**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ-UFPA**

**INSTITUTO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E CIENTÍFICA-IEMCI**

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICAS-MESTRADO**

**Ednilson Sergio Ramalho de Souza**

# MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO DE FÍSICA

## Registros de Representação Semiótica

**Belém**

**2010**

Ednilson Sergio Ramalho de Souza

# MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO DE FÍSICA

## Registros de Representação Semiótica

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas-IEMCI/UFPA como requisito parcial ao título de Mestre em Educação em Ciências e Matemáticas, na área de concentração em Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Adilson Oliveira do Espírito Santo

Belém

2010

**Ednilson Sergio Ramalho de Souza**

# MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO DE FÍSICA

## Registros de Representação Semiótica

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas-IEMCI/UFPA como requisito parcial ao título de Mestre em Educação em Ciências e Matemáticas, na área de concentração em Educação Matemática.

Banca examinadora:

____________________________________________________________
Prof. Dr. Adilson Oliveira do Espírito Santo/UFPA (Presidente/orientador)

____________________________________________________________
Profª. Drª. Marisa Rosâni Abreu da Silveira/UFPA (membro interno - titular)

____________________________________________________________
Prof. Dr. Ruy Guilherme Castro de Almeida/UEPA (membro externo - titular)

____________________________________________________________
Prof. Dr. Renato Borges Guerra/UFPA (membro interno - suplente)

**Ednilson Sergio Ramalho de Souza**

**MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO DE FÍSICA**

**Registros de Representação Semiótica**

Este exemplar corresponde à redação final da Dissertação de Mestrado de Ednilson Sergio Ramalho de Souza submetido ao IEMCI/UFPA para obtenção do título de Mestre em Educação em Ciências e Matemáticas, tendo sido aprovada em 16 de abril de 2010, pela seguinte banca examinadora:

____________________________________________________________

Prof. Dr. Adilson Oliveira do Espírito Santo/UFPA (Presidente/orientador)

____________________________________________________________

Profª. Drª. Marisa Rosâni Abreu da Silveira/UFPA (membro interno – titular)

____________________________________________________________

Prof. Dr. Ruy Guilherme Castro de Almeida/UEPA (membro externo – titular)

____________________________________________________________

Prof. Dr. Renato Borges Guerra/UFPA (membro interno – suplente)

**DEDICATÓRIA**

*Dedico esta pesquisa a todos os professores, em especial aos professores de Física*

*Ednilson Souza*

## AGRADECIMENTOS

À inteligência suprema, causa primeira de todas as coisas: DEUS,

Àqueles que se uniram e trouxeram-me em carne a este mundo: meu pai Manoel e minha Raimunda,

Àquela que tem acompanhado-me em todos os momentos: minha esposa Rosy,

Àquelas que me mostraram o significado da vida: minhas filhas Pryscila e Laiane,

Ao professor Adilson Oliveira do Espírito Santo,

Ao professor Ruy Guilherme Castro de Almeida,

À professora Marisa Rosâni Abreu da Silveira,

Ao professor Renato Borges Guerra,

A todos os demais professores e funcionários do IEMCI-UFPA, que, em conjunto, possibilitam sonhos como este,

A todos aqueles que, direta ou indiretamente, contribuíram para a concretização deste projeto.

*Ednilson Souza*

## EPÍGRAFE

*Professor não é aquele que sabe tudo; porém, sabe que tudo se aprende!*

*Ednilson Souza*

# RESUMO

O objetivo geral da pesquisa é propor reflexões sobre a possibilidade de coordenar registros de representação semiótica em ambiente gerado pelo processo de Modelagem Matemática com vistas ao ensino de Física. Procurando responder à seguinte questão norteadora: *A mobilização de registros de representação em atividades de Modelagem Matemática pode favorecer a conceitualização em Física?* É que buscamos apoio na teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval (2009; 2008) e em autores de renome na área de Modelagem Matemática no ensino, entre eles: Bassanezi (2004); Biembengut e Hein (2003); Barbosa (2001) e Chaves & Espírito Santo (2008). Metodologicamente, realizamos pesquisa bibliográfica sobre a temática Modelagem Matemática no ensino de Física, bem como o desenvolvimento analítico de seis (06) atividades de modelagem. O resultado da pesquisa bibliográfica levou à explicitação de três recursos didático-pedagógicos para desenvolver a modelagem no ensino de Física: por meio de problemas contextualizados; por meio de simulações computacionais e por meio de atividades experimentais. O desenvolvimento das atividades mostrou que a articulação de registros de representação em ambiente gerado pela Modelagem Matemática pode favorecer a conceitualização em Física.



**Palavras-chave: Modelagem matemática; Registros semióticos; Ensino de Física.**

## ABSTRACT

The aim of this study is to propose reflections on the possibility of coordinating registers of semiotic representation in environment generated by Mathematical Modeling with a view to Physics teaching. Looking to answer the following question: The mobilization of records of representation in Mathematical Modeling activities can promote the conceptualization in Physics? We seek support in the theory of registers of semiotic representation of Raymond Duval (2009; 2008) and authors of repute in the area of Mathematical Modeling in education: Bassanezi (2004); Biembengut & Hein (2003); Barbosa (2001) and Chaves & Espírito Santo (2008). Methodologically, we conducted search literature on Mathematical Modeling in Physics teaching and analytical development of six (06) modeling activities. The result of literature search led to the clarification of three didactic and pedagogical resources to develop the modeling in the teaching Physics: using contextual problems, through computer simulations and through experimental activities. The development of activities revealed that the mobilization of records of representation in the environment generated by Mathematical Modeling may facilitate the conceptualization in Physics.



**Keywords:** Mathematical Modeling; Records Semiotic; Physics Teaching.

## LISTA DE FIGURAS

**Figura 1**. Estrutura de uma investigação (Fonte: Fiorentini e Lorenzato, 2007, p. 62). ........................................................................................ 23

**Figura 2.** Diagrama das diferentes representações (Fonte: FERNANDES, 2000, p. 11). ........................................................................................ 28

**Figura 3**. Mapa acústico construído durante uma atividade de modelagem matemática. Modelo matemático ou representação matemática? (Fonte: ROZAL, 2007, p. 109). ........................................................................ 31

**Figura 4**. Tabela, gráfico e equação algébrica: três representações matemáticas do mesmo objeto matemático função do primeiro grau. Possibilitam compreensões diferentes do mesmo fenômeno físico. ................ 34

**Figura 5**. Atividade de tratamento e conversão (Fonte: Duval, 2008, p. 15).... 38

**Figura 6**. Exemplo de tratamento: mantém-se o registro algébrico. ................ 39

**Figura 7**. Exemplo de conversão: muda-se o registro de representação. ....... 39

**Figura 8**. Articulação entre registros de representação semiótica por meio da atividade cognitiva de conversão. .................................................................. 43

**Figura 9**. Correspondência semântica termo a termo entre unidades significantes........................................................................................... 47

**Figura 10.** O modelador traduz (converte), embasado em uma teoria matemática, a situação real em uma representação matemática. A representação matemática possibilita inferências, predições e explicações sobre a situação real que a originou (Fonte: BASSANEZI, 2004, p. 25). ......... 57

**Figura 11**. Desenvolvimento do conteúdo programático (BIEMBENGUT e HEIN, 2003, p. 22)........................................................................................ 59

**Figura 12**. Dinâmica do processo de modelagem matemática no ensino (modelação matemática), proposta por Biembengut e Hein (2003, p. 26) ....... 60

**Figura 13**. Registro pictórico produzido por um grupo de alunos. (Fonte: LOZADA e MAGALHÕES, 2008) ................................................................. 76

**Figura 14**. Gráfico da Força média em função da aceleração média. ............. 79

**Figura 15**. Esquema de uma usina hidrelétrica (Fonte: http://marcia.carpinski.zip.net/images/eletricidade1.jpg . Acesso em 25/09/09). Adaptado de SOUZA e ESPÍRITO SANTO, 2008a)........................................ 82

**Figura 16**. Gráfico convertido da tabela elaborada durante a atividade 2. ...... 86

**Figura 17**. Trabalhador empurrando um objeto sobre um plano inclinado. ..... 88

**Figura 18**. Simulação em Java de um plano inclinado (Fonte: http://www.fisica.net/simulacoes/java/walter/ph11br/inclplane_br.php. Acesso em 15/10/09). ........................................................................................ 89

**Figura 19.** Gráfico da força necessária para puxar blocos de madeira em função do peso. ............................................................................................ 91

**Figura 20**. Forças e projeções no plano inclinado. ......................................... 95

**Figura 21**. Simulação em Java do lançamento de uma bala de canhão. (Fonte: http://phet.colorado.edu/sims/projectile-motion/projectile-motion_en.html. Acesso em 18/12/2009). .......................................................................... 99

**Figura 22**. Gráfico referente ao Alcance horizontal em função da velocidade inicial da bala de canhão. ........................................................................ 101

**Figura 23.** Gráfico referente ao ajuste de curva quadrático para os dados da tabela 6. ................................................................................................ 101

**Figura 24**. Gráfico da altura em função do tempo médio de queda da moeda. ............................................................................................................ 105

**Figura 25.** Gráfico do ajuste de curva linear para o tempo de queda da moeda. ............................................................................................................ 106

**Figura 26**. Gráfico do ajuste quadrático para o tempo de queda da moeda. . 107

**Figura 27**. Gráfico referente ao número de imagens formadas em função do ângulo entre dois espelhos planos. ............................................................. 112

**Figura 28**. Gráfico referente ao ajuste de curva potencial para o número de imagens formadas em função de dois espelhos planos. ............................... 112

**Figura 29**. Imagem formada entre dois espelhos planos. ........................... 112**5**

## LISTA DE TABELAS

**Tabela 1**. Força média em função da aceleração do carro. ............................ 79

**Tabela 2**. Tabela a ser completada pelos alunos durante a modelagem matemática do tema Energia........................................................................ 83

**Tabela 3**. Tabela completada pelos alunos durante a atividade 2. Os valores em vermelho deveriam ser completados pelos alunos.................................... 84

**Tabela 4**. Força necessária para puxar o bloco em função do peso................ 90

**Tabela 5**. Cálculos auxiliares para encontrar a equação de ajuste. ................ 93

**Tabela 6**. Alcance horizontal em função da velocidade inicial de lançamento da bala de canhão. ...................................................................................... 100

**Tabela 7**. Tempo de queda da moeda ($\boldsymbol{t_a, t_b\ e\ t_c}$) e tempo médio de queda. 105

**Tabela 8**. Número de imagens em função do ângulo entre os espelhos. (Fonte: Daroit et al (2008, p. 5). ....................................................................... 111

## LISTA DE QUADROS

**Quadro 1**. Tipos e funções das representações (Fonte: Duval, 2009, p. 43). . 27

**Quadro 2**. Objeto de estudo da modelagem matemática em comparação com a resolução de problemas. ........................................................................... 63

**Quadro 3.** Trabalhos encontrados na internet sobre o tema modelagem matemática e ensino de física. ........................................................................ 69

**SUMÁRIO**

**INTRODUÇÃO** .......... **16**

Justificativa do estudo .......... 19

Problemática e questão de investigação .......... 22

Caminhos metodológicos .......... 22

Apresentando a estrutura da pesquisa .......... 23

**CAPÍTULO I** .......... **26**

**REPRESENTAÇÕES E MODELOS** .......... **26**

1.1 Representações .......... 26

1.2 Modelos .......... 29

1.3 Modelo matemático .......... 30

1.4 Modelos matemáticos e objetos matemáticos .......... 32

**CAPÍTULO II** .......... **35**

**A TEORIA DOS REGISTROS SEMIÓTICOS DE RAYMOND DUVAL** .......... 35

2.1Aspectos gerais da teoria .......... 35

2.2 Atividades cognitivas de conversão e tratamento .......... 38

2.2.1 Tratamento: expansão informacional .......... 39

2.2.2Conversão: compreensão conceitual .......... 43

2.3.1 Critérios de congruência .......... 46

**CAPÍTULO III** .......... **49**

**CONSIDERAÇÕES GERAIS SOBRE MODELAGEM MATEMÁTICA** .......... **49**

3.1 Algumas concepções de modelagem matemática .......... 49

3.2 O fluxo do processo de modelagem .......... 54

3.3 Ambiente de modelagem matemática: uma questão de atitude .......... 61

3.4 Da escolha do tema .......... 63

3.5 Do professor .......... 64

3.8 Sobre o conteúdo previsto e o conteúdo efetivo .......... 64

3.7 Argumentos favoráveis e limitações ao uso da modelagem matemática 65
3.7.1 Argumentos favoráveis ... 65
3.7.2 Restrições ao uso da modelagem matemática ... 66
**CAPÍTULO IV ... 68**
**MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO DE FÍSICA ... 68**
4.1 Revisão de literatura ... 68
4.2 Problemas contextualizados ... 74
Atividade 1: homem empurrando um carro ... 75
Atividade 2: Represa hidrelétrica ... 80
4.3 Simulações computacionais ... 87
Atividade 3: Plano inclinado ... 88
Atividade 4: Tiro de canhão ... 99
4.4 Atividades experimentais ... 103
Atividade 5: Queda da moeda ... 104
Atividade 6: Formação de imagens em espelhos planos ... 110
**CONSIDERAÇÕES FINAIS ... 116**
**REFERENCIAIS BIBLIOGRÁFICOS ... 119**

“Não há *noésis* sem *semiósis”*

*(Raymond Duval, 2009)*

# INTRODUÇÃO

A citação acima nos fez refletir sobre a dificuldade que alguns alunos apresentam para externalizar seus pensamentos durante a resolução de problemas em Física. O fato é que, para resolver problemas, muitos economizam “lápis e papel”. Para eles, quanto menos for preciso escrever, menor é o “esforço” cognitivo para encontrar uma resposta. Muitos preferem até fazer cálculos mentais como estratégia, escrevendo apenas o resultado final no papel. A consequência é evidente: esses discentes não desenvolvem recursos semióticos e cognitivos (gráficos, equações, esquemas, diagramas, desenhos etc.) que facilitem a compreensão e resolução de problemas. Por outro lado, observa-se facilmente em sala de aula que os discentes que têm sucesso na resolução de problemas recorrem normalmente a uma diversidade de registros de representação semiótica[1]. Parece realmente haver uma ligação entre o uso desses recursos e o desenvolvimento cognitivo durante a resolução de problemas em Física.

Considerando que *noésis* são “os atos cognitivos como a apreensão conceitual de um objeto, a discriminação de uma diferença ou a compreensão de uma inferência” (DUVAL, 2009, p. 15) e que *semiósis* é “a apreensão ou a produção de uma representação semiótica” (ibidem), é possível pensar,

[1] Tais registros constituem o grau de liberdade de que um sujeito pode dispor para objetivar a si próprio uma idéia ainda confusa, um sentimento latente, para explorar informações ou simplesmente para poder comunicá-las a um interlocutor (DUVAL, 2009, p. 37). No processo de ensino de Física, os registros semióticos podem assumir a forma de: tabelas, gráficos, equações, esquemas, diagramas, figuras geométricas, língua natural etc.

admitindo que “é a *semiósis* que determina as condições de possibilidade e de exercício da *noésis”* (Ibidem), que um dos motivos pelos quais os discentes têm dificuldades em resolver problemas em Física é justamente pelo fato de não serem incentivados a fazerem uso de diversos sistemas de representação semiótica durante as atividades de ensino.

A aprendizagem em Física constitui, com efeito, um campo de estudo fértil para a análise de atividades cognitivas fundamentais como a conceitualização, a resolução de problemas e também a compreensão de textos. Essas atividades cognitivas requerem a utilização de sistemas de expressão e de representação como as escrituras para os números, notações simbólicas para os objetos, escritura algébrica, figuras geométricas, representações em perspectivas, gráficos cartesianos, diagramas, esquemas etc. Esses sistemas semióticos são imprescindíveis para a compreensão em Física ou são apenas um modo apropriado para a função de comunicação?

As representações semióticas, ou seja, os sistemas de expressão e representação além da linguagem natural e das imagens, não são apenas úteis para fins de comunicação no processo de ensino de Física, são indispensáveis ao desenvolvimento dos atos cognitivos subjacentes a tal aprendizagem. Isso porque “o desenvolvimento das representações mentais efetua-se como uma interiorização das representações semióticas...” (DUVAL, 2009, p. 17). Por exemplo, a compreensão que se tem através da interpretação de um gráfico cartesiano em Física ocorre a partir do instante que o sujeito internaliza o significado das curvas (retas, parábolas) formadas pela união dos pares ordenados (x,y) no plano do gráfico.

A aplicação mecânica de representações matemáticas no processo de ensino de Física é apenas um reflexo da necessidade de se usar muitos sistemas de registros semióticos nas atividades cognitivas em Física. Basta abrir um livro da área para perceber as tabelas, gráficos, equações, diagramas, esquemas, construídos para favorecer a compreensão de fenômenos da Natureza.

Acreditamos que essa mecanização não tem sua origem *ipso facto* na aplicação de representações matemáticas, mas no fato de que os sujeitos não reconhecem o mesmo objeto matemático em dois registros semióticos diferentes durante o emprego dessas representações,

> É essencial jamais confundir os objetos matemáticos, como os números, as funções, as retas, etc, com suas representações, quer dizer, as escrituras decimais ou fracionárias, os símbolos, os gráficos, os traçados de figuras...porque um mesmo objeto matemático pode ser dado através de representações muito diferentes (DUVAL, 2009, p. 14).

Raymond Duval informa ainda que toda a confusão entre o objeto e sua representação provoca, com o passar do tempo, uma perda de compreensão. Os conhecimentos assimilados tornam-se rapidamente inutilizáveis fora de seus contextos de aprendizagem: seja por falta de atenção, seja porque eles tornam-se representações inertes não possibilitando tratamento produtor (2009, p. 14). Ou seja, o sujeito aplica mecanicamente esses conhecimentos em situações de ensino.

O ambiente gerado pelo processo de Modelagem Matemática pode ser uma alternativa para promover a aplicação significativa, ou melhor, não mecanizada de representações semióticas no ensino de Física, uma vez que esse ambiente favorece a mobilização de registros de representação. No entanto, deve-se incentivar que o discente transite por vários registros de representação de um mesmo objeto matemático, como salienta Silva e Almeida (2009),

> O acesso aos diferentes registros de representação semiótica em uma atividade matemática geralmente não ocorre naturalmente e o professor pode incentivá-lo. Nessa perspectiva, consideramos a Modelagem Matemática como uma alternativa pedagógica adequada a esse fim (SILVA e ALMEIDA, 2009, p. 2).

Assim, o objetivo principal da pesquisa é propor reflexões sobre a mobilização de registros de representação semiótica durante o ambiente gerado pelo processo de Modelagem Matemática aplicado ao ensino de Física. Seguiremos a hipótese de que a articulação e interpretação de registros de representação em ambiente gerado pelo processo de Modelagem Matemática favorecem a compreensão significativa do conteúdo conceitual de Física.

**Justificativa do estudo**

Muito se tem discutido sobre o problema da aplicação mecânica das equações e fórmulas no ensino de Física. Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) deixam clara essa preocupação,

> O ensino de Física tem-se realizado frequentemente mediante a apresentação de conceitos, leis e fórmulas, de forma desarticulada, distanciados do mundo vivido pelos alunos e professores e não só, mas também por isso, vazios de significado. Privilegia a teoria e a abstração, desde o primeiro momento, em detrimento de um desenvolvimento gradual da abstração que, pelo menos, parta da prática e de exemplos concretos. Enfatiza a utilização de fórmulas, em situações artificiais, desvinculando a linguagem matemática que essas fórmulas representam de seu significado físico efetivo. Insiste na solução de exercícios repetitivos, pretendendo que o aprendizado ocorra pela automatização ou memorização e não pela construção do conhecimento através das competências adquiridas. Apresenta o conhecimento como um produto

> acabado, fruto da genialidade de mentes como a de Galileu, Newton ou Einstein, contribuindo para que os alunos concluam que não resta mais nenhum problema significativo a resolver. Além disso, envolve uma lista de conteúdos demasiadamente extensa, que impede o aprofundamento necessário e a instauração de um diálogo construtivo (BRASIL, 2000b, p. 22).

A partir das diretrizes apresentadas nos PCNEM, o conhecimento escolar de Física ganhou novo fazer. Trata-se de construir uma visão da Física voltada para a formação de um cidadão contemporâneo, atuante e solidário, com instrumentos para compreender, intervir e participar na realidade que o rodeia. A Física deve ser apresentada ao estudante como um conjunto de habilidades ou competências específicas que permitam perceber e lidar com os fenômenos naturais e tecnológicos, presentes tanto na realidade mais imediata do aluno quanto na compreensão do universo distante, a partir de princípios, leis e modelos por ela construídos (BRASIL, 2000a, p. 59).

> O ensino de Física vem deixando de se concentrar na simples memorização de fórmulas ou repetição automatizada de procedimentos, em situações artificiais ou extremamente abstratas, ganhando consciência de que é preciso lhe dar um significado, explicitando seu sentido já no momento do aprendizado, na própria escola média (BRASIL, 2000a, p. 60).

Deve-se, portanto, mudar os critérios que orientam a ação pedagógica, tomando-se como referência a pergunta “para que ensinar Física?” ao invés de “o que ensinar de Física?”. Ou seja, deve-se ter a preocupação em atribuir significado ao discurso da Física no momento de seu aprendizado.

