Universidade Estadual de Londrina

MARTA BURDA SCHASTAI

TALL E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA REALÍSTICA: ALGUMAS APROXIMAÇÕES

Londrina
2017

MARTA BURDA SCHASTAI

TALL E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA REALÍSTICA: ALGUMAS APROXIMAÇÕES

Tese apresentada ao Programa de Pós- Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do título de Doutora.

Orientadora: Prof[a]. Dra. Regina Luzia Corio de Buriasco

Londrina
2017

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

Schastai, Marta Burda .

TALL E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA REALÍSTICA: ALGUMAS APROXIMAÇÕES / Marta Burda Schastai. - Londrina, 2017.

179 f. : il.

Orientador: Regina Luzia Corio de Buriasco.

Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, , 2017.

Inclui bibliografia.

1. Educação Matemática Realística. - Tese. 2. Três Mundos da Matemática. - Tese. 3. Desenvolvimento do Pensamento Matemático. - Tese. 4. Ensino. Aprendizagem. - Tese. I. Buriasco, Regina Luzia Corio de. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. . III. Título.

MARTA BURDA SCHASTAI

TALL E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA REALÍSTICA: ALGUMAS APROXIMAÇÕES

Tese apresentada ao Programa de Pós- Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do título de Doutora.

BANCA EXAMINADORA

____

Profa. Dra. Regina Luzia Corio de Buriasco
(orientadora)
Universidade Estadual de Londrina - UEL

____

Profa. Dra. Eliane Scheid Gazire
Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais

____

Profa. Dra. Angela Marta P. das Dores Savioli
Universidade Estadual de Londrina

____

Profa. Dra. Maria Tereza Carneiro Soares
Universidade Federal do Paraná

____

Profa. Dra. Magna Natália Marin Pires
Universidade Estadual de Londrina

Londrina, 25 de setembro de 2017.

Dedico este trabalho aos professores e professoras que ensinam matemática.

AGRADECIMENTOS

À DEUS, por me oportunizar as vivências terrenas.

À PROFESSORA, Ângela Marta Savioli, por me receber na UEL como aluna especial da disciplina de História da Matemática; mostrar que a UEL é para todos e encorajar a participar da seleção de doutorado.

À MINHA ORIENTADORA, Professora Regina Luzia Corio de Buriasco, por:
publicar parte da sua pesquisa, de seus estudos;
ministrar cursos, palestras, oficinas, mais especificamente, no Programa Pró-Letramento Matemática, onde a conheci pessoalmente;
ser exemplo de força e inspiração mesmo antes de ingressar na pesquisa;
possibilitar que meu voo continuasse;
guiar-me no percurso do doutorado permitindo ampliar o meu campo de visão e, ao mesmo tempo, refinar meu "olhar";
permitir "passear" pelas minhas vivências e encontrar o tema de forma natural;
oportunizar o aprendizado de formas do pensar, do fazer, do humanizar-se por meio da vivência de práticas que aliam competência e inteligência à sensibilidade e generosidade;
ser minha orientadora, professora, amiga.

À MINHA BANCA, Profa. Dra. Eliane Scheid Gazire, Profa. Dra. Angela Marta Pereira das Dores Savioli, Profa. Dra. Maria Tereza Carneiro Soares e Profa. Dra. Magna Natália Marin Pires, pela análise, pelos contrapontos e apontamentos no texto da tese para que eu pudesse pensar, repensar, aprofundar, complementar e aprimorar a escrita.

AO GEPEMA, por me aceitar e me acolher nos voos do grupo contribuindo para que eu pudesse elaborar o meu mapa de viagem para o mundo da pesquisa sem deixar de lado o universo encantado de observar as sutilezas e cultivar amizades.

AOS PROFESSORES E COLEGAS do programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina, que nesse voo, outras janelas de estudos abriram.

AOS MEUS PAIS, Joana Burda e Alexandre Burda, pelo aprendizado de:
Na roça lidar,
No rio a roupa lavar,
No fogão a lenha a ferro esquentar e depois a roupa passar,
Do poço a água tirar,
No campo a natureza observar,
Em casa o estudo valorizar,
Nos cadernos tudo copiar e logo mais, me deixar voar...

AO MEU ESPOSO, José Sainhuk Schastai, por estar sempre ao meu lado nos diferentes voos e desafios da vida.

À MINHA SOGRA Julia Sainhuk Schactai e a MINHA CUNHADA Lídia Schactai Silvano, por entre outros voos estarem comigo, zelando e acompanhando-me nos momentos de tempestades.

ÀS AMIGAS, Elizabeth Regina Streisky de Farias, Silvia Medeiros, Petronella Leenstra, Silvia Christina de Oliveira Madrid, Paulanara Beninca, Lurdes Thomas, Joana D´Arc Ferreira, Lídia Teleginski e AOS AMIGOS, Miguel Dombrowski, Gilmar de Carvalho Cruz e Cristiano Forster, pela companhia nos diferentes voos. Trechos nebulosos do meu percurso, vieram iluminar... encorajar a continuar.

AOS COLEGAS do Colégio Estadual Professora Linda Salamuni Bacila pela oportunidade de estarmos juntos: trabalhando, trocando experiências, conversando, brincando, convivendo.

AO MEU PROFESSOR DE EDUCAÇÃO FÍSICA, Luiz Gonzaga de Rezende, por ter acreditado em mim, e por ter me incluído nos treinos de atletismo mesmo com o jeito desengonçado dos meus movimentos; por estar próximo e minhas asas não quebrar; ao contrário, por fortalecê-las para que eu pudesse voar... no Ensino de Matemática fui pousar.

À Secretaria de Educação do Estado do Paraná – SEED, pelo afastamento remunerado nos anos de 2014 e 2015.

À Secretaria Municipal de Educação de Ponta Grossa - SME, pela licença sem vencimentos nos anos de 2014 e 2015.

O L H A R ....

Olhar para dentro.

Olhar para fora.

Olhar para fora.

Olhar para dentro.

Olhar para o todo.

Olhar para as partes.

Olhar para as partes.

Olhar para o todo.

Este

é

um

exercício

que

precisamos

fazer

continuamente...

(fala em sala de aula de BURIASCO, 2014)

SCHASTAI, Marta Burda. **TALL e Educação Matemática Realística:** algumas aproximações. 2017. 179f. Tese (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2017.

RESUMO

Esta tese foi orientada e elaborada à luz da Educação Matemática Realística. O tema de pesquisa “cotejar o Quadro Teórico do Desenvolvimento do Pensamento Matemático de David Tall e a abordagem Educação Matemática Realística para buscar identificar a existência ou não de aproximações” foi delimitado a partir da percepção de que, no processo de ensino e aprendizagem da matemática escolar na perspectiva da RME, de um lado, há interferência de “agentes” perceptíveis, tais como a interação entre estudantes, entre professor e estudante; e, de outro, uma ação cognitiva que é individual do estudante / do professor, no processo de matematizar, de fazer matemática. É uma investigação de cunho especulativo. Inicia com a apresentação do contexto em que a pesquisa foi realizada e dos procedimentos de investigação. Apresenta a Educação Matemática Realística, seus princípios, e a trajetória de ensino-aprendizagem desenvolvida no projeto TAL: estudo desenvolvido por David Tall, mais especificamente, a Teoria dos Três Mundos da Matemática e o Quadro Teórico do Desenvolvimento do Pensamento Matemático, com foco na matemática e nas características do currículo, da dinâmica de sala de aula, do papel do professor e do papel do aluno em uma abordagem natural de ensino e aprendizagem. Identifica-se como fio condutor a aprendizagem com significado e, após essa constatação, traça-se um paralelo entre os princípios da RME e o Quadro Teórico do Desenvolvimento do Pensamento Matemático. Considera-se que Tall, ao desenvolver a Teoria dos Três Mundos da Matemática, traça um "mapa" que dá pistas gerais,e que Freudenthal desenvolve um "guia" que guia o guia para uma viagem significativa. Em ambos, quem constrói o "roteiro" é o viajante.

Palavras-chave: Educação Matemática Realística. Três Mundos da Matemática. Desenvolvimento do Pensamento Matemático. Ensino. Aprendizagem

SCHASTAI, Marta Burda. **TALL and Realistic Mathematical Education: some approximations**. 2017. 179f. Thesis (Sciences and Mathematics Education Post-Graduate Program) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2017.

ABSTRACT

This thesis was oriented and elaborated in the light of Realistic Mathematics Education approach. The research theme "analyze through compare the Theoretical Framework of the Development of Mathematical Thinking by David Tall and the Realistic Mathematics Education approach looking for identify the existence or not of approximations" was delimited from the perception that in the process of teaching and learning mathematics from the RME perspective, on the one hand, there is interference from perceptible "agents", such as the interaction between students, between teacher and student; and, on the other hand, a cognitive action that is individual of the student / teacher, in the process of mathematizing, of doing mathematics. It is a speculative investigation. It begins with the presentation of the context in which the research was carried out and of the investigation procedures. We present the Realistic Mathematics Education, its principles, and the teaching-learning trajectory developed in the TAL project: study developed by David Tall, more specifically, The Theory of the Three Worlds of Mathematics and the Theoretical Framework of the Development of Mathematical Thinking, focusing on mathematics and curriculum characteristics, classroom dynamics, the role of the teacher and of the student in a natural approach of teaching and learning. It is identified as a conductor yarn the learning with meaning and, after this, a parallel is drawn between the RME principles and the Theoretical Framework of the Development of Mathematical Thinking. It consider that Tall, when developing the Theory of the Three Worlds of Mathematics, trace a "map" that gives general clues, and that Freudenthal develops a "guide" that guides the guider to a meaningful journey. In both, who builds the "itinerary" is the traveler.

Keywords: Realistic Mathematics Education. Three Worlds of Mathematics. Development of Mathematical Thinking. Teaching. Learning.

SUMÁRIO

A guisa de prefácio

Marta é uma guerreira. Muitas vezes silenciosa, mas nem por isso menos guerreira. Não é uma criatura de comportamento muito usual. Tem um jeito que é só seu de escrever e lidar com as coisas e seres. Por isso, o trabalho dela não faria sentido se mantivesse um formato usual. Daí ele estar em um formato um pouco diferente, o mais próximo possível da maneira como foi produzido. Quem a conhece reconhecerá isso. Espero que vocês possam conhecer um pouco dela com a leitura do trabalho, porque é uma criatura que vale a pena conhecer.

Regina Luzia Corio de Buriasco

APRESENTAÇÃO

Nos meus primeiros onze anos de escolarização, recordo que o que mais me encantava no contexto escolar eram as aulas de matemática: a sequência numérica, os algoritmos das quatro operações, as expressões numéricas, depois as operações com frações e equações do 1º e 2º do grau, enfim a repetição. Por causa da minha capacidade de memorização de procedimentos, era considerada como aluna "excepcional", isso até a antiga 8ª série (que atualmente corresponde ao 9º ano do Ensino Fundamental), pois resolvia todos os exercícios dos livros didáticos corretamente, mesmo aqueles que não eram indicados pelo professor ou pela professora. No esquema dos Três Mundos da Matemática, isso se refere ao Mundo Simbólico e mais especificamente a um tipo especial de pensamento, o Pensamento Matemático Procedimental.

Nessa época de estudante do Ensino Fundamental, o estudo da Geometria não fazia nenhum sentido, na verdade, pouco estudávamos porque era um conteúdo que ficava para o final do ano letivo e quase nunca dava tempo, mas quando estudávamos eu considerava uma grande "bobagem". Para mim não fazia sentido, mesmo assim resolvia as questões propostas com êxito. Levando em consideração esses fatos, posso afirmar que a minha viagem escolar pelos Três Mundos da Matemática teve início no Mundo Simbólico e lá permaneceu por um período aproximado de 8 anos e uma passagem rápida, ou até mesmo inconsciente, pelo Mundo Corporificado, portanto, uma situação diferente daquela chamada de "natural".

No Ensino Médio, enquanto cursava o Magistério, na disciplina de Didática da Matemática, a professora com seu jeito peculiar mostrou ou, talvez, fez com que nós percebêssemos que era importante apresentar os conteúdos a partir de problemas e que uma mesma operação poderia ser resolvida de diversas maneiras, ou seja, por meio de diferentes procedimentos. Essa foi uma descoberta incrível! Agora, por exemplo, para resolver uma divisão poderia utilizar três tipos de procedimentos: o processo longo, o processo breve e o processo por estimativas que me encantava. Parecia que, depois de anos de repetição de procedimentos, começava a entender o significado da divisão.

Com meu pensamento procedimental não conseguia viajar do Mundo Corporificado para o Mundo Simbólico e vice-versa. Nesse sentido, a disciplina de Geometria Analítica no Ensino Superior foi a mais complexa. A estratégia era memorizar os exercícios/problemas e torcer para que na prova houvesse atividades semelhantes para reproduzir e obter a aprovação. Nas disciplinas de Cálculo e Análise, a estratégia foi a mesma.

Considerando que todas as atividades eram desenvolvidas com êxito, havia algo a ser corrigido? Se houvesse, como poderia ser feito? Essas são perguntas que ainda estão em minha mente.

Vejo que, com o "pensamento procedimental", foi possível resolver um bom tanto de coisas (das quais gostava bastante), passando por caminhos traçados no Mundo Corporificado e no Mundo Simbólico, mas não consegui ascender para o Mundo Formal (só tive algumas passagens). Esse tipo de pensamento esteve vinculado ao tipo de ensino, entrentanto, na primeira oportunidade em que o "guia" permitiu (e até incentivou) olhar para os lados, de explorar os mundos comecei a entender a funcionalidade dos instrumentos, agarrei a oportunidade e fui.....

Fui fazer uma viagem que permite vislumbrar o Mundo Corporificado e o Mundo Simbólico (e não apenas caminhos que cortam esses mundos) em paralelo de modo a ascender para o Mundo Formal - ainda é um desafio. Tall, ao desenvolver a Teoria dos Três Mundos da Matemática, traça um "mapa" e dá pistas gerais, Freudenthal desenvolve um "guia" que guia o guia para essa viagem. O interessante é que o objetivo de ambos está direcionado a uma "viagem" significativa, na qual quem constrói o "roteiro" é o viajante.

A ideia de elaborar o roteiro para minha "viagem" de estudante de doutorado nasceu no primeiro semestre de 2014, nas disciplinas de Tópicos em Educação Matemática e Estágio de Docência na Graduação, ambas ministradas pela minha orientadora. Nessas aulas, algo mágico acontecia, as reflexões desencadeadas não se limitavam ao tempo de sala de aula, elas se faziam presentes nos momentos mais inesperados (ao observar conversas de crianças em restaurantes, atitudes de alunos diante de problemas a serem resolvidos, nas leituras). Dei-me conta então, que é tarefa do estudante construir seu próprio roteiro de aprendizagem. Mas "como construí-lo?", eu me perguntava.

Nos encontros do GEPEMA - Grupo de Estudo e Pesquisa em Educação Matemática e Avaliação, discutíamos alguns aspectos da "guia" Educação Matemática Realística, entre eles, a matematização e a reinvenção guiada. As discussões não me eram estranhas, mas também não muito claras do ponto de vista da efetivação de uma prática de sala de aula. Durante as discussões, várias vezes me pegava associando as estratégias de condução de trabalho do grupo e da dinâmica das aulas das disciplinas com os aspectos abordados - situação propícia para a reinvenção guiada, papel do professor, papel do aluno. A condução das aulas, na perspectiva da reinvenção guiada, conduziu- me ao destino da minha viagem, a escolha do tema da pesquisa.

Foi ao perceber que, no processo de ensino e aprendizagem da matemática escolar na perspectiva da RME – *Realístic Mathematics Education*, de um lado, há interferência de "agentes" perceptíveis tais como a interação entre estudantes, entre professor e estudantes; e que, de outro, uma ação cognitiva que é individual tanto do estudante quanto do professor, no processo de matematização, de fazer matemática, que inquietações emergiram.

Nos dias 15 e 16 do mês de setembro de 2014, no evento "Uma década de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática e Avaliação da Aprendizagem", em comemoração aos 10 Anos do GEPEMA, alguns dos pesquisadores presentes sugeriram, para as futuras pesquisas do grupo, variar as fontes das pesquisas para variar as interpretações. Em discussões posteriores pensamos que seria interessante estudar alguns autores, entre eles, David Tall. Esses estudos nos ajudariam a abrir o nosso horizonte e, talvez, enxergar mais coisas relacionadas entre si e estabelecer algumas relações com a abordagem da Educação Matemática Realística.

Antes de decidir o tema de pesquisa, minha orientadora sugeriu a leitura de alguns artigos de Tall e Bloom. Comentou que Tall tinha um estudo interessante a respeito de "conceito imagem" e "conceito definição" e Bloom a respeito de objetivos. Comentou também que, após a leitura, conversaríamos novamente.

De posse desse material, iniciei a tarefa. Já na primeira leitura, os estudos de Tall chamaram minha atenção. Descobri que "conceito definição" e "conceito imagem" faziam parte de um estudo mais amplo envolvendo o desenvolvimento do pensamento matemático avançado e este era um grande problema para mim. Entender a transição do pensamento matemático elementar para o pensamento matemático avançado me fascinou, e eu fui. No percurso, encontrei o quadro teórico do desenvolvimento do pensamento matemático, e logo pensei é isso, esse será meu objeto de estudo.

Nesse contexto é que nasceu o tema de pesquisa: cotejar o Quadro Teórico do Desenvolvimento do Pensamento Matemático de David Tall e a abordagem Educação Matemática Realística, para buscar identificar a existência ou não de aproximações.

PROCEDIMENTOS DE INVESTIGAÇÃO

Esta é uma investigação de cunho especulativo[1] por ter como objetivo produzir afirmações teóricas a partir de outras afirmações teóricas. Nesse tipo de pesquisa, as conclusões correspondem às escolhas entre as possíveis, o "real" vincula-se ao plausível, aceitável; constituindo-se em um trabalho intelectual, envolvendo as dimensões: cognitiva, discursiva e inscrita em um trabalho[2] (MARTINEAU, SIMARD, GAUTHIER, 2001). A pesquisa teórica especulativa toma três eixos fundamentais: o interpretar, o argumentar e o recontar, conforme apresentado no Quadro 1.

Quadro 1- Principais eixos da pesquisa teórica especulativa

Interpretar	Argumentar	Recontar
A interpretação do pesquisador está: • diretamente relacionada a suas perspectivas e vivências anteriores. • pode ser re (configurada) a partir de novos elementos que são incorporados ao referencial teórico. Não é possível estabelecer procedimentos previamente sistematizados.	Na tese teórica e especulativa prevalece a argumentação em vez da demonstração. É necessário que o pesquisador argumente de tal modo que possa antecipar contra argumentos vindos de seu público-alvo.	Para recontar é necessário: • propor uma nova análise com base na interpretação de textos anteriores e na argumentação rigorosa. • problematizar e de alguma forma contar uma história novamente. Quanto à escrita: • o estilo de escrita e o conteúdo do texto não são duas entidades independentes, mas sim elementos totalmente inseparáveis. • podem ser utilizadas três ferramentas de produção de conhecimento: o ponto de vista, a metáfora e a ironia.

Fonte: Martineau, Simard, Gauthier (2010)

De acordo com Martineau, Simard e Gauthier (2001), na pesquisa teórica especulativa, o pesquisador confronta textos, de diferentes autores, escritos a respeito de um mesmo tema ou textos do mesmo autor a respeito de um tema escrito em diferentes épocas. A

[1] Especulação: estudo teórico, baseado predominantemente no raciocínio abstrato. Especular: buscar entender por meio da razão, teoricamente; refletir, teorizar.
[2] A invenção intelectual objetiva uma construção que pode sobreviver a seu autor (SCHLANGER, 1983).

leitura do referencial bibliográfico é um exercício de interpretação, um trabalho hermenêutico, de análise conceitual indispensável para a elaboração do referencial teórico. Entretanto, interpretação e discussão de um assunto não são suficientes. É necessário complementar a interpretação e a discussão com o recontar, com a escrita de um texto original (PASSOS, 2015, p. 31).

A pesquisa especulativa, para Van der Maren (1996), pode ser dividida em dois momentos: a constituição do corpus de informações de base e o tipo de análise. Para a constituição do *corpus* de enunciados, a primeira tarefa é selecionar as afirmações teóricas a partir das quais as reflexões serão construídas.

O *corpus* de informações básicas desta investigação foi constituído a partir da captura de informações a respeito da produção acadêmica de David Tall. Inicialmente, o olhar foi direcionado para textos (livro e artigos) que tratavam do desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado, de sua autoria ou de outros autores que estudaram suas produções produções (ALMEIDA, s/d; ALMEIDA e PALHARINI, 2012; ANGELIN, 2010; COSTA C., s/d; DOMINGOS, 2013; DREYFUS 1991; MACHADO e BIANCHINI 2013; MAMONA-DOWNS e DOWNS 2008; MARINS 2014; SOUZA, OLIVEIRA e ALMEIDA, 2009; STACEY 2006; STEIN, GROVER e HENNINGSEN 1996; TALL 1986, 1989e, 1990, 1991, 1992e, 1993, 1995b, 2009; TALL, GRAY, PINTO e PITTA 1999, 1999k; TALL, GRAY e PITTA 2000; TALL, RASMUSSEN, ZANDIEH, KING e TEPPO 2009; TALL e VINNER 1981). Posteriormente, acompanhando a evolução dos estudos de TALL, o olhar foi direcionado para textos (livro e artigos) relacionados ao Quadro Teórico do Desenvolvimento do Pensamento Matemático, de sua autoria ou de sua autoria com seus colaboradores (TALL 1993a, 2008e, 2009a, 2009b, 2009c, 2009d, 2010, 2010c, 2011, 2011a, 2012z, 2012c, 2012w, 2013, 2013a, 2013c, 2013f, 2014, ; TALL e MEIJA-RAMOS 2009b; TALL e CHIN 2012c; TALL e VERHOEF 2011b; TALL, GRAY e PITTA 2000; TALL e KATZ 2012b; TALL e KIDRON 2014; TALL e LIMA 2008 e 2010; TALL, LIMA e HEALY 2014; TALL e McGOWEN 2010b, 2013d; TALL e MOHAMAD 1993; TALL e VERHOEF 2011; TALL, VERHOEF, COENDERS, PIETERS e VAN SMAALEN 2013; TALL e VERHOEF 2010x, 2013b; TALL, VERHOEF, FER e VAN SMAALEN 2014; TALL, YEVDOKIMOV, KOICHU, WHITELEY, KONDRATIEVA e CHENG 2012a), e para artigos e livros que tratam da Educação Matemática Realística (FREUDENTHAL 1971, 1973, 1991; NELISSEN e TREFFERS 2010; VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN 2001, 2010), bem como dissertações e teses produzidas no interior do GEPEMA.

Nesta pesquisa tem-se um *corpus* intertextual[3], por meio do qual se busca cotejar relações no *corpus* de informação. Ao relacionar aspectos teóricos do Quadro do Desenvolvimento do Pensamento Matemático de Tall com a abordagem de ensino da Educação Matemática Realística, faz-se uma análise inferencial[4], no sentido de que se busca uma compreensão ampliada em relação aos aspectos envolvidos no ensinar e aprender matemática no contexto escolar, mais especificamente, quando se trata do desenvolvimento do pensamento matemático na abordagem da Educação Matemática Realística.

Uma pesquisa especulativa é uma viagem sem a garantia real do destino, o ponto final. Esse é o caminho que escolhi percorrer.

[3] Quando o pesquisador conta com mais de um discurso, o *corpus* de pesquisa é denominado intertextual e é constituído na interação das informações que resulta em uma informação comum, convergente e contribui para a constituição do núcleo teórico (PASSOS, 2015, p. 33).

[4] A finalidade da análise inferencial é o desenvolvimento ou a ampliação de uma teoria. A ampliação de uma teoria existente e suas aplicações em seu campo original é obtida pela adição de elementos teóricos inferidos (VAN DER MAREN, 1996).

DA RME

A Educação Matemática Realística é uma abordagem de ensino idealizada pelo matemático alemão Hans Freudenthal (1905-1990). Inicialmente suas ideias foram desenvolvidas na Holanda, entre o final de 1960 e início de 1970, em oposição ao movimento da Matemática Moderna que tinha como base uma perspectiva estruturalista (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010).

Em 1961, com o intuito de modernizar a Educação Matemática das escolas secundárias, o governo holandês criou o projeto WISKOBAS, coordenado pela Comissão de Modernização Curricular de Matemática (CMLW). A partir de 1968, esse projeto ganhou força com os trabalhos de Fred Goffree, Edu Wijdeveld e Adrian Treffers, gerando outros projetos relacionados ao ensino primário. De acordo com Van den Heuvel-Panhuizen (2010), essa abordagem tem influenciado fortemente quase todos os livros didáticos usados na escola primária holandesa, podendo ser encontrada e reconhecida nas descrições das trajetórias de ensino aprendizagem.

Em 1971, o Instituto para Desenvolvimento de Educação Matemática (IOWO), que, na época, tinha como diretor Hans Freudenthal, forneceu as instalações para o desenvolvimento do projeto WISKOBAS, dando um novo impulso ao movimento holandês para uma reforma curricular. O Instituto IOWO, considerado como "berço" da Educação Matemática Realística, passou por algumas mudanças, e, em 1991, após a morte de Freudenthal passou a ser chamado Instituto Freudenthal (IF).

Freudenthal teve uma participação ativa na comunidade de Educação Matemática atuando como presidente da Comissão Internacional de Instrução Matemática (ICMI) no período de 1967 a 1970, organizando o primeiro Congresso Internacional de Educação Matemática (ICME) em 1969 na cidade de Lyon - França, exercendo a função de editor fundador da *Educational Studies in Mathematics*, participando da fundação e ocupando a função de presidente da Comissão para o Estudo e Melhoria do Ensino da Matemática (CIEAEM), além de ser um dos fundadores do Grupo Internacional de Psicologia e Educação Matemática (PME), foi o coordenador do primeiro encontro.

O tipo de psicologia da educação matemática que Freudenthal tinha em mente foi influenciado por seus experimentos matemáticos e lógicos com o neto Bastiaan. No seu discurso de abertura na primeira PME em Utrecht, ele definiu esse tipo de pesquisa psicológica:

> você precisa de uma estratégia de observar - uma estratégia altamente sofisticada, mas que pode ser expressa em um princípio: olhar e escutar com uma mente aberta e ter a coragem para observar e relatar eventos que a maioria das pessoas consideraria como muito insignificantes para ser notados e para serem relatados. - pode haver uma minoria que pode apreciá-las, e essa minoria vai estar certa (FREUDENTHAL, Discurso de abertura da PME 1, Utrecht , The Netherlands, 1977).

As ideias de Freudenthal continuam "vivas", em contínuo desenvolvimento, tanto pelos membros do IF quanto por outros grupos de pesquisa que têm como foco o estudo dos princípios da abordagem da Educação Matemática Realística. O GEPEMA é um desses grupos e está constituído no departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina - PR.

> Os estudos do GEPEMA a respeito da RME iniciaram-se com as dissertações de Santos (2008) e Celeste (2008), que tomaram questões consideradas não rotineiras de aferições do PISA para realizar a análise da produção escrita de alunos e professores. Desde então, as teses e dissertações produzidas apresentam parte da história da Educação Matemática Realística e seus principais pressupostos (PASSOS, 2015, p.20).

A Educação Matemática Realística é uma abordagem de ensino em contínuo desenvolvimento que tem como base algumas ideias centrais:

- a matemática é pensada como uma atividade humana, e essa atividade é resultado do processo de matematização;
- a reinvenção guiada é tomada como método de trabalho para o professor (SILVA, 2015);
- o desenvolvimento da aprendizagem matemática passa por diferentes níveis, nos quais os contextos e os modelos têm um papel importante;
- do ponto de vista curricular, a reinvenção guiada requer a busca de contextos e situações que criam a necessidade da organização matemática.

e que adota os seguintes princípios: da atividade, da realidade, de níveis, de orientação, da interatividade, do entrelaçamento.

PRINCÍPIOS

<u>Princípio da atividade</u>

A matemática é pensada como uma atividade humana. Freudenthal (1991, 1993) considera o ensino da matemática que tem como ponto de partida um conteúdo matemático e depois a aplicação do conteúdo na resolução de problemas como uma inversão antididática, o que caracteriza uma forma de ensinar que é contrária às ações dos matemáticos. Fazer matemática - matematizar - é mais importante do que aprender a matemática como um produto terminado (FREUDENTHAL, (1993).

No ensino escolar frequentemente fragmentos de conhecimento são considerados como um "produto acabado" - resultado "final" da elaboração do conhecimento/conteúdo - sem sequer dar indicativos de que esse "acabado" é um "acabado parcial" que é determinado por organizadores de currículos para determinada série/ano de escolarização. Recordo que, em alguns momentos, enquanto estudante dos anos iniciais, eu tinha a ideia de que a divisão, por exemplo, era apenas com números naturais e nada mais havia a respeito deste conteúdo para ser aprendido[5].

Na RME, a ênfase não está em aprender os algoritmos, mas no processo de algoritmização; não está na álgebra, mas na atividade de algebrizar; não está nas abstrações, mas na ação de abstrair; não está na estrutura, mas na ação de estruturar. Os alunos, em vez de serem receptores da matemática pronta, são tratados como participantes ativos no processo educativo, em que se desenvolvem todos os tipos de ferramentas matemáticas e ideias por si mesmos (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000, p.5).

Partindo do princípio da atividade, é coerente pensar que há uma matemática para todos, mesmo que nem todo estudante chegue a ser matemático conforme mencionado por Freudenthal (1968). Também podemos pensar que há necessidade de os estudantes aprenderem a lidar com a matemática em problemas que se apresentam em situações do cotidiano, mas isso não exclui a matemática mais abstrata. Para Freudenthal (1968), a matemática mais abstrata, em um sentido objetivo, é sem dúvida também a mais flexível, mas não é em sentido subjetivo, quando a matemática formal é descartada por indivíduos que não são capazes de aproveitar essa flexibilidade.

Na RME, tem-se como ponto de partida a atividade dos matemáticos que partem do princípio de resolver problemas, buscar problemas e organizar o conteúdo ou a informação da realidade (GRAVEMEIJER, 1994). Nesse sentido, as produções dos alunos desempenham um papel importante.

Enquanto estudante da Educação Básica, na disciplina de Matemática, passei a maior parte do tempo trabalhando com o corpo de conhecimentos matemáticos já sistematizados (algumas vezes com alguma compreensão e outras não). Problemas eram dados depois de ter sido ensinado o mecanismo de resolução de uma operação, por

[5] Neste trabalho, quadros como esse representam considerações que fui tecendo ao longo do caminhar.

exemplo. Nos primeiros problemas não havia problema, para resolvê-los era necessário retirar os números do enunciado e fazer a operação que havia sido trabalhada anteriormente. O problema, para mim, era um problema (de verdade) quando sobravam números no enunciado e eu não sabia o que fazer com eles, quais deles utilizar em uma primeira operação e qual sequência de operações deveria seguir. Para resolver esse problema (de verdade), uma outra estratégia era necessária, a observação da fisionomia do professor ou da professora ao dar a resposta as perguntas clássicas: "É de mais ou de menos?", "É de vezes ou de dividir?", "A primeira conta é de `mais´, né?", ”Com quais números devo fazer a conta?",..., "Tá certo?"
Ao analisarmos, com cuidado, as tarefas envolvidas no fato ora relatado, é possível que não se encontrem indícios de matematização, apenas a reprodução de procedimentos anteriormente memorizado, mas há indicativos de que há uma mudança na forma de pensar e agir durante o processo de resolução de problemas (de verdade): uma etapa que envolve a compreensão, a visualização da situação, do descobrir o que é o problema, do que fazer com esses dados e uma etapa posterior que envolve o uso do "ferramental" matemático, me parece que esse fenômeno acontece independentemente da concepção de matemática envolvida.

A matemática não é concebida como o corpo do conhecimento matemático, mas como uma atividade de busca e resolução de problemas e, de forma mais geral, como a atividade de organizar matematicamente a e lidar matematicamente com ela. Essa atividade foi denominada por Freudenthal de “matematização”.

Para Treffers (1987), a matematização é

> uma atividade organizada. Ela refere-se à essência da atividade matemática, à linha que atravessa toda educação matemática voltada para a aquisição de conhecimento factual, à aprendizagem de conceitos, à obtenção de habilidades e ao uso da linguagem e de outras organizações, às habilidades na resolução de problemas que estão, ou não, em um contexto matemático (TREFFERS, 1987, p. 51-52, tradução nossa *apud* FERREIRA; BURIASCO, p. 246, 2016).

Nesse processo que Freudenthal denominou de matematização, podem ser identificadas duas grandes vertentes. No intuito de falar a respeito dessas vertentes, Treffers (1987) denomina a primeira de componente horizontal e de vertical a segunda.

> A primeira é a que explica o sujeito ir dos contextos “realísticos” envolvidos nas tarefas ou fenômenos explorados, para um assunto matemático. A segunda diz respeito ao desenvolvimento dos procedimentos matemáticos para explorar os fenômenos (FERREIRA; BURIASCO, p. 246, 2016).

Para Freudenthal (1991), não há como fazer uma distinção clara entre elas, uma vez que estão fortemente relacionadas, considerando-as de igual valor e importância, assim, deve ser oportunizado aos alunos matematizarem dentro dos dois mundos: o real e o dos símbolos.

Freudenthal (1991, p.41-42 *apud* OLIVEIRA, 2014, p.34) considera que a

> matematização horizontal conduz o mundo da vida para o mundo dos símbolos. No mundo da vida se vive, age (e sofre); no outro, símbolos são formados, reformulados, e manipulados mecanicamente, conscientemente e refletivamente: esta é a matematização vertical. O mundo da vida é o que é experimentado como realidade (no sentido em que usei a palavra antes), como símbolo de um mundo no que diz respeito à abstração. Para ter certeza, as fronteiras desses mundos são vagamente marcadas. O mundo pode expandir e encolher de acordo com a necessidade.

Do ponto de vista pedagógico fazer essa distinção, de certa forma, favorece, no planejamento do professor, a inserção intencional de situações de aprendizagem que contemplem tanto a matematização horizontal quanto a vertical. A questão está mais na intencionalidade, no encaminhamento, na atitude do professor ou da professora do que propriamente nas tarefas propostas em uma situação de ensino e aprendizagem.

De Lange (1987) apresenta as atividades envolvidas em cada um dos componentes do processo de matematização:

- identificar a matemática específica em um contexto geral; esquematizar; formular e visualizar um problema de diferentes formas; descobrir relações; descobrir regularidades; reconhecer aspectos isomorfos em diferentes problemas; transformar um problema real em um problema matemático; transformar um problema real em um modelo matemático conhecido, na matematização horizontal;
- representar uma relação em uma fórmula; provar regularidades; refinar e ajustar modelos; usar diferentes modelos; combinar e integrar modelos; formular um novo conceito matemático; generalizar, na matematização vertical.

A matematização horizontal e a matematização vertical estão voltadas para dois aspectos da matematização, um que se refere ao processo que vai do mundo real para o mundo simbólico e outro que se refere ao processo que envolve o mundo simbólico.

Gravemeijer e Terwel (2000) tomam matematização como fazer matemática e apresentam algumas características do corpo de conhecimento matemático a serem trabalhadas: generalidade, certeza, exatidão e concisão que podem ser associadas a atividades como mostrado a seguir.

• generalidade: envolve atividades como classificar, estruturar e procurar por relações;

• certeza: envolve atividades como refletir, justificar, provar (usando uma abordagem sistemática, elaborando e testando conjecturas, etc.);

• exatidão: envolve atividades como modelar, simbolizar, definir (limitando interpretações e validade);

• concisão: envolve atividades como simbolizar e esquematizar (desenvolvimento de procedimentos padrão e notações).

Ao realizar essas atividades, o estudante pode desenvolver outros conceitos matemáticos para além daqueles com os quais lida com certa familiaridade, "de modo que isso possa se estender a outras situações e esse processo de elaborar novos conhecimentos passa a ser natural" (OLIVEIRA, 2014, p.39). Esse aspecto do processo de matematização, vinculado à ideia de elaboração de algum conhecimento novo para o sujeito envolvido no processo de aprendizagem, De Lange (1987) chamou de matematização conceitual.

Princípio da realidade

O princípio da realidade está vinculado à origem da matemática. Para Freudenthal (1983), os conceitos, as estruturas, as ideias matemáticas foram elaboradas como ferramentas para organizar fenômenos do mundo físico, social e mental. A matemática surge nesse processo de organização, de matematização da realidade e a aprendizagem matemática no contexto escolar também deve seguir esse caminho, ou seja, o ensino deve partir do que é realístico, possível de ser “real” na mente dos estudantes. O termo “*realistic*” tem origem no verbo neerlandês “*zich REALISEren*" e foi traduzido, para o português, também pelo GEPEMA, como “realístico” por estar mais relacionado ao significado de “imaginar”, “realizar”, “fazer ideia”, “tomar consciência de”.

Com isso, nessa abordagem, partir da realidade não significa trabalhar apenas com questões do que no senso comum é chamado mundo real, mas também com questões que possam ser imaginadas, concebíveis na mente do estudante. De acordo com Van den Heuvel-Panhuizen (1996), o contexto de uma tarefa pode apresentar situações realísticas, fantasiosas, factuais, ou até mesmo ser circunscrito estritamente por uma linguagem matemática. Nessa perspectiva, trata-se de apresentar tarefas de tal modo que os estudantes possam imaginar as situações em questão e posteriomente resolvê-las, a partir de seus próprios conhecimentos matemáticos, de suas intuições. Desse ponto de vista, o contexto pode ser considerado como um aspecto intrínseco ao problema. No ambiente pedagógico, matematizar a “realidade” significa explorar contextos ricos, contexos que podem ser matematizados (FREUDENTHAL, 1968; VAN DEN HEUVEL- PANHUIZEN, 2000).

No que se refere à possibilidade de matematização, há uma classificação dos diferentes usos dos contextos.

- *Contexto de Ordem Zero* é utilizado apenas para tornar o problema parecido com uma situação da vida real. São chamados por De Lange (1999) de “contexto falso”, “contexto de camuflagem”. Segundo o autor, os problemas que contêm esse tipo de contexto devem ser evitados. Para Dekker e Querelle (2002), o contexto utilizado em um problema deve ser relevante para resolvê-lo, se não há relevância alguma para o uso do contexto, ele é classificado como de ordem zero.
- *Contexto de Primeira Ordem* é aquele que apresenta operações matemáticas “textualmente embaladas”, no qual uma tradução do enunciado para uma linguagem matemática é suficiente (DE LANGE, 1987). Para De Lange (1999) e Dekker e Querelle (2002), esse tipo de contexto é relevante e necessário para resolver o problema e avaliar a resposta.
- *Contexto de Segunda Ordem* é aquele com o qual o estudante é confrontado com uma situação realística e dele é esperado que encontre ferramentas matemáticas para organizar, estruturar e resolver a tarefa (DE LANGE, 1987). Esse tipo de contexto, segundo De Lange (1999), envolve matematização, enquanto e nos contextos de primeira ordem os problemas já são pré-matematizados.
- *Contexto de Terceira Ordem* é aquele que possibilita um “processo de matematização conceitual”. Esse tipo de contexto serve para “introduzir ou desenvolver um conceito ou modelo matemático” (DE LANGE, 1987, p. 76-77 *apud* FERREIRA, 2013, p. 44-45).

De Lange (1995) considera que uma das funções mais características da abordagem da Educação Matemática Realística é o uso de contextos para formação conceitual, ou seja, para o "processo de matematização conceitual”.

Entende-se, na Educação Matemática Realística, que o contexto é apenas um potencializador para a oportunidade de matematizar. O fato de se propor um contexto com situações do cotidiano do estudante "não é suficiente para que o estudante possa aprender algo ao lidar com ele" (FERREIRA, 2013, p. 41). É importante levar em conta o seu caráter relativo, uma vez que um contexto depende da experiência (mental) prévia dos alunos e da sua capacidade de imaginá-lo ou visualizá-lo.

> Com isso não é possível dizer a priori quais seriam bons problemas de contexto, visto que essa caracterização depende da relação que o

> "resolvedor" em potencial estabelece com o enunciado. Todavia, a hipótese é de que a proximidade do contexto com o repertório do estudante aumenta a possibilidade de matematização (FERREIRA, 2013, p.41).

Na RME, o contexto, para ser significativo para o aluno, deve se constituir como ponto de partida para a sua atividade matemática. Os contextos dos problemas têm como função:

> Formação de conceito: na fase inicial de um curso permitirá aos alunos um acesso natural e motivador para a matemática, – Modelo de formação: eles fornecem um suporte seguro para a aprendizagem de operações formais, procedimentos, notações, regras, e fazem isso juntamente com outros modelos que têm uma função importante como suporte para o pensamento, – Aplicabilidade: eles descobrem a realidade como uma fonte e domínio de aplicações, – Exercício de habilidades específicas em situações aplicadas (TREFFERS; GOFFREE, 1985, p. 111; TREFFERS, 1987, p. 256, *apud* FERREIRA, 2013, p. 43).

Ao se trabalhar com problemas de diferentes contextos, espera-se que os estudantes possam desenvolver ferramentas matemáticas, compreensão, estratégias de resolução ligadas aos contextos (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2001). A intenção é que os estudantes, ao explorarem diferentes fenômenos, incialmente por meio de estratégias informais, posteriormente mais formais, vão progredindo no sentido de sistematizar em direção a um modelo formal. Nesse sentido, alguns aspectos do contexto matemático podem se tormar mais gerais e fornecer apoio para a resolução de outros problemas relacionados (VAN DEN HEUVEL-PANHIZEN, 2001).

> De acordo com Gravemeijer e Doorman (1999, p. 127), se "os estudantes vivenciam o processo de reinventar a matemática como uma expansão do senso comum, então não sentirão dicotomia alguma entre suas experiências de vida cotidiana e matemática, ambos farão parte da mesma realidade" (*apud* FERREIRA, 2013, p.44).

A partir do trabalho com problemas de contexto é possível oportunizar aos estudantes o processo de matematizar, de usar a matemática em situações do cotidiano, de organizar fenômenos da realidade, de sistematizar conhecimentos matemáticos a partir de uma resolução informal.

Princípio de níveis

Na perspectiva da RME, todos os alunos são capazes de aprender Matemática em diferentes níveis. Eles começam matematizando um assunto ou um tema da realidade para, em seguida, analisar sua própria atividade matemática. De acordo com Van

Den Heuvel Panhuizen (2010), os alunos começam com procedimentos informais e por meio da matematização progressiva avançam em direção a modelos mais formais, passando por vários níveis de compreensão.

Os níveis chamados de: situação, referencial, geral e formal são apresentados em outro princípio da RME conhecido como princípio dos "modelos emergentes". A expressão "emergente" possui duplo significado no sentido de que se refere ao processo pelo qual surgem os modelos e ao processo pelo qual esses modelos suportam o surgimento de matemática formal (GRAVEMEIJER, 2002), vinculados àa ideia de matematização horizontal e matematização vertical.

> • nível de situação: no qual o conteúdo matemático, conhecimento e estratégias são utilizados unicamente dentro do contexto da situação;
> • nível referencial: no qual estratégias e procedimentos se referem à situação descrita no problema e modelos são desenvolvidos para resolvê-la, são os chamados modelos de;
> • nível geral: no qual estratégias e procedimentos extrapolam o contexto, com isso, os modelos também representam outras situações, são os chamados modelos para;
> • nível formal: no qual se trabalha com procedimentos e notações convencionais, formalizados (*apud* OLIVEIRA, 2014, p. 27).

Esses níveis estão relacionados ao uso de estratégias, modelos e linguagens de diferentes categorias cognitivas e não constituem uma hierarquia determinantemente ordenada. A evolução entre os níveis se dá quando a atividade em um nível é submetida a análise no nível seguinte, em outras palavras, quando o estudo de um tema em um nível torna-se o objeto de estudo em um nível subsequente.

Para Freudenthal (1971), os níves são dinâmicos e um aluno pode atuar em diferentes níveis de compreensão para diferentes conteúdos, ou partes de um mesmo conteúdo. Os níveis não devem ser utilizados para descrever exatamente em que nível um aluno está, mas para auxiliar professores a monitorar os processos de aprendizagem.

Na RME, a matemática formal é entendida como algo que se desenvolve dentro da sua própria atividade de matematização, não como algo pronto a ser ensinado para o estudante.

<u>Princípio do entrelaçamento</u>

Na RME, os blocos de conhecimentos matemáticos, tais como números e operações, geometria, medidas e tratamento da informação, não são considerados capítulos curriculares isolados, eles estão fortemente integrados, interconectados. Entretanto, isso não significa que sempre serão tratados de forma integrada. De acordo com Van den Heuvel-Panhizen (2010), compreender um processo complexo quase sempre requer deixar de lado sua complexidade. Nessa perspectiva foram concebidas as trajetórias de ensino-aprendizagem por blocos de conhecimento, como cálculo com números naturais, medida e geometria. Convém ressaltar que se concentrar em âmbito particular não significa perder de vista como se conecta com outras áreas do conhecimento matemático (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010).

Para Widjaja e Heck (2003), é por meio do entrelaçamento que os alunos devem desenvolver uma visão integrada da matemática, bem como flexibilidade para se conectar a diferentes subdomínios, não apenas ao entrelaçamento entre os blocos de conhecimento, mas também dentro dos próprios blocos de conhecimento ou com outras disciplinas escolares. Nessa perspectiva, o princípio do entrelaçamento traz coerência para o currículo.

Pensando no princípio do entrelaçamento, não apenas no que se refere ao conhecimento matemático e suas relações internas, Van den Heuvel-Panhuizen (2010, p. 21, tradução nossa) amplia essa ideia de entrelaçamento ao questionar até que ponto um componente temático pode estar desconectado, em primeiro lugar, do desenvolvimento cognitivo do aluno e, em segundo lugar, do seu desenvolvimento social e emocional. A resposta é simples, diz ela: “todas as linhas de desenvolvimento são inseparáveis mas distinguíveis", e mais, afirma que o fato de olhar separadamente é o que fornece uma visão ampla e permite aos professores "ver" as inter-relações e como se pode integrá-las no processo de ensino.

