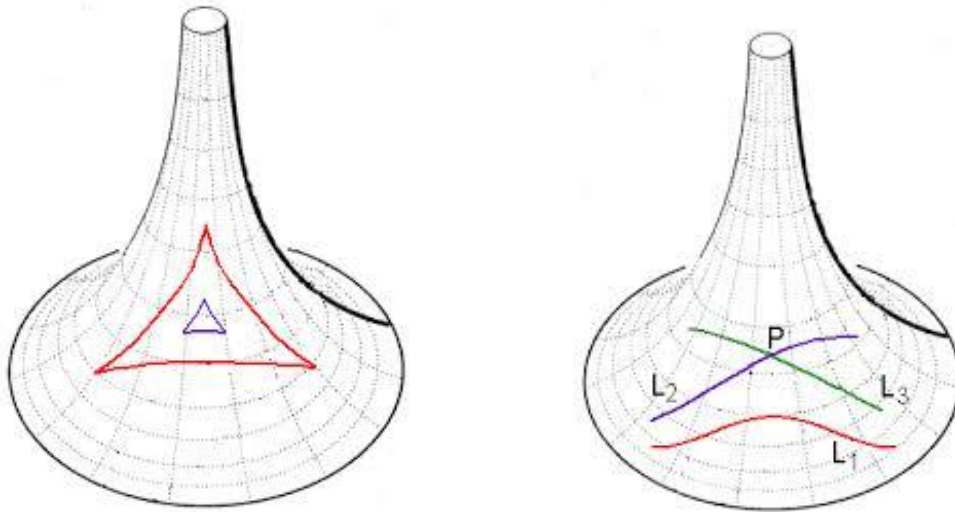
**Figura 33** - Tractriz e pseudoesfera.



Fonte: < <http://ficus.pntic.mec.es/~igas0008/Nombre/Propio/pag11.htm>>. Acesso em 04/11/2014

Na figura 34 podemos visualizar na primeira pseudoesfera dois triângulos, lembrando que na geometria hiperbólica os lados dos triângulos são as curvas de menor comprimento (geodésicas) que unem seus vértices, nesse caso não são retilíneos. Já na pseudoesfera da direita estão representadas as duas retas  $L_2$  e  $L_3$  que passam pelo ponto  $P$  e são paralelas à reta  $L_1$ , vale reforçar que para a superfície apresentada entende-se por retas as geodésicas.

**Figura 34** - Triângulos e retas paralelas na pseudoesfera.



Fonte: <<http://www.seara.ufc.br/donafifi/hiperbolica/hiperbolica5.htm>>. Acesso em 21/01/2015.

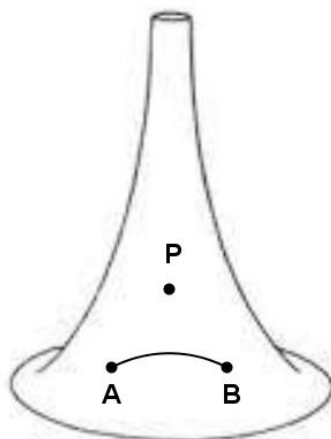
Acreditamos que as informações apresentadas até o momento são suficientes para solucionar o problema 2.

#### 4.3.2 Uma possível solução para o problema 2.

**a)** Quais as características do segmento que une os pontos A e B, descrevendo a menor distância entre eles?

O segmento que une os pontos A e B descrevendo a menor distância entre eles é uma geodésica, que apesar de apresentar um aspecto curvo (figura 35), é um segmento de reta, em se tratando da geometria hiperbólica.

**Figura 35** – Menor segmento que une os pontos A e B em uma pseudoesfera.

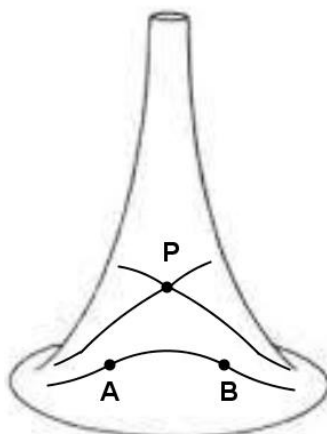


Fonte: Autora.<sup>25</sup>

**b)** É possível traçar pelo ponto P paralelas à reta que contém os pontos A e B?

Para a visualização das retas que passam pelo ponto P e que são paralelas a “reta” pelos pontos A e B é necessário destacar que retas paralelas são retas coplanares e que não têm ponto em comum, veja figura 36.

**Figura 36** - Paralelas passando por P em geometria hiperbólica.



Fonte: Autora.<sup>26</sup>

<sup>25</sup> Fonte imagem original: < <http://ficus.pntic.mec.es/~igas0008/Nombre/Propio/pag11.htm>>. Acesso em 11/2014



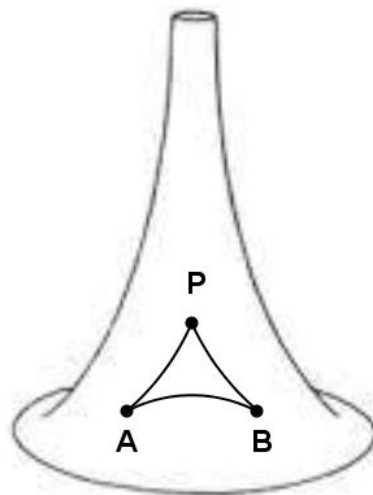
Desta forma é possível traçar infinitas retas com essa característica. Em geometria hiperbólica denominam-se retas paralelas apenas às duas que separam o conjunto de retas que não interceptam a reta que passa por A e B das que interceptam.

Podemos observar ainda que em geometria hiperbólica as retas paralelas não são equidistantes.

c) Descreva e destaque as principais características do polígono que se forma unindo-se os pontos A, B e P, determinando a menor distância entre eles.

O polígono que se forma quando se unem os pontos A, B e P, segundo as exigências impostas acima, está representado na figura 37. Trata-se de um triângulo com vértices nos pontos A, B e P sobre uma superfície hiperbólica, seus lados são geodésicas entre os pares de pontos e a soma de seus ângulos internos é inferior a  $180^\circ$ .

**Figura 37** - Triângulo em uma pseudoesfera com vértices nos pontos A, B e P.



Fonte: Autora.<sup>27</sup>

---

<sup>26</sup> Fonte imagem original: < <http://ficus.pntic.mec.es/~igas0008/Nombre/Propio/pag11.htm>>. Acesso em 11/2014

<sup>27</sup> Fonte imagem original: < <http://ficus.pntic.mec.es/~igas0008/Nombre/Propio/pag11.htm>>. Acesso em 11/2014

**d)** É possível construir um quadrado ou retângulo sobre a superfície da figura 21. Justifique.

Em geometria hiperbólica, não existem polígonos com quatro ângulos retos. Logo não é possível a construção de quadrados ou retângulos sobre a superfície da figura 21.

A seguir propomos um problema que necessita de conhecimentos de geometria esférica para sua solução, em seguida elencamos algumas definições e teoremas que a caracterizam.

#### 4.4 GEOMETRIA ESFÉRICA APLICADA NA RESOLUÇÃO DE UM PROBLEMA

**PROBLEMA 3:** Augusto fará uma viagem de Macapá (Brasil) a Kampala (Uganda). Admita que ambas as cidades estejam situadas sobre a linha do Equador que possuem latitudes  $51^\circ$  O e  $32^\circ$  E, respectivamente. Tal trajeto será feito de avião, com uma rota ortodrômica<sup>28</sup>. O voo partirá de Macapá às 11:00h (horário local) do dia 12/02, com duração prevista de 12 horas. Após pousar em Kampala, o avião seguirá até o polo norte e posteriormente retornará a Macapá. Admitindo que tal percurso seja possível e que a Terra tenha um formato esférico com raio constante e igual a 6400 km, responda:

- a) Qual a distância entre Macapá e Kampala?
- b) Qual será o horário de chegada em Kampala, no horário local?
- c) Qual a trajetória descrita pelo avião durante o percurso completo?

Faça um esboço.

- d) Qual o ângulo formado entre os percursos Macapá/Kampala e Kampala/Polo norte?
- e) Qual a distância total percorrida pelo avião?
- f) É possível que outro avião descreva uma rota ortodrômica paralela a descrita pelo avião do problema durante o trajeto Macapá/Kampala?

---

<sup>28</sup> Rota ortodrômica: rota que descreve a menor distância entre dois pontos na superfície terrestre.

