UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
EDUCAÇÃO PARA A CIÊNCIA E A MATEMÁTICA

IDELMAR ANDRÉ ZANELLA

DIFERENTES REPRESENTAÇÕES NA GEOMETRIA EUCLIDIANA POR MEIO DO USO DO GEOGEBRA: UM ESTUDO COM FUTUROS PROFESSORES DE MATEMÁTICA

MARINGÁ – PR
2018

IDELMAR ANDRÉ ZANELLA

DIFERENTES REPRESENTAÇÕES NA GEOMETRIA EUCLIDIANA POR MEIO DO USO DO GEOGEBRA: UM ESTUDO COM FUTUROS PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática do Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Educação para a Ciência e a Matemática. Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Valdeni Soliani Franco

Coorientadora: Profa. Dra. Ana Paula Canavarro

MARINGÁ – PR

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Biblioteca Central - UEM, Maringá, PR, Brasil)

Zanella, Idelmar André
Z28t Diferentes representações na Geometria Euclidiana por meio do uso do GeoGebra: um estudo com futuros professores de matemática / Idelmar André Zanella. -- Maringá, 2018.
229 f. : il. color., figs., quadros

Orientador(a): Prof. Dr. Valdeni Soliani Franco.
Coorientador(a): Profª. Drª. Ana Paula Canavarro.
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática, 2018.

1. Geometria Euclidiana. 2. GeoGebra. 3. Tarefas. 4. Representações. 5. Coordenação. 6. Apreensão. I. Franco, Valdeni Soliani, orient. II. Canavarro, Ana Paula, coorient. III. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática. IV. Título.

CDD 21.ed. 516.2
AHS-CRB-9/1065

IDELMAR ANDRÉ ZANELLA

Diferentes representações na Geometria Euclidina por meio do uso do GeoGebra: *um estudo com futuros professores de Matemática*

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática do Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em *Ensino de Ciências e Matemática.*

BANCA EXAMINADORA

Franco
____
Prof. Dr. Valdeni Soliani Franco
Universidade Estadual de Maringá – UEM

____
Profa. Dra. Celina Aparecida Almeida Pereira Abar
Pontifícia Universidade Católica – PUC

____
Prof. Dr. Jorge Cássio Costa Nóbriga
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

____
Profa. Dra. Lílian Akemi Kato
Universidade Estadual de Maringá – UEM

____
Prof. Dr. Rui Marcos de Oliveira Barros
Universidade Estadual de Maringá – UEM

Maringá, 02 de Março de 2018.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela oportunidade de viver em paz, alegria e saúde.

Agradeço aos meus pais, Maria Celestina Zanella e Fiorelo José Zanella, pela educação recebida.

Agradeço à minha esposa Marlí Schmitt Zanella pelos diálogos, pelo incentivo, pela amizade, pelo companheirismo e pela compreensão.

Agradeço aos meus familiares pelo apoio e carinho nesta etapa de estudos.

Agradeço ao Professor Doutor Valdeni Soliani Franco que me orientou e auxiliou no desenvolvimento desta pesquisa.

Agradeço à Professora Doutora Ana Paula Canavarro que me coorientou e auxiliou na realização deste trabalho.

Agradeço aos professores doutores Celina Aparecida Almeida Pereira Abar, Jorge Cássio Costa Nóbriga, Lilian Akemi Kato e Rui Marcos de Oliveira Barros pelas valiosas contribuições para o desenvolvimento desta tese.

Agradeço à Universidade Estadual de Maringá pela minha formação acadêmica e aos estudantes participantes da disciplina de Geometria Euclidiana que contribuíram significativamente para a realização deste estudo.

Agradeço ao Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática (PCM) pela infraestrutura disponibilizada que potencializou o desenvolvimento desta tese.

Agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo auxílio financeiro.

Enfim, agradeço à Secretaria de Estado da Educação do Estado do Paraná que me liberou parcialmente de minhas atividades docentes para a realização deste estudo.

RESUMO

ZANELLA, I. A. **Diferentes representações na Geometria Euclidiana por meio do uso do GeoGebra: Um estudo com futuros professores de Matemática**. 2018. (Doutorado). Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2018.

Esta pesquisa teve por objetivo compreender como a coordenação de diferentes representações semióticas possibilitada pelo uso do GeoGebra influencia a apreensão de objetos geométricos e suas propriedades por futuros professores de Matemática. Participaram da investigação onze estudantes do Curso de Licenciatura e Bacharelado em Matemática de uma universidade ao norte do Estado do Paraná, que constituíram uma turma da disciplina de Geometria Euclidiana, e resolveram tarefas de geometria com o apoio do GeoGebra. A investigação seguiu uma abordagem qualitativa na perspectiva do paradigma interpretativo, e a modalidade de pesquisa foi o estudo de caso sobre essa turma de estudantes. Os dados recolhidos foram analisados à luz da teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval e incluem as produções matemáticas dos participantes da pesquisa. Os resultados deste estudo mostram que a apreensão dos objetos geométricos e de suas propriedades ocorre em virtude da sinergia entre: fatores cognitivos; conhecimentos geométricos; tarefas matemáticas; meios fenomenológicos de produção de representações semióticas; apreensões perceptiva, sequencial, operatória e discursiva relativas a uma figura geométrica e a função de objetivação. Inferimos que esses elementos foram influenciados pela coordenação de diferentes representações semióticas suscitada pelos participantes da pesquisa.

Palavras-chave: Geometria Euclidiana. GeoGebra. Tarefas. Representações. Coordenação. Apreensão.

ABSTRACT

ZANELLA, I. A. **Different representations in Euclidean geometry through the use of GeoGebra: A study with future teachers of Mathematics.** 2018. (Doctorate). Postgraduate Program in Education for Science and Mathematics, State University of Maringá, Maringá, 2018.

This research aimed to comprehend how the coordination of different semiotic representations made possible by the use of GeoGebra influences the apprehension of geometric objects and their properties by future teachers of Mathematics. Eleven students in the Course of Licentiate and Bachelor in Mathematics of a University in the North of the State of Paraná participated in the research. These students formed one group for the discipline of Euclidean Geometry, and solved geometry tasks with the support of GeoGebra. The research followed a qualitative approach from the perspective of the interpretive paradigm. The research modality was the case study of a case about this group formed by the students. The collected data were analyzed following the Registers of Semiotic Representation by Raymond Duval, and include the mathematical productions of the participants involved in the research. The results of this study show that the apprehension of the geometric objects and their properties occurs due to the synergy among: cognitive factors; geometric knowledge; mathematical tasks; phenomenological means of semiotic representation production; perceptive, sequential, operative and discursive apprehensions relative to a geometric figure and a function of objectification. We infered that the elements were influenced by the coordination of different semiotic representations raised by the participants of the research.

Keywords: Euclidean geometry. GeoGebra. Tasks. Representations. Coordination. Apprehension.

LISTA DE QUADROS

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1

INTRODUÇÃO

Neste capítulo apresentamos o contexto do estudo, a relevância da investigação, os objetivos que nortearam a pesquisa e a organização estrutural da tese.

1.1. Contexto do estudo

Este estudo se insere no contexto da formação inicial de professores de Matemática. Os participantes da pesquisa foram estudantes do Curso de Licenciatura e Bacharelado em Matemática de uma universidade ao norte do Estado do Paraná que frequentaram a disciplina de Geometria Euclidiana, componente curricular deste Curso, e resolveram tarefas de geometria com o apoio do s*oftware* GeoGebra.

A pesquisa seguiu uma abordagem qualitativa na perspectiva do paradigma interpretativo, cuja modalidade foi o estudo de caso. A fundamentação teórica para análise dos dados se assentou na teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval[1], que é uma teoria cognitivista[2] com estreita relação com a prática matemática, para analisar e interpretar as produções matemáticas dos participantes da pesquisa.

1.1.1. Representações em geometria a partir de um contexto histórico

A geometria é um dos ramos da Matemática tão antigo quanto à própria Matemática. Desde a pré-história o ser humano demonstra um intenso desejo de representar aspectos da realidade por meio de desenhos estilizados, de ornamentar seus objetos físicos por simples formas

[1] Filósofo francês, psicólogo de formação e professor emérito em Ciências da Educação da Université du Littoral Côte d'Opale, Boulogne-sur-Mer, França. Desenvolve pesquisas em Psicologia Cognitiva desde a década de 1970. Foi pesquisador do Instituto de Pesquisa sobre o Ensino de Matemática (IREM) de Estrasburgo, França, entre os anos de 1970 até 1995. Desenvolveu a teoria dos Registros de Representação Semiótica (RRS).

[2] "A teoria dos registros não é uma teoria geral e fechada" (DUVAL, 2014. p.28). Ela é uma ferramenta para analisar o modo de pensar e trabalhar em matemática, as atividades e problemas desenvolvidos para o ensino, bem como as produções dos alunos independentemente dos conceitos matemáticos utilizados e quaisquer que sejam os campos da Matemática em que trabalhamos (geometria, álgebra, análise, estatística etc.) (DUVAL, 2014).

geométricas munidas de simetrias, bem como para modelar suas construções baseadas em diversas formas geométricas, mantendo ou não um padrão (MAMMANA, VILLANI, 1998).

De acordo com Stahl (2013), desde que grupos de pessoas pararam de migrar e começaram a se estabelecer em territórios, eles encontraram maneiras de realizar demarcações de terras (medir), construir estruturas de várias formas e conceber várias formas visuais. Exemplos disso são padrões em tecidos ou esculpidos em pedras, cerâmicas e joias, em que os objetos projetados compreendiam valores estéticos e sociais.

De acordo com Eves (2004), com o desenvolvimento da escrita, arranjos de símbolos para representar números foram surgindo. Isso pode ser observado no osso de *Ishango* (Figura 01), com mais de 8000 anos de idade.

Figura 01: Osso de *Ishango*.

Fonte: <https://www.naturalsciences.be/en/content/prishango01nl> acesso em 16 de jan. de 2018.

Em um período posterior a pré-história, o crescimento das comunidades potencializou melhorias na estrutura e organização social da vida das pessoas e tal fato permitiu a formação das primeiras civilizações espalhadas pelo mundo como, por exemplo, na China, Mesopotâmia, Índia, Egito, México, Grécia etc. Nesse contexto, a geometria atendia as necessidades relacionadas ao uso prático, tais como calcular comprimentos, áreas e volumes e fazer demarcações de território (MAMMANA, VILLANI, 1998). Além disso, a abordagem prática da geometria como técnica para dividir lotes de terra, como também as necessidades práticas de navegação levaram a invenção de algoritmos e tabelas numéricas detalhadas (STAHL, 2013).

Segundo Mlodinow (2005), conhecemos a matemática egípcia principalmente a partir de duas fontes: o papiro *Rhind* (Figura 02) e o papiro Moscou, meios esses em que os egípcios registravam e representavam seus problemas matemáticos. De acordo com Eves (2004) vinte e seis dos 110 problemas dos papiros *Rhind* e Moscou são geométricos, e dentre esses, vários relacionados ao cálculo de áreas de terras e volumes de grãos.

Figura 02: Papiro *Rhind* – completo-frente.

Fonte: <http://www.britishmuseum.org/research/collection_online/collection_object_details/collection_image_gallery.aspx?partid=1&assetid=413752001&objectid=110036> acesso em 16 de jan. de 2018

De acordo com Mammana e Villani (1998) a geometria desempenhou, por um longo período, uma função instrumental relevante em relação a outros domínios de conhecimento, tais como a Arquitetura, a Astronomia, a Geografia etc. Nessa fase, se percebe uma primeira tentativa de racionalização do conhecimento geométrico.

Nos séculos IV e V a.C, um pequeno grupo de gregos desenvolveu uma versão altamente formalizada da geometria usando um alfabeto. Eles combinaram um subconjunto formalizado de escritas e desenhos relacionados. As cópias sobreviventes destes trabalhos são reproduções, traduções ou interpretações de centenas de anos (STAHL, 2013).

Nesse contexto, "um dos capítulos mais importantes da história cultural, embora pouco conhecido, é a transformação do primitivo conhecimento matemático empírico dos egípcios e babilônios na ciência matemática grega, dedutiva, sistemática, baseada em definições e axiomas" (EUCLIDES, 2009, p.83).

Por motivos históricos e culturais, as conquistas dos gregos foram as mais influentes para o desenvolvimento da geometria enquanto ciência, pois este interesse foi além de necessidades práticas, uma vez que buscaram um processo de racionalização abstrato e global que resultou na sistematização alcançada por Euclides (300 a.C) em sua obra “Os Elementos” (MAMMANA, VILLANI, 1998).

De acordo com Chevallard, Bosch e Gascón (2001), os matemáticos gregos contemporâneos a Euclides consideravam curvas matemáticas apenas aquelas que podiam ser desenhadas (representadas) por uma régua e um compasso. Com esses instrumentos é possível traçar retas, circunferências, e outras figuras geométricas mais complexas tais como: retas paralelas e perpendiculares, a mediatriz de um segmento de reta, um triângulo equilátero de lado dado etc. (CHEVALLARD, BOSCH, GASCÓN, 2001).

Segundo esses autores, o estudo das construções de figuras geométricas e de suas propriedades é, precisamente, um dos objetivos da Geometria Euclidiana. No entanto, com o advento de tecnologias digitais (últimas duas décadas do século XX e, atualmente o século XXI), cada vez mais novos recursos estão à disposição para o estudo da Geometria Euclidiana. Nesse contexto, destacamos os ambientes de geometria dinâmica que disponibilizam régua e compasso de um modo virtual (GRAVINA, 2001). Dentre esses ambientes, consideramos neste estudo o *software* GeoGebra.

1.1.2. Geometria dinâmica e suas potencialidades

O avanço em tecnologias didáticas nos últimos anos, em especial a digital, tem levado à evolução de novas ferramentas educacionais (*softwares*) de modo a apresentar um significativo impacto sobre os métodos de ensino e aprendizagem da Matemática nas escolas em seus diversos níveis (BELLEMAIN, 2002; SEDLÁČEK, 2009; STAHL, 2013).

Nesse contexto se enquadra um conjunto de ferramentas interconectadas, tais como: (i) os sistemas algébricos computacionais; (ii) os *microworlds*, que em aspectos gerais, são caracterizados por ambientes de trabalho criados em *softwares* que oferecem ao usuário uma forma de mundo simulado no qual é possível vivenciar diferentes experiências educacionais e (iii) a geometria dinâmica, em que pesquisadores, professores e estudantes podem utilizá-la para fins de pesquisa, bem como para potencializar a compreensão de conceitos, características, propriedades e resultados sobre objetos geométricos representados (OSTA, 1998; BELLEMAIN, 2002; ISOTANI, BRANDÃO, 2006; SEDLÁČEK, 2009; STAHL, 2013; GRAVINA, 2015).

No que diz respeito ao conjunto de ferramentas interconectadas, elencado anteriormente, trataremos neste texto sobre a geometria dinâmica, a qual está estritamente relacionada aos objetivos deste estudo. De acordo com Sedláček (2009) a geometria dinâmica é um ambiente caracterizado pelo uso de *softwares*, os quais oferecem ao usuário a possibilidade de manipular[3] representações geométricas formadas em um meio visual como, por exemplo, a tela de um computador.

De acordo com Stahl (2013) a geometria dinâmica ganhou destaque com o potencial dos computadores pessoais, oferecendo interface gráfica a objetos, impulsionando o desenvolvimento de tecnologias para *softwares*, jogos e vídeos. Neste aspecto, a geometria dinâmica foi desenvolvida para permitir a quem usa tal sistema construir uma figura geométrica com rótulos e mover as representações de objetos geométricos, fazendo com que as propriedades destes objetos mantivessem formas ou propriedades, o que caracteriza a dependência da figura. Além disso, a geometria dinâmica "permite criar e experimentar diferentes representações dos objetos matemáticos[4]" (NÓBRIGA, 2015, p.69).

Segundo Goldin (2002) uma representação é uma configuração que pode representar algo de alguma forma, pois possibilita interpretar, conectar, corresponder, denotar, retratar, designar, descrever, codificar, significar, fazer referência ou simbolizar o representado (objeto).

Nesse aspecto, ressaltamos que:

> As representações têm um papel central na elaboração e evolução dos saberes e na construção dos conhecimentos pelo sujeito, o computador pode contribuir de forma significativa nesses processos com novos sistemas de representação. Os softwares de geometria dinâmica constituem exemplos do uso do computador na criação de novos sistemas de representação dos objetos da geometria (BELLEMAIN, 2002, p.55).

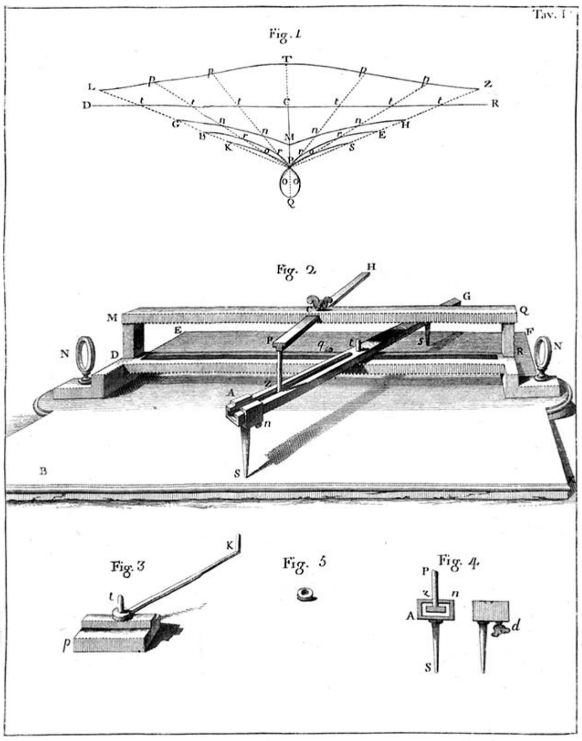
No entanto, é possível trabalhar com geometria dinâmica sem fazer uso de um computador como, por exemplo, a máquina de Nicomedes para representar conchoides e o pantógrafo para representar figuras semelhantes (NÓBRIGA, 2015).

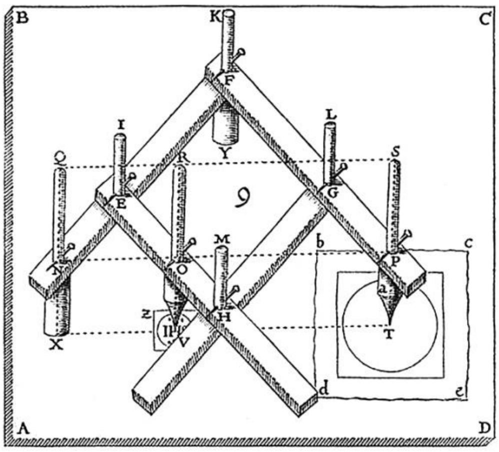
Na Figura 03 apresentamos esses dois instrumentos que permitem realizar representações geométricas em movimento.

[3] Entende-se manipular como: deslocar, rodar, ampliar, reduzir, alterar, reconfigurar etc.
[4] A noção de objeto matemático adotada nesta pesquisa é discutida no Capítulo 2 desta tese.

Figura 03: Máquina de Nicomedes e Pantógrafo.

Máquina de Nicomedes[5] **Pantógrafo**[6]





Fonte: <https://drawingmachines.org/results.php?tags=Used%20for%20design%20drafting&order_by=date> acesso em 14 de jan. de 2018.

Como a geometria dinâmica não se limita apenas ao uso de um computador por meio de *softwares*, Bellemain e Correia (2004) a compreendem como estudo das propriedades das figuras representadas por conjuntos de desenhos que respeitam um mesmo conjunto de especificações. No entanto, destacamos que trataremos neste texto especificamente da geometria dinâmica pelo uso de *softwares*.

Nessa perspectiva, Gravina (2015) ressalta que os *softwares* de geometria dinâmica têm duas características fundamentais, a saber: (i) uma diz respeito à disponibilização da representação semiótica, ou seja, a figura dinâmica[7] e (ii) a outra se refere à representação semiótica que informa a relação funcional entre objetos geométricos representados. Além disso, as construções são dinâmicas, uma vez que podem ser modificadas em dimensão e posição sem a perda dos vínculos geométricos que as caracterizam (GERÔNIMO, BARROS, FRANCO, 2010).

[5] Disponível em <https://drawingmachines.org/post.php?id=53> acesso em 14 de jan. de 2018.
[6] Disponível em <https://drawingmachines.org/post.php?id=24> acesso em 14 de jan. de 2018.
[7] "Uma *figura dinâmica* é entendida como uma coleção de "desenhos em movimento", que respeita um certo procedimento de construção" (GRAVINA, 2015, p.243).

De acordo com Isotani e Brandão (2006, p. 121) um *software* de geometria dinâmica "possibilita, a partir de uma única construção, efetuar um número arbitrário de testes, o que seria praticamente impossível com régua e compasso". Além disso, esses *softwares* fornecem um importante meio visual de situações geométricas, pois a capacidade de seus recursos em animar permite diversas maneiras de construção, movimentos, configurações rotativas e observações a partir de diferentes pontos de vista (OSTA, 1998).

Para Candeias e Ponte (2008), os *softwares* de geometria dinâmica permitem formar e movimentar as representações de objetos da Geometria Euclidiana, bem como explorar e investigar relações entre tais objetos. Estes autores enfatizam que as construções de figuras realizadas em ambientes de geometria dinâmica são rigorosas e, além do mais, é possível medir segmentos, ângulos, arcos, superfícies, volumes etc., bem como realizar cálculos com essas medidas.

Sedláček (2009) destaca que a geometria dinâmica possibilita aos professores e estudantes experimentar e investigar partes do conhecimento matemático, bem como desempenha um papel de instrumento cognitivo, uma vez que potencializa o desenvolvimento de habilidades cognitivas quando relacionada com uma abordagem clássica e tradicional de ensino reduzida à transferência de informações ou apenas se fornece, expositivamente, algoritmos e técnicas de resolução.

Isotani e Brandão (2006, p.122), afirmam que "em uma aula tradicional de geometria, o professor enuncia conceitos, definições e propriedades, assim o aluno apenas "ouve" (e eventualmente "vê" figuras estáticas)". Entretanto, segundo esses autores, com os *softwares* de geometria dinâmica, o estudante tem a possibilidade de realizar testes e verificar hipóteses que ele próprio estabelece acerca de propriedades, características e conceitos dos objetos geométricos representados na tela do computador, pois por meio da ação de arrastar e da manipulação direta, que compreende uma interação instantânea e reversível, o estudante pode refutar construções inconsistentes (ALMOULOUD, SALAZAR, 2015).

De acordo com Stahl (2013) a geometria dinâmica apresenta três características, a saber: arrastar dinâmico, construção dinâmica e dependências dinâmicas. Arrastar pontos proporciona ao usuário formar figuras geométricas dinâmicas de modo a explorar essas figuras. E isso, não é possível de ser realizado em meios fenomenológicos de produção de representações como, por exemplo, papiros, placas de argila, pergaminho, livros impressos, lápis, papel, giz e lousa, uma vez que não permitem variar tamanho e não são meios de comunicação interativos (STAHL, 2013).

A geometria dinâmica supera a necessidade de rotular ou nominar os objetos geométricos, pois as construções de suas representações ocorrem em paralelo a representações discursivas (expressões linguísticas e/ou simbólicas). Usando as ferramentas de construção da geometria dinâmica, o usuário pode explorar conjecturas matemáticas por meio de construções experimentais. E as dependências dinâmicas ocorrem nesse processo quando o sujeito realiza o arraste de pontos ou construções dinâmicas, mas mantém as propriedades da figura geométrica (STAHL, 2013).

De acordo com Almouloud e Salazar (2015), é fundamental o uso de *softwares* de geometria dinâmica quando se pretende trabalhar com figuras geométricas, uma vez que fornecem outra ótica sobre essas figuras, pois sua operação proporciona agrupamentos simultâneos por justaposição e sobreposição. Conforme esses autores, tais agrupamentos não são possíveis de serem realizados simultaneamente quando a atividade envolve ferramentas físicas como, por exemplo, régua, compasso, lápis etc.

Para Laborde (1998) os *softwares* de geometria dinâmica potencializam a percepção visual, a qual desempenha um importante papel no processo de resolução de tarefas. No entanto, Duval (2011) destaca que a conexão existente entre o computador e o indivíduo não é aquilo que é exibido na sua tela, mas aquilo que permite gerenciar uma exibição na sua tela, ou seja, as ações executadas por meio das ferramentas que o *software* dispõe. Neste sentido, Nóbriga (2015) destaca que ao realizar a construção de uma representação figural na área de desenho do *software*, o estudante tem a possibilidade de alterar as posições e estruturas dos objetos representados inicialmente, uma vez que o *software* redesenhará a construção, de modo a preservar as propriedades, os vínculos e as relações originais.

1.1.2.1. O *software* GeoGebra

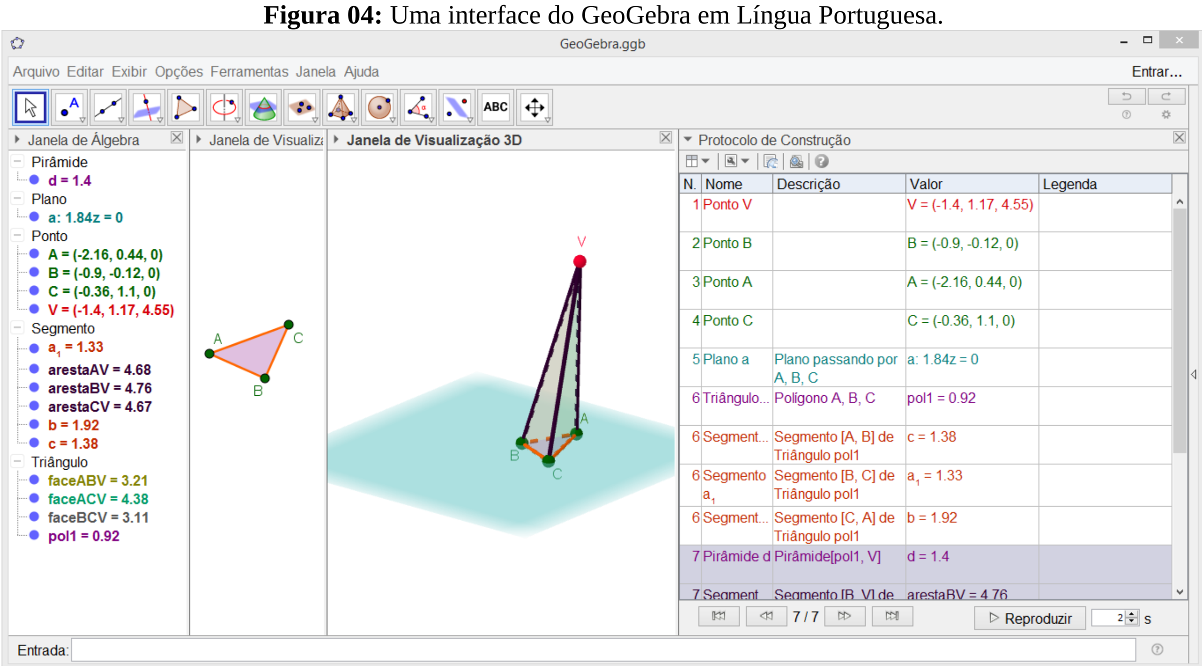
O *software* GeoGebra foi concebido por Markus Hohenwarter em 2001 a partir de um projeto de Mestrado na Universidade de Salzburgo, Áustria (NÓBRIGA, 2015; DOS SANTOS, TROCADO, 2016). O GeoGebra é um *software* educacional que integra e combina geometria dinâmica (2D e 3D) com recursos algébricos, numéricos, gráficos, bem como cálculos e planilhas (HOHENWARTER, HOHENWARTER, LAVICZA, 2008; PREINER, 2008;

OROS, SANTOS, NÓBRIGA, 2014; DOS SANTOS, TROCADO, 2016). Além disso, Nóbriga (2015) destaca que o GeoGebra é um *software* de Matemática dinâmica.

Desde sua criação, o GeoGebra vem sendo atualizado e aperfeiçoado continuamente com a contribuição de distintos colaboradores, incluindo pesquisadores, professores e usuários de um modo geral, tornando-se atualmente uma poderosa ferramenta de pesquisa em Matemática e, também, um importante ambiente para potencializar a compreensão dos objetos matemáticos, suas propriedades e conceitos envolvidos (HOHENWARTER, HOHENWARTER, LAVICZA, 2008; DOS SANTOS, TROCADO, 2016).

Segundo Preiner (2008) e Oros, Santos e Nóbriga (2014) este *software* foi desenvolvido para dar apoio ao ensino e a aprendizagem da Matemática, nos mais diferentes níveis de ensino, desde a Educação Básica até o Ensino Superior. De acordo com esses autores o GeoGebra é um *software* de código aberto, fornecido sob a Licença Pública Geral (GNU), e pode ser baixado gratuitamente no sítio www.geogebra.org. Além disso, o *software* tem tradução para vários idiomas, em particular para a Língua Portuguesa. Na Figura 04 apresentamos uma interface do GeoGebra.

Figura 04: Uma interface do GeoGebra em Língua Portuguesa.



Fonte: Autor da pesquisa.

Observamos que a interface do GeoGebra integra: (i) as janelas de visualização em 2D ou 3D, que é a área de desenho em que as representações geométricas e gráficas dos objetos matemáticos são construídas; (ii) a janela de álgebra, que registra as representações numéricas e algébricas dos objetos; (iii) as barras de menu e de ferramentas, que permitem salvar, imprimir e exportar construções, trocar configurações padrão do programa, selecionar e/ou criar ferramentas etc.; (iii) o campo de entrada, que permite escrever expressões linguísticas e simbólicas; (iv) o protocolo de construção, que mostra o passo a passo de como uma construção (geométrica, gráfica etc.) foi realizada e (v) a barra de navegação, que permite reproduzir uma construção já realizada (PREINER, 2008).

Abar (2011) destaca que o aspecto dinâmico apresentado pelo GeoGebra permite ao professor e ao estudante propor conjecturas e testar hipóteses, além de possibilitar ao indivíduo mobilizar múltiplas representações semióticas acerca de um objeto matemático.

Nesta perspectiva, uma das principais características do GeoGebra está na possibilidade de se trabalhar simultaneamente com diferentes registros[8] de representação semiótica no que diz respeito a um mesmo objeto matemático, fator este que potencializa a compreensão em Matemática (ABAR, ALENCAR, 2013; STORMOWSKI, GRAVINA, LIMA, 2013). Como exemplo, temos na Figura 04 uma pirâmide e sua base (região triangular) representadas geometricamente nas janelas de visualização, algebricamente na janela de álgebra e em língua natural no protocolo de construção.

Destacamos então, que o GeoGebra permite representar um mesmo objeto matemático por meio de uma multiplicidade de representações, bem como interagir com a representação do objeto, pois segundo Stormowski, Gravina e Lima (2013, p.5) este fato "privilegia os dois sentidos da transformação de conversão, permitindo uma compreensão mais aprofundada do objeto matemático em questão".

De acordo com Lovis e Franco (2013) o desenvolvimento de tarefas de Geometria Euclidiana por meio do uso do GeoGebra possibilita a construção de figuras geométricas para representar diferentes objetos geométricos, como também para formular e testar conjecturas, justificar raciocínios matemáticos, estabelecer e verificar propriedades dos objetos representados.

Salientamos que as representações figurais podem ser movidas na janela de visualização do *software* "sem perder os vínculos estabelecidos na construção e, além disso, é possível realizar construções que com lápis, papel, régua e compasso seriam difíceis ou, no mínimo, gerariam imprecisões" (LOVIS, FRANCO, 2013, p.153).

[8] O conceito de registro de representação semiótica é discutido no Capítulo 2 desta tese.

Lovis (2009) salienta que o uso do GeoGebra, como apoio para resolver tarefas de Geometria Euclidiana, contribui para a apreensão dos objetos geométricos estudados. Neste prisma, as tarefas desenvolvidas com os participantes desta pesquisa foram pensadas e elaboradas para proporcionar a potencialidade do uso do GeoGebra (formações e transformações de representações), especialmente no que diz respeito a mobilização e a coordenação de representações figurais, como apoio à resolução das tarefas incluindo explorações, investigações e conjecturas sobre os objetos geométricos estudados na disciplina de Geometria Euclidiana.

Nessa ótica, adotamos o GeoGebra neste estudo, pois o compreendermos como uma multiplataforma, que integra uma diversidade de representações semióticas (figural, simbólica, língua natural etc.), e "permite construir diferentes representações num mesmo ambiente" (NÓBRIGA, 2015, p.79).

Outro fator relevante está no fato de que o GeoGebra dispõe de diferentes características e potencialidades. Dentre as principais características destacamos a fácil utilização e seu acesso, o rigor e precisão das construções e o trabalho com conceitos formais da geometria associados às suas ferramentas, enquanto às suas potencialidades, salientamos a promoção da exploração, investigação, manipulação, simulação, intuição e de justificativas.

1.1.3. A importância da semiótica nas produções matemáticas

Duval, no prefácio de D'Amore, Pinilla e Iori (2013), destaca que a evolução da Matemática está ligada ao desenvolvimento da diversificação dos sistemas de representação semiótica. Nesta ótica, este autor sublinha que é indispensável uma introdução à semiótica[9], a qual permite evidenciar um olhar acerca das análises dos problemas de compreensão e de aprendizagem da Matemática, em particular a geometria.

A "semiótica é a ciência que tem por objeto de investigação todas as linguagens possíveis, ou seja, que tem por objetivo o exame dos modos de constituição de todo e qualquer fenômeno como fenômeno de produção de significação e de sentido" (SANTAELLA, 2002, p.2).

O interesse de investigadores da Educação Matemática pela semiótica vem crescendo nos últimos anos por diversos aspectos. Entre eles está a compreensão da comunicação em sala de

[9] Para Saussure (1969, apud NÖTH, 1995, p.3, tradução nossa) a semiótica é "a ciência que estuda a existência dos signos em uma sociedade".

aula, no sentido de conceber a natureza do discurso matemático, bem como a tomada de consciência sobre generalidade dos objetos matemáticos, uma vez que a atividade matemática é essencialmente realizada por representações semióticas, que envolvem o emprego de diferentes símbolos (RADFORD, 2006).

Para Presmeg (2014), a semiótica é um recurso fundamental para a investigação do desenvolvimento de tarefas inerentes a atividade matemática, pois, por meio das representações produzidas pelos estudantes, se tem a possibilidade de explicar aspectos gerais e particulares dos objetos matemáticos estudados.

De acordo com D'Amore, Pinilla e Iori (2013) é inevitável à utilização da semiótica nas aulas de Matemática, uma vez que compreende duas componentes idealizadas por Raymond Duval, a saber: (i) saber escolher as representações de um objeto matemático que se pretende representar, escolher os registros semióticos adequados para tal representação e apresentar uma representação semiótica nesse registro ou dar várias representações semióticas em um ou mais registros definidos e (ii) saber transformar a representação em outra no mesmo registro (tratamento) ou em outro (conversão) de maneira adequada, sem perder de vista o significado do objeto matemático de partida.

De acordo com esses autores:

> Cada objeto matemático proposto ao aluno, como objetivo de aprendizagem por meio de uma construção cognitiva eficaz e significativa, traz consigo uma série de componentes conceituais, isto é, nenhum conceito é isolado e faz sempre parte de um sistema de significados (D'AMORE, PINILLA E IORI, 2013, p. 113, tradução nossa).

Neste sentido, cada objeto matemático pode ser representado em diferentes sistemas semióticos, pois uma única representação de um objeto matemático não compreende todas as componentes conceituais daquele objeto, mas somente algumas. Além disso, uma única representação não é suficiente para constituir cognitivamente um objeto matemático (D'AMORE, PINILLA, IORI, 2013).

1.1.4. Tarefas matemáticas e suas potencialidades

De acordo com Watson et al. (2013, p. 12) as tarefas matemáticas "são as ferramentas mediadoras entre o ensino e aprendizagem da Matemática", uma vez que é por meio delas que o professor interage com os estudantes e, consequentemente, solicita a eles que façam algo relacionado com o conteúdo matemático em desenvolvimento ou que será desenvolvido.

Para Stein e Smith (2009), as tarefas matemáticas constituem possíveis propostas de trabalho suscitadas tanto pelo professor quanto pelos estudantes, uma vez que para essas autoras são aplicadas à promoção de uma ideia matemática que pode ser, por exemplo, a resolução de um problema, uma modelagem matemática, uma construção geométrica, uma investigação matemática etc.

Nesta perspectiva, uma tarefa possibilita mobilizar uma cadeia de problemas relacionados a um determinado conteúdo e, além disso, protagonizar um período de horas, dias, meses etc. pela busca de respostas a um problema de maior complexidade (STEIN, SMITH, 2009). Dessa forma, as tarefas matemáticas compõem os pilares da aprendizagem dos estudantes e direcionam o trabalho pedagógico realizado pelo professor (STEIN, SMITH, 2009).

Entretanto, Brocardo (2014) enfatiza que a aprendizagem não resulta única e exclusivamente das tarefas desenvolvidas, mesmo que algumas sejam mais significativas do que outras. Neste sentido, esta autora destaca que:

> É de central importância a seleção que o professor faz das tarefas, o modo como as explora, como organiza e orienta o trabalho na aula, como apoia o trabalho dos alunos, promove a discussão, sistematiza o trabalho realizado e o relaciona com ideias e conceitos matemáticos relevantes (BROCARDO, 2014, p.3).

Canavarro e Santos (2012, p.102) ponderam que “as tarefas são um elemento fundamental que muito marcam as possibilidades de aprendizagem matemática dos alunos”, pois selecionar e elaborar tarefas apropriadas e realizar seu desenvolvimento em sala de aula com os estudantes potencializa inúmeros desafios ao professor, uma vez que, para estas autoras, tais fatores compreendem elementos substanciais à prática pedagógica como, por exemplo, o conhecimento matemático do professor.

Em relação ao conhecimento matemático que o professor deve ter acerca das tarefas que desenvolve com os estudantes, Chapman (2013) destaca que esse conhecimento implica em três processos, a saber: (i) selecionar e elaborar tarefas matemáticas que promovam o conhecimento matemático do estudante; (ii) criar um contexto que favoreça a curiosidade, o interesse e a discussão de ideias matemáticas dos estudantes e (iii) otimizar as potencialidades de cada uma das tarefas propostas aos estudantes.

Nesse sentido, Stein e Smith (2009) elencam três fases que constituem o percurso de desenvolvimento de uma tarefa, a saber: (i) como ela é concebida e apresentada no currículo, nos livros didáticos e nos mais diversos materiais de ensino; (ii) como ela apresentada aos estudantes pelo professor e (iii) como ela é de fato implementada pelo estudantes em sala de aula, ou seja, o modo como ele trabalha efetivamente com e sobre a tarefa que lhe foi proposta.

Além dessas três fases que constituem o desenvolvimento de uma tarefa, Ponte (2005) ressalta que uma tarefa pode ser elaborada pelo professor e sugerida ao estudante, ou formulada pelo estudante e ou idealizada de uma ação conjunta entre professor e estudante.

Para este autor, quando o estudante corresponde a uma tarefa, ele se envolve em atividade, ou seja, ele mobiliza diversas ações para apresentar uma solução à tarefa que lhe foi proposta. Neste sentido, a tarefa é o objetivo que proporciona a atividade do estudante, ou seja, é o propósito pelo qual o estudante revela suas diversas ações no decorrer do processo de sua resolução (PONTE, 2005).

Ressaltamos que o efeito cumulativo de tarefas de diferentes tipos em sala de aula potencializa ao estudante o desenvolvimento de concepções implícitas e explícitas acerca da natureza da Matemática (STEIN, SMITH, 2009).

Nesta perspectiva, se considera que os estudantes realizam produções matemáticas e não matemáticas em sala de aula e, assim, professores e pesquisadores devem realizar uma tripla análise dessas produções, que segundo Duval (2011) compreende:

> Uma análise matemática, em termos de validade do encaminhamento e do sucesso. Uma análise da compreensão, isto é, da aquisição pelos alunos em termos de margem de autonomia e progressão. E uma análise das razões seja de sucesso ou aquisição, seja de fracassos ou bloqueios (DUVAL, 2011, p. 106).

Ressaltamos que essa tripla análise se torna significativa quando se recorre a uma gama de diferentes tipos de tarefas. Neste sentido, Ponte (2005) justifica que é necessária uma diversificação de tarefas desenvolvidas no contexto de sala de aula, uma vez que cada tipo exerce um papel relevante ao cumprimento dos objetivos curriculares e também na forma como os estudantes compreendem os conteúdos estudados.

Nesta perspectiva, Ponte (2005) elenca tarefas de diferentes naturezas, caracterizadas pelo grau de desafio e abertura, a saber:

> As **tarefas de natureza mais fechada** (exercícios, problemas) são importantes para o desenvolvimento do raciocínio matemático nos alunos, uma vez que este raciocínio se baseia numa relação estreita e rigorosa entre dados e resultados.
> As **tarefas de natureza mais acessível** (explorações, exercícios), pelo seu lado, possibilitam a todos os alunos um elevado grau de sucesso, contribuindo para o desenvolvimento da sua auto-confiança.
> As **tarefas de natureza mais desafiante** (investigações, problemas), pela sua parte, são indispensáveis para que os alunos tenham uma efetiva experiência matemática.
> As **tarefas de cunho mais aberto** são essenciais para o desenvolvimento de certas capacidades nos alunos, como a autonomia, a capacidade de lidar com situações complexas etc. (PONTE, 2005, p. 26, grifos nossos).

De acordo com Ponte (2005) uma tarefa de natureza fechada é aquela em que simplesmente é informado na sua essência o que é dado e o que é solicitado, enquanto que uma tarefa do tipo aberta é aquela que abarca um grau de indeterminação significativo no que é dado, no que é requerido, ou em ambas as condições, ou seja, a tarefa de natureza aberta promove diferentes resoluções. Já as tarefas de natureza acessível ou desafiante estão relacionadas, segundo este autor, ao grau (maior ou menor) de dificuldade exigida no processo de resolução.

Podemos verificar então que uma exploração compreende uma tarefa aberta e acessível, um exercício envolve uma tarefa fechada e acessível, um problema implica em uma tarefa fechada e desafiante e uma investigação integra uma tarefa aberta e desafiante.

Para Ponte (2005) o que diferencia uma investigação de uma exploração é o grau de desafio da tarefa, ou seja, se o estudante tem a possibilidade de iniciar a resolução imediatamente, sem requerer um planejamento mais delineado, rigoroso, reflexivo e que contemple conjecturas, ele estará diante de uma tarefa de exploração, caso contrário, poder-se-á dizer, talvez, que se trata de uma tarefa de investigação.

A linha que delimita as tarefas de exploração e de exercício nem sempre é clara, pois, um mesmo enunciado pode caracterizar uma tarefa de exploração ou de exercício, de acordo com aquilo que os estudantes conhecem previamente (PONTE, 2005).

Enfim, as tarefas formuladas e desenvolvidas neste estudo, envolvendo os objetos da Geometria Euclidiana e suas propriedades, estão em consonância com os pressupostos teóricos de Watson et al. (2013), que assumem as tarefas como ferramentas mediadoras, Stein e Smith (2009), que consideram as tarefas como propostas de trabalho e pilares de aprendizagem, Chapman (2013) que sugere o uso de tarefas para promover o conhecimento matemático do estudante, criar um contexto e otimizar as potencialidades e, Ponte (2005), no que se refere as tarefas de diferentes naturezas. Nessa perspectiva, destacamos que as tarefas planejadas e desenvolvidas nesta pesquisa abarcaram aquelas de natureza aberta, alternando entre explorações e investigações, mas com objetivos diferentes.

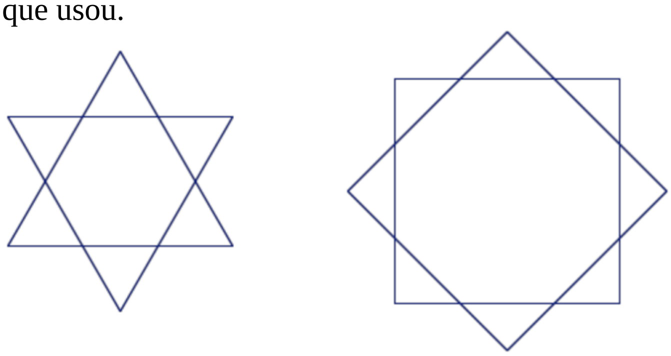
1.1.4.1. Tarefas matemáticas em ambientes de geometria dinâmica

Esta subseção tem por objetivo tratar sobre tarefas de Geometria Euclidiana no contexto da formação inicial de professores de Matemática, cujo desenvolvimento está relacionado ao uso de ambientes de geometria dinâmica, em particular, o GeoGebra. Nesta perspectiva, identificamos na literatura os trabalhos de Brunheira e Ponte (2016) e Nóbriga (2017).

Brunheira e Ponte (2016) realizaram um estudo com futuros professores sobre a prática no contexto de uma disciplina de "Geometria Dinâmica". O objetivo foi analisar o papel do GeoGebra no desenvolvimento do raciocínio geométrico a partir da resolução de uma tarefa de natureza exploratória sob o tema "*construir*", de modo que os participantes do estudo reproduzissem figuras no *software* a partir de propriedades percebidas visualmente e que as construções fossem dinâmicas. A tarefa desenvolvida esta apresentada no Quadro 01.

Quadro 01 - Tarefa "*construir*" estrelas.

1. Construa cada uma das estrelas. Descreva sumariamente o processo de construção que usou.

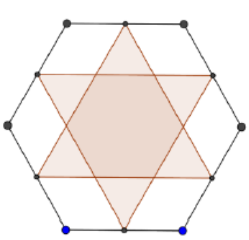
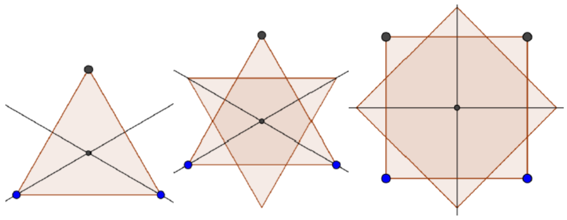


2. Para cada uma das estrelas obtenha um outro processo distinto de construção. Descreva sumariamente o processo usado.
3. Construa outras estrelas desta família com maior número de vértices, usando processos de construção análogos. Generalize um dos processos de construção que usou.
4. Estabeleça relações entre o número de pontas da estrela e outros elementos da construção.

Fonte: Brunheira e Ponte (2016, p.346).

Após os estudantes serem apresentados à tarefa eles partiram para sua resolução com o apoio do GeoGebra. No Quadro 02 apresentamos excertos de duas dessas resoluções.

Quadro 02 - Duas resoluções da tarefa “construir” estrelas.

Estudante “X”	Estudante “Y”
	
Processo: Estrela de 6 pontas: Construir um hexágono regular, encontrar os pontos médios de cada lado e unir os pontos médios não consecutivos. Estrela de 8 pontas: O mesmo processo começando com um octógono. O número de pontas das estrelas corresponde ao número de vértices do polígono utilizado para a sua construção. Não é possível utilizar [este processo] com base em polígonos regulares de número de lados ímpar, uma vez que não existem dois conjuntos de pontos não consecutivos que possam ser unidos.	Processo: Construção de um polígono regular de 3 lados. Marcam-se as mediatrizes dos lados para encontrar o ponto de interseção. O passo seguinte consiste na rotação da figura em torno do ponto de interseção e amplitude 60º = (360/(3×2)). Começar com qualquer polígono regular de x lados e rodá-lo em torno do ponto central com uma amplitude de 360º/(nº lados do polígono×2). Número de pontas = nº de lados do polígono inicial × 2 Número de pontas = 360/amplitude de rotação.

Fonte: Adaptado de Brunheira e Ponte (2016, p.347-349).

Os resultados do estudo de Brunheira e Ponte (2016) mostram que a realização dessa tarefa, com o apoio do GeoGebra, promoveu a percepção de elementos e relações existentes que permitem a construção das figuras no *software*, bem como descrever os conceitos e resultados geométricos que são veiculados pelas ferramentas do GeoGebra.

O trabalho de Nóbriga (2017) se refere a um livro dinâmico de matemática que trabalha com diferentes conteúdos da Geometria Euclidiana Plana. Este material está disponível em https://www.geogebra.org/m/hsXHDRX7#chapter/208330. O livro foi organizado para ser trabalhado com futuros professores de Matemática, no entanto, também pode ser utilizado com estudantes da Educação Básica. O livro elaborado decorre de notas de aula que o autor teceu para ministrar a disciplina “Geometria 1” do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), campus Blumenau. Destaca-se que este é um livro aberto, pois o usuário pode usá-lo, copiá-lo ou editá-lo.

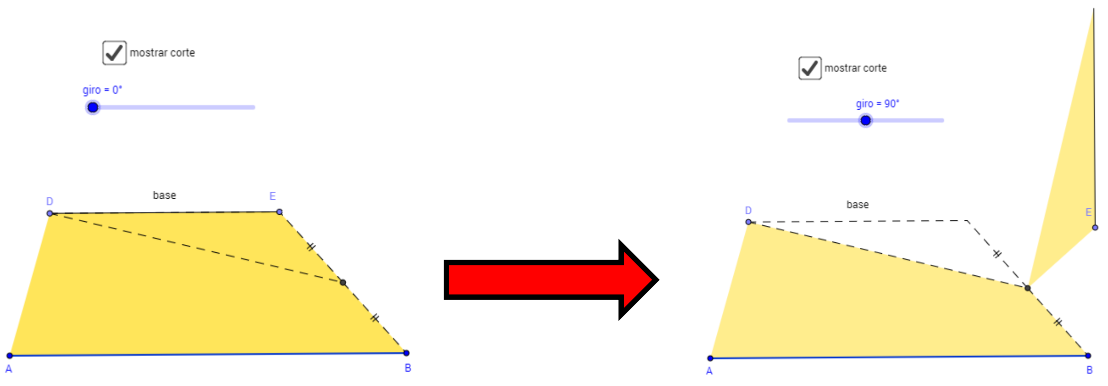
Uma das principais características do livro é integrar dinamicamente, em uma mesma página, diferentes representações de objetos geométricos. Outra característica é a possibilidade de integrar a “representação textual dinâmica”. Isso é possível, segundo o autor, em virtude de “textos dinâmicos” que combinam uma diversidade de símbolos matemáticos e variáveis que podem ser modificados pelo usuário. De acordo com Nóbriga (2017), esses textos alteram seu conteúdo com a manipulação das diferentes representações de objetos com as quais se relacionam como, por exemplo, é possível realizar cálculos no próprio texto usando representações numéricas (valores ou medidas) vinculadas a objetos geométricos (segmentos de reta, ângulos, regiões etc.).

O livro está organizado em quinze seções e compreende: noções inicias; triângulos; congruência e semelhança de triângulos; paralelismo e perpendicularismo; pontos notáveis dos triângulos; teorema de Tales; quadriláteros; circunferência e círculo; áreas, desenho geométrico etc. No Quadro 03 apresentamos um exemplo de tarefa que pode ser realizada com os estudantes, acerca da dedução da área de um trapézio.

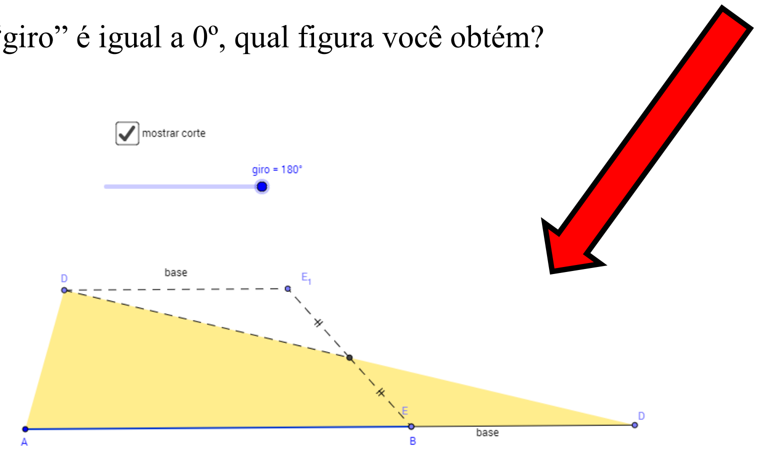
Quadro 03 - Área de um trapézio.

Decomposição

Movimente o seletor “giro”, variando entre 0° e 180°



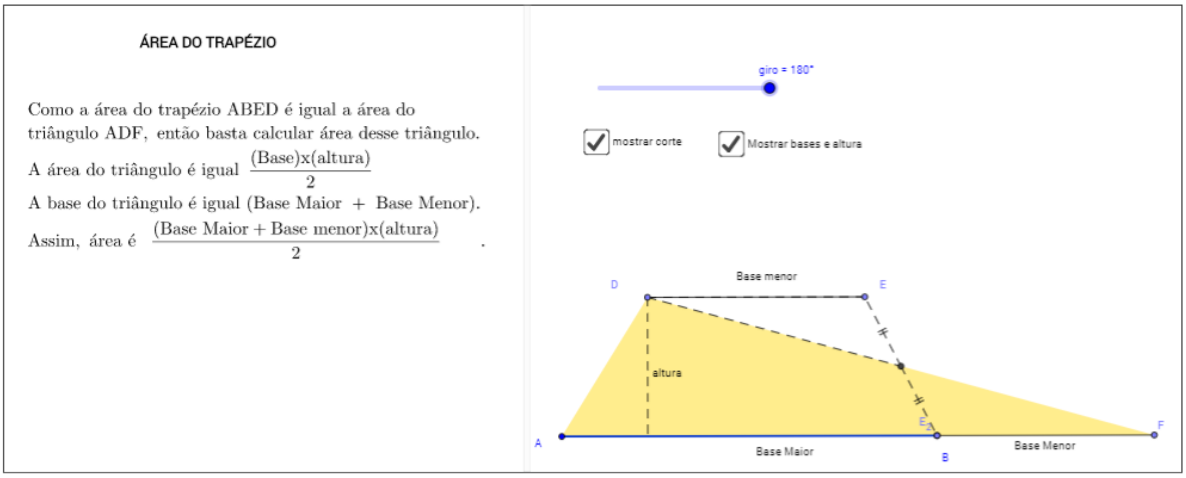
Reflexão 1: Quando “giro” é igual a 0º, qual figura você obtém?



Reflexão 2:

Quando “giro” é igual a 180º, qual figura você obtém? A área da nova figura é igual a anterior? Por quê?

Fórmula da Área do Trapézio



Fonte: Adaptado de Nóbriga[10] (2017).

Na parte inicial do Quadro 03 observamos a decomposição da representação de um trapézio na representação de um triângulo, por meio da mudança de valores do seletor “giro” de 0º a 180°. Há também duas reflexões para os estudantes, uma referente à figura formada quando o “giro” marcar 0º e, outra referente à figura formada quando o “giro” marcar 180°, bem como se existe equivalência de áreas entre as duas figuras e por qual razão. Já na parte final, têm-se os argumentos sobre a fórmula que permite calcular a área de uma região delimitada por um trapézio, bem como as representações figurais. Esse processo mostra a integração dinâmica entre diferentes representações de objetos da Geometria Euclidiana.

1.1.5. Relevância do estudo

Destacamos desde já a observação realizada por Rodrigues e Bernardo (2011) sobre a carência de pesquisas em geometria e, além disso,

> [...] os **resultados de estudos empíricos podem**, **e devem**, imperiosamente, **ser acolhidos**, no sentido de uma compreensão mais aprofundada da forma como se desenvolve o pensamento geométrico dos alunos, desde os **níveis** mais básicos de escolaridade aos **mais avançados**, assim como das implicações didácticas emergentes (RODRIGUES, BERNARDO, 2011, p.339, grifos nossos).

Complementando essas autoras, sublinhamos a necessidade de pesquisas voltadas à formação inicial de professores de Matemática que integrem as produções matemáticas dos estudantes, os conteúdos da Geometria Euclidiana, os *softwares* de geometria dinâmica e as representações semióticas suscitadas durante a resolução de tarefas de diferentes naturezas.

[10] Disponível em:<https://www.geogebra.org/m/hsXHDRX7#material/n3yGF2ag> acesso em 15 de jan. 2018.

Cyrino e Baldini (2012) realizaram uma pesquisa documental acerca do uso do *software* GeoGebra em dissertações e teses disponíveis no banco de teses da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), publicadas no período 2008-2010. Essas autoras identificaram 36 trabalhos, mas apenas dois contemplaram a formação inicial de professores de Matemática, entre eles as pesquisas de Silva (2010) e Esteves (2010). A primeira pesquisa procurou identificar quais contribuições pedagógicas a participação de um grupo de estudos traz para futuros professores de Matemática quando inseridos em um ambiente de geometria dinâmica, enquanto que a segunda buscou identificar como um grupo de estudantes de licenciatura em Matemática planeja, implementa e avalia tarefas exploratórias em ambientes educacionais informatizados.

O estudo de Nóbriga (2015) envolveu estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática, em que foram utilizados o GGBOOK, ferramenta que integra o GeoGebra com um editor de texto e equações, e o ambiente estático (lápis, borracha, papel, régua, compasso e calculadora) nas produções matemáticas dos pesquisados, as quais se referem particularmente a lei dos senos. Os resultados desse estudo destacam que o GGBOOK contribuiu para a produção e a integração das representações de forma a facilitar o trabalho do estudante e do professor na análise ou interpretação daquilo que o estudante realizou.

A pesquisa de Moran (2015) também usou o *software* GeoGebra, porém foi realizada em um contexto de formação continuada, em que ressalta a importância dos professores do Ensino Superior trabalharem com diferentes registros de representação semiótica, em especial no que concerne os conteúdos de geometria. A autora destaca ainda a necessidade dos cursos de licenciatura em Matemática proporcionar aos futuros professores um desenvolvimento por meio da mobilização e coordenação de diferentes representações semióticas, principalmente aquelas relacionadas aos objetos geométricos.

O trabalho de Gravina (2015) salienta que um *software* de geometria dinâmica como, por exemplo, o GeoGebra, evidencia uma nova abordagem para o ensino e a aprendizagem da geometria.

Assim, o presente estudo tem sua relevância para a Educação Matemática, uma vez que está inserido no âmbito da formação inicial de professores de Matemática e tem um olhar para a apreensão de objetos da Geometria Euclidiana a partir da mobilização e coordenação de diferentes representações semióticas possibilitadas pelo apoio do GeoGebra.

1.2. Objetivos da pesquisa

Em relação a contextualização realizada em seções anteriores, observamos uma problemática intrínseca às representações mobilizadas e coordenadas no contexto da aprendizagem da geometria. Esta problemática também se aplica no âmbito da formação inicial de professores de Matemática, que pode ser apoiada em *softwares* de geometria dinâmica que potencializam lidar com representações múltiplas. Nesta perspectiva, delineamos os seguintes objetivos de pesquisa:

Objetivo Geral:

- ✓ Compreender como a coordenação de diferentes representações semióticas possibilitada pelo uso do GeoGebra influencia a apreensão de objetos geométricos e suas propriedades por futuros professores de Matemática.

Objetivos Específicos:

- o Estudar a contribuição do GeoGebra para a formação e transformação de representações semióticas quando futuros professores de Matemática resolvem tarefas de Geometria Euclidiana.
- o Averiguar se os participantes da pesquisa reconhecem um mesmo objeto geométrico por meio da produção de diferentes representações semióticas durante a resolução das tarefas.
- o Identificar as dificuldades dos futuros professores de Matemática nas resoluções das tarefas.

1.3. Organização da tese

A presente tese está organizada em cinco capítulos, a saber:

No primeiro capítulo apresentamos o contexto do estudo, realizamos um levantamento histórico das representações em geometria, conceituamos geometria dinâmica e elencamos suas potencialidades, caracterizamos o *software* GeoGebra e destacamos sua relevância para a pesquisa, tratamos da importância da semiótica nas produções matemáticas, conceituamos tarefas matemáticas e evidenciamos suas potencialidades, apresentamos referencial teórico que trata de tarefas realizadas em ambientes de geometria dinâmica, abordamos a relevância do estudo, bem como identificamos a problemática que a pesquisa está inserida e delineamos os seus objetivos.

No segundo capítulo apresentamos as principais ideias da teoria dos Registros de Representação Semiótica enquanto referencial teórico para a análise das produções matemáticas dos participantes da pesquisa, acerca dos conteúdos da Geometria Euclidiana estudados, bem como realizamos uma abordagem sobre o registro figural em ambientes de geometria dinâmica.

No terceiro capítulo apresentamos as opções metodológicas que nortearam o desenvolvimento deste estudo, cuja modalidade de pesquisa foi o estudo de caso, o ambiente natural e os participantes da pesquisa, as tarefas desenvolvidas, as técnicas e os procedimentos metodológicos adotados para recolher dados, bem como as categorias de análise delineadas para analisar e interpretar os dados recolhidos.

No quarto capítulo descrevemos, analisamos e interpretamos as produções matemáticas dos participantes da pesquisa referentes a quatro tarefas de Geometria Euclidiana resolvidas com o apoio do GeoGebra.

No quinto capítulo apresentamos as conclusões do estudo, compreendendo as respostas relativas aos objetivos da pesquisa e as perspectivas desta pesquisa para a Educação Matemática.

No Quadro 04 temos uma síntese que representa a estrutura desta tese.

Quadro 04 - Síntese da estrutura da tese.

Capítulo 1 - INTRODUÇÃO
Apresentamos o contexto do estudo e os objetivos da pesquisa.

Referenciais teórico e metodológico

Capítulo 2 - FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Apresentamos a teoria dos Registros de Representação Semiótica como aporte para analisar as produções dos participantes.

Capítulo 3 - METODOLOGIA

Apresentamos as opções metodológicas, o ambiente natural e os participantes da pesquisa, técnicas e procedimentos de recolha de dados e as categorias delineadas para a análise dos dados.

Análises dos dados

Capítulo 4 - O CASO DA TURMA: ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Apresentamos os dados recolhidos, as descrições, as análises e as interpretações referentes a quatro tarefas de Geometria Euclidiana e, reflexões sobre a entrevista e questionários realizados.

1. Tarefa sobre circunferência e círculo.
2. Tarefa sobre classificação de triângulos quanto às medidas dos lados e desigualdade triangular.
3. Tarefa sobre triângulos retângulos, quadriláteros, áreas e Teorema de Pitágoras.
4. Tarefa sobre retas paralelas e perpendiculares, reta perpendicular a plano, plano perpendicular à reta e planos paralelos.

Considerações sobre a pesquisa

Capítulo 5 - CONCLUSÃO

Apresentamos a síntese do trabalho realizado, as conclusões relativas aos objetivos da pesquisa e as considerações finais.

Fonte: Autor da pesquisa.

2

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo são apresentadas as principais ideias da teoria dos Registros de Representação Semiótica enquanto referencial teórico desta pesquisa, suas relações com a Geometria Euclidiana e, também, se conceitua o registro figural na sua modalidade geométrica-dinâmica.

2.1. Registros de Representação Semiótica

A atividade matemática é um tipo de atividade que engloba a universalidade cultural, tem caráter especificamente intelectual e supõe uma forma de pensar que não é nada espontânea para a maior parte dos estudantes que nela se envolvem. Essa atividade demanda modos de funcionamento cognitivos que necessitam da mobilização e coordenação de sistemas específicos de representação, isto é, de registros de representação semiótica (DUVAL, 2004b).

Um registro de representação semiótica é "um sistema semiótico particular que não funciona nem como código, nem como sistema formal. Ele se caracteriza essencialmente, pelas operações cognitivas específicas que permite efetuar" (DUVAL, 2011, p.70). Além disso, os registros de representação semiótica permitem gerar novos conhecimentos, pois "são sistemas cognitivamente produtores, ou mesmo criadores, de representações sempre novas" (DUVAL, 2011, p.72).

Salientamos que um sistema semiótico para ser um registro de representação semiótica deve permitir transformar uma representação semiótica em outra nova representação podendo ou não pertencer ao registro que foi formada (DUVAL, 2004a, 2006b).

Nesta perspectiva, a atividade matemática se revela por meio da mobilização e coordenação de diferentes registros de representação semiótica, a saber: (i) língua (língua natural nas suas modalidades oral ou escrita, língua formal - linguagem matemática); (ii) simbólico (nas suas modalidades numérica, algébrica, tabular etc.); (iii) gráfico e (iv) figural (nas suas modalidades icônica, geométrica, geométrica-dinâmica etc.).

De acordo com Duval (2004b) a atividade matemática mobiliza simultânea ou alternativamente diferentes registros de representação, alguns relacionados com o funcionamento cognitivo comum (a língua natural) e outros (figural, simbólico, gráfico etc.) criados pelas necessidades próprias do desenvolvimento da atividade matemática. Este autor destaca que cada registro tem um funcionamento diferente, ou seja, nem todos os registros têm as mesmas regras, uma vez que existem registros mais exigentes do que outros.

Como cada registro de representação semiótica é um sistema semiótico particular e se caracteriza pelas operações cognitivas que o sujeito necessita realizar, Duval (2006a) destaca que esse sistema deve compreender: (a) regras organizadoras para combinar ou reagrupar elementos (signos) em unidades significativas (expressões linguísticas: enunciado, texto; expressões simbólicas: fórmulas; unidades figurais elementares etc.) e (b) elementos que assumem valores de sentido único em oposição de escolha a outros elementos e os seus usos segundo as regras organizadoras que permitem designar objetos.

Destacamos ainda que um sistema semiótico para ser interpretado como um registro de representação semiótica necessita satisfazer duas condições, a saber:

> Primeiramente, poder produzir representações que permitem tanto ter acesso aos objetos perceptivamente ou instrumentalmente inacessíveis, quanto explorar tudo o que é possível. Em seguida, e sobre tudo, abrir um campo de operações específicas que permitem transformar as representações produzidas em novas representações (DUVAL, 2011, p.97).

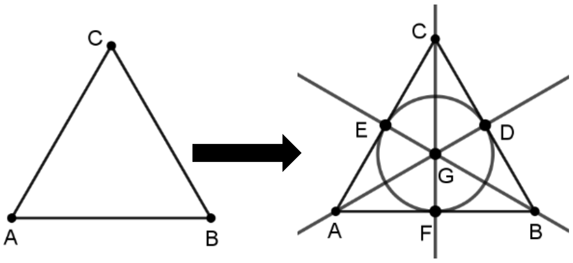
Enfim, os registros de representação semiótica “constituem os graus de liberdade que um sujeito pode dispor para objetivar a si próprio uma ideia ainda confusa, um sentimento latente, para explorar informações ou simplesmente para poder comunicá-las a um interlocutor” (DUVAL, 2009, p.37) e, ainda, “são as ferramentas que permitem analisar todas as produções matemáticas, e em primeiro lugar aquelas construídas com objetivo de ensino ou aprendizagem” (DUVAL, 2011, p.104).