Princípio da interatividade

As trajetórias de ensino-aprendizagem, desenvolvidas no interior do Projeto TAL, têm como base um ensino interativo direcionado para toda a turma. Uma das características desse enfoque didático está no sentido de que os alunos, como resultado de suas discussões coletivas, desenvolvem suas próprias estratégias e conhecem as usadas por outros e, como consequênci, avançam para um nível superior (NELISSEN; TREFFERS, 2010). Nesse sentido, a aprendizagem não é apenas uma atividade individual, mas também social. (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010).

Na perspectiva da RME, de acordo com Van den Heuvel-Panhuizen (2010), devem ser dadas oportunidades aos estudantes para compartilharem suas estratégias e invenções. A interação entre alunos e professores, também chamada de interação vertical, é uma parte essencial na RME e se dá de três maneiras:

> a. entre o professor e um aluno;
> b. entre o professor e um grupo pequeno de alunos (o grupo pode ser heterogêneo em relação a idade e nível) e
> c. entre o professor e toda a turma (NELISSEN; TREFFERS, 2010, p. 393, tradução nossa).

O termo interação horizontal é utilizado para se referir ao modo de trabalho no qual os alunos lidam e analisam as ideias envolvidas, em pequenos grupos (heterogêneos ou homogêneos) ou no grande grupo (na turma), com uma discussão guiada pelo professor, pelo menos no início. Nessa perspectiva, o termo interação abrange um amplo espectro de atividades de ensino (NELISSEN; TREFFERS, 2010). Para esses autores, a vantagem do ensino interativo está no fato de que oferece oportunidades para o uso da linguagem, e o desenvolvimento do pensamento matemático se apoia fortemente no desenvolvimento da linguagem.

<u>Princípio de orientação</u>

O princípio da orientação vincula-se ao processo de ensino uma vez que aos estudantes deve ser dada a oportunidade "guiada" para "reinventarem" a matemática. Na reinvenção guiada, tem-se como ponto de partida um problema que é resolvido pelos alunos a partir de seus conhecimentos prévios ou "atuais" a respeito do assunto. Por meio da matematização progressiva, os alunos passam por diferentes níveis de compreensão em direção a uma compreensão mais formal do objeto ou conceito envolvido ou em estudo.

O princípio da orientação também se remete à organização do espaço e ao tempo escolar, até porque se considera que a organização do ensino e os programas escolares devem basear-se num conjunto coerente de trajetórias de ensino-aprendizagem a longo prazo. Os alunos precisam de espaço para construir seus conhecimentos e instrumentos matemáticos. Para isso, os professores precisam organizar um ambiente de aprendizagem em que esse processo de construção de conhecimentos possa surgir (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010).

O processo educacional descrito na trajetória de ensino e aprendizagem tem como alicerce o enfoque "realístico" da Educação Matemática que está em desenvolvimento desde 1970 (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010). Apresentamos a seguir o Projeto TAL e a Trajetória de Ensino-aprendizagem.

PROJETO TAL E A TRAJETÓRIA DE ENSINO E APRENDIZAGEM

Com o objetivo de melhorar a qualidade da educação, na década de 1990, muitos países tomaram decisões, no nível governamental, a respeito do que as escolas deveriam ensinar a seus alunos. Nos Estados Unidos, por exemplo, as recomendações foram apresentadas no documento *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* elaborado pelo *National Council of Teachers of Mathematics - NCTM* e no Reino Unido nos documentos *National Curriculum* e *Numeracy Project* (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010).

Na Holanda, em resposta a essa tendência, foi encomendado pelo Ministério de Educação uma "nova" ferramenta educacional no intuito de orientar o processo de ensino e aprendizagem na escola primária. Essa ferramenta chamada de "trajetória de ensino-aprendizagem" foi elaborada no Projeto TAL desenvolvido pelo Instituto Freudenthal da Universidade de Utrecht (FI) e pelo Instituto Nacional de Desenvolvimento Curricular Holandês (SLO)[6] em colaboração com o Centro de Serviços Educacionais de Rotterdam (CED)[7] (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2001).

Os elaboradores do Projeto TAL consideravam que a melhoria na qualidade da educação pode se dar de diversas maneiras, entrentanto a proposta foi contribuir com o trabalho de sala de aula dos professores da escola primária, proporcionando uma nova compreensão das grandes linhas dos processos de ensino-aprendizagem e da sua coerência interna (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2001).

O Projeto TAL aponta e descreve objetivos intermediários para o ensino de matemática, dentro de uma trajetória de ensino-aprendizagem, como um suplemento dos objetivos fundamentais previamente estabelecidos para o final da educação primária. Esse é um dos motivos pelo qual o projeto foi denominado de TAL que, em holandês, corresponde a *Tussendoelen Annex Leerlijnen*, traduzido para o inglês como *Intermediate Attainment Targets in Learning-Teaching Trajectories* e para o espanhol como *Objetivos intermedios de Las trayectorias de aprendizaje-enseñanza.* A letra do meio da sigla TAL pode ser relacionada com o termo *albeeldingen* (representações) indicando que muitos exemplos de estratégias de alunos e de professores fazem parte da descrição das trajetórias de ensino-aprendizagem. Os exemplos que incluem descrições de diferentes estratégias utilizadas pelos

---

[6] Dutch Institute for Curriculum Development.
[7] School Advisory Center for the city of Rotterdam.

alunos possibilitam ao professor perceber quais destas têm potencial e quais correm o risco de conduzir o aluno a uma rua sem saída (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010).

A descrição dos objetivos intermediários indica pontos de referência ao longo dos processos de ensino e de aprendizagem associados a diferentes níveis de pensamento e de ação, de tal forma que permite ao professor vislumbrar as conexões entre o passado e o presente e entre o presente e o futuro, fornecendo uma visão geral de uma trajetória de aprendizagem a longo prazo. Uma trajetória de ensino e aprendizagem de longo prazo pode se tornar um "mapa mental educativo" para o professor e auxiliá-lo a não se deter em pequenos detalhes (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010).

É importante destacar que o projeto TAL reconhece que nenhuma descrição dos processos de ensino e de aprendizagem, por mais detalhada que seja, expressa as sutilezas do que acontece na prática cotidiana da sala de aula, mas, apesar disso, as trajetórias de ensino-aprendizagem possuem um valor inerente - como guia para as práticas de ensino. A intenção não é estabelecer um marco regulatório rígido, uma vez que os processos reais de aprendizagem são complexos e nunca se repetem da mesma maneira. O que se traça são linhas gerais.

Em uma trajetória de ensino e aprendizagem estão entrelaçados o ensino, a aprendizagem e um conteúdo programático, o que possibilita pensarmos que:

- uma trajetória de apredizagem dá uma visão geral do processo de aprendizagem dos alunos;
- uma trajetória de ensino consiste em indicações didáticas que descreve como o ensino pode se articular de maneira mais eficaz com o próprio processo de aprendizagem dos alunos, estimulando-os;
- um perfil do conteúdo programático, pois indica quais são os elementos centrais do currículo de matemática a serem propostos (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, tradução nossa, 2010, p.28).

Considerar a descrição de uma trajetória de ensino e aprendizagem como um roteiro de ensino estritamente linear, no qual cada passo só pode ser dado com base no passo anterior ou como um passo a passo é um equívoco. É necessário pensar em uma trajetória de ensino e aprendizagem com uma certa margem de amplitude, levando em consideração:

- a singularidade dos processos de aprendizagem de cada aluno;
- as descontinuidades nos processos de aprendizagem, já que às vezes os alunos progridem em saltos e outras vezes podem ter recaídas;
- o fato de que os alunos são capazes de aprender múltiplas habilidades simultaneamente e que diferentes conceitos podem estar em

desenvolvimento ao mesmo tempo, tanto dentro como fora da área de matemática;

- as diferenças que podem aparecer no processo de aprendizagem na escola como resultado de disparidades em situações de aprendizagem fora da escola;
- os diferentes níveis de domínio de certas habilidades que os alunos possuem (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, tradução nossa, 2010, p.28).

A trajetória de ensino e aprendizagem, de certa forma, não deixa de ser um planejamento que pode ser visto tanto na perspectiva do processo de ensino e de aprendizagem a longo prazo quanto na perspectiva das práticas letivas diárias dos professores de matemática.

De acordo com Van den Heuvel-Panhuizen (2001), em comparação com as descrições dos objetivos que tradicionamente eram considerados como guia e apoio para a tomada de decisão educacional, a trajetória de ensino e aprendizagem tem novos elementos. Primeiro, porque na trajetória de ensino e aprendizagem a característica mais importante está na perspectiva longitudinal. Segundo, porque a trajetória de ensino e aprendizagem não descreve apenas os aspectos da aprendizagem do aluno que podem ser reconhecidos na rota de aprendizagem, mas também retrata as atividades chaves no ensino que levam a esses aspectos, ou seja, leva em consideração uma dupla perspectiva, a de metas e de estrutura de ensino. Terceiro, porque leva em consideração a característica da coerência baseada na distinção de níveis, ou seja, a descrição da trajetória deixa claro que o que é aprendido em uma fase é entendido e executado em um nível mais elevado em uma fase seguinte. Uma das implicações dessa característica é que os alunos podem trabalhar em um mesmo problema sem estarem no mesmo nível de entendimento. Quarto, leva-se em consideração o formato da descrição. A descrição não é uma simples lista de habilidades e conhecimentos para serem alcançados, nem uma formulação rigorosa dos parâmetros comportamentais que podem ser testadas diretamente. Em vez disso, é uma descrição narrativa com muitos exemplos.

Em uma trajetória de ensino e aprendizagem não deve haver uma contradição entre a aprendizagem individual e independente e a aprendizagem colaborativa interativa. Nelissen e Treffers (2010) alertam que essa contradição frequentemente refere-se às interpretações que são dadas a esses termos.

> A aprendizagem individual pode ser interpretada de duas maneiras: primeira, como um sistema no qual tem lugar central o trabalho independente com o material, no próprio nível e ritmo; e, segundo, como uma forma de oferecer ao aluno o espaço para continuar a sua própria maneira informal de trabalhar e de pensar com base nos resultados que encontrou e em construções

> baseadas em experiências significativas (do seu sentido comum) (NELISSEN; TREFFERS, tradução nossa, 2010, p.399).

A aprendizagem social também pode ser vista de duas maneiras:

> primeira, como a ideia de que todos os alunos trabalham com o material ao mesmo tempo, da mesma maneira e com a mesma velocidade, e ao fazê-lo seguem as estratégias prescritas pelo professor para toda a classe. Ou, de outra forma, a aprendizagem social pode apontar para uma prática letiva que pode caracterizar-se como "ensino interativo" (NELISSEN; TREFFERS, tradução nossa, 2010, p. 399).

Se considerarmos o enfoque da aprendizagem individual e o enfoque da aprendizagem social de acordo com a primeira interpretação, ou seja, tendo como foco o trabalho individual do aluno de forma independente - utilizando o seu material, no seu próprio nível e ritmo e o segundo que contempla a ideia de todos os alunos trabalhando juntos com o mesmo material, ao mesmo tempo, da mesma maneira e no mesmo ritmo, e ainda seguindo estratégias apresentadas pelo professor, é evidente que há uma contradição. Nesta perspectiva, é difícil combinar o enfoque da aprendizagem individual e da aprendizagem social com o enfoque da aprendizagem colaborativa do grupo (NELISSEN; TREFFERS, 2010).

Entretanto, essa contradição desaparece se interpretarmos a aprendizagem individual como sendo aquela em que o aluno parte da sua própria maneira de pensar e constrói seu conhecimento e a aprendizagem social como interativa - aquela em que o aluno leva em consideração suas próprias estratégias criticamente por meio da reflexão (NELISSEN; TREFFERS, 2010). O fato de os alunos apresentarem e compararem diferentes estratégias de resolução pode gerar uma profícua discussão. Além disso, os alunos, ao analisarem as diferentes estratégias de resolução, avaliam suas próprias estratégias e vêm que há outras estatégias para além da que haviam pensado inicialmente, talvez mais eficientes que a sua própria estratégia e têm oportunidade de aprender com seus colegas (NELISSEN; TREFFERS, 2010).

A reflexão não se dá repentinamente, ela surge à medida que os alunos se tornam conscientes da forma que se trabalha e começam a avançar nos comentários feitos por seus colegas. No seu devido tempo, por meio dos "óculos" dos outros aprendem a "olhar" para seu próprio processo de pensamento e para as estratégias utilizadas. Nesse sentido, "pode-se dizer que o diálogo externo que tem com os outros, se transforma em um diálogo interno consigo mesmo. O diálogo interno se chama reflexão" (NELISSEN; TREFFERS, 2010, p.397). Um dos resultados desse processo é que o aluno se torna mais consciente de sua forma de pensar ou raciocinar, o outro é que o aluno pode ver que vale a pena imitar a maneira de pensar e raciocinar dos outros. Nesse sentido, a reflexão pode conduzir a uma maior compreensão ou a uma compreensão em nível mais elevado.

Levando-se em consideração que a aprendizagem é um processo cíclico, sempre surgem novas construções e compreensões como resultado da reflexão do processo de matematização. Esse processo se dá, em grande parte, graças à interação, a qual leva os alunos a aprenderem a refletir em um nível cada vez mais elevado.

Uma caracterização geral do ensino de matemática interativo dirigido para a turma pode ser feita a partir da descrição das aulas e das diferentes estratégias utilizadas pelos alunos. De acordo com Nelissen e Treffers (2010):

- os alunos constroem suas próprias estratégias de trabalho sob supervisão do professor;
- as diferenças de nível são permitidas e consideradas como essenciais para um ensino interativo proveitoso;
- os alunos confrontam suas estratégias uns com os outros e, ao fazê-lo, vêm que há outras possiblidades e que algumas podem ser mais eficientes que as outras. Ao mesmo tempo, tomam maior consciência das suas próprias estratégias e das conexões entre os diferentes métodos;
- a troca de ideias a respeito das diferentes estratégias, sob a supervisão do professor, contribui para que os alunos compreendam melhor seu trabalho e alcancem um nível mais elevado.

Na Educação Matemática Realística, é dado grande valor tanto para a interação horizontal quanto para a vertical. Também se presta muita atenção à linguagem, dado que esta constitui o alicerce para o avanço do pensamento matemático. A linguagem desempenha um papel central nesse enfoque didático.

Diferentemente de uma proposta que tem como base o modelo de ensino frontal, no ensino interativo dirigido para todo o grupo, há muita flexibilidade.

O ensino baseado na abordagem da Educação Matemática Realística, de acordo com Ciani (2012), contempla alguns aspectos considerados importantes na dinâmica das aulas de Matemática. Entre eles:

> • os alunos devem ser confrontados com situações-problemas das quais participem ativamente na busca da sua resolução, e, para isso, a utilização de estratégias informais deve ser incentivada, uma vez que, para Freudenthal (1991), a melhor maneira de aprender é fazendo.

> • os alunos começam por analisar contextos ricos que possam ser matematizados, de modo que eles sejam preparados para usar a Matemática na formulação e resolução de problemas, assim ela lhes poderá ser útil de fato, no lidar com a realidade.
> • a reflexão sobre as atividades desenvolvidas é uma constante, pois pode permitir a passagem para um nível seguinte de compreensão.
> • os conteúdos não são apresentados em capítulos estanques, uma vez que, para resolver problemas em contextos ricos, vários conhecimentos e ferramentas matemáticas podem ser necessários.
> • pressupõe atividade social – partilha e reflexão. Cada aluno segue seu próprio trajeto de aprendizagem, mas lhe é dada a oportunidade de partilhar suas estratégias e descobertas com outros; mas, ainda assim, as crianças continuam a ser consideradas como indivíduos, e, por conseguinte, é feita a adaptação a cada um (proposta de problemas cujas resoluções podem ser de diferentes níveis).
> • é dada aos estudantes a oportunidade de "reinventar" a Matemática. Para isso, os professores têm um papel crucial porque ajudam a proporcionar cenários com potencial para que os alunos trabalhem e alcancem níveis mais elevados de compreensão da matemática (CIANI, 2012, p. 34).

Na perspectiva da RME, em relação ao papel do aluno, alguns aspectos são considerados relevantes.

> • Cada aluno traz seus preconceitos para a experiência educativa. Esses preconceitos são de grande influência na aprendizagem subsequente. Os alunos possuem um conjunto diversificado de concepções alternativas sobre ideias matemáticas que influenciam o aprendizado futuro.
> • Cada aluno constrói significados ativamente. Os alunos adquirem novos conhecimentos através da construção para eles mesmos.
> • Cada aluno está pronto para compartilhar o seu significado pessoal com os outros, e com base nesse processo de negociação, reconceitualiza as estruturas do conhecimento inicial. A construção do conhecimento é um processo de mudança que inclui a criação, adição, modificação, aperfeiçoamento, reestruturação e rejeição.
> • Cada aluno assume a responsabilidade pela sua aprendizagem. Os conhecimentos novos construídos pelos alunos tem sua origem em um conjunto diversificado de experiências.
> • Cada aluno está convencido de que o sucesso na aprendizagem com compreensão é possível. Em outras palavras, todos os alunos independentemente de raça, cultura e gênero são capazes de compreender e fazer matemática (HADI, 2002, p. 36, tradução nossa, apud OLIVEIRA, 2014, p. 50).

É papel do professor, nessa perspectiva, desenvolver trajetórias de ensino e aprendizagem, levando em consideração possíveis obstáculos que os alunos podem encontrar em relação aos conceitos abordados, de modo que esse planejamento ofereça possibilidades para superá-los. Conhecer a história do desenvolvimento de conceitos matemáticos pode auxiliar o professor a projetar trajetórias de ensino e aprendizagem de modo que o aluno possa reinventar a matemática. O professor exerce autoridade pela maneira que seleciona tarefas, pela maneira que conduz as discussões e as contribuições dos estudantes (GRAVEMEIJER, 1994).

De acordo com Freudenthal, a reinvenção guiada é um caminho natural para a aprendizagem. Para ele,

> utilizar currículos cientificamente estruturados, nos quais os estudantes são confrontados com uma matemática pronta, é uma "inversão antididática". Eles baseiam-se na premissa falsa de que os resultados de um raciocínio matemático, colocados numa lista de conteúdos, podem ser transferidos diretamente para os estudantes. [...] De acordo com Freudenthal, isso significa colocar a “carroça na frente dos bois”: tirar dos estudantes a oportunidade deles mesmos desenvolverem matemática. Matemática, em outras palavras, deve ser ensinada na ordem em que os próprios estudantes possam inventá-la (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996, *apud* SILVA, 2015, p.62)

Nessa perspectiva concebe-se o currículo como um processo que requer uma trajetória de ensino e aprendizagem em longo prazo que precisa estar inserida em uma filosofia educacional que busca promover a interação do estudante com seus colegas e com o professor nas aulas de matemática. O "carro chefe" desse processo é a investigação do desenvolvimento por meio de experiências em sala de aula onde se poem à prova as trajetórias de ensino e aprendizagem, em que se observam, registram e analisam os feitos, os saltos e descontinuidades da aprendizagem dos alunos.

Um currículo, na RME, convida os professores, organizadores de currículos a substituirem a visão do sujeito estudante como um receptor passivo de uma matemática pré-fabricada por uma visão do sujeito que participa, junto como outros, na organização de fenômenos que possam, por eles, ser imaginados.

> Embora a RME entenda que os domínios do conhecimento matemático devam ser entrelaçados, ainda assim, admitem que possam existir “pontas soltas”, ou seja, conteúdos que, por algum motivo, não podem ser entrelaçados aos demais. No caso de existirem pontas soltas, o recomendável é que sejam trabalhadas na primeira oportunidade em que possam ser conectadas com outros conteúdos para dar continuidade ao entrelaçamento (FREUDENTHAL, 1991 *apud* SILVA, 2015, p.36).

Ainda, o ensino e a avaliação são fortemente integrados. A avaliação desempenha seu papel em todos os estágios do processo de ensino (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1994).

DO PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO - TALL

De acordo com Tall (1991), há mais de dois mil anos, o Pensamento Matemático Avançado tem desempenhado um papel central no desenvolvimento da civilização.

> No entanto, em todo esse tempo o estudo sério sobre a natureza do pensamento matemático avançado - o que é, como funciona na mente dos matemáticos especializados, como ele pode ser incentivado e aprimorado nas mentes de estudantes em desenvolvimento - tem sido limitado para as reflexões de uns poucos indivíduos significativos espalhados por toda a história da matemática (TALL, 1991, xiii, tradução nossa).

Essa afirmação é um indicativo de que o Pensamento Matemático Avançado, embora tenha sido foco de trabalho de alguns estudiosos no decorrer da história da matemática, enquanto um campo de estudo e pesquisa é relativamente recente e pouco disseminado no contexto educacional.

O PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO NA COMUNIDADE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

No ano de 1976, segundo Tall (1991), foi instituído o Grupo Internacional de Psicologia da Educação Matemática (PME)[8] durante o III Congresso Internacional de Educação Matemática, em Karlsruhe na Alemanha, com a finalidade de promover contatos internacionais e intercâmbio de informações entre os pesquisadores na intenção de ampliar e aprofundar a compreensão dos conhecimentos relativos aos aspectos psicológicos no ensino e aprendizagem da matemática e suas respectivas implicações nesse processo.

Desde que o Grupo PME foi instituído, pesquisadores passaram a ter encontros anuais em diferentes países para compartilhar ideias de investigação e estudos que vinham desenvolvendo. No ano de 1985, durante o encontro do Grupo PME, formou-se um Grupo de Trabalho com o foco no Pensamento Matemático Avançado e, a partir dos estudos desse Grupo de Trabalho, foi organizado por David Tall e publicado, no ano de 1991, o livro 11 da Série *Mathematics Education Library*, intitulado *Advanced Mathematical Thinking*[3] (TALL, 1991). A publicação dessa obra pode ser considerada como um primeiro passo em direção à disseminação das ideias do Pensamento Matemático Avançado para um público mais amplo, ou seja, para matemáticos e educadores matemáticos, uma vez que "este foi o

[8] Psychology of Mathematics Education (PME).

primeiro livro inteiramente dedicado à pesquisa teórica e empírica no pensamento matemático em ambos, matemáticos e estudantes" (TALL, 1993a, p.2, tradução nossa).

Atualmente, as questões relacionadas ao desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado tornaram-se foco de estudo de vários pesquisadores, cada qual defendendo suas teorias que ora se contradizem, ora são coerentes entre si. Entre os estudos realizados, neste trabalho abordaremos o quadro teórico desenvolvido por David Tall. Isso não significa que o estudo desenvolvido por outros pesquisadores a respeito do desenvolvimento do pensamento matemático sejam mais ou menos importantes, trata-se apenas de estabelecer um recorte para estudo.

Na sequência apresentamos dados biográficos de David Tall, coletados em seu *site* pessoal[9] no intuito de apresentar um panorama geral, uma visão do contexto no qual ele esteve e está inserido e, ao mesmo tempo, apresentar a sua trajetória como pesquisador no campo da Educação Matemática.

DAVID TALL E SUA TRAJETÓRIA ACADÊMICA E PROFISSIONAL

David Ormes Tall nasceu em 1941, em Wellingborough na Inglaterra, teve seus primeiros anos de escolarização em Wellingborough na Escola de Victoria (1945-1952) e a continuação de seus estudos na Escola de Gramática (1952-1960). Ingressou, em 1960, na Universidade de Oxford como bolsista livre e obteve, entre outros, o Prêmio de Matemático Junior. Nessa mesma Universidade, graduou-se em Matemática (1963-1966).

Em 1967 defendeu a Tese em Matemática intitulada "A Topologia das Representações de Grupo"[10], sob a orientação do Professor Michael Atiyah na Universidade de Oxford. Nessa época, o professor Atiyah foi reconhecido com a Medalha Fiels concedida a cada quatro anos por trabalhos e pesquisas notáveis, sendo bastante requisitado para palestras e conferências. Como não conseguia atender a todos, passou a indicar David Tall para ministrá-las.

No desenvolvimento dessa nova atividade, de conferencista e palestrante, Tall, percebeu que os participantes das conferências/palestras não conseguiam entender suas ideias. Frustrado, passou a refletir sobre o porquê do não entendimento e decidiu que suas pesquisas deixariam de ser direcionadas à Matemática e passariam a ser relacionadas à Educação.

---

[9] h*omepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/prof-david-tall-cv.pdf*
[10] The Topology of Group Representations

Em 1986, defendeu a Tese em Educação intitulada "*Building and Testing a Cognitive Approach to the Calculus using Interactive Computer Graphics*", na Universidade de Warwick com a orientação do Professor Richard Skemp, doutor em psicologia e um dos pioneiros em Educação Matemática que integrou, pela primeira vez, as disciplinas de Matemática, Educação e Psicologia. Em síntese, Tall, teve a formação em Matemática e em Educação Matemática com estudos na área da Psicologia.

Em relação à carreira profissional, iniciou como professor assistente em Matemática na Universidade de Sussex (1966-7) passando a professor de Matemática na Universidade de Sussex (1967-9), professor de Matemática com interesse especial em Educação na Universidade de Warwick (1969-79), professor de Educação Matemática na Universidade de Warwick (1979-80), professor senior em Educação Matemática na Universidade de Warwick (1980-89), coordenador do departamento de Ciências da Educação na Universidade de Warwick (1989-92), professor de Pensamento Matemático da Universidade de Warwick (1992-2006), Professor Emérito de Pensamento Matemático da Universidade de Warwick (2006) e Professor visitante de Educação Matemática da Universidade de Loughborough (2011-2014).

Em linhas gerais, é nesse contexto acadêmico e profissional que David Tall desenvolveu uma pesquisa relacionada ao Pensamento Matemático Avançado e, posteriormente, a Teoria dos Três Mundos da Matemática. O que caracteriza o Pensamento Matemático Avançado é tema da próxima seção.

PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO

O termo "Pensamento Matemático Avançado" de uma forma geral é usado no sentido de designar o pensamento de matemáticos profissionais que inclui a criatividade, a imaginação, a conjectura e a demonstração de teoremas. Entretanto, ele não se aplica apenas ao pensamento dos matemáticos profissionais, também é usado para designar o pensamento dos estudantes quando lhes são apresentadas definições e teoremas criados por outros e lhes é solicitada a construção de um conceito (TALL; GRAY; PITTA; PINTO, 1999k), ou seja, está relacionado com o ensino e a aprendizagem da Matemática no nível superior, conforme explicitam Mamona-Downs e Downs (2008) no compêndio de publicação internacional denominado *Handbook of International Research in Mathematics Education*, o qual em constante revisão e atualização reune pesquisas em Educação Matemática.

Para Tall (p,1, 1992e, tradução nossa), o Pensamento Matemático Avançado "é caracterizado por dois componentes importantes: definições matemáticas precisas e deduções lógicas de teoremas baseados nelas". As definições dos conceitos são formuladas e os conceitos formais são construídos por deduções, ou seja, "para a construção dos conceitos matemáticos avançados são dadas propriedades como definições axiomáticas e a natureza do próprio conceito é construída estabelecendo as propriedades por dedução lógica" (COSTA, p.259, 2002).

No Pensamento Matemático Avançado, uma série de processos interagem entre si, tais como representar, visualizar, generalizar, ou outros, como classificar, conjecturar, induzir, analisar, sintetizar, abstrair ou formalizar. Essas atividades também ocorrem na resolução de problemas da Matemática Elementar, entretanto a possibilidade de definição formal e de dedução é característica do Pensamento Matemático Avançado (DREYFUS, 1991). É nesse processo de definição formal e de dedução que se "envolve o uso de estruturas cognitivas produzidas por uma ampla gama de atividades matemáticas para a construção de novas ideias que reforçam e ampliam um sistema cada vez maior de teoremas estabelecidos" (TALL, 1995b, p.3) e se estabelece uma relação com o Pensamento Matemático Elementar. As atividades envolvidas no Pensamento Matemático Avançado estariam relacionadas às atividades matemáticas desenvolvidas na Matemática Elementar? E se essas estruturas cognitivas não foram construídas na Educação Básica? Como se dá a construção dessas estruturas e o respectivo desenvolvimento?

Embora eu goste da ideia de estudar os processos envolvidos no Pensamento Matemático Avançado, esses são questionamentos que me causam inquietação e, talvez, refletem uma das minhas expectativas iniciais, o desejo de compreender a minha própria trajetória de desenvolvimento do pensamento matemático dentro do meu contexto sociocultural. Essa compreensão, ao meu "ver", possibilitaria, pensar em uma abordagem de ensino que favoreça uma aprendizagem com significado, e desencadear uma pesquisa. O "olhar" para uma parte sem compreender o "todo" me incomoda.

Percebo, assim como Tall (1992e), que a definição formal e a dedução, correspondem, no processo de escolarização, a ponta de um *iceberg* - a parte visível, uma "fase final" em um Curso de Matemática do Ensino Superior e que, na base desse *iceberg* - parte invisível - inicia-se o desenvolvimento do pensamento matemático desde o nascimento do indivíduo.

Na perspectiva de vislumbrar esse *iceberg* que não está isolado no mundo, mas que faz parte dele, que interfere e sofre sua interferência é que deixo de pensar exclusivamente no Pensamento Matemático Avançado e mergulho nos estudos realizados por David Tall

> em relação ao desenvolvimento do pensamento matemático reunidos no livro *How Humans Learn to Think Mathematically* publicado no ano de 2013, mas que não se restringem a essa obra. Nesse livro e em outros artigos, Tall apresenta a Teoria dos Três Mundos da Matemática e um quadro teórico de como os humanos aprendem a pensar matematicamente, contemplando desde os primeiros conceitos da criança recém-nascida para as fronteiras da investigação matemática.

Para fundamentar a Teoria dos Três Mundos da Matemática, Tall (2013) utiliza o que chamamos de "óculos" de outros teóricos e pesquisadores, tais como Piaget, van Hiele, Deacon, Fischbein, Bruner, Sfard, Lakoff e Johnson, bem como seus próprios "óculos" construídos a partir da sua trajetória como estudante, professor e pesquisador, quer seja individual ou em conjunto com seus orientados de doutorado e outros pesquisadores.

> Hoje, com os meus "óculos" – hoje no sentido de que não está pronto, está em constante desenvolvimento e ajustes - que tiveram sua construção iniciada enquanto estudante nas décadas de 1980 e 1990, enquanto professora da Educação Básica, nas décadas de 1990, 2000 e 2010, enquanto pesquisadora em uma fase inicial a partir de 2010, e com a forma sutil e singular com que minha orientadora e pesquisadora professora Buriasco encaminhou os primeiros encontros de orientação no primeiro ano, propondo leituras diversas até que eu encontrasse algo que também fosse do meu interesse, oportunizando "pensar a respeito" sem impor ou definir algo, incentivando a estudar, ao término do primeiro ano, tenho certeza que estudar as primeiras publicações de Tall que dizem respeito ao Pensamento Matemático Avançado e a estrutura matemática envolvida no processo de transição do Pensamento Matemático Elementar para o Pensamento Matemático Avançado me ajudou a dar significado a muitos dos cálculos que executava com certa habilidade, mas não compreendia, bem como perceber que posso continuar aprendendo e que o aprendizado nunca termina.
>
> Após um ano de participação no grupo GEPEMA, por meio do estudo de textos, das discussões e da observação da existência de diferentes "lentes", "olhares" e "pontos de vista", as "lentes" dos meus óculos estão sendo refinadas/ajustadas e já permitem visualisar uma trajetória, ainda que de forma ampla, sem muitos detalhes. O ajuste/refinamento das "lentes" vai acontecendo aos poucos, tanto com os estudos desenvolvidos quanto com a forma com que o trabalho é realizado no grupo, ou seja, na perspectiva da abordagem da Educação Matemática Realística.
>
> É com essas "lentes" que olho para o *iceberg*, ou seja, para a Teoria dos Três Mundos da Matemática e para o Quadro Teórico do Desenvolvimento do Pensamento Matemático de Tall, que se constitui objeto de estudo. A intenção é realizar esse estudo e buscar alguma relação com a abordagem de ensino da Educação Matemática Realística.

A ORIGEM DA TEORIA DOS TRÊS MUNDOS DA MATEMÁTICA

O questionamento "Como podemos formular uma teoria única que nos permita melhorar o ensino e a aprendizagem da matemática em um mundo onde alguns [alunos] acham a matemática uma coisa de incrível beleza, enquanto outros acham que é uma fonte de ansiedade problemática?" está na base da Teoria dos Três Mundos da Matemática formulado por Tall (2013, p.5, tradução nossa). É na perspectiva de contemplar as facilidades e dificuldades encontradas por alunos no ambiente escolar que Tall (2013) desenvolve essa teoria, também denominada de Teoria Unificada do Desenvolvimento do Pensamento Matemático, a partir de dois aspectos: a operação fundamental do cérebro humano e o desenvolvimento do conhecimento matemático em longo prazo.

De acordo com Tall (2013), para o desenvolvimento do pensamento matemático utilizamos os mesmos recursos mentais que estão disponíveis para pensar em geral, cuja base está na estimulação de ligações entre os neurônios no cérebro. À medida que esses *links* são alertados, eles mudam bioquimicamente e, ao longo do tempo, as ligações bem utilizadas produzem processos de pensamento mais estruturados e estruturas de conhecimento ricamente conectadas. Nessa perspectiva, o que caracteriza o desenvolvimento do pensamento matemático em longo prazo é a reconstrução contínua de conexões mentais que evoluem para estruturas de conhecimento cada vez mais sofisticadas, com o passar do tempo.

Tall (2013) mostra indícios da evolução das estruturas de conhecimento matemático ao estabelecer uma relação com o desenvolvimento do pensamento matemático no processo de escolarização de alunos dos anos iniciais até o ensino universitário. Olhando sob o ponto de vista do desenvolvimento do pensamento matemático em longo prazo, é a partir da observação das propriedades dos objetos físicos que elaboramos os conhecimentos da geometria, das ações sobre os objetos os conhecimentos da aritmética e outros conhecimentos matemáticos derivados destes.

Descrevemos a seguir, a partir de uma interpretação, a forma como TALL (2013) pode ter visto o *icebeg* com o uso do que chamamos de "lentes da observação de regularidades", o que lhe permitiu uma visão geral, ainda sem a nitidez necessária para vislumbar o todo e os detalhes, mas com um direcionamento para a construção da Teoria dos Três Mundos da Matemática.

Um olhar com as "lentes da observação de regularidades"

Utizando as lentes por nós denominadas "lentes da observação de regularidades", Tall (2013) percebe que, no desenvolvimento do pensamento matemático em longo prazo, a geometria e a aritmética são os dois primeiros conhecimentos matemáticos trabalhados no início do processo de escolarização das crianças. Isso não quer dizer que esse seja o primeiro contato das crianças com esses conhecimentos, mas que esses são os primeiros conhecimentos trabalhados no contexto escolar com a intenção de que os alunos os aprendam. É para a evolução do desenvolvimento desses conhecimentos matemáticos abordados no contexto escolar que Tall direciona seu olhar.

Um olhar em direção ao conhecimento da geometria

As crianças começam a construir seus conhecimentos geométricos a partir de brincadeiras com objetos, do reconhecimento de propriedades e da descrição de objetos e propriedades por meio da linguagem. Na escola, esses conhecimentos são aprimorados, ampliados e aprofundados e, com o passar do tempo, as descrições são feitas de forma mais precisa com definições, construções com régua e compasso e, eventualmente, as propriedades de figuras podem ser relacionadas no quadro formal da geometria euclidiana.

Um olhar em direção ao conhecimento da aritmética

A aprendizagem da aritmética segue uma trajetória diferente da geometria. Ela não está centrada nas propriedades dos objetos físicos, mas nas ações realizadas com esses objetos que incluem contagem, agrupamento, partilha, ordenação, adição, subtração, multiplicação, divisão. Essas ações tornam-se operações matemáticas coerentes e, nessa ocasião, são introduzidos os símbolos matemáticos que podem ser vistos como operações a serem realizadas e como conceitos numéricos que podem ser manipulados na mente. Essa dupla função dos símbolos permite que as operações sejam realizadas rotineiramente com pouco esforço consciente.

Assim, crianças pequenas contam objetos físicos para desenvolver o conceito de número e para aprender a calcular. À medida que fazem as contagens, vão descobrindo, por exemplo, que, para realizar a operação 2 + 7, é mais fácil e mais prático contar duas unidades a partir de 7, ou seja, "oito, nove", do que contar sete unidades a partir de 2, ou seja, "três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove".

Os alunos, numa fase inicial de escolarização, nem sempre têm a percepção de que, na adição, a contagem é independente da ordem e isso pode ser uma tarefa díficil para alguns, mas, quando esse processo está relacionado com a apresentação visual dos objetos colocados em várias formas, propriedades de aritmética surgem. A partir da observação e da percepção das crianças de que, na adição, a ordem de contagem é independente, uma das "regras" da aritmética pode ser formulada. Em um nível mais avançado, a partir de propriedades da aritmética que são familiares aos alunos, podem-se definir números naturais em termos de uma lista de axiomas (postulados de Peano).

Um olhar em direção aos outros conhecimento da matemática

No Quadro 02, resume-se o olhar de Tall com as "lentes da observação de regularidades" para os conhecimentos matemáticos derivados dos conhecimentos da geometria e da aritmética.

Quadro 02 – Evolução do desenvolvimento dos conhecimentos matemáticos

Conhecimento matemático	**Olhar**
Medidas	A medição é um conhecimento matemático que também se desenvolve a partir da ação de comparar grandezas tais como comprimento, área e volume. A quantidade resultante das medições é registrada por meio de frações e números decimais. Os números podem ser representados como pontos em uma reta e, em nível universitário, explorados como um sistema axiomático (um corpo ordenado completo).
Álgebra	A base da álgebra está nas operações aritméticas com manipulações simbólicas generalizadas seguindo as mesmas regras da aritmética. As funções algébricas podem ser visualizadas na forma de gráficos, e estruturas algébricas posteriores podem ser formuladas em vários sistemas axiomáticos (tais como grupos, anéis).
Cálculo	Os conceitos do cálculo podem ser expressos visualmente e dinamicamente como a mudança de inclinação em um gráfico, e a área representada em gráfico, pode ser aproximada por cálculos numéricos ou expressa precisamente por meio das fórmulas simbólicas de diferenciação e técnicas relacionadas à integração. Na universidade, essas ideias podem ser expressas axiomaticamente na teoria formal da análise matemática.
Vetores	Os vetores são introduzidas como grandezas físicas com magnitude e direção, escritos simbolicamente como vetores coluna e matrizes e, mais tarde, reformulados axiomaticamente como espaços vetoriais.
Probabilidade	O estudo da probabilidade começa com uma reflexão sobre a repetição de experiências físicas e mentais com o objetivo de prever o resultado, posteriormente à realização de cálculos específicos para calcular a

	probabilidade numérica e a formulação dos princípios axiomaticamente (como um espaço de probabilidade).

Fonte: A autora

A partir da evolução do desenvolvimento desses conhecimentos matemáticos que se repetem no contexto escolar, podemos observar que há três formas distintas de conhecimento. A primeira é relacionada aos objetos e suas propriedades com a sua evolução marcada pelo uso da linguagem. A segunda inicia-se com as ações sobre os objetos e evolui com o uso dos símbolos. A terceira corresponde ao nível mais alto em ambos os casos, envolvendo a definição formal de sistemas axiomáticos e a dedução de propriedades da demonstração matemática, conforme mostra a Figura 1.

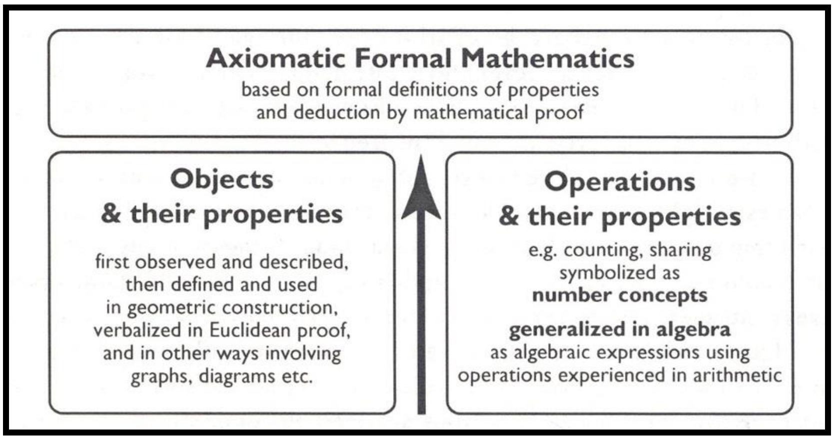

Figura 1: Um esboço inicial de três formas de conhecimento em matemática
(*An initial out line of three forms of knowledge in mathematics)*
Fonte: TALL (2013, p. 8)

Destacamos que as duas primeiras formas de conhecimento são trabalhadas na Educação Básica com uma vasta gama de aplicações e a terceira forma aparece na abordagem formal para a matemática encontrada na universidade e na pesquisa matemática.

Os “óculos da psicologia"

Como "as lentes da observação de regularidades" não forneceram, com nitidez, a imagem do *iceberg*, Tall recorreu ao que chamamos de “óculos da psicologia", mas especificamente as lentes de Bruner, de Fischbein e de Piaget. Esses óculos também estão direcionados para uma visão geral do desenvolvimento humano, mais especificamente do desenvolvimento do pensamento matemático.

As "lentes" de Bruner (1966,1977) permitem vizualizar o *iceberg* sob a ótica de três formas de representação cognitiva: enativa (baseada na ação), representação icônica (baseada na imagem base) e representação simbólica (baseada na liguagem e nos símbolos matemáticos).

As "lentes" de Fischbein (1987) permitem ver o desenvolvimento da matemática e da ciência sob a ótica de três abordagens diferentes, as quais chamou de intuitiva, algorítmica e formal. A diferença entre as "lentes" de Bruner e de Fischbein está em detalhes, mas ambos têm uma visão ampla do desenvolvimento conceitual. A representação enativa e a representação icônica de Bruner dizem respeito à intuição de Fischbein, enquanto a representação simbólica de Bruner inclui abordagem algorítimica e a abordagem formal de Fischbein.

Com as "lentes" desenvolvidas pelo pai da psicologia moderna, Piaget (1926, 1958), alicerçadas na concepção de que "o conhecimento não se encontra nem no sujeito, nem no objeto, mas na ação que este sujeito exerce sobre o objeto" (FÁVERO, p.159, 2014), é possível vizualizar o *iceberg* sob a ótica de quatro estágios do desenvolvimento da criança em longo prazo, sendo eles: estágio sensório-motor, pré-operacional, operacional concreto e formal-operacional, entretanto o alcance das "lentes" não exclui o meio em que o *iceberg* se encontra. Na epígrafe do Capítulo III, Jean Piaget e a Epistemologia Genética do livro Piscologia & Conhecimento de Fávero (2014), consta:

> O ser humano é inserido desde o seu nascimento num meio social, que age sobre ele, da mesma forma que o meio físico... Cada relação entre indivíduos os modifica e constitui uma totalidade, de tal sorte que a totalidade formada pelo conjunto da sociedade não é uma coisa, um ser ou uma causa, mas sim, um sistema de relações (PIAGET, *apud* FAVERO, p. 141, 2014).

Para construir a Teoria dos Três Mundos da Matemática, Tall (2013), assim como Piaget, não ignora a influência do meio, mas direciona seu olhar para os estágios de desenvolvimento cognitivo, ou seja, ao estágio sensório-motor, que remete à fase da pré-linguagem, ao estágio pré-operacional que se refere ao período em que as crianças desenvolvem a linguagem e as imagens mentais de um ponto de vista pessoal, ao estágio operacional concreto, fase em que as crianças desenvolvem concepções estáveis do mundo compartilhado com os outros e ao estágio formal-operacional, que se refere ao desenvolvimento da capacidade para o pensamento abstrato e o raciocínio lógico.

Piaget fez alguns ajustes em suas "lentes" e direcionou o olhar para como os novos conceitos são construídos, complementando o cenário de sua teoria global. Essas maneiras foram relacionadas com as formas de abstração. A primeira refere-se à abstração empírica que se dá por meio das brincadeiras com objetos e da tomada de consciência de suas propriedades, como por exemplo, o reconhecimento de um quadrilátero como uma figura de quatro lados.

A segunda é a abstração pseudo-empírica, que acontece a partir das ações com os objetos. Esta desempenha um papel importante na aritmética, em que operações, como contar e compartilhar, levam ao conceito de número, por exemplo.

A terceira é a abstração reflexiva, nessa maneira de abstração as operações em um nível tornam-se objetos mentais de pensamento em um nível superior, assim, por exemplo, uma operação generalizada na aritmética torna-se uma expressão em álgebra.

Com as "lentes da observação de regularidades", Tall (2013), percebe que cada uma dessas lentes" apresenta o desenvolvimento em longo prazo a partir da percepção física e da ação por meio do desenvolvimento do simbolismo e da linguagem em direção ao raciocínio dedutivo. Com base nos três tipos de abstração definidos por Piaget, por analogia, Tall (2013) indica um quarto tipo de abstração que generaliza abstração empírica das propriedades dos objetos, concebendo objetos mentais, tais como pontos sem tamanho, e linhas retas que não tenham largura que pode ser estendido tanto quanto desejado em qualquer direção. Esse quarto tipo de abstração passa ser denominado de abstração platônica por estar relacionada com objetos mentais platônicos, incidindo sobre as propriedades essenciais das figuras.

Assim, há uma mudança na ilustração do esquema apresentado pela Figura 1, conforme se visualiza na Figura 2.

