UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CCE -DMA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL
EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Uma Introdução ao Estudo de Funções Complexas

MICHAEL PERES DOS SANTOS

Orientadora: Profa. Dra. Maria Elenice Rodrigues Hernandes

Maringá-PR

Agosto de 2017

MICHAEL PERES DOS SANTOS

Uma Introdução ao Estudo de Funções Complexas

Trabalho de Conclusão de Curso em forma de dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.
Área de concentração: Álgebra.

Orientadora: Profa. Dra. Maria Elenice Rodrigues Hernandes

Maringá
Agosto de 2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Biblioteca Setorial BSE-DMA-UEM, Maringá, PR, Brasil)

Santos, Michael Peres dos
S237i Uma introdução ao estudo de funções complexas / Michael Peres dos Santos. -- Maringá, 2017.
85 f. : il.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Maria Elenice Rodrigues Hernandes.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, 2017.

1. Números complexos. 2. Funções complexas. 3. Teorema Fundamental da Álgebra. 4. Complex numbers. 5. Complex functions. 6. Algebra Fundamental Theorem. I. Hernandes, Maria Elenice Rodrigues, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT. III. Título.

CDD 22.ed. 515.92

MICHAEL PERES DOS SANTOS

UMA INTRODUÇÃO AO ESTUDO DE FUNÇÕES COMPLEXAS

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:

Profa. Dra. Maria Elenice Rodrigues Hernandes
DMA/Universidade Estadual de Maringá (Presidente)

Prof. Dr. Valter Soares de Camargo
Universidade Estadual do Paraná - Paranavaí

Rodrigo Mart

Prof. Dr. Rodrigo Martins
DMA/Universidade Estadual de Maringá

Aprovado em: 1 de agosto de 2017.
Local de defesa: Auditório do DMA, Bloco F67, campus da Universidade Estadual de Maringá.

Dedico este trabalho à minha família, esposa e filhos pelo incentivo, companheirismo, pela compreensão e por serem uma coluna de sustentação para todos os momentos das nossas vidas.

Agradecimentos

Ao concluir este trabalho, agradeço principalmente ao meu Deus pelo conforto e consolo nas tribulações.

À minha família pelo apoio e compreensão.

À minha amada esposa Marcia pelo apoio, carinho, dedicação e orações.

Aos meus filhos Vinícius e João Gabriel por compreenderem a minha ausência nesse período.

Ao ministério de intercessão da minha igreja e aos meus pastores Augusto e Raquel pelas incessantes orações.

Aos meus colegas de mestrado, especialmente a Ana Paula e Fernando pelo grande apoio e momentos de estudos juntos.

A todos os professores pela sua dedicação e empenho nas ministrações de suas aulas.

À minha professora e orientadora Maria Elenice Rodrigues Hernandes, pela orientação deste trabalho e principalmente por ter feito a diferença na minha vida.

À CAPES pelo imprescindível apoio financeiro.

“Porque Deus amou o mundo de tal maneira

que deu o seu Filho unigênito,

para que todo aquele que nele crê não pereça,

mas tenha a vida eterna. ”

João 3:16.

Resumo

A presente dissertação tem como objetivo o estudo do conjunto dos números complexos com o propósito de apresentar algumas propriedades especiais de funções complexas. Fazendo inicialmente um resgate histórico do surgimento dos números complexos, que contou com a colaboração de grandes ícones matemáticos como Tartaglia, Cardano, Bombelli, Euler, Gauss, entre outros. Apresentamos as principais propriedades dos números complexos como base para a introdução ao estudo das funções complexas. Neste contexto enunciamos um dos principais teoremas da matemática, o chamado Teorema Fundamental da Álgebra, em seguida exploramos algumas classes especiais de funções complexas, dentre elas, a exponencial, as trigonométricas, os logaritmos, potências complexas e as transformações de Möbius, estabelecendo semelhanças e diferenças entre o caso real e o caso complexo. Finalizamos com algumas aplicações que podem ser exploradas no ensino médio sob a perspectiva dos números complexos.

Palavras chave: Números complexos, funções complexas e Teorema Fundamental da Álgebra.

Abstract

The aim of this dissertation is to study complex numbers with the purpose of presenting some special properties of complex functions. Initially with a historical rescue of complex numbers, that counted on the collaboration of great mathematical icons like Tartaglia, Cardano, Bombelli, Euler, Gauss, and others. We present the main properties of the complex numbers as basis for the study of complex functions. In this context we enunciate one of the main theorems of mathematics, the so-called Algebra Fundamental Theorem, and we explore some special classes of complex functions, among them, the exponential, trigonometrics, logarithms, powers functions and Möbius Transformations, establishing similarities and differences between the real case and the complex case. We finish with some applications that can be explored in high school from the perspective of complex numbers.

Keywords: Complex numbers, complex functions and Algebra Fundamental Theorem.

Sumário

Introdução

O foco desta dissertação é o estudo de dois temas centrais na matemática: os números complexos e funções. Temas estes que talvez devido a um certo nível de abstração, leve os estudantes a terem dificuldades em compreender e saber manipular tais conceitos. Não temos a pretensão de explorar com todos os detalhes estes dois assuntos. Nosso propósito é apresentar os principais conceitos sobre o conjunto dos números complexos, denotado por $\mathbb{C}$, de modo a ter o suporte necessário para iniciar o estudo de funções definidas sobre os complexos. Nos surpreender com a riqueza que este conjunto nos apresenta, que vai muito além de apenas estender o conjunto dos números reais e permitir calcular as raízes de polinômios de grau 2, que é essencialmente o que ficamos com a impressão no ensino médio.

Neste trabalho veremos que qualquer polinômio com coeficientes em $\mathbb{C}$, admite raiz complexa. Podemos definir o que significa a raiz quadrada e o logaritmo de um número real negativo. Dar sentido ao que significa, por exemplo, os números 2^i e $(5-3i)^{7-4i}$, em que $i = \sqrt{-1}$ é o complexo imaginário. Ficar incrédulo ao observar que i^i é um número real e que $1^i = 1$, mas nem sempre 1 elevado a um número complexo é 1.

Veremos que diferentemente do caso real, as "funções" complexas raiz n-ésima, logaritmo e potência complexa de um número complexo são o que denominamos de funções multivalentes, ou seja, dado $z \in \mathbb{C}$ estas funções podem assumir diferentes valores em $\mathbb{C}$, e não um único como na definição usual de função. Todavia as funções polinomiais, racionais, exponencial e trigonométricas complexas são funções como usualmente conhecemos (univalentes). Todas estas funções complexas, inclusive as multivalentes, quando restritas ao caso real, coincidem com as funções reais usuais. Estas comparações entre funções reais e complexas, quais propriedades são ou não preservadas no caso complexo, serão princípios norteadores neste trabalho.

O conjunto dos números complexos revolucionou o conhecimento científico, e por ser tão inovador levou muito tempo para ser plenamente aceito pela comunidade matemática.

Faremos um breve resumo da história dos números complexos como motivação ao leitor para se aprofundar um pouco mais em seu estudo. Para maiores detalhes ver por exemplo [1], [6] e [4].

Foi no período do Renascimento que abrange os séculos XIV, XV e XVI que também na matemática, como nas artes, literatura, música entre outros, tivemos importantes avanços nesta ciência. A evolução dos conjuntos numéricos não se deu de forma linear como apresentamos atualmente. Primeiramente surgiu o conjunto dos números naturais, posteriormente os inteiros, os racionais, depois os irracionais, na sequência os reais e finalmente o conjunto dos números complexos. A história nos mostra que quando iniciaram alguns avanços no conjunto dos números complexos, os matemáticos ainda não dominavam por completo o conjunto dos números inteiros, nem os irracionais.

Equivocadamente somos levados a pensar que os números complexos surgiram da impossibilidade de se calcular raízes de polinômios do segundo grau. Entretanto na época, quando os matemáticos se deparavam com a raiz quadrada de um número negativo eles simplesmente diziam que não existia a solução. Ao passo que na busca para determinar as raízes de polinômios de grau 3, se fez necessário compreender o que significava a raiz quadrada de um número negativo, culminando com a necessidade de se definir um conjunto que permitisse responder esta questão.

Esta história se desenvolve na Itália dos séculos XV e XVI, com o qual destacamos os matemáticos Niccoló Fontana (1500-1557) conhecido como Tartaglia, Scipione del Ferro (1465-1562), Girolamo Cardano (1501-1576) e Ludovico Ferrari (1522-1565). Todos eles desenvolveram métodos para resolução de equações do terceiro e/ou quarto graus.

Uma grande disputa matemática se travou entre Cardano e Tartaglia sobre a originalidade quanto a um método de resolução de equações do terceiro grau do tipo $x^3 + ax = b$. Ver também [6], [4], [9] e [10]. Enfim, Tartaglia e Cardano provaram que

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \tag{1}$$

é uma solução da equação $x^3 + px + q = 0$.

Veja que esta não é uma fórmula simples, e a medida que ela foi sendo utilizada em casos particulares é que foram surgindo os problemas. Cardano em 1545 tentou resolver a equação $x^3 - 15x - 4 = 0$. Pela expressão (1) temos que $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ é uma solução da cúbica. Facilmente verificamos que as soluções da equação $x^3 - 15x - 4 = 0$ são: $4, -2 + \sqrt{3}$ e $-2 - \sqrt{3}$ que são números reais. Então, de alguma maneira era necessário compreender a raiz quadrada de um número negativo, para que se pudesse compreender a solução que a expressão (1) estava apresentando. Quem se lançou para resolver esse impasse foi o engenheiro hidráulico Rafael Bombelli (1526-1572), nascido em Bolonha na Itália. Em seu livro *L'Algebra parte Maggiore dell'Arithmetica* de 1572, ele apresentou que os números $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$ e $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ são da forma $a + \sqrt{-b}$ e $a - \sqrt{-b}$, respectivamente, e que pode se deduzir que $a = 2$ e $b = 1$. Assumindo isto, veja que $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4$ que é a solução já conhecida da cúbica em questão. Observe como uma determinada solução extremamente simples, pode ficar mascarada numa expressão complicada. Para uma justificativa de como se deduz que $a = 2$ e $b = 1$, veja [11].

Bombelli estabeleceu as seguintes regras para se trabalhar com $\sqrt{-1}$:

$$\begin{aligned}
(\sqrt{-1}) \cdot (\sqrt{-1}) &= -1, \\
(-\sqrt{-1}) \cdot (\sqrt{-1}) &= 1, \\
(-\sqrt{-1}) \cdot (-\sqrt{-1}) &= -1, \\
(\pm 1) \cdot (\sqrt{-1}) &= \pm\sqrt{-1}, \\
(\pm 1) \cdot (-\sqrt{-1}) &= \mp\sqrt{-1}.
\end{aligned}$$

Além disso, estabeleceu a regra para a soma de números do tipo $m + n\sqrt{-1}$:

$$(a + b\sqrt{-1}) + (c + d\sqrt{-1}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{-1}.$$

Com isso, Bombelli construiu os alicerces de sustentação da teoria dos números complexos.

Em 1637, René Descartes (1596 - 1650) importante matemático e filósofo francês, na terceira parte de seu livro *La Géométrie*, ele trata da resolução de equações de grau maior que dois. E aceita que uma equação polinomial tem tantas raízes quanto o seu grau, se admitirmos as raízes imaginárias (ver [4]). Descartes batizou os conhecidos números imaginários quando afirmou em seu livro que: "nem as raízes verdadeiras nem as falsas (negativas) são sempre reais; por vezes elas são imaginárias".

Até então, os números complexos ainda não eram bem aceitos, até que o grande matemático Leonhard Paul Euler (1707-1783), nascido na Basiléia na Suíça, definido como: "Calculava com a mesma facilidade com que os outros respiram", consolidou as bases do conjunto dos números complexos. Ele estabeleceu a notação de i para o número $\sqrt{-1}$ pela primeira vez, em um artigo de 1777. Euler também utilizou a letra e para representar a base dos logaritmos naturais cujo valor aproximado é $2,71828\cdots$. Euler descobriu que qualquer número complexo não nulo (inclusive os reais) possui exatamente n raízes n-ésimas, com n um número natural. Provou ainda que

$$\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta) = e^{i\theta}. \tag{2}$$

O que é surpreendente, como comentado em [6], pois o número e que nasceu do estudo de juros, aparece agora numa relação envolvendo potências imaginárias e funções trigonométricas. No caso particular em que $\theta = \pi$ temos a belíssima equação de Euler $e^{i\pi} = -1$.

Não podemos falar sobre os números complexos, sem mencionar outro grande matemático alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Ele provou o conhecido Teorema Fundamental da Álgebra que afirma que toda equação polinomial com coeficientes complexos admite uma raiz complexa. Muitos matemáticos acreditavam neste resultado mas não tinham uma prova convincente. Gauss apresentou quatro demonstrações deste teorema, algumas delas envolvendo propriedades topológicas da reta e do plano, conceitos estes que não tinham ainda sido explicitados em sua época.

Matemáticos como John Wallis, Caspar Wessel e Jean Robert Argand propuseram uma interpretação geométrica dos números complexos como vetores do plano. Esta representação propiciou uma maior aceitação deste conjunto, pois os números complexos podiam ser visualizados como pontos ou vetores no plano, da mesma forma como o conjunto dos números reais podem ser vistos como pontos de uma reta.

Apresentar o conjunto dos números complexos conectado com os fatos históricos que culminaram neste conceito, é primordial na motivação dos alunos, que ao compreenderem a evolução destes conceitos matemáticos, percebem a riqueza dos objetos que estão sendo estudados e como eles revolucionaram o pensamento humano.

Existem inúmeras aplicações dos números complexos em diversas áreas, como na física no estudo de correntes alternadas, teoria da relatividade, dinâmica dos fluidos, mecânica quântica, eletrônica, entre tantas outras. Na computação no processamento de imagens, na engenharia e sem dúvida na matemática no estudo de fractais, curvas algébricas e analíticas, na geometria de superfícies complexas, no estudo de equações diferenciais, ou seja, em diversas áreas da matemática: álgebra, geometria, análise e muito mais. Todavia, para abordar tais aplicações seria necessário um conhecimento mais profundo, o que dificulta sua apresentação para estudantes do ensino médio. Contudo, ter o conhecimento que tais aplicações existem, abre nosso horizonte sobre o impacto que este conceito promoveu e ainda promove no desenvolvimento da ciência. No que segue vamos fazer uma descrição dos capítulos.

No primeiro capítulo deste trabalho apresentamos o conjunto dos números complexos e algumas propriedades com respeito às operações de soma e multiplicação neste conjunto. Em seguida observamos que a forma trigonométrica dos números complexos nos possibilita apresentarmos uma interpretação para a soma e o produto, e como importante resultado temos a fórmula de DeMoivre que possibilita a determinação de raízes de números complexos.

No segundo capítulo abordamos conceitos básicos de funções complexas e algumas classes de funções. Todavia o resultado principal é o Teorema Fundamental da Álgebra, demonstrado por Gauss, que garante que um polinômio de grau n possui exatamente n raízes complexas.

No terceiro capítulo apresentamos algumas classes especiais de funções complexas como: a exponencial, as trigonométricas, os logaritmos, potências complexas e as transformações de Möbius, fazendo comparações sobre propriedades que são válidas nos casos real e complexo.

O quarto capítulo pretende motivar os estudantes com algumas aplicações dos números complexos, como o curioso problema do tesouro, que podem ser exploradas com os alunos do ensino médio.

Capítulo 1

Números Complexos

Na introdução vimos um pouco da história dos números complexos, apresentando como motivação inicial para o desenvolvimento desse conjunto a solução de equações cúbicas. O resultado principal deste capítulo é a Fórmula de DeMoivre com a qual podemos, em particular, calcular raízes de números complexos.

Agora, desejamos apresentar o conjunto dos números complexos como uma extensão do conjunto dos números reais, de modo que ao somarmos ou multiplicarmos com números reais tenhamos as propriedades preservadas.

Vamos assumir conhecido o conjunto dos números reais, denotado por $\mathbb{R}$ e suas propriedades com relação à soma e à multiplicação de números reais.

Definição 1.1 *Definimos o conjunto dos números complexos, denotado por $\mathbb{C}$, como o conjunto de todos os números da forma $a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e tal que $i^2 = -1$.*

Em notação de conjunto, $\mathbb{C} = \{a+bi;\ a, b \in \mathbb{R}, \text{com } i^2 = -1\}$. Dizemos que dois números complexos $a + bi$ e $c + di$ são iguais se, e somente, $a = c$ e $b = d$.

Ou seja, um número complexo $z = a + bi$ está completamente determinado por a e b. Observe que quando $b = 0$, obtemos que o conjunto dos números reais está contido em $\mathbb{C}$.

Dado $z = a + bi$ dizemos que a é a parte real de z e b a parte imaginária de z. O qual vamos denotar $a = Re(z)$ e $b = Im(z)$.

Vamos definir em $\mathbb{C}$ duas operações binárias: uma soma e um produto de números complexos. Operações estas que quando restritas ao reais recuperamos as operações usuais de soma $(+)$ e produto $(\cdot)$ em $\mathbb{R}$. Vamos assim utilizar os mesmos símbolos de $(+)$ para soma e $(\cdot)$ para o produto no caso complexo.

Sejam z_1 e z_2 dois números complexos. Definimos a soma de z_1 e z_2 denotada por $z_1 + z_2$ e a multiplicação de z_1 e z_2, denotado $z_1 \cdot z_2$, respectivamente por:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i, \\ z_1 \cdot z_2 &= (a+bi) \cdot (c+di) = (ac-bd) + (bc+ad)i. \end{aligned}$$

Um passo importante na aceitação e consolidação do conceito de números complexos foi sua representação geométrica como pontos do plano. Tal interpretação foi primeiramente dada em 1799 pelo agrimensor norueguês Caspar Wessel (1745-1818). Ele representou o número complexo $a+bi$ pelo vetor do plano com origem O, que é a origem do sistema de eixos coordenados, e com extremidade o ponto (a, b) (ver [8]). Vamos justificar tal representação, garantindo que existe uma correspondência biunívoca entre o conjunto $\mathbb{C}$ e o conjunto de pares ordenados de números reais, denotado por $\mathbb{R}^2$. Considere

$$\begin{aligned} T: \quad \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ a+bi &\mapsto (a, b). \end{aligned}$$

Vamos provar que esta aplicação é uma bijeção.

i) Sejam $u, v \in \mathbb{C}$, tais que $u = a+bi$ e $v = c+di$. Assim,

$$T(u) = T(v) \quad \Rightarrow \quad T(a+bi) = T(c+di) \Rightarrow (a,b) = (c,d)$$

ou seja, $a = c$ e $b = d$. Logo, $u = v$ e portanto esta aplicação é injetora.

ii) Seja $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2$. Considere $u = a + bi \in \mathbb{C}$, dessa forma:

$$T(u) = T(a+bi) = (a,b) = v.$$

Portanto, T é sobrejetora.

Por i) e ii) temos que a aplicação T é bijetora.

Com isto cada número complexo $z = a+bi$ corresponde um único par ordenado (a, b) de números reais em $\mathbb{R}^2$. Assim, a parte real de um número complexo é representada no eixo Ox, pois, cada número real $a = a + 0i$ corresponde o ponto $(a, 0)$ no eixo Ox e a parte imaginária de um número complexo é representada no eixo Oy. Em particular o número complexo $i = 0 + 1i$ corresponde o ponto $(0, 1)$ no plano. Podemos representar geometricamente um número complexo $z = a + bi$ no plano, como um ponto ou como um vetor com origem em $(0, 0)$ e extremidade (a, b).

Com essa identificação entre $\mathbb{C}$ e $\mathbb{R}^2$ definimos a soma de dois elementos (a, b) e (c, d) de $\mathbb{R}^2$ como $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ e o produto como $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$. E podemos interpretar geometricamente a soma de números complexos, como soma de vetores em $\mathbb{R}^2$. Ou seja, se $z_1 = (a, b)$ e $z_2 = (c, d)$ então $z_1 + z_2 = (a + c, b + d)$ é o vetor determinado pela diagonal do paralelogramo obtido por z_1 e z_2.

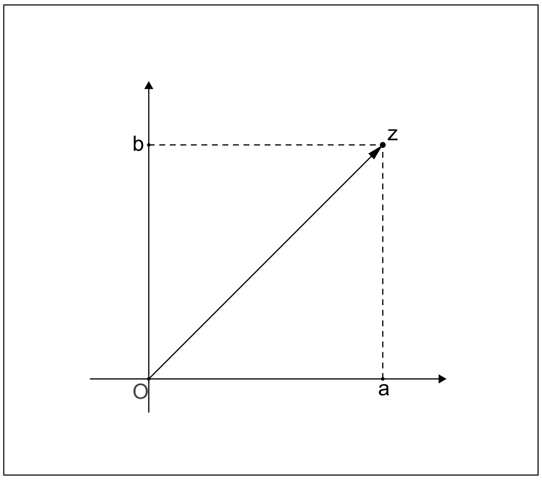

Figura 1.1: Número complexo como um vetor

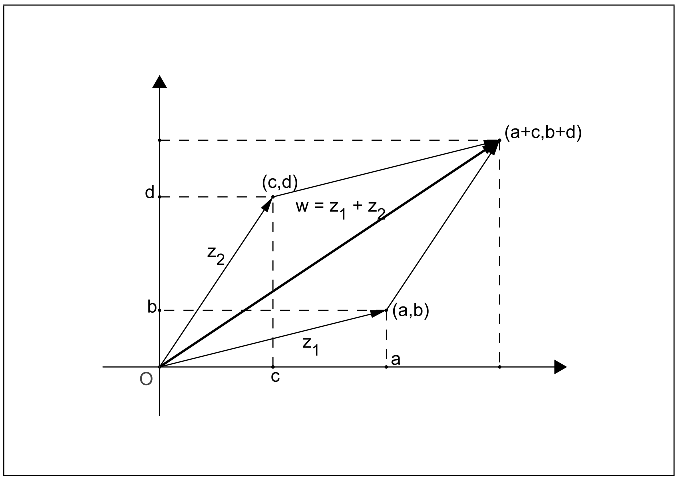

Figura 1.2: Interpretação geométrica da soma de números complexos

Abaixo apresentamos algumas propriedades com respeito à adição de números complexos.