Para responder a essas questões faz-se necessário desenvolver a chamada Geometria Esférica.

#### 4.4.1 GEOMETRIA ESFÉRICA

Segundo Courant e Robbins (2000), em 1851, Georg Bernhard Riemann, foi o primeiro a considerar a existência de uma nova geometria denominada elíptica, também conhecida como geometria de Riemann em sua homenagem. Suas propriedades se verificam em superfícies com curvatura positiva. Nessa proposta estudamos a geometria esférica, um caso particular da geometria elíptica, que se aplica a superfícies esféricas.

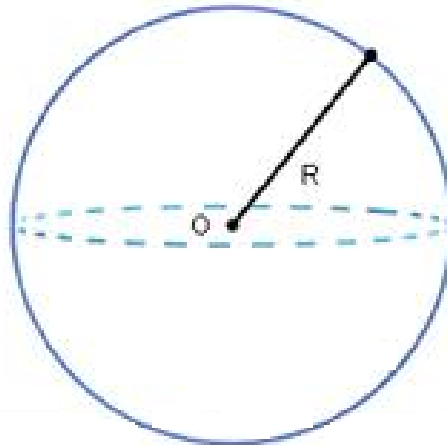
Tal geometria aceita como um de seus axiomas a não existência de retas paralelas a uma reta dada, o que contraria o Quinto Postulado de Euclides. O substituto para o Quinto Postulado na geometria esférica é conhecido como Postulado de Riemann: “Quaisquer duas retas em um plano (em geometria Riemanniana) têm um ponto de encontro” (COUTINHO, 2001, p. 73).

Outra diferença marcante entre a geometria euclidiana e a geometria esférica, destacada por Coutinho (2001, p. 73), é: “Na Geometria de Riemann abandona-se a noção de “estar entre” e a reta não é mais infinita como na Geometria Euclidiana, mas sim ilimitada”.

Para possibilitar a compreensão dessas afirmações e de propriedades que serão elencadas posteriormente, apresentamos algumas definições e teoremas que caracterizam a geometria esférica.

**Definição 4.15 – Superfície esférica:** Seja  $O$  um ponto e  $R$  um número real positivo. O conjunto de pontos  $P$  no espaço, tais que a distância entre  $O$  e  $P$  é igual a  $R$ , denomina-se superfície esférica.

**Figura 38** - Superfície esférica de centro  $O$  e raio  $R$ .



Fonte: Autora.

Os pontos que se encontram a uma distância maior que  $R$  do centro da esfera são exteriores a ela, enquanto que os pontos que se encontram a uma distância menor que  $R$  do centro da esfera são interiores à mesma.

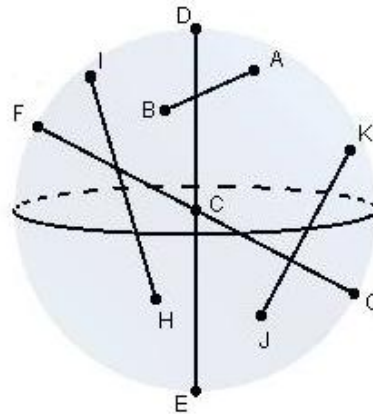
**Definição 4.16 – Esfera:** A reunião da superfície esférica de centro  $O$  e raio  $R$  com os pontos interiores à mesma denomina-se esfera de centro  $O$  e raio  $R$ .

**Definição 4.17 – Corda da superfície esférica:** O segmento que une dois pontos distintos da superfície esférica é denominado corda da superfície esférica.

**Definição 4.18 – Diâmetro da esfera:** A corda da superfície esférica que contém o centro  $O$  da superfície esférica é chamada diâmetro da superfície esférica.

**Definição 4.19 – Pontos antípodas:** As extremidades de um mesmo diâmetro da esfera recebem o nome de pontos antípodas.

**Figura 39** - Elementos da esfera.

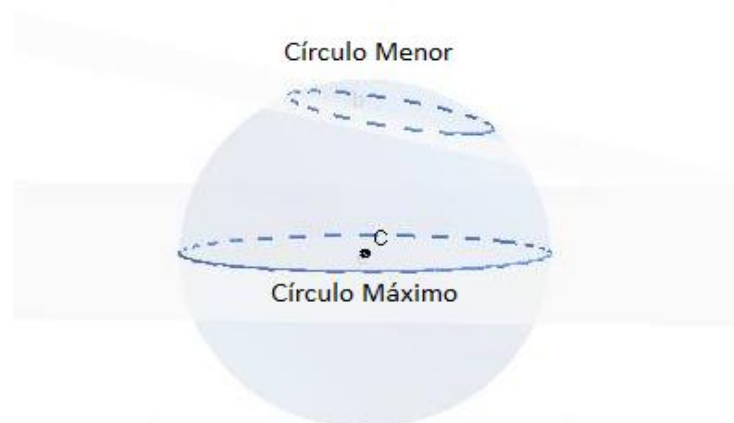


Fonte: Autora.

Na figura 39 todos os segmentos destacados AB, DE, FG, HI e JK são denominados corda da superfície esférica, pois unem dois pontos distintos da superfície esférica. Podemos identificar também que os segmentos DE e FG são diâmetros da superfície esférica, pois ambos são cordas da superfície esférica que contém o centro  $C$  da superfície esférica. Afirmamos ainda que os pontos D e E são antípodas, pois são extremidades de um mesmo diâmetro, os pontos F e G também possuem tal propriedade.

**Definição 4.20 - Círculos máximos e círculos menores:** Círculos máximos são quando os planos que interceptam a esfera passam pelo centro da esfera e são menores quando não for esse caso (COUTINHO, 2001, p. 82).

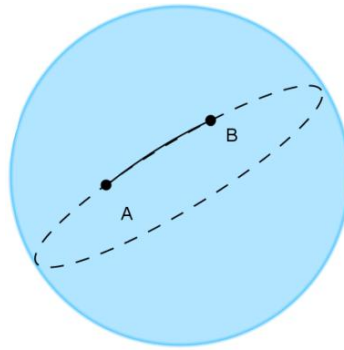
**Figura 40** - Círculo máximo e círculo menor de uma esfera.



Fonte: Autores.

**Definição 4.21 - Distância na Superfície Esférica:** Dados dois pontos distintos A e B sobre uma esfera, a distância entre esses pontos é a menor porção do círculo máximo que contém esses pontos (COUTINHO, 2001, p. 82).

**Figura 41** - Distância entre os pontos A e B sobre uma esfera.

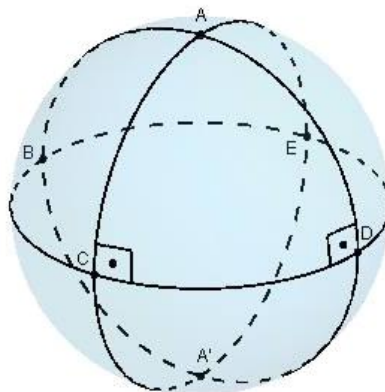


Fonte: Autora.

Desta forma, na Geometria Esférica, as “retas” são os círculos máximos da superfície esférica. Duas “retas” são ditas perpendiculares quando estão contidas em planos perpendiculares. De posse dessa informação e observando a figura 42, Coutinho (2001) descreve:

...os círculos máximos, ou seja, as “retas”  $ACA'$  e  $ADA'$ , perpendiculares à “reta”  $BCDE$ , intercetam-se nos pontos antípodas A e  $A'$  (...). A “reta” perpendicular às “retas”  $ACA'$  e  $ADA'$  é a polar comum dos pontos A e  $A'$ , e estes dois pontos são polos da “reta”  $BCDE$ . A distância de A ou  $A'$  a qualquer ponto da “reta”  $BCDE$  é constante. (COUTINHO, 2001, p.74)

**Figura 42** – Retas perpendiculares em geometria esférica.



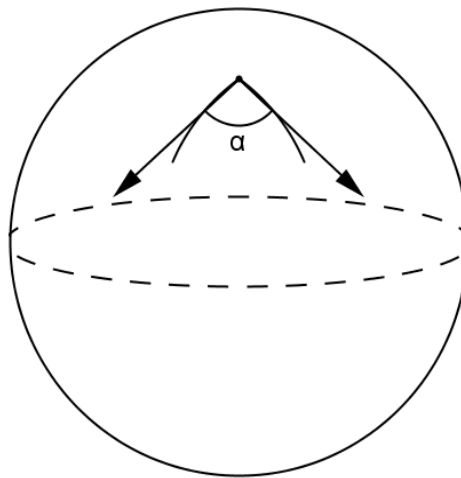
Fonte: Autora.