Quando se muda a questão norteadora do ensino de Física, muda-se o modo de “fazer” Física em sala de aula. Ao se seguir a lógica “do que ensinar de Física?” corre-se o risco de apresentar algo demasiadamente abstrato e distante da realidade do aluno; quase sempre supondo que os conteúdos devem seguir uma ordem pré-estabelecida, por exemplo, ensina-se cinemática antes de dinâmica por que se pensa que a primeira é indispensável para a compreensão da segunda, pelo mesmo motivo ensina-se eletrostática antes de eletromagnetismo. Ao contrário, quando se toma como referência o “para que ensinar Física?” supõe-se que se esteja preparando o estudante para ser capaz de lidar com situações reais: crises de energia, problemas ambientais, manuais de aparelhos, concepções de universo, exames médicos, notícias de jornal etc.

> Esse objetivo mais amplo requer, sobretudo, que os jovens adquiram competências para lidar com as situações que vivenciam ou que venham a vivenciar no futuro, muitas delas novas e inéditas. Nada mais natural, portanto, que substituir a preocupação central com os conteúdos por uma identificação das competências que, se imagina, eles terão necessidade de adquirir em seu processo de escolaridade média (BRASIL, 2000a, p. 61).

Assim, há competências relacionadas principalmente com a investigação e compreensão dos fenômenos físicos; enquanto há outras que dizem respeito à utilização da linguagem da Física e de sua comunicação, há ainda outras competências que tenham a ver com contextualização histórica e social do conhecimento de Física.

Dessa maneira, entendemos que é preciso encontrar estratégias metodológicas de ensino de Física que favoreçam significado às representações matemáticas. Pensamos que a mobilização e interpretação de registros de representação em ambiente gerado pelo processo de Modelagem Matemática possa ser uma alternativa pedagógica que vai ao encontro dessa perspectiva.

## Problemática e questão de investigação

Pode-se dizer que uma constante no desenvolvimento da ciência é a crescente construção de modelos matemáticos para descrever algum aspecto da natureza ou algum fenômeno (social, físico, biológico, psicológico etc.). Duval ratifica esse ponto de vista: “a diversificação dos registros de representação semiótica é a constante do desenvolvimento dos conhecimentos tanto sobre o ponto de vista individual quanto científico ou cultural” (2009, p. 80). Considerando a necessidade de usar muitos sistemas de representação semiótica no ensino de Física é que apresentamos nossa questão de investigação:

*A mobilização de registros de representação semiótica em atividades de Modelagem Matemática pode favorecer a conceitualização em Física?*

## Caminhos metodológicos

Para escolher um caminho norteador, baseamo-nos teoricamente na obra de Fiorentini e Lorenzato (2007) “Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos” o qual trata da pesquisa científica na área da Educação Matemática.

Segundo os autores, existem dois momentos fundamentais em um processo de investigação: o de formulação do problema ou da questão de investigação e o de construção das conclusões da pesquisa (ver figura 1).

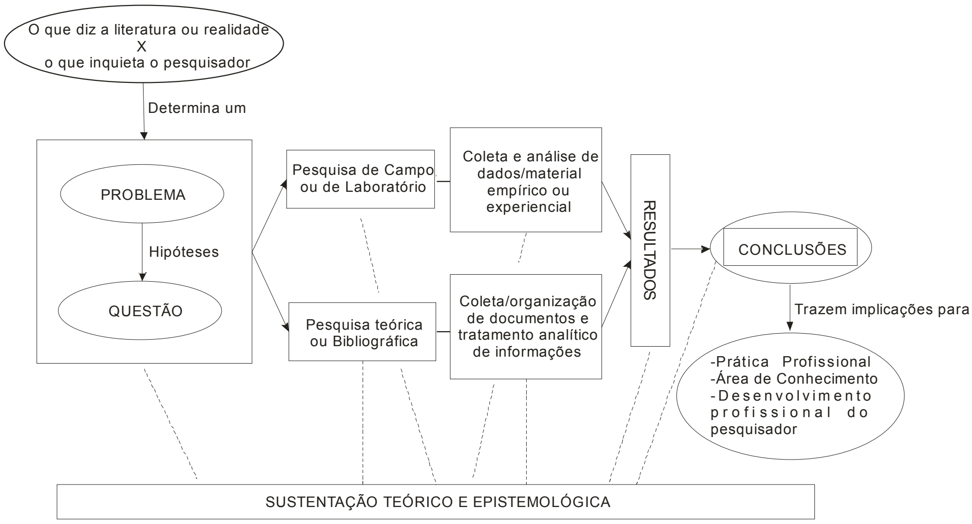



**Figura 1**. Estrutura de uma investigação (Fonte: Fiorentini e Lorenzato, 2007, p. 62).

Nosso problema de pesquisa *(A coordenação de registros de representação em atividades de modelagem matemática pode favorecer a conceitualização Física?)* sugere que sigamos o caminho inferior da figura 1, ou seja, nossa metodologia tem característica de pesquisa bibliográfica onde faremos desenvolvimento teórico, coleta e organização de trabalhos que abordam a temática Modelagem Matemática no ensino de Física com posterior desenvolvimento analítico de algumas dessas atividades.

## Apresentando a estrutura da pesquisa

No primeiro capítulo, intitulado *Representações e Modelos,* procuramos mostrar as peculiaridades do significado referente aos termos representação matemática e modelo matemático. Partindo dos conceitos de representação e modelo a partir da psicologia cognitiva, argumentamos que um modelo matemático é uma representação matemática que deve, necessariamente, permitir interpretação sobre o objeto de estudo. Uma representação matemática que não é do tipo modelo matemático não favorece interpretação científica para o sujeito. Veremos que essa discussão pode ser útil para as orientações durante o processo de modelagem.

No segundo capítulo, o qual trás o título *A teoria dos registros semióticos de Raymond Duval,* apresentamos os principais pontos dessa teoria. Nesse momento, abordaremos sobre as atividades cognitivas de conversão e tratamento de registros semióticos. Veremos que a compreensão de um objeto matemático ocorre quando o sujeito é capaz de coordenar, por meio da atividade de conversão, pelo menos dois registros de representação semiótica. A articulação entre registros semióticos diferentes leva ao reconhecimento do objeto matemático, proporcionando a construção de relações funcionais entre variáveis do problema.

Deixamos para o terceiro capítulo, cujo título é *Aspectos gerais sobre modelagem matemática,* tratar os aspectos teóricos referentes à Modelagem Matemática. Dialogaremos sobre as concepções de modelagem de alguns autores de renome na área, tais como: Rodney Bassanezi (2004), Jonei Barbosa (2001), Biembengut e Hein (2003) e Chaves e Espírito Santo (2008). Abordaremos também sobre a dinâmica do processo de modelagem. Finalizaremos esse capítulo explicitando nossa concepção de modelagem no ensino de Física: enfatizar a mobilização e interpretação de representações semióticas durante o processo de modelagem.

O quarto e último capítulo, que trás o título *Modelagem matemática no ensino de Física*, é referente ao processo de modelagem no ensino-aprendizagem de Física. Após uma pesquisa bibliográfica sobre os trabalhos disponíveis na *internet* e posterior categorização dos mesmos, desenvolveremos e analisaremos seis (06) atividades de modelagem de fenômenos físicos. O desenvolvimento dessas atividades serviu para estudar a movimentação e interpretação de registros de representação no cenário do ensino de Física.

# CAPÍTULO I

## REPRESENTAÇÕES E MODELOS

Temos percebido nos trabalhos publicados sobre Modelagem Matemática que o termo representação matemática comumente é confundido com o termo modelo matemático, a ponto de, muitas vezes, serem usados com o mesmo significado ou até mesmo como sinônimos, o que causa dificuldades para compreender as peculiaridades do significado de cada um desses termos, provocando obstáculos epistemológicos. O objetivo desse capítulo é refletir quanto ao emprego desses termos em trabalhos sobre Modelagem Matemática. Vamos ver o que a psicologia cognitiva diz sobre os conceitos de representação e modelo.

### 1.1 Representações

Numa visão cognitiva, pode-se entender que "uma representação é uma notação ou signo ou conjunto de símbolos que 're-presenta' algo para nós, ou seja, ela representa alguma coisa na ausência dessa coisa (EYSENCK e KEANE apud FERNADES, 2000, p. 10)[2]. Segundo Raymond Duval (2009, p. 30), Piaget recorre à noção de representação como "**evocação dos objetos ausentes**" (grifos do autor). Ainda segundo Duval (ibidem), as representações podem ser classificadas de acordo com as oposições interna/externa e consciente/não-consciente (Quadro 1).

[2] EYSENK, M. E; KEANE, M. T. *Cognitive pisichology: a student's hadbook.* Hove: Lawrence Erlbaum, 1990.

**Quadro 1**. Tipos e funções das representações (Fonte: Duval, 2009, p. 43).

| | **Interna** | **Externa** |
|---|---|---|
| **Consciente** | *Mental*<br>• Função de objetivação | *Semiótica*<br>• Função de objetivação<br>• Função de expressão<br>• Função de tratamento intencional |
| **Não-consciente** | *Computacional*<br>• Função de tratamento automático ou quase instantâneo. | |

Percebemos que este autor classifica as representações em três grandes tipos: *mental, semiótica e computacional*. As representações mentais são internas e conscientes, não necessitam de um significante para representar o objeto. As representações semióticas também são conscientes, mas externas; necessitam de um significante (símbolo, reta, sons...) para representar o objeto. As representações computacionais são internas e não conscientes, podem ser algoritmizáveis sem a necessidade de significante, os modelos mentais[3] de Johnson-Laird são exemplos desse tipo de representação.

Fernandes (2000, p. 11) informa que as representações externas são utilizadas principalmente na comunicação entre os indivíduos. As internas são utilizadas no processamento mental (pensamento). Dentre as representações externas, podemos distinguir a pictórica (desenhos, figuras, diagramas) e as linguísticas (palavra escrita ou falada). As representações internas são

[3]De acordo com Moreira (1996, p. 193) os modelos mentais são representações internas construídas para compreender e agir sobre determinada situação.

utilizadas pela mente e podem ser divididas didaticamente em distribuídas (redes neurais artificiais) e simbólicas (proposicionais do “tipo-linguagem” e analógica) (Figura 2).

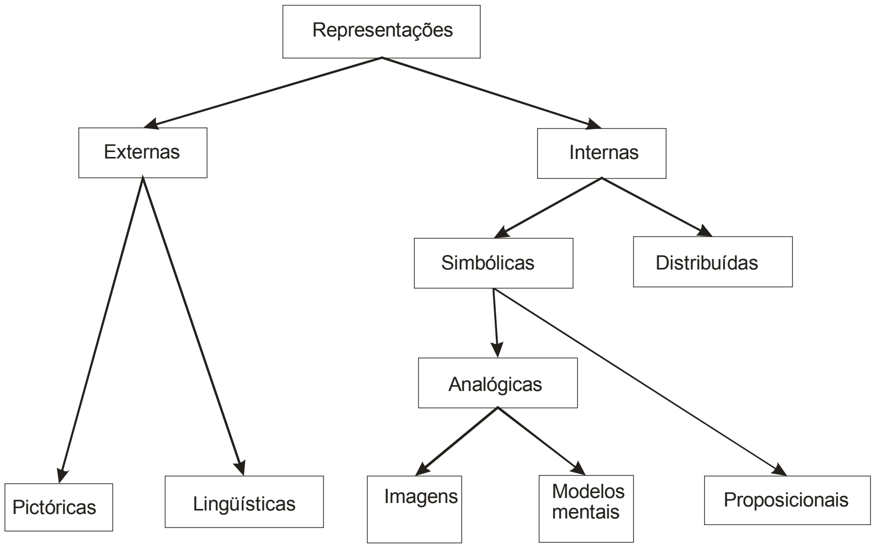



**Figura 2**. Diagrama das diferentes representações (Fonte: FERNANDES, 2000, p. 11).

Toda representação externa é semiótica e muitas representações mentais são representações semióticas interiorizadas (DUVAL, 2008, p. 31).

Desse modo, uma representação (semiótica, mental ou computacional) tem a função de “estar no lugar” na ausência do objeto representado. As representações podem ser externas, no caso das representações semióticas, ou internas, no caso das representações mentais e computacionais. Sendo que as representações mentais são conscientes, originando-se muitas vezes da interiorização de representações semióticas. As representações computacionais são formadas inconscientemente pelo sujeito.

Passemos agora a discutir sobre o termo modelo.

## 1.2 Modelos

Bassanezi (2004, p. 19) argumenta que ao se procurar refletir sobre uma parte da realidade, na tentativa de explicar, de entender, ou de agir sobre ela, o processo comum é selecionar, no sistema, argumentos ou parâmetros considerados essenciais e formalizá-los através de um sistema artificial: *o modelo*.

Depreende-se da citação de Rodney Bassanezi que um modelo deve ser funcional no sentido de possibilitar interpretações (explicações e descrições). O que pode ser corroborado por Pinheiro (2001, p. 38) “Os modelos, devido à sua flexibilidade, podem desempenhar diversas funções, às vezes até simultaneamente. Eles podem servir para compreender, explicar, prever, calcular, manipular, formular”.

Borges (1997, p. 207) contribui ressaltando que,

> Um modelo pode ser definido como uma representação de um objeto ou uma idéia, de um evento ou de um processo, envolvendo analogias Portanto, da mesma forma que uma analogia, um modelo implica na existência de uma correspondência estrutural entre sistemas distintos. Se isso não fosse assim, os modelos teriam pouca utilidade.

Esse autor argumenta também que quando uma coisa é análoga a outra, implica que uma comparação entre suas estruturas é feita e a analogia é o veículo que expressa os resultados de tal comparação. Analogias são, portanto, ferramentas para o raciocínio e para a explicação (Ibidem).

Entende-se, portanto, que um modelo é uma representação de alguma coisa que deve ser funcional, isto é, deve possibilitar interpretações por meio de analogias entre o representante e o representado.

Por exemplo, o modelo de um motor de carro (uma planta, uma maquete, um protótipo) deve permitir que o engenheiro o explique e o descreva, visando tomar decisões a partir da interpretação desse modelo. Para um leigo, essa representação de motor não será um modelo, visto que não possibilitará nenhuma explicação científica, não será funcional. Será uma representação sem interpretação científica, apenas estará no lugar do motor na ausência deste.

É certo afirmar que as interpretações baseadas em uma representação dependem, entre outras coisas, do conhecimento prévio (do repertório cognitivo) do sujeito. Desta maneira, a distinção entre esses dois termos (representação e modelo) não é algo trivial, ocorre a nível mental, a nível cognitivo.

### 1.3 Modelo matemático

Considerando o exposto acima, somos levados a considerar que um modelo matemático é uma representação matemática que possui certa funcionalidade, isto é, possibilita interpretação e ação (tomada de decisão) sobre o objeto de estudo; é uma representação matemática que deve servir para explicar ou descrever cientificamente alguma coisa. Isso implica que a distinção entre representação matemática e modelo matemático é interna ao sujeito, ocorre em função de seu repertório de conhecimentos.

O mapa acústico da figura 3 poderá ajudar a exemplificar nossa reflexão.

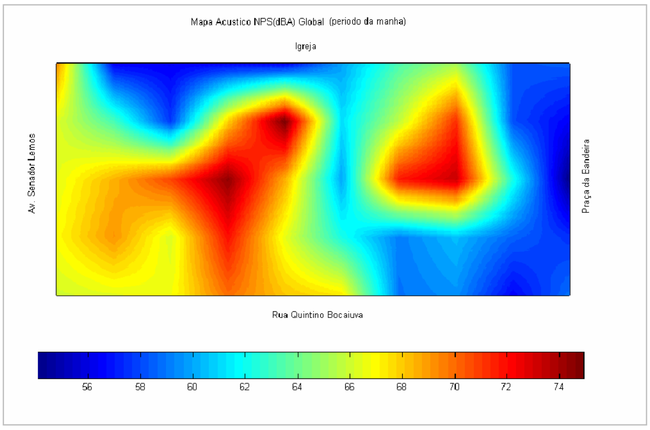



**Figura 3**. Mapa acústico construído durante uma atividade de modelagem matemática. Modelo matemático ou representação matemática? (Fonte: ROZAL, 2007, p. 109).

Esse mapa acústico pode ser considerado um modelo matemático? Ele propicia alguma informação matemática que possa ser deduzida por inferência? Pode-se predizer alguma tendência matemática? Pode-se explicar ou descrever o objeto representado?

Vamos analisar essas perguntas de duas maneiras: uma análise ingênua do mapa não seria capaz de inferir informações matemáticas implícitas, não conseguiria predizer alguma tendência matemática significativa. Uma pessoa mais experiente, habilidosa e capacitada ao ler esse tipo de mapa, provavelmente inferiria informações matemáticas e físicas implícitas na figura. Poderia, com certa facilidade, predizer algum comportamento matemático ou físico. No primeiro caso, a figura seria uma representação matemática. No segundo, seria uma representação do tipo modelo matemático.

Depreende-se desse exemplo que o conceito de modelo matemático torna-se *relativo* quando se leva em consideração o conhecimento prévio do indivíduo. Ou seja, o que é modelo matemático para um sujeito pode não ser para outro.

O significado e o sentido de uma representação matemática dependem da relação que se constrói com ela durante sua elaboração ou construção. Por isso, acreditamos que o processo de modelagem matemática possa favorecer essa significação, favorecendo a interpretação das representações matemáticas construídas. É também durante a tessitura de uma representação matemática que o aprendiz modelador atribui algum grau de significado em seus símbolos ou signos.

A discussão sobre esses dois termos (representação matemática e modelo matemático) torna-se importante para que o professor reflita que uma equação, tabela ou gráfico podem ser apreendidos de forma diferente pelos alunos. Uns podem compreendê-los como representação do tipo modelo matemático, interpretando-os de maneira científica; outros, como simples representações matemáticas, sem usá-las para explicar ou descrever.

Acreditamos que os discentes que compreendem as equações e fórmulas como modelos matemáticos têm melhores resultados nas atividades de resolução de problemas e de Modelagem Matemática. O papel do professor seria favorecer a construção cognitiva de modelos matemáticos.

### 1.4 Modelos matemáticos e objetos matemáticos

A construção cognitiva de modelos matemáticos pode ser favorecida quando o sujeito consegue identificar ou ao menos ter noção do objeto matemático que está subjacente à situação real ou fenômeno físico.

Para que se possa dar significado a uma representação matemática é necessário explorar cognitivamente suas diversas representações semióticas. É essencial saber discriminar o objeto matemático de sua representação, pois,

“...não se pode ter compreensão em matemáticas, se nós não distinguimos um objeto de sua representação” (Duval, 2009, p. 14). A compreensão da atividade matemática em Física é favorecida quando o discente consegue distinguir o objeto matemático de sua representação semiótica.

Assim, o acesso ao objeto matemático se faz por meio de suas várias representações semióticas (DUVAL, 2008, p. 21). Não temos acesso direto ao objeto matemático, somente às suas representações semióticas. “*Como podemos não confundir um objeto e sua representação se não temos acesso a esse objeto a não ser por meio de sua representação?”* (Ibidem).

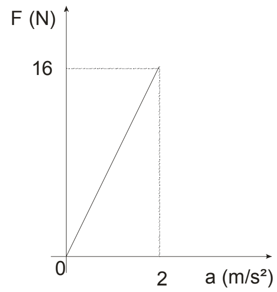
Esse problema tem levado muitos discentes a lidarem, durante o processo de Modelagem Matemática, com os diversos registros de representação do mesmo objeto matemático (tabelas, gráficos, equações...) pensando estar lidando com objetos matemáticos diferentes. Para que haja compreensão conceitual em Física é necessário que os discentes tomem consciência do objeto matemático representado por uma classe de representações matemáticas construídas a partir de um mesmo problema.

Sendo assim, pensamos que a coordenação e interpretação dos vários registros de representação de um mesmo objeto matemático contribuem para a construção de conceitos em Física. Essa nossa assertiva está baseada na afirmação de Raymond Duval sobre a coordenação de dois registros semióticos ocorrer quando se compreende o objeto matemático (2008). Dessa forma, pensamos que não basta os alunos construírem e aplicarem representações matemáticas durante a modelagem de fenômenos físicos; mas tomarem consciência, durante essa aplicação, que uma mesma situação de

Física pode ser representada por diversas representações semióticas e que tais representações dizem respeito ao mesmo objeto matemático.

A figura 4 mostra três representações matemáticas da mesma situação física, as quais representam o mesmo objeto matemático função do primeiro grau. Cada representação matemática possibilita uma interpretação peculiar do fenômeno físico. A tabela permite identificar relações entre as variáveis dependentes e independentes de forma pontual. O gráfico permite construir um traçado (reta) para melhor analisar a tendência da situação física. A equação permite fazer previsões de forma mais abrangentes por meio de processos de derivação e integração.

| a (m/s²) | F (N) |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 2 | 16 |
| 4 | 32 |
| 6 | 48 |




$$F = 8\,a$$

**Figura 4**. Tabela, gráfico e equação algébrica: três representações matemáticas do mesmo objeto matemático função do primeiro grau. Possibilitam compreensões diferentes do mesmo fenômeno físico.

No próximo capítulo, aprofundaremos nosso estudo sobre representações semióticas.

# CAPÍTULO II

## A TEORIA DOS REGISTROS SEMIÓTICOS DE RAYMOND DUVAL

O seguinte capítulo tem como objetivo apresentar, de maneira geral, a teoria dos registros de representação semiótica idealizada pelo psicólogo francês Raymond Duval.

### 2.1 Aspectos gerais da teoria

Para falar sobre essa teoria, alicerçaremo-nos, basicamente, na tradução de Levy e Silveira (2009) referente à introdução e primeiro capítulo do livro original *Sémiosis et Pensée Humaine: Registres Sémiotiques et Apprentissages Intellectuels* (*Sémiosis* e pensamento humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais).