Proposição 1.2 (Propriedades da Adição) *Sejam $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$. Então, valem as seguintes propriedades:*

A_1. $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ *(associatividade);*

A_2. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ *(comutatividade);*

A_3. $0 + z = z$, *onde* $0 = 0 + 0i$, $\forall\ z \in \mathbb{C}$ *(elemento neutro);*

A_4. *Dado* $z \in \mathbb{C}$ *existe* $w \in \mathbb{C}$ *tal que* $z + w = 0$ *(elemento oposto).*

Demonstração: A_1: Sejam $z_1 = a+bi$, $z_2 = c+di$ e $z_3 = e+fi$, com $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$. Temos que:

$$\begin{aligned} z_1 + (z_2 + z_3) &= (a + bi) + (c + di + e + fi) \\ &= (a + bi) + ((c + e) + (d + f)i) \\ &= a + (c + e) + (b + (d + f))i. \end{aligned}$$

Segue da propriedade associativa dos números reais que:

$$\begin{aligned} z_1 + (z_2 + z_3) &= (a + c) + e + ((b + d) + f)i \\ &= ((a + c) + (b + d)i) + (e + fi) \\ &= (z_1 + z_2) + z_3. \end{aligned}$$

A_2: Análoga à propriedade A_1, utilizando a propriedade comutativa em $\mathbb{R}$.
A_3: Sejam $0 = 0 + 0i$ e $z = a + bi$. Assim,

$$\begin{aligned} 0 + z &= 0 + 0i + a + bi \\ &= 0 + a + (0 + b)i = a + bi = z, \end{aligned}$$

pois 0 é o elemento neutro da adição de números reais.
A_4: Dado $z = a + bi$, temos que $-a$ e $-b$ são os opostos de a e b, respectivamente. Deste modo, denotemos por $-z$ o número complexo $-z = -a + (-b)i$. Então

$$\begin{aligned} z + (-z) &= a + bi + (-a + (-b)i) \\ &= a + (-a) + (b + (-b))i \\ &= 0 + 0i = 0. \end{aligned}$$

■

Dado $z \in \mathbb{C}$, o número complexo $-z = -a + (-b)i$ será chamado de oposto de z.

Definido a operação de adição e com o conceito de elemento oposto, podemos definir a operação de subtração em $\mathbb{C}$.

Dados $z, w \in \mathbb{C}$ definimos a subtração de z e w, denotado por $z - w$, como sendo o número complexo

$$z - w = z + (-w).$$

O qual está representado geometricamente na figura abaixo. A operação de multiplicação

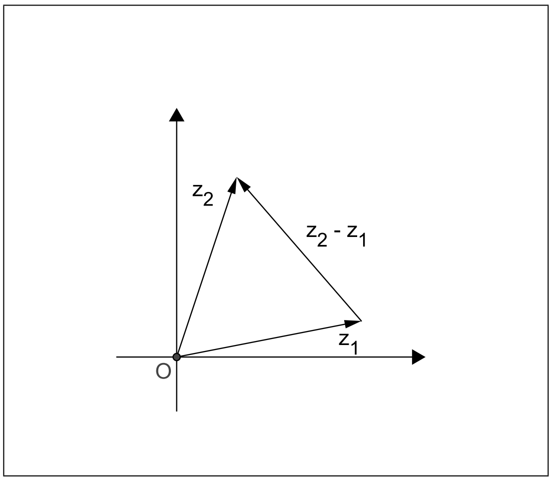

Figura 1.3: Interpretação geométrica da diferença de números complexos

dos números complexos satisfazem as seguintes propriedades:

Proposição 1.3 (Propriedades da Multiplicação) *Dados $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, valem as seguintes propriedades:*

M_1. $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$ *(associatividade);*

M_2. $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ *(comutatividade);*

M_3. *Sejam $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, temos que $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$ (distributividade);*

M_4. *Seja $1 = 1 + 0i$, temos que $1 \cdot z = z$, $\forall\ z \in \mathbb{C}$ (elemento identidade).*

Demonstração:

M_1: Sejam $z_1 = a + bi, z_2 = c + di$ e $z_3 = e + fi$ em $\mathbb{C}$. Temos que

$$\begin{aligned} z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) &= (a+bi)((c+di)(e+fi)) \\ &= (a+bi)((ce-df)+(cf+de)i) \\ &= (a(ce-df)-b(cf+de))+(a(cf+de)+b(ce-df))i. \end{aligned}$$

Segue da distributividade em $\mathbb{R}$ que,

$$\begin{aligned} z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) &= (ace-adf-bcf-bde)+(acf+ade+bce-bdf)i \\ &= (ac-bd)e-(ad+bc)f+((ac-bd)f+(ad+bc)e)i \\ &= ((ac-bd)+(ad+bc)i)(e+fi) \\ &= (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3. \end{aligned}$$

M_2 : Pela propriedade comutativa da multiplicação em $\mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a+bi)(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i \\ &= (ca-db)+(da+cb)i = (ca-db)+(cb+da)i \\ &= (c+di)(a+bi) = z_2 \cdot z_1. \end{aligned}$$

M_3 : Segue da propriedade distributiva em $\mathbb{R}$ que

$$\begin{aligned} z_1 \cdot (z_2 + z_3) &= (a+bi)(c+di+e+fi) \\ &= (a+bi)(c+e+(d+f)i) \\ &= [a(c+e)-b(d+f)]+[a(d+f)+b(c+e)]i \\ &= ac+ae-bd-bf+[ad+af+bc+be]i \\ &= (ac-bd)+(ae-bf)+[(ad+bc)+(af+be)]i \\ &= ((ac-bd)+(ad+bc)i)+((ae-bf)+(ae+bf)i) \\ &= z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3. \end{aligned}$$

M_4 : Dado $z = a + bi \in \mathbb{C}$ temos

$$
\begin{aligned}
1 \cdot z &= (1+0i)(a+bi) \\
&= (1a-0b)+(1b+0a)i \\
&= a+bi = z.
\end{aligned}
$$

■

Uma interpretação geométrica do produto de números complexos será apresentada na próxima seção.

Dado um número complexo z não-nulo, queremos definir o elemento inverso de z, com respeito à multiplicação.

Para tanto precisamos dos conceitos de módulo e conjugado de um número complexo.

Seja $z = a + bi$, definimos como o conjugado de z o número complexo $\overline{z} = a - bi$. Geometricamente o conjugado de z é o simétrico de z em relação ao eixo Ox.

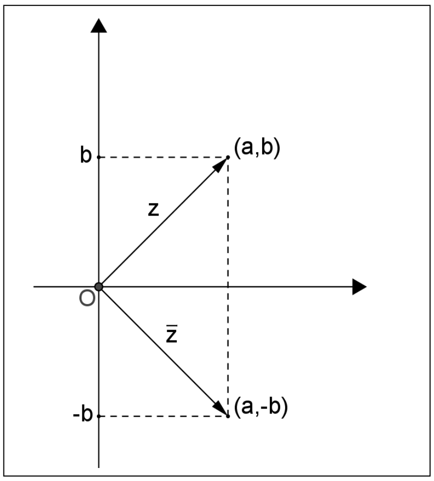

Figura 1.4: Conjugado de um número complexo

Dado um número $z = a + bi$ chama-se módulo de z, representado por $|z|$, ao número real não negativo $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Geometricamente, $|z|$ mede a distância da origem $O = (0, 0)$ ao ponto $A = (a, b)$, ou seja, mede o módulo (ou comprimento) do vetor que representa o número complexo z. Este conceito segue naturalmente do Teorema de Pitágoras, pois

$$|z|^2 = a^2 + b^2 \quad \Rightarrow \quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

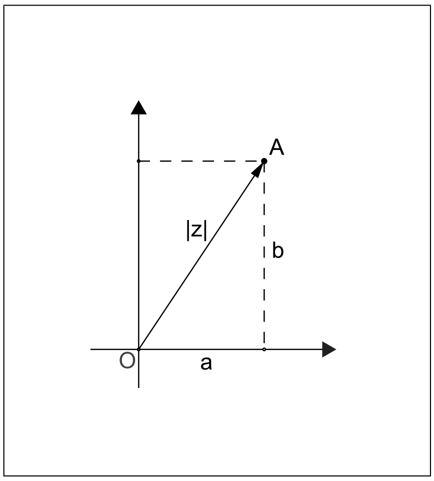

Figura 1.5: Módulo de um número complexo

Um número complexo z é dito unitário se $|z| = 1$.

É possível estabelecermos uma relação entre o módulo e o conjugado de um número complexo, a saber:

$$z\overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 + (a(-b) + ba)i = a^2 + b^2 = |z|^2. \tag{1.1}$$

Com estes conceitos estamos em condições de definir o inverso de um número complexo não nulo.

Seja $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. Denotemos por z^{-1} o número complexo

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

Veja que z^{-1} está bem definido, pois $z^{-1} = \dfrac{1}{|z|^2} \cdot \overline{z}$, ou seja, é o produto do inverso do número real $\dfrac{1}{|z|^2}$ (que existe), pelo conjugado de z.

Provemos que z^{-1} é o inverso multiplicativo de z. De fato, pela relação (1.1)

$$zz^{-1} = z \cdot \frac{1}{|z|^2} \cdot \overline{z} = \frac{1}{|z|^2} \cdot z\overline{z} = \frac{1}{|z|^2} \cdot |z|^2 = 1.$$

Deste modo, z^{-1} que também será denotado por $\frac{1}{z}$, é o inverso de z.

Exemplo 1.4 *Se $z = 1 - 2i$, então*

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{1 + 2i}{1^2 + (-2)^2} = \frac{1 + 2i}{1 + 4} = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}i.$$

Definição 1.5 *Dados dois números complexos* z_1 *e* z_2*, com* $z_2 \neq 0$ *definimos o quociente de* z_1 *por* z_2*, denotado por* $\frac{z_1}{z_2}$*, como sendo o número complexo* $\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1}$.

Com o conceito de quociente de números complexos, fica bem estabelecido o que usualmente verificamos que para determinar o inverso de um número complexo z, basta multiplicar pelo quociente de $\overline{z}$ por ele próprio, isto é,

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z} \cdot \frac{\overline{z}}{\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{z \cdot \overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}. \tag{1.2}$$

Por exemplo, $\frac{1}{5-4i} = \frac{1}{5-4i} \cdot \frac{5+4i}{5+4i} = \frac{5+4i}{41}$.

Vamos apresentar algumas propriedades de conjugado e módulo de números complexos.

Proposição 1.6 *Se* z_1 *e* z_2 *são números complexos, então*

a) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$;

b) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

Demonstração: a) Sejam $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, então $z_1 + z_2 = a + c + (b + d)i$. Assim,

$$\overline{z_1 + z_2} = a + c - (b + d)i.$$

Por outro lado, $\overline{z_1} = a - bi$ e $\overline{z_2} = c - di$, donde temos

$$\begin{aligned} \overline{z_1} + \overline{z_2} &= (a - bi) + (c - di) \\ &= a + c + (-b + (-d))i \\ &= a + c - (b + d)i = \overline{z_1 + z_2}. \end{aligned}$$

b) Sejam $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$. Então $z_1 z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$. Logo, $\overline{z_1 z_2} = (ac - bd) - (ad + bc)i$.

Por outro lado, $\overline{z_1} = a - bi$ e $\overline{z_2} = c - di$ são tais que

$$\begin{aligned} \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} &= (a - bi)(c - di) \\ &= (ac - bd) + (a(-d) + (-b)c)i \\ &= (ac - bd) - (ad + bc)i = \overline{z_1 z_2}. \end{aligned}$$

■

Proposição 1.7 *Dados* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ *temos que* $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

Demonstração:

Segue da Equação (1.1) que $z_j \cdot \overline{z_j} = |z_j|^2$ para cada $j = 1, 2$. Assim, pela Proposição 1.6,

$$\begin{aligned} |z_1 \cdot z_2|^2 &= (z_1 \cdot z_2) \cdot (\overline{z_1 \cdot z_2}) = z_1 \cdot z_2 \cdot \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \\ &= z_1 \cdot \overline{z_1} \cdot z_2 \cdot \overline{z_2} = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2 \\ &= (|z_1| \cdot |z_2|)^2. \end{aligned}$$

Como $|z| \geq 0$ segue $\sqrt{|z_1 z_2|^2} = \sqrt{(|z_1||z_2|)^2}$ o que implica $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$. ■

1.1 Forma Trigonométrica ou Polar

Vimos que um número complexo $z = a + bi$ pode ser pensado como um ponto (a, b) do plano de coordenadas ou como um vetor $\overrightarrow{Oz}$, de origem O e extremidade $z = (a, b)$.

Seja $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ o comprimento de $\overrightarrow{Oz}$, não nulo, e θ o ângulo positivo xOz.

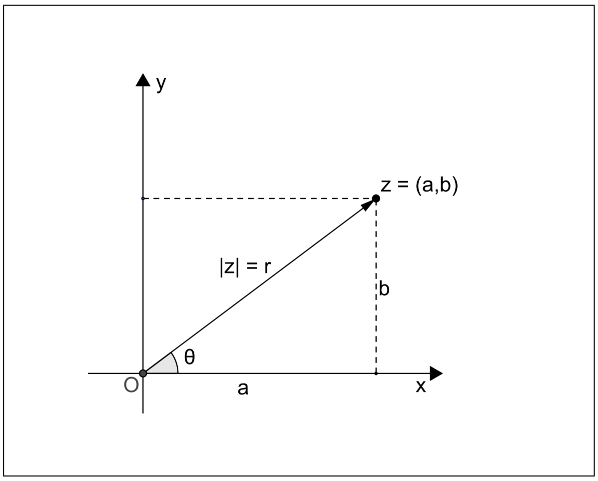

Figura 1.6: Forma trigonométrica

Pelas relações do triângulo retângulo, $\cos(\theta) = \dfrac{a}{r}$ e $\operatorname{sen}(\theta) = \dfrac{b}{r}$. O que implica

$$a = rcos(\theta) \ \text{ e } \ b = rsen(\theta).$$

Assim, $z = a + bi = rcos(\theta) + rsen(\theta)i$, ou seja,

$$z = r(cos(\theta) + isen(\theta)). \tag{1.3}$$

A igualdade acima é denominada **forma trigonométrica ou polar** do número complexo z. Dizemos que $\theta \in \mathbb{R}$ satisfazendo (1.3) é um argumento de z.

Observe que a representação de um número complexo na sua forma trigonométrica não é única, uma vez que para $k \in \mathbb{Z}$, $\cos(\theta + 2k\pi) = \cos(\theta)$ e $\operatorname{sen}(\theta + 2k\pi) = \operatorname{sen}(\theta)$. Assim, para cada $k \in \mathbb{Z}$, $\theta + 2k\pi$ é um argumento de z pois

$$z = r(\cos(\theta + 2k\pi) + i \operatorname{sen}(\theta + 2k\pi)).$$

Denotamos por $arg(z)$ o conjunto de todos os argumentos de z, ou seja,

$$arg(z) = \{\theta + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

O único argumento de z que pertence ao intervalo $(-\pi, \pi]$ é chamado o argumento principal de z e é denotado por $Arg(z)$.

Exemplo 1.8 *A forma trigonométrica de qualquer número complexo da forma $z = a + ai$, com $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, é obtida determinando o módulo e o argumento de z. Ou seja,*

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = |a|\sqrt{2} = a\sqrt{2}.$$

E

$$\cos(\theta) = \frac{a}{r} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad e \quad \operatorname{sen}(\theta) = \frac{a}{r} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Logo, $\theta = \frac{\pi}{4}$. Aplicando na forma trigonométrica temos:

$$\begin{aligned} z &= r(cos(\theta + 2k\pi) + isen(\theta + 2k\pi)) \\ &= a\sqrt{2}\left(cos\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) + isen\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)\right). \end{aligned}$$

A forma trigonométrica de um número complexo, nos permite dar uma interpretação geométrica para a operação de multiplicação em $\mathbb{C}$.

Considere os triângulos OPP_1 e OQQ_1 e x como na figura abaixo.

Se x é um número real qualquer, temos que

$$cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen} x \ \text{ e } \ \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = cos x.$$

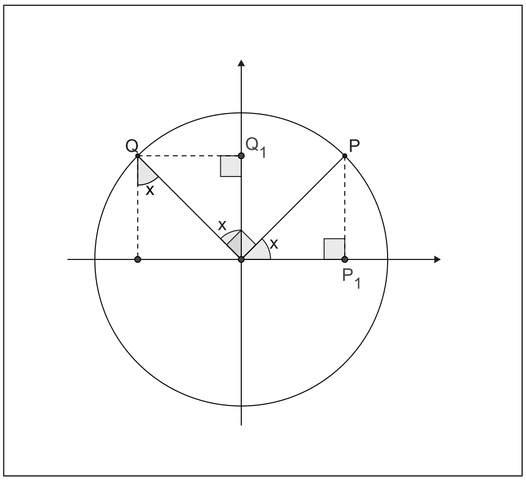

Figura 1.7: Triângulos OPP_1 e OQQ_1

De fato, os triângulos OPP_1 e OQQ_1 da Figura 1.7 são congruentes por terem ângulos iguais e os lados $|OP| = |OQ|$. Portanto, em valor absoluto,

$$\left|cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right| = |QQ_1| = |PP_1| = |senx|,$$

$$\left|sen\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right| = |OQ_1| = |OP_1| = |cosx|.$$

Como x e $x+\dfrac{\pi}{2}$ estão sempre em quadrantes adjacentes, obteremos os sinais indicados.

Vamos interpretar geometricamente a multiplicação de números complexos unitários. Seja $w_1 = cos(\theta_1) + isen(\theta_1)$ tal que $|w_1| = 1$, o qual pode ser representado como um ponto do círculo unitário S^1, que é definido como $S^1 = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2; a^2 + b^2 = 1\}$. Multiplicando w_1 pelo complexo i temos pelas relações acima que

$$iw_1 = icos(\theta_1) + i^2 sen(\theta_1) = icos(\theta_1) - sen(\theta_1) = cos\left(\theta_1 + \frac{\pi}{2}\right) + isen\left(\theta_1 + \frac{\pi}{2}\right).$$

Assim, podemos concluir que multiplicar w_1 por i significa efetuar uma rotação de w_1 no sentido anti-horário, de ângulo $\dfrac{\pi}{2}$.

Seja agora w_2 um outro complexo unitário, dado por $w_2 = cos(\theta_2) + isen(\theta_2)$. Então,

$$w_2 w_1 = (\cos(\theta_2) + i\,\mathrm{sen}(\theta_2))w_1 = \cos(\theta_2)w_1 + \mathrm{sen}(\theta_2)iw_1. \tag{1.4}$$

Vimos que os vetores w_1 e iw_1 são perpendiculares e consequentemente $\cos(\theta_2)w_1$ e $\mathrm{sen}(\theta_2)iw_1$ também o são, pois $\cos(\theta_2)w_1$ e $\mathrm{sen}(\theta_2)iw_1$ são múltiplos de w_1 e iw_1, respectivamente. Como

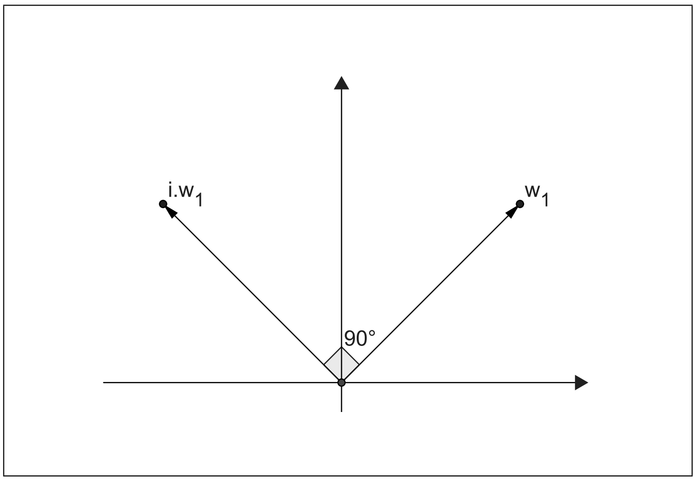

Figura 1.8: Representação geométrica de iw_1

w_2w_1 é a soma dos vetores perpendiculares $\cos(\theta_2)w_1$ e $\operatorname{sen}(\theta_2)iw_1$, ele é o vetor determinado pela diagonal do paralelogramo gerado por eles. Considerando um sistema ortogonal de coordenadas xOy, cujo eixo Ox coincide com Ow_1, segue de (1.4) que o ângulo de w_1 com w_2w_1 é θ_2. Donde concluímos que multiplicar dois números complexos unitários w_1 e w_2 significa geometricamente, dar a um deles uma rotação no sentido anti-horário de ângulo igual ao ângulo do outro.

No caso em que $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ não são unitários, podemos escrevê-los na forma trigonométrica digamos $z_1 = r_1w_1$ e $z_2 = r_2w_2$ em que $w_j = \cos\theta_j + isen\theta_j$, $j = 1, 2$ e sabemos que $|w_j| = 1$. Assim,

$$z_1 \cdot z_2 = r_1w_1r_2w_2 = r_1r_2w_1w_2.$$

Em outras palavras, efetua-se o produto dos complexos unitários correspondentes, como acima, e multiplica-se o resultado pelo número real r_1r_2.