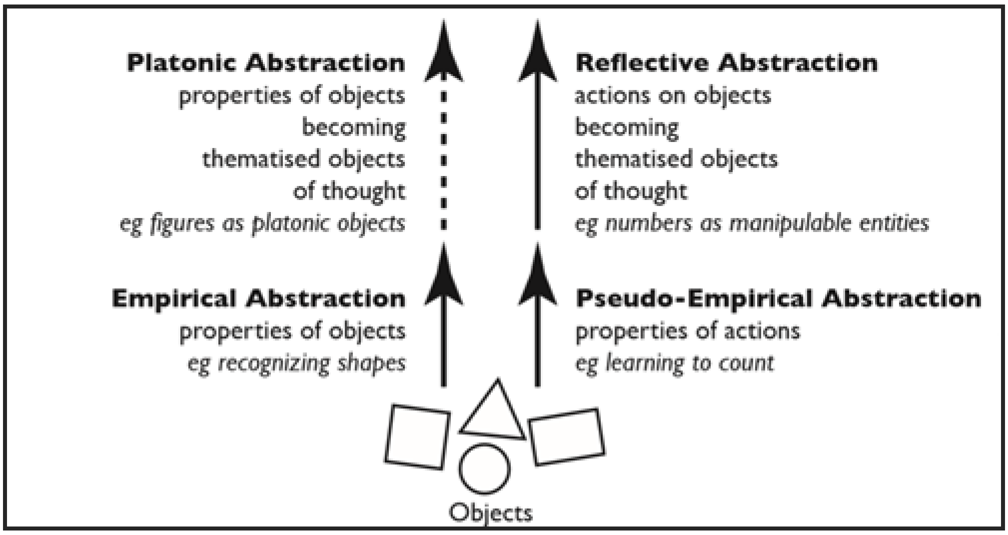

Figura 2: Abstração Piagetiana e Platonica (Piagetian and Platonic Abstraction)
Fonte: Tall (2013, p.10)

Tall (2013) também estabelece uma relação entre os quatro tipos de abstração com as duas formas de desenvolvimento do pensamento matemático. A primeira forma de desenvolvimento, construída a partir das propriedades de objetos, refere-se à abstração empírica e abstração platônica e passa a ser denominada de abstração estrutural e a segunda forma de desenvolvimento, a partir de ações em objetos está diretamente associada a abstração pseudo empírica e abstração reflexiva e passa a ser denominada de abstração operacional. Assim, o esquema representado na Figura 2, passa a ser representado conforme consta na Figura 3.

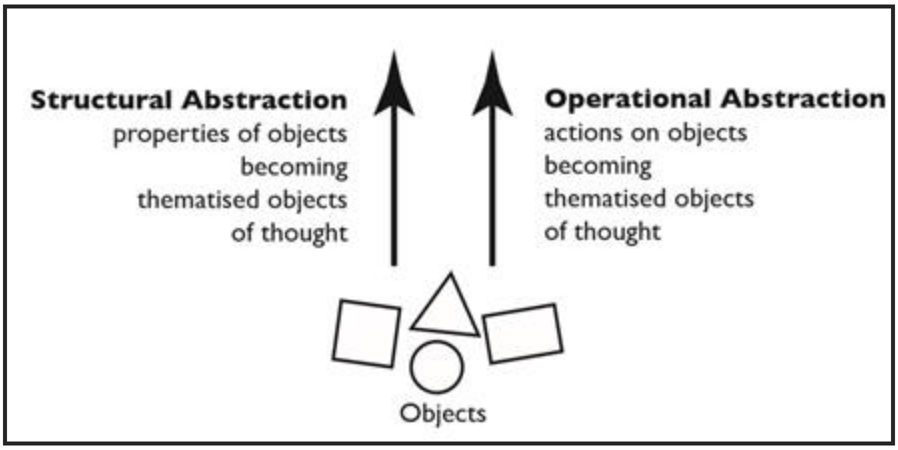

Figura 3: Abstração em longo prazo (*Long-term Abstraction)*
Fonte*:* Tall (2013, p.10)

De acordo com TALL (2013), essas ideias de abstração estrutural e abstração operacional se relacionam com a visão de van Hiele (1986) na geometria e de Sfard (1991) no pensamento matemático geral.

Estabelecido o esquema da abstração em longo prazo, a partir dos quatro tipos de abstração com as duas formas de desenvolvimento do pensamento matemático, o "olhar" de Tall (2013) é direcionado para como se dá esse desenvolvimento, ou seja, a forma como se dá a evolução/crescimento da Abstração Estrutural e da Abstração Operacional. Para tanto, Tall (2013) usa o que chamamos de "óculos" da antropologia, mais especificamente, as lentes de Deacon (1997), com as quais vê o desenvolvimento intelectual do Homo Sapiens vinculado com o desenvolvimento da linguagem e do simbolismo.

Para Tall (2013, p.11, tradução nossa), "embora o reconhecimento elementar de forma e número seja encontrado em outras espécies, apenas o Homo Sapiens desenvolve ideias matemáticas sofisticadas, como o teorema de Pitágoras, ou a ideia de que há um número infinito de primos". A partir da ideia de que o Homo Sapiens é uma espécie simbólica que tem o seu desenvolvimento intelectual vinculado ao desenvolvimento da linguagem e do simbolismo e que o desenvolvimento do pensamento matemático faz parte desse desenvolvimento intelectual global, o desenvolvimento do pensamento é uma ação humana, ou seja, a matemática é uma atividade humana.

Com o que chamamos de "óculos da filosofia", mais especificamente com as lentes de Lakoff e Johnson (1999), Tall (2013, p.11, tradução nossa) encontra a ideia de "conceito corporificado"[11] definido como sendo "uma estrutura neural que é, na verdade, parte de, ou faz uso de, o sistema sensório-motor de nosso cérebro" e mais especificamente em relação a Matemática a declaração adicional de que "todo o pensamento humano é corporificado por meio da nossa experiência sensório-motora". Nesta perspectiva, a matemática é uma construção humana que se dá a partir do sistema sensório-motor para níveis mais elevados de investigação matemática. Lakoff e Johnson (1999), ao se referirem ao sistema sensório-motor indicam uma única categoria de corporificação. Para Tall (1995, 2013),

> O termo "sensório motor" já se refere a dois aspectos diferentes do cérebro: a parte sensorial relacionada à forma como percebemos o mundo por meio dos nossos sentidos e da parte do motor relativas à forma como operamos no mundo por meio de nossa ação. Isso se relaciona diretamente com a distinção feita no texto entre a apreciação sensorial de forma e espaço com foco sobre as propriedades estruturais de objetos e as atividades motoras operacionais, tais como contagem e partilha que levam para a aritmética e a álgebra (TALL, 2013, p.11, tradução nossa).

Assim, ao invés de "ver" a evolução do desenvolvimento do pensamento matemático a partir das atividades sensório-motoras como uma única forma de desenvolvimento, Tall (2013) prefere uma outra alternativa e passa a "ver" estes dois desenvolvimentos como distintos, um tipo de pensamento que começa com a "percepção de" e outro com a "ação sobre", mas que ocorrem ao mesmo tempo. Ele explica a independência destes dois desenvolvimentos com as "lentes" da perspectiva histórica, mencionando que os antigos gregos desenvolveram uma teoria de geometria sem nenhum simbolismo aritmético ou algébrico e que é possível desenvolver a aritmética e a álgebra sem se referir a geometria. Ele também menciona que Lakoff (1987), em seu livro *Women, Fire and Dangerous Things* refere-se brevemente a dois tipos de corporificação: a conceitual e a funcional. A corporificação conceitual refere-se ao uso de imagens mentais e a corporificação funcional ao uso de conceitos sem esforço perceptível, ao uso de conceitos de forma automática, mas não explora essas ideias.

Tall (2013) usa o termo "corporificação conceitual",

---

[11] embodied concept

> [...] para se referir ao uso de ambas imagens mentais estáticas e dinâmicas, que surgem a partir da interação física com o mundo e tornam-se parte da imaginação humana cada vez mais sofisticada. Isso inclui o uso de materiais manipuláveis, tais como blocos de Dienes para relacionar com as concepções mentais dos números e aritmética. Ele também se estende para o desenho de figuras geométricas que se transformam em imagens mentais descritas verbalmente na geometria euclidiana, a representação de funções e gráficos como imagens estáticas em papel, e as imagens visuais dinâmicos em geral, como visualizadas usando computação gráfica ou unicamente dentro da mente (TALL, 2013 p.12, tradução nossa).

Em um primeiro momento de estudo da definição de "corporificação conceitual" e de uma associação dessa definição com a imagem do esquema apresentado na Figura 3 foram suscitados em mim os seguintes questionamentos: Se as imagens mentais advindas do uso de materiais manipuláveis, como por exemplo, do uso do Material Dourado no processo de ensino do Sistema de Numeração Decimal tem origem no pensamento relacionado a "percepção de" e temos como objetivo chegar na "ação sobre", ou seja, na manipulação com símbolos, então temos uma transição na forma de pensamento? Como se faz essa ligação entre as imagens obtidas a partir do uso de materiais manipuláveis e a manipulação de símbolos em aritmética?

A resposta ao primeiro questionamento parecia evidente, no Quadro Teórico do Desenvolvimento do Pensamento Matemático, há uma necessidade de ligação entre as imagens e a representação simbólica e que se deve fazer é desvelar como se dá essa ligação. Essa suposição despertou em mim, um certo mal estar, uma insegurança em continuar o estudo na busca de relações entre o Quadro Teórico do Desenvolvimento do Pensamento Matemático de Tall (2013) e a abordagem da Educação Matemática Realística.

Sentia-me como se estivesse procurando agulhas (características da RME) em palheiro desconhecido (*framework* do desenvolvimento do pensamento matemático) - sem indícios que por lá tivesse passado um costureiro ou costureira, sabia o que é agulha mas não conhecia o palheiro, poucas eram as referências a respeito dele e nem sempre as melhores, em um olhar superficial parecia que não havia nada além de palha, mas sentia que deveria explorá-lo, afinal, poderia encontrar uma agulha em algum recondito ou talvez, não agulha, mas um botão, um ganchinho, um zíper. Assim, conversando com minha orientadora, decidimos continuar essa investigação.

Retomando o estudo, para Tall (2013) o desenvolvimento do pensamento matemático se dá de duas formas diferentes: uma que se inicia com o uso das imagens mentais e tem como base a linguagem para que possa desenvolver significados mais sofisticados e outra que inclui o uso do simbolismo em aritmética e álgebra. Estas duas formas ocorrem ao longo do processo de escolarização na Educação Básica, antes do desenvolvimento de uma abordagem axiomática formal utilizada no trabalho dos matemáticos puros.

Esta evolução é baseada em três atributos humanos: a entrada por meio dos sentidos que reconhecem as propriedades dos objetos; a saída por meio das ações que se tornam operações de rotina e a linguagem (junto com o simbolismo) que são base para desenvolver formas cada vez mais sofisticadas de pensar sobre ideias matemáticas (TALL, 2013).

É por meio da linguagem e dos símbolos que a matemática tem se desenvolvido e tem sido passada de geração a geração. De acordo com Gray e Tall (1992k) o uso de símbolos é a principal fonte desse desenvolvimento e culmina com a criação de diferentes matemáticas nos últimos séculos. Apesar das tentativas feitas para tornar os símbolos cada vez mais explícitos e inequívocos, "o seu poder reside em um tipo muito específico de ambiguidade" (GRAY; TALL, 1992k, p.1, tradução nossa), indicando, muitas vezes, algo a se fazer e ao mesmo tempo o resultado do que foi feito.

A escrita de um número muitas vezes é interpretada como adjetivo ou substantivo. Em "Os três porquinhos" o "três" é adjetivo e em "três é um número primo" o "três" é substantivo, entretanto,

> Os números não são apenas usados como adjetivos ou substantivos. Uma expressão em aritmética, tal como "3 + 4" opera de forma flexível como uma instrução para calcular o resultado "quanto é 3 + 4?" e também como um substantivo, o nome do resultado do cálculo de 3 + 4, o qual é 7. O símbolo 3 + 4 opera como ambos processo (adição) e conceito (a soma) (TALL, 2013, p.13, tradução nossa).

Para descrever o uso de um símbolo que opera de forma ambígua como processo e conceito, Gray e Tall (1994a), criam a expressão *procept* tomando a primeira sílaba da palavra *process* e a última sílaba da palavra *concep*t, definindo-a como um amálgama de processo e conceito representado pelo mesmo símbolo. Assim,

> A palavra "*procept*" em si é uma compressão poderosa, usando uma única palavra para descrever como um símbolo pode ser concebido como um processo ou um conceito. O novo termo nos permite falar sobre o fenômeno e obter mais conhecimentos sobre como as crianças desenvolvem maneiras poderosas de pensar em aritmética (TALL, 2013, p.46, tradução nossa).

A palavra processo (*process*), neste contexto, é utilizada para se referir a uma forma geral de fazer, por exemplo, o processo de contagem, o processo de adição ou o processo de resolução de uma equação algébrica, e o termo "procedimento" refere-se a um algoritmo específico para a implementação de um processo, por exemplo, para realizar o processo da adição 2 + 3, o procedimento pode ser "contar tudo" - 1, 2, 3, 5, 5 ou "contar a partir de uma quantidade" - 3, 4, 5 ou procedimento idiossincrático de um indivíduo usando adereços mentais ou físicos, tal como o uso de dedos imaginados para realizar a contagem. Cada processo pode ser realizado por procedimentos individuais, que podem ser resultado de uma ação mecânica, algoritmo rotineiro ou comportamento idiossincrático (GRAY; TALL, 2004).

Os aspectos procedimentais da matemática estão relacionados a manipulação rotineira de objetos que podem ser representados por meio do uso de materiais manipuláveis, da linguagem oral, de símbolos escritos ou imagens mentais. "É relativamente fácil para ver se tais procedimentos são realizados de forma adequada, e desempenho em tarefas semelhantes é frequentemente tomado como uma verificação da obtenção dessas habilidades" (GRAY; TALL, 1994a, p.2, tradução nossa). Entretanto, "o conhecimento conceitual, por outro lado é mais difícil de avaliar. É um conhecimento que é rico em relações" (GRAY; TALL, 1994a, p.2, tradução nossa).

Gray e Tall (1994a) recorrem a Hiebert e Lefevre (1986) para descrever o conhecimento conceitual como

> uma teia conectada... uma rede em que as relações de ligação são tão proeminentes como os pedaços discretos de informação... uma unidade de conhecimento conceitual não pode ser uma parte isolada de informação; por definição, é parte do conhecimento conceitual somente se o titular reconhece sua relação com outras peças de informação (Hiebert and Lefevre, 1986, p. 3-4 *apud* GRAY e TALL, 1994a, p. 2).

Se considerarmos apenas os procedimentos matemáticos e os conhecimentos conceituais, como definidos anteriormente, podemos inferir que é possível que o pensamento flexível com base nos conhecimentos conceituais seja muito diferente do pensamento com base nos procedimentos inflexíveis. Entretanto, aqui não se trata de evidenciar uma abordagem distinta para os procedimentos e outra para os conceitos, ou seja, de uma abordagem para "coisas para fazer" e de outra para "coisas para saber", mas de um construto mental, de um amálgama de processo e conceito representado pelo mesmo símbolo que é interiorizado e cristalizado como um objeto mental.

Para Gray e Tall (1992k) o uso de símbolos que significam tanto o processo como o resultado desse processo ocorre ao longo da matemática. Um número, como por exemplo "dois", envolve tanto o processo de contagem quanto o conceito de número. Esse fenômeno se repete em toda a estrutura do conhecimento matemático em diferentes contextos, exemplificando temos que:

- ✓ 4x3 é um símbolo que representa o processo de multiplicação "quatro vezes três", que, em termos de procedimento pode envolver a adição repetida para produzir o produto, que é o número 12.
- ✓ -7 é um símbolo que significa tanto o processo de "subtrair sete" ou mudar sete unidades na direção oposta ao longo da reta numérica quanto o conceito de número negativo (-7).
- ✓ 3/4 é um símbolo que representa o processo de divisão e o conceito de fração.

A álgebra, a trigonometria, o cálculo e análise também estão permeados de símbolos que evocam um processo e um conceito produzido nesse processo. A ideia de *procept* perpassa toda matemática desde os anos iniciais de escolarização até a pesquisa matemática.

No início do processo de escolarização, quando um aluno relaciona várias maneiras de obter um mesmo resultado utilizando diferentes símbolos como 7+3, 3+7, 13-3, 2+2+6, há um indício de que este aluno está começando a representar diferentes formas de resgistrar o mesmo *procept*. Nesta situação o *procept* é o número 10 e todas as outras formas possíveis que um indivíduo pensa sobre isso para manipulá-lo de forma flexível em aritmética. Ao longo do tempo, o aluno cresce, se desenvolve cognitivamente e passa englobar muitas outras conexões, como 5x2, 20:2, (-5)x(-2), $-10i^2$ (TALL, 2013).

O pensamento *proceptual* é caracterizado pela habilidade do indivíduo manipular tal simbolismo de forma flexível como processo ou conceito, trocando livremente diferentes simbolismos para o mesmo objeto (TALL; GRAY, 1994).

De acordo com Tall (2013), "o pensamento *proceptual* é importante não apenas para derivar fatos em aritmética, também é essencial para a manipulação flexível de álgebra, e no desenvolvimento do poderoso pensamento matemático em longo prazo" (TALL, 2013, p.14, tradução nossa).

A forma pela qual um processo realizado em um tempo pode eventualmente ser concebido como com conceito independente do tempo. Esse é um exemplo de um processo mental mais geral para pensar em situações complicadas de forma mais simples.

> Compressão de conhecimento ocorre quando um fenômeno de algum tipo é concebido na mente de uma maneira mais simples ou mais eficiente. Isso ocorre por meio de fazer as conexões mentais mais diretas no cérebro e é

> reforçada por usar a linguagem para dar o conceito de um nome e de ser capaz de compartilhar ideias sobre suas propriedades e relações com outros conceitos (TALL, 2013, p. 14, tradução nossa).

Os tipos de compressão de conhecimentos estão relacionados aos tipos de abstração e essas abstrações de acordo com TALL (2013) ocorrem de maneiras distintas. Somos capazes de reconhecer objetos por meio de nossa percepção e caracterizá-los como iguais ou diferentes nomeando-os de acordo com a categoria, como por exemplo, "mesa" ou "esfera". Esta é uma abstração estrutural das propriedades de um conceito em uma única entidade.

Uma segunda forma de compressão envolve a prática de uma sequência de ações como um procedimento de modo que possa ser realizado com pouco esforço mental. A abstração de um processo como a adição sendo comprimida em um conceito mental (soma) é uma abstração operacional, denominada de encapsulamento de um processo como um conceito.

Uma terceira forma de compressão ocorre quando utilizamos a linguagem cada vez mais sofisticada para especificar conceitos por meio da definição. Esse é um tipo especial de categorização, em vez de começarmos com um conceito e categorizarmos suas propriedades a situação é inversa, começamos com a definição e deduzimos todas as outras propriedades.

A categorização, o encapsulamento e a definição, são apresentados no Quadro Teórico do Desenvolvimento do Pensamento Matemático como formas de comprimir ideias matemáticas de modo a obtermos um pensamento mais flexível, por meio da abstração estrutural, operacional e formal. Essas três formas de abstração não são independentes, a cada nova forma de abstração são incorporadas as formas anteriores.

O desenvolvimento da geometria começa com a categorização de objetos visuais e táteis. A linguagem permite que esta categorização torne-se cada vez mais refinada por meio de uma sucessão de abstrações estruturais à medida em que as propriedades são reconhecidas, descritas, definidas e, em seguida utilizadas para provar propriedades em geometria.

O pensamento simbólico utilizado na aritmética e álgebra começa com operações usando os números para contar objetos, frações para medir quantidades e representações mais sofisticadas como números inteiros, decimais finitos e infinitos. Em cada uma das etapas ocorre o encapsulamento de um processo aritmético como um conceito de número. Destacamos que, nesse processo, pode ter uma divergência entre aqueles que permanecem na melhor das hipóteses nos procedimentos de contagem e aqueles que desenvolvem um pensamento flexível, o pensamento *proceptual* (TALL, 2013).

Nas operações aritméticas podemos encontrar propriedades e essas podem ser reconhecidas, descritas e definidas como regras da aritmética. As propriedades é que nos permitem falar de números ímpares, números pares, números compostos, números primos, e considerar as relações profundas, como a ideia de que cada número composto pode ser fatorado em números primos. O desenvolvimento dessas ideias envolve novamente o reconhecimento, a descrição, a definição e a dedução de propriedades de construções simbólicas. Assim, o mundo do simbolismo operacional também envolve uma abstração estrutural das propriedades e o uso de símbolos torna-se cada vez mais sofisticado.

Os processos mentais da abstração estrutural operando em objetos para descobrir suas propriedades e abstração operacional operando em objetos para descobrir as propriedades das operações são estendidos a uma abstração formal operando em definições formais para deduzir novas propriedades formais (TALL, 2013).

A abstração formal envolve uma mudança significativa na forma de pensamento, uma vez que a abstração estrutural e a abstração operacional a partir de percepção e ação tornam-se evidenciadas como conceitos matemáticos, a abstração formal é construída essencialmente por definições formuladas lingüisticamente. Inconscientemente, pode continuar a ter ligações com percepção e ação, mas formalmente, oferece uma nova abordagem, universal para a matemática em que os teoremas provados dependem somente de definição e de demonstração.

Tall (2013), representa essas três formas de abstração em um esquema conforme consta na Figura 4.

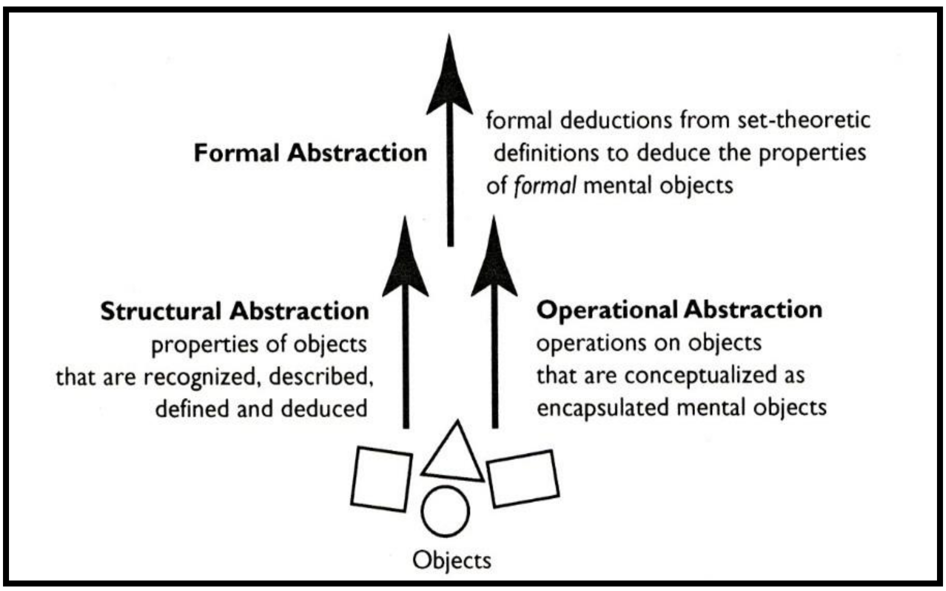

Figura 4: Três formas de abstração (Three forms of abstraction)
Fonte: Tall (2013, p.16)

Esse esquema apresenta um avanço em relação ao esquema apresentado na Figura 3 com o acréscimo da abstração formal, entretanto, não mostra um detalhe que é sutil, mas que faz toda a diferença na forma de pensarmos sobre a evolução do desenvolvimento do pensamento matemático. Este detalhe reside no fato de que cada uma das formas de abstração desenvolve e incorpora as outras formas de abstração.

Com isso, os questionamentos e a resposta suscitada em mim após o estudo do conceito de "corporificação conceitual" precisam ser discutidos. Por uma questão de dar fluidez a leitura os transcrevo: Se as imagens mentais advindas do uso de materiais manipuláveis, como por exemplo do uso do Material Dourado no processo de ensino do Sistema de Numeração Decimal tem origem no pensamento relacionado a "percepção de" e temos como objetivo chegar a "ação sobre", ou seja, na manipulação com símbolos, então temos uma transição na forma de pensamento? Como se faz essa ligação entre as imagens obtidas a partir do uso de materiais manipuláveis e a manipulação de símbolos em aritmética?. e a resposta ao primeiro questionamento me parecia evidente, no Quadro Teórico do Desenvolvimento do Pensamento Matemático há necessidade de uma ligação entre as imagens e a representação simbólica e que se deve fazer é desvelar como se dá essa ligação.

Estes questionamentos e a resposta fazem todo sentido se observados com as lentes da Marta, professora da Educação Básica, que vivenciou situação semelhante no seu processo de escolarização não estabelecendo relação entre as representações realizadas com materiais manipuláveis (canudinhos agrupados de 10 em 10) e a escrita dos numerais e também enquanto professora que repetiu o mesmo procedimento utilizando em sua sala de aula materiais manipuláveis como recurso para o ensino do Sistema de Numeração Decimal e das operações fundamentais vivenciando situações em que alunos não conseguiam fazer a tal transição.

Ao olhar com as lentes de quem queria encontrar uma justificativa para as dificuldades apresentadas no seu próprio processo de aprendizagem do Sistema de Numeração Decimal e das operações fundamentais e para as dificuldades encontradas por seus alunos havia econtrado uma justificativa "perfeita", por meio de um olhar inicial, linear e horizontal inferindo, mesmo que inconsciente, que as dificuldades oriundas eram devido a natureza das abstrações. Entretanto, este é um grande equívoco!

Na Teoria dos Três Mundos da Matemática cada nova forma de abstração incorpora as formas anteriores, portanto, ao se fazer um estudo profundo percebe-se não se tratar de transições entre as formas de abstração, mas da incorporação de novas formas de abstração a partir de uma abstração inicial.

Nesse ponto não encontro agulha, botão, ganchinho ou zíper no palheiro, mas a linha com a qual Tall (2013) tece o Quadro Teórico do Desenvolvimento do Pensamento Matemático direcionando o olhar para construção/elaboração do conhecimento pelo sujeito aprendente a partir do seu ponto de vista.

> O termo "mundo da matemática" é usado aqui com um significado especial. Tem nos sido frequentemente sugerido que este deve ser apenas considerado como diferentes "modos de pensar", em particular essas ideias podem facilmente ser remetidas no que a escola francesa se refere como diferentes "registros", tais como verbal, falado, escrito, gráfico, simbólico, formal, etc. (DUVAL, 2006), ou como diferentes representações no Colégio Americano de Cálculo tais como verbal, numérica, algébrica, gráfica, analítica (TALL; MEIJA-RAMOS, 2009b, p.3, tradução nossa).

Para Tall e Meija-Ramos (2009b, p.3, tradução nossa) "a escolha da palavra 'mundo' é usada aqui deliberadamente para representar não um registro único ou um grupo de registros, mas o desenvolvimento de distintas formas de pensar que crescem mais sofisticadas quando indivíduos desenvolvem novas concepções e comprimem então em conceitos pensáveis mais sutis. O foco do desenvolvimento do pensamento matemático em longo prazo é direcionado a criação de novos *links* e a supressão de aspectos anteriores que não são mais relevantes para desenvolver um mundo cada vez mais sofisticado do pensamento, é nesse sentido que não se faz o estudo do uso de diferentes registros ou representações.

As três formas de abstração: operacional, estrutural e formal dão origem aos Três Mundos da Matemática: Conceitual Corporificado, Operacional Simbólico e Formal Axiomático.

O Mundo Conceitual Corporificado se desenvolve a partir de percepções e ações em objetos físicos e mentais. As imagens mentais são verbalizadas em formas cada vez mais sofisticadas tornando-se entidades mentais.

O Mundo Operacional Simbólico é o mundo das ações físicas que são representadas por procedimentos. Neste mundo alguns alunos podem permanecer em um nível de pensamento processual e outros podem conceber os símbolos de forma flexível, pensamento *proceptual*. Inicialmente esse mundo foi denominado de Mundo *Proceptual* Simbólico para se referir ao tipo de pensamento simbólico desejável, o pensamento simbólico *proceptual*, atualmente abarca os dois tipos de pensamento, o processual e o *proceptual* e é chamado de Mundo Operacional Simbólico.

O Mundo Axiomático Formal é o mundo que engloba definições, teoremas e demonstrações, com o objetivo de construir axiomaticamente um sistema matemático.

De acordo com Tall (2013), cada uma dessas três formas de pensar a Matemática se desenvolve ao longo do tempo, não são hierárquicas e nem estanques e se tornam mais sofisticadas com o uso da linguagem. Apresentamos na Figura 5, o esboço do desenvolvimento dos Três Mundos da Matemática.

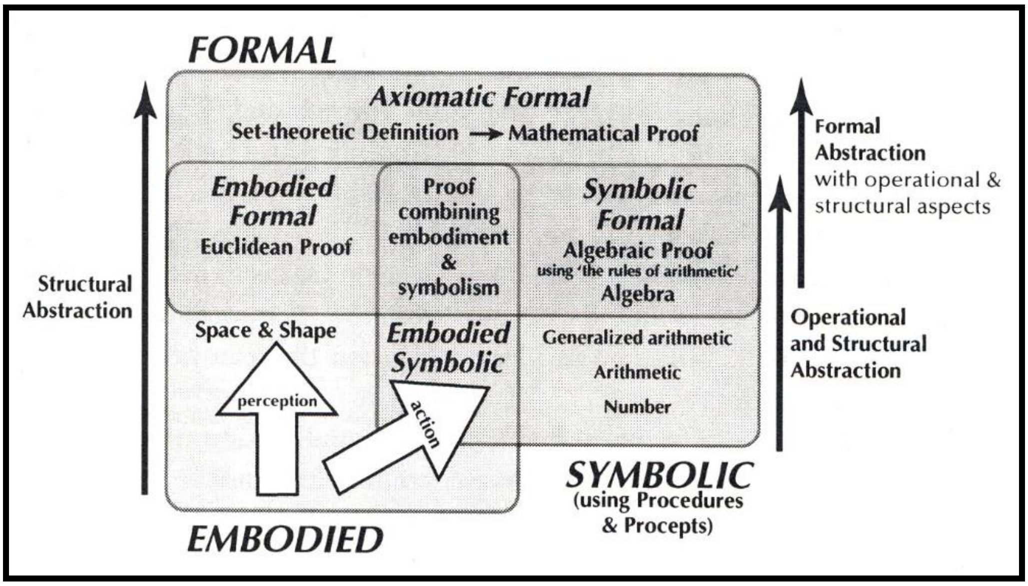

Figura 5: Esboço preliminar do desenvolvimento dos três mundos da matemática
(Preliminary outline of the development of the three worlds of mathematics)
Fonte: Tall (2013, p.17)

Inicialmente os Três Mundos da Matemática eram denominados de Mundo Conceitual Corporificado, Mundo Operacional Simbólico e Mundo Formal Axiomático, mais tarde essas expressões foram comprimidas e os Mundos da Matemática passaram a ser chamados de "Mundo Corporificado", "Mundo Simbólico" e "Mundo Formal". Essa foi apenas uma mudança de nomenclatura que não interferiu no significado, entretanto, possibilitou o uso de uma palavra composta para se referir a transição entre os mundos. Assim, o termo "Corporificado Simbólico" é utilizado para se referir a transição entre o Mundo Corporificado Conceitual e o Mundo Corporificado Simbólico, o termo "Corporificado Formal" para se referir à prova euclidiana e o termo "Formalismo Simbólico" para se referir a uma demonstração algébrica usando as "regras da aritmética" (TALL, 2013).

Em relação a ordem do par de palavras utilizado para designar a transição entre os mundos, Tall (2013) tinha uma dúvida. O que seria mais coerente, utilizar o termo

"Formal Corporificado" ou "Corporificação Formal"? Para Tall (2013), a resposta está na maneira em que o *link* é estabelecido. Se olharmos para a corporificação cada vez mais formal, o mais apropriado é utilizar o termo "Corporificado Formal", da mesma maneira, se olharmos para o simbolismo que se torna mais formal o "Simbolismo Formal" é mais apropriado. No entanto, se olhar o esquema de cima para baixo, o formalismo é subdividido em três formas distintas e pode ser chamado de "Formal Corporificado", "Formal Simbólico" e "Formal Axiomático" (TALL, 2013).

No esquema apresentado na Figura 5 constam setas indicativas de baixo para cima mostrando um crescimento/desenvolvimento do pensamento matemático de forma "natural". A palavra natural está entre aspas por se referir ao quadro evolutivo geral, e não a uma forma de desenvolvimento que se dá naturalmente sem nenhuma interferência do professor.

Tall (2013), ao apontar que é possível uma leitura de cima para baixo nos dá indicativos de uma forma de desenvovimento do pensamento matemático a partir de uma matemática formal. Isso pode nos remeter a uma abordagem de ensino tradicional ou ao que Buriasco (1999) denomina como sendo um *modelo frontal de ensino?* Seria essa a perspectiva sugerida por Tall (2013)?

A resposta é duplamente não. A estrutura do esquema foi organizada com o objetivo de indicar o caminho "natural" percorrido por um indivíduo que usa atributos humanos para construir conceitos matemáticos cristalinos, ou seja, a estrutura matemática estável. É um Quadro Teórico do Desenvolvimento do Pensamento Matemático que indica uma trajetória "natural" que pode ser utilizada como referência tanto para o processo de ensino e aprendizagem escolar quanto para a pesquisa matemática (TALL, 2013).

Como é um quadro de desenvovimento que também se aplica para o desenvolvimento ao pensamento de longo prazo, Tall (2013) o divide em níveis, conforme Figura 6.

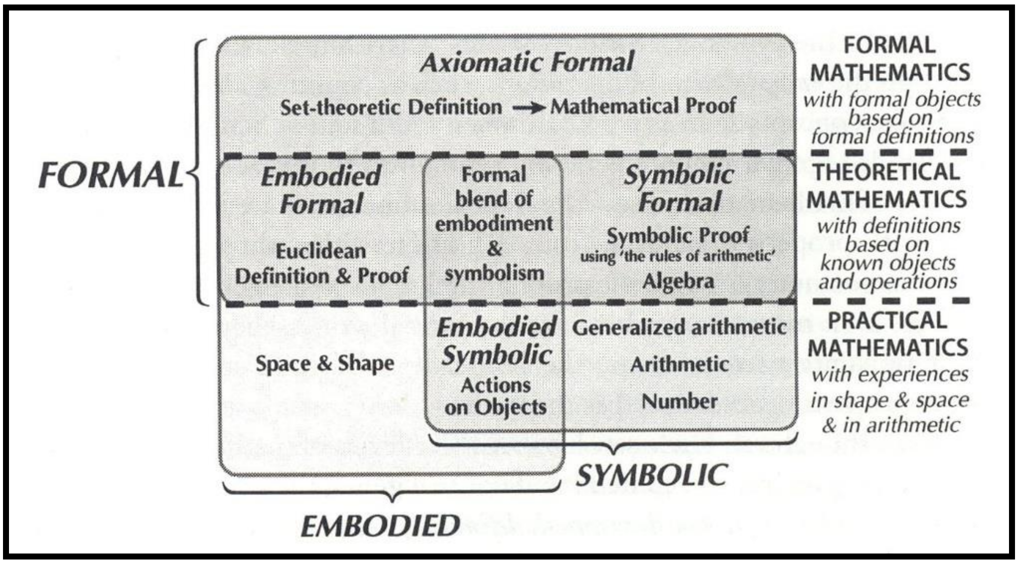

Figura 6: Matemátca prática, teórica e formal (Practical, theoretical and formal mathematics)
Fonte: Tall (2013, p.19)

O quadro do desenvolvimento dos três mundos da matemática, conforme apresentado na Figura 6, "aplica-se, em particular, para o desenvolvimento de raciocínio e demonstração em longo prazo", dividido em três níveis de desenvolvimento que englobam toda a matemática. São níveis sucessivos denominados respectivamente de matemática prática, matemática teórica e matemática formal. (TALL, p. 18, 2013).

Para Tall (2013, p.20, tradução nossa) a distinção entre matemática prática, teórica e formal refere-se a natureza do raciocínio envolvido. A matemática prática "envolve o reconhecimento e descrição de ideias de espaço e forma e a experiência prática de aritmética com base na crescente familiaridade com as operações e os efeitos dessas operações". Um exemplo dessa familiaridade com a artimética pode ser observado quando o aluno percebe que, na multiplicação, a ordem dos fatores não altera o produto ou que a ordem da adição de um conjunto de números não altera a soma.

A matemática teórica inclui níveis mais sofisticados de corporificação e simbolismo, ou seja,

> o uso de propriedades observadas como definições que podem ser usadas como base de dedução e demonstração. Na geometria estas incluem definições de figuras e ideias como a congruência de triângulos para demonstrar teoremas usando prova euclidiana. Na aritmética, propriedades observadas são agora reformuladas como 'regras da aritmética', que então são utilizadas como base para a manipulação algébrica e demonstração de tais relacionamentos como identidades algébricas (TALL, 2013, p.20, tradução nossa).

A matemática teórica é construída a partir das ideias fundamentais envolvidas na matemática prática, como por exemplo, a partir da ideia de que a ordem da adição de um conjunto de números não altera a soma, tem-se a regra da comutatividade a + b = b + a.

A matemática formal[12] envolve o "desenvolvimento de demonstração axiomática formal com base em um conjunto de definições teóricas e demonstração matemática de teoremas" (TALL, 2013, p.19, tradução nossa).

A transição da matemática teórica para a matemática formal pode ser de uma forma "natural" a partir dos mundos corporificado e simbólico, ou de uma maneira "formal" centrando-se em deduções a partir de um conjunto de definições teóricas. Neste trabalho de pesquisa o objetivo não é estudar como se dá essa transição do pensamento matemático elementar (matemática prática e teórica) para o pensamento matemático avançado (matemática formal), mas identificar características de uma abordagem de ensino que possa contribuir para o desenvolvimento do pensamento matemático em longo prazo.

A questão norteadora é: que características possui uma abordagem de ensino que tem como referência a Teoria dos Três Mundos da Matemática?

Antes de responder a essa pergunta é importante termos em mente que todos nós, humanos, viajamos pelos mundos corporificado e simbólico. Eu percebi isso ao traçar minha trajetória de viagem no esquema dos Três Mundos da Matemática. Também, ao traçar essa trajetória tomei consciência de que, a minha viagem acadêmica pelos mundos corporificado e simbólico, pode ser comparada a uma viagem de ônibus com muitas paradas. Em cada parada aprendia um conteúdo matemático, resolvia exercícios e até "problemas"[13].

Muitas vezes conseguia perceber o percurso entre uma parada e outra, como por exemplo, ao estabelecer uma relação entre a adição e a multiplicação visualizando as representações em uma folha quadriculada. Outras vezes resolvia expressões numéricas ou algébricas observando a coerência da estrutura interna do conhecimento por meio da observação da repetição dos mesmos procedimentos. De maneira geral, mesmo que intuitivamente, eu conseguia perceber uma relação entre os mundos corporificado e simbólico, nos níveis da matemática prática e da matemática teórica.

A viagem pelo mundo formal foi diferente. Essa pode ser comparada a primeira viagem de avião por um mundo totalmente desconhecido. Trazia comigo os

---

[12] A escolha de TALL (2013) em relação ao uso do termo "formal" para nomear o terceiro estágio do desenvolvimento do pensamento matemático está associado ao formalismo de Hilbert.

[13] A palavra problemas está entre aspas porque se trata de exercícios com enunciados maiores que, naquela época, assim eram denominados.

apetrechos que havia elaborado nos níveis da matemática prática e da matemática teórica juntamente com alguma autonomia e habilidade de uso, mas esse instrumental não era mais utilizado no mundo da matemática axiomática. Em alguns pontos, é como se tivesse caído de paraquedas, me depararando com derivadas, integrais e análise. Não conseguia compreender, por exemplo, o significado de dx/dy e nem o porque de se fazer os cálculos. Nessa viagem, muitos dos meus colegas desistiram. Descobri que mesmo sem fazer sentido dos conteúdos ensinados o importante era aprender os procedimentos e repetí-los. Consegui meu "passaporte"[14] para exercer a função de professora de Matemática.

Por que contei essa história? Porque uma abordagem de ensino geralmente está vinculada ao tipo de viagem que pode ser oportunizada aos alunos. O esquema dos três mundos da matemática é como se fosse um mapa das três diferentes formas de pensar que deram origem a estrutura de conhecimentos matemáticos que se tem hoje e dos caminhos trilhados para a elaboração da estrutura matemática cristalina que está em constante desenvolvimento. Essa construção também é de cada estudante.

É possível localizarmos as nossas trajetórias de aprendizagem matemática no esquema dos três mundos independentemente do tipo do viagem que foi planejada e/ou realizada, analisar e se posicionar a respeito, entretanto, isso não é tudo. O *framework* dos três mundos da matemática não se resume ao esquema, ao "mapa". Nele também há indicativos para uma abordagem de ensino que oportunize ao estudante uma viagem que faça sentido.

Assim, para responder ao questionamento "Que características possui uma abordagem de ensino que tem como referência o *framework* dos três mundos da matemática?" fiz inventário de coisas que dizem respeito a sala de aula de matemática em 28 artigos e 1 livro. Em um segundo momento, esses dados foram agrupadas em parágrafos que dizem respeito a matemática, currículo, professor, aluno, ensino e aprendizagem, dinâmica de sala de aula e reações emocionais.

Matemática

Para Tall (2010c, p.17, tradução nossa), a "Matemática é uma atividade humana, e, como tal, está sujeita às maneiras em que atuamos como criaturas biológicas e sociais." Ela se desenvolve a partir dos três principais *set-befores*[15], ou seja, dos nossos recursos de reconhecimento, repetição e linguagem.

[14] A expressão "passaporte" está no sentido de obter o certificado de graduação.
[15] recursos humanos essenciais que todos nós compartilhamos.

O primeiro *set-before* relacionado com a nossa capacidade sensorial de reconhecimento de padrões, similaridades e diferenças que são expressas por meio da linguagem ao categorizarmos objetos tais como mesa, cadeira, triângulo.

O segundo se refere a "nossa capacidade motora de repetição que nos permite praticar sequências de ações até que possamos realizá-las automaticamente como operações seqüenciais com pouco pensamento consciente" (TALL, 2013, p.21, tradução nossa) e o terceiro diz respeito a nossa capacidade para a linguagem.

A linguagem nos permite dar nomes a fenômenos, falar a respeito deles e refinar o significado, de modo a torná-los conceitos pensáveis, a respeito dos quais, podemos falar e fazer conexões mentais para construir estruturas de conhecimento mais sofisticadas.

Na matemática, "um conceito pensável que tem uma estrutura inevitável como consequência do seu contexto será chamado de cristalino" (TALL, 2013, p.27, tradução nossa). Utiliza-se o termo cristalino para se referir aos conceitos que têm fortes laços internos que fazem com que eles tenham propriedades inevitáveis em seu contexto. Nessa perspectiva, um conceito cristalino é definido como "um conceito que tem uma estrutura interna de relações restritas que fazem com que tenha propriedades inevitáveis, como consequência do seu contexto" (TALL, 2011a, p.4, tradução nossa).

Para exemplificar o que é um conceito cristalino, Tall (2011a, p.4, tradução nossa) parte do princípio de que "na matemática podemos fazer escolhas".

> Os egípcios escolheram representar números inteiros com ícones para 1, 10, 100 e assim por diante; os babilônios fizeram marcas em tabuletas de argila na base 60; os gregos usavam as 24 letras do alfabeto, além de três letras fenícias para dar 27 símbolos para os números de 1 a 9, 10 a 90 (dezenas) e 100-900 (centenas); os romanos usavam um sistema diferente com símbolos em cinco anos e dez, (I, V, X, L, C, D, M); os maias trabalhavam na base 20, os chineses e os hindus desenvolveram sistemas de base dez, com os algarismos hindu-arábicos tornando-se o sistema escolhido em civilizações ocidentais modernas (TALL, 2011a, p.4, tradução nossa).

Cada civilização não utilizou apenas diferentes notações, mas também diferentes formas de cálculo. "No entanto, apesar dessa variedade de escolha, quando se trata de aritmética, independentemente do sistema de representação que é usado, a aritmética é sempre a mesma. Dois mais dois sempre são quatro. Ninguém pode escolher o resultado cinco" (TALL, 2011a, p.4, tradução nossa). As propriedades são consequências naturais das relações entre os números.

As propriedades flexíveis de números e aritmética estão contemplados na noção de *procept* (GRAY; TALL, 1994a), na medida em que os símbolos operam duplamente tanto como processo quanto como conceito de formas precisas. Nessa perspectiva, não é apenas dois mais dois igual a quatro, mas também, quatro menos dois é igual a dois. O número quatro também é três mais um, ou oito dividido por dois, ou dois vezes dois. Ainda, para fazer o cálculo mental de 8 + 6, um aluno pode pensar 8 + 2 = 10 e 6 - 2 = 4, 10 + 4 = 10. Essa estrutura de conhecimento estável é conhecida como *procept* e esse é o primeiro exemplo de conceito cristalino (TALL, 2011a).

Os conceitos cristalinos fazem parte de toda estrutura matemática, nos três mundos da matemática. Em relação ao mundo simbólico esses são vistos como *procepts* na aritmética. Em diferentes tipos de geometria os conceitos matemáticos têm uma estrutura específica com ligações que dependem do contexto, assim, no mundo corporificado conceitos cristalinos são vistos como objetos mentais. O mesmo ocorre na matemática formal, na qual um matemático pode optar por definir um sistema axiomático para obter axiomas que são desejados, mas, em seguida, as conseqüências dessas definições seguem o contexto especificado por esses axiomas. (TALL, 2011a). Isso sustenta a ideia de que uma estrutura cristalina depende do contexto.

O desenvolvimento dos conceitos matemáticos se dá de forma independente em cada um dos três mundos da matemática? A resposta é não. Para Tall (2013), a história mostra que a ligação entre álgebra e geometria foi um dos momentos decisivos para evolução da matemática. Essa ligação possibilitou que duas vertentes da matemática, uma baseada na corporificação visual e a outra em cálculos simbólicos, se juntassem e se complementassem e a consequência foi uma explosão de novas ideias matemáticas. Nesta perspectiva, "a crescente sofisticação constrói conceitos matemáticos com as relações internas dentro e entre os conceitos em todos os três mundos" (TALL, 2013f, p.4, tradução nossa).

Há uma relação direta entre o desenvolvimento dos conceitos matemáticos e o desenvolvimento da demonstração matemática, ambos têm como alicerce os três *set-befores*: reconhecimento, repetição e linguagem. A construção de conceitos se dá por meio da categorização, do encapsulamento e da definição e estas formas de construção de conceitos dão origem aos três mundos mentais da matemática: o mundo corporificado, o mundo simbólico e o mundo formal.

Embora, em cada um dos mundos, os objetos mentais sejam construídos de maneiras diferentes, os próprios objetos, ou seja, as figuras platônicas na geometria, os números na aritmética e conceitos definidos na matemática formal, todos crescem como estruturas que precisam ser reconhecidas e descritas, então definidas e relacionadas por meio de formas apropriadas de raciocínio e demonstração (TALL, 2009).