Raymond Duval, filósofo e psicólogo de formação, desenvolve atualmente seus estudos relativos à psicologia cognitiva no Instituto de Pesquisa em Educação Matemática (IREM) de *Estrasburgo* (França). Tem contribuído fortemente para as pesquisas em Educação Matemática. Sua teoria é complexa (como são quase todas as teorias na área da psicologia cognitiva) *e propõe que o pensamento e o processo de conceitualização (matemática) possuem "laços" com a semiótica mobilizada pelo sujeito para objetivar tal pensamento*. Afirma que a "compreensão em matemática supõe a coordenação de ao menos dois registros de representações semióticas" (DUVAL, 2008, p.

15). Deste modo, ele parte do princípio que a *semiósis*[4] interfere diretamente na *noésis*[5].

Raymond Duval (2009, p. 37) propõe o termo *registros de representação semiótica* para designar os graus de liberdade que um sujeito pode dispor para objetivar a si próprio uma idéia ainda confusa, um sentimento latente, para explorar informações ou simplesmente para poder comunicá-las a outro sujeito.

> A originalidade de uma abordagem cognitiva não está em partir dos erros para tentar determinar as “concepções” dos alunos e a origem de suas dificuldades em álgebra, em decimais, neste ou naquele conceito geométrico etc. A originalidade da abordagem cognitiva está em procurar inicialmente descrever o funcionamento cognitivo que possibilite a um aluno compreender, efetuar e controlar ele próprio a diversidade dos processos matemáticos que lhe são propostos em situações de ensino (DUVAL, 2008, p. 12).

Ou seja, a originalidade da atividade matemática e, por conseguinte, da atividade matemática em Física, está em mobilizar, simultaneamente, pelo menos, dois registros de representação ou em trocar, a todo o momento, o registro com que se trabalha nessas atividades.

Ele argumenta que uma das principais dificuldades da aprendizagem em Matemática ocorre quando o sujeito confunde o objeto matemático com sua representação. Torna-se uma tarefa difícil para o aluno distinguir o objeto de sua representação, uma vez que ele não tem acesso direto ao mundo matemático, mas o faz por meio de suas representações. É o que ele chama de *paradoxo cognitivo do pensamento matemático* (DUVAL, 2009, p. 9).

---

[4]Signo, marca distintiva, ação de marcar um signo, produções ligadas às práticas significantes (Duval, 2009, p. 15).
[5]Intelecção, ato de compreensão conceitual, pensamentos e vividos intencionais (ibidem).

Portanto, diz o autor, a noção de representação semiótica deve pressupor que se considerem sistemas semióticos diferentes e uma operação cognitiva de conversão das representações de um sistema semiótico para outro. Ou seja, uma representação é semiótica quando se pode convertê-la em outra representação, que também será semiótica. Essa conversão deve conservar o objeto de estudo, admitindo, no entanto, outras significações.

> A especificidade das representações semióticas consiste em serem relativas a um sistema particular de signos, a linguagem, a escritura algébrica ou os gráficos cartesianos, e em poderem ser convertidas em representações "equivalentes" em um outro sistema semiótico, mas podendo tomar **significações** diferentes para o sujeito que as utiliza (2009, p. 32) (grifo do autor).

Para Duval (2009, p. 36-37), os sistemas semióticos devem permitir o cumprimento das três atividades cognitivas inerentes a toda representação:

- Devem constituir um traço ou um ajuntamento de traços perceptíveis que sejam identificáveis como uma representação de alguma coisa em um sistema determinado;
- Transformar as representações apenas pelas regras próprias ao sistema, de modo a obter outras representações que possam constituir uma relação de conhecimento em comparação às representações iniciais;
- Converter as representações produzidas em um sistema em representações de outro sistema, de tal maneira que estas últimas permitam explicar outras significações relativas ao que é representado.

## 2.2 Atividades cognitivas de conversão e tratamento

A transformação de registros semióticos durante a apreensão de um objeto matemático pode ocorrer de duas maneiras, pelo *tratamento e pela conversão*:

> Os tratamentos são transformações de representações dentro de um mesmo registro: por exemplo, efetuar um cálculo ficando estritamente no mesmo sistema de escrita ou de representação dos números; resolver uma equação ou um sistema de equações; completar uma figura segundo critérios de conexidade e de simetria.
>
> As conversões são transformações de representações que consistem em mudar de registro conservando os mesmos objetos denotados: por exemplo, passar da escrita algébrica de uma equação à sua representação gráfica (DUVAL, 2008, p. 16).

A figura 5 explora melhor essas definições:

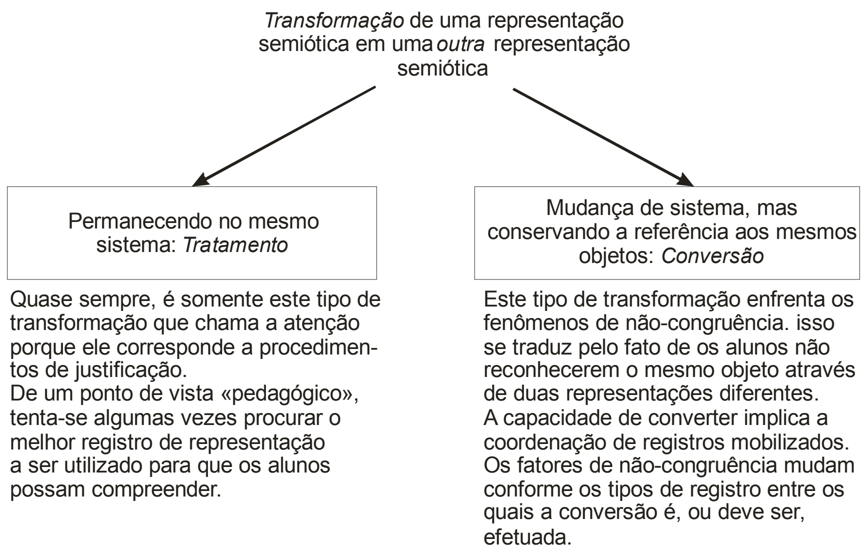



**Figura 5**. Atividade de tratamento e conversão (Fonte: Duval, 2008, p. 15).

Por exemplo, a transformação

$$\boxed{\begin{array}{c} 5x=10 \\ x=10/5 \\ x=2 \end{array}}$$

**Figura 6**. Exemplo de tratamento: mantém-se o registro algébrico.

Corresponde a uma transformação de *tratamento* interno a um registro de representação, pois, manteve-se o registro algébrico.

Já a transformação:

$y = 5x \rightarrow$

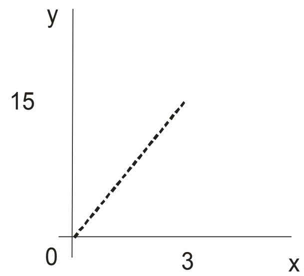



**Figura 7**. Exemplo de conversão: muda-se o registro de representação.

Corresponde a uma *conversão*, pois, houve mudança de sistema de representação: do algébrico para o gráfico cartesiano.

### 2.2.1 Tratamento: expansão informacional

Um tratamento é a transformação de uma representação obtida como registro inicial em uma representação considerada como registro terminal em relação a uma questão, a um problema ou a uma necessidade, os quais fornecem o critério de "chegada" na série de transformações efetuadas. O tratamento é uma transformação de representação interna a um registro de representação ou a um sistema.

Ao contrário do que se possa imaginar precipitadamente, o tratamento não é específico dos registros matemáticos, pode ocorrer, por exemplo, nos registros do discurso da língua natural[6]: a *paráfrase* reformula um enunciado dado em outro, seja para substituí-lo, seja para explicá-lo. Ou seja, a *paráfrase* é uma transformação interna (tratamento) ao registro do discurso na língua natural (DUVAL, 2009, p. 57).

De uma maneira mais geral, podemos dizer que o tratamento de uma representação semiótica corresponde a sua *expansão informacional*. No caso da linguagem isso é evidente: o poder criativo de toda linguagem repousa sobre uma *expansão discursiva* cuja paráfrase é a forma mais pobre (Ibidem).

Dado o aspecto polissêmico da língua natural, a expansão discursiva de seu tratamento parece não ter um ponto de chegada. Basta analisarmos os aspectos semânticos e discursivos da frase abaixo para perceber isso:

*A matemática é uma linguagem que precisa ser interpretada!*

- A matemática como linguagem precisa ser interpretada.
- A linguagem matemática precisa ser interpretada.
- A linguagem da matemática precisa ser interpretada
- Etc (qual o ponto de chegada do tratamento dado à frase inicial?)

[6]Segundo o professor Erasmo Borges durante mesa redonda do Colóquio Educação em Ciências e Matemáticas: perspectivas interdisciplinares (2009), a língua natural corresponde aos diferentes idiomas falados (Português, Francês, Inglês), já a língua materna corresponde à língua do local onde a pessoa nasce (língua nativa).

O mesmo não ocorre com a linguagem matemática, que, procurando ser universal, “perde” esse caráter polissêmico, ficando mais ou menos nítido o ponto de chegada. Observemos o tratamento a seguir:

$$3x^2 + 5x - 8 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 25 - 4.3.(-8)$$

$$\Delta = 121$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x \frac{= -5 \pm 11}{6}$$

$x_1 = 1\ e x_2 = -2{,}7$ (ponto de chegada do tratamento dado à equação inicial)

As regras para expandir ou tratar uma representação são definidas como regras que, uma vez aplicadas, resultam em uma representação de mesmo registro que a de partida. São regras que se processam em duas direções. Certas regras de tratamento não são de forma alguma específicas a um registro de representação. É o caso das regras de derivação: elas são comuns a todos os raciocínios do tipo dedutivo. Porém, esses raciocínios podem ser efetuados no registro de uma língua formal tanto quanto naquele da língua natural (DUVAL, 2009, p. 58). O físico pode deduzir uma equação diferencial a partir da observação de um fenômeno usando as mesmas regras de derivação que o matemático usa para fazer demonstrações.

Duval (2009, p. 50-52) nos informa que existem dois tipos principais de tratamentos que interferem na aprendizagem e que se complementam: os tratamentos *quase-instantâneos* e os tratamentos *intencionais*. Os primeiros são aqueles efetuados sem a necessidade de um intervalo de tempo muito longo, “produzem as informações e significações em que um sujeito tem imediatamente consciência” (ibid., p. 50). Esses tratamentos correspondem à familiaridade ou à experiência que um sujeito obtém devido uma longa prática. Eles não requerem um controle consciente para serem efetuados. Por exemplo, o tratamento para o cálculo de $\frac{d}{dx}[x]$ é realizado de forma imediata pelo matemático experiente, sem que este recorra, de forma consciente, às regras de derivação. Estes tratamentos estão relacionados às representações computacionais.

Os tratamentos intencionais necessitam de um controle consciente para serem efetivados. Apóiam-se sobre àquilo que o sujeito “vê” ou “nota” de maneira quase-instantânea (Ibid., p. 52). Podem apenas ser realizados um depois do outro e são sensíveis ao número de elementos necessários ao raciocínio. A resolução de $\frac{d}{dx}[2x^3+3x-8]$ necessita de um tratamento intencional para ser efetivado. Estão relacionados às representações mentais.

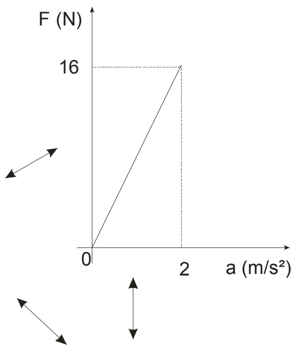
> *Toda a atividade cognitiva humana repousa sobre a complementaridade desses dois tipos de tratamentos.* Sendo dada a não extensibilidade da capacidade de tratamento intencional, a diferença das performances cognitivas entre os sujeitos depende da diversidade e da arquitetura dos tratamentos quase-instantâneos dos quais eles dispõem. O conjunto de tratamentos dos quais um sujeito dispõe determina o nível e o horizonte epistêmicos para a aplicação de tratamentos intencionais. (Duval, 2009, p. 52)

Em Física, a atividade de tratamento semiótico auxilia na compreensão da situação estudada. Por exemplo, se uma situação de Mecânica deu origem à seguinte representação matemática $v = 3 + 5\,t$, o tratamento por meio de uma regra de derivada revela que a aceleração do móvel é de 5 m/s², ou seja, o tratamento mostra uma informação subjacente à forma do registro.

### 2.2.2 Conversão: compreensão conceitual

“Converter é transformar a representação de um objeto, de uma situação ou de uma informação dada num registro em uma representação desse mesmo objeto, dessa mesma situação ou da mesma informação num outro registro” (DUVAL, 2009, p. 58). Substantivos do tipo “tradução”, “ilustração”, “transposição”, “interpretação”, “codificação” etc. são operações que a uma representação de um registro dado fazem corresponder uma outra representação num outro registro. A conversão é uma transformação externa em relação ao registro da representação de partida.

| a (m/s²) | F (N) |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 2 | 16 |
| 4 | 32 |
| 6 | 48 |




$F = 8\,a$

**Figura 8**. Articulação entre registros de representação semiótica por meio da atividade cognitiva de conversão.

A conversão semiótica implica a mudança no procedimento de interpretação. O conteúdo da representação de chegada suscita interpretação diferente da representação de partida. A conversão requer que se perceba a diferença entre a forma e o conteúdo da representação. Sem a percepção dessa diferença a atividade de conversão torna-se impossível ou incompreensível (DUVAL, 2009, p. 59).

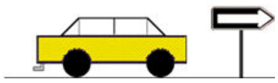
Diferentemente das regras de tratamento, salvo algumas exceções, as regras de conversão são de direção única "...*as regras de conversão não são as mesmas segundo o sentido no qual a mudança de registro é efetuada"* (DUVAL, 2009, p. 61). Por exemplo, para quantos enunciados em língua natural é possível converter a equação $5x = 10$? Talvez por isso "...*a conversão das representações semióticas constitui a atividade cognitiva menos espontânea e mais difícil de adquirir para a grande maioria dos alunos"* (ibidem, p. 63).

Observando-se relatos de atividade de modelagem, verifica-se que alguns discentes têm dificuldades de passar de um gráfico cartesiano a uma equação algébrica. Isso porque a atividade de conversão exige custo cognitivo acentuado. O uso do computador pode auxiliar na tarefa de conversão de registros de representação. No entanto, não podemos preterir a importância cognitiva de se usar "lápis e papel" nessa tarefa.

### 2.3 Os fenômenos de congruência e não-congruência

Quando o registro de saída de uma conversão "lembra" o mesmo objeto matemático representado no registro de entrada, dizemos que houve o fenômeno da *congruência*. Nesse caso, os alunos reconhecem (ou deveriam reconhecer) o mesmo objeto matemático através de duas representações semióticas diferentes. Por exemplo, a conversão do registro algébrico para o registro gráfico cartesiano onde o sujeito “percebe” estar se tratando do mesmo objeto matemático função do primeiro grau é dita de congruente. Porém, se o registro de saída “não lembra” o mesmo objeto matemático representado no registro de entrada, dizemos que houve o fenômeno da não-congruência na conversão, o aluno dificilmente reconhece o mesmo objeto matemático em duas representações semióticas não-congruentes.

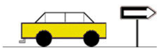
Para determinar se duas representações são congruentes ou não, segmentamo-nas em suas unidades significantes[7] respectivas, de tal modo que elas possam ser colocadas em correspondência. Ao final dessa segmentação comparativa, pode-se então ver se as unidades significantes são, em cada um dos dois registros, unidades significantes simples ou combinações de unidades simples. Essa comparação pode ser feita diretamente ou por meio de uma representação auxiliar que “codifique” de alguma forma as representações a comparar (DUVAL, 2009, p. 66).

Por exemplo, seja o registro pictórico . Essa figura comporta três unidades de significado:

- O carro;
- A placa;
- A estrada;

Qualquer conversão desse registro para um registro em língua natural deve levar em consideração pelo menos uma dessas unidades significantes como “âncora”. Tomemos a placa como posição de ancoragem para a

[7]Considera-se como unidade significante elementar toda unidade que se destaca do “léxico” de um registro (DUVAL, 2009). Uma palavra, uma expressão ou uma figura são exemplos de unidades significantes.

apreensão perceptiva da imagem. Poderíamos, então, convertê-la para o seguinte registro língua natural: *o carro está atrás da placa.* Poderíamos então codificar esse registro da seguinte forma: Chamando de *A* e *B*, respectivamente, *o carro* e *a placa*, e simbolizando a locução “está atrás da” por “<”, poderíamos formar um código simbólico para esse registro: A < B. Deste modo A < B é uma representação algébrica que codifica a frase “o carro está atrás da placa”. Assim, poderíamos converter o registro pictórico  no registro simbólico A < B. Sendo também possível a conversão inversa. Devido um registro “lembrar” o outro, dizemos que essa conversão é congruente.

A “capacidade” de interpretar uma representação matemática depende, além do repertório de conhecimentos do sujeito, do grau de congruência do modelo matemático. Uma representação congruente, que “lembre” a situação original, possibilitará interpretação mais eficaz; já uma representação não-congruente, que não “lembre” a situação original, possibilitará uma leitura menos eficaz. Acreditamos que o estudo do grau de congruência de modelos matemáticos possa contribuir para o desenvolvimento do processo de Modelagem Matemática. Tal estudo pode ser feito por meio dos critérios de congruência de Duval.

### 2.3.1 Critérios de congruência

Baseando-nos em Duval (2009, p. 68-69), podemos relacionar três critérios de congruência. O primeiro critério é *a possibilidade de uma correspondência semântica termo a termo dos elementos significantes*. A cada unidade significante simples de uma das representações, pode-se associar uma unidade significante elementar da outra. No exemplo dado mais acima existiam três unidades significantes simples no registro de saída: 1) o carro; 2) está atrás da e 3) placa. Os quais foram associados a três unidades significantes elementares no registro de chegada: 1) A; 2) < e 3) B.

O carro → A
está atrás da → <
placa → B

**Figura 9**. Correspondência semântica termo a termo entre unidades significantes.

O segundo critério de congruência é a *univocidade semântica terminal*. A cada unidade significante elementar da representação de partida, corresponde uma só unidade significante elementar no registro da representação de chegada. No exemplo do carro e da placa, o registro de partida possuía três (03) unidades significantes (*o carro*; *está atrás da* e *placa*), as quais foram convertidas em também três (03) unidades significantes elementares na representação de chegada (*A,* < e B). Ou seja, uma (01) unidade de significado da representação de partida foi convertida em apenas uma (01) unidade de significado na representação de chegada.

O terceiro critério é relativo à organização das unidades significantes. As organizações respectivas das unidades significantes de duas representações comparadas conduzem a apreender nelas as unidades em correspondência semântica segundo a mesma ordem nas duas representações. Esse critério de correspondência na *ordem dentro da organização das unidades compondo cada uma das duas representações* é pertinente apenas quando estas apresentam o mesmo número de dimensão (DUVAL, 2009, p. 69). No exemplo do carro e da placa, a ordem das unidades significantes na frase: “O carro está atrás da placa” corresponde à ordem de apresentação das unidades significantes (A, < *e B)* na representação de chegada.

> Duas representações são congruentes quando há correspondência semântica entre suas unidades significantes, univocidade semântica terminal e mesma ordem possível de apreensão dessas unidades nas duas representações (DUVAL, 2009, p. 69).

Portanto, a dificuldade ou facilidade de interpretação de um modelo matemático depende do seu grau de não-congruência. Acreditamos, dessa forma, que os critérios de congruência assinalados acima possam ser usados para avaliar o grau de interpretação de um modelo matemático. O terceiro capítulo a seguir aborda sobre o processo de construção de modelos matemáticos.

# CAPÍTULO III

## CONSIDERAÇÕES GERAIS SOBRE MODELAGEM MATEMÁTICA

Nesse capítulo, apresentaremos principais pontos sobre Modelagem Matemática. Veremos algumas concepções de modelagem, o fluxo do processo de modelagem, suas vantagens e restrições quando usada como proposta de ensino e aprendizagem.

### 3.1 Algumas concepções de modelagem matemática

No primeiro capítulo, argumentamos que, no que tange ao cognitivo, podemos distinguir representação matemática de modelo matemático. Consideramos que um modelo matemático é uma representação matemática que permite algum tipo de interpretação científica sobre o representado. Se o sujeito não possuir conhecimentos prévios suficientes para interpretar a representação matemática, esta não será funcional, será uma representação semiótica sem significado científico algum.

Ao processo de construção de modelos matemáticos, chamamos de modelagem matemática. Logo, estamos considerando que modelagem matemática é um processo que visa elaborar e refinar representações matemáticas que possam servir para explicar, descrever uma situação da realidade. Vamos ver o que dizem alguns autores sobre modelagem matemática.

Bassanezi (2004, p. 24) apreende por modelagem matemática,

> “*Modelagem Matemática* é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual” [grifo do autor].

Observa-se que, para este autor, a finalidade do processo da Modelagem Matemática consiste em traduzir uma situação real em representações matemáticas que deverão ser interpretadas para a linguagem usual.

Para Dionísio Burak (1992, p. 62), a Modelagem Matemática compreende um conjunto de procedimentos visando construir um *paralelo* para tentar explicar por meio da matemática os fenômenos do dia-a-dia do homem, auxiliando-o a fazer predições e tomar decisões.

Infere-se dessa concepção de Burak que o termo *paralelo* pode ser substituído pelo termo *modelo*. Sendo assim, para o mesmo, o modelo matemático deve levar não somente à explicação matemática dos fenômenos do dia-a-dia, mas também levar a predições e decisões. Para o sujeito assumir decisões baseando-se em um modelo matemático, ele deve, necessariamente, fazer uso de suas experiências (sociais, culturais, políticas), capacidade cognitiva, habilidade para fazer análises etc.