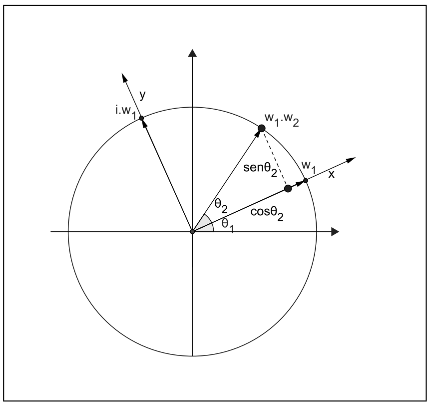

Figura 1.9: Produto w_2w_1.

1.2 Fórmula de DeMoivre

Ainda como consequência da interpretação geométrica do produto de números complexos, vamos provar a Fórmula de DeMoivre, em que dado um complexo unitário $w = \cos(\theta) + isen(\theta)$, então

$$w^n = (\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\,\mathrm{sen}(n\theta),$$

em que n é um inteiro positivo.

Geometricamente essa fórmula nos diz que multiplicar o complexo unitário $\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta)$ por si mesmo n vezes, é equivalente a dar-lhe n rotações sucessivas de ângulo θ.

Para tanto vamos provar o seguinte resultado:

Proposição 1.9 *Dados $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ da forma $z_1 = r_1(\cos(\theta_1) + i\,\mathrm{sen}(\theta_1))$ e $z_2 = r_2(\cos(\theta_2) + i\,\mathrm{sen}(\theta_2))$, então*

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\,\mathrm{sen}(\theta_1 + \theta_2)).$$

Demonstração: Temos pelas relações trigonométricas de seno e cosseno da soma que

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos(\theta_1) + i\,\mathrm{sen}(\theta_1) r_2(cos(\theta_2) + isen(\theta_2)) \\ &= r_1 r_2(\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \mathrm{sen}(\theta_1)\,\mathrm{sen}(\theta_2)) + (\cos(\theta_1)\,\mathrm{sen}(\theta_2) + \cos(\theta_2)\,\mathrm{sen}(\theta_1))i \\ &= r_1 r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\,\mathrm{sen}(\theta_1 + \theta_2)). \end{aligned}$$ ■

Teorema 1.10 ***(Fórmula de DeMoivre)*** *Seja $z = r(\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta))$ um número complexo qualquer. Então para $n \in \mathbb{Z}_+$, temos que*

$$z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\,\mathrm{sen}(n\theta)).$$

Demonstração: Vamos demonstrar por indução em n. Para $n = 2$ verificamos que

$$\begin{aligned} z^2 &= r(\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta)) r(\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta)) \\ &= r^2(\cos(\theta)\cos(\theta) - \mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta) + (\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta) + \mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta))i) \\ &= r^2(\cos(2\theta) + i\,\mathrm{sen}(2\theta)). \end{aligned}$$

Vamos supor que para $n = k$ o teorema seja verdadeiro, isto é, $z^k = r^k(\cos(k\theta) + i\,\mathrm{sen}(k\theta))$.

Vamos mostrar que o resultado é válido para $n = k + 1$. De fato,

$$\begin{aligned}
z^{k+1} &= z^k \cdot z = [r^k(\cos(k\theta) + i\,\mathrm{sen}(k\theta))][r(\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta))] \\
&= r^{k+1}(\cos(k\theta)\cos(\theta) - \mathrm{sen}(k\theta)\,\mathrm{sen}(\theta) + (\mathrm{sen}(k\theta)\cos(\theta) + \cos(k\theta)\,\mathrm{sen}(\theta))i) \\
&= r^{k+1}(\cos(k\theta + \theta) + i\,\mathrm{sen}(k\theta + \theta)) \\
&= r^{k+1}(\cos((k+1)\theta) + i\,\mathrm{sen}((k+1)\theta)).
\end{aligned}$$

■

Exemplo 1.11 *A Fórmula de DeMoivre nos permite, em particular, determinarmos* $\cos(nx)$ *e* $\mathrm{sen}(nx)$ *sem a utilização das fórmulas de cosseno e seno da soma. Por exemplo, calculemos* $\mathrm{sen}3x$ *e* $\cos 3x$.

Pela Fórmula de DeMoivre,

$$\begin{aligned}
\cos(3x) + i\,\mathrm{sen}(3x) &= (\cos x + i\,\mathrm{sen}x)^3 \\
&= \cos^3(x) + 3\cos(x)i^2\,\mathrm{sen}^2(x) + 3\cos^2(x)i\,\mathrm{sen}(x) + i^3\,\mathrm{sen}^3(x) \\
&= \cos^3(x) - 3\cos(x)\,\mathrm{sen}^2(x) + i(3\cos^2(x)\,\mathrm{sen}(x) - \mathrm{sen}^3(x)).
\end{aligned}$$

Igualando as partes reais e imaginárias, obtemos:

$$\cos(3x) = \cos^3(x) - 3\cos(x)\,\mathrm{sen}^2(x),$$

$$\mathrm{sen}(3x) = 3\cos^2(x)\,\mathrm{sen}(x) - \mathrm{sen}^3(x).$$

Exemplo 1.12 *Dado* $z = -2 - 2i$, *calcule* z^{10}.

Solução: Seja r *o módulo de* z, *então* $r = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$.

Vamos determinar agora o argumento de z. *Temos que:*

$$\cos(\theta) = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \quad e \quad \mathrm{sen}(\theta) = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}.$$

Note que θ *pertence ao terceiro quadrante e assim,* $\theta = \pi + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{5\pi}{4}$.

Escrevendo z na forma trigonométrica teremos:

$$z = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right).$$

Aplicando a Fórmula de DeMoivre teremos:

$$\begin{aligned} z^{10} &= (2\sqrt{2})^{10}\left(cos\left(10\frac{5\pi}{4}\right) + isen\left(10\frac{5\pi}{4}\right)\right) \\ &= 2^{15}\left(cos\left(\frac{25\pi}{2}\right) + isen\left(\frac{25\pi}{2}\right)\right) \\ &= 2^{15}(0+i) = 2^{15}i. \end{aligned}$$

Outra aplicação da fórmula de DeMoivre é a determinação de raízes de números complexos.

A Fórmula de DeMoivre nos apresenta uma maneira simples de determinarmos a n-ésima potência de um número complexo z, com $n \in \mathbb{Z}_+$. Se $n = 0$ podemos definir que $z^0 = 1$. E se $n \in \mathbb{Z}_+$ então, como no caso real, podemos definir que

$$z^{-n} = (z^n)^{-1},$$

ou seja, z^{-n} é o inverso de z^n. Deste modo, se $z = r(\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta))$ então pela Fórmula de DeMoivre

$$z^{-n} = (z^n)^{-1} = \frac{\overline{z^n}}{|z^n|^2} = \frac{r^n(\cos(n\theta) - i\,\mathrm{sen}(n\theta))}{r^{2n}(\cos^2(n\theta) + \mathrm{sen}^2(n\theta))} = \frac{1}{r^n}(\cos(n\theta) - i\,\mathrm{sen}(n\theta)).$$

Definição 1.13 *Um número complexo a é dito uma raiz n-ésima de z, com $n \in I\!N$ e $z \in \mathbb{C}$ se $z^n = a$.*

No caso real, se $a \in \mathbb{R}$ com $a > 0$ e $p \in \mathbb{Z}_+$, denotamos por $\sqrt[p]{a}$, o número real positivo cuja p-ésima potência é igual a a, ou seja, a única raiz positiva da equação $x^p - a = 0$. Ou seja, $\sqrt[p]{a}$ satisfaz $\sqrt[p]{a} > 0$ e $(\sqrt[p]{a})^p = a$.

Proposição 1.14 *Dado $z = r(\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta))$ não nulo então z possui n raízes n-ésimas, com $n \in I\!N$, dadas por*

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right), \quad com \;\; k = 0, 1, \cdots, n-1.$$

Demonstração:

Dado $z = r(\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta))$, denotemos sua raiz n-ésima por $\sqrt[n]{z} = r'(\cos(\phi) + i\,\mathrm{sen}(\phi))$. Assim, pela Fórmula de DeMoivre,

$$z = (\sqrt[n]{z})^n = (r')^n(\cos(n\phi) + i\,\mathrm{sen}(n\phi)).$$

Igualando com a relação $z = r(\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta))$ teremos $(r')^n = r$ o que implica $r' = \sqrt[n]{r}$ e

$$\cos(n\phi) = \cos(\theta) \;\text{ e }\; \mathrm{sen}(n\phi) = \mathrm{sen}(\theta).$$

Isto não significa que os ângulos $n\phi$ e θ sejam iguais, deve-se levar em consideração os arcos côngruos. Assim,

$$n\phi = \theta + 2k\pi \;\Rightarrow\; \phi = \frac{\theta}{n} + k\left(\frac{2\pi}{n}\right),$$

com $k \in \mathbb{Z}$. Ao variar o valor de k, serão obtidos diferentes valores de ϕ, e assim, diferentes raízes n-ésimas do número z. A princípio, temos a impressão que são infinitas raízes. Entretanto fazendo k variar entre os valores $0, 1, 2, 3, \cdots, n-1, n, n+1, \cdots$ observamos que:

$$\begin{aligned}
k = 0 \;&\Rightarrow\; \phi_1 = \frac{\theta}{n}\\
k = 1 \;&\Rightarrow\; \phi_2 = \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}\\
k = 2 \;&\Rightarrow\; \phi_3 = \frac{\theta}{n} + 2\left(\frac{2\pi}{n}\right)\\
\vdots \;&\quad\;\; \vdots\\
k = n-1 \;&\Rightarrow\; \phi_n = \frac{\theta}{n} + (n-1)\left(\frac{2\pi}{n}\right)\\
k = n \;&\Rightarrow\; \phi_{n+1} = \frac{\theta}{n} + n\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \frac{\theta}{n} + 2\pi = \phi_1\\
k = n+1 \;&\Rightarrow\; \phi_{n+2} = \frac{\theta}{n} + (n+1)\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n} + 2\pi = \phi_2,
\end{aligned}$$

e assim sucessivamente. Observe que todo inteiro k pode ser escrito como $k = sn + r$ (Algoritmo de Euclides), com $r = 0, \cdots, n-1$ e $s \in \mathbb{Z}$. Logo,

$$\frac{\theta}{n} + k\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \frac{\theta}{n} + (sn + r)\frac{2\pi}{n} = \frac{\theta}{n} + r\frac{2\pi}{n} + s2\pi = \phi_r + s2\pi,$$

com $\phi_r = \dfrac{\theta}{n} + r\dfrac{2\pi}{n}$ e $r = 0, \cdots, n-1$. Entretanto, sabemos que

$$cos(\phi_r + s2\pi) = cos(\phi_r) \quad \text{e} \quad sen(\phi_r + s2\pi) = sen(\phi_r).$$

Portanto, existem apenas n raízes distintas, demonstrando assim o resultado. ■

É usual denotarmos $\sqrt[n]{z}$ apenas no caso $k = 0$, ou seja, $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}(\cos(\frac{\theta}{n}) + i\,\text{sen}(\frac{\theta}{n}))$, chamada de raiz n-ésima principal.

Exemplo 1.15 *Vamos calcular a raiz quadrada de $z = i$.*

Note que $z = 0 + 1i$ e daí temos que $r = |z| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$. Logo, $r' = \sqrt[3]{1} = 1$. Ainda, $cos(\theta) = \frac{0}{1} = 0$ e $sen(\theta) = \frac{1}{1} = 1$, logo $\theta = \dfrac{\pi}{2}$. Portanto, a forma trigonométrica de z será $z = \left(\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + i\,\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$ e suas raízes quadradas são dadas por:

$$w_k = cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2}\right) + isen\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) + isen\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right),$$

$k = 0, 1$. Portanto,

$$\begin{aligned} w_0 &= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \quad e \\ w_1 &= \cos\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Logo, $w_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $w_1 = -w_0 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ são as duas raízes quadradas de $z = i$.

Apenas por curiosidade, $w_0^2 = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2} + 2\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{1}{2} = i$ e analogamente $w_1^2 = \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = i$.

Exemplo 1.16 *Determinemos as raízes cúbicas de $z = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.*

Veja que z é unitário, pois

$$|z| = r = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1.$$

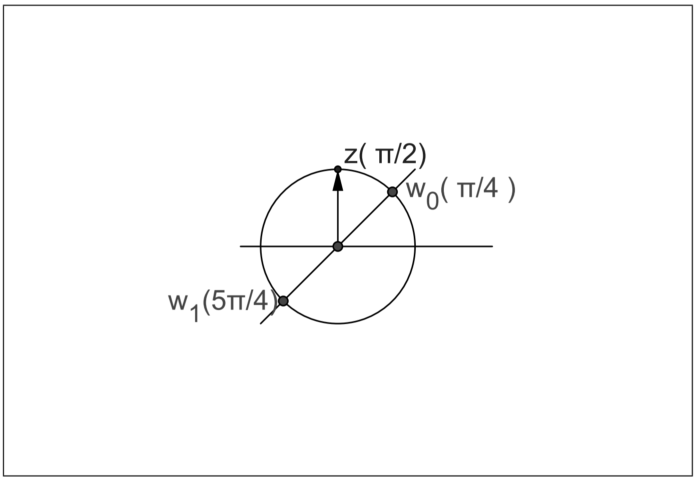

Figura 1.10: Raiz quadrada de $z = i$.

Assim, $r' = \sqrt[3]{1} = 1$. *E ainda,* $\cos(\theta) = \dfrac{1}{2}$ *e* $\operatorname{sen}(\theta) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, *logo* $\theta = \dfrac{\pi}{3}$.

Portanto, a forma trigonométrica de z *é* $z = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Pela proposição anterior as raízes cúbicas de z *são fornecidas por:*

$$w_k = cos\left(\frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}\right)$$

em que $k = 0, 1, 2$, *a saber*

$$\begin{aligned} w_0 &= cos\left(\frac{\pi}{9}\right) + isen\left(\frac{\pi}{9}\right) \\ w_1 &= cos\left(\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi}{3}\right) = cos\left(\frac{7\pi}{9}\right) + isen\left(\frac{7\pi}{9}\right) \end{aligned}$$

$$w_2 = cos\left(\frac{\pi}{9} + \frac{4\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{\pi}{9} + \frac{4\pi}{3}\right) = cos\left(\frac{13\pi}{9}\right) + isen\left(\frac{13\pi}{9}\right).$$

Ou ainda, quando determinamos w_0, *as demais raízes são obtidas somando* $\dfrac{2\pi}{3} = 120°$.

Exemplo 1.17 *Sabemos que dado um número real* $a > 0$ *existem duas soluções para a equação* $x^2 = a$, *que são* $\sqrt{a}$ *e* $-\sqrt{a}$.

Vejamos quais são as duas raízes quadradas em $\mathbb{C}$ *de um número real qualquer* a.

Se $a > 0$ *então* $z = a = a(\cos\ 0 + i\operatorname{sen}\ 0)$.

Assim, as raízes quadradas de a *são* $w_k = \sqrt{a}(\cos(k\pi) + i\operatorname{sen}(k\pi))$, $k = 0, 1$. *Ou seja, obtemos as raízes esperadas* $w_0 = \sqrt{a}$ *e* $w_1 = -\sqrt{a}$.

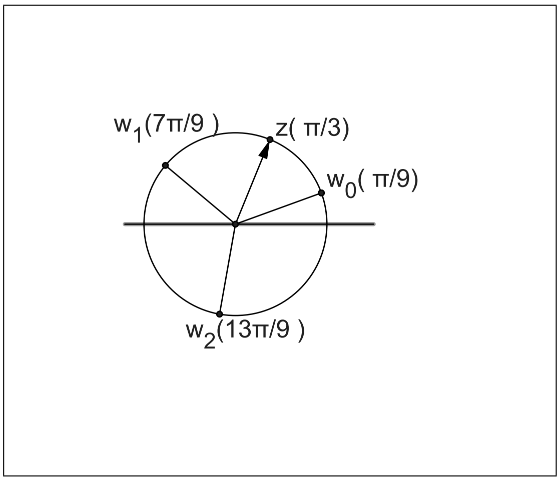

Figura 1.11: Raízes cúbicas de $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Se $a < 0$ então $z = a$ satisfaz $|z| = |a|$ e assim $z = |a|(\cos(\pi) + i\,\mathrm{sen}(\pi))$. Deste modo, $w_k = \sqrt{|a|}(\cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right), \quad k = 0, 1.$

Ou seja, $w_0 = \sqrt{|a|}i$ e $w_1 = -\sqrt{|a|}i$.

Um caso particular são as raízes do número complexo 1, chamadas **raízes n-ésimas da unidade**, ou seja, são as soluções da equação $z^n = 1$.

Como $1 = \cos(0) + i\,\mathrm{sen}(0)$ segue da Proposição 1.14 que as n raízes da unidade são

$$w_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, 2, \cdots, n-1.$$

Observe que $w_0 = 1$ e se denotarmos por $w = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ segue da Fórmula de DeMoivre que para $k = 1, \cdots, n-1$

$$w^k = \cos\left(k\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right) + i\,\mathrm{sen}\left(k\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right) = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = w_k.$$

Ou seja, todas as raízes n-ésimas da unidade podem ser obtidas de $w_1 = w$ fazendo uma rotação no sentido anti-horário de ângulo $\frac{2\pi}{n}$, já que w é um complexo unitário. Ou seja, $1, w, w^2, \cdots, w^{n-1}$ são as n raízes n-ésimas da unidade, e estas dividem o círculo unitário em n partes iguais.

Na realidade, elas podem ser vistas como os vértices de um polígono regular de n lados, inscritos no círculo unitário

Exemplo 1.18 *Vamos determinar as 5-ésimas raízes de 1.*

De fato, $w_0 = 1$ *é uma raiz e as demais são obtidas de*

$$w = w_1 = cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + isen\left(\frac{2\pi}{5}\right) = cos(72^\circ) + isen(72^\circ).$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} w_2 = w^2 &= \cos\left(\tfrac{4\pi}{5}\right) + i\,\text{sen}\left(\tfrac{4\pi}{5}\right) = cos(144^\circ) + isen(144^\circ), \\ w_3 = w^3 &= \cos\left(\tfrac{6\pi}{5}\right) + i\,\text{sen}\left(\tfrac{6\pi}{5}\right) = cos(216^\circ) + isen(216^\circ), \\ w_4 = w^4 &= \cos\left(\tfrac{8\pi}{5}\right) + i\,\text{sen}\left(\tfrac{8\pi}{5}\right) = cos(288^\circ) + isen(288^\circ). \end{aligned}$$

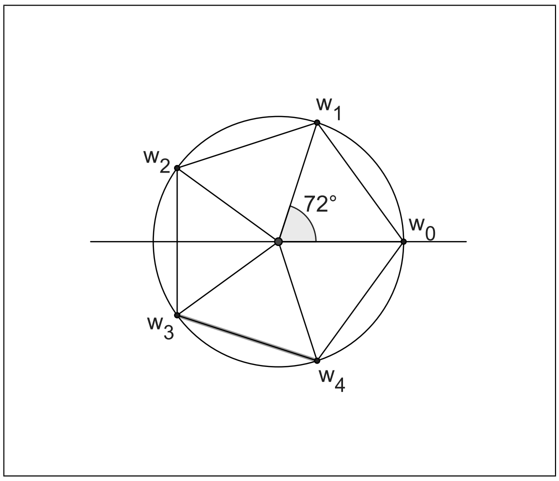

Figura 1.12: Raízes quíntuplas da unidade.

Vimos na Proposição 1.14 que as raízes n-ésimas de $z = r(\cos(\theta) + i\,\text{sen}(\theta))$ são

$$\gamma_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right), \quad \text{com} \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Todavia segue da Proposição 1.9 que

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \sqrt[n]{r}\left(cos\left(\tfrac{\theta}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\tfrac{\theta}{n}\right)\right)\left(cos\left(\tfrac{2k\pi}{n}\right) + isen\left(\tfrac{2k\pi}{n}\right)\right) \\ &= \sqrt[n]{r}\left(cos\left(\tfrac{\theta}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\tfrac{\theta}{n}\right)\right) \cdot w_k, \end{aligned}$$

em que $w_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$, são as raízes n-ésimas da unidade.

Ou seja, as raízes n-ésimas de z são obtidas multiplicando a raiz n-ésima principal $\sqrt[n]{z}$ pelas raízes n-ésimas da unidade.

1.3 Um Corpo não Ordenado

Uma questão natural que podemos considerar é qual dos dois números complexos $4 + 5i$ ou $5 + 4i$ é o maior?

Nesta seção vamos observar que, apesar do conjunto $\mathbb{R}$ ser ordenado, o mesmo não ocorre com os complexos.

Primeiramente vamos introduzir o conceito de corpo.

Definição 1.19 *Um conjunto não vazio K munido de uma operação de adição $(+)$ e uma operação de multiplicação $(\cdot)$ será denominado corpo, se as seguintes condições são satisfeitas: para todos $a, b, c \in K$,*

A_1. *Associatividade: $a + (b + c) = (a + b) + c$;*

A_2. *Comutatividade: $a + b = b + a$;*

A_3. *A adição admite um elemento neutro $0 \in K$, tal que $0 + a = a$, $\forall\ a \in K$;*

A_4. *Para todo $a \in K$ existe $-a \in K$ tal que $a + (-a) = 0$. Dizemos que $-a$ é oposto de a;*

M_1. *Associatividade: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$;*

M_2. *Comutatividade: $a \cdot b = b \cdot a$;*

M_3. *Distributividade: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$;*

M_4. *A multiplicação possui elemento identidade $1 \in K \setminus \{0\}$ tal que $a.1 = a$, para todo $a \in K$;*

M_5. *Para todo $a \in K \setminus \{0\}$ existe $a^{-1} \in K$ tal que $a.a^{-1} = 1$. Dizemos que a^{-1} é o inverso de a.*

Com as operações de soma e multiplicação de números complexos que vimos anteriormente, com suas respectivas propriedades, concluímos que $\mathbb{C}$ é um corpo. Em particular, também são exemplos de corpos o conjunto dos números racionas $\mathbb{Q}$ e dos reais $\mathbb{R}$.