A demonstração matemática pode ser concebida a partir de diferentes pontos de vista. A perspectiva adotada no *framework* dos três mundos da matemática, de acordo com Tall, Yevdokimov, Koichu, Whiteley, Kondratieva, Cheng (2012a, p.3, tradução nossa) baseia-se em Mason, Burton e Stacey (1982), ou seja, a ideia de "convencer a si mesmo, convencer um amigo, convencer um inimigo", portanto, uma visão ampla que se aplica ao pensamento matemático em todos os níveis. Na Educação Básica ela aparece, por exemplo, em tarefas cujos enunciados estão relacionados com as expressões "mostre", "justifique" e "explique".

A demonstração matemática é desenvolvida pelos indivíduos de maneiras diferentes em cada um dos mundos. Ela começa no mundo corporificado com experiências para testar previsões, passa para a descrição, depois para a definição verbal e demonstração euclidiana. No mundo simbólico começa com o desenvolvimento de uma demonstração específica (num contexto em particular), em seguida passa para generalização e depois para cálculos gerais e manipulação levando a demonstração com base em regras derivadas de regularidades na manipulação de símbolos. No mundo formal a demonstração é baseada em um conjunto de definições teóricas estabelecidas e demonstração dedutiva (TALL, 2009a).

No desenvolvimento do pensamento matemático em longo prazo, a demonstração matemática acontece nos três níveis: matemática prática, matemática teórica e matemática formal.

> • matemática prática explorando forma e espaço e desenvolvendo a experiência das operações de aritmética. Isso envolve o reconhecimento e a descrição das propriedades, tais como a observação de que a soma dos números não é afetada pela ordem de operação e a prova frequentemente é formulada como demonstração genérica.
>
> • matemática teórica de definição e dedução, como apresentado por demonstração euclidiana na geometria, e da definição das "regras da aritmética" e propriedades, tais como par, ímpar, primo, composto, bem como a dedução teórica de teoremas, como singularidade de fatoração em números primos.
>
> • matemática formal com base no conjunto teórico de definição e dedução. Em pesquisa matemática, matemáticos usam várias combinações de corporificação, simbolismo e formalismo imaginando possíveis teoremas e formulando conjecturas para buscar demonstrações e mudança para níveis cada vez mais sofisticados usando estrutura de um teorema (TALL, 2013c, p.10, tradução nossa).

Embora dividida em três níveis distintos, é importante levar em consideração que a

> demonstração matemática não é o fim da história, os teoremas axiomáticos formais podem levar a *estrutura de teorema* que dotam a teoria com novas formas de corporificação e simbolismo, retornando o pensamento matemático para o mundo mental sensório-motor fundamental das experiências de pensamento e manipulação operacional de símbolos. Isto fecha o círculo para revelar a plena integração dos três mundos o corporificado, o simbolico e o formal e reforça a necessidade de ter um quadro teórico global de pensamento matemático que combina todos os três (TALL, 2013, p.404, tradução e grifo nossos).

Na demonstração formal, a estrutura de um teorema estabelece resultados formais que podem ser interpretados em termos de corporificação e simbolismo. Estes permitem que o pensamento matemático de nível superior combine formalismo, corporificação e simbolismo, misturando os três mundos da matemática em uma única estrutura integrada, como mostra o esquema apresentado na Figura 7.

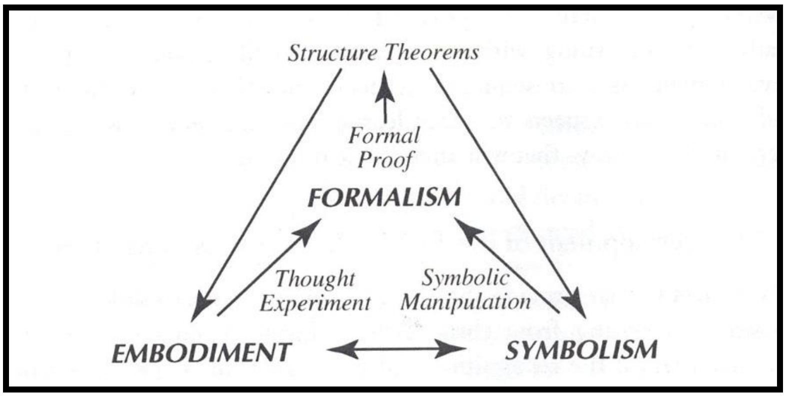

Figura 7: Matemátca prática, teórica e formal
(The full integration of the three worlds of mathematics)
Fonte: Tall (2013, p.404)

Para Tall (2013) é essa interligação entre os três mundos que dá uma coerência para a matemática e sentido ao desenvolvimento do pensamento matemático em todos os níveis.

Convém lembrar que a demonstração matemática em seu mais alto nível é essencial na história do desenvolvimento do pensamento matemático, mas não é o fim, "é o ponto no final de um parágrafo, um lugar para fazer uma pausa e comemorar a demonstração de um novo teorema que, por sua sua vez, torna-se a plataforma de lançamento para um novo ciclo de pesquisa e desenvolvimento" (TALL; YEVDOKIMOV; KOICHU; KONDRATIEVA; CHENG, 2012a, p.33, tradução nossa), assim, a matemática não está pronta e nem acabada, mas em desenvolvimento contínuo.

Sintetizando, nessa perspectiva, a matemática é uma atividade humana em desenvolvimento contínuo, construída a partir dos *set-befores* de reconhecimento, repetição e linguagem. Possui uma estrutura cristalina vinculada a contextos.

Quanto ao uso da Matemática, em longo prazo, as pessoas precisam de diferentes tipos de matemática para atuar na sociedade como indivíduos pensantes. A expressão "indivíduos pensantes" parece estar vinculada com a ideia de cidadão - sujeito matematicamente letrado - que faz parte, que se sente parte e que atua na sociedade.

O "letramento matemático requer matemática prática com alguns *insights* em matemática teórica"(TALL, 2013, p.403, tradução nossa), ou seja, um sujeito para ser letrado matematicamente precisa de conhecimentos matemáticos que fazem parte dos dois primeiros níveis (matemática prática e matemática teórica) e da capacidade de utilizá-los na vida cotitiana, no trabalho e para um estudo mais aprofundado.

Na sociedade há "muitas ocupações e profissões que exigem formas relevantes da matemática prática, os aplicativos podem exigir a matemática teórica, enquanto matemáticos puros criam teorias formais que posteriormente podem ter aplicações práticas e teóricas de valor para toda a sociedade" (TALL, 2013, p.403, tradução nossa), a intenção não é de que todos desenvolvam o pensamento matemático até o nível formal, mas que seja dada a oportunidade a todos e que todos que queiram possam desenvolvê-lo. É nesse sentido que Tall (2013) considera necessário incentivar e dar a oportunidade ao indivíduo para que possa fazer o melhor em sua própria aprendizagem matemática, sem que seja colocado um teto artificial.

Ensino e aprendizagem

Na perspectiva do desenvolvimento do pensamento matemático,

> 'ensinar para o teste [ou prova]', centrando-se em técnicas para obter respostas sem fazer sentido das ideias pode ter consequências adversas em longo prazo no momento em que as regras frágeis desmoronam em circustâncias mais sofisticadas (TALL, 2013, p.111, tradução nossa).

Os processos de ensino e aprendizagem voltados apenas para as técnicas operatórias podem dar a impressão de sucesso, tanto para o professor quanto para o aluno, uma vez que o aluno aprende os procedimentos que são testados por meio de questões rotineiras, ou seja, de questões semelhantes as trabalhadas em sala de aula que na maioria das vezes requer pouca reflexão, e o aluno as resolve adequadamente.

Para alguns, essa impressão de sucesso pode ser acentuada no decorrer dos anos de escolarização, nos níveis da matemática prática e teórica, levando o aluno a aprender o que fazer sem sentir a necessidade de compreender. Essa aprendizagem sem compreensão não é apropriada para o desenvolvimento do pensamento matemático avançado no nível da matemática formal, para o qual torna-se um obstáculo (TALL, 2013). Para outros, a aprendizagem de técnicas sem compreensão pode levar a estruturas de conhecimento instáveis no nível em que se encontram e ao fracasso ainda mais sério já no próximo nível.

Ao pontuar alguns dos efeitos do processo de ensino e aprendizagem centrado em técnicas operatórias em questões rotineiras que exigem pouca reflexão, a intenção não é de que estas sejam extintas. De acordo com Tall (2010c, p.19, tradução nossa) "as operações que são simbolizadas podem ser rotineiras de modo que possam ser realizadas sem muito esforço consciente", porém com sentido.

> Existe uma sinergia na qual percepção e operação agem em conjunto. No entanto, se o *link* entre corporificação conceitual e simbolismo operacional não é feito, então a falta de sentido pode causar à criança aprender as operações de forma mecânica e não conseguir construir flexibilidade de pensamento em longo prazo (TALL, 2010c, p.19, tradução nossa).

No processo de ensino e aprendizagem, o essencial é estabelecer *links* entre ideias corporificadas e ideias operacionais flexíveis de modo que o conhecimento faça sentido.

> O aluno que consegue dar sentido às novas situações desenvolve confiança e responde a *met-befores* problemáticos respondendo ao desafio de conquistar as dificuldades. Em longo prazo, isso pode levar a estruturas de conhecimento cada vez mais ricas e da visão das ideias matemáticas como conceitos cristalinos (TALL; LIMA; HEALY, 2014, p.8, tradução nossa).

Os conceitos cristalinos não ocorrem apenas nos níveis mais elevados do pensamento matemático, eles surgem no pensamento de uma criança quando ela percebe a estrutura *proceptual* flexível da aritmética por meio da compressão corporificada ao invés de procedimentos de passo-a-passo nos cálculos aritméticos. (TALL, 2013c).

> A ideia de "fazer matemática divertida" pode ser um ingrediente importante para aprender a pensar matematicamente, mas é apenas uma solução parcial, pois o principal objetivo deve ser o de melhorar o poder de seu pensamento matemático que tem a sua própria recompensa inerente. (TALL, 2010c, p.10, tradução nossa).

Para Skemp (1979), a aprendizagem torna-se agradável quando a matemática faz sentido, ou seja, quando o aluno resolve problemas interessantes que estão ao seu alcance e quando o mesmo está disposto a aceitar um desafio (TALL, 2010c). Nessa perspectiva, os alunos devem ser encorajados a fazer matemática e desenvolver o seu potencial para o pensamento matemático a partir dos seus conhecimentos atuais.

Tall e Lima (2008); Tall e McGowen (2010) incorporaram ao vocabulário a expressão *met-before* para descrever a estrutura mental que temos agora, como resultados de nossas experiências anteriores.

> A noção de *met-before* refere-se ao efeito da experiência anterior na nova aprendizagem. Um *met-before* específico, não é, em si, de apoio ou problemático, torna-se de apoio ou problemático em uma nova situação, quando o aluno tenta fazer sentido das novas ideias (TALL, 2013c, p.5, tradução nossa).

Ainda, de acordo com Tall (2013, p.5, tradução nossa),

> um met-before problemático surge não apenas no aluno individual, é uma característica generalizada da natureza da própria matemática. Na mudança para um novo contexto, digamos, de números inteiros para frações, ou de números positivos para números negativos, ou da aritmética para a álgebra, a generalização é incentivada pelos *met-befores* de apoio (ideias que funcionaram em um contexto anterior e continuam a funcionar no novo contexto) e impedido por *met-befores* problemáticos (que faziam sentido antes, mas não funcionam no novo contexto).

Nesse sentido, abordagens de ensino que levam em consideração os *met-befores* (de apoio ou problemáticos) e oportunizam a discussão reflexiva de questões no contexto são consideradas apropriadas desde o início da escolarização. Não se trata de escolher a compreensão conceitual ou fluência operacional, o

> pensamento matemático exige ambos. O seu desenvolvimento em longo prazo é reforçado ao fazer sentido das ideias geradoras que atuam como uma base para a compressão de estruturas ricas em conceitos pensáveis ligados entre si de forma flexível em estruturas de conhecimento relacionadas coerentemente (TALL, 2013, p.132, tradução nossa).

O pensamento flexível envolve diferentes maneiras de pensar (e representar) um único conceito cristalino subjacente. Para Tall (2013, p.118, tradução nossa), "o caminho para o desenvolvimento do pensamento flexível em longo prazo não é o mesmo para todos". No entanto,

> A aprendizagem que ocorre em cada nível afeta os níveis subsequentes e a bifurcação entre aqueles que fazem uso flexível do simbolismo para dar sentido à matemática e aqueles que usam formas de corporificação procedimental só pode ampliar, até que, como aqui, aqueles que conseguem resolver equações de segundo grau são uma pequena minoria (TALL; LIMA; HEALY, 2014, p.20, tradução nossa).

Assim há a necessidade de encontrar formas de ensino e aprendizagem que possibilitem a todos os alunos, sujeitos singulares, que possuem diferentes tipos de pensamento, aprenderem matemática de forma que ela tenha sentido e coerência.

> A abordagem natural [...] - misturando ação humana dinâmica e percepção com simbolismo algébrico - não só é somente adequada para as necessidades práticas e teóricas da população em geral para seu futuro papel na sociedade, mas também oferece uma fundação natural para a estrutura cristalina do cálculo como uma ferramenta poderosa nas aplicações e como uma teoria formal em qualquer análise padrão que utiliza números reais, ou análise fora do padrão, em uma mistura extensional que inclui infinitesimais (TALL, 2013, p.363, tradução nossa).

Sintetizando, uma abordagem de ensino e aprendizagem "natural" privilegia as maneiras como pensamos a partir das percepções, das operações e do uso da linguagem para formular ideias cada vez mais sofisticadas. Está vinculada com a ideia de o aluno "fazer sentido pessoal da matemática com coerência".

Currículo

O desenvolvimento do currículo escolar deve oportunizar aos alunos contextos que possibilitem desenvolver gradativamente o pensamento matemático, ampliando o raciocínio matemático. O aluno deve ter a oportunidade de passar de uma matemática menos formal para uma compreensão mais formalizada (TALL, 1989).

Levando-se em consideração que o desenvolvimento do pensamento matemático acontece em longo prazo, no contexto escolar, é necessário pensar em um currículo em longo prazo.

O *framework* dos três mundos da matemática, que envolve corporificação conceitual, simbolismo proceptual e formalismo axiomático, oferece um quadro teórico que permite uma análise da aprendizagem e do pensamento matemático em todos os níveis de escolarização, desde a educação infantil, o que pode contribuir para desenvolvimento de um currículo em longo prazo.

Tall (2013), defende o desenvolvimento de um currículo que leve em consideração os conhecimentos atuais do aluno.

> [...] os *met-befores* de apoio e os problemáticos surgem naturalmente na aprendizagem. No entanto, um currículo tradicional geralmente é formulado em termos de *met-befores* de apoio que precisam ser ensinados como pré-requisitos para novas ideias. Raramente os *met-befores* problemáticos

> aparecem como parte integrante da aprendizagem (TALL, 2013, p.89, tradução nossa).

Na perspectiva do desenvolvimento do pensamento matemático em longo prazo, o objetivo é levar em consideração o contato do aluno com os *met-befores* problemáticos que causam dificuldades e que precisam fazer parte do planejamento do professor de forma a incentivá-lo às novas aprendizagens.

A organização de currículos em relação aos conjuntos numéricos, começando com números naturais, frações, inteiros, racionais, reais e complexos, pode fazer sentido para um *designer* de currículo. "No entanto, para o aluno, estes não são apenas conjuntos de números; eles também têm operações que se comportam de maneiras diferentes, to que pode ser problemático" (TALL, 2013, p.143, tradução nossa).

Por exemplo, a sequência dos números naturais começa com o número 1, o próximo é o 1 acrescido de mais 1 unidade, ou seja, 2, o próximo é o 2 acrescido de mais 1, ou seja, 3 e assim sucessivamente. Entre o número 1 e o número 2 não existe nenhum número natural. As frações podem ser subdivididas tantas vezes quantas forem desejadas, e entre duas frações há muitos outros números. Números naturais são adicionados por meio da junção dos elementos e da contagem, como por exemplo, 4 + 1, 3 + 2, 2 + 2 + 1, construindo uma série de fatos relacionados e formando uma estrutura cristalina. Por outro lado, as frações são encontradas como operações de partilha que envolvem propriedades simbólicas de equivalência e outros procedimentos de adição (TALL, 2013).

Nessa perspectiva, "cada conjunto numérico estendido é uma mistura extensional que envolve aspectos de apoio que permitem generalização e, aspectos problemáticos que são potenciais obstáculos ao progresso" (TALL, 2013, p.143, tradução nossa).

Um currículo centrado no simbolismo que não estabelece relação com as ideias corporificadas pode limitar a visão do aluno. Esse pode aprender apenas a executar procedimentos, apesar de ter uma visão geral do conhecimento matemático historicamente elaborado (TALL, 2008e).

Em síntese, dois aspectos são considerados importantes no desenvolvimento de um currículo de matemática em longo prazo, o equilíbrio entre a fluência processual e *insight* conceitual e os *met-befores* problemáticos e de apoio que devem ser levados em consideração no processo de ensino e aprendizagem.

Dinâmica de sala de aula

A linguagem é fundamental para o desenvolvimento do pensamento matemático, ela nos permite dispor ideias matemáticas em categorias, dizer o que queremos dizer com os conceitos tais como ponto, reta, triângulo, seno, número primo, variável, derivada, integral, álgebra, cálculo, ampliar nossa imaginação para além dos limites da nossa experiência física (TALL, 2013).

Nessa mesma direção, ao considerar que "a noção de *met-before* é formulada com foco no desenvolvimento das ideias do ponto de vista do aprendente" (TALL, 2013, p.88, tradução nossa), o uso da linguagem na interação do professor com os alunos e dos alunos com seus pares torna-se indispensável. É por meio dessa interação que o professor pode desvelar a trajetória de pensamento matemático percorrida pelo aluno e fazer as intervenções.

De acordo com Stacey (2006, p.6, tradução nossa), o "pensamento matemático não está apenas no planejamento de aulas e currículos; ele faz a diferença em cada minuto da aula", logo, o desenvolvimento do pensamento matemático tem relação direta com a ação do professor e dos alunos em sala de aula.

TALL (2013, p.183, tradução nossa) sugere que "um caminho a seguir é uma técnica usada nas escolas primárias no Japão". Essa técnica é denominada de Estudo da Lição[16], que tem como foco não apenas o que os alunos aprendem, mas como eles aprendem. O objetivo é melhorar a aprendizagem, em longo prazo, de cada estudante em sala de aula.

> Estudo da Lição é um formato para construir e analisar o ensino em sala de aula onde os professores e pesquisadores combinam planejar aulas, prever de que modo as aulas planejadas podem ser desenvolvidas, em seguida, realizar as aulas com um grupo de observadores trazendo múltiplas perspectivas sobre o que realmente aconteceu durante a aula (TALL, 2012w, p.1, tradução nossa).

No Estudo da Lição, um pequeno grupo de professores e pesquisadores se organiza de forma colaborativa, para planejar, ensinar, estudar e refinar uma lição de classe (pode ser uma aula ou sequência de aulas). O ponto de partida é a seleção de um curso, tema (ou assunto) e objetivos para a aprendizagem do aluno, seguido da lição de pesquisa que trata dos objetivos imediatos da aprendizagem acadêmica como por exemplo, compreender conceitos específicos e as metas gerais para o desenvolvimento de habilidades intelectuais, hábitos mentais e qualidades pessoais (TALL, VERHOEF, 2010x).

---

[16] Lesson study.

> Esse trabalho culmina em pelo menos dois produtos tangíveis: (a) um plano de aula detalhado utilizável e (b) um estudo aprofundado da lição que investiga as interações de ensino e aprendizagem, explicando como os alunos responderam a instrução, e como a instrução pode ainda ser modificada com base nas provas recolhidas (Cerbin & Kopp, 2006 *apud* TALL; VERHOEF, 2010x, p.4, tradução nossa).

No planejamento do Estudo da Lição, boa parte do tempo é destinada para os professores fazerem uma previsão de como os alunos poderiam responder questões específicas, problemas e exercícios propostos. As aulas são cuidadosamente planejadas com o objetivo de incentivar os estudantes a trabalharem em conjunto (no coletivo) para resolverem um problema intrigante e refinarem suas ideias por meio de uma discussão cuidadosamente organizada. A sequência das aulas é planejada de modo que o estudante possa aprender significativamente. Enquanto um professor ministra a aula, seus colegas de grupo do Estudo da Lição atuam como observadores, no intuito de estudar o que acontece com cada aluno na sala de aula e, na sequência, discutirem a experiência para refinar as aulas de modo que possam ser usadas por outros professores (TALL, 2014).

Para Tall (2012), o Estudo da Lição é uma tentativa:

> • para planejar uma sequência de aulas de acordo com objetivos bem considerados prevendo o que pode acontecer em uma aula;
> • durante o desenvolvimento da aula, para ter um grupo de observadores trazendo múltiplas perspectivas para o que aconteceu, sem ideia pré concebida;
> • de desenvolver princípios e materiais curriculares para melhorar o ensino de matemática para todos os envolvidos (TALL, 2012w, p.2, tradução nossa).

Na sala de aula, o professor propõe situações com as quais os estudantes possam lidar de várias maneiras para que cada um possa desenvolver estratégias e construir sua estrutura de conhecimento à sua própria maneira (TALL, 2013).

> Uma estratégia amplamente utilizada envolve a palavra japonesa *Ha-Ka-Se*, o que significa "Doutor" ou "Professor". Cada sílaba também estabelece *link* para um significado distinto. A palavra japonesa ***ha****yai* significa rápido, ***ka****ntan* significa ambos, fácil e compreensível, e ***sei****kaku* significa preciso e lógico. Rápido, fácil e preciso são palavras utilizadas pelas crianças da escola primária para comparar vários processos. Usar *Ha-Ka-Se* na sala de aula, especialmente nas discussões com toda classe, ajuda as crianças a se acostumarem a comparar procedimentos alternativos para buscar aqueles que são rápidos, fáceis e precisos (TALL, 2013, p.183, tradução nossa).

Há necessidade de discussões na sala de aula. Essas são guiadas pelo professor que atua como mentor e todos os estudantes participam.

Outros indícios de como se dá essa dinâmica de sala de aula podem ser encontrados a partir de um relato de Tall (2013), que apresentamos na sequência.

Tall (2013) inicialmente comenta que em muitos países há um procedimento padronizado para o ensino da adição, subtração e multiplicação em colunas e divisão longa com uma sequência explícita de ações a serem seguidas. No Estudo da Lição, essa sequência não acontece. Ele exemplifica relatando o que observou em uma turma com 40 alunos de uma escola primária japonesa.

Antes, porém, esclarece que, de uma série de aulas que tem como meta o desenvolvimento de estruturas de conhecimento pelas crianças de uma maneira organizada, o relato se refere a apenas uma dessas aulas.

De acordo com TALL (2013), nas semanas anteriores a essa, aula as crianças haviam aprendido todos os produtos com números de um dígito, ou seja, de 1x1 a 9x9. Na aula anterior, o professor havia passado para a multiplicação de vários dígitos e apresentado o problema que consta na Figura 8. Os alunos deveriam encontrar diferentes formas para fazer a contagem usando o que já haviam aprendido.

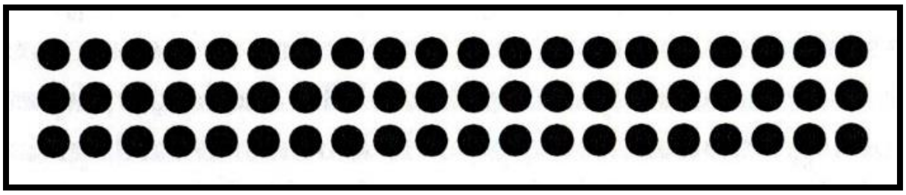

Figura 8: Quantos marcadores? (How many counters?)
Fonte: Tall (2013, p.184).

A aula tinha começado com uma discussão na turma para que os estudantes se centrassem na natureza do problema, incluindo a contagem dos discos em cada linha para encontrar o problema que era multiplicar 20 por 3. Os estudantes trabalharam no problema, anotaram as soluções em suas pastas de trabalho e, na discussão na turma, sugeriram várias estratégias, tais como decompor 20 em 10 + 10 ou 5 + 5 + 5 + 5 ou 9 + 2 + 9. A estratégia geral foi decompor 20 em quantidades com um único dígito, multiplicando cada número que foi decomposto por 3 e adicionando os resultados. Isso serviu de base para a aula relatada por Tall (2013).

Nessa aula, o problema apresentado envolvia o cálculo de 3 fileiras com 23 discos. Tudo começou com um ar de expectativa no momento em que o professor mostrou no quadro, linha por linha, e um aluno comentou que o problema foi descoberto, 23 vezes 3. A discussão então se concentrou no novo problema, confirmando que esse era o cálculo 23 vezes 3. Nesse momento foram distribuídas cópias do problema e os alunos passaram alguns minutos trabalhando individualmente e discutindo com seus colegas. Enquanto isso, o professor caminhou pela sala, conversando com os diferentes grupos de estudantes. Seu objetivo era mais do que simplesmente interagir com eles, e sua estratégia se tornou mais clara na sequência. Ele pediu aos estudantes que apresentassem as soluções “orquestrando” a aula - levando em consideração as soluções em crescente nível de sofisticação.

Como ele tinha passando nos grupos e conversado com os estudantes individualmente, tinha uma boa ideia de que soluções haviam dado. Ele começou solicitando soluções de estudantes que utilizaram a técnica de decompor cada linha em 20 + 3 ou 10 + 10 + 3. Em seguida, uma solução usando 10 + 3 + 10 foi recebida com exclamação e espanto por muitos alunos, surpreendidos pela sua simetria. À medida que as soluções iam sendo apresentadas, ele foi registrando no quadro a partir da esquerda para a direita, criando um quadro completo do desenvolvimento da aula.

Um estudante sugeriu pensar no problema a partir de duas moedas de 10 ienes e três moedas de 1 iene. O professor também fez esse registro no quadro. Em seguida, um estudante levantou-se e observou que até então todos haviam adicionado 60 e 9; ninguém tinha calculado 39 e 30.

A discussão foi ampliada e mais soluções foram apresentadas, tais como decompor 23 em 11 + 12, 9 + 9 + 5 e 11 + 11 + 1. Destas, 9 + 9 + 5 foi mais complicada. Os alunos calcularam 9 x 3 e 5 x 3 e tinham que adicionar 27 + 27 + 15. Isto foi feito decompondo 27 em 20 + 7, adicionando duas vezes o 20 e obtendo 40, adicionando duas vezes o 7 e obtendo 14, somando 40 com 14 e obtendo 54, ao qual o 15 foi adicionado por separação em dezenas e unidades.

O professor escreveu esse cálculo no quadro, seguindo as instruções do estudante. Alguns estudantes acharam fascinante, mas outros achavam que não era rápido nem fácil, e a complicação os tornava mais propensos a falhar.

A turma então mudou para o método de multiplicação de coluna, que foi usado por alguns estudantes da turma que já tinham encontrado a técnica. Eles explicaram o método e o professor escreveu seguindo suas instruções.

$$\begin{array}{r} 23 \\ \underline{\times\ 3} \\ 69 \end{array}$$

A multiplicação em coluna foi discutida com a turma estabelecendo um *link* com a ideia das moedas de 10 ienes e três moedas de 1 iene. Em seguida, o professor apresentou as primeiras imagens decompondo 23 em 2 dezenas e 3 unidades e colocou ao lado da multiplicação em coluna para estabelecer um *link* entre o problema físico e o *layout* simbólico do algoritmo de multiplicação, esclarecendo questões por meio de mais perguntas enquanto trabalhava.

A discussão seguiu, nesse momento, a respeito dos méritos dos vários métodos. Os estudantes escreveram o que tinham aprendido durante a aula, tendo como suporte os registros de todo o desenvolvimento do problema no quadro. Figura 9.

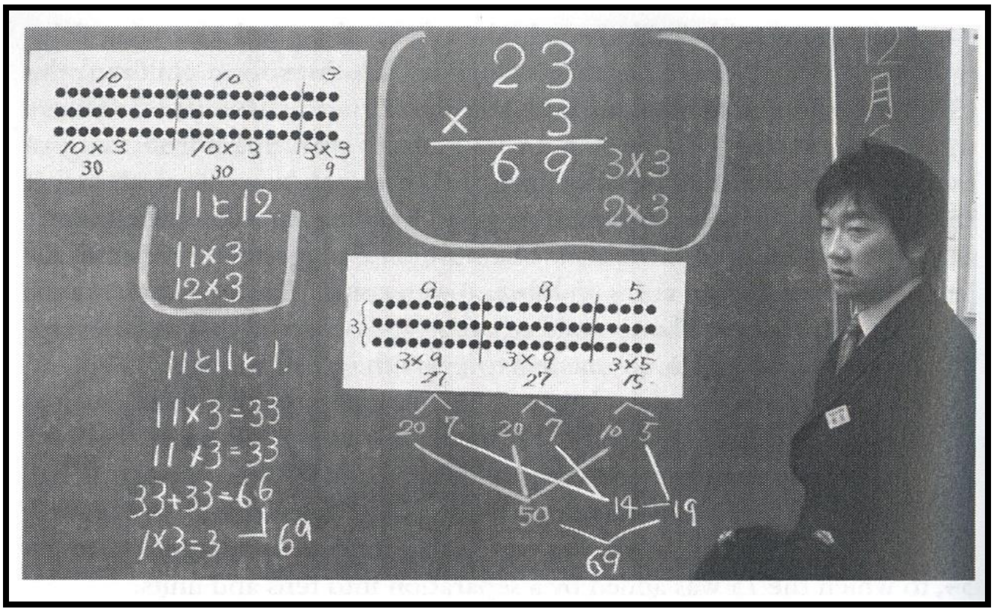

Figura 9: Quantos marcadores? (How many counters?)
Fonte: Tall (2013, p.185)

Essa aula foi uma demonstração exemplar de uma rota flexível misturando corporficação com simbolismo. Iniciando com o *layout* corporificado do problema (3 filas com 23 discos), usando uma técnica conhecida para resolvê-lo e contruindo uma variedade de maneiras de realizar o cálculo até encontar uma maneira rápida, fácil e precisa. De todas as técnicas possíveis, o algoritmo padrão emergiu como uma boa maneira de executar a operação. Os alunos trabalharam individualmente e coletivamente para buscar várias formas de fazer o cálculo e o método de coluna foi revelado como tendo um *link* significativo com a corporificação do problema original (TALL, 2013).

Considerando que essa era uma turma mista, em que alguns alunos que estavam mais avançados e confiantes em seus cálculos decompuseram 23 em 9 + 9 + 5 e multiplicaram cada um dos números decompostos por 3, enquanto outros ainda estavam lutando com as suas ligações numéricas. Entretanto, todos experimentaram algum uso de símbolos e foram encorajados a "ver" o algoritmo padrão como a forma mais adequada, em vez de esta ser apresentada como uma forma para ser aprendida por memorização.

Em síntese, nessa aula:

- ✓ O professor apresenta uma situação desencadeadora do pensar matemático.
- ✓ Os alunos discutem qual é o problema.
- ✓ Os alunos resolvem o problema individualmente e na sequência discutem suas resoluções com seus colegas de grupo.
- ✓ O professor acompanha o trabalho dos alunos nos grupos atendendo os alunos individualmente ou coletivamente e observando as resoluções.
- ✓ Os grupos apresentam suas resoluções para a turma.
- ✓ O professor registra as diferentes resoluções no quadro de forma organizada, iniciando com as resoluções menos formais e seguindo para as mais formais.
- ✓ O professor esclarece dúvidas dos estudantes fazendo mais perguntas.
- ✓ Os estudantes discutem cada uma das resoluções analisando-as quanto a facilidade (compreensão), rapidez e precisão. Essa discussão é mediada pelo professor.
- ✓ Os estudantes escrevem a respeito do que aprenderam na aula tendo como suporte os registros do quadro com todas as resoluções.

Essa ações fazem parte da dinâmica de aula que pertence à abordagem do Estudo da Lição sendo considerada por TALL (2013) um caminho para o desenvolvimento do pensamento matemático, em todos os anos de escolarização, uma vez que leva em consideração os mundos corporificado e simbólico como complementares e uma viagem a partir do ponto em que os estudantes se encontram, ou seja, dos seus *met-befores*.

No processo de transição do nível da matemática formal para a matemática axiomática, também são levados em consideração os mundos corporificado e simbólico e os *met-befores* dos alunos.

> Minha opinião sobre a introdução inicial mais adequada para o cálculo para estudantes é clara como cristal. Uma abordagem formal, com base na definição de limite padrão epsilon-delta, ou nas definições formais envolvendo infinitesimais em que ambos pertencem ao mundo formal, considerando uma abordagem localmente direta, é consistente com a experiência natural de aprendizagem, com gráficos e o uso operacional do simbolismo algébrico. Uma mistura de corporificação e simbolismo fornece uma base fundamental para a noção dinâmica de continuidade e a noção corporificada de linearidade local. Isso permite que a derivada *dy/dx* seja concebida como um quociente de comprimentos (os componentes do vetor tangente). Isso leva naturalmente ao conceito de limite e pode ser utilizado para desenvolver as técnicas do cálculo essenciais em aplicações ou, uma base adequada para a matemática formal da análise matemática padrão ou

> análise não, qualquer uma dessas seria desejável (TALL, 2013, p.383, tradução nossa).

Nessa perspectiva também é desejável que a essência dessa dinâmica de sala de aula seja mantida na fase de transição para o pensamento matemático avançado.

Em síntese, a dinâmica de sala de aula envolve:

- ✓ Uma situação inicial.
- ✓ Identificação do problema.
- ✓ Resolução do problema pelo estudante.
- ✓ Discussão a respeito da resolução em pequenos grupos.
- ✓ Apresentação das resoluções de cada grupo e seu registro no quadro.
- ✓ Discussão a respeito das diferentes estratégias utilizadas.
- ✓ Sistematização dos conhecimento com vistas a mudanças de níveis de pensamento.
- ✓ Registro das aprendizagens.

Papel do professor

Levando-se em consideração que é o professor que conduz a dinâmica de sala de aula, ele exerce um papel fundamental. De acordo com Tall (2011a, p.8, tradução nossa),

> Para nós que ensinamos matemática aos alunos, quer vejamos como propósito apresentá-los para as maravilhas da matemática ou para inspirá-los a descobrir a matemática por seus próprios esforços, certamente necessitamos incentivá-los a pensar de maneira a dar-lhes domínio em operações e prazer no sucesso.

Para incentivar os alunos a potencializar o desenvolvimento do pensamento matemático, o professor precisa estar ciente do desenvolvimento atual do estudante, de como o estudante pode obter êxito com a exploração de novas ideias de maneira apropriada, além de ter uma compreensão ampla das estruturas cristalinas da própria matemática (TALL, 2011a).

O processo de desenvolvimento da aprendizagem com base na experiência anterior ocorre em todos os níveis de ensino, e ele não é apenas dos alunos, mas também dos professores. Nesse sentido, é importante que o professor compreenda como as ideias matemáticas se desenvolveram em sofisticação e como organizar o processo de ensino de forma que o aluno possa construir conhecimentos com confiança e avançar nas aprendizagens futuras ao invés de cair em uma descendente confusão mental.

> Os cursos que ensinamos hoje são afetados por aquilo que foi aprendido antes e vão afetar o que será aprendido no futuro. Embora possa ser uma consequência natural que o que surge em um contexto pode mais tarde vir a ser problemático, é essencial que os professores estejam cientes das consequências em longo prazo de seus próprios ensinamentos e busquem formas de apoio para desenvolver de significados apropriados em contextos mais sofisticados (TALL; McGOWEN, 2013d, p.20, tradução nossa).

Nesse sentido, é importante que o professor compreenda não apenas o desenvolvimento da matemática e aspectos cognitivos e sociais associados, mas também as alterações específicas de acepção na medida em que a matemática se torna mais sofisticada. Essa compreensão "permite ao professor, como mentor, incentivar o aluno a construir sobre os aspectos de apoio que generalizam e repensar aspectos problemáticos que podem cada vez mais impedir a aprendizagem futura" (TALL; McGOWEN, 2013d, p.20, tradução nossa).

> Isso leva-nos a considerar uma abordagem conexionista mais produtiva para a aprendizagem em que o professor atua como mentor em contextos bem projetados para incentivar os alunos a compartilhar a construção de novas ideias de forma que faça sentido para eles (TALL, 2013f, p.15, tradução nossa).

A resolução de problemas é um recurso que o professor, como mentor, pode usar para guiar os estudantes a alçarem patamares mais elevados de pensamento matemático, uma vez que, como mentor, deve estar ciente das estruturas atuais de conhecimentos dos estudantes e das suas necessidades em longo prazo. "O problema é encontrar estratégias [até mesmo na resolução de problemas] que incentivem os alunos a desenvolverem suas próprias competências dentro de uma estratégia organizada e sem retroceder dizendo-lhes o que fazer" (TALL, 2013, p.182, tradução nossa).

Mostrar a solução de um problema é como estragar uma surpresa. Para Tall (2013, p.183, tradução nossa), o maior prazer em trabalhar com alunos na resolução de problemas vem do desconhecimento da solução. Assim, "Se eu não sei a solução, então isso encoraja-os a resolvê-lo por conta própria ou em grupos colaborativos", entretanto o professor não pode perder de vista que a flexibilidade nas resoluções tem como meta buscar uma estratégia de solução bem sucedida.

De acordo com Tall (2013), uma situação-problema pode ser interpretada de maneiras diferentes, e diferentes interpretações podem se tornar problemas diferentes com diferentes soluções. É nas discussões mediadas pelo professor que essas questões podem ser esclarecidas. Aindaé preciso considerar que a

> [...] maneira como um indivíduo reconhece e resolve um problema claramente depende da estrutura de conhecimento atual do indivíduo. Isso inclui os conceitos pensáveis que são apropriados e as conexões entre eles. Problemas estão situados em diferentes contextos que podem sugerir alguns tipos de ataque (TALL, 2013, p.182, tradução nossa).

Nesse sentido, o professor pode usar a análise das resoluções de um problema como um instrumento de avaliação formativa, uma vez que é necessário que os professores tornem-se conscientes dos processos de pensamento dos alunos para uma intervenção adequada.

De acordo com (TALL; McGOWEN, 2013d, p.25, tradução nossa), a avaliação formativa "é uma forma de avaliação que usa os dados adquiridos para adaptar a instrução para melhor atender às necessidades dos alunos".

Ao conhecer os *met-befores* problemáticos que impedem o desenvolvimento do aluno, o professor pode procurar outras estratégias de ensino para que ele (o aluno) dê sentido a novas situações, de novas maneiras. Ao conhecer os *met-befores* de apoio, o professor pode incentivar os alunos a generalizarem. Ter uma visão panorâmica da matemática (da estrutura cristalina) e identificar as necessidades de cada aluno pode possibilitar que o aluno continue suas viagens sem interrupção.

Em síntese, nesse quadro teórico, o professor como mentor é alguém que tem um amplo conhecimento do seu campo de atuação e que orienta e acompanha o aluno no seu desenvolvimento, exercendo a função de guia.

Papel do aluno

Os alunos seguem diferentes trajetórias de desenvolvimento do pensamento matemático.

> Nós vimos [...] que já existe uma "clivagem proceptual" entre aqueles que permanecem fixos nos rígidos procedimentos de contagem e aqules que se lembram de fatos conhecidos e os usam para derivar outros fatos com maior fluidez[17] (TALL, 2013, p.118, tradução nossa).

O caminho para o desenvolvimento do pensamento matemático flexível em longo prazo também não é o mesmo para todos os alunos. Antes mesmo de as crianças chegarem à escola, elas já construiram individualmente sua própria maneira de fazer sentido com base na experiência anterior e estão propensas a reagir de formas diferentes a cada nova

[17] Vimos, no Capítulo 2, que já existe uma "clivagem proceptual" entre aqueles que permanecem fixos nos rígidos procedimentos de contagem, e aqueles que se lembram de fatos conhecidos e os usam para derivar outros fatos com maior fluidez.

situação que lhes é apresentada. Ainda, de acordo com Tall (2013), elas geralmente nascem com uma atitude positiva para a aprendizagem.

No ambiente escolar, o aluno precisa ter disposição para aceitar o desafio que lhe é proposto e assumir a responsabilidade por sua própria aprendizagem, o que inclui o desenvolvimento de seus métodos próprios para a resolução de problemas (TALL, 2010c). Nessa perspectiva, temos um indício de que o aluno é quem constrói seu conhecimento a partir de situações interessantes e que estejam ao seu alcance, e essa construção vincula-se à descoberta de relações matemáticas estáveis.

> A noção de *procept* é o nosso primeiro exemplo de um "conceito cristalino" em que as relações <u>são descobertas pela criança.</u> Uma vez que a criança percebe que o número de itens em uma coleção é independente do método de contagem, reunindo a coleções separadas, diz um conjunto de 5 objetos e outro de 4 objetos, então o número total de objetos é de 5 + 4, que sempre a quantidade 9. O resultado é uma questão de fato, não de escolha. É parte de um sistema muito mais rico de relações, nas quais tirando 5 de 9 deve deixar 4, ou vendo que 5 + 4 é um a menos do que 5 + 5, em que isto pode ser visto como sendo 10 (duas mãos cheias de dedos), assim 5 + 4 é um a menos do que 10, que é 9. (TALL, 2013, p.46, tradução e grifo nossos).

À medida que o aluno encontra/descobre relações imanentes nos "conceitos cristalinos", ele constrói seus próprios "conceitos cristalinos" desenvolvendo suas estruturas de pensamento matemático.

Nessa perspectiva, o aluno é um sujeito ativo, participativo que constrói suas estruturas de pensamento a partir do seu conhecimento atual.

Reações emocionais

Quando a professora Buriasco, em um de nossos encontros de orientação, perguntou: Você está gostando do estudo que está fazendo? Respondemos que sim. Esse sim não era um simples sim, ele estava carregado de emoção - um misto de alegria por termos encontrado algumas respostas para nossas inquietações pessoais e uma inquietação diante do desafio de encontrar relações entre o Quadro Téorico do Desenvolvimento do Pensamento Matemático de Tall e a abordagem da Educação Matemática Realística (RME). Por que aceitamos o desafio mesmo sabendo das limitações? O que teria por trás desses sentimentos?

Faz sentido pensarmos nas reações emocionais no contexto de sala de aula de matemática, uma vez que o pensamento matemático afeta e é afetado pelas emoções. Se, de uma lado, está o prazer de sentir poder para resolver um problema complicado; de outro, está a ansiedade pelo sentimento de incapazcidade de fazer matemática sob pressão ou até mesmo de fazer qualquer matemática (TALL, 2013).

Tall (2013), considera diferentes investigações a respeito da ansiedade matemática, mais especificamente nos Estados Unidos, que revelam uma variedade de fontes possíveis, entre elas: os atributos pessoais de confiança ou insegurança; as atitudes dos pais, professores e colegas; ensino inadequado; ou má preparação para exames; mas seu estudo tem como foco principal a relação do indivíduo com a matemática em si, fundamentado em Skemp (1976, 1979).

Para Skemp (1976), há dois tipos distintos de compreensão: a compreensão instrumental, que diz respeito ao como efetuar operações matemáticas, e a compreensão relacional, que envolve saber o porquê. Cada um desses dois tipos de compreensão desempenha diferentes papéis: a compreensão instrumental muitas vezes é mais rápida, é de curto prazo e dá resultados imediatos em provas/exames, e a compreensão relacional tem consequências em longo prazo na construção de estruturas de conhecimento ricamente conectadas e pode envolver a ação de lidar com conceitos mais sutis. Por exemplo, para aprender a multiplicar dois números negativos, pode ser mais rápido aprender a regra "menos vezes menos dá mais" do que considerar todas as implicações envolvidas no sentido da operação em geral.

> Ambas, a compreensão instrumental e a relacional, podem dar prazer. Por exemplo, a matemática instrumental é prazerosa quando ela permite que o aluno tenha sucesso em executar bem cálculos matemáticos; a matemática relacional é prazerosa quando ideias se encaixam de maneira significativa. Por outro lado, ambas também podem causar problemas emocionais: aprendizagem instrumental pode causar ansiedade ou medo do fracasso, quando os cálculos se tornam complicados demais; compreensão relacional pode envolver confusão ou frustração quando a matemática não faz sentido (TALL, 2013, p.119).

É importante observarmos que o prazer não está relacionado exclusivamente com determinado tipo de compreensão matemática. Enquanto estudante dos Anos Iniciais da Educação Básica, sentíamos alegria e prazer em preencher cadernos e mais cadernos com a sequência numérica e resolver listas de operações de adição e subtração - compreensão instrumental, ao mesmo tempo que não demonstrava interesse pela resolução de problemas não convencionais - compreensão relacional. Passados alguns anos, havia alegria e prazer em resolver problemas de Física que me desafiavam e não tínhamos interesse em resolver lista de exercícios repetitivos. Prazer e ansiedade parecem estar relacionados com os objetivos.

Skemp (1979) construiu uma estrutura teórica com o objetivo de esclarecer a questão das reações emocionais envolvendo a ideia de objetivos (que o aluno quer alcançar) e também antiobjetivos (que o aluno deseja evitar). Há diferentes emoções relacionadas com os objetivos e antiobjetivos. Na Figura 10, Skemp (1979) indica, representando por setas, as emoções sentidas quando estas se movem em direção a um objetivo, ou que se distanciam de um objetivo ou antiobjetivo, e a sensação global do indivíduo ao ser capaz de atingir um objetivo, ou evitar um antiobjetivo, representando por rostos sorridentes a sensação positiva e por rostos carrancudos a sensação negativa.

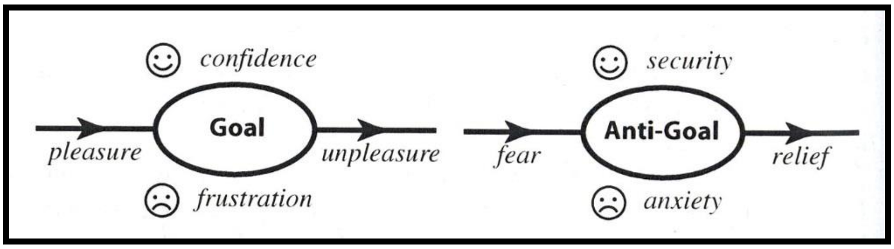

Figura 10: Emoções associadas com objetivos e anti-objetivos
(Emotions associated with goals and anti-goals)
Fonte: (TALL, 2013, p.120).