**Definição 4.22 – Polar:** Circunferência máxima, cujos pontos possuem distância constante a dois pontos antípodas.

**Definição 4.23 – Polo:** Ponto cuja distância a qualquer ponto pertencente a uma circunferência máxima de uma esfera é constante.

**Definição 4.24 - Ângulo esférico:** A interseção entre dois círculos máximos é definida como ângulo esférico.

**Figura 43 - Ângulo esférico numa superfície esférica.**

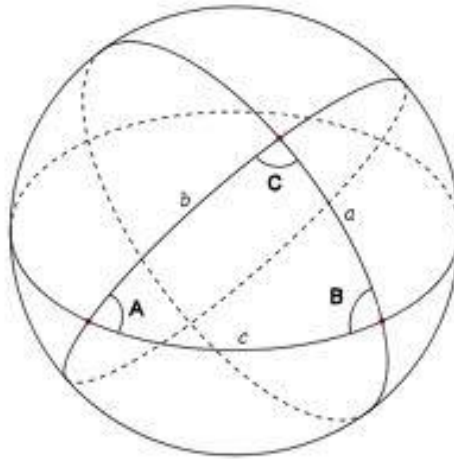


Fonte: Autora.

A medida do ângulo  $\alpha$  (figura 43) formado pela interseção de dois círculos máximos é a mesma do ângulo formado pelas semirretas tangentes a esses arcos.

**Definição 4.25 – Triângulo esférico:** Sejam três pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  na superfície de uma esfera, de modo que os três pontos não pertençam à mesma circunferência máxima. A figura formada pelos arcos de círculos máximos que unem esses pontos dois a dois chama-se triângulo esférico.

**Figura 44** - Triângulo esférico.



Fonte: <<http://astro.if.ufrgs.br/trigesf/trigesf.htm>>. Acesso em 05/2015.

No triângulo esférico, os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  são denominados vértices e os arcos de círculos máximos  $a$ ,  $b$  e  $c$ , que unem os vértices são os lados do triângulo. Por se tratar da medida de um arco, os lados dos triângulos esféricos são medidos em graus ou radianos.

Quanto aos lados, os triângulos esféricos podem ser classificados como:

- retilátero quando tem um lado medindo  $90^\circ$ ,
- birretilátero quando tem dois lados medindo  $90^\circ$  cada um,
- trirretilátero quando cada um dos lados mede  $90^\circ$ .

Os triângulos esféricos, de acordo com seus ângulos podem ser classificados em:

- retângulo se possui um ângulo reto,
- birretângulo se possui dois lados medindo  $90^\circ$  cada um,
- trirretângulo se possui os três ângulos retos.

A classificação dos triângulos esféricos quanto à medida de seus ângulos pode causar espanto devido ao fato de que na geometria euclidiana é impossível construirmos um triângulo com mais de um ângulo reto, mas Coutinho (2001) afirma que na geometria esférica, por ser independente do 5º postulado de



Euclides, possibilita que a soma dos ângulos de um triângulo esférico não seja constante, isto é, tal medida pode variar entre  $180^\circ$  e  $540^\circ$ , tendo um valor fixo dependendo do triângulo considerado.

Apresentamos a seguir propriedades dos Quadriláteros de Saccheri e dos Quadriláteros de Lambert, pois tais propriedades possibilitam a demonstração da soma dos ângulos internos de um triângulo esférico. Destacamos desde já que na Geometria Elíptica, os ângulos do topo de um Quadrilátero de Saccheri e o quarto ângulo de um Quadrilátero de Lambert não são retos.

**Teorema 4.8:** O segmento que liga os pontos médios da base e do topo de um quadrilátero de Saccheri é perpendicular a ambos.

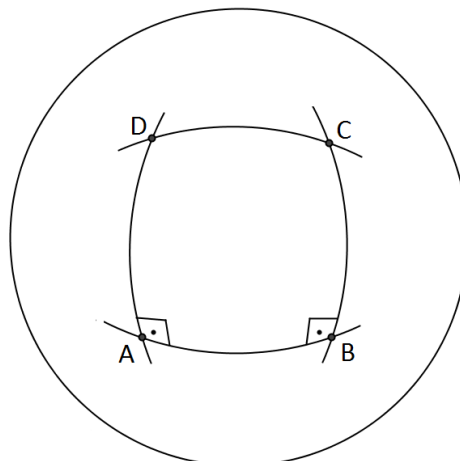
**Demonstração:** Sua demonstração será omitida, pois é análoga a demonstração do teorema 4.3, que afirma que tal propriedade é verdadeira na geometria hiperbólica.

**Teorema 4.9:** Em geometria esférica, os ângulos do topo do Quadrilátero de Saccheri são congruentes e obtusos.

**Demonstração:** Coutinho (2001).

De acordo com o ilustrado na figura 45 podemos observar a veracidade do teorema, “pois o círculo máximo CD tem concavidade voltada para AB e, portanto, os ângulos em C e D são obtusos e congruentes.” (Coutinho, 2001, p.76).

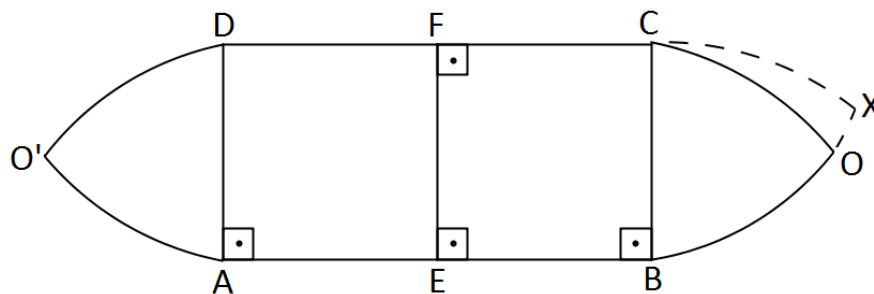
**Figura 45** - Ângulos do topo do Quadrilátero de Saccheri em geometria esférica.



Fonte: Autora.

Para a demonstração formal de tal teorema, utilizaremos a figura 46, onde ABCD é um Quadrilátero de Saccheri, EF é o segmento que une os pontos médios de sua base e de seu topo, O e O' são os polos de EF.

**Figura 46** – Construção geométrica para a determinação dos ângulos do topo do Quadrilátero de Saccheri.



Fonte: Autores

I) Congruência dos ângulos do topo – Da figura 46 temos que, unindo os pontos  $C$  e  $D$  ao ponto  $E$ , formamos os triângulo  $ADE$  e  $BCE$  congruente (caso LAL), conseqüentemente os triângulos  $DFE$  e  $CFE$  também o são (caso LLL), desta forma os ângulos  $B\hat{C}E$  e  $A\hat{D}E$  são congruentes da mesma forma que os ângulos  $E\hat{C}F$  e  $E\hat{D}F$ . Logo concluímos que:

$$B\hat{C}F = B\hat{C}E + E\hat{C}F = A\hat{D}E + E\hat{D}F = A\hat{D}F$$

Portanto os ângulos do topo do Quadrilátero de Saccheri são congruentes.

II) Os ângulos do topo são obtusos – Basta provar que os suplementos desses ângulos são agudos.

De acordo com a figura 46, supondo que o ponto  $X$  está situado em  $BO$  e é polo de  $BC$ , logo  $BX > BO$ , pois  $BO < EO$ . Note que, se  $X$  é polo de  $BC$ , então  $CX$  é perpendicular a  $BC$ , ou seja,  $X\hat{C}B = 90^\circ$ , o que implica em  $B\hat{C}O < 90^\circ$ , isto é,  $B\hat{C}O$  agudo, portanto o ângulo adjacente a ele  $B\hat{C}F$ , que é interno do topo do quadrilátero é obtuso.

**Teorema 4.10:** Na geometria esférica o Quadrilátero de Lambert tem o seu quarto ângulo obtuso e os lados do quadrilátero adjacentes a esse ângulo são maiores do que os correspondentes lados opostos.

**Demonstração:** Coutinho (2001).

Basta observar que um Quadrilátero de Saccheri é dividido, pela perpendicular comum à base e ao topo, em dois Quadriláteros de Lambert.