Na sequência vamos definir o conceito de corpo ordenado.

Definição 1.20 *Um corpo K munido com as operações de soma e produto é dito ordenado se existe uma relação $\prec$ entre os elementos de K tal que, dados $a, b, c \in K$ temos:*

1. $a \prec b$ *ou* $a \succ b$ *ou* $a = b$*, ocorrendo apenas uma das possibilidades;*

2. $a \prec b$ *e* $b \prec c$ *então* $a \prec c$*;*

3. Se $a \prec b$ *então* $a + c \prec b + c$*, para todo* $c \in K$*;*

4. Se $a \prec b$ *então* $c \cdot a \prec c \cdot b$ *para todo* $c \succ 0$*.*

Para os números reais podemos definir $a \succ b$ se, e somente se, $a > b$. Podemos tentar estabelecer uma relação de ordem em $\mathbb{C}$. Uma possibilidade seria: dados $a + bi$ e $c + di$ em $\mathbb{C}$, dizemos que

$$a + bi \prec c + di$$

se $a < c$ ou se $a = c$ então $b < d$.

Exemplo 1.21 *Pela definição acima teríamos que* $4 + 5i \prec 5 + 4i$ *e que* $4 - 5i \succ 0$*. Logo, multiplicando* $4 - 5i$ *de ambos os lados da desigualdade acima, não alteramos a mesma (propriedade 4, da Definição* 1.20*), isto é,*

$$(4 + 5i)(4 - 5i) \prec (5 + 4i)(4 - 5i).$$

Efetuando o produto temos que $41 \prec 40 - 9i$*, uma contradição, pois por definição,* $41 \succ 40 - 9i$*.*

Vamos provar que para o conjunto dos números complexos não podemos definir uma relação $\prec$ que satisfaça as propriedades da Definição 1.20. Para tanto comecemos deduzindo as seguintes propriedades de um corpo ordenado:

Proposição 1.22 *Sejam* K *um corpo ordenado e* $x \in K$*.*

(a) $x \succ 0$ *se, e somente se,* $-x \prec 0$;

(b) Se $x \neq 0$ *então* $x^2 \succ 0$*.*

Demonstração:

(a) De fato, $x \succ 0$ se, e somente se $x + (-x) \succ 0 + (-x)$ o que ocorre se, e somente se $0 \succ -x$.

(b) Como $x \neq 0$ temos que $x \succ 0$ ou $x \prec 0$. Se $x \succ 0$, então multiplicando por x em ambos os lados teremos que $x^2 \succ 0$. Se $x \prec 0$, então pela propriedade anterior temos que $-x \succ 0$, multiplicando por $-x$ temos que $(-x)^2 \succ 0$, mas $x^2 = (-x)^2$ o que prova a afirmação. $\blacksquare$

Suponha que $\mathbb{C}$ admite uma relação $\prec$ que o torne um corpo ordenado. Pela Proposição 1.22 acima temos que $i^2 \succ 0$ e $1 = 1^2 \succ 0$ assim $-1 \prec 0$. No entanto, $-1 = i^2 \succ 0$ chegando a uma contradição. Portanto, $\mathbb{C}$ não é um corpo ordenado.

Capítulo 2

Funções Complexas

Neste capítulo apresentamos conceitos e propriedades de funções complexas. Nosso objetivo não é explorar classes de funções do ponto de vista do Cálculo Diferencial, o que pretendemos é apresentar propriedades básicas de funções complexas e compará-las com o que conhecemos no caso de funções reais. Uma classe muito importante é a de funções polinomiais, em que apresentamos um dos principais teoremas da matemática, chamado Teorema Fundamental da Álgebra. Veremos que alguns resultados que seguem como consequência deste teorema, podem ser melhor explorados no ensino médio.

2.1 Conceitos Básicos de Funções

Dados dois conjuntos não vazios A e B, uma função f de A em B é uma relação de correspondência que associa a cada elemento a de A um elemento $f(a)$ de B, chamado o valor de f em a.

Usualmente denotamos uma função

$$\begin{aligned} f : A &\rightarrow B \\ a &\mapsto f(a) \end{aligned}$$

que associa o elemento $a \in A$ um elemento $f(a) \in B$.

O conjunto A é chamado o domínio de f, denotado por $D(f)$ e o conjunto B é chamado contradomínio de f.

Se $S \subset A$, definimos a imagem de S por f como sendo o conjunto $f(S) = \{f(a) : a \in S\}$.

O conjunto $f(A)$ é chamado a imagem de f. Quando $f(A) = B$, dizemos que f é uma função sobrejetora, ou ainda, dado qualquer $y \in B$ existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

Se dados quaisquer $a_1, a_2 \in A$ com $a_1 \neq a_2$ implicar que $f(a_1) \neq f(a_2)$, dizemos que f é uma função injetora. Ou equivalentemente se $f(a_1) = f(a_2)$ então $a_1 = a_2$.

Se f é injetora e sobrejetora dizemos que f é uma função bijetora.

Se $f : A \to B$ e $g : C \to D$ são funções tais que $B \subset C$, definimos a composta de g com f, denotado por $g \circ f$, como sendo a função $g \circ f : A \to D$, dada por

$$g \circ f(a) = g(f(a)), \quad \forall \ \ a \in A.$$

Se $f : A \to B$ é bijetora, então existe uma única função $h : B \to A$ tal que $(h \circ f)(a) = a$, para todo $a \in A$ e $(f \circ h)(b) = b$, para todo $b \in B$. Tal função h é chamada a inversa de f e é denotada por f^{-1}.

Uma função complexa de uma variável complexa é uma função $f : A \to \mathbb{C}$, onde $A \subset \mathbb{C}$.

A função $f : A \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = 0$ para todo $z \in A$ é dita a função nula.

Observe que quando identificamos o conjunto $\mathbb{C}$ com $\mathbb{R}^2$, uma função complexa $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ passa a ser vista como uma aplicação $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, em que naturalmente perdemos a visualização geométrica. O que se faz usualmente é um esboço do domínio em $\mathbb{R}^2$ e da imagem em $\mathbb{R}^2$ separadamente.

Exemplo 2.1 *Sejam* $f(z) = \frac{2z+1}{z^2+1}$ *e* $g(z) = \frac{z}{Re(z)}$ *funções complexas. O domínio da função* f *é* $\mathbb{C} - \{-i, i\}$ *e o domínio da função* g *é* $\{z \in \mathbb{C}; Re(z) \neq 0\}$*. Veja figura abaixo.*

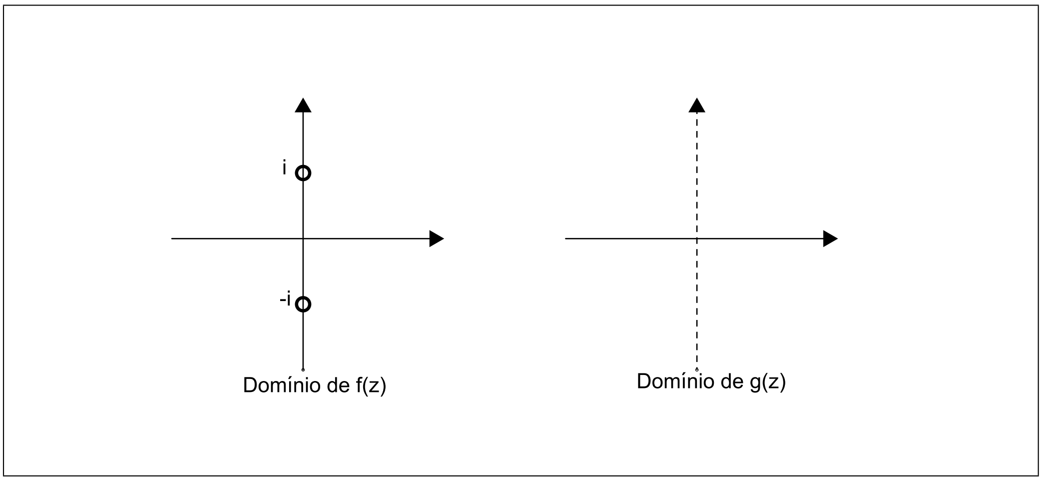

Figura 2.1: Domínio de $f(z)$ e $g(z)$.

Exemplo 2.2 *Considere a função $f(z) = 5z - 1$. Verifique que f é uma bijeção e determine sua inversa.*

Veja que f é injetora, pois dados z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$ se $f(z_1) = f(z_2)$ então

$$5z_1 - 1 = 5z_2 - 1 \Rightarrow 5z_1 = 5z_2 \Rightarrow z_1 = z_2.$$

Agora, vamos verificar que f é sobrejetora. De fato, dado $w \in \mathbb{C}$, existe $z = \frac{w+1}{5} \in \mathbb{C}$ tal que

$$f(z) = f\left(\frac{w+1}{5}\right) = 5\left(\frac{w+1}{5}\right) - 1 = w + 1 - 1 = w.$$

Como f é injetora e sobrejetora temos que f é uma bijeção.

Pelo que fizemos acima, $f^{-1}(z) = \frac{z+1}{5}$, pois $f \circ f^{-1}(z) = f(\frac{z+1}{5}) = 5(\frac{z+1}{5}) - 1 = z$. Analogamente, $f^{-1} \circ f(z) = z$.

Dadas duas funções $f : A \to \mathbb{C}$ e $g : B \to \mathbb{C}$ com $A, B \subset \mathbb{C}$ e dado um número complexo c, definimos as funções:

(i) Produto do escalar c por f, denotado por cf, como sendo a função:

$$(cf)(z) = cf(z), \quad \forall \ \ z \in A,$$

cujo domínio é $D(cf) = A$.

(ii) A soma de f e g, denotado $f + g$ como sendo a função

$$(f + g)(z) = f(z) + g(z), \quad \forall \ \ z \in A \cap B.$$

Note que para que a soma esteja bem definida o domínio de $f + g$ deve ser $D(f + g) = A \cap B$.

(iii) De maneira análoga, definimos a diferença de f e g, denotada $f - g$ por:

$$(f - g)(z) = f(z) + (-g)(z),$$

em que $(-g)(z) = -g(z)$, isto é, a função $-g : B \to \mathbb{C}$ associa a cada $z \in B$ o oposto de $g(z)$. Veja que o domínio de $f - g$ é $D(f - g) = A \cap B$.

(iv) O produto de f e g, denotado $f \cdot g$ é definido como:

$$(f \cdot g)(z) = f(z) \cdot g(z),$$

para todo $z \in D(f \cdot g) = A \cap B$.

(v) O quociente de f por g, com $g(z) \neq 0$, $\forall\ z \in B$ é definido como:

$$\frac{f}{g}(z) = \frac{f(z)}{g(z)} = f(z) \cdot g(z)^{-1},$$

e veja que $D\left(\frac{f}{g}\right) = \{z \in A \cap B; g(z) \neq 0\}$.

(vi) O conjugado de f, denotado por $\overline{f}$ é a função definida por

$$\overline{f}(z) = \overline{f(z)}$$

em que $D(\overline{f}) = D(f) = A$.

(vii) Podemos ainda definir o módulo de uma função $f : A \to \mathbb{C}$, como sendo uma função, denotada por $|f|$, definida $|f| : A \to \mathbb{R}$ da forma

$$|f|(z) = |f(z)|, z \in A.$$

Exemplo 2.3 *Se $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é dada por $f(z) = z^2$, então se $z = x + iy$ então o conjugado de f é a função*

$$\overline{f}(z) = \overline{z^2} = \overline{z}^2 = (x - iy)^2 = x^2 - 2xyi + y^2i^2 = x^2 - y^2 - 2xyi.$$

E o módulo de f é a função $|f|(z) = |f(z)| = |z^2| = |z|^2 = (\sqrt{x^2 + y^2})^2 = x^2 + y^2$.

Muitas vezes é conveniente expressarmos uma função $f : A \to \mathbb{C}$ em termos de sua parte real e de sua parte imaginária, isto é, representamos f na forma $f = u + iv$, onde $u(z) = Re[f(z)]$ e $v(z) = Im[f(z)], z \in A$.

Se escrevermos $z = (x, y)$ com $x, y \in \mathbb{R}$, podemos considerar u e v como funções reais de duas variáveis reais $u(z) = u(x, y)$ e $v(z) = v(x, y)$.

Exemplo 2.4 *Se $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é dada por $f(z) = z + 1$, então dado $z = x + iy$ com $x, y \in \mathbb{R}$ temos que $f(z) = x+iy+1$. Assim as partes real e imaginária de f são $u(z) = u(x, y) = x+1$ e $v(z) = v(x, y) = y$.*

Dados uma função $f : A \to \mathbb{C}$ e um subconjunto S de A, dizemos que f é limitada em S se existe uma constante $M > 0$ tal que

$$|f(z)| \leq M, \ \forall \ z \in S.$$

Exemplo 2.5 *A função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $f(z) = z^2$ é limitada em $\{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 1\}$, pois $|f(z)| = |z^2| = |z|^2 \leq 1$, mas não é limitada em $\mathbb{C}$.*

Algumas funções recebem nomes especiais, vejamos algumas delas: vamos assumir que $A \subset \mathbb{C}$.

1. **Funções Racionais**

   Uma função $f : A \to \mathbb{C}$ é dita racional se f é uma função dada como quociente de polinômios, ou seja, do tipo

   $$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_m z^m},$$

   onde os coeficientes $a_i, b_j \in \mathbb{C}$, $i = 0, \ldots, n$, $j = 0, \ldots, m$ em que $h(z) \neq 0, \ \forall \ z \in A$.

   O domínio de f é o conjunto de todos os elementos z de A nos quais o denominador de f não se anula.

   Uma função racional da forma $f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$, é chamada uma função polinomial. Se $a_n \neq 0$, dizemos que f é uma função polinomial de grau n.

   Não vamos definir o grau da função nula.

2. **Funções Racionais Especiais**

   (a) **Funções Constantes**

   Uma função $f : A \to \mathbb{C}$ é dita constante se $f(z) = c$, para todo $z \in A$, onde c é uma constante complexa.

(b) **Translações**

São as funções da forma $f(z) = z + b$, onde b é uma constante complexa. Se $b = 0$, a função $f(z) = z$ é chamada identidade.

(c) **Rotações**

Vimos anteriormente que uma função complexa $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ pode ser vista como uma aplicação $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. É sabido que dado um vetor $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e θ um ângulo $0 \leq \theta < 2\pi$ então a rotação de (x, y) de ângulo θ é dada por

$$f(x, y) = (x \cos(\theta) - y \operatorname{sen}(\theta), x \operatorname{sen}(\theta) + y \cos(\theta)).$$

Denotando por $z = x + iy$ temos

$$f(z) = f(x, y) = x \cos(\theta) - y \operatorname{sen}(\theta) + i(x \operatorname{sen}(\theta) + y \cos(\theta)) = az,$$

onde $a = \cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)$ é um número complexo de módulo 1.

Portanto, uma rotação é uma função complexa da forma $f(z) = az$, onde a é uma constante complexa de módulo 1.

(d) **Homotetias**

Uma homotetia é uma função $f(z) = az$, onde a é uma constante **real** não nula.

Dizemos que f é uma **dilatação** se $a > 1$ e uma **contração** se $0 < a < 1$.

(e) **Função Inversa**

Denominamos a função $f(z) = \dfrac{1}{z}$ com $z \neq 0$ por função inversa.

(f) **Função n-ésima potência**

A função $f(z) = z^n$, onde $n \in \mathbb{N}^*$ é denominada de n-ésima potência.

Dada uma função $f : A \to \mathbb{C}$ e dado um número $z_0 \in A$, dizemos que z_0 é um zero de f (ou uma raiz de f), se $f(z_0) = 0$.

Na próxima seção vamos aprofundar no estudo de funções polinomiais de modo a tentar determinar suas raízes.

2.2 Teorema Fundamental da Álgebra

Nesta seção vamos explorar um dos mais conhecidos e importantes Teoremas da matemática, denominado Teorema Fundamental da Álgebra, que foi provado por Carl Friedrich Gauss. Este teorema garante a existência de raízes complexas de funções polinomiais com coeficientes em $\mathbb{C}$. Comprovando a insuficiência do conjunto dos números reais, já que uma função polinomial com coeficientes reais pode não ter nenhuma raiz real, como é o caso da função $f(x) = x^2 + 1$.

As principais referências desta parte histórica consta de [4] e [6].

Considerado como o príncipe dos matemáticos, Carl Friedrich Gauss nasceu em Brunswick, na Alemanha no ano de 1777 e faleceu em sua casa no Observatório de Göttingen em 23 de fevereiro de 1855. Em sua infância seu pai era pouco favorável as questões ligadas ao estudo, no entanto sua mãe o encorajava sentindo-se orgulhosa pelos feitos de seu filho. Ainda muito criança Gauss corrigiu um erro aritmético no borrador de seu pai e conta-se que Gauss deu a solução imediatamente de um problema proposto por seu professor (dar o resultado da soma dos números de 1 a 100). Gauss entrou no colégio em Brunswick com a idade de 15 anos e na Universidade de Göttingen com 18 anos de idade.

Gauss contribuiu para o desenvolvimento da matemática em diversas áreas, com trabalhos sobre Cálculo Diferencial e Integral, Estatística, Geometria, Teoria das Probabilidades, Astronomia, Geometria Diferencial, Eletromagnetismo, Teoria dos Números e Teoria das Funções de Variáveis Complexas.

Segundo Eves ([4]), em sua tese de doutorado, em 1799 na Universidade de Helmstädt, escrita por volta dos 21 anos de idade, Gauss deu a primeira demonstração plenamente satisfatória do teorema fundamental da álgebra, que envolvia conceitos topológicos. Grandes matemáticos como Cardano, Peter Roth, Girard, Newton, Descartes, Euler, Foncenet, Lagrange, d'Alembert abordaram em algum sentido este problema. Alguns destes apresentaram uma demonstração mas que do ponto de vista de Gauss, não era satisfatória. Quase 20 anos depois, de sua primeira demonstração em 1816, Gauss publicou duas novas demonstrações do Teorema Fundamental da Álgebra, e mais tarde ainda, em 1850, uma quarta prova, num esforço para encontrar uma demonstração inteiramente algébrica. Ele utilizou propriedades topológicas da reta e do plano, que não tinham sido ainda explicitadas em sua época. Vale ressaltar que foi Gauss quem introduziu a expressão número complexo e que após ele ter dedicado estudos nessa área os números complexos passaram a ter uma melhor aceitação no meio matemático.

Teorema 2.6 *(**Teorema Fundamental da Álgebra**) Dada uma função polinomial $f(z) = a_nz^n + \cdots + a_1z + a_0$, com $a_i \in \mathbb{C}$, $i = 0, 1, \cdots, n$, $a_n \neq 0$ e $n \geq 1$, então f possui uma raiz complexa.*

Devido a complexidade deste teorema não vamos apresentar sua demonstração. Uma destas demonstrações devido à Gauss, foi encontrada por Argand em 1815 e modificada por Cauchy e pode ser encontrada em [6].

Proposição 2.7 *Seja $f(z) = a_nz^n + \cdots + a_1z + a_0$ uma função polinomial. Se $z_0 \in \mathbb{C}$ é uma raiz de f, então $z - z_0$ é um fator de f, isto é, existe uma função polinomial g tal que $f(z) = (z - z_0)g(z)$, para todo $z \in \mathbb{C}$.*

Demonstração:

Por hipótese, $f(z_0) = a_nz_0^n + \cdots + a_1z_0 + a_0 = 0$, portanto,

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z) - f(z_0) \\ &= a_nz^n + \cdots + a_1z + a_0 - (a_nz_0^n + \cdots + a_1z_0 + a_0) \\ &= a_n(z^n - z_0^n) + \cdots + a_2(z^2 - z_0^2) + a_1(z - z_0). \end{aligned}$$

Agora, $z^k - z_0^k = (z - z_0)(z^{k-1} + z^{k-2}z_0 + \cdots + zz_0^{k-2} + z_0^{k-1}), \quad \forall \ k \geq 1.$

Substituindo obtemos,

$$\begin{aligned} f(z) &= a_n(z - z_0)(z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \cdots + zz_0^{n-2} + z_0^{n-1}) + \cdots + a_2(z - z_0)(z + z_0) + a_1(z - z_0) \\ &= (z - z_0)(a_n(z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \cdots + zz_0^{n-2} + z_0^{n-1}) + \cdots + a_2(z + z_0) + a_1) \\ &= (z - z_0)g(z), \end{aligned}$$

onde $g(z) = a_n(z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \cdots + zz_0^{n-2} + z_0^{n-1}) + a_2(z + z_0) + a_1$. ■

O Teorema Fundamental da Álgebra garante que dado uma função polinomial de grau n, $f(z) = a_nz^n + \cdots + a_1z + a_0$, com $a_i \in \mathbb{C}$, e $a_n \neq 0$, existe uma raiz $z_1 \in \mathbb{C}$ de f.

E assim, segue da Proposição 2.7 que $f(z)$ se fatora da forma $f(z) = (z - z_1)g_1(z)$, para algum polinômio $g_1(z)$ de grau menor ou igual a $n - 1$. Entretanto, novamente pelo Teorema

Fundamental da Álgebra, $g_1(z)$ admite uma raiz z_2 e portanto $f(z) = (z - z_1)(z - z_2)g_2(z)$, para algum polinômio $g_2(z)$ de grau menor ou igual a $n - 2$. E assim sucessivamente, f vai admitir uma fatoração da forma

$$f(z) = c(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n),$$

onde c é uma constante complexa e $z_1, \cdots, z_n$ são as raízes de f, que eventualmente podem se repetir. Vamos provar no próximo resultado que toda função polinomial de grau n, admite no máximo n raízes complexas.