Os códigos, por sua vez, “são sistemas que permitem transmitir uma informação discretizada ou que comutam a codificação de uma informação em função do modo físico de transmissão (auditivo/visual, analógico/numérico etc.)” (DUVAL, 2011, p.72), uma vez que cumprem a função de comunicação. Como exemplos de códigos têm-se: os alfabetos, o código booleano

(0 ou 1 - falso ou verdadeiro), as placas de trânsito, números de telefones de utilidade pública etc.

No Quadro 05 são apresentados dois sistemas semióticos, o primeiro como registro de representação semiótica e o segundo como código.

Quadro 05 - Dois sistemas semióticos: registro x código.

Registro de representação semiótica	Código
Registro Figural - figuras geométricas  Registro simbólico e linguagem matemática $(a+b)^2 \Rightarrow a^2+2ab+b^2$	Alfabeto oficial da Língua Portuguesa A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z. Telefones de utilidade pública Polícia Militar: 190 Corpo de Bombeiros: 193 Defesa Civil: 199 Placas de trânsito  

Fonte: Autor da pesquisa.

De acordo com Duval (2011), a diferença entre registro de representação semiótica e código está no fato de que o primeiro abre a possibilidade transformar o conteúdo das representações produzidas e o segundo não permite.

Conforme o Quadro 05, observamos que na coluna dos registros, transformações foram realizadas no conteúdo das representações iniciais de modo a obter outras representações no mesmo registro, enquanto que na coluna dos códigos nada é possível modificar, pois são representações estáticas, prontas e acabadas sem qualquer possibilidade de mudança, pois os caracteres do alfabeto, os telefones de utilidade pública e as placas de trânsito assim o são, enquanto que nas representações do “triângulo” e do “quadrado da soma de dois termos” foram aplicadas operações semióticas específicas de cada registro logrando assim novas representações. Apresentamos no Quadro 06, segundo Duval (2011), a comparação entre registros de representação semiótica e códigos.

Quadro 06 - Comparação entre registros de representação semiótica e códigos.

		TIPO DE PRODUÇÃO SEMIÓTICA	POSSIBILIDADE DE TRANSFORMAÇÃO DAS PRODUÇÕES	MUDANÇA DE SISTEMA SEMIÓTICO
SISTEMAS **produtores de representações que se referem aos objetos** (*Continuum* do sentido*)*	**REGISTROS** Línguas, figuras, gráficos etc.	**um conteúdo ARTICULANDO VÁRIAS UNIDADES DE SENTIDO** conforme dois ou três níveis de organização	**SUBSTITUIÇÃO** por equivalência referencial **OPERAÇÕES SEMIÓTICAS PRÓPRIAS DE CADA REGISTRO**	**CONVERSÕES** por **correspondência das unidades de sentido** não reversibilidade
SISTEMAS **transmissores** ou **conversores do modo físico de transmissão** (Discretização da informação)	**CÓDIGOS** Código binário, alfabetos etc.	**SEQUÊNCIA DE CARACTERES** cada caractere da sequência resulta de uma escolha de codificação dos dados (estados sucessivos, sons, ...) e não de regra de combinação	Somente a programação externa de ações sobre as sequências de valores binários (máquina de Turing)	**CODIFICAÇÃO** $\Longleftrightarrow$ **DECODIFICAÇÃO**

Fonte: Duval (2011, p.73)

De acordo com Duval (2011, p.73) não realizamos “a mesma análise do funcionamento cognitivo do pensamento” quando relacionamos os registros de representação semiótica aos códigos, pois a mobilização de um código “consiste na codificação e decodificação de conteúdos mentais[11] que seriam independentes dessa codificação ou que a ela preexistissem”. Ao contrário, o fato de reconhecermos a existência de registros e códigos, implica que a mobilização do registro ocorre a partir da execução de operações semióticas possíveis naquele registro seja para reproduzir uma representação ou para transformar o seu conteúdo. Assim, “essas operações semióticas constituem o processo do pensamento em atos e eles permitem um desenvolvimento do conhecimento” (DUVAL, 2011, p.74). Neste sentido, o conhecimento matemático emerge das transformações das representações semióticas, pois “essas transformações são as operações semióticas e um registro se caracteriza pelas operações semióticas que lhe são específicas” (DUVAL, 2011, p.73).

Nesta perspectiva, a integração entre a mobilização e coordenação de diferentes registros de representação semiótica e a arquitetura cognitiva é, segundo Duval (2004b), condição necessária para a compreensão matemática do sujeito, pois qualquer produção matemática compreende distintas produções de representações semióticas (DUVAL 2004a, 2011).

[11] Para Duval (2011) os conteúdos mentais se referem a “representações mentais”, “conceitos” ou “informações” segundo as problemáticas teóricas.

As representações semióticas “são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representação os quais têm suas próprias limitações de significado e de funcionamento” (DUVAL, 1993, p.39).

Para Flores (2006), a representação é o meio pelo qual um objeto do conhecimento se torna visível e transparente ao indivíduo, de modo que permite a ordenação desses objetos. Segundo Woleck (2001), as representações são ferramentas que possibilitam articular, clarificar, justificar e comunicar raciocínios matemáticos decorrentes do estudo de seus objetos.

De acordo com os pressupostos teóricos de Duval (2004a, 2004b, 2011) a atividade matemática, que é realizada por meio da produção de representações semióticas, revela que muitos estudantes não conseguem reconhecer um mesmo objeto matemático por meio de suas diferentes representações semióticas.

Isso ocorre, segundo o autor, pelo fato de que os objetos matemáticos não são objetos sensorial ou instrumentalmente acessíveis como acontece com os fenômenos naturais, pois a observação, a experimentação e a exploração constituem a fonte de conhecimento de outras áreas do conhecimento, tais como a Física, a Química, a Astronomia, a Biologia etc., mas não constituem para a Matemática.

Dessa forma, Duval (2004b) enfatiza que as ações em Matemática envolvem especificamente operações semióticas, as quais estruturam a atividade mental e que compreende as associações verbais (oral ou escrita), as diversas formas de cálculos (numérico ou algébrico), as figuras geométricas, os gráficos etc. O autor destaca ainda que a atividade matemática apresenta duas características distintas em relação às atividades de outras áreas do conhecimento, a saber: (1) a importância fundamental das representações semióticas e (2) a variedade dos tipos de representações semióticas mobilizadas e coordenadas.

Para Duval (2004b) a diferença entre os objetos da Matemática e os objetos de outras áreas do conhecimento constitui aquilo que o autor chama de paradoxo cognitivo da atividade matemática:

> De uma parte, não há outro meio de acesso aos objetos matemáticos do que as representações semióticas, inclusive se são rudimentares como as primeiras atividades numéricas, cujos traços nos vêm desde as culturas mais antigas. Porém, de outra parte, os objetos matemáticos representados não devem confundir-se com as representações semióticas que os fazem acessíveis e que permitem “manipulá-los” nos tratamentos matemáticos (DUVAL, 2004b, p.29, tradução nossa).

Neste contexto, Duval (2004b) salienta que quando estudamos a diversidade de representações semióticas mobilizadas e coordenadas em Matemática, estamos nos referindo sempre aos objetos matemáticos e, para compreender a atividade matemática, a noção de objeto torna-se mais fundamental do que a de conceito. Para este autor, em Matemática se trabalha com e sobre os objetos como, por exemplo, números, equações, funções, pontos, retas, semirretas, segmentos de reta, planos, ângulos, polígonos, circunferências, círculos, poliedros, não poliedros etc., pois esses objetos têm características, propriedades e relações existentes com outros objetos e, seu estudo ocorre necessariamente via formação e transformação de representações semióticas.

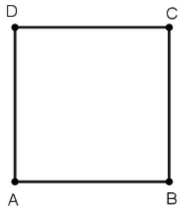
Desta forma, Duval (2004b, p.20) salienta que na atividade Matemática "o importante é a dupla {representação semiótica, objeto}" e, além disso, devemos diferenciar representação de objeto. De acordo com Duval (2004a, p.14) estamos diante sempre de dois processos de dimensão cognitiva, a "*semiósis*" e a "*noésis*". O primeiro se refere "a apreensão da produção de uma representação semiótica" e o segundo diz respeito à ação da apreensão conceitual de um objeto. De acordo com Duval (2012c) a *noésis* é inseparável da *semiósis,* ou seja, a apreensão de um objeto matemático passa pela produção de representações.

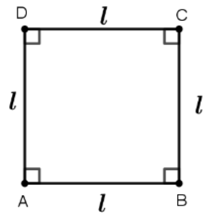
Nesta perspectiva, o acesso aos objetos matemáticos só é possível por meio de suas representações semióticas e isto tem implicação direta para a compreensão da Matemática, uma vez que, segundo os pressupostos teóricos de Duval (2004a), não se deve jamais confundir um objeto matemático com suas múltiplas representações semióticas, ou seja,

> [...] é essencial não confundir jamais os objetos matemáticos, quer dizer, os números, as funções, as retas, etc., com suas representações, ou seja, as escrituras decimais ou fracionárias, os símbolos, os gráficos, os traçados das figuras... pois um mesmo objeto matemático pode dar-se por meio de representações muito diferentes. E esta possibilidade é tão iminente, que os autores dos livros não têm hesitado em fazer desta distinção o tema recorrente nos textos dirigidos aos alunos [...] é o objeto representado o que importa e não suas diversas representações semióticas possíveis (DUVAL, 2004a, p.14, tradução nossa).

Nesta ótica, Duval (1999, 2004a) destaca que em geometria, mesmo que uma figura geométrica seja construída com o auxílio de ferramentas de alta precisão como, por exemplo, a utilização de um *software,* ela é apenas uma representação semiótica de um dado objeto geométrico, pois exibe valores particulares e não pode ser tomada como um conceito geral, e, além disso, essa figura deve ser sempre acompanhada por uma designação verbal. No Quadro 07 apresentamos duas representações figurais de objetos geométricos do plano.

Quadro 07 - Que objeto geométrico do plano está representado?





Fonte: Autor da Pesquisa.

Nos dois casos inferimos que as representações se referem a um quadrilátero ABCD, pois percebemos e reconhecemos visualmente as unidades figurais elementares pontos e segmentos de reta e, que a reunião desses segmentos forma um quadrilátero. No entanto, essas duas representações figurais não podem ser tomadas como conceito geral de um quadrilátero, pois há uma infinidade de representações figurais para um quadrilátero, cujo conceito é exteriorizado pela mobilização e coordenação de uma representação verbal nas modalidades oral ou escrita.

Destacamos ainda que a representação do lado esquerdo não traz nenhuma informação, por meio da percepção visual das formas ou de designações verbais, que nos permite observar alguma propriedade geométrica e, consequentemente, vinculá-la a um tipo específico de quadrilátero (paralelogramo, losango, retângulo etc.). Já a representação do lado direito nos permite afirmar que se refere à representação de um quadrado, pois podemos perceber e reconhecer quatro marcas de ângulos retos e quatro designações verbais (l) associadas às medidas dos lados, propriedades estas que caracterizam um quadrilátero definido como quadrado. No entanto, essa é uma representação particular de quadrado, pois um conceito geral de um objeto em geometria é precedido de uma designação verbal tanto na modalidade oral como na escrita.

Mas afinal, o que é um objeto Matemático? No sentido de clarificar a noção de objeto matemático, buscamos na literatura acepções de alguns autores acerca de seu significado. De acordo com Chevallard (1991) um objeto matemático é definido como um emergente de um sistema de práticas onde são manipulados objetos materiais que se fragmentam em diferentes registros semióticos como, por exemplo, registro oral, por meio de palavras ou expressões pronunciadas, registro gestual e registro escrito, onde é possível escrever ou desenhar gráficos, fórmulas, cálculos, figuras etc. Para Catena (1992) um objeto matemático é uma entidade ideal e inata.

Na perspectiva de Cañón (1993) os objetos matemáticos são "coisas" que satisfazem algumas determinadas relações. Essas relações caracterizam um "estado das coisas" e este estado seria o objeto matemático. Já para Godino (2002), um objeto matemático é tudo aquilo que pode ser indicado, sinalizado, nominado ou feito referência quando fazemos, comunicamos ou aprendemos matemática. De acordo com Radford (2004a) um objeto matemático é um modelo fixo de atividade incorporado no mundo em constante mudança de prática social mediada e reflexiva.

Para D'Amore e Godino (2006) os objetos matemáticos devem ser considerados como símbolos de unidades culturais, emergentes de um sistema de usos ligados à atividade matemática que grupos de pessoas realizam e que evoluem com o passar do tempo. Segundo Font, Godino e D'Amore (2007) um objeto matemático é qualquer entidade ou coisa a qual nos referimos ou falamos, seja real ou imaginária, que intervém de algum modo na atividade matemática.

Destacamos que esta pesquisa se assenta na confluência dos pressupostos teóricos de D'Amore e Godino (2006) e Font, Godino e D'Amore (2007) no que diz respeito à noção de objeto matemático. Neste entendimento, frisamos que o acesso aos objetos matemáticos só é possível por meio de suas diferentes representações semióticas (DUVAL, 2004a, 2004b, 2011) e o que podemos fazer com esses objetos é "descrevê-los, defini-los, denotá-los, denominá-los, desenhá-los" (D'AMORE, PINILLA, IORI, 2013, p.83).

Neste prisma, as representações semióticas são utilizadas para comunicar ações, bem como para desenvolver toda atividade matemática. Além disso, Duval (2009) destaca que:

> A especificidade das representações semióticas consiste em serem relativas a um sistema particular de signos, a linguagem, a escritura algébrica ou os gráficos cartesianos, e em poderem ser convertidas em representações "equivalentes" em outro sistema semiótico, mas podendo tomar significações diferentes para o sujeito que as utiliza. A noção de representação semiótica pressupõe, então, a consideração de sistemas semióticos diferentes e de uma operação cognitiva de conversão das representações de um sistema semiótico para outro. Essa operação tem sido primeiramente descrita como uma "mudança de forma" (DUVAL, 2009, p.32).

Por exemplo, o número "*sete*" é normalmente representado pelo signo "7" no sistema de numeração decimal, mas este signo *não* é o número sete, é apenas uma das várias maneiras distintas de representá-lo, uma vez que outras representações semióticas podem ser mobilizadas e coordenadas para representar tal objeto matemático, a saber:

□□□□□□□ $111_{(2)}$ ||||||| SEVEN VII 

Como há uma variedade de representações para um mesmo objeto matemático, Duval (2004a) destaca que as representações semióticas são representações conscientes e externas, uma vez que permitem uma “visão” do objeto matemático por meio da percepção de estímulos, tais como pontos, traços, caracteres entre outros.

O termo consciente está relacionado àquilo que aparece a um indivíduo e que ele observa. Neste sentido, Duval (2009) exprime que as representações conscientes são representações que apresentam um caráter intencional e que completam uma função de objetivação. A expressão externa está relacionada com aquilo que é diretamente visível e observável por um indivíduo. Logo, para Duval (2009),

> [...] todas as representações ditas “externas” são representações produzidas como tais por um sujeito ou por um sistema: não são sintomas, como por exemplo a expressão das emoções que se percebem nas faces. [...] a produção de uma representação externa pode apenas se efetuar através da operacionalização de um sistema semiótico. As representações externas, são, por natureza, representações semióticas. Tais representações são então estreitamente ligadas a um estado de desenvolvimento e de domínio de um sistema semiótico. Elas são acessíveis a todos os sujeitos que aprenderam o sistema semiótico utilizado. (DUVAL, 2009, p.42).

Neste sentindo, as representações externas cumprem, segundo Duval (2009), as funções cognitivas de comunicação, tratamento e objetivação, as quais são comuns a todos os registros de representação linguísticos, simbólicos ou figurais.

Segundo Duval (2004a) a comunicação é uma função necessária para a existência de uma organização que reagrupe os elementos (indivíduos, subsistemas) que possam trabalhar em seu próprio funcionamento. Sob o modo de transmissão, difusão ou intercambio a informação deve transitar no interior de um espaço social e, também, de um subsistema a outro. Para este autor, a língua natural é naturalmente o sistema semiótico mais apropriado para a função de comunicação entre os indivíduos de um grupo ou de uma sociedade, seja por meio de conversação, declaração, interpelação, comunicado, comentário, exposição, conferência entre outros, uma vez que o discurso é o modo fundamental que permite a interação social entre os indivíduos. Duval (2004a) destaca que existem outros sistemas além da língua natural que podem cumprir a função social de comunicação e que em certas ocasiões podem substituí-las. Logo, de acordo com este autor, “todos os sistemas semióticos podem servir de linguagem sem ser uma língua” (DUVAL, 2004a, p.87).

De acordo com Duval (2004a), o tratamento é uma função necessária para o conhecimento, pois das informações recebidas se pode extrair outras informações. Não só comunicamos informações por meio da língua natural, formal ou simbólica, mas também as transformamos permitindo assim, tornar explicito o implícito, de modo a desenvolver o pensamento em toda sua potência. Além disso, o autor evidencia que as figuras geométricas, os gráficos, os esquemas etc. também cumprem a função de tratamento.

A função de objetivação, segundo Duval (2004a), favorece ao indivíduo perceber como ocorrem suas atividades e vivências no mundo pessoal, proporcionando tomada de consciência de suas potencialidades conseguindo compreender o que ainda não tinha consciência ou não tinha muita clareza, ou seja, “a objetivação corresponde à descoberta pelo próprio sujeito do que até então ele mesmo não supunha, mesmo se outros lhe houvessem explicado” (DUVAL, 2009, p.41). Este fenômeno acontece quando a experiência se dá na forma de projeção e não de simples explicitação.

Etimologicamente, objetivação significa, segundo Radford (2004b), colocar alguma coisa na frente de alguém para que possa ser percebida, ou seja, “a objetivação significa um processo que tem como objetivo mostrar algo (um objeto) a alguém” de modo a “tornar visível uma intenção e para realizar uma ação” (RADFORD, 2004b, p.47).

Para Duval (2004a), há uma gama de representações semióticas possíveis de serem mobilizadas como, por exemplo, figuras geométricas, esquemas, diagramas, gráficos, expressões simbólicas (numéricas e algébricas), expressões linguísticas (frases, textos) entre outras. Este autor as classifica como representações discursivas e não discursivas. As discursivas compreendem a língua natural, as linguagens formais, a escrita simbólica, o texto descritivo, as listas de fórmulas ou relações etc., enquanto que as representações não discursivas envolvem imagens, figuras geométricas, esquemas, diagramas etc.

A partir deste prisma, Duval (2004a) ressalta que os diferentes registros de representação semiótica se diferenciam não apenas pela natureza de seus significantes, mas também pelo sistema de regras que autoriza sua associação e pelo número de dimensões em que pode ser efetuada tal associação.

De acordo com Duval (2004b, 2011) e Macías Sanches (2014) o registro da língua natural, nas suas modalidades oral ou escrita, permite introduzir, enunciar e formular definições, proposições, teoremas etc., fazer designações, descrições, explicações de objetos matemáticos, realizar associações, argumentações e deduções a partir de observações e comportamentos de padrões, bem como para efetuar raciocínios matemáticos e para justificar soluções.

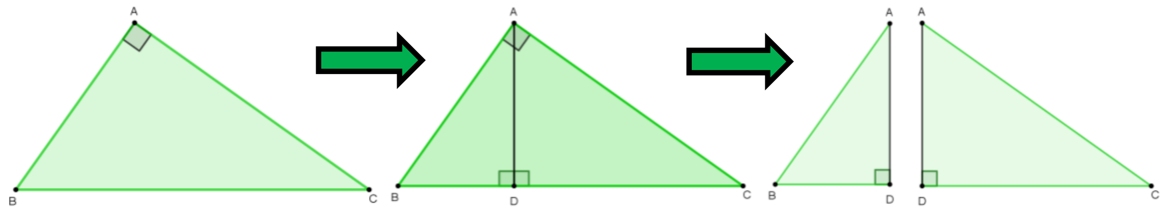
O registro simbólico, nas suas modalidades numérica, algébrica e tabular, permite identificar, estabelecer, sinalizar e avaliar propriedades e características dos objetos matemáticos de modo a vinculá-los e relacioná-los a outras representações em outros registros, realizar operações de cálculo, aplicar as propriedades comutativa, associativa, distributiva etc., realizar generalizações e perceber visualmente informações, de maneira global, quando dispostas em tabelas (MACÍAS SANCHES, 2014).

O registro gráfico permite avaliar, por meio da percepção visual, o comportamento do gráfico de uma função (observar variações), efetuar tratamentos próprios como translações, reflexões, simetrias, contrações, dilatações, interpolação, extrapolação etc., identificar características de uma dada curva, mudar o sistema de coordenadas etc. (DUVAL, 2004b; MACÍAS SANCHES, 2014).

O registro figural, na sua modalidade icônica, permite perceber, compreender e realizar desenhos, esquemas, esboços, marcas etc., mas sem o compromisso de elencar as qualidades dos objetos representados (DUVAL, 2011; MACÍAS SANCHES, 2014). Já o registro figural, na sua modalidade geométrica, permite realizar operações de construção instrumental, desconstrução dimensional das formas, divisão e reconfiguração mereológicas e manipulação que potencializam a compreensão e o estabelecimento de conexões entre diferentes objetos matemáticos (DUVAL, 2011; MACÍAS SANCHES, 2014).

Na Figura 05 apresentamos um exemplo de desconstrução dimensional.

Figura 05: Desconstrução dimensional de um triângulo retângulo.



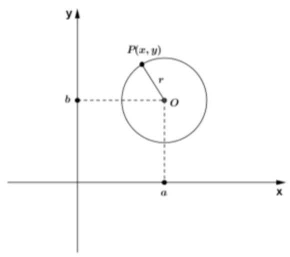
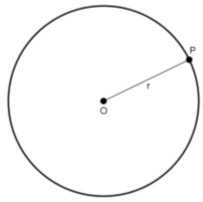
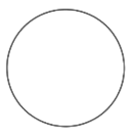
Fonte: Adaptado de Nóbriga (2015, p.180).

Neste exemplo, temos inicialmente a representação figural de um triângulo retângulo. No entanto, ao traçarmos a altura relativa à sua hipotenusa, obtemos outros dois triângulos retângulos. De acordo com Duval (2011, p.89) a desconstrução dimensional das formas “permite analisar a transformação de uma forma dada em outra forma de mesma dimensão”.

No que diz respeito ao registro figural, na sua modalidade geométrica-dinâmica, Almouloud e Salazar (2015) argumentam que esta modalidade permite realizar as mesmas operações da modalidade geométrica, porém em um novo modo fenomenológico de produção de representações, ou seja, em um ambiente de geometria dinâmica, como no caso desta pesquisa, em que utilizamos o *software* GeoGebra.

De acordo com as noções elencadas sobre registros e representações semióticas, apresentamos no Quadro 08 diferentes representações do objeto geométrico “circunferência”, as quais foram produzidas nos registros da língua natural, simbólico, gráfico e figural.

Quadro 08 - Diferentes representações do objeto geométrico “circunferência”.

Registro de representação semiótica	**Representação semiótica**
Língua Natural - modalidade escrita	Chama-se *circunferência* de centro *O* e raio *r* o lugar geométrico dos pontos *P* do plano, tais que a distância entre *O* e *P* seja igual a *r*, sendo *r* um número real positivo.
Simbólico - modalidade algébrica	$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$
Gráfico	
Figural - modalidade geométrica	
Figural - modalidade icônica	

Fonte: Autor da pesquisa.

No Quadro 08 apresentamos cinco representações distintas para o objeto geométrico "circunferência" em quatro distintos registros (língua natural, simbólico, gráfico e figural). No registro da língua natural, na sua modalidade escrita, define-se circunferência. No registro simbólico, na sua modalidade algébrica, apresentamos uma expressão matemática, mais especificamente a equação da circunferência. No registro gráfico, a partir de um sistema de coordenadas, há a representação de uma curva fechada (circunferência), cuja distância de um ponto P qualquer, de coordenadas x e y, pertencente à curva ao ponto O (centro da curva), de coordenadas a e b, é constante e igual ao número real positivo r. No registro figural há duas representações formadas, uma na modalidade geométrica em que se reconhece e se percebe as variações dimensionais (0D [dimensão zero] para pontos; 1D [dimensão um] para segmento de reta [raio] e a curva [circunferência]) e qualitativas (formas - pontos, traço e curva fechada; nomes dos pontos e da medida do raio) e outra na modalidade icônica em que se percebe visualmente apenas o traço de uma curva fechada sem elencar, por meio designações verbais, variáreis qualitativas e outras representações semióticas pertinentes. Destacamos neste exemplo, que a diferença entre a representação formada no registro gráfico e a representação formada no registro figural está no fato de que o primeiro requer um sistema de coordenadas e o segundo não.

Nesta perspectiva, destacamos que a atividade matemática não pode ser limitada simplesmente à utilização de um único registro, ou seja, "em matemática, não podemos jamais pensar em um único registro, mas em vários ao mesmo tempo, mesmo se as produções vão privilegiar um único registro" (DUVAL, 2011, p.116), pois a ausência de coordenação entre diferentes registros de representação semiótica potencializa o déficit de apreensão dos objetos matemáticos estudados pelo estudante (DUVAL, 2004a).

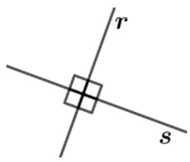
Duval (2011, p.100) argumenta que "a mobilização de um segundo registro é necessária para poder discernir e reconhecer as unidades de sentido que são pertinentes no conteúdo das representações produzidas no primeiro registro". Essas unidades são os dados ou as informações matematicamente pertinentes ao desenvolvimento de tarefas matemáticas, tais como: termos (lado, paralela, perpendicular, centro, raio, medida, área etc.), frases, expressões simbólicas, tabelas, pontos, retas, polígonos, circunferências, gráficos, diagramas, esquemas etc. Duval (2011) destaca ainda que as unidades de sentido relacionadas à designação de objetos matemáticos não se constituem apenas por palavras, sobretudo por expressões que combinam ao menos duas palavras.

De acordo com Duval (2011), os registros de representação semiótica são ferramentas que permitem avaliar a pertinência cognitiva de sequências de tarefas aplicadas aos estudantes, ou seja,

> [...] sua adequação às condições necessárias para desenvolver compreensão. Eles permitem definir O CAMPO DE TRABALHO COGNITIVO REQUERIDO para que os alunos possam atingir a compreensão dos conhecimentos matemáticos a adquirir. Eles permitem igualmente analisar suas produções e colocar em evidência seus pontos de bloqueio (DUVAL, 2011, p.141 grifos do autor).

Além disso, os registros de representação semiótica permitem também identificar variáveis inerentes à atividade cognitiva do sujeito e que auxiliam a compreensão em matemática (Duval, 2011). Neste sentido, apresentamos no Quadro 09 três diferentes representações semióticas para os objetos geométricos “retas perpendiculares”. Essas representações são apresentadas nos registros da língua natural, simbólico e figural, respectivamente.

Quadro 09 - Três diferentes representações, em distintos registros, para os objetos geométricos “retas perpendiculares”.

(representação no registro da língua natural)	(representação no registro simbólico)	(representação no registro figural)
r e ***s*** são retas perpendiculares	$\boldsymbol{r \perp s}$	

Fonte: Autor da Pesquisa.

Conforme as informações do Quadro 09, temos na primeira situação uma representação escrita, no registro da língua natural, de duas retas perpendiculares, na segunda há uma representação no registro simbólico de duas retas perpendiculares evidenciada pelo símbolo " $\perp$ " que em Matemática se refere à perpendicularidade entre dois objetos geométricos e, a terceira situação, exibe as retas r e s perpendiculares no registro figural em que se evidencia a marca de ângulo reto para o ângulo formado entre tais retas. Destacamos que em cada uma das representações há unidades de sentido que são pertinentes ao conteúdo das representações produzidas (palavra “perpendiculares”; símbolo " $\perp$ "; marca de ângulo reto e os traços das retas *r* e *s*).

De acordo com os pressupostos teóricos de Duval (2004a, 2004b, 2011) os registros de representação semiótica devem permitir que se cumpra três atividades cognitivas intrínsecas a toda representação, a saber:

(1) **Formar** uma marca ou um conjunto de marcas perceptíveis de modo que se tornem identificáveis como uma representação de alguma coisa em um dado registro de representação semiótica como, por exemplo, formar as marcas, contrastes e contornos percebidos do ponto médio de um segmento de reta no registro das figuras geométricas.

(2) **Tratar** as representações produzidas em um registro de representação semiótica conforme as regras (operações) particulares e as possibilidades de funcionamento do próprio registro de modo a se obter outras representações internas ao mesmo registro, com o intuito de potencializar o conhecimento matemático em relação às representações iniciais como, por exemplo, as reformulações de enunciados no registro da língua natural, o cálculo no registro simbólico (nas suas modalidades numérica e algébrica) e as reconfigurações no registro das figuras geométricas.

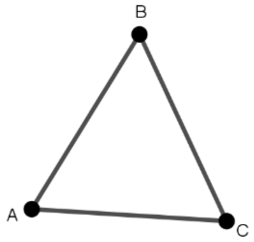
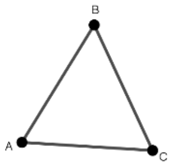
(3) **Converter** as representações produzidas em um determinado registro de representação semiótica em um registro diferente do inicial, de modo que estas últimas representações possibilitem revelar outras significações relativas ao objeto matemático representado no registro de chegada como, por exemplo, converter a representação de um objeto geométrico produzida no registro da língua natural, na sua modalidade escrita, para uma representação correspondente desse objeto no registro das figuras geométricas.

2.1.1. Formação, tratamento e conversão de representações semióticas

Em relação às três atividades cognitivas inerentes a toda representação semiótica, Duval (2004a) as tipifica como **formação**, **tratamento** e **conversão**, respectivamente.

A formação de uma representação semiótica é o recurso em que o indivíduo usa um ou mais signos para atualizar o "olhar" de um dado objeto matemático ou para mudar a percepção visual desse objeto. De acordo com Duval (2004a, p.43) os atos elementares da formação de uma representação são "a designação nominal dos objetos, a reprodução de seu contorno percebido, a codificação de relações ou de algumas propriedades". Esses atos elementares são interessantes, segundo Duval (2004a), quando as representações formadas ficam articuladas com representações de ordem superior, tais como: frases, figuras geométricas, esquemas, expressões simbólicas, tabelas etc. No Quadro 10 apresentamos um exemplo de formação da representação figural de um triângulo, bem como os elementos presentes na formação.

Quadro 10 - Atividade cognitiva referente à formação da representação de um triângulo.

Registro figural: Formação da representação de um triângulo	Formas, marcas e contornos perceptíveis e identificáveis na representação
	Pontos: (●) - vértices do triângulo Caracteres: A, B e C - nomes dos vértices Segmentos de reta: ●——● - lados do triângulo Codificação: AB, AC e BC - nomes dos lados do triângulo Triângulo:  Codificação: ABC - nome do triângulo

Fonte: Autor da pesquisa.

O tratamento de uma representação semiótica é, segundo Duval (2004a), a transformação de uma representação inicial em outra representação final de um mesmo objeto matemático, no que diz respeito a uma questão, a um problema ou a uma necessidade que proporcionam o critério de interrupção na série das transformações realizadas. Enfim, o tratamento de uma representação é uma transformação interna a um registro de representação semiótica, ou seja, essa transformação gera outra representação do objeto matemático em estudo com a intensão de exibir relações que antes não eram possíveis de serem percebidas.

Um exemplo de tratamento é a paráfrase a qual, segundo Duval (2004a), é uma transformação interna ao registro da língua natural, pois possibilita reformular um enunciado dado em outro, seja para explicá-lo ou para substituí-lo. Vejamos uma situação desse tipo de tratamento para o enunciado da definição da mediatriz de um segmento de reta:

(1) *A mediatriz de um segmento é a reta perpendicular ao segmento pelo seu ponto médio*[12].

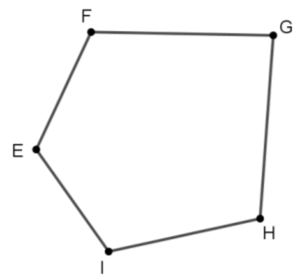
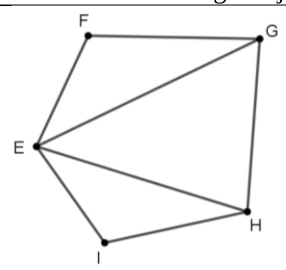
(2) *Dado um segmento AB em uma reta r, chamamos de* **mediatriz do segmento** *AB, a reta s perpendicular à reta r que passa pelo ponto médio M de AB*[13].

O segundo enunciado de mediatriz de um segmento de reta pode ser interpretado como uma explicação do primeiro e, consequentemente uma substituição, pois traz informações geométricas pormenores.

[12] Dolce e Pompeo (2005, p.84).
[13] Gerônimo e Franco (2010, p.53).

No Quadro 11 apresentamos outro exemplo de tratamento, só que desta vez no registro das figuras geométricas, o qual se refere a uma reconfiguração.

Quadro 11 - Atividade cognitiva referente ao tratamento de uma representação formada no registro figural.

<table>
<tr><td>Registro figural:
Representação de um pentágono (inicial)</td><td>Registro figural:
Representação de um pentágono (final) - percebido como a reunião de três triângulos justapostos</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Fonte: Autor da pesquisa.

Neste exemplo, temos uma representação do pentágono EFGHI formada no registro figural. Ao traçarmos as diagonais EG e EH do pentágono, dizemos que a representação inicial desse polígono recebeu um tratamento figural (uma reconfiguração) de modo que nossa percepção visual reconheça a partir desses segmentos de reta a representação dos triângulos EFG, EGH e EHI. Neste caso dizemos que o pentágono EFGHI, por meio de suas diagonais EG e EH, ficou reconfigurado em três triângulos justapostos. Mas qual o objetivo dessa reconfiguração? Uma resposta pode estar relacionada à soma das medidas dos ângulos internos de um pentágono convexo, cujo processo de verificação parte da sua decomposição em triângulos. Outra resposta pode estar associada ao número de diagonais do pentágono com extremidades em cada um de seus vértices.

De um modo geral, "o tratamento de uma representação semiótica corresponde a sua expansão informacional" (DUVAL, 2004a, p.45), ou seja, o tratamento potencializa uma multiplicidade de informações a respeito do objeto matemático representado em um dado registro, uma vez que "cada registro favorece um tipo de tratamento" (DUVAL, 2004b, p.45).

A conversão de uma representação semiótica é a transformação de uma representação de um objeto matemático, formada em um dado registro, em outra representação do mesmo objeto, porém, em um registro diferente daquele inicial. Segundo Duval (2004a) a conversão é uma transformação externa ao registro de representação de partida. De acordo com este autor as operações que evocam os termos "tradução", "ilustração", "transposição", "interpretação", "codificação" etc. são operações que potencializam a correspondência de uma representação formada em um registro com outra representação formada em um registro diferente do inicial.

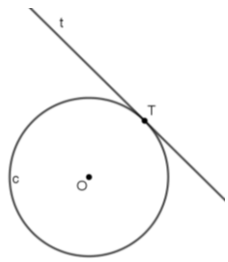
Duval (2004a) salienta que quando uma representação é formada em um registro discursivo (língua natural, linguagem formal, simbólico etc.) e é convertida para uma representação correspondente em um registro não discursivo (figuras geométricas, gráficos, esquemas, diagramas etc.) tem-se uma ilustração, enquanto que no sentido contrário há uma descrição ou uma tradução. Nesta perspectiva, “a ilustração é a colocação em correspondência de uma palavra, de uma frase, ou de um enunciado com a figura ou com um de seus elementos” (DUVAL, 2004a, p.46). Já a passagem inversa, de uma figura geométrica, uma imagem ou um diagrama a um texto, uma frase ou expressão simbólica caracteriza uma descrição ou uma interpretação do objeto representado.

Para Duval (2004b, p.45) “a característica da conversão é conservar a referência ao mesmo objeto, mas sem conservar a explicitação das mesmas propriedades desse objeto”, ou seja, nas palavras do autor, “a representação do objeto no registro de chegada não terá o mesmo conteúdo que sua representação no registro de partida” (DUVAL, 2004b, p.45).

Nesta ótica, Duval (2004a, p.46) salienta que a conversão de representações exige que percebamos “a diferença entre o sentido e a referência dos símbolos ou signos, ou entre o conteúdo de uma representação e aquilo que ela representa”, pois, segundo o autor, sem essa percepção a atividade cognitiva de conversão se torna impossível ou incompreensível.

No Quadro 12 apresentamos um exemplo de uma conversão de uma representação dada no registro da língua natural, na sua modalidade escrita, para uma representação formada no registro figural na sua modalidade geométrica.

Quadro 12 - Atividade cognitiva referente à conversão de representações.

Registro de partida (língua natural, na sua modalidade escrita)	Registro de chegada (figural, na sua modalidade geométrica)
Uma reta tangente a uma circunferência é uma reta que intersecta a circunferência em um único ponto. descrição	ilustração 

Fonte: Autor da pesquisa.

No exemplo do Quadro 12 temos no registro de partida (língua natural) uma representação escrita da definição da reta tangente a uma circunferência, enquanto que no registro de chegada (figural) temos a representação de uma circunferência, de uma reta e de um ponto determinado pela interseção entre a circunferência e a reta. Esse ponto (ponto T) comum entre reta (reta *t*) e circunferência (circunferência *c*) é chamado ponto de tangência.

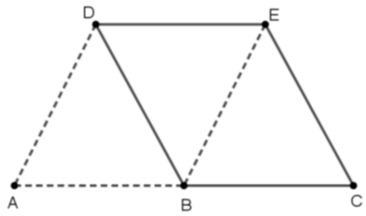
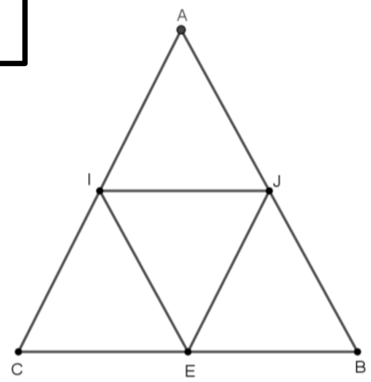
A passagem do registro da língua natural ao registro das figuras geométricas não constitui, segundo Duval (2004b), uma passagem simples ou evidente como com muita frequência se acredita, pois os problemas não surgem apenas do propósito das figuras a serem utilizadas ou encontradas, mas também ao propósito da designação dos objetos matemáticos sobre as figuras.

Para Duval (2004b) a conversão apresenta duas características, a saber: (1) tem uma orientação, ou seja, sempre é necessário indicar qual é o registro de partida e qual é o registro de chegada e (2) pode ser congruente ou não congruente, isto é, a correspondência entre duas representações de um mesmo objeto, produzidas em registros diferentes, pode ser congruente em um sentido e não congruente no sentido contrário.

De acordo com Duval (2004b, 2012b) quando se realiza a passagem de um registro a outro de maneira espontânea se tem uma congruência, ou seja, a representação mobilizada no registro de partida é transparente a representação mobilizada no registro de chegada. Entretanto, quando a representação do registro de partida se faz “opaca” e não se deixa pensar como uma representação no registro de chegada se tem uma situação de não congruência.

No quadro 13 apresentamos exemplos de congruência e não congruência na conversão de representações.

Quadro 13 - Congruência e não congruência na conversão de representações.

Registro em língua natural		Registro das figuras geométricas
I ABED e BCED são paralelogramos. Provar que B é o ponto médio de AC.	**CONGRUÊNCIA**	**I’** 
II AC e JE são paralelos. AB e IE são paralelos. IJ e CB são paralelos. Provar que E é o ponto médio de CB.	**NÃO CONGRUÊNCIA**	**II”** 

Fonte: Adaptado de Duval (2011, p.120).

Destacamos que os dois enunciados representados em língua natural se referem matematicamente ao mesmo problema (provar que um ponto é o ponto médio de um segmento), entretanto há uma distância considerável entre as unidades de sentido (paralelogramos e segmentos de reta paralelos) destes enunciados.

Segundo Duval (2011), as unidades figurais 2D (bidimensionais) que foram designadas pelas palavras “paralelogramos”[14] no primeiro enunciado (item **I** do Quadro 13) correspondem as formas 2D imediatamente percebidas e reconhecidas visualmente por meio da representação figural (item **I’** do Quadro 13 – que lembra uma folha de papel que se dobra), ou seja, há congruência entre as representações dos dois registros (língua natural e figural), bem como há congruência entre as unidades figurais visíveis e as que permitem inicializar tratamentos para resolver o problema. Entretanto, do segundo enunciado (item **II** do Quadro 13) para a representação figural (item **II’** do Quadro 13) não existe nenhuma correspondência, ou seja, há uma não congruência entre as duas representações, pois o enunciado se refere a segmentos de reta (unidades figurais 1D - unidimensionais) e a percepção visual das formas impõe o reconhecimento de regiões triangulares, isto é, unidades figurais 2D. O autor destaca que “a

[14] Salientamos que o uso da palavra paralelogramo está no lugar de uma região do plano delimitada por um paralelogramo.

percepção impõe sempre o reconhecimento de formas 2D contra as formas 1D" (DUVAL, 2011, p.120).

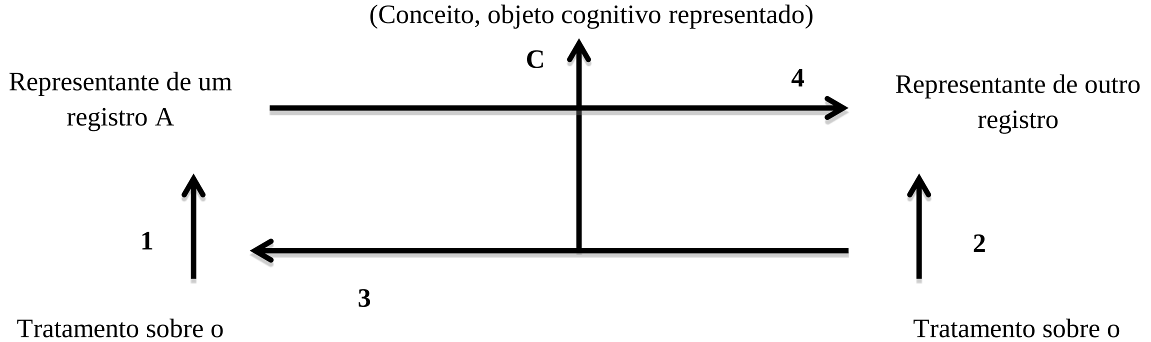
Mesmo ocorrendo a congruência ou a não congruência de representações semióticas de um mesmo objeto matemático mobilizadas em diferentes registros, Duval (2004a) destaca que dentre as funções cognitivas de comunicação, tratamento e objetivação,

> [...] é a função de objetivação que é essencial para analisar a relação entre a diversidade dos registros e o funcionamento cognitivo do pensamento. Porque a conceitualização, a compreensão, a conversão são formas de objetivação ou de atividades estreitamente ligadas a esta função (DUVAL, 2004a, p.67, tradução nossa).

Nesta perspectiva, analisar as produções matemáticas dos estudantes se pauta também, segundo Duval (2004a), no modelo cognitivo da representação sobre a função de objetivação, na qual o sujeito passa a ter o entendimento de objetos e suas propriedades que ele próprio não possuía, e por meio do desenvolvimento de tarefas ou do seu envolvimento com outras atividades pode perceber e compreender conceitos desconhecidos ou não assimilados até então.

De acordo com Duval (2004a), a função de objetivação compreende duas relações possíveis entre representante (signo utilizado para representar o objeto matemático) e representado (objeto matemático percebido, conceito e propriedades). A primeira relação se refere à atividade cognitiva de tratamento do representante e a segunda se refere à atividade cognitiva de conversão dos representantes, que é necessária à função de objetivação. A Figura 06 apresenta o modelo da representação centrada na função de objetivação.

Figura 06: Modelo da representação centrado na função de objetivação.



Fonte: Duval (2004a, p.68).

No modelo representado na Figura 06, Duval (2004a) sublinha que as flechas 1 e 2 se referem às transformações internas a um registro, ou seja, a um tratamento, as flechas 3 e 4 se referem as transformações externas, ou seja, as conversões por meio da mudança de registro, enquanto que a flecha C compreende a coordenação de dois registros. Segundo Duval (2004a), é durante o processo de coordenar diferentes registros de representação semiótica que emerge a função de objetivação.

Duval (2004a) descreve que o modelo representado na Figura 06 se refere ao caso mais simples de coordenação entre dois registros. Deste modo, em algumas situações como, por exemplo, a Geometria Euclidiana, pode requerer a coordenação de ao menos três registros, entre eles destacamos a língua natural, o simbólico e o figural. Da mesma forma, podemos verificar possibilidades importantes da estrutura da representação, ou seja, o que é representado em um registro não é o que representa em outro registro, como é o caso da relação existente entre língua natural e figura. Além disso, neste modelo não existem flechas aos tratamentos próprios a cada registro. O autor destaca também que sem excluir o caso de congruência, as mudanças de registros tendem ao fato de que cada registro tem tratamentos próprios.

Enfim, Duval (2004a) salienta que para não ocorrer confusão do objeto matemático com suas representações é necessário que o indivíduo disponha e coordene uma variedade de representações semioticamente heterogêneas desse objeto.

2.1.2. Registro das figuras geométricas e suas operações

No que diz respeito ao estudo da Geometria Euclidiana, Duval (2004a) enfatiza que a atividade matemática desenvolvida nesse contexto se realiza por meio da sinergia entre o registro das figuras geométricas e os registros discursivos que compreendem especialmente a língua natural, a linguagem matemática e o simbólico. De acordo com este autor o registro das figuras geométricas é mobilizado para designar as figuras e, também, para reproduzir formas, marcas, contrastes e contornos percebidos. Já os registros discursivos são mobilizados para enunciar axiomas, definições, teoremas, hipóteses etc., bem como para empregar símbolos para designar objetos e estabelecer expressões linguísticas ou simbólicas.

Destacamos que os registros discursivos, segundo Duval (2004b), são aqueles que usam uma língua ou símbolos e permitem descrever, inferir, raciocinar, argumentar, calcular, formular proposições, transformar expressões etc. Os registros não discursivos são aqueles que, ao contrário, mostram formas ou configurações de formas ou organizações e permitem "ver" o que nunca é dado de maneira visível (DUVAL, 2004b).

Neste prisma, Duval (2004a) exprime que a atividade cognitiva relativa à geometria:

> [...] é mais exigente posto que os tratamentos efetuados separada e alternativamente em cada um dos registros [**figuras geométricas e discursivos**] não bastam para que esse processo chegue a algum resultado: é necessário que os tratamentos figurais e discursivos se efetuem simultaneamente e de maneira interativa (DUVAL, 2004a, p.155, tradução e grifos nossos).

Ainda para este autor,

> A originalidade dos processos em geometria, em comparação com outras formas de atividade matemática, tem a ver com o que é absolutamente necessária **para a coordenação entre os tratamentos específicos ao registro das figuras e os do discurso teórico em língua natural** (DUVAL, 2004a, p.155, grifos do autor, tradução nossa).

Segundo Duval (2004a), os tratamentos figurais parecem resultar de leis de organização e da percepção visual, enquanto que os discursos teóricos (tratamentos discursivos) parecem ser a extensão direta da compreensão imediata da língua utilizada para comunicação. Para este autor:

> A condição prévia para a descrição precisa dos diferentes tratamentos matemáticos pertinentes no registro das figuras geométricas é uma análise semiótica relativa a determinação das unidades de base constitutivas deste registro, as possibilidades de sua articulação em figuras e a modificação de figuras obtidas. Esses tratamentos são importantes posto que é sua execução, em parte não consciente, o que permite as figuras cumprir sua função heurística (DUVAL, 2004a, p.157, tradução nossa).

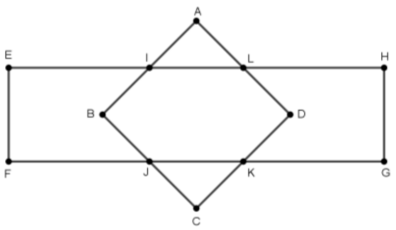
De acordo com Duval (2004a) as unidades que constituem semioticamente uma figura geométrica são unidades elementares do registro das figuras geométricas, pois, para este autor, toda figura é a combinação de valores de dois tipos de variações visuais, isto é, o cruzamento dos valores de uma variável visual qualitativa com uma variável de dimensão. As unidades figurais elementares são as formas de base nas quais todas as figuras podem ser analisadas (pontos, retas, planos, segmentos de retas, ângulos, curvas, circunferências, polígonos, poliedros, arestas, não poliedros etc.).

Segundo Duval (2011, p.85) "ver uma figura é reconhecer imediatamente as formas, isto é, os contornos fechados justapostos, superpostos, separados". Para este autor,

> As figuras geométricas se distinguem de todas as outras representações visuais pelo fato de *que existem sempre várias maneiras de reconhecer as formas ou as unidades figurais, mesmo que o fato de reconhecer umas exclui a possibilidade de reconhecer outras.* Em outras palavras, para ver matematicamente uma figura ou um desenho é preciso mudar o olhar sem que a representação visual no papel ou no monitor seja modificada (DUVAL, 2011, p.86, grifos do autor).

No Quadro 14 apresentamos um exemplo de como ver uma figura geométrica plana a partir de três pontos de vista.

Quadro 14 - Pelo menos três maneiras de ver uma figura geométrica plana.

<table>
<tr><th>Configuração global</th><th colspan="2">Formas ou contornos fechados reconhecidos</th><th>Unidades figurais elementares reconhecidas</th></tr>
<tr><td rowspan="2">
</td><td>Acoplamento/decomposição por
JUSTAPOSIÇÃO</td><td>Acoplamento por
SUPERPOSIÇÃO</td><td>Construção instrumental (régua, compasso ou *software*)</td></tr>
<tr><td>**6 formas poligonais:**
2 triângulos: AIL e CKJ
2 pentágonos: EFJBI e HGKDL
1 hexágono: BJKDLI
1decágono: AIEFJCKGHL</td><td>**2 quadriláteros:**
ABCD e EFGH</td><td>**8 lados:**
segmentos de reta: AB, BC, CD, DA, EF, FG, GH e HE</td></tr>
</table>

Fonte: Adaptado de Duval (2011, p.87).

De acordo com Duval (2011, p. 87) "a maneira matemática de ver as figuras em geometria exige que possamos passar espontaneamente ou rapidamente de uma para outra". Desta forma, enunciar propriedades ou definições possibilita ao indivíduo o reconhecimento de unidades figurais. Além disso, Duval (2004a) destaca que para que se possa ter uma figura é necessário que haja um contraste sobre um suporte material como, por exemplo, uma folha de papel, a tela de um computador etc., de modo que se evidencie nesse suporte alguma coisa reconhecível no campo perceptivo.

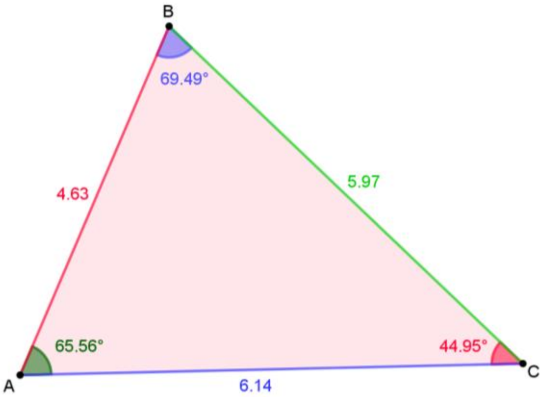
Para Duval (2004a), o contraste é o primeiro elemento de toda representação visual, pois, forma a "implantação" de uma "mancha visível" e, esta implantação está suscetível a algumas variações visuais, as quais podem ser agrupadas em dois tipos, a saber:

(1) **Variações ligadas ao número de dimensões de um objeto geométrico:** compreende pontos (dimensão zero - 0D), linhas (dimensão um - 1D), superfícies/regiões/zonas (dimensão dois - 2D) ou espaço (dimensão três - 3D). Estas dimensões se referem ao estudo da Geometria Euclidiana.

(2) **Variações qualitativas de uma representação figural:** compreende variações de formas (pontos, linhas retas ou curvas, contornos aberto ou fechado de uma região/zona etc.); variações de tamanho e de orientação[15]; variações de granulação, de cor, de espessura etc.

Duval (2004a) explicita que as variáveis qualitativas (especialmente a granulação, a cor, a espessura, o tamanho e a orientação) são utilizadas para melhorar a "leitura" de uma figura geométrica. A variável "cor" pode ser importante para o estudante no que diz respeito ao reconhecimento de unidades figurais ou de propriedades visuais das formas para evidenciar algum ente relevante. Entretanto, esta variável não intervém na representação figural, exceto para dar um destaque visual (DUVAL, 2004a). Na Figura 07 apresentamos uma situação da utilização da variável qualitativa cor.

Figura 07: Marcas e medidas com as mesmas cores.



Fonte: Autor da pesquisa.

Na Figura 07 temos a representação figural de um triângulo. Podemos perceber visualmente que as marcas de ângulos (registro figural) e as respectivas medidas (registro discursivo) desses ângulos têm as mesmas cores. Analogamente, se observa o mesmo efeito em relação aos lados do triângulo e suas respectivas medidas.

De um modo geral, Duval (2004a) salienta que é apenas a variável visual de "forma" que pode determinar uma unidade de base representativa para qualquer que seja a figura geométrica.

Duval (2004a) destaca ainda que um mesmo objeto geométrico pode ser representado por meio da mobilização de diferentes unidades figurais. O ponto, por exemplo, pode ser representado de maneiras diferentes, a saber: a típica de dimensão 0 (fazer a representação de um ponto numa folha de papel ou na tela do computador por meio de um *software* específico)

[15] Corresponde às mudanças de posição (vertical, horizontal ou inclinado/oblíquo).

e aquelas menos típicas de dimensão 1 como, por exemplo, o vértice de um ângulo ou a interseção de duas retas concorrentes.

Neste sentido, as diferenças de variações visuais permitem definir os elementos que constituem uma figura, ou seja, “toda figura aparece como a combinação de valores para cada uma das variações visuais destes dois tipos, **dimensional** e **qualitativo**” (DUVAL, 2004a, p.157).

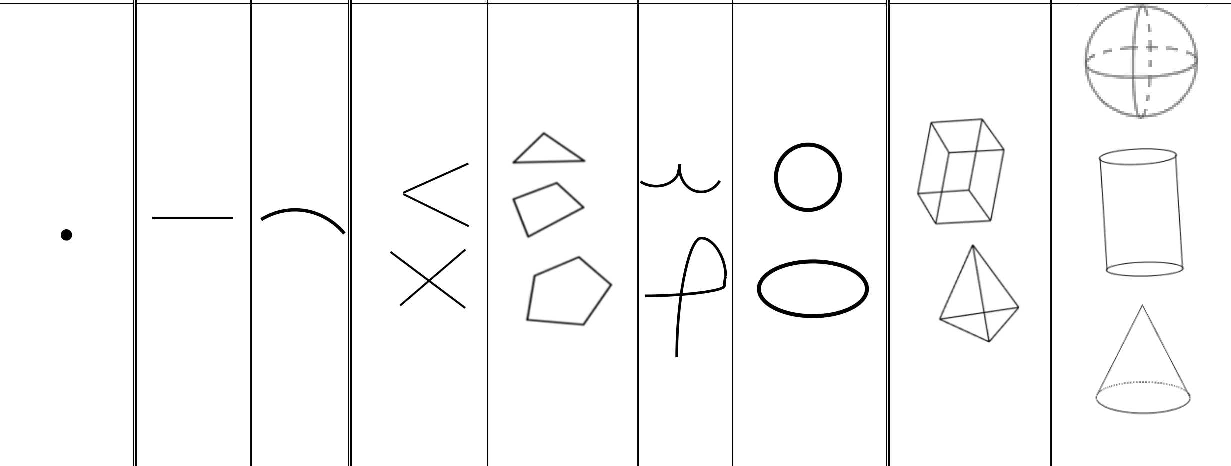
Logo, uma figura geométrica é, segundo Duval (2004a), uma configuração de pelo menos duas unidades figurais elementares. Por exemplo: um cubo com suas diagonais, uma circunferência com seu centro e raio, um segmento de reta com suas extremidades e seu ponto médio, são configurações de no mínimo duas unidades figurais elementares.

Moretti e Brandt (2015, p.600) destacam que uma figura geométrica resulta da conexão entre duas apreensões: perceptiva e discursiva, ou seja, “é preciso ver a figura geométrica a partir do que é dito e não das formas que se destacam ou das propriedades evidentes”.

De um modo geral, para Duval (2004a), as figuras geométricas abarcam várias unidades figurais elementares com valores de formas diferentes, por exemplo, pontos, retas, ângulos, polígonos, circunferências, poliedros, corpos redondos etc.

Neste sentido, apresentamos na Figura 08 uma classificação para as unidades figurais elementares nos seus aspectos dimensional e qualitativo (as diferentes formas).

Figura 08: Classificação das unidades figurais elementares.

Percepção visual das unidades figurais elementares: variações dimensional e qualitativa (das formas)								
Dimensão 0 – 0D	**Dimensão 1 – 1D (linha)**		**Dimensão 2 – 2D[16] (superfície/região/zona)**				**Dimensão 3 – 3D (espaço)**	
Forma	Forma retilínea	Forma curva	Forma retilínea		Forma curva		Forma retilínea (compreende: pontos, segmentos de reta e polígonos)	Forma curva (compreende: pontos, arcos e circunferências)
			Aberta	Fechada	Aberta	Fechada		
								
Ponto	Reta, semirreta e segmento de reta	Arco e curva	Ângulo e retas concorrentes	Polígonos: triângulos, quadriláteros, pentágonos etc.	Curva simples e não simples	Circunferência e elipse	Poliedros: prismas e pirâmides	Corpos redondos: esferas, cilindros e cones

Fonte: Adaptado de Duval (2004a, p.159).

Para Duval (2004a), no registro das figuras geométricas há a predominância perceptiva das unidades figurais elementares de dimensão 2 sobre as de dimensão 1 ou 0. Já no registro da língua natural, em que são definidos os objetos representados por meio de uma figura, existe a predominância dos objetos representados pelas unidades figurais elementares de dimensão 1 ou 0.

Duval (2004a) destaca que no ensino e na aprendizagem da geometria devemos levar em consideração as diferentes apreensões as quais uma figura dá lugar. Essas apreensões podem ser perceptiva, discursiva, operatória ou sequencial (DUVAL, 2012a, 2012c).

A apreensão perceptiva diz respeito ao reconhecimento visual das formas da figura geométrica e ocorre de maneira imediata e automática em ambientes bi ou tridimensionais

[16] Salientamos que as formas geométricas (1D) destacadas para representar as unidades figurais elementares de dimensão 2, estão apenas no lugar dos contornos de regiões/zonas (2D), as quais são delimitadas por esses contornos. Por exemplo, uma região triangular (2D) é delimitada por um triângulo (1D). Temos regiões que não são totalmente delimitadas como, por exemplo, a região compreendida por um ângulo ou por uma reta, que nesse caso se trata de semiplanos.

como, por exemplo, os objetos (0D, 1D, 2D ou 3D) da Geometria Euclidiana representados na janela de visualização do GeoGebra são percebidos e reconhecidos em um ambiente 2D, ou seja, na tela de um computador, enquanto que esses objetos representados por meio de materiais manipuláveis, tais como barbantes, folhas de papel, caixas etc., são percebidos e reconhecidos em um ambiente 3D (DUVAL, 2012a, 2012c).

A percepção que alguém faz sobre o que uma figura mostra é determinada por leis de organização figural e marcas ilustrativas. Portanto, a apreensão perceptiva indica a capacidade que um indivíduo tem em nomear figuras, bem como a capacidade de reconhecer na figura percebida outras subfiguras como, por exemplo, perceber a representação de um polígono de três lados e nomeá-lo de triângulo e, consequentemente identificar seus vértices e seus lados (DUVAL, 2012a, 2012c).

A apreensão discursiva está relacionada às hipóteses que a figura representa e ao fato de que as propriedades matemáticas representadas em uma figura não podem ser determinadas por meio da apreensão perceptiva, pois em qualquer representação geométrica, o reconhecimento perceptivo de propriedades geométricas deve ficar sob a gestão de afirmações verbais que envolvem, por exemplo, designar, denotar, denominar, definir, descrever, bem como entrar com comandos (em língua natural ou expressões algébricas) no campo de entrada do GeoGebra etc. (DUVAL, 2012a, 2012c).

A apreensão operatória se refere às modificações geométricas (física-instrumental ou mental) possíveis de uma figura inicial e as reorganizações possíveis dessas modificações, além de compreender diferentes possibilidades de modificar uma representação figural, entre elas: a mereológica, a ótica e a de posição.

A possibilidade **mereológica** diz respeito a uma divisão de uma figura inicial em subfiguras, de modo que a combinação (reconfiguração) dessas subfiguras permite a formação de outra representação figural, e se faz em função da relação parte todo.

A possibilidade **ótica** está relacionada a ampliar, reduzir ou deformar a representação figural dada e, a possibilidade **de posição** se refere à mudança de posição (rotação ou translação) da representação figural ou a sua variação de orientação (DUVAL, 2004a, 2012a, 2012c).

Destacamos que cada uma dessas possibilidades de modificar uma representação figural pode ser realizada por meio de diferentes operações, as quais resultam no tratamento da representação figural para dar uma visão da solução de um problema de geometria.

A apreensão sequencial trata especificamente da construção de uma figura ou da sua descrição, cujo objetivo é reproduzir uma figura por meio de instruções fornecidas. Esta apreensão é solicitada sempre que se deseja formar uma representação figural ou descrever como ocorreu sua formação.

Assim, a organização de unidades figurais elementares tais como, pontos, retas, segmento de retas, polígonos etc. não depende de leis e orientações perceptivas, mas de restrições técnicas (por exemplo: uso de ferramentas de um *software*) e de propriedades matemáticas envolvidas (DUVAL, 2012a, 2012c).

No Quadro 15, apresentamos uma síntese das apreensões em geometria.

Quadro 15 - Apreensões em geometria.

APREENSÃO PERCEPTIVA	APREENSÃO DISCURSIVA	APREENSÃO OPERATÓRIA			APREENSÃO SEQUENCIAL
Integração de estímulos (contrastes bruscos de brilho) em uma figura.	Variações de congruência entre as modificações figurais visíveis e dedução.	Tipos de modificações figurais.	Operações que modificam a figura: processo heurístico.	Fatores internos que disparam ou inibem a visibilidade destas operações.	Fatores externos que intervêm na construção da figura.
Leis de agrupamento de estímulos (simplicidade, fechamento, proximidade, ...) e identificação de formas. Indicadores de profundidade e de distância (tamanho, superposição, perspectiva em relação a um ponto de fuga, inclinação em relação a um plano fronto-paralelo[17]) e número de dimensões: 0D, 1D, 2D ou 3D. Orientação no plano fronto-paralelo.	As unidades figurais elementares e os objetos matemáticos utilizados pelo raciocínio dedutivo têm ou não o mesmo número de dimensões. Em função das hipóteses dadas, há congruência ou não entre o tratamento figural heurístico e a ordem nos passos da dedução.	**Mereológica** (relação parte/todo)	Reconfiguração: uma figura se decompõe em diferentes unidades figurais, elas podem ser combinadas em outra figura ou em diferentes subfiguras.	Partição em diversas subfiguras pertinentes. Convexidade ou não das subfiguras. Complementariedade Duplicação.	Grau de congruência entre as unidades figurais possíveis e aquelas permitidas pelos instrumentos utilizados (régua, compasso, *software* etc.).
		Ótica	A mesma forma e orientação no plano fronto-paralelo, mas com variação de tamanho: superposição em profundidade de duas figuras semelhantes. Variação do plano em relação ao plano fronto-paralelo (variação de forma e constância de forma e de tamanho).	A mesma orientação das figuras (objeto e imagem). As linhas de perspectiva são todas distintas dos lados das duas figuras. Centro de homotetia no interior ou no exterior do contorno convexo envolvendo as duas figuras.	
		De posição	O mesmo tamanho e forma, mas com variação de orientação, rotação e translação.	Pregnância (percepção) das direções vertical e horizontal.	

Fonte: Adaptado de Duval (2012c, p.288).

Dentre as quatro apreensões em geometria, Duval (2004a) destaca a operatória, uma vez que para este autor toda figura tem a possibilidade de ser modificada de diversas maneiras, pois, é possível separar as unidades figurais elementares de dimensão 2 que a compõe em outras unidades figurais, sendo ou não homogêneas, também de dimensão 2 e estas por sua vez

[17] Plano vertical e paralelo ao plano que contém a figura geométrica.

podem recombinar-se para alterar o contorno global da figura. Há possibilidade também de, nos ambientes de geometria dinâmica, aumentar ou reduzir o tamanho da figura, bem como deslocá-la, de maneira contínua, por translação ou rotação.

Para Duval (2004a) a apreensão operatória possibilita ao sujeito ver uma variedade de subfiguras possíveis a partir de uma figura. Essas subfiguras não são perceptíveis ao "primeiro olhar" e são reorganizações perceptivas diferentes que representam algumas ou todas as unidades figurais elementares da figura inicial.

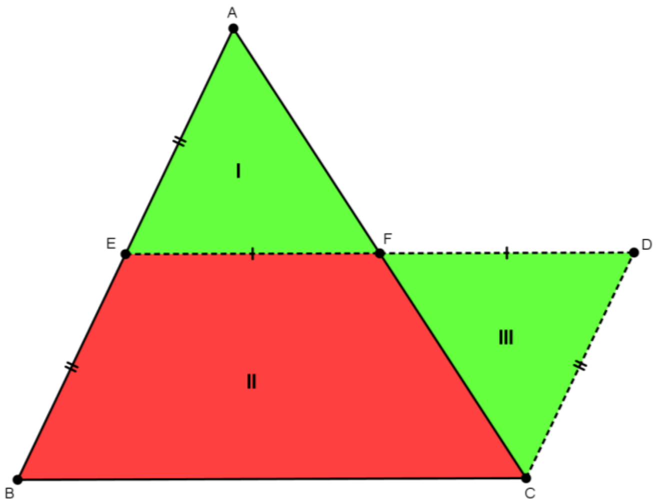
De acordo com Duval (2004a), cada uma das modificações de uma figura, as quais têm naturezas distintas, proporcionam operações específicas e formam a produtividade heurística das figuras. Nesta perspectiva, este autor trata de duas dessas operações, a saber: a **reconfiguração** e a **perspectiva**.

> A reconfiguração é a operação que consiste em reorganizar uma ou várias subfiguras diferentes de uma figura dada em outra figura. Uma subfigura pode ser uma unidade figural elementar de dimensão 2 ou um reagrupamento de unidades figurais elementares também de dimensão 2. Naturalmente, se pode aumentar o número das partes de uma figura por um fracionamento de suas unidades figurais elementares de dimensão 2. Esta operação concerne à modificação mereológica de uma figura, isto é, relação das partes com o todo. A reconfiguração é um tratamento que consiste na divisão de uma figura em subfiguras, em sua comparação em seu reagrupamento eventual em uma figura de um contorno global diferente (DUVAL, 2004a, p.165, tradução nossa).