Como, pelo teorema 4.9, os ângulos do topo do Quadrilátero de Saccheri são obtusos, e com a divisão desse quadrilátero em dois Quadriláteros de Lambert, temos que cada um dos ângulos do topo é também o quarto ângulo de um Quadrilátero de Lambert. Portanto o Quadrilátero de Lambert tem o seu quarto ângulo obtuso.

Após a demonstração de que na geometria esférica o quarto ângulo de um Quadrilátero de Lambert é sempre obtuso, podemos afirmar que nessa geometria não existem retângulos.

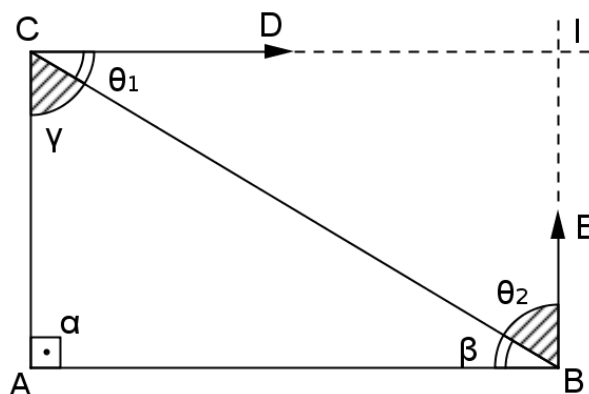
**Teorema 4.11:** A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo retângulo é maior que  $180^\circ$ .

**Demonstração:** Coutinho (2001).

Seja  $ABC$  um triângulo retângulo, como na figura 47. As retas  $CD$  e  $BE$  foram traçadas de modo que os ângulos  $\theta_1$  e  $\theta_2$  são congruentes, respectivamente aos ângulos  $\beta$  e  $\gamma$ . Desta forma os triângulos  $BCI$  e  $ABC$  são congruentes (caso ALA), o que é absurdo, pois não existe retângulo na geometria esférica. Desse resultado e utilizando o Teorema 4.10, segue que:

$$\alpha + \beta + \gamma > 180^\circ$$

**Figura 47** - Soma dos ângulos internos de um triângulo retângulo em geometria esférica.



Fonte: Autora.

**Teorema 4.12:** A soma das medidas dos ângulos de qualquer triângulo é maior do que  $180^\circ$ .

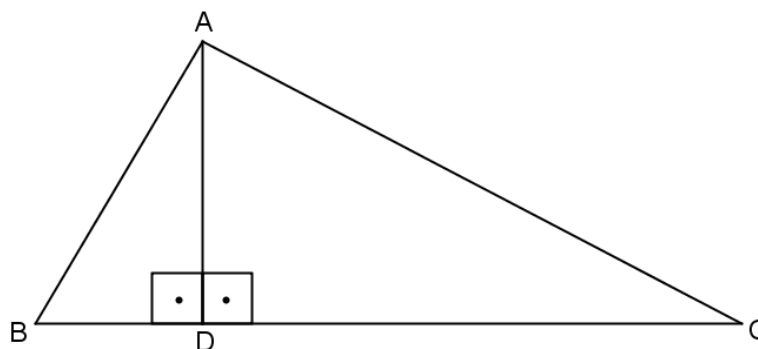
**Demonstração:** Coutinho (2001).

Acima, esta afirmação já foi demonstrada para triângulos retângulos, logo, basta provarmos que propriedade estende-se a quaisquer outros triângulos.

Seja  $ABC$  um triângulo não retângulo, como o da figura 48. Traçando o segmento  $AD$  perpendicular à base  $BC$ , o triângulo inicial fica dividido em dois triângulos retângulos em  $D$ ,  $ADC$  e  $ADB$ , cujas somas das medidas dos ângulos internos é maior que  $180^\circ$ .

Desta forma concluímos:  $2\hat{D} + \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} > 360^\circ$ , ou seja,  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} > 180^\circ$ .

**Figura 48** - Soma dos ângulos internos de um triângulo em geometria esférica.



Fonte: Autores.

Com base nas definições e teoremas elencados anteriormente é possível destacarmos algumas características da geometria esférica:

- não existem retas paralelas, pois quaisquer duas retas tem ponto de encontro, tendo em vista que são consideradas “retas” as circunferências máximas e estas se interceptam em dois pontos antípodas,
- as retas deixam de ser infinitas, pois sendo estas circunferências máximas, possuem um comprimento finito, porém podem ser percorridas indefinidamente sem que se chegue ao seu fim, logo são ilimitadas, e
- a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre maior que  $180^\circ$ .

Para solucionar o problema 3, além dos conceitos de geometria esférica, também são necessários conhecimentos sobre a superfície terrestre como o que são paralelos, meridianos, latitude, longitude, fuso-horário, entre outros. Apesar de tais conceitos serem frequentemente estudados no primeiro ano do Ensino Médio na disciplina de Geografia, julgamos prudente revisá-los, e o faremos a seguir.

#### 4.4.2 Conceitos referentes à superfície da Terra

Nosso planeta possui um formato muito próximo ao de uma esfera, por esse motivo muitos dos conceitos relacionados à sua geografia estão intimamente ligados à geometria esférica. Coutinho (2001) define alguns elementos necessários para a localização e cálculo de horário em diferentes posições na superfície da Terra.

**Definição 4.26 - Polos:** A Terra gira diariamente em torno do seu eixo de rotação. Os pontos em que esse eixo corta a sua superfície chamam-se, polo norte e polo sul.

**Definição 4.27 - Equador:** É o círculo máximo cujo plano é perpendicular ao eixo de rotação da Terra e, conseqüentemente, divide a Terra em duas partes iguais, denominadas hemisfério norte e hemisfério sul. A distância angular de um dos polos a qualquer ponto do Equador mede  $90^\circ$ .

**Definição 4.28 - Meridianos:** São os diversos semicírculos máximos, que vão de um polo ao outro.

**Definição 4.29 - Paralelos:** São os diversos círculos menores paralelos ao Equador.

**ATIVIDADE 5:** Após a leitura das definições de polos, Equador, meridianos e paralelos, faça ao que se pede:

a) Desenhe e identifique no globo terrestre, figura 49, os elementos descritos.

**Figura 49-** Globo terrestre.



Fonte: <<https://joserosafilho.wordpress.com./2011/10/04/>>. Acesso em 07/2015.

b) Determine qual circunferência máxima é perpendicular a duas circunferências máximas que passam pelos polos.

c) Considerando superfícies planas e superfícies esféricas, o que podemos afirmar sobre a posição relativa entre duas retas que são perpendiculares a uma terceira reta?

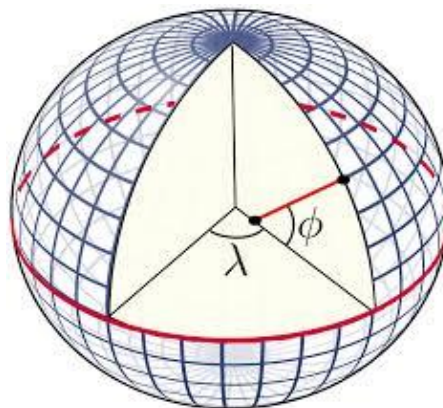
A atividade 5 permite verificar se os alunos identificam corretamente os elementos definidos e oportuniza uma análise a cerca da posição entre retas na geometria esférica.

Outros elementos indispensáveis para a localização na superfície terrestre são as coordenadas geográficas, na sequência trazemos seus conceitos básicos.

Qualquer ponto na superfície da Terra pode ser representado por coordenadas geográficas. Essas coordenadas são compostas por dois elementos: a latitude e a longitude. A latitude  $\phi$  é o arco entre o equador e o paralelo do local indicado, podendo assumir valores compreendidos entre  $0^\circ$  e  $90^\circ$  para o norte ou sul. A longitude  $\lambda$  é o arco entre o Meridiano de Greenwich e o meridiano do local indicado, podendo assumir valores entre  $0^\circ$  e  $180^\circ$  para leste ou oeste. Veja figura 50.

Note que a latitude é medida a partir do equador, enquanto a longitude tem por referência o Primeiro Meridiano, universalmente aceito, que passa pelo Observatório Astronômico de Greenwich, na Inglaterra (Coutinho, 2001, p.89).