Proposição 2.8 *Toda função polinomial não nula de grau n com $n \geq 0$ possui no máximo n raízes complexas, se contarmos suas multiplicidades.*

Demonstração: A prova será feita por indução sobre n. Considere f uma função polinomial não identicamente nula. Como toda função polinomial de grau zero não possui raízes, o resultado é óbvio para $n = 0$.

Suponhamos o resultado verdadeiro para um certo n com $n \geq 0$ e seja f uma função polinomial de grau $n + 1$. Vamos provar que f possui no máximo $n + 1$ raízes. O Teorema Fundamental da Álgebra garante que se f não possui raízes, significa que f tem grau 0, senão f possui pelo menos uma raiz complexa, digamos z_0.

Pela Proposição 2.7, existe uma função polinomial g tal que $f(z) = (z - z_0)g(z), \ \forall \ z \in \mathbb{C}$. Como f tem grau $n + 1$, temos que g tem grau menor ou igual n. Pela hipótese de indução, g possui no máximo n raízes. Como as raízes de f são exatamente z_0 e as raízes de g, concluímos que f possui no máximo $n + 1$ raízes, como desejado. ■

O Teorema Fundamental da Álgebra garante a existência de raízes complexas de uma função polinomial entretanto não nos apresenta um método para determiná-las. Vejamos alguns casos em que temos uma resposta mais concreta.

Se a função polinomial é de grau 1, digamos $f(z) = az + b$, com $a, b \in \mathbb{C}$ e $a \neq 0$ então $z = \frac{-b}{a}$ é a única raiz de f.

Também no caso de polinômios de grau 2, com coeficientes em $\mathbb{C}$ temos sua resposta completa.

Vamos mostrar que a fórmula de Bháskara utilizada para obter as raízes de uma equação polinomial quadrática com coeficientes reais, também fornece as raízes da equação para o caso com coeficientes complexos.

Seja a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $f(z) = az^2 + bz + c$, com $a, b, c \in \mathbb{C}$ e $a \neq 0$. Queremos determinar as raízes de f, ou seja, os valores de $z \in \mathbb{C}$ para os quais

$$az^2 + bz + c = 0. \tag{2.1}$$

Dividindo a equação (2.1) por a e completando quadrados temos

$$\begin{aligned}
az^2 + bz + c = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad z^2 + \frac{b}{a}z = -\frac{c}{a} \\
&\Leftrightarrow \quad z^2 + \frac{b}{a}z + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \\
&\Leftrightarrow \quad \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\
&\Leftrightarrow \quad z + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.
\end{aligned}$$

O que implica

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{2.2}$$

em que $\sqrt{b^2 - 4ac}$ é a raiz quadrada principal do número complexo $b^2 - 4ac$, ou seja, em que $k = 0$ na Proposição 1.14.

Exemplo 2.9 *Determine os zeros das funções:*

(a) $f(z) = 3\overline{z} - i$;

(b) $g(z) = z^2 + 2z + 10$;

(c) $h(z) = -iz^2 + (7 - 2i)z - 2i + 1$.

Soluções:

(a) $f(z) = 0 \Rightarrow 3\overline{z} - i = 0 \Rightarrow \overline{z} = \dfrac{i}{3} \Rightarrow z = -\dfrac{i}{3}$.

(b) $g(z) = 0 \Rightarrow z = \dfrac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2 \cdot 1} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{-36}}{2} = -1 \pm 3i$.

(c) As raízes de h são dadas por:

$$\begin{aligned} z &= \frac{-(7-2i) \pm \sqrt{(7-2i)^2 - 4(-i)(-2i+1)}}{2(-i)} = \frac{-7+2i \pm \sqrt{53-24i}}{-2i} \\ &= \frac{-7+2i}{-2i}\frac{2i}{2i} \pm \frac{\sqrt{53-24i}}{-2i}\frac{2i}{2i} = \frac{-4-14i}{4} \pm 2i\frac{\sqrt{53-24i}}{4} \\ &= -1 - \frac{7}{2}i \pm \frac{i\sqrt{53-24i}}{2}, \end{aligned}$$

em que $\sqrt{53-24i}$ *é a raiz principal do número complexo* $53-24i$.

Uma classe interessante de funções polinomiais são aquelas cujos coeficientes são reais. Vejamos alguns resultados nesta direção.

Proposição 2.10 *Seja* $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ *uma função polinomial com coeficientes reais. Se* $z = a + bi \in \mathbb{C}$ *é raiz de* $p(x)$ *então* $\overline{z} = a - bi$ *também o é.*

Demonstração: Se z é raiz de $p(x)$, então $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$. Então da Proposição 1.6 segue que

$$\begin{aligned} \overline{0} &= \overline{a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0} = \overline{a_n z^n} + \cdots + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} \\ &= \overline{a_n}(\overline{z})^n + \cdots + \overline{a_1}\ \overline{z} + \overline{a_0}. \end{aligned}$$

Entretanto $a_i \in \mathbb{R}$, $\forall\ i = 0, 1, \cdots, n$, ou seja, $\overline{a_i} = a_i$. Logo, $a_n \overline{z}^n + \cdots + a_1 \overline{z} + a_0 = 0$, ou seja, $p(\overline{z}) = 0$. ■

Observe que para polinômios com coeficientes complexos não é verdade que se z é raiz então seu conjugado também seja raiz.

Exemplo 2.11 *Vamos determinar as raízes do polinômio* $h(z) = z^2 - iz + 1$.

Segue de (2.2), que é a Fórmula de Bháskara no caso complexo que

$$z = \frac{i \pm \sqrt{(-i)^2 - 4(1)(1)}}{2} \Rightarrow z = \frac{i \pm \sqrt{-5}}{2} = \frac{i \pm i\sqrt{5}}{2}.$$

Logo, $z_1 = \dfrac{i(1+\sqrt{5})}{2}$ *e* $z_2 = \dfrac{i(1-\sqrt{5})}{2}$ *são as raízes complexas de* $h(z)$*, porém uma não é o conjugado da outra.*

Corolário 2.12 *Toda função polinomial com coeficientes reais de grau ímpar tem pelo menos uma raiz real.*

Demonstração: Segue do Teorema Fundamental da Álgebra que uma função polinomial $p(x)$ de grau n, possui n raízes em $\mathbb{C}$. Entretanto, da Proposição 2.10 as raízes complexas aparecem aos pares. Como o grau de $p(x)$ é ímpar, segue que $p(x)$ admite pelo menos uma raiz real. ■

Existe um critério mais efetivo na busca de raízes de funções polinomiais de grau n, com coeficientes racionais, que apresentamos abaixo. Este em geral é visto no ensino médio.

Considere a seguinte função polinomial com coeficientes racionais.

$$f(z) = \frac{b_n}{c_n} z^n + \cdots + \frac{b_1}{c_1} z + \frac{b_0}{c_0}, \text{ com } b_i, c_i \in \mathbb{Z}, \quad c_i \neq 0 \quad \forall\, i = 0, 1, \cdots, n.$$

Como $c_i \neq 0$, $\forall\, i$, multiplique o polinômio acima por $c_n \cdots c_1 c_0$. Assim,

$$g(z) = (c_n \cdots c_1 c_0) \cdot f(z) = b_n (c_{n-1} \cdots c_1 c_0) z^n + \cdots + b_0 c_n \cdots c_1 = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0,$$

onde $a_j = b_j c_n \cdots c_{j+1} c_{j-1} \cdots c_0, j = 0, 1, \cdots, n$.

Veja que, α é raiz de $f(z)$ se, e somente se, α é a raiz de $g(z)$. Ou seja, todo polinômio com coeficientes racionais, a menos de produto por uma constante, pode ser visto como um polinômio com coeficientes inteiros. E mais com o mesmo conjunto de zeros.

Vamos apresentar um resultado que nos permite verificar se um polinômio com coeficientes inteiros possui raiz racional, caso exista.

Proposição 2.13 *Seja $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$ uma função polinomial com coeficientes inteiros. Se $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q}$ com mdc$(\alpha, \beta) = 1$ é raiz de $p(z)$, então $\alpha | a_0$ e $\beta | \alpha_n$.*

Demonstração: Suponha $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q}$ raiz de $p(x)$, assim

$$0 = p\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = a_n \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n + \cdots + a_1 \left(\frac{\alpha}{\beta}\right) + a_0,$$

o que implica

$$0 = \beta^n p\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} \beta + \cdots + a_1 \alpha \beta^{n-1} + a_0 \beta^n, \tag{2.3}$$

logo, $-a_n\alpha^n = \beta(a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\alpha\beta^{n-2} + a_0\beta^{n-1})$, ou seja, $\beta | a_n\alpha^n$. Mas $\text{mdc}(\alpha, \beta) = 1$, ou seja $\beta \nmid \alpha$ e portanto $\beta | a_n$.

Analogamente, segue de (2.3) que, $-a_0\beta^n = \alpha(a_n\alpha^{n-1} + a_{n-1}\alpha^{n-2}\beta + \cdots + a_1\beta^{n-1}$. Logo, $\alpha | a_0\beta^n$, mas $\text{mdc}(\alpha, \beta) = 1$, portanto $\alpha | a_0$. ■

Exemplo 2.14 *Determinemos as raízes das seguintes funções polinomiais:*

(a) $p(x) = 2x^3 - 8x^2 + 5x + 1$;

(b) $q(x) = x^5 - 15x^4 + 79x^3 - 151x^2 - 12x + 234$.

Solução:

(a) Pela Proposição 2.13*, temos que se* $p(x)$ *possuir raiz racional ela será:* ± 1 *ou* $\pm \frac{1}{2}$.

Note que $p(1) = 0$*, assim podemos fatorar* $p(x)$ *obtendo* $p(x) = (x - 1)(2x^2 - 6x - 1)$. *Aplicando a Fórmula de Bháskara* 2.2 *em* $g(x) = 2x^2 - 6x - 1$*, temos*

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4.2.(-1)}}{2.2} = \frac{6 \pm \sqrt{44}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{11}}{2}.$$

Portanto, podemos reescrever o polinômio $p(x)$ *como*

$$p(x) = 2(x - 1)\left(x - \frac{3 + \sqrt{11}}{2}\right)\left(x - \frac{3 - \sqrt{11}}{2}\right).$$

Com isso concluímos que as raízes de $p(x)$ *são* $1, \dfrac{3 + \sqrt{11}}{2}$ *e* $\dfrac{3 - \sqrt{11}}{2}$.

(b) Pela Proposição 2.13 *temos que, se* $q(x)$ *possuir raiz racional ela será um dos divisores de 234, isto é,* ± 1, ± 2, ± 3 *ou* ± 13.

Note que $q(-1) = 0$*, assim podemos fatorar* $q(x)$ *obtendo* $q(x) = (x + 1)(x^4 - 16x^3 + 95x^2 - 246x + 234)$. *Observe que polinômio* $g(x) = x^4 - 16x^3 + 95x^2 - 246x + 234$ *satisfaz* $g(3) = 0$*, assim temos* $q(x) = (x + 1)(x - 3)(x^3 - 13x^2 + 56x - 78)$. *Novamente por inspeção, verificamos que* $x = 3$ *é raiz do polinômio* $h(x) = x^3 - 13x^2 + 56x - 78$ *assim* $q(x) = (x+1)(x-3)^2(x^2-10x+26)$. *Aplicando a Fórmula de Bháskara* (2.2) *em* $j(x) = x^2 - 10x + 26$*, temos*

$$x = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 26}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm \sqrt{-4}}{2} = 5 \pm i.$$

Portanto, $q(x) = (x + 1)(x - 3)^2(x - (5 + i))(x - (5 - i))$.

Capítulo 3

Classes Especiais de Funções Complexas

Neste capítulo vamos explorar algumas classes especiais de funções complexas que generalizam funções reais já bem conhecidas, como no caso da função exponencial, funções trigonométricas, logaritmo, etc.

Vamos apresentar algumas semelhanças e principais diferenças entre o estudo de funções reais e complexas.

3.1 Função Exponencial

Antes de definirmos a função exponencial complexa, vamos fazer uma breve revisão de funções exponenciais reais.

Definição 3.1 *Uma função exponencial com base a é uma função da forma*

$$f(x) = a^x,$$

em que $a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$ *e* x *é um número real qualquer.*

Se a é um número real positivo e $n \in \mathbb{Z}$ também é positivo, definimos a potência a^n como sendo o produto de a por ele próprio n vezes. Ou seja, $a^n = a \cdot a \cdots a$ (n fatores).

E neste caso vale a propriedade fundamental $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$, para $n, m \in \mathbb{Z}_+$. Para estender esta noção para $-n < 0$, satisfazendo a propriedade fundamental, ou seja, para que

$a^{-n} \cdot a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1$, então a^{-n} deve ser o inverso de a^n. Por isso, definimos que

$$a^{-n} = (a^n)^{-1} = \frac{1}{a^n}.$$

Se $n = \frac{p}{q}$ for um número racional $p, q \in \mathbb{Z}$, com $q > 0$, já recordamos na Seção 1.2 Fórmula de Demoivre o que significa $\sqrt[q]{a}$. Queremos que $a^{\frac{p}{q}}$ seja um número real positivo satisfazendo

$$(a^{\frac{p}{q}})^q = a^{\frac{p}{q}\cdot q} = a^p.$$

Ou seja, $a^{\frac{p}{q}}$ deve ser o número real positivo cuja q-ésima potência é igual a a^p. Por definição de raiz, devemos ter que

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{p}.$$

Em particular, $a^{\frac{1}{p}} = \sqrt[q]{a}$. Em todos estes casos analisados vale que $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$.

Um pouco mais complicado é analisar o que significa o número a^x, com x um número irracional e $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Por exemplo, o que significa 5^π e $3^{\sqrt{2}}$.

Uma explicação razoavelmente satisfatória é a seguinte: queremos explicar o que significa $2^{\sqrt{3}}$. Sabemos que $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$. Assim, $2^{1,7} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1,8}$. E sabemos o que significa $2^{1,7}$ e $2^{1,8}$. Deste modo, quanto melhor a aproximação de $\sqrt{3}$, melhor será a de $2^{\sqrt{3}}$. Ou seja,

$$\begin{aligned}
1,73 < \sqrt{3} < 1,74 \quad &\Rightarrow \quad 2^{1,73} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1,74} \\
1,732 < \sqrt{3} < 1,733 \quad &\Rightarrow \quad 2^{1,732} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1,733} \\
1,7320 < \sqrt{3} < 1,7321 \quad &\Rightarrow \quad 2^{1,7320} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1,7321}.
\end{aligned}$$

Utilizando este processo de aproximação, podemos determinar $2^{\sqrt{3}}$ com seis casas decimais

$$2^{\sqrt{3}} \simeq 3,321997.$$

Com resultados de análise é possível provar que todo número positivo pode ser arbitrariamente aproximado por potências racionais de um número real positivo a, $a \neq 1$.

É possível provar que a função exponencial $f(x) = a^x, a > 0, a \neq 1$ é crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$.

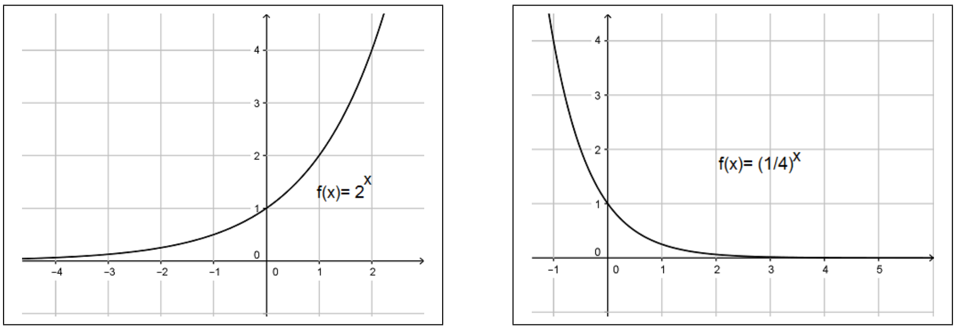

Figura 3.1: Função exponencial.

Uma base especial das funções exponenciais é a de base e, em que $e \simeq 2,71828\ldots$, ou seja, $f(x) = e^x$. Como $e > 1$ segue que f é uma função crescente.

Mas observe que uma aproximação para $e^{\sqrt{2}}$ seria $e^{1,4}, e^{1,41}, e^{1,414}, \ldots$. No entanto, $e^{1,4} = e^{\frac{14}{10}} = e^{\frac{7}{5}} = \sqrt[5]{e^7}$, em que aumenta o grau de dificuldade quanto maior for a aproximação de $\sqrt{2}$.

Uma formalização mais precisa para esta ideia passa pela compreensão de representar funções como séries de potências.

Não vamos introduzir os conceitos necessários para o estudo de séries, pois foge do nosso objetivo. Vamos assumir conhecido o conceito de derivada de uma função e definir a série de Taylor de uma função f na origem como sendo

$$f(0) + \frac{f^{'}(0)}{1!}x + \frac{f^{''}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{'''}(0)}{3!}x^3 + \cdots,$$

em que $f^{(n)}(0)$ é a n-ésima derivada de f no ponto 0.

Quando truncamos esta soma infinita numa certa ordem, digamos

$$f(0) + \frac{f^{'}(0)}{1!}x + \frac{f^{''}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{'''}(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n, \tag{3.1}$$

obtemos um polinômio, cujo gráfico aproxima-se do gráfico de f numa vizinhança da origem, ou seja, quanto maior o grau do polinômio (3.1), mais próximo o gráfico deste estará do gráfico de f em 0. Intuitivamente dizemos que a série converge se ela se aproxima de uma certa função quando n tende para infinito.

Nem toda função coincide com sua série de Taylor. Quando isto ocorre escrevemos

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

A série de Taylor da função $f(x) = e^x$, para $x \in \mathbb{R}$ é

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots, \tag{3.2}$$

já que a derivada de qualquer ordem da função exponencial é ela mesma. Veja que com esta representação da função exponencial, $e^{\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}^2}{2!} + \frac{\sqrt{2}^3}{3!} + \cdots$, em que cada termo desta soma é de cálculo muito mais simples do que o apresentado anteriormente.

Nosso intuito no que segue é tentar estender essas noções para o caso da exponencial complexa. Vamos definir a exponencial e^z de um número complexo z e derivar algumas de suas propriedades.

Substituindo $x = iy,\ y \in \mathbb{R}$ na expressão (3.2) e computando formalmente (sem nos preocuparmos com qualquer significado preciso de convergência), obtemos:

$$\begin{aligned} e^{iy} &= 1 + iy + \tfrac{i^2y^2}{2} + \tfrac{i^3y^3}{3!} + \tfrac{i^4y^4}{4!} + \tfrac{i^5y^5}{5!} + \tfrac{i^6y^6}{6!} + \cdots \\ &= \left(1 - \tfrac{y^2}{2} + \tfrac{y^4}{4!} - \tfrac{y^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(y - \tfrac{y^3}{3!} + \tfrac{y^5}{5!} + \cdots\right). \end{aligned}$$

Essas duas últimas séries são as expansões da série de Taylor na origem para $cos(y)$ e $sen(y)$, respectivamente. Em outras palavras, $e^{iy} = cos(y) + isen(y)$.

Além disso, $e^{s+t} = e^s e^t$, se $s, t \in \mathbb{R}$. Assim, é natural esperarmos que $e^{x+iy} = e^x e^{iy}$. Motivados por estas considerações definimos a exponencial de $z = x + iy$ como:

$$e^z = e^x(cos(y) + isen(y)).$$

Se $z = iy$, obtemos a **fórmula de Euler**

$$e^{iy} = cos(y) + isen(y).$$

Exemplos 3.2 *Vamos determinar os valores de* $e^{\frac{\pi i}{2}}$, $e^{1+\pi i}$ *e* $e^{\pi - \frac{\pi i}{2}}$.

Veja que $e^{\frac{\pi i}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 + i = i.$

Por outro lado $e^{1+\pi i} = e^1(\cos(\pi) + i\,\mathrm{sen}(\pi)) = e(-1+0) = -e.$

E finalmente

$$e^{\pi - \frac{\pi i}{2}} = e^{\pi}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right) = e^{\pi}(0 + i(-1)) = -e^{\pi} i.$$

A função exponencial é a função $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por:

$$\exp z = e^z.$$

Note que a função exponencial complexa estende a função exponencial real.

Vemos diretamente da definição de e^z que $|e^z| = e^{Re(z)}$ e $arg(e^z) = Imz + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$.

De fato, se $z = x+iy$ então $e^z = e^x(\cos(y)+i\,\mathrm{sen}(y))$. Logo, $|e^z| = |e^x||\cos(y)+i\,\mathrm{sen}(y)| = e^{Re(z)}$, já que $e^x > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$. E ainda temos que $arg(z) = y + 2k\pi = Im(z) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Em particular, $exp(z) = e^z \neq 0$ para todo número complexo z, pois $e^x > 0$ e $\cos(y)$ e $\mathrm{sen}(y)$ não se anulam simultaneamente.

Algumas propriedades da função exponencial real são preservadas no caso complexo.

Proposição 3.3 *Para quaisquer $z \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{Z}$, temos:*

(a) $(e^z)^n = e^{nz}$;

(b) $(e^z)^{-1} = e^{-z}$;

(c) $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$.