Este autor destaca ainda que a operação de reconfiguração se revela como uma operação fundamental para a apreensão matemática das figuras geométricas. A Figura 09 exibe a reconfiguração de um triângulo em que se obtém um paralelogramo equivalente a ele.

Figura 09: Operação de reconfiguração: triângulo e paralelogramo equivalentes.

Qualquer triângulo é equivalente a um paralelogramo de base congruente à do triângulo e cuja altura é a metade da altura do triângulo.



O triângulo ABC e o paralelogramo BCDE são equivalentes, pois, pelo ponto médio E do segmento AB, foi traçado o segmento ED paralelo ao segmento BC no sentido de formar o paralelogramo BCDE. Tal procedimento resulta na congruência dos triângulos AEF e CDF.
Logo, **I + II** (triângulo ABC) é equivalente a **II + III** (paralelogramo BCDE).

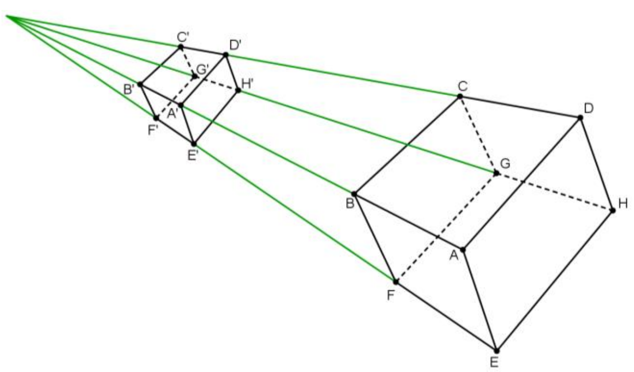
Fonte: Autor da pesquisa.

Já a operação de perspectiva é segundo Duval (2004a),

> [...] a operação que consiste em ver "em profundidade" duas unidades figurais da mesma forma e com a mesma orientação, porém cujos tamanhos respectivos podem variar. Esta operação está em relação com os mecanismos perceptivos que asseguram a constância do tamanho na percepção dos objetos do mundo circundante. Em efeito, o tamanho da imagem retiniana dos objetos varia com sua distância: quando a imagem se faz menor, não vemos o objeto menor, porém mais distante. [...] Esta operação habilita para a visão monocular a dimensão de profundidade (DUVAL, 2004a, p.166, tradução nossa).

A Figura 10 mostra a operação de perspectiva para a representação de um objeto geométrico espacial.

Figura 10: Operação de perspectiva: representação de um sólido geométrico.



Fonte: Autor da pesquisa.

Para Duval (2004a) a operação de perspectiva constitui um tratamento figural que orienta a análise matemática da configuração homotética plana, a qual deve ser reconhecida unicamente em termos de pontos e de relações de longitudes de segmentos de reta.

Em suma, Duval (2004a) salienta que as operações de reconfiguração e de perspectiva, bem como as operações de construção instrumental, desconstrução dimensional das formas etc., relativas as modificações possíveis de uma figura, são operações que estão distantes de ser espontâneas e evidentes na atividade geométrica.

Para este autor, a peculiaridade "da atividade geométrica consiste não apenas na necessária coordenação entre os tratamentos em dois registros, o das figuras geométricas e o da língua natural, mas se assenta também no fato de que os tratamentos que necessitam irem à contramão daqueles que se praticam espontaneamente" (DUVAL, 2004a, p.173). Neste sentido,

> [...] recorrer ao registro das figuras apresenta, em geometria, uma particularidade essencial: uma figura representa uma situação geométrica apenas na medida em que a significação de certas unidades figurais e de algumas de suas relações, estejam explicitamente definidas de entrada. Para fixar as propriedades do objeto que se deseja representar no desenho, não é suficiente o simples reconhecimento perceptivo das unidades figurais de dimensão 2, ou de relações entre unidades figurais de dimensão 1. Em geometria, não há desenho que represente por si mesmo, quer dizer, não há desenho "sem legenda". Um mesmo desenho pode representar situações matemáticas muito diferentes. É necessário pois, uma indicação verbal para ancorar a figura como representação de tal objeto matemático (DUVAL, 2004a, p.168, tradução nossa).

Nesta perspectiva, a introdução a uma figura geométrica é necessariamente discursiva e cada uma das operações que permitem modificar as figuras deve ser solicitada explícita e sistematicamente (DUVAL, 2004a).

Enfim, Duval (2004a) salienta que é necessário propor tarefas de geometria aos estudantes cujo processo de resolução passe por tratamentos figurais (assentados em modificações mereológicas, óticas ou de posições da figura e nas unidades figurais identificáveis) e que eles realizem conversões de mão dupla entre o registro das figuras geométricas e os registros discursivos (língua natural, linguagem matemática, simbólico etc.), pois para permitir aos estudantes tomar consciência destas diferentes atividades cognitivas e dos objetos geométricos envolvidos as tarefas propostas devem levar em consideração "todas as possibilidades oferecidas pela diversidade dos registros de representação" (DUVAL, 2004a, p.183).

2.1.2.1. Registro das figuras geométricas em ambientes de geometria dinâmica

Duval (2011, p.137) sublinha que os computadores e outros artefatos tecnológicos como, por exemplo, *smartphones* e *tablets* “não constituem um novo registro de representação”, no entanto, para este autor, tais recursos tecnológicos formam um modo fenomenológico de produção totalmente novo de representações semióticas, assentado na celeridade de tratamentos.

De acordo com Almouloud e Salazar (2015) um registro figural é caracterizado como geométrico-dinâmico quando for mobilizado e coordenado em ambientes de geometria dinâmica como, por exemplo, o *software* GeoGebra que permite formar e transformar representações figurais.

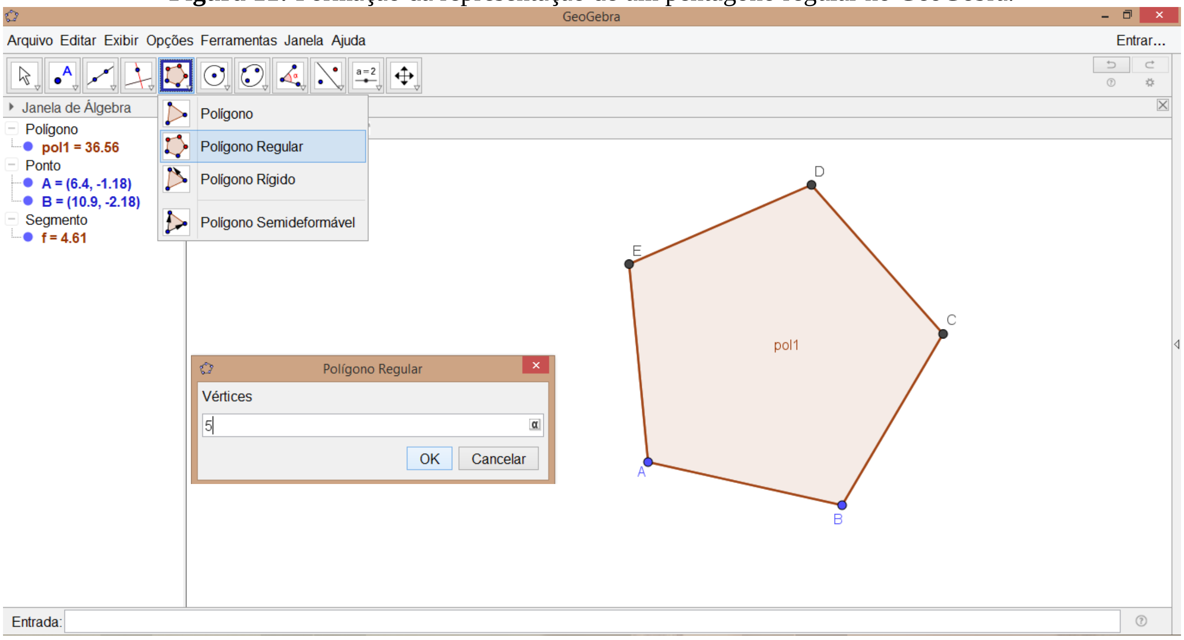
Além disso, o registro figural, na sua modalidade geométrica-dinâmica, não se refere a um novo tipo de registro, uma vez que é mobilizado e coordenado em uma nova plataforma de produção de representações semióticas e requer a interação com uma interface digital (tela de computador, *tablet* ou *smartphone*).

Logo, para compreender sobre as possibilidades desse meio fenomenológico de produção de representações figurais, Almouloud e Salazar (2015) caracterizam as atividades cognitivas de formação, tratamento e conversão inerentes ao registro figural, na sua modalidade geométrica-dinâmica, por meio da formação dinâmica, tratamento dinâmico e conversão dinâmica.

A **<u>formação dinâmica</u>** é a formação de uma representação semiótica por meio de um *software* de geometria dinâmica. Ocorre “quando o sujeito, para representar um objeto geométrico, escolhe uma ferramenta (da barra de ferramentas) que lhe permitirá criar a figura desejada. Nessa ação, o sujeito deve mobilizar conhecimentos de geometria” (ALMOULOUD, SALAZAR, 2015, p.928), os quais devem possibilitar a construção de uma figura geométrica e não a simples reprodução de um desenho.

Segundo Almouloud e Salazar (2015), as regras que permitem formar uma representação em um ambiente de geometria dinâmica dependem de unidades figurais elementares adotadas e de sua combinação, pois o indivíduo deve seguir uma série de passos coordenados para construir uma figura, que depende das possibilidades ou limitações do *software*. Na Figura 11 apresentamos um exemplo em que uma única ferramenta do GeoGebra permite formar a representação figural de uma pentágono regular qualquer.

Figura 11: Formação da representação de um pentágono regular no GeoGebra.



Fonte: Autor da pesquisa.

Para formar a representação figural de um pentágono regular, na janela de visualização do GeoGebra, o indivíduo deve seguir as seguintes etapas de construção: selecionar na barra de ferramentas a ferramenta “polígono regular”; clicar em dois pontos distintos da janela de visualização; digitar “5” na caixa de diálogo que o *software* abrirá e, selecionar “ok” para finalmente obter a representação figural do objeto geométrico desejado. Observa-se que os pontos A e B (vértices do pentágono) são representados pelo GeoGebra por meio de uma cor diferente dos pontos C, D e E, pois são pontos livres, ou seja, são pontos que podem ser movimentados pela janela de visualização a partir da ação de arrastar com o mouse, o que permite a rotação, a ampliação ou a redução do pentágono representado, enquanto que para os demais pontos (C, D e E) não é permitido realizar esse movimento, uma vez que são pontos dependentes dos pontos A e B.

Já para formar a representação figural de um triângulo isósceles no GeoGebra, não é possível utilizar apenas uma única ferramenta, pois é necessário realizar uma combinação entre diferentes unidades figurais elementares a partir da barra de ferramentas do *software* e das propriedades geométricas do objeto que se pretende representar. Um exemplo de formação de representação figural do triângulo isósceles é apresentado na seção 4.2 desta tese.

O **tratamento dinâmico** ocorre quando se efetua alterações na representação figural formada na área de desenho do *software*. Essas alterações incluem mudar a posição da figura de modo a conservar a mesma configuração (variação de orientação, rotação, translação, mudar as medidas dos lados da figura etc.) e/ou decompor a figura formada em unidades figurais elementares para combiná-las de modo a obter outra figura ou dividi-la em subfiguras[18].

Neste sentido, Duval (2011) argumenta que um *software* permite acelerar tratamentos em uma figura de tal forma que possibilita a resolução de um problema de forma mais rápida e precisa, pois as figuras se mostram:

> [...] no monitor tão rapidamente quanto à produção mental, mas com uma potência de tratamento ilimitada em comparação com as possibilidades da modalidade gráfico-visual. Obtemos, imediatamente, muito mais que tudo o que poderíamos obter à mão livre após, talvez, vários dias de escritas e cálculos ou construção de figuras (DUVAL, 2011, p.137).

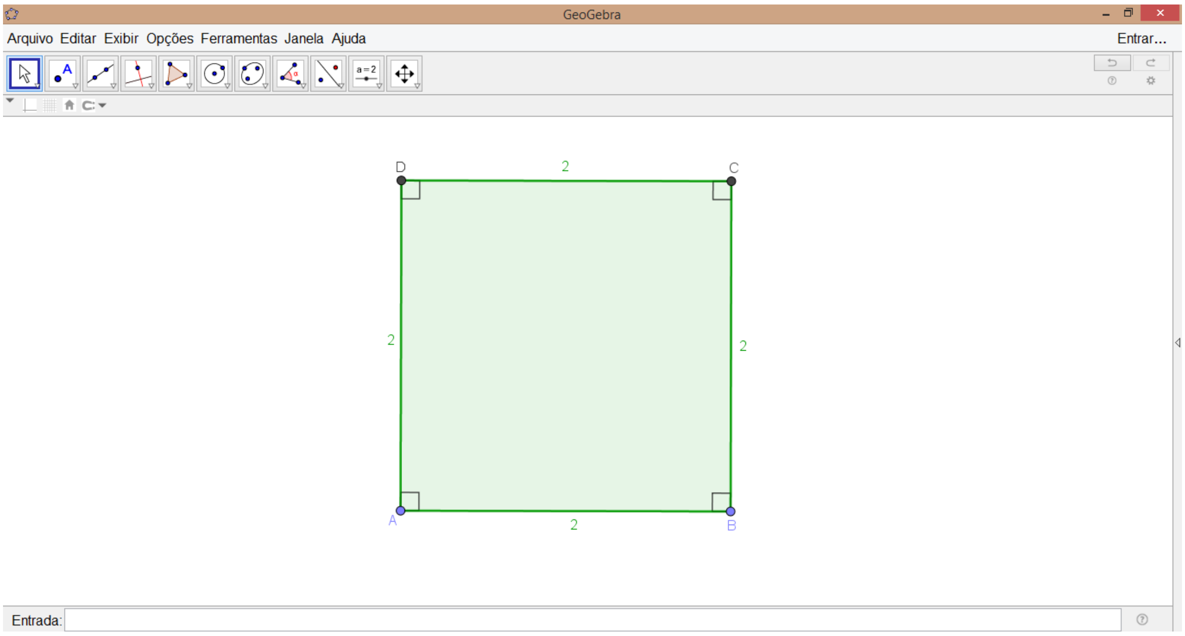
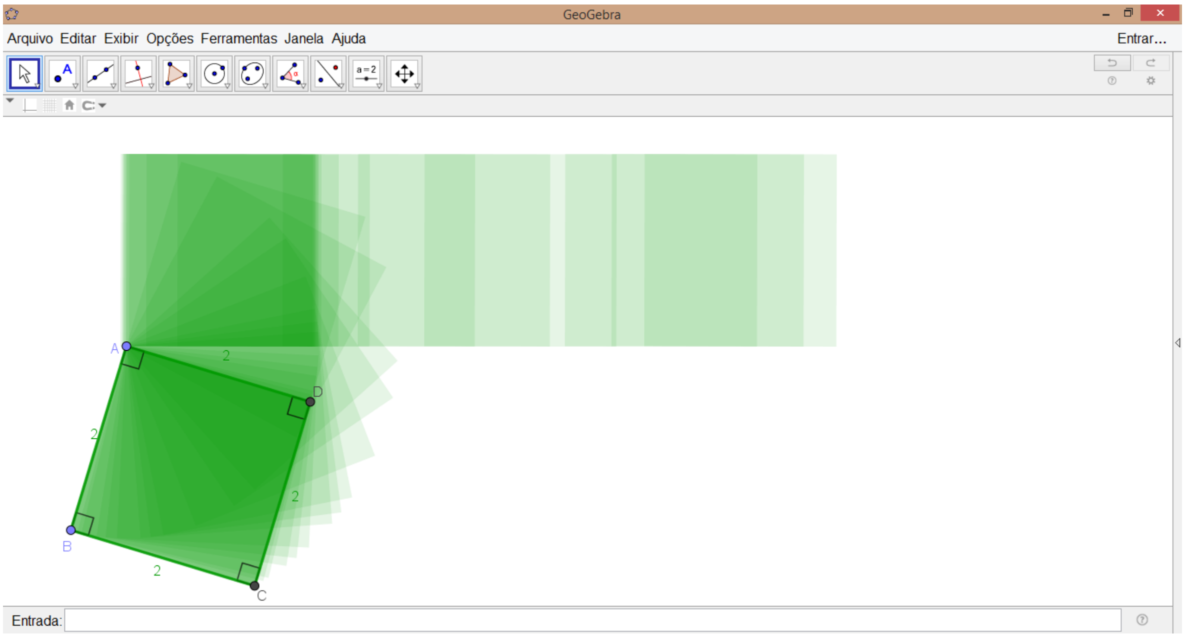
Nesta ótica, Almouloud e Salazar (2015) salientam que a celeridade de tratamentos realizados em uma figura em um ambiente de geometria dinâmica adotam duas funções principais, a saber: (i) a manipulação direta[19], que permite alterar a posição, a forma e as medidas da figura e (ii) o arrastamento, que permite o movimento da figura e consequentemente reconfigurá-la de modo acelerado. Além disso, outras ferramentas e/ou funcionalidades do *software* podem ser mobilizadas de acordo com as especificidades da figura a ser transformada.

No Quadro 16 apresentamos algumas possibilidades de tratamentos dinâmicos realizados no GeoGebra.

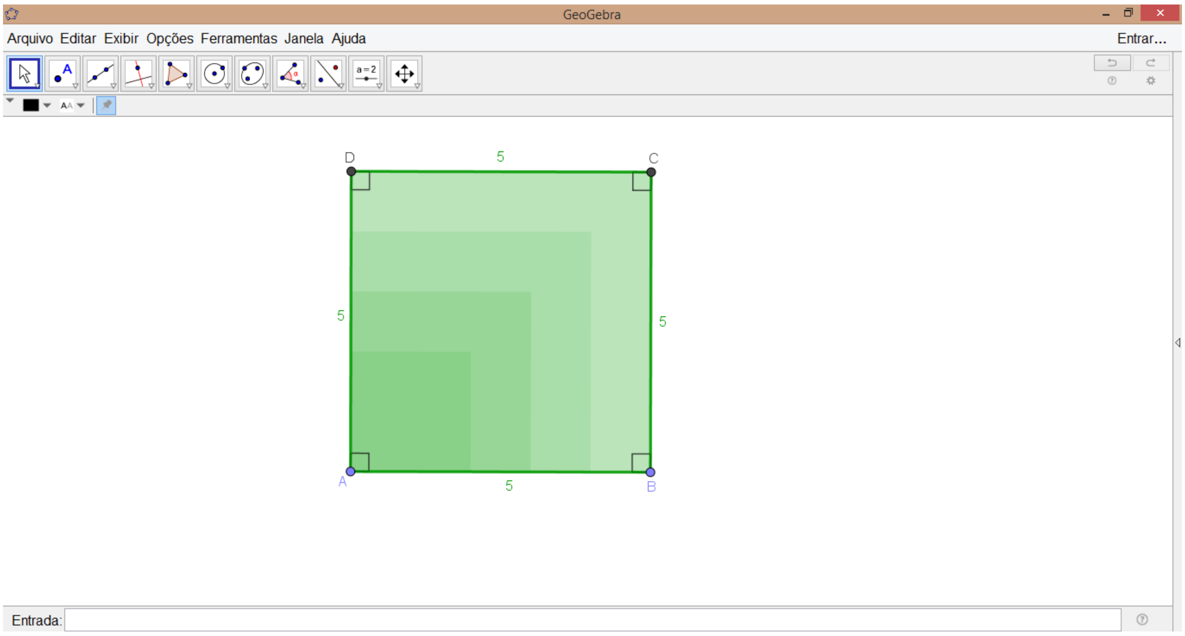
[18] "Subfiguras são o resultado de uma divisão da figura que depende das necessidades de um problema proposto: podem consistir em uma unidade figural ou uma combinação de unidades" (DUVAL, 2004a, p.165).

[19] É uma interação instantânea e reversível com o ambiente de geometria dinâmica em que não se usa comandos específicos do *software*, ou seja, o indivíduo toma o mouse para movimentar as representações dos objetos matemáticos pela tela do computador (ALMOULOUD, SALAZAR, 2015).

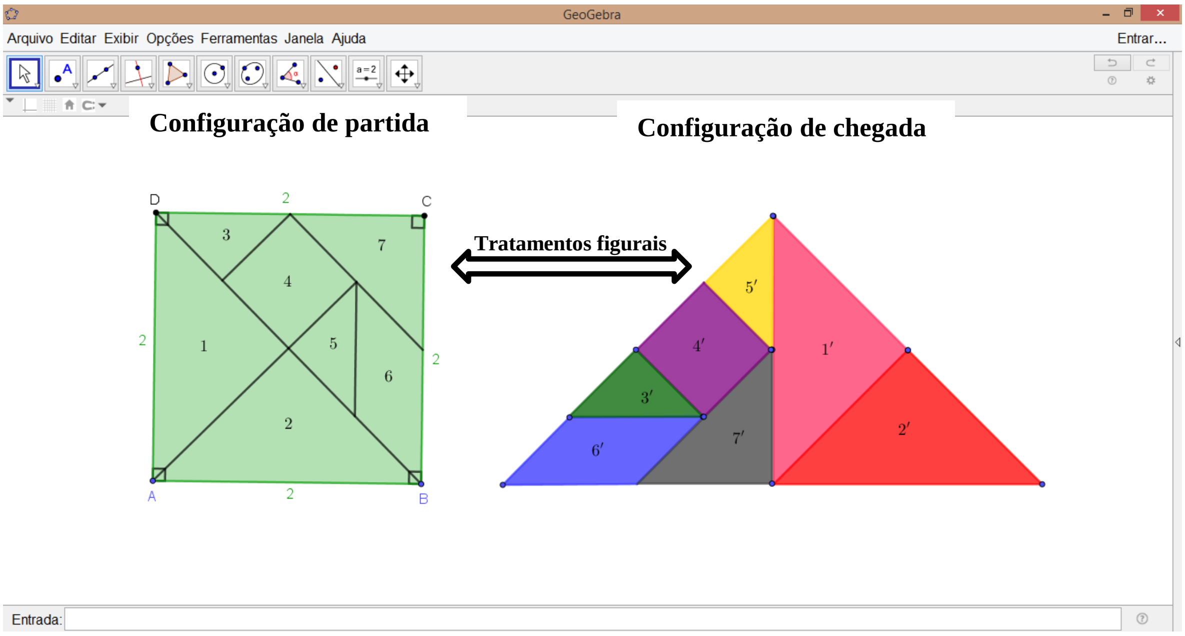
Quadro 16 - Possibilidades de tratamentos dinâmicos no GeoGebra.

(a) Configuração inicial da figura – representação de um quadrado ABCD

(b) Mudar a posição da figura de maneira instantânea, mas conservando sua configuração (lados, ângulos e as respectivas medidas)


(c) Variar as medidas dos lados da figura (proporcionalidade) sem alterar a forma da figura (preservando as propriedades – medidas de ângulos – da figura)



(d) Reconfigurar a figura – possibilidade mereológica/desconstrução dimensional



Fonte: Autor da pesquisa baseado em Almouloud e Salazar (2015).

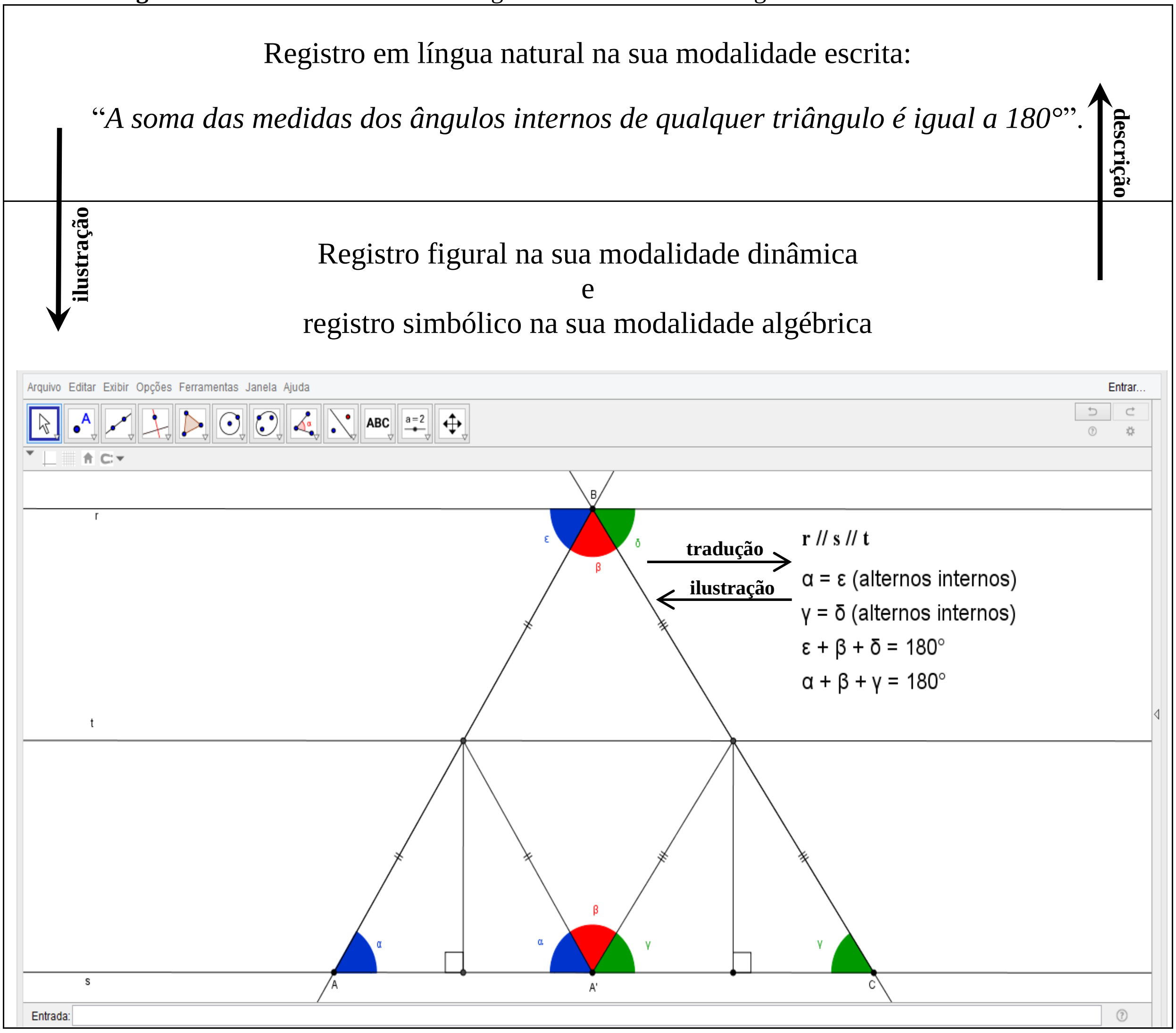
No Quadro 16 temos quatro representações figurais formadas e transformadas no GeoGebra. No item (a) apresentamos a configuração inicial de uma figura, no item (b) temos uma mudança de posição da figura do item (a), em que movimentos foram realizados para alterar a posição inicial da figura, no item (c) temos uma variação das medidas dos lados da figura do item (a) e no item (d) exibimos uma reconfiguração e desconstrução dimensional da figura do item (a) em sete subfiguras (cinco triângulos e dois quadriláteros) que reagrupadas obtemos um triângulo. Além dessas possibilidades de tratamentos dinâmicos apresentadas, destacamos que outras podem ser realizadas conforme a necessidade da natureza da tarefa, ou seja, um problema, uma exploração, uma investigação ou um exercício.

A **conversão dinâmica** ocorre pela passagem de uma representação formada no registro de partida (registros discursivos - língua natural, simbólico etc.) para uma representação no registro de chegada (registro figural na sua modalidade geométrica-dinâmica). (ALMOULOUD, SALAZAR, 2015). Acreditamos que esses autores consideram que para haver uma representação figural formada em um ambiente de geometria dinâmica, essa é formada, *a priori*, discursivamente (fala e/ou escrita em língua natural, simbólica etc.).

Nessa transformação podem ser realizados tratamentos dinâmicos como, por exemplo, “traços auxiliares, função arrastamento etc.” (ALMOULOUD, SALAZAR, 2015, p.938), bem como a necessidade de uma conversão auxiliar em um registro discursivo para obter uma designação verbal (simbólica ou não) das formas ou das unidades figurais elementares que reconhecemos e das propriedades visuais dessas formas.

Nesta perspectiva, apresentamos na Figura 12 um exemplo de conversão dinâmica, a qual diz respeito à soma das medidas dos ângulos internos de qualquer triângulo na Geometria Euclidiana. Observamos que a conversão dinâmica, neste caso, é realizada quando o indivíduo faz a representação figural na janela de visualização do GeoGebra daquilo que foi enunciado em língua natural, na sua modalidade escrita.

Figura 12: Soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo na Geometria Euclidiana.



Fonte: Autor da pesquisa.

A primeira parte da Figura 12 apresenta, em língua natural, a proposição que diz que a soma das medidas dos ângulos internos de qualquer triângulo na Geometria Euclidiana é igual a 180°. Enquanto que a segunda, exibe a conversão de tal proposição, em que há a formação de uma representação figural de um triângulo ABC qualquer, bem como alguns tratamentos dinâmicos (determinar ponto médio, traçar reta paralela e segmentos perpendiculares, marcar segmentos congruentes, destacar as marcas de ângulos e suas medidas) e outra conversão para uma representação no registro simbólico, em que é possível perceber que a soma $\alpha + \beta + \gamma$ é igual a medida de um ângulo raso (180°), onde α, β e γ, representam as medidas dos ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$, respectivamente, do triângulo ABC representado.

No próximo capítulo apresentamos as opções metodológicas que nortearam o desenvolvimento deste estudo.

3

METODOLOGIA

Apresentamos neste capítulo as opções metodológicas para o desenvolvimento desta pesquisa, o ambiente, os participantes, as técnicas e os procedimentos metodológicos adotados para a recolha de dados, bem como as categorias de apoio para analisar e interpretar os dados recolhidos junto aos participantes da pesquisa.

3.1. Opções metodológicas

Este estudo se desenvolveu por meio de uma abordagem qualitativa na perspectiva do paradigma interpretativo (BOGDAN, BIKLEN, 1994, 2003), em que adotamos como modalidade de pesquisa o estudo de caso (MERRIAM, 1988; PONTE, 2006; YIN, 2010).

Nesta perspectiva, realizamos uma investigação de cunho descritivo e interpretativo no transcorrer do desenvolvimento de uma disciplina de Geometria Euclidiana, cujo caso se refere a uma turma de onze estudantes, futuros professores de Matemática, organizados em equipes, em que analisamos suas produções matemáticas ao resolveram tarefas de geometria com apoio do GeoGebra.

3.1.1. Abordagem qualitativa e o paradigma interpretativo

Assumimos nesta pesquisa uma abordagem de natureza qualitativa, segundo os pressupostos teóricos definidos por Bogdan e Biklen (1994), que apontam cinco características fundamentais que se relacionam com aspectos predominantes de nossa investigação, a saber:

(i) Na investigação qualitativa a **fonte direta de dados é o ambiente natural**, constituindo o investigador o instrumento principal, pois o pesquisador tem a possibilidade de estar presente nas atividades dos indivíduos por ele investigado, mas sem deixar de exercer seu papel e *status* de observador e realizar a recolha de dados de forma sistemática e rigorosa para responder os objetivos da pesquisa. Além disso, o pesquisador observa o grupo de indivíduos pesquisados para descrever e quantificar o seu comportamento durante o processo de recolha de dados. Neste sentido, é importante destacar que o ambiente natural de recolha de dados ocorreu em um laboratório de informática, no decorrer de uma disciplina de Geometria Euclidiana.

(ii) A investigação qualitativa **é descritiva**, uma vez que os dados recolhidos durante a pesquisa fornecem informações para substanciar e ilustrar as análises e interpretações do pesquisador, a partir de uma discussão teórica sobre a teoria adotada no estudo para responder os objetivos da pesquisa. Desta forma, a descrição dos dados recolhidos, propicia ao pesquisador observar, registrar, analisar, interpretar e correlacionar fenômenos ou ações dos participantes durante o desenvolvimento da pesquisa.

(iii) Os investigadores qualitativos interessam-se mais **pelo processo** do que simplesmente pelos resultados ou produtos. O interesse desta pesquisa está relacionado com a forma como os participantes pesquisados coordenam representações semióticas ao resolver tarefas de Geometria Euclidiana com apoio do GeoGebra. Desta forma, o interesse está no processo que decorre durante a resolução das tarefas desenvolvidas que dão indicativos que permitem ao pesquisador elencar elementos necessários para responder os objetivos da pesquisa, sendo necessário que os dados empíricos da investigação sejam recolhidos, registrados e apresentados ordenadamente para realizar uma análise interpretativa segundo os pressupostos teóricos adotados no estudo.

(iv) **O significado** é de importância vital na abordagem qualitativa e interpretativa, uma vez que a partir das observações realizadas no ambiente natural de recolha de dados e dos protocolos de registros produzidos pelos participantes investigados, o pesquisador busca interpretar, explicitar e compreender como a coordenação de diferentes representações semióticas, com o apoio do GeoGebra, influencia os futuros professores de Matemática a apreensão de objetos geométricos e suas propriedades.

(v) Os investigadores qualitativos tendem a analisar os **dados de forma indutiva**, e isso acontece nesta pesquisa, pois os dados provenientes da investigação não são recolhidos com o objetivo de confirmar ou refutar hipóteses prévias dos pesquisadores, mas, ao contrário, as produções matemáticas dos participantes proporcionam, de forma sistemática, a análise transversal dos diversos dados que permitem induzir o que se revela como ideias regulares e tendências, fornecendo elementos credíveis que propiciam responder os objetivos da pesquisa.

De acordo com Bogdan e Biklen (1994) no paradigma interpretativo o objetivo do estudo é determinado pelo interesse do pesquisador em conhecer uma situação e compreendê-la a partir das percepções e ações dos sujeitos participantes do estudo. Neste caso, o desenho da investigação é aberto, flexível e emergente, ou seja, ocorre por meio da observação e análise dos dados advindos do campo de pesquisa. Além disso, esses autores argumentam que o número de casos em estudo pode ser reduzido, visto que o caráter interpretativo é antes de tudo qualitativo e visa a particularização dos resultados e não sua generalização (ERICKSON, 1986).

A análise dos dados recolhidos no paradigma interpretativo se refere ao processo de procurar e organizar sistematicamente as transcrições das fontes da investigação que permitem ao pesquisador apresentar suas considerações. A interpretação de dados envolve a promoção de ideias acerca daquilo que o pesquisador encontra e associa aos conceitos emergentes do referencial teórico adotado no estudo, bem como do campo de pesquisa (BOGDAN, BIKLEN, 2003).

3.1.2. Modalidade Estudo de Caso

De acordo com Yin (2010) a modalidade "estudo de caso" é adequada em três condições, a saber: (1) quando as questões de pesquisa são do tipo "como" ou "por que"; (2) quando se trata de fenômenos sociais contemporâneos e (3) quando não se exige controle dos eventos comportamentais dos sujeitos envolvidos na investigação. Além dessas condições, o estudo de caso compreende, segundo Coimbra e Martins (2013, p.32), "uma abordagem de natureza predominantemente qualitativa, utilizada com frequência em pesquisa educacional".

O estudo de caso compreende em detalhes o "como" e os "porquês" de uma entidade bem definida: uma pessoa, um grupo, uma disciplina, um curso, um sistema educativo, uma instituição, uma política específica, um bairro, uma comunidade, uma empresa ou outra unidade social (MERRIAM, 1988; PONTE, 2006).

Nesta pesquisa, o caso se refere a uma turma de onze estudantes de uma disciplina de Geometria Euclidiana, do Curso de Licenciatura e Bacharelado em Matemática, de uma universidade ao norte do Estado do Paraná, que resolveram tarefas de geometria com apoio do GeoGebra.

Destacamos ainda que esta pesquisa se refere a um estudo de caso único holístico em virtude da singularidade da situação (YIN, 2010), pois busca estudar globalmente uma única turma de estudantes. Além disso, o presente estudo de caso se caracteriza como exploratório com ênfase instrumental (YIN, 2010; STAKE, 1994, 1999), uma vez que proporciona a compreensão de algo mais amplo – como a coordenação de diferentes representações semióticas possibilitada pelo apoio de um *software* de geometria dinâmica pode influenciar a apreensão de objetos geométricos – e potencializa delinear hipóteses e proposições significativas para nortear estudos posteriores.

As características da modalidade estudo de caso se referem a: (i) uma investigação de natureza empírica que se estuda certa entidade em seu contexto real, com caráter descritivo e baseado em um fenômeno contemporâneo; (ii) uma investigação em que o pesquisador não tem a intenção de modificar o contexto de pesquisa, mas compreendê-lo em sua essência; (iii) uma investigação em que não há controle sobre as ocorrências ou fatos e (iv) uma investigação cuja base de dados está assentada no trabalho de campo e, também, na análise documental das produções dos sujeitos investigados (PONTE, 2006; YIN, 2010).

Segundo Stake (1994) o estudo de caso se caracteriza qualitativamente como aquele em que o pesquisador necessita de um maior tempo no campo de pesquisa, pois este deve estar em contato com as atividades do caso de modo a refletir e revisar os significados sobre os acontecimentos. Ainda para este autor, um estudo de caso não visa representar o "geral", mas representar "particularidades". De acordo com Ponte (2006) um estudo de caso produz sempre um conhecimento do tipo "particular", uma vez que se procura encontrar algo de muito universal no mais particular.

Para Matos e Carreira (1994), o pesquisador de estudo de caso deve ir ao encontro dos sujeitos pesquisados de modo a permear o ambiente natural da pesquisa, e lá, deverá se manter por um período de tempo razoável de interação com os participantes.

De acordo com Yin (2010), a modalidade estudo de caso é adotada quando se pretende compreender um fenômeno da vida real. Nesta ótica, o fenômeno relacionado a presente pesquisa se refere à coordenação de diferentes representações semióticas produzidas durante a resolução de tarefas de geometria com o suporte do GeoGebra em um contexto de formação inicial de professores de Matemática. Portanto, trata-se de um fenômeno da vida real, pois envolve as produções matemáticas de futuros professores de Matemática no decorrer de uma disciplina de Geometria Euclidiana.

A investigação assenta na modalidade de estudo de caso enfrenta uma situação tecnicamente diferenciada em relação a outras modalidades de pesquisa, pois esta modalidade conta com múltiplas técnicas de recolha de dados (YIN, 2010). Segundo este autor, essas técnicas compreendem: documentos (produção escrita, arquivos etc.), entrevistas, observações direta, participante e/ou participada (observações do contexto de pesquisa registradas em notas de campo), artefatos físicos (computadores, dispositivos tecnológicos, ferramentas e/ou instrumentos, obras de arte etc.) entre outras.

3.2. O ambiente da pesquisa

O desenvolvimento desta pesquisa transcorreu com a realização de uma disciplina de Geometria Euclidiana, componente curricular do Curso de Licenciatura e Bacharelado em Matemática, de uma universidade ao norte do Estado do Paraná com carga horária total de 102 (cento e duas) horas-aula, realizada em um laboratório de informática, em que participaram onze estudantes.

Destacamos que a recolha de dados da pesquisa ocorreu após o parecer favorável do Comitê Permanente de Ética em Pesquisa com seres Humanos - COPEP[20] da universidade sob Nº 48508015.1.0000.0104. Esse comitê é responsável em avaliar os protocolos de pesquisas que envolvem seres humanos com o intuito de proteger a dignidade, os direitos a segurança e o bem-estar dos indivíduos participantes da pesquisa. Para isto, foram disponibilizadas duas cópias de igual teor, do termo de autorização de participação na pesquisa, preenchidos e assinados pelos participantes.

3.2.1. Participantes da pesquisa

Participaram desta pesquisa onze estudantes que compunham a turma que constitui o caso desta pesquisa. Com o intuito de preservar a identidade dos participantes e por facilidade, eles foram denominados nesta investigação por **A1, A2,..., A11**.

[20] <http://www.ppg.uem.br/index.php/etica-biosseguranca/copep>

Destacamos que dez estudantes frequentaram os ensinos Fundamental e Médio em instituições públicas de ensino, nenhum deles possuía vínculo empregatício no momento da realização da disciplina.

Do total de participantes, dois informaram ter usado o GeoGebra para algum estudo de geometria antes da frequência da disciplina de Geometria Euclidiana e os demais (nove) disseram que usaram apenas régua e/ou compasso para o estudo da geometria.

3.2.2. Organização da turma

No início da disciplina o professor propôs aos estudantes participantes da pesquisa que se organizassem em equipes, cuja formação ocorreu por meio da relação interpessoal e de forma espontânea. Evidenciamos que durante as aulas, os estudantes trabalharam em equipes com um, dois ou três integrantes. Por uma questão de dinâmica de sala de aula, nesta pesquisa consideramos também como equipes aquelas constituídas por apenas um integrante. As equipes foram denominadas por **E1**, **E2**, **E3**,..., **E6.**

Destacamos que na maior parte da disciplina as equipes mantiveram a mesma formação, cuja composição não foi uma exigência requerida pelo professor ou pesquisador. Além disso, em algumas sessões de aula as configurações das equipes foram modificadas em virtude de escolhas pessoais dos estudantes, como também o número de equipes em aula diferia em relação a uma sessão e outra, em virtude do comparecimento dos estudantes à aula. Por exemplo, houve encontros com a formação de cinco equipes, em que nove estudantes compareceram, e outros, com seis equipes, em que todos os estudantes participantes da pesquisa estiveram presentes.

3.2.3. A disciplina de Geometria Euclidiana

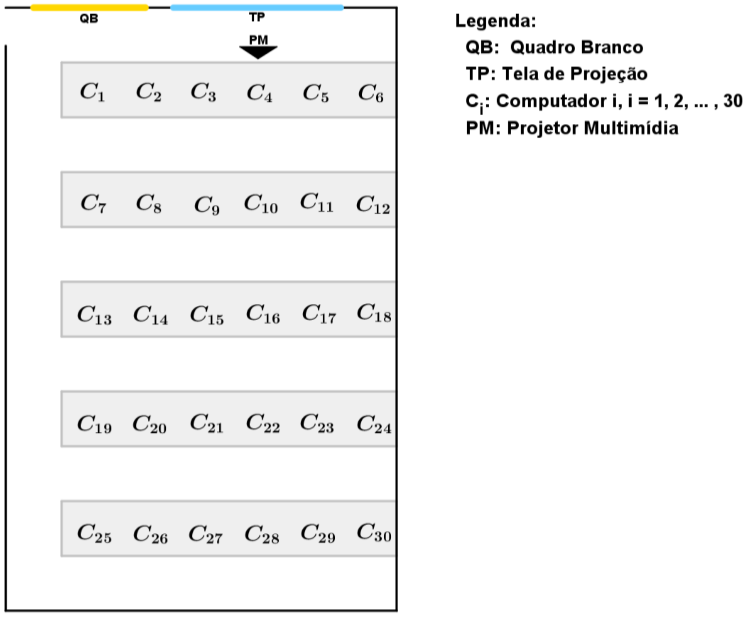
A disciplina de Geometria Euclidiana faz parte da componente curricular da segunda série do Curso de Licenciatura e Bacharelado em Matemática da universidade. O seu desenvolvimento ocorreu entre os meses de outubro de 2015 e fevereiro de 2016, correspondendo ao segundo semestre letivo do ano de 2015, com três encontros semanais, cada um com carga horária de duas horas-aula.

Os objetivos da disciplina são: (i) compreender a importância da axiomática na construção de teorias matemáticas, em especial, da consistência da geometria de Euclides; (ii) desenvolver o raciocínio matemático por meio de indução e dedução de conceitos geométricos; (iii) desenvolver a capacidade de visualização de objetos planos e espaciais e (iv) desenvolver o raciocínio geométrico.

Os conteúdos desenvolvidos ao longo da disciplina foram: Incidência e ordem no plano; Segmentos, ângulos e medidas; Congruência de triângulos; Axioma das paralelas; Regiões poligonais e áreas; Semelhança de triângulos; Circunferência e círculo; Trigonometria; Incidência e ordem no espaço; Paralelismo no espaço; Perpendicularismo no espaço; Projeções, distâncias e ângulos; Poliedros; Superfície esférica e esfera; Áreas e volumes.

Destacamos que a disciplina foi desenvolvida integralmente no laboratório de informática do Departamento de Matemática da universidade, o qual era composto por trinta computadores com acesso a internet e ao GeoGebra, um projetor multimídia, uma tela de projeção onde o professor apresentava as tarefas e as representações figurais formadas com o *software*, e um quadro branco, em que o professor realizava suas representações semióticas (figurais, simbólicas e língua natural na sua modalidade escrita) para demonstrar proposições e teoremas acerca dos objetos geométricos trabalhados em aula. A Figura 13 representa a disposição física e os recursos pedagógicos presentes no laboratório de informática.

Figura 13: Representação do laboratório de informática.



Fonte: Autor da pesquisa.

3.2.4. O professor da disciplina

O professor da disciplina era responsável pela condução, organização, elaboração e aplicação de tarefas instrucionais, pela dinâmica de sala de aula, pela formulação de questões a serem aplicadas via instrumentos de avaliação de aprendizagem dos estudantes. Esclarece-se que o professor desta turma era o orientador desta tese.

Ressaltamos que o professor da disciplina é docente da universidade desde 1982, e neste sentido, ao longo de sua experiência com a prática pedagógica, no Ensino Superior, constituiu um arcabouço de opções e alternativas metodológicas no que diz respeito aos aspectos que devem ser valorizados na condução das sessões de aula como, por exemplo: organizar a dinâmica de sala de aula; clarificar o processo e os instrumentos de avaliação dos estudantes; apresentar as tarefas para os estudantes resolvê-las, em especial, por meio do uso do GeoGebra; solicitar o registro das produções dos estudantes em folhas de papel, bem como por meio do *software*; realizar a discussão e validação dos conteúdos desenvolvidos com os estudantes durante e após o desenvolvimento de cada uma das tarefas propostas; pensar e refletir como as tarefas foram escritas para alterar e reorganizar os seus enunciados, com o intuito de propor indagações para que os estudantes pudessem refletir e reavaliar suas ações durante o processo de resolução; pensar e propor tarefas que potencializassem a mobilização e coordenação de diferentes registros de representação semiótica, bem como o uso de ferramentas e recursos tecnológicos para possibilitar a compreensão dos objetos geométricos estudados, suas propriedades e relações existentes.

Destacamos que, mesmo sendo o professor o responsável pela condução das aulas, o pesquisador exerceu uma participação ativa no ambiente da intervenção, uma vez que explicou e explicitou conceitos e resultados para os estudantes, tirou dúvidas dos pesquisados sobre o uso de ferramentas e funcionalidades do GeoGebra e registrou ações pertinentes acerca da atividade matemática desenvolvida pelos participantes.

3.2.5. Tarefas desenvolvidas na pesquisa

Ressaltamos que as obras de Gerônimo e Franco (2010), e Gerônimo, Barros e Franco (2010) foram adotadas para formular as tarefas desenvolvidas nesta pesquisa. A primeira obra se caracterizou como o livro texto seguido na disciplina.

As tarefas foram elaboradas e organizadas pelo professor para serem realizadas por meio da utilização do GeoGebra e, também, possibilitar aos participantes da pesquisa a exploração e/ou investigação de propriedades, conceitos e relações de objetos geométricos euclidianos do plano e do espaço. Destacamos que conforme a necessidade de cada tarefa o professor apresentava e explicava aos estudantes as diferentes ferramentas do GeoGebra, como também suas funcionalidades.

Desta forma, evidenciamos que as tarefas implementadas na pesquisa permitiram as equipes construção e reprodução de figuras geométricas no GeoGebra, bem como realizar operações pertinentes em cada situação. Além disso, as tarefas também proporcionaram aos participantes percepções, observações, conjecturas, análises, interpretações e demonstrações de conceitos, resultados e propriedades dos objetos geométricos estudados por meio da mobilização e coordenação de diferentes representações semióticas e da articulação entre as diferentes apreensões em geometria.

Nesta perspectiva, inferimos que o ambiente de geometria dinâmica, por meio do uso do GeoGebra, e as tarefas de natureza aberta, com características exploratória e/ou investigativa, contribuíram para a compreensão dos conteúdos geométricos estudados.

Salientamos ainda que diversas tarefas de Geometria Euclidiana foram desenvolvidas no transcorrer da disciplina, das quais apresentamos apenas **quatro**, estritamente vinculadas aos objetivos da pesquisa. No Quadro 17 apresentamos as tarefas desenvolvidas pelas equipes e selecionadas para esta pesquisa.

Quadro 17 - Tarefas desenvolvidas e selecionadas para esta pesquisa.

Tarefa e data de realização	**Formação das equipes**	**Objetivos**
Circunferência e círculo 19/10/2015	**E1**: A1, A2 e A8 **E2**: A3 **E3**: A4 e A7 **E4**: A5 e A6 **E5**: A10 **E6**: A11	Formar representações de circunferências a partir de diferentes ferramentas do GeoGebra, identificar e estabelecer relações entre objetos geométricos associados à circunferência e ao círculo tais como, centro, raio, pontos da circunferência, pontos do interior e exterior de um círculo e diferenciar circunferência de círculo.
Classificação de triângulos quanto às medidas dos lados e desigualdade triangular 22/10/2015	**E1**: A1, A2, e A8 **E2:** A3 **E3**: A4 e A7 **E4**: A5 e A6 **E5**: A11	Formar representações de triângulos a partir de segmentos de reta, classificar triângulos quanto às medidas de seus lados, refletir sobre a condição de existência de triângulos e conjecturar o resultado conhecido como “desigualdade triangular”.

Triângulos retângulos, quadriláteros, áreas e Teorema de Pitágoras 19/11/2015	**E1**: A1, A2 e A8 **E2**: A4 e A7 **E3**: A5 e A6 **E4**: A10 **E5**: A11	Formar representações de triângulos retângulos e quadriláteros, estabelecer suas relações, calcular áreas de triângulos retângulos e quadrados, enunciar e demonstrar o Teorema de Pitágoras, como também seu recíproco.
Retas paralelas e perpendiculares, reta perpendicular a plano, plano perpendicular à reta e planos paralelos 27/01/2016	**E1**: A1, A2 e A8 **E2**: A3 e A9 **E3**: A4 e A7 **E4**: A5 e A6 **E5**: A10 **E6**: A11	Representar, na janela de visualização 3D do GeoGebra, pontos, retas, planos, retas concorrentes, paralelas, perpendiculares e reversas, interseção entre retas e entre planos, planos determinados por retas reversas, reta perpendicular a plano e planos paralelos, bem como apresentar e justificar discursivamente as relações observadas entre os objetos geometricos representados no *software*.

Fonte: Autor da pesquisa.

Cada tarefa foi pensada e elaborada com intuito de potencializar aos participantes da pesquisa expressar e coordenar diferentes representações semióticas de um mesmo objeto geométrico com apoio do GeoGebra.

3.2.6. Pasta "Geometria Euclidiana"

Além da organização em equipes para a realização das tarefas em sala de aula, o professor criou uma pasta em uma nuvem (disco virtual) denominada **"Geometria Euclidiana"**, cujo acesso ocorreu via internet, com o intuito de armazenar e disponibilizar para os estudantes arquivos de tarefas a serem desenvolvidas a cada encontro, de textos para leitura complementar e, também, de vídeo-aulas gravadas de curta duração sobre conteúdos geométricos já abordados em aula.

Os arquivos das tarefas já desenvolvidas em aula também ficaram disponíveis na nuvem, uma vez que cada estudante poderia, posteriormente, ter acesso remoto a tais tarefas para revisar os conteúdos trabalhados, bem como refazê-las. Nessa pasta também foram disponibilizados arquivos contendo tarefas extras e a ementa da disciplina.

Salientamos que a cada encontro da disciplina o professor atualizava essa pasta, *a priori* ao início da aula, com os arquivos das tarefas que seriam desenvolvidas. Essa ação se tornou significativa, pois os estudantes tiveram acesso a essas tarefas a partir do computador que usavam o GeoGebra no laboratório de informática. Isso também permitiu que uma equipe pudesse iniciar a resolução das tarefas anteriormente às outras equipes, potencializando assim a dinâmica heterogênea natural de uma sala de aula quanto ao tempo utilizado para a resolução de tarefas pelos estudantes.

3.3. Técnicas e procedimentos de recolha de dados

Nesta pesquisa, a recolha de dados se voltou para a mobilização e coordenação de diferentes representações semióticas procedentes das produções matemáticas dos estudantes no transcorrer da resolução de tarefas de Geometria Euclidiana com o apoio do GeoGebra. As técnicas de recolha de dados utilizadas foram: (i) as observações direta, participante e participada (as informações pertinentes e significativas foram registradas em notas de campo do pesquisador); (ii) análise documental (compreendeu os protocolos de registro e arquivos do GeoGebra produzidos pelos estudantes); (iii) entrevista e (iv) questionários.

Neste sentido, apresentamos no Quadro 18 uma síntese das técnicas de recolha de dados utilizadas na pesquisa, bem como suas respectivas fontes, formas de registro e momento.

Quadro 18 - Recolha de dados: técnicas, fontes, formas de registro e momentos.

Técnica	Fonte	Formas de registro	Momento
Observação direta/participante/ participada	Estudantes/equipes	Notas de campo	Durante sessões de aula
Análise documental	Produções matemáticas das equipes	Protocolos de registro (produção escrita) e arquivos do GeoGebra	Durante a resolução das tarefas propostas em aula.
Entrevista semiestruturada	Estudantes	Gravação de áudio e vídeo orientada por uma guia de perguntas	Durante o desenvolvimento da pesquisa, fase final da disciplina.
Questionário estruturado com questões abertas e fechadas	Estudantes	Questionário impresso	Durante sessões de aula. (Início e término da pesquisa de campo)

Fonte: Autor da pesquisa.

3.3.1. Observações direta, participante e participada

Para Matos e Carreira (1994, p.35), as observações no campo de pesquisa têm a seu favor, “o fato de permitir registrar comportamentos e acontecimentos à medida que estes vão tendo lugar”.

De acordo com Yin (2010) a observação direta é aquela que ocorre no ambiente natural do caso (nesta pesquisa foi em um laboratório de informática) e visa identificar os comportamentos relevantes ou condições ambientais disponíveis para a observação.

Segundo Estrela (1994) uma observação se caracteriza como participante quando, de alguma maneira, o pesquisador participa com o grupo por ele estudado. Yin (2010) frisa que nesta modalidade de observação o pesquisador não é um simples observador passivo, pois pode assumir diversas funções na situação do estudo e participar de fato nos eventos sendo estudados. Para este autor, a observação participante oportuniza o acesso aos indivíduos, aos grupos ou aos eventos que seriam inacessíveis ao estudo.

Uma observação se caracteriza como participada quando o pesquisador "poderá participar, de algum modo, na atividade do observado, mas sem deixar de representar o seu papel de observador e, consequentemente, sem perder o respectivo estatuto" (ESTRELA, 1994, p.35).

Nesta perspectiva, o pesquisador permeou essas modalidades de observação no transcorrer do desenvolvimento desta investigação, pois foi presente e frequente no ambiente natural do caso, teceu comentários e dialogou com os estudantes e o professor acerca dos conteúdos desenvolvidos em aula, bem como questionou e esclareceu dúvidas dos participantes no que diz respeito às ferramentas e funcionalidades do GeoGebra, à formação e transformação de representações figurais realizadas no *software* e aos enunciados das tarefas propostas.

Destacamos que os registros significativos dessas observações foram realizados em notas de campo do pesquisador. Para Zabalza (1994), as notas de campo incluem descrições verbais, gestuais e outras ações pertinentes aos sujeitos participantes da investigação, pois permitem realizar anotações e tecer comentários sobre as atividades e/ou ocorrências reveladas pelos investigados durante o desenvolvimento das aulas.

Neste sentido, as notas de campo foram utilizadas pelo pesquisador para registrar informações significativas dos acontecimentos procedentes do campo de pesquisa, tais como questionamentos apontados pelos estudantes acerca dos conteúdos abordados nos enunciados das tarefas, dificuldades e/ou equívocos conceituais sobre a formação e transformação de representações figuras realizadas no GeoGebra, a presença dos estudantes, a composição das equipes entre outros.

3.3.2. Análise documental

De acordo com Yin (2010), a análise documental é uma importante técnica de recolha de dados em estudos que constituem uma abordagem qualitativa, pois permitem confrontar informações com outras técnicas de recolha. Segundo Merrian (1988) os documentos correspondem a uma grande quantidade de material escrito ou físico recolhido pelo investigador.

Salientamos que os documentos gerados pelos participantes da pesquisa permitiram ao pesquisador analisar e interpretar as diferentes representações semióticas mobilizadas e coordenadas suscitadas por tarefas de Geometria Euclidiana com o apoio do GeoGebra, os procedimentos adotados nas resoluções, o reconhecimento de um mesmo objeto geométrico por meio de suas múltiplas representações, as dificuldades e os equívocos conceituais reveladas pelas equipes.

Nesta ótica, recolhemos todos os documentos que abarcaram as produções das equipes durante as sessões de aulas observadas, os quais se concretizaram na forma de protocolos de registro (produção escrita) e arquivos do GeoGebra que foram enviados ao e-mail do pesquisador.

Os protocolos de registros correspondem a folhas de papel (papel almaço), em que as equipes registraram suas produções escritas por meio de anotações, esquemas, figuras, respostas e resoluções das tarefas propostas. Em todas as sessões de aula os protocolos de registros foram entregues aos participantes e recolhidos pelo pesquisador ao término do encontro.

Salientamos que **os registros discursivos** (produção escrita em língua natural, linguagem matemática e simbólica) apresentados pelos participantes da pesquisa, procedentes dos protocolos de registro, **foram transcritos conforme a necessidade de análise e interpretação das tarefas** descritas na tese.

Os arquivos digitais relativos às formações e transformações de representações figurais no GeoGebra, enviados ao e-mail do pesquisador, também compuseram uma das formas de registro documental, pois forneceram dados significativos para a pesquisa.

Destacamos que em algumas tarefas o professor solicitou aos participantes o envio de arquivos do GeoGebra ao e-mail do pesquisador, contendo a formação e a transformação das representações figurais dos objetos geométricos estudados na respectiva tarefa. No entanto, nem todos os arquivos solicitados foram enviados. Mas, aqueles enviados foram significativos, pois a partir desses arquivos o pesquisador fez correlações entre as respostas apresentadas nos protocolos de registro, bem como o correto uso de conhecimentos geométricos e de ferramentas do *software* para a formação de representações figurais.

Sublinhamos que nesta pesquisa a recolha documental se caracterizou como a principal técnica de recolha para descrever, analisar e interpretar os dados gerados durante o desenvolvimento da investigação.

3.3.3. Entrevista

Ressaltamos que a entrevista compõe uma das técnicas relevantes de recolha de dados para o estudo de caso. A entrevista possibilita "questionar os participantes sobre os fatos de um assunto, bem como suas posições (opiniões) sobre os eventos" e, também, "corroborar determinados fatos que o pesquisador já considera estabelecidos" (YIN, 2010, p.133).

Yin (2010) argumenta ainda que as entrevistas devem ser consideradas apenas como relatos verbais, pois as respostas dos investigados estão sujeitas aos problemas comuns de parcialidade, má lembrança ou articulação pobre ou inexata.

De acordo com Lakatos e Marconi (2003, p.195) "a entrevista é um encontro entre duas pessoas, a fim de que uma delas obtenha informações a respeito de determinado assunto, mediante uma conversação de natureza profissional". Além disso, a entrevista é uma "forma de diálogo assimétrico, em que uma das partes busca coletar dados e a outra se apresenta como fonte de informação" (GIL, 2008, p.109).

Nesta ótica realizamos uma entrevista[21] semiestruturada, a qual foi filmada em áudio e vídeo com os estudantes participantes da pesquisa com objetivo de elencar informações sobre: (i) o desenvolvimento dos estudantes acerca dos conteúdos geométricos estudados na disciplina; (ii) as dificuldades e os desafios enfrentados pelos participantes e (iii) suas percepções sobre o formato que a disciplina tomou, ou seja, resolver tarefas de geometria com o suporte do GeoGebra e em equipes.

A entrevista foi conduzida pelo pesquisador (PE) com todos os estudantes participantes da pesquisa, de forma individual, com duração de aproximadamente vinte minutos cada uma, em um horário e ambiente diferentes do contexto de sala de aula.

Segundo Lakatos e Marconi (2003) a entrevista semiestruturada permite ao pesquisador seguir um roteiro previamente estabelecido, em que as perguntas realizadas ao entrevistado são pré-

[21] As questões da entrevista realizada com os participantes da pesquisa se encontram nos anexos desta tese.

determinadas. Por outro lado, o entrevistador tem a liberdade de acrescentar outras questões relevantes emergentes durante a entrevista.

3.3.4. Questionário

Um “questionário é um instrumento de coleta de dados, constituído por uma série ordenada de perguntas, que devem ser respondidas por escrito” (LAKATOS, MARCONI, 2003, p.201). Além disso, o questionário pode ser definido “como uma técnica de investigação composta por um conjunto de questões, que são submetidas a pessoas com o propósito de obter informações sobre conhecimentos, crenças, sentimentos, valores, interesses, expectativas, aspirações, temores, comportamentos etc.” (GIL, 2003, p.121).

Aplicamos dois questionários[22] aos estudantes participantes da pesquisa com perguntas mistas, ou seja, perguntas que apresentam ou não alternativas para as respostas (FIORENTINI, LORENZATO, 2009). O primeiro questionário (Q1) foi aplicado no início da disciplina e o segundo (Q2) ao término.

Os questionários foram aplicados para conhecer os estudantes participantes da pesquisa, identificar suas expectativas sobre a disciplina, detectar o que eles conheciam da Geometria Euclidiana, revelar os principais conceitos e resultados por eles eleitos no desenvolvimento da disciplina, perceber a influência do GeoGebra e a natureza das tarefas na apreensão dos objetos geométricos estudados, e verificar a mudança de posicionamento de cada participante acerca da importância das diversas representações associadas aos objetos geométricos e seus respectivos conceitos e propriedades.

3.4. Categorias de análise das produções matemáticas das equipes

Para analisar e interpretar as produções matemáticas das equipes, procuramos identificar e evidenciar os principais elementos apresentados nas resoluções das tarefas realizadas de modo a observar ocorrências significativas acerca dos registros e das representações mobilizados e coordenados em relação aos objetos geométricos estudados na disciplina.

Neste sentido, para esta pesquisa foram delineadas quatro categorias de análise acerca das produções matemáticas das equipes durante a resolução de tarefas de Geometria Euclidiana.

[22] Os questionários aplicados aos participantes da pesquisa se encontram nos anexos desta tese.

Essas categorias emergiram das interpretações da teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (2004a, 2004b, 2011, 2012a, 2012c) e também da recolha de dados provenientes das produções dos participantes da pesquisa. No Quadro 19 apresentamos as categorias de análise desta pesquisa.

Quadro 19 - Categorias de análise para as produções matemáticas dos participantes.

Categorias	**Aspectos considerados nas produções matemáticas dos estudantes**
Coordenar diferentes registros.	Coordenou diferentes registros de representação semiótica para o mesmo objeto geométrico.
Articular diferentes apreensões.	Articulou as apreensões perceptiva, operatória, discursiva e sequencial relacionadas com uma figura geométrica.
Tomar consciência.	Mobilizou ideias geométricas para a tomada de consciência (objetivação).
Apresentar dificuldades ou equívocos conceituais.	Apresentou dificuldades ou equívocos conceituais ao utilizar representações discursivas e não discursivas.

Fonte: Autor da pesquisa.

Destacamos que a análise das produções matemáticas dos participantes desta pesquisa seguiu um processo transversal, em que todas as categorias delineadas foram consideradas simultaneamente (FIORENTINI, LORENZATO, 2009). Além disso, observa-se que as produções escritas dos estudantes foram analisadas considerando o emprego adequado de termos específicos da linguagem matemática (solicitação do professor aos estudantes), uma vez que os participantes estavam inseridos no contexto da formação inicial de professores de Matemática e constituíam uma turma de uma disciplina de Geometria Euclidiana axiomática.

Estabelecida a forma de análise e interpretação das tarefas desenvolvidas pelas equipes durante a pesquisa, os dados recolhidos foram descritos, tratados e analisados a partir da narrativa das evidências reveladas e identificadas nas resoluções das tarefas. Assim, no próximo capítulo apresentamos as descrições, as análises e as interpretações de cada tarefa selecionada, bem como destacamos uma síntese das ocorrências evidenciadas na narrativa realizada e que estão relacionadas diretamente com os objetivos da pesquisa.

4

O CASO DA TURMA: ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Neste capítulo são apresentados e discutidos os dados recolhidos em quatro das tarefas propostas durante as aulas da disciplina de Geometria Euclidiana, bem como reflexões sobre a entrevista e os questionários realizados. Essas quatro tarefas foram selecionadas porque estão estritamente relacionadas aos objetivos do estudo. Para cada tarefa, os dados dão evidências das respostas dos estudantes a partir das produções matemáticas registradas no *software* GeoGebra e nos protocolos de registro. Destacamos também que os dados são apresentados por equipes e sintetizados depois para a turma toda, permitindo conhecer globalmente a turma em estudo e corresponder aos objetivos da pesquisa.

4.1. Tarefa sobre circunferência e círculo

Esta tarefa abordou objetos geométricos relacionados à circunferência e ao círculo e possibilitou aos estudantes, a partir da interação com as ferramentas do GeoGebra, formar e tratar representações figurais que seriam difíceis de serem exploradas utilizando-se simplesmente recursos estáticos, bem como coordenar diferentes representações semióticas, tais como a escrita, em língua natural e linguagem matemática, e a figural, no ambiente dinâmico com o apoio do GeoGebra.

A resolução da tarefa teve duração de 30 minutos e foi guiada a partir de seis questões norteadoras, cujos objetivos foram formar representações de circunferências a partir de diferentes ferramentas do GeoGebra, identificar e estabelecer relações entre objetos geométricos associados à circunferência e ao círculo tais como, centro, raio, pontos da circunferência, pontos do interior e exterior de um círculo e diferenciar circunferência de círculo. Participaram desta tarefa dez estudantes, organizados em seis equipes, a saber: **E1**: A1, A2 e A8; **E2**: A3; **E3**: A4 e A7; **E4**: A5 e A6; **E5**: A10 e **E6**: A11.

No Quadro 20 apresentamos os passos e as orientações acerca das formações das representações figurais no GeoGebra, bem como a questões norteadoras da tarefa.

Quadro 20 - Tarefa sobre circunferência e círculo.