**Figura 50** - Ângulos de latitude e longitude.



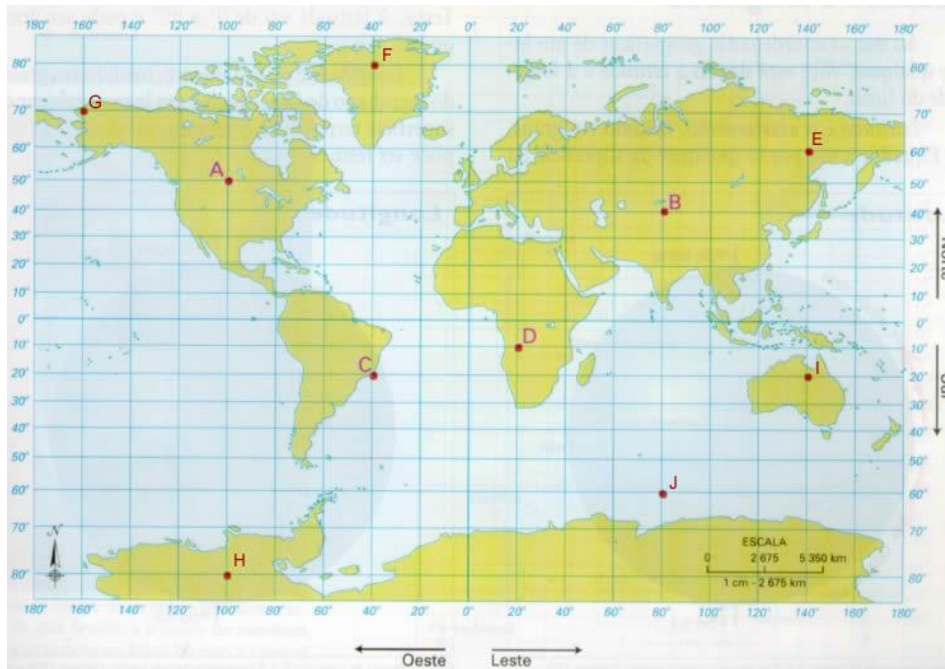
Fonte:

<[http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Latitude\\_and\\_longitude\\_graticule\\_on\\_an\\_ellipsoid.svg](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Latitude_and_longitude_graticule_on_an_ellipsoid.svg)>.

Acesso em 07/2015.

**ATIVIDADE 6:** Observando a figura 51, dê a localização de cada ponto de acordo com sua latitude e longitude:

**Figura 51** - Localização de acordo com a latitude e longitude.



Fonte: <[http://websmed.portoalegre.rs.gov.br/escolas/marcirio/coordenadas\\_geograficas/atividade1a.htm](http://websmed.portoalegre.rs.gov.br/escolas/marcirio/coordenadas_geograficas/atividade1a.htm)>. Acesso em 07/2015.

A=

F=

B=

G=

C=

H=

D=

I=

E=

J=

Com a atividade 6 esperamos que os alunos possam aprimorar a capacidade de determinar as coordenadas geográficas de diferentes pontos em um mapa.

A seguir descrevemos o procedimento adotado para o cálculo do horário em diferentes localidades da superfície terrestre, dependendo de suas coordenadas geográficas.

É bastante comum em transmissões televisivas ao vivo que um evento seja transmitido de dia num dado local, por exemplo, no Brasil, enquanto em outro país ocorra à noite. Sabe-se que essa diferença se dá devido à localização de cada país e pode ser calculada a partir de seus fusos horários.

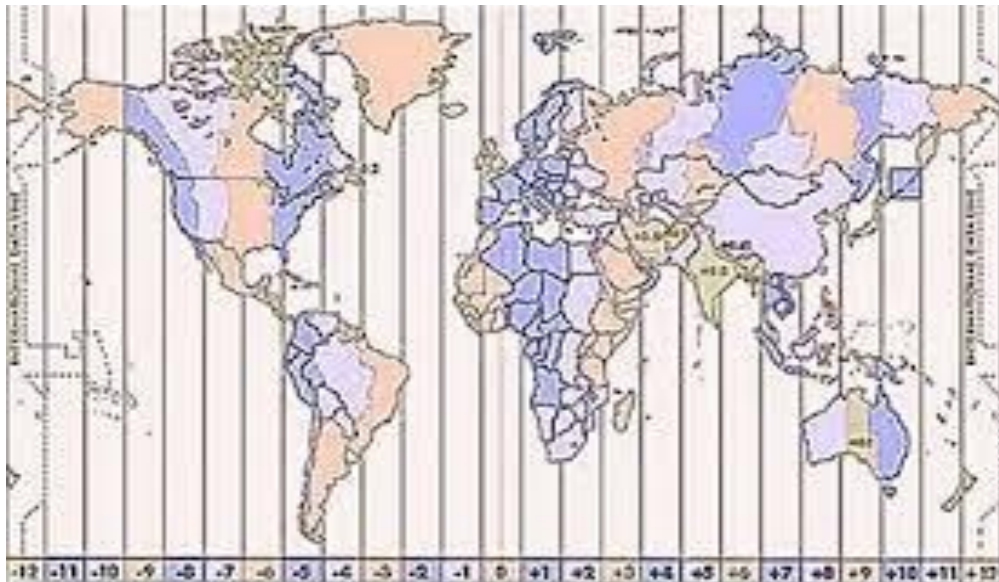
Ao girar em torno de seu próprio eixo, a Terra modifica continuamente a região exposta ao Sol. Supondo que a Terra demore exatamente



24 horas para efetuar uma rotação completa, estabeleceu-se que cada região de  $15^\circ$  ( $360^\circ/24$ ), compreendida entre dois meridianos, possui o mesmo fuso horário.

A referência dos fusos horários ocorre a partir do meridiano Greenwich que divide a Terra em hemisfério oriental e ocidental. A partir do Meridiano de Greenwich, as áreas que se encontram a leste do mesmo, aumentam uma hora a cada  $15^\circ$ ; enquanto que as áreas que estão a oeste do meridiano principal, diminuem uma hora a cada  $15^\circ$ . Observe a figura 52.

**Figura 52** - Fusos horários no globo terrestre.



Fonte: <<http://www.mundoeducacao.com/geografia/fusos-horarios.htm>>. Acesso em

**ATIVIDADE 7:** Com base no procedimento descrito anteriormente para o cálculo do horário em diferentes localidades da Terra, a partir de sua localização, resolva os seguintes problemas:

**a)** “Um navio deixa Sydney, Austrália, no dia 01 de março, às 10:00 horas e leva 10 dias e 3 horas na travessia para Valparaíso. Se Sydney está no fuso horário 10E e Valparaíso no fuso 5W, determine a data e hora de chegada.” (Coutinho, 2001, p.104).

**b)** “No dia 14 de junho, às 10:30 horas um navio parte de um porto A e, navegando para Leste durante 11 dias e 7 horas, cruza a Linha Internacional de Mudança de Data e chega ao porto B, depois de passar por sete fusos horários. A que data e hora o navio chegou ao seu destino?” (Coutinho, 2001, p.90)

Com a atividade 7 pretendemos que o aluno compreenda o procedimento necessário e consiga determinar o horário de diferentes localidades, dependendo de suas coordenadas geográficas.

Creemos que as informações apresentadas até aqui, são suficientes para solucionar o problema 3. A seguir descrevemos uma possível solução para o mesmo, destacamos que as soluções podem apresentar variações dependendo das aproximações adotadas durante os cálculos.

#### 4.4.3 Uma possível solução para o problema 3.

##### a) Qual a distância entre Macapá e Kampala?

Como ambas as localidades encontram-se sobre a linha do Equador é possível afirmar que a distância entre elas é um arco dessa circunferência máxima, logo primeiramente é necessário calcularmos o seu comprimento. Sendo a linha do Equador uma circunferência máxima de uma esfera de raio constante e igual a 6400 km, sendo  $C$  seu comprimento, temos:

$$C = 2 \cdot \pi \cdot 6400 \cong 40212,39 \text{ km}$$

A distância procurada é um arco de amplitude  $83^\circ$  de uma circunferência de 40212,39km de comprimento e pode ser calculada utilizando-se proporção. Denominando  $d$  a distância procurada, temos:

$$\frac{360^\circ}{83^\circ} = \frac{40212,39}{d} \rightarrow d \cong 9271,19 \text{ km}$$

Portanto a distância entre Macapá e Kampala é de aproximadamente 9.271,19 km.

Polya (1995) descreve as fases da resolução de um problema, destacando na quarta e última fase a importância de procurarmos uma possibilidade de verificação para o resultado encontrado. Realizamos essa verificação com o auxílio do site <<http://www.distanciacidades.com>> e encontramos que a distância entre as cidades de Macapá e Kampala é de 9.312,05 km.