Chaves e Espírito Santo (2008), ao refletirem sobre as diversas possibilidades de uso e aplicação da modelagem matemática no ensino, entendem a mesma como um processo **gerador** de um ambiente de ensino-aprendizagem no qual os conteúdos matemáticos podem ser vistos imbricados a outros conteúdos de outras áreas do conhecimento, por exemplo, de Física; tendo-se, dessa forma, uma visão holística do problema em investigação.

> Entendemos que um **ambiente de ensino e aprendizagem** é construído no espaço sala de aula, sem necessariamente se restringir a ele, a partir do momento em que, cada um de seus participantes, alunos e professores, assumem responsabilidades e obrigações pelo desenvolvimento de atividades que visem o ensino e a aprendizagem do conhecimento, aqui, em particular, o matemático. E, ao entender Modelagem Matemática como **um processo gerador de um ambiente de ensino e aprendizagem** que tem as atividades como mote**,** englobamos nesse processo várias possibilidades para o uso da Modelagem na perspectiva da Educação Matemática (CHAVES e ESPÍRITO SANTO, 2008, p. 159). [grifos dos autores]

A concepção de modelagem matemática como um processo *gerador* de ambiente de ensino-aprendizagem pode ser mais bem compreendida por analogia a *um motor que gera energia elétrica*. O motor "gerador" seria o processo de Modelagem Matemática e a energia elétrica seria o ambiente de ensino-aprendizagem que foi gerado. Da mesma maneira que a energia elétrica pode ser usada para várias finalidades e aplicações, o ambiente de ensino-aprendizagem gerado pelo processo de Modelagem Matemática pode ser voltado para vários tipos de conhecimentos: Matemática, Física, Química, Economia etc. São várias possibilidades de uso e aplicação do ambiente gerado pelo processo de Modelagem Matemática no ensino.

Biembengut e Hein (2003, p. 12) entendem modelagem matemática como uma arte que envolve a formulação, a resolução e a elaboração de expressões que servirão não apenas para uma solução em particular, mas que sejam usadas para outras aplicações e teorias.

Jonei Babosa (2001, p. 46) argumenta que a Modelagem Matemática "...é um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da matemática, situações com referência na realidade. Essa concepção de que a modelagem matemática é um ambiente de aprendizagem difere da concepção de Chaves e Espírito Santo (2008) que, como já foi visto, concebem a mesma como um processo *gerador* de ambiente de aprendizagem.

Barbosa (2001) reflete que a maneira de se organizar as atividades de Modelagem Matemática depende, principalmente, do contexto escolar, da experiência do professor e dos interesses dos alunos. Sendo que a configuração curricular do processo pode ser vista em termos de "casos".

No ***caso 1*** a descrição da situação, os dados reais e os problemas são trazidos pelo professor, cabendo aos alunos apenas a tarefa de resolução,

> No caso 1, o fato de o professor ter simplificado e formulado o problema não significa a ausência de indagação pelos alunos. Ela está presente durante o engajamento dos alunos no processo de resolução. O problema posto pelo professor é uma indagação geradora de outras. O nível de questionamento dos alunos, certamente, depende do papel estimulador do professor: "Qual o caminho?", "Por quê?", "Como?", "Tem certeza? etc." (BARBOSA, 2001, p. 39-40).

No ***caso 2*** o professor traz para a sala de aula um problema não-matemático, ou seja, cabe ao professor formular e apresentar o problema. A coleta de dados qualitativos e quantitativos necessários para resolvê-lo fica a cargo dos alunos.

No ***caso 3*** são escolhidos temas para desenvolver a pesquisa.

> ...o levantamento de informações, a formulação de problemas e a resolução destes cabem aos alunos. A ênfase está em estimular os alunos a identificar situações problemáticas, formulá-las adequadamente e resolvê-las (BARBOSA, 2001, p. 39).

Os "casos" de Barbosa acima apresentados não devem ser vistos como formas prescritivas rígidas de organização das atividades de modelagem. Dependendo de contexto escolar e da maturidade do professor e também dos alunos com relação ao trabalho com modelagem, pode-se "passear" entre os casos "(...) de modo a se nutrirem reciprocamente" (ibid., p. 40).

De maneira geral, entendemos que Modelagem Matemática é um processo que visa à elaboração de representações matemáticas com poder de explicação e descrição. Especificamente, no ensino-aprendizagem, esse processo ***gera ambiente*** que favorece a significação dos conteúdos abordados. As representações matemáticas construídas servem como *mediadoras* entre o pensamento do sujeito e o mundo objeto de modelagem. Isto é, o sujeito cognitivo torna-se conhecido quando exteriorizado por representações semióticas, no caso, pelas representações matemáticas. Por outro lado, as representações matemáticas devem ser potentes para traduzir o pensamento do sujeito na forma "mais fiel" possível.

> ...las representaciones simbólicas (cuadros, gráficas y fórmulas algebraicas) son um ayuda preciosa, y se a bien entonces que a formulación de lãs relaciones y a representaciones enriquecen a conceptualización (VERGNAUD, 2007, p. 298)[8].

[8]"...as representações simbólicas (quadros, gráficos e fórmulas algébricas) são uma ajuda preciosa e se bem empregadas na formulação das relações e representações enriquecem a conceitualização. (tradução nossa).

Isso exige que o sujeito articule, coordene ou transite por diversas representações semióticas para externalizar o seu raciocínio durante o processo gerado pela modelagem. A mobilização por meio de conversões semióticas entre as várias representações matemáticas da mesma situação de Física evidencia que ele compreende suas ações e, portanto, atribui significado ou apreende significativamente o objeto de estudo.

Deste modo, pensamos que “ter uma concepção do processo de Modelagem importa para a forma como se coloca em prática ou como se cria e organiza atividades dessa natureza para a sala de aula” (CHAVES e ESPÍRITO SANTO, 2008, p. 150). É nesse sentido que conduzimos nossas atividades de Modelagem Matemática no ensino de Física no sentido de enfatizar a mobilização de registros de representação referentes a um mesmo problema real.

### 3.2 O fluxo do processo de modelagem

Sendo um processo, a modelagem matemática no ensino pode ser efetivada seguindo-se algumas fases ou etapas. Uma delas refere-se à escolha de um tema de pesquisa, por exemplo, *Poluição.* Outra fase seria uma pesquisa propedêutica sobre o tema. O objetivo dessa etapa é promover um primeiro contato com o tema quando se trata de um assunto totalmente novo para os estudantes. Continuando o processo, procura-se formular questionamentos: *que tipos de poluições existem atualmente?* Outra etapa seria a formulação ou identificação de um problema real: *em quanto tempo um motorista de ônibus pode perder totalmente sua capacidade auditiva?* A resolução do problema real, que exige pesquisa e investigação, culmina com a elaboração de modelos matemáticos, que seria outra etapa do processo de modelagem. Por fim, devemos fazer uma avaliação crítica do modelo construído: limite de validade, aplicação em outros problemas.

Pensamos que o fluxo do processo pode ser seguido mais ou menos como descrevemos acima, porém, vamos ver o que dizem outros autores.

Rodney Bassanezi (2004, p. 26) propõe cinco passos ou atividades intelectuais para que ocorra o fluxo do processo de modelagem:

- **Experimentação**: O objetivo dessa fase é a obtenção de dados. O uso de métodos e técnicas estatísticas na pesquisa experimental possibilita maior grau de confiabilidade dos dados obtidos. No ensino de Física essa etapa é essencial quando se trabalha com experiências de laboratório. Os alunos são responsáveis por fazer medições de experimentos com uso de aparelhos.
- **Abstração**: Esse procedimento deve levar à formulação de modelos matemáticos. Nessa fase procura-se estabelecer: a *seleção de variáveis cognitivas* (os conceitos ou variáveis com os quais se lidam devem ser claramente identificados e compreendidos); a *problematização ou formulação aos problemas teóricos numa linguagem própria da área em que se está trabalhando* (problematiza-se por meio de perguntas científicas que levam à explicitação das relações existentes entre os conceitos ou variáveis envolvidas no fenômeno); a *formulação de hipóteses* (que podem ser geradas por comparação com outros estudos, dedução lógica, experiência pessoal do modelador, observação de casos singulares da própria teoria, analogia de sistemas etc.); a *simplificação* (consiste em restringir algumas informações observadas

no fenômeno para que se possa obter um modelo matematicamente tratável).

- **Resolução**: consiste no tratamento matemático dado ao modelo, ou seja, na resolução de equações (diferenciais, integrais, de diferenças finitas, algébricas etc.).
- **Validação**: nesta fase os modelos matemáticos serão testados para ver em que grau eles correspondem às observações empíricas e às previsões de novos fatos. É nessa etapa que o modelador deve ter a atitude de converter o modelo matemático obtido em diferentes representações matemáticas (tabelas, gráficos, equações) bem como fazer a interpretação das várias formas de se representar um mesmo problema de Física.
- **Modificação**: nenhum modelo deve ser considerado definitivo, podendo sempre ser melhorado, desta maneira um bom modelo é aquele que propicia a (re)formulação de novos modelos.

Dessa maneira, o modelador apóia-se em uma teoria matemática para traduzir o problema real para a linguagem matemática – em forma de modelo matemático – onde será analisado com o ferramental matemático disponível ou a ser "criado"[9]. Por outro lado, analisando o modelo matemático pode-se fazer uma "leitura" da realidade que o originou.

[9]Bassanezi informa que "A modelagem pode vir a ser o fator responsável para o desenvolvimento de novas técnicas e teorias matemáticas quando os argumentos conhecidos não são eficientes para fornecer soluções dos modelos" (2004, p. 30).

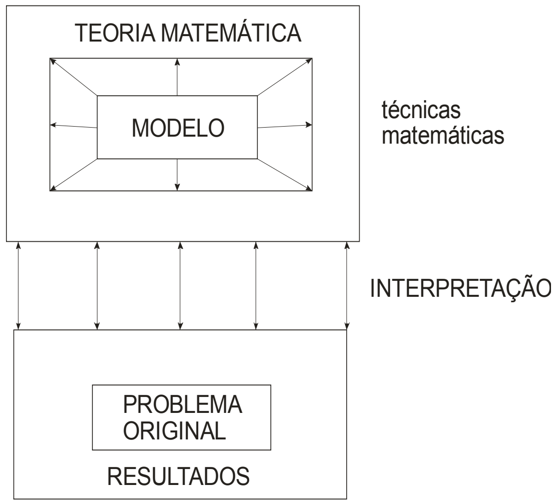



**Figura 10**. O modelador traduz (converte), embasado em uma teoria matemática, a situação real em uma representação matemática. A representação matemática possibilita inferências, predições e explicações sobre a situação real que a originou (Fonte: BASSANEZI, 2004, p. 25).

Para Biembengut e Hein (2003, p. 19) o fluxo do processo de modelagem matemática no ensino-aprendizagem de matemática ou *modelação matemática*[10] pode ser realizado basicamente em cinco passos:

- **Diagnóstico**: é um levantamento geral feito na classe. Nele procura-se perceber a realidade sócio-econômica dos alunos, seus interesses e metas, pois isso facilita a escolha do tema que norteará o desenvolvimento do programa. O grau de conhecimento matemático o horário da disciplina, o número de alunos e a disponibilidade dos mesmos para realizar atividades fora do ambiente de sala de aula permitem melhor elaboração das atividades de modelagem.
- **Escolha do tema ou modelo matemático**: para desenvolver o conteúdo programático escolhe-se um tema de pesquisa, que será transformado em um modelo matemático. Essa escolha poderá ser feita

[10]A modelação matemática utiliza a essência da modelagem matemática em cursos regulares e "...norteia-se por desenvolver o conteúdo programático a partir de um *tema* ou modelo matemático e orientar o aluno na realização de seu próprio modelo-modelagem" (Biembengut e Hein, 2003, p. 18).

somente pelo professor ou este poderá propor que os alunos o escolham. No último caso os alunos se sentem mais motivados a participar do processo, porém o tema escolhido pode exigir do professor um tempo extra para estudar e ensinar o assunto.

- **Desenvolvimento do conteúdo programático**: durante o desenvolvimento do programa seguem-se as etapas:

a) ***Interação***: trata-se do reconhecimento da situação-problema e a familiarização com o assunto a ser modelado, ou seja, com o referencial teórico. Inicia-se com uma breve exposição sobre o tema permitindo certa delimitação do mesmo. O modo como o professor demonstra seu conhecimento e interesse sobre o tema em questão pode contribuir significativamente para a motivação dos alunos. Após esse primeiro contato com o tema, faz-se um levantamento de questões, onde se procura instigar os alunos a participarem com sugestões;

b) ***Matematização*****:** trata-se da formulação de problemas através de hipóteses e sua resolução em termos do modelo. Seleciona-se e formula-se uma das questões levantadas na interação a fim de levar os alunos a proporem repostas. Deve-se manter um clima de liberdade, estimulando a participação, a descontração e a criatividade individual. Nessa subetapa pode-se desenvolver ou rever um conteúdo necessário para a formulação e resolução de modelos matemáticos, pode-se também apresentar exemplos análogos e exercícios para aprimorar a apreensão dos conceitos pelo aluno. Os exemplos análogos darão uma visão mais clara sobre o assunto, suprindo deficiências, preenchendo possíveis lacunas quanto ao entendimento do conteúdo. A resolução de exercícios (convencionais, aplicados, demonstrações) serve como meio de avaliar se os conteúdos apresentados foram apreendidos;

c) ***Modelo Matemático***: trata-se da interpretação da solução e validação do modelo por meio de uma avaliação. É o momento de se avaliar o modelo matemático quanto à validade e à importância. Dessa forma, os alunos analisam o resultado obtido. O esquema abaixo esclarece melhor a subetapa *desenvolvimento do conteúdo programático*,

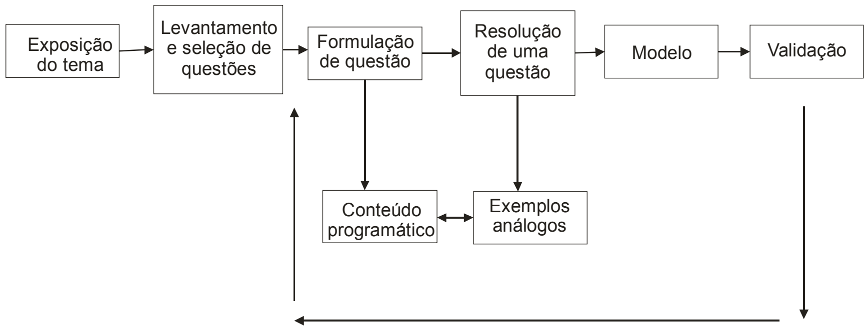



**Figura 11**. Desenvolvimento do conteúdo programático (BIEMBENGUT e HEIN, 2003, p. 22)

- **Orientação de modelagem**: deve-se fazer um planejamento de aulas prevendo-se um tempo disponível para orientar os trabalhos de modelagem em sala de aula. Essa orientação deve criar condições para que os alunos aprendam a (re)criar modelos matemáticos, aprimorando seus conhecimentos.
- **Avaliação do processo**: subjetivamente, pode-se avaliar levando-se em consideração: a participação do aluno, assiduidade, cumprimento das tarefas, espírito comunitário. Objetivamente, a avaliação pode ser feita através de: provas, exercícios, trabalhos realizados.

A figura 12 mostra, de forma resumida, a dinâmica da modelagem matemática no ensino (modelação matemática) proposta por Biembengut e Hein (2003),

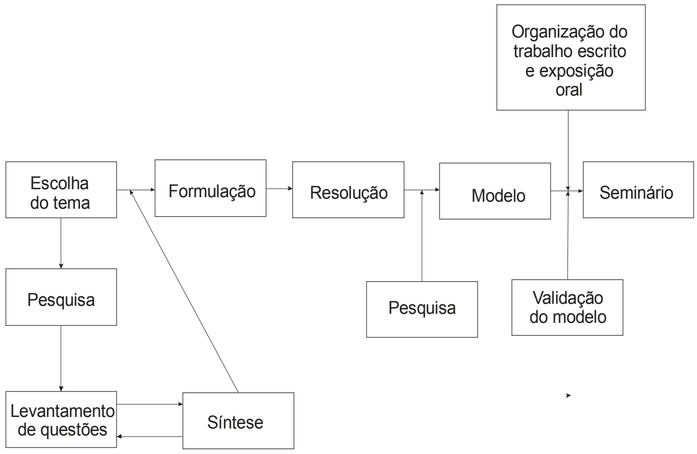



**Figura 12**. Dinâmica do processo de modelagem matemática no ensino (modelação matemática), proposta por Biembengut e Hein (2003, p. 26)

Para Dionísio Burak (2004, p. 3), o processo de Modelagem Matemática pode ser desenvolvido em sala de aula também em cinco fases:

- **Escolha do tema**: o trabalho com a modelagem matemática parte de temas que são escolhidos por grupos de alunos de três (03) ou quatro (04) participantes;
- **Pesquisa exploratória**: pesquisa de campo, onde serão levantados problemas. Os conteúdos conceituais serão abordados de acordo com os problemas levantados;
- **Levantamento dos problemas**: os problemas levantados são conseqüência da coleta de dados realizada na pesquisa exploratória;
- **Resolução do(s) problema(s) e o desenvolvimento da Matemática relacionada ao tema**: nessa etapa se oportuniza a construção de modelos matemáticos, que mesmo simples, contribuem para a formação do pensar matemático;
- **Análise crítica da(s) solução(es)**: reflexão sobre a coerência entre o modelo matemático encontrado com a realidade.

As etapas ou fases do processo de modelagem mostradas mais acima não devem ser pensadas como uma “forma-padrão” para “fazer modelagem”. São sugestões que os autores sugerem com base em suas práticas de modelagem.

### 3.3 Ambiente de modelagem matemática: uma questão de atitude

Um ambiente desenvolvido em situações de ensino-aprendizagem ocorre em função das decisões que o professor, baseando-se nos seus objetivos e em sua metodologia, realiza em classe. Dessa forma, em um processo de ensino e de aprendizagem podem ser gerados, basicamente, dois ambientes: i) um ambiente centrado na figura, principalmente, do professor ou ii) um ambiente em que o aluno é mais participativo e atuante. O primeiro refere-se ao dito “método tradicional de ensino” e o segundo tem as características do ambiente gerado pela Modelagem Matemática.

O ambiente centrado somente na figura do professor é o que normalmente predomina em nossas instituições de ensino (escolas, universidades, faculdades). Esse ambiente, *gerado* pelo *método tradicional*, não oportuniza de maneira relevante o conhecimento declarativo do aprendiz, pois o aluno não é incentivado a investigar, a pesquisar, a questionar, a problematizar, a conjecturar, enfim, não é estimulado a refletir. Esse ambiente de ensino foi o que Paulo Freire chamou de ambiente “bancário”,

> A narração, de que o educador é o sujeito, conduz os educandos à memorização mecânica do conteúdo narrado. Mais ainda, a narração os transforma em “vasilhas”, em recipientes a serem “enchidos” pelo educador. Quanto mais vá “enchendo” os recipientes com seus “depósitos”, tanto melhor educador será. Quanto mais se deixem docilmente “encher”, tanto melhores educandos serão (FREIRE, 2007, p. 66).

Outro ambiente que pode ser criado em um processo de ensino caracteriza-se pela participação mais ativa do aluno. O discente passa a ser "estudante" em busca do conhecimento, o diálogo professor-aluno é favorecido, o aprendiz é mais atuante, mais operante. Quando o discente é mais participativo, ele desenvolve o saber dizer, as atitudes procedimentais, ele pode expor suas *dúvidas e curiosidades*, suas dificuldades e potencialidades.

> A curiosidade como inquietação indagadora, como inclinação ao desvelamento de algo, como pergunta verbalizada ou não, como procura de esclarecimento, como sinal de atenção que sugere alerta faz parte integrante do fenômeno vital. Não haveria criatividade sem a curiosidade que nos move e que nos põe pacientemente impacientes diante do mundo que não fizemos, acrescentando a ele algo que fazemos (FREIRE, 2008, p. 32).

No nosso entender, uma característica essencial que diferencia o ambiente gerado pela modelagem matemática de outros ambientes é a *conduta ou comportamento* de modelador matemático. Enquanto em outros ambientes as representações matemáticas são construídas e aplicadas como ferramenta ou instrumento auxiliar na aprendizagem, no ambiente gerado pela modelagem estas representações são a "coluna vertebral" que norteia o processo de ensino-aprendizagem.

Essa é uma característica que diferencia, por exemplo, a resolução de problemas do processo gerado pela Modelagem Matemática. Na primeira, as representações matemáticas são aplicadas ou construídas como ferramental ou meio para se resolver um problema, sendo este o objeto de estudo dessa metodologia de ensino. Na segunda o mesmo problema passa a ser a ferramenta que tornará possível o estudo das representações matemáticas. *Mudando-se a atitude do sujeito, muda-se o ambiente gerado*.

**Quadro 2**. Objeto de estudo da modelagem matemática em comparação com a resolução de problemas.

| **Ambiente de aprendizagem** | **Objeto de estudo** | **Ferramenta** |
|---|---|---|
| Modelagem matemática | Modelos matemáticos | Problemas |
| Resolução de problemas | Problemas | Modelos matemáticos |

Tanto aqueles que se propõem a ensinar quanto aqueles que se propõem a pesquisar por Modelagem Matemática devem ter clareza quanto ao ambiente gerado pela modelagem matemática ser fruto da **postura** ou **atitude** que se adota enquanto modelador matemático.