Passos e orientações para a formação de representações figurais no GeoGebra
i. Utilizar a ferramenta "círculo dados centro e um de seus pontos". Clicar sobre um ponto da janela de visualização que será o centro da circunferência. O GeoGebra nomeará este ponto de A. Clicar sobre outro ponto da janela de visualização o qual pertencerá à circunferência. O GeoGebra nomeará este ponto de B e traçará a circunferência "c". Movimentar os pontos A e B e a circunferência "c" e observar o que acontece. ii. Utilizar a ferramenta "círculo dados centro e raio". Clicar num ponto da área de desenho o qual o *software* nomeará de C. Aparecerá uma janela para que você escreva o comprimento do raio. Na caixa de diálogo que será aberta digite, por exemplo, 3. O GeoGebra traçará a circunferência "d". Movimentar o ponto C, a circunferência "d" e observar o que ocorre. iii. Utilizar a ferramenta "círculo definido por três pontos". Clicar em três pontos distintos da área de desenho. O GeoGebra nomeará tais pontos de D, E e F respectivamente e traçará a circunferência "e". Movimentar os pontos D, E e F e a circunferência "e" e observar o que resulta. **Questões** 1. Qual é o nome do ponto A e do ponto C, nas duas primeiras representações? 2. Qual é o nome do segmento AB na primeira representação? 3. Quais as principais diferenças observadas por você nas três maneiras descritas de representar figuralmente circunferências e círculos? 4. Diferencie formalmente os pontos pertencentes a uma circunferência dos pontos pertencentes a um círculo, justificando sua resposta. 5. Na terceira representação figural de circunferência, o que ocorre se pontos D, E e F forem alinhados? 6. O que são pontos interiores e exteriores de um círculo? Enuncie uma definição para esses casos.

Fonte: Adaptado de Gerônimo, Barros e Franco (2010, p.63-64).

Salientamos que as ferramentas do GeoGebra que permitem formar representações figurais de circunferências adotam o termo "círculo" em virtude da língua inglesa, idioma do *software*, que no uso diário adota a expressão "*circle*" para se referir indistintamente à curva (circunferência) ou a curva com seus pontos interiores (círculo). Além disso, com as possibilidades de mudanças da figura, por meio da utilização da ferramenta propriedade, na mesma construção, pode-se chegar ao círculo, mudando a cor do seu preenchimento, por exemplo. Talvez, por este fato, os tradutores do GeoGebra para a língua portuguesa, tenham traduzido a expressão em inglês "*circle*", para "círculo".

De um ponto de vista cognitivo, o termo “círculo” adotado no GeoGebra pode gerar ao estudante brasileiro, que ainda não teve contato com o *software* e suas ferramentas, dificuldades de compreensão no que diz respeito a confusão entre os objetos geométricos representados na sua janela de visualização, pois a primeira representação formada pelo GeoGebra, ao utilizar essas ferramentas, evidenciam apenas a curva (circunferência) e seus pontos notáveis (centro e pontos sobre a circunferência). Destacamos isso, uma vez que no Brasil é comum nos manuais escolares (desde os anos iniciais do ensino fundamental) a distinção figural entre as representações de circunferência e círculo.

No caso desta tarefa, as equipes foram orientadas em como proceder para perceber visualmente a representação figural de um círculo na janela de visualização do GeoGebra. Para tanto, as equipes foram instruídas a escolher uma circunferência representada de modo a seguirem os passos: (i) clicar com o botão direito do *mouse* sobre a circunferência, (ii) escolher “propriedades”, (iii) clicar na opção “cor”, (iv) variar o comando “transparência” e (v) observar o efeito do preenchimento interno à curva.

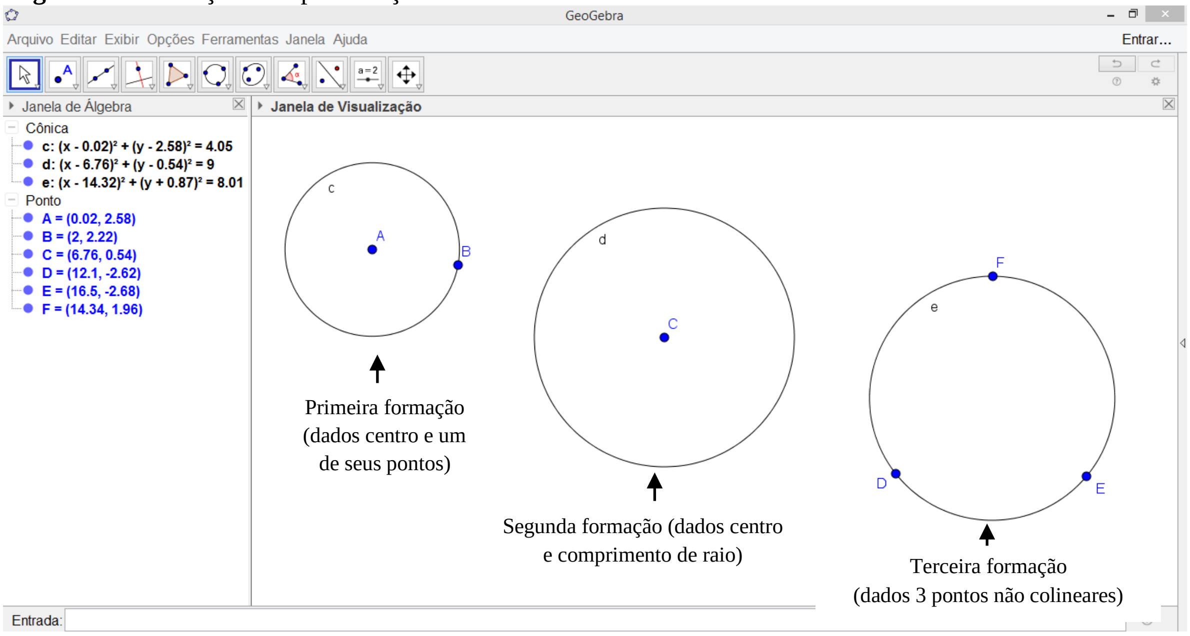
Em relação aos participantes desta pesquisa, as compreensões ou incompreensões acerca do efeito do termo “círculo” utilizado nas ferramentas do GeoGebra são reveladas por meio da coordenação dos registros discursivos (língua natural e linguagem matemática) que as equipes apresentaram para cada uma das questões da tarefa proposta.

Destacamos que os passos e orientações para formação de representações figurais no GeoGebra, fornecidos nesta tarefa, representam a primeira mudança de registro realizada pelas equipes, a qual compreende a conversão do registro discursivo para o registro figural na sua modalidade geométrica-dinâmica, que de acordo com os pressupostos de Duval (2004a) corresponde a uma ilustração. Nessa conversão, as equipes articularam inicialmente as apreensões perceptiva (perceber visualmente pontos e circunferências) e sequencial (reproduzir por meio das ferramentas do GeoGebra as representações figurais necessárias, de acordo com as instruções fornecidas na tarefa) em relação aos objetos geométricos envolvidos na tarefa. Sublinhamos que as atividades cognitivas coordenadas pelas equipes durante a realização da tarefa estão relacionadas às representações de três circunferências formadas na janela de visualização do GeoGebra a partir de três ferramentas distintas do *software*.

De acordo com Duval (2004a) a introdução a uma figura geométrica ocorre por meio de uma representação discursiva, em que cada uma das operações que permitem modificar as representações figurais deve ser solicitada explícita e sistematicamente, como ocorreu nesta tarefa.

A partir de passos e orientações para representar objetos geométricos no GeoGebra, as equipes formaram as representações de três circunferências na janela de visualização do *software*, em que obtiveram representações com características semelhantes às da Figura 14.

Figura 14: Formação de representações de circunferências utilizando três ferramentas distintas do GeoGebra.



Fonte: Autor da pesquisa.

Segundo os pressupostos teóricos de Duval (2004a) observamos, nesta tarefa, que as equipes mobilizaram e coordenaram diferentes variações visuais, as quais destacamos: **(i) dimensional** - 0D para pontos; 1D para reta, segmentos de reta e circunferências; 2D para círculos e **(ii) qualitativa** - formas, nomes, cores, tamanhos, espessuras e medidas vinculadas a cada representação figural formada na janela de visualização do GeoGebra.

Salientamos que cada uma das três ferramentas do GeoGebra, que permitem formar as representações de circunferências, tem um procedimento distinto. A primeira ferramenta usa-se para representar figuralmente uma circunferência sem restringir a medida do raio (trata-se de uma circunferência livre), a segunda para formar uma circunferência a partir do transporte da medida de algum segmento de modo que raio da circunferência tenha essa medida e a terceira ferramenta pode ser caracterizada como um “atalho” para formar, por meio de régua e compasso, a representação de uma circunferência que passa por três pontos distintos e não colineares. Além disso, observa-se que na janela de álgebra do GeoGebra cada circunferência tem sua respectiva representação simbólica designada pelo termo cônica: “c”, “d” e “e”.

Destacamos que nesta tarefa a apreensão sequencial ocorreu no momento em que as equipes formaram, por meio das ferramentas do GeoGebra, as representações figurais de cada uma das três circunferências.

Os registros de representação semiótica mobilizados e coordenados pelas equipes nesta tarefa foram o figural, na sua modalidade geométrica-dinâmica, e a língua natural, na sua modalidade escrita. Após formação e tratamento das representações figurais de cada uma das circunferências na janela de visualização do GeoGebra, as equipes apresentaram discursivamente suas respostas às seis questões que nortearam o desenvolvimento da tarefa. Inferimos que as respostas apresentadas pelas equipes foram dadas por meio de representações escritas influenciadas pela coordenação entre os registros figural e da língua natural, pela função de objetivação (tomada de consciência) e pela articulação entre as apreensões perceptiva, sequencial, operatória (realizar diferentes modificações na figura) e discursiva (tecer hipóteses acerca da figura geométrica reproduzida) relativas às figuras geométricas construídas na área de desenho do *software*.

As respostas apresentadas pelas equipes **à primeira questão** (Qual é o nome do ponto A e do ponto C, nas duas primeiras representações?) foram:

Equipe E1: *"A e C são chamados de centro da circunferência".*
Equipe E2: *"Centro".*
Equipe E3: *"Centro".*
Equipe E4: *"O ponto A é o centro da circunferência".*
Equipe E5: *"O nome do ponto A é centro".*
Equipe E6: *"São chamados de centro da circunferência".*

Em relação à primeira questão as equipes E1, E2, E3 e E6 responderam que os pontos A e C, são os centros das respectivas circunferências representadas, enquanto que as equipes E4 e E5 responderam simplesmente sobre o centro da primeira circunferência. Essa primeira questão potencializou aos estudantes a apreensão perceptiva, que na ótica de Duval (2012a) está relacionada ao reconhecimento visual das formas (pontos, traços, caracteres etc.) da representação figural, e a apreensão discursiva que se refere às hipóteses que as formas figurais representam. Por meio da articulação dessas duas apreensões as equipes discursaram em língua natural, na sua modalidade escrita, para exprimir que os pontos A e C representam os centros das respectivas circunferências representadas. Observamos neste caso a ocorrência da objetivação a partir da coordenação (conversão) entre a representação figural (pontos A e C) e a representação discursiva (centro). Além disso, nesta primeira questão não ocorreram indicativos de dificuldades com o registro discursivo (língua natural ou linguagem matemática) nem equívocos conceituais sobre os objetos geométricos representados.

As respostas apresentadas pelas equipes **à segunda questão** (Qual é o nome do segmento AB na primeira representação?) foram:

Equipe E1: *"O segmento AB é chamado de raio da circunferência".*
Equipe E2: *"Raio da circunferência".*
Equipe E3: *"Raio".*
Equipe E4: *"Raio da circunferência".*
Equipe E5: *"O nome do segmento AB é raio".*
Equipe E6: *"É o raio da circunferência".*

Para a segunda questão os estudantes registraram discursivamente (escrita em língua natural) que o segmento de reta AB é denominado "raio da circunferência". Inferimos que essa resposta foi estimulada a partir da apreensão perceptiva das marcas e contrastes que constituem a representação do segmento de reta AB, o qual tem extremidades representadas nos pontos A (centro) e B (pertencente à curva representada), e das hipóteses que este segmento de reta suscita, pois todo segmento de reta com extremidade na circunferência e em seu centro é designado raio, uma vez que este é um representante entre os infinitos raios de uma circunferência.

Sublinhamos que as equipes não realizaram a representação figural do segmento AB no GeoGebra, no entanto indicaram discursivamente um raio da circunferência, a partir das representações dos pontos A e B. O fato de não representarem figuralmente esse objeto geométrico, mostra que há a tomada de consciência (objetivação) de tal objeto. Essa objetivação parece ocorrer em virtude da coordenação entre o registro figural e o registro da língua natural e pela articulação entre as apreensões perceptiva (perceber visualmente os pontos A "centro" e B "pertencente à circunferência"), discursiva (hipótese que esses pontos suscitam: extremidades de um segmento de reta), e também, uma apreensão operatória mereológica, uma vez que o registro do segmento AB teve de ser feito mentalmente ou por meio de marcação com a ferramenta segmento do *software.*

Nesta questão, os estudantes não apresentaram indicativos de dificuldades ou equívocos conceituais em relação aos termos empregados em língua natural e linguagem matemática acerca dos objetos geométricos abordados nas representações discursivas.

As respostas apresentadas pelas equipes à **terceira questão** (Quais as principais diferenças observadas por você nas três maneiras descritas de representar figuralmente circunferências e círculos?) foram:

Equipe E1: *"Na primeira figura, como foi definida por dois pontos, podemos mover um dos seus pontos de modo a alterar a medida do raio. Na segunda figura, como foi definida dando um centro e um raio, não podemos alterar a medida do raio, pois esta já está definida. E na terceira figura, como definimos através de três pontos, nota-se que se assemelha a figura do 1º caso, com a diferença de que neste caso, não temos o centro e os pontos sempre pertencem a curva da circunferência".*

Equipe E2: *"Ao fixar o centro e um outro ponto da circunferência é possível alterar a medida do raio da circunferência movimentando o ponto pertencente à ela. Ao construirmos através de centro e raio, fixamos um valor para os segmentos* [referindo-se aos raios] *entre a origem e o extremo da circunferência, e assim, não é possível alterar esta medida. Construindo através de três pontos é possível alterar as medidas de raio ao movimentar um dos pontos".*

Equipe E3: *"Na primeira é dado o centro e o raio, na segunda é dado o centro e a medida do raio e a terceira é dado três pontos pertencentes a circunferência".*

Equipe E4: *"Na primeira podemos modificar a circunferência conforme alteramos o centro ou um de seus pontos. Na segunda como o comprimento do raio está fixado, a circunferência é determinada apenas pelo centro. Na terceira, o centro da circunferência é determinado a partir da posição dos pontos".*

Equipe E5: *"Em cada construção, você pode alterar a circunferência de maneiras diversas, mudando o centro e seu raio".*

Equipe E6: *"Na primeira você escolhe dois pontos que, unidos por um segmento de reta, formam o raio do círculo (com centro no primeiro ponto). Na segunda você escolhe o ponto que será o centro do círculo e depois especifica a medida do raio. Na terceira você escolhe três pontos não colineares, os quais não são o centro do círculo, mas possuem a mesma distancia deste, ou seja, fazem parte da circunferência".*

Destacamos que a terceira questão foi respondida a partir do uso de ferramentas do GeoGebra, as quais permitiram formar representações de circunferências por meio de processos diferentes. Essa potencialidade do *software* permitiu aos estudantes a realização de tratamentos figurais, pois puderam movimentar os pontos notáveis (A, B, C, D, E e F) das representações formadas na janela de visualização e, consequentemente, perceber e estabelecer relações existentes entre os objetos geométricos envolvidos, tais como centro, raio e circunferência, o que ilustra a manifestação da apreensão discursiva das relações entre esses objetos.

A equipe E1 respondeu que na primeira circunferência representada, o comprimento do raio é variável, enquanto na segunda é fixo. Além disso, a equipe destacou que a terceira representação de circunferência é semelhante a primeira. Inferimos que esta observação se refere à medida variável do raio. Esta equipe também evidenciou a ausência do centro da terceira circunferência representada e destacou que os pontos que a originaram "*sempre*" pertencem a tal curva.

Destacamos que a terceira construção figural de circunferência não possibilita perceber visualmente o centro e o raio, o que fez com que a equipe E1 percebesse a variação do tamanho da circunferência a partir das apreensões operatória (arrastar os pontos D, E e F), perceptiva ("ver" os pontos D, E e F sendo arrastados, bem como a circunferência sendo ampliada ou reduzida) e discursiva (levantar hipóteses no que tange variar o tamanho da circunferência). Inferimos que a circunferência foi determinada a partir dos pontos D, E e F, o que implica na dependência da curva em relação a esses pontos.

A equipe E2 elencou a variação do comprimento do raio da primeira circunferência representada. No entanto, em relação à segunda circunferência, os termos "*origem*" e "*extremo*", utilizados pela equipe referem-se ao ponto C (centro da circunferência) e qualquer ponto pertencente à circunferência, pois tais pontos representam as extremidades dos raios de comprimento fixo. O uso desses termos pela equipe não significa falta de compreensão dos objetos geométricos envolvidos, pois o significado expressado pela equipe é que a medida do raio não será alterada. No entanto, a equipe apresentou dificuldades com o uso de termos específicos da linguagem matemática. Sobre a representação da terceira circunferência a equipe observou a relação entre os objetos 0D e 1D, a qual ocorreu por meio das apreensões operatória (movimentar os pontos D, E e F), perceptiva (perceber visualmente o movimento dos pontos e as mudanças na circunferência) e discursiva (levantar hipótese sobre a variação do comprimento do raio).

A resposta apresentada pela equipe E3 é uma descrição de cada uma das ferramentas do GeoGebra utilizadas na formação das representações das três circunferências e desta forma, esta equipe não realizou tratamentos sobre as representações figurais, o que nos permite inferir que ela não mobilizou a apreensão operatória, fato este, segundo os pressupostos teóricos de Duval (2004a), pode implicar em uma objetivação insuficiente dos objetos geométricos envolvidos.

A equipe E4 relatou que é possível modificar a primeira circunferência quando se altera a posição do centro (ponto A) e o outro ponto que a determinou (ponto B). Para a segunda circunferência a equipe evidenciou o comprimento fixo do raio e estabeleceu que a circunferência é formada a partir do seu centro, mas não a relacionou ao comprimento fixo do raio. Nesse aspecto, de acordo com Duval (2004a) não há o reconhecimento de unidades figurais elementares para a formação da circunferência, tais como o centro e raio. Esta equipe levantou a hipótese de que o centro da terceira circunferência é determinado pela posição dos pontos D, E e F, o que permite destacar a articulação entre as apreensões discursiva, perceptiva e operatória mobilizadas pela equipe.

A resposta apresentada pela equipe E5 indica uma generalização acerca da variação do comprimento do raio nas três representações, o que não é verdade, pois, na segunda circunferência o raio tem comprimento fixo. De acordo com Duval (2004a), transformar representações possibilita ao estudante ampliar seu conhecimento em relação às representações iniciais. Nesta perspectiva, a resposta dada pela equipe E5 há indicativos de que foram realizados tratamentos nas representações figurais, a partir da apreensão operatória (mudar as posições dos pontos A, B, D, E e F na janela de visualização do GeoGebra), no entanto, não há evidências na produção escrita da equipe sobre as possíveis propriedades e vínculos existentes dos objetos geométricos presentes em cada circunferência representada figuralmente.

A equipe E6 descreveu como a primeira e segunda circunferências foram formadas pelas ferramentas do GeoGebra. Para a terceira circunferência E6 apontou uma observação relevante acerca dos pontos que deram origem à circunferência, indicando que esses pontos não devem ser colineares. Esse fato revela a ocorrência da objetivação pela equipe a partir da coordenação entre os registros discursivo (língua natural e linguagem matemática) e figural.

Destacamos que a coordenação do registro figural, na sua modalidade geométrica-dinâmica, permitiu às equipes, a partir de formações e tratamentos de representações, registrar discursivamente diferenças perceptíveis, difíceis de serem observadas quando se utiliza uma plataforma estática (papel e lápis). Essas diferenças são perceptivelmente reconhecidas por meio da representação da terceira circunferência, cuja formação ocorreu a partir de três pontos não colineares. Neste sentido, a plataforma dinâmica (GeoGebra) permitiu mover, girar, modificar ou ampliar representações de objetos geométricos, favorecendo a exploração e a investigação de hipóteses que o estudante elaborou durante a atividade geométrica.

As respostas apresentadas pelas equipes **à quarta questão** (Diferencie formalmente os pontos pertencentes a uma circunferência dos pontos pertencentes a um círculo, justificando sua resposta) foram:

Equipe E1: *"Os pontos da circunferência são os pontos da extremidade do raio oposta ao centro. E os pontos do círculo são os pontos da extremidade e os que estão na área correspondente de dentro, ou seja, os pontos internos à circunferência".*

Equipe E2: *"Pontos de circunferência obedecem a uma distância fixa em relação ao centro de forma que conseguimos apenas alterar a posição da figura, sem alterar o tamanho, e os pontos de um círculo podem obedecer a determinadas propriedades sem exigir uma medida fixa de raio".*

Equipe E3: *"Circunferência seriam os pontos presentes na 'casca' do círculo. Círculo são os pontos presentes no interior da circunferência".*

Equipe E4: *"Os pontos de uma circunferência são os pontos que estão a uma distância fixa do seu centro. O círculo é constituído dos pontos que* *estão a uma distância menor ou igual ao raio em relação ao centro".*

Equipe E5: *"Os pontos da circunferência são os pontos que distam uma medida fixa d do centro da circunferência. Já o círculo compreende todos os pontos cuja distância desse ponto á origem da circunferência de raio d é menor que d".*

Equipe E6: *"Os pontos da circunferência são aqueles que possuem a mesma distância do raio da mesma, enquanto que os pontos do círculo são aqueles delimitados por uma circunferência".*

A resposta apresentada pela equipe E1 à quarta questão está correta. Inferimos que a produção escrita da equipe foi favorecida pela articulação entre as apreensões perceptiva (perceber visualmente marcas, contrastes e contornos das figuras construídas na janela de visualização) e discursiva (suscitar hipóteses e propriedades sobre pontos de uma circunferência e de um círculo), o que favoreceu a tomada de consciência (objetivação) pela equipe para diferenciar pontos de objetos geométricos distintos.

A equipe E2 respondeu que os pontos da circunferência estão a uma distância fixa do centro e que os pontos do círculo seguem certas propriedades que não se exige um comprimento fixo para o raio. No entanto, a equipe não informou quais seriam estas propriedades e, além disso, considerou a variação do comprimento do raio para explicar o que é círculo. Destacamos que esta equipe consegue coordenar representações figurais dos objetos circunferência e círculo, mas não sabe explicar, por meio do registro discursivo, as propriedades geométricas envolvidas, ou seja, a partir de representações escritas coordenadas pela equipe é possível perceber indicativos de uma ideia correta sobre as propriedades dos pontos que pertencem a um círculo, entretanto, a equipe não conseguiu explicitá-la no registro da língua natural.

Este fato evidencia as dificuldades apresentadas pela equipe E2 em relação à apreensão discursiva dos objetos geométricos e suas propriedades. De acordo com Duval (2011), coordenar diferentes representações semióticas em mais de um registro favorece as apreensões dos objetos geométricos dos estudantes, especialmente via registros discursivos que demandam conexão entre diversas designações verbais. Nesta ótica, inferimos que há indicativos de que esta equipe reconhece os objetos geométricos circunferência e círculo quando coordena o registro da língua natural, no entanto apresenta dificuldades em descrever por meio da produção escrita as diferenças entre esses objetos a partir de uma lente direcionada às representações figurais. Neste caso, sublinhamos que a dificuldade se encontra na conversão da representação figural para a representação em língua natural, na sua modalidade escrita.

A equipe E3 destacou que os pontos da circunferência formam a "casca" do círculo e este é formado pelos pontos do interior à circunferência, mas não observou que os pontos da circunferência também pertencem ao círculo. A dificuldade em articular a linguagem matemática fez com que esta equipe usasse a expressão "casca" em vez de "fronteira", o que não revela a falta de compreensão dos pontos que pertencem à circunferência. O fato de não saber usar a linguagem matemática para designar objetos matemáticos não explicita que o estudante não compreendeu os objetos geométricos envolvidos.

A equipe E4 caracterizou e diferenciou os pontos da circunferência e do círculo. Entretanto, no registro discursivo há indicativos de que o objeto geométrico (raio) e o objeto numérico (distância) foram usados para representar o mesmo objeto matemático, pois a equipe descreveu em sua resposta "*distância menor ou igual ao raio*". A partir dos pressupostos teóricos de Duval (2011) constatamos que pode ter ocorrido uma conversão insuficiente das representações formadas no registro figural (GeoGebra) para o registro da língua natural, na sua modalidade escrita.

O registro discursivo mobilizado e coordenado pela equipe E5 revela que ela consegue exprimir a propriedade dos pontos que pertencem a uma circunferência (*pontos que distam uma medida fixa d do centro*), o que evidencia a tomada de consciência sobre esse objeto geométrico. No entanto, no desenvolvimento da resposta apresentada por esta equipe há indicativos de que os pontos da circunferência não pertencem ao círculo, ou seja, a equipe parece não reconhecer que a circunferência pertence ao círculo, pois sua resposta evidencia que "*o círculo compreende todos os pontos cuja distância desse ponto à origem da circunferência de raio d é menor que d*". Além disso, o termo "*origem*", utilizado pela equipe se refere ao centro da circunferência, o que explicita a sua dificuldade ao mobilizar e coordenar termos da linguagem matemática. Observamos também que esta equipe respondeu centro na primeira questão ao fazer referência ao Ponto A.

A partir dos pressupostos teóricos de Duval (2004a), perceber visualmente as características de uma representação figural não significa que se sabe diferenciar representante de representado por meio de representações coordenadas discursivamente.

Nesta perspectiva, exprimimos que a equipe E5 percebeu e reconheceu visualmente os objetos, circunferência e círculo, representados figuralmente na janela de visualização do GeoGebra. No entanto, por meio do registro da língua natural, na sua modalidade escrita, a equipe apresenta indicativos de que a circunferência não está contida no círculo o que resulta em uma objetivação insuficiente sobre a propriedade dos pontos de um círculo.

A equipe E6 respondeu que os pontos da circunferência são aqueles que têm a mesma distância do raio. No entanto, raio é um segmento de reta e não uma distância, que é um número. Neste caso há indicativos de que a equipe referiu-se ao comprimento do raio como sendo o raio. A partir dos pressupostos teóricos de Duval (2004a) inferimos que pode ter ocorrido uma confusão da representação do objeto com o próprio objeto e entre objetos. Sobre o conceito de círculo a equipe registrou em língua natural que ele é formado pelos pontos delimitados pela circunferência. Destacamos que há indicativos de tomada de consciência (objetivação) da equipe, pois o termo “delimitado” utilizado por ela para caracterizar os pontos de um círculo, foi cunhado para se referir aos pontos interiores à circunferência e ela própria.

As respostas apresentadas pelas equipes à **quinta questão** (Na terceira representação figural de circunferência, o que ocorre se pontos D, E e F forem alinhados?) foram:

> Equipe E1: *“Parece-nos que há a formação de uma reta, mas se diminuirmos o zoom vemos que ainda é uma circunferência”.*
> Equipe E2: *“É possível observar que uma reta passa pelos três pontos”.*
> Equipe E3: *“Forma uma reta”.*
> Equipe E4: *“Quando D, E e F estão alinhados temos uma reta”.*
> Equipe E5: *“A circunferência se transforma em uma reta”.*
> Equipe E6: *“Tem-se uma reta ou uma circunferência de raio infinito”.*

A equipe E1 respondeu que se os pontos estão alinhados parece haver “*a formação de uma reta*”. No entanto, a equipe observa que ao se aplicar a ferramenta “*zoom*” do GeoGebra ainda é possível “ver” uma circunferência. Inferimos que a resposta apresentada pela equipe E1 teve uma influência direta das apreensões perceptiva e operatória (ótica e de posição), em que a primeira favoreceu perceber visualmente os pontos D, E e F, a circunferência “e” a reta determinada por esses pontos, enquanto que a segunda potencializou as transformações necessárias (movimentar os pontos e tentar alinhá-los, ampliar ou reduzir por meio da opção "*zoom*" as representações figurais) para mudar o objeto, ou seja, obter uma reta. Destacamos, dessa forma, que no discurso apresentado pela equipe há indicativos de tomada de consciência da mudança de objetos geométricos conforme for a disposição de três pontos distintos.

A partir dos pressupostos teóricos de Duval (2012a), inferimos que a afirmação apresentada pela equipe decorre também da apreensão discursiva articulada com as outras anteriores, pois tornar colineares três pontos que foram formados arbitrariamente na janela de visualização do GeoGebra é praticamente uma ação difícil de ser executada, uma vez que a ação de arrastar pontos com o *mouse* na área de desenho do *software* envolve uma precisa coordenação motora.

Salientamos, portanto, que as hipóteses levantadas pela equipe E1 foram possíveis a partir da articulação e integração entre as apreensões perceptiva, discursiva e operatória. Esta última, por sua vez, potencializou a realização de tratamentos sobre os pontos D, E e F na tentativa de alinhá-los na janela de visualização do GeoGebra. De acordo com os pressupostos teóricos de Duval (2004a) nessa ação desencadeada pela equipe há uma reconfiguração (tratamento) de unidade figural elementar (1D - circunferência), para se obter uma unidade figural também de dimensão 1, ou seja, uma reta.

Neste sentido, inferimos que os tratamentos realizados e a apreensão perceptiva favoreceram a equipe E1 descrever, por meio da língua natural (modalidade escrita), suas hipóteses acerca da formação de uma reta (percepção local) ou de uma circunferência (percepção global), quando tentou alinhar os pontos D, E e F e utilizou a opção do GeoGebra que permite aproximar ou distanciar as representações figurais formadas na janela de visualização.

As equipes E3, E4 e E5 responderam que há a formação de uma reta, enquanto que a equipe E2 utilizou a expressão "*é possível observar*" uma reta. Isso nos leva a inferir que estas equipes apresentaram suas respostas a partir da articulação entre as apreensões perceptiva (percepção visual das formas, contornos, contrastes etc.), operatória (diferentes modificações realizadas nas figuras formadas na janela de visualização) e discursiva (hipóteses suscitadas a partir das ações realizadas nas figuras construídas). Essas constatações reveladas por meio do registro da língua natural, na sua modalidade escrita, nos levam a inferir que há indicativos da ocorrência de objetivação sobre as condições de três pontos distintos para, a partir, deles se obter uma circunferência ou uma reta.

A equipe E6 respondeu que há formação de uma reta ou "*uma circunferência de raio infinito*". Esta equipe considerou dois objetos geométricos, ou seja, uma reta quando localmente se "vê" a sua representação figural e, circunferência, no sentido global, quando não for possível deixar os pontos D, E e F colineares por meio da ação de movimentá-los com o *mouse* na janela de visualização do GeoGebra. Neste caso, observamos que há indicativos da ocorrência de objetivação sobre o conceito de infinito, que é plural na Matemática.

Sublinhamos que a quinta questão favoreceu explorações por meio das ferramentas do GeoGebra, quando as equipes movimentaram os pontos D, E e F na tentativa de alinhá-los, e também, potencializou investigações, pois a disposição de três pontos distintos no plano implica na formação de objetos geométricos diferentes, ou seja, "reta" com eles colineares e "circunferência" quando não colineares.

Enfim, salientamos que a influência do GeoGebra na construção e modificação das figuras, a articulação entre as diferentes apreensões que uma figura geométrica dá lugar e a coordenação entre os registros da língua natural (modalidade escrita) e o figural contribuíram para a tomada de consciência das equipes no que diz respeito as relações existentes entre objetos geométricos (pontos-circunferência e pontos-reta), ou seja, três pontos distintos e não colineares determinam uma circunferência, enquanto que três pontos distintos e colineares determinam uma reta.

As respostas apresentadas pelas equipes à **sexta questão** (O que são pontos interiores e exteriores de um círculo? Enuncie uma definição para esses casos.) foram:

Equipe E1: *"Pontos interiores de um círculo são os pontos pertencentes ao interior da circunferência. E os exteriores são os que pertencem a circunferência deste círculo".*

Equipe E2: *"Pontos interiores são os que se encontram entre o centro e o extremo da figura".*

Equipe E3: *"Interiores pertencem ao círculo. Exteriores não pertencem ao círculo".*

Equipe E4: *"Seja C uma circunferência de centro O e raio r. Os pontos interiores do círculo são aqueles que estão a uma distância menor do que o comprimento do raio r em relação ao centro O. Os pontos exteriores* *do círculo são aqueles que estão a uma distância maior do que o comprimento do raio r em relação ao centro O".*

Equipe E5: *"Pontos interiores são pontos cuja distância do ponto ao centro da circunferência são iguais ou menores que o raio* [*sic*]. *Pontos exteriores são pontos com a distância desse ponto ao centro maior que o raio".*

Equipe E6: *"Pontos interiores são aqueles que possuem distância do centro da circunferência menor ou igual à medida do raio. Pontos exteriores são aqueles com distância do centro da circunferência maior que a medida do raio".*

Destacamos que as respostas apresentadas a esta questão foram orientadas a partir da articulação entre as apreensões perceptiva, operatória e discursiva das representações figurais formadas na janela de visualização do GeoGebra.

A equipe E1 apresentou interpretação correta em relação aos pontos interiores de um círculo, no entanto, afirmou que os pontos exteriores deste objeto geométrico pertencem à circunferência, o que não é verdade, pois os pontos da circunferência são pontos de fronteira, ou seja, são aqueles que separam o interior do exterior de um círculo.

A equipe E2 respondeu apenas sobre os pontos interiores, porém, considerou que tais pontos são aqueles que estão "entre" o centro e a circunferência, a qual chamou de "extremo da figura". Mesmo utilizando o termo "entre" inferimos que esta equipe considerou o centro da circunferência como ponto interior de um círculo. O uso do termo "extremo" para fazer referência a circunferência revela dificuldade da equipe com o uso de termos da linguagem matemática.

A equipe E3 afirmou que os pontos interiores pertencem ao círculo e os exteriores não pertencem. Destacamos que os pontos da circunferência, que também pertencem ao círculo, não são pontos interiores, ou seja, são pontos de fronteira. Esta constatação de E3 exprime que a equipe pode ter dificuldade em descrever em língua natural, via conversão, o que são pontos interiores e exteriores de um círculo, mas não há indicativos de que não compreendeu seu significado. Em relação às equipes E4, E5 e E6, observamos que elas consideraram em suas respostas a distância entre pontos, ou seja, os comprimentos de segmentos de reta.

A equipe E4 apresentou resposta correta, em particular, fazendo uso da linguagem matemática. A equipe E5 apresentou dois equívocos. O primeiro se refere a distância dos pontos interiores de um círculo ao seu centro ser igual ao comprimento do raio da circunferência. No entanto, este conceito se refere aos pontos de uma circunferência. Assim, na resposta da equipe os pontos da circunferência também seriam pontos interiores de um círculo. O segundo equívoco está relacionado ao raio (segmento de reta) ser uma medida (distância), o qual foi registrado em língua natural, na sua modalidade escrita: "***distância** do ponto ao centro da circunferência são **iguais** ou **menores que o raio**"* e *"**distância** desse ponto ao centro **maior que o raio**"*. Isso mostra a dificuldade da equipe em distinguir um objeto matemático de outro por meio de representações discursivas. A partir dos pressupostos teóricos de Duval (2004a, 2011), a confusão entre objetos matemáticos distintos pode ser um dos elementos que não favorece a ocorrência da objetivação dos objetos estudados. No entanto, mesmo a equipe E5 que apresentou dificuldades com a coordenação de representações em língua natural de objetos diferentes, inferimos que em sua resposta há indicativos de tomada de consciência dos pontos exteriores de um círculo.

O equívoco da equipe E6 está no fato de ter considerado que a distância dos pontos interiores ao centro da circunferência é "igual" ao comprimento do raio. No entanto, o uso desta expressão "igual" se refere aos pontos que pertencem a uma circunferência. Em relação aos pontos exteriores, percebemos a tomada de consciência (objetivação) da equipe a partir da coordenação do registro discursivo, quando evidencia que esses pontos estão a uma distância do centro maior do que o comprimento do raio.

Destacamos que a sexta questão potencializou a apreensão discursiva, pois por meio das apreensões perceptiva e operatória e a conversão de representações, as equipes caracterizaram pontos interiores e exteriores de um círculo, bem como os pontos de uma circunferência. No Quadro 21 apresentamos uma síntese das respostas dadas pelas equipes à tarefa sobre circunferência e círculo em que foi possível identificar os tipos de apreensões e transformações, a ocorrência de objetivação e evidências de dificuldades reveladas pelos futuros professores de Matemática.

Quadro 21 - Síntese das respostas apresentadas à tarefa sobre circunferência e círculo.

Questão	**Apreensão**	**Tratamento**	**Conversão**	**Objetivação**	**Dificuldades**
Q1	Perceptiva Sequencial Discursiva	Não há evidências.	Registro da língua natural para o registro figural.	Tomar consciência que os pontos A e C representam os centros das circunferências (todas as equipes).	Não há evidências.
Q2				Tomar consciência que o segmento AB representa o raio da circunferência (todas as equipes).	
Q3	Perceptiva Sequencial Operatória Discursiva	Registo Figural: Movimentar pontos notáveis (A, B, C, D, E e F) das das circunferências. Transladar, ampliar e reduzir cada representação figural.	Registro figural para o registro da língua natural.	Tomar consciência que o comprimento do raio pode variar: na primeira circunferência (E1, E2, E4 e E5) e na terceira circunferência (E1, E2 e E5). Tomar consciência que o comprimento do raio não pode variar na segunda circunferência (E1, E2 e E4). Tomar consciência da não colinearidade dos pontos D, E e F para formar a terceira circunferência (E6).	Usar termos da linguagem matemática (E2); Reconhecer unidades figurais: centro e raio (E4); Variar o comprimento do raio na segunda circunferência (E5).
Q4	Perceptiva Sequencial Discursiva	Não há evidências.		Tomar consciência sobre pontos de circunferência e círculo (E1, E6);	Explicar, em língua natural, na sua modalidade escrita, as propriedades dos pontos de um círculo (E2); Usar a linguagem matemática (E3, E5); Confundir objetos matemáticos, raio e medida de raio (E4); Reconhecer que a circunferência está contida no círculo (E5).
Q5	Perceptiva Sequencial Operatória Discursiva	Registro figural: Alinhar pontos D, E e F (colinearidade de pontos).		Tomar consciência da condição de alinhamento de pontos (todas as equipes), e sobre o infinito (E5).	Não há evidências.
Q6	Perceptiva Sequencial Discursiva	Não há evidências.		Tomar consciência de pontos interiores do círculo (E1 e E2). Tomar consciência de pontos exteriores do círculo (E3, E5 e E6). Tomar consciência de pontos interiores e exteriores do círculo (E4).	Usar termos da linguagem matemática por meio de representações em língua natural (E5). Definir e/ou caracterizar pontos exteriores do círculo (E1); Definir e/ou caracterizar pontos interiores do círculo (E3, E5 e E6).

Fonte: Autor da pesquisa.

Destacamos que a apreensão sequencial (reprodução das figuras na janela de visualização do GeoGebra) aconteceu quando as equipes usaram as ferramentas do *software* para representar circunferências e círculos a partir dos passos e orientações fornecidos pelo professor em sala de aula.

Observamos que as equipes, de modo geral, apresentaram dificuldades na conversão do registro figural para o registro da língua natural, na sua modalidade escrita, no sentido de descrever, designar, denotar e denominar os objetos geométricos abordados na tarefa, bem como explicar propriedades e relações existentes.

De acordo com Duval (2011) o problema didático de se usar uma língua não está assentado em conhecer o vocabulário, mas sim na capacidade de designar diferentes coisas a partir das palavras que se dispõe. Este autor destaca também que conhecer as palavras não significa nada se não existir uma objetivação sobre a designação verbal veiculada e sua complexidade e, essa tomada de consciência está estritamente ligada a uma produção escrita.

A partir das respostas apresentadas pelas equipes evidenciamos que parece ser comum o uso do mesmo termo ou palavra para designar objetos matemáticos distintos como, por exemplo, usar "raio" para referir-se ao segmento de reta e, também, a medida desse segmento. A partir dos pressupostos teóricos de Duval (2004a, 2011), inferimos que o movimento de usar uma mesma representação semiótica para fazer referência a objetos matemáticos distintos pode se tornar um obstáculo para a apreensão dos objetos, suas propriedades, características e relações.

Ainda nesta perspectiva, destacamos que algumas conversões realizadas do registro figural para o registro da língua natural (modalidade escrita) revelaram dificuldades dos futuros professores em mobilizar e coordenar o uso de termos específicos da linguagem matemática. Entretanto, esse fato não pode ser tomado como argumento para inferir que o estudante não compreendeu os objetos geométricos e suas propriedades como, por exemplo, quando a equipe E3 usou a expressão "*casca*" referindo-se aos pontos da circunferência, quando em linguagem matemática usa-se a expressão "fronteira", linha esta que separa pontos interiores de pontos exteriores de um círculo, fato este que não revela incompreensão dos estudantes em relação aos pontos de uma circunferência.

Nesta perspectiva, evidenciamos nesta tarefa que a apreensão dos objetos geométricos (circunferência, raio, centro, pontos de uma circunferência, pontos colineares, reta, segmento de reta, círculo, pontos interior e exterior de um círculo) ocorreu em virtude dos conceitos e resultados geométricos mobilizados, pela articulação entre as apreensões perceptiva, sequencial, operatória e discursiva e por meio da coordenação mútua entre o registro discursivo (protocolos de registro - produção escrita em língua natural) e o registro figural (GeoGebra - formação de transformação de figuras geométricas). Esta constatação corrobora os pressupostos teóricos de Duval (2009), pois para o autor “uma aprendizagem especificamente centrada na mudança de diferentes registros de representação” gera efeitos significativos nas tarefas de produção e compreensão.

Além disso, ressaltamos que o ambiente de geometria dinâmica, em particular o GeoGebra, é um instrumento fundamental que vem somar para a apreensão dos objetos geométricos abordados nesta tarefa, em particular no que diz respeito à formação geométrica dos futuros professores de Matemática, pois esse *software* permitiu as equipes que cumprissem as três atividades cognitivas associadas a toda representação, nas quais destacamos:

1. Formar representações semióticas figurais de circunferências em sua janela de visualização possibilitou que os estudantes potencializassem as apreensões perceptiva e discursiva das formas e marcas que caracterizam cada objeto geométrico envolvido.
2. Tratar as representações figurais como, por exemplo, movimentar, traçar, marcar, denominar, ampliar, reduzir etc. de modo a estabelecer vínculos e relações entre diferentes objetos geométricos.
3. Converter representações dadas no registro da língua natural, na sua modalidade escrita, para o registro figural na sua modalidade geométrica-dinâmica e o processo inverso, converter representações formadas no registro figural dinâmico para o registro discursivo em língua natural, na sua modalidade escrita.

Neste prisma apresentamos no Quadro 22 as atividades cognitivas de formação, tratamento e conversão que foram influenciadas pelo uso do GeoGebra, as conexões entre os registros de representação semiótica mobilizados e coordenados pelas equipes durante o desenvolvimento da tarefa, bem como as ações e ocorrências identificadas no processo de resolução da tarefa que versou sobre circunferência e círculo.

Quadro 22 - Identificação de atividades cognitivas, registros de representação semiótica e ações/ocorrências presentes na realização da tarefa sobre circunferências e círculos.

<table>
<tr><th colspan="3">Atividades cognitivas</th><th>Registros mobilizados e coordenados</th><th>Ações/ocorrências</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Formação de representações</td><td rowspan="3">Apreensões perceptiva e sequencial</td><td>Representação não discursiva - figural: pontos, retas e circunferências.</td><td>Figural:
GeoGebra</td><td>Reproduzir marcas, contrastes e contornos percebidos (representações figurais).
pontos: A, B, C, D, E e F.
circunferências: c, d, e.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Representação discursiva - Língua Natural e Simbólica: caracteres, símbolos algébricos, palavras, frases, expressões simbólicas.</td><td>Língua Natural:
Protocolos de registro</td><td>Designar e descrever objetos nominalmente (língua natural);
ponto, circunferência, centro, raio, segmento, reta, círculo, medida de raio, pontos não-colineares, raio do círculo, ponto interior e exterior, casca do círculo, distância fixa, pontos alinhados, alterar medida do raio, forma uma reta, os pontos pertencem a curva, o centro da circunferência é a partir das posição dos pontos, a circunferência se transforma em uma reta.</td></tr>
<tr><td>Simbólico:
GeoGebra
e
Protocolos de registro</td><td>Empregar símbolos para designar objetos e estabelecer relações (letras, algarismos e símbolos matemáticos).
pontos: A, B, C, D, E, F.
centro: O
raio: r
segmento: AB
distância: d</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Transformação de representações</td><td>Apreensões perceptiva e operatória</td><td>Tratamento</td><td>Figural:
GeoGebra</td><td>Movimentar os pontos A, B, C, D, E e F, que deram origem a cada uma das circunferências representadas;
Girar, ampliar ou reduzir as representações figurais de circunferências;
Transladar as representações;
Alinhar os pontos D, E e F.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Apreensões perceptiva, operatória e discursiva</td><td rowspan="2">Conversão</td><td>Língua Natural para Figural</td><td>Ilustrar, na janela de visualização do GeoGebra, representações de pontos, circunferências/círculos e reta, a partir de passos e orientações fornecidos na tarefa usando diferentes ferramentas do GeoGebra.</td></tr>
<tr><td>Figural para Língua Natural</td><td>Interpretar, descrever, designar, denotar e definir, a partir dos protocolos de registro e da janela de álgebra do GeoGebra, objetos geométricos que foram representados na janela de visualização do GeoGebra de acordo com as questões propostas na tarefa, bem como elencar suas características, propriedades e relações.</td></tr>
</table>

Fonte: Autor da Pesquisa.

Destacamos que para a realização desta tarefa as equipes articularam as apreensões perceptiva, discursiva, operatória e sequencial. A primeira apreensão ocorreu quando as equipes reconheceram perceptivelmente as variações dimensionais e qualitativas (pontos - 0D, raio - 1D, reta - 1D, circunferências - 1D, círculo - 2D, formas, contornos, tamanhos, espessuras, nomes, cores etc.) das representações figurais de cada objeto geométrico representado na janela de visualização do GeoGebra. A segunda aconteceu quando as equipes teceram hipóteses, bem como caracterizaram as diferentes maneiras de formar representações de circunferências a partir das ferramentas do *software*. A terceira apreensão resultou das reconfigurações (tratamento figural) que as equipes realizaram em cada representação figural, de modo a transformá-las por meio do uso das ferramentas do GeoGebra, e a apreensão sequencial ocorreu quando as equipes reproduziram no GeoGebra as figuras solicitadas nas instruções fornecidas na tarefa.

Além disso, as equipes também revelaram, em seus registros discursivos, indicativos de confusão entre objeto geométrico e objeto numérico (raio e comprimento de raio), bem como objetos geométricos e o conteúdo de suas representações. Na perspectiva teórica de Duval (2004a, 2004b) não podemos confundir três polos constitutivos de qualquer representação, a saber: (i) o objeto representado; (ii) o conteúdo da representação, ou seja, o que uma representação específica apresenta do objeto e (iii) a forma da representação, isto é, sua modalidade ou seu registro.

Destacamos que para Duval (2011, p.100) "a mobilização de um segundo registro é necessária para poder discernir e reconhecer as unidades de sentido que são pertinentes no conteúdo das representações produzidas no primeiro registro". Nesta tarefa as unidades de sentido pertinentes ao primeiro registro (figural) foram os pontos, as circunferências, a reta e os círculos, e por meio do segundo registro (língua natural) foram reconhecidas a partir da produção escrita veiculada. Neste sentido, inferimos que a tomada de consciência das equipes, acerca dos objetos geométricos envolvidos nesta tarefa, foi favorecida quando elas coordenaram sinergicamente os registros da língua natural e o figural, o que revelou que elas reconhecem um mesmo objeto geométrico por meio de suas representações figural e escrita.

4.2. Tarefa sobre classificação de triângulos quanto às medidas dos lados e desigualdade triangular

Esta tarefa versou sobre objetos geométricos relacionados aos tipos de triângulos (classificados quanto às medidas de seus lados) e a condição de existência de triângulos a partir de segmentos de retas dados. Possibilitou, também, formar e transformar representações figurais na janela de visualização do GeoGebra a partir do uso de suas ferramentas, coordenar diferentes representações semióticas (língua natural na sua modalidade escrita, figural na sua modalidade geométrica-dinâmica e simbólica na sua modalidade algébrica), bem como articular sinergicamente as apreensões sequencial, perceptiva, operatória e discursiva vinculadas as representações figurais dos objetos geométricos abordados na tarefa, incluindo suas propriedades e relações.

O desenvolvimento da tarefa teve duração de 40 minutos e foi guiado por passos, orientações e duas questões, cujos objetivos foram formar representações de triângulos a partir de segmentos de reta, classificar triângulos quanto às medidas de seus lados, refletir sobre a condição de existência de triângulos e conjecturar o resultado conhecido como "desigualdade triangular". Participaram desta tarefa nove estudantes, organizados em cinco equipes, a saber: **E1**: A1, A2, e A8; **E2:** A3; **E3**: A4 e A7; **E4**: A5 e A6 e **E5**: A11.

Segundo os pressupostos teóricos de Duval (2004a) identificamos nesta tarefa variações visuais que foram mobilizadas pelas equipes na formação das representações figurais, das quais destacamos: **(i) dimensional** - 0D para pontos; 1D para retas, segmentos de reta, semirretas, circunferências, ângulos e triângulos; 2D para região triangular e **(ii) qualitativa** - formas, nomes, cores, tamanhos, espessuras e medidas associados a cada objeto geométrico representado.

Para iniciar a tarefa o professor apresentou uma definição que abordou os tipos de triângulos quanto às medidas de seus lados.

> ***Definição*: *Um triângulo cujos lados têm o mesmo comprimento é chamado* ***triângulo equilátero****. Se o triângulo contiver dois lados de mesmo comprimento, ele é chamado* ***triângulo isósceles.*** *Se o triângulo tem todos os lados de comprimentos distintos ele é denominado* ***triângulo escaleno****.*

Com a leitura, discussão e interpretação do conteúdo desta definição, as equipes foram orientadas pelo professor para formar, na janela de visualização do GeoGebra, as representações figurais de cada objeto geométrico contido em sua representação escrita em língua natural. Para isso, instruções foram fornecidas às equipes, conforme Quadro 23, com o objetivo de formar as representações de cada tipo de triângulo. Além do mais, as equipes responderam duas questões de natureza aberta, que de acordo com os pressupostos de Ponte (2005), assentam em ações exploratória e investigativa.

Quadro 23 - Tarefa sobre classificação de triângulos quanto às medidas dos lados e desigualdade triangular.

Passos e orientações para a formação de representações figurais no GeoGebra
i. Criar um segmento AB na área de desenho do GeoGebra. ii. Construir um triângulo equilátero com lados de comprimento igual ao comprimento do segmento AB. iii. Movimentar os pontos das extremidades do segmento AB e observar o vínculo existente entre o triângulo e o comprimento do segmento. iv. Criar um segmento FG de comprimento diferente do segmento AB. v. Construir o triângulo isósceles QRS com dois lados de comprimento igual ao do segmento AB e um lado de comprimento igual ao comprimento do segmento FG. vi. Movimentar os pontos das extremidades dos segmentos AB e FG e observar o vínculo existente entre o triângulo e o comprimento dos segmentos. vii. Criar um terceiro segmento KL de comprimento diferente dos segmentos AB e FG. viii. Construir um triângulo escaleno MNP cujos lados tenham o comprimento dos três segmentos dados. ix. Movimentar os pontos das extremidades dos segmentos AB, FG e KL e observar o vínculo existente entre o triângulo e o comprimento dos segmentos.
Questões
1. Os triângulos QRS e MNP sempre existem? 2. Conjecture um resultado que reflita a resposta dada à primeira questão.

Fonte: Adaptado de Gerônimo, Barros e Franco (2010, p.86).

Destacamos que as questões foram respondidas nos protocolos de registro e alguns arquivos do GeoGebra foram enviados para o e-mail do pesquisador em que continham as representações figurais dos tipos de triângulos definidos quanto às medidas de seus lados. De acordo com os pressupostos teóricos de Ponte (2005) esta é uma tarefa de natureza aberta, pois está assentada na exploração das ferramentas e funcionalidades do GeoGebra para a formação de representações figurais acerca dos objetos geométricos envolvidos e, na investigação sobre a condição de existência de triângulos a partir de segmentos de reta dados.

Observamos que todas as equipes formaram as representações figurais dos três tipos de triângulos abordados na definição apresentada para esta tarefa. Porém, por motivo desconhecido as equipes E1, E2 e E3 enviaram apenas o arquivo da representação do triângulo equilátero, a equipe E4 enviou arquivos contendo as representações dos triângulos equilátero e isósceles, cuja formação da representação do triângulo equilátero ocorreu de maneira análoga à construção apresentada pela equipe E1 e, por essa razão, apresentamos somente a formação da representação do triângulo isósceles desta equipe. Já a equipe E5 enviou os arquivos das representações dos triângulos isósceles e escaleno, no entanto, a formação da representação do triângulo isósceles seguiu um processo semelhante à construção realizada pela equipe E4 e, por esse motivo, apresentamos somente a formação da representação do triângulo escaleno dessa equipe.

Evidenciamos que os passos e orientações fornecidos para a formação das representações dos triângulos apenas informaram o que cada equipe deveria fazer, mas, não como fazê-las. Cada equipe por si só, ficou responsável em delinear uma estratégia e exibir na janela de visualização do GeoGebra as representações de cada tipo de triângulo definido. Os arquivos enviados pelas equipes ao e-mail do pesquisador foram analisados por meio do "protocolo de construção" do GeoGebra, que é uma janela de diálogo interativa.

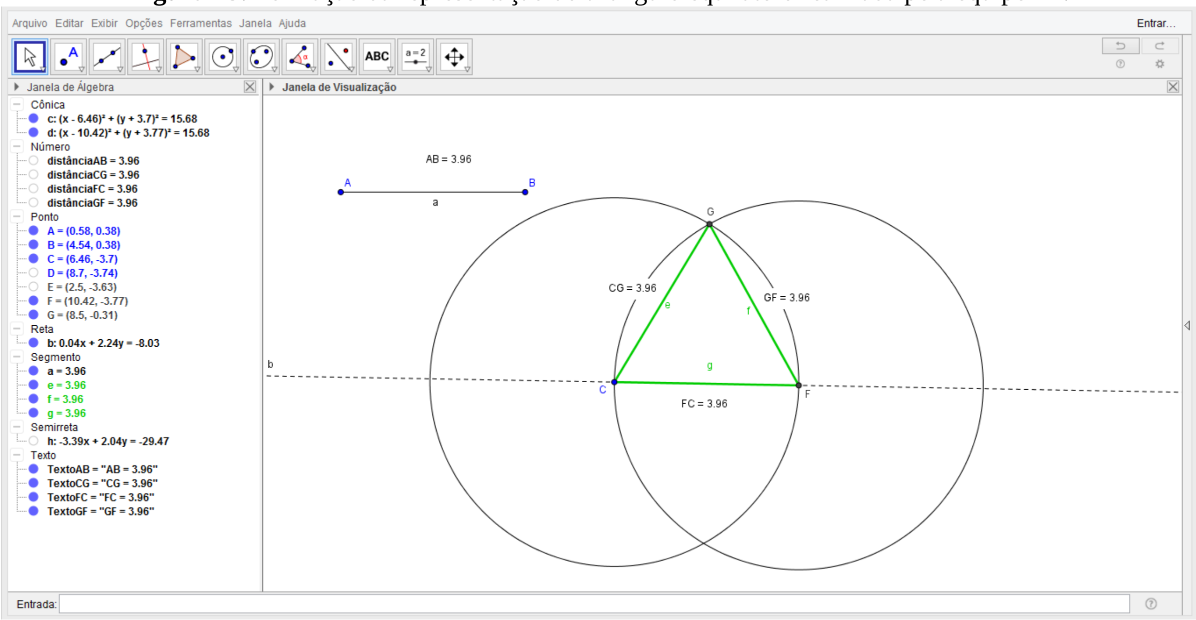
De acordo com Duval e Godin (2005) uma figura pode ser analisada pelo menos de três formas diferentes. A primeira refere-se à percepção, cuja análise centra-se nas formas ou nas unidades figurais que reconhecemos, e nas propriedades visuais dessas formas. As outras duas referem-se ao que o ensino de geometria procura desenvolver, a saber: (1) o conhecimento de propriedades geométricas que devem ser mobilizadas segundo as hipóteses dadas, ou seja, as propriedades devem prevalecer sobre as formas visualmente reconhecidas e (2) os instrumentos utilizados para reproduzir ou construir uma figura, cuja análise está relacionada aos procedimentos de reprodução ou construção que o instrumento utilizado impõe.

Destacamos que o processo coordenado pelas equipes para formar as representações de cada tipo de triângulo, está descrito sequencialmente a partir das análises e interpretações procedentes do "protocolo de construção" do GeoGebra. Sublinhamos que essa opção do *software* é de extrema relevância para aferir a validade, de um ponto de vista geométrico e cognitivo, das representações figurais formadas e transformadas na janela de visualização, pois revela o passo-a-passo de uma construção, bem como sinaliza para os conhecimentos geométricos mobilizados e coordenados pelo sujeito para obter a representação desejada.

Nesta perspectiva, recorrer ao "protocolo de construção" do GeoGebra nos permitiu analisar e interpretar: (i) quais conhecimentos geométricos foram mobilizados e coordenados pelas equipes para a formação ou transformação das representações de cada tipo de triângulo, (ii) o percurso trilhado pelas equipes acerca dos objetos geométricos adotados e representados; (iii) quais unidades figurais elementares foram utilizadas no processo de formação ou de transformação das representações e (iv) ocorrência ou não de interpretações equivocadas sobre os diferentes objetos geométricos representados.

Nesta perspectiva, apresentamos no decorrer deste texto as representações formadas pelas equipes no que diz respeito aos tipos de triângulos a partir das medidas de seus lados, bem como os passos mobilizados e coordenados que levaram a essas representações. Na Figura 15 exibimos a representação figural do triângulo equilátero realizada pela equipe E1.

Figura 15: Formação da representação do triângulo equilátero realizada pela equipe E1.



Fonte: Arquivo do GeoGebra - equipe E1.

Inferimos que a representação do triângulo equilátero formada na janela de visualização do GeoGebra pela equipe E1 ocorreu a partir da coordenação dos registros da língua natural, definição apresentada na modalidade escrita, e o figural, na sua modalidade geométrica-dinâmica, bem como a articulação entre as apreensões:

- **Perceptiva**: que favorece o reconhecimento de formas, contornos, contrastes e marcas ilustrativas, bem como as leis de organização da figura. Neste sentido a equipe E1 percebeu visualmente os vértices, nomes dos vértices, lados, medidas dos lados, reta suporte, circunferências, raios e o triângulo equilátero CGF.
- **Sequencial**: que permite reproduzir ou descrever uma figura geométrica. Nesta perspectiva a equipe fez a reprodução figural do triângulo equilátero e a descrição desta reprodução foi identificada e analisada por meio do protocolo de construção do GeoGebra - Quadro 24.
- **Operatória**: que possibilita modificar uma representação figural. Neste sentido a equipe transportou a medida do segmento AB, determinou os pontos de interseção das circunferências para obter os vértices do triângulo e movimentou os pontos A e B para observar o vínculo existente entre o triângulo e o comprimento do segmento AB.

Salientamos que esta apreensão ocorre, em muitas ocasiões, simultaneamente com a apreensão sequencial.

- **Discursiva**: que potencializa elencar hipóteses e propriedades matemáticas vinculadas à figura geométrica reproduzida. Nesta ótica, a equipe tomou como referência os lados congruentes do triângulo, pois foram construídos a partir de circunferências com raios de mesma medida.

Além disso, sublinhamos que os conhecimentos geométricos mobilizados pela equipe E1 foram: (i) representar circunferências com raios de mesmo comprimento; (ii) determinar ponto de interseção entre circunferências e (iii) representar segmentos de reta tomando os centros das circunferências e os pontos de interseção como os vértices do triângulo a ser representado.

A partir dos pressupostos teóricos de Duval (2004a) constatamos que as unidades figurais elementares mobilizadas pela equipe E1, no processo de formação da representação do triângulo equilátero, foram: pontos, segmentos de reta, reta, circunferências e triângulo. Destacamos ainda que não há ocorrência de interpretações equivocadas ou de dificuldades apresentadas por esta equipe acerca do triângulo representado na janela de visualização, fato este que potencializa a tomada de consciência sobre o que é um triângulo equilátero, bem como seu reconhecimento por meio de diferentes representações semióticas, ou seja, discursiva (em língua natural - definição, simbólica - janela de álgebra) e a não discursiva (figural - janela de visualização). No Quadro 24 apresentamos os passos mobilizados e coordenados pela equipe E1 que levaram à formação da representação do triângulo equilátero solicitada na tarefa.

Quadro 24 - Passos mobilizados e coordenados pela equipe E1 para a formação da representação do triângulo equilátero.

1. Construiu as representações dos pontos A e B;
2. Construiu a representação do segmento AB e calculou sua medida;
3. Construiu a representação da reta b que passa pelos pontos C e D e escondeu o ponto D;
4. Com centro em C e raio de comprimento igual ao comprimento do segmento AB construiu a representação da circunferência c;
5. Determinou a interseção entre a circunferência c e a reta b obtendo o ponto F;
6. Com centro em F e raio de comprimento igual ao comprimento do segmento FC construiu a representação da circunferência d;
7. Determinou a interseção entre as circunferências c e d obtendo o ponto G;
8. Construiu as representações dos segmentos CF, FG e GC para obter a representação do triângulo equilátero CFG.

Fonte: Protocolo de construção do GeoGebra - equipe E1.

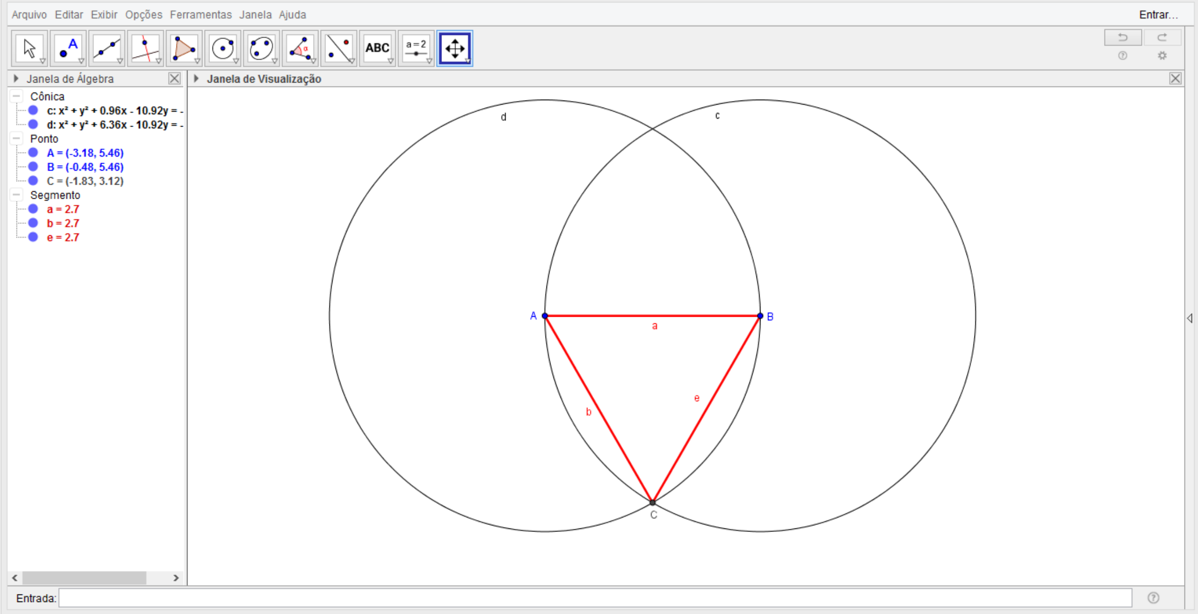
Os passos executados pela equipe E1 para a formação da representação do triângulo equilátero revelam que a partir do segmento AB e sua medida, a equipe formou uma reta suporte e, nesta reta, marcou o ponto C. O uso desta reta suporte ocorreu pelo fato de se formar nela um segmento com a mesma medida do segmento AB e, como uma reta separa o plano em dois semiplanos, o triângulo a ser representado estará em um desses semiplanos. Com centro em C a equipe representou uma circunferência com raio de comprimento igual ao comprimento do segmento AB e determinou sua interseção com a reta, obtendo o ponto F. Com centro em F representou outra circunferência com raio de comprimento igual à distância entre os pontos F e C. Como as circunferências têm raios de mesmo comprimento, a equipe determinou o ponto G, um dos pontos de interseção das circunferências e que não é colinear em relação aos pontos C e F. Como três pontos não colineares determinam um triângulo e, por construção, os pontos C, F e G são equidistantes, a equipe formou os segmentos CG, GF e FC, bem como exibiu que eles têm o mesmo comprimento, para finalmente representar o triângulo equilátero.

Salientamos que na janela de álgebra do GeoGebra (Figura 15) há a representação de uma semirreta denominada “h”. No entanto, ao analisarmos o protocolo de construção constatamos que a semirreta foi construída com origem no ponto C passando pelo ponto G e, em seguida foi escondida. Essa ação aconteceu após a formação do triângulo “CGF”, o que não comprometeu a construção solicitada.

Destacamos que a sinergia entre os conhecimentos geométricos empregados, a coordenação entre os registros da língua natural e o figural e a articulação entre as apreensões perceptiva, sequencial e discursiva sobre a representação figural exibida na janela de visualização do GeoGebra, bem como suas conversões simbólicas na janela de álgebra, potencializaram à equipe a apreensão dos objetos geométricos envolvidos em particular, o triângulo equilátero.

No Quadro 25 apresentamos, respectivamente, a representação figural e os passos mobilizados e coordenados pela equipe E2 que levaram à formação da representação do triângulo equilátero solicitado na tarefa.

Quadro 25 - Representação figural e passos mobilizados e coordenados pela equipe E2 que levaram à formação da representação do triângulo equilátero.



1. Construiu as representações dos pontos A e B;
2. Construiu a representação do segmento AB;
3. Com centro em B e raio igual ao comprimento do segmento AB construiu a representação da circunferência c;
4. Com centro em A e raio igual ao comprimento do segmento AB construiu a representação da circunferência d;
5. Determinou a interseção entre as circunferências c e d obtendo o ponto C;
6. Construiu as representações dos segmentos AC e BC para obter a representação do triângulo equilátero ABC.