A diferença entre a distância encontrada e a distância real é de 40,86 km. Consideramos que tal aproximação é aceitável, tendo em vista que realizamos aproximações nas coordenadas das localidades.

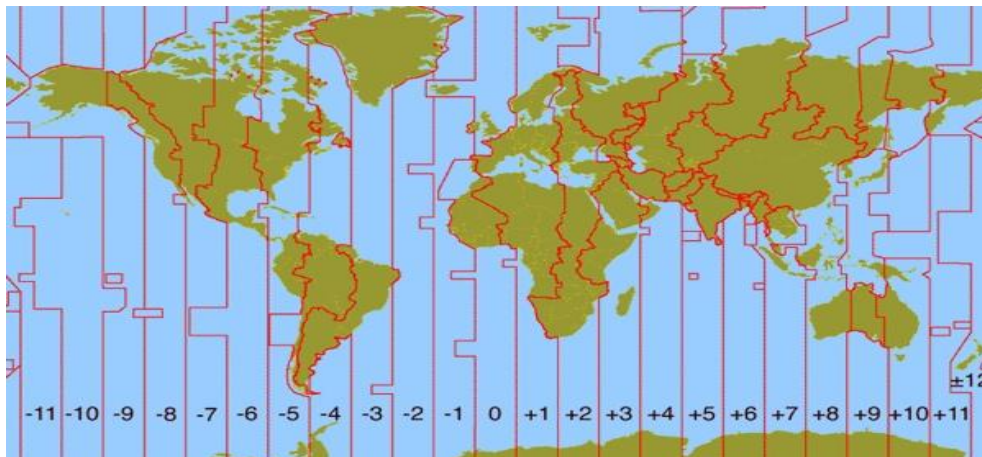
**b) Qual será o horário de chegada em Kampala, no horário local?**

Primeiramente vamos determinar o horário em Kampala no momento da decolagem.

Como Macapá possui latitude  $51^{\circ}$  O, está em uma região cujo horário é 3 horas atrasado em relação ao Meridiano de Greenwich, já Kampala localiza-se em uma região cujo horário é 2 horas adiantado em relação ao Meridiano principal, pois possui latitude  $32^{\circ}$  E, logo a variação entre o horário de Macapá e Kampala é de 5 horas. Portanto, no momento da decolagem, quando em Macapá o horário local for 11:00h em Kampala o relógio marcará 16:00h e como a viagem tem duração aproximada de 12h, o horário de chegada em Kampala será 4:00h do dia 13/02.

Ao realizarmos a conferência da solução encontrada, verificamos que tal não condiz com a realidade, apesar de todos os procedimentos empregados estarem corretos. Este fato se deu devido à diferença existente entre o fuso real e o fuso legal. Os fusos reais relacionam o horário local com sua exata localização, ou seja, de acordo com sua posição em relação aos meridianos. Já o fuso legal é o horário adotado por cada localidade. Os fusos legais estão distribuídos de acordo com a figura 53

**Figura 53** – Mapa de fusos horários legais.



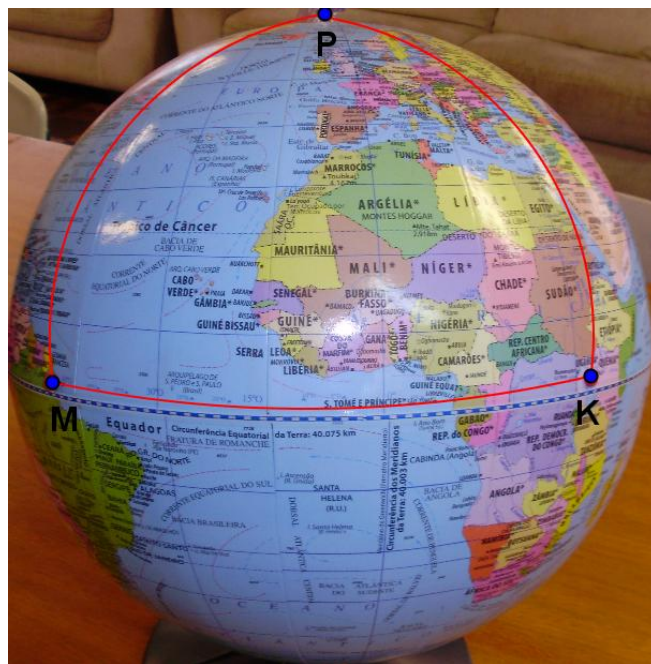
Fonte: <<http://revoada.net/10-fatos-pouco-conhecidos-sobre-fuso-horario/>>. Acesso: 03/2015.

Kampala, apesar de estar localizada em uma região que possui horário 2 horas adiantadas em relação ao Meridiano de Greenwich, adota o horário com 3 horas a mais, em relação a tal. Logo o horário de chegada em Kampala seria 5:00h do dia 13/02, devido à divergência existente entre o horário real e o horário legal de tal localidade.

**c)** Qual a trajetória descrita pelo avião durante o percurso completo? Faça um esboço.

Durante o percurso descrito, o avião descreve uma trajetória triangular, ressaltamos que se trata de um triângulo esférico e isósceles, como pode ser observado na figura 54.

**Figura 54** – Trajetória completa do problema 3.



Fonte: Autora.

**d)** Qual o ângulo formado entre os percursos Macapá/Kampala e Kampala/Polo norte? O que se pode afirmar sobre a soma dos ângulos internos da figura que representa a trajetória descrita pelo avião durante o percurso completo.

O ângulo procurado é reto, pois como a trajetória descrita foi a que possui a menor distância entre os pontos, temos que os trajetos Kampala/Polo norte

e Polo norte/ Macapá são arcos circunferências máximas que passa pelos polos, como admitimos que Macapá e Kampala encontram-se na Linha do Equador, a menor trajetória entre as duas cidades é um arco da Linha do Equador e tal Linha é perpendicular a todas as circunferências máximas que passam pelos polos.

A figura que representa a trajetória é um triângulo esférico e birretângulo, que como todo triângulo esférico possui a soma de seus ângulos internos maior que  $180^\circ$ .

**e)** Qual a distância total percorrida pelo avião?

A distância entre Macapá e Kampala é de aproximadamente 9.271,19 km, conforme cálculo realizado no item a. Já as distâncias entre Kampala e o Polo Norte e Polo Norte e Macapá são iguais a um quarto de uma circunferência máxima de raio igual a 6400 km, pois admitimos inicialmente que a Terra tenha um formato esférico com raio constante e igual a 6400 km.

Logo a distância procurada é a soma de 9.271,19 km com a metade da circunferência máxima calculada no item a, ou seja,  $9.271,19 \text{ km} + 20.106,20 \text{ km}$ . Portanto a distância total percorrida pelo avião foi 29.377,39 km aproximadamente.

**f)** É possível que outro avião descreva uma rota ortodrômica paralela a descrita pelo avião do problema durante o trajeto Macapá/Kampala?

Uma rota ortodrômica trata-se de um arco de circunferência máxima e duas circunferências máximas sempre se interceptam em dois pontos diametralmente opostos ou antípodas. Sendo assim, não é possível que outro avião descreva uma rota ortodrômica paralela à descrita pelo avião do problema durante o trajeto Macapá/Kampala.

Na sequência trazemos algumas atividades de comparação entre as principais características das geometrias euclidiana, hiperbólica e esférica.

#### 4.5 ATIVIDADES DE COMPARAÇÃO ENTRE AS GEOMETRIAS

As atividades dessa seção possibilitam a verificação de algumas propriedades que foram demonstradas anteriormente e podem ser utilizadas como

alternativa quando os conhecimentos matemáticos empregados nas demonstrações não forem conhecidos pelos alunos. Algumas atividades recomendam construções sobre superfícies de isopor, que devem ser semelhantes às da figura 20.

**ATIVIDADE 8:** Um atleta, durante um treinamento, sai de um parque, corre 10km na direção sul, depois virou a oeste e correu mais 10km, então virou novamente e correu mais 10km ao norte, concluindo seu percurso. Surpreendeu-se ao perceber que ao final de seu percurso ele retornou ao ponto de partida.

a) Representa em uma folha de papel o percurso descrito acima. É possível que o atleta tenha retornado ao ponto de partida?

b) Desenhe o mesmo percurso sobre a superfície de uma esfera. O atleta pode ter retornado ao ponto de partida?

c) Comparando os percursos realizados sobre o plano e sobre a esfera, o que se pode afirmar quanto à distância percorrida?