## 3.4 Da escolha do tema

Essa escolha deve ser, na medida do possível, dos alunos. Quando o professor é inexperiente, recomenda-se o trabalho com um único tema, porém, conforme se for adquirindo segurança, é possível o trabalho com mais de um tema (BURAK, 1992).

Quando o professor trabalha com vários temas, existe a possibilidade de um dos temas ser de maior interesse dos alunos, além do que, dada a diversidade dos temas, aumentam as orientações durante o processo, isso provoca maior interação social entre aluno-aluno e aluno-professor. O ideal é o trabalho com, no máximo, 4 ou 5 temas (ibidem).

Os temas podem estar incluídos em várias atividades humanas: indústria, comércio, agricultura, pecuária, saúde, tecnologia, brincadeiras infantis, jogos, inflação, poupança, outros.

### 3.5 Do professor

O professor deve proporcionar um ambiente de liberdade e descontração, exercendo, quando necessário, regência de classe para garantir o andamento do processo. O papel do professor no ambiente de modelagem assume características diferentes do método tradicional. Assumindo um papel de *mediador* das atividades de modelagem: orienta o trabalho, tira dúvidas, explica pontos confusos, instiga, propõe problemas, faz perguntas e comentários. Muitas vezes, quando um assunto necessita de maior explicação, o professor deve fazer uso de uma aula expositivo-argumentativa, podendo usar, sempre que necessário, o quadro branco como apoio didático.

Contudo, muitas vezes o professor pode sentir-se impotente diante de alguma situação nova que ele não domina (BURAK, 1992). Para superar as dificuldades encontradas, além de contar com os próprios alunos para resolvê-la ao explicar o motivo de seu descontentamento, o professor pode recorrer a profissionais específicos para retirar suas dúvidas: médicos, engenheiros, físicos etc.

### 3.6 Sobre o conteúdo previsto e o conteúdo efetivo

Existe uma preocupação muito grande de alguns coordenadores pedagógicos quanto ao cumprimento do conteúdo previsto quando se trabalha com a modelagem matemática (BURAK, 1992). Há conteúdos que são difíceis de trabalhar com o processo de modelagem, por exemplo: polinômios, radicais, física nuclear, física quântica. Porém, existem outras maneiras de se imbricar conteúdos que não foram contemplados durante o processo de modelagem: pesquisa dirigida, seminários, aulas expositivo-argumentativas.

Outro fator com relação ao conteúdo é que no trabalho com a modelagem a seqüência do programa é flexível, não seguindo uma ordem pré-definida. A ordem dos conteúdos é determinada pelo tema, assunto ou problema escolhido.

### 3.7 Argumentos favoráveis e restrições ao uso da modelagem matemática

Considerando ou não os argumentos e obstáculos a seguir, devemos ter consciência que o processo de modelagem matemática deve ter como pressuposto a construção e aplicação significativa de modelos matemáticos. E, a julgar pelas nossas pesquisas práticas e ao que indicam as pesquisas consultadas, ela favorece essa significação (BASSANEZI, 2004).

#### 3.7.1 Argumentos favoráveis

Bassanezi (2004, p. 36) relaciona os seguintes argumentos favoráveis ao uso da modelagem matemática no ensino:

i) *Argumento formativo*: enfatiza aplicações matemáticas e o desempenho da modelagem matemática e resolução de problemas como processo para desenvolver capacidade em geral e atitudes dos estudantes, tornando-os investigativos, criativos e habilidosos na resolução de problemas.

ii) *Argumento de competência crítica*: focaliza a preparação dos estudantes para a vida real como cidadãos estudantes na sociedade, competentes para ver e formar juízos próprios, reconhecer e entender exemplos representativos de aplicações de conceitos matemáticos.

iii) *Argumento de utilidade*: enfatiza que a instrução matemática pode preparar o estudante para utilizar a matemática como ferramenta para resolver os problemas em diferentes situações e áreas.

iv) *Argumento intrínseco*: considera que a inclusão de modelagem, resolução de problemas e aplicações fornecem ao estudante um rico arsenal para entender e interpretar a própria matemática em todas as suas facetas.

v) *Argumento de aprendizagem*: garante que os processos aplicativos facilitam ao estudante compreender melhor os argumentos matemáticos, guardar os conceitos e os resultados, e valorizar a própria matemática.

vi) *Argumento de alternativa epistemológica*: a modelagem também se encaixa no programa etnomatemática, indicado por Ubiratan D'Ambrosio, que propõe um enfoque epistemológico alternativo associado a uma historiografia mais ampla. Parte da realidade e chega, de maneira natural e através de um enfoque cognitivo com forte fundamentação cultural, à ação pedagógica, atuando, desta forma, como uma metodologia alternativa mais adequada às diversas realidades sócio-culturais.

### 3.7.2 Restrições ao uso da modelagem matemática

Bassanezi (2004, p. 37) também elenca as seguintes dificuldades ao uso da modelagem matemática no ensino:

i) *Restrições instrucionais*: os cursos regulares possuem um programa que deve ser desenvolvido completamente. A modelagem pode ser um processo muito demorado, não dando tempo para cumprir o programa todo. Por outro lado, alguns professores têm dúvidas se as aplicações e conexões com outras áreas fazem parte do ensino de Matemática, salientando que tais componentes tendem a distorcer a estética, a beleza e a universalidade da matemática. Acreditam, talvez por comodidade, que a Matemática deva preservar sua "precisão absoluta" e intocável sem qualquer relacionamento com o contexto sócio-cultural e político.

ii) *Restrições para os estudantes*: o uso de modelagem foge da rotina do ensino tradicional e os estudantes, não acostumados ao processo, podem se perder e se tornar apáticos nas aulas. Os alunos estão acostumados a ver o professor como transmissor de conhecimentos e quando são colocados no centro do processo de ensino-aprendizagem, sendo responsáveis pelos resultados obtidos e pela dinâmica do processo, a aula passa a caminhar em ritmo mais lento.

A formação heterogênea de uma classe pode ser também uma restrição para que alguns alunos relacionem os conhecimentos teóricos adquiridos com a situação prática em estudo. Também o tema escolhido para modelagem pode não ser motivador para uma parte dos alunos provocando desinteresse.

iii) *Restrições para os professores*: muitos professores não se sentem habilitados a desenvolver modelagem em seus cursos, por falta de conhecimento do processo ou por medo de se encontrarem em situações embaraçosas quanto às aplicações de matemática em áreas que desconhecem. Acreditam que perderão muito tempo para preparar as aulas e também não terão tempo para cumprir todo o programa do curso.

# CAPÍTULO IV

## MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO DE FÍSICA

O objetivo do presente capítulo é categorizar, quanto à metodologia, os trabalhos disponíveis na *internet* sobre a temática Modelagem Matemática e ensino de Física, bem como desenvolver e analisar algumas atividades quanto à possibilidade de coordenar registros de representação de representação semiótica.

### 4.1 Revisão de literatura

A coleta de material bibliográfico foi realizada digitando o termo "modelagem matemática + ensino física" no buscador *Google*. Detectamos que existem muitos trabalhos disponíveis em revistas eletrônicas, *sites* de congressos em Educação Matemática e *sites* de Universidades sobre Modelagem Matemática de fenômenos físicos. Porém, poucos são voltados ao ensino e aprendizagem. Para selecionar os trabalhos a serem analisados consideramos os seguintes critérios:

- Que fossem sobre Modelagem Matemática;
- Que fossem sobre fenômenos físicos;
- Que fossem voltados ao ensino e aprendizagem.

Não sendo nossa intenção abarcar a totalidade de pesquisas, relacionamos no quadro 3 vinte (20) trabalhos, organizando-os segundo a classificação: pesquisa de cunho teórico (cinco trabalhos) e pesquisa de cunho didático-pedagógico (quinze trabalhos). Dos vinte trabalhos, dezenove (19) são artigos e apenas um (01) corresponde a uma dissertação de mestrado.

**Quadro 3**. Trabalhos encontrados na *internet* sobre o tema Modelagem Matemática e ensino de Física.

| PESQUISAS DE CUNHO TEÓRICO |
|---|
| Título/Autor(es)/Site/Descrição |
| *1) A modelagem matemática aplicada ao ensino de Física no ensino médio*<br>C. O. Lozada e colaboradores<br>http://www.ffcl.edu.br/logos/artigos/2006b/ARTIGO1-pag2-ClaudiaLozada-logos-14-2006.pdf<br>Um artigo onde os autores abordam a questão da importância dos modelos matemáticos para o ensino de Física. Após a introdução, onde os autores ressaltam a importância do ferramental matemático na construção de modelos matemáticos, é feita uma reflexão a cerca da modelagem matemática, dos campos conceituais de Vergnaud e da teoria dos modelos mentais. Os autores prosseguem abordando a questão da transposição didática por meio dos modelos matemáticos. A problemática do ensino de Física e os modelos matemáticos é abordada no sentido de que seja privilegiada uma ação colaborativa entre professores de Física e Matemática. Os autores concluem enfatizando a necessidade de um trabalho interdisciplinar entre Matemática e Física e também sobre a importância da interpretação dos modelos matemáticos aplicados em Física. |
| *2) Modelagem matemática de fenômenos físicos envolvendo grandezas proporcionais e funções do primeiro grau, através de atividades experimentais*<br>L. S. Campos e M. S. T de Araújo<br>http://www2.rc.unesp.br/eventos/matematica/ebrapem2008/upload/269-2-A-gt9-Campos-ta.pdf<br>Uma comunicação científica em que os autores expõem as principais idéias de uma pesquisa de dissertação de mestrado a qual terá como objetivos principais a representação de algumas grandezas físicas através de princípios matemáticos básicos e análise dessas grandezas no que diz respeito às tendências e aos limites de validades dessas representações construídas a partir de atividades experimentais. |
| *3) Modelagem no ensino/aprendizagem de física e os novos parâmetros curriculares nacionais para o ensino médio*<br>E. A. Veit e V. D. Teodoro<br>http://www.scielo.br/pdf/rbef/v24n2/a03v24n2.pdf<br>O artigo discute a importância da modelagem no ensino-aprendizagem de física em conexão com os novos parâmetros curriculares nacionais para o ensino médio (PCNEM). Apresentam-se as características essenciais do *software modellus*, concebido especialmente para a modelagem em ciências físicas e matemáticas sob uma visão de ensino que enfatiza, no processo de aprendizagem, a exploração e a criação de múltiplas representações de fenômenos físicos e de objetos matemáticos. Os autores concluem que numa perspectiva mais ampla é necessária uma reflexão sistemática sobre o melhor processo de concretizar uma visão integrada dos conteúdos e sobre o papel das ferramentas computacionais nessa visão. |
| *4) Modelagem computacional no ensino de física*<br>E. A. Veit e I. S. Araújo<br>http://www.if.ufrgs.br/cref/ntef/producao/modelagem_computacional_Maceio.pdf<br>O objetivo do artigo é esclarecer o que são os modelos científicos (modelos matemáticos) e como eles podem ser implementados em sistemas computacionais de modo a abrir novas perspectivas no ensino-aprendizagem de física. Os autores exploram o uso do *software modellus* como ferramenta de modelagem computacional no ensino de física. |
| *5) Alternativas de modelagem matemática aplicada ao contexto do ensino de física: a relevância do trabalho interdisciplinar entre matemática e física*<br>C. O. Lozada<br>http://www.sbem.com.br/files/ix_enem/Html/comunicacaoCientifica.html<br>O objetivo do artigo é sugerir alternativas didático-pedagógicas ao desenvolvimento da modelagem matemática aplicada ao ensino de física. Após a introdução, onde a autora agumenta sobre a importância da resolução de problemas no ensino de física, são tecidos comentários sobre a modelagem matemática e a linguagem simbólica. Após isso a autora discorre sobre a resolução de problemas em física. Comenta sobre as contribuições teóricas da teoria dos campos conceituais de Vergnaud para a modelagem matemática aplicada ao ensino de física. A autora propõe então três alternativas didático-pedagógicas ao desenvolvimento da modelagem matemática aplicada ao ensino de física. |

| PESQUISAS DE CUNHO DIDÁTICO-PEDAGÓGICO |
| --- |
| Título/Autor(es)/Site/Descrição |
| *1) A modelagem matemática como metodologia para o ensino-aprendizagem de Física*<br>E. S. R. de Souza e A. O. do Espírito Santo<br>http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/diaadia/diadia/arquivos/File/conteudo/artigos_teses/fisica/artigos/ednilson.pdf<br>Um artigo onde os autores propõem uma atividade de modelagem matemática voltada ao ensino de Física. Após discorrer sobre o conceito de modelagem matemática e sobre a dinâmica do processo de modelagem, os autores apresentam uma atividade de modelagem matemática do tema *Energia Mecânica*. Os autores refletem que o processo de modelagem aplicado ao ensino de Física possibilita ações interdisciplinares, motivadoras e contextualizadas. |
| *2) Equilíbrio no espaço: experimentação e modelagem matemática*<br>P. A. P. Borges, N. A. Toniazzo e J. C. da Silva.<br>http://www.scielo.br/pdf/rbef/v31n2/10.pdf<br>Um artigo que tem como objetivo apresentar do cálculo das forças atuantes em cabos e hastes que sustentam massas no espaço, desenvolver um modelo matemático para um caso geral, discutir os tipos de forças (tração e compressão) de casos específicos, utilizando procedimentos teóricos e experimentais que se complementam e possibilitam a aplicação de conceitos da Física de técnicas matemáticas e de tratamentos de dados. Os autores concluem que a modelagem matemática de problemas de Física proporciona atividades teóricas e práticas, porque compreende ações de tradução de fenômenos em linguagem simbólica e requer experimentos para a validação dos modelos, além de usar a programação computacional como um meio de resolução de problemas não tão elementares. |
| *3) Aperfeiçoamento de professores de física e matemática utilizando a modelagem matemática*<br>M. Q. Albé e colaboradores.<br>http://www.liberato.com.br/upload/arquivos/0131010716044716.pdf<br>O objetivo do artigo foi descrever o curso “Aperfeiçoamento de professores de física e matemática utilizando a modelagem matemática” que ocorreu no período de dezembro de 1999 a Janeiro de 2000 em regime de parceria entre uma escola técnica e uma universidade. O curso tinha como objetivo a instrumentalização do profissional de ensino nas áreas e física e matemática, para fornecer a capacitação de lide em laboratório. Além de estabelecer elo de ligação entre os fenômenos e seus modelos, procurava-se propiciar aos professores vivência de laboratório, e oportunizar aos mesmos retornarem a suas unidades de ensino com instrumentação para elaborar e adaptar experimentos, confeccionar os materiais para tais experimentos e estruturar roteiros para novas práticas de laboratório. Também foram objetivos do curso, usar a informática como ferramenta na organização e modelagem dos dados obtidos, desenvolver um projeto de implementação e ou otimização de um laboratório em seu local de trabalho e fornecer uma visão histórica e filosófica da construção da ciência. |
| *4) O ensino de fenômenos físicos através da modelagem matemática*<br>L. Daroit, C. Haetinger e M. M. Dullius.<br>http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/cd_egem/fscommand/RE/RE_35.pdf<br>O objetivo do artigo foi relatar uma atividade de modelagem dentro do ensino de física, com estudantes da 3ª série do ensino médio, no estudo da ótica (formação de imagens com espelhos planos em ângulos) visando ao desenvolvimento de estratégias pedagógicas.Os autores concluem que a utilização da modelagem matemática como estratégia didática no estudo de fenômenos naturais pode contribuir para a evolução de conceitos já existentes na estrutura cognitiva dos estudantes e para a formação de novos conceitos, proporcionando condições favoráveis para uma aprendizagem significativa e motivadora. |
| *5) Uma experiência da utilização da modelagem matemática computacional aplicada ao ensino de física*<br>F. H. L. Vasconcelos, J. R. Santana e H. B. Neto.<br>http://tele.multimeios.ufc.br/~semm/conteudo/leitura/ef/artigo13.pdf<br>O objetivo da pesquisa é desenvolver simulações a partir de modelos matemáticos aplicados em física e realizar uma aplicação com professores para detectar a viabilidade dessas ferramentas no processo de ensino-aprendizagem. Foi utilizado o *software modellus* para a modelagem matemática de situações físicas. Verificou-se que é possível utilizar esse recurso como estratégia de simulação científica de determinados fenômenos físicos, assim como seu uso pode colaborar no processo de aprendizagem de determinados conteúdos curriculares que possam ser modelados. |
| *6) Modelagem matemática: uma experiência com professores* |

| |
|---|
| K. G. Leite<br>http://need.unemat.br/3_forum/artigos/13.pdf<br>Um artigo que trata do relato de uma experiência vivenciada junto a professores de uma rede estadual de ensino durante um curso de 40 horas. O curso consistiu de uma discussão teórica sobre modelagem matemática, reflexão sobre exemplos de uso da modelagem em sala de aula, e, por último, de uma etapa prática em que os professores construíram modelos matemáticos que dessem conta de explicar certos fenômenos apresentados em problemas. |
| *7) Interdisciplinaridade por meio da modelagem matemática: uma atividade envolvendo matemática e física*<br>E. S. R. de Souza e colaboradores<br>http://www.somaticaeducar.com.br/arquivo/artigo/1-2009-02-28-12-40-16.pdf<br>Um artigo em que os autores relatam uma atividade modelagem realizada por dois professores de matemática e um de física durante um curso de especialização em educação matemática. A partir de uma situação física, os autores construíram modelos matemáticos e estudaram conceitos do ensino de física e matemática. Os autores refletem que o processo de modelagem matemática exige pesquisa. Argumentam que existem aspectos positivos e negativos em um ambiente de pesquisa: por um lado o discente pode se motivar a pesquisar um assunto de seu interesse. Por outro lado o ambiente de pesquisa pode exigir um tempo que o discente pode não dispor. |
| *8) Modelagem matemática no ensino-aprendizagem de física: tópicos de mecânica*<br>E. S. R. de Souza<br>http://www.somaticaeducar.com.br/arquivo/artigo/1-2009-02-28-12-35-31.pdf<br>O objetivo deste artigo foi exemplificar o processo de modelagem matemática de situações do ensino de física. A partir da escolha do tema *movimento* construiu-se um modelo matemático para calcular a distância que uma pessoa anda, sabendo-se apenas do tempo decorrido. |
| *9) A importância da modelagem matemática na formação de professores de física*<br>C. O. Lozada e N. S. Magalhães<br>http://www.sbf1.sbfisica.org.br/eventos/snef/xviii/sys/resumos/T0202-2.pdf<br>O artigo tem como objetivo analisar a importância da modelagem matemática aplicada ao ensino de física como uma ferramenta de ensino a ser utilizada pelos professores, sobretudo na resolução de problemas, tendo em vista que, em geral, mostram-se desvinculados da compreensão do fenômeno e apresentam-se como mera aplicação de fórmulas. Os autores realizaram uma pesquisa qualitativa com alunos do 5º semestre de Licenciatura em Física de um centro federam de educação. Concluem que a pesquisa não apenas demonstrou a extensão da utilidade da modelagem matemática aplicada ao ensino de física, mas também o seu aspecto interdisciplinar. Outro aspecto verificado foi a propositura de problemas numa dimensão investigativa. |
| *10) A modelagem matemática através de conceitos científicos*<br>H. R. da Costa<br>http://www.cienciasecognicao.org/pdf/v14_3/m197.pdf<br>O artigo objetiva apresentar uma proposta que utiliza a modelagem matemática para promover uma aprendizagem significativa de conceitos matemáticos de limite e continuidade a partir de conceitos científicos. O tema escolhido foi a lei da transformação dos gases de Charles - Gay Lussac. |
| *11) Modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem nos cursos superiores de tecnologia*<br>E. C. Ferruzzi e colaboradores<br>http://ensino.univates.br/~chaet/Materiais/Modelagem_Mat_Eng.pdf<br>O objetivo do artigo é investigar o uso da modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem de cálculo diferencial e integral em um curso superior de tecnologia. Os autores desenvolveram duas experiências de modelagem matemática de fenômenos físicos e uma turma de primeiro ano do curso superior de tecnologia do CEFET-Pr. |
| *12) Um estudo de caso relacionando formação de professores, modelagem matemática e resolução de problemas de física*<br>C. O. Lozada e N. S. Magalhães.<br>http://www.sbf1.sbfisica.org.br/eventos/epef/xi/sys/resumos/T0108-2.pdf<br>O objetivo do artigo é analisar o papel da modelagem matemática no ensino de física visando investigar a extensão da utilidade da mesma como ferramenta para o professor dessa disciplina. Os autores concluem que o cotidiano possibilita fornecer diversas situações para um trabalho dinâmico em |

| |
|---|
| modelagem matemática, sobretudo, pelo fato de os alunos poderem observar o mundo que os cerca e modelar fenômenos físicos, implicando em uma abordagem interdisciplinar entre física e matemática, pautando-se por uma relação didática significativa, com uma dimensão investigativa, favorecendo o aprender a aprender. |
| *13) Um relato de experiência sobre a prática de modelagem matemática aplicada ao ensino de física*<br>C. O. Lozada e N. S. Magalhães<br>http://www.uel.br/eventos/cnmem/aceitos.htm<br>O objetivo do trabalho foi analisar a importância da modelagem matemática aplicada ao ensino de física como uma ferramenta de ensino a ser utilizada pelos professores, sobretudo, na resolução de problemas, tendo em vista, que em geral, mostram-se desvinculados da compreensão dos fenômenos e apresentam-se como mera aplicação de fórmulas. A pesquisa foi realizada com alunos do 5º semestre de licenciatura em física de um instituto federal de educação. A pesquisa demonstrou não apenas a utilidade da extensão da modelagem matemática aplicada ao ensino de física, como também um caráter interdisciplinar. |
| *14) Radiação solar ultravioleta e a modelagem matemática*<br>M. C. Stieler e V. Bisognin<br>http://miltonborba.org/CD/Interdisciplinaridade/Encontro_Gaucho_Ed_Matem/cientificos/CC74.pdf<br>O objetivo do artigo é apresentar situações-problemas relacionadas ao tema radiação solar ultravioleta, utilizando a metodologia da modelagem matemática. Os autores concluem argumentando que os educandos têm a oportunidade de vivenciar a matemática envolvida com situações reais e isso incentiva a pesquisa e a conscientização dos problemas enfrentados pela sociedade. Continuam afirmando que a modelagem matemática favorece a interdisciplinaridade, torna o ambiente escolar mais rico e propicia o trabalho coletivo entre educandos e educadores. |
| *15) CTS e a modelagem matemática na formação de professore de física*<br>P. E. da C. Moutinho.<br>http://www.ufpa.br/ppgecm/media/Dissertacoes_Pedro%20Estevao%20da%20Conceicao%20Moutinho.pdf<br>Uma dissertação cujo objetivo foi estudar o comportamento de futuros professores de física por meio de suas ações durante atividades experimentais de modelagem matemática. O autor conclui argumentando que o ambiente proporcionado pela tendência CTS e pela modelagem matemática, através da experimentação, são necessários para a formação de um professor diferenciado, que queira dar significado à aprendizagem de seus futuros alunos. |

Observa-se que as produções envolvendo a temática Modelagem Matemática e ensino de Física ainda são muito poucas em comparação a outros tipos de estratégias de ensino de Física. Esse fato pode ter como causa o tempo não muito longo das pesquisas envolvendo Modelagem Matemática no ensino, que de acordo com Biembengut (2009), é da ordem de 30 anos. A consequência disso é que muitos professores ainda desconhecem essa tendência em Educação Matemática.