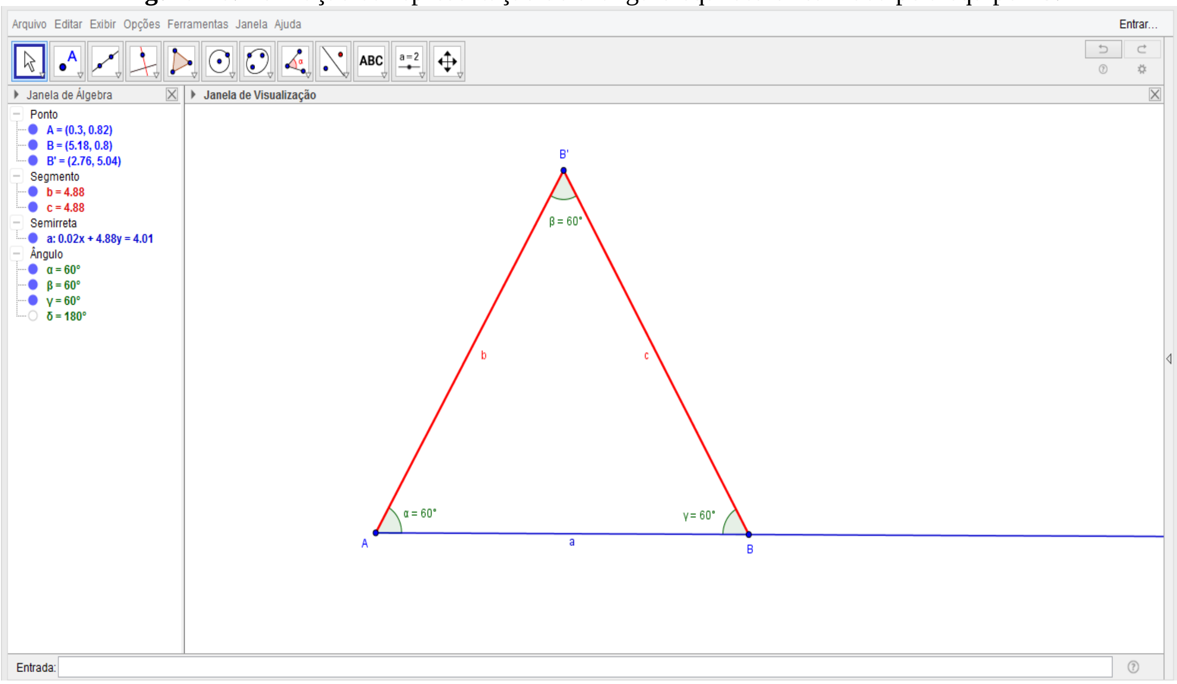
Fonte: Protocolo de construção do GeoGebra - equipe E2.

Destacamos que o processo desenvolvido pela equipe E2 para a formação da representação do triângulo equilátero é semelhante ao da equipe E1, pois os conhecimentos geométricos mobilizados, a coordenação entre os registros da língua natural e o figural e a articulação entre as apreensões perceptiva, sequencial e discursiva seguem à mesma linha de raciocínio, pois isso pode ser observado pelas representações figurais e suas correspondentes na janela de álgebra, como também pelo percurso aferido via o protocolo de construção. Destacamos que a diferença entre as representações formadas por essas equipes está no fato de que a equipe E2 tomou o segmento de reta AB como referência para ser um dos lados do triângulo equilátero, já a equipe E1 tomou uma reta de modo a transportar a medida do segmento AB e assim obter os lados congruentes do triângulo. No entanto, essas diferenças apresentadas pelas equipes não implicaram na ausência de objetivação, pois esta ocorreu, segundo os pressupostos teóricos de Duval (2004a), em virtude da coordenação entre os registros da língua natural e o figural.

Salientamos que o processo cognitivo apresentado por ambas as equipes revela que, mesmo localizadas em posições diferentes do laboratório de informática e sem haver a troca de ideias entre si, existe uma aproximação de conhecimentos geométricos mobilizados e estratégias que permitem formar representações figurais corretas no GeoGebra, potencializadas por uma variedade de ferramentas e funcionalidades, bem como a integração simultânea de diferentes representações.

Na Figura 16 apresentamos a representação do triângulo equilátero realizada pela equipe E3.

Figura 16: Formação da representação do triângulo equilátero realizada pela equipe E3.



Fonte: Arquivo do GeoGebra - equipe E3.

A representação construída pela equipe E3 aconteceu por meio da coordenação dos registros da língua natural e figural, bem como pela articulação entre as apreensões **perceptiva** (a equipe percebeu visualmente os vértices, nomes dos vértices, lados, medidas dos lados, semirreta, ângulos, medidas de ângulos e o triângulo equilátero ABB'), **sequencial** (quando a equipe reproduziu figuralmente o triângulo equilátero e a descrição desta reprodução foi identificada e analisada por meio do protocolo de construção do GeoGebra - Quadro 26), **operatória** (quando a equipe determinou o ponto B' por meio da rotação do ponto B pelo ângulo de medida 60° e calculou as medidas dos ângulos $B\widehat{A}B'$, $A\widehat{B'}B$ e $B'\widehat{B}A$) e **discursiva** (quando a equipe reconheceu por meio de propriedades geométricas que os ângulos do triângulo representado têm a mesma medida).

Destacamos que a formação da representação figural do triângulo equilátero apresentada pela equipe E3 seguiu um percurso diferente do conteúdo da definição dada e as instruções fornecidas, pois o conhecimento geométrico mobilizado pela equipe foi sobre medidas dos ângulos internos do triângulo equilátero, ou seja, um triângulo que tem cada ângulo medindo 60°. Neste caso, salientamos que foi utilizado um resultado da geometria, que é uma consequência da definição de triângulo equilátero e outros resultados que ainda viriam a ser apresentados.

A partir dos pressupostos teóricos de Duval (2004a), constatamos que a formação da representação do triângulo equilátero apresentada pela equipe E3 mobilizou as seguintes unidades figurais elementares: pontos, segmentos de reta, semirreta, ângulos e triângulo. Além disso, destacamos que não há ocorrência de interpretações equivocadas ou de dificuldades apresentadas pela equipe acerca da representação construída na janela de visualização, mesmo não obtendo a representação do segmento AB, pois parece que sua apreensão perceptiva da semirreta representada, com origem no ponto A e passando pelo ponto B, permite "ver" a representação desse segmento e, também, as propriedades visuais das formas exibidas.

Como os pontos A e B pertencem à mesma semirreta, esses pontos representam as extremidades do segmento AB, e como o ponto B' foi criado por meio da rotação do ponto B pelo ângulo de medida 60°, a equipe construiu os segmentos AB' e BB' obtendo o triângulo ABB', em que explicitou as medidas de seus ângulos de 60° para representar o triângulo equilátero.

Destacamos que a equipe E3 mobilizou e coordenou ideias geométricas e representações diferentes em relação àquelas das equipes E1 e E2 para representar figuralmente o triângulo equilátero e isso, segundo os pressupostos teóricos de Duval (2004a, 2004b, 2011), favorece a objetivação e o reconhecimento de um mesmo objeto geométrico por meio de suas diferentes representações.

No Quadro 26 apresentamos os passos mobilizados e coordenados pela equipe E3 que levaram à formação da representação do triângulo equilátero solicitado na tarefa.

Quadro 26 - Passos mobilizados e coordenados pela equipe E3 para a formação da representação do triângulo equilátero.

1. Construiu as representações dos pontos A e B;
2. Construiu a representação da semirreta a com origem no ponto A e passando pelo ponto B;
3. Construiu a representação do ponto B' por meio da rotação do ponto B pelo ângulo de medida 60°;
4. Calculou e mostrou a medida do ângulo $B\hat{A}B'$ (60°) clicando nos pontos B, A e B', respectivamente;
5. Construiu a representação do segmento AB';
6. Construiu a representação do segmento B'B;
7. Calculou as medidas dos ângulos $A\widehat{B'}B$ e $B'\hat{B}A$ (60°) clicando nos pontos A, B' e B e B', B e A, respectivamente.

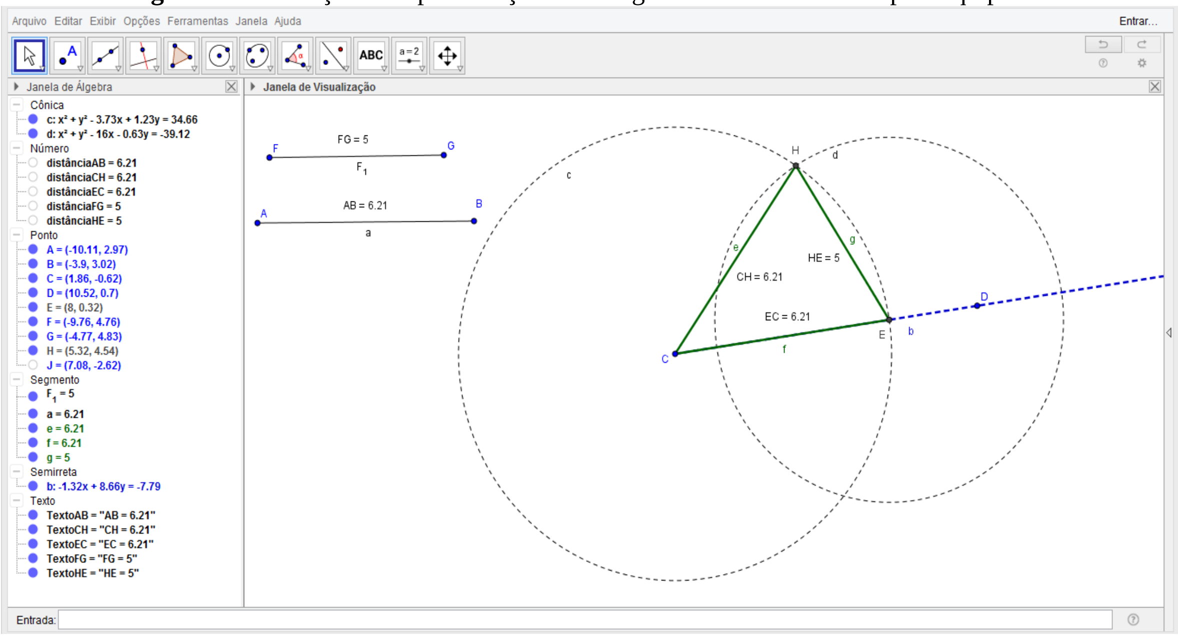
Fonte: Protocolo de construção do GeoGebra - equipe E3.

Os procedimentos adotados pela equipe E3 para a formação da representação do triângulo equilátero revelam que, a partir da criação dos pontos A e B, a equipe construiu a semirreta com origem no ponto A. Inferimos que a representação da semirreta está relacionada à definição de ângulo, reunião de duas semirretas com mesma origem. Após a representação da semirreta a equipe determinou o ponto B' a partir da rotação do ponto B pelo ângulo de medida 60° (sentido anti-horário), em que usou a ferramenta "rotação em torno de um ponto: ponto-centro-ângulo de rotação". No entanto, *a priori* à representação dos segmentos AB' e BB' a equipe calculou e mostrou a medida do ângulo $\mathrm{B\hat{A}B'}$ (60°), por meio da ferramenta "ângulo" em que clicou nos pontos B, A e B', respectivamente. A partir das medidas dos ângulos $\mathrm{A\widehat{B'}B}$ e $\mathrm{B'\hat{B}A}$ (60°) a equipe concluiu a representação figural do triângulo equilátero, uma vez que este triângulo tem como propriedade ângulos internos congruentes, ou seja, cada ângulo mede 60º.

Destacamos que esta equipe seguiu uma orientação diferente das demais para representar figuralmente o triângulo equilátero, pois o representou a partir das medidas dos ângulos internos, não respeitando assim a definição de triângulo equilátero dada, portanto, o objetivo deste item da tarefa, para esta equipe, não foi cumprido, pois não demonstrou apreensão sobre a definição. No entanto, este fato não revelou um desconhecimento da equipe sobre triângulo equilátero, pois para sua representação figural na janela de visualização do GeoGebra considerou outros conceitos e resultados geométricos que seriam ainda estudados na disciplina. Este fato é importante ser destacado, pois ao se formular tarefas abertas de cunho exploratório, tal como definidos por Ponte (2005), é comum que os estudantes realizem ações diferentes daquelas esperadas a partir de conceitos e resultados envolvidos no contexto da tarefa.

Na Figura 17 apresentamos a representação do triângulo isósceles realizada pela equipe E4.

Figura 17: Formação da representação do triângulo isósceles realizada pela equipe E4.



Fonte: Arquivo do GeoGebra - equipe E4.

Inferimos que a representação do triângulo isósceles formada na janela de visualização do GeoGebra pela equipe E4 ocorreu por meio da coordenação dos registros da língua natural (definição apresentada na modalidade escrita) e o figural, na sua modalidade geométrica-dinâmica, bem como a articulação entre as apreensões perceptiva, sequencial e discursiva.

A partir dos pressupostos teóricos de Duval (2004a), destacamos que a passagem de um registro para o outro e as modificações realizadas no registro de chegada potencializam a tomada de consciência sobre os objetos geométricos, em particular o triângulo isósceles, como também reconhecê-lo por meio de diferentes representações semióticas, ou seja, a discursiva (em língua natural - definição; simbólica - janela de álgebra do GeoGebra) e a não discursiva (figural - janela de visualização do GeoGebra).

Além disso, sublinhamos que os conhecimentos geométricos estabelecidos pela equipe foram: (i) representar segmentos de reta de comprimentos distintos; (ii) representar circunferências com raios de comprimentos iguais aos comprimentos dos segmentos de retas; (iii) determinar o ponto de interseção entre circunferências e entre semirreta e circunferência; (iv) construir segmentos de reta usando os centros das circunferências e o ponto de interseção como sendo os vértices do triângulo a ser representado.

A partir dos pressupostos teóricos de Duval (2004a), constatamos que as unidades figurais elementares mobilizadas pela equipe E4 no processo de formação da representação do triângulo isósceles foram: pontos, segmentos de reta, semirreta, circunferências e triângulo.

No Quadro 27 apresentamos os passos mobilizados e coordenados pela equipe E4 que levaram à formação da representação do triângulo isósceles solicitado na tarefa.

Quadro 27 - Passos mobilizados e coordenados pela equipe E4.

1. Construiu as representações dos pontos F e G;
2. Construiu a representação do segmento FG;
3. Construiu as representações dos pontos A e B;
4. Construiu a representação do segmento AB;
5. Construiu a representação do ponto C;
6. Construiu a representação da circunferência c de centro C e com raio de comprimento igual ao comprimento do segmento AB;
7. Construiu a representação do ponto D;
8. Construiu a representação da semirreta com origem em C passando por D;
9. Determinou a interseção entre a semirreta b e a circunferência c obtendo o ponto E;
10. Com centro no ponto E e raio de comprimento igual ao comprimento do segmento FG, construiu a representação da circunferência d;
11. Determinou a interseção entre as circunferências c e d obtendo o ponto H;
12. Construiu as representações dos segmentos CH, EC e HE para obter a representação do triângulo isósceles CEH que corresponde ao triângulo QRS isósceles solicitado nas orientações fornecidas.

Fonte: Protocolo de construção do GeoGebra - equipe E4.

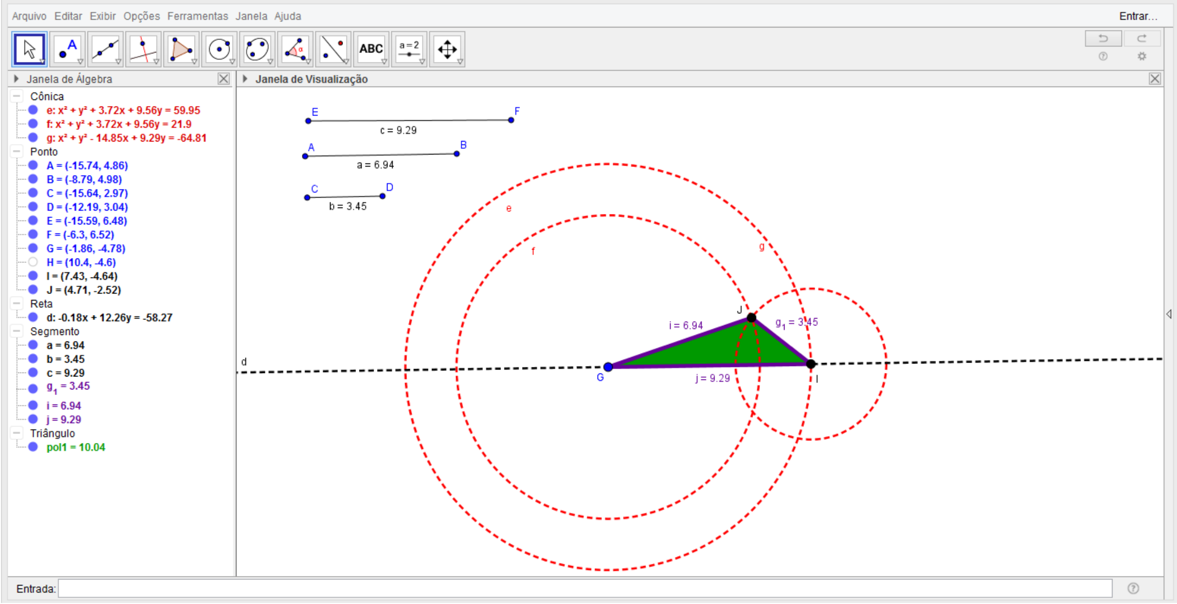
O percurso trilhado pela equipe E4 para formar a representação do triângulo isósceles foi guiado a partir da construção dos segmentos de reta AB e FG. Com esses objetos representados, a equipe construiu o ponto C em um local arbitrário da área de desenho do GeoGebra em que assumiu este ponto como o centro de uma circunferência de raio com medida igual ao comprimento do segmento AB. Construiu na sequência uma semirreta com origem no ponto C e que passa pelo D, determinando o ponto E por meio da interseção entre a circunferência e a semirreta. Destaca-se que a equipe utilizou a semirreta como sendo um suporte para obter um dos lados do triângulo isósceles. Com centro ponto E, a equipe construiu a circunferência de raio com medida igual ao comprimento do segmento FG, determinando o ponto H, obtido pela interseção das circunferências. Com esse procedimento a equipe representou três pontos não colineares C, E e H, cujas distâncias entre os pontos C e E e os pontos C e H são iguais à medida do segmento AB, e a distância entre os pontos E e H equivale à medida do segmento FG. A partir daí a equipe representou os segmentos CH, EC e HE, e obteve a representação do triângulo isósceles, evidenciando em sua representação figural que os segmentos CH e EC têm comprimentos iguais e o segmento HE, tem medida diferente.

O que esta equipe fez, a partir dos pressupostos de Duval (2004a), foi exibir uma legenda para o objeto representado (triângulo isósceles), pois para este autor é necessária uma manifestação verbal (em língua natural ou simbólica) para vincular a figura ao objeto matemático que se pretende representar.

Destacamos que as ações controladas pela equipe E4 durante o desenvolvimento da tarefa estabelecem conexões entre conhecimentos geométricos, o registro da língua natural (passos e orientações e a definição), o registro figural (janela de visualização do GeoGebra), as apreensões **perceptiva** (quando a equipe percebeu visualmente os segmentos de reta, vértices, nomes dos vértices, lados, as medidas dos lados, a semirreta, as circunferências e o triângulo isósceles CEH), **sequencial** (quando a equipe fez a reprodução figural do triângulo isósceles, cuja descrição dos procedimentos que levaram à essa figura foi identificada e analisada por meio do protocolo de construção do GeoGebra - Quadro 27), **operatória** (quando a equipe transportou medidas de segmento, determinou interseção de circunferências e movimentou os pontos das extremidades dos segmentos AB e FG de modo a observar o vínculo existente entre o triângulo isósceles e o comprimento de cada segmento) e **discursiva** (quando a equipe reconheceu por meio de propriedades geométricas que o triângulo representado tem dois lados congruentes) e as conversões simbólicas exibidas simultaneamente na janela de álgebra.

Inferimos que essa sinergia de ações cognitivas potencializou a equipe E4 tomar consciência (objetivação) sobre os diferentes objetos geométricos elencados na tarefa. Na Figura 18 apresentamos a representação do triângulo escaleno realizada pela equipe E5.

Figura 18: Formação da representação do triângulo escaleno realizada pela equipe E5.



Fonte: Arquivo do GeoGebra - equipe E5.

Inferimos que a representação do triângulo escaleno, formada na janela de visualização do GeoGebra pela equipe E5, desenvolveu-se por meio da coordenação dos registros discursivo (definição, passos e orientações) e o não discursivo (figural), pela articulação entre as apreensões **perceptiva** (quando a equipe levou em consideração a percepção visual dos segmentos de reta, vértices, nomes dos vértices, lados, as medidas dos lados, a reta, as circunferências e o polígono - triângulo escaleno GIJ), **sequencial** (quando a equipe reproduziu figuralmente o triângulo escaleno e a descrição desta reprodução foi identificada e analisada por meio do protocolo de construção do - Quadro 28), **operatória** (quando a equipe transportou as medidas de cada um dos segmentos representados inicialmente, determinou o ponto de interseção entre circunferências e movimentou as extremidades dos segmentos AB e CD e EF para observar o vínculo existente entre o triângulo escaleno representado e o comprimento de cada um dos segmentos) e **discursiva** (quando a equipe reconheceu por meio de propriedades geométricas que o triângulo representado tem três lados com medidas diferentes) vinculadas à representação figural do triângulo escaleno, bem como sobre a aplicação de conhecimentos geométricos.

A partir dos pressupostos teóricos de Duval (2004a), constatamos que é durante o processo de coordenação entre diferentes registros que emerge a tomada de consciência (objetivação). Nesta perspectiva, inferimos que a significação do triângulo escaleno nesta tarefa ocorreu quando há o reconhecimento desse objeto geométrico por meio de suas diferentes representações semióticas, entre elas a representação escrita por meio da língua natural (definição que tratou sobre as medidas dos lados do triângulo), a representação simbólica exibida na janela de álgebra do GeoGebra (medidas dos lados) e a representação figural, com suas legendas, formada na janela de visualização do GeoGebra.

Além de tomar consciência, destacamos que os conhecimentos geométricos articulados pela equipe E5 foram: (i) representar segmentos de reta com comprimentos distintos; (ii) representar circunferências de raios com medidas iguais às medidas dos segmentos de reta; (iii) representar reta e determinar as interseções entre circunferência e reta e entre circunferências de forma coordenada e específica; (iv) construir a representação figural de triângulo a partir dos pontos de interseção obtidos utilizando a ferramenta “polígono”.

Segundo os pressupostos teóricos de Duval (2004a), as unidades figurais elementares utilizadas pela equipe E5 durante o processo de formação da representação figural do triângulo escaleno foram: pontos, segmentos de reta, reta, circunferências e triângulo.

No Quadro 28 apresentamos os passos mobilizados e coordenados pela equipe E5 que levaram à formação da representação do triângulo escaleno solicitado na tarefa.

Quadro 28 - Passos mobilizados e coordenados pela equipe E5.

1. Construiu as representações dos pontos A e B;
2. Construiu a representação do segmento AB;
3. Construiu as representações dos pontos C e D;
4. Construiu a representação do segmento CD;
5. Construiu as representações dos pontos E e F;
6. Construiu a representação do segmento EF;
7. Construiu a representação da reta d pelos pontos G e H, e escondeu o ponto H;
8. Construiu a representação da circunferência e com centro em G e raio com comprimento igual ao comprimento do segmento EF;
9. Construiu a representação da circunferência f com centro em G e raio com comprimento igual ao comprimento do segmento AB;
10. Determinou a interseção entre a reta d e a circunferência e obtendo o ponto I;
11. Construiu a representação da circunferência g de centro em I e raio com comprimento igual ao comprimento do segmento CD;
12. Determinou a interseção entre as circunferências f e g obtendo o ponto J;
13. Construiu, por meio da ferramenta “polígono”, a representação do triângulo IJG escaleno que corresponde ao triângulo MNP solicitado nas orientações.

Fonte: Protocolo de construção do GeoGebra - equipe E5.

A trajetória delineada pela equipe E5 para utilização do registro figural do triângulo escaleno foi direcionada a partir da construção dos segmentos de reta AB, CD e EF. Além disso, em um local arbitrário da área de desenho do GeoGebra, a equipe representou uma reta passando pelos pontos G e H, com o objetivo de que um dos lados do triângulo escaleno pertencesse a esta reta. A partir do ponto G, construiu duas circunferências concêntricas (no ponto G), mas com raios de mesmas medidas que as dos segmentos EF e AB, respectivamente. Em seguida determinou o ponto I, que representa a interseção entre a circunferência "e" de raio de maior comprimento e a reta. A partir do ponto I construiu a circunferência "g" de raio de menor comprimento e, assim, determinou o ponto J, obtido pela interseção entre esta circunferência e a circunferência "f", de raio de comprimento igual ao comprimento do segmento AB. Esse procedimento permitiu a equipe representar três pontos não colineares, condição esta que permite formar um triângulo. Enfim, por meio dos pontos G, I e J a equipe E5 construiu a representação de um triângulo escaleno usando a ferramenta "polígono".

De acordo com Moretti e Brandt (2015), uma figura geométrica deve ser interpretada por meio da confluência das apreensões perceptiva e discursiva, prevalecendo na representação figural as indicações verbais e não as formas destacadas ou propriedades visuais dessas formas (DUVAL, 2004a; DUVAL, GODIN, 2005). Nesta perspectiva, a equipe E5 concluiu a representação do triângulo escaleno, em que mobilizou as designações verbais tais como medidas dos lados e nome dos vértices.

Observamos que para cada uma das representações figurais solicitadas nesta tarefa, a partir da definição que classifica triângulos tomando como referência as medidas de seus lados, as equipes mobilizaram e coordenaram diferentes conhecimentos geométricos, bem como diferentes ferramentas do GeoGebra com o objetivo de exibir na sua janela de visualização os diferentes objetos geométricos abarcados pela definição dada. Inferimos ainda que as equipes reconheceram os objetos geométricos envolvidos na tarefa por meio de suas diferentes representações semióticas (escrita em língua natural, simbólica e figural), o que favorece, segundo os pressupostos teóricos de Duval (2004a, 2011), a apreensão dos objetos geométricos estudados.

Ao concluírem as representações figurais dos triângulos equilátero, isósceles e escaleno, as equipes responderam duas questões propostas na tarefa, as quais versaram sobre a condição de existência de triângulos a partir de segmentos de reta dados bem como enunciar um resultado geral sobre essa condição de existência.

As respostas apresentadas pelas equipes **à primeira questão** (Os triângulos QRS e MNP sempre existem?) foram:

Equipe E1: *“Sim, pois em um plano sempre é possível criar uma reta suporte e um segmento de reta, e assim determinar um triângulo”.*

Equipe E2: *“O triângulo QRS sempre poderá ser construído, pois poderemos modificar o ângulo formado entre os lados iguais de forma a obter os ângulos necessários (formados também pelo lado diferente) para construir o triângulo. O triângulo MNP nem sempre poderá ser construído, pois dependerá das medidas dos segmentos. Poderá acontecer um caso em que não existirá ponto de interseção entre as circunferências com raio igual às medidas dos segmentos”.*

Equipe E3: *“Não”.*

Equipe E4: *“Os triângulos nem sempre existem”.*

Equipe E5: *“Não, nem sempre”.*

Mesmo que nesta questão não tenha sido solicitado que as equipes justificassem suas respostas, as equipes E1 e E2 apresentaram seus argumentos sobre a possibilidade ou não dos triângulos isósceles (QRS) e escaleno (MNP) existirem. Salientamos que ao concluírem as representações de cada um desses triângulos as equipes foram instigadas a movimentar (transladar) os pontos extremos dos segmentos de reta, que permitiram formar as representações de tais triângulos com o intuito de observar o vínculo existente entre os triângulos e os comprimentos dos segmentos. As equipes E3, E4 e E5 não apresentaram voluntariamente uma justificativa, no entanto, a partir das respostas apresentadas por essas equipes, inferimos que realizaram operações figurais, ou seja, alteraram as posições dos pontos das extremidades dos segmentos representados inicialmente para poder perceber as transformações ocorridas nos triângulos isósceles e escaleno.

A resposta apresentada pela equipe E1 enfatizou que os triângulos isósceles e escaleno sempre existem, mesmo quando se movimenta os pontos extremos dos segmentos. Neste sentido, destacamos que a exploração no *software* realizada pela equipe ao movimentar os pontos sugeridos nas orientações, não foi suficiente para que ela pudesse perceber a dependência de existência dos triângulos em relação às medidas dos segmentos. Além disso, a argumentação exteriorizada evidencia a dependência da apreensão perceptiva da figura e das propriedades visuais das formas e isso, segundo os pressupostos teóricos de Duval (2009), explicita que a compreensão da equipe ficou condicionada e limitada às formas da representação figural utilizada na janela de visualização do GeoGebra, uma vez que para ela, em um plano, sempre é possível formar uma reta e um segmento de reta e a partir desses objetos geométricos forma-se um triângulo. No entanto, essa constatação é verdadeira quando o triângulo é equilátero.

A equipe E2 respondeu que o triângulo isósceles (QRS) "*sempre poderá ser construído*" e o triângulo escaleno (MNP) "*nem sempre poderá ser construído*". A justificativa apresentada pela equipe E2 sobre a existência do triângulo isósceles, está ancorada na medida do ângulo formado pelos lados congruentes do triângulo, ou seja, essa medida será alterada sempre que for modificado os comprimentos dos segmentos AB e FG. Porém, parece que esta equipe não observou que dependendo das medidas desses segmentos o ângulo a qual ela se referiu não é formado e, portanto, não há formação do triângulo isósceles. Inferimos que esta justificativa está vinculada a duas possibilidades: uma exploração insuficiente dos comprimentos dos segmentos de reta construídos inicialmente, pois dependendo do nível de mudança dos comprimentos de tais segmentos pode não haver a formação do triângulo isósceles, e isso se verifica quando a soma das medidas de dois lados for menor do que ou igual a medida do terceiro lado. A maneira que a equipe construiu o triângulo isósceles, talvez tenha impedido a percepção do fato, o que não podemos comprovar, já que o arquivo desta construção não foi enviado para o pesquisador.

Em relação ao triângulo escaleno a justificativa exteriorizada pela equipe está correta, pois evidenciou, por meio da apreensão discursiva, que dependendo do comprimento de um segmento (apreensão operatória) dado não há interseção entre duas das três circunferências (apreensão perceptiva) e isso implica na não formação do triângulo escaleno, o que revela a tomada de consciência da equipe sobre a condição de existência do triângulo MNP. Salientamos também que as mudanças dos comprimentos dos segmentos de reta formados inicialmente ocorreram em virtude da operação que permitiu transladar (reconfigurar) os pontos das extremidades desses segmentos. De acordo com Duval (2004a, 2012a) a reconfiguração é uma operação fundamental no campo das figuras geométricas, pois permite reorganizar uma figura tanto mental quanto material ou instrumentalmente.

Sublinhamos que o conteúdo das respostas apresentadas pelas equipes E3, E4 e E5 enfatiza que os triângulos isósceles (QRS) e escaleno (MNP) nem sempre existem, mesmo a equipe E3 relatando apenas "*não*". Inferimos que as respostas dadas por essas equipes revelam que elas observaram que alterar o comprimento dos segmentos formados inicialmente, quando se arrasta os pontos de suas extremidades pela janela de visualização do GeoGebra, implica na formação ou não dos triângulos, ou seja, conforme for o comprimento de um dos segmentos existe ou não os triângulos. Nesta perspectiva, avaliamos que essas equipes tomaram consciência sobre a existência de triângulos (escaleno ou isósceles) vinculados aos comprimentos dos segmentos de reta dados.

As respostas apresentadas pelas equipes **à segunda questão** (Conjecture um resultado que reflita a resposta dada à primeira questão) foram:

Equipe E1: *"De maneira análoga a questão 1, dado um plano π, um segmento de reta e uma reta suporte, esses dois pertencentes a π sempre é possível construir um triângulo".*

Equipe E2: Não conjecturou.

Equipe E3: *"Quando a soma de dois lados de um triângulo é maior que a medida do lado que sobrou o triângulo não existe".*

Equipe E4: *"Quando a medida de um lado do triângulo ultrapassa a soma das medidas dos outros dois lados do triângulo ele deixa de existir. Um dos resultados é a desigualdade triangular".*

Equipe E5: *"O triângulo existirá somente se a soma dos lados menores for maior que o lado maior, ou seja, para quaisquer lados a, b, c a soma $a + b$ deve ser maior que c. Corrigindo: segmentos a, b, c, não lados".*

Esta questão teve por objetivo que, após a resposta a questão anterior, que as equipes conseguissem conjecturar o resultado conhecido como desigualdade triangular. Um possível enunciado para tal conjectura é: "*em todo triângulo, a soma dos comprimentos de dois lados é maior que o comprimento do terceiro lado*" (GERÔNIMO, BARROS, FRANCO, 2010, p. 104). Observamos que a desigualdade triangular fornece um resultado que impede a formação de triângulos com quaisquer medidas de lados.

A conjectura apresentada pela equipe E1 revela que com um plano, uma reta e um segmento de reta é possível formar um triângulo. Destacamos que esta conjectura reflete a resposta dada na primeira questão, no entanto, é uma conjectura insuficiente, pois o significado de seu conteúdo permite apenas formar triângulos equiláteros, o que está correto, mas não possibilita a formação de triângulos isósceles ou escalenos. Inferimos que esta equipe parece não ter refletido sobre os segmentos de reta dados nas instruções fornecidas na tarefa para representar figuralmente os triângulos escaleno e isósceles, uma vez que esperava-se que a equipe observasse que a possibilidade de construção de tais triângulos estava vinculada às medidas dos segmentos representados na janela de visualização do GeoGebra. Observamos que a conjectura insuficiente apresentada pela equipe E1 foi formulada a partir da experimentação insuficiente realizada com as ferramentas do *software*. Assim, destacamos a ocorrência de uma apreensão perceptiva equivocada devido à utilização da mídia, o que também pode levar a uma objetivação ambígua.

A equipe E2 não apresentou uma conjectura conforme foi solicitado na segunda questão, mesmo respondendo na primeira questão que a formação do triângulo escaleno depende do comprimento dos segmentos construídos inicialmente. Tal fato representa uma lacuna para a análise e interpretação, pois uma questão sem resposta nada pode dizer o que a equipe compreendeu sobre os objetos geométricos envolvidos.

A equipe E3 apresentou uma conjectura textualmente equivocada, pois o conteúdo de sua representação discursiva, escrita em língua natural, evidencia que o "*triângulo não existe*" quando a soma das medidas de dois de seus lados é maior do que a medida do terceiro lado. Acreditamos que foi uma distração da equipe ao inserir a palavra "não", pois procurou, em sua conjectura, relacionar as medidas dos segmentos representados inicialmente com a possibilidade de formação de triângulos. Destacamos que se suprimirmos a palavra "não" a ideia matemática da conjectura permanece correta, mesmo que a equipe tenha escrito "soma de dois lados", pois a dificuldade em coordenar o registro em língua natural, na sua modalidade escrita, para designar os diferentes objetos matemáticos envolvidos pode ter suscitado tal equívoco.

A equipe E4 apresentou uma conjectura correta, pois o conteúdo de seu enunciado explicita que não há triângulo quando a medida de um dos lados do triângulo é maior do que a soma das medidas dos outros dois lados. Inferimos que esta equipe tomou consciência (objetivação) do vínculo existente entre os triângulos (dependentes) e o comprimento dos lados (independentes). No entanto, esta equipe poderia considerar ainda o caso em que a medida de um lado é igual à soma das medidas dos outros dois.

A conjectura apresentada pela equipe E5 está correta. Em sua resposta revela, por meio da integração e coordenação simultânea dos registros em língua natural e simbólico, que o triângulo existe quando a soma das medidas de dois de seus lados é maior do que a medida do terceiro lado registrado por "$a+b$ *deve ser maior que* c". Inicialmente a equipe particularizou sua conjectura ao fazer referência às medidas de lados menor e maior, e não usou a expressão “medida”, no entanto, destacamos que registrou simbolicamente “a”, “b” e “c” para referenciar as medidas de tais segmentos. Inferimos a ocorrência de objetivação por esta equipe sobre o significado da desigualdade triangular, pois a partir dos pressupostos teóricos de Duval (2004a), observamos que a equipe coordenou diferentes registros de representação semiótica para evidenciar sua apreensão sobre a condição de existência de triângulos a partir de medidas de segmentos dados.

No Quadro 29 apresentamos uma síntese das respostas apresentadas pelas equipes à tarefa sobre classificação de triângulos quanto às medidas dos lados e desigualdade triangular em que foi possível identificar os tipos de apreensões e transformações, a ocorrência de objetivação e as dificuldades das equipes.

Quadro 29 - Síntese das respostas apresentadas à tarefa sobre classificação de triângulos quanto às medidas dos lados e desigualdade triangular.

<table>
<tr><th>Questão</th><th>Apreensão</th><th>Tratamento</th><th>Conversão</th><th>Objetivação</th><th>Dificuldades</th></tr>
<tr><td>Q1</td><td rowspan="2">Sequencial
Perceptiva
Operatória
Discursiva</td><td rowspan="2">Registro Figural:
Transportar medidas de segmentos por meio de circunferências.
Determinar os pontos de interseção entre circunferências, entre reta e circunferência e entre semirreta e circunferência para obter os vértices dos triângulos.
Calcular as medidas dos ângulos internos do triângulo equilátero (E3).
Movimentar os pontos das extremidades dos segmentos de reta que permitiram a formação dos triângulos.</td><td rowspan="2">Registro da língua natural para o registro figural.

Registro figural para o registro da língua natural.</td><td>Tomar consciência que os triângulos isósceles (E3, E4 e E5) e escaleno (E2, E3, E4 e E5) só podem ser formados a partir do vinculo existente com as medidas dos segmentos formados, ou seja, dependendo das medidas de tais segmentos não há formação de triângulos.</td><td>Reconhecer que os triângulos isósceles (E1 e E2) e escaleno (E1) nem sempre podem ser formados, uma vez que para sua formação há uma relação de dependência das medidas dos segmentos formados inicialmente.</td></tr>
<tr><td>Q2</td><td>Tomar consciência da condição de existência de triângulos a partir das medidas dos segmentos e da relação estabelecida pela desigualdade triangular (E3, E4 e E5).</td><td>Não considerar que as medidas dos segmentos de reta interferem na formação dos triângulos (E1).
Deixar de responder pode ocultar a dificuldade em estabelecer uma relação entre as medidas de três segmentos para a formação de um triângulo (E2).</td></tr>
</table>

Fonte: Autor da pesquisa.

Sublinhamos que a apreensão dos objetos geométricos envolvidos nesta tarefa (pontos, retas, segmentos de retas, semirretas, circunferências, ângulos e triângulos) ocorreu sinergicamente em virtude da coordenação entre os registros da língua natural, figural e simbólico, da articulação entre as apreensões sequencial, perceptiva, operatória e discursiva, e também quando as equipes tomaram consciência das propriedades e relações entre objetos geométricos e numéricos.

Destaca-se que algumas conversões realizadas do registro figural para o registro da língua natural revelaram dificuldades das equipes em reconhecer o vínculo existente entre as medidas dos segmentos de reta formados inicialmente com a formação dos triângulos isósceles e escaleno.

Inferimos também a influência do GeoGebra, a partir do uso de suas ferramentas, para a realização desta tarefa, pois o *software* contribuiu para que as equipes cumprissem as três atividades cognitivas relacionadas a qualquer representação semiótica, em que destacamos:

1. Formar representações figurais de pontos, segmentos de reta, retas, semirretas, circunferências, ângulos e triângulos na janela de visualização e, de modo automático, suas respectivas correspondências na janela de álgebra, permitiu que as equipes articulassem simultaneamente as apreensões perceptiva e discursiva das formas, marcas, contrastes e contornos percebidos e associados a cada um dos objetos geométricos representado.
2. Tratar as representações figurais na janela de visualização favoreceu as equipes articular a apreensão operatória com as apreensões perceptiva e discursiva das figuras, uma vez que puderam transportar medidas de segmentos, determinar pontos de interseção entre reta e circunferência, entre semirreta e circunferência e entre circunferências de modo a obter os vértices dos triângulos e movimentar (alterar a posição) os pontos extremos dos segmentos (pontos livres), que permitiram a representação dos triângulos equilátero, isósceles e escaleno com intuito de perceber os vínculos existentes.
3. Converter as representações dos objetos geométricos elencados na definição dada e nas instruções (registro discursivo - língua natural e simbólico) para representações figurais na janela de visualização (registro não discursivo - figural), e o processo inverso, converter representações formadas e tratadas no registro figural para o registro da língua natural (protocolos de registro) e simbólico (janela de álgebra) com o objetivo de interpretar, descrever, designar, denotar, relacionar e estabelecer vínculos entre os objetos geométricos e numéricos.

Assim, no Quadro 30 apresentamos as atividades cognitivas, os registros mobilizados e coordenados e, também, as ações/ocorrências que foram identificados durante o processo de resolução da tarefa sobre **classificação de triângulos quanto às medidas dos lados e desigualdade triangular**.

Quadro 30 - Identificação de atividades cognitivas, registros de representação semiótica e ações/ocorrências presentes na realização da tarefa sobre classificação de triângulos quanto às medidas dos lados e desigualdade triangular.

<table>
<tr><th colspan="3">Atividades cognitivas</th><th>Registros mobilizados e coordenados</th><th>Ações/ocorrências</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Formação de representações</td><td rowspan="3">Apreensões perceptiva e sequencial</td><td>Representação não discursiva - Figural: pontos, retas, segmentos de retas, semirretas, circunferências, ângulos e triângulos.</td><td>Figural: GeoGebra</td><td>Reproduzir marcas, contrastes e contornos percebidos (representações figurais).
pontos: A, B, B’, C, E, F, G, I, J, ...
retas: b e d
segmentos: AB, FG, EF,CD, ...
semirretas: a e b
ângulos de medidas: α, β, γ
circunferências: c, d, e, f, g
triângulos: CFG, ABC, ABB’, CHE, GIJ</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Representação discursiva - Língua Natural e Simbólica: caracteres, símbolos algébricos, palavras, frases, expressões simbólicas.</td><td>Língua Natural: Protocolos de registro</td><td>Designar e descrever objetos nominalmente (língua natural).
plano, reta suporte, segmento de reta, triângulo, lados iguais, lados diferentes, ângulos, medidas dos segmentos, interseção entre circunferências, raios, soma das medidas, desigualdade triangular.</td></tr>
<tr><td>Simbólico: GeoGebra e protocolos de registro</td><td>Empregar símbolos para designar objetos e estabelecer relações (letras, algarismos e símbolos matemáticos).
pontos: A, B, C, ...
retas: b e d
segmentos: AB, FG, EF,CD, ...
semirretas: a e b
plano: π
circunferências: c, d, e, f, g
triângulos: GIJ = pol 1, ABB’, CHE, ...
medidas de segmentos: a = 3,96, a = 2,7, b = 4,8, a = 6,21, F_1 = 5, a = 6,94, b = 3,45, c = 9,29, ...
medidas de ângulos: $\alpha = \beta = \gamma = 60°$
desigualdade triangular: $a + b$ maior que c.</td></tr>
<tr><td>Transformação de representações</td><td>Apreensões perceptiva e operatória</td><td>Tratamento</td><td>Figural</td><td>Transportar medidas de segmentos por meio de circunferências.
Determinar os pontos de interseção entre circunferências, entre reta e circunferência e entre semirreta e circunferência para obter os vértices dos triângulos equilátero, isósceles e escaleno.
Determinar ponto por meio da rotação em torno de um ponto.
Calcular medidas de ângulos.
Movimentar os pontos das extremidades dos segmentos de reta que permitiram a formação dos triângulos.</td></tr>
</table>

	Apreensões perceptiva, operatória e discursiva	Conversão	Língua Natural para Figural	Ilustrar na janela de visualização do GeoGebra representações de pontos, retas, semirretas, segmentos de reta, circunferências, triângulos, ângulos a partir da definição e das instruções fornecidas na tarefa.
			Figural para Língua Natural – Simbólico	Interpretar, descrever, designar, denotar relacionar e vincular, nos protocolos de registro, objetos geométricos e numéricos que foram representados nas janelas de visualização e álgebra do GeoGebra conforme as solicitações de cada uma das questões propostas na tarefa. Além disso, levantar hipóteses e elencar características e propriedades dos objetos matemáticos envolvidos quando necessário.

Fonte: Autor da Pesquisa.

Observa-se que a apreensão perceptiva ocorreu em todos os momentos da tarefa, pois de acordo com os pressupostos teóricos de Duval (2004a, 2012a, 2012c) as equipes puderam reconhecer perceptivelmente as variações dimensionais e qualitativas (formas, traços, contornos, contrastes, tamanhos, espessuras, nomes, cores etc.) das representações figurais de cada um dos objetos geométricos estudados na tarefa. A apreensão sequencial ocorreu no momento inicial da tarefa, uma vez que favoreceu a reprodução de figuras específicas para representar os objetos geométricos em estudo. As apreensões operatória e discursiva ocorreram em momentos simultâneos, pós-formação das figuras, pois a primeira potencializou as modificações possíveis das figuras e a segunda permitiu tecer hipóteses e estabelecer relações e propriedades entre diferentes objetos matemáticos a partir das modificações realizadas nas representações figurais.

Salientamos que essas ações e a coordenação entre os registros discursivo e não discursivo favoreceram, de um ponto de vista cognitivo, à compreensão do resultado conhecido como desigualdade triangular, ou seja, em todo triângulo a medida de um lado é menor do que a soma das medidas dos outros dois lados, bem como a condição de existência de triângulos vinculados aos segmentos de retas.

O fato de se ter diferentes representações integradas entre si nas janelas de visualização e de álgebra do GeoGebra contribuíram para a apreensão dos objetos geométricos abordados na tarefa de natureza aberta, a qual assentou na exploração das ferramentas e funcionalidade do *software* e, também, na investigação sobre quais hipóteses considerar para formar triângulos a partir de segmentos de reta dados e como estabelecer relações percebidas. Portanto, inferimos que o conjunto dessas ações demandaria um período maior quando executado em um modo fenomenológico estático de produção de representações como, por exemplo, papel, régua e compasso.

4.3. Tarefa sobre triângulos retângulos, quadriláteros, áreas e Teorema de Pitágoras

Esta tarefa tratou dos objetos geométricos relacionados a triângulos retângulos, quadriláteros, áreas, Teorema de Pitágoras e seu recíproco. A tarefa possibilitou aos estudantes formar e tratar representações figurais na janela de visualização do GeoGebra a partir da interação com suas ferramentas, coordenar diferentes representações semióticas, tais como a língua natural, na sua modalidade escrita, a figural, na sua modalidade geométrica-dinâmica, e a simbólica, na sua modalidade algébrica, bem como articular as apreensões sequencial, perceptiva, operatória e discursiva associadas aos objetos matemáticos envolvidos na tarefa, suas propriedades e relações existentes.

A resolução da tarefa teve duração de 45 minutos e foi guiada por oito questões, cujos objetivos foram formar representações de triângulos retângulos e quadriláteros, estabelecer suas relações, calcular áreas de triângulos retângulos e quadrados, enunciar e demonstrar o Teorema de Pitágoras, como também seu recíproco. Participaram desta tarefa nove estudantes, organizados em cinco equipes, a saber: **E1**: A1, A2 e A8; **E2**: A4 e A7; **E3**: A5 e A6; **E4**: A10 e **E5**: A11. No Quadro 31 apresentamos os passos e as orientações acerca das representações figurais formadas no GeoGebra e, também, as questões norteadoras da tarefa.

Quadro 31 - Tarefa sobre triângulo retângulo, quadriláteros, áreas e Teorema de Pitágoras.

Passos e orientações para a formação de representações figurais no GeoGebra
i. Criar duas retas *r* e *s* perpendiculares cuja interseção é um ponto C.
ii. Marcar um ponto A em *r* e um ponto B em *s*.
iii. Construir o triângulo ABC.
iv. Usar a ferramenta “Compasso” e transportar a medida do segmento CA para reta *s* a partir do ponto B, marcando um ponto P de maneira que B esteja entre C e P.
v. Usar a ferramenta “Compasso” e transportar a medida do segmento CB para reta *r* a partir do ponto A, marcando um ponto D de maneira que A esteja entre C e D.
vi. Traçar uma reta *t* paralela a *r* passando por P, e uma reta *u*, paralela a *s* passando por D.
vii. Marcar o ponto E de interseção de *t* e *u*.
viii. Transportar a medida de CB para o segmento PE a partir do ponto P, determinando um ponto F entre P e E.
ix. Transportar a medida de CA para o segmento DE, a partir do ponto D, determinando um ponto G entre D e E.
x. Esconder as circunferências traçadas.
xi. Criar os segmentos AB, BF, FG e GA.

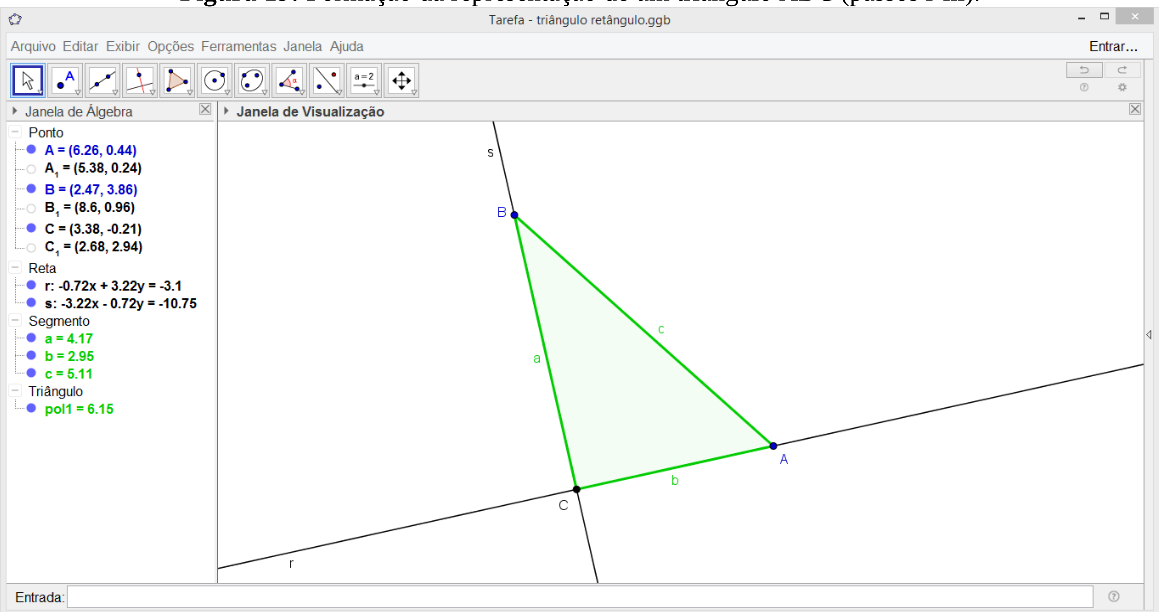
Questões

1. Qual é a característica do triângulo ABC? Justifique sua resposta.
2. Qual é a característica do quadrilátero CDEP? Justifique sua resposta.
3. Qual é a relação entre os triângulos ABC, BFP, EFG e ADG? Justifique sua resposta.
4. Qual a característica do quadrilátero ABFG? Justifique sua resposta.
5. Chame de a, a medida de BC, de b a medida de AC e de c a medida de AB. Considere a resposta dada à questão 3 e responda: Quais são as áreas de cada um dos quatro triângulos, em função das medidas a, b e c?
6. Considere a resposta dada à questão 4 e responda: Qual é a área do quadrilátero ABFG, em função das medidas: a, b e c?
7. Considere a resposta dada à questão 2 e responda: Qual é a área do quadrilátero CDEP?
8. Enuncie e demonstre o Teorema de Pitágoras. Este teorema é verdadeiro para o triângulo ABC? Por quê? Enuncie e demonstre o recíproco do Teorema de Pitágoras.

Fonte: Adaptado de Gerônimo, Barros e Franco (2010, p.149-150).

A partir dos passos e orientações fornecidos na tarefa e por meio das apreensões **perceptiva** (perceber visualmente os pontos A, B, C, as retas *r* e *s*, os segmentos AB, BC e AC, as medidas desses segmentos - *a*, *b* e *c*, o triângulo ABC), **sequencial** (reproduzir figuras na janela de visualização do GeoGebra referentes aos passos i-iii) e **operatória** (determinar a interseção de retas, transportar medidas de segmentos e traçar retas paralelas), em que as equipes formaram na janela de visualização do GeoGebra representações figurais semelhantes às figuras 19 e 20, respectivamente.

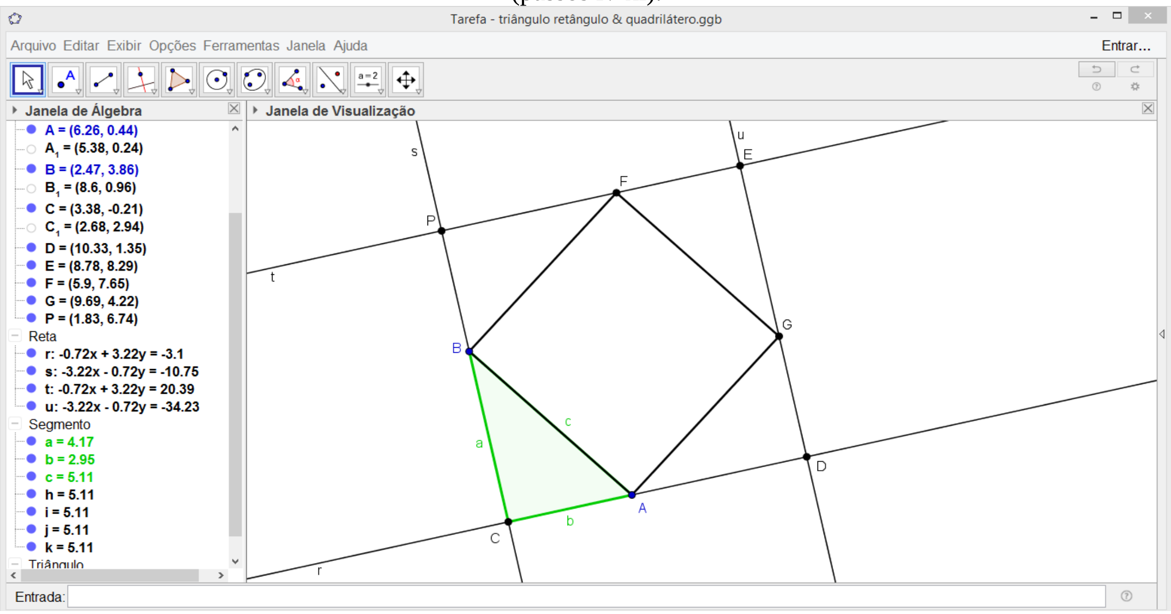
Figura 19: Formação da representação de um triângulo ABC (passos i-iii).



Fonte: Autor da Pesquisa.

Destacamos que as equipes formaram a representação do triângulo ABC a partir das retas perpendiculares *r* e *s* e do ponto “C”, seu ponto de interseção, em que utilizaram, respectivamente, as seguintes ferramentas do GeoGebra: “reta” para formar a reta *r*, “reta perpendicular” para a reta *s* e “interseção de dois objetos” para determinar o ponto “C”. Em seguida, marcaram os pontos A e B nas retas *r* e *s*, respectivamente, e utilizando a ferramenta “polígono”, para formar a representação do triângulo ABC.

Figura 20: Formação de representações de triângulos e quadriláteros a partir da representação do triângulo ABC (passos iv-xi).



Fonte: Autor da Pesquisa.

De acordo com os pressupostos teóricos de Duval (2004a) observamos nesta tarefa que as equipes mobilizaram e coordenaram diferentes variações visuais, as quais destacamos: **(i) dimensional** - 0D para pontos; 1D para retas, segmentos de reta, ângulos, triângulos, circunferências e quadriláteros; 2D para regiões delimitadas por triângulos e quadriláteros e **(ii) qualitativa** - formas, nomes, cores, tamanhos, espessuras e outros elementos qualitativos pertinentes a cada objeto geométrico representado.

Ao concluírem a formação da representação do triângulo ABC as equipes, por meio das ações de transportar medidas de segmentos e traçar retas paralelas e perpendiculares, formaram outras representações figurais na janela de visualização do GeoGebra, entre elas representações de triângulos (BPF, ADG e EFG) e quadriláteros (CDEP e ABFG). Salientamos que nessas representações formadas, apenas os pontos A e B (vinculados às retas *r* e *s*, respectivamente) são pontos dinâmicos, ou seja, são pontos livres que podem ser movimentados em cada uma das retas. Esse efeito é possível, pois tais pontos foram marcados nas retas ou por meio da ferramenta “ponto em objeto” ou por meio da ferramenta “ponto”.

Ao acompanhar o processo de formação e tratamento das representações dos quadriláteros CDEP e ABFG, percebemos que a equipe E4 apresentou, inicialmente, dificuldades com a apreensão sequencial ao reproduzir as representações, uma vez que não conseguiu realizar (apreensão operatória) o transporte das medidas dos segmentos CA e CB sobre as “retas” *s* e *r*, respectivamente, de modo a marcar um ponto P em *s* tal que o ponto B ficasse entre os pontos P e C e marcar um ponto D em *r* de modo que o ponto A ficasse entre os pontos C e D. Esta equipe foi questionada pelo pesquisador sobre como formou os pontos P e D. A equipe revelou em língua natural, na sua modalidade oral, que não estava conseguindo marcar os pontos P e D, pois sua dificuldade estava em considerar os pontos B e A como centros de circunferências ao utilizar a ferramenta “compasso”.

O pesquisador, explicou então que o ponto A representa o centro da circunferência de raio com comprimento igual ao comprimento do segmento CB e o ponto B o centro da circunferência de raio com comprimento igual ao comprimento do segmento CA. Isso esclarecido, a equipe chegou à representação esperada. Tal fato revela a dificuldade da equipe em converter as representações dos objetos geométricos no registro discursivo (passos e orientações) para o registro figural (pontos, segmentos, triângulos e quadriláteros). A partir dos pressupostos de Duval (2004a, 2012a, 2012c) observamos que esta equipe apresentou dificuldades em fazer uma ilustração por meio da apreensão sequencial, na janela de visualização do GeoGebra, quando colocada em correspondência com as palavras ou frases dos passos e orientações disponibilizados na tarefa.

Salientamos que as equipes foram instigadas pelo professor a movimentarem os pontos A sobre o segmento CD e B sobre o segmento CP e observarem o que acontecia quando o ponto A coincidisse com os pontos C ou D e quando o ponto B coincidisse com os pontos C ou P. De um modo geral, tais ações no GeoGebra favoreceram as equipes a tomada de consciência (objetivação) de que quando os pontos A e B são movimentados sobre as retas *r* e *s*, respectivamente, tem-se uma apreensão perceptiva de que o quadrilátero ABFG parece coincidir com o quadrilátero CDEP. Essa percepção está centrada nas formas ou nas unidades figurais que reconhecemos e nas propriedades visuais dessas formas (DUVAL, GODIN, 2005). Destacamos que pela construção, o ponto A quando arrastado não coincide com os pontos C e D, e analogamente, B não coincide com os pontos C e P. Inferimos que essa tomada de consciência foi favorecida pela influência da possibilidade dinâmica do GeoGebra, pois as equipes puderam reconfigurar a posição dos pontos A e B sobre os segmentos CD e

CP, respectivamente e, a partir dessa exploração, as equipes responderam as oito questões propostas na tarefa.

As respostas apresentadas pelas equipes **à primeira questão** (Qual é a característica do triângulo ABC? Justifique sua resposta.) foram:

Equipe E1: *"O triângulo ABC é retângulo".*

Equipe E2: *"Triângulo retângulo, pois foi construído através de duas retas perpendiculares formando um ângulo reto".*

Equipe E3: *"É um triângulo retângulo".*

Equipe E4: *"Temos um triângulo retângulo".*

Equipe E5: *"É um triângulo retângulo".*

Em relação à primeira questão, todas as equipes responderam que a característica do triângulo ABC representado é de um triângulo retângulo, mesmo sem representar a marca de ângulo reto associada ao vértice "C". Isso revela que as equipes, por meio das representações figural e escrita (língua natural), reconhecem que o objeto geométrico representado se refere a um triângulo retângulo. Além disso, de acordo com as respostas apresentadas pelas equipes inferimos a ocorrência da objetivação, pois elas tomaram consciência que o representado é um triângulo retângulo, o que indica que as equipes conheciam a característica do triangulo retângulo, ou seja, é um triângulo que tem um ângulo de medida igual a 90º. Destacamos que esta argumentação foi evidenciada apenas pela equipe E2, uma vez que em seu registro discursivo exprimiu que o triângulo ABC foi formado a partir de duas retas perpendiculares.

De modo geral, a apreensão discursiva nesta primeira questão ocorreu quando as equipes teceram hipóteses sobre o triângulo ABC representado na janela de visualização do GeoGebra. Além disso, exprimimos que as equipes reconhecem o triângulo retângulo por meio de diferentes representações, neste caso, a escrita e a figural.

Enfim, inferimos que nesta questão ocorreu articulação entre as apreensões sequencial, perceptiva, operatória e discursiva a partir da representação figural do triângulo ABC na janela de visualização do GeoGebra.

As respostas apresentadas pelas equipes **à segunda questão** (Qual é a característica do quadrilátero CDEP? Justifique sua resposta.) foram:

Equipe E1: *"O quadrilátero CDEP é um quadrado, porque as retas são paralelas duas a duas e as que não são, são perpendiculares, formando ângulos retos".*

Equipe E2: *"É um quadrado, pois é formado por 4 retas perpendiculares e cada lado tem a medida a soma de 2 lados de ABC".*

Equipe E3: *"É um quadrado".*

Equipe E4: *"CDEP é um quadrado, pois DE = DG + GE = EF + FP = PB + BC = CA + AD, pois cada segmento é o raio de uma das duas circunferências, C_{AC} ou C_{BC}".*

Equipe E5: *"É um quadrado".*

Em relação a esta segunda questão, todas as equipes responderam discursivamente que a característica do quadrilátero CDEP refere-se a um quadrado. Inferimos neste caso a ocorrência da objetivação pelas equipes, pois tomaram consciência, a partir das apreensões **sequencial** (reproduzir as figuras referentes aos passos iv-xi), **perceptiva** (perceber visualmente os pontos C, D, E e P, os segmentos AB, BF, FG, AG e o quadrilátero CDEP), **operatória** (transportar medidas de segmentos, traçar retas paralelas ou perpendiculares, movimentar os pontos A e B) e **discursiva** (levantar hipóteses sobre o quadrilátero CDEP representado figuralmente), que o objeto representado diz respeito a um quadrado, mesmo que algumas equipes não tenham justificado discursivamente esse reconhecimento ou sem o professor ou outras equipes levantarem tal hipótese.

Destacamos que essa questão apresenta natureza aberta, pois as equipes poderiam apresentar outras respostas como, por exemplo, que o quadrilátero CDEP tem lados congruentes, por construção, ou que os ângulos deste quadrilátero são ângulos retos, pois foi formado a partir de um triângulo retângulo ou, ainda, que este quadrilátero CDEP é a reunião dos triângulos ABC, ADG, EFG, PBG com o quadrilátero ABFG. Salientamos que entre as respostas obtidas para esta questão, as equipes E1, E2 e E4 apresentaram uma justificativa, enquanto que as equipes E3 e E5 nada justificaram.

A justificativa apresentada pela equipe E1 evidencia que a formação da representação do quadrilátero CDEP ocorreu com base em retas paralelas e perpendiculares, e estas determinam ângulos retos, porém, não sinalizou explicitamente a condição de congruência dos lados do quadrilátero nem esboçou elementos conceituais que justificam o paralelismo e o perpendicularismo entre os lados do quadrilátero, entretanto isso não significa que a equipe desconhece o que é um quadrado, pois tal objeto geométrico já havia sido estudado na disciplina. No entanto, não especificar a condição de congruência dos lados e considerar apenas os ângulos retos do quadrilátero pode levar a confusão de objetos geométricos como, por exemplo, retângulo por quadrado, que de acordo com os pressupostos teóricos de Duval (2004a, 2011) favorece incompreensões das características dos objetos geométricos, suas propriedades e relações durante a atividade matemática.

A equipe E2 justificou sua resposta destacando que o quadrado CDEP foi formado a partir de quatro retas perpendiculares e que cada lado do quadrilátero tem como medida "*a soma de 2 lados de ABC*". Destacamos que a maneira de veicular e expressar textualmente sua justificativa evidencia que a equipe apresenta dificuldades em coordenar e empregar os termos matemáticos por meio da língua natural, na sua modalidade escrita. Mas, mesmo com tais dificuldades, há indicativos em seu discurso de que a referência às quatro retas perpendiculares é para determinar os quatro ângulos retos do quadrilátero e que cada lado deste objeto geométrico tem como medida a soma das medidas dos dois catetos do triângulo ABC, pois um quadrilátero que tem os quatro ângulos retos e quatro lados com a mesma medida é chamado de quadrado. Observamos que esta equipe parece compreender os entes geométricos que caracterizam um quadrado a partir da representação do quadrilátero CDEP, mas apresenta dificuldades com o registro discursivo da língua natural, na sua modalidade escrita, para descrever e denotar tais entes que reunidos constituem um quadrado.

A justificativa apresentada pela equipe E4 sinaliza que a medida do segmento DE, lado do quadrilátero CDEP, é igual a soma das medidas dos raios das circunfências concêntricas no ponto C e que passam pelos pontos A e B. A ideia exposta pela equipe parece mostrar, por meio de uma soma, que todos os lados do quadrilátero CDEP têm a mesma medida, que é uma das características de um quadrado. Mas, em seu registro discursivo (língua natural e simbólico), a equipe não apresenta indicativos sobre os ângulos do quadrilátero serem retos.

Destacamos ainda que a representação simbólica adotada pela equipe difere daquela estabelecida, conhecida e usada durante a resolução de outras tarefas na disciplina, ou seja, a representação DE refere-se ao segmento de reta, enquanto que a representação $\overline{\mathrm{DE}}$ refere-se à medida do segmento. Logo, esperava-se que a equipe registrasse uma representação do tipo $\overline{\mathrm{DE}} = \overline{\mathrm{DG}} + \overline{\mathrm{GE}}$ para se referir a medida do segmento DE.