Demonstração:

(a) Dado $z = x + iy$ temos que $e^z = e^x(\cos(y) + i\,\mathrm{sen}(y))$. Segue da Fórmula de DeMoivre que se $n \in \mathbb{Z}$ com $n > 0$ então

$$\begin{aligned} (e^z)^n &= (e^x)^n(\cos(ny) + i\,\mathrm{sen}(ny)) \\ &= e^{nx}(\cos(ny) + i\,\mathrm{sen}(ny)) = e^{nz}. \end{aligned}$$

Se $n < 0$ então $-n > 0$. Logo, pelo que fizemos acima

$$(e^z)^n = \frac{1}{(e^z)^{-n}} = \frac{1}{e^{(-n)z}}.$$

Mas $e^{(-n)z} = e^{-nx}(\cos(-ny) + i\,\mathrm{sen}(-ny))$. Deste modo, multiplicando numerador e denominador pelo conjugado de $e^{(-n)z}$ obtemos

$$\frac{1}{e^{(-n)z}} = \frac{1}{e^{-nx}(\cos(-ny) + i\,\mathrm{sen}(-ny))} \cdot \frac{e^{-nx}(\cos(-ny) - i\,\mathrm{sen}(-ny))}{e^{-nx}(\cos(-ny) - i\,\mathrm{sen}(-ny))}.$$

Entretanto, a propriedade $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$ é válida para a função exponencial real, e as funções reais $\cos(y)$ e $\mathrm{sen}(y)$ são par e ímpar, respectivamente temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{e^{(-n)z}} &= \frac{e^{-nx}(\cos(-ny) - i\,\mathrm{sen}(-ny)}{e^{-2nx}(\cos^2(-ny) + \mathrm{sen}^2(-ny)}\\ &= e^{nx}(\cos(ny) + i\,\mathrm{sen}(ny)) = e^{nz}.\end{aligned}$$

Portanto, $(e^z)^n = e^{nz}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Em particular, $(e^z)^{-1} = e^{-z}$, para todo $z \in \mathbb{C}$.

(c) Se $z = x + iy$ e $w = a + bi$ são dois números complexos, segue da Proposição 1.9 que

$$\begin{aligned}e^z e^w = e^{x+yi}e^{a+bi} &= [e^x(cos(y) + isen(y))][e^a(cos(b) + isen(b))]\\ &= e^x e^a(cos(y+b) + isen(y+b))\\ &= e^{x+a}(cos(y+b) + isen(y+b))\\ &= e^{z+w}.\end{aligned}$$

Em outras palavras, $e^{z+w} = e^z e^w$, para todo $z, w \in \mathbb{C}$. ■

É interessante observarmos que, ao contrário do que acontece no caso real, em que a função exponencial é injetora, no caso complexo é possível termos $e^z = e^w$, com $z \neq w$.

Exemplo 3.4 *Sejam os números complexos $z = 0$ e $w = 2\pi i$. Temos*

$$e^0 = e^0(\cos(0) + i\,\mathrm{sen}(0)) = 1 \quad e \quad e^{2\pi i} = e^0(\cos(2\pi) + i\,\mathrm{sen}(2\pi)) = 1.$$

Logo, $f(z) = e^z$ não é injetora.

Proposição 3.5 *Para quaisquer $z, w \in \mathbb{C}$, temos que $e^z = e^w$ se, e somente se, $z = w + 2k\pi i$, para algum $k \in \mathbb{Z}$.*

Demonstração: Sejam $z = x + yi$ e $w = a + bi$, com $x, y, a, b \in \mathbb{R}$. Se $e^z = e^w$, isto é, $e^{x+yi} = e^{a+bi}$ temos que

$$e^x(cos(y) + isen(y)) = e^a(cos(b) + isen(b)).$$

Por igualdade de números complexos obtemos que $e^x \cos(y) = e^a \cos(b)$ e $e^x \operatorname{sen}(y) = e^a \operatorname{sen}(b)$. Elevando as duas igualdades ao quadrado e somando obtemos

$$e^{2x} \cos^2(y) + e^{2x} \operatorname{sen}^2(y) = e^{2a} \cos^2(b) + e^{2a} \operatorname{sen}^2(b),$$

o que implica $e^{2x} = e^{2a}$, logo $x = a$ pois a função exponencial real é injetora. Assim $\cos(y) = \cos(b)$ e $\operatorname{sen}(y) = \operatorname{sen}(b)$, ou seja, $y = b + 2k\pi$ para algum $k \in \mathbb{Z}$. Daí,

$$z = x + yi = a + (b + 2k\pi)i = a + bi + 2k\pi i = w + 2k\pi i.$$

Reciprocamente, se $z = w + 2k\pi i$, com $k \in \mathbb{Z}$, então pela Proposição 3.3,

$$e^z = e^{w+2k\pi i} = e^w e^{2k\pi i} = e^w(cos(2k\pi) + isen(2k\pi)) = e^w.$$

■

Segue da Proposição 3.5 que a função exponencial complexa é periódica de período igual a $2\pi i$, ou seja,

$$exp(z + 2\pi i) = e^{z+2\pi i} = e^z = exp(z).$$

Esta é uma propriedade própria do caso complexo, pois sabemos que a função exponencial real não é periódica. Com a noção de exponencial a representação trigonométrica de um número complexo $z = r(cos(\theta) + isen(\theta))$ pode ser escrito como:

$$z = re^{i\theta}.$$

E como vimos na Seção 1.2 (Fórmula de DeMoivre) as raízes n-ésimas do número 1 podem ser expressas da forma $w_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = e^{\frac{2k\pi}{n}i}$, para $k = 0, 1, \cdots, n-1$.

3.2 Funções Trigonométricas

Definido a função exponencial complexa, vamos definir as funções cosseno e seno no caso complexo. Para $y \in \mathbb{R}$, como $e^{iy} = cos(y) + isen(y)$ temos

$$e^{-iy} = \cos(-y) + i\,\mathrm{sen}(-y) = \cos(y) - i\,\mathrm{sen}(y).$$

E ainda, $isen(y) = e^{iy} - cos(y)$. Logo

$$e^{-iy} = cos(y) - (e^{iy} - cos(y)) = 2cos(y) - e^{iy}.$$

Portanto,

$$cos(y) = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}.$$

Por outro lado, $\cos(y) = e^{iy} - i\,\mathrm{sen}(y)$, assim

$$e^{-iy} = \cos(y) - i\,\mathrm{sen}(y) = e^{iy} - i\,\mathrm{sen}(y) - i\,\mathrm{sen}(y) = e^{iy} - 2i\,\mathrm{sen}(y).$$

Deste modo $-2i\,\mathrm{sen}(y) = -e^{iy} + e^{-iy}$.

Donde segue que

$$\mathrm{sen}(y) = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}.$$

Portanto, é natural definirmos a função cosseno denotada por $\cos(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ e a função seno denotada por $\mathrm{sen}(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ de uma variável complexa por

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \text{ e } \mathrm{sen}(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \text{ com } z \in \mathbb{C}.$$

As quatro outras funções trigonométricas são definidas em termos das funções cosseno e seno pelas relações usuais. Assim,

$$tg(z) = \frac{\mathrm{sen}(z)}{\cos(z)} \quad \text{e} \quad \sec(z) = \frac{1}{\cos(z)},$$

que estão definidas para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $\cos(z) \neq 0$ e ainda

$$cotg(z) = \frac{\cos(z)}{\operatorname{sen}(z)} \quad \text{e} \quad cossec(z) = \frac{1}{\operatorname{sen}(z)}$$

estão definidas para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $sen(z) \neq 0$. Note que as funções trigonométricas complexas estendem as correspondentes funções reais.

Neste sentido podemos nos perguntar: quais são os zeros das funções complexas cosseno e seno de z?

Para tanto provemos inicialmente um lema técnico.

Lema 3.6 *Seja $z \in \mathbb{C}$ dado por $z = x + iy$ com $x, y \in \mathbb{R}$. Então,*

(a) $\cos(z) = \cos(x)cosh(y) - i\operatorname{sen}(x)senh(y)$;

(b) $\operatorname{sen}(z) = \operatorname{sen}(x)cosh(y) + i\cos(x)senh(y)$.

Demonstração:

Comecemos relembrando que o cosseno hiperbólico e o seno hiperbólico de um número real y são definidos por

$$\cosh(y) = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \quad \text{e} \quad senh(y) = \frac{e^y - e^{-y}}{2}.$$

Seja $z = x + yi \in \mathbb{C}$. Então

$$\begin{aligned}
\cos(z) &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{e^{i(x+yi)} + e^{-i(x+yi)}}{2} = \frac{e^{-y+ix} + e^{y-ix}}{2} \\
&= \frac{e^{-y}e^{ix} + e^{y}e^{-ix}}{2} = \frac{e^{-y}(\cos(x) + i\operatorname{sen}(x)) + e^{y}(\cos(-x) + i\operatorname{sen}(-x))}{2} \\
&= \frac{e^{-y}(\cos(x) + i\operatorname{sen}(x)) + e^{y}(\cos(x) - i\operatorname{sen}(x))}{2} \\
&= \frac{e^{-y}\cos(x) + e^{y}\cos(x) + e^{-y}i\operatorname{sen}(x) - e^{y}i\operatorname{sen}(x)}{2} \\
&= \cos(x)\frac{e^y + e^{-y}}{2} - i\operatorname{sen}(x)\frac{e^y - e^{-y}}{2} \\
&= cos(x)cosh(y) - isen(x)senh(y).
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen}(z) &= \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{i(x+yi)}-e^{-i(x+yi)}}{2i} = \frac{(e^{-y+ix}-e^{y-ix})(-i)}{2i(-i)} \\
&= \frac{(-i)e^{-y}(\cos(x)+i\operatorname{sen}(x))+ie^{y}(\cos(x)-i\operatorname{sen}(x))}{2} \\
&= \frac{(-i)e^{-y}\cos(x)-(i^2)\operatorname{sen}(x)e^{-y}+ie^{y}\cos(x)-i^2\operatorname{sen}(x)e^{y}}{2} \\
&= \frac{-ie^{-y}\cos(x)+\operatorname{sen}(x)e^{-y}+ie^{y}\cos(x)+e^{y}\operatorname{sen}(x)}{2} \\
&= i\cos(x)\left(\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\right)+\operatorname{sen}(x)\left(\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\right) \\
&= \operatorname{sen}(x)\cosh(y)+i\cos(x)senh(y).
\end{aligned}
$$

■

Vamos provar que os zeros das funções complexas cosseno e seno são exatamente os zeros das funções reais cosseno e seno, respectivamente.

Proposição 3.7 *Temos que* $\cos(z)=0$*, se e somente se,* $z=\frac{\pi}{2}+k\pi$ *com* $k\in\mathbb{Z}$ *e* $\operatorname{sen}(z)=0$*, se e somente se,* $z=k\pi$ *com* $k\in\mathbb{Z}$.

Demonstração:

Segue do lema anterior que dado $z=x+iy\in\mathbb{C}$, $\cos(z)=\cos(x)cosh(y)-i\operatorname{sen}(x)senh(y)$. Assim, $\cos(z)=0$ se, e somente se, $\cos(x)\cosh(y)=0$ e $\operatorname{sen}(x)senh(y)=0$.

Como $\cosh(y)>0$, então $\cos(x)cosh(y)=0$ quando $\cos(x)=0$, ou seja, $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, com $k\in\mathbb{Z}$. Substituindo esse valor de x, vemos que $\operatorname{sen}(x)senh(y)=0$ equivale a $senh(y)=0$, o que ocorre exatamente quando $y=0$. Portanto, $\cos(z)=0$ se, e somente se $z=\frac{\pi}{2}+k\pi$ com $k\in\mathbb{Z}$.

Novamente, pelo lema anterior $\operatorname{sen}(z)=\operatorname{sen}(x)cosh(y)+i\cos(x)senh(y)$. Logo, $\operatorname{sen}(z)=0$ se, e somente se, $\operatorname{sen}(x)\cosh(y)=0$ e $\cos(x)senh(y)=0$.

Como $\cosh(y)>0$, $\operatorname{sen}(x)\cosh(y)=0$ exatamente quando $\operatorname{sen}(x)=0$, ou seja, $x=k\pi$. Substituindo o valor de x em $\cos(x)senh(y)=0$ temos que $\cos(k\pi)senh(y)=0$ implica que $senh(y)=0$, ou seja, $y=0$. Portanto, $\operatorname{sen}(z)=0$, se e somente se, $z=k\pi$, com $k\in\mathbb{Z}$. ■

Veremos no próximo resultado que as principais relações trigonométricas do caso real se estendem ao caso complexo.

Proposição 3.8 *Para quaisquer $z, w \in \mathbb{C}$, temos:*

(a) $sen^2(z) + cos^2(z) = 1$;

(b) $sen(-z) = -sen(z)$;

(c) $cos(-z) = cos(z)$;

(d) $sen(z+w) = sen(z)cos(w) + sen(w)cos(z)$;

(e) $cos(z+w) = cos(z)cos(w) - sen(z)sen(w)$.

Demonstração:

(a) De fato,

$$\begin{aligned}
sen^2(z) + cos^2(z) &= \left[\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right]^2 + \left[\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right]^2 \\
&= \frac{(e^{iz})^2 - 2e^{iz}e^{-iz} + (e^{-iz})^2}{-4} + \frac{(e^{iz})^2 + 2e^{iz}e^{-iz} + (e^{-iz})^2}{4} \\
&= \frac{-(e^{iz})^2 + 2e^{iz}e^{-iz} - (e^{-iz})^2 + (e^{iz})^2 + 2e^{iz}e^{-iz} + (e^{-iz})^2}{4} \\
&= \frac{4}{4} = 1.
\end{aligned}$$

(b) Observe que,

$$\operatorname{sen}(-z) = \frac{e^{i(-z)} - e^{-i(-z)}}{2i} = \frac{e^{-iz} - e^{iz}}{2i} = -\left[\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right] = -\operatorname{sen}(z).$$

(c) Com efeito,

$$\cos(-z) = \frac{e^{i(-z)} + e^{-i(-z)}}{2} = \frac{e^{-iz} + e^{iz}}{2} = \cos(z).$$

(d) De fato,

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(z+w) &= \frac{e^{i(z+w)} - e^{-i(z+w)}}{2i} = \frac{e^{iz}e^{iw} - e^{-iz}e^{-iw}}{2i} \\
&= \frac{(\cos(z) + i\operatorname{sen}(z))(\cos(w) + i\operatorname{sen}(w))}{2i} \\
&\quad - \frac{[(\cos(z) - i\operatorname{sen}(z))(\cos(w) - i\operatorname{sen}(w))]}{2i}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\cos(z)\cos(w) + i\cos(z)\operatorname{sen}(w) + i\cos(w)\operatorname{sen}(z) - \operatorname{sen}(z)\operatorname{sen}(w)}{2i} \\
&\quad - \frac{[\cos(z)\cos(w) - i\cos(z)\operatorname{sen}(w) - i\cos(w)\operatorname{sen}(z) - \operatorname{sen}(z)\operatorname{sen}(w)]}{2i} \\
&= \frac{2i\operatorname{sen}(w)\cos(z) + 2i\operatorname{sen}(z)\cos(w)}{2i} \\
&= \operatorname{sen}(z)\cos(w) + \operatorname{sen}(w)\cos(z).
\end{aligned}
$$

(e) Note que,

$$
\begin{aligned}
\cos(z+w) &= \frac{e^{iz}e^{iw} + e^{-iz}e^{-iw}}{2} \\
&= \frac{(\cos(z) + i\operatorname{sen}(z))(\cos(w) + i\operatorname{sen}(w))}{2} \\
&\quad + \frac{(\cos(z) - i\operatorname{sen}(z))(\cos(w) - i\operatorname{sen}(w))}{2} \\
&= \frac{2\cos(z)\cos(w) - 2\operatorname{sen}(z)\operatorname{sen}(w)}{2} \\
&= \cos(z)\cos(w) - \operatorname{sen}(z)\operatorname{sen}(w). \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Entretanto, há diferenças entre o caso real e o caso complexo. Por exemplo, sabemos que as funções cosseno e seno são limitadas em $\mathbb{R}$. De fato, $|\cos(x)| \leq 1$ e $|\operatorname{sen}(x)| \leq 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Contudo estas funções não são limitadas em $\mathbb{C}$. Para tanto, apesar de não termos definido, vamos assumir o conceito de limite de funções reais.

$$
|\cos(yi)| = \left|\frac{e^{i(yi)} + e^{-i(yi)}}{2}\right| = \left|\frac{e^{-y} + e^{y}}{2}\right| = \frac{e^{-y} + e^{y}}{2}.
$$

E veja que

$$
\lim_{y\to\infty}\left(\frac{e^{-y}}{2} + \frac{e^{y}}{2}\right) = 0 + \infty = +\infty.
$$

E

$$
|\operatorname{sen}(yi)| = \left|\frac{e^{i(yi)} - e^{-i(yi)}}{2i}\right| = \left|\frac{e^{-y} - e^{y}}{2i}\right| = \left|\frac{1}{i}\right|\left|\frac{e^{-y} - e^{y}}{2}\right| \geq \frac{e^{y} - e^{-y}}{2},
$$

com

$$
\lim_{y\to\infty}\left(\frac{e^{y}}{2}\right) - \lim_{y\to\infty}\left(\frac{e^{-y}}{2}\right) = \infty - 0 = +\infty.
$$

3.3 Logaritmos e Potências Complexas

No caso de funções reais, definimos a função logaritmo como segue:

Definição 3.9 *Dado um número real $a > 0$, o logaritmo de um número $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ na base a é o número y tal que $a^y = x$.*

Cuja notação usual é $log_a x$, em que a definição acima se traduz da forma

$$log_a x = y \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x.$$

Uma definição mais construtiva pode ser encontrada em [7].

Podemos definir a função $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ que a cada $x \in \mathbb{R}$ associa $f(x) = log_a x$.

Uma base especial para a função logaritmo é quando $a = e$, e neste caso denotamos $log_e x$ por lnx, denominado o logaritmo natural de x.

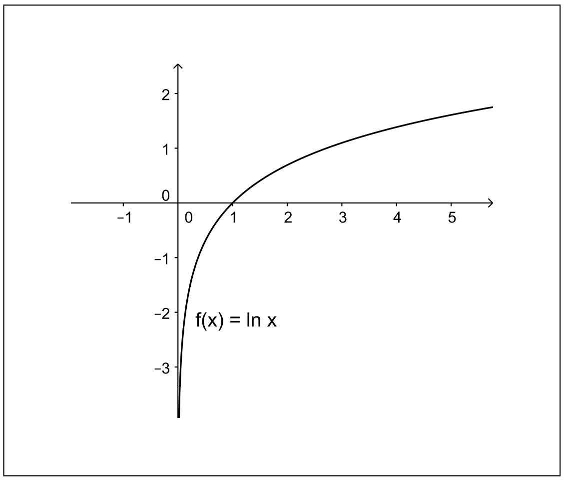

Figura 3.2: Gráfico $f(x) = lnx$

Nosso objetivo é definir o logaritmo de um número complexo de modo que estenda o conceito de logaritmo no caso real.

Definição 3.10 *Dado um número complexo z não nulo, dizemos que $w \in \mathbb{C}$ é o* ***logaritmo*** *de z se $e^w = z$.*

Enquanto que todo número real positivo possui um único logaritmo, dado um número complexo não nulo, este possui uma infinidade de logaritmos.

Denotamos por $\log z$ o conjunto de todos os logaritmos de $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, isto é,

$$\log z = \{w \in \mathbb{C};\ e^w = z\}.$$

Vamos agora determinar $\log z$.

Proposição 3.11 *Dado $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ então*

$$log(z) = \{ln|z| + i\theta;\ \theta \in arg(z)\} = \{ln|z| + i(Arg(z) + 2k\pi);\ k \in \mathbb{Z}\}. \tag{3.3}$$

Demonstração:

Com efeito, seja $w = ln|z| + i\theta$, com $\theta \in arg(z)$, então $z = |z|(\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta)) = |z|e^{i\theta}$, assim

$$e^w = e^{\ln|z| + i\theta} = e^{\ln|z|}e^{i\theta} = |z|e^{i\theta} = z.$$

Ou seja, $w \in log(z)$.

Por outro lado, suponhamos que $w \in \log z$. Então, $e^w = z$, o que equivale a dizer que $z = e^w = e^{Re(w)}.e^{iIm(w)} = e^{Re(w)}(\cos(Im(w) + i\,\mathrm{sen}(Im(w))))$. Mas $z = |z|(\cos(Arg(z) + 2k\pi) + i\,\mathrm{sen}(Arg(z) + 2k\pi))$ donde segue que $e^{Re(w)} = |z|$ e $Im(w) = Arg(z) + 2k\pi$ para algum $k \in \mathbb{Z}$. No entanto, $e^{Re(w)}$ é a exponencial real. Logo, $ln(e^{Re(w)}) = ln|z|$ o que implica $Re(w) = ln|z|$ e portanto,

$$w = ln|z| + i(Arg(z) + 2k\pi) \in \{ln|z| + i\theta; \theta \in arg(z)\}.$$

$\blacksquare$

Se $k = 0$ em (3.3) obtemos o logaritmo principal de z, que é denotado por $Logz$. Assim,

$$Logz = \ln|z| + iArg(z).$$

Logo, da Proposição 3.11, $\log(z) = \{Logz + 2k\pi i;\ k\ \in \mathbb{Z}\}$.

Observe que para todo número real positivo x, $Logx = ln|x| = lnx$. Portanto, o conceito de logaritmo de um número complexo estende o caso real, inclusive para os reais negativos.

Exemplo 3.12 *Determinar o valor dos logaritmos abaixo.*

(a) $Log(-1) = \ln|-1| + iArg(-1) = \ln 1 + i\pi = 0 + i\pi = i\pi.$

(b) $Log(1+i) = \ln|1+i| + iArg(1+i) = \ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}.$

Como o logaritmo de um número complexo é um conjunto, para verificarmos as propriedades de logaritmo do produto e potência, vamos introduzir alguns conceitos.

Defina $A \pm B = \{a \pm b;\ a \in A \text{ e } b \in B\}$ e $mA = \{m \cdot a;\ a \in A\}$ para $A, B \subset \mathbb{C}$ e $m \in \mathbb{Z}$, assim temos o seguinte resultado:

Proposição 3.13 *Dados dois números complexos não nulos z_1 e z_2, temos que:*

(a) $log(z_1 z_2) = log(z_1) + log(z_2);$

(b) $log\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = log(z_1) - log(z_2);$

(c) $log(z^m) = m \cdot log(z)$, *para todo* $m \in \mathbb{Z}^*$.