No caso específico de professores de Física, o quadro 3 mostra que são raros os trabalhos envolvendo Modelagem Matemática e ensino de Física comparado aos trabalhos sobre modelagem já publicados. Isso reflete certo desconhecimento dessa tendência em Educação Matemática por parte de tais professores.

Porém, os congressos em Educação Matemática, tanto nacionais quanto internacionais, revelam que é cada vez maior o número de trabalhos apresentados que se dedicam ao estudo da modelagem matemática, seja para a prática didático-pedagógica seja para a pesquisa teórica. Desse modo, acreditamos que a crescente “expansão” de trabalhos sobre modelagem deixe de se concentrar somente na área da Educação Matemática e atinja também a chamada Educação em Ciências.

O quadro 3 mostra que ainda existem muitos aspectos a serem investigados quando se trata de Modelagem Matemática no ensino de Física. Os trabalhos de cunho teórico listados fazem referência à psicologia cognitiva como apoio teórico a essas pesquisas. Encontramos citações de teorias como da aprendizagem significativa de David Ausubel, dos campos conceituais de Vergnaud e dos modelos mentais de Johnson-Laird. Os trabalhos de cunho didático-pedagógico convergem para uma postura interdisciplinar entre Matemática e Física. Há também relatos que o processo de modelagem matemática no ensino de Física favorece a contextualização e motiva os sujeitos da aprendizagem.

É bom frisar que nenhum trabalho pesquisado faz referência à teoria dos registros semióticos de Raymond Duval como embasamento teórico. O que, de certa forma, justifica nossa pesquisa. Pensamos que essa teoria, sendo voltada ao ensino de Matemática, possa auxiliar no processo de Modelagem

Matemática e interpretação de fenômenos físicos haja vista a tendência interdisciplinar entre Matemática e Física já citada anteriormente.

Finalmente, as atividades de modelagem matemática de fenômenos físicos apresentadas nos trabalhos relacionados no quadro 3 podem ser categorizadas levando-se em consideração três recursos metodológicos: *por meio de problemas no enfoque CTS* (ciência, tecnologia e sociedade: 11 ocorrências)*; por meio de simulações computacionais*(3 ocorrências) *e por meio de experimentos* (6 ocorrências). Esses três ambientes são ratificados por Lozada (2006) que os designa de alternativas didático-pedagógicas.

Procederemos ao desenvolvimento analítico de algumas atividades de modelagem que servirão tanto para exemplificar esses recursos metodológicos quanto para estudar a movimentação de registros de representação durante o processo de Modelagem Matemática no ensino de Física.

**4.2 Problemas contextualizados**

Esse ambiente de aprendizagem caracteriza-se pela proposição de problemas aos alunos. Podem-se contextualizar esses problemas numa abordagem CTS (Ciência, Tecnologia e Sociedade). Normalmente, o professor leva para a sala de aula um problema de Física que deverá ser resolvido pelos alunos. Nesse contexto, pode-se recorrer aos três "casos" de Barbosa. Ou seja, 1º) O professor poderá levar para a sala de aula um problema de Física devidamente contextualizado com os dados já coletados, restando aos alunos apenas sua resolução; 2º) O professor poderá levar um problema de física para a classe, os alunos coletam dados e resolvem-no; ou 3º) Os próprios alunos identificam um problema de Física e coletam os dados necessários a sua resolução.

**Atividade 1: homem empurrando um carro**

Desenvolveremos e analisaremos um problema proposto por Lozada e Magalhães (2008) a um grupo de 15 alunos do quinto semestre de licenciatura plena em Física do Centro Federal de Educação Tecnológica de São Paulo, ocasião em que se trabalhou com três grupos de cinco alunos. O objetivo central da pesquisa foi investigar a utilidade da Modelagem Matemática como ferramenta para o professor de Física no Ensino Médio, bem como avaliar as dificuldades que os alunos do Ensino Médio possuem para realizar a Modelagem Matemática na resolução de problemas de Física.

Problema*: Um homem empurra um automóvel de uma tonelada em uma rua plana. Inicialmente, o carro estava parado. Após 5 segundos de esforço (força) constante realizado pelo homem, o veículo atinge a velocidade de 1 m/s. Determine a força média (em N) que o homem teve que exercer para o automóvel atingir essa velocidade nesse intervalo de tempo, supondo que não houve forças resistivas atuando.*

Observa-se que o problema já trás os dados coletados (caso 1 de Barbosa), a tarefa dos discentes seria de analisá-lo e resolvê-lo. Os atos cognitivos para resolvê-lo abrangem o reconhecimento das unidades de significado presentes no enunciado, por exemplo: *homem, automóvel, tonelada, rua plana, inicialmente parado, 5 segundos, esforço,* $1 m/s^2$, *força média*. Após identificá-las e significá-las, o sujeito forma uma rede semântica devido à inter-relação dos significados dessas unidades.

A formação da rede semântica dá origem a uma primeira compreensão do enunciado. Essa primeira compreensão leva à formação de um modelo mental inicial que proporcionará ação sobre as variáveis cognitivas, visando à construção de registros de representação necessários à resolução do problema.

Observa-se que muitos estudantes fazem desenhos ilustrativos como forma de apoio ao raciocínio de resolução de um problema. A conversão do enunciado em língua natural para uma representação pictórica (desenho) parece ajudar na estratégia de resolução do problema. O professor poderá avaliar o grau de compreensão do enunciado a partir dos registros pictóricos produzidos pelos discentes. A seguir, um desenho produzido por um dos grupos de alunos para resolver o problema apresentado na atividade 1:

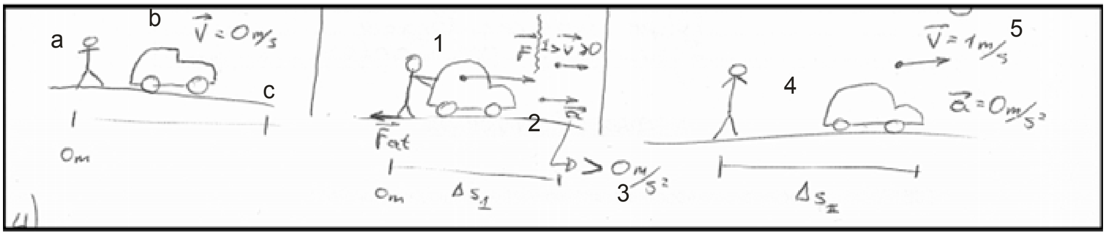



**Figura 13**. Registro pictórico produzido por um grupo de alunos. (Fonte: LOZADA e MAGALHÕES, 2008)

Normalmente, ao fazerem os desenhos, os alunos dispõem as unidades de significado no registro pictórico de acordo com a ordem em que elas aparecem no enunciado do problema. Ou seja, ao compreender o enunciado de um problema, os discentes constroem registros congruentes. A numeração de 1 a 5 na figura 13 corresponde à ordem em que essas unidades de significado são transpostas do registro em língua natural para o registro pictórico:

*1=um homem empurra um automóvel de uma tonelada;*

*2=em uma rua plana;*

*3=inicialmente, o carro estava parado;*

*4=após 5 segundos de esforço constante realizado pelo homem;*

*5=o veículo atinge a velocidade de 1m/s.*

As letras correspondem ao reconhecimento das unidades significantes:

*a=homem;*

*b=automóvel;*

*c=rua plana*

Observa-se que o registro pictórico produzido pelos alunos é um registro congruente ao enunciado do problema, uma vez que ele "lembra" tal enunciado. Uma análise do grau de congruência nos leva a perceber que, dos três critérios de congruência de Duval (2009, p. 68-69), dois são satisfeitos: existe correspondência semântica termo a termo entre as unidades de significado do registro de partida e do registro de chegada; e também as unidades significantes são apresentadas na mesma ordem, isto é, manteve-se a ordem de organização das unidades de significado. Não havendo, no entanto, univocidade semântica terminal entre os registros língua natural e pictórico.

A compreensão adequada do enunciado leva à elaboração de registros pictóricos pertinentes. A conversão do enunciado em língua natural para uma representação pictórica congruente propicia melhor "visualização" da situação física. O sujeito tem mais "recursos" para buscar em seus conhecimentos prévios os conceitos necessários à resolução do problema.

Após identificar que a situação física da atividade 1 refere-se à segunda lei de Newton (a força resultante em um corpo é igual ao produto de sua massa vezes a aceleração adquirida) o sujeito registra o modelo matemático referente à segunda Lei de Newton:

$$Fr = m\,a(I)$$

Onde a aceleração *a* é dada por,

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Substituindo os valores dados:

$$a_m = \frac{1m/s}{5s}$$

$$a_m = 0{,}2\frac{m}{s^2}$$

Substituindo os valores de $m$ e $a_m$em (I)

$$Fm = 1000\ x\ 0{,}2$$

$$Fm = 200\ newtons$$

A obtenção da força média que o homem exerce sobre o carro não deve ser entendida como o final do processo de modelagem da situação física. É preciso explorar a compreensão dos conceitos físicos e matemáticos por meio da articulação entre diferentes registros de representação.

Vamos elaborar uma função matemática a partir da equação I:

$$Fm = 1000\ a_m(II)$$

Observa-se que o objeto matemático que está sendo representado por este registro é o objeto *função linear*, cuja forma algébrica pode ser dada por $y(x) = Ax$. A partir da equação (II) vamos contruir uma tabela para diferentes valores de $a_m$.

Tabela 1. Força média em função da aceleração do carro.

| **Aceleração ($\frac{m}{s^2}$)** | **Força média (N)** |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 0,1 | 100 |
| 0,2 | 200 |
| 0,3 | 300 |
| 0,4 | 400 |
| 0,5 | 500 |

A interpretação da tabela 1 mostra que para uma variação constante de $0,1\ \frac{m}{s^2}$ na aceleração média, a força média tem uma variação constante de $100\ N$. Observa-se que uma variação *constante* na variável independente gera uma variação *constante* na variável dependente. Existe uma infinidade de fenômenos físicos que geram tabelas com essa característica. Portanto, conforme o homem aumenta a força média aplicada sobre o veículo, a aceleração média deste aumenta proporcionalmente e diretamente à força aplicada.

Convertendo a tabela 1 em um gráfico cartesiano obtemos,

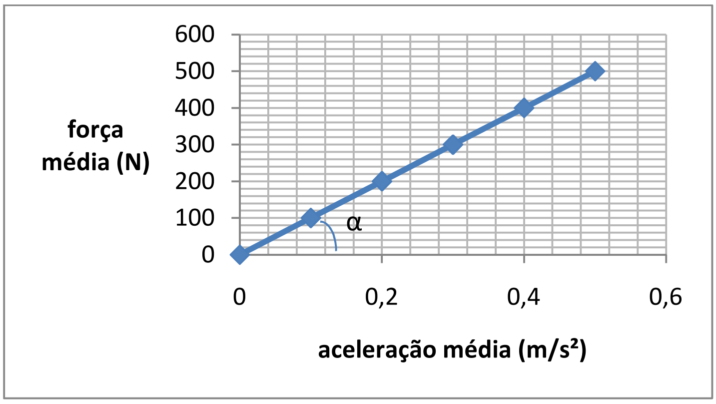



**Figura 14**. Gráfico da Força média em função da aceleração média.

Nota-se que a união dos pontos da representação gráfica forma uma reta crescente de coeficiente angular *m*. Calculando o coeficiente angular obtemos:

$$\mathrm{m} = \tan\alpha = \frac{500}{0,5}$$

$$\mathrm{m} = 1000$$

Percebe-se, portanto, que o valor do coeficiente angular do gráfico cartesiano *força média x aceleração média* corresponde ao valor da *massa* do móvel. Desta forma, a interpretação do gráfico possibilita a construção da seguinte relação:

$$massa = \tan\alpha$$

Ou seja, para o gráfico cartesiano *força x aceleração* quanto maior o ângulo de inclinação da reta, maior é a massa do móvel.

Nessa atividade foi possível trabalhar com diversos sistemas de representações semióticas (registro língua natural, registro pictórico, registro algébrico, registro tabular e registro gráfico) do mesmo fenômeno físico. Cada representação possibilitou que se compreendesse a situação de uma maneira diferente. A conceitualização pode ser favorecida quando se enfatiza a mobilização e interpretação de registros de representação.

**Atividade 2: Represa hidrelétrica**

A atividade a seguir foi proposta a um grupo de 20 alunos de um curso pré-vestibular da cidade de Belém-Pa por Souza e Espírito Santo (2008) e teve por objetivo reforçar conceitos relacionados à conservação da energia mecânica ministrados anteriormente em aulas tradicionais.

Num primeiro momento foi solicitado que os alunos formassem grupos de quatro (4) componentes, o que resultou em cinco (5) grupos. Escreveu-se no quadro branco o tema *Energia* para que os grupos discutissem entre si com base nas seguintes perguntas provocativas:

1) Quais formas de energia vocês conhecem?
2) Que tipos de energia vocês mais utilizam no dia-a-dia?
3) Como é produzida a energia que vocês mais utilizam?
4) Vocês acham que podemos criar energia?

Essa primeira parte do processo de modelagem pode ser chamada de *Interação com o tema de pesquisa*, pois como afirma Biembengut e Hein (2003),

> Uma vez delineada a situação problema que se pretende estudar, deve ser feito um estudo sobre o assunto de modo indireto (por meio de livros e revistas especializadas, entre outros) ou direto, *in loco* (por meio de experiência em campo, de dados experimentais obtidos com especialistas da área (p. 13).

Num segundo momento, escreveram-se no quadro branco as respostas dadas para a primeira pergunta (Quais formas de energia vocês conhecem?). As respostas mais apresentadas foram: energia elétrica, energia solar, energia nuclear. Foram feitos alguns comentários sobre essas formas de energia, relacionando aspectos como: fonte; uso industrial, uso doméstico, poluição ambiental, custos de produção, problemas ecológicos.

Tendo por base a segunda pergunta (Que tipos de energia vocês mais utilizam no dia-a-dia?) e a terceira pergunta (Como é produzida a energia que vocês mais utilizam?) falou-se sobre o funcionamento de uma usina hidrelétrica.

Num terceiro momento, desenhou-se no quadro branco o esquema de uma usina hidrelétrica, assinalando alguns pontos: A, B, C e D, como mostrado abaixo,

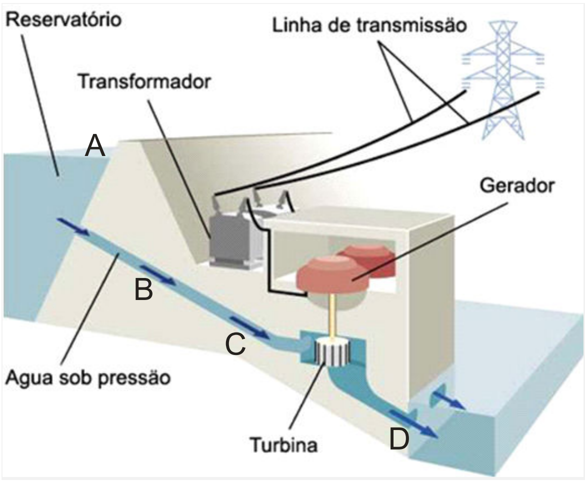



**Figura 15**. Esquema de uma usina hidrelétrica (Fonte: http://marcia.carpinski.zip.net/images/eletricidade1.jpg . Acesso em 25/09/09). Adaptado de SOUZA e ESPÍRITO SANTO, 2008a).

Foram propostas, então, as seguintes questões:

- Em que ponto (A, B, C ou D) a energia cinética da água é máxima?
- Em que ponto a energia potencial gravitacional é nula?
- Em que ponto a energia cinética é nula?
- O que acontece com a energia cinética e potencial gravitacional nos pontos B e C?

Após alguns comentários sobre essas perguntas foi proposta aos grupos a seguinte situação-problema:

*Considere que a velocidade de certa massa de água no ponto A da figura seja zero (velocidade nula) e que a energia potencial gravitacional nesse mesmo* *ponto seja 100ue (unidades de energia) responda às questões que seguem e complete a tabela a seguir: Quanto vale a Ec no ponto A? Quanto vale a Epg no ponto B? Quanto vale a Ec no ponto C, Quanto vale a Epg no ponto D?*

**Tabela 2**. Tabela a ser completada pelos alunos durante a modelagem matemático do tema Energia.

| | **A** | **B** | **C** | **D** |
|---|---|---|---|---|
| **Ec** | | 20 | | 100 |
| **Epg** | 100 | | 50 | |
| **Emt** | | 100 | 100 | |

Esse problema pode ser caracterizado pelo "caso 2" de Barbosa, uma vez que o professor levou para a sala de aula uma situação de Física e quatro perguntas, a função dos alunos foi coletar dados necessários para respondê-las. No entanto, a coleta de dados foi possível a partir do momento em que os sujeitos "resgatavam" de seus repertórios cognitivos os conceitos de energia cinética, energia mecânica e energia potencial gravitacional já estudados em aulas "tradicionais". Com base na relação $Em = Ec + Epg$ os alunos deveriam ser capazes de completarem a tabela.

A interpretação de uma representação matemática do tipo tabela exige, principalmente, um ato cognitivo de identificação.

> Particularmente, para as representações gráficas do tipo tabela, devemos considerar que elas possuem determinadas vantagens, como por exemplo, o fato de que permitem a visualização dos dados de forma separada preenchendo assim, explicitamente, a função cognitiva de identificação (FLORES e MORETTI, 2006, p. 31).

Uma tabela permite a identificação rápida de alguma informação desejada. Observemos a tabela que foi completada pelos alunos na segunda atividade:

**Tabela 3**. Tabela completada pelos alunos durante a atividade 2. Os valores em vermelho deveriam ser completados pelos alunos.

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| **Ec** | 0 | 20 | 50 | 100 |
| **Epg** | 100 | 80 | 50 | 0 |
| **Em** | 100 | 100 | 100 | 100 |

Pelo cruzamento linha x coluna ou coluna x linha da tabela, podemos identificar 12 unidades significantes. Ao relacioná-las em uma rede semântica é possível fazer a seguinte interpretação da situação física:

*No ponto A da represa, a massa de água não tem energia cinética, somente Epg que vale 100ue. No ponto B a Ec da massa de água equivale a 25% da Energia potencial gravitacional. No ponto C da represa, a Ec da massa de água é igual à Epg que vale 50ue. No ponto D a massa de água não tem Epg, somente energia cinética que vale 100ue.*

Poderíamos ainda explorar a interpretação da tabela 3 por meio de algumas perguntas:

1. Qual a menor energia cinética observada?
2. Qual a maior energia cinética observada?
3. Qual a diferença entre a maior e menor energia cinética?
4. Em que ponto ocorreu a menor variação na energia cinética?

Para responder à primeira e segunda perguntas, basta identificar na tabela os respectivos valores ou unidades significantes. Para saber qual o menor e o maior valor da energia cinética é suficiente localizar a unidade significante *Ec* na tabela e marcar visualmente o menor e o maior valor.

Porém, para responder à terceira pergunta, uma consulta pontual na tabela já não é mais suficiente. É necessário relacionar os dados e tratá-los por meio de uma operação matemática de subtração.

A quarta pergunta exige que o aprendiz faça uma análise global da tabela, aumentando o trabalho cognitivo necessário e, por conseguinte sua compreensão sobre a situação. A passagem de uma leitura pontual a uma leitura global da tabela indica que houve um salto de compreensão do ponto de vista cognitivo (FLORES E MORETTI, 2006).

Percebemos, portanto, que uma “simples” tabela pode proporcionar um aprendizado em potencial no que se refere à compreensão de uma situação física. A tarefa do professor seria instigar os alunos com perguntas do tipo das apresentadas mais acima. Observa-se que essas perguntas foram formuladas em ordem crescente de trabalho cognitivo. Um indivíduo que consegue respondê-las demonstra ter compreensão sobre suas unidades significantes. Resta-nos fazer uma indagação: é possível converter a tabela em uma representação matemática que favoreça outras compreensões do fenômeno físico em estudo?