Além disso, a equipe evidenciou, no registro da língua natural, que cada segmento DG, EF, PB e CA e GE, FP, BC e AD "*é o raio*", respectivamente, de cada circunferência com centro em C e passando por A e B. Pode-se observar nesse caso, que a equipe confundiu objeto e sua representação, o que pode ter ocorrido em função da articulação insuficiente entre as apreensões sequencial, perceptiva, operatória e discursiva, pois a formação da representação do quadrilátero CDEP ocorreu por meio do transporte de medidas de segmentos em que foi utilizada a ferramenta "compasso" do GeoGebra. Sublinhamos que uma circunferência tem uma infinidade de raios, ou seja, todos os segmentos de reta com extremidades na curva e no centro são os raios da circunferência.

Os elementos revelados no registro discursivo da equipe expõe a sua dificuldade em coordenar diferentes representações semióticas para o mesmo objeto matemático. Isso potencializa o uso da mesma representação semiótica para objetos distintos e, de acordo com os pressupostos teóricos de Duval (2004a, 2004b, 2011), pode favorecer uma confusão entre o conteúdo do representante e o representado.

As respostas apresentadas pelas equipes **à terceira questão** (Qual é a relação entre os triângulos ABC, BFP, EFG e ADG? Justifique sua resposta.) foram:

Equipe E1: *"São congruentes pelo caso* $LLA_{\square}$*".*

Equipe E2: *"São congruentes, por construção a medida de dois lados dos triângulos são congruentes, pois foram construídas por retas perpendiculares".*

Equipe E3: *"Todos os triângulos são congruentes pelo caso* $LA_{\square}L$*".*

Equipe E4: *"Os triângulos são congruentes, pelo mesmo fato dos lados deles serem os raios das circunferências* C_{AC} *e* C_{BC}*, pelo caso LLA".*

Equipe E5: *"Os triângulos são congruentes".*

As respostas apresentadas pelas equipes à terceria questão indicam que elas tomaram conhecimento do significado de uma ideia geométrica, isto é, a congruência de triângulos, por elas próprias, sem interferência externa do professor e pesquisador. Inferimos que essa tomada de consciência (objetivação) procede da articulação entre as apreensões **sequencial** (reprodução dos triângulos), **perceptiva** (perceber visualmente os triângulos), **operatória** (modificações realizadas para obter as representações figurais dos triângulos) e **discursiva** (elencar hipóteses e estabelecer relações entre os triângulos) das representações figurais formadas e transformadas na janela de visualização do GeoGebra, bem como a coordenação entre os registros da língua natural e o figural, os conhecimentos geométricos de cada estudante e da exposição de argumentos entre os integrantes de cada equipe.

Observamos que os tratamentos realizados no registro figural, tais como, transportar medidas de segmentos, movimentar os pontos A e B, marcar interseção entre reta e circunferência e traçar retas paralelas e/ou perpendiculares e segmentos de reta, permitiram que as equipes afirmassem em língua natural, na sua modalidade escrita, que a relação existente entre os triângulos ABC, BFP, EFG e ADG é a de congruência, em virtude da congruência de lados (catetos do triângulo retângulo ABC) e do ângulo reto.

No que diz respeito as justificativas apresentadas, a equipe E5 não justificou sua resposta, ou seja, não informou um possível caso de congruência de triângulos para ancorar sua afirmação da mesma forma como as equipes E1, E2, E3 e E4 fizeram. No entanto, isso não significa que a equipe E5 não conheça os casos de congruência de triângulos nem traz indicativos de incompreensão ou equívocos conceituais sobre os objetos geométricos envolvidos, pois a questão não solicitou às equipes que indicassem um caso de congruência, uma vez que de acordo com os pressupostos teóricos de Ponte (2005) trata-se de uma questão de natureza aberta em que as equipes poderiam apresentar outra resposta para a relação existente entre os triângulos como, por exemplo, afirmarem que os triângulos representados figuralmente referem-se a triângulos retângulos, pois assim foram construídos.

Salientamos ainda que a equipe E2, em seu registro da língua natural (modalidade escrita), não explicitou um possível caso de congruência de triângulos, porém, nas entrelinhas de sua resposta identifica-se elementos que sinalizam para o caso Lado-Ângulo-Lado (LAL) de congruência de triângulos, uma vez que sua justificativa discursiva (em língua natural) apresenta indicativos de que os lados (catetos) são congruentes, por construção, e os ângulos retos procedem da interseção de retas perpendiculares.

Destacamos que as equipes formaram as representações dos triângulos BFP, EFG e ADG a partir do transporte das medidas dos catetos do triângulo retângulo ABC e da perpendicularidade entre as retas r e u, s e t e t e u. Assim, por construção, o caso de congruência de triângulos mobilizado por todas as equipes foi o caso LAL, no entanto, somente as equipes E2 (de maneira implícita) e E3 (de maneira explicita: $LA_{\square}L$) indicaram, por meio da coordenação do registro discursivo o caso LAL de congruência de triângulos.

Além da equipe E3 indicar explicitamente este caso de congruência, ela procurou evidenciar que os ângulos congruentes eram os ângulos retos, pois registrou o símbolo "$A_{\square}$" para explicitar o ângulo reto envolvido na congruência.

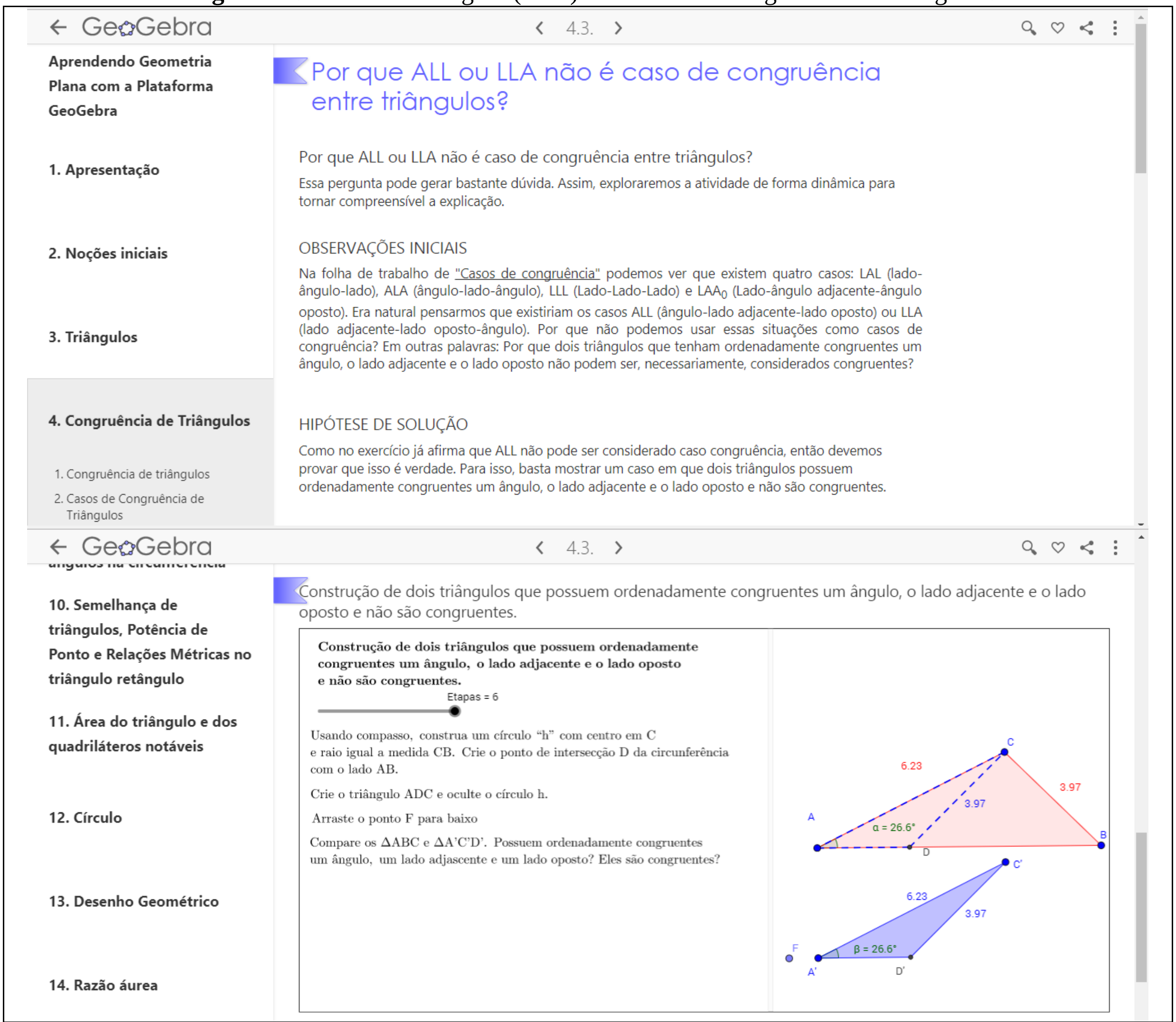
Conforme já mencionamos, a equipe E2 não explicitou um possível caso de congruência de triângulos para justificar sua resposta, e além disso, a equipe apresentou dificuldades ao usar o registro em língua natural, na sua modalidade escrita, para exprimir termos que designam objetos geométricos e numéricos acerca de seus significados, uma vez que em sua representação escrita, em língua natural, transparece que as medidas dos lados são congruentes e essas medidas, por construção, são perpendiculares, o que de fato não ocorre, pois os lados são perpendiculares e não as medidas. No entanto, no aspecto cognitivo, a resposta apresentada pela equipe não revela sua incompreensão sobre os objetos matemáticos envolvidos, pois a ideia conceitual veiculada na mensagem discursiva emitida pela equipe refere-se a lados (catetos) com medidas iguais, logo são lados congruentes e, por construção, esses lados são perpendiculares formando ângulos retos.

Destacamos que a mudança de termos linguísticos específicos e usuais da linguagem matemática para designar e representar um objeto geométrico pode contribuir para a incompreensão e a objetivação insuficiente do estudante, comprometendo dessa forma a apreensão dos objetos matemáticos envolvidos. Por exemplo, para relacionar objetos numéricos (números) ou algébricos (equações, inequações, funções) usamos os termos "igual", "maior do que", "menor do que" ou "diferente" e para relacionar objetos geométricos (segmentos de reta, ângulos, polígonos etc.) usamos termos como "congruente", "não congruente" ou "semelhante". Dessa forma, corroborando com os pressupostos teóricos de Duval (2004a, 2004b, 2011), inferimos que a mobilização indiscriminada de expressões linguísticas para designar, denotar, denominar ou representar um mesmo objeto matemático pode favorecer que o estudante confunda diferentes objetos matemáticos por meio de uma mesma palavra, bem como confunda o representante pelo representado.

A justificativa apresentada pela equipe E1 evidência que os triângulos ABC, BFP, EFG e ADG representados são congruentes pelo caso Lado-Lado-Ângulo reto ($LLA_{\square}$) de congruência de triângulos, ou seja, um caso especial de congruência de triângulos envolvendo apenas triângulos retângulos, em que tais triângulos têm ordenadamente congruentes a hipotenusa e um cateto já que o ângulo comum é o ângulo reto.

A equipe E4 destacou que os triângulos ABC, BFP, EFG e ADG representados são congruentes pelo caso Lado-Lado-Ângulo (LLA) de congruência de triângulos. No entanto, este caso de congruência só se verifica para triângulos retângulos, ou seja, quando dois desses triângulos têm hipotenusas congruentes e um dos catetos congruentes. De um modo geral não existe caso de congruência de triângulos quando se considera Lado-Lado-Ângulo. Um contraexemplo desse fato é apresentado por Nóbriga (2017) em seu livro dinâmico de matemática que possibilita explorar uma variedade de conteúdos da geometria plana (ver Figura 21).

Figura 21: Lado-Lado-Ângulo (LLA) não é caso de congruência de triângulos.



Fonte: Nóbriga (2017)[23].

Destacamos ainda que, mesmo a equipe E4 afirmando que os lados dos triângulos são os raios das circunferências com centro no ponto C e passando pelos pontos A e B, a sua justificativa

[23] Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/hsXHDRX7#material/tSNKZcPX> acesso em 15 dez. de 2017.

apresenta elementos em que parece observar que os catetos dos triângulos são congruentes, pois os triângulos BFP, EFG e ADG representados foram formados a partir do uso da ferramenta “compasso”, em que foi transportada as medidas dos catetos do triângulo retângulo ABC. Isso revela que a equipe mobilizou ideias geométricas para tomar conhecimento sobre qual o caso de congruência de triângulos mesmo apresentando dificuldades com a escrita, em língua natural. Destacamos que a representação semiótica adotada na disciplina para esse caso especial de congruência de triângulos (triângulos retângulos) evidencia a marca de ângulo reto, ou seja, Lado-Lado-Ângulo reto ($LLA_{\square}$).

Desta forma, inferimos que para equipe E4, independentemente de registrar a marca de ângulo reto para se referir ao caso de congruência de triângulos retângulos, quando eles têm ordenadamente congruentes um cateto e a hipotenusa, o ângulo de referência é um ângulo reto, fato este que não demonstra incompreensão da equipe.

Exprimimos que as justificativas dadas pelas equipes E1 e E4 foram apresentadas apenas em virtude da articulação entre as apreensões perceptiva e discursiva sem considerar a articulação das apreensões sequencial e operatória, que permitiram de fato formar as representações dos triângulos na janela de visualização do GeoGebra. Isso revela indicativos que essas equipes perceberam visualmente elementos geométricos e a partir daí levantaram hipóteses sobre o significado de cada representação triangular, no entanto, não sinaliza falta de compreensão das equipes em relação ao caso de congruência de triângulos denominada por LAL, pelo contrário, os recursos potencializados pelo GeoGebra para a formação e tratamentos das representações figurais permitiram a essas equipes outro olhar para justificarem suas respostas, diferentemente das equipes E2 e E3.

Sublinhamos que a atividade matemática potencializou o uso de diversos símbolos da linguagem matemática, e muitas vezes o estudante pode, por distração, esquecer de registrar discursivamente algum símbolo ou parte de um símbolo que representa um determinado objeto matemático, entretanto tal fato não significa falta de compreensão da equipe.

As respostas apresentadas pelas equipes **à quarta questão** (Qual a característica do quadrilátero ABFG? Justifique sua resposta.) foram:

Equipe E1:*" Ele é um quadrado, porque possui, por construção, os quatro lados congruentes e quatro ângulos retos".*

Equipe E2: *"Por construção os quatro triângulos são congruentes. AB é congruente a BF é congruente a FG e é congruente a AG. Como os quatro lados do quadrilátero são congruentes, ele é um losango".*

Equipe E3: *"É um quadrado. Como os lados desse quadrado são formados pelas hipotenusas dos triângulos ABC, BFP, EFG e ADG. E como esses triângulos são congruentes, as hipotenusas possuem a mesma medida. Logo forma um quadrado".*

Equipe E4: *"É um quadrado, visto que d(G,F)=d(F,B)=d(B,A)=d(A,G), pois são lados congruentes dos triângulos formados".*

Equipe E5: *"É também um quadrado, pois como os triângulos são congruentes, os segmentos AB, BF, FG e AG são congruentes e possuem mesma medida. Como os triângulos são congruentes, o ângulo* $E\hat{F}G \equiv P\hat{B}F$ *e como os triângulos são retângulos:*

$$m(P\hat{B}F) + m(P\hat{F}B) = 90°$$

$$m(E\hat{F}G) + m(P\hat{F}B) = 90°$$

$P\hat{F}E$ *possui medida de 180° e temos:*

$$m(P\hat{F}E) = m(E\hat{F}G) + m(P\hat{F}B) + m(B\hat{F}G)$$

$$m(B\hat{F}G) = 90°$$

Processo semelhante pode ser feito com os outros ângulos internos de ABFG,ou seja, todos possuem medida de 90°".

De acordo com os pressupostos teóricos de Ponte (2005) esta questão é de natureza aberta, e exploratória, pois solicitou às equipes que apresentassem as características do quadrilátero ABFG representado, ou seja, perguntava sobre as características do quadrilátero, indicando o que deveria ser feito. Nesta perspectiva, inferimos que as equipes tomaram consciência sobre as características dos objetos geométricos representados na janela de visualização do GeoGebra, pois perceberam visualmente (unidades figurais, formas e as propriedades dessas formas) e descreveram discursivamente que o quadrilátero ABFG representado é um quadrado (E1, E3, E4 e E5) ou um losango (E2).

A justificativa apresentada pela equipe E1 evidencia a construção da representação do quadrilátero ABFG, em que destacou que os quatro lados são congruentes e os quatro ângulos são retos. Inferimos que essas propriedades reconhecidas pela equipe influenciaram na tomada de consciência sobre o objeto geométrico representado, ou seja, um quadrado. Sobre os lados congruentes, avaliamos que a equipe observou que eles têm medidas iguais à medida da hipotenusa do triângulo ABC. No entanto, uma justificativa que essa equipe poderia apresentar para os ângulos retos do quadrilátero ABFG está no fato de observar que a soma das medidas dos ângulos agudos dos triângulos retângulos é igual a 90°.

A equipe E2 justificou sua resposta destacando que os triângulos ABC, BFP, EFG e ADG são congruentes, por construção. Nesta perspectiva, a equipe considerou congruentes os segmentos AB, BF, FG e AG, pois representam as hipotenusas dos triângulos retângulos e, consequentemente, representam os lados do quadrilátero ABFG. Com esse argumento a equipe tomou consciência de que o quadrilátero representado refere-se a um losango, pois é um quadrilátero com os quatro lados congruentes.

A equipe E3 justificou sua resposta sinalizando que os lados do quadrilátero ABFG representado "*são formados pelas hipotenusas dos triângulos ABC, BFP, EFG e ADG*", e estes lados são congruentes, formando um quadrado. Mas apenas esta caracterísitca não é suficiente para constituir um quadrado, pois os quatro ângulos devem ser retos. Inferimos que uma descrição, no registro discursivo, com ausência de elementos pertinentes à um objeto geométrico potencializa, segundo os pressupostos teóricos de Duval (2004a), apreensão insuficiente dos objetos matemáticos estudados.

A justificativa apresentada pela equipe E4 leva em consideração que os lados do quadrilátero ABFG têm medidas iguais, pois estes lados são congruentes em virtude dos triângulos ABC, BFP, EFG e ADG o serem. Descatamos que esta equipe mobilizou e coordenou uma representação simbólica para justificar que aos lados GF, FB, BA e AG do quadrilátero têm medidas iguais, o que de acordo com os pressupostos de Duval (2004a, 2011) é relevante para a compreensão dos objetos matemáticos abordados e é necessário para discernir e reconhecer unidades de sentido pertinentes ao conteúdo da representação formada no registro de partida (representação figural no GeoGebra). No entanto, para justificar que o quadrilátero é um quadrado, a equipe não fez referência aos ângulos retos, e desta forma, a equipe não elencou elementos geométricos suficientes para descrever e designar que o quadrilátero refere-se a um quadrado.

A equipe E5 justificou que os lados AB, BF, FG e AG do quadrilátero ABFG representado são congruentes, em virtude da congruência dos triângulos retângulos ABC, BFP, EFG e ADG. Por meio do registro simbólico, na sua modalidade algébrica, e seus respectivos tratamentos a equipe mostrou que um dos ângulos do quadrilátero ABFG é reto, e desta forma, concluiu que os demais ângulos também são retos.

A justificativa apresentada pela equipe E5 nos leva a inferir que ela identificou e reconheceu informações matematicamente pertinentes, a partir da representação figural, para apresentar uma resposta no registro discursivo (língua natural e simbólico). Para isso a equipe elencou características de um quadrado, ou seja, é um quadrilátero com quatro ângulos retos e quatro lados congruentes. Desta forma, segundo os pressupostos de Duval (2004a, 2011), inferimos que esta equipe tomou consciência sobre conhecimentos e entes geométricos que permitem afirmar e demonstrar que um quadrilátero é um quadrado.

Além disso, a equipe E5 mobilizou e coordenou diferentes registros (figural, língua natural e simbólico), o que de acordo os pressupostos de Duval (2011) potencializam a apreensão dos objetos geométricos estudados, bem como suas propriedades, permitindo assim estabelecer relações entre diferentes objetos por meio de diferentes representações que são necessárias para desenvolver a atividade matemática.

Destacamos que as respostas apresentadas pelas equipes à quarta questão foram subsidiadas pela articulação entre as apreensões perceptiva, operatória e discursiva, pois a partir de unidades figurais elementares (pontos, segmentos de reta, ângulos, triângulos e quadriláteros) elas puderam perceber, identificar, reconhecer e descrever características do quadrilátero ABFG representado na janela de visualização do GeoGebra, como também, a equipe E5 realizou tratamentos simbólicos para justificar que os ângulos internos do quadrilátero ABFG medem 90º.

Para responder as questões cinco, seis e sete desta tarefa, sublinhamos que já havia sido abordado na disciplina outras tarefas sobre o cálculo de áreas de polígonos, tais como triângulo, triângulo retângulo, quadrado, retângulo, paralelogramo, losango e trapézio.

As respostas apresentadas pelas equipes **à quinta questão** (Chame de *a*, a medida de BC, de *b* a medida de AC e de *c* a medida de AB. Considere a resposta dada à questão 3 e responda: Quais são as áreas de cada um dos quatro triângulos, em função das medidas *a*, *b* e *c*?) foram:

Equipe E1: *"Como os triângulos são congruentes, então as medidas das áreas são iguais: $A_T = \frac{ab}{2}$".*

Equipe E2: *"$A_T = \frac{a \cdot b}{2}$".*

Equipe E3: *"A área é $\frac{b \cdot a}{2}$".*

Equipe E4: *"$A_{CPED} = (b + a)^2 = b^2 + 2ba + a^2$*

$A_{BAGF} = c^2$

Temos que a área de cada triângulo é dada por

$A_{\Delta} = \frac{1}{4}(b^2 + 2ba + a^2 - c^2)$".

Equipe E5: *"A área é igual a $\frac{a \cdot b}{2}$".*

Todas as respostas apresentadas pelas equipes consideram o fato dos triângulos serem congruentes (resposta apresentada à terceira questão), pois já conheciam a relação que se dois triângulos são congruentes, então eles têm áreas iguais.

As equipes E1, E2, E3 e E5 reponderam por meio do registro simbólico, na sua modalidade algébrica, que a área de cada um dos triângulos retângulos ABC, BFP, EFG e ADG e congruentes é dada pela expressão $\frac{ab}{2}$, ou seja, a área de cada triângulo retângulo é dada pelo semiproduto das medidas dos catetos. Destacamos que as equipes já conheciam este resultado e, portanto, mobilizaram apenas as variáveis referentes às medidas dos catetos.

A resposta apresentada pela equipe E4 foi diferente das demais equipes, no entanto correta, pois envolveu as variáveis *a*, *b* e *c*, que representam as medidas dos catetos e da hipotenusa do triângulo retângulo ABC, respectivamente, conforme indicado na questão.

Para obter esta resposta, a equipe E4 mobilizou e coordenou o registro simbólico, na sua modalidade algébrica, em que realizou tratamentos para: (i) calcular áreas dos quadrados CDEP e ABFG; (ii) subtrair essas áreas e (iii) multiplicar por "um quarto" a diferença dessas áreas. Neste processo a equipe obteve o seguinte resultado "$\frac{1}{4}(b^2 + 2ba + a^2 - c^2)$", ou seja, a área de cada triângulo retângulo equivale a um quarto da diferença entre as áreas dos quadrados CDEP e ABFG. Portanto, a equipe também usou o seguinte axioma já estudado na disciplina: "*se uma região plana é a união de duas ou mais regiões planas tais que duas a duas não tem pontos interiores em comum, então sua área é a soma das áreas dessas regiões"* (GERÔNIMO, FRANCO, 2010).

Observamos que a resposta apresentada pela equipe E4 se efetivou a partir da articulação entre as apreensões **sequencial** (reprodução das figutas referentes aos passos i-xii), **perceptiva** (perceber visualmente as figuras e suas unidades figurais elementares) e **discursiva** (perceber e estabelecer relações entre objetos), bem como as operações relativas as modificações possíveis sobre a representação figural (construção, reconfiguração, desconstrução etc.), em que a equipe considerou a região delimitada pelo quadrado CDEP, como a reunião de outras unidades figurais 2D, a saber: as regiões delimitadas pelo quadrado ABFG e pelos triângulos retângulos. Trata-se de uma modificação mereológica, pois uma unidade figural 2D é percebida ou decomposta em em outras unidades figurais 2D. De acordo com os pressupostos teóricos de Duval (2004a, 2012a) a articulação entre diferentes apreensões e a coordenação do registro simbólico, no que tange os tratamentos algébricos, em especial a operação de cálculo, favoreceram a objetivação da equipe no sentido de estabelecer uma expressão simbólica para representar a área de cada um dos triângulos retângulos.

Inferimos que as respostas apresentadas pelas equipes à quinta questão ocorreram em virtude da coordenação entre os registros figural e simbólico, o que de acordo com os pressupostos teóricos de Duval (2011), mobilizar e coordenar um segundo registro, possibilita a apreensão dos objetos matemáticos envolvidos.

As respostas apresentadas pelas equipes **à sexta questão** (Considere a resposta dada à questão 4 e responda: Qual é a área do quadrilátero ABFG, em função das medidas: a, b e c?) foram:

> Equipe E1: *“ $A_Q = c^2$ ”.*
> Equipe E2: *“$A = c^2$ ”.*
> Equipe E3: *“A área é c^2 ”.*
> Equipe E4: *“A área de ABFG = c^2 ”.*
> Equipe E5: *“$c \cdot c = c^2$ ”.*

Nesta questão todas as equipes responderam por meio do registro simbólico, na sua modalidade algébrica, que a área do quadrilátero ABFG é dada pela expressão “c^2”, em que c representa a medida do lado do quadrado representado. Isso revela que equipes tomaram consciência (objetivação) sobre a expressão simbólica que representa a área do quadrado ABFG representado, bem como sobre o conceito matemático que possibilita determinar essa expressão. Inferimos que a resposta apresentada foi mobilizada a partir de ideias geométricas conhecidas pelas equipes, uma vez que já conheciam o axioma que permite calcular a área de um quadrado, ou seja, “a área de um quadrado é o quadrado do comprimento do seu lado” (GERÔNIMO, FRANCO, 2010, p. 108). Destacamos que outra resposta para esta questão poderia ser dada pela expressão “$a^2 + b^2$”, a qual é obtida entre a diferença da área de CDEP e a soma das áreas dos quatro triângulos congruentes.

Inferimos também que as respostas apresentadas pelas equipes procederam da articulação que elas realizaram entre as apreensões **sequencial** (reprodução das figuras no GeoGebra), **perceptiva** (perceber visualmente pontos, segmentos de reta e suas medidas, triângulos e os quadriláteros), **operatória** (os tratamentos necessários para potencializar as representações figurais) e **discursiva** (hipóteses, propriedades e relações suscitadas entre os objetos representados), pois segundo os pressupostos de Duval (2012a, 2012c) ocorreu a integração de estímulos em relação a representação figural formada na janela de visualização do GeoGebra, bem como a identificação de formas e unidades figurais elementares.

Destacamos que a equipe E2 registrou corretamente na quarta questão que a característica do quadrilátero ABFG é um losango, em virtude da congruência dos lados. No entanto, para a sexta questão, inferimos que a partir das apreensões perceptiva e discursiva esta equipe mudou seu “olhar” sobre o objeto geométrico representado pelo quadrilátero ABFG, pois sua resposta refere-se à área de um quadrado (quadrado da medida do seu lado) e não à área de um losango (semiproduto das medidas das suas diagonais).

As respostas apresentadas pelas equipes **à sétima questão** (Considere a resposta dada à questão 2 e responda: Qual é a área do quadrilátero CDEP?) foram:

Equipe E1: *“*$A_{CDEP} = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$*”.*
Equipe E2: *“*$A = (a + b)^2$*”.*
Equipe E3: *“A área de dois triângulos congruentes é a mesma, então temos:*

$$4 \cdot \left(\frac{b \cdot a}{2}\right) = 2ba.$$

A área de CDEP é dada por $A(CDEP) = 2ba + c^2$*”.*
Equipe E4: *“A área de CDEP =*$(a + b)^2$*”.*
Equipe E5: *“*$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$*”.*

Para a sétima questão as equipes mobilizaram e coordenaram o registro simbólico, na sua modalidade algébrica. Destacamos a importância da representação figural nesta questão para que as equipes pudessem perceber informações matematicamente pertinentes, como também estabelecer relações entre medidas de lados de polígonos e suas respectivas áreas.

Também ressaltamos a influência do GeoGebra para esta questão, pois a possibilidade de realizar tratamentos figurais como, por exemplo, movimentar os pontos A e B, permitiria às equipes perceber a congruência entre os quadriláteros CDEP e ABFG. Além disso, se o ponto A estiver entre os pontos C e D, os quadriláteros CDEP e ABFG representam quadrados, mas se o ponto C estiver entre os pontos A e D o quadrilátero ABFG representa um losango e o quadrilátero CDEP representa um retângulo. Representações análogas ocorrem ao movimentar o ponto B.

Em relação às respostas apresentadas pelas equipes observamos que E1, E2, E4 e E5 responderam que área do quadrilátero CDEP, que de acordo com as respostas representa um quadrado, é dada pela expressão $(a + b)^2$, em que "$a + b$" representa a medida do lado do quadrado representado. Salientamos que as equipes E1 e E5 realizaram, também, tratamentos no registro simbólico obtendo como resultado a expressão "$a^2 + 2ab + b^2$" para a área do quadrilátero CDEP.

A equipe E3 apresentou como resposta a seguinte expressão "$2ba + c^2$" para a área do quadrilátero CDEP representado, em que "$2ba$" representa a soma das áreas dos quatro triângulos retângulos congruentes, obtida por meio de tratamentos realizados no registro simbólico, na sua modalidade algébrica e, a expressão "c^2" representa a área do quadrilátero ABFG, que se refere a um quadrado.

Observamos também que a resposta apresentada pela equipe E3 procede da articulação entre as apreensões sequencial, perceptiva, operatória e discursiva, pois percebeu que a região do quadrilátero CDEP representado é uma combinação (possibilidade mereológica) entre as regiões de quatro triângulos retângulos congruentes e de um quadrado, ou seja, a equipe considerou as subfiguras (representantes) de objetos 2D para estabelecer uma expressão simbólica de um número real positivo (área) que está vinculado a um objeto geométrico 2D (DUVAL, 2004a, 2012a, 2012c).

Inferimos que todas as equipes tomaram consciência sobre a área do quadrilátero ABFG representado, potencializada pela coordenação entre os registros figural, na sua modalidade geométrica-dinâmica, e o simbólico, na sua modalidade algébrica, que de acordo com os pressupostos teóricos de Duval (2004a) corresponde à função de objetivação, pois o representante de um registro pode ser considerado como o representado de outro registro, como é o caso da relação entre o registro discursivo (texto em língua natural ou linguagem formal da matemática) e registro não discursivo (figural, esquemas).

A **oitava questão** desta tarefa solicitou às equipes que enunciassem e demostrassem o Teorema de Pitágoras e seu recíproco, além de questionar se o Teorema de Pitágoras é aplicável ao triângulo ABC representado figuralmente e qual a justificativa para isso. Apenas as equipes E1 e E3 responderam que o Teorema de Pitágoras é aplicável ao triângulo ABC, pois representa um triângulo retângulo. Destacamos que as equipes evidenciaram, em seus enunciados (produção escrita), que o Teorema de Pitágoras está vinculado a um triângulo retângulo.

Destacamos que todas as equipes realizaram com sucesso a demonstração do Teorema de Pitágoras, mesmo àquelas que apresentaram equívocos conceituais nos enunciados formados. Além disso, as equipes mobilizaram e coordenaram o registro simbólico, na sua modalidade algébrica, para demonstração do teorema, estabelecendo como resultado a expressão “$c^2 = a^2 + b^2$”, ou seja, “em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos”. Para demonstrar esse teorema as equipes consideraram os conhecimentos geométricos sobre áreas de triângulos e de quadrados. Com isto, as equipes determinaram que a área do quadrado CDEP representado é igual à soma das áreas do quadrado ABFG e dos quatro triângulos retângulos congruentes.

A oitava questão, solicitou ainda que as equipes apresentassem um enunciado para o recíproco do Teorema de Pitágoras. Esse momento da questão potencializou as equipes que realizassem tratamentos no registro discursivo, em especial o da língua natural, de modo que reorganizassem o enunciado do teorema, com objetivo de estabelecer que, se em um triângulo o quadrado da medida de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados, então o triângulo é retângulo.

De acordo com Duval (2011) **enunciar frases** é o ato mais fundamental entre os três primeiros tipos de operações discursivas características de uma língua. Para este autor, “as operações relativas para essa enunciação constituem os atos intencionais fundamentais do pensamento, que essa enunciação seja oral ou que ela se elabore por meio da objetivação da escrita” (DUVAL, 2011, p.81). Os outros dois tipos de operação discursiva são sempre aqueles relativos às frases já produzidas ou que ainda serão produzidas. O autor destaca ainda que:

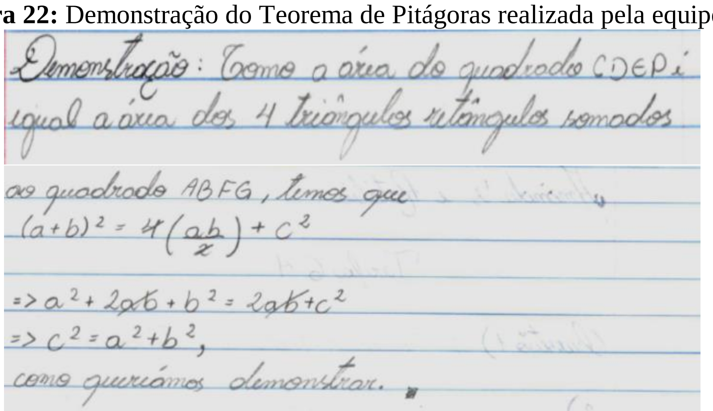
> [...] a predominância da prática oral da língua tende sempre a esconder a importância e a complexidade dessas operações discursivas. Pois, diferentemente da produção escrita que exige que realizemos de maneira controlada esses três tipos de operações discursivas, a prática espontânea da fala incita a curtocircuitar a realização (DUVAL, 2011, p.81).

Em relação ao enunciado do recíproco do Teorema de Pitágoras, apenas a equipe E4 não o fez, nem o demonstrou. Destacamos que uma questão sem resposta nada pode dizer sobre a apreensão dos objetos matemáticos envolvidos no enunciado e na demonstração desse teorema. As demais equipes (E1, E2, E3 e E5) apresentaram um enunciado para o recíproco do Teorema de Pitágoras revelando algumas dificuldades com a escrita em língua natural. Na sequência, destacamos as respostas apresentadas pelas equipes para a oitava questão.

Equipe E1: Enunciado do Teorema de Pitágoras.

> *"Em um triângulo retângulo, a medida do lado maior ao quadrado é igual a medida dos outros lados ao quadrado somadas."*
> *"Sim, porque o triângulo ABC é retângulo".*

Figura 22: Demonstração do Teorema de Pitágoras realizada pela equipe E1.



Demonstração: Como a área do quadrado CDEP é igual a área dos 4 triângulos retângulos somados ao quadrado ABFG, temos que

$(a+b)^2 = 4\left(\frac{ab}{2}\right) + c^2$

$\Rightarrow a^2 + \cancel{2ab} + b^2 = \cancel{2ab} + c^2$

$\Rightarrow c^2 = a^2 + b^2$,

como queríamos demonstrar.

Fonte: Protocolo de registro - equipe E1.

A equipe E1 apresentou um enunciado para o Teorema de Pitágoras correto, explicitando o "lado maior" do triângulo retângulo para referenciar a hipotenusa. A demonstração apresentada pela equipe foi articulada pelas apreensões **sequencial** (figuras reproduzidas), **perceptiva** (perceber visualmente as formas, contornos e marcas), **operatória** (combinação parte/todo) e **discursiva** (suscitar hipóteses, propriedades e relações dos objetos geométricos representados figuralmente) da representação figural. Destacamos que a equipe realizou uma conversão do registro figural para o registro simbólico para desenvolver a demonstração correta do teorema, e no registro de chegada (simbólico) realizou tratamentos para obter a expressão simbólica equivalente ao enunciado do Teorema de Pitágoras em língua natural.

O recíproco do Teorema de Pitágoras enunciado pela equipe E1 foi:

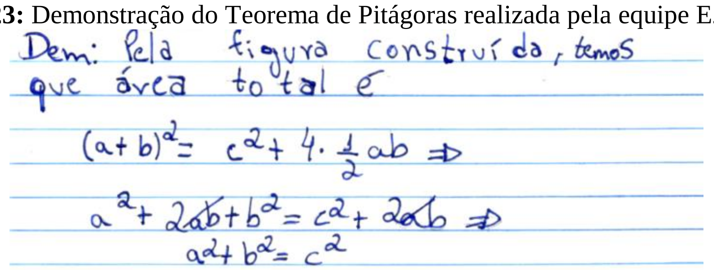
> *"Dados a, b, c, reais positivos, com $c^2 = a^2 + b^2$, temos que a, b, c são os lados de um triângulo retângulo ABC qualquer."*

O enunciado do recíproco apresentado pela equipe E1 envolveu uma integração entre representações em língua natural, na sua modalidade escrita, e simbólica, na sua modalidade algébrica. Inferimos que o enunciado apresentado pela equipe revela uma ideia quase que correta sobre o recíproco do Teorema de Pitágoras, mesmo que não tenha informado explicitamente em sua hipótese que os três números reais positivos referem-se às medidas dos lados de um triângulo. A palavra quase é por conta da última palavra do enunciado, "qualquer". Como as medidas dos lados do triângulo ABC são dadas, todos os triângulos obtidos com essas medidas são congruentes, pelo caso LLL de congruência de triângulos, e assim, o triângulo retângulo ABC, deixa de ser qualquer. No entanto, isso não evidencia falta de compreensão da equipe sobre o conteúdo desse teorema. Destacamos ainda que a equipe E1 não esboçou uma tentativa de demonstração para o recíproco e, com isso, nada podemos inferir sobre a compreensão da equipe acerca de conhecimentos geométricos que seriam mobilizados e coordenados para demonstrar esse teorema.

Equipe E2: Enunciado do Teorema de Pitágoras.

> *"Num triângulo retângulo, a soma dos quadrados dos catetos é o quadrado da hipotenusa".*

Figura 23: Demonstração do Teorema de Pitágoras realizada pela equipe E2.



Dem: Pela figura construída, temos que área total é

$$(a+b)^2 = c^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} ab \Rightarrow$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab \Rightarrow$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

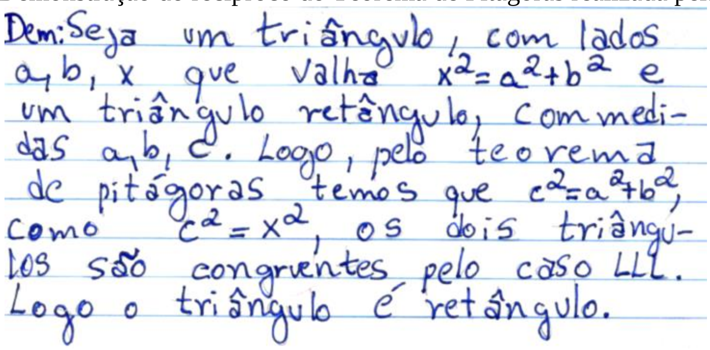
Fonte: Protocolo de registro - equipe E2.

O enunciado apresentado pela equipe E2 envolveu apenas representações do registro da língua natural, o qual revela uma ideia correta sobre o conteúdo do Teorema de Pitágoras, embora tenha utilizado as expressões "*quadrados dos catetos*" e "*quadrado da hipotenusa*" para fazer referência aos quadrados das medidas dos catetos e ao quadrado da medida da hipotenusa. Inferimos que a maneira como a equipe emprega os termos linguísticos para representar objetos matemáticos, pode levar, de acordo com os pressupostos teóricos de Duval (2004a), a uma confusão entre objeto e o conteúdo de sua representação e entre objetos distintos, o que pode comprometer a apreensão dos objetos geométricos envolvidos, porém devemos lembrar que esta forma é a maneira mais usual de se enunciar o Teorema de Pitágoras.

O recíproco do Teorema de Pitágoras enunciado pela equipe E2 foi:

> *"Se a soma de dois lados de um triângulo é a medida do maior lado dele, então o triângulo é retângulo."*

Figura 24: Demonstração do recíproco do Teorema de Pitágoras realizada pela equipe E2.



Dem: Seja um triângulo, com lados
a, b, x que valha $x^2 = a^2 + b^2$ e
um triângulo retângulo, com medi-
das a, b, c. Logo, pelo teorema
de pitágoras temos que $c^2 = a^2 + b^2$,
como $c^2 = x^2$, os dois triângu-
los são congruentes pelo caso LLL.
Logo o triângulo é retângulo.

Fonte: Protocolo de registro - equipe E2.

Em relação ao enunciado apresentado por esta equipe acerca do recíproco do Teorema de Pitágoras inferimos que a equipe E2 parece ter uma ideia sobre o significado do conteúdo de desse teorema, no entanto, seu registro discursivo revela ausência de importantes informações conceituais como, por exemplo, fazer referência aos quadrados das medidas dos lados do triângulo e que a soma conveniente de dois desses quadrados equivale ao terceiro quadrado.

Para clarificar o conteúdo abordado no enunciado do recíproco do Teorema de Pitágoras apresentado pela equipe E2, apresentamos, a seguir, uma transformação que integra os registros simbólico, na sua modalidade algébrica, e o da língua natural, na sua modalidade escrita. Vejamos: "$a + b = c$", onde as representações simbólicas a e b referem-se às medidas dos lados menores e o símbolo c representa a medida do lado maior do triângulo.

De acordo com os pressupostos teóricos de Duval (2004a, 2004b, 2011) a ausência de informações matematicamente pertinentes e o uso inadequado de representações mobilizadas e coordenadas no registro de partida favorecem a incompreensão e a objetivação insuficiente dos objetos representados no registro de chegada.

Neste sentido, inferimos que a equipe E2 apresentou dificuldades em designar, descrever e interpretar os objetos matemáticos envolvidos no enunciado do recíproco quando mobilizou e coordenou o registro da língua natural, porém, essa dificuldade não ocorreu no registro simbólico, na sua modalidade algébrica, quando apresentou uma demonstração correta para tal teorema, como apresentado na Figura 24. Por esse motivo, exprimimos que não há incompreensão da equipe E2 sobre o significado do conteúdo do recíproco do Teorema de Pitágoras, mas dificuldade em articular e representar termos da linguagem matemática por meio do registro da língua natural, na sua modalidade escrita.

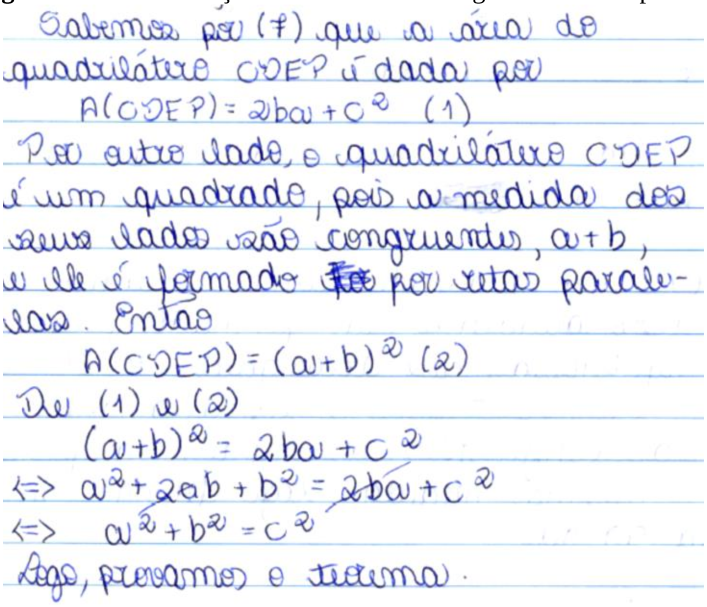
A demonstração apresentada pela equipe E2 considerou um triângulo qualquer com lados medindo a, b e x e um triângulo retângulo com os catetos medindo a e b e a hipotenusa medindo c. Assumiu, por hipótese, que vale a relação "$x^2 = a^2 + b^2$", e como o segundo triângulo é retângulo, vale o Teorema de Pitágoras, ou seja, "$c^2 = a^2 + b^2$". Desses dois resultados a equipe concluiu que "$x = c$". Com isso a equipe observou que os dois triângulos são congruentes pelo caso Lado-Lado-Lado (LLL) de congruência de triângulos, e, portanto, o primeiro triângulo é retângulo.

Para essa demonstração a equipe usou ideias sobre congruência de triângulos, articulou as apreensões perceptiva e discursiva, coordenou o registro simbólico, na sua modalidade algébrica, e o registro da língua natural, na sua modalidade escrita, para concluir que se em um triângulo o quadrado da medida de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados, então o triângulo é retângulo. De acordo com os pressupostos teóricos de Duval (2011) o uso de um segundo registro é imprescindível para a apreensão dos objetos matemáticos, mesmo se as produções matemáticas do estudante, por meio de diferentes representações semióticas, privilegiem um só registro de representação.

Equipe E3: Enunciado do Teorema de Pitágoras.

> *"Dado um triângulo retângulo ABC, a soma das medidas dos catetos ao quadrado é igual a medida da hipotenusa ao quadrado. Este teorema é válido para o triângulo ABC, pois ABC é um triângulo retângulo".*

Figura 25: Demonstração do Teorema de Pitágoras realizada pela equipe E3.


Sabemos por (7) que a área do
quadrilátero CDEP é dada por
$A(CDEP) = 2ba + c^2$ (1)
Por outro lado, o quadrilátero CDEP
é um quadrado, pois a medida dos
seus lados são congruentes, $a+b$,
e ele é formado por retas parale-
las. Então
$A(CDEP) = (a+b)^2$ (2)
De (1) e (2)
$(a+b)^2 = 2ba + c^2$
$\Leftrightarrow a^2 + \cancel{2ab} + b^2 = \cancel{2ba} + c^2$
$\Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2$
Logo, provamos o teorema.

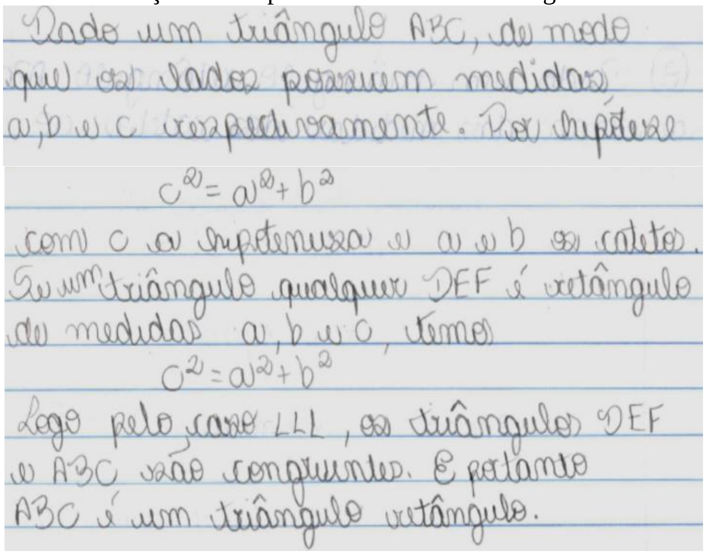
Fonte: Protocolo de registro - equipe E3.

O enunciado do Teorema de Pitágoras apresentado pela equipe E3 revela uma ideia correta acerca do conteúdo matemático deste teorema, pois a demonstração realizada pela equipe conclui que $a^2 + b^2 = c^2$, onde as representações simbólicas a e b referem-se às medidas dos catetos e a representação c a medida da hipotenusa. Além disso, a equipe evidenciou em seu registro discursivo a validade do Teorema de Pitágoras para triângulos retângulos, em particular ao triângulo retângulo ABC representado na janela de visualização do GeoGebra. No entanto, destacamos que ao fazer o uso do registro discursivo, em língua natural, a conversão da frase "*a soma das medidas dos catetos ao quadrado*" apresentada pela equipe refere-se à representação simbólica "$(a + b)^2$", que é diferente da representação "$a^2 + b^2$", quando convertida para o registro da língua natural fica "a soma dos quadrados das medidas dos catetos". Esse fato evidencia uma possível distração da equipe em coordenar o uso e a ordem de palavras no registro da língua natural, mas não implicou na objetivação insuficiente, pois no processo de demonstração do Teorema de Pitágoras a equipe registrou corretamente a expressão simbólica "$a^2 + b^2$".

O recíproco do Teorema de Pitágoras enunciado pela equipe E3 foi:

> *"Se o quadrado da medida de um dos lados do triângulo é igual a soma das medidas ao quadrado dos outros dois lados, então o triângulo é retângulo".*

Figura 26: Demonstração do recíproco do Teorema de Pitágoras realizada pela equipe E3.



Dado um triângulo ABC, de modo que os lados possuem medidas a, b e c respectivamente. Por hipótese

$c^2 = a^2 + b^2$

com c a hipotenusa e a e b os catetos.
Se um triângulo qualquer DEF é retângulo de medidas a, b e c, temos

$c^2 = a^2 + b^2$

Logo pelo caso LLL, os triângulos DEF e ABC são congruentes. E portanto ABC é um triângulo retângulo.

Fonte: Protocolo de registro - equipe E3.

A equipe E3 apresentou uma ideia correta sobre o conteúdo do recíproco do Teorema de Pitágoras, no entanto, em seu registro discursivo esta equipe usou a frase "*soma das medidas ao quadrado*", o que não indica falta de compreensão, pois na demonstração do recíproco a equipe representou simbolicamente a expressão "$a^2 + b^2$". Isso revela uma dificuldade em empregar termos da linguagem matemática quando se produz e estrutura um texto escrito em língua natural.

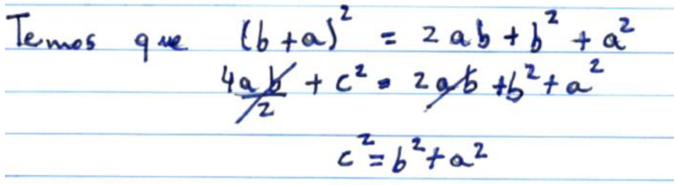
Inferimos que a demonstração apresentada pela equipe E3 está correta, mesmo citando na quarta linha "*com c a hipotenusa e a e b os catetos*". Salientamos que esta equipe iniciou sua demonstração considerando um triângulo ABC sem fazer referência a um triângulo retângulo. Acreditamos que foi uma distração da equipe, pois chamaram os lados do triângulo qualquer ABC de hipotenusa, cateto e cateto, que são nomes válidos apenas para triângulos retângulos (triângulo DEF). Sobre a demonstração destacamos que a equipe E3 mobilizou e coordenou ideias geométricas ao evidenciar o caso Lado-Lado-Lado (LLL) de congruência de triângulos para concluir que os triângulos ABC e DEF são congruentes e, consequentemente, como o triângulo DEF é um triângulo retângulo, então o triângulo ABC também é retângulo.

Observamos que as equipes E2 e E3 adotaram a mesma estratégia de demonstração, em que aplicaram o caso Lado-Lado-Lado (LLL) de congruência de triângulos. Destacamos ainda que equipe E2 considerou o símbolo "*x*" como representante da medida do lado de maior comprimento do triângulo, cujo objetivo era mostrar que se tratava de um triângulo retângulo, e o símbolo "c" para representar a medida da hipotenusa. A equipe E3 usou o mesmo símbolo "c" para representar a medida do lado de maior comprimento nos dois triângulos. Neste sentido, salientamos que o uso de um mesmo símbolo para representar objetos diferentes na resolução de uma mesma tarefa matemática pode favorecer a não compreensão dos objetos matemáticos envolvidos, bem como a tomada de consciência insuficiente.

Equipe E4: Enunciado do Teorema de Pitágoras.

> *"Dado um triângulo retângulo, temos que, com c sua hipotenusa e a, b catetos, então,* $c^2 = a^2 + b^2$*".*

Figura 27: Demonstração do Teorema de Pitágoras realizada pela equipe E4.



Temos que $(b+a)^2 = 2ab + b^2 + a^2$

$\cancel{\frac{4ab}{2}} + c^2 = \cancel{2ab} + b^2 + a^2$

$c^2 = b^2 + a^2$

Fonte: Protocolo de registro - equipe E4.

A equipe E4 apresentou uma ideia correta acerca do significado do Teorema de Pitágoras, pois por meio da coordenação dos registros em língua natural, na sua modalidade escrita, e o simbólico, na sua modalidade algébrica, afirmou que vale a relação $c^2 = a^2 + b^2$ em um triângulo retângulo, para "*c*" sendo a hipotenusa e a e b os catetos. Assim como a equipe E2, E4 também não se refere a "*c*", "*a*" e "*b*" como representações simbólicas de objetos não numéricos relacionados aos comprimentos da hipotenusa e dos catetos, respectivamente. Destacamos que o fato de não relatar que o símbolo "*c*" representa a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo, não significa que a equipe não compreendeu, entretanto, não se pode calcular o quadrado de um segmento de reta, mas sim o quadrado de sua medida.

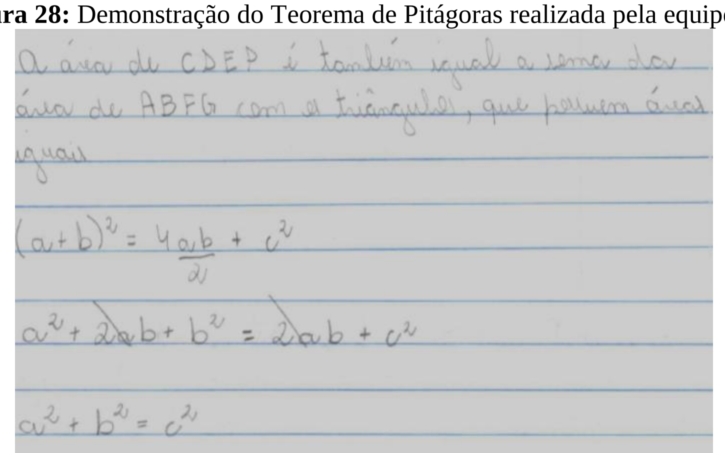
Exprimimos que esse fato pode ter sido uma distração da equipe ao empregar símbolos que representam objetos numéricos (comprimento de segmento de reta) no lugar de objetos geométricos (segmento de reta). Caso contrário, se não for uma distração ou for uma convenção adotada pela equipe, o emprego de um símbolo comum para representar um objeto matemático que na verdade é o representante de outro objeto pode, de acordo com os pressupostos teóricos de Duval (2004a, 2011), favorecer os obstáculos na apreensão de objetos matemáticos e suas propriedades, em especial quando se realiza uma transformação externa ao registro de partida.

A demonstração apresentada pela equipe E4 para o Teorema de Pitágoras está correta. Esta equipe realizou tratamentos no registro simbólico para obter a representação equivalente ao enunciado apresentado em língua natural. A equipe E4 considerou a área do quadrado CDEP representado igual à soma das áreas do quadrado ABFG e dos quatro triângulos retângulos congruentes. Isso foi possível, segundo Duval (2012a, 2012c), pois a equipe coordenou a possibilidade mereológica de modificar uma representação figural, ou seja, reconfigurou as partes para obter o todo. A equipe E4 não apresentou um enunciado, nem esboçou uma possível demonstração para o recíproco do Teorema de Pitágoras.

Equipe E5: Enunciado do Teorema de Pitágoras.

> *"Em um triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos, sendo que a hipotenusa é o maior lado (oposto ao ângulo reto)".*

Figura 28: Demonstração do Teorema de Pitágoras realizada pela equipe E5.



Fonte: Protocolo de registro - equipe E5.

Em relação ao conteúdo do enunciado do Teorema de Pitágoras apresentado no registro da língua natural, na sua modalidade escrita, inferimos que a equipe E5 mobilizou uma ideia correta. No entanto, a equipe não fez referência aos quadrados das medidas dos catetos nem ao quadrado da medida da hipotenusa, simplesmente registrou quadrado da hipotenusa e quadrados dos catetos, o que não revela incompreensão nem falta de objetivação, pois a demonstração apresentada está correta. Para a demonstração a equipe considerou que a área do quadrado CDEP equivale à soma das áreas dos triângulos retângulos congruentes com a área do quadrado ABFG.

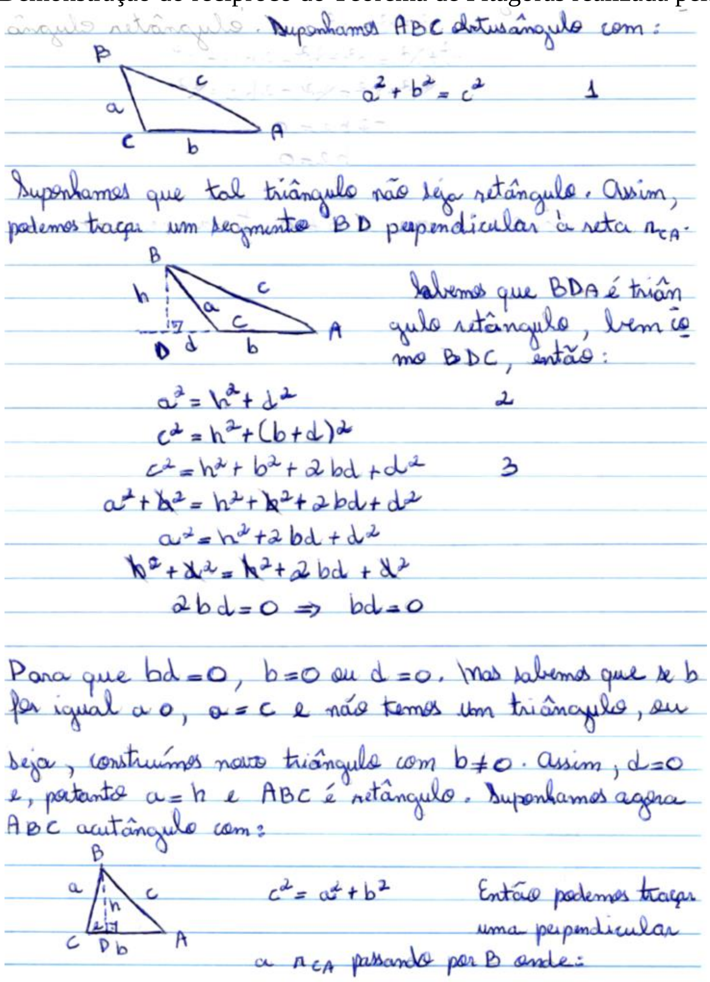
Inferimos que a articulação entre as apreensões **sequencial** (figuras reproduzidas), **perceptiva** (favoreceu reconhecer visualmente formas, contornos, contrastes e marcas ilustrativas, bem como as leis de organização da figura), **operatória** (modificações mereológicas) e **discursiva** (que potencializou levantar hipóteses e propriedades matemáticas vinculadas à figura geométrica reproduzida) das representações figurais formadas na janela de visualização do

GeoGebra permitiu à equipe estabelecer relações entre os objetos representados. Além disso, para demonstrar o teorema de Pitágoras a equipe E5 realizou tratamentos (cálculos) no registro simbólico, na sua modalidade algébrica, a partir de áreas de triângulos e quadrados, em que obteve a seguinte relação simbólica "$a^2 + b^2 = c^2$" equivalente ao enunciado, em língua natural, do Teorema de Pitágoras. A partir dos pressupostos de Duval (2004a, 2011), observamos que a apreensão dos objetos matemáticos está relacionada à coordenação de diferentes registros de representação semiótica, mesmo quando as representações privilegiam um registro específico como, por exemplo, o registro simbólico, em que foi necessário mobilizar a formação e a transformação de representações para concluir a demonstração do Teorema de Pitágoras no registro simbólico.

Equipe E5: Enunciado do Recíproco.

> *"Se a soma dos quadrados de dois lados, em um triângulo, for igual ao quadrado da medida do terceiro lado, esse triângulo será um triângulo retângulo".*

Figura 29: Demonstração do recíproco do Teorema de Pitágoras realizada pela equipe E5.


ângulo retângulo. Suponhamos ABC obtusângulo com:

$a^2+b^2=c^2$ 1

Suponhamos que tal triângulo não seja retângulo. Assim, podemos traçar um segmento BD perpendicular à reta r_{CA}.

Sabemos que BDA é triângulo retângulo, bem como BDC, então:

$a^2=h^2+d^2$ 2

$c^2=h^2+(b+d)^2$

$c^2=h^2+b^2+2bd+d^2$ 3

$a^2+\cancel{b^2}=h^2+\cancel{b^2}+2bd+d^2$

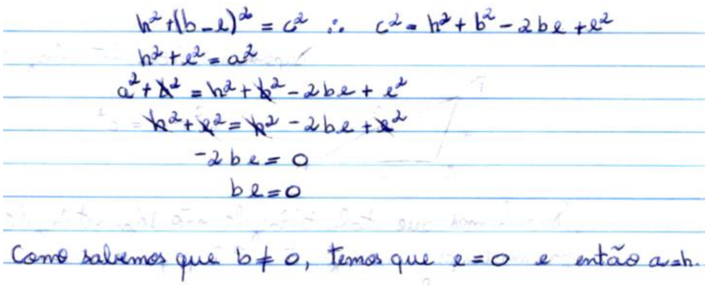
$a^2=h^2+2bd+d^2$

$\cancel{h^2}+\cancel{d^2}=\cancel{h^2}+2bd+\cancel{d^2}$

$2bd=0 \Rightarrow bd=0$

Para que $bd=0$, $b=0$ ou $d=0$. Mas sabemos que se b for igual a 0, $a=c$ e não temos um triângulo, ou seja, construímos nosso triângulo com $b\neq 0$. Assim, $d=0$ e, portanto $a=h$ e ABC é retângulo. Suponhamos agora ABC acutângulo com:

$c^2=a^2+b^2$ Então podemos traçar uma perpendicular a r_{CA} passando por B onde:



$h^2+(b-e)^2 = c^2 \therefore c^2 = h^2 + b^2 - 2be + e^2$

$h^2+e^2 = a^2$

$a^2 + \cancel{b^2} = h^2 + \cancel{b^2} - 2be + e^2$

$\cancel{h^2} + \cancel{e^2} = \cancel{h^2} - 2be + \cancel{e^2}$

$-2be = 0$

$be = 0$

Como sabemos que $b \neq 0$, temos que $e = 0$ e então $a = h$.

Fonte: Protocolo de registro - equipe E5.

Destacamos que o enunciado do recíproco do Teorema de Pitágoras apresenta uma ideia correta, mesmo que por uma distração a equipe não tenha explicitado, em língua natural, o objeto numérico que se refere à soma dos quadrados das medidas de dois lados, pois registrou *"soma dos quadrados de dois lados"*.

Inferimos que a equipe E5 apresentou uma demonstração correta para o recíproco do Teorema de Pitágoras em que coordenou os registros simbólico, figural e o da língua natural, mobilizou conhecimentos geométricos acerca da classificação dos triângulos quanto às medidas de seus ângulos, aplicou o Teorema de Pitágoras, articulou as apreensões **sequencial** (reproduziu os triângulos acutângulo e obtusângulo), **perceptiva** (reconhecimento visual das formas, marcas, contornos), **operatória** (traçar alturas dos triângulos acutângulo e obtusângulo) e **discursiva** (levantar hipóteses e relações acerca de suas figuras) em relação às representações figurais formadas e transformadas no seu protocolo de registro, bem como realizou tratamentos no registro simbólico (cálculos algébricos) para demonstrar e concluir que o triângulo citado no enunciado do recíproco refere-se a um triângulo retângulo.

Destacamos que todos os componentes cognitivos mobilizados e coordenados sinergicamente para demonstrar o recíproco do Teorema de Pitágoras implicaram, segundo os pressupostos teóricos de Duval (2004a, 2011), na objetivação dessa equipe.

A demonstração apresentada pela equipe E5 foi realizada por redução ao absurdo, uma vez que a relação "$c^2 = a^2 + b^2$" foi sua hipótese, e com essa hipótese mostrou que não poderia obter triângulo obtusângulo ou triângulo acutângulo e, portanto, o triângulo é retângulo.

Assim, no que diz respeito às demonstrações apresentadas pelas equipes E1, E2, E3, E4 e E5 para o Teorema de Pitágoras, sublinhamos que elas foram articuladas pelas diferentes apreensões relativas às figuras formadas na janela de visualização do GeoGebra, pois, perceberam por meio de modificações mereológica e ótica que a área do quadrado CDEP é igual a soma das áreas dos quatro triângulos retângulos congruentes com a área do quadrado

ABFG. Além disso, no registro simbólico as equipes realizaram tratamentos algébricos (cálculos) para obter uma relação simbólica equivalente ao enunciado do Teorema de Pitágoras apresentado por meio do registro da língua natural.

Portanto, o sucesso das equipes nas demonstrações apresentadas para esse teorema, a partir das representações figurais formadas na janela de visualização do GeoGebra, revela que elas reconheceram o mesmo objeto geométrico por meio de suas diferentes representações (figural, língua natural e simbólico), bem como estabeleceram relações e vínculos existentes entre os diferentes objetos representados.

No Quadro 32 apresentamos uma síntese das respostas apresentadas pelas equipes à tarefa sobre triângulos retângulos, quadriláteros, áreas, Teorema de Pitágoras e seu recíproco, em que foi possível identificar as apreensões e transformações articuladas e coordenadas durante a resolução da tarefa, bem como a ocorrência de objetivação e evidências de dificuldades reveladas pelas equipes.

Quadro 32 - Síntese das respostas apresentadas à tarefa sobre triângulos retângulos, quadriláteros, áreas, Teorema de Pitágoras e seu recíproco.