Demonstração:

(a) Tomemos $w \in log(z_1) + log(z_2)$. Então, $w = w_1 + w_2$, com $w_1 \in log(z_1)$ e $w_2 \in log(z_2)$. Pela Proposição 3.3

$$e^w = e^{w_1 + w_2} = e^{w_1} e^{w_2} = z_1 z_2,$$

ou seja, $w \in log(z_1 z_2)$.

Tomemos agora $w \in log(z_1 z_2)$. Então, $w = \ln|z_1 z_2| + i\theta$ com $\theta \in arg(z_1 z_2)$. Mas, $\theta = \theta_1 + \theta_2$ com $\theta_1 \in arg(z_1)$ e $\theta_2 \in arg(z_2)$. Como $\ln|z_1 z_2| = ln(|z_1|.|z_2|)$ é real temos que $w = \ln|z_1| + \ln|z_2| + i(\theta_1 + \theta_2)$.

Logo, $w = \ln|z_1| + i\theta_1 + \ln|z_2| + i\theta_2 \in log(z_1) + log(z_2)$.

(b) Pelo item (a), $log\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = log(z_1 \cdot z_2^{-1}) = log(z_1) + log(z_2^{-1})$. Provemos que $log(z_2^{-1}) = -log(z_2)$.

Seja $w \in log(z_2^{-1})$, ou seja, $e^w = z_2^{-1}$. Assim, $(e^w)^{-1} = z_2$. Entretanto da Proposição 3.3, $e^{-w} = (e^w)^{-1} = z_2$. Logo, $-w \in log(z_2)$ e portanto $w \in -log(z_2)$.

Por outro lado, seja $w \in -log(z_2)$, ou ainda, $-w \in log(z_2)$. O que implica que $e^{-w} = z_2$ e portanto $(e^{-w})^{-1} = z_2^{-1}$. Logo, $e^{-(-w)} = z_2^{-1}$. Donde concluímos que $w \in log(z_2^{-1})$. Portanto, $log(\frac{z_1}{z_2}) = log(z_1) - log(z_2)$.

(c) Este item segue diretamente do item (a). ■

É importante observamos que a Proposição 3.13 nem sempre é verdadeira para o logaritmo principal.

Como exemplo, consideremos os números complexos $z = w = -i$. Assim, temos que $Log(zw) = Log(z^2) = Log(-1) = i\pi$. Por outro lado, $Log(-i) = ln|-i| + iArg(-i) = ln1 + i(-\frac{\pi}{2}) = -\frac{i\pi}{2}$. Assim, $Log(z) + Log(w) = 2Log(z) = 2Log(-i) = \frac{-2i\pi}{2} = -i\pi$.

Agora $z = -i$ e $w = i$, temos que $Log(\frac{z}{w}) = Log(-1) = i\pi$. E $Log(z) - Log(w) = Log(-i) - Log(i) = -\frac{i\pi}{2} - \frac{i\pi}{2} = -i\pi$.

Como o logaritmo de um número complexo não nulo z admite uma infinidade de valores, ela não define uma função como usualmente conhecemos, que a cada elemento do domínio assume um único no contradomínio. Veja que a nossa definição de função é um pouco mais geral. A função logarítmica complexa é o que denominamos uma função multivalente. Quando a função multivalente coincidir com o caso usual, dizemos que ela é univalente. Deste modo, para definir a função logarítmica complexa de modo a ela ser univalente, temos que restringir seu domínio de modo que o argumento de z pertença um intervalo de comprimento 2π. Digamos, denotemos por log_{θ_0} a função

$$\begin{array}{rrcl} log_{\theta_0}: & (0,\infty)\times[\theta_0,\theta_0+2\pi) & \to & \mathbb{C} \\ & (r,\theta) & \mapsto & lnr + i\theta. \end{array}$$

Veja que $(0,\infty)\times[\theta_0,\theta_0+2\pi) \subset \mathbb{C}$, ou seja, log_{θ_0} é uma função cujo domínio são todos os números complexos $z = r(\cos(\theta) + i\,\text{sen}(\theta))$ em que $r \in (0,\infty)$ e $\theta \in [\theta_0,\theta_0+2\pi)$.

Para cada θ_0, a função log_{θ_0} é dita um ramo do logaritmo. Em particular, a função

$$\begin{array}{rrcl} Log: & (0,\infty)\times[0,2\pi) & \to & \mathbb{C} \\ & (r,\theta) & \mapsto & lnr + i\theta, \end{array}$$

é denominada **ramo principal do logaritmo** de z, que tínhamos denominado de logaritmo principal.

Vamos definir agora, potência de um número complexo. Como fizemos anteriormente, dado $x \in \mathbb{R}$ com $x > 0$ então $lnx = y$ se, e somente se, $e^y = x$. Ou seja, $x = e^{lnx}$. Assim, para todo $a \in \mathbb{R}$,

$$x^a = (e^{lnx})^a = e^{alnx}.$$

Queremos definir z^λ, onde z é um número complexo não nulo e λ é um número complexo arbitrário. Para tanto usaremos todos os logaritmos de z.

Assim, para cada $w \in \log(z)$, o número complexo $e^{\lambda w}$ é chamado a **λ-potência de** z associada ao logaritmo w. Se $w = Log(z)$ então $e^{\lambda w}$ é chamado a **λ-potência principal de** z. Deste modo, vamos denotar por z^λ a λ-potência principal de z, isto é,

$$z^\lambda = e^{\lambda Log(z)}.$$

Exemplo 3.14 *Por definição,* $(-i)^i = e^{iLog(-i)} = e^{i(-\frac{i\pi}{2})} = e^{\frac{\pi}{2}}$, *o qual é um número real.*

Todas as λ-potências de z serão $Z^\lambda = e^{2k\pi\lambda i}z^\lambda$, pois todo logaritmo de z é da forma $Log(z) + 2k\pi i$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Analisemos quais são as λ-potências nos seguintes casos:

1º CASO: λ é um número inteiro, digamos $\lambda = n$.

$$\begin{aligned} e^{2k\pi ni}z^n &= e^{2k\pi ni}e^{nLog(z)} = (cos(2k\pi n) + isen(2k\pi n))e^{nLog(z)} \\ &= 1e^{nLog(z)} = z^n. \end{aligned}$$

Ou seja, quando n é inteiro, todas as λ-potências de z se reduzem ao número complexo z^n como conhecido.

2º CASO: λ é um número da forma $\lambda = \dfrac{1}{n}$, $n \in I\!N^*$

$$\begin{aligned} e^{2k\pi\frac{1}{n}i}z^{\frac{1}{n}} &= e^{2k\pi\frac{1}{n}i}e^{\frac{1}{n}Log(z)} = e^{\frac{1}{n}(2k\pi i + Log(z))} \\ &= e^{\frac{1}{n}(2k\pi i + \ln|z| + iArg(z))} = e^{\frac{1}{n}(2k\pi + Arg(z))i}e^{\frac{1}{n}(\ln|z|)} \\ &= e^{\frac{1}{n}.(2k\pi + Arg(z))i}(e^{\ln|z|})^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}(2k\pi + Arg(z))i}|z|^{\frac{1}{n}} \\ &= \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{Arg(z)}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{Arg(z)}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right) \\ &= w_k, \end{aligned}$$

em que w_k são as raízes n-ésimas de z (ver Proposição 1.14).

Em particular se $k = 0$

$$z^{\frac{1}{n}} = e^{2\cdot 0\pi\lambda i} z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{Arg(z)}{n}\right) + i\left(\frac{Arg(z)}{n}\right)\right) = \sqrt[n]{z}.$$

Exemplo 3.15 *Vamos determinar a $\frac{1}{2}$-potência principal de $-i$, ou seja, $(-i)^{\frac{1}{2}}$.*

Solução: Por definição $(-i)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}Log(-i)}$. Vimos acima que $Log(-i) = -\frac{i\pi}{2}$. Logo,

$$\begin{aligned}(-i)^{\frac{1}{2}} &= e^{\frac{1}{2}\left(-i\frac{\pi}{2}\right)} = e^{-i\frac{\pi}{4}} = e^0\left(cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + isen\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}i}{2}.\end{aligned}$$

Esta é exatamente a raiz quadrada principal de $-i$.

Quais propriedades de potenciação se verificam neste caso? Vejamos uma delas.

Proposição 3.16 *Dados $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ e $z \in \mathbb{C}$ não nulo, então $z^{\lambda+\mu} = z^{\lambda} z^{\mu}$.*

Demonstração: De fato,

$$z^{\lambda+\mu} = e^{(\lambda+\mu)Log(z)} = e^{\lambda Log(z) + \mu Log(z)} = e^{\lambda Log(z)} e^{\mu Log(z)} = z^{\lambda} z^{\mu}.$$

■

Entretanto, não são válidas, em geral, que $(zw)^{\lambda} = z^{\lambda} w^{\lambda}$ e nem que $(z^{\lambda})^{\mu} = z^{\lambda\mu}$.

Exemplo 3.17 *Sejam $z = w = -i$ e $\lambda = i$. Então*

$$(zw)^{\lambda} = ((-i)(-i))^i = (-1)^i = e^{iLog(-1)} = e^{-\pi}.$$

E

$$\begin{aligned}z^{\lambda} w^{\lambda} &= (-i)^i (-i)^i \\ &= e^{iLog(-i)} e^{iLog(-i)} \\ &= e^{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}} = e^{\pi}.\end{aligned}$$

Portanto, $(zw)^i \neq z^i w^i$.

Vejamos um caso em que coincide: $(i(-i))^i = 1^i = e^{iLog(1)} = e^{iln1} = e^0 = 1$. Por outro lado, $i^i(-i)^i = e^{iLog(i)} e^{iLog(-i)} = e^{i\frac{i\pi}{2}} e^{i\left(-\frac{i\pi}{2}\right)} = e^{-\frac{\pi}{2}} e^{\frac{\pi}{2}} = 1$. Logo, $(i(-i))^i = i^i(-i)^i$.

Verificamos agora que nem sempre $(z^{\lambda})^{\mu} = z^{\lambda\mu}$.

Tome $z = i$, $\lambda = 2$, $\mu = i$. Assim

$$(z^{\lambda})^{\mu} = (i^2)^i = (-1)^i = e^{iLog(-1)} = e^{iln|-1|} = e^0 = 1.$$

E $z^{\lambda\mu} = i^{2i} = e^{2iLog(i)} = e^{2i(i\frac{\pi}{2})} = e^{-\pi}$. Logo, $(i^2)^i \neq i^{2i}$.

Todavia, como vimos anteriormente e pela Proposição 3.3

$$(i^i)^2 = (e^{-\frac{\pi}{2}})^2 = e^{-\pi} = i^{2i}.$$

Ou seja, neste caso a igualdade $(z^{\lambda})^{\mu} = z^{\lambda\mu}$ se verifica.

3.4 Transformações de Möbius

Uma classe interessante de aplicações do plano complexo nele próprio, são as transformações de Möbius. Em particular elas levam círculos e retas em círculos e retas.

Considere a transformação $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

cujos coeficientes a, b, c, d são números complexos com c e d não simultaneamente nulos.

Note que caso $ad - bc = 0$, temos que T é constante. De fato, se $ad - bc = 0$, então $ad = bc$. Consideremos os seguintes casos

(i) se $c \neq 0$, então $b = \frac{ad}{c}$ assim

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{az+\frac{ad}{c}}{cz+d} = \frac{\frac{caz+ad}{c}}{cz+d} = \frac{\frac{a}{c}(cz+d)}{cz+d} = \frac{a}{c}.$$

(ii) se $c = 0$, então $d \neq 0$. Logo, $a = \frac{bc}{d}$.

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{\frac{bcz}{d}+b}{cz+d} = \frac{\frac{bcz+db}{d}}{cz+d} = \frac{\frac{b}{d}(cz+d)}{cz+d} = \frac{b}{d}.$$

Se $ad - bc \neq 0$ denominamos essas transformações de não-singulares.

Definição 3.18 *Uma **transformação de Möbius** é uma aplicação de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{C}$, dada por*

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \tag{3.4}$$

onde a, b, c e d são constantes complexas satisfazendo $ad - bc \neq 0$.

A condição $ad - bc \neq 0$ é o mesmo que dizer que o determinante

$$det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc \neq 0.$$

Proposição 3.19 *Sejam $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ e $S : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ duas transformações de Möbius. Então,*

(a) $T \circ S$ é uma transformação de Möbius;

(b) T é inversível.

Demonstração:

(i) Sejam $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ e $S(z) = \dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$ transformações de Möbius, ou seja, $ad - bc \neq 0$ e $\alpha\delta - \gamma\beta \neq 0$, com $a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$. Então,

$$T(S(z)) = \frac{a\dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta} + b}{c\dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta} + d} = \frac{\dfrac{a\alpha z + a\beta + b\gamma z + b\delta}{\gamma z+\delta}}{\dfrac{c\alpha z + c\beta + d\gamma z + d\delta}{\gamma z+\delta}} = \frac{(a\alpha + b\gamma)z + a\beta + b\delta}{(c\alpha + d\gamma)z + c\beta + d\delta} = \frac{Az+B}{Cz+D},$$

com $A = a\alpha + b\gamma$, $B = a\beta + b\delta$, $C = c\alpha + d\gamma$ e $D = c\beta + d\delta$.

Precisamos verificar que $AD - BC \neq 0$. Veja que

$$\begin{aligned} AD - BC &= det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{pmatrix} \\ &= det \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \right) = det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \\ &= (ad - bc) \cdot (\alpha\delta - \beta\gamma) \neq 0. \end{aligned}$$

(ii) Seja $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ uma transformação de Möbius. Provemos que T é inversível e $T^{-1} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é dada por $T^{-1}(z) = \dfrac{dz-b}{-cz+a}$.

Veja que

$$
\begin{aligned}
(T^{-1}\circ T)(z) &= \frac{d\left(\dfrac{az+b}{cz+d}\right)-b}{-c\left(\dfrac{az+b}{cz+d}\right)+a} = \frac{\dfrac{adz+bd-b\,(cz+d)}{cz+d}}{\dfrac{-acz-bc+a\,(cz+d)}{cz+d}} \\
&= \frac{adz+bd-bcz-bd}{-acz-bc+acz+ad} = \frac{z\,(ad-bc)}{ad-bc} = z.
\end{aligned}
$$

Analogamente, $(T\circ T^{-1})(z)=z$. E mais, $da-(-b)(-c)=da-bc=ad-bc\neq 0$. Logo, T^{-1} é uma transformação de Möbius. ■

Vale ressaltar que os coeficientes complexos a, b, c e d não são únicos, isto é, se $\lambda\in\mathbb{C}$, $\lambda\neq 0$, então $T(z)=\frac{\lambda az+\lambda b}{\lambda cz+\lambda d}=\frac{a'z+b'}{c'z+d'}$, também define a mesma transformação da Equação (3.4). No entanto, os novos coeficientes satisfazem $a'd'-b'c'=\lambda^2(ad-bc)\neq 0$, de modo que, se $\lambda=\pm\frac{1}{\sqrt{ad-bc}}$, então $a'd'-b'c'=1$, neste caso chamada normalizada.

Proposição 3.20 *Toda transformação de Möbius pode ser dada como uma composição (não necessariamente todas) de transformações de Möbius do tipo:*

(i) Translação: $T_1(z)=z+\beta$, *para algum* $\beta\in\mathbb{C}$;

(ii) Rotação: $T_2(z)=\alpha z$, *com* $\alpha\in\mathbb{C}$, $|\alpha|=1$;

(iii) Dilatação: $T_3(z)=\rho z$ *com* $\rho\in\mathbb{R}$, $\rho>0$;

(iv) Inversão: $T_4(z)=\frac{1}{z}$, $z\neq 0$.

Demonstração:

Seja $T(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ com $ad-bc\neq 0$. Se $c=0$, então $T(z)=\frac{a}{d}z+\frac{b}{d}$. Se $\frac{a}{d}\in\mathbb{R}$ e for positivo então T é a composição de uma dilatação $G(z)=\frac{a}{d}z$ e uma translação $H(z)=z+\frac{b}{d}$. Se $\frac{a}{d}<0$ então $\frac{a}{d}=|\frac{a}{d}|e^{i\pi}$. Tome $G(z)=|\frac{a}{d}|z=-\frac{a}{d}z$, $H(z)=e^{i\pi}z$ e $K(z)=z+\frac{b}{d}$, logo $T(z)=K\circ H\circ G(z)$, em que G é uma dilatação, H é uma rotação e K é uma translação.

Se $\frac{a}{d}\in\mathbb{C}$ então $\frac{a}{d}=|\frac{a}{d}|e^{i\theta}$ com $|e^{i\theta}|=1$, para algum $\theta\in\mathbb{R}$. Tome $G(z)=|\frac{a}{d}|z$ dilatação, $H(z)=e^{i\theta}z$ (rotação) e $K(z)=z+\frac{b}{d}$ translação. E veja que $K\circ H\circ G(z)=K(e^{i\theta}|\frac{a}{d}|z)=\frac{a}{d}z+\frac{b}{d}=T(z)$.

Se $c \neq 0$ considere $\gamma = \frac{-(ad-bc)}{c} \neq 0$. Tomando $T_1(z) = cz$, $T_2(z) = z + d$, $T_3(z) = \frac{\gamma}{z}$ e $T_4(z) = z + \frac{a}{c}$, temos que

$$
\begin{aligned}
T_4(T_3(T_2(T_1))) &= T_4(T_3(cz+d)) = T_4\left(\frac{\gamma}{cz+d}\right) \\
&= T_4\left(\frac{\frac{-(ad-bc)}{c}}{cz+d}\right) = \frac{\frac{-(ad-bc)}{c}}{cz+d} + \frac{a}{c} \\
&= \frac{-(ad-bc)}{c(cz+d)} + \frac{a}{c} = \frac{-ad+bc+acz+ad}{c(cz+d)} \\
&= \frac{c(az+b)}{c(cz+d)} = \frac{az+b}{cz+d} = T(z).
\end{aligned}
$$

Logo, T é uma composição de translação, rotação, dilatação e inversão. ■

Lema 3.21 *A transformação de Möbius $T(z) = \dfrac{1}{z}$, com $z \neq 0$ aplica circunferência ou reta, em circunferência ou reta, não respectivamente.*

Demonstração:

Da geometria analítica, uma equação qualquer de reta ou circunferência no plano pode ser escrita na forma:

$$A(x^2 + y^2) + 2Bx + 2Cy + D = 0, \tag{3.5}$$

com $A, B, C, D \in \mathbb{R}$. Ela descreve uma **reta** se $A = 0$ e $B^2 + C^2 > 0$, e uma **circunferência** se $A \neq 0$ e $B^2 + C^2 - AD > 0$.

Em notação complexa, se $z = x + iy$ então $x^2 + y^2 = z\overline{z}$, $2x = z + \overline{z}$ e $2y = -i(z - \overline{z})$. Assim podemos escrever (3.5) como:

$$Az\overline{z} + B(z + \overline{z}) + C(-i(z - \overline{z})) + D = 0 \Rightarrow Az\overline{z} + (B - iC)z + (B + iC)\overline{z} + D = 0$$

o que implica

$$Az\overline{z} + \overline{E}z + E\overline{z} + D = 0, \tag{3.6}$$

onde $E = B + iC$. A Equação (3.6) é uma reta se, e somente se, $A = 0$ e $E \neq 0$, pois neste caso $B^2 + C^2 = |E|^2 > 0$ e é uma circunferência se, e somente se, $A \neq 0$ e $E\overline{E} - AD = |E|^2 - AD = B^2 + C^2 - AD > 0$.

Para encontrarmos a imagem da curva dada pela Equação (3.6), sob a transformação $\dfrac{1}{z}$, substituímos z por $\dfrac{1}{w}$ em (3.6) e obtemos

$$A\frac{1}{w}\frac{1}{\overline{w}} + \overline{E}\frac{1}{w} + E\frac{1}{\overline{w}} + D = 0.$$

ou multiplicando por $w\overline{w}$,

$$Dw\overline{w} + Ew + \overline{E}\overline{w} + A = 0. \tag{3.7}$$

A Equação (3.7) tem a mesma forma da Equação (3.6), com $D, \overline{E}$ e A substituídos por A, E e D, respectivamente.

Portanto, temos quatro casos a considerar:

1º CASO: Se (3.6) descreve uma circunferência que não passa pela origem, isto é, $z = 0$ não é solução desta equação, então $D \neq 0$. Portanto, (3.7) descreve também uma circunferência, já que $E\overline{E} - AD > 0$. Além disso, como $A \neq 0$, ela não passa pela origem.

2º CASO: Se (3.6) descreve uma circunferência que passa pela origem, ou seja, se $D = 0$ como $E\overline{E} > 0$ temos que (3.7) descreve uma reta que não passa pela origem, pois $A \neq 0$.

3º CASO: Se (3.6) descreve uma reta que não passa pela origem, temos $A = 0$ e $D, E \neq 0$, então obtemos que (3.7) descreve uma circunferência que passa pela origem.

4º CASO: Por fim, se (3.6) descreve uma reta que passa pela origem, isto é, se $A = D = 0$ e $E \neq 0$, obtemos como imagem uma reta que passa pela origem.