Quando um aluno acredita que o objetivo é realizável/atingível está impregnado com um sentimento de confiança, sentimento que pode alterar para frustração se, posteriormente, o objetivo for difícil de ser alcançado. Essa frustração sentida por um sujeito confiante provavelmente funcionará como um incentivo positivo para que ele redobre o esforço para atingir o objetivo. Ao mover-se em direção a um objetivo o sentimento é de prazer e, ao afastar-se dele, o sentimento é de desprazer[18].

De acordo com Tall (2013, p.121),

> Lidar com um antiobjetivo é bastante diferente. De acordo com Skemp, um antiobjetivo que alguém acredita que pode evitar dá uma sensação de segurança, mas, quando não pode ser evitado, a emoção torna-se a ansiedade. Mover-se a um objetivo incute um sentimento de medo, enquanto se afastando dá alívio.

Isso revela a diferença entre as emoções positivas relativas aos objetivos que são considerados atingíveis e as emoções negativas relacionadas com os antiobjetivos que oferecem, na melhor das hipóteses, uma sensação de segurança e alívio e, na pior das hipóteses, um sentimento de ansiedade e medo (TALL, 2013).

Essa diferença também é perceptível nas aulas de matemática. Alguns alunos constroem uma atitude positiva com a confiança de que podem resolver problemas em

[18] De acordo com (TALL, 2013, P. 120) um termo usado na análise freudiana para denotar o oposto do prazer (a term used in Freudian analysis to denote the opposite of pleasure).

longo prazo. Para Skemp (1979), esse prazer não é algo que se deve procurar em si, mas um estado de estar ciente do progresso realizado em direção a um objetivo desejado. "Segundo o autor a aprendizagem matemática torna-se prazerosa fazendo sentido da matemática e os problemas interessantes que estão dentro do alcance do aluno disposto a aceitar um desafio" (TALL, 2013, p.121). Assim,

> O prazer que decorre da compreensão relacional vem crescendo mais poderoso ao ser capaz de dar sentido às ideias e construí-las em estruturas de conhecimento ricas e flexíveis. Um aluno que crie confiança por meio do sucesso não ficará satisfeito se um problema particular aparentar ser mais difícil do que o esperado, mas a frustração experimentada é mais propensa a provocar uma determinação de encontrar uma maneira de resolver a dificuldade, em vez de qualquer receio inicial de fracasso (TALL, p. 121, 2013).

Se a frustração não for resolvida, existem duas possibilidades distintas: 1) Substituir o objetivo frustrado de entendimento relacional por um objetivo mais pragmático de aprendizagem de procedimentos para passar em uma prova, por exemplo, o que pode dar a sensação de sucesso, especialmente para aqueles que têm pouco interesse em matemática em si, mas precisam de uma qualificação em matemática para outra coisa. 2) Mudar drasticamente do objetivo de sucesso para o antiobjetivo na expectativa de evitar o fracasso (TALL, 2013). Ainda,

> as reações emocionais têm efeitos em longo prazo no desenvolvimento pessoal dos alunos, incentivando alguns a construir sua confiança para desfrutar o desafio de ideias mais sofisticadas, enquanto outros são impedidos em seu progresso e devem recorrer a procedimentos de aprendizagem sem significado, ou tornar-se descontentes e desenvolver ansiedade matemática (TALL, 2013, p.118, tradução nossa).

Vários são os fatores envolvidos no desenvolvimento da ansiedade matemática, "tais como pais e professores, passando aos alunos suas próprias ansiedades, pensamos que muitos fatores que são identificados são sintomas de ansiedade, não a fonte original" (TALL, 2013, p.124). Então, qual seria a fonte original da ansiedade matemática?

Antes de responder esse questionamento, é importante destacar que, independentemente de qual seja a fonte de dificuldade, um ciclo de dificuldades pode ser construído,"no qual os alunos ansiosos começam a evitar a matemática ou a esforçarem-se menos, deixando lacunas significativas no seu conhecimento, causando dificuldades crescentes em tópicos mais avançados, reforçando a sua ansiedade e aprofundamento de seus problemas" (TALL, 2013, p.123).

Buscando combater esse problema, o Conselho Nacional de Professores de Matemática[19] propôs uma abordagem positiva para o ensino valorizando a matemática em suas aplicações. Tall (2013, p. 124) considera que "é natural focar o lado positivo do pensamento matemático e buscar a compreensão relacional que pode vir da participação dos alunos na sua própria aprendizagem". Assim, os alunos podem ganhar confiança ao resolver problemas, comunicar ideias, aprender a raciocinar, desenvolver flexibilidade na resolução de problemas, vontade de perseverar e assim por diante, diferentemente da aprendizagem instrumental que exerce pressão sobre o aluno e tem o potencial de causar ansiedade. Ainda, segundo Tall (2013), implementar atitudes positivas, sem procurar a origem do problema, é apenas parte da solução.

Tall (p.125, 2013) aponta que, na pesquisa desenvolvida por Ashcraft & Kirk (2001), eles "encontraram uma correlação significativa entre menor memória de trabalho e maior ansiedade matemática". Isso indica que a limitação da memória de curto prazo é compatível com as dificuldades encontradas pelos alunos ao lidarem com aspectos mais complicados da matemática.

> Em um extremo está a criança que tem dificuldade em manter informações suficientes na memória a curto prazo, até mesmo ser capaz de compreender o problema, muito menos resolvê-lo. No outro extremo está a criança talentosa, que tem um sentido de ideias que permite que ele ou ela compreendam os princípios gerais que fazem o pensamento matemático essencialmente simples (TALL, 2013, p.125).

Na aritmética, por exemplo, as operações se tornam mais gerenciáveis quando elas são compactadas em fatos lembrados e processados de forma mais eficiente. Como os alunos apresentam diferentes formas de pensar, tem-se a "divisão *proceptual*" entre aqueles que permanecem fixos em procedimentos de contagem e aqueles que desenvolvem estruturas de conhecimento mais eficientes em aritmética. "Isso envolve uma segunda fonte de ansiedade causada pela incapacidade de condensar operações matemáticas em conceitos que permitem cálculos flexíveis em aritmética e manipulação flexível de símbolos em álgebra" (TALL, 2013, p.126).

Um momento de reflexão: todos nós nascemos com os três *set-befores*: capacidade para reconhecer, repetir e desenvolver a linguagem, ou seja, com dispositivos que nos permitem fazer Matemática. Nesse sentido, todos nós podemos construir nossos conceitos matemáticos cristalinos. Esses conceitos são construídos com base nos conceitos cristalinos construídos pela humanidade, entretanto a forma como cada um de nós pensa/dá sentido à

[19] National Council of Teachers of Mathematics (NCTM).

Matemática é diferente podendo ser mais voltada para os procedimentos ou para estruturas de pensamento flexíveis. Considerando ainda que é função da escola ensinar Matemática, qual seria uma maneira de superar essa dificuldade?

Para Tall (2013), incentivar os alunos a trabalharem no coletivo, compartilharem ideias e construírem significados por si mesmos são atitudes positivas e úteis - coerentes com os princípios de NCTM mas conhecer os *met-befores* problemáticos que causam reações emocionais negativas que impedem a aprendizagem.

> Quando o aluno encontra novas ideias em matemática, elas podem envolver alguns aspectos que são compatíveis com a experiência anterior do aluno e outros aspectos que são diferentes e podem ser problemáticos. Enquanto aspectos de apoio (tais como experiências com as operações gerais de aritmética) podem habilitar o aluno a generalizar novas situações (como usar as regras de aritmética em álgebra), aspectos problemáticos (por exemplo, a ideia de uma equação como um equilíbrio) podem causar conflitos que impedem uma compreensão coerente de novas ideias (como resolver uma equação envolvendo quantidades negativas) (TALL, 2010c, p.1-2, tradução nossa).

Os *met-befores* problemáticos interferem na aprendizagem quando os estudantes utilizam velhas ideias de generalização em novos contextos, como nos casos da introdução do ensino de frações, da noção de números negativos, da transição da aritmética para a álgebra, das potências fracionárias e negativas, dos números reais e limites, dos números complexos e da raiz quadrada de -1, entre outros.

Conhecer os *met-befores* de apoio e os problemáticos possibilita ao professor planejar tarefas e prever ações da dinâmica de sala de aula que favoreçam o pensar ou o re(pensar) do aluno a respeito da tarefa, da ideia inicial, da ideia envolvida no contexto atual. Assim,

> Ao enfatizar essas crenças anteriores (tais como "tirar torna menor"), pode-se trabalhar a partir de uma posição de confiança em que as ideias anteriores continuam a funcionar da mesma forma na situação original, mas necessitam de modificação específica para lidar com o novo (TALL, 2010c, p.17).

Ainda, para Tall (2010c, p.17),

> embora muitos pesquisadores e *designers* de currículo falem de estudantes que têm "equívocos" e "cometem erros", existe uma clara diferença entre cometer um erro talvez por uma falha aritmética, e fazer uma suposição que foi perfeitamente satisfatória em uma situação anterior, mas que agora requer um tratamento diferente .

O chamado "erro" é algo que nos vem incomodando ha bastante tempo. Ainda temos recordações, enquanto estudante dos Anos Iniciais de escolarização, de quando a professora dizia "apague essa conta e arrume". O fato de falar "apague" significava que algo estava errado, no entanto, em nossa percepção não havia nada de errado, havíamos seguido rigorosamente a primeira instrução da professora "sempre tiramos o maior do menor". Ao nos deparar com o artigo de (TALL; McGOWEN, 2010b), essas coisas tomaram conta do meu pensamento. Nessa perspectiva, no algoritmo da subtração:

$$\begin{array}{r}43\\ \underline{27}\end{array}$$

Se o estudante descobriu, na primeira coluna, que a diferença entre 4 e 2 é 2, e que na coluna unidades, a diferença entre 3 e 7 é 4 podemos considerar que parte

> deste fenômeno envolve *met-befores* de suporte, tais como o conhecimento preciso das relações entre os números. No entanto, o grande problema é o *met-before* problemático, pois a velha ideia da diferença já não funciona nesse contexto. Isso não é simplesmente uma questão de o aluno "cometer um erro". Aqui o aluno está usando uma concepção bem formada de que, para encontrar a diferença, toma-se o número menor a partir do maior. Isso funciona com números inteiros, mas não com o valor lugar. O aluno está agora em um contexto que requer apoio e motivo para compreender uma nova situação, e não simplesmente uma oportunidade de se dizer para ele "corrigir seus erros" e seguir em frente no caminho escorregadio para tornar-se inseguro acerca da matemática (TALL; McGOWEN, p. 5, 2010b, tradução nossa).

Assim, se olharmos do ponto de vista do professor, há um "erro", um desvio em relação ao "padrão de resolução esperado", um "equívoco", mas se olharmos do ponto de vista do aprendente é uma etapa no processo de reinvenção do conhecimento, uma maneira de lidar que pode ser adequada ao contexto ou não. Nessa situação, o uso do termo erro ou equívoco não é útil, "ele sugere uma deficiência no pensamento da criança que pode causar sentimentos negativos e possível ansiedade" (TALL; McGOWEN, p.5, 2010b, tradução nossa). Podemos nos perguntar: Em que situação temos um erro?

> Para se ter um erro, primeiro é necessário se ter uma concepção. "Estes *met-befores* são pré-concepções, no sentido de que eles são aspectos que foram experimentados antes da necessidade de uma nova concepção e foram úteis no contexto anterior". É por isso que acentuar o positivo (o que funcionou no contexto anterior) e estudar a forma de olhar para as novas ideias de uma maneira diferente é que é mais apropriada para a nova situação (TALL; McGOWEN, p.5, 2010b, grifo e tradução nossos).

É nessas pré-concepções que, às vezes, os alunos se baseiam, assim como o estudante que havia tomado como base a informação de que na subtração de números com um algarismo "sempre tiramos o maior do menor" e utilizava essa mesma regra em uma outra subtração - em um outro contexto, agora envolvendo dois números com dois algarimos, o algoritmo na vertical, a compreensão das regras do sistema de numeração para utilizar o recurso da "destroca" em uma fase de construção do conhecimento. “Ao considerar tanto os aspectos positivos quanto os negativos da emoção em matemática, temos uma oportunidade melhor de entender por que os alunos desenvolvem ansiedade matemática e encontrar formas de incentivá-los a buscar o sucesso” (TALL, 2013, p.130).

Como passamos a vida aprendendo matemática, somos confrontados com as mudanças de sentido que incorporam tanto os aspectos de apoio quanto os problemáticos. Nesse sentido, não se pode esquecer dos aspectos negativos e desenvolver conceitos totalmente coerentes em todos os momentos, mas buscar discutir as diferenças, as semelhanças encontradas em cada contexto.

RME E TALL

Na base do processo de elaboração do esquema dos Três Mundos da Matemática está o conhecimento matemático sistematizado. Nessa perspectiva, estudar matemática no contexto escolar é estudar o produto da construção do conhecimento matemático acumulado ao longo dos anos? Antes de responder a essa questão, vamos relembrar a ideia de conceito cristalino. Para responder a questão "A matemática é algo puro e abstrato que transmitimos aos nossos alunos, ou é algo que eles constroem por si?, (TALL, 2011a, p.1, tradução nossa) Tall cria a expressão conceito cristalino e a define como sendo "um conceito que tem uma estrutura interna de relações restritas que fazem com que tenha propriedades inevitáveis, como consequência do seu contexto" (TALL, 2011a, p.4, tradução nossa). Essa expressão é utilizada por ele para se referir a uma estrutura estável que faz parte de um corpo de conhecimento matemático, evidenciando, assim, de um lado, que a matemática possui um corpo de conhecimentos e, de outro, um indicativo mais pedagógico, ao apontar que "A noção de *procept* é o nosso primeiro exemplo de um ‘conceito cristalino’ em que as relações são descobertas pela criança" (TALL, 2013, p.46, tradução nossa). Nesse contexto, a palavra "descobertas" parece não estar vinculada à ideia de que a matemática é algo abstrato a ser repetido pelo estudante.

Tall (2011a, p.7, tradução nossa) não percebe a visão platonista da matemática como sendo independente do pensamento humano,

> porque eu posso ver como o platonismo surge naturalmente a partir de processos de pensamento humano como a criança amadurece na imaginação, concentrando-se em propriedades particulares de espaço e forma, imaginando conceitos como pontos com posição, mas sem dimensão, ou linhas de comprimento sem largura".

Aqui a palavra "descobertas" está mais vinculada à ideia de ação mental do aluno no processo de aprendizagem desse corpo de conhecimentos, como um sujeito ativo no desenvolvimento de suas estruturas de pensamento matemático.

É importante lembrar que, na Teoria dos Três Mundos da Matemática, o enfoque do estudo está mais no aspecto cognitivo, entretanto, Tall (2013), como matemático interessado em saber como as pessoas pensam matematicamente e que tem trabalhado com estudantes de todas as idades em diferentes situações e culturas, não exclui a influência dos aspectos sociais ao afirmar: "Eu me importo muito sobre como indivíduos em diferentes circunstâncias de trabalho fazem sentido da matemática" (TALL, 2011a, p.7, tradução nossa), entretanto esse não é seu foco de estudo.

Levando-se em consideração a ideia de que os conceitos cristalinos estão vinculados a um corpo de conhecimentos matemáticos e que esse corpo de conhecimentos também é chamado de matemática, podemos dizer que, nessa perspectiva, a matemática é um produto não acabado, mas em contínua construção, de conhecimentos matemáticos; e que ela possui um corpo de conhecimentos elaborados. Essa é uma ideia que diz respeito à matemática e não está diretamente vinculada à ideia de ensino e/ou aprendizagem da matemática escolar.

Para Tall (2013), um processo de ensino e aprendizagem centrado em técnicas operatórias com o objetivo de dar respostas esperadas em testes e/ou provas não é apropriado, embora, muitas vezes, os envolvidos nesse processo tenham a falsa ideia de sucesso escolar. Para ele, esse "sucesso" pode ter consequências adversas a longo prazo. Um processo de ensino apropriado é aquele que oportuniza ao aluno dar sentido pessoal à matemática com coerência, envolvendo a construção de estruturas de pensamento *proceptual*. No ensino, a Matemática pode ser vista como um processo ou uma atividade que é desenvolvida pelos estudantes. As expressões "pensar matematicamente", "desenvolvimento do pensamento matemático" nos dão essa ideia de movimento, de algo a ser construído, elaborado, descoberto pelo estudante.

Portanto, sim é uma resposta plausível para a questão "Estudar matemática no contexto escolar é estudar o produto da construção do conhecimento matemático acumulado ao longo dos anos?" na perspectiva da Teoria dos Três mundos da Matemática. Entretanto, essa não parece ser a questão principal. A questão é: "Como a matemática pode ser ensinada e aprendida de forma que faça sentido para o sujeito?" Nessa direção, a ideia de construção do conhecimento é o fio condutor que liga a matemática enquanto um corpo de conhecimento matemático historicamente produzido, e o processo de ensino e aprendizagem da matemática escolar.

Na perspectiva da RME, "o que os seres humanos têm de aprender não é a matemática como um sistema fechado, mas sim como uma atividade, processo de matematização da realidade e, se possível, mesmo de matematizar a matemática. (Freudenthal, 1968, p.7). A matemática pode ser vista tanto como um sistema fechado quanto como atividade.

Para Freudenthal (1979, p. 321), a

> Matemática é uma actividade humana simultaneamente natural e social, tal como a palavra, o desenho e a escrita. Figura entre as primeiras actividades cognitivas conhecidas e foi a primeira disciplina a ser ensinada, mas evoluiu

> e transformou-se sob a influência das modificações sociais, bem como a sua Filosofia e a maneira de ser ensinada. (*apud* TREVISAN; BURIASCO, 2015, p. 169).

A RME baseia-se na ideia de Matemática enquanto atividade humana. As situações propostas devem ser possíveis de serem imaginadas pelos estudantes e oferecer-lhes oportunidades para a matematização, e " o resultado do processo de matematização é um organizado corpo de conhecimento. Regularidades, padrões de relações e conexões são encontrados" (TREFFERS, 1987, p.63, tradução nossa).

O fio condutor – ideia de construção/elaboração do conhecimento matemático pelo estudante - que liga a matemática enquanto um corpo de conhecimento matemático historicamente produzido ao processo de ensino e aprendizagem da matemática escolar no quadro teórico do desenvolvimento do pensamento matemático de Tall (2013) é o mesmo que fundamenta a RME.

Identificado o fio condutor comum à abordagem de Ensino da RME e ao Quadro Teórico do desenvolvimento do Pensamento Matemático de Tall, na sequência discutiremos os "pontos" que se assemelham, que diferem, que se complementam, que possibilitam outras compreensões.

1. Matemática

No quadro téorico do desenvolvimento do pensamento matemático de Tall, a matemática é concebida como uma atividade humana do ponto de vista genético, ou seja, como atividade desenvolvida a partir dos *set-befores* de reconhecimento, repetição e linguagem que são desenvolvidos ao longo da nossa vida. Na RME, a matemática também é pensada como uma atividade humana, porém de outro ponto de vista, em um viés mais pedagógico, de formação, de humanização, de valor humano.

A ideia de matemática como uma atividade humana, de qualquer um desses dois pontos de vista, tem uma implicação direta para a prática letiva e vai no sentido contrário à ideia de que "matemática é para poucos - para os inteligentes" que ainda reina no contexto escolar por parte de pais, alunos, professores, equipes pedagógicas. O que se coloca em destaque é que a matemática é uma atividade desenvolvida por todos os seres humanos e para todos.

2. Matematização horizontal e matematizaçao vertical x Mundo Corporificado e Mundo Simbólico

Na Educação Matemática Realística, o processo de matematização, para fins didáticos foi separado por Treffers (1987) em duas vertentes: matematização horizontal e matematização vertical. Essas vertentes são consideradas por Freudenthal (1991) como indissociáveis, não sendo possível estabelecer uma fronteira entre elas. Para Freudenhtal (1991), a matematização horizontal está vinculada ao ir do mundo da vida para o mundo dos símbolos, e a matematização vertical está relacionada ao processo de lidar com a matemática dentro do mundo dos símbolos [Ações fortemente interligadas].

Para Tall (2013), o termo "sensório-motor" se refere a dois aspectos diferentes do cérebro: uma parte sensorial e uma parte motora. A parte sensorial está relacionada com a forma como percebemos o mundo por meio dos nossos sentidos e a parte motora, com a forma como operamos no mundo por meio da nossa ação. Esse princípio dá origem aos mundos Corporificado e Simbólico da Teoria dos três Mundos da Matemática.

O Mundo Corporificado se desenvolve a partir de percepções e ações em objetos físicos e mentais e o Mundo Simbólico se desenvolve a partir das ações físicas que são representadas por procedimentos e está vinculado à manipulação de símbolos. Nesse mundo, alguns alunos podem permanecer em um nível de pensamento processual e outros podem conceber os símbolos de forma flexível, pensamento *proceptual.*

Considerando que, na RME, a expressão "matematizar" corresponde à ação mental do sujeito e, na Teoria dos Três Mundos da Matemática, a expressão "mundo" corresponde a formas de pensar, viajar pelos Mundos da Matemática não deixa de ser um “tipo” de ação mental. Nesse sentido, podemos dizer que a ideia de "matematização" e a ideia de "mundo" correspondem a entidades mentais equivalentes, embora sejam criadas em contextos distintos.

Tall (2013) aponta que, na Teoria dos Três Mundos da Matemática, cada nova forma de abstração (que dá origem a um "mundo da matemática") incorpora a forma anterior de abstração e assim sucessivamente. Com isso, no processo de construção de conhecimento matemático e desenvolvimento de estruturas mentais, no máximo, podemos ter indícios de em que tipo de pensamento esse desenvolvimento teve sua origem. Na Teoria dos Três Mundos da Matemática, a geometria se desenvolveu a partir do mundo corporificado; a aritmética e a álgebra do simbólico. Na RME, a intencionalidade do professor ao planejar tarefas que inicialmente possibilitem o ir do mundo real para o mundo dos símbolos por meio da matematização horizontal ou o lidar com a matemática dentro do mundo dos símbolos por meio da matematização vertical.

A impossibilidade de estabelecer um limite entre a matematização horizontal e a matematização vertical pode ser compreendida, do ponto de vista da Teoria dos Três Mundos da Matemática, como sendo oriunda da incorporação das formas de abstração anteriores.

Em que pode contribuir essa compreensão de que cada nova forma de abstração incorpora a forma anterior de abstração?

Do nosso ponto de vista, ajuda a esclarecer que não faz muito sentido "olhar" para as resoluções dos alunos apenas com o objetivo de classificar se estão atuando no mundo corporificado, no mundo simbólico ou se estão no processo de matematização horizontal ou de matematização vertical**.**

3. Pensamento matemático envolvido em uma tarefa da RME

Na RME, a palavra tarefa remete a um enunciado escrito de uma situação problematizada podendo estar associada a uma imagem, um esquema, um gráfico, ou não. Para o aluno, uma tarefa não se constitui em um problema antes de uma leitura cuidadosa, de interpretação do enunciado, de visualização da situação.

O mesmo acontece em relação aos enunciados que nós professores, comumente, denominamos de “problemas” - enunciados de problemas dos livros didáticos – que, do ponto de vista do professor, podem ser considerados como problemas, mas não necessariamente do ponto de vista de todos os alunos. Uma tarefa ou um “enunciado de um problema” em que o aluno não consegue visualizar a situação, imaginar o contexto, não constitui um problema do ponto de vista do aluno.

Além disso, “uma situação-problema pode ser interpretada de maneiras diferentes” e, nessa situação, “a primeira coisa a fazer é esclarecer exatamente qual é o problema e estar ciente que este pode ser interpretado de maneiras diferentes dando problemas essencialmente diferentes, com diferentes soluções” (TALL, 2013, p.180).

Considerando que, nem sempre, um enunciado de uma tarefa é um problema do ponto de vista do aluno e, ainda, que um enunciado de uma situação-problema ou de tarefa pode dar “margem” a diferentes interpretações, parece coerente pensarmos que a “visualização” é uma etapa importante do processo de ensino e aprendizagem de matemática.

Parece que, na RME, a partir dessa ideia de enunciação, emana o significado de contexto como “uma característica de uma tarefa apresentada aos alunos: referindo-se tanto às palavras e imagens que ajudam os alunos a compreenderem a tarefa, ou a respeito da situação ou do evento em que a tarefa está situada." (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2005, p.2).

No entanto, "o fato de um contexto integrar uma situação do cotidiano não é suficiente para que o estudante possa aprender algo ao lidar com ele". Também "não é possível dizer *a priori* quais seriam bons problemas de contexto, visto que essa *caracterização depende da relação que o resolvedor em potencial estabelece com o enunciado*" (FERREIRA; BURIASCO, 2015, p.454, grifo nosso). Novamente aparece como ponto determinante a dependência da relação do aluno com o enunciado.

Na RME, "o ponto crucial é que os problemas são apresentados em um contexto significativo e acessível" (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010, p.3). Nesse sentido, "enquanto trabalham em problemas de contexto, os alunos podem desenvolver ferramentas matemáticas e compreensão" (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2005, p.2).

Os problemas de contexto favorecem o fazer matemática, o matematizar. No processo de resolução de um problema de contexto, o primeiro processo de matematização, denominado de matematização horizontal, corresponde à ação de traduzir problemas do mundo real para o mundo matemático (ROMERO, 2004).

Na base do processo de matematização horizontal estão ações de:

- identificar as matemáticas que podem ser relevantes para o respectivo problema;
- representar o problema de forma diferente;
- entender a relação entre a língua natural, simbólica e formal;
- encontrar regularidades, relações e padrões na situação considerada;
- reconhecer isomorfismos com outros problemas conhecidos;
- traduzir o problema para um modelo matemático;
- usar ferramentas e recursos adequados (ROMERO, p.8, 2004, tradução nossa.).

Depois que o aluno "traduz" o enunciado do problema para uma expressão matemática, o processo de resolução pode continuar com questões relacionadas a conceitos e habilidades de cálculos matemáticos. Essa parte do processo é denominada de matematização vertical (ROMERO, 2004).

A matematização vertical inclui as ações de:

- utilizar diferentes representações;
- usar a linguagem e operações simbólicas, formais e técnicas;
- refinar e ajustar modelos matemáticos; combinar e integrar modelos;
- argumentar;
- generalizar (ROMERO, p.9, 2004).

Esses dois processos de matematização, horizontal e vertical, foram representados por meio do esquema que consta na Figura 11.

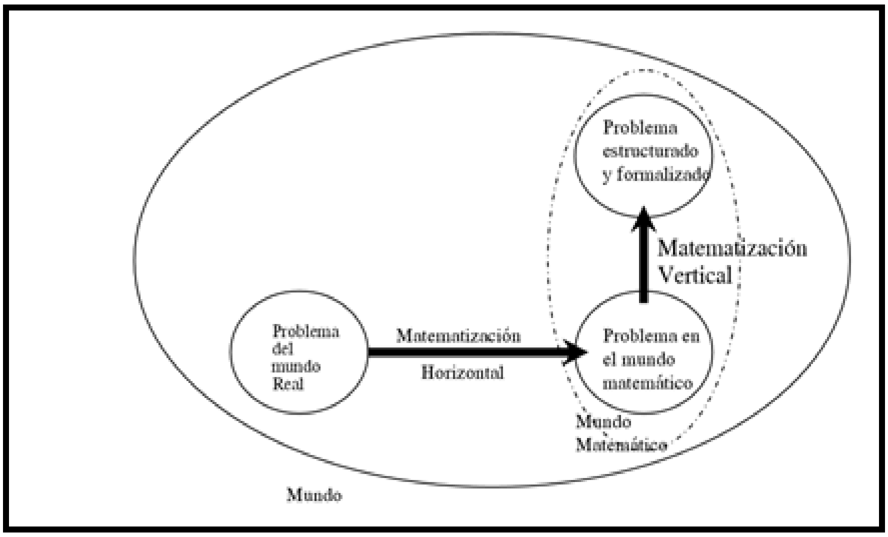

Figura 11: Processos de matematização horizontal e vertical
Fonte: (ROMERO, 2004, p.09)

Esse esquema pode nos dar a falsa ideia de que o processo de ensino e aprendizagem de matemática se restringe ao “Mundo Matemático” - mundo dos cálculos - e que a componente vertical é mais importante do que a horizontal no processo, deixando de fora a ideia de fazer matemática em um sentido mais amplo, ou seja, de uma atividade de organização em si.

Outro aspecto a ser levado em consideração é que há uma zona nebulosa entre o processo de matematização horizontal e o de matematização vertical, o que dificulta estabelecer um limite entre esses processos e que não consta no esquema – parecem “coisas” bem delimitadas e distintas. Se partirmos das ideias:

- de que “Matematização é uma atividade de organização e estruturação, segundo a qual adquire-se conhecimentos e habilidades usadas para descobrir regularidades, relações e estruturas desconhecidas” DE LANGE (1987, p.43);
- de que “Os Problemas de Contexto são definidos na RME como situações-problema que são experimentalmente reais para os estudantes (GRAVEMEIJER; DOORMAN, 1999 *Apud* FERREIRA e BURIASCO, 2015, p 445);
- de que o pensamento matemático se desenvolve em três mundos distintos: o corporificado, o simbólico e o formal, podemos pensar em outro esquema.

A ação do estudante de transformar o enunciado de uma tarefa em um problema envolve o que Tall (2013) denomina de corporificação da percepção, ou seja, a percepção e a ação do estudante no desenvolvimento de imagens mentais que, ao serem verbalizadas de forma cada vez mais sofisticada, tornam-se entidades mentais perfeitas na nossa imaginação. Nesse sentido, por meio da matematização horizontal em uma fase inicial – a da visualização da situação – uma tarefa na perspectiva da RME pode oportunizar ao estudante o desenvolvimento do pensamento no mundo corporificado.

Uma vez identificado o problema, ocorrem alternadamente mudanças de foco de atenção do pensamento corporificado para o pensamento simbólico. Ora o foco de atenção centra-se nos detalhes essenciais do problema, ora o foco da atenção centra-se na simbologia até que o problema original seja simbolicamente formulado e se torne um problema esquematizado/simbolizado. Para Tall (2013, p. 145), "Isto apresenta claramente os papéis complementares de corporificação conceitual e de simbolismo operacional que se mistura para dar formas mais poderosas de pensar matematicamente". Nessa fase de resolução do problema, na perspectiva da RME, as componentes horizontal e vertical do processo de matematização não são bem definidas, localizando-se em uma zona nebulosa – sem definir até onde vai uma e onde começa a outra, configurando-se em um indício de complementaridade.

Quando o problema (o desafio, o querer entender) não exige cálculos ou esquematizações e se remete mais ao estudo de um texto, de uma definição, de um conceito, de uma ideia apresentada - como a ideia de reta, por exemplo - podemos "viajar" pelo mundo corporificado ampliando o significado inicial de reta como um barbante esticado para uma ideia de reta como ente geométrico infinito, por meio do uso da linguagem, sem necessariamente se ater ao mundo simbólico. O processo de matematização progressiva acontece no mundo corporificado.

Parece-nos que este processo se remete à matematização horizontal e não requer necessariamente o processo de matematização vertical.

Quando um problema exige algum tipo de esquematização e esse processo de esquematização já foi realizado, o foco da atenção do estudante volta-se quase exclusivamente para o mundo simbólico envolvendo uso de linguagem e operações simbólicas, ou seja, trata-se do processo de matematização vertical. Obtido o resultado numérico ou algébrico, o foco da atenção do estudante entra numa fase de oscilação deixando o mundo simbólico e retornando ao mundo corporificado em um movimento que se repete até que os ajustes de modelos sejam feitos, que uma argumentação seja elaborada e que um processo de generalização seja construído. Novamente não há como demarcar o limite entre as componentes horizontal e vertical do processo de matematização, temos a chamada zona nebulosa.

Em uma tarefa que possibilita o fazer matemática, o matematizar favorece o desenvolvimento do pensamento matemático nos mundos corporificado, simbólico em direção ao mundo formal nos níveis da matemática prática, teórica e da matemática formal.

4. Contexto

O contexto tem um papel importante tanto na RME quanto na Teoria dos Três Mundos da Matemática, entretando, apesar de ser uma expressão bastante usada, ela não é definida. Em ambas, o contexto parece estar mais no sentido apresentado na *infopedia*[20] de um "conjunto de circunstâncias que rodeiam um acontecimento; situação, conjuntura", vinculada à ideia de uma "relação de dependência entre as situações que estão ligadas a um fato" conforme consta no dicionário *online* http://www.dicio.com.br/contexto/. Entretanto, o "olhar" para o contexto é de diferentes pontos de vista.

Na RME, o "olhar" é direcionado para o uso de contextos nos enunciados de tarefas. Para De Lange (1995), uma das funções mais características da abordagem da RME é o uso de contextos para formação conceitual, ou seja, para o "processo de matematização conceitual”. Nessa direção, De Lange (1995) classifica diferentes usos dos contextos, de acordo com a possibilidade de matematização em contextos de ordem zero, contextos de primeira ordem, contextos de segunda ordem e contextos de terceira ordem.

Essa classificação nos permite pensar que na RME a questão não está apenas no uso de contexto, mas na forma com que se usa o contexto, sendo mais adequada aquela que possibilita o processo de matematização. Também está vinculada à ideia de propor diferentes contextos para que os estudantes possam explorar diferentes fenômenos.

Ainda, de acordo com Ferreira (2013, p.41), não se pode "dizer *a priori* quais seriam bons problemas de contexto, visto que essa caracterização depende da relação que o `resolvedor´ em potencial estabelece com o enunciado". Entretanto, "a hipótese é de que a proximidade do contexto com o repertório do estudante aumenta a possibilidade de matematização".

Na Teoria dos Três Mundos da Matemática, Tall tem seu "olhar" para o contexto do ponto de vista da concepção de matemática enquanto um corpo de conhecimento elaborado e esta está associada à construção de estruturas de pensamento, tanto no processo

[20] http://www.infopedia.pt/dicionarios/lingua-portuguesa/contexto.

de construção da matemática que temos hoje quanto no processo de ensino e aprendizagem no contexto escolar. Para Tall (2013, p.5, tradução nossa),

> um *met-before* problemático surge não apenas no aluno individual, é uma característica generalizada da natureza da própria matemática. Na mudança para um novo contexto, digamos, de números inteiros para frações, ou de números positivos para números negativos, ou da aritmética para a álgebra, a generalização é incentivada pelos *met-befores* de apoio (ideias que funcionaram em um contexto anterior e continuam a funcionar no novo contexto) e impedido por *met-befores* problemáticos (que faziam sentido antes, mas não funcionam no novo contexto).

Ao direcionar o olhar para o processo de ensino e aprendizagem escolar, Tall (1989e) indica que o desenvolvimento do currículo escolar deve oportunizar aos alunos contextos que possibilitem desenvolver gradativamente o pensamento matemático, ampliando o raciocínio matemático. A expressão "contexto" parece que se refere ao ambiente escolar como um todo e não apenas ao uso de contextos em enunciados de tarefas, problemas. Há um indicativo da necessidade do contexto para o desenvolvimento do pensamento matemático.

Com um olhar direcionado para a prática de sala de aula, Tall (2013, p.182, tradução nossa) aponta que,

> A maneira como um indivíduo reconhece e resolve um problema claramente depende da estrutura de conhecimento atual do indivíduo. Isso inclui os conceitos imagináveis que são apropriados e as conexões entre eles. Problemas estão situados em diferentes contextos que podem sugerir alguns tipos de ataque.

No quadro do desenvolvimento do pensamento matemático em longo prazo, Tall (2013) não faz um estudo de enunciados de tarefas que possibilitam a matematização, ou o fazer matemática com sentido, mas não exclui a necessidade de os problemas desencadeadores do desenvolvimento do pensamento matemático estarem situados em diferentes contextos. Na construção de conceitos cristalinos, o contexto é essencial.

5. Níveis

A seguir apresentamos um quadro comparativo dos níveis de matematização progressiva apresentados na RME e dos níveis de desenvolvimento do pensamento matemático apresentados na Teoria dos Três Mundos da Matemática.

Quadro 03: Níveis de matematização progressiva – modelo emergente na RME e níveis de Desenvolvimento do Pensamento Matemático na Teoria dos Três Mundos da Matemática.

Educação Matemática Realística Níveis de matematização progressiva	**Teoria dos Três Mundos da Matemática** Níveis do desenvolvimento do pensamento matemático em longo prazo
• **Nível de situação**: no qual conteúdo matemático, conhecimento e estratégias são utilizados unicamente dentro do contexto da situação; • **Nível referencial**: no qual estratégias e procedimentos se referem à situação descrita no problema e modelos desenvolvidos para resolvê-la são os chamados modelos de; • **Nível geral:** no qual estratégias e procedimentos extrapolam o contexto, com isso, os modelos também representam outras situações, são os chamados modelos para; • **Nível formal:** no qual se trabalha com procedimentos e notações convencionais, formalizados (OLIVEIRA, 2014, p. 27).	• **Matemática prática:** Envolve o reconhecimento e a descrição das propriedades, tais como a observação de que a soma dos números não é afetada pela ordem de operação e a demonstração frequentemente é formulada como demonstração genérica. • **Matemática teórica:** Envolve definição e dedução, como apresentado por demonstração euclidiana na geometria, e da definição das "regras da aritmética" e propriedades, tais como número par, ímpar, primo, composto, bem como a dedução teórica de teoremas, como singularidade de fatoração em números primos. • **Matemática formal:** Matemáticos usam várias combinações de corporificação, simbolismo e formalismo imaginando possíveis teoremas e formulando conjecturas para buscar demonstrações e mudança para níveis cada vez mais sofisticados usando estrutura de teorema (TALL, 2013c, p.10, tradução nossa).

Na RME, os níveis referem-se ao processo de matematização progressiva – a construção do conhecimento pelo estudante – envolvendo tanto a matematização horizontal quanto a matematização vertical. Os níveis parecem estar mais vinculados a uma ação pedagógica no processo de ensino.

Na Teoria dos Três Mundos da Matemática, os níveis estão voltados a um quadro evolutivo dos processos de pensamento envolvidos no desenvolvimento do corpo de conhecimento matemático ao longo do tempo e de demonstrações matemáticas. Abrangem não apenas a matemática escolar, mas também a pesquisa matemática - o desenvolvimento de "novas matemáticas" ou de "outras matemáticas".

Na RME, aos estudantes deve ser dada a oportunidade de reinventar a matemática, não como aconteceu no passado, mas pelo processo de reinvenção guiada, a partir de uma situação em que os estudantes possam matematizar, fazer matemática. Esse processo de fazer matemática também é contemplado na Teoria dos Três Mundos da Matemática. Em cada nível (matemática prática, matemática teórica, matemática formal) os alunos devem fazer matemática com sentido - construir o conhecimento matemático.

Parece-me sensato pensar que os estudantes no processo de construção do seu conhecimento passem por experiências apresentadas nos níveis da matematização progressiva, para alcançarem diferentes níveis de pensamento conforme apresentado na Teoria dos Três Mundos da Matemática.

Tanto na RME quanto na Teoria dos Três Mundos da Matemática, os níveis não são considerados como "camisas de força" para classificar estudantes, não há um limite claro entre um nível e outro. As classificações em níveis podem ser vistas como "instrumentos" que possibilitam uma visão panorâmica do processo de ensino e de aprendizagem que permitem ao professor mapear, avaliar o processo de desenvolvimento matemático do estudante, tornando-se, assim, um auxílio para o professor na sua tarefa de ensinar. Um mesmo estudante pode atuar em diferentes níveis em diferentes contéudos, ou até mesmo, em um mesmo contéudo em diferentes situações**.**

6. Entrelaçamento

A teoria do Três Mundos da Matemática trata do desenvolvimento de diferentes formas de pensar e das demonstrações matemáticas que crescem em sofisticação quando indivíduos desenvolvem novas concepções e as comprimem em conceitos pensáveis. Está embasada no pressuposto de que há, no cérebro, uma parte sensorial relacionada à forma como percebemos o mundo por meio de nossos sentidos e uma parte motora relativa à forma como operamos no mundo por meio de nossa ação. Isso dá origem a dois mundos da matemática, o corporificado, vinculado à geometria, e o simbólico, vinculado à aritmética e álgebra.

De acordo com Tall (2013), tanto a geometria quanto a álgebra podem ser desenvolvidas de forma independente, entretanto a história mostra que a ligação entre álgebra e geometria foi um dos momentos decisivos para a evolução da matemática. Essa ligação possibilitou que as duas vertentes da matemática, uma baseada na corporificação visual e a outra em cálculos simbólicos, se juntassem e se complementassem, e a consequência foi uma explosão de novas ideias matemáticas. Para Tall (2013f, p.4, tradução nossa), "a crescente sofisticação constrói conceitos matemáticos com as relações internas dentro e entre os conceitos em todos os três mundos" (TALL, 2013f, p.4, tradução nossa).

Na RME, de acordo com Van den Heuvel-Panhuizen (2010), o entrelaçamento se dá entre e dentro dos domínios (blocos de conhecimentos) matemáticos, e esse também se aplica a outras linhas de desenvolvimento, uma vez que "todas as linhas de desenvolvimento são inseparáveis mas distinguíveis" (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010, p. 21). O princípio do entrelaçamento nos permite "olhar" a RME por dentro, mas também "olhar" para fora, para outras linhas de desenvolvimento, como a cognitiva, a social, a emocional; buscando uma visão ampliada em relação ao processo de ensino e aprendizagem.

Ao olharmos para o "entrelaçamento" entre e nos domínios do conhecimento, tanto do ponto de vista da Teoria dos Três Mundos da Matemática quanto da RME, este é indispensável para o desenvolvimento do conhecimento matemático, quer seja do ponto de vista da construção do corpo de conhecimentos matemáticos pela humanidade, quer seja na construção da matemática pelo sujeito aprendente, no contexto escolar.

7. Interação

Na construção da Teoria dos Três Mundos da Matemática – do quadro teórico do desenvolvimento do pensamento matemático – Tall (2013) fundamenta-se em Deacon (1997), um neuroantropologista, que tem como objeto de estudo a relação entre a cultura e o cérebro. Para Deacon, o desenvolvimento do *Homo Sapiens* está vinculado ao desenvolvimento da linguagem e do simbolismo.

Nessa mesma perspectiva, Tall (2013) considera que é por meio do uso da linguagem e dos símbolos que a matemática tem se desenvolvido e tem sido passada de geração a geração. Ainda, para Gray e Tall (1992k), o uso de símbolos é a principal fonte desse desenvolvimento e culmina com a criação de diferentes matemáticas nos últimos séculos.

Em relação ao ensino, de acordo com Tall (2013), o uso da linguagem na interação do professor com os alunos e dos alunos com seus colegas torna-se indispensável. Ela permite dispor ideias matemáticas em categorias, dizer o que queremos dizer com os conceitos, tais como ponto, reta, triângulo, seno, número primo, variável, derivada, integral, álgebra, cálculo, ampliar nossa imaginação para além dos limites da nossa experiência física.

O ensino interativo, conforme proposto na abordagem da RME, vem ao encontro da perspectiva de ensino e aprendizagem apresentada na Teoria dos Três Mundos da Matemática, no sentido de que possibilita ao estudante construir seus conhecimentos concomitantemente ao uso/desenvolvimento da linguagem (matemática ou não) nas aulas de matemática.

Nessa perspectiva, o processo de ensino e aprendizagem interativo constitui um caminho para o desenvolvimento do pensamento matemático nos níveis da matemática prática e teórica na Educação Básica tornando-se alicerce para o desenvolvimento da matemática formal em uma abordagem "natural" que se dá a partir das percepções dos estudantes.

8. Organização de material para o ensino

Em relação à dinâmica de sala de aula, Tall (2013) considera que o professor deve propor situações em que os estudantes possam lidar com elas de várias maneiras para que cada um possa desenvolver estratégias e construir sua estrutura de conhecimento à sua própria maneira. Também há o indicativo da necessidade de discussões, na sala de aula, guiadas pelo professor que atua como mentor, nas quais todos os estudantes participam.

No quadro do desenvolvimento do pensamento matemático em longo prazo, não há um estudo específico a respeito de situações que possibilitem ao aluno lidar matematicamente com elas de várias maneiras. Entretanto, Tall (2013) considera o "Estudo da lição" como um caminho que possibilita uma viagem significativa pelos mundos corporificado e simbólico.

Temos a impressão de que, no Quadro Teórico do Desenvolvimento do Pensamento Matemático de Tall, a questão principal em relação a "o que fazer", "o que propor" para que o aluno possa construir sua estrutura de conhecimento à sua própria maneira está na concepção do que é aprender, do que é ensinar, que se manifesta na intencionalidade, na atitude do professor diante de situações de ensino e aprendizagem e está fortemente ligada à sua formação, ao seu saber matemático.

Retomamos nossa fala em relação à procura por tarefas, problemas, exercícios que favorecessem a participação de todos os alunos, independentemente do nível em que se encontravam, mas também do meu sentimento de impotência diante de conteúdos matemáticos em que o saber era restrito ao conhecimento procedimental. Esse conhecimento nos impedia inclusive de "ver", de "encontrar" tarefas, enunciados de problemas interessantes, por um lado, e, por outro, em relação a conteúdos cujos conceitos envolvidos dominávamos/dominava, assim alguns procedimentos de cálculo. Sentiámos à vontade, inclusive, para problematizar exercícios convencionais, considerados como de repetição, e torná-los objetos de investigação e estudo.

Pensamos que o "Estudo da Lição" e as trajetórias de ensino-aprendizagem contribuem com a formação do professor de sala de aula, no sentido de oferecer uma reflexão a respeito do próprio conhecimento matemático e dar a oportunidade da tomada de consciência de que ensinar matemática não é apenas ensinar procedimentos de cálculo, mas oportunizar ao estudante e a si mesmo o desenvolvimento do pensamento matemático.

Para Tall (2012w), o "Estudo da Lição" é uma tentativa de planejamento de uma sequência de aulas, a partir de objetivos bem estabelecidos, com a previsão do que pode acontecer durante a aula; é um caminho de discussão a respeito da aula a partir de múltiplas perspectivas, sem ideias pré-concebidas; é uma possibilidade para desenvolver princípios e materiais curriculares no intuito de melhorar o ensino de matemática para todos os envolvidos.