Com essa atividade, que é uma adaptação do famoso problema do curso, objetivamos que os alunos comparem conceitos da geometria euclidiana e esférica, analisando os conceitos de trajetórias e distâncias percorridas nas diferentes superfícies.

**ATIVIDADE 9:** Caminhando em linha reta infinitamente é possível retornar ao ponto de partida?

Com esse questionamento pretendemos provocar uma reflexão a respeito de onde será feita esta caminhada. Esperamos que os alunos identifiquem que em superfícies planas não seria possível realizar tal atividade. Porém, se levarmos em consideração que existem outras superfícies que não são planas, a resposta para o questionamento pode ser positiva, por exemplo, em uma superfície esférica.

Também podem surgir questionamentos a respeito da distinção entre os significados entre infinito e ilimitado. Se após uma longa caminhada retorna-se ao ponto de partida, indica que na geometria esférica a “reta” é finita, porém é

possível caminhar sobre ela dando infinitas voltas, o que mostra que ela é ilimitada. (SILVA, 2011).

**ATIVIDADE 10:** O substituto mais conhecido para o quinto postulado de Euclides é o seguinte: “(Axioma de Playfair) Por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única reta paralela à reta dada” (BARBOSA, 1995, p.9). Lembrando que “Duas retas são paralelas se, e somente se, são coincidentes (iguais) ou são coplanares e não têm nenhum ponto comum”. (DOLCE e POMPEO, 2005, p.53).

Realize as atividades propostas a seguir.

**a)** Construa nas três diferentes superfícies de isopor retas paralelas em seguida anote suas observações.

Leia os seguintes postulados:

- “Forma de Playfair do Postulado das Paralelas: por um ponto fora de uma reta, existe exatamente uma reta paralela à reta dada”. (BERLINGHOFF e GOUVÊA, 2010, p.198).
- Postulado de Lobachevsky: “Por um ponto  $P$  fora de uma reta  $r$  passa mais de uma reta paralela à reta  $r$ ”. (COUTINHO, 2001, p.40)
- Postulado de Riemann: “Quaisquer duas retas em um plano têm um ponto de encontro”. (COUTINHO, 2001, p.73)

**b)** Analisando suas observações sobre a tentativa de desenhar retas paralelas nas diferentes superfícies, e comparando com os três postulados acima, identifique qual postulado é indicado a cada superfície.

Com a atividade 10 esperamos que os alunos identifiquem o postulado adequado a cada superfície, bem como compreendam que nenhuma das afirmações é incorreta, apenas aplicam-se a superfícies diferentes.

**ATIVIDADE 11:** Pode-se definir um triângulo como formado por três geodésicas concorrentes. Observe os triângulos na figura 55

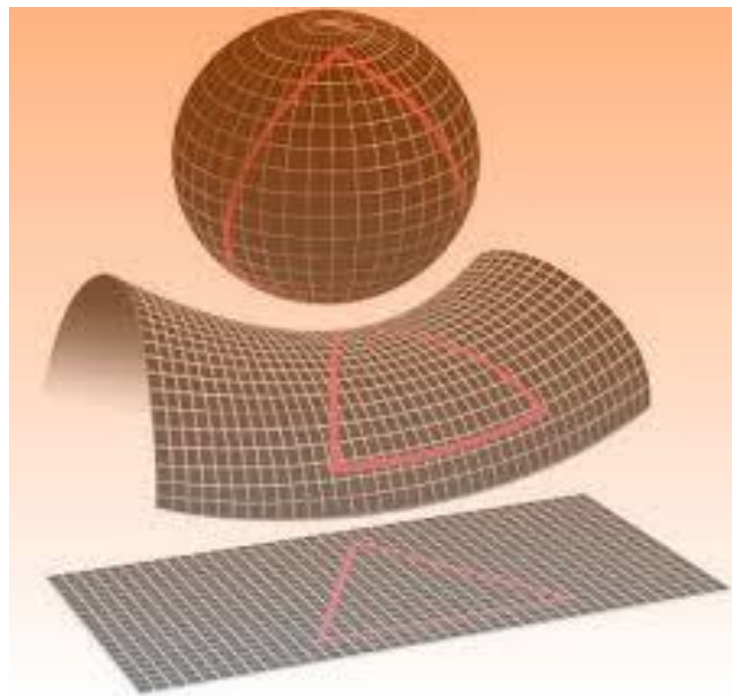
a) A definição mais comum para triângulos no plano é a seguinte: um triângulo é formado por três segmentos de retas que concorrem. Levando em consideração que ambas as definições estão corretas, o que podemos afirmar?

b) Os triângulos podem ser classificados, de acordo com a quantidade de ângulos retos como:

- retângulo: quando possui um ângulo reto;
- birretângulo: quando possui dois ângulos retos; e
- trirretângulos: quando possui três ângulos retos.

Construa, nas três superfícies de isopor triângulos com as características descritas acima. A seguir anote suas conclusões destacando qual (ais) são as quantidades de ângulos retos que triângulos contidos em cada uma das superfícies podem apresentar.

**Figura 55** - Triângulos em superfícies com diferentes curvaturas.



Fonte: <<http://www.portalescolar.net/2011/03/googol-googolplex-grau-geometria-nao.html>>. Acesso em 07/2015.



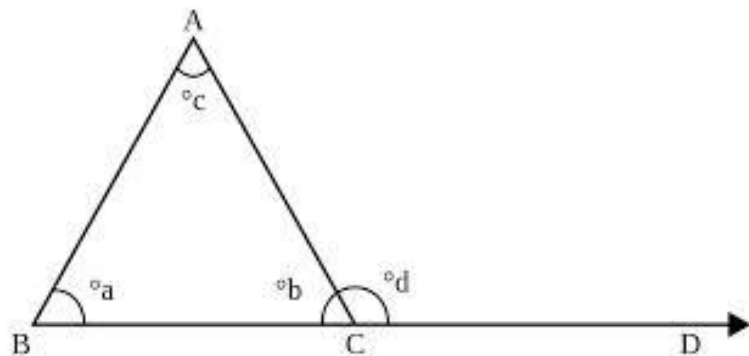
O objetivo dessa atividade é destacar que somente em superfícies planas um triângulo é formado por segmentos retos que unem seus vértices. Em superfícies que não tenham curvatura nula, os segmentos de menor comprimento que unem os vértices de um triângulo são curvas. Buscamos evidenciar também, que em geometria esférica, ao contrário da euclidiana, é possível que um triângulo tenha mais de um ângulo reto.

**ATIVIDADE 12:** Soma dos Ângulos Internos de Triângulos.

l) Uma afirmação considerada equivalente ao quinto postulado de Euclides é “A soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual a dois ângulos retos” (BARBOSA,1995, p.11).

**Veja a demonstração:** Considere o triângulo da figura 56 com vértices A, B e C e ângulos internos a, b e c.

**Figura 56** - Soma dos ângulos internos de um triângulo.



Fonte:< [http://www.profcardy.com/cardicas/angulos\\_externos.php](http://www.profcardy.com/cardicas/angulos_externos.php)>. Acesso em 07/2015.

Em todo triângulo, qualquer ângulo externo é igual à soma dos ângulos internos não adjacentes a ele. Temos que d é o ângulo externo adjacente a C e aplicando a propriedade do ângulo externo, vem que

$$d = a + c. \quad (6)$$

Note também que b e d são ângulos suplementares, logo

$$b + d = 180. \quad (7)$$

Portanto, substituindo (6) em (7), segue que  $a + b + c = 180^\circ$  □.

**a)** Após a análise da afirmação e demonstração acima você concorda que a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual a  $180^\circ$ ?

**b)** Construa um triângulo qualquer em cada uma das três superfícies de isopor, utilizando alfinetes e elásticos coloridos. Após essa construção, identifique os ângulos de cada triângulo com as letras a, b e c e com o auxílio do transferidor, meça aproximadamente os ângulos internos dos triângulos e complete o quadro:

**Quadro 4** – Soma dos ângulos internos de triângulos.

Curvatura	Nula	Positiva	Negativa
Ângulo a			
Ângulo b			
Ângulo c			
Soma dos ângulos			

Fonte: Autora.