Os resultados acima podem ser resumidos com a tabela abaixo:

z	$\frac{1}{z}$
Circunferência Fora da Origem	Circunferência Fora da Origem
Circunferência Pela Origem	Reta Fora de Origem
Reta Fora da Origem	Circunferência pela Origem
Reta Pela Origem	Reta Pela Origem

■

Por meio da Proposição 3.20 e do Lema 3.21 obtemos diretamente o seguinte:

Teorema 3.22 *Toda transformação de Möbius aplica circunferência ou reta em circunferência ou reta, não respectivamente.*

Demonstração: Basta observar que translações, dilatações e rotações levam circunferência em circunferência e reta em reta. Como toda transformação de Möbius é uma composição de translação, dilatação, rotação e inversão, o resultado segue do Lema 3.21. ■

Exemplo 3.23 *Seja $z\overline{z} + 2z + 2\overline{z} = 0$. Note que os coeficientes da equação são $A = 1, \overline{E} = E = 2$ e $D = 0$. Como $A \neq 0$ e $E^2 - AD = 4 - 1 \cdot 0 = 4 > 0$ temos uma equação de circunferência que neste caso passa pela origem. A imagem desta curva pela transformação de Möbius $T(z) = \frac{1}{z}$ resulta em $2w + 2\overline{w} + 1 = 0$, o qual é uma equação de reta fora da origem.*

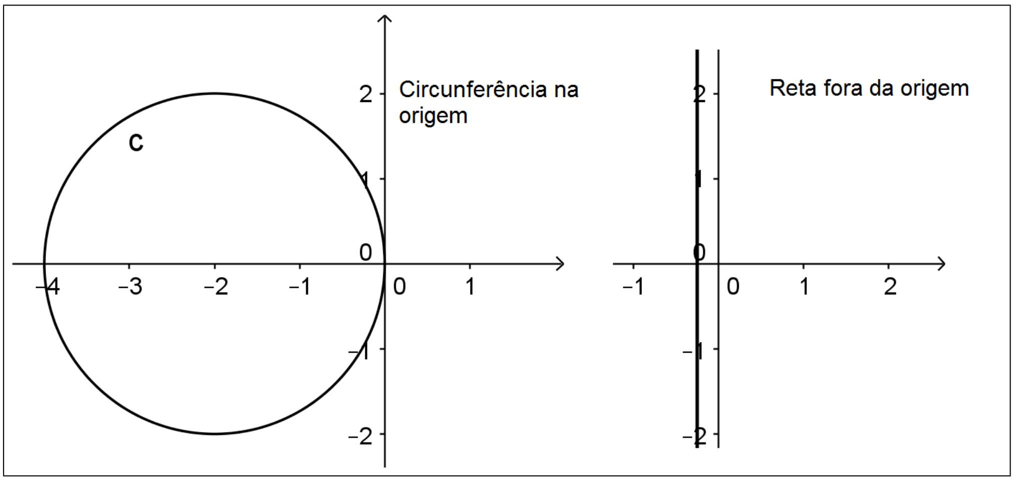

Figura 3.3: Circunferência em reta.

Veja que se $z = x + iy$ então completando quadrados

$$0 = z\overline{z} + 2z + 2\overline{z} = x^2 + y^2 + 4x = x^2 + y^2 + 4x + 4 - 4 = (x+2)^2 + y^2 - 4.$$

Logo, temos a circunferência $(x + 2)^2 + y^2 = 4$, com centro em $(-2, 0)$ e raio 2.

E $0 = 2w + 2\overline{w} + 1 = 2(x + iy) + 2(x - iy) + 1 = 4x + 1$, então $x = -\frac{1}{4}$. Ou seja, T leva a circunferência na origem $(x + 2)^2 + y^2 = 4$ na reta fora da origem $x = -\frac{1}{4}$.

Seja agora a equação $z + \overline{z} - 2 = 0$. Note que os coeficientes da equação são $A = 0, E = \overline{E} = 1$ e $D = -2$. Como $A = 0$ e $D \neq 0$ temos uma equação de reta que neste caso não passa pela origem. A transformação de Möbius T da equação acima resulta em $w\overline{w} - \frac{1}{2}w - \frac{1}{2}\overline{w} = 0$, onde $A \neq 0$ e $E\overline{E} = \frac{1}{4} > 0$, logo temos uma equação de circunferência que passa pela origem.

Veja que se $z = x + iy$ então $0 = z + \overline{z} - 2 = x + iy + x - iy - 2 = 2x - 2$. Logo, $x = 1$ é a reta descrita pela equação $z + \overline{z} - 2 = 0$. E $w\overline{w} - \frac{1}{2}w - \frac{1}{2}\overline{w} = 0$, se $w = x + iy$ então

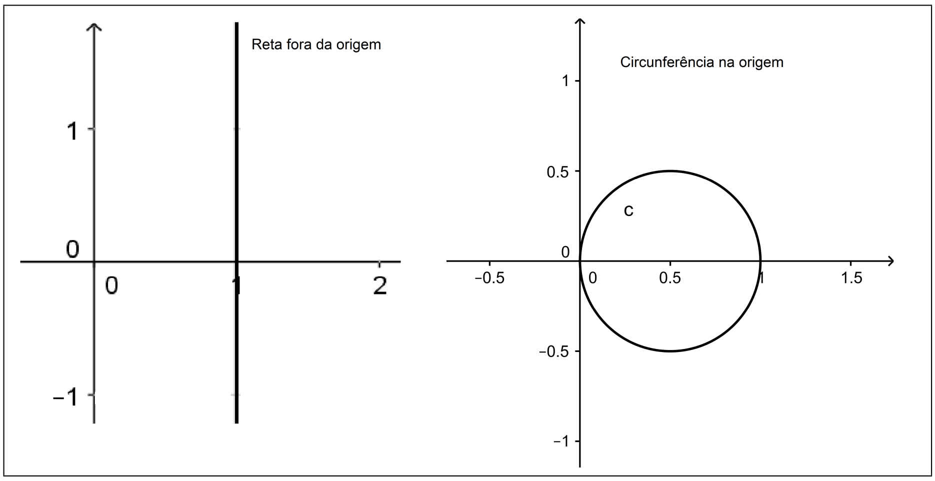

Figura 3.4: Reta em circunferência.

$w\overline{w} - \frac{1}{2}w - \frac{1}{2}\overline{w} = x^2 + y^2 - \frac{1}{2}(x+iy) - \frac{1}{2}(x-iy) = x^2 + y^2 - x = x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + y^2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + y^2$. Ou seja, T leva a reta $x = 1$ na circunferência $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ de centro $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ e raio $\frac{1}{2}$.

Capítulo 4

Algumas Aplicações de Números Complexos

Neste capítulo pretendemos apresentar algumas aplicações simples de números complexos, que podem ser facilmente exploradas no ensino médio, visando estimular os estudantes a utilizarem os números complexos em problemas de álgebra, geometria, entre outros. As principais referências são [1] e [2].

4.1 Relações Trigonométricas

Nos resultados abaixo vamos apresentar uma demonstração de algumas relações trigonométricas utilizando números complexos.

Teorema 4.1 *(Fórmulas de Adição da Trigonometria)*

Sejam x e y números reais quaisquer. Então,

a) $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$ *;*

b) $\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cos y + \operatorname{sen} y \cos x$*.*

Demonstração:

Se x e y são tais que $0 \leq x < 2\pi$ e $0 \leq y < 2\pi$, sejam

$$w_1 = \cos(x) + i \operatorname{sen}(x) \text{ e } w_2 = \cos(y) + i \operatorname{sen}(y).$$

Pela interpretação geométrica do produto de números complexos, w_1w_2 é obtido de w_1 através de uma rotação no sentido anti-horário de ângulo y. Portanto,

$$w_1w_2 = cos(x + y) + isen(x + y). \tag{4.1}$$

Por outro lado, $w_1w_2 = (\cos(x) + i\,\text{sen}(x))(\cos(y) + i\,\text{sen}(y))$, ou seja,

$$w_1w_2 = (\cos(x)\cos(y) - \text{sen}(x)\,\text{sen}(y)) + (\text{sen}(x)\cos(y) + \cos(x)\,\text{sen}(y))i. \tag{4.2}$$

Por igualdade de números complexos, segue de (4.1) e (4.2), que $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \text{sen}(x)\,\text{sen}(y)$ e $\text{sen}(x + y) = \text{sen}(x)\cos(y) + \text{sen}(y)\cos(x)$.

Se x e y são quaisquer, então existem números inteiros k e l, tais que $0 \leq x + 2k\pi = x' < 2\pi$ e $0 \leq y + 2l\pi = y' < 2\pi$. Por definição, $cos(x) = cos(x')$, $sen(x) = sen(x')$, $cos(y) = cos(y')$ e $sen(y) = sen(y')$. Além disso, $x'+y' = x+2k\pi+y+2l\pi = x+y+2(k+l)\pi$, donde segue que $cos(x + y) = cos(x' + y')$ e $sen(x + y) = sen(x' + y')$. Como as relações estão demonstradas para x' e y' segue-se que elas são verdadeiras para x e y. ■

Proposição 4.2 ***(Lei do Cosseno)*** *Considere um triângulo qualquer de vértices A, B e C. Então,*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot cos(\alpha),$$

onde a,b e c são os lados opostos aos vértices A,B e C, respectivamente e α é o ângulo $B\widehat{A}C$.

Demonstração:

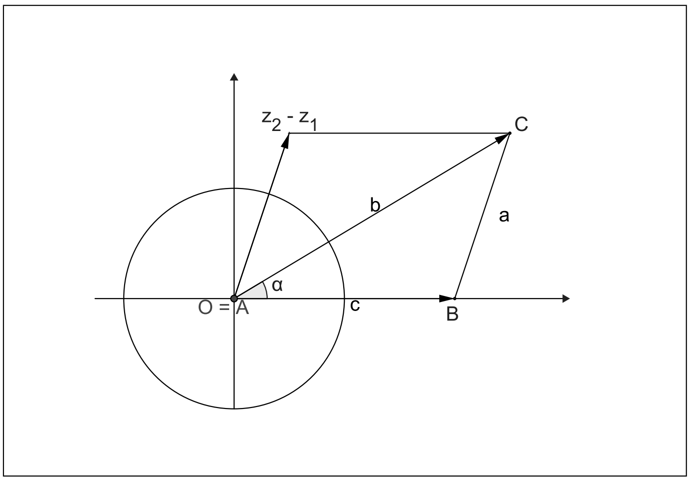

Figura 4.1: Lei do cosseno.

Fixando A como sendo a origem e OB coincidente com o eixo Ox, conforme a figura, temos:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} = z_1 &= r_1(\cos(0°) + i\,\mathrm{sen}(0°)) = r_1 \\ \overrightarrow{AC} = z_2 &= r_2(\cos(\alpha) + i\,\mathrm{sen}(\alpha)). \end{aligned}$$

Assim, $\overline{z_1} = r_1$ e $\overline{z_2} = r_2(\cos(\alpha) - i\,\mathrm{sen}(\alpha))$.

Então, $|z_1| = r_1 = c$, $|z_2| = r_2 = b$ e $|z_1 - z_2|^2 = |z_2 - z_1|^2 = a^2$. Por outro lado, $|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2}) = z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} - (z_2\overline{z_1} + z_1\overline{z_2})$.

Como, $z_2\overline{z_1} = r_1r_2(\cos(\alpha) + i\,\mathrm{sen}(\alpha))$ e $z_1\overline{z_2} = r_1r_2(\cos(\alpha) - i\,\mathrm{sen}(\alpha))$, adicionando as equações $z_2\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} = r_1r_2(2\cos(\alpha))$ temos que,

$$a^2 = |z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2r_1r_2\cos(\alpha) = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha).$$

■

4.2 Problemas de Geometria

Começamos esta seção com o problema do tesouro. Esta é uma questão muito interessante e que pode servir de estímulo para alunos do ensino médio estudarem números complexos.

Este problema, conforme a Revista do Professor de Matemática [2], foi inspirado em um exercício do livro *Polynomials* de E. J. Barbeau.

Problema do Tesouro: Um antigo mapa dava instruções para localizar um tesouro enterrado em certa ilha $\cdots$

Ande da palmeira até a entrada da caverna. Lá chegando, vire 90° à direita e caminhe o mesmo número de passos. No fim desse trajeto coloque uma marca e retorne à palmeira. Agora, caminhe em direção à pedra. Lá chegando, vire 90° à esquerda e caminhe o mesmo número de passos que foram dados da palmeira à pedra. Coloque uma marca no fim desse trajeto. O tesouro está no ponto médio das duas marcas.

Quando chegamos à ilha, a palmeira não existia mais. Como fazer para achar o tesouro?

Vamos à solução: considere um sistema de coordenadas em que a pedra fique na origem O e a caverna num ponto da reta que liga a pedra até a caverna. Esta reta será o eixo denominado Ox.

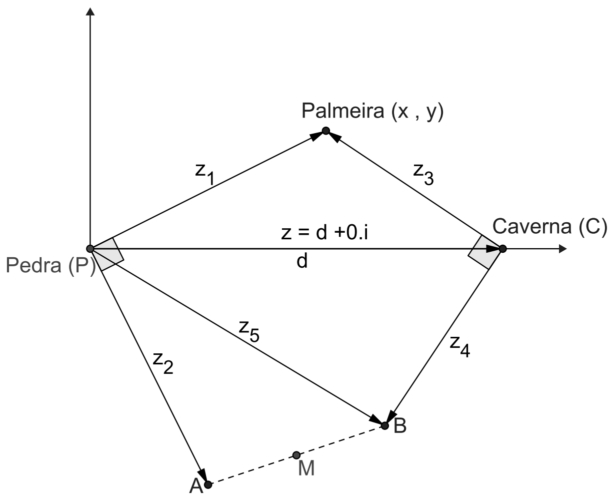

Figura 4.2: Problema do Tesouro

Cada ponto de coordenadas (a, b) neste sistema ortogonal de coordenadas xOy pode ser representado pelo número complexo $z = a + bi$, e vice-versa.

Mesmo não existindo mais a palmeira veremos que é possível encontrar a solução do problema. Vamos assumir que a palmeira está numa posição qualquer.

Suponha que a palmeira, a pedra e a caverna são representados pelos números complexos como na figura. Recordemos ainda que multiplicar um número complexo z por i é o mesmo que fazer uma rotação de $\dfrac{\pi}{2}$ de z no sentido anti-horário.

Segundo o problema, chegando da palmeira até a caverna, viramos 90° à direita, ou seja, o vetor z_3 vai ser rotacionado $\dfrac{\pi}{2}$ no sentido anti-horário, obtendo o vetor z_4. Ou seja, $z_4 = iz_3$.

Analogamente, como z_2 é uma rotação de $\dfrac{\pi}{2}$ no sentido horário do vetor z_1, temos que $z_2 = -iz_1$. Assim, se $z_1 = x + iy$ então $z_2 = -ix + y = y - ix$. E se $z = d + 0i$ é o número complexo que representa o vetor que liga à pedra até à caverna então por soma e diferença de números complexos $z_3 = z_1 - z = x + iy - d = (x - d) + iy$. E portanto, $z_4 = iz_3 = i(x - d + iy) = -y + (x - d)i$.

Denotamos por M o ponto médio que liga os pontos A e B em que $A = (y, -x)$.

Para determinarmos o ponto B, observe que $z_5 = z + z_4 = d + 0i + (-y + (x - d)i) = d - y + (x - d)i$. Deste modo, $B = (d - y, x - d)$.

Parabéns, você ficou rico! o tesouro está no ponto

$$M = \frac{A+B}{2} = \frac{(y,-x)+(d-y,x-d)}{2} = \left(\frac{d}{2},-\frac{d}{2}\right).$$

O mais interessante é que a solução do problema do tesouro depende apenas do número complexo que representa o vetor que liga a pedra à caverna. Não depende das coordenadas da palmeira.

Os números complexos podem ser utilizados em problemas de Geometria que envolvam rotações.

Exemplo 4.3 *Determinar o vértice C do triângulo equilátero ABC onde são dados os vértices $A=(1,2)$ e $B=(3,5)$.*

Solução: Quando rotacionamos o vetor $\overrightarrow{AB}$ de 60° no sentido anti-horário em torno da origem, obtemos a primeira solução, ou seja, o triângulo equilátero ABC como na figura abaixo.

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}(\cos(60^\circ) + i\operatorname{sen}(60^\circ)).$$

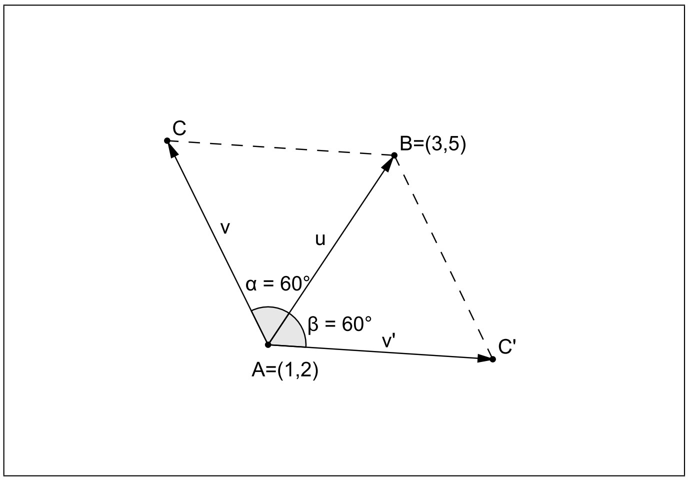

Figura 4.3: Triângulo equilátero ABC.

Por propriedade de soma de vetores, se O é a origem do sistema de coordenadas temos que $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}$ e assim

$$\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right)\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Mas, $\overrightarrow{OA} = (1, 2)$ *e* $\overrightarrow{OB} = (3, 5)$*, ou em notação complexa,*

$$\overrightarrow{OC} - (1 + 2i) = [(3 + 5i) - (1 + 2i)]\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = (2 + 3i)\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

o que implica que $\overrightarrow{OC} = \dfrac{2 - 3\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3 + 2\sqrt{3}}{2}i + 1 + 2i = \dfrac{4 - 3\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{7 + 2\sqrt{3}}{2}$*. E portanto,*

$$C = \left(\frac{4 - 3\sqrt{3}}{2}, \frac{7 + 2\sqrt{3}}{2}\right).$$

A outra solução é obtida girando $\overrightarrow{AB}$ *de* $60°$ *no sentido horário em torno de* A*. Isto é,*

$$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB}(\cos(-60°) + i\,\mathrm{sen}(-60°)).$$

Novamente, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{OC'}$ *e assim* $\overrightarrow{OC'} - \overrightarrow{OA} = \left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right)\left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$*. Assim, em notação complexa,*

$$\overrightarrow{OC}' - (1 + 2i) = [(3 + 5i) - (1 + 2i)]\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = (2 + 3i)\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

o que implica que $\overrightarrow{OC}' = \dfrac{2 + 3\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3 - 2\sqrt{3}}{2}i + 1 + 2i = \dfrac{4 + 3\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{7 - 2\sqrt{3}}{2}$*. E portanto,*

$$C' = \left(\frac{4 + 3\sqrt{3}}{2}, \frac{7 - 2\sqrt{3}}{2}\right).$$

Conclusão

Ao iniciarmos esta dissertação fazendo um breve relato histórico dos fatos mais relevantes acerca do surgimento dos números complexos, concluímos que a matemática é um processo que se constrói passo a passo, sob uma base sólida. Vimos que diversos matemáticos deram a sua parcela de contribuição na consolidação do conceito de número complexo, dentre eles Cardano, Tartaglia, Bombelli, Euler, Gauss entre outros. Dessa maneira, entendemos que a apresentação de um conteúdo matemático ligado com os acontecimentos históricos que permitiram a sua evolução pode tornar o conceito mais interessante para professores e alunos do ensino médio.

Pudemos perceber que o conjunto dos números complexos não é apenas mais uma estrutura algébrica, é uma ferramenta que permitiu (e ainda permite) grandes avanços na matemática, além de aplicações na geometria, álgebra, análise, também aplicações na física e engenharia. Ter apresentado algumas aplicações na trigonometria e em problemas de geometria, como no caso do problema do tesouro, pode servir como motivação para os estudantes do ensino médio romperem alguns tabus no estudo desse conceito.

Acreditamos que este trabalho pode contribuir tanto para os professores de matemática do ensino médio ampliarem sua visão sobre os números complexos, bem como no processo de ensino aprendizagem dos alunos dessa etapa do ensino.

Referências Bibliográficas

[1] Carmo, M.P., Morgado, A.C. e Wagner, E., *Trigonometria. Números Complexos.* Coleção Professor de Matemática, Rio de Janeiro, SBM, 2005.

[2] Carneiro, J.P.Q e Sánchez, J.A.P, *A ilha do Tesouro. Dois problemas e duas soluções.* Revista do Professor de Matemática, Nº 47, SBM, 2001, 1-4.

[3] Carvalho, P.C.P., Lima, E.L., Morgado, A.C. e Wagner, E., *A Matemática do Ensino Médio, Volume 3*, Rio de Janeiro, SBM, 2006.

[4] Eves, H., *Introdução à História da Matemática*, Ed. UNICAMP, Campinas-SP, 2005.

[5] Fernandez, C.S. e Junior, N.B. *Introdução às Funções de uma Variável Complexa*, 4ª ed., Rio de Janeiro, SBM, 2016.

[6] Garbi, G.G. *O Romance das Equações Algébricas*, 4ª ed., Editora Livraria da Física, São Paulo, 2010.

[7] Lima, E.L., *Logaritmos.* Coleção do Professor de Matemática, SBM, 1991.

[8] Milies, C.P., *A emergência dos números complexos.* Revista do Professor de Matemática nº 24. SBM, 1993, 5 - 15.

[9] Milies, C.P., *A solução de Tartaglia para a equação do terceiro grau.* Revista do Professor do Matemática nº 25. SBM, 1994, 15 - 22.

[10] Moreira, C.G.T.A., *Uma solução das equações do 3º e 4º graus.* Revista do Professor do Matemática nº 25. SBM, 1994, 23 - 28.

[11] Rodrigues, M.E., *Equações algébricas e os números complexos.* Dissertação de mestrado. PROFMAT/UEM, 2015.