O "Estudo da Lição" e as trajetórias de ensino-aprendizagem desenvolvidas no Projeto TAL apresentam algumas características comuns:

- ✓ o uso do material é formativo para o professor, tanto no que se refere ao conhecimento matemático quanto ao método de ensino;
- ✓ apresenta um mapeamento de conceitos/conteúdos que são objetos de estudo a longo prazo, numa perspectiva de fazer matemática, ou seja, da construção do conhecimento, das estruturas de pensamento pelo sujeito aprendente.
- ✓ a construção do material se dá de forma interativa, com participação de diferentes profissionais (professores de matemática, desenvolvedores de currículo; professores de sala de aula) que atuam em conjunto;
- ✓ implementação do material projetado em salas de aula e ajustes no material a partir das observações e discussões a respeito do que foi observado;
- ✓ não são roteiros a serem seguidos fielmente pelo professor, servem de guia e o professor pode fazer adaptações.

No "Estudo da lição", desenvolver princípios e materiais curriculares é uma possibilidade. Nas trajetórias de ensino-aprendizagem, os princípios orientadores são os princípios da RME.

ESBOÇANDO UMA ESCRITA A RESPEITO DE CONTEXTO E DE PENSAR MATEMÁTICO X MATEMATIZAR

A palavra contexto vem do latim *contextu* – tecido, particípio passado de *contexĕre* - tecer, entrelaçar. De uma forma geral, e em um sentido amplo, a palavra contexto remete a um "conjunto de circunstâncias à volta de um acontecimento ou de uma situação", conforme consta no dicionário Priberam disponível em https://www.priberam.pt/dlpo/contexto. Em um sentido mais restrito, o da linguística, ou seja, do "conjunto de elementos linguísticos e não linguísticos que rodeiam um texto ou discurso", o contexto extraverbal corresponde à "totalidade das circunstâncias exteriores à língua (ambiente físico da enunciação, fatores históricos, sociais, culturais, etc.) que possibilitam, condicionam ou determinam um ato de enunciação e respectiva interpretação" e o contexto verbal que corresponde ao "conjunto de palavras, frases, ou texto que precede ou segue outra palavra, frase ou texto, esclarecendo o seu significado"[21].

Buscando compreender o significado da palavra contexto, da forma que é empregada no Quadro do Desenvolvimento do Pensamento Matemático de Tall (2013) e na Educação Matemática Realística, além de consultas em dicionários, direcionamos nosso "olhar" para a psicologia-cultural de Vygotsky, tendo como ponto de partida a argumentação de "Werstch (1995) sobre a existência, na obra vygotskiana, de marcas de uma racionalidade iluminista e de uma ambivalência, entre o funcionamento semiótico descontextualizado e outro contextualizado" (CRUZ, 2005, p. 1).

> A compreensão de Wertsch (1985a) sobre a ideia de contexto pode referir-se [...] tanto a um contexto linguístico quanto extralinguístico. Esse último pode ser explicado como o conjunto de objetos, ações e todos os eventos não linguísticos co-presentes espaço-temporalmente com a palavra. Já o primeiro é o contexto fornecido pela própria linguagem. (CRUZ, 2005, p.3-4).

Em uma primeira análise, podemos pensar que a "utilização que Vygotsky faz da noção de contexto refere-se geralmente ao contexto linguístico imediato da palavra. Os conceitos seriam, assim, um modo descontextualizado de funcionamento da linguagem, porque implicariam relações signo-signo que permanecem estáveis entre contextos"(CRUZ, 2005, p.3-4).

[21] Contexto. In Dicionário infopédia da Língua Portuguesa com Acordo Ortográfico [em linha]. Porto: Porto Editora, 2003-2017. [consult. 2017-01-27 23:46:25]. Disponível na Internet: https://www.infopedia.pt/dicionarios/lingua-portuguesa/contexto.

Entretanto, se levarmos em consideração que, "para Vygotsky (1987b, 1989), os conceitos e os significados das palavras – como formações históricas que são – estão em constante transformação, é preciso, ao menos, relativizar essas imagens de estabilidade e de constância" (CRUZ, 2005, p.4).

Para Bakhtin (1990), a ideia de contexto implica a perspectiva dos interlocutores, o contexto ideológico e discursivo, e não apenas o situacional, concreto, relativo ao momento da interlocução. Neste sentido, na noção de contexto, está incorporado "o conjunto de opiniões, pontos de vista e julgamentos de valores" complementando a ideia de contexto inicialmente apresentada por Vygotsky (CRUZ, 2005, p.4).

A ideia de contexto apresentada por Bakthin (1990), em nosso "ver", é a que mais se aproxima do significado da palavra contexto utilizada no Quadro Teórico do Desenvolvimento do Pensamento Matemático de Tall (2013), mais especificamente quando se trata do uso de contextos em atividades de ensino. Um indício de que a ideia de contexto incorpora o conjunto de opiniões, pontos de vista e julgamento de valores reside no fato de Tall (2013) reconhecer "que uma situação-problema [contexto] pode ser interpretada de maneiras diferentes" e que diferentes maneiras de interpretar um enunciado podem dar origem a diferentes problemas, com diferentes soluções (TALL, 2013, p.180).

Para Tall (2013), a maneira que o aluno reconhece e resolve um problema depende da estrutura de conhecimento atual do estudante. Na mesma direção, para Vygotsky (1987b, p.249), "o significado da palavra é inconstante. Ele modifica-se durante o desenvolvimento da criança e com os diferentes modos de funcionamento do pensamento. Ele não é uma forma estática, mas dinâmica"

Assim, levando-se em consideração que o significado da palavra se modifica durante o processo de desenvolvimento do estudante e nos seus diferentes níveis de pensamento, "as transformações no significado da palavra devem relacionar-se ao contexto das dinâmicas interativas, de interlocução" (CRUZ, 2005, p.5). Nesse sentido, "o significado não passa de um potencial que só se realiza na concretude das situações de fala" (CRUZ, 2005, p.5).

Compreender o que o estudante entende de uma enunciação, identificando o que percebe, o que visualiza da situação apresentada, e estabelecer relação entre a interpretação da enunciação do estudante com o nível de pensamento do estudante são ações que podem dar ao professor a oportunidade de uma intervenção dialógica que coloque o estudante na ação do pensar.

A visualização de um contexto a partir da enunciação para nós, enquanto estudante da Educação Básica, não existia, era apenas uma procura por números com os quais pudesse operar – fazer cálculos matemáticos!

Na verdade, o ensino era voltado para o mundo simbólico, mais especificamente para a mecanização de procedimentos de cálculo. Não havia a preocupação (nem a ocupação) com o pensamento matemático flexível que favorecesse uma compressão *proceptual* no mundo simbólico, tampouco com o desenvolvimento do pensamento corporificado. Passadas cerca de três décadas,

> [...] estudos já desenvolvidos no GEPEMA e dedicados à avaliação da aprendizagem (tais como PEREGO, 2005; CURY, 1988, 2006; DALTO, 2007; FERREIRA, 2009; BURIASCO; FERREIRA; CIANI, 2009) têm dado indícios de que uma das maiores dificuldades dos estudantes ao lidar com questões de matemática é relativa à interpretação dos enunciados das questões (FERREIRA, 2013, p. 16).

Parece que a corporificação, conforme concebida por Tall no Quadro do Desenvolvimento do Pensamento Matemático, é um elemento “esquecido” nas práticas letivas de matemática, como se não fizesse parte da matemática ou como algo que não precisasse ser ensinado/aprendido.

O discernimento de que há diferenças entre o pensamento matemático envolvido na “visualização” do contexto de uma situação-problema (de um exercício ou de uma tarefa nos mundos corporificado e simbólico), do pensamento envolvido no processo de cálculos, precisa ser levado em consideração no processo de ensino e aprendizagem. Para Tall (2013), a corporificação conceitual e o simbolismo operacional são complementares e se misturam para dar “formas mais poderosas” de pensar matematicamente. Entretanto,

> A mudança de foco de atenção - da corporificação para o simbolismo, para manipular os símbolos, e de volta para a corporificação para interpretar a solução - pode ser uma consequência natural do limitado foco de atenção do cérebro humano. Em cada fase, o foco de atenção está concentrado no detalhe essencial para tomar decisões (TALL, 2013, p. 145).

A ideia de que, na Matemática para estudantes da Educação Básica, há duas “formas” de pensamento envolvidas na resolução de uma tarefa também aparece na Educação Matemática Realística. Para Freudenthal (1991), no processo de matematização, ou seja, na atividade de organizar “matematicamente” a “realidade” podem ser identificadas duas grandes vertentes,

> A primeira é a que explica o sujeito ir dos contextos “realísticos” envolvidos nas tarefas ou fenômenos explorados, para um assunto matemático. A

> segunda diz respeito ao desenvolvimento dos procedimentos matemáticos para explorar os fenômenos (*apud* FERREIRA, 2013, p.35).

No intuito de "falar" a respeito dessas duas vertentes, Treffers (1987) as distingue, denominando-as matematização horizontal e matematização vertical. A matematização horizontal refere-se à tarefa de tornar um assunto acessível para tratamento matemático e a matematização vertical à tarefa de promover um processamento matemático mais "sofisticado" (*apud* FREUDENTHAL, 1991).

> Treffers e Goffree (1985) também apresentam algumas ideias a respeito dos conceitos de matematização horizontal e vertical. Segundo os autores, a matematização é um processo dinâmico; o que pode ser um assunto a ser matematizado, em certo momento, pode ser utilizado mais tarde como um modelo de caráter algorítmico para matematizar outro assunto de nível mais elevado (FERREIRA, 2013, p.35).

Os processos de matematização horizontal e de matematização vertical são complementares, não sendo possível separar nem comparar em relação a maior ou menor valor.

> Para Freudenthal (1991), não há um ponto de corte claro que promova a distinção entre os dois "mundos". Treffers (1987) também reconheceu que esta distinção entre matematização horizontal e vertical é um pouco artificial, dado que elas estão fortemente inter-relacionadas (FERREIRA, 2013, p.36).

Embora não se tenha um limite claro das fronteiras entre a matematização horizontal e a matematização vertical, perceber que há dois processos complementares e inter-relacionados envolvidos na resolução de uma tarefa constitui-se em um alerta para o professor em relação a "o que ensinar" e ao "como ensinar.

Na Educação Matemática Realística, ambas, matematização horizontal e matematização vertical, são tratadas com o mesmo grau de importância, constituindo-se em indício de que é dada ao estudante a oportunidade de aprender a "visualizar a situação" e "operar simbolicamente", simultaneamente. Para Freudenthal (1968, 1971), era possível "matematizar a realidade" e "matematizar a matemática" (STREEFLAND, 2003). Freudenthal denominou essa organização da atividade de matematização que pode envolver assunto da realidade e assunto matemático.

Uma pequena pausa para a retrospectiva do "caminho" percorrido até o momento. Temos a impressão que:

- Tall (2013) se refere a uma "forma de pensamento" chamada de mundo corporificado e Treffers (1987) denomina o processo de pensamento que se desenvolve neste mundo de matematização horizontal.
- Tall (2013) se refere ao mundo simbólico e Treffers (1987) denomina o processo de pensamento que se desenvolve neste mundo de matematização vertical.
- A relação do mundo corporificado com a matematização horizontal e do mundo simbólico com a matematização vertical dá ideia de complementaridade ("tipo de pensamento envolvido" + processo de pensamento utilizado).

Quanto ao uso da palavra contexto na Educação Matemática Realística, ela vem acompanhada do adjetivo "realístico", o que "sugere que os contextos ou situações nos quais os alunos se envolvem não precisam ser autenticamente 'reais', mas precisam ser imagináveis, realizáveis, concebíveis (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2005)" na mente do estudante (FERREIRA, 2013, p. 30). Esse é um indício de que o contexto abrange os pontos de vista do estudante.

A impressão é que o uso da palavra contexto, tanto na RME quanto no Quadro do Desenvolvimento do Pensamento Matemático de Tall, passa pela ideia de tessitura do contexto extraverbal com o contexto verbal utilizando o "fio" da perspectiva de interlocução, ou seja, do contexto ideológico e discursivo. Com isso:

- o uso da palavra contexto não se refere apenas a um contexto verbal e a um contexto extraverbal pois ao planejar, o professor também precisa pensar nos níveis de pensamento em que os estudantes se encontram (e não apenas no nível de escolaridade);
- um mesmo contexto pode ter diferentes significados para os estudantes, o que sugere interação entre estudantes e entre estudantes e professores;
- o contexto visualizado pelo professor pode ser diferente do visualizado pelos estudantes, o que sugere interação entre estudantes professores / conhecimento do professor em relação à psicologia do desenvolvimento do pensamento matemático;
- o contexto visualizado pelo matemático pode ser diferente do visualizado pelos professores que ensinam matemática, pois é um indício da necessidade do professor de conhecer a história da construção do conhecimento matemático, estudar os fenômenos a serem trabalhados com os estudantes;
- um contexto pode ser visualizado com mais ou com menos nitidez/detalhes, ainda pode ser que não seja visualizado pelo estudante, dependendo do nível de

desenvolvimento do pensamento matemático em que o estudante se encontra, o que sugere a necessidade de avaliação formativa;

- um contexto pode ou não oportunizar o processo de matematização/desenvolvimento do pensamento matemático, o que parece estar relacionado à necessidade de inserção de tarefas não rotineiras e ao estudo de possibilidades de uso de contextos.

O uso de contexto como “porta de entrada” para o desenvolvimento do pensamento matemático/da matematização da realidade ou da própria matemática não exclui os conteúdos, pois

> [...] a questão não está em descartar os conteúdos, mas em estudar os produtos culturais e científicos da humanidade, seguindo o percurso dos processos de investigação, ou seja, reproduzindo o caminho investigativo percorrido para se chegar a esses produtos. O procedimento prático de se realizar essas estratégias são as ações de aprendizagem. Por meio de atividades de abstração e generalização e exercícios escolares, representativos da disciplina, pode-se ensinar às crianças o modo como aprender a manejar seus processos cognitivos. (LIBÂNEO, 2004, p.16).

.

SITUANDO OS TRÊS MUNDOS DA MATEMÁTICA A PARTIR DO ESTUDO DOS TEXTOS APRESENTADOS

A escola é o lugar onde acontece a mediação cultural, "e a pedagogia, ao viabilizar a educação, constitui-se como prática cultural intencional de produção e internalização de significados" com o objetivo de "promover o desenvolvimento cognitivo, afetivo e moral dos indivíduos". A mediação se dá pelo trabalho dos professores que desenvolvem ações no intuito de prover aos alunos "meios de aquisição de conceitos científicos e de desenvolvimento das capacidades cognitivas e operativas, dois elementos da aprendizagem escolar interligados e indissociáveis".

Também é inerente ao desenvolvimento da ação pedagógica uma "formação humana, visando a ajudar os outros a se educarem, a serem pessoas dignas, justas, cultas, aptas a participar ativa e criticamente na vida social, política, profissional, cultural". (LIBÂNEO, 2004, p.2).

Devido a essas demandas, de desenvolvimento das capacidades cognitivas e operativas associadas à formação humana, "a didática precisa incorporar as investigações mais recentes sobre modos de aprender e ensinar e sobre o papel mediador do professor na preparação dos alunos para o pensar" (LIBÂNEO, 2004, p.6), uma vez que ensinar é mais do que transmitir os produtos finais da investigação e aprender é mais que memorizar. As ações de transmitir e memorizar fazem parte do processo de ensino e aprendizagem, mas o processo de ensinar e aprender não se limita a essas ações. É necessário que os alunos possam aprender a investigar por si mesmos, a desenvolver o pensamento matemático enquanto aprendem alguma matemática estudando "os produtos culturais e científicos da humanidade, seguindo o percurso dos processos de investigação, ou seja, reproduzindo o caminho investigativo percorrido para se chegar a esses produtos" (LIBÂNEO, 2004, p. 20). Ainda,

> para superar a pedagogia tradicional empiricista, é necessário introduzir o pensamento teórico. O papel do ensino é justamente o de propiciar mudanças qualitativas no desenvolvimento do pensamento teórico, que se forma junto com as capacidades e hábitos correspondentes (LIBÂNEO, 2004, p.7).

É nesse contexto que o estudo de como os seres humanos aprendem a pensar torna-se relevante no âmbito da pesquisa, da formação profissional e no desenvolvimento de práticas letivas. O conhecimento elaborado, a partir da "integração de saberes advindos da biologia, da neurologia, da física e da matemática, ao longo da história da psicologia, tem contribuído para desvendar a complexidade, riqueza e sutileza do funcionamento humano" (SANTANA, ROAZZI e DIAS, 2006, p.76).

Há diferentes "olhares" para a natureza do desenvolvimento cognitivo sendo discriminados, de acordo com "Flavell, Miller e Miller (1999), em quatro principais abordagens, a saber: o paradigma piagetiano; a perspectiva neopiagetiana; a abordagem de informações e o paradigma contextual". Acrescentam-se a essas quatro abordagens mais duas que começam a ser referenciadas: a biológico-maturacional e a abordagem do conhecimento baseado em teorias (*apud* SANTANA; ROAZZI; DIAS, 2006, p. 76). As abordagens ora mencionadas "tendem a ser mais complementares que excludentes, uma vez que priorizam aspectos distintos do desenvolvimento cognitivo, refletindo a riqueza e complexidade da mente humana" (SANTANA; ROAZZI; DIAS, 2006, p. 76).

A Teoria dos Três Mundos da Matemática pode ser considerada como uma abordagem de desenvolvimento do pensamento matemático baseada em teorias. Nos escritos de Tall (2013), encontramos marcas da perspectiva piagetiana, ou seja, da perspectiva psicogenética cujo fundamento reside na ideia de que "os invariantes lógico-operatórios se estruturariam a partir das ações sensório-motoras, constituindo o pensamento (Piaget, 1973a)" (LESSA; FALCÃO, 2005, p. 316). A teoria psicogenética é apenas um ponto de partida.

Tall (2013), ao "olhar" com as "lentes da observação", com as "lentes da perspectiva histórica" e com as lentes de Skemp, Dubinsky, Sfard, Lakoff e Nuñez, ao invés de "ver" a evolução do desenvolvimento do pensamento matemático a partir de atividades sensório-motoras como uma única forma de desenvolvimento do pensamento matemático, percebe esses dois desenvolvimentos como distintos. Para Tall, a expressão sensório-motora "se refere a dois aspectos diferentes do cérebro: a parte sensorial relacionada à forma como percebemos o mundo através dos nossos sentidos e a parte motora relativa à forma como operamos no mundo através de nossa ação. (TALL, 2013, p. 11), considera dois tipos de pensamento que acontecem praticamente ao mesmo tempo: um que começa com a "percepção de" e outro que começa com a "ação sobre". Esses dois tipos de pensamento constituem-se no alicerce, respectivamente, dos Mundos Corporificado e Simbólico.

O pensamento matemático envolvido nos mundos Corporificado e Simbólico faz parte da Matemática Prática e da Matemática Teórica que correspondem, basicamente, à Matemática trabalhada na Educação Básica. O terceiro mundo, o do pensamento matemático formal, permeia os níveis da Matemática Prática e da Matemática Teórica, mas está mais voltado para o pensamento matemático avançado que corresponde ao Ensino Superior nos cursos de Matemática e envolve o "desenvolvimento de demonstração axiomática formal com base em um conjunto de definições teóricas e demonstração matemática de teoremas" (TALL, p.19, 2013), no nível da Matemática Formal.

> A demonstração matemática não é o fim da história, os teoremas axiomáticos formais podem levar a *estrutura de teorema* que dotam a teoria com novas formas de corporificação e simbolismo, retornando o pensamento matemático para o mundo mental sensório-motor fundamental das experiências de pensamento e manipulação operacional de símbolos. Isso fecha o círculo para revelar **a plena integração dos três mundos, o corporificado, o simbolico e o formal**. (TALL, p.404, 2013) grifo nosso.

Nessa perspectiva, "a crescente sofisticação constrói conceitos matemáticos com as relações internas dentro e entre os conceitos em todos os três mundos" (TALL, p. 4, 2013f) a partir dos *set-befores* de reconhecimento, repetição e linguagem.

Tall (2013) não faz menção à perspectiva sócio-histórica de Vygotsky, teoria que defende a ideia de “que o pensamento forma-se a partir das ferramentas mediacionais simbólicas” (LESSA; FALCÃO, 2005, p. 316). Esse não é o foco de pesquisa de Tall, entretanto parece que a ideia de atuarmos na Zona de Desenvolvimento Proximal encontra-se fortemente presente no desenvolvimento das atividades propostas no Projeto *Lesson Study*. A ideia dos *met-befores* é um outro indício! Precisaria de mais tempo para investigar...

De qualquer forma,

> [...] as perspectivas piagetiana e vigotskiana assumem pressupostos e se enraízam em tradições filosófico-epistêmicas distintas (cf. Bruner, 1997), mas ao mesmo tempo não nos parece desejável, conforme discute Nunes (2000), que o fenômeno humano, enquanto *criatura teórica piagetiana*, não possa se beneficiar dos aportes de outra construção, a *criatura teórica vigotkskiana*. Tal esforço parece-nos desejável em psicologia da educação matemática (LESSA; FALCÃO, 2005, p.316).

CONSIDERAÇÕES À GUISA DE REFLEXÃO

Quadro 04 - Educação Matemática Realística e o Quadro do Desenvolvimento do Pensamento Matemático de Tall

	Quadro do desenvolvimento do pensamento Matemático	**Educação Matemática Realística**	**Minhas considerações**
O que é?	É um quadro teórico que trata de como os humanos aprendem a pensar matematicamente, "das maneiras que podemos dar sentido ao mundo que nos rodeia por meio de nossas percepções e ações, em direção ao desenvolvimento de ideias mais sofisticadas usando a linguagem e o simbolismo." (TALL, 2013, p. 3, tradução nossa).	É uma abordagem de ensino de Matemática, na qual a atividade principal é "uma atividade de resolver problemas, de procurar problemas, e também uma atividade de organização de um assunto. Essa pode ser uma questão da realidade, a qual tem de ser organizada de acordo com padrões matemáticos se tiver de ser resolvida. Também pode ser uma questão matemática, resultados novos ou velhos, de produção própria ou de outros, que tem de ser organizadas de acordo com novas ideias, para ser mais bem entendida, em um contexto mais amplo ou por uma abordagem axiomática" (FREUDENTHAL, 1971, p. 413-414, tradução nossa).	Podemos dizer que o Quadro do Desenvolvimento do Pensamento Matemático de TALL é um "mapa" de como os humanos aprendem a pensar matematicamente e que a abordagem da Educação Matemática Realística é um "guia" de como se pode ensinar matemática/ "viajar pelo mundo da matemática" no contexto escolar de forma que esse conhecimento/"essa viagem" seja significativa. Ideias complementares.
Ideia central	O desenvolvimento do pensamento matemático a longo prazo é, consequentemente, mais sutil do que a adição de novas experiências para uma estrutura de conhecimento fixo. É uma reconstrução contínua de conexões mentais que envolvem	O que os seres humanos têm de aprender não é a matemática como um sistema fechado, mas sim como uma atividade, o processo de matematização da realidade e, se possível, matematizar a matemática.(Freudenthal, 1968, p.7) (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996, p.10)	Ensinar é mais do transmitir conhecimentos matemáticos historicamente construídos, e aprender é mais do que apenas memorizar, envolve a ação do estudante de "fazer matemática", que corresponde ao processo de matematização na RME e a reconstrução contínua de conexão mental que envolve a construção de conhecimentos cada vez mais

	a construção de estruturas de conhecimento cada vez mais sofisticados ao longo do tempo (TALL, 2013, p.6, tradução nossa).		sofisticados no quadro do desenvolvimento do pensamento matemático. Ideias complementares.
Matemática	Matemática é uma atividade humana, e, como tal, está sujeita às maneiras que atuamos como criaturas biológicas e sociais. (TALL, 2010c, p.17).	A RME se baseia na ideia de Freudenthal da matemática como uma atividade humana, o objetivo educacional primário é que os alunos aprendam a fazer a matemática como uma atividade (Freudenthal, 1968, p. 3) (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996, p.10).	A ideia de matemática como uma atividade humana, tanto do ponto de vista biológico quanto do ponto de vista social, tem uma implicação direta na prática letiva e vai em sentido contrário a ideia de que "matemática é para poucos - para os inteligentes", do ensinar apenas procedimentos de cálculo ou uma linguagem matemática como sendo o ensino de matemática, ideias ainda presentes no contexto escolar. A matemática é uma atividade inerente aos seres humanos, é uma atividade de organização da realidade física e mental dos seres humanos.
Linguagem	"Após longos períodos de reflexão, fiquei surpreso ao descobrir que apenas três *set-befores* formam a base do pensamento matemático. O primeiro *set-before* é o reconhecimento que nos permite reconhecer semelhanças, diferenças e padrões. O segundo é a repetição que nos permite praticar uma sequência de ações para ser capaz de realizá-lo automaticamente. O terceiro é a	Uma vantagem importante do ensino interativo é que oferece oportunidades para o uso da linguagem e, como sabemos, o desenvolvimento do pensamento matemático se apoia fortemente no da linguagem. (NELISSEN; TREFFERS, 2010, p. 391). Na RME, como já foi dito, se dá grande valor tanto para a interação horizontal quanto para a vertical. Também se presta muita atenção no	No quadro do desenvolvimento do pensamento matemático de Tall e na Educação Matemática Realística, a linguagem desempenha um papel central e com isso emerge a necessidade da interação entre estudantes e estudantes e professores.

	capacidade para a linguagem que dá ao Homo Sapiens a vantagem de ser capaz de nomear os fenômenos que reconhecemos e para simbolizar as ações que realizamos para construir maneiras cada vez mais sofisticadas de pensar". (TALL, 2009, p.2).	desenvolvimento da liguagem, dado que este constitui o fundamento para o avanço do pensamento matemático. É evidente, então, que, no enfoque didático que apresentamos, a linguagem desempenha um papel central. (NELISSEN; TREFFERS, 2010, p. 396).	
Diferenças individuais	É a combinação de *set-befores* que todos nós compartilhamos em um maior ou menor grau e os *met-befores* pessoais que usamos para interpretar novas experiências que levam ao desenvolvimento pessoal e corporificado do pensamento matemático (TALL, 2009, p.2). O caminho para o desenvolvimento do pensamento flexível em longo prazo não é o mesmo para todos (TALL, 2013, p.118). O *framework* dos 3 mundos oferece uma visão de todo o desenvolvimento do pensamento matemático, tendo em conta os efeitos emocionais e *met-before* de apoio e problemáticos que incentivam ou impedem a	A seu devido tempo, por meio dos olhos dos demais aprendem a olhar seu próprio processo de pensamento e as estratégias utilizadas. Pode-se dizer que o diálogo externo que se tem com os outros se transforma em um diálogo interno consigo mesmo. O diálogo interno se chama reflexão. Aprender a refletir é, em outras palavras, característica da didática realística interativa e está fortemente conectada com os propósitos gerais da educação matemática (NELISSEN; TREFFERS, 2010, p. 397).	As diferenças individuais são apontadas tanto em relação aos *set-befores* quanto aos *met-befores* no Quadro do Desenvolvimento do Pensamento Matemático. Na RME, uma abordagem de ensino para toda a turma, há espaço para os estudantes resolverem suas tarefas utilizando-se de seu próprio processo de pensamento e estratégias. As discussões no grupo (externas) se transformam em um diálogo interno. Esse diálogo interno é chamado de reflexão.

	aprendizagem em contextos mais sofisticados. Isso sugere a necessidade de encontrar formas de ensino e aprendizagem que permitam a alunos muito diferentes dêem sentido pessoal para a matemática de forma coerente (TALL, 2013, p. 416). O caminho para o desenvolvimento do pensamento flexível em longo prazo não é o mesmo para todos (TALL, 2013, p. 118).		
Desenvolvimento individual x social	Em particular, os matemáticos vieram ao mundo como crianças recém-nascidas, como todos nós passaram por um processo de desenvolvimento cognitivo pessoal dentro da sociedade como um todo (TALL, 2009, p.2). O desenvolvimento cognitivo individual de demonstração se relaciona diretamente com o desenvolvimento social em longo prazo, com base nos três *set-befores* de reconhecimento, repetição e linguagem, que dão o conceito da construção por meio de categorização,	Esta contradição desaparece se "individual" se interpreta como ser capaz de escolher a partir própria maneira informal de pensar (construções) e "social" como interativa, em que conduz os alunos a considerar suas próprias estratégias criticamente (NELISSEN; TREFFERS, 2010, p. 399).	Tanto no QuadroTeórico do Desenvolvimento do Pensamento Matemático de Tall quanto na RME, o desenvolvimento individual e o desenvolvimento social são vistos como dois pontos de vista distintos, mas complementares e não contraditórios.

	encapsulamento e definição, dando origem a três mundos mentais de matemática com base na concretização, simbolismo e formalismo (TALL, 2009, p.6).		
Abordagem natural	O retorno final do formalismo para uma forma mais sofisticada de corporificação e simbolismo por meio da estrutura teoremas me leva a ver os três mundos da matemática como uma estrutura natural por meio da qual o cérebro biológico constrói uma mente matemática (TALL, 2014, p. 17). Em particular, a abordagem natural preconizada no capítulo 11 — misturando ação humana dinâmica e percepção com simbolismo algébrico - não só é adequado para as necessidades práticas e teóricas da população mais ampla para seu futuro papel na sociedade, mas também oferece uma fundação natural para a estrutura cristalina do cálculo como uma ferramenta poderosa nas aplicações e como uma teoria formal em qualquer análise padrão usando os números reais, ou análise fora do	Assim como a matemática surgiu a partir da matematização da realidade, do mesmo modo a aprendizagem da matemática tem que ser originada na matematização da realidade (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2005, p.2). Crianças deveriam repetir o processo de aprendizagem da humanidade, não como isso de fato ocorreu, mas, sim, como ele teria sido feito se as pessoas no passado tivessem conhecido um pouco mais do que nós sabemos agora (FREUDENTHAL, 1991, p. 48). Na RME se começa a ensinar com o que os próprios alunos fazem - que tem variação natural - e a partir daí, gradualmente, trabalha no sentido de um método padrão, o que no entanto não é uma camisa de força. Os alunos devem ter uma compreensão dos números com os quais eles calculam, e se possível encurtados os métodos de cálculo ou estratégias inteligentes - o que implica uma variação intencional.	Aritmética e álgebra / geometria [matemática] têm um curso [caminho] natural que foi percorrido ao longo da história (quadro teórico do desenvolvimento do pensamento matemático de TALL) e uma rota para o processo de ensino e aprendizagem. Isso não significa que se deva ensinar como aconteceu antigamente, mas como ele teria sido feito se as pessoas no passado tivessem conhecido um pouco mais do que sabemos agora (RME).

	padrão, em uma mistura extensional que inclui infinitesimais (TALL, 2013, p.362). Em cada caso, a vertente do desenvolvimento humano começa a partir da percepção e ação, por meio da experiência de objetos e propriedades, que são descritos, com significados que são refinados e definidos, então os conceitos pensáveis mais sofisticados que têm uma estrutura rica de conhecimento são construídos (TALL; YEVDOKIMOV; KOICHU; WHITELEY; KONDRATIEVA; CHENG, 2012a, p.34). Entretanto, o mundo simbólico da aritmética prática desenvolve as operações que são compactadas em conceito de números que são percebidos como tendo propriedades genéricas que se aplicam não	na estratégia que reflete o alto nível de entendimento de número que a RME quer que os alunos alcancem[22] (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010a, p. 2).	

[22] RME starts teaching with following on from what students themselves come up with and do — which has natural variation — and from thereon gradually works towards a standard method, which is however not a straitjacket. The students must have an understanding of the numbers with which they calculate, and if possible use shortened calculation methods or smart strategies — which implies an intentional variation in strategy that reflects the high level of number understanding that RME wants students to reach.

	apenas para exemplos específicos, mas funcionam como princípios mais gerais. Esses princípios são usados como 'regras de aritmética' no nível teórico do mundo simbólico como fundações para demonstração algébrica. Isso pode mais tarde evoluir para o mundo formal axiomático da matemática pura na Universidade (TALL, 2013, p. 187).		
Matemática escolar	Embora a matemática deva ter significado, tais significados devem ser flexíveis para levar em conta outras situações em que a matemática pode ser aplicada (TALL, 2012c, p. 3). Centrando-se no quadro apropriado para a matemática escolar, encontramos que a estrutura principal que é composta por duas faixas paralelas, na forma de realização e simbolismo, cada uma com base na experiência anterior (*met-befores*), com - desenvolvimento da corporificação por meio da percepção, descrição, construção,	Isso implica que não é a autenticidade, como tal, mas a ênfase em tornar algo real em sua mente que deu à RME seu nome. Para os problemas apresentados para os alunos, isso significa que o contexto pode ser do mundo real, mas isso nem sempre é necessário. O mundo de fantasia dos contos de fadas e até mesmo o mundo formal da matemática podem fornecer contextos adequados para um problema, contanto que eles sejam reais na mente dos estudantes e que eles possam experimentá-los como reais para si mesmos (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010a, p. 2). Um aparte aqui é que na RME isso	No quadro teórico do desenvolvimento do pensamento matemático, TALL dá indicativos da necessidade de iniciarmos o processo de ensino a partir de situações do mundo real, do que é próximo do estudante, daquilo que o estudante pode imaginar, no mesmo sentido em que o termo real é utilizado na RME, ou seja, em situações/contextos que sejam reais na mente dos estudantes. Tall chama a atenção para a necessidade da fluência simbólica que também se faz presente na RME - com o alerta de que o praticar com compreensão e coerência é radicalmente diferente do exercício isolado.

	definição, a dedução e demonstração após o estilo amplo sugerido por van Hiele; - simbolismo em desenvolvimento por meio de compressão de procedimentos cada vez mais sofisticados em procepts como contextos pensáveis que operam em contextos sucessivamente mais amplos (TALL, 2012w, p.6).	significa praticar com compreensão e coerência, que é radicalmente diferente do exercício isolado que os adversários da RME têm em mente (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010a, p. 2).	
Entrelaçamento dos eixos do conhecimento matemático	Essa ligação entre álgebra e geometria é um dos momentos decisivos da evolução matemática. Ela permite que as duas vertentes da matemática, uma baseada na corporificação visual e a outra em cálculos simbólicos, se unam e se complementem. As consequências foram fenomenais. Nos anos que se seguiram, houve uma explosão de novas ideias matemáticas (TALL, 2013, p. 234). A crescente sofisticação constrói conceitos matemáticos com os relacionamentos internos dentro e entre os conceitos em todos os três mundos (TALL, 2011a, p.6).	O princípio do entrelaçamento significa que os domínios matemáticos, tais como números, geometria, medição e manipulação de dados, não são considerados como capítulos curriculares isolados, mas como fortemente integrados. Aos alunos são oferecidos problemas ricos em que eles podem usar várias ferramentas matemáticas e conhecimento. Esse princípio também se aplica aos tópicos dentro de domínios. Por exemplo, no domínio do número, isso significa que o sentido do número, aritmética mental, estimativa e algoritmos são ensinados em estreita ligação entre si (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010a, p. 2).	Para Tall, a crescente sofisticação constrói conceitos matemáticos com os relacionamentos internos, dentro e entre os conceitos, em todos os três mundos. Na RME, os domínios matemáticos, tais como: números e operações, medidas, tratamento da informação, grandezas e medidas não são capítulos isolados nos currículos, mas fortemente integrados. O entrelaçamento também se aplica aos tópicos dentro de domínios. Por exemplo, no domínio do número, isso significa que o sentido de número, aritmética mental, estimativa e algoritmos são ensinados em estreita ligação entre si.

	Matemática escolar combina corporificação e simbolismo para revelar aspectos complementares de ideias matemáticas (TALL, 2013, p. 403).		
Resolução de Problemas	Para ele [Skemp], a aprendizagem matemática torna-se agradável, com a matemática fazendo sentido e resolvendo problemas interessantes que estão ao alcance do aluno disposto a aceitar um desafio (TALL, 2010c, p.10).	Em outras palavras, a resolução de problemas na RME não significa simplesmente a realização de um procedimento fixo em situações de jogo. Por conseguinte, os problemas podem ser resolvidos de formas diferentes (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2005, p. 3). Problemas de palavras sempre foram objetos suspeitos dentro da RME (Van den Heuvel-Panhuizen, 1996). Claro, ligar problemas à realidade é importante. Isso significa que, na RME, os alunos são apresentados a problemas que eles podem imaginar e com os quais têm experiência de vida diária, mas isso não significa que problemas de palavras têm um papel central na RME. O ponto crucial é que os problemas sejam apresentados em um contexto significativo e acessível. Por isso, eles são muitas vezes apresentados visualmente por meio de imagens, modelos e diagramas.	A ideia central em relação às situações-problema/resolução de problemas no Quadro do Desenvolvimento do Pensamento Matemático de Tall e na RME é de que os alunos devem aprender a analisar e organizar situações-problema e aplicar a matemática de forma flexível em situações problematizadas que sejam significativas para eles e que os problemas devem ser de tal modo que possam ser resolvidos de formas diferentes e em diferentes níveis.

		Problemas de palavras com formas complicadas de explicar um problema são evitados. Eles não podem ser considerados problemas típicos da RME (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010a, p. 3). A RME se baseia na ideia de Freudenthal de matemática como uma atividade humana, o objetivo educacional primário é que os alunos aprendam a fazer a matemática como uma atividade. Isso implica que se deve "ensinar matemática de forma a ser útil" (Freudenthal, 1968, p. 3). Os alunos devem aprender a analisar e organizar situações-problema e aplicar a matemática de forma flexível em situações problemáticas que sejam significativas para eles. Do ponto de vista do estudante, os problemas devem, portanto, ser acessíveis, convidativos, e deve valer a pena de resolvê-los. Os problemas devem também ser um desafio (Treffers, 1987) e deve ser óbvio para os alunos por que é necessária uma resposta a uma determinada pergunta (Gravemeijer, 1982). Esse aspecto significativo dos problemas também pode permitir aos alunos representar ou pensar perguntas a si mesmos (ver,	

		por exemplo, Van den Heuvel-Panhuizen, Middleton e Streefland, 1995) (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2005, p. 3). A educação é projetada para encaixar tanto quanto possível com o conhecimento informal dos alunos e ajudá-los a alcançar um maior nível de compreensão por meio da reinvenção guiada. A fim de apoiar esse processo de reinvenção guiada, os problemas de avaliação devem fornecer ao professor o máximo de informações sobre o conhecimento dos alunos, visão e habilidades, incluindo suas estratégias. Para que isso seja possível, os problemas devem novamente ser acessíveis para os alunos, as instruções de teste de acompanhamento devem ser o mais claras possível para os alunos (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2005, p. 3). Os problemas devem ser de tal modo que eles possam ser resolvidos de formas diferentes e em diferentes níveis. Dessa forma, os problemas tornam o processo de aprendizagem transparente - para os professores e os alunos (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN,	

		2005, p. 3). Os problemas também devem refletir "teste positivo", permitindo que os alunos demonstrem o que eles sabem, ao invés de simplesmente revelar o que os alunos ainda não sabem (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2005, p. 3).	
Novos conceitos a partir da resolução de problemas.	Aprender novos conceitos pode ser abordado na forma de resolução de problemas (TALL, 2012, p.11).	Assim, enquanto trabalham em problemas de contexto, os alunos podem desenvolver ferramentas matemáticas e compreensão (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2005, p. 2).	Os alunos, ao lidarem/trabalharem/resolverem problemas, podem aprender novos conceitos/ferramentas matemáticas. Ideias similares.
Avaliação	Os dados revelam até agora a necessidade de instrutores para tornarem-se mais conscientes dos processos de pensamento de seus alunos que muitas vezes os levam a construir ideias que se tornam problemáticas. Black & Wiliam (1998) examinaram cerca de 250 estudos e descobriram que os ganhos de aprendizagem dos alunos resultaram de uma variedade de métodos, os quais tiveram uma característica comum: a avaliação formativa. Essa é uma forma de avaliação que usa os dados adquiridos para se adaptar	Tais problemas também são necessários se a avaliação se destina a fornecer aos professores *footholds* para mais instruções. Esta pede problemas de avaliação que revelem o que é atingível para a criança no futuro próximo. Em outras palavras, dando dicas sobre o que Vygotsky chamou de "zona de desenvolvimento proximal" exige "teste antecedência" (Van den Heuvel-Panhuizen, 1996). Uma consequência dessa visão é que, em particular, o conhecimento tem de ser avaliado antes de ter sido ensinado (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2005, p. 3).	A avaliação [formativa] no processo de ensino e aprendizagem é considerada adequada e relevante tanto no Quadro do Desenvolvimento do Pensamento Matemático quanto na RME.

	instrução para melhor atender às necessidades dos alunos (TALL; McGOWEN, 2013d, p. 25).		
Problemas significativos Problemas de contexto	Em cada caso, a vertente do desenvolvimento humano começa a partir da percepção e ação, por meio da experiência de objetos e propriedades, que são descritos, com significados que são refinados e definidos, então os conceitos pensáveis mais sofisticados que têm uma estrutura rica de conhecimento são construídos (TALL; YEVDOKIMOV; KOICHU; WHITELEY; KONDRATIEVA; CHENG, 2012a, p. 34).	Como disse antes, na RME tarefas de contextos são vistos em um sentido amplo. Podem referir-se a situações cotidianas da vida e da fantasia em que os problemas se situam, mas também ao contexto matemático de, por exemplo, um problema de número nu. O que é importante é que o contexto da tarefa seja adequado para matematização - os alunos sejam capazes de imaginar a situação ou evento, para que possam fazer uso de suas próprias experiências e conhecimento. Isso também pode ser verdade para problemas de números nus, que podem ser significativos fora de qualquer contexto de vida real. Ou, como Freudenthal (1991) afirmou, tais problemas se encaixam ou podem ser montados em qualquer contexto (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2005, p. 3).	A percepção e a ação têm alguma coisa a ver com o realístico?
Ação do estudante	A minha opinião é que os alunos devem assumir a responsabilidade pela sua própria aprendizagem, uma vez que eles têm a maturidade para fazê-lo, o que inclui o desenvolvimento de seus próprios métodos para a	O princípio da atividade refere-se à interpretação da matemática como uma atividade humana (Freudenthal, 1971, 1973). Na RME, os alunos são tratados como participantes ativos no processo de aprendizagem. Transferência de matemática pronta diretamente para os	O estudante é visto como um sujeito participativo, ativo no processo de aprendizagem, tanto no Quadro do Desenvolvimento do Pensamento Matemático quanto na RME. Ele é que desenvolve seus métodos de resolução de problemas. O contrário, na RME, é

	resolução de problemas (TALL, 2012w, p.11).	estudantes é uma inversão antididática (Freudenthal, 1973) que não funciona (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010a, p. 4).	considerado como uma inversão antididática.
Mundo corporificado x Mundo simbólico X Matematização horizontal x Matematização vertical	Corporificação dá uma imagem global de uma situação (TALL, 2012w, p.6). Simbolismo começa com a coordenação e prática de sequências de ações para construir um procedimento, talvez refiná-lo para dar diferentes procedimentos que são mais eficientes ou mais eficazes, utilizando simbolismo para registrar as ações como conceitos pensáveis (TALL, 2012w, p.6).	Para entender essa maneira de ensinar matemática e reconhecer como ele difere de outras abordagens da educação matemática que se manifestavam nos início da RME, Treffers (1978, 1987) fez uma distinção entre Matematização horizontal e vertical que é muito útil. matematização horizontal envolve ir do mundo da vida real para o mundo da matemática. Isso significa que as ferramentas matemáticas são utilizadas para organizar modelar e resolver problemas situados numa situação da vida real. Matematização vertical significa mover-se dentro do mundo da matemática. Refere-se ao processo de reorganização dentro do sistema matemático resultando em atalhos, fazendo uso de conexões entre conceitos e estratégias (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010a, p. 4).	O mundo corporificado corresponde à matematização horizontal e o mundo simbólico à matematização vertical. O que chama atenção em relação à diferença de um ensino tradicional é que a passagem da língua materna para a simbólica nessas duas perspectivas é considerada como parte do fazer matemática. Isso não acontecia no ensino tradicional.
Princípio da realidade	A Matemática tem de estar relacionada com situações do mundo real, mas também precisa de uma fluência simbólica e poder próprio livre para passar	O princípio da realidade enfatiza que a RME é destinada a tornar os alunos capazes de aplicar a matemática. No entanto, essa aplicação do conhecimento matemático não só é	No Quadro Teórico do Desenvolvimento do Pensamento Matemático, a Matemática tem de estar relacionada com situações do mundo real, mas também há o enfoque para a fluência simbólica [níveis mais elevados de

	para ideias antes inimagináveis (TALL, 2012c, p.3). Em longo prazo, dos indivíduos exigem-se tipos diferentes de matemática para funcionar como indivíduos pensantes na sociedade. Letramento matemático requer matemática prática com alguns *insights* sobre matemática teórica. Muitos comércios e profissões exigem formas relevantes da matemática prática, os aplicativos podem exigir a matemática teórica, enquanto matemáticos puros criam teorias formais que posteriormente podem ter aplicações práticas e teóricas de valor para toda a sociedade (TALL, 2013, p. 403).	considerado como algo que está situado na extremidade de um processo de aprendizagem, mas também no início. Ao contrário do que se inicia com certas captações ou definições a serem aplicadas mais tarde, deve-se começar com contextos ricos que requerem organização matemática ou, em outras palavras, em contextos que podem ser matematizados (Freudenthal, 1979, 1968) (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010a, p. 4).	abstrações]. Na RME, há o indicativo de que a aplicação do conhecimento matemático se dá não apenas [no final dos capítulos] mas também no início, durante todo o processo de ensino e aprendizagem.