**c)** O que foi observado na soma dos ângulos internos dos triângulos desenhados?

II) Construa mais dois triângulos em cada uma das três superfícies, um interno e outro externo ao triângulo já existente. Meça os ângulos dos novos triângulos, faça a soma de seus ângulos internos e responda:

**a)** O que acontece com a soma dos ângulos dos triângulos desenhados na superfície plana?

**b)** O que foi observado na soma dos ângulos da superfície com curvatura positiva?

**c)** E na superfície com curvatura negativa, o que acontece com a soma dos ângulos internos dos triângulos?

**d)** O teorema que afirma que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a  $180^\circ$  está incorreto? O que você acrescentaria para que não houvesse dúvida da sua veracidade?

Com a atividade 12 esperamos que os alunos observem que a soma dos ângulos internos de triângulos é igual a  $180^\circ$  apenas para triângulos em superfícies planas e que o mesmo não ocorre em triângulos em superfícies com curvaturas não nulas. Espera-se também que os alunos percebam que a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico são proporcionais às distâncias entre seus vértices e que nos triângulos em superfícies hiperbólicas ocorre exatamente o contrário.

**ATIVIDADE 13:** Complete o quadro com as características das geometrias: euclidiana, hiperbólica e esférica.

**Quadro 5** – Características das geometrias: euclidiana, hiperbólica e esférica.

Conceitos e Propriedades	Geometria Euclidiana	Geometria Hiperbólica	Geometria Esférica
Superfícies à qual se aplica.			
Postulado das paralelas adequado			
Menor distância entre dois pontos			
Triângulos com ângulos correspondentes iguais são...			
A soma dos ângulos internos de um triângulo é...			
Com relação à distância entre elas, duas retas paralelas são...			

Com o preenchimento da tabela, esperamos que o aluno retome os conceitos analisados nas atividades anteriores e seja capaz de comparar as características comuns e particulares das geometrias estudadas, bem como aplicar os conhecimentos adquiridos em diferentes contextos.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Não há como afirmarmos que uma geometria é mais correta do que outra, apenas precisamos identificar para qual tipo de superfície cada uma delas é indicada. A geometria euclidiana é apropriada para situações que envolvam superfícies planas, ou seja, com curvatura nula. Já a geometria indicada para solucionar problemas em superfícies esféricas é a geometria esférica, enquanto situações em superfícies com curvatura negativa são modeladas pela geometria hiperbólica.

No que diz respeito às geometrias estudadas no estado do Paraná, segundo consta no Caderno de Expectativa de Aprendizagem, ao concluir a educação básica é necessário que o aluno:

- Reconheça a geometria hiperbólica e a esférica como sistemas geométricos nos quais o postulado euclidiano das paralelas não se verifica.
- Relacione a geometria hiperbólica e esférica com a geometria euclidiana, a partir da negação do postulado das paralelas.
- Relacione a geometria hiperbólica com a negação da unicidade de retas paralelas e a geometria esférica com a negação da existência de retas paralelas.
- Reconheça a existência de diversos modelos e sistemas geométricos logicamente consistentes, além do euclidiano.
- Identifique a curvatura nula, positiva e negativa, como sendo as curvaturas das superfícies plana, esférica e hiperbólica, respectivamente.
- Compreenda o conceito de reta (geodésica) e de distância nas superfícies esférica e hiperbólica.
- Reconheça triângulos esféricos e hiperbólicos e a propriedade da soma de seus ângulos internos.
- Reconheça aplicações das geometrias não-euclidianas nos problemas do espaço real.
- Resolva situações-problema envolvendo as geometrias não-euclidianas. (PARANÁ, 2012).

Acreditamos que nossa proposta didática contribuirá para a efetivação do ensino das geometrias hiperbólica e esférica no Ensino Médio. Espera-

se também que os alunos compreendam os conteúdos das geometrias hiperbólica e esférica, saibam aplicá-lo, apropriem-se de seu significado e, principalmente, possam resolver problemas utilizando-o em situações-problemas reais.

Destacamos que a proposta didática que apresentamos não foi aplicada para possibilitar uma análise quanto a sua eficácia. Pretendemos futuramente dar continuidade ao trabalho, aplicando, analisando e publicando os resultados obtidos.

## REFERÊNCIAS

ALLEVATO, Norma Suely Gomes; ONUCHIC, Lourdes de la Rosa. Ensinando matemática na sala de aula através da resolução de problemas. Boletim GEPEM, n.55, p.1- 19, jul./dez. 2009.

BARBOSA, João Lucas Marques. Geometria hiperbólica. 20º Colóquio Brasileiro de Matemática. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 24 - 28 de julho, 1995.

BARBOSA, João Lucas Marques. Geometria euclidiana plana. 11.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

BERLINGHOFF, Willian P. GOUVÊA, Fernando Q. A matemática através dos tempos: um guia fácil a prático para professores e entusiastas. 2. Ed. São Paulo: Blücher, 2010.

CARMO, Manfredo Perdigão do. Geometrias não-euclidianas. Revista Matemática Universitária, n.6, p. 25-49, 1987.

CARVALHO, Maria Aparecida da Silva de; CARVALHO, Ana Márcia Fernandes Tucci de. O ensino de geometria não euclidiana na educação básica. Anais XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática – CIAEM, Recife, 26 – 30 de julho, 2011.

COURANT, Richard. ROBBINS, Herbert. O que é matemática?. Rio de Janeiro: Ciência Moderna LTDA., 2000.

COUTINHO, Lázaro. Convite às geometrias não-euclidianas. Rio de Janeiro: Interciência, 2001.

DANTE, Luiz Roberto. Didática da resolução de problemas de matemática. 2. ed. São Paulo: Ática, 1991.

DÁRIO, Douglas Francisco. Geometrias não euclidianas: elíptica e hiperbólica no ensino médio. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). UTFPR, Pato Branco – PR, 2014. Disponível em: [http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/862/1/PB\\_PROFMAT\\_M\\_Dario,%20Douglas%20Francisco\\_2014.pdf](http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/862/1/PB_PROFMAT_M_Dario,%20Douglas%20Francisco_2014.pdf). Acesso em: 09/2015.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. Fundamentos de matemática elementar: geometria plana. 8. ed. São Paulo: Atual, 2005.

EUCLIDES. Os elementos. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

EVES, Howard. Introdução à história da matemática. Campinas: Editora da UNICAMP, 2004.

FERREIRA, Luciano. Uma proposta de ensino de geometria hiperbólica: “construção do plano de Poincaré” com uso do software Geogebra. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática) – UEM, Maringá, 2011. 291f. Disponível em: <http://www.dma.uem.br/igi/arquivos/artigo1.pdf>. Acesso em: 01/2015.

GROENWALD, Lisete Oliveira; SILVA, Carmen Kaiber da; MORA, Castor David. Perspectivas em Educação Matemática. *Acta Scientiae*, v.6, n.1, p. 37-56, jan./jun. 2004.

MARATTA, Roberto Carlos; SOUZA, Luciane de Fátima Rodrigues de. Abordagem de uma aplicação das geometrias não euclidianas. *Revista Eletrônica de Educação e Ciência*, v. 01, n. 01, p.18-50, set. 2011.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. *Boletim de Educação Matemática*, v. 25, n. 41, p. 73-98, dez. 2011.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação do Paraná. Diretrizes Curriculares da Educação Básica: Matemática. SEED: Curitiba, 2008.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação do Paraná. Caderno de Expectativa de Aprendizagem. SEED: Curitiba, 2012.

PAVANELLO, Regina Maria. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências. *Revista Zetetiké*, v. 1, n. 1, p. 7-17. 1993

POLYA, George. A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático. Rio de Janeiro: Editora Interciência, 1995.

RIPPLINGER, Heliane Mariza Grzybowski; BASSOI, Tânia Stella. O Ensino da geometria esférica no ensino médio: Uma abordagem metodológica e teórica. *Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM*, Salvador, 7 - 9 de Julho, 2010.

SEARA DA CIÊNCIA, Órgão de divulgação científica e tecnológica da Universidade Federal do Ceará. A CURVATURA DE GAUSS E O NÚMERO DE EULER, s.d. Disponível em <<http://www.seara.ufc.br/donafifi/gausseeuler/gausseuler.htm>>. Acesso em: 13/11/2014.

SILVA, Karolina Barone Ribeiro da. Noções de geometrias não euclidianas: hiperbólica, da superfície esférica e dos fractais. Curitiba: CRV, 2011.