Questão	Apreensão	Tratamento	Conversão	Objetivação	Dificuldades
Q1	Sequencial Perceptiva Operatória Discursiva	Registro figural: Determinar o ponto C a partir da interseção das retas *r* e *s*.	Registro da língua natural para o registro figural. Registro figural para o registro da língua natural.	Tomar consciência que o triângulo ABC representado refere-se a um triângulo retângulo (todas as equipes).	Não há evidências.
Q2		Registro figural: Determinar o ponto C a partir da interseção das retas *r* e *s*, transportar medidas de segmentos, marcar interseção entre circunferência e reta, traçar retas paralelas e/ou perpendiculares.		Tomar consciência que o quadrilátero CDEP representado refere-se a um quadrado (todas as equipes). Justificativas apresentadas: lados e ângulos congruentes (E2); ângulos congruentes (E1), lados congruentes (E4).	Formar a representação figural do quadrilátero CDEP (E4). Empregar e coordenar termos da linguagem matemática por meio do registro discursivo (língua natural, na sua modalidade escrita (E2), e simbólico, na sua modalidade algébrica (E4)). Confundir objeto com sua representação (E4).
Q3		Registro figural: Determinar o ponto C a partir da interseção das retas *r* e *s*, transportar medidas de segmentos, marcar interseção entre circunferência e reta, traçar retas paralelas e/ou perpendiculares, movimentar os pontos A e B.		Tomar consciência que os triângulos representados são congruentes (todas as equipes).	Usar termos da linguagem matemática que se referem a objetos numéricos no lugar de objetos geométricos (E2). Organizar e coordenar a representação escrita no registro da língua natural (E4).
Q4		Registro figural: Determinar o ponto C a partir da interseção das retas *r* e *s*, transportar medidas de segmentos, marcar interseção entre circunferência e reta, traçar retas paralelas e/ou perpendiculares, movimentar os pontos A e B. Registro simbólico: mostrar por meio de cálculos algébricos que os ângulos do quadrilátero ABFG representados são ângulos retos (E5).	Registro da língua natural para o registro figural. Registro figural para o registro da língua natural. Registro figural para o registro simbólico.	Tomar consciência que o quadrilátero ABFG representado refere-se a um: quadrado (E1, E3, E4 e E5); losango (E2). Justificativas apresentadas: Lados e ângulos congruentes (E1 e E5); Lados congruentes (E2, E3 e E4).	Não há evidências.
Q5		Registro figural: Determinar o ponto C a partir da interseção das retas *r* e *s*, transportar medidas de segmentos, marcar interseção entre circunferência e reta, traçar retas paralelas e/ou perpendiculares, movimentar os pontos A e B. Registro simbólico: Obter por meio de		Tomar consciência sobre a expressão simbólica que representa a área dos triângulos congruentes, bem como aplicar o conceito matemático que possibilita determinar essa expressão (todas as equipes).	Não há evidências.

		cálculos a expressão simbólica referente à área de cada triângulo congruente (E4).			
Q6	Sequencial Perceptiva Operatória Discursiva	Registro Figural: Determinar o ponto C a partir da interseção das retas *r* e *s*, transportar medidas de segmentos, marcar interseção entre circunferência e reta, traçar retas paralelas e/ou perpendiculares, movimentar os pontos A e B.	Registro da língua natural para o registro figural. Registro figural para o registro simbólico.	Tomar consciência sobre a expressão simbólica que representa a área da região delimitada pelo quadrado ABFG representado, bem como aplicar o conceito (axioma) matemático que possibilita determinar essa expressão (todas as equipes).	Não há evidências
Q7		Registro figural: Determinar o ponto C a partir da interseção das retas *r* e *s*, transportar medidas de segmentos, marcar interseção entre circunferência e reta, traçar retas paralelas e/ou perpendiculares, movimentar os pontos A e B. Registro simbólico: Obter por meio de cálculos a expressão simbólica que representa a área do quadrado CDEP representado (E1, E3 e E5).	Registro da língua natural para o registro figural. Registro figural para o registro da língua natural. Registro figural para o registro simbólico.	Tomar consciência sobre a expressão simbólica que representa a área da região delimitada pelo quadrado CDEP representado e aplicar o conceito (axioma) matemático que possibilita determinar essa expressão (todas as equipes).	Não há evidências
Q8		Registro figural: Determinar o ponto C a partir da interseção das retas *r* e *s*, transportar medidas de segmentos, marcar interseção entre circunferência e reta, traçar retas paralelas e/ou perpendiculares, movimentar os pontos A e B. Reconfigurar os triângulos representados no protocolo de registro para favorecer a demonstração do recíproco do Teorema de Pitágoras. Registro da língua natural: Enunciar o recíproco do Teorema de Pitágoras tomando como referência o Teorema de Pitágoras. Registro simbólico: Demonstrar o Teorema de Pitágoras e seu reciproco por meio de cálculos algébricos.	Registro da língua natural para o registro figural. Registro figural para o registro da língua natural. Registro figural para o registro simbólico. Registro da língua natural para o registro simbólico.	Tomar consciência sobre o significado do Teorema de Pitágoras (E1, E2, E3, E4 e E5) e seu recíproco (E1, E2, E3 e E5).	Empregar e coordenar termos da linguagem matemática, os quais se referem a objetos geométricos, no registro da língua natural para enunciar o Teorema de Pitágoras e seu recíproco. Organizar textualmente o enunciado do recíproco do Teorema de Pitágoras. Demonstrar o recíproco do Teorema de Pitágoras.

Fonte: Autor da pesquisa.

Destacamos que a apreensão sequencial (reprodução das figuras na janela de visualização do GeoGebra) ocorreu quando as equipes usaram as ferramentas do *software* para representar triângulos e quadriláteros a partir dos passos e orientações fornecidos pelo professor em sala de aula para o desenvolvimento da tarefa.

Evidenciamos que a apreensão dos objetos geométricos envolvidos nesta tarefa (retas paralelas e perpendiculares, segmentos de retas, vértices, triângulos retângulos congruentes, quadriláteros e suas respectivas áreas, o Teorema de Pitágoras e seu recíproco) ocorreu por meio da coordenação mútua entre os registros da língua natural, figural e simbólico, pela articulação entre as diferentes apreensões que uma figura proporciona, e também, quando as equipes tomaram conhecimento do significado de uma ideia matemática.

Destacamos ainda que quando as equipes realizaram a conversão do registro figural para os registros da língua natural e o simbólico algumas dificuldades foram reveladas pelas equipes, em especial ao emprego e a coordenação de representações discursivas específicas da linguagem matemática, as quais se referem a objetos numéricos no lugar de objetos geométricos, para enunciar o Teorema de Pitágoras e seu recíproco.

Inferimos também a influência do GeoGebra, por meio da aplicação de suas ferramentas, para a realização desta tarefa, pois o *software* potencializou as equipes cumprir as três atividades cognitivas intrínsecas a toda representação semiótica, em que destacamos:

1. Formar representações figurais de triângulos retângulos congruentes e quadrados em sua janela de visualização permitiu as equipes articular as apreensões perceptiva e discursiva das formas, marcas e contornos percebidos de cada um dos objetos geométricos envolvidos.
2. Tratar as representações figurais na janela de visualização potencializou as equipes articular a apreensão operatória com as apreensões perceptiva e discursiva, pois elas determinaram o ponto de interseção de retas perpendiculares, transportaram medidas de segmentos de reta, movimentaram os pontos A e B para levantar hipóteses e, também, traçaram retas paralelas e/ou perpendiculares e segmentos de reta para obter as representações de diferentes objetos geométricos simultaneamente.
3. Converter as representações fornecidas nos passos e orientações (registro discursivo - língua natural e simbólico) para representações figurais na janela de

visualização (registro não discursivo), e o processo inverso, converter representações formadas e tratadas no registro figural para o registro da língua natural e simbólico nos protocolos de registro, bem como perceber a conversão que GeoGebra apresenta simultaneamente na janela de álgebra.

No Quadro 33 apresentamos as atividades cognitivas, os registros mobilizados e coordenados e, também, as ações e ocorrências que foram identificados na resolução da tarefa sobre triângulos retângulos, quadriláteros, áreas, Teorema de Pitágoras e seu recíproco.

Quadro 33 - Identificação de atividades cognitivas, registros de representação semiótica e ações/ocorrências presentes na realização da tarefa sobre triângulos retângulos, quadriláteros, áreas, Teorema de Pitágoras e seu recíproco.

<table>
<tr><th colspan="3">Atividades cognitivas</th><th>Registros mobilizados e coordenados</th><th>Ações/ocorrências</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Formação de representações</td><td rowspan="3">Apreensões perceptiva e sequencial</td><td>Representação não discursiva - figural: pontos, retas, segmentos de retas, triângulos, quadriláteros e circunferências.</td><td>Figural:
GeoGebra e protocolos de registro.</td><td>Reproduzir marcas, contrastes e contornos percebidos (representações figurais).
pontos: A, B, C, ...
retas: r, s, t e u
triângulos: ABC, ...
segmentos de reta: AB, BF, FG, FG, ...
quadriláteros: CDEP e ABFG
circunferências: d, e, f e g (depois foram escondidas).</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Representação discursiva - Língua Natural e Simbólica: caracteres, símbolos algébricos, palavras, frases, expressões simbólicas.</td><td>Língua Natural: GeoGebra
e
protocolos de registro.</td><td>Designar e descrever objetos nominalmente (língua natural).
quadrilátero, lados, raios das circunferências, hipotenusas dos triângulos, catetos, retas perpendiculares, ângulo reto, triângulo retângulo, quadrado, losango, áreas, os triângulos são congruentes, área de dois triângulos congruentes é a mesma, “em um triângulo retângulo, a medida do lado maior ao quadrado é igual a medida dos outros lados ao quadrado somadas”, “se o quadrado da medida de um dos lados do triângulo é igual a soma das medidas ao quadrado dos outros dois lados, então o triângulo é retângulo”.</td></tr>
<tr><td>Simbólico:
GeoGebra
e
protocolo de registro.</td><td>Empregar símbolos para designar objetos e estabelecer relações (letras, algarismos e símbolos matemáticos).
pontos: A, B, C, D, ...
retas: r, s, t e u
segmentos de reta e suas medidas: AB – c, BF – i, FG – j, GA – k
triângulo: ABC – pol1
congruência de triângulos: caso $LA_{\square}L$, caso $LLA_{\square}$ e caso LLL
ângulos congruentes: $E\hat{F}G \equiv P\hat{B}F$
medidas dos lados triângulo retângulo: a, b e c,
soma de medidas de ângulos:
$m(P\hat{B}F) + m(P\hat{F}B) = 90°$
área de triângulos: $A_T = \frac{ab}{2}$
áreas de quadriláteros (quadrados): $A_{CPED} = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, área de ABFG = c^2
relação (teorema) de Pitágoras:
$c^2 = a^2 + b^2$</td></tr>
</table>

Transformação de representações	Apreensões perceptiva e operatória	Tratamento	Figural: GeoGebra e protocolos de registro	Determinar o ponto C (interseção de retas), movimentar os pontos A e B, transportar medidas de segmento, traçar retas paralelas e/ou perpendiculares, decompor quadrilátero em triângulos e quadrado, traçar altura dos triângulos acutângulo e obtusângulo.
			Língua natural: Protocolos de registro	Enunciar o recíproco do Teorema de Pitágoras.
			Simbólico: Protocolos de registro	Calcular medidas de ângulos. Determinar áreas de triângulo e quadrados. Demonstrar o Teorema de Pitágoras e seu recíproco.
	Apreensões perceptiva, operatória e discursiva	Conversão	Língua Natural para Figural	Ilustrar, na janela de visualização do GeoGebra, representações de pontos retas paralelas e perpendiculares, segmentos de retas, triângulos e quadriláteros a partir de passos e orientações fornecidos na tarefa usando diferentes ferramentas do GeoGebra.
			Figural para Língua Natural	Interpretar, descrever, designar, denotar e definir, a partir dos protocolos de registro e da janela de álgebra do GeoGebra, objetos geométricos que foram representados na janela de visualização do GeoGebra de acordo com as questões propostas na tarefa, bem como elencar suas características e propriedades.
			Figural para Simbólico	Estabelecer relações, vínculos e regras associativas de objetos representados na janela de visualização do GeoGebra e protocolos de registro com suas respectivas representações simbólicas na janela de álgebra do GeoGebra e nos protocolos de registro de modo a obter: expressões (numéricas ou algébricas) que representem áreas de triângulo e quadrado, notações de casos de congruência de triângulos, nomes de pontos, retas, segmentos de retas, polígonos etc.
			Língua Natural para Simbólico	Estabelecer correspondências entre objetos representados por meio de textos (palavras, frases, enunciados) nos protocolos de registro e na janela de álgebra do GeoGebra e suas representações simbólicas nos protocolos de registros de modo a obter as expressões simbólicas de áreas de triângulos e quadrados e a relação simbólica para o Teorema de Pitágoras.

Fonte: Autor da Pesquisa.

Nesta tarefa, especialmente sobre o enunciado do Teorema de Pitágoras, destacamos que é natural para maioria das equipes, registrar a frase “o quadrado da hipotenusa” ou “a soma dos quadrados dos catetos”. Inferimos que este fato parece ser uma cultura do estudante adquirida ao longo de sua vida escolar, em que se suprime também, em alguns livros didáticos, a referência às medidas dos catetos e da hipotenusa, pois o Teorema de Pitágoras está fundamentado em objetos numéricos (áreas) e vinculado a objetos geométricos bidimensionais (regiões delimitadas por quadrados).

Neste sentido, as evidências que identificamos nos registros discursivos das equipes devem ser trabalhadas na formação inicial de professores de Matemática, uma vez que dificuldades como essas, segundo os pressupostos teóricos de Duval (2004a, 2011) interferem cognitivamente no reconhecimento de um mesmo objeto matemático por meio de suas diferentes representações. Para superar essa dificuldade sublinhamos que nos cursos de formação inicial de professores de Matemática deve-se discutir como elaborar textos matemáticos de modo a permitir ao futuro professor o emprego adequado de termos que representam objetos matemáticos, pois “o problema didático do domínio da língua não é o conhecimento do vocabulário, mas a capacidade de poder designar muitas coisas com as palavras que se dispõe” (DUVAL, 2011, p.79).

De acordo com Duval (2011), conhecer as palavras implica em tomar consciência das operações de designação e de sua complexidade, pois a produção escrita, diferentemente da oral, requer ações controladas das operações discursivas, principalmente a enunciação de frases. Nesta perspectiva, “para ter consciência das operações discursivas próprias aos raciocínios matemáticos, é preciso passar por uma produção escrita” (DUVAL, 2011, p.82).

Ainda sobre esta tarefa, inferimos que a tomada de consciência pelas equipes sobre os objetos geométricos envolvidos, só foi possível a partir da coordenação de pelo menos dois registros de representação semiótica, ou seja, quando realizaram conversões de representações figurais para representações em língua natural ou simbólicas e o processo inverso, bem como a articulação entre diferentes apreensões relativas a uma figura geométrica, o que corrobora com os pressupostos teóricos de Duval (2004a, 2004b, 2011, 2012a, 2012c).

4.4. Tarefa sobre retas paralelas e perpendiculares, reta perpendicular a plano, plano perpendicular à reta e planos paralelos

Esta tarefa tratou sobre objetos geométricos relacionados a retas perpendiculares a planos, interseções de planos e planos paralelos no espaço. Possibilitou também formar e tratar representações figurais na janela de visualização 3D do GeoGebra e, perceber simultaneamente essas representações convertidas na janela de álgebra do *software*.

Inferimos que a tarefa permitiu as equipes coordenar diferentes representações semióticas (língua natural - modalidade escrita, figural - modalidade geométrica-dinâmica, simbólica - modalidade algébrica) para um mesmo objeto geométrico, bem como articular integradamente as apreensões perceptiva, sequencial, operatória e discursiva, as quais uma figura geométrica dá lugar de modo a perceber e reconhecer características dos objetos geométricos representados, suas propriedades e, também, estabelecer relações existentes entre diferentes objetos.

A tarefa teve duração de 60 minutos e foi guiada por instruções fornecidas pelo professor e por dez questões. Os objetivos da tarefa foram: representar, na janela de visualização 3D do GeoGebra, pontos, retas, planos, retas concorrentes, paralelas, perpendiculares e reversas, interseção entre retas e entre planos, planos determinados por retas reversas, reta perpendicular a plano e planos paralelos, bem como apresentar e justificar discursivamente as relações observadas entre os objetos geometricos representados no *software*. Participaram desta tarefa onze estudantes, organizados em seis equipes, a saber: **E1**: A1, A2 e A8; **E2**: A3 e A9; **E3**: A4 e A7; **E4**: A5 e A6; **E5**: A10 e **E6**: A11.

Evidenciamos que as orientações fornecidas pelo professor para a formação das representações figurais dos objetos geométricos envolvidos nesta tarefa apenas indicaram o que cada equipe deveria fazer, no entanto, não especificaram como construir essas representações, nem mesmo quais ferramentas deveriam ser utilizadas. Assim, cada equipe ficou responsável em construir e tratar todas as representações figurais necessárias para a resolução da tarefa.

De acordo como os pressupostos teóricos de Duval (2004a) observamos nesta tarefa que as equipes mobilizaram e coordenaram, na janela de visualização 3D do GeoGebra, variações visuais, as quais destacamos: **(i) dimensional** - 0D para pontos; 1D para retas e ângulos; 2D para planos e **(ii) qualitativa** - formas, nomes, cores, tamanhos, espessuras e outros elementos qualitativos pertinentes a cada objeto geométrico representado. No Quadro 34 apresentamos os passos e as orientações acerca das representações figurais formadas no GeoGebra, bem como as questões norteadoras da tarefa.

Quadro 34 - Tarefa sobre retas paralelas e perpendiculares, reta perpendicular a plano, plano perpendicular à reta e planos paralelos.

Passos e orientações para a formação de representações figurais no GeoGebra

i. Considere uma reta r dada e um ponto P qualquer.
ii. Construa dois planos distintos α_1 e α_2, contendo a reta r.
iii. Seja B um ponto qualquer de r.
iv. Construa uma reta s_1, contida em α_1 passando por B e perpendicular a r.
v. Construa uma reta s_2, contida em α_2 passando por B e perpendicular a r.
vi. Construa o plano $\beta = \text{pl}(s_1, s_2)$.

Questão 1: Qual é a relação que existe entre o plano β e a reta r? Justifique sua resposta.

vii. Construa um plano α passando por P e paralelo a β.

Questões:

2. Qual é a relação que existe entre o plano α e a reta r? Justifique sua resposta.
3. Observando que começamos a construção com uma reta e um ponto qualquer, o que se pode concluir com a resposta dada em 2?
4. Será que o plano α é o único com a propriedade obtida em 2? Justifique sua resposta.

viii. Considere um plano α dado e um ponto P qualquer.
ix. Construa duas retas distintas r_1 e r_2, contidas no plano α e concorrentes em um ponto A.
x. Construa dois planos distintos β_1 e β_2 passando por A e perpendiculares a r_1 e r_2.

Questão 5: Por que é possível construir esses dois planos?

xi. Considere a reta $r' = \beta_1 \cap \beta_2$.

Questões:

6. Qual é a relação que existe entre a reta r' e as retas r_1 e r_2? Justifique sua resposta.
7. Qual é a relação que existe entre a reta r' e o plano α?

xii. Construa a reta r passando por P e paralela à reta r'.

Questões:

8. Qual é a relação que existe entre o plano α e a reta r? Justifique sua resposta.
9. Observando que começamos a construção com um plano e um ponto qualquer, o que se pode concluir com a resposta dada em 8?
10. Será que a reta r é a única com a propriedade obtida em 8? Justifique sua resposta.

Fonte: Notas de aula do professor.

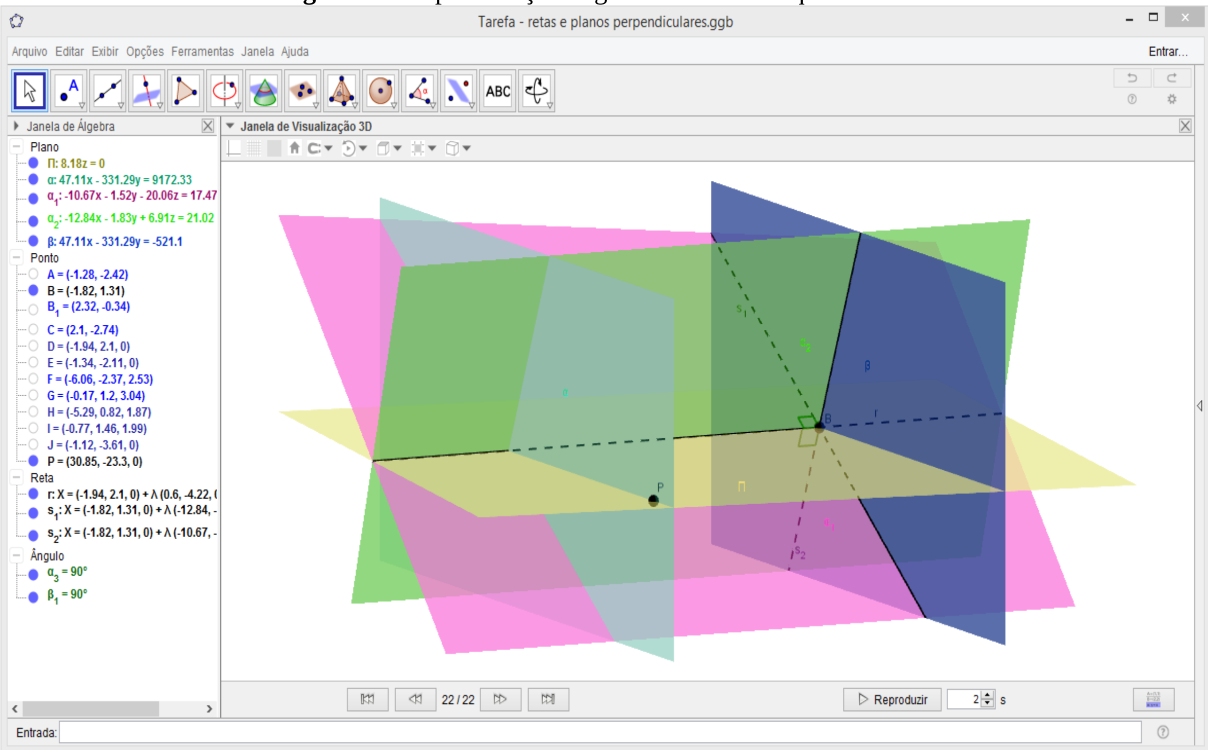
De acordo com Duval (2011, p.85) “ver uma figura é reconhecer imediatamente as formas, isto é, os contornos fechados justapostos, superpostos, separados”. Além disso, uma figura geométrica resulta da conexão entre as apreensões perceptiva e discursiva (MORETTI, BRANDT, 2015), pois a figura deve ser “vista” a partir de indicações verbais vinculadas à ela (palavras, símbolos algébricos ou numéricos etc.) e não simplesmente das formas e propriedades percebidas visualmente, ou seja, é preciso “ver” a figura a partir de suas hipóteses, em que deve prevalecer as propriedades geométricas sobre as formas reconhecidas visualmente, pois a introdução à uma figura geométrica ocorre necessariamente de maneira discursiva (conexão entre língua natural e linguagem simbólica) sobre aquilo que é dito da figura (DUVAL, 2004a; DUVAL, GODIN, 2005; MORETTI, BRANDT, 2015).

Na perspectiva desses autores e a partir das instruções fornecidas na tarefa e, também, da articulação entre as diferentes apreensões próprias de uma figura geométrica, as equipes formaram, na janela de visualização 3D do GeoGebra, representações figurais com características semelhantes às figuras 30 e 31, respectivamente.

Na janela de visualização 3D do GeoGebra é possível perceber em profundidade (a partir de diferentes pontos de vista e por meio de formas, cores, granulação, tamanhos etc.) as representações figurais contidas no espaço tridimensional e, também, as propriedades visuais dessas formas permitindo dessa maneira estabelecer vínculos existentes entre diferentes objetos.

Salientamos que a possibilidade dinâmica da janela de visualização 3D do GeoGebra permitiu realizar movimentos latitude e longitudinais e de translação, o que favoreceu a percepção visual de uma figura em diferentes ângulos, possibilidade essa que em um meio estático (lousa-giz, caderno-lápis etc.) de produção de representações figurais não se verifica instantaneamente. Inferimos que essa é uma das principais vantagens de se usar o ambiente de geometria dinâmica para potencializar a apreensão dos objetos geométricos contidos no espaço euclidiano.

Figura 30: Representações figurais relativas às questões 1-4.



Fonte: Autor da pesquisa.

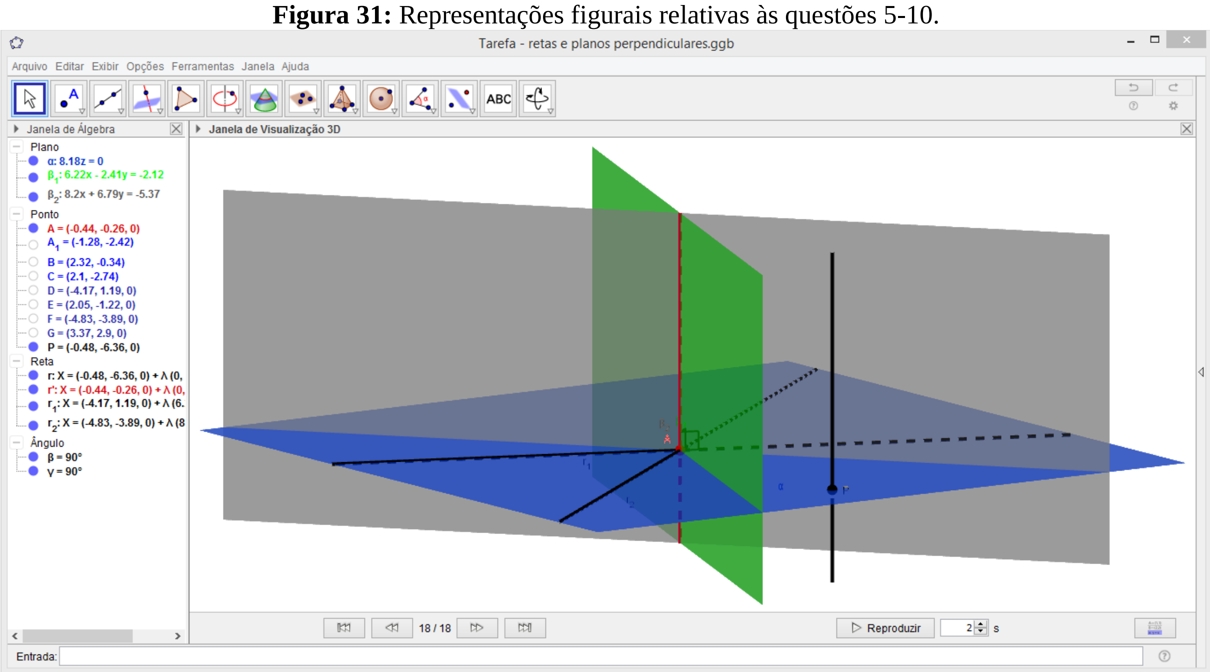
Segundo Duval (2004a) as variações visuais, em particular as qualitativas, podem ser utilizadas para favorecer a leitura de uma figura. Como exemplo, este autor cita que a variável “cor” pode ser uma componente importante quando se tratar de figuras que representam objetos geométricos do espaço, no entanto, essa variável só é adotada para dar destaque nas representações figurais, pois dentre as variáveis visuais qualitativas de uma figura é somente a variável forma “que pode, de maneira intrínseca, determinar uma unidade de base representativa para as figuras geométricas” (DUVAL, 2004a, p.158).

Além disso, cada representação figural é, de acordo com Duval (2004a, 2011), necessariamente orientada por uma designação verbal como, por exemplo, o plano β, a reta r, e o ponto P contidos na Figura 30. No entanto, não podemos dizer apenas “o ponto” ou “a reta” ou “o plano” para designar unidades figurais evidenciadas, por exemplo, na Figura 30 há representações dos pontos B e P, das retas r, s_1 e s_2 e dos planos Π, α, β, α_1 e α_2. De acordo com Duval (2011) sem essa designação verbal, nenhuma outra propriedade geométrica pode ser mobilizada ou estabelecida.

Neste prisma, e no que diz respeito às estratégias e conhecimentos geométricos mobilizados e coordenados pelas equipes para o desenvolvimento das quatro primeiras questões, observamos em aula que elas formaram na janela de visualização 3D do GeoGebra as representações: de um plano Π (construção básica, ou seja, construção base para as demais representações no espaço) a partir de três pontos distintos e não colineares (ferramenta “plano por três pontos”); da reta r e do ponto P pertencentes ao plano Π; dos planos α_1 e α_2 passando pela reta r (para isso criaram dois pontos distintos e não pertencentes ao plano Π e com a ferramenta “plano - um ponto e uma reta” determinam os planos solicitados); do ponto B contido na reta r; de duas retas s_1 e s_2 perpendiculares à reta r traçadas pelo ponto B (cada uma das retas pertencente a cada um dos planos α_1 e α_2, em que calcularam as medidas dos ângulos entre a reta r e as retas s_1 e s_2 de modo a evidenciar a marca de ângulo reto); do plano β por meio da ferramenta “plano - duas retas” e, finalmente, do plano α paralelo ao plano β passando pelo ponto P em que usaram a ferramenta “plano paralelo - um ponto e um plano paralelo”.

Na Figura 31, apresentamos a representação figural correspondente às respostadas dadas pelas equipes às seis últimas questões propostas na tarefa.

Figura 31: Representações figurais relativas às questões 5-10.



Fonte: Autor da pesquisa.

Analogamente, para as representações figurais referentes às seis últimas questões destacamos que as equipes: formaram o plano α (construção básica) a partir de três pontos distintos e não colineares; marcaram o ponto P contido em α; traçaram as retas r_1 e r_2 concorrentes e pertencentes ao plano α; determinaram o ponto A (ponto de interseção de r_1 e r_2); formaram os planos β_1 e β_2 passando por A e perpendiculares às retas r_1 e r_2, respectivamente (ferramenta “plano perpendicular - um ponto e uma reta perpendicular”); determinaram a reta r' a partir da interseção dos planos β_1 e β_2 (ferramenta “interseção de duas superfícies”); calcularam as medidas dos ângulos entre as retas r_1 e r' e entre as retas r_2 e r', bem como, traçaram pelo ponto P a reta r paralela à reta r' (ferramenta “reta paralela - ponto e reta”).

Exprimimos que as representações figurais correspondentes às quatro primeiras questões e às seis últimas levaram as equipes ao reconhecimento da relação de perpendicularismo entre reta e plano, ou seja, as respostas revelaram indicativos da tomada de consciência desses objetos geométricos e suas relações, pois “é preciso se expressar para si e para os outros para poder tomar consciência” (DUVAL, 2011, p.81).

Inferimos que o fator determinante para essa objetivação foi potencializado pela integração entre o processo de construção das representações na janela de visualização 3D do GeoGebra e os resultados geométricos (teoremas, proposições etc.) coordenados para ancorar a argumentação apresentada em língua natural, na sua modalidade escrita, para cada uma das questões da tarefa. Segundo Duval (2011) é por meio da produção escrita que se tem consciência das operações discursivas relativas aos raciocínios matemáticos.

Ao formar as representações figurais, as equipes apresentaram discursivamente, em língua natural, na sua modalidade escrita, suas respostas para as dez questões que nortearam o desenvolvimento da tarefa.

Destacamos que as respostas foram dadas em virtude da integração entre os registros figural (GeoGebra) e língua natural (protocolos de registro), da articulação entre as apreensões **perceptiva** (perceber visualmente pontos, retas concorrentes, perpendiculares e reversas, planos paralelos, interseção entre planos, marcas de ângulo reto, reta perpendicular a plano e plano perpendicular à reta), **sequencial** (reproduzir todas as figuras necessárias conforme as instruções fornecidas na tarefa), **operatória** (marcar ponto sobre reta, marcar ângulo reto e calcular sua medida, determinar plano passando por retas reversas, determinar interseção entre retas e entre planos, traçar retas perpendiculares, traçar retas paralelas, traçar planos paralelos, movimentar a janela de visualização 3D para variar orientação, rotação e translação) e **discursiva** (tecer hipóteses acerca dos objetos geométricos representados e estabelecer relações de paralelismo entre retas e entre planos e perpendicularismo entre reta e plano) relativas às figuras formadas, da tomada de consciência dos objetos geométricos veiculados na tarefa e suas propriedades e, também, da possibilidade de reconhecer esses objetos por meio de suas diferentes representações (figural, língua natural e simbólico).

Sublinhamos que nessa fase de desenvolvimento da disciplina (janeiro de 2016), esta tarefa também teve por objetivo verificar se os estudantes conseguiriam justificar suas respostas, por meio de resultados geométricos estudados anteriormente, pois até então as equipes conheciam o teorema que garante que uma reta é perpendicular a um plano quando ela for ortogonal à duas retas concorrentes do plano e, com isso, justificar o perpendicularismo entre plano e a reta, construídos na janela de visualização 3D do GeoGebra.

As respostas apresentadas pelas equipes **à primeira questão** (Qual é a relação que existe entre o plano β e a reta *r*? Justifique sua resposta.) foram:

> Equipe E1: *"r é perpendicular a β, pois s_1 e s_2 (por construção) são perpendiculares a r e estão contidas em β".*
>
> Equipe E2: *"A reta r é perpendicular ao plano β. Note que a reta s_1 por hipótese é perpendicular à reta r, mas s_1 também pertence ao plano β. Pelo teorema 12.8*[24]*, podemos concluir que se r é perpendicular à reta s_1, então Π é perpendicular a β. Então, concluímos que a reta r é perpendicular ao plano β".*
>
> Equipe E3: *"A reta r é perpendicular ao plano β".*
>
> Equipe E4: *"A reta r é perpendicular ao plano β. Por construção a reta r é ortogonal a s_1 e s_2, onde s_1 e s_2 são duas retas concorrentes contidas no plano β. Logo, pelo teorema 12.4*[25]*, segue que r é perpendicular a β".*
>
> Equipe E5: *"A reta r é perpendicular ao plano, pois ela é ortogonal a duas retas concorrentes de β".*
>
> Equipe E6: *"A reta r é perpendicular ao plano β, pois r é ortogonal a duas retas concorrentes do plano β".*

Em relação à primeira questão, todas as seis equipes responderam que a reta r e o plano β são perpendiculares. Isso evidencia a tomada de consciência de cada equipe (a reta r é

---

[24] Teorema 12.8: Dois planos Π e Λ são perpendiculares se, e somente se, um deles contém uma reta perpendicular ao outro (GERÔNIMO, FRANCO, 2010, p.219).

[25] Teorema 12.4: Se uma reta r é ortogonal a um par de retas concorrentes de um plano Π, então r é perpendicular a Π (GERÔNIMO, FRANCO, 2010, p.213).

perpendicular ao plano β) a partir da articulação entre as diferentes apreensões relativas às figuras geométricas formadas na janela de visualização 3D do GeoGebra, das atividades cognitivas de formação e tratamento e da coordenação entre os registros figural e língua natural.

As justificativas apresentadas pelas equipes E1 e E4 foram baseadas no processo de construção, pois como as retas r e s_1 são perpendiculares (pertencem ao plano α_1) e r e s_2 também o são (pertencem ao plano α_2), o plano β foi determinado pelas retas concorrentes s_1 e s_2, logo a reta r (não contida em β) e o plano β são perpendiculares. Além disso, a equipe E4 assentou sua justificativa por meio de um teorema (explicitou o teorema 12.4) que trata especificamente de reta e plano perpendiculares quando essa reta não pertence ao plano, mas é ortogonal a duas retas concorrentes deste plano.

Destacamos ainda que as justificativas apresentadas pelas equipes E5 e E6 também foram fundamentadas no teorema 12.4, no entanto, não explicitaram referência a esse teorema, o que não significa ausência de compreensão, pois cada justificativa revela indicativos da realização de tratamento (paráfrase) no enunciado do teorema, uma vez que a produção escrita das equipes apresenta uma reformulação desse enunciado.

A equipe E2 justificou sua resposta a partir de um teorema que trata sobre perpendicularismo entre planos, mas o teorema referido pela equipe E2 não poderia ser aplicado para justificar que a reta r é perpendicular ao plano β. No entanto, em sua justificativa, a equipe E2 apresentou indicativos da razão dessa perpendicularidade, em que evidencia que a retas r e s_1 são perpendiculares e s_1 pertence ao plano β, porém, não registrou uma consideração análoga à reta s_2. Neste sentido, inferimos uma tomada de consciência parcial da equipe E2 no que diz respeito à sua argumentação revelada.

A equipe E3 não apresentou uma justificativa para o fato da reta r ser perpendicular ao plano β, no entanto, inferimos que sua resposta ocorreu em virtude do processo de construção (formação e tratamentos) mobilizado e coordenado no GeoGebra.

As respostas apresentadas pelas equipes **à segunda questão** (Qual é a relação que existe entre o plano α e a reta r? Justifique sua resposta.) foram:

Equipe E1: *"r também é perpendicular a α, pois r é perpendicular a β e α é paralelo a β".*

Equipe E2: *"O plano α é perpendicular a reta r".*

Equipe E3: *"O plano α é perpendicular a reta r, pois o plano α é paralelo ao plano β".*

Equipe E4: *"Temos que a reta r é perpendicular ao plano α. Como α e β são paralelos por construção, podemos encontrar duas retas s_1' e s_2' no plano α, paralelo as retas s_1 e s_2 no plano β. Pelo mesmo fato explicado na questão anterior, temos s_1' e s_2' duas retas concorrentes contidas no plano α com r ortogonal a ambas. Logo, r é perpendicular a α".*

Equipe E5: *"A reta r é perpendicular ao plano α".*

Equipe E6: *"A reta r é perpendicular ao plano α, pois será possível construir em α duas retas que serão concorrentes e uma paralela a s_1 e outra paralela a s_2. O ponto onde tais retas concorrem deve pertencer a r, por construção, o que fará com que r seja ortogonal a duas retas concorrentes de α".*

A segunda questão também teve por objetivo perceber a relação de perpendicularismo entre reta e plano, no entanto, a partir da relação de paralelismo entre planos.

No que diz respeito às respostas apresentadas, as seis equipes afirmaram que a reta r e o plano α são perpendiculares. A princípio, essa resposta foi estimulada, segundo os pressupostos teóricos de Duval (2004a, 2012a, 2012c) e Duval e Godin (2005), pelo reconhecimento visual das unidades figurais e das propriedades visuais dessas formas. No entanto, é por meio da argumentação discursiva que se revela o conhecimento de propriedades geométricas mobilizadas e coordenadas que devem prevalecer sobre as formas visualmente percebidas e reconhecidas.

Em relação à segunda questão, todas as equipes responderam que a reta r e o plano α são perpendiculares, o que mostra, como na primeira questão, tomada de consciência das equipes sobre os objetos geométricos envolvidos nesta questão a partir das diferentes apreensões que uma figura dá lugar e da coordenação entre os registros figural e língua natural.

As justificativas apresentadas pelas equipes E1, E3, E4 e E6 assentam no paralelismo entre os planos α e β. Além disso, as equipes E4 e E6 argumentaram que existe no plano α uma reta paralela para cada uma das retas s_1 e s_2 pertencentes ao plano β, de modo que essas retas concorrem entre si em um ponto que pertence também a reta r. Logo, a reta r é ortogonal (perpendicular) a duas retas concorrentes do plano α e, portanto, a reta r é perpendicular ao plano α. Salientamos que as equipes E2 e E5 não apresentaram uma justificativa sobre o perpendicularismo entre a reta r e o plano α, porém, inferimos que estas equipes sabiam que os planos α e β eram paralelos, em virtude dos passos e orientações que potencializaram os processos de formação e tratamento das representações figurais no GeoGebra.

As respostas apresentadas pelas equipes **à terceira questão** (Observando que começamos a construção com uma reta e um ponto qualquer, o que se pode concluir com a resposta dada em 2?) foram:

Equipe E1: *"Dada uma reta, quaisquer planos perpendiculares à reta serão paralelos entre si".*

Equipe E2: *"Qualquer plano paralelo a β é perpendicular a reta r".*

Equipe E3: *"Dada uma reta e um plano perpendicular a essa reta, eles serão paralelos entre si".*

Equipe E4: *"Por um ponto P dado, só podemos traçar um único plano α perpendicular a uma reta r dada arbitrária".*

Equipe E5: *"Independente das retas do começo, tomando suas perpendiculares, construímos planos que tenham tais retas perpendiculares".*

Equipe E6: *"Que a partir de um ponto fora de uma reta é possível construir um plano perpendicular a essa reta".*

A terceira questão solicitou às equipes que explicitassem uma conclusão a partir da resposta apresentada à segunda questão, a qual foi unânime em evidenciar que a reta r é perpendicular ao plano α, tomando como referência inicial uma reta e um ponto qualquer. Observamos que o objetivo desta questão era que as equipes percebessem que sempre é possível construir um plano perpendicular a uma reta qualquer, passando por um ponto qualquer. A construção desse resultado foi realizada pelas equipes no GeoGebra a partir dos itens i ao vii dados nas instruções da tarefa.

As equipes E1 e E3 apresentaram uma resposta na mesma direção, em que evidenciaram que se uma reta é perpendicular a dois planos distintos, então esses planos são paralelos. Destacamos que, por construção, os planos α e β são paralelos, no entanto, inferimos que a conexão entre as apreensões perceptiva (perceber visualmente a reta r, o ponto P e os planos α e β) e discursiva (hipóteses levantadas sobre as figuras construídas) e as modificações (tratamentos) realizadas no GeoGebra favoreceram essas equipes a concluírem que a relação de planos perpendiculares a uma mesma reta implica que tais planos são paralelos.

A conclusão apresentada pela equipe E2 evidencia também que quando dois planos são paralelos, a reta que é perpendicular a um deles também será perpendicular ao outro. As equipes E4 e E6 concluíram que com uma reta e um ponto, pode-se traçar um plano perpendicular a essa reta. Destacamos que a equipe E4, em seu registro discursivo, considerou um ponto P qualquer (pertencente ou não a reta dada) e que o plano que passa por esse ponto é o único plano perpendicular à reta. Já a equipe E6 destacou discursivamente (em língua natural, na sua modalidade escrita) que o ponto não pertence à reta e que por esse ponto passa um plano perpendicular. No entanto, as sutilezas nas respostas apresentadas por essas equipes não significam que a equipe E6 não compreendeu, uma vez que exteriorizou aquilo que tomou consciência dos objetos geométricos e de forma correta.

A resposta apresentada pela equipe E5 revela que é possível construir planos que contenham retas perpendiculares às primeiras retas (referente às retas r, s_1 e s_2), o que está correto. No entanto, essa conclusão não estabelece uma relação entre paralelismo e perpendicularismo, conforme sua resposta apresentada à segunda questão.

Destacamos que diferentes respostas foram dadas pelas equipes à terceira questão, uma vez que para apresentá-las exploraram ferramentas do GeoGebra e perceberam possíveis relações existentes entre os objetos geométricos representados figuralmente, o que evidencia, por meio de suas produções escritas, que reconhecem um mesmo objeto geométrico por meio da coordenação de diferentes representações semióticas, fato este que contribui, segundo os pressupostos teóricos de (Duval, 2004a), para a apreensão dos objetos geométricos envolvidos na questão.

Salientamos também que em uma tarefa de natureza aberta é possível que respostas inesperadas sejam apresentadas, no entanto, elas devem ser coerentes com a proposta e as condições fornecidas pela tarefa.

Neste sentido, a equipe E1 escreveu uma resposta que não foi obtida por meio da construção, já que o plano α foi construído paralelo ao plano β e, portanto, não foi demonstrado o afirmado pela equipe E1 (planos perpendiculares a uma mesma reta são paralelos). Já a equipe E2 fez uma observação que está relacionada com a questão, apenas não especificou que o plano construído (plano β) passava pelo ponto P dado.

Quando a equipe E3 escreveu *"Dada uma reta e um plano perpendicular a essa reta, eles serão paralelos entre si",* várias questões poderiam surgir como, por exemplo: Quando foi dado uma reta e um plano perpendicular a reta? Quem será paralelo entre si? A reta e o plano, que eram perpendiculares? Portanto, a resposta não tem coerência com o que foi solicitado na questão, nem com o que foi construído na janela de visualização 3D do GeoGebra.

A resposta da equipe E5 *"Independente das retas do começo, tomando suas perpendiculares, construímos planos que tenham tais retas perpendiculares"*, nos leva refletir, o que significa tomar suas perpendiculares? A produção escrita da equipe E5 não apresenta indicativos de objetivação sobre o fato que existem, no espaço, infinitas retas perpendiculares a uma reta dada, mesmo que por um ponto dado. Salientamos que esta tarefa foi proposta no momento que a disciplina de Geometria Euclidiana estava no início dos estudos sobre conceitos e resultados da geometria espacial.

As respostas apresentadas pelas equipes **à quarta questão** (Será que o plano α é o único com a propriedade obtida em 2? Justifique sua resposta.) foram:

Equipe E1: *"Não. Devido a resposta dada em 3".*
Equipe E2: Não respondeu.
Equipe E3: *"Não. Qualquer plano paralelo a β é perpendicular a reta r".*
Equipe E4: *"Sim. Suponhamos que α e α' são perpendiculares a uma reta r, e ambos os planos passando por P. Pela proposição 12.5*[26]*, temos que*

[26] Proposição 12.5: (a) Duas retas distintas r e r' perpendiculares a um mesmo plano são paralelas. (b) Dois planos distintos Π e Π' perpendiculares a uma mesma reta são paralelos (GERÔNIMO, FRANCO, 2010, p. 2014).

α e α' são paralelos. Logo não podem conter o ponto P. Portanto, α é o único plano perpendicular a reta r".

Equipe E5: *"Não. Todo feixe de planos paralelos a α terá r sendo sua perpendicular".*

Equipe E6: *"Passando por P, sim. Não consigo encontrar a justificativa".*

Para responder a quarta questão as equipes deveriam tomar como referência a resposta dada à segunda questão, ou seja, a relação apontada foi a de perpendicularismo entre o plano α e a reta r. Observamos que o plano α foi construído a partir do ponto P e paralelo ao plano β.

Destacamos que a equipe E2 não respondeu essa questão, por isso nada podemos afirmar sobre a ocorrência da apreensão dos objetos geométricos e suas relações. As equipes E1, E3 e E5 indicaram que o plano α não é o único plano perpendicular à reta r, uma vez que para essas equipes é possível traçar quantos planos se desejar paralelos ao plano β, o que não está errado, pois é possível traçar tais planos paralelos os quais serão perpendiculares à reta r.

Inferimos que essa resposta foi concluída a partir da articulação entre as apreensões **perceptiva** (quando as equipes perceberam visualmente o plano α, o ponto P e reta r) e **discursiva** (as hipóteses suscitadas: o plano α foi construído paralelo ao plano β, que por sua vez foi construído perpendicular à reta r, o que implica em existir outros planos paralelos ao plano β perpendiculares à reta r) das equipes acerca das representações figurais formadas na janela de visualização 3D do GeoGebra. No entanto, existe um resultado (Teorema 12.6[27]) que garante que pelo ponto P passa um único plano perpendicular à reta r, e a partir desse resultado, as equipes E4 e E6 responderam que α é o único plano que passa por P e é perpendicular à reta r. Salientamos que a equipe E6 não apresentou uma justificativa em sua resposta, mas exteriorizou sua preocupação (angústia) em não conseguir argumentar sobre o fato do plano α ser o único plano perpendicular à reta r passando por P.

A justificativa apresentada pela equipe E4 está correta, pois coordenou o registro discursivo, em língua natural, na sua modalidade escrita, para referenciar e designar os objetos geométricos envolvidos na situação, bem como para ancorar sua resposta em resultados da Geometria Euclidiana. Esse processo de argumentação da equipe E4 evidencia o

[27] Teorema 12.6: (a) Por um ponto P dado, podemos traçar um único plano Π perpendicular a uma reta *r* dada. (b) Por um ponto P dado, podemos traçar uma única reta *r* perpendicular a um plano Π dado. (GERÔNIMO, FRANCO, 2010, p. 2015).

reconhecimento de objetos geométricos por meio de suas diferentes representações, o que revela a tomada de consciência dos entes geométricos compreendidos na quarta questão.

Destacamos que o professor fez a correção das quatro primeiras questões, com a participação das equipes, antes mesmo delas responderem as questões 5-10. A seguir explicitamos as respostas das equipes **à quinta questão** (Por que é possível construir esses dois planos?).

Equipe E1: *"Podemos construir β_1 e β_2. Seja $r_1' \in \alpha$ a reta perpendicular a r_1 e seja t a reta perpendicular ao plano α e concorrente com r_1'em um ponto A. Então, pela proposição 10.5*[28]*, podemos determinar o plano β_1. De modo análogo, seja $r_2' \in \alpha$ a reta perpendicular a r_2 e seja t a reta perpendicular ao plano α e concorrente com r_2'em um ponto A. Então, pela proposição 10.5, podemos determinar o plano β_2."*.

Equipe E2: *"Por um ponto e uma reta conseguimos passar um plano perpendicular a ela"*.

Equipe E3: *"Para cada reta dada contida no plano, conseguimos construir um plano perpendicular"*.

Equipe E4: *"Por um ponto A e uma reta conseguimos construir um único plano perpendicular, como temos duas retas, conseguimos construir dois planos"*.

Equipe E5: *"Tendo um resultado que ao ter um ponto e uma reta, existe um plano perpendicular a essa reta passando pelo ponto"*.

Equipe E6: *"Porque existem planos perpendiculares a retas passando por pontos específicos"*.

As respostas apresentadas à quinta questão referem-se aos planos β_1 e β_2 e evidenciaram a recorrência aos conhecimentos de resultados geométricos já estudados na disciplina no que diz respeito à determinação de planos a partir de retas concorrentes, bem como traçar plano perpendicular a uma reta passando por um ponto, que foi realizado no GeoGebra com a ferramenta "plano perpendicular".

Inferimos que as equipes E2, E3, E4, E5 e E6 responderam corretamente a quinta questão, em que tomaram como aporte teórico o resultado do teorema 12.6 (a) e que tinha acabado de ser

[28] Proposição 10.5: Se duas retas *r* e *s* são concorrentes em um ponto A, então elas determinam um único plano (GERÔNIMO, FRANCO, 2010, p. 185).

demonstrado na primeira parte da tarefa. Esse fato revela a preocupação dessas equipes em assentar sua resposta em resultados da Geometria Euclidiana, em que foi necessário mobilizar e coordenar o registro da língua natural, na sua modalidade escrita, para justificar as construções figurais dos planos β_1 *e* β_2 na janela de visualização 3D do GeoGebra.

Dentre as respostas dessas equipes, destacamos a da equipe E4 em que salientou que por um ponto e uma reta passa um único plano perpendicular à reta e como existem duas retas concorrentes, r_1 e r_2, no ponto A, é possível construir os planos β_1 e β_2. Já as demais equipes (E2, E3, E5 e E6) consideraram que dados uma reta e um ponto, existe um plano que passa por esse ponto e é perpendicular a reta.

A resposta apresentada pela equipe E1 não está plenamente correta, pois o fator relevante para isso está em não evidenciar no registro discursivo, na sua modalidade escrita, que as retas $r_1{}'$e r_1 se intersectam no ponto A. Acreditamos que essa era a ideia da equipe E1 e, por um momento de distração, não observou que as duas retas *(*$r_1{}'$e r_1*)* tinham que passar pelo ponto A assim como registrou para as retas t e $r_1{}'$. Destacamos que existem infinitas retas no plano que satisfazem a afirmação que a equipe apresentou "*Seja* $r_1{}' \in \alpha$ *a reta perpendicular a* r_1*"*. Além disso, o conjunto dos elementos que constituíram a resposta apresentada pela equipe E1 revela que considerou resultados geométricos diferentes das demais equipes para sustentar seus argumentos. Para isso, a equipe citou explicitamente a proposição 10.5, a qual garante que duas retas concorrentes em um ponto determinam um único plano e, implicitamente, o teorema 12.4, o qual garante a perpendicularidade entre reta e plano. Entretanto, salientamos que a construção envolvendo os itens viii-xii não leva à resposta apresentada pela equipe.

De acordo com o conteúdo da resposta apresentada pela equipe E1 as retas r_1 e $r_1{}'$ (ambas contidas no plano α) são perpendiculares e as retas $r_1{}'$ e t (a reta t não está contida no plano α) também são perpendiculares. Logo, as retas $r_1{}'$ e t determinam o plano β_1, que é perpendicular à reta r_1 e, por um processo análogo, o plano β_2 é perpendicular à reta r_2. Inferimos que o processo cognitivo revelado pela equipe E1 para responder a terceira questão, a partir de conhecimentos e resultados geométricos mobilizados e distintos das outras equipes, evidencia a sua tomada de consciência sobre a possibilidade de se construir planos perpendiculares a retas concorrentes. Por outro lado, a resposta apresentada pela equipe parece demonstrar que ela não compreendeu o resultado obtido na primeira parte da tarefa (por uma reta e um ponto qualquer é possível construir um plano perpendicular à reta passando pelo ponto).

Destacamos que as respostas reveladas pelas equipes E2, E3, E4, E5 e E6 nesta quinta questão evidenciam a pertinência da coordenação de representações escritas sobre as representações figurais para que se possa sustentar, a partir de resultados geométricos estudados, a reprodução ou construção de uma figura geométrica, bem como para elencar hipóteses e propriedades geométricas suscitadas a partir da apreensão discursiva relativa à figura formada, independentemente do modo fenomenológico (dinâmico ou estático) de produção de representações figurais (DUVAL, 2004a; DUVAL, GODIN, 2005).

As respostas apresentadas pelas equipes **à sexta questão** (Qual é a relação que existe entre a reta *r'* e as retas r_1 e r_2? Justifique sua resposta.) foram:

> Equipe E1: *"r' é perpendicular a r_1 e r_2, pois r' pertence aos planos que são perpendiculares a α em r_1 e r_2".*
>
> Equipe E2: *"r' é perpendicular as retas r_1 e r_2".*
>
> Equipe E3: *"r' é perpendicular a r_1 e r_2, pois r_1 e r_2 são concorrentes em A, r' intercepta A no plano α e r' pertence aos planos β_1 e β_2 perpendiculares às retas r_1 e r_2".*
>
> Equipe E4: *"A reta r' é perpendicular às retas r_1 e r_2, pois os planos β_1 e β_2 são perpendiculares em relação a r_1 e r_2. Logo, $\beta_1 \cap \beta_2$ é uma reta, que passa pelo ponto A e é perpendicular".*
>
> Equipe E5: *"A reta r' é perpendicular a r_1 e r_2, pois β_1 e β_2 são perpendiculares ao primeiro plano em r_1 e r_2".*
>
> Equipe E6: *"A reta r' é perpendicular às retas r_1 e r_2, pois r' é a interseção dos planos β_1 e β_2 que são perpendiculares a r_1 e r_2".*

Para responder à sexta questão as equipes tomaram como referência a reta determinada pela interseção (tratamento figural) entre os planos β_1 e β_2, a qual foi designada por reta r'. Todas as equipes responderam corretamente que a relação existente entre a reta r' e as retas r_1 e r_2 é o de perpendicularismo.

Como justificativa (apresentada em língua natural, na sua modalidade escrita), as equipes E1, E3, E4, E5 e E6 argumentaram que os planos β_1 e β_2 são perpendiculares às retas r_1 e r_2 (no ponto A) e, consequentemente a interseção desses planos, que é a reta r', também é perpendicular às retas r_1 e r_2 no ponto A. Nessta questão, a equipe E2 não apresentou uma justificativa. Neste caso, sua resposta pode ter sido estimulada apenas pelas representações figurais formadas na janela de visualização 3D do GeoGebra, uma vez que não apresentou uma produção escrita (nem oral) para sustentar a relação de perpendicularismo entre as retas envolvidas.

De acordo com os pressupostos teóricos de Duval (2004a, 2012a, 2012c) as respostas apresentadas pelas equipes indicam a tomada de consciência sobre a relação existente entre os objetos geométricos solicitados na questão (perpendicularismo entre retas), a qual foi potencializada pela articulação das apreensões **perceptiva** (perceber visualmente as retas r_1 e r_2 contidas no plano α e concorrentes no ponto P, os planos β_1 e β_2 perpendiculares às retas r_1 e r_2 e a reta r' obtida da interseção desses planos e ângulo reto formado por essas retas), **sequencial** (coordenar o processo de construção das representações figurais por meio das ferramentas do GeoGebra), **operatória** (determinar a reta r' a partir da interseção dos planos β_1 e β_2 perpendiculares às retas r_1 e r_2 e marcar ângulo reto entre a reta *r'* e as retas r_1 e r_2) e **discursiva** (tecer hipótese sobre a reta r' em relação às retas r_1 e r_2 e usar argumentos geométricos, ou por construção, para ancorar tal hipótese) e, os conhecimentos sobre resultados geométricos e a coordenação entre os registros figural e língua natural.

As respostas apresentadas pelas equipes **à sétima questão** (Qual é a relação que existe entre a reta r' e o plano α?) foram:

Equipe E1: *"r' é perpendicular ao plano α, pois pelo Teorema 12.4, r' é ortogonal a r_1 e r_2 e assim perpendiculares a α".*
Equipe E2: *"r' é perpendicular ao plano α".*
Equipe E3: *"r' é perpendicular ao plano α".*
Equipe E4: *"A reta r' é perpendicular ao plano α".*
Equipe E5: *"A reta r' é perpendicular ao plano α".*
Equipe E6: *"A reta r' é perpendicular ao plano α".*

Destacamos que a sexta questão solicitou as equipes a relação existente entre as retas r' e r_1 e entre as retas r' e r_2, uma vez que os planos β_1 e β_2 foram construídos perpendiculares às retas r_1 e r_2 no ponto A, e a reta r' foi determinada pela interseção desses dois planos. Assim, a resposta para a sexta questão foi unânime, ou seja, a reta r' é perpendicular a cada uma das retas r_1 e r_2 no ponto A.

Neste sentido, a partir dos argumentos geométricos evidenciados na sexta questão, todas as equipes responderam a sétima indicando que a relação existente entre a reta r' e o plano α também é o de perpendicularismo. Sublinhamos ainda que a equipe E1, apresentou uma justificativa para essa relação, sustentando sua argumentação a partir do conteúdo do teorema 12.4 que trata de reta perpendicular a plano.

As respostas apresentadas pelas equipes **à oitava questão** (Qual é a relação que existe entre o plano α e a reta r? Justifique sua resposta.) foram:

Equipe E1: *"r é perpendicular a α, pois r é paralela a r' e ortogonal a r_1 e r_2".*
Equipe E2: *"r é perpendicular ao plano α".*
Equipe E3: *"A reta r é perpendicular ao plano α. A reta r é paralela a r' que é perpendicular ao plano α. Logo, r também será perpendicular ao plano α".*
Equipe E4: *"A reta r é perpendicular ao plano α, pois r é paralela a r', e r' é perpendicular ao plano".*
Equipe E5: *"A reta r é perpendicular ao plano α".*
Equipe E6: *"A reta r é perpendicular ao plano α".*

Para a oitava questão todas as equipes responderam corretamente que a relação existente entre a reta r e o plano α é o de perpendicularismo, mas, apenas as equipes E1, E3 e E4 justificaram suas respostas a partir do fato da reta r ser paralela a reta r', a qual é perpendicular ao plano α, mesmo não representando outras retas contidas no plano α passando por P, no sentido de evidenciar a marca de ângulo reto entre a reta r e essas retas como fizeram para as retas r_1, r_2 e r'. Isso revela que conceitos e resultados geométricos podem ser exteriorizados, por meio do registro da língua natural, nas suas modalidades escrita ou oral, sem a necessidade direta de uma representação figural para assegurar a apreensão dos objetos geométricos envolvidos, pois "a expressão verbal abre via para o pensamento" (DUVAL, 2011, p.81).

Inferimos que as respostas apresentadas pelas equipes à oitava questão tomaram apoio no movimento da articulação entre as diferentes apreensões relativas a uma figura geométrica, nos conhecimentos e resultados geométricos e na coordenação e correspondência entres as representações veiculadas nos registros da língua natural e figural, e essa confluência de ações, segundo os pressupostos teóricos de Duval (2004a), favorece reconhecer um objeto geométrico por meio de suas diferentes representações semióticas, bem como estabelecer relações entre diferentes objetos.

As respostas apresentadas pelas equipes **à nona questão** (Observando que começamos a construção com um plano e um ponto qualquer, o que se pode concluir com a resposta dada em 8?) foram:

Equipe E1: *"Dado um plano e um ponto qualquer, sempre é possível traçar uma reta perpendicular ao plano por este ponto".*

Equipe E2: *"Toda reta paralela a reta r' é perpendicular ao plano".*

Equipe E3: *"Dado um plano α e um ponto P qualquer, traçamos duas retas distintas r_1 e r_2 contidas em α e concorrentes em um ponto A e dois planos distintos β_1 e β_2 passando por A e perpendiculares a r_1 e r_2 teremos uma reta r perpendicular ao plano α".*

Equipe E4: *"Dado um ponto qualquer, sempre conseguimos encontrar uma reta que passe por este ponto e seja perpendicular ao plano".*

Equipe E5: Não respondeu esta questão.

Equipe E6: *"Por um ponto P é possível traçar uma única reta perpendicular a um plano".*

Salientamos que uma tarefa de natureza aberta, de caráter investigativo, pode suscitar respostas escritas diferentes, no entanto, elas devem apresentar grau de coerência com a proposta da tarefa de modo que não haja fuga de tema. Neste sentido, a nona questão solicitou às equipes que apresentassem em língua natural, na sua modalidade escrita, uma conclusão a partir da resposta apresentada à oitava questão. Frisamos ainda que a nona questão teve por objetivo mobilizar as equipes a perceberem que sempre é possível construir uma reta perpendicular a um plano qualquer passando por um ponto qualquer, pois esta foi a construção que elas realizaram na janela de visualização 3D do GeoGebra em que compreendeu os itens de viii ao xii.

Entre as respostas apresentadas, destacamos que as equipes E1, E4 e E6 atingiram, por meio da produção escrita, o objetivo da questão, uma vez que foi revelada a coordenação integrada entre os registros da língua natural e o figural, o que favoreceu, segundo os pressupostos teóricos de Duval (2004a), a tomada de consciência dos objetos geométricos envolvidos na questão, bem com perceber e estabelecer relações entre esses objetos. Sublinhamos ainda que a equipe E6 percebeu que essa reta (reta r) é a única reta perpendicular ao plano passando pelo pondo dado. Em contrapartida, a equipe E5 não apresentou uma resposta para esta questão, por isso nada podemos inferir, pois uma questão sem resposta é uma lacuna no que tange a apreensão dos objetos geométricos envolvidos, suas propriedades e relações existentes, bem como para concluir resultados conforme foi solicitado na questão.

A resposta apresentada pela equipe E2 parece revelar uma tomada de consciência sobre retas perpendiculares a um plano, de modo que essas retas sejam tomadas paralelas a uma reta construída perpendicular ao plano. No entanto, a construção referente aos itens viii-xii não leva a uma resposta geral.

A resposta apresentada pela equipe E3 evidencia, por meio de uma descrição sequencial de ações realizadas no GeoGebra e assentadas nas instruções já fornecidas na tarefa, que a reta r é perpendicular ao plano α. Além disso, na descrição da equipe não há referência à reta r' determinada pela interseção dos planos β_1 e β_2 nem ao ponto P, pois a reta r foi determinada paralela à reta r' passando pelo ponto P qualquer. Neste sentido, avaliamos que a ausência desses objetos na produção escrita da equipe revela uma tomada de consciência insuficiente no que diz respeito a perceber que sempre é possível construir uma reta perpendicular a um plano passando por um ponto qualquer.

Enfim, inferimos que a articulação entre as apreensões **perceptiva** (perceber visualmente a reta r' perpendicular ao plano α, o ponto P e reta r não contida no plano α passando pelo ponto P e paralela à reta r'), **sequencial** (procedimentos de construção que levaram, por meio da aplicação das ferramentas do GeoGebra, à reprodução das figuras referentes as unidades figurais contidas nas instruções fornecidas na tarefa) **operatória** (determinar a reta r paralela a reta r' passando pelo ponto P) e **discursiva** (levantar hipóteses sobre a relação entre a reta r e o plano α, uma vez que nenhuma marca de ângulo reto foi evidenciada entre as representações figurais desses objetos) e a coordenação integrada entre os registros da língua natural e o figural favoreceram as equipes E1, E4 e E6 a concluírem que, por um plano e um ponto qualquer, sempre é possível traçar uma reta que passe por esse ponto e que seja perpendicular ao plano.

Neste sentido, destacamos que o movimento dessa variedade de elementos cognitivos fomentou, segundo os pressupostos teóricos de Duval (2004a), a tomada de consciência das equipes sobre a relação de perpendicularismo entre reta e plano.

As respostas apresentadas pelas equipes **à décima questão** (Será que a reta *r* é a única com a propriedade obtida em 8? Justifique sua resposta.) foram:

Equipe E1: *"Sim. Seja α e P qualquer. Tome uma reta qualquer contida em α. Esta reta e o ponto P determinam um plano. Neste plano, pelo teorema 4.18*[29]*, podemos traçar uma única reta perpendicular a reta dada que passa por P. Logo, esta reta é a única perpendicular a α".*

Equipe E2: Não respondeu esta questão.

Equipe E3: *"Sim. Se existe outra reta perpendicular ao plano α pelo ponto P, as retas se interceptam e, com isso tem um triângulo com dois ângulos retos, o que é um absurdo".*

Equipe E4: *"Não, pois como vimos r' também é perpendicular ao plano, passando por um ponto A qualquer".*

Equipe E5: Não respondeu esta questão.

Equipe E6: *"Sim, é única, mas não consigo justificar".*

A décima questão teve por objetivo instigar as equipes a perceber a unicidade da reta perpendicular a um plano qualquer, por um ponto qualquer. Neste sentido, as equipes E1, E3 e E6 afirmaram discursivamente "*sim*" para registrar que a reta r é a única perpendicular ao plano α passando pelo ponto P.

Em contrapartida, a equipe E4 afirmou que a reta r não é única, o que não está correto, pois em sua resposta considerou as retas perpendiculares ao plano, em que exemplificou, por meio do registro em língua natural, que a reta *r'*, paralela à reta *r*, também é perpendicular ao plano, mas não se atentou à reta r, que passa pelo ponto P, para exprimir se esta reta é única perpendicular ao plano. De fato, há uma infinidade de retas perpendiculares ao plano, no entanto, inferimos que a equipe E4 apresentou dificuldade em interpretar o conteúdo do enunciado da questão, pois sua resposta foi no sentido de perceber as retas perpendiculares ao plano.

[29] Teorema 4.18: Por um ponto fora de uma reta passa uma única reta perpendicular à reta dada. (GERÔNIMO, FRANCO, 2010, p. 73).

Salientamos ainda, que as equipes E2 e E5 não responderam nem apresentaram uma justificativa para esta questão, e por esse motivo nada podemos avaliar se essas equipes tomaram consciência sobre a unicidade da reta perpendicular ao plano passando por um ponto qualquer.

A justificativa dada pela equipe E3 está correta e a fez por redução ao absurdo. A equipe supôs que pelo ponto P passam duas retas perpendiculares ao plano e, com isso forma-se um triângulo com dois ângulos retos, o que é um absurdo, pois foi demonstrado em aula que a soma das medidas dos ângulos internos de qualquer triângulo na Geometria Euclidiana sempre é igual a 180°.

Inferimos que a coordenação de resultados geométricos, a articulação entre as apreensões perceptiva (perceber visualmente a reta r, o ponto P e o plano α) e discursiva (hipótese das duas retas perpendiculares a um plano passando por um mesmo ponto sem representar figuralmente esses objetos geométricos) e a coordenação entre os registros da língua natural, na sua modalidade escrita, e o figural e, favoreceram a equipe E3 tomar consciência (objetivação) da unicidade da reta perpendicular ao plano passando por um ponto qualquer.