Níveis	As percepções e operações humanas se tornam mais sofisticadas por meio do desenvolvimento do raciocínio humano. Eu uso as ideias de van Hiele (1986) para ver o desenvolvimento em matemática em geral por meio dos níveis de reconhecimento, descrição, definição e dedução. Eu vejo isso mais como um amplo desenvolvimento que encoraja as crianças a fazer sentido da matemática de uma forma significativa, ao invés de executar uma microanálise de vários níveis para ser utilizado na avaliação que muitas vezes provoca os professores a ensinar para o teste. Em termos gerais, ao longo do tempo, sugiro que ocorrem três grandes níveis da matemática denominados matemática prática, matemática teórica e matemática formal (TALL, 2013a, p.11). A formação de conceitos cristalinos no longo prazo amadurece por meio da construção de estruturas do conhecimento cada vez mais	O princípio de nível sublinha que aprender matemática significa que os alunos passam por vários níveis de compreensão: a partir da capacidade de inventar soluções informais relacionadas ao contexto, à criação de vários níveis de atalhos e esquematização, à aquisição de *insights* de como os conceitos e estratégias são relacionados. Modelos servem como um dispositivo importante para fazer a ponte entre matemáticas informais relacionadas com o contexto e as matemáticas mais formais. A fim de cumprir essa função de ponte, os modelos têm de mudar de um "modelo de" uma situação particular para um "modelo para" todos outros tipos, mas em situações equivalentes (Streefland, 1985, 1993, 1996, ver também Van den Heuvel -Panhuizen, 2003). Para o ensino de cálculos, o princípio de nível reflete-se no método didático de esquematização progressiva (Treffers, 1982a, 1982b) (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010a, p. 5). Além disso, deve-se ter em mente que a matematização pode ocorrer em diferentes níveis de compreensão.	Tall apresenta três grandes níveis de desenvolvimento do pensamento matemático: matemática prática, matemática teórica e matemática formal. Eles são vistos mais como um encorajador para fazer sentido da matemática de uma forma significativa, do que para executar uma microanálise de vários níveis para ser utilizada na avaliação que muitas vezes provoca os professores a ensinar para o teste. Na RME, o princípio de níveis está vinculado ao método didático de esquematização progressiva.

	sofisticadas. (TALL; YEVDOKIMOV; KOICHU; WHITELE; KONDRATIEVA; CHENG, 2012a, p.). Desenvolvimento de conceitos cristalinos • reconhecimento da percepção dos fenômenos em que os objetos têm propriedades simultâneas, • descrição verbal de propriedades, muitas vezes relacionadas com representações visuais ou simbólicas, para começar a pensar sobre as propriedades e relacionamentos específicos, • definição e dedução, para definir quais conceitos satisfaz a definição e desenvolver princípios de prova adequados para deduzir que uma propriedade implica uma outra, • perceber que algumas propriedades são equivalentes, de modo que o conceito tem agora uma estrutura com propriedades equivalentes que são relacionadas por prova dedutiva, • e que essas propriedades são	diferentes diferentes níveis de compreensão [23] (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2005, p. 5).	

[23] Furthermore, one must keep in mind that mathematization can occur at different levels of understanding.

	diferentes formas de expressar um conceito cristalino subjacente cujas propriedades são ligadas entre si por demonstração dedutiva (TALL; YEVDOKIMOV; KOICHU; WHITELEY; KONDRATIEVA; CHENG, 2012a, p.7 e 8). Este foco leva a conceitos pensáveis compactados que mudam para um outro nível para construir uma nova estrutura de conhecimento de relações com os novos conceitos que são prontamente pensáveis no novo nível. O novo nível então torna-se concreto em termos de riqueza de significados quando percebido pelo indivíduo, com conexões flexíveis e diferentes formas de pensar a respeito das ideias subjacentes (TALL, 2013, p. 400).		
Interatividade	Isto leva-nos a considerar a abordagem conexionista mais produtiva para a aprendizagem em que o professor atua como mentor em contextos bem desenhados para incentivar os alunos a compartilharem a	O princípio de interatividade da RME significa que a aprendizagem da matemática não é apenas uma atividade pessoal, mas também uma atividade social. Portanto, RME é a favor do ensino da classe toda. A educação deve oferecer aos alunos oportunidades para	Está vinculada à ideia de os alunos compartilharem ideias matemáticas de forma que façam sentido para eles. A reflexão evocada lhes permite atingir um nível mais elevado de compreensão.

	construção de novas ideias de forma que faça sentido para eles (TALL, 2013f, p.15).	compartilharem suas estratégias e invenções com outros estudantes. Dessa forma eles podem obter ideias para melhorar suas estratégias. Além disso, a reflexão é evocada, o que lhes permite atingir um nível mais elevado de compreensão (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010a, p. 5).	
Orientação	Eu também acredito que os professores têm o dever, como mentores, de ajudar a focalizar os estudantes em métodos que são mais poderosos e têm valor mais essência a longo prazo (TALL, 2012w, p.11). Isto leva-nos a considerar a abordagem conexionista como mais produtiva para a aprendizagem na qual o professor atua como mentor em contextos bem desenhados para incentivar os alunos a compartilharem a construção de novas ideias de forma que faça sentido para eles (TALL, 2013f, p.15). Educadores e professores de matemática em todos os níveis precisam se tornar cientes do processo de desenvolvimento de base na experiência anterior, que	O princípio de orientação significa que aos alunos são fornecidas oportunidades "guiadas" para "reinventarem" a matemática. (Freudenthal, 1991). Isso implica que, na RME, os professores devem ter um papel pró-ativo na aprendizagem dos alunos e que os programas educativos devem conter cenários que têm o potencial para funcionar como uma alavanca para atingir mudanças na compreensão dos alunos. Para realizar isso, o ensino e os programas devem basear-se numa trajetória coerente de ensino e aprendizagem de longo prazo (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010a, p. 5) .	Os contextos bem desenhados a longo prazo do Quadro do Desenvolvimento do Pensamento Matemático que podem ser relacionados com as trajetórias de ensino-aprendizagem.

	ocorre em todos os níveis de aprendizagem. Esse não é apenas um problema de nossos alunos, mas de nossa própria necessidade de compreender como as ideias matemáticas se desenvolvem em sofisticação e como organizar aprender a construir conhecimento e confiança para o futuro, em vez de cair em uma espiral descendente de confusão problemática e desamor (TALL, 2013d, p.20).		
Contexto	Um conceito cristalino pode ser tomado como "um conceito que possui uma estrutura interna de relações restritas que o fazem ter propriedades necessárias como parte de seu contexto." (TALL; YEVDOKIMOV; KOICHU; WHITELEY; KONDRATIEVA; CHENG, 2012a, p.7). Para fazer uma transição natural da corporificação para o formalismo requer trabalhar em um contexto apropriado, onde as ideias de corporificação se traduzam-se naturalmente para o formalismo (TALL, 2013, p.320).	uma característica de uma tarefa apresentada aos alunos: referem-se tanto às palavras quanto às imagens que ajudam os alunos a compreenderem a tarefa, ou a respeito da situação ou evento em que a tarefa está situada. A descrição de um contexto, dada pelo Borasi (1986), se aproxima da interpretação de um contexto como uma tarefa característica (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2005, p. 2). Além disso, o grau de realidade de um contexto é relativo. De Lange se pergunta quão perto o contexto deve ser do mundo dos estudantes necessariamente. [...] Uma regra única	Penso que o contexto está vinculado com o "conteúdo" - ideias e relações que se materializam em uma situação.

		nem sempre pode ser encontrada para a escolha de contextos, mas devemos pelo menos tentar criar um equilíbrio entre um bom contexto e um bom problema matemático (De Lange, 1995) (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2005, p. 4).	
Tudo ou nada Certo ou errado Relativizar...		Uma vez que o problema pode ser resolvido em diferentes níveis, a sua elasticidade é aumentada. Não só os estudantes rápidos podem resolver o problema, mas os alunos mais lentos podem fazê-lo bem em um nível mais baixo, reduzindo o caráter "tudo ou nada" da avaliação (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2005, p. 5).	Na RME um mesmo problema pode ser resolvido por alunos que se encontram em diferentes níveis.
Construção do conhecimento pelo estudante	Conceitos Cristalinos não surgem só como o cume do pensamento matemático, eles são também compreendidos numa fase inicial por muitas crianças quando elas percebem relações flexíveis entre números e as usam para simplificar a sua compreensão da aritmética. A longo prazo, um sentido da coerência subjacente aos conceitos matemáticos tem o potencial para apoiar o amadurecimento do pensamento matemático em cada nível (TALL, 2013, p. 405).	O verdadeiro propósito de enfatizar problemas realísticos [é] para incentivar os alunos a construir e investigar ideias matemáticas poderosas e úteis [...] com base em extensões, adaptações, ou aperfeiçoamentos de seu próprio conhecimento e experiência pessoal. (Lesh e Lamon, 1992, p. 39) (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2005, p. 9).	Construção do conhecimento matemático de forma flexível, a partir do conhecimento atual - é comum nas duas abordagens. Na RME há indicativos de como fazer para oportunizar ao aluno o fazer matemática.

	Contudo, a escolha da estratégia de ensino não é uma alternativa entre compreensão conceitual ou fluência operacional. O pensamento matemático poderoso exige ambos. O seu desenvolvimento a longo prazo é reforçado por fazer sentido das ideias geradoras que atuam como uma base para a compressão de estruturas ricas em conceitos pensáveis ligados entre si de forma flexível em estruturas de conhecimento coerente relacionadas (TALL, 2013, p. 132).		
Relevante para a sociedade, de modo a ser de valor humano		A forma atual da RME foi principalmente determinada por Freudenthal (1977) pelo seu ponto de vista a respeito de matemática. Ele sentiu que a matemática deve ser ligada à realidade, ficar perto da experiência das crianças e ser relevante para a sociedade, de modo a ser de valor humano (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000, p. 3).	Quando o aluno aprende a matemática com significado ela é de valor humano.
Pensamento Matemático	O poder no pensamento matemático reside não só na formulação de axiomas para descrever uma situação familiar; origina-se de misturar ideias em	E logo, sob a supervisão do professor, devem manter uma discussão a respeito das soluções, o que provoca de novo uma reflexão, agora como resultado desta interação, as crianças vêm	O desenvolvimento do pensamento matemático, o matematizar se referem a uma aprendizagem com significado.

	novas maneiras de resolver problemas novos e, ao fazê-lo, cria novos conceitos cristalinos e estrutura de teorema que levam a novas formas de corporificação e simbolismo sustentadas por demonstrações formais (TALL, 2013, p. 360). Para compreender a extensão completa do pensamento matemático, desde as ideias iniciais da criança aos mais altos níveis de rigor, é necessário ter em conta a visão panorâmica da matemática, incluindo os pontos de vista de matemáticos também tendo em conta as necessidades do desenvolvimento de cada indivíduo que siga suas viagens pessoais por meio da matemática (TALL, 2013, p. 152).	refletidos, como em um espelho, os diferentes processos de pensamento (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010, p. 400).	

DAS CONSIDERAÇÕES DA MINHA VIAGEM

ALGUMAS REFLEXÕES APÓS O ESTUDO DE DAVID TALL

- Todos nós viajamos, na educação escolar, pelo mundo corporificado e pelo simbólico a partir dos nossos *set-befores* (percepção e ação).
- Poucos chegam ao mundo formal.
- Há diferentes intenções para uma viagem. Ela pode estar direcionada para a "aquisição" de instrumentos, e o seu uso em situações pontuais, apreciação da paisagem durante a trajetória percorrida, redescoberta e/ou descoberta dos "mundos" e atuação nesses mundos, ou outras tantas intenções.
- Eu embarquei na viagem e segui rigorosamente as instruções dos meus "guias". De acordo com essas instruções, em alguns trechos "adquiri" instrumentos e em outros, além de "adquirir" instrumentos utilizei-os em momentos específicos sob orientação dos meus guias. Cada trecho tinha um "guia" e às vezes, em um mesmo trecho, havia troca de "guias".
- Os "guias" eram importantes para mim. Eles direcionavam meu "olhar". A minha viagem pelos mundos corporificado e simbólico foi de aproximadamente 15 anos, incluindo a rápida passagem pelo mundo formal.
- Alguns estudantes conheceram um único percurso utilizado na viagem pelos dois mundos (o corporificado e o simbólico) ou trechos desse percurso, se encantaram com a beleza e decidiram se arriscar em uma viagem pelo mundo formal assim como eu.
- Todos que passararam pelos três mundos da Matemática com o objetivo de se tornarem “guias”, se aprovados, conseguiram a credencial.
- Já atuando como "guia", em um dos cursos para "guias", percebi que conhecia apenas trechos de um único percurso, daquele que eu havia passado. E, com base, nesse conhecimento, guiava meus estudantes. É como diz Tall (2013), se não conhecemos os "mundos", possivelmente utilizaremos de nossa experiência para orientar os estudantes. Exatamente, como fazia com meus alunos, apresentava os trechos que conhecia, instrumentalizando-os com os instrumentos que havia "adquirido" no decorrer da minha viagem. Durante vários anos a minha meta era de que os alunos vissem a mesma coisa que eu via e apreciassem a viagem da mesma forma que eu apreciava. Muitos deles também percorreram a mesma trajetória que eu havia percorrido e também se tornaram guias.

- Quando me refiro aos trechos, estes correspondem a conteúdos isolados, estanques, sem conexão entre "os mundos" e sem conexão dentro dos próprios "mundos", mas que, mesmo assim, têm uma beleza (e hoje vejo que essa beleza está relacionada com os conceitos cristalinos - mesmo que em trechos) e servem para alguma coisa, não são descartáveis - estão muito ligados ao objetivo da viagem.
- Enquanto pensava que existia um único tipo de "viagem", eu era feliz, fazia o melhor que podia para que os alunos conhecessem esses trechos, mas, a partir daquele curso de formação para "guias", algo me fez pensar que podem existir diferentes tipos de viagens, uma "boa" viagem não é apenas conhecer um único trajeto e "adquirir" instrumentos nesse percurso.
- A ideia de que podemos utilizar diferentes instrumentos para resolver um mesmo problema e de que a decisão de que instrumento será utilizado não é de responsabilidade do guia, mas de quem o utiliza, me agradou bastante.
- A partir de então, comecei a pensar nisso. Nas aulas passei a valorizar e explorar as diferentes formas de se resolver um exercício ou um problema e de propor exercícios/problemas para que todos os alunos pudessem resolvê-los. Com isso, penso que deixei de apreciar apenas uma única trajetória e passei a explorar o que estava ao redor da rota, ainda que timidamente.
- Ao esboçar minha trajetória de aprendizagem no quadro téorico dos "três mundos" da Matemática de David Tall, percebi que:
- iniciei minha viagem num período em que se as viagens estavam vinculadas à ideia de "aquisição" de instrumentos (reprodução do conhecimento - técnica operatória - década de 80/90);
- talvez os guias nem percebessem que havia outros tipos de "viagem";
- os trechos desconhecidos pelos "guias" não nos eram apresentados e não tínhamos curiosidade para saber o tinha lá;
- alguns "guias" dos "guias" já vislumbravam outros tipos de viagens, mas como não haviam experienciado, era mais especulação, pouquíssimos se arriscavam a traçar novas rotas e muito menos ainda arriscavam construir rotas para vislumbrar os "mundos", como no caso de Freudenthal;
- os "guias" exercem um papel importante na condução dos estudantes, tanto para apreciar/vislumbrar/atuar em rotas quanto para explorar "mundos";

- a "viagem" pelos "três mundos da Matemática" só tem sentido se se levar em consideração "as instruções" (*set-before, met-before,* conceitos cristalinos), é um esquema que permite que pensemos no desenvolvimento do pensamento matemático em longo prazo, nas transições entre os mundos e nas diferentes formas de pensamento e, de forma geral, todos passamos pelo mundo corporificado e simbólico, mas a "qualidade" da viagem depende do guia, da disposição do viajante, do objetivo da viagem...

Na trajetória acadêmica, recordo que, nos meus primeiros onze anos de escolarização, o que mais me encantava no contexto escolar eram as aulas de matemática: a sequência numérica, os algoritmos das quatro operações, as expressões numéricas, depois as operações com frações e equações do 1º e 2º do grau, enfim a repetição. Por causa da minha capacidade de memorização de procedimentos,era considerada como aluna "excepcional", isso até a antiga 8ª série (que atualmente corresponde ao 9º ano do Ensino Fundamental), pois resolvia todos os exercícios dos livros didáticos corretamente, mesmo aqueles que não eram indicados pelo professor ou pela professora. No esquema dos Três Mundos da Matemática, isso se refere ao Mundo Simbólico e mais especificamente a um tipo especial de pensamento, o Pensamento Matemático Procedimental.

Nessa época de estudante do Ensino Fundamental, o estudo da Geometria não fazia nenhum sentido, na verdade, pouco era estudado porque era um conteúdo que ficava para o final do ano letivo e quase nunca dava tempo, mas, quando estudava eu considerava uma grande "bobagem". Para mim, não fazia sentido, mesmo assim resolvia as questões propostas com êxito. Levando esses fatos em consideração, posso afirmar que a minha viagem escolar pelos Três Mundos da Matemática teve início no Mundo Simbólico e lá permaneceu por um período aproximado de 8 anos e uma passagem rápida, ou até mesmo inconsciente pelo Mundo Corporificado, portanto, uma situação diferente daquela chamada de "natural".

No Ensino Médio, enquanto cursava o Magistério, na disciplina de Didática da Matemática, a professora com seu jeito peculiar mostrou, ou talvez, fez com que nós percebêssemos que era importante apresentar os conteúdos a partir de problemas e que uma mesma operação poderia ser resolvida de diversas maneiras, ou seja, por meio de diferentes procedimentos. Essa foi uma descoberta incrível, agora, por exemplo, para resolver uma divisão poderia utilizar de três tipos de procedimentos: o processo longo, o processo breve e o processo americano. O processo americano me encantava. Depois de anos de repetição de procedimentos, começava a entender o significado da divisão.

Com meu pensamento processual não conseguia viajar do Mundo Corporificado para o mundo Mundo Simbólico e vice-versa. Nesse sentido, a disciplina de Geometria Analítica no Ensino Superior foi a mais complexa. A estratégia era memorizar os exercícios/problemas e torcer para que na prova houvesse atividades semelhantes para reproduzir e obter a aprovação. Nas disciplinas de Cálculo e Análise, a estratégia foi a mesma.

Considerando que todas as atividades eram desenvolvidas com êxito havia algo a ser corrigido? Se houvesse, como poderia ser feito? Essas são perguntas que ainda estão latentes em minha mente.

Vejo que, com o "pensamento procedimental", foi possível resolver um bom tanto de coisas (das quais gostava bastante), passando por caminhos traçados no Mundo Corporificado e no Mundo Estrutural, mas não consegui ascender para o Mundo Formal (só tive algumas passagens). Esse tipo de pensamento esteve vinculado ao tipo de ensino, entrentanto, na primeira oportunidade em que o "guia" permitiu (e até incentivou) olhar para os lados e explorar o mundo, comecei a entender a funcionalidade dos instrumentos, agarrei a oportunidade e fui.....

Fazer uma viagem que permita vislumbrar o mundo corporificado e o mundo simbólico (e não apenas caminhos que cortam esses mundos) em paralelo de modo a ascender para o mundo formal é um desafio. Tall, ao desenvolver a Teoria dos Três Mundos da Matemática, traça um "mapa" e dá pistas gerais; Freudenthal desenvolve um "guia" que guia o guia para essa viagem. O interessante é que o objetivo de ambos está direcionado a uma "viagem" significativa, na qual quem constrói o "roteiro" é o viajante.

OUTRAS CONSIDERAÇÕES

Os "Três Mundos da Matemática" referem-se a um estudo realizado por Tall (2013) e diz respeito a como os humanos aprendem a pensar matematicamente, "das maneiras em que podemos dar sentido ao mundo que nos rodeia por meio de nossas percepções e ações, em direção ao desenvolvimento de ideias mais sofisticadas usando a linguagem e o simbolismo." (TALL, 2013, p. 3, tradução nossa). Nesse quadro teórico, a ênfase está em como podemos desenvolver o pensamento matemático – em como podemos aprender/ensinar matemática com significado dando sentido ao mundo a partir dos nossos três *set-befores*: de reconhecimento, repetição e linguagem.

A Educação Matemática Realística é uma abordagem de ensino de Matemática inspirada, principalmente, nas ideias e contribuições de Freudenthal (1905-1990).

Para Freudenthal, as "crianças deveriam repetir o processo de aprendizagem da humanidade, não como isso de fato ocorreu, mas, sim, como ele teria sido feito se as pessoas no passado tivessem conhecido um pouco mais do que nós sabemos agora" (1991, p.4, tradução nossa). No processo de escolarização, a atividade principal é

> "uma atividade de resolver problemas, de procurar problemas, e também uma atividade de organização de um assunto. Esta pode ser uma questão da realidade, a qual tem de ser organizada de acordo com padrões matemáticos se tiver de ser resolvida. Também pode ser uma questão matemática, resultados novos ou velhos, de produção própria ou de outros, que têm de ser organizados de acordo com novas ideias, para ser mais bem entendida, em um contexto mais amplo ou por uma abordagem axiomática" (FREUDENTHAL, 1971, p.413-414, tradução nossa).

As atividades de procurar problema, resolver problemas e organizar um assunto são alguns indicativos de que na Educação Matemática Realística está incorporada à construção de conhecimentos com significado.

Levando-se em consideração o foco do estudo desenvolvido por Tall (2013) e o foco da abordagem de ensino inspirada principalmente nas ideias de Freudenthal podemos considerar os "Três Mundos da Matemática" como um "mapa" de como os humanos aprendem a pensar matematicamente e a abordagem da Educação Matemática Realística como um "guia" de como se pode ensinar matemática ou "viajar pelos mundos da matemática" de forma que esse conhecimento ou "essa viagem" sejam significativos.

Os "Três Mundos da Matemática" e a Educação Matemática Realística, mesmo sendo estudos de naturezas distintas, têm em comum o foco nas aprendizagens que tenham sentido, que deem significado ao mundo que nos rodeia, “caminhando” em paralelo. No Quadro 05, apresentamos um paralelo do que consideramos central, a respeito do é ensinar e aprender matemática nessas duas perspectivas.

Quadro 05 - Educação Matemática Realística e o Quadro do Desenvolvimento do Pensamento Matemático de Tall: Ideias a respeito do que é matemática e de ensinar e aprender matemática

O que é?	**Três Mundos da Matemática**	**Educação Matemática Realística**	**Considerações**
Matemática	Matemática é uma atividade humana, e, como tal, está sujeita às maneiras como atuamos como criaturas biológicas e sociais (TALL, 2010c, p.17).	A RME se baseia na ideia de Freudenthal da matemática como uma atividade humana, o objetivo educacional primário é que os alunos aprendam a fazer a matemática como uma	A ideia de matemática como uma atividade humana, tanto do ponto de vista biológico quanto do ponto de vista social, tem uma implicação direta na prática letiva e vai em sentido contrário à ideia de que a "matemática é para poucos - para os

		atividade (FREUDENTHAL, 1968, p. 3) (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996, p.10).	inteligentes", de que ensinar apenas procedimentos de cálculo ou uma linguagem matemática é ensinar matemática. A matemática é uma atividade inerente aos seres humanos, podemos dizer que é uma atividade de organização da realidade física e mental dos seres humanos.
Ensino e aprendizagem	O desenvolvimento do pensamento matemático a longo prazo é, consequentemente, mais sutil do que a adição de novas experiências em uma estrutura de conhecimento fixo. É uma reconstrução contínua de conexões mentais que envolvem a construção de estruturas de conhecimento cada vez mais sofisticadas ao longo do tempo (TALL, 2013, p.6, tradução nossa).	O que os seres humanos têm de aprender não é a matemática como um sistema fechado, mas sim como uma atividade, o processo de matematização da realidade e, se possível, matematizar a matemática (Freudenthal, 1968, p.7) (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996, p.10).	Ensinar é mais do transmitir conhecimentos matemáticos historicamente construídos e aprender é mais do que apenas memorizar. Aprender matemática envolve a ação do estudante de "fazer matemática", que corresponde ao processo de matematização na RME e o desenvolvimento do pensar matemático que se dá por meio da reconstrução contínua de conexão mental envolvendo a construção de conhecimentos cada vez mais sofisticados no quadro teórico do desenvolvimento do pensamento matemático.
Corporificação e Simbolismo X Matematização horizontal e Matematização	Corporificação dá uma imagem global de uma situação (TALL, 2012w, p.6). Simbolismo começa com a coordenação e prática de sequências	Treffers (1978, 1987) fez uma distinção entre matematização horizontal e vertical que é muito útil. Matematização	Podemos dizer que a corporificação corresponde à matematização horizontal e o simbolismo à matematização vertical.

vertical	de ações para construir um procedimento, talvez refiná-lo para dar diferentes procedimentos que são mais eficientes ou mais eficazes, utilizando simbolismo para registrar as ações como conceitos pensáveis (TALL, 2012w, p.6).	horizontal envolve ir do mundo da vida real para o mundo da matemática. Isto significa que as ferramentas matemáticas são utilizadas para organizar e modelar, e resolver problemas situados numa situação da vida real. Matematização vertical significa mover-se dentro do mundo da matemática. Refere-se ao processo de reorganização dentro do sistema matemático resultando em atalhos, fazendo uso de conexões entre conceitos e estratégias (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010a, p. 4).	Embora as fronteiras da matematização horizontal e vertical; da corporificação e do simbolismo não sejam claras, essa distinção contribui para que possamos perceber que no ensino escolar, por exemplo, em um enunciado de exercício/problema, a passagem da língua materna para a linguagem simbólica é considerada como parte do fazer matemática nessas duas perspectivas.

No quadro teórico dos “Três Mundos da Matemática” e na abordagem da Educação Matemática Realística, temos a concepção de matemática como atividade humana. Na RME, o objetivo educacional é que os alunos aprendam a fazer matemática como uma atividade e, no quadro teórico dos “Três Mundos da Matemática”, que aprendam a pensar matematicamente. Essas duas ideias nos dão uma “visão panorâmica” do que é matemática e do que é aprender matemática dando indicativos do que ensinar em matemática. Ao nos aproximarmos do Quadro Teórico dos “Três Mundos da Matemática” e da abordagem da Educação Matemática Realística, refinamos nosso “olhar” e direcionamos para outros aspectos/concepções que interferem no processo de ensino e aprendizagem. Os aspectos/conceitos apresentados no Quadro 05 podem ser vistos como complementares ou similares.

Quadro 06 - Educação Matemática Realística e o Quadro do Desenvolvimento do Pensamento Matemático de Tall: Ideias a respeito do como podemos ensinar e aprender matemática

Aspectos/ Concepções	Três Mundos da Matemática	Educação Matemática Realística	Considerações
Desenvolvimento individual X social	Em particular, os matemáticos vieram ao mundo como crianças recém-nascidas, do mesmo modo que todos nós passamos por um processo de desenvolvimento cognitivo pessoal dentro da sociedade como um todo (TALL, 2009, p.2). O desenvolvimento cognitivo individual de demonstração se relaciona diretamente com o desenvolvimento social a longo prazo, com base nos três *set-befores* de reconhecimento, repetição e linguagem, que dão o conceito da construção por meio de categorização, encapsulamento e definição, dando origem a três mundos mentais de matemática com base na concretização, simbolismo e formalismo (TALL, 2009, p.6).	Esta contradição desaparece se "individual" se interpreta como ser capaz de escolher a partir da própria maneira informal de pensar (construções) e "social" como interativa, em que conduz os alunos a considerar suas próprias estratégias criticamente (NELISSEN; TREFFERS, 2010, p. 399).	Tanto no quadro teórico dos "Três Mundos da Matemática" quanto na Educação Matemática Realística, o desenvolvimento individual e o desenvolvimento social são vistos como dois pontos de vista distintos, complementares, não contraditórios. Poderíamos dizer que o desenvolvimento cognitivo individual se dá na interação social.
Organização do ensino escolar	A teoria da corporificação conceitual,	Nesse livro, a trajetória de ensino e aprendizagem tem	Os "Três Mundos da Matemática", de acordo com Tall, é um quadro

	simbolismo proceptual e formalismo axiomático proposta oferece um quadro rico para interpretar aprendizagem matemática e pensar em todos os níveis, desde a matemática pré-escolar através de pesquisa matemática, e, em particular, na transição da escola para graduação em Matemática (TALL, 2014, p.17, tradução nossa). Um currículo que se concentra em simbolismo e não concretizações relacionadas pode limitar a visão do aluno que pode aprender a executar um procedimento, mesmo concebê-la como um processo global, mas não ser capaz de imaginar ou "encapsular" o processo como um 'objeto' (TALL, 2014, p.7, tradução nossa). Uma análise do desenvolvimento do pensamento matemático revela a surpreendente conclusão de que a matemática não é um sistema que se constrói logicamente na	três significados entrelaçados: • uma trajetória de aprendizagem que dá uma visão geral do processo de aprendizagem dos alunos; • uma trajetória de ensino que consiste em indicações didáticas que descrevem como o ensino pode se articular de maneira mais eficaz com o processo próprio de aprendizagem das crianças, e estimulá-las; • perfil do conteúdo programático, pois indica quais são os elementos centrais do currículo de matemática que devem ser ensinados VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010, p.28). • a singularidade do processos de aprendizagem de cada aluno; • as descontinuidades nos	teórico que favorece a interpretação de como os alunos aprendem matemática em todos os níveis de escolarização. Para Tall, uma análise do desenvolvimento do pensamento matemático revela que a matemática é um sistema que não se constrói logicamente na experiência anterior, nesse sentido faz uma crítica aos currículos lineares e que se concentram em simbolismos. A trajetória de ensino e aprendizagem com objetivos intermediários para o cálculo com números naturais, desenvolvida no Projeto TAL, é uma forma de organizar o ensino de operações com números naturais da Educação Infantil e até o final da primeira etapa do Ensino Fundamental. A trajetória de ensino e aprendizagem apresenta uma visão geral do processo de aprendizagem dos alunos, indicações didáticas de como o ensino pode ser articulado de maneira mais eficaz com o processo próprio de aprendizagem dos estudantes e de como estimulá-los e quais são os elementos centrais do currículo de matemática (conteúdos) que devem ser ensinados, levando-se em consideração a

	experiência anterior em cada etapa, mesmo que cada currículo de matemática do mundo tenha a intenção de apresentar tópicos em uma sequência coerente, cuidadosamente preparando o necessário pré-requisito em cada fase para os estágios mais sofisticados que se seguem. Pelo contrário, uma experiência que foi *met-before* favorável ainda pode ser em algumas novas situações problemática. (TALL, 2013c, p.5, tradução nossa). No entanto, um currículo tradicional geralmente é formulado em termos de *met-befores* de apoio que precisam ser ensinados como pré-requisitos para novas ideias. Raramente os *met-befores* problemáticas aparecem como parte integrante da aprendizagem, ainda, como veremos neste capítulo, podem ter efeitos em longo	processos de aprendizagem, já que às vezes os alunos progridem em saltos e outras vezes podem ter recaídas; • o fato de que os alunos são capazes de aprender múltiplas habilidades simultaneamente e que diferentes conceitos podem estar em desenvolvimento ao mesmo tempo, tanto dentro como fora da área de matemática; • as diferenças que podem aparecer no processo de aprendizagem na escola como resultado de disparidades em situações de aprendizagem fora da escola; • os diferentes níveis de domínio de certas habilidades que os alunos possuem (HEUVEL, 2010, p.28).	singularidade dos processos de aprendizagem de cada aluno, as descontinuidades nos processos de aprendizagem, o fato de que os alunos podem aprender múltiplas habilidades e diferentes conceitos ao mesmo tempo e os diferentes níveis de domínio dos alunos. Podemos considerar a Trajetória de Ensino e Aprendizagem desenvolvida no Projeto TAL como uma forma de organização do ensino de operações com números naturais que leva em consideração o como os alunos aprendem que está em consonância com as ideias de Tall (2013) acrescidas de orientações didáticas e dos conteúdos a serem trabalhados na Educação Infantil e nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

	prazo em uma aprendizagem debilitante. Nosso objetivo aqui é considerar encontros do aluno com conceitos numéricos mais sofisticados para revelar *met-befores* problemáticos que causam dificuldades que precisam ser abordadas para incentivar novas aprendizagens confiantes. Na verdade, uma vez que os efeitos dos *met-befores* problemáticos em longo prazo foi plenamente realizado, o ensino e a aprendizagem da matemática pode nunca mais ser a mesma. (TALL, 2013, p. 89, tradução nossa).		
Entrelaçamento dos eixos do conhecimento matemático	Esta ligação entre álgebra e geometria é um dos momentos decisivos da evolução matemática. Ela permite que as duas vertentes da matemática, uma baseada na corporificação visual e a outra em cálculos simbólicos, se unam e se complementem. As consequências	O princípio do entrelaçamento significa que os domínios matemáticos, tais como números, geometria, medição e manipulação de dados, não são consideradas como capítulos curriculares isoladas, mas como fortemente integrados. Aos alunos são oferecidos problemas ricos em	Para Tall, a evolução da matemática vincula-se ao estabelecimento de relações dentro e entre os conceitos nos Três Mundos da Matemática. Nesse sentido, a Matemática escolar é uma combinação de corporificação e simbolismo que revela aspectos complementares de ideias matemáticas. Na RME, os domínios matemáticos, tais como números e operações, medidas, tratamento da

	foram fenomenais. Nos anos que se seguiram, houve uma explosão de novas ideias matemática (TALL, 2013, p. 234). A crescente sofisticação constrói conceitos matemáticos com os relacionamentos internos dentro e entre os conceitos em todos os três mundos (TALL, 2011a, p.6). Matemática escolar combina corporificação e simbolismo para revelar aspectos complementares de ideias matemáticas (TALL, 2013, p. 403).	que eles podem usar várias ferramentas matemáticas e conhecimento. Este princípio também se aplica aos tópicos dentro de domínios. Por exemplo, no domínio do número, isso significa que o sentido de número, aritmética mental, estimativa e algoritmos são ensinados em estreita ligação entre si (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010a, p. 2).	informação, grandezas e medidas, não são capítulos isolados nos currículos, mas fortemente integrados. O entrelaçamento também se aplica aos tópicos dentro de domínios. Ideias similares.
Contexto	Um conceito cristalino pode ser dado por uma definição de palavras tal como "um conceito que tem uma estrutura interna de relações com restrições que fazem com que tenha propriedades necessárias como parte de seu contexto" (TALL; YEVDOKIMOV; KOICHU; WHITELEY; KONDRATIEVA; CHENG, 2012a,	Uma característica de uma tarefa apresentada aos alunos: referindo-se tanto às palavras e imagens que ajudam os alunos a compreender a tarefa, ou a respeito da situação ou evento em que a tarefa está situada. A descrição de um contexto, dada por Borasi (1986), se aproxima da interpretação de um contexto como uma característica tarefa (VAN DEN	No quadro teórico do Desenvolvimento do Pensamento Matemático de Tall, os conceitos matemáticos chamados de conceitos cristalinos estão vinculados a um determinado contexto e há indicativos de que, para a transição de uma forma de pensamento para outra (por exemplo, da corporificada para a simbólica) ou de um nível para outro (por exemplo, da Matemática Prática para a Matemática Teórica),

	p.7). Fazer uma transição natural da corporificação para formalismo requer trabalhar em um contexto apropriado, onde as ideias de corporificação traduzam naturalmente para o formalismo (TALL, 2013, p.320).	HEUVEL-PANHUIZEN, 2005, p. 2). Além disso, o grau de realidade de um contexto é relativo. De Lange se pergunta quão perto do mundo dos estudantes o contexto deve ser necessariamente. [...] Uma regra única nem sempre pode ser encontrada para a escolha de contextos, mas devemos pelo menos tentar criar um equilíbrio entre um bom contexto e um bom problema matemático (De Lange, 1995) (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2005, p. 4).	é necessário trabalhar em contextos apropriados para que a transição seja natural. Na Educação Matemática Realística, o uso de contextos está presente nos enunciados das tarefas que são propostas aos estudantes. Ideias complementares.
Resolução de Problemas	Para ele [Skemp], a aprendizagem matemática torna-se agradável, com a matemática fazendo sentido e resolvendo problemas interessantes que estão ao alcance do aluno disposto a aceitar um desafio (TALL, 2010c, p.10).	Em outras palavras, a resolução de problemas na RME não significa simplesmente a realização de um procedimento fixo em situações de jogo. Por conseguinte, os problemas podem ser resolvidos de formas diferentes (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2005, p. 3). Problemas de palavras sempre foram objetos suspeitos dentro da	Para Tall, a aprendizagem matemática se torna agradável, com significado, quando o estudante resolve problemas interessantes que estão ao seu alcance. Na Educação Matemática Realística, os alunos devem aprender a analisar e organizar situações-problema e aplicar a matemática de forma flexível em situações problematizadas que sejam significativas para eles. Os problemas devem ser de tal modo

		RME (Van den Heuvel-Panhuizen, 1996). Claro, ligar problemas à realidade é importante. Isso significa que, na RME, alunos são a apresentados problemas que eles podem imaginar e com os quais têm experiência de vida diária, mas isso não significa que problemas de palavras têm um papel central na RME. O ponto crucial é que os problemas são apresentados em um contexto significativo e acessível. Por isso, eles são muitas vezes apresentados visualmente por meio de imagens, modelos e diagramas. Problemas de palavras com formas complicadas de explicar um problema são evitados. Eles não podem ser considerados problemas típicos da RME (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010a, p. 3). Os alunos devem aprender a analisar e organizar situações-problema e aplicar a matemática de forma	que eles possam ser resolvidos de diferentes formas e em diferentes níveis. No quadro do desenvolvimento do Pensamento Matemático, há um indicativo de que a aprendizagem de matemática com significado se dá por meio da resolução de problemas que sejam interessantes e estejam ao alcance do estudante. Na Educação Matemática Realística, há um “olhar” mais refinado para os problemas. Os problemas são apresentados em um contexto significativo e acessível acrescentando-se outros elementos, tais como problemas que possam ser resolvidos de diferentes formas e em diferentes níveis.

		flexível em situações que sejam significativas para eles. Do ponto de vista do estudante, os problemas devem, portanto, ser acessíveis, convidativos, e valerem a pena de serem resolvidos. Os problemas devem também ser um desafio (Treffers, 1987) e devem ser óbvios para os alunos por-que é necessária uma resposta a uma determinada pergunta (Gravemeijer, 1982). Este aspecto significativo dos problemas também pode permitir aos alunos representar ou pensar em perguntas para si mesmos (ver, por exemplo, Van den Heuvel-Panhuizen, Middleton e Streefland, 1995) (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2005, p. 3). Os problemas devem ser de tal modo que eles possam ser resolvidos de formas diferentes e em diferentes níveis. Dessa forma, os problemas tornam o processo de aprendizagem transparente - tanto	

		para os professores e os alunos (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2005, p. 3). Os problemas também devem refletir "teste positivo", permitindo que os alunos demonstrem o que eles sabem, ao invés de simplesmente revelar o que os alunos ainda não sabem (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2005, p. 3).	
Novos conceitos a partir da resolução de problemas.	Aprender novos conceitos pode ser abordado na forma de resolução de problemas (TALL, 2012, p.11).	Assim, enquanto trabalham em problemas de contexto, os alunos podem desenvolver ferramentas matemáticas e compreensão (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2005, p. 2).	Os alunos ao lidarem/trabalharem/resolverem problemas podem aprender novos conceitos/ferramentas matemáticas. Ideias similares.
Avaliação	Os dados revelam até agora a necessidade de instrutores para tornar-se mais consciente dos processos de pensamento de seus alunos que muitas vezes os levam a construir ideias que se tornam problemáticas. Black & Wiliam (1998) examinou cerca de	Tais problemas também são necessários se a avaliação se destina a fornecer aos professores *footholds* para mais instruções. Esta pede problemas de avaliação que revelam o que é atingível para a criança no futuro próximo. Em outras palavras, dando dicas sobre o que Vygotsky chamou de	A avaliação formativa no processo de ensino e aprendizagem é considerada adequada e relevante tanto no quadro do desenvolvimento do pensamento matemático quanto na RME. Ideias similares.