O processo de conversão da tabela em um gráfico torna-se possível quando o sujeito é capaz de discriminar as unidades significantes da representação matemática de partida,

> *A discriminação das unidades significantes próprias a cada registro deve então fazer o objeto de uma aprendizagem específica.* Ela é a condição necessária para toda atividade de conversão, e, em seguida, para o desenvolvimento da coordenação dos registros de representação (DUVAL, 2009, p. 100).

A partir da compreensão e discriminação das unidades significantes da tabela e por meio de uma regra de conversão, podemos transformá-la em uma representação gráfica do tipo gráfico de colunas:

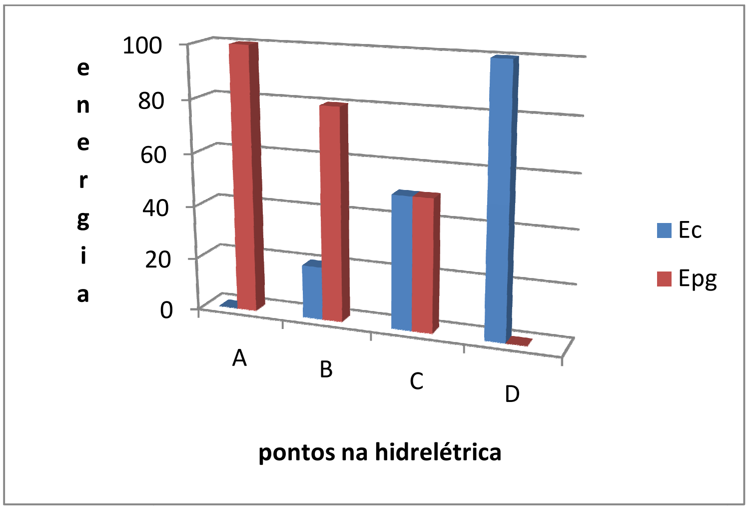



**Figura 16**. Gráfico convertido da tabela elaborada durante a atividade 2.

A interpretação desse gráfico pode ser feita pela comparação visual entre as alturas das colunas em azul e vermelho. Essa comparação nos leva a perceber que *enquanto a energia potencial gravitacional diminui, a energia cinética aumenta*. No entanto, a soma entre essas energias é constante. Desse modo, o caráter conservativo da energia mecânica fica mais bem compreendido quando se muda a forma de apresentação dos dados coletados.

O mesmo objeto matemático equação algébrica foi representado de duas formas: tabela e gráfico de colunas. Cada registro permitiu que se interpretasse a situação física de diferentes maneiras.

> Nas atividades matemáticas podemos representar um objeto utilizando vários registros de representação e, segundo a teoria de Duval, é a conversão das várias representações manifestadas sobre um objeto de estudo que possibilita a construção do conhecimento (PANTOJA, 2008, p. 27).

Dessa maneira, Mudando-se a representação matemática muda-se a interpretação e, portanto, a compreensão da situação física. Matematicamente, tanto o a tabela quanto o gráfico dizem respeito ao mesmo objeto matemático equação algébrica. Fisicamente, são duas representações matemáticas que descrevem o mesmo fenômeno físico.

Assim, podemos perceber que o reconhecimento ou identificação do objeto matemático que está sendo representado por uma tabela, um gráfico ou uma equação pode favorecer a construção de modelos matemáticos para descrever fenômenos físicos. Vamos investigar o objeto matemático em outras duas atividades de modelagem que exemplificam o ambiente por meio de simulação computacional.

### 4.3 Simulações computacionais

Outro ambiente que pode ser gerado pelo processo de modelagem matemática no ensino de Física, desenvolve-se por meio de recursos a simulações computacionais. Dependendo da quantidade de alunos, esse ambiente pode necessitar de um laboratório de informática para ser efetivado. Pode ser desenvolvido com a adoção de *softwares* tais como o *Modellus* e *Stella*. Podemos também usar simulações em *Java*. Acrescentemos ainda que no site http://phet.colorado.edu/index.php (acesso em 26/09/09) pertencente à universidade de Colorado (EUA) existe uma grande quantidade de simulações em *Java* que poderão ser úteis para gerar ambiente de modelagem através de simulação computacional.

**Atividade 3: Plano inclinado**

A atividade a seguir, foi elaborada para ser aplicada em turmas de Ensino Médio. O objetivo é elaborar um modelo matemático para representar a força em função da massa com que um trabalhador de uma empresa de transportes empurra objetos sobre uma rampa de madeira (coeficiente de atrito cinético μ=0,2) inclinada 30° com o piso.

**Figura 17**. Trabalhador empurrando um objeto sobre um plano inclinado.

Para isso, vamos usar a seguinte simulação computacional para coletar dados.

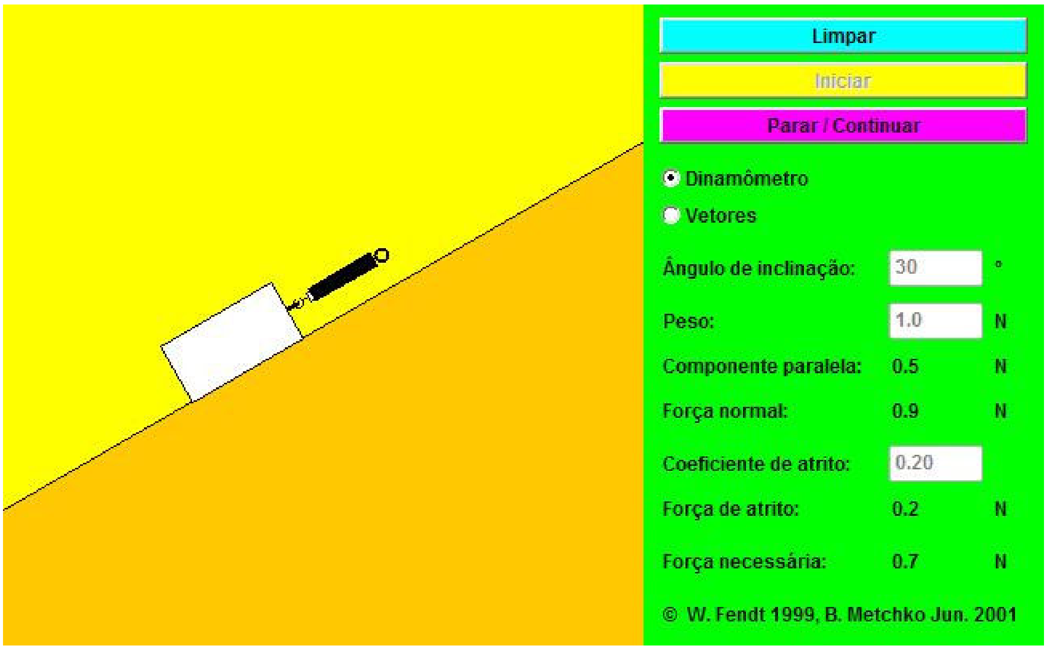



**Figura 18**. Simulação em Java de um plano inclinado (Fonte: http://www.fisica.net/simulacoes/java/walter/ph11br/inclplane_br.php. Acesso em 16/03/2010.

A simulação acima corresponde a um objeto de peso *P* sendo puxado por uma força *F* e velocidade *v* constante ao longo de um plano inclinado. É possível variar os parâmetros (unidades significantes): ângulo de inclinação, peso e coeficiente de atrito. Realizaremos os seguintes procedimentos na simulação:

- Fixar o ângulo de inclinação em 30 graus;
- Manter o parâmetro coeficiente de atrito igual a 0,2;
- Variar o parâmetro peso de 0 a 10 newtons;
- Verificar qual a força necessária correspondente a cada mudança de valor no parâmetro peso;

O resultado pode ser organizado em uma tabela,

**Tabela 4**. Força necessária para puxar o bloco em função do peso.

| Peso (newtons) | Força necessária (Newtons) |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 0,7 |
| 2 | 1,3 |
| 3 | 2,0 |
| 4 | 2,7 |
| 5 | 3,4 |
| 6 | 4,0 |
| 7 | 4,7 |
| 8 | 5,4 |
| 9 | 6,1 |
| 10 | 6,7 |

Analisando os dados coletados na tabela 4, nota-se que para uma variação de 1 newton no valor do peso há uma variação média de 0,7 newton no valor da força necessária para puxar o objeto, ou seja, podemos considerar que há uma relação linear entre o peso e a força média aplicada.

A conversão do registro tabular para o registro gráfico pode evidenciar essa relação linear. Torna-se fundamental mudar a forma de organização dos dados coletados para que tenhamos melhor compreensão do objeto matemático e, assim, elaborar um registro simbólico do fenômeno físico. "Do ponto de vista matemático, a conversão intervém somente para escolher o registro no qual os tratamentos a serem efetuados são mais econômicos, mais potentes, ou para obter um segundo registro que serve de suporte ou de guia aos tratamentos que se efetuam em outro registro (DUVAL, 2008, p. 16).

Do ponto de vista da Física, a mudança na forma de apresentação dos dados pode propiciar outras compreensões do fenômeno. Mudando-se da forma tabular para a forma gráfica a maneira como os dados coletados estão organizados, obtemos:

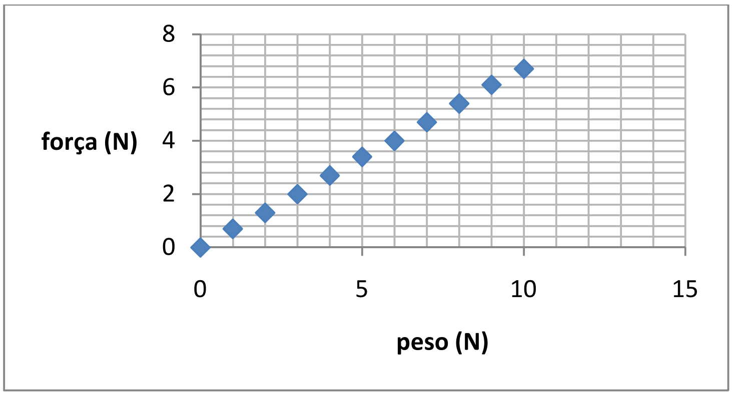



**Figura 19**. Gráfico da força necessária para puxar blocos de madeira em função do peso.

O aspecto da curva do gráfico nos permite supor que o objeto matemático representado pela tabela 4 seja o objeto função do primeiro grau, cuja forma algébrica pode ser dada por $y(x) = Ax + B$, onde as constantes *A* e *B* devem ser determinadas.

Substituindo-se alguns dados, podemos encontrar o valor dessas constantes:

$$y(0) = A\,0 + B = 0$$

$$B = 0$$

$$y(1) = A\,1 + 0 = 0{,}7$$

$$A = 0{,}7$$

Assim, podemos elaborar a seguinte representação simbólica que relaciona a força em função do peso do bloco de madeira,

$$F(P) = 0{,}7\,P$$

A validação dessa relação com os dados da tabela 4 revela que ela precisa ser reformulada para que os dados obtidos sejam os mais próximos possíveis da “realidade”.

Dessa forma, vamos fazer um ajuste de curva[11] linear para os valores da tabela 4. De acordo com Bassanezi (2004) Existem dois tipos principais de regressão ou ajuste de curva: o linear $y(x) = Ax + B$ e o quadrático $y(x) = Ax^2 + Bx + C$. Por meio de mudança de vairável, o juste linear pode servir de base para ajustar curvas exponenciais $y(x) = Be^{Ax}$, geométricas $y(x) = Ax^B$ e hiperbólicas $y(x) = \frac{1}{B+Ax}$. Muitas situações do ensino de Física podem ser modeladas matematicamente recorrendo-se a esses tipos de ajuste de curvas.

Para uma regressão linear, podemos usar as seguintes equações de ajuste para calcular as constantes *A* e *B,*

$$A = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}$$

$$B = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i\, y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}$$

Onde:

[11] Uma regressão ou ajuste de curva é um recurso formal para expressar alguma tendência da variável dependente y quando relacionada com a variável independente x. Em outras palavras, regressão é um mecanismo ou artifício que fornece uma relação funcional quando se tem uma relação estatística (BASSANEZI, 2004, p. 54).

$n = número\ de\ eventos$

$x_i = média\ dos\ valores\ de\ x$

$y_i = média\ dos\ valores\ de\ y$

Vamos construir uma tabela auxiliar aos cálculos,

**Tabela 5**. Cálculos auxiliares para encontrar a equação de ajuste.

| Peso (N) | Força (N) | $P^2$ | $F^2$ | $PF$ |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 0,7 | 1 | 0,49 | 0,7 |
| **2** | 1,3 | 4 | 1,69 | 2,6 |
| **3** | 2,0 | 9 | 4 | 6 |
| **4** | 2,7 | 16 | 7,29 | 10,8 |
| **5** | 3,4 | 25 | 11,56 | 17 |
| **6** | 4,0 | 36 | 16 | 24 |
| **7** | 4,7 | 49 | 22,09 | 32,9 |
| **8** | 5,4 | 64 | 29,16 | 43,2 |
| **9** | 6,1 | 81 | 37,21 | 54,9 |
| **10** | 6,7 | 100 | 44,89 | 67 |
| $\sum \boldsymbol{P_i} = \mathbf{55}$ | $\sum F_i = 37$ | $\sum (P_i)^2 = 385$ | $\sum (F_i)^2 = 174{,}38$ | $\sum P_i F_i = 259{,}1$ |

Substituindo-se valores na equação de ajuste, calculamos a constante *A*, uma vez que *B=0:*

$$A = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}$$

$$A = \frac{(10\ x\ 259{,}1) - (55\ x\ 37)}{(10\ x\ 385) - (3025)}$$

$$A = \frac{2591 - 2035}{3850 - 3025}$$

$$A = \frac{556}{825}$$

$$A = 0{,}674$$

Desse modo, a reformulação, por meio de ajuste de curvas, da representação matemática construída anteriormente leva a denotá-la como:

$$F = 0{,}674\,P$$

Sabendo-se que o peso do bloco pode ser expresso por $P = m\,g$. Onde $m$ é a massa do bloco de madeira e $g = 9{,}81\,\frac{m}{s^2}$ é a aceleração da gravidade local, podemos reescrever a expressão acima:

$$F = 0{,}674\;x\;m\;x\;9{,}81$$

$$\boldsymbol{F = 6{,}61\,m\;(III)}$$

Dessa maneira, obtivemos uma relação funcional que descreve a força em função da massa para puxar ou empurrar objetos sobre uma rampa de madeira inclinada 30 graus com a horizontal. Assumimos a função acima como um modelo matemático porque ela descreve, de forma satisfatória, todos os valores da força necessária quando se varia o peso dos blocos de madeira entre 0 e 10 newtons.

> O propósito da modelagem matemática é obter uma relação funcional que comporte em seus parâmetros qualidades ou significados inerentes ao fenômeno analisado e para isto se faz necessário um estudo mais detalhado do próprio fenômeno (BASSANEZI, 2004, p. 56).

A compreensão da matemática subjacente a um fenômeno físico, e, portanto, a compreensão do próprio fenômeno, está intimamente relacionada à compreensão do objeto matemático usado para descrevê-lo. Nesse sentido a atividade de conversão semiótica torna-se fundamental para que o sujeito possa caracterizar o objeto matemático. “...do ponto de vista cognitivo é a atividade de conversão que, ao contrário, aparece como a atividade de transformação representacional fundamental, aquela que conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão" (DUVAL, 2009).

Outra maneira de validar o modelo matemático construído é por meio de argumentos originados da própria Física. Para isso, representaremos pictoricamente a situação do plano inclinado e evidenciaremos as forças (traço contínuo) e suas projeções (traço pontilhado) no eixo *x* e *y*:

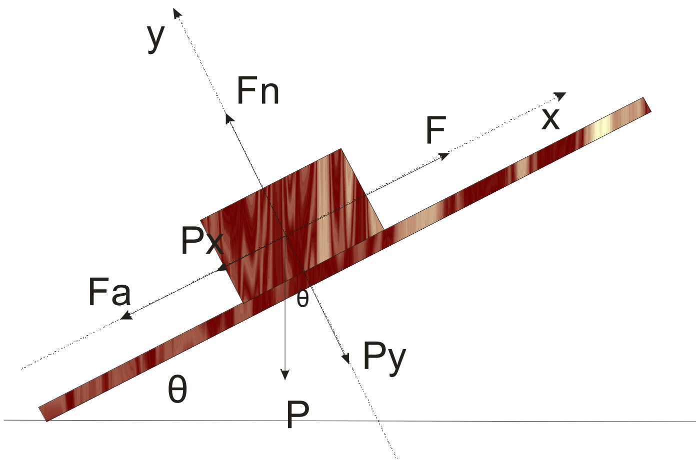



**Figura 20**. Forças e projeções no plano inclinado.

Onde:

$x = eixo\ das\ abscissas;$

$y = eixo\ das\ ordenadas;$

$F\ = força\ aplicada\ para\ puxar\ o\ bloco\ de\ madeira;$

$Fa = força\ de\ atrito;$

$Fn = força\ normal;$

$P = força\ peso$;

$Px = projeção\ da\ força\ peso\ sobre\ o\ eixo\ x$;

$Py = projeção\ da\ força\ peso\ sobre\ o\ eixo\ y$.

Aplicando-se a segunda lei de Newton (a força resultante é igual ao produto da massa pela aceleração do bloco) ao sistema da figura 20 registra-se:

$$Fr = m\,a$$

Como o bloco só possui movimento no eixo *x,* é suficiente aplicar a segunda lei de Newton nesse eixo,

$$Fr_x = m\,a_x$$

Observando-se a figura 20, nota-se que a força resultante no eixo *x* pode ser expressa pela seguinte relação,

$$Fr_x = F - (Fa + Px)$$

Deste modo, podemos escrever,

$$F - (Fa + Px) = m\,a_x$$

No entanto, estamos considerando que o trabalhador empurra o objeto com velocidade constante, o que significa que não há variação de velocidade, logo, também não há aceleração no eixo *x*, ou seja, o termo depois da igualdade na equação anterior é zero,

$$F - (Fa + Px) = 0$$

Assim, a força aplicada para empurrar o objeto pode ser denotada por

$$F = Fa + Px$$

Onde, observando-se a figura 20, temos:

$Fa = \mu\, Fn = \mu\, Py = \mu\, P \cos\theta = \mu\, m\, g \cos\theta$ ;

$Px = P \sin\theta = m\, g \sin\theta.$

Dessa maneira, a força aplicada para puxar o bloco de madeira assume a seguinte forma,

$$F = \mu\, m\, g \cos\theta + m\, g \sin\theta$$

Evidenciando a variável independente *m*, obtemos:

$$F = m\, (\mu\, g \cos\theta + g \sin\theta)$$

Onde:

$\mu = 0{,}2;$

$g = 9{,}8\ \frac{m}{s^2};$

$\theta = 30°.$

Assim, a força aplicada pode ser expressa por

$$F = m\, (0{,}2\ x\ 9{,}8\ x\ 0{,}87 - 9{,}8\ x\ 0{,}5)$$

$$F = m\, (1{,}7 + 4{,}9)$$

$$\boldsymbol{F = 6{,}6\, m\ (IV)}$$

Comparando-se a equação $F = 6{,}61\, m$ obtida por meio de ajuste de curva e a equação $F = 6{,}6\, m$ obtida por meio de deduções da Física, observamos que são equivalentes. Isso demonstra a validade do modelo matemático construído por meio do ajuste de curva.

Ao se utilizar a simulação computacional para gerar ambiente didático-pedagógico de Modelagem Matemática ao ensino de Física, é possível, a cada mudança de parâmetro, observar a díade causa-consequência. O professor deverá orientar os discentes a relacionarem, no mínimo, duas variáveis: a dependente e a independente. A variável independente escolhida na atividade 3 foi a massa do objeto a ser empurrado. A força necessária foi a variável dependente. No entanto, poderíamos ter escolhidos outras variáveis para analisar o fenômeno físico.

Para estabelecer uma relação funcional entre essas duas variáveis foi necessário construir uma tabela relacionando os dados de entrada (variável independente) aos dados de saída (variável dependente). Percebeu-se que a tabela elaborada favoreceu a percepção do objeto matemático que estava sendo representado. A percepção do objeto matemático é fundamental para que o modelador elabore uma relação funcional (representação simbólica) para descrever o fenômeno físico.

> Cada registro de representação apresenta um conteúdo próprio que caracteriza parte do objeto estudado e o sujeito se apropria do objeto cada vez que se dá conta dos elementos que o caracteriza. Tomar consciência dos conteúdos existentes em cada registro de representação e estabelecer relações entre eles significa apropriar-se do objeto estudado (PANTOJA, 2008, p. 28).

A construção do gráfico cartesiano revelou o objeto matemático função linear. Nesse sentido, a conversão de tabelas em gráficos cartesianos deve ser feita de forma técnica. O uso de papel quadriculado, calculadoras gráficas ou do computador pode ajudar na confecção desses gráficos. Porém, antes de usar esses aparatos tecnológicos deve-se reconhecer a importância cognitiva em se utilizar "lápis e papel" na construção de registros de representação.

### Atividade 4: Tiro de canhão

Apresentaremos outra atividade elaborada para ser aplicada em turmas do ensino médio. O objetivo é encontrar um modelo matemático que represente o alcance de um projétil, por exemplo, uma bala de canhão, em função da velocidade inicial de lançamento.