A equipe E6 não justificou sua resposta, no entanto, revelou por meio do registro da língua sua aflição por não conseguir justificar o porquê da reta r ser a única reta perpendicular ao plano α passando pelo ponto P.

A justificativa apresentada pela equipe E1 está correta para o caso da existência e unicidade de retas perpendiculares no plano, em que coordenou o registro da língua natural para expor seus argumentos assentados em resultados geométricos, mas não está correta sobre a unicidade da reta perpendicular ao plano passando por um ponto no espaço. Quando a equipe considera a reta contida no plano α e o ponto P a situação recai sobre um mesmo plano e diferente do plano α. Dessa forma, pelo teorema 4.18, existe uma única reta que passa por P e é perpendicular à reta considerada pela equipe (essas retas são coplanares), mas essa reta não é perpendicular ao plano α conforme a equipe afirmou em sua justificativa.

Inferimos que a equipe E1 buscou embasar sua justificativa por meio de resultados já estudados, o que favorece a apreensão dos objetos geométricos de uma disciplina de cunho axiomático. No entanto, a equipe acabou mostrando um argumento que não se verifica para a relação da unicidade da reta perpendicular ao plano passando por um ponto no espaço.

Salientamos que esse tipo de ocorrência revelada pele equipe E1 dificulta a tomada de consciência dos entes geométricos, pois os enunciados de teoremas, proposições etc., no estudo da geometria plana e espacial são dados por meio do registro discursivo (integração entre o registro da língua natural e o registro simbólico) e apresentam um estreito grau de semelhança. Além disso, existe a dificuldade da articulação conjunta e integrada das diferentes apreensões vinculadas a uma mesma figura geométrica, bem como, a partir dos pressupostos teóricos de Duval (2004a), destacamos que há fatores cognitivos inerentes a cada indivíduo que contribuem para o uso restrito de um só registro de representação, e isso gera uma apreensão insuficiente dos objetos matemáticos.

No Quadro 35 apresentamos uma síntese das respostas apresentadas pelas equipes à tarefa sobre **retas paralelas e perpendiculares, reta perpendicular a plano, plano perpendicular à reta e planos paralelos** em que foi possível identificar os tipos de apreensões e transformações, a ocorrência de objetivação e as dificuldades das equipes.

Quadro 35 - Síntese das respostas apresentadas à tarefa sobre retas paralelas e perpendiculares, reta perpendicular a plano, plano perpendicular à reta e planos paralelos.

<table>
<tr><th>Questão</th><th>Apreensão</th><th>Tratamento</th><th>Conversão</th><th>Objetivação</th><th>Dificuldades</th></tr>
<tr><td>Q1</td><td rowspan="10">Sequencial
Perceptiva
Operatória
Discursiva</td><td rowspan="4">Marcar ponto sobre reta.
Marcar ângulo e calcular sua medida.
Determinar plano passando por retas reversas.
Traçar retas perpendiculares.
Traçar planos paralelos.
Renomear, exibir rótulos, alterar cores, espessuras e tamanhos.
Girar a janela de visualização 3D: alterar posição, variar orientação, translação e rotação.</td><td rowspan="10">Registro da língua natural para o registro figural.

Registro figural para o registro da língua natural.</td><td>Tomar consciência da perpendicularidade entre a reta r e o plano β (todas as equipes).</td><td rowspan="2">Não há evidências.</td></tr>
<tr><td>Q2</td><td>Tomar consciência da perpendicularidade entre a reta r e o plano α (todas as equipes).</td></tr>
<tr><td>Q3</td><td>Tomar consciência que: (i) se dois planos são perpendiculares a uma mesma reta, então eles perpendiculares entre si (E1 e E3); (ii) se dois planos são paralelos, então qualquer reta perpendicular a um deles é perpendicular ao outro (E2);
Tomar consciência da existência do plano perpendicular à reta por um ponto (E4 e E6).</td><td>Estabelecer relação entre paralelismo e perpendicularismo (E5).</td></tr>
<tr><td>Q4</td><td>Tomar consciência sobre a unicidade do plano perpendicular à reta por um ponto (E4: argumentou, E6: não argumentou).</td><td>Reconhecer a unicidade do plano perpendicular à reta por um ponto (E1, E2, E3, E5).</td></tr>
<tr><td>Q5</td><td rowspan="6">Marcar ângulo e calcular sua medida.
Determinar interseção entre retas e entre planos.
Traçar planos perpendiculares à retas.
Traçar retas paralelas.
Renomear, exibir rótulos, alterar cores, espessuras e tamanhos.
Girar a janela de visualização 3D: alterar posição, variar orientação, translação e rotação.</td><td>Tomar consciência que por um ponto existe um plano perpendicular à reta (E2, E3, E4, E5 e E6), ou seja, os planos β_1 e β_2 podem ser construídos.
Tomar consciência sobre a reta perpendicular ao plano e que retas concorrentes determinam um único plano (E1), comisso os planos β_1 e β_2 podem ser construídos.</td><td rowspan="5">Não há evidências.</td></tr>
<tr><td>Q6</td><td>Tomar consciência sobre o perpendicularismo entre retas (r'e r_1, r'e r_2) (todas as equipes).</td></tr>
<tr><td>Q7</td><td>Tomar consciência sobre o perpendicularismo entre reta e plano (r'e α) (todas as equipes).</td></tr>
<tr><td>Q8</td><td>Tomar consciência sobre o perpendicularismo entre reta e plano (r e α) (todas as equipes).</td></tr>
<tr><td>Q9</td><td>Tomar consciência da existência da reta perpendicular ao plano por um ponto (todas as equipes).</td></tr>
<tr><td>Q10</td><td>Tomar consciência da unicidade da reta ao plano por um ponto (E3: por redução ao absurdo; E1: unicidade da reta perpendicular a outra reta, E6: não argumentou).</td><td>Reconhecer a unicidade de reta perpendicular passando por um ponto qualquer (E4).</td></tr>
</table>

Fonte: Autor da pesquisa.

Observamos que a apreensão dos objetos geométricos envolvidos nesta tarefa (pontos, retas paralelas e perpendiculares, reta perpendicular a plano, interseção entre planos e planos paralelos) ocorreu em virtude da confluência entre os registros da língua natural, figural e simbólico, da articulação entre as apreensões sequencial, perceptiva, operatória e discursiva, da tomada de consciência de relações e propriedades pertinentes aos objetos geométricos estudados, bem como da mobilização e coordenação de conhecimentos geométricos acerca de paralelismo e perpendicularismo no espaço e suas consequências.

Sublinhamos que nesta tarefa foi ínfima a ocorrência de dificuldades das equipes nas respostas apresentadas, pois a integração entre as representações figurais realizadas na janela de visualização 3D do GeoGebra com as correspondentes representações escritas em língua natural e a articulação entre as apreensões perceptiva e discursiva vinculadas as figuras geométricas formadas e transformadas na área de desenho do *software* contribuíram, de um modo geral, para a objetivação das equipes acerca dos objetos e propriedades envolvidos na tarefa.

Inferimos também a influência do GeoGebra para a realização desta tarefa, pois o *software* potencializou as equipes que cumprissem as três atividades cognitivas relacionadas a toda representação semiótica, a saber:

1. Formar representações figurais de pontos, retas paralelas e perpendiculares, reta perpendicular a plano, planos paralelos e de ângulos na janela de visualização 3D por meio de estratégias definidas pelos integrantes de cada equipe, em que obtiveram, simultaneamente, as respectivas representações correspondentes na janela de álgebra, o que favoreceu as equipes a articulação conjunta das apreensões perceptiva e discursiva das formas, marcas e contornos percebidos a cada um dos objetos geométricos representado.
2. Tratar as representações figurais na janela de visualização 3D contribuiu para que as equipes pudessem articular a apreensão operatória com as apreensões perceptiva e discursiva das figuras, uma vez que determinaram plano a partir de três pontos não colineares, planos por meio de reta e ponto, retas paralelas e perpendiculares, interseção entre retas e entre planos, plano por meio de retas concorrentes, com o objetivo de reconhecer e estabelecer relações geométricas existentes e solicitadas nas questões propostas na tarefa.

3. Converter as representações escritas, dadas por meio do registro da língua natural e o simbólico, dos objetos geométricos elencados nos passos e orientações, para as representações figurais formadas e transformadas na janela de visualização 3D do GeoGebra, bem como o processo inverso, converter as representações figurais para representações simbólicas e em língua natural no sentido de interpretar, descrever, designar, denotar, relacionar, estabelecer vínculos entre diferentes objetos geométricos estudados na tarefa, bem como levantar hipóteses e elencar características desses objetos geométricos e suas propriedades.

Assim, no Quadro 36 apresentamos as atividades cognitivas, os registros mobilizados e coordenados e, também, as ações/ocorrências que foram identificados durante o processo de resolução da tarefa sobre retas paralelas e perpendiculares, reta perpendicular a plano, plano perpendicular à reta e planos paralelos.

Quadro 36 - Identificação de atividades cognitivas, registros de representação semiótica e ações/ocorrências presentes na realização da tarefa sobre retas paralelas e perpendiculares, reta perpendicular a plano, plano perpendicular à reta e planos paralelos.

<table>
<tr><th colspan="3">Atividades cognitivas</th><th>Registros mobilizados e coordenados</th><th>Ações/ocorrências</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Formação de representações</td><td rowspan="3">Apreensões perceptiva e sequencial</td><td>Representação não discursiva - Figural: pontos, retas, planos e ângulos.</td><td>Figural:
GeoGebra</td><td>Reproduzir marcas, contrastes e contornos percebidos (representações figurais).
pontos: P, B e A
retas: r, r', r_1, r_2, s_1 e s_2
planos: Π, β, β_1, β_2, α, α_1 e α_2
ângulos retos (medidas): $\alpha_3 = \beta_1 = \beta = \gamma = 90°$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Representação discursiva - Língua Natural e Simbólica: caracteres, símbolos algébricos, palavras, frases.</td><td>Língua Natural: Protocolos de registro</td><td>Designar e descrever objetos nominalmente (língua natural).
Ponto, reta, plano, perpendicular, ortogonal, paralelo, reta paralela, reta perpendicular, plano paralelo, plano perpendicular, retas concorrentes, ponto onde tais retas concorrem, feixe de planos paralelos, por um ponto é possível traçar uma única reta perpendicular a um plano.</td></tr>
<tr><td>Simbólico:
GeoGebra e protocolos de registro</td><td>Empregar símbolos para designar objetos e estabelecer relações (letras, algarismos e símbolos matemáticos).
pontos: P, B e A
retas: r, r', r_1, r_2, s_1 e s_2
planos: Π, β, β_1, β_2, α, α_1 e α_2
ângulos retos (medidas): $\alpha_3 = \beta_1 = \beta = \gamma = 90°$
relação de pertinência: $r_1' \in \alpha, r_2' \in \alpha$
interseção entre planos: $\beta_1 \cap \beta_2$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Transformação de representações</td><td>Apreensões perceptiva e operatória</td><td>Tratamento</td><td>Figural:
GeoGebra</td><td>Marcar ponto sobre reta; Marcar ângulo e calcular sua medida; Determinar plano passando por retas concorrentes; Determinar interseção entre retas e entre planos; Traçar retas perpendiculares; Traçar retas paralelas; Traçar planos paralelos; Traçar planos perpendiculares à retas; Renomear, exibir rótulos, alterar cores, espessuras e tamanhos; Girar a janela de visualização 3D: alterar posição, variar orientação, rotação e translação.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Apreensões perceptiva, operatória e discursiva</td><td rowspan="2">Conversão</td><td>Língua Natural para Figural</td><td>Ilustrar na janela de visualização 3D do GeoGebra representações de pontos, retas, planos e ângulos a partir das instruções fornecidas na tarefa.</td></tr>
<tr><td>Figural para Língua Natural</td><td>Interpretar, descrever, designar, denotar relacionar e vincular, nos protocolos de registro, objetos geométricos que foram representados nas janelas de visualização 3D e de álgebra do GeoGebra conforme os passos e orientações e as solicitações de cada uma das questões propostas na tarefa. Além disso, levantar hipóteses e elencar características dos objetos geométricos e suas propriedades.</td></tr>
</table>

Fonte: Autor da Pesquisa.

Destacamos que a realização desta tarefa ocorreu em virtude da articulação entre as apreensões perceptiva, sequencial, operatória e discursiva sobre as representações figurais de objetos geométricos tratados nas questões da tarefa. Sublinhamos que a apreensão perceptiva permeou todas as fases de resolução da tarefa, uma vez que as equipes puderam identificar visualmente as variações dimensionais (0D, 1D, 2D e 3D) e qualitativas (formas, traços, contornos, tamanhos, espessuras, nomes, cores etc.) de cada um dos objetos geométricos representados figuralmente.

A apreensão sequencial ocorreu no sentido de reproduzir figuras geométricas específicas que pudessem representar os objetos geométricos arrolados pela tarefa. A apreensão operatória ocorreu simultaneamente com a apreensão sequencial, pois por meio dela (uso das ferramentas do GeoGebra) foi possível realizar as modificações necessárias que levaram às representações figurais obtidas na janela de visualização 3D do GeoGebra. Já a apreensão discursiva, foi tomada pelas equipes especificamente para levantar hipóteses e estabelecer relações entre os diferentes objetos geométricos representados figuralmente.

Enfim, salientamos que essas diferentes apreensões, a coordenação entre os registros da língua natural e o figural, o ambiente de geometria dinâmica, a natureza aberta (exploratória e investigativa) da tarefa e a utilização de conhecimentos e resultados geométricos favoreceram aos futuros professores de Matemática, de um ponto de vista cognitivo, a compreensão de novos resultados e, também, o estabelecimento de relações entre objetos geométricos no espaço euclidiano, tais como: retas perpendiculares e paralelas, planos paralelos e a existência e unicidade de reta perpendicular ao plano passando por um ponto e de plano perpendicular à reta por um ponto.

4.5. Reflexões sobre a entrevista e os questionários realizados com a turma

Esta subseção tem por objetivo destacar elementos significativos acerca do que a turma estudada evidenciou na entrevista e nos questionários realizados. Na sequência apresentamos excertos da entrevista, nos quais trazem as percepções dos estudantes sobre o uso do GeoGebra na resolução das tarefas propostas, bem como as dificuldades por eles elencadas.

> **PE:** *O que você acha do uso do GeoGebra na disciplina? Tem sido importante para aprendizagem? De que forma?*

A2: *Eu gosto porque consigo entender melhor os teoremas e as definições aplicados no GeoGebra.*

A3: *Bem interessante. Ajuda bastante a gente perceber os resultados, porque quando está no livro, normalmente tá tudo desenhado tudo pronto e quando a gente vai construindo no GeoGebra a gente vai vendo o que tá acontecendo.*

A4: *Ajuda bastante. As ferramentas que ele tem* [GeoGebra] *ajuda a demonstrar alguns teoremas.*

A8: *Ajuda bastante porque eu sempre tive um pouco de dificuldade em visualizar as imagens* [se referindo as figuras geométricas].

A10: *Nessa disciplina, em particular, é muito bem feito o uso do GeoGebra, porque não são conceitos tão simples, de fácil visualização, de compreensão. E o GeoGebra vem justamente para auxiliar isso, essa visualização e essa forma mais didática de conceitos. É bem mais fácil a visualização no GeoGebra, você consegue manipular os objetos.*

A11: *Eu gostei. Você consegue visualizar bastante coisas. Você precisa fazer alguma demonstração e na mão você não consegue fazer isso. Na folha de papel, às vezes você se confunde, no GeoGebra não. Você consegue mexer, você consegue mover, você consegue uma exploração maior do problema.*

As informações presentes nas respostas dos estudantes revelam a importância que eles atribuem ao uso do GeoGebra para a compreensão dos objetos geométricos estudados, bem como conceitos, resultados e propriedades. Além disso, essas respostas evidenciam a articulação entre as apreensões perceptiva, sequencial, operatória e discursiva relativas a uma figura geométrica que o ambiente de geometria dinâmica proporciona.

Na sequência, apresentamos outro excerto da entrevista, em que os participantes da pesquisa relatam as **principais dificuldades** percebidas durante a resolução das tarefas.

PE: *Você tem tido dificuldades na disciplina? Você poderia exemplificar?*

A1: *Demonstração dos resultados.*

A6: *Teoremas são difíceis de escrever. As demonstrações demoram mais.*

A7: *Escrever enunciados e demonstrar teoremas.*

A9: *Tenho dificuldades com as construções no GeoGebra em 3D, por exemplo, construir planos e retas.*

A10: *Ler enunciados e demonstrar teoremas.*

A11: *Escrever demonstrações.*

Observamos que os relatos dos estudantes evidenciam que eles têm dificuldades com a produção escrita, especialmente, no que diz respeito aos enunciados e demonstrações de resultados geométricos. Inferimos que essa produção escrita requer a mobilização e coordenação de registros discursivos como a língua natural, a linguagem matemática e o simbólico, bem como o assente em resultados já estudados na disciplina (axiomas, proposições, teoremas etc.). Destacamos que os participantes desta pesquisa atribuíram um grau significativo de relevância às representações discursivas, mesmo que tenham evidenciado em seu discurso as dificuldades procedentes da produção escrita para formular enunciados e/ou demonstrações.

No Quadro 37 apresentamos dados oriundos dos questionários aplicados aos estudantes participantes da pesquisa com objetivo de identificar mudanças de posicionamento, *a priori* e *a posteriori* ao desenvolvimento da disciplina, sobre o grau de importância, entre 0 (mínimo) e 5 (máximo), que cada estudante atribuía ou passou a atribuir as diferentes representações (figuras, palavras, símbolos e fórmulas) que potencializaram a apreensão dos objetos geométricos pertinentes ao estudo da Geometria Euclidiana.

Quadro 37 - Grau de importância atribuída às diferentes representações em geometria.

Estudante	Questionário	Grau de Importância: de 0 (zero) a 5 (cinco)																							
		Figuras (registro figural)						Palavras (registro em língua natural)						Símbolos (registro simbólico)						Fórmulas (registro simbólico)					
		0	1	2	3	4	5	0	1	2	3	4	5	0	1	2	3	4	5	0	1	2	3	4	5
A1	Q 1						X			X					X						X				
	Q 2					X							X				X				X				
A2	Q 1						X					X							X					X	
	Q 2					X							X						X					X	
A3	Q 1						X				X						X								X
	Q 2					X					X					X								X	
A4	Q 1						X						X					X					X		
	Q 2				X								X					X				X			
A5	Q 1					X					X						X						X		
	Q 2				X							X					X					X			
A6	Q 1					X							X					X							X
	Q 2						X						X					X				X			
A7	Q 1						X					X						X							X
	Q 2					X							X					X							X
A8	Q 1						X				X							X							X
	Q 2						X					X					X								X
A9	Q 1						X				X						X					X			
	Q 2				X					X							X							X	
A10	Q 1						X				X						X							X	
	Q 2						X					X						X					X		
A11	Q 1						X				X						X					X			
	Q 2						X				X						X			X					

Fonte: Questionários aplicados aos participantes da pesquisa.

As informações do Quadro 37 nos mostram que sete estudantes participantes da pesquisa atribuíram menor grau de importância às figuras ao término da disciplina, três atribuíram o mesmo grau e apenas um estudante aumentou o grau de importância dada às figuras. Inferimos que reduzir o grau de importância atribuído às figuras se deve ao fato de que a disciplina requer que sejam enunciados, conjecturados e demonstrados resultados geométricos, cujas representações ocorrem em registros discursivos por meio de produções escritas. Isto é constatado pelo grau de importância atribuído às palavras (nomes, relações, termos etc.), que sofreu uma evolução favorável no término da disciplina: seis estudantes aumentaram o grau de importância, quatro mantiveram e um diminuiu.

Isso corrobora com os pressupostos teóricos de Duval (2004a, 2011), uma vez que uma figura geométrica passa por uma designação verbal, a qual ocorre em um registro discursivo e, além disso, as palavras utilizadas para um enunciado ou uma demonstração de um resultado geométrico têm por finalidade descrever, explicar e argumentar matematicamente e, talvez por esse motivo, ocorreu a mudança no grau de importância dada pelos estudantes em relação às figuras e palavras, mesmo que os estudantes tenham informando na entrevista que a dificuldade da disciplina assenta principalmente nos enunciados e demonstrações.

Em relação ao registro simbólico, em que solicitamos o grau de importância atribuído aos símbolos e as fórmulas em geometria, se observa que a maioria dos participantes (7) manteve o mesmo grau de importância para os símbolos (notações) usados em geometria, enquanto que para as fórmulas a maioria dos estudantes (6) reduziu seu grau de importância no término da disciplina. Isso evidencia que, para os participantes desta pesquisa, os símbolos mobilizados e coordenados parecem ter maior relevância do que as fórmulas quando se estuda Geometria Euclidiana. Este fato pode estar relacionado com o emprego de símbolos para designar os objetos geométricos, enquanto que as fórmulas, que também adotam símbolos, estão relacionadas às propriedades dos objetos e as relações existentes entre objetos geométricos e numéricos como, por exemplo, a relação entre o conteúdo do Teorema de Pitágoras e as medidas dos lados de um triângulo retângulo.

De acordo com Duval (2011), a expressão verbal (escrita e/ou oral) possibilita o desenvolvimento do pensamento e, além disso, a produção escrita potencializa ao estudante tomar consciência das operações discursivas inerentes aos raciocínios matemáticos.

Outra dificuldade revelada no excerto está vinculada à construção de representações figurais na janela de visualização 3D do GeoGebra, fato este que pode estar relacionado com a apreensão dos objetos geométricos e suas propriedades e, também, com o uso das ferramentas do *software*.

5

CONCLUSÃO

Apresentamos neste capítulo a síntese do trabalho realizado, conclusões relativas aos objetivos da pesquisa e as considerações finais.

5.1. Síntese do trabalho realizado

Este estudo foi realizado com futuros professores de Matemática no decorrer de uma disciplina de Geometria Euclidiana, em que os participantes da pesquisa, estudantes de uma mesma turma aqui estudada, resolveram tarefas de geometria com o apoio do GeoGebra.

Inferimos que adotar a geometria dinâmica em uma disciplina de Geometria Euclidiana axiomática contribuiu para a formação geométrica do futuro professor de Matemática, pois por meio de um trabalho coletivo-colaborativo os futuros professores de Matemática, organizados em equipes, puderam explorar e/ou investigar, a partir de formação e transformação de representações figurais na janela de visualização do GeoGebra, propriedades e características dos objetos geométricos estudados, bem como perceber visualmente as formas e os vínculos existentes entre diferentes objetos representados.

Destacamos que a apreensão dos objetos geométricos estudados, que também envolveu propriedades, relações, conceitos e resultados, se evidenciou quando os participantes da pesquisa ancoraram suas respostas às tarefas desenvolvidas por meio da mobilização e coordenação de registros discursivos (língua natural, linguagem matemática e simbólico), uma vez que revelaram suas produções escritas nos protocolos de registro e na janela de álgebra do GeoGebra.

Este fato corrobora com os pressupostos teóricos de Duval (2004a, 2004b, 2011), o qual sublinha a necessidade de se coordenar ao menos dois registros de representação semiótica para que ocorra a tomada de consciência e, consequentemente, a apreensão dos objetos matemáticos, uma vez que é necessária uma designação verbal para fixar uma figura geométrica como uma representação de um objeto geométrico, bem como para explicar, descrever e argumentar sobre as propriedades e características percebidas na figura.

Na perspectiva de contribuir para a formação geométrica do futuro professor de Matemática direcionamos nossa reflexão para os cursos de formação inicial. Julga-se necessária a integração entre o desenvolvimento de tarefas de diferentes naturezas (exploratória e/ou investigativa) e o ambiente de geometria dinâmica, pois são contextos que fomentam a apreensão dos objetos da Geometria Euclidiana conforme observamos neste estudo. Inferimos que as tarefas desenvolvidas neste estudo e o apoio do GeoGebra em sua resolução influenciaram significativamente as produções matemáticas dos futuros professores de Matemática, as quais são consequência da mobilização e coordenação de diferentes representações semióticas.

Assim, os resultados deste estudo revelam que quão maior for a amplitude da produção e coordenação de múltiplas representações semióticas (figurais, escritas ou simbólicas) em ambiente de geometria dinâmica maior será o contributo à apreensão de objetos da Geometria Euclidiana, pois sua efetivação está vinculada ao conjunto de representações semioticamente heterogêneas mobilizadas e na sua coordenação integrada.

Os resultados desta pesquisa permitem inferir também que as produções matemáticas dos participantes, que são também produções semióticas (DUVAL, 2011), têm influência da articulação entre as apreensões perceptiva, sequencial, operatória e discursiva dos objetos geométricos representados figuralmente na janela de visualização (2D e 3D) do GeoGebra (DUVAL, 2012a, 2012c).

Logo, ponderamos que a coordenação entre as diferentes representações semióticas formadas e transformadas no GeoGebra e nos protocolos de registro, os conhecimentos geométricos (axiomas, definições, propriedades, teoremas etc.) mobilizados para responder as tarefas e a tomada de consciência (objetivação), sobre os objetos envolvidos no estudo e suas propriedades, potencializaram positivamente aos participantes desta investigação a apreensão dos objetos da Geometria Euclidiana, o que foi revelado no Capítulo 4 pelas análises e discussões realizadas.

5.2. Conclusões relativas aos objetivos da pesquisa

Apresentamos nesta seção nossas inferências sobre os objetivos da pesquisa, específicos e geral, respectivamente, que estão estritamente relacionados a uma turma de futuros professores de Matemática aqui estudada.

Em relação à contribuição do GeoGebra, o compreendemos como uma multiplataforma gratuita de matemática dinâmica, disponível em diferentes sistemas operacionais e acessível por meio de computadores, *tablets* e celulares, e que integra uma multiplicidade de representações semióticas.

Nesta perspectiva, constatamos neste estudo que o uso do *software* influenciou as atividades cognitivas de formação, tratamento e conversão por meio da integração simultânea de diferentes representações a partir de suas diferentes ferramentas e funcionalidades, tais como: arrastar (variar orientação, rotação e translação), ampliar ou reduzir as representações figurais reproduzidas na janela de visualização, bem como editar variáveis qualitativas relativas às representações (formas, nomes, cores, traços e espessuras de linhas etc.).

Salientamos ainda que as explorações geométricas realizadas no GeoGebra do tipo movimentar, ampliar, reduzir, rodar, nomear, colorir etc., ocorreram com o objetivo de formar e transformar as representações figurais, bem como perceber visualmente as formas e as propriedades visuais vinculadas a essas formas. Já as investigações geométricas favoreceram as equipes a tomada de consciência dos objetos e, também, justificar por meio de representações escritas, em língua natural ou simbólica, essa objetivação.

Na entrevista realizada, os estudantes destacaram que sem o uso do GeoGebra a resolução das tarefas propostas seria dificultada. Salientaram ainda que o *software* favoreceu a elaboração de conjecturas bem como estabelecer relações entre diferentes objetos matemáticos.

Com o suporte do GeoGebra as equipes verificaram relações geométricas por meio da exploração de representações figurais formadas e transformadas na janela de visualização, manifestando que o uso das ferramentas do GeoGebra potencializou uma celeridade no processo de investigação e menos complexo quando relacionado a um modo fenomenológico estático de produção de representações figurais como, por exemplo, lousa-giz ou caderno-lápis-régua.

Isso ficou evidenciado em situações como: (i) movimentar os pontos D, E e F da terceira circunferência formada (primeira tarefa), pois com o alinhamento destes pontos há formação de uma reta e (ii) verificar na segunda tarefa, a partir do arrastamento dos pontos das extremidades dos segmentos construídos inicialmente, o vínculo existente entre cada triângulo formado e as medidas desses segmentos.

No que diz respeito ao reconhecimento de um mesmo objeto geométrico, inferimos que as produções escritas e figurais das equipes revelam que elas reconhecem esse objeto geométrico por meio de suas diferentes representações, especialmente, em língua natural, figural e simbólica. Como exemplos, citamos: (i) o reconhecimento dos pontos A e C, na primeira tarefa, como centros das duas primeiras circunferências, respectivamente; (ii) o reconhecimento dos triângulos equilátero, isósceles e escaleno, na segunda tarefa; (iii) o reconhecimento de triângulos retângulos, de quadrados e de losango, na terceira tarefa, bem como o enunciado do Teorema de Pitágoras com sua expressão simbólica e (iv) o reconhecimento de retas concorrentes, perpendiculares e paralelas, planos paralelos e plano perpendicular à reta, na quarta tarefa.

Sublinhamos que esse reconhecimento ocorreu em virtude de uma passagem de duplo sentido entre as representações figurais e as representações discursivas em língua natural e simbólica. Além disso, observamos que tal reconhecimento compreendeu a apreensão perceptiva dos objetos representados a partir das representações formadas e transformadas na janela de visualização do GeoGebra e a apreensão discursiva que favoreceu designar e descrever esses objetos a partir dos protocolos de registros e da janela de álgebra do GeoGebra.

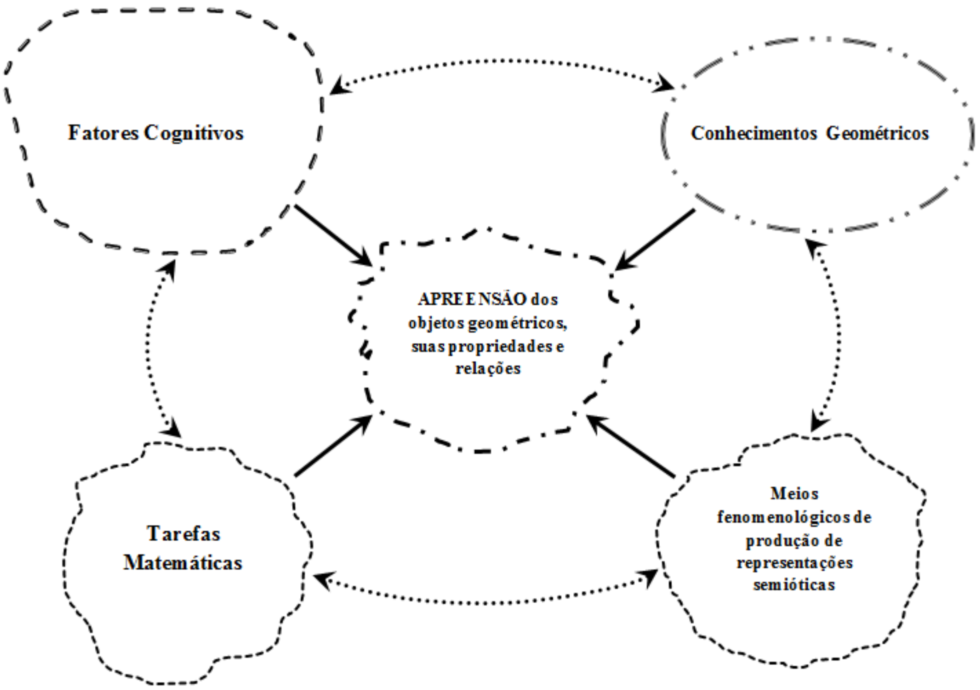
Sobre as dificuldades apresentadas pelos futuros professores de Matemática, inferimos que se assentam principalmente na conversão de representações figurais para representações escritas em língua natural no sentido de designar, descrever, denotar, conjecturar, enunciar e argumentar sobre os objetos envolvidos, o que foi evidenciado nas tarefas analisadas, bem como demonstrar os resultados, destacado na entrevista pela maioria dos estudantes. Outras dificuldades que observamos estão relacionadas ao uso de resultados geométricos já estudados na disciplina para obter e/ou demonstrar outros resultados (teoremas, proposições etc.). Há também as dificuldades estritamente vinculadas à confusão entre objetos geométricos e numéricos.

Neste sentido, destacamos as informações organizadas nos **quadros 21, 29, 32 e 35** do Capítulo 4 as quais sintetizam as principais dificuldades reveladas pela turma ao resolver as tarefas propostas. Como exemplos, evidenciamos: (i) a dificuldade da equipe E2, na quarta questão da primeira tarefa, para explicar em língua natural, na sua modalidade escrita, as propriedades dos pontos de um círculo e, ainda, nesta mesma questão, salientamos que a equipe E4 confunde raio com sua medida ao mobilizar e coordenar a representação escrita em língua natural; (ii) na primeira questão da segunda tarefa a dificuldade da equipe E2 é revelada em argumentar que o triângulo isósceles sempre poderá ser construído a partir de dois segmentos de reta dados; (iii) as dificuldades das equipes na oitava questão da terceira tarefa para empregar e coordenar termos da linguagem matemática no registro da língua natural, na sua modalidade escrita, cujo objetivo era enunciar o Teorema de Pitágoras e seu recíproco e (iv) as dificuldades das equipes E1, E2, E3 e E5, na quarta questão da quarta tarefa, para reconhecer a unicidade do plano perpendicular à reta por um ponto.

Com base nas conclusões relativas aos objetivos específicos desse estudo, e considerando o objetivo geral delineado, em que buscamos compreender como a coordenação de diferentes representações semióticas possibilitada pelo uso do GeoGebra influencia a apreensão de objetos geométricos e suas propriedades por futuros professores de Matemática, destacamos que a apreensão dos objetos geométricos abordados nesta pesquisa não deve ser vista apenas por uma orientação cognitiva, mas também em virtude de uma interação coletiva, pois os participantes se envolveram em decisões tomadas a partir do movimento natural da formação de equipes, das aulas ministradas pelo professor e da presença e participação do pesquisador em aula.

Desta forma, observamos que a apreensão dos objetos geométricos pertinentes à Geometria Euclidiana, no contexto da formação inicial de professores de Matemática, ocorreu por meio de uma sinergia entre fatores cognitivos, conhecimentos geométricos, tarefas matemáticas e meios fenomenológicos de produção de representações semióticas. Em uma tentativa singela de representar essa sinergia, apresentamos na Figura 32 um possível esquema de como ela ocorreu nesta pesquisa.

Figura 32: Sinergia entre diferentes elementos que contribuíram de alguma maneira à apreensão dos objetos geométricos estudados.



Fonte: Autor da pesquisa.

Na Figura 32 todas as formas tracejadas que indicam as tarefas matemáticas, os meios fenomenológicos de produção de representações, os fatores cognitivos, os conhecimentos geométricos e a apreensão dos objetos geométricos, são passíveis de mudanças a qualquer instante e são influenciadas pela multiplicidade de experiências do indivíduo, pois acreditamos que estes cinco elementos, quando integrados, potencializam o desenvolvimento do futuro professor de Matemática.

Observamos ainda que a convergência entre os fatores cognitivos, os conhecimentos geométricos, os meios fenomenológicos de produção de representações semióticas e as tarefas matemáticas está direcionada à apreensão dos objetos geométricos, suas propriedades a as possíveis relações existentes entre diferentes objetos.

Sobre as informações expressas pelo esquema representado na Figura 32, destacamos que os **fatores cognitivos** compreendem: (i) processos que permitem reconhecer os conhecimentos geométricos a serem aplicados na resolução das tarefas, (ii) reconhecimento dos objetos geométricos estudados por meio de suas diferentes representações, (iii) mobilização e coordenação de diferentes representações em diferentes registros (figural, simbólico e língua natural), (iv) articulação entre as apreensões perceptiva, sequencial, operatória e discursiva sobre uma figura geométrica e (v) a tomada de consciência (objetivação).

Os **conhecimentos geométricos** envolvem axiomas, definições, proposições, teoremas, como também enunciar, explicar, descrever, conjecturar, argumentar e demonstrar resultados acerca dos objetos em estudo. Os **meios fenomenológicos de produção de representações semióticas** dizem respeito ao GeoGebra, aos protocolos de registro e a fala e, as **tarefas matemáticas** se referem às tarefas de natureza aberta, especialmente explorações e/ou investigações, que os futuros professores de Matemática resolveram a partir da formação em equipes.

Além disso, destacamos que este estudo devolve para a teoria dos Registros de Representação Semiótica as diferentes representações suscitadas e coordenadas por futuros professores de Matemática ao resolverem tarefas de Geometria Euclidiana axiomática com o apoio do GeoGebra, cujo processo de resolução proporcionou explorar as ferramentas e funcionalidades do *software*, bem como investigar propriedades e relações existentes entre os objetos geométricos estudados.

Neste sentido, os dados provenientes das produções matemáticas dos participantes da pesquisa, que foram descritos, analisados e interpretados com o apoio das categorias de análise emergentes da fundamentação teórica adotada no estudo e do campo de pesquisa, nos permitem inferir que os futuros professores de Matemática coordenaram as representações semióticas produzidas durante a resolução de tarefas de Geometria Euclidiana com o apoio do GeoGebra sob a orientação de três perspectivas, a saber: cognitiva, matemática e "televisiva".

A perspectiva cognitiva favoreceu o reconhecimento dos objetos geométricos por meio de seus diferentes representantes (figuras, expressões linguísticas ou simbólicas), como também, perceber propriedades e estabelecer relações existentes entre diferentes objetos, tecer hipóteses, aplicar conceitos, resultados, ideias e estratégias na resolução de tarefas de diferentes naturezas, além de tomar consciência dos objetos estudados a partir da coordenação e integração entre representações dos registros discursivos e do registro figural na sua modalidade geométrica-dinâmica.

De acordo com Duval (2011, p.41) "a questão cognitiva é considerada sobre os gestos intelectuais desenvolvidos no trabalho matemático, antes mesmo que tenhamos a mínima ideia da solução procurada" de uma tarefa matemática que pode compreender um exercício, um problema, uma exploração ou investigação.

A perspectiva matemática proporcionou às equipes enunciar, comunicar, conceituar, verificar, justificar, validar e demonstrar resultados e propriedades pertinentes aos objetos geométricos estudados.

A perspectiva "televisiva" potencializou expressar, evidenciar e exteriorizar as perspectivas cognitiva e matemática em diferentes plataformas fenomenológicas de produção de representações semióticas, em que destacamos a relevância do ambiente de geometria dinâmica, por meio do GeoGebra, em que foram formadas e transformadas representações figurais e simbólicas, e a pertinência dos protocolos de registros, em que foram produzidas e coordenadas especialmente as representações escritas em língua natural.

Salientamos que a fonte energética que permitiu o movimento integrado dessas três perspectivas está assentada na ação voluntária-significativa de cada equipe em querer mobilizar e coordenar diferentes representações semióticas (discursivas e não discursivas) para um mesmo objeto matemático, bem como a articulação entre as diferentes apreensões relativas à uma figura geométrica, das estratégias reveladas durante o processo de resolução das tarefas por meio da produção escrita, da tomada de consciência e da aplicação de resultados (axiomas, definições, proposições, teoremas etc.) geométricos estudados durante o desenvolvimento da disciplina.

Em suma, neste estudo inferimos que os futuros professores de Matemática coordenaram as representações semióticas como um meio para **PUBLICAR** sua atividade matemática e compreensão dos conteúdos estudados, incluindo formação e transformação de representações discursivas e não discursivas.

Assim, as informações contidas nos **quadros 22, 30, 33 e 36** do Capítulo 4 apresentam uma boa aproximação de como os participantes da pesquisa mobilizaram e coordenaram as diferentes representações suscitadas na resolução das tarefas realizadas nesta investigação, pois lá se observa que: (i) as atividades cognitivas de formação, tratamento e conversão e em que circunstâncias de cada tarefa foram mobilizadas, bem como as apreensões vinculadas; (ii) os registros mobilizados e coordenados (figural, língua natural e simbólico), contexto em que foram adotados (formação, tratamento ou conversão de representações) e os meios fenomenológicos de produção de representações utilizados (GeoGebra e protocolos de registro) e (iii) as ações e/ou ocorrências das equipes que se referem: a reproduzir marcas, contrastes, formas e contornos percebidos, a designar e descrever objetos nominalmente, a empregar símbolos (letras, algarismos, símbolos matemáticos etc.) também para designar objetos e estabelecer relações entre objetos, aos diferentes tipos de tratamentos realizados e suas necessidades, bem como as diversas conversões efetuadas com seus diferentes propósitos.

5.3. Considerações finais

Inferimos que uma das contribuições desta pesquisa para a Educação Matemática está no fato de provocar reflexões sobre como os futuros professores de Matemática coordenam as representações semióticas formadas e transformadas quando são instigados a resolverem tarefas de Geometria Euclidiana com o apoio de um *software* de geometria dinâmica, o GeoGebra.

Outra contribuição deste estudo está no fato de observar que a conexão entre as representações figurais produzidas em um ambiente de geometria dinâmica e as produções escritas em língua natural e/ou simbólica tonifica a apreensão dos objetos da Geometria Euclidiana.

Desta forma, sinalizamos a relevância de que estudos futuros sejam realizados na formação inicial de professores de Matemática no âmbito do ensino e da aprendizagem da geometria, com o apoio de tarefas de diferentes naturezas e do uso de ambientes de geometria dinâmica, uma vez que a geometria é uma área em que os estudantes revelam dificuldades de diversas ordens e, por isso, se justifica a pertinência da realização de pesquisas que incidem sobre esta temática (BATTISTA, 2007).

Os resultados dessas investigações podem trazer informações significativas para que as instituições de ensino superior (re)pensem seus currículos, no que diz respeito a formação geométrica do futuro professor de Matemática, inclusive em função do uso das tecnologias digitais, bem como para contribuir com a literatura nacional ou internacional, no campo da Educação Matemática, de modo a constituir um arcabouço teórico sobre como se manifesta o pensamento geométrico desse futuro profissional da educação por meio do desenvolvimento de diferentes modalidades de ensino da Geometria Euclidiana no contexto da formação inicial de professores.

Destacamos também que esta pesquisa é passiva de limitações, as quais podem estar vinculadas a fatores como a narrativa e as interpretações sujeitas à subjetividade do pesquisador, a correlação de significados com outros trabalhos, pois este se trata de um estudo de caso único com uma única turma de onze estudantes, futuros professores de Matemática e a inexperiência do pesquisador, uma vez que realizou mestrado na área de MATEMÁTICA e decidiu encarar o desafio de realizar uma tese de doutorado em EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, a qual requer uma articulação com diversos elementos/componentes que integram uma pesquisa qualitativa.

Enfim, na perspectiva da Educação Matemática, apontamos que mais investigações devem ser realizadas no que tange a formação em geometria do futuro professor de Matemática, tanto na ótica do ensino como da aprendizagem, das estratégias e produções de representações semióticas, uma vez que a presente literatura é incipiente em pesquisas que tratam da apreensão de objetos, suas propriedades e relações no contexto da Geometria Euclidiana durante o processo de formação inicial de professores de Matemática.

REFERÊNCIAS

ABAR, C. A. A. P.; Educação Matemática na Era Digital. In: **Unión: Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, San Cristobal de La Laguna, n. 27, p. 13-28, 2011.

ABAR, C. A. A. P.; ALENCAR, S. V. A Gênese Instrumental na Interação com o GeoGebra: uma proposta para a formação continuada de professores de Matemática. In: **Bolema**, Rio Claro, vol. 27, n. 46, p.349-365, 2013.

ALMOULOUD, S. Ag; SALAZAR, J. V. F. Registro figural no ambiente de geometria dinâmica. In**: Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.17, n.5, p.919-941, 2015.

BATTISTA, M. The development of geometric and spatial thinking. In: LESTER, F. K. (Ed.), **Second handbook of research on mathematics teaching and learning**. Reston, VA: NCTM, p.843-909, 2007.

BELLEMAIN, F. O paradigma micromundo. In: **História e Tecnologia no Ensino da Matemática**. vol.1, p.51-63, 2002.

BELLEMAIN, F.; CORREIA, E. M. **Geometria Dinâmica: fundamentos epistemológicos**. EGraFIA, 2004.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação Qualitativa em Educação**. Porto: Porto Editora, 1994.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Qualitative research for education: an introduction to theories and methods**. Boston: Allyn & Bacon, 4 ed., 2003.

BROCARDO, J. Tarefas Matemáticas. In: BROCARDO, J. et al. (Ed.). **Investigação em Educação Matemática 2014: Tarefas Matemáticas**. Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática, p.3-4, 2014.

BRUNHEIRA, L.; PONTE. J. P. Realizar construções geométricas com o GeoGebra: o contributo do AGD para a estruturação geométrica. In: Canavarro, A. P. et al. (Eds.). **Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática**, p.341-353, 2016.

CANAVARRO, A. P.; SANTOS, L. Explorar Tarefas Matemáticas. In: CANAVARRO, A. P. et al. (Ed.). **Investigação em Educação Matemática 2012: Práticas de Ensino da Matemática**. Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática, p.99-104, 2012.

CANDEIAS, N.; PONTE, J. P. Geometry learning: The role of tasks, working models, and dynamics geometry software. In: CZARNOCHA, B. (Ed.). **Handbook of mathematics teaching research**. Rzeszów: University of Rzeszów, p.387-396, 2008.

CAÑÓN, C. **La Matemática creación y descubrimiento**. Madrid: UPCO, 1993.

CATENA, P. **Universa loca in logicam Aristetolis in mathematicas disciplinas**. (A cura di G. Dell'Anna). Galatina (Le): Conged, 1992.

CHAPMAN, O. Mathematical-task knowledge for teaching. In: **Journal of Mathematics Teacher Education**, 16(1), p.1-6, 2013.

CHEVALLARD, Y. Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique. In: **Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique de Grenoble.** Université Joseph-Fourier - Grenoble, 1991.

CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. **Estudar matemáticas: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem.** Porto Alegre: Artmed, 2001.

COIMBRA, M. N. C. T.; MARTINS, A. M. O. O estudo de caso como abordagem metodológica no ensino superior. In: **Nuances: estudos sobre Educação**. Presidente Prudente: UNESP, vol.24, n.3, p.31-46, 2013.

CYRINO, M. C. C. T.; BALDINI, L. A. F. O software GeoGebra na formação de professores de matemática – uma visão a partir de dissertações e teses. In: **RPEM**, Campo Mourão, vol.1, n.1, 2012.

D'AMORE, B.; GODINO, D. J. Punti di vista antropologico ed ontosemiotico in Didattica della Matematica. In: **La matematica e la sua didattica**, n.1, p.9-38, 2006.

D'AMORE, B.; PINILLA, M. I. F.; IORI, M. **Primi elementi di semiotica. La sua presenza e la sua importanza nel processo di insegnamento-apprendimento dela matematica**. Bologna, Italy: Pitagora Editrice, 2013.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de matemática elementar 9: geometria plana.** São Paulo: Atual, 8.ed. 2005.

DOS SANTOS, J.; TROCADO, A. GeoGebra as a Learning Mathematical Environment. In: **Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo**, vol.5 n.1, p.5-22, 2016.

DUVAL, R. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. In: **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives** - IREM de Strasbourg, n. 5, p.37-65, 1993.

DUVAL, R. Representation, Vision And Visualization: Cognitive Functions**.** In: **Mathematical Thinking. Basic Issues For Learning.** U.S. Department of Education: Educational Resources Information Center (ERIC), 1999.

DUVAL, R. **Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales**. Cali: Universidad del Valle, 2.ed. 2004a.

DUVAL, R**. Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y de las formas superiores en el dessarollo cognitivo.** Cali: Universidad del Valle, 2.ed. 2004b.

DUVAL, R.; GODIN, M. Les changements de regard nécessaires sur les figures. In: **Grand N**, n.76, p.7-27, 2005.

DUVAL, R. Transformazioni di rappresentazioni semiotiche e prassi di pensiero in matemática. In: **La matemática e la sua didattica**. n.4, p.585-619, 2006a.

DUVAL. R. A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. In: Educational Studies in Mathematics. n.61, p.103-131, 2006b.

DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais**. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

DUVAL, R. **Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas**. São Paulo: PROEM, ed. 1, 2011.

DUVAL, R. Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. In: **Revemat**: Florianópolis, vol.7, n.1, p.118-138, 2012a.

DUVAL, R. Diferenças semânticas e coerência matemática: introdução aos problemas de congruência. In: **Revemat**: Florianópolis, vol.7, n.1, p.97-117, 2012b.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. In: **Revemat.** Florianópolis, vol.7, n.2, p.266-297, 2012c.

DUVAL, R. Comment analyser le probleme crucial de la comprehension des matematiques? In: **Unión: Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, San Cristobal de La Laguna, n.37, p.9-29, 2014.

ERICKSON, F. Qualitative methods in research on teaching. In: WITTROCK, M. C. **Handbook of research on teaching** (Ed.). New York : Macmillan, 3.ed. p.119-161, 1986.

ESTEVES, F. R. **Discutindo o papel das tecnologias informacionais e comunicacionais na formação de professores de matemática: uma proposta para um curso de licenciatura em matemática na modalidade EaD**. Dissertação de Mestrado: Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 106p. 2010.

ESTRELA, A. **Teoria e prática de observação de classes: uma estratégia de formação de professores.** Porto: Porto Editora, 4.ed. 1994.

EUCLIDES. **Os Elementos**. São Paulo: UNESP, 2009.

EVES, H. **Introdução à história da Matemática**. Campinas: UNICAMP, 2004.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos**. Campinas: Autores Associados, 3.ed. 2009.

FLORES, C. R. Registros de representação semiótica em matemática: história, epistemologia, aprendizagem. In: **Bolema**. Rio Claro, vol.19, n. 26, p.77-102, 2006.

FONT, V.; GODINO, J. D.; D'AMORE, B. Enfoque ontosemiótico de las representaciones en educación matemática. Versíon ampliada del artículo: FONT, V.; GODINO, J. D.; D'AMORE, B. In: **An onto-semiotic approachto representations in mathematics education**. For the learning of mathematics, 27 (2), p.2-7, 2007.

GERÔNIMO, J. R.; FRANCO, V. S. **Geometria Plana e Espacial: um estudo axiomático**. Maringá: EDUEM, 2ª ed. 2010.

GERÔNIMO, J. R.; BARROS, R. M. O.; FRANCO, V. S. **Geometria Euclidiana Plana: Um estudo com o software Geogebra.** Maringá: EDUEM, 2010.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. São Paulo: Atlas, 6.ed. 2008.

GODINO, J. D. Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. In: **Recherches en Didactique des Mathématiques**, vol.22, n.2.3, p.237-284, 2002. Disponível em: <http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/04_enfoque_ontosemiotico.pdf> acesso em 28 de jun. 2015.

GOLDIN, G. Representation in mathematical learning and problem solving. In: ENGLISH, L. D. (Ed.). **Handbook of International Research in Mathematics Education**. Lawrence Erlbaum Associates: Mahwah, p.197-218, 2002.

GRAVINA, M. A. **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo**. Tese de Doutorado: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001.

GRAVINA, M. A. **O potencial semiótico do GeoGebra na aprendizagem da geometria: uma experiência ilustrativa**. VIDYA, vol.35, n.2, p.237-253, 2015.

HOHENWARTER, J.; HOHENWARTER, M.; LAVICZA, Z. Introducing dynamic mathematics software to secondary school teachers: the case of GeoGebra. In: **Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching**, 28(2), p.135-146, 2008.

ISOTANI, S.; BRANDÃO, L. de O. **Como usar a geometria dinâmica? O papel do professor e do aluno frente às novas tecnologias**. Anais do Workshop de Informática na Escola, p.120-128, 2006.

LABORDE, C. Visual phenomena in the teaching/learning of geometry in a computer-based environment. In: MAMMANA, C.; VILLANI, V. (Eds.). **Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century: An ICMI study**. Kluwer Academic Publishers: Springer, p. 113-121, 1998.

LAKATOS, E. M.; MARCONI, M. de A. **Fundamentos de metodologia científica**. São Paulo: Atlas, 5.ed. 2003.

LOVIS, K. A. **Geometria Euclidiana e Geometria Hiperbólica em um Ambiente de Geometria Dinâmica: o que pensam e o que sabem os professores**. Dissertação de Mestrado: Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 148p. 2009.

LOVIS, K. A.; FRANCO, V. S. Reflexões sobre o uso do GeoGebra e o ensino de Geometria Euclidiana. In: **Informática na Educação: teoria e prática**. Porto Alegre, vol. 16, n.1, p.149-160, 2013.

MACÍAS SÁNCHEZ, J. Los registros semióticos en Matemáticas como elemento personalizado en el aprendizaje. In: **Revista de Investigación Educativa Conect@2**, 4(9), p. 27-57, 2014.

MAMMANA, C.; VILLANI. V. Geometry and geometry-teaching through the ages. In: MAMMANA, C.; VILLANI, V. (Eds.). **Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century: An ICMI study**. Kluwer Academic Publishers: Springer, p.1-4, 1998.

MATOS, J. F.; CARREIRA, S. P. Estudos de Caso em Educação Matemática - Problemas Actuais. In: **Quadrante**. Portural, vol.3, n.1, p.19-53, 1994.

MERRIAM, S. **Case study research in education: A qualitative approach**. S. Francisco: Jossey-Bass Publishers, 1988.

MLODINOW, L. **A janela de Euclides: a história da geometria das linhas paralelas ao hiperespaço**. São Paulo: Geração Editorial, 2005.

MORAN, M. **As Apreensões em geometria: um estudo com professores da Educação Básica acerca de registros figurais**. Tese de Doutorado: Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 248p. 2015.

MORETTI, T. M.; BRANDT, C. F. Construção de um desenho metodológico de análise semiótica e cognitiva de problemas de geometria que envolvem figuras. In: **Educação Matemática Pesquisa**. São Paulo, vol.17, n.3, p.597-616, 2015.

NÓBRIGA, J. C. C. **GGBOOK: uma plataforma que integra o *software* de geometria dinâmica GeoGebra com editor de texto e equações a fim de permitir a construção de narrativas matemáticas dinâmicas.** Tese de Doutorado: Universidade de Brasília: Brasília, 246p. 2015.

NÓBRIGA, J. C. C. Aprendendo Geometria Plana com a Plataforma GeoGebra, 2017. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/hsXHDRX7#material/gKNVfTXE> acesso 06 de out. 2017.

NÖTH, W. **Handbook of Semiotics**. 1ª ed. Indiana University Press: Bloomington and Indianapolis, 1995.

OROS, V.; SANTOS, G. L.; NÓBRIGA, J. C. C. **GeoGebra in Romanian: the challenges of localising an educational software into a specific socio-cultural context**. In: GeoGebra International Journal of Romania, vol. 4, p.1-10, 2014.

OSTA, I. Computer technology and the teaching of geometry: introduction. In: **Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century: an ICMI study**. MAMMANA, C.; VILLANI, V. (Eds.). Kluwer Academic Publishers: Springer, p.109-112, 1998.

PONTE, J. P. Gestão curricular em Matemática. In: GTI (Ed.) **O professor e o desenvolvimento curricular**. Lisboa: APM, p.11-34, 2005.

PONTE, J. P. Estudos de Caso em Educação Matemática. In: **BOLEMA**. Rio Claro: UENESP, vol.19, n.25, p.105-132, 2006.

PREINER, J. **Introducing Dynamic Mathematics Software to Mathematics Teachers: the Case of GeoGebra**. Master's Thesis: University of Salzburg, 2008.

PRESMEG, N. Semiotics in Mathematics Education. In: LERMAN, Stephen (Ed). **Encyclopedia of Mathematics Education**. Springer, p.538-542, 2014.

RADFORD, L. Cose sensibili, essenze, oggetti matematici ed altre ambiguità. In: **La matematica e la sua didattica**. n.1, p. 4-23, 2004a.

RADFORD, L. La generalizzazione matematica come processo semiótico. In: **Bolletino dei docenti di matematica**, n.49, p.39-55, 2004b.

RADFORD, L. Introducción Semiótica y Educacion Matemática. In: **RELIME: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa**, p.7-21, 2006.

RODRIGUES, M.; BERNARDES, M. Ensino e aprendizagem da geometria. In: HENRIQUES, A. et al. (Eds.). **Atas do XXII Seminário de Investigação em Educação Matemática**. Lisboa: APM, p.339-344, 2011.

SANTAELLA, L. **O Que é Semiótica**. São Paulo: BRASILIENSE, 2002.

SEDLÁČEK, L. A study of the influence of using dynamic geometric systems in mathematical education on the level of knowledge and skills of students. In: **Acta Didactica Universitatis Comenianae Mathematics**, issue 9, p.81-108, 2009.

SILVA, G. H. G. **Grupos de estudo como possibilidade de formação de professores de matemática no contexto da geometria dinâmica**. Dissertação de Mestrado: UNESP, Rio Claro, 191p. 2010.

STAHL, G. **Translating Euclid: Designing a Human-Centered Mathematics**. Morgan & Claypool Publishers series, 2013.

STAKE, R. E. Case Studies. In: DENZIN, N. K.; LINCOLN, Y. S. (Eds). **Handbook Qualitative Research**. SAGE Publications, p.236-247, 1994.

STAKE, R. E. **Investigación com estúdio de casos**. Madrid: Ediciones Morata, 2.ed. 1999.

STEIN, M. K.; SMITH, M. S. Tarefas matemáticas como quadro para a reflexão: da investigação à prática. In: **Educação e Matemática: Associação de Professores de Matemática**, Portugal, n.105, p.22-28, 2009.

STORMOWSKI, V.; GRAVINA, M, A.; LIMA, J. V. Tecnologia na aula de matemática: a importância do potencial semiótico. In: **Novas Tecnologias na Educação**, vol.11, n.3, p.1-10, 2013.

WATSON, A. et al. Introduction. In: **Task Design in Mathematics Education. Proceedings of ICMI Study 22**. MARGOLINAS, C. (Ed.). vol.1. Oxford, p.9-15, 2013.

WOLECK, K. R. Listen to Their Pictures An Investigation of Children’s Mathematical Drawings. In: **Roles of Representation in SchoolMathematics**. Virginia: National Council of Teachers of Mathematics, Yearbook, p.215-227, 2001.

YIN, R. K. **Estudo de Caso: Planejamento e Métodos.** 4.ed. Porto Alegre: Bookman, 2010.

ZABALZA, M. **Diários de aula: um instrumento de pesquisa e desenvolvimento profissional.** Porto Alegre: Artmed, 1994.

ANEXOS

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Gostaríamos de convidá-lo a participar da pesquisa intitulada "**A aprendizagem da Geometria Euclidiana sob a influência da tecnologia computacional na mobilização de diferentes registros de representação semiótica: um estudo com futuros professores de Matemática"**, que está sendo desenvolvida sob a orientação do Prof. Dr. Valdeni Soliani Franco, do Curso de Doutorado do Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática da Universidade Estadual de Maringá.

O objetivo da pesquisa é i**nvestigar** a influência do uso da tecnologia computacional na mobilização de diferentes registros de representação semiótica em um contexto de formação inicial de professores de Matemática. Para o desenvolvimento desta pesquisa é muito importante sua colaboração, como: participar das aulas da disciplina de Geometria Euclidiana (102 h/a) e realizar as tarefas que serão elaboradas e propostas durante o desenvolvimento da disciplina. Os encontros serão gravados em áudio e vídeo e, posteriormente, serão feitas as respectivas transcrições para análise. Além disso, cópias das tarefas realizadas também serão coletadas. Informamos que os dados serão lidos apenas pelos pesquisadores e o sigilo do pesquisado será garantido. Também não haverá nenhum tipo de pagamento acerca dos dados coletados. Salientamos que poderão ocorrer mínimos desconfortos no decorrer da realização das tarefas, mas os participantes terão liberdade plena para deixar de responder ou não se manifestar. No início da gravação de áudio e vídeo, poderá ocorrer algum constrangimento, mas, cuja tendência é desaparecer rapidamente. No geral, a investigação não acarretará danos inaceitáveis ou duradouros, visto que se desenvolverá por meio de protocolos seguros. Ressaltamos que as informações obtidas serão utilizadas somente para os fins desta pesquisa, e serão tratadas com o mais absoluto sigilo e confidencialidade, de modo a preservar a identidade dos participantes. Após as transcrições das entrevistas as gravações serão excluídas. Os benefícios esperados por esta pesquisa estão relacionados a uma reflexão acerca do uso da tecnologia computacional, *software* de geometria dinâmica – GeoGebra, na formação do futuro professor de Matemática, durante os processos de ensino e aprendizagem da Geometria Euclidiana, a partir da mobilização de diferentes registros de representação semiótica e, também, revelar como evolui a aprendizagem dos pesquisados em relação aos conceitos e resultados geométricos. Caso você tenha mais dúvidas ou necessite maiores esclarecimentos, estaremos à disposição nos endereços abaixo ou poderá procurar o Comitê de Ética em Pesquisa da Universidade Estadual de Maringá, cujo endereço consta neste documento. Este termo deverá ser preenchido em duas vias de igual teor, sendo uma delas devidamente preenchida e assinada por cada participante.

Além da assinatura nos campos específicos pelo pesquisador e pesquisado, solicitamos que sejam rubricadas todas as folhas deste documento. Isto deve ser feito por ambos (pelo pesquisador e por você, como sujeito ou responsável pelo sujeito de pesquisa) de tal forma a garantir o acesso ao documento completo.

Eu,____ (nome por extenso do sujeito de pesquisa) declaro que fui devidamente esclarecido e concordo em participar **VOLUNTARIAMENTE** da pesquisa coordenada pelo Profº. Dr. Valdeni Soliani Franco.

_____________________________________ Data:_______________________

Assinatura ou impressão datiloscópica

Eu, Idelmar André Zanella, declaro que forneci todas as informações referentes ao projeto de pesquisa supra nominado.

_____________________________________ Data:_______________________

Assinatura do pesquisador

Qualquer dúvida com relação à pesquisa poderá ser esclarecida com os pesquisadores, conforme os endereços abaixo:

Nome: Valdeni Soliani Franco
Endereço: Av. Colombo, 3790, Bloco F67, sala 224, Jardim Universitário, Maringá - PR. CEP: 87020 - 900
Telefone/e-mail: (44) 3011-4933 – vsfranco@uem.br

Nome: Idelmar André Zanella
Endereço: Rua Osvaldo Cruz, 91, Apto 104, Zona 07, Maringá - PR.

CEP: 87020 - 200

Telefone/e-mail: (45) 8811-7590 – andrezanel@yahoo.com.br

Qualquer dúvida com relação aos aspectos éticos da pesquisa poderá ser esclarecida com o Comitê Permanente de Ética em Pesquisa (COPEP) envolvendo Seres Humanos da Universidade Estadual de Maringá, no endereço a seguir:

COPEP/UEM

Universidade Estadual de Maringá.

Av. Colombo, 5790. Campus Sede da UEM.

Bloco da Biblioteca Central (BCE) da UEM.

CEP: 87020 - 900. Maringá - PR. Tel: (44) 3261-4444

E-mail: copep@uem.br

QUESTIONÁRIO 1

1. Qual seu nome?

2. Faixa etária em que se encontra:
( ) 17-20 anos ( ) 21-25 anos ( ) 26-30 anos ( ) acima de 30 anos

3. Qual seu município de residência?

4. Você tem vínculo empregatício? Em caso afirmativo, qual é a carga horária semanal?

5. Frequentou Ensino Fundamental em:
( ) Instituição de ensino pública
( ) Instituição de ensino particular
( ) Parte em instituição pública e parte em instituição particular

6. Frequentou Ensino Médio em:
( ) Instituição de ensino pública
( ) Instituição de ensino particular
( ) Parte em instituição pública e parte em instituição particular

7. O que lhe motivou a fazer o Curso de Licenciatura em Matemática?

8. Você quer ser professor de Matemática?
( ) Sim ( ) Não

9. Ao longo de sua vida de estudante, você estudou geometria?
( ) Sim ( ) Não

10. Em caso afirmativo para a questão 9, em qual nível de ensino?
( ) Apenas no Fundamental
( ) Apenas no Médio
( ) No Fundamental e Médio
( ) No Superior. Qual disciplina?____

11. Quando estudou geometria, quais foram os recursos/instrumentos usados?
( ) Régua
( ) Compasso
( ) Esquadro
( ) Transferidor
( ) *Software*(*s*). Qual(is)?____
( ) Outros. Quais?____

12. Se você já estudou geometria, especifique alguns conceitos e resultados.

13. Numa escala de 0 a 5, indique o grau de importância que você atribui aos seguintes elementos relativos à geometria:

Fórmulas:

(0) (1) (2) (3) (4) (5)

Figuras:

(0) (1) (2) (3) (4) (5)

Gráficos cartesianos:

(0) (1) (2) (3) (4) (5)

Palavras (nomes dos conceitos, relações e termos):

(0) (1) (2) (3) (4) (5)

Símbolos (notação):

(0) (1) (2) (3) (4) (5)

14. Você sabe por que no nome desta disciplina aparece a palavra “Euclidiana”? Caso você saiba, explique.

15. O que você espera aprender em Geometria Euclidiana?

GUIA PARA ENTREVISTA

1. O que você acha do uso do GeoGebra na disciplina? Tem sido importante para a sua aprendizagem? De que forma?

2. Cite alguns conceitos ou resultados geométricos que você achou importante e que foram abordados e trabalhados até agora.

3. Você tem tido dificuldades na disciplina? Você poderia exemplificar?

4. Fale sobre a dinâmica de sala de aula que vem sendo desenvolvida na disciplina.

5. Você tem percebido se a maneira como as tarefas são elaboradas contribui para a sua aprendizagem? De que forma?

6. Você vê relevância nos recursos computacionais usados na disciplina para a aprendizagem de conceitos e resultados da Geometria Euclidiana? Justifique.

7. Você tem sugestões, a partir do seu ponto de vista, do que é necessário para melhorar o desenvolvimento da disciplina?

8. Você tem usado o GeoGebra para fazer outras tarefas que não estão propostas na disciplina? Exemplifique.

QUESTIONÁRIO 2

1. Qual seu nome?

2. Depois de frequentar e participar da disciplina de Geometria Euclidiana indique, numa escala de 0 a 5, o grau de importância que você atribui aos seguintes elementos relativos à geometria:

   Fórmulas

   0 ( )   1 ( )   2 ( )   3 ( )   4 ( )   5 ( )

   Figuras

   0 ( )   1 ( )   2 ( )   3 ( )   4 ( )   5 ( )

   Gráficos cartesianos

   0 ( )   1 ( )   2 ( )   3 ( )   4 ( )   5 ( )

   Palavras (nomes dos conceitos, relações e termos)

   0 ( )   1 ( )   2 ( )   3 ( )   4 ( )   5 ( )

   Símbolos (notação)

   0 ( )   1 ( )   2 ( )   3 ( )   4 ( )   5 ( )

3. Quais os principais conceitos e resultados que você acredita ser os mais importantes da disciplina?

4. Para você, o uso do GeoGebra na realização das tarefas exerceu influência na aprendizagem de conceitos e resultados geométricos? Justifique e se possível dê exemplos.

5. Você acredita que a estrutura e a organização das tarefas realizadas contribuíram para o aprendizado de conceitos e resultados geométricos? Em caso afirmativo cite as possíveis contribuições. Como professor, você utilizaria uma metodologia semelhante?

6. Faça comentários acerca da metodologia desenvolvida nas aulas da disciplina. Compare com a metodologia usada em uma aula convencional, como por exemplo: aula expositiva, lista de exercícios, lousa e giz ou com “Power point”.