	250 estudos e descobriu que os ganhos de aprendizagem dos alunos resultaram de uma variedade de métodos, todos os quais tiveram uma característica comum: a avaliação formativa. Essa é uma forma de avaliação que usa os dados adquiridos para adaptar a instrução para melhor atender às necessidades dos alunos (TALL; McGOWEN, 2013d, p. 25).	"zona de desenvolvimento proximal" exige "teste antecedência" (Van den Heuvel-Panhuizen, 1996). Uma consequência dessa visão é que em particular o conhecimento tem de ser avaliado antes de ter sido ensinado (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2005, p. 3).	
Níveis	As percepções e operações humanas se tornam mais sofisticadas por meio do desenvolvimento do raciocínio humano. Eu uso as ideias de van Hiele (1986) para ver o desenvolvimento em matemática em geral por meio dos níveis de reconhecimento, descrição, definição e dedução. Eu vejo isso mais como um amplo desenvolvimento que encoraja as crianças a fazer sentido da matemática de uma forma significativa, ao invés de executar uma	O princípio de nível sublinha que aprender matemática significa que os alunos passam por vários níveis de compreensão: a partir da capacidade de inventar soluções informais relacionadas ao contexto, à criação de vários níveis de atalhos e esquematização, à aquisição de *insights* de como os conceitos e estratégias são relacionados. Modelos servem como um dispositivo importante para fazer a ponte entre as matemáticas informais relacionadas com o contexto e as	Tall apresenta três grandes níveis de desenvolvimento do pensamento matemático: matemática prática, matemática teórica e matemática formal. Eles são vistos mais como um amplo desenvolvimento que encoraja as crianças a fazer sentido da matemática de uma forma significativa. Na RME, o princípio de níveis está vinculado ao método didático de esquematização progressiva. Ideias complementares.

	microanálise de vários níveis para ser utilizado na avaliação que muitas vezes provoca os professores a ensinar para o teste. Em termos gerais, ao longo do tempo, sugiro que ocorram três grandes níveis da matemática denominados matemática prática, matemática teórica e matemática formal (TALL, 2013a, p.11). Desenvolvimento de conceitos cristalinos: • reconhecimento de percepção dos fenômenos em que os objetos têm propriedades simultâneos, • descrição verbal de propriedades, muitas vezes relacionadas com representações visuais ou simbólicos, para começar a pensar sobre as propriedades e relacionamentos específicos, • definição e dedução, para definir quais conceitos vão satisfazer a definição e desenvolver princípios de prova	matemáticas mais formais. A fim de cumprir essa função de ponte, os modelos têm de mudar de um "modelo de" uma situação particular para um "modelo para" todos os outros tipos, mas em situações equivalentes (Streefland, 1985, 1993, 1996; ver) também Van den Heuvel -Panhuizen, 2003). Para o ensino de cálculos, o princípio de nível reflete-se no método didático de esquematização progressiva (Treffers, 1982a, 1982b) (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010a, p. 5). Além disso, deve-se ter em mente que matematização pode ocorrer em diferentes níveis de compreensão (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2005, p. 5).	

	adequado para deduzir que uma propriedade implica uma outra, • perceber que algumas propriedades são equivalentes, de modo que o conceito tem agora uma estrutura com propriedades equivalentes que são relacionadas por prova dedutiva, • e que essas propriedades são diferentes formas de expressar um conceito cristalino subjacente cujas propriedades são ligadas entre si por demonstração dedutiva (TALL; YEVDOKIMOV; KOICHU; WHITELEY; KONDRATIEVA; CHENG, 2012a, p.7 e 8). Esse foco leva a conceitos pensáveis compactados que mudam para um outro nível para construir uma nova estrutura de conhecimento de relações com os novos conceitos que são prontamente pensáveis no novo nível. O novo nível então torna-se concreto em termos de riqueza		

	de significados quando percebido pelo indivíduo, com conexões flexíveis e diferentes formas de pensar a respeito das ideias subjacentes (TALL, 2013, p. 400).		
Ação do estudante	A minha opinião é que os alunos devem assumir a responsabilidade pela sua própria aprendizagem, uma vez que eles têm a maturidade para fazê-lo, o que inclui o desenvolvimento de seus próprios métodos para a resolução de problemas (TALL, 2012w, p.11).	O princípio da atividade refere-se à interpretação da matemática como uma atividade humana (Freudenthal, 1971, 1973). Na RME, os alunos são tratados como participantes ativos no processo de aprendizagem. Transferência de matemática pronta diretamente para os estudantes é uma inversão antididática (Freudenthal, 1973) que não funciona (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010a, p. 4).	O estudante é visto como um sujeito participativo, ativo no processo de aprendizagem, tanto no Quadro Teórico do Desenvolvimento do Pensamento Matemático quanto na RME. O aluno é que desenvolve seus métodos de resolução de problemas. O contrário, na RME, é considerado como uma inversão anti-didática. Ideias similares.
Diferenças individuais	É a combinação de *set-befores* que todos nós compartilhamos em um maior ou menor grau e os *met-befores* pessoais que usamos para interpretar novas experiências que levam ao desenvolvimento pessoal e corporificado do pensamento	A seu devido tempo, por meio dos olhos dos demais, aprendem a olhar seu próprio processo de pensamento e as estratégias utilizadas. Pode-se dizer que o diálogo externo que se tem com os outros se transforma em um diálogo interno consigo mesmo. O diálogo interno se	No quadro teórico do desenvolvimento do pensamento Matemático, as diferenças individuais são apontadas tanto em relação aos *set-befores* quanto aos *met-befores*. Na Educação Matemática Realística, há espaço para os estudantes resolverem suas tarefas utilizando-se de seu próprio processo de pensamento

	matemático (TALL, 2009, p.2). O caminho para o desenvolvimento do pensamento flexível em longo prazo não é o mesmo para todos (TALL, 2013, p.118). O *framework* dos 3 mundos oferece uma visão de todo o desenvolvimento do pensamento matemático, tendo em conta os efeitos emocionais e *met-before* de apoio e problemáticos que incentivam ou impedem a aprendizagem em contextos mais sofisticados. Isto sugere a necessidade de encontrar formas de ensino e aprendizagem que permitam que alunos muito diferentes façam sentido pessoal da matemática de forma coerente (TALL, 2013, p. 416).	chama reflexão. Aprender a refletir é, em outras palavras, característica da didática realística interativa e está fortemente conectada com os propósitos gerais da educação matemática (NELISSEN; TREFFERS, 2010, p. 397).	e estratégias. As discussões no grupo (externas) se transformam em um diálogo interno. Esse diálogo interno é chamado de reflexão. Ideias complementares.
Papel do professor	Eu também acredito que os professores têm o dever, como mentores, de ajudar a focalizar os estudantes em métodos que são mais poderosos e têm mais valor e	O princípio de orientação significa que aos alunos são fornecidas oportunidades "guiadas" para "reinventarem" a matemática (Freudenthal, 1991). Isto implica que, na	No quadro teórico do desenvolvimento do pensamento matemático, o professor atua como mentor em contextos bem projetados para incentivar os alunos a compartilharem a construção de novos

	mais essência a longo prazo (TALL, 2012w, p.11). Isso leva-nos a considerar a abordagem conexionista mais produtiva para a aprendizagem porque o professor atua como mentor em contextos bem projetados para incentivar os alunos a compartilharem a construção de novas ideias de forma que faça sentido para eles (TALL, 2013f, p.15). Educadores e professores de Matemática em todos os níveis precisam se tornar cientes do processo de desenvolvimento de base na experiência anterior, que ocorre em todos os níveis de aprendizagem. Este não é apenas um problema de nossos alunos, mas de nossa própria necessidade de compreender como as ideias matemática se desenvolvem em sofisticação e como organizar e aprender a	RME, os professores devem ter um papel pró-ativo na aprendizagem dos alunos e que os programas educativos devem conter cenários que tenham potencial para funcionar como uma alavanca para atingir mudanças na compreensão dos alunos. Para realizar isso, o ensino e os programas devem basear-se numa trajetória de ensino e aprendizagem coerente de longo prazo (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010a, p. 5).	conhecimentos. Na RME, o professor atua como guia, exercendo um papel pró-ativo na aprendizagem dos alunos em programas educativos com cenários que têm potencial para funcionar como alavanca para atingirem mudanças na compreensão. Ideias similares.

	construir conhecimento e confiança para o futuro, em vez de cair em uma espiral descendente de confusão problemático e desamor (TALL, 2013d, p.20).		
Interatividade	Isto leva-nos a considerar a abordagem conexionista mais produtiva para a aprendizagem porque o professor atua como mentor em contextos bem desenhados para incentivar os alunos a compartilharem a construção de novas ideias de forma que faça sentido para eles (TALL, 2013f, p.15).	O princípio de interatividade da RME significa que a aprendizagem da matemática não é apenas uma atividade pessoal, mas também uma atividade social. Portanto, RME é a favor do ensino da classe toda. A educação deve oferecer aos alunos oportunidades para compartilharem suas estratégias e invenções com outros estudantes. Dessa forma, eles podem obter ideias para melhorar suas estratégias. Além disso, a reflexão é evocada, o que lhes permite atingir um nível mais elevado de compreensão (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010a, p. 5).	No Quadro Teórico do Desenvolvimento do Pensamento Matemático, a interatividade está vinculada à ideia de os alunos compartilharem ideias matemáticas de forma que façam sentido para eles. Na RME, devem-se oferecer aos alunos oportunidades para compartilharem suas estratégias e invenções com os outros estudantes para que possam melhorar suas estratégias, além da reflexão evocada que lhes permite atingir um nível mais elevado de compreensão. Ideias similares.
Construção do conhecimento pelo estudante	Conceitos Cristalinos não surgem só como o cume do pensamento matemático, eles são também compreendidos	O verdadeiro propósito de enfatizar problemas realísticos [é] para incentivar os alunos a construir e investigar ideias matemáticas	Construção do conhecimento matemático de forma flexível, a partir do conhecimento atual, é comum nas duas abordagens. Na RME há indicativos

	numa fase inicial por muitas crianças quando elas percebem relações flexíveis entre números e as usam para simplificar a sua compreensão da aritmética. A longo prazo, um sentido da coerência subjacente dos conceitos matemáticos tem o potencial para apoiar o amadurecimento do pensamento matemático em cada nível (TALL, 2013, p. 405). Contudo, a escolha da estratégia de ensino não é uma alternativa entre compreensão conceitual ou fluência operacional. Pensamento matemático poderoso exige ambos. O seu desenvolvimento a longo prazo é reforçado por fazer sentido das ideias geradoras que atuam como uma base para a compressão de estruturas ricas em conceitos pensáveis ligados entre si de forma flexível em estruturas de conhecimento coerente	poderosas e úteis [...] com base em extensões, adaptações, ou aperfeiçoamentos de seu próprio conhecimento e experiência pessoal (Lesh e Lamon, 1992, p. 39) (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2005, p. 9).	de como fazer para oportunizar ao aluno o fazer matemática.

	relacionadas (TALL, 2013, p. 132).		
Pensamento Matemático	O poder no pensamento matemático reside não só na formulação de axiomas para descrever uma situação familiar; origina-se de misturar ideias em novas maneiras de resolver problemas novos e, ao fazê-lo, criar novos conceitos cristalinos e teoremas de estrutura que levam a novas formas de corporificação e simbolismo sustentados por demonstrações formais (TALL, 2013, p. 360). Para compreender a extensão completa do pensamento matemático, desde as ideias iniciais da criança até os mais altos níveis de rigor, é necessário ter em conta a visão panorâmica da matemática, incluindo os pontos de vista de matemáticos também tendo em conta as necessidades do desenvolvimento de cada indivíduo que sigam suas viagens pessoais	E logo, sob a supervisão do professor devem manter uma discussão a respeito das soluções, o que provoca de novo uma reflexão, agora como resultado desta interação, as crianças vêm refletidos, como em um espelho, os diferentes processos de pensamento (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010, p. 400).	

	por meio da matemática (TALL, 2013, p. 152).		
Linguagem	Após longos períodos de reflexão, fiquei surpreso ao descobrir que apenas três *set-befores* formam a base do pensamento matemático. O primeiro *set-before* é o que nos permite reconhecer semelhanças, diferenças e padrões. O segundo é a repetição, que nos permite praticar uma sequência de ações para ser capaz de realizá-lo automaticamente. O terceiro é a capacidade para a linguagem que dá ao Homo Sapiens a vantagem de ser capaz de nomear os fenômenos que reconhecemos e simbolizar as ações que realizamos para construir maneiras cada vez mais sofisticadas de pensar (TALL, 2009, p.2).	Uma vantagem importante do ensino interativo é a que oferece oportunidades para o uso da linguagem e, como sabemos, o desenvolvimento do pensamento matemático se apoia fortemente no da linguagem (NELISSEN; TREFFERS, 2010, p. 391). Na RME, como já foi dito, se dá grande valor tanto para a interação horizontal quanto para a vertical. Também se presta muita atenção no desenvolvimento da liguagem, dado que esta constitui o fundamento para o avanço do pensamento matemático. É evidente então que, no enfoque didático que apresentamos, a linguagem desempenha um papel central (NELISSEN; TREFFERS, 2010, p. 396).	No quadro do desenvolvimento do pensamento matemático de Tall e na Educação Matemática Realística, a linguagem desempenha um papel central e com isso emerge a necessidade da interação entre estudantes e estudantes e professores. Ideias similares.
Abordagem natural	O retorno final do formalismo para uma forma mais sofisticada de corporificação e simbolismo por meio da estrutura	Assim como a matemática surgiu a partir da matematização da realidade, do mesmo modo a aprendizagem da	Aritmética e álgebra / geometria [matemática] - tem curso natural que foi percorrido ao longo da história que é apresentado no Quadro Teórico do

	de teoremas me leva a ver os três mundos da matemática como uma estrutura natural por meio da qual o cérebro biológico constrói uma mente matemática (TALL, 2014, p. 17). Em particular, a abordagem natural preconizada no capítulo 11 — misturando ação humana dinâmica e percepção com simbolismo algébrico - não só é adequada para as necessidades práticas e teóricas da população mais ampla para seu futuro papel na sociedade, mas também oferece uma fundação natural para a estrutura cristalina do cálculo como uma ferramenta poderosa nas aplicações e como uma teoria formal em qualquer análise padrão usando os números reais, ou análise fora do padrão, em uma mistura extensional que inclui infinitesimais (TALL, 2013, p.362).	matemática tem que ser originada na matematização da realidade (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2005, p.2). Crianças deveriam repetir o processo de aprendizagem da humanidade, não como isso de fato ocorreu, mas, sim, como ele teria sido feito se as pessoas no passado tivessem conhecido um pouco mais do que nós sabemos agora (FREUDENTHAL, 1991, p. 48). Na RME, se começa a ensinar com o que os próprios alunos fazem - que tem variação natural – e, a partir daí, gradualmente, trabalha-se no sentido de um método padrão, o que, no entanto, não é uma camisa de força. Os alunos devem ter uma compreensão dos números com os quais eles calculam, e, se possível, encurtando os métodos de cálculo ou estratégias inteligentes - o que implica uma variação intencional na estratégia que reflete o alto nível de	Desenvolvimento do Pensamento matemático de Tall - uma rota para o processo de ensino e aprendizagem. Na RME, isso não significa que se deva ensinar como aconteceu antigamente, mas como ele teria sido feito se as pessoas no passado tivessem conhecido um pouco mais do que sabemos agora. Ideias complementares.

	Em cada caso, a vertente do desenvolvimento humano começa a partir da percepção e ação, por meio da experiência de objetos e propriedades, que são descritos, com significados que são refinados e definidos, então os conceitos pensáveis mais sofisticados que têm uma estrutura rica de conhecimento são construídos (TALL; YEVDOKIMOV; KOICHU; WHITELEY; KONDRATIEVA; CHENG, 2012a, p.34). Entretanto, o mundo simbólico da aritmética prática desenvolve as operações que são compactados em conceito de números que são percebidos como tendo propriedades genéricas que se aplicam não apenas para exemplos específicos, mas funcionam como princípios mais gerais. Estes princípios são	entendimento de número que a RME quer que os alunos alcancem[24] (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010a, p. 2).	

[24] RME starts teaching with following on from what students themselves come up with and do — which has natural variation — and from thereon gradually works towards a standard method, which is however not a straitjacket. The students must have an understanding of the numbers with which they calculate, and if possible use shortened calculation methods or smart strategies — which implies an intentional variation in strategy that reflects the high level of number understanding that RME wants students to reach.

	usados como 'regras de aritmética' no nível teórico do mundo simbólico como fundações para demonstração algébrica. Isso pode mais tarde evoluir para o mundo formal axiomático da matemática pura na Universidade (TALL, 2013, p. 187).		

Ao término dessa minha “viagem” de estudo pelo Quadro Teórico do Desenvolvimento do Pensamento Matemático de Tall tendo como “guia” a Educação Matemática Realística e, ao mesmo tempo, viagem essa meu objeto de investigação especulativa, o exercício de “olhar para fora” para os aspectos teóricos e “olhar para dentro” para a dinâmica das aulas ministradas se tornou uma rotina.

Ao cotejar o Quadro Teórico do Desenvolvimento do Pensamento Matemático de Tall e a abordagem Educação Matemática Realística, para buscar identificar a existência ou não de aproximações, o exercício de “olhar para um lado” e de “olhar para outro” se fez presente. Entre outras coisas, encontramos na base do Quadro Teórico do Desenvolvimento do Pensamento Matemático e da Educação Matemática Realística uma forma de ensino que oportuniza aos estudantes uma aprendizagem matemática com sentido; uma dinâmica de sala de aula na qual a atuação do professor como mentor/guia) e do aluno como sujeito ativo e responsável pela sua aprendizagem precisam estar sincronizados; tarefas de resolução de problemas que possibilitam a matematização horizontal e vertical (a “viagem” pelos mundos corporificado e simbólico).

As ações de interpretar, argumentar, recontar constituem esse trabalho. Esse texto é a forma que escolhi para apresentar o estudo e a pesquisa desenvolvidos nesse período de quatro anos. Não é o fim da minha história, é o começo de outras histórias escritas por mim e por outros tantos colegas.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. M. W. de. **Modelagem Matemática e Pensamento Matemático Avançado** – um estudo à luz dos Três Mundos da Matemática. Artigo. Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Universidade Estadual de Londrina – UEL. [s.d.] Disponível em: <www2.rc.unesp.br/eventos/matematica/.../176-1-A-gt9_palharini_ta.pdf>. Acesso em:10 ago. 2015.

ALMEIDA, L. M. W.; PALHARINI, B. N. . Os “Mundos da Matemática” em atividades de Modelagem Matemática. **Bolema**. Rio Claro – São Paulo, v. 26, n. 43, ago. 2012, p. 907-934.

ANGELIN, N. M. **Funções** - um estudo baseado nos Três Mundos da Matemática. 2010, 219 f.(Dissertação) Mestrado em Educação Matemática. Universidade Bandeirante de São Paulo – UNIBAN.

ASHCRAFT, M.H.; KIRK, E.P. The relationships among working memory, math anxiety, and performance. **Journal of Experimental Psychology**, 130(2), 2001.

BAKHTIN. M.. **Estética da criação verbal**. Tradução de Maria Ermantina Pereira. 2. ed. São Paulo: Martins Fontes, 1997.

BRUNER, J. S. **The Process of Education**. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1977.

BRUNER, J. S. **Towards a Theory of Instruction**. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1966.

BURIASCO, R. L C. de. **Avaliação em matemática**: um estudo das respostas de alunos e professores. 1999. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual Paulista, Marília, 1999.

CIANI, A. B. **O realístico em questões não-rotineiras de Matemática. 2012.** Tese (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2012.

COSTA, C, **Processos mentais associados ao pensamento matemático avançado -** visualização. Artigo. Escola Superior de Educação de Coimbra, 2002. Disponível em*:* <http://spiem.pt/DOCS/ATAS_ENCONTROS/2002/2002_16_CCosta.pdf>. Acesso em: 12 jul. 2014.

CRUZ, Maria Nazaré da. Desenvolvimento cognitivo em Vygotsky: “Entre os ideais da matemática e a harmonia da imaginação. In: **28ª Reunião da Anped**, 2005, Caxambu, 2005, P.1-15.

DE LANGE, J. Assessment: no change without problems. In: ROMBERG, T.A. (ed.). **Reform in School Mathematics**. Albany, NY: SUNY Press, 1995.

DE LANGE, J. **Mathematics, Insight and Meaning.** Utrecht: OW &OC, 1987.

DEACON, T. **The Symbolic Species**: The Co-evolution of Language and the Human Brain. London: Penguin, 1997.

DOMINGOS, A. Contextos escolares que favorecem o pensamento matemático avançado. **Educação Matemática Pesquisa**. São Paulo, v. 15, n. 3, 2013, p. 590-605.

DREYFUS, T. Advanced Mathematical Thinking Processes. In: **Advanced Mathematical Thinking** (Vol. 11, pp. 25-41). Kluwer Academic Publishers, 1991. Educacional Studies in Mathematics, 22, 1-36, 1991.

FÁVERO. M. H. **Psicologia e Conhecimento:** subsídios da psicologia do desenvolvimento para a análise de ensinar e aprender. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 2014.

FERREIRA, P. E. A. **Enunciados de tarefas de Matemática:** um estudo sob a perspectiva da Educação Matemática Realística. 2013. Tese (Programa de PósGraduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

FERREIRA, P. E. A.; BURIASCO, R. L. C. Enunciados de Tarefas de Matemática Baseados na Perspectiva da Educação Matemática Realística. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 29, n. 52, p. 452-472, ago. 2015.

FERREIRA, P. E. A.; BURIASCO, R. L. C. Educação matemática realística: uma abordagem para os processos de ensino e de aprendizagem**. Educ. Matem. Pesq.**, São Paulo, v.18, n.1, pp. 237-252, 2016

FISCHBEIN, E. **Intuition in Science and Mathematics**: an educational approach. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer, 1987.

FREUDENTHAL, H. **Revisiting Mathematics Education**. Netherlands: Kluwer Academic Publishers. 1991.

FREUDENTHAL, H. **Didactical phenomenology of mathematical structures**. Dordrecht: Kluwer, 1993.

FREUDENTHAL, H. Geometry between the devil and the deep sea. **Educational Studies in Mathematics**, v. 3, n. 3-4, p. 413-435, 1971.

FREUDENTHAL, H. **Mathematics as an educational task**. Dordrecht: Reidel Publis, 1973.

FREUDENTHAL, H. Why to teach mathematics as to be useful? **Educational Studies in Mathematics**, 1(1), 3-8, 1968.

GRAVEMEIJER, K. **Developing realistic mathematics education**. Freudenthal Institute. Utrecht, The Netherlands, 1994.

GRAVEMEIJER, K. **Emergent modeling as the basis for an instructional sequence on data analysis**. Freudenthal Institute. Utrecht, The Netherlands, 2002.

GRAVEMEIJER, K. P. E.; TERWEL J. Hans Freudenthal: a mathematician on didactics and curriculum theory. **Journal of Curriculum Studies**, v. 32, n. 6, p. 777-796, nov-dez. 2000.

GRAY, E. ; TALL. D. O. Success and Failure in Mathematics: Procept and Procedure – A Primary Perspective, **Workshop on Mathematics Education and Computers**, Taipei

National University, April 1992, 209–215, 1992k. Disponível em:<https://homepages.warwick.ac.uk/.../David.Tall/.../do>. Acesso em: 18 ago 2014.

GRAY, E.; TALL. D. O. Duality, Ambiguity and Flexibility: A Proceptual View of Simple Arithmetic. **The Journal for Research in Mathematics Education**, 26 (2), 115–141. 1994a. Disponível em:<https://homepages.warwick.ac.uk/.../David.Tall/.../do>. Acesso em: 10 jul 2014.

HADI, D. **Effective teacher professional development for the implementation of Realistic Mathematics Education in Indonesia**. 2002. Thesis, 454p. University of Twente, Enschede, 2002.

HIEBERT, U.; LEFEVRE, P. Procedural and conceptual knowledge. In: J. Hiebert (Ed.), **Conceptual and Procedural Knowledge:** The Case of Mathematics (pp. 1-27). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, 1986.

LAKOFF, G., JOHNSON M. **Philosophy in the Fresh: The Embodied Mind and Its Challenge o Western Thought**, New York: Basic Books, 1999.

LESSA, Mônica Maria Lins; FALCÃO, Jorge Tarcísio da Rocha. Pensamento e linguagem: uma discussão no campo da psicologia da educação matemática. **Psicologia: Reflexão e Crítica**. [online]. 2005, vol.18, n.3, pp.315-322.

LIBÂNEO, José Carlos. A didática e a aprendizagem do pensar e do aprender: a teoria histórico-cultural da atividade e a contribuição de Vasili Davydov. **Rev. Bras. Educ**. [online]. 2004, n.27, pp.5-24. ISSN 1413-2478. http://dx.doi.org/10.1590/S1413-24782004000300002.

LIMA, R. N.; TALL, D. O. Procedural embodiment and magic in linear equations. **Educational Studies in Mathematics**, 67(1), 3–18. 2008a. Disponível em:<https://homepages.warwick.ac.uk/.../David.Tall/.../do>. Acesso em: 10 jul 2014.

TALL, D.O; YEVDOKIMOV, O.; KOICHU, B. WHITELEY, W, KONDRATIEVA, M.; CHENG, Y.H.; The Cognitive Development of Proof. IN: HANNA, G.; DE VILLIERS, M. (eds). **ICMI 19**: Proof and Proving in Mathematics Education, p. 13-49, 2012a.

MACHADO. S. D. A.; BIANCHINI, B. L. Aportes dos processos do Pensamento Matemático Avançado para a reflexão do professor sobre sua “forma” de pensar a Matemática. **Educação Matemática**. São Paulo, v. 15, n. 3, 2-13, p. 590-605, 2013.

MAMONA-DOWNS, J.; DOWNS, M. L. N. Advanced Mathematical thinking and the role of mathematical structure. In: ENGLISH, L. D. (ed.) **Handbook of International Research in Mathematics Education**. New York: Routledge, 2008, p. 14-174. Disponível em:<https://homepages.warwick.ac.uk/.../David.Tall/.../do>. Acesso em: 10 jul 2014.

MARINS, A. S. **Pensamento matemático avançado em tarefas envolvendo transformações lineares.** 2014, 176f. (Dissertação). Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Universidade Estadual de Londrina – UEL. Disponível em: <www.bibliotecadigital.uel.br/document/?code=vtls000190115>. Acesso em: 10 jul. 2014.

MARTINEAU, S.; SIMARD, D.; GAUTHIER, C. Recherches théoriques et spéculatives: considérations méthodologiques et épistémologiques. **Recherches qualitatives**, v. 22, n. 3, p. 32, 2001.

MASON, J.; BURTON, L.; STACEY, K. **Thinking Mathematically**. London: Pearson. 1982

MCGOWEN, M. C.; TALL, D. O. Metaphor or Met-before? The effects of previous experience on the practice and theory of learning mathematics. **JOURNAL OF MATHEMATICAL BEHAVIOR** 29, 169–179. 2010. Disponível em:<https://homepages.warwick.ac.uk/.../David.Tall/.../do>. Acesso em: 10 jul 2014.

NCTM. Conselho Nacional de Professores de Matemática. **Princípios e normas para a matemática escolar**. Lisboa: APM, 2000.

NELISSEN, J.; TREFFERS, A. Marco de Enseñanza. In: VAN DEN HEUVEL-PANHIZEN, M. **Los niños arpeden matemáticas: una trayectoria de aprendizaje-enseñanza con objetivos intermedios para el cálculo con números naturales en la escuela primaria** . tr. del inglés Fernanda Gallego y Betina Zolkower; tr. del neerlandés Cornelis van der Meer, México: Correio del maestro: La Vasija, 2010.

OLIVEIRA, R. C. **Matematização: estudo de um processo.** 2014. 62f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

PASSOS, A. Q. **Van Hiele, Educação Matemática Realística e GEPEMA: algumas aproximações**. 2015. 147 f. Tese (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2015.

PIAGET, J. **The Child´s Conception of Number**. London: Routledge & Kegan Paul, 1952.

PIAGET, J. The Language and Thougt of the Child. New York: Harcourt, Brace, Jovanovich, 1926

ROMERO, R.L**. Evaluación de Competencias Matemáticas. Proyecto PISA/OCDE 2003.** Actas del VIII Simposio de la SEIEM, 2004.

SANTANA, Suely de Melo Santana; ROAZZI Antonio; DIAS, Maria das Graças B. B. Paradigmas do desenvolvimento cognitivo: uma breve retrospectiva**. Estudos de Psicologia**. Volume 11 no.1. Natal, 2006, p. 71-78.

SILVA, G. S. **Uma configuração da reinvenção guiada**. 2015. 94f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2015.

SKEMP, R. R. **Intelligence, Learning, and Action**. London: John Wiley & Sons, 1979.

SKEMP, R. R. **Relational understanding and instrumental understanding**. Mathematics Teaching, 77, 20-6, 1976.

SOUZA, B. N. P. A.; OLIVEIRA, C. F. de; ALMEIDA, L. M. W. de. A teoria dos Três Mundos da Matemática associada a uma atividade de modelagem matemática. **Anais.** Encontro Paranaense de Educação Matemática. A Educação no Paraná – 20 Anos, Londrina – Paraná, 17 a 19 setembro 2009. Disponível em: <www.uel.br/grupo-pesquisa/grupemat/docs/CC03_eprem2009.pdf>. Acesso em: 10 ago. 2014.

STACEY, K. What is mathematical thinking and why is it important? **APEC Symposium. Innovative teaching mathematics through lesson study II**. December, 2006. Disponível em: www.criced.tsukuba.ac.jp/math/.../Kaye%20Stacey. Acesso em: jul. 2015.

STEIN, M. K.; GROVER, B. W.; HENNINGSEN, M. Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: An analysis of mathematical tasks used in reform classrooms. **American Educational Research Journal**, 33(2), 455-488, 1996.

TALL, D. O. **How humans learn to think mathematically**. Cambridge: Cambridge University Press, 2013.

TALL, D. O. A Sensible Approach to the Calculus. To appear. **Handbook on Calculus and its Teaching**, ed. François Pluvinage & Armando Cuevas, 2012.

TALL, D. O. **Advanced Mathematical Thinking**, Kluwer: Dordrech, 1991.

TALL, D. O. **Building and testing a cognitive approach to the calculus using interactive computer graphics**.1986.504f. PhD thesis, University of Warwick.

TALL, D. O. Cognitive and social development of proof through embodiment, symbolism & formalism. ICMI Study 19. 2009a, p. 220-225. Disponível em: <https://scholar.google.com.br/scholar?q=COGNITIVE+AND+SOCIAL+DEVELOPMENT+OF+PROOF+THROUGH+EMBODIMENT,+SYMBOLISM+%26+FORMALISM&hl=pt-BR&as_sdt=0&as_vis=1&oi=scholart&sa=X&ei=JNlXVbzBGILngwTYqoCgBQ&ved=0CBoQgQMwA>. Acesso em: 10 mar. 2015

TALL, D. O. Concept Images, Computers, and Curriculum Change. **For the Learning of Mathematics**, v. 9, n. 3, 189, p. 37–42, 2009b. Disponível em: <https://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2009b-mejia-tall-proof.pdf>.Acesso em: 15 mar. 2015.

TALL, D. O. Crystalline concepts in long-term mathematical invention and discovery. **For the Learning of Mathematics**, v. 31, n. 1, p.3-8, 2011a. Disponível em:<https://homepages.warwick.ac.uk/.../David.Tall/.../do>. Acesso em: 15 mar 2015.

TALL, D. O. **Dynamic mathematics and the blending of knowledge structures in the calculus.** ZDM – Mathematics Education. 2009. Disponível em: <link.springer.com/.../10.1007%2Fs11858-009-0192-6>. Acesso em: 10 mar. 2015.

TALL, D. O. GRAY, E. M.; PINTO, M.; PITTA, D. Knowledge construction and diverging thinking in elementary & advanced mathematics. **Educational Studies in Mathematics,** v. 38, n. 1-3, 1999, p. 111-133. Disponível em:<https://homepages.warwick.ac.uk/.../David.Tall/.../do>. Acesso em: 15 mar 2015.

TALL, D. O. Integrating, History, Technology and Education in Mathematics. Plenary Presentation. **Universidade Federal de São Carlos**. Brasil. 15 de Julho de 2013. 2013f.

TALL, D. O. Intuition and rigour: the role of visualization in the calculus. In : Zimmermann & Cunningham, M.A.A. (ed.) **Visualization in Mathematics**, Notes, n. 19, 1991, p.105–119.

TALL, D. O. Looking for the bigger picture. **For the Learning of Mathematics**, v. 31, n.2, 2012c, p. 17-18.

TALL, D. O. Making Sense of Mathematical Reasoning and Proof. IN:FRIED, M. N.; DREYFUS, T. (eds.), **Mathematics & Mathematics Education**: Searching for Common Ground. New York: Springer, Advances in Mathematics Education series. DOI: 10.1007/978-94-007-7473-5_13. 2013c. Disponível em: <https://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2009b-mejia-tall-proof.pdf>.Acesso em: 15 mar. 2015.

TALL, D. O. Mathematical and emotional foundations for lesson study in mathematics. Plenary presented. **APEC Lesson Study Conference**, Chiang Mai, Thailand, November 2010c. Disponível em:<https://homepages.warwick.ac.uk/.../David.Tall/.../do>. Acesso em: 15 mar 2015.

TALL, D. O. Mathematical Growth in Elementary and Advanced Mathematical Thinking, plenary address. In: L. Meira & D. Carraher, (Eds.), **Proceedings of PME 19**, Recife, Brazil, I, 61– 75, 1995b. Disponível em:<https://homepages.warwick.ac.uk/.../David.Tall/.../do>. Acesso em: 06 jun 2014.

TALL, D. O. Mathematicians Thinking about Students Thinking about Mathematics, (summary), **Newsletter of the London Mathematical Society**, 12–13, 1993a. Disponível em:<https://homepages.warwick.ac.uk/.../David.Tall/.../do>. Acesso em: 09 mar 2014.

TALL, D. O. MEIJA-RAMOS, J. P. The Long-Term Cognitive Development of Different Types of Reasoning. IN: HANNA, G., JAHNKE, H. N., PULTE, H. (eds.). **Explanation and proof in mathematics**: Philosophical and educational perspectives. New York: Springer, 2009b. Disponível em:<https://homepages.warwick.ac.uk/.../David.Tall/.../do>. Acesso em: 19 dez 2014.

TALL, D. O. Perceptions, Operations and Proof in Undergraduate Mathematics, **CULMS Newsletter** (Community for Undergraduale Learning in the Mathematical Sciences), University of Auckland, New Zealand, n.2, November 2010, p.21-28. Disponível em: <http://www.davidtall.com/.>Acesso em: 10 mai. 2015.

TALL, D. O. Setting Lesson Study within a Long-Term Framework for Learning. Chapter for an. **APEC Lesson Study Book**. Ed. Maitree Inprasitha, Patsy Wang Iverson, Yeap Ban Har. 2012w.

TALL, D. O. Technology And Mathematics Education. Computer Environments for the Learning of Mathematics. IN: BIEHLER, R.; SCHOLZ, R. W.; STRÄBER; WINKELMANN, B. (eds.) **Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline**. Kluwer Academic Publishers: Dordrecht, 1993, p. 189–199.

TALL, D. O. The development of mathematical thinking: problem-solving and proof. IN, MASON, J. **Celebration of the academic life and inspiration**, 2009d.

TALL, D. O. The Evolution of Technology and the Mathematics of Change and Variation: Using Human Perceptions and Emotions to Make Sense of Powerful Ideas, IN: HEGEDUS, S. J.; ROSCHELLE, J. (eds.). **The SimCale Vision and Contributions, Advances in Mathematics Education**. Springer Science+Business Media Dordrecjet, 2013, p. 449-515. Disponível em: <https://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2009b-mejia-tall-proof.pdf>. Acesso em: 10 mar. 2015.

TALL, D. O. The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity, and Proof, in Grouws D.A. (ed.) **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**, Macmillan, New York, 495– 511, 1992e. Disponível em:<https://homepages.warwick.ac.uk/.../David.Tall/.../do>. Acesso em: 10 jul 2014.

TALL, D. O. Using Computers Environments to Conceptualize Mathematical Ideas. Proceedings of Conference on New Technological Tools in Education. Nee Ann Polytechnic, Singapore, 1990, p.55-75.Disponível em: <https://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1990a-singapore.pdf>. Acesso em: 15 mar. 2015.

TALL, D. O. Visual organizers for formal mathematics.IN: SUTHERLAND, R.; MASON, J.(eds.), **Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education**. Springer-Verlag: Berlin, 1995a, p. 52–70. Disponível em: <https://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2009b-mejia-tall-proof.pdf>. Acesso em: 15 mar. 2015.

TALL, D. O. What Mathematics is Needed by Teachers of Young Children? Artigo. 2011. Disponível em: <https://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2009b-mejia-tall-proof.pdf>. Acesso em: 15 mar. 2015.

TALL, D. O. Will Chinese Teaching Methods help us improve UK performance in Mathematics? ***Prospect Magazine***, May 2014, p. 64-65. Disponível em: Disponível em:<https://homepages.warwick.ac.uk/.../David.Tall/.../do>. Acesso em: 10 jul 2014.

TALL, D. O.; CHIN, K. E. Making Sense of Mathematics through Perception, Operation & Reason: The case of Trigonometric Functions. **Proceedings of PME36**, Taipei, 2012c.

TALL, D. O.; VERHOEF, N. C. Lesson Study: The Effect on Teachers' Professional Development. **Proceedings. 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, Turkey: University of Ankara. v. 4, 2011b, p. 297-304.

TALL, D. O.; GRAY E.; PITTA. D.; PINTO M., Knowledge Construction and diverging thinking in elementary and advanced mathematics, **Educational Studies in Mathematics.** 38 (1-3), 111-133, 1999k. Disponível em:<https://homepages.warwick.ac.uk/.../David.Tall/.../do>. Acesso em: 18 ago 2014.

TALL, D. O.; GRAY, E. Duality, Ambiguity and Flexibility: A Proceptual View of Simple Arithmetic. **The Journal for Research in Mathematics Education**, v.26, n.2, p.115–141, 1994a Disponível em:<https://homepages.warwick.ac.uk/.../David.Tall/.../do>. Acesso em: 10 jul 2014.

TALL, D. O.; GRAY, E.; PITTA, D. Objects, actions, and images: a perspective on early number development. Journal of Mathematical Behavior, 2000, v.18, n..4, 2000, p. 401-413.Disponível em: <https://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2009b-mejia-tall-proof.pdf>. Acesso em: 15 mar. 2015.

TALL, D. O.; KATZ, M. The tension between intuitive infinitesimals and formal analysis. IN: SRIRAMAN, B. (ed.). **Crossroads in the History of Mathematics and Mathematics Education**. (The Montana Mathematics Enthusiast Monographs in Mathematics Education 12), 2012b, p. 71–90.

TALL, D. O.; KIDRON. I. The roles of embodiment and symbolism in the potential and actual infinity of the limit process. To appear in **Educational Studies in Mathematics**. 2014.

TALL, D. O.; LIMA, R. N.; HEALY, L. Evolving a three-world framework for solving algebraic equations in the light of what a student has met before. **The Journal of Mathematical Behavior**, v 34, 2014, p. 1-13. Disponível em: <https://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2009b-mejia-tall-proof.pdf>.Acesso em: 15 mar. 2015.

TALL, D. O.; McGOWEN, M. Flexible Thinking and Met-befores: Impact on learning mathematics, With Particular Reference to the Minus sign. **Journal of Mathematical Behavior**, n.32, 2013d, p.527–537. Disponível em: <https://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2010x-verhoef-tall.pdf>. Acesso em: 08 ago mar. 2014.

TALL, D. O.; McGOWEN, M. Metaphor or Met-before? The effects of previous experience on the practice and theory of learning mathematics. ***Journal of Mathematical Behavior***, 29, 169–179, 2010b. Disponível em:<https://homepages.warwick.ac.uk/.../David.Tall/.../do>. Acesso em: 19 dez 2014.

TALL, D. O.; MEIJA-RAMOS, J. P..The Long-Term Cognitive Development of Different Types of Reasoning. IN: HANNA, G., JAHNKE, H. N., PULTE, H. (eds.). **Explanation and proof in mathematics**: philosophical and educational perspectives.New York: Springer, 2009b. Disponível em:<https://homepages.warwick.ac.uk/.../David.Tall/.../do>. Acesso em: 18 ago 2014.

TALL, D. O.; MOHAMAD, R. R. Diagnosing students' difficulties in learning mathematics. **International Journal of Mathematics Education in Science and Technology**, v.24, n. 2, p.209-222, 1993. Disponível em: <http://wrap.warwick.ac.uk/512/>. Acesso em: 10 set. 2014.

TALL, D. O.; RASMUSSEN, C.; ZANDIEH, M.; KING, K.; TEPPO, A. Advancing Mathematical Activity: a practice-oriented view of Advanced Mathematical Thinking. **Mathematical Thinking and Learning**, v.7, n. 1, 2009, p. 51-73.

TALL, D. O.; VERHOEF, N. C. Lesson study: the effect on teachers' professional development. **Anais.** 35th Conference of the International Group for the Psychology of

Mathematics Education (PME), Ankara, Turkey, 10-15 July 2011.Disponível em: <https://homepages.warwick.ac.uk/.../dot2011b-pme-. …>. Acesso em: 10 mar. 2015.

TALL, D. O.; VERHOEF, N. C.; COENDERS. F.; Jules M. PIETERS, J. M.; VAN SMAALEN, D. Professional development through lesson study: teaching the derivative using GeoGebra. To appear Professional Development in Education, 2013.

TALL, D. O.; VERHOEF, N. **The effectiveness of lesson study on mathematical knowledge for teaching**. Artigo. 2010x. Disponível em: <https://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2010x-verhoef-tall.pdf>. Acesso em: 10 mar. 2015.

TALL, D. O.; VERHOEF, N..The Complexity of Lesson Study in a Dutch Situation. **International Journal of Science and Mathematics Education**. DOI: 10.1007/s10763-013-9436-6, 2013b.

TALL, D. O.; VERHOEF, N.; FER, C.; Van SMAALEN, D. The complexities of a lesson study in a dutch situation: mathematics teacher learning. **International Journal of Science and Mathematics Education**. National Science Council. Taiwan, n. 12, 2014, p. 859-881.

TALL, D. O.; VINNER, S. Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity.Educational Studies Mathematics, n. 12, 1981, p. 151–169. Disponível em: <https://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1981a-concept-image.pdf>. Acesso em: 10 mar. 2015.

TALL, D. O.; YEVDOKIMOV, O.; KOICHU, B.; WHITELEY, W.; Margo KONDRATIEVA, M.; CHENG, Y.H. The Cognitive Development of Proof. IN: HANNA, G.; DE VILLIERS, M. (eds). **ICMI 19**: Proof and Proving in Mathematics Education, p. 13-49, 2012a. Disponível em:<https://homepages.warwick.ac.uk/.../David.Tall/.../do>. Acesso em: 19 dez 2014.

TALL, D. O. **How humans learn to think mathematically**. Cambridge: Cambridge University Press, 2013.

TALL, D.O .Concept images, computers, and curriculum change. **For the learning of mathematics**, 9 (3), 37-42. 1989e. Disponível em: <davidtall@mac.com>. Acesso em: set. 2014.

TALL, D.O. The Transition to Formal Thinking in Mathematics**. Mathematics Education Research Journal**, 20 (2), 4-25, 2008e. Disponível em:<https://homepages.warwick.ac.uk/.../David.Tall/.../do>. Acesso em: 19 dez 2014.

TREFFERS, A. **Three Dimensions:** a model of goal and theory description in mathematics instruction – The Wiskobas Project. Dordrecht: Reidel Publishing Company, 1987.

TREVISAN A. L.; BURIASCO R. L. de. Educação Matemática Realística: Uma Abordagem para o Ensino e a Avaliação em Matemática. **REVEMAT**. Florianópolis (SC), v.10, n. 2, p. 167-184, 2015.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. Reform under attack – Forty Years of Working on Better Mathematics Education thrown on the Scrapheap? No Way! In: SPARROW, L.; KISSANE, B.; HURST, C. (Eds.). **Proceedings of the 33th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia**. Fremantle: MERGA. 2010.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. The role of contexts in assessment problems in mathematics. **For the Learning Mathematics**, v. 25, n. 2, 2005, p. 2-9.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. A learning-teaching trajectory description as a hold for mathematics teaching in primary schools in the Netherlands. In: M. Tzekaki Ed. **Didactics of Mathematics and Informatics in Education**. 5th Panhellenic Conference with International Participation, pp. 21-39. Thessaloniki: Aristotle University of Thessaloniki / University of Macedonia/ Pedagogical, 2001.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. **Assessment and Realistic Mathematics Education.** Utrecht: CD-ß Press/Freudenthal Institute, Utrecht University. 1996.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. Improvement of (didactical) assessment by improvement of the problems: An attempt with respect to percentage. **Educational Studies in Mathematics**, 27 (4), 341-372. 1994.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. **Los niños aprenden matemáticas: una trayectoria de aprendizaje-enseñanza con objetivos intermedios para el cálculo con números naturales en la escuela primaria**. tr. del inglés Fernanda Gallego y Betina Zolkower; tr. del neerlandés Cornelis van der Meer, México: Correio del maestro: La Vasija, 2010.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. Mathematics education in the Netherlands: A guided tour. Freudenthal Institute. Cd-rom for **ICME9**. Utrecht: Utrecht University, 2000.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. Realistic Mathematics Education as work in progress. In: LIN, F. L. (Ed.). Common Sense in Mathematics Education. Proceedings of 2001. **The Netherlands and Taiwan Conference on Mathematics**. Taipei, Taiwan, p. 1-43, November 2001.

VAN DER MAREN, J.-M. **Méthodes de recherche pour l'éducation**. Bruxelles: De Boeck and Larcier, 1996.

VAN HIELE, P. M. **Structure and Insight**. Orlando, FL: Academic Press, 1986.

WIDJAJA, Y. B.; HECK, A. How a Realistic Mathematics Education approach and microcomputer-based laboratory worked in lessons on graphing at an Indonesian Junior High School. **Journal of Science and Mathematics Education in Southeast Asia**, Amsterdam, v. 26, n. 2, p. 1-51, 2003.

APÊNDICE

GLOSSÁRIO

Conceito Cristalino	Refere-se a um conceito que tem uma estrutura interna de relações com restrições que fazem com que têm propriedades necessárias como parte de seu contexto. A crystalline concept may be given a working definition as ‘a concept that has an internal structure of constrained relationships that cause it to have necessary properties as part of its context.’	TALL, D. O.; YEVDOKIMOV, O.; KOICHU, B.; WHITELEY, W.; Margo KONDRATIEVA, M.; CHENG, Y.H.; The Cognitive Development of Proof. IN: HANNA, G.; DE VILLIERS, M. (eds). ICMI 19: Proof and Proving in Mathematics Education, p. 13-49, 2012a. - p.7
Procept	Termo utilizado para se referir ao amálgama de conceito e processo representado pelo mesmo símbolo. We therefore use the portmanteau word “procept” to refer to this amalgam of concept and process represented by the same symbol.	TALL, D. O.; GRAY, E. M. Duality, Ambiguity and Flexibility: A Proceptual View of Simple Arithmetic. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 26, n. 2, 1994, p.115–141.Disponível em: <http://www.tallfamily.co.uk/eddiegray/94a-gray-tall-jrme.pdf>. Acesso em: 10 mar. 2015. - p. 6
Pensamento procedimental	Pensamento procedimental é caracterizado por um foco sobre o procedimento e as ajudas físicas ou quase físicas que o apoiam. O aspecto limitante de tal pensamento é a visão mais tacanha que a criança tem do simbolismo: números são usados somente como entidades concretas para serem manipuladas por meio de um processo de contagem. A ênfase no procedimento reduz o foco sobre a relação entre entrada e saída, muitas vezes levando a extensões idiossincráticos do processo de contagem que não pode generalizar. Procedural thinking is characterised by a focus on the procedure and the physical or quasi-physical aids which support it. The limiting aspect of such thinking is the more blinkered view that the child has of the symbolism: numbers are used only as concrete entities to be manipulated through a counting process. The emphasis on the procedure reduces the focus on the relationship between input and output, often leading to idiosyncratic extensions of the counting procedure which may	TALL, D. O.; GRAY, E. M. Duality, Ambiguity and Flexibility: A Proceptual View of Simple Arithmetic. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 26, n. 2, 1994, p.115–141.Disponível em: <http://www.tallfamily.co.uk/eddiegray/94a-gray-tall-jrme.pdf>. Acesso em: 10 mar. 2015. - p.18

	not generalise. p. 18	
Pensamento *proceptual*	Refere-se a capacidade de manipular o simbolismo de forma flexível como processo ou conceito, trocando livremente diferentes simbolismos para o mesmo objeto. We characterize proceptual thinking as the ability to manipulate the symbolism flexibly as process or concept, freely interchanging different symbolisms for the same object. It is proceptual thinking that gives great power through the flexible, ambiguous use of symbolism that represents the duality of process and concept using the same notation. Esta combinação de pensamento conceitual e procedimental é o que denominamos pensamento *proceptual*. This combination of conceptual and procedural thinking is what we term proceptual thinking. p.8 Pensamento *proceptual* inclui a utilização de procedimentos. Proceptual thinking includes the use of procedures.	TALL, D. O.; GRAY, E. M. Duality, Ambiguity and Flexibility: A Proceptual View of Simple Arithmetic. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 26, n. 2, 1994, p.115–141.Disponível em: <http://www.tallfamily.co.uk/eddiegray/94a-gray-tall-jrme.pdf>. Acesso em: 10 mar. 2015. p.7 e p.11
Divisão *proceptual*	Esta falta de desenvolvimento de uma estrutura *perceptual* torna-se uma grande tragédia para os menos capazes a qual nós chamamos de divisão *proceptual*. This lack of a developing proceptual structure becomes a major tragedy for the less able which we call the proceptual divide.	TALL, D. O.; GRAY, E. M. Duality, Ambiguity and Flexibility: A Proceptual View of Simple Arithmetic. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 26, n. 2, 1994, p.115–141.Disponível em: <http://www.tallfamily.co.uk/eddiegray/94a-gray-tall-jrme.pdf>. Acesso em: 10 mar. 2015. - p.18
Set-befores	Recursos humanos essenciais que todos nós compartilhamos. Essential human resources that we all share	http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/themes/glossary.html
Met-befores	a estrutura mental que temos agora, como resultados de nossas experiências anteriores. a structure we have in our brains *now* as a result of experiences we have met before.	http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/themes/glossary.html
Pensamento matemático	Pensamento matemático avançado está relacionado com a introdução de definições	http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/themes

avançado	formais e dedução lógica de teorias axiomáticas formais. De particular interesse é a transição de Matemática do ensino elementar (geometria, aritmética, álgebra) para o pensamento matemático avançado na universidade. Isso inclui o ciclo completo de matemática formal, incluindo a criação de novas teorias usando técnicas de resolução de problemas de conjecturas, testes, modificar e provando teoremas para construir uma teoria formal. Advanced mathematical thinking is concerned with the introduction of formal definitions and logical deduction in formal axiomatic theories. Of particular interest is the transition from elementary school mathematics (geometry, arithmetic, algebra) to advanced mathematical thinking at university. This includes the full cycle of formal mathematics, including the creation of new theories using problem-solving techniques of conjecturing, testing, modifying, and proving theorems to build a formal theory.	/glossary.html
Corporificação conceitual	Corporificação conceitual baseia-se em percepções humanas e ações em desenvolvimento imagens mentais que são verbalizadas de formas cada vez mais sofisticadas e tornar-se entidades mentais perfeitas na nossa imaginação. *Conceptual embodiment* builds on human perceptions and actions developing mental images that are verbalized in increasingly sophisticated ways and become perfect mental entities in our imagination.	http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/themes/glossary.html
Simbolismo operacional	Simbolismo operacional cresce fora de ações físicas em procedimentos matemáticos. Enquanto alguns alunos podem permanecer em um nível processual, outros podem conceber os símbolos de forma flexível como operações para executar e também para operar por meio de cálculos e manipulação. *Operational symbolism* grows out of physical actions into mathematical procedures. While some learners may remain at a procedural level, others may conceive the symbols flexibly as operations to perform and also to be operated on through calculation and manipulation.	http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/themes/glossary.html
Formalismo axiomático	Formalismo axiomático constrói o conhecimento formal em sistemas axiomáticos especificadas por definição teórica, cujas propriedades são deduzidas por demonstração matemática.	http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/themes/glossary.html

	Axiomatic formalism builds formal knowledge in axiomatic systems specified by set-theoretic definition, whose properties are deduced by mathematical proof.	