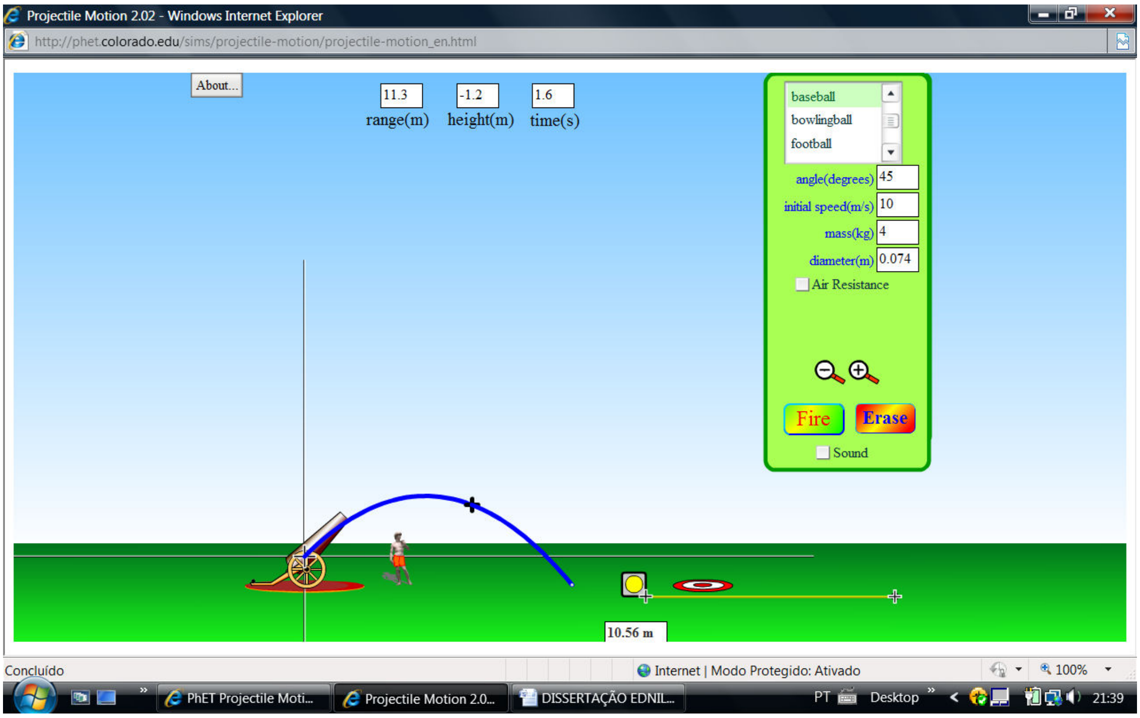



**Figura 21**. Simulação em Java do lançamento de uma bala de canhão. (Fonte: http://phet.colorado.edu/sims/projectile-motion/projectile-motion_en.html. Acesso em 18/12/2009).

Nessa simulação podem-se variar as seguintes unidades de significado: o ângulo de lançamento, a velocidade inicial da bala, a massa e o diâmetro da bala. Vamos executar os seguintes procedimentos:

- Fixar o ângulo de lançamento em 45 graus;

- Fixar o valor da massa em 4 kg;
- Fixar o diâmetro da bala em 10 cm;
- Variar o valor da velocidade inicial para: 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18 e 20 metros por segundo (m/s);
- Construir uma tabela *alcance horizontal x velocidade inicial.*

Organizando os dados coletados em uma tabela, temos:

**Tabela 6**. Alcance horizontal em função da velocidade inicial de lançamento da bala de canhão.

| **Velocidade inicial (m/s)** | **Alcance (m)** |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 2 | 0,9 |
| 4 | 2,4 |
| 6 | 4,6 |
| 8 | 7,6 |
| 10 | 11,3 |
| 12 | 15,8 |
| 14 | 21,1 |
| 16 | 27,3 |
| 18 | 34,2 |
| 20 | 42 |

Observa-se que a variação no alcance da bala não varia proporcionalmente conforme ocorre uma variação constante de 2m/s na velocidade inicial de lançamento da bola. Ou seja, a variação no alcance da bala não é linear com a velocidade inicial. Que objeto matemático está sendo representado por essa tabela? Construiremos um gráfico cartesiano com os valores coletados para auxiliar na identificação o objeto matemático.

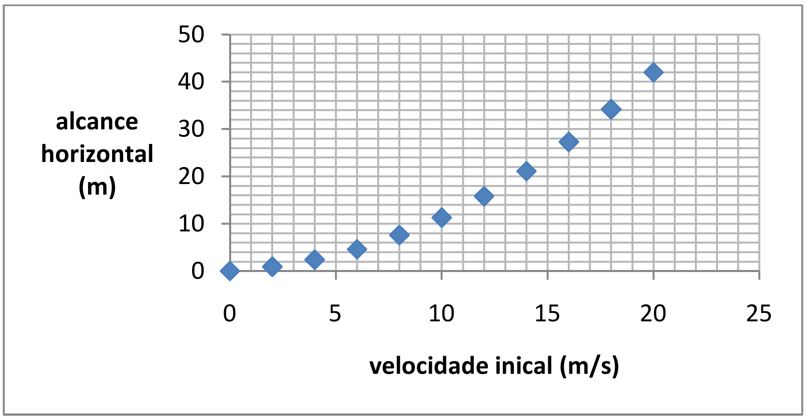



**Figura 22**. Gráfico referente ao Alcance horizontal em função da velocidade inicial da bala de canhão.

O aspecto do gráfico nos permite intuir que o objeto matemático que pode estar sendo representado é o objeto função do segundo grau. A escritura algébrica desse objeto matemático pode ser dada por $y(x) = Ax^2 + Bx + C$. Onde as constantes *A, B* e *C* devem ser determinadas. Usando o aplicativo Excel é possível fazer um ajuste de curva quadrático para os valores da tabela 5.

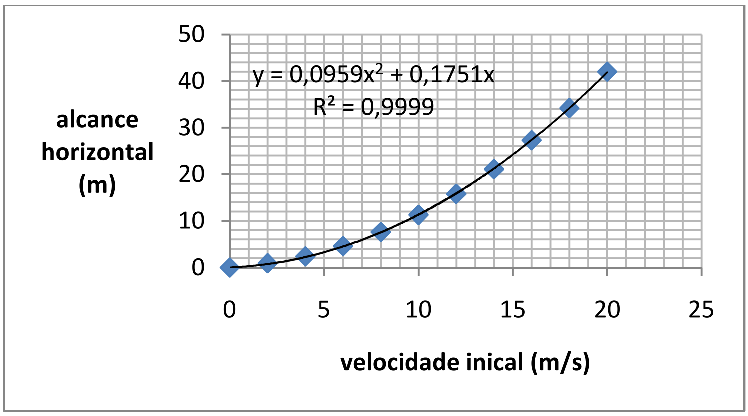



**Figura 23**. Gráfico referente ao ajuste de curva quadrático para os dados da tabela 5.

A linha em preto que aparece sobre a curva do gráfico acima é a linha de tendência. A equação $y(x) = 0{,}0959x^2 + 0{,}1751x$ é a equação de ajuste, e pode ser obtida usando alguns recursos do Excel. O fator $R^2 = 0{,}999$ é o coeficiente de correlação de *Pearson* e serve como instrumento de medida de correlação linear. Quanto mais próximo esse coeficiente estiver de $\pm 1$(mais ou menos 1) melhor é o ajuste de curva.

Dessa maneira, quando o ângulo de lançamento da bala de canhão for de 45º, podemos formular a seguinte representação matemática para calcular o alcance da bala em função da velocidade inicial.

$$\boldsymbol{alcance(v) = 0{,}0959v^2 + 0{,}1751v}$$

A validação com os valores da tabela 6 permite considerar essa representação como um modelo matemático, uma vez que os valores fornecidos são muito próximos aos valores coletados durante a simulação computacional.

No entanto, algumas questões devem ser colocadas, pois a problematização de um modelo matemático tende a aumentar a compreensão sobre o mesmo, aumentado, portanto, a compreensão sobre a situação física que o originou: Qual a interpretação física para as constantes *A=0,0959* e *B=0,1751*? Esse modelo matemático pode ser usado para objetos de massas diferentes? Quais as limitações desse modelo?

### 4.4 Atividades experimentais

O ambiente gerado pelo processo de modelagem matemática de atividades experimentais diferencia-se bastante da simulação interativa. Nessa, a função do modelador restringe-se a inserir dados de entrada e verificar os dados de saída, ou seja, o sujeito não usa equipamentos para medir, pesar, testar. Dificilmente o sujeito preocupa-se com possíveis erros ocorridos durante a "rodagem" da simulação computacional. Além do mais, quando se usa atividades experimentais pode-se usar a história da ciência para contextualizar no espaço-tempo os experimentos realizados.

Na experimentação como recurso didático-pedagógico à modelagem em Física, a função principal do modelador é coletar dados diretamente durante o acontecimento do fenômeno físico, por isso se devem levar em consideração possíveis erros cometidos durante a coleta de dados.

Esses erros podem ter origem devido ao mau funcionamento dos equipamentos bem como podem estar ligados à falta de perícia do modelador no manuseio dos materiais de laboratório. Além do mais, normalmente são feitas três medições da mesma grandeza física e, a partir dessas medidas, é calculada a média aritmética a ser usada como variável.

Quando não se dispõe de um laboratório de Física, uma estratégia que pode dar bons resultados é usar materiais de baixo custo financeiro para fazer experimentos em sala de aula. Nesse caso, acrescentemos que no site http://www2.fc.unesp.br/experimentosdefisica/ (Acesso em 16/03/10) podem ser encontrados uma grande quantidade de experimentos de Física com materiais do dia-a-dia. Esses experimentos estão divididos nas grandes áreas de Mecânica, Óptica, Eletricidade& Magnetismo e Física Térmica.

**Atividade 5: Queda da moeda**

O objetivo dessa atividade que, foi elaborada para ser aplicada em turmas de Ensino Médio e Ensino Superior, é construir um modelo matemático para representar o movimento de queda de uma moeda de 25 centavos. Para realizar a atividade foram necessários:

- Uma moeda de 25 centavos;
- Uma trena;
- Um cronômetro;
- Lápis e papel.

Optamos por uma moeda porque fica mais fácil escutar o som quando a mesma cai no solo. Porém, pode ser usado na experiência qualquer objeto de qualquer forma. O cronômetro pode ser de um aparelho celular e a trena usada foi de 3m.

Os seguintes procedimentos foram realizados:

- Primeiramente, com o uso da trena, marcaram-se em uma parede as seguintes medidas: 1 m; 1,5 m; 2 m, 2,5 m; 3 m e 3,5 m;
- Depois de marcar todas as medidas, deixou-se cair a moeda três vezes de cada altura, anotando o respectivo tempo de queda.

O resultado foi organizado em uma tabela:

**Tabela 7**. Tempo de queda da moeda ($t_A, t_B\ e\ t_C$) e tempo médio de queda.

| Altura (m) | Tempo A (s) | Tempo B (s) | Tempo C (s) | Tempo médio de queda (s) |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1,00 | 0,46 | 0,21 | 0,21 | 0,29 |
| 1,50 | 0,35 | 0,40 | 0,45 | 0,40 |
| 2,00 | 0,62 | 0,71 | 0,65 | 0,66 |
| 2,50 | 0,65 | 0,83 | 0,61 | 0,69 |
| 3,00 | 0,81 | 0,83 | 0,81 | 0,81 |
| 3,50 | 0,86 | 0,87 | 0,91 | 0,88 |

A análise da tabela não permite identificar facilmente o objeto matemático por ela representado. Novamente, é necessário converter a tabela em um gráfico cartesiano e interpretar a curva formada quando se unem os pontos referentes aos pares ordenados. Assumindo como variável dependente a *altura*(primeira coluna da tabela) e como variável independente o *tempo médio* de queda (última coluna), vamos converter a tabela em um gráfico cartesiano (gráfico de dispersão):

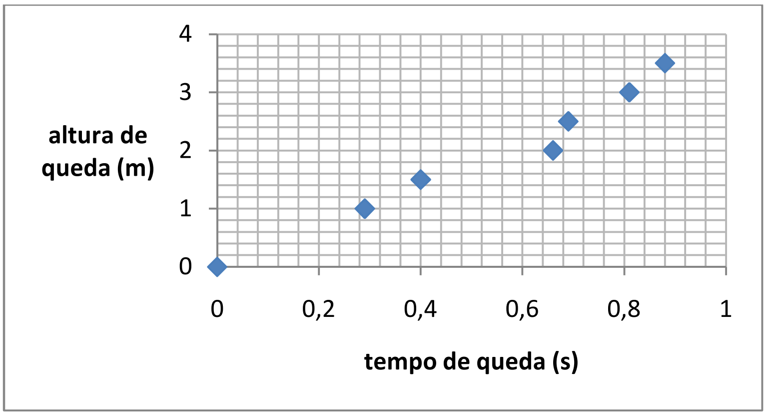



**Figura 24.** Gráfico da altura em função do tempo médio de queda da moeda.

Que objeto matemático esse gráfico representa? Diferentemente da simulação computacional, onde o gráfico forneceu argumentos para identificar com certa facilidade o objeto matemático, nessa atividade experimental, o gráfico não fornece elementos suficientes para identificá-lo. Nesse caso, temos que analisá-lo por meio de ajuste de curvas.

> A disposição dos dados em um sistema cartesiano e um bom *ajuste* dos seus valores, facilitará a visualização do fenômeno em estudo, propiciando tentativas de propostas de problemas, conjecturas ou leis de formação (BASSANEZI, 2004, p. 43). (grifo do autor)

Primeiramente, vamos fazer um ajuste linear para os dados da tabela 7. Ou seja, consideraremos que o objeto matemático representado é o objeto função linear.

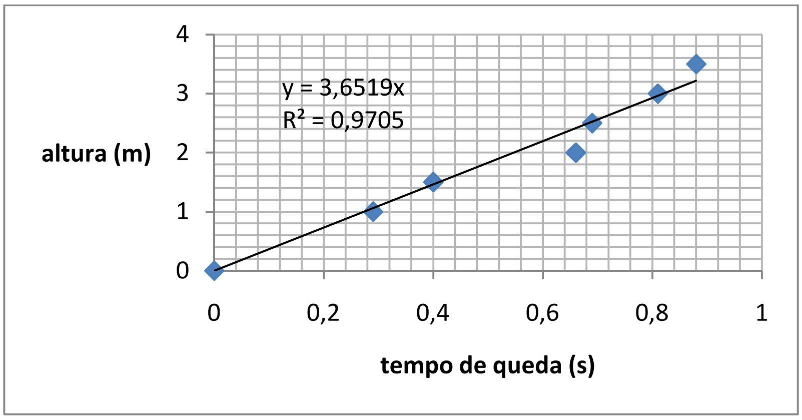



**Figura 25**. Gráfico do ajuste de curva linear para o tempo de queda da moeda.

A partir da equação de ajuste fornecida pelo Excel, é possível elaborar a seguinte expressão matemática $\boldsymbol{h = 3,6519\,t}$ para relacionar a altura em função do tempo de queda da moeda. A plotagem dos dados da tabela 7 nessa expressão mostra que os dados fornecidos estão próximos dos coletados durante o experimento. No entanto, vamos fazer um ajuste de curva quadrático para os dados da tabela 7 e verificar se a equação de ajuste fornecida fornece dados mais precisos.

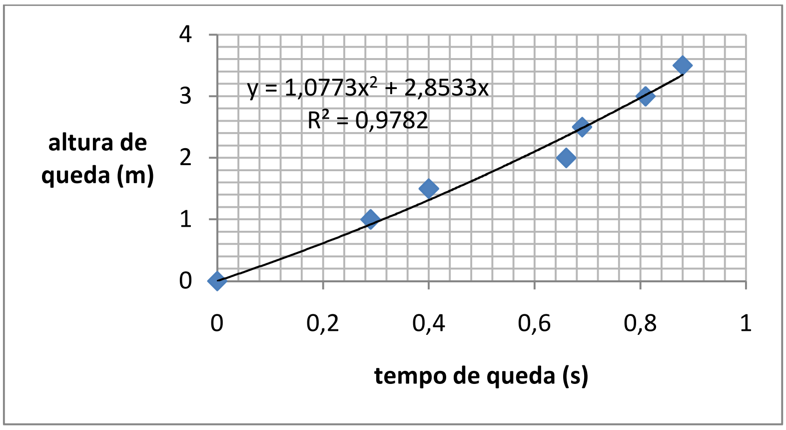



**Figura 26**. Gráfico do ajuste quadrático para o tempo de queda da moeda.

Observando-se o coeficiente de *Pearson* para o ajuste de curva linear $R^2 = 0{,}9705$ em comparação com o coeficiente para o ajuste quadrático $R^2 = 0{,}9782$ pode-se notar que este último ajuste gera dados mais precisos, uma vez que possui um coeficiente mais próximo de uma unidade .

Sendo assim, formularemos a seguinte representação matemática para relacionar a altura em função do tempo de queda da moeda:

$$\boldsymbol{h(t) = 1,0773\ t^2 + 2,8533\ t}$$

Fornecendo um modelo matemático para calcular a altura de queda da moeda em função do tempo médio. “A validação de um modelo matemático consiste na verificação da aproximação do modelo com a realidade, ou seja, se os dados experimentais ou observados não estão “muito longe” daqueles fornecidos pelo modelo” (BASSANEZI, 2004, p. 56).

Alguns registros semióticos permitem tratamentos peculiares. Um registro simbólico permite cálculos de derivada e integral, o que não é possível no registro tabular. Cada registro semiótico tem sua significação operatória, por isso é que eles têm suas limitações e também suas potencialidades quanto à interpretação de fenômenos físicos.

Ao se problematizar um modelo matemático estamos recorrendo às suas limitações e potencialidades de interpretação. Por exemplo, qual a velocidade de queda da moeda nos instantes coletados? Para responder a essa pergunta basta aplicar um tratamento por meio de uma regra de derivada no registro simbólico $h(t) = 1{,}0773\, t^2 + 2{,}8533\, t$, uma vez que o cálculo diferencial nos informa que a velocidade é a derivada primeira da função do espaço percorrido:$v = \frac{dh}{dt}$.

$$v = \frac{dh}{dt} = \frac{d}{dt}(1{,}0773\, t^2 + 2{,}853\, t)$$

$$v(t) = 2{,}1546\, t + 2{,}8533$$

Para calcular a velocidade de queda da moeda é suficiente substituir os valores dos tempos coletados na equação acima. Por exemplo, a velocidade de queda no instante 0,29 segundos é

$$v(t) = 2{,}1546\, t + 2{,}853$$

$$v(0{,}29) = 2{,}1546\, x\, 0{,}29 + 2{,}853$$

$$v = 3{,}477\, \frac{m}{s}$$

No entanto, poderíamos estar interessados em saber qual foi a aceleração de queda da moeda. Recorrendo-se novamente ao cálculo diferencial, a aceleração pode ser calculada aplicando-se outra regra de derivada na equação da velocidade,

$$a = \frac{dv}{dt}$$

$$a = \frac{d}{dt}(2{,}1546\, t + 2{,}853)$$

$$a = 2{,}1546\ \frac{m}{s^2}$$

Comparando-se essa aceleração com o valor da aceleração da gravidade próximo à superfície da Terra $g = 9{,}81\frac{m}{s^2}$, notamos uma diferença muito grande nos valores. Tal diferença é explicada quando se leva em consideração os erros devido à falta de precisão na coleta de dados durante o experimento.

O ambiente gerado pelo processo de modelagem matemática de atividades experimentais no ensino de Física caracteriza-se por possibilitar a vivência e a experimentação da situação física, ao passo que na simulação computacional, o discente experimenta, mas não vivencia o fenômeno físico. O aluno observa, coleta dados, mede, pesa etc. Deve-se ter cuidado especial na coleta de dados. São os dados organizados em tabelas que fornecerão subsídios para a construção de gráficos cartesianos e posterior identificação do objeto matemático. Nesse sentido os erros cometidos durante a coleta de dados devem ser minimizados ao máximo.

Após a coleta de dados, foi necessário construir um gráfico de dispersão para estudar o comportamento da curva gerada pelos pontos correspondentes aos pares ordenados. A dispersão acentuada dos pontos dificultou identificar o objeto matemático que estava sendo representado. O uso da técnica de ajuste de curva possibilitou que se abstraísse o objeto matemático função do segundo grau subjacente ao fenômeno físico.

O tratamento do registro simbólico por meio de regras de derivada propiciou melhor compreensão sobre a situação física. A problematização do modelo matemático possibilitou interpretá-lo. Derivando-se a altura em função do tempo, obteve-se um modelo matemático para o cálculo da velocidade de queda da moeda e um determinado instante. Verificou-se que a aceleração de queda foi menor que a gravidade local devido aos erros cometidos durante a coleta de dados.

**Atividade 6: Formação de imagens em espelhos planos**

A seguinte atividade foi proposta por Daroit et al. (2009) a estudantes da 3ª série do Ensino Médio, tendo como objetivo geral o desenvolvimento de estratégias pedagógicas que visem propiciar um ambiente favorável a uma aprendizagem significativa. Constatar que o número de imagens formadas entre dois espelhos planos depende do ângulo entre eles e elaborar um modelo matemático que relacione o número de imagens e o ângulo foram os objetivos específicos da atividade.

Foram utilizados os seguintes materiais:

- Dois espelhos planos de 15 cm x 20 cm;
- Transferidor;

- Fita adesiva;
- Um objeto pequeno (caneta, borracha...)

Os seguintes procedimentos foram realizados:

- Uniram-se os espelhos com fita adesiva na parte posterior;
- Instalou-se o conjunto sobre uma mesa;
- Colocou-se o objeto entre os espelhos;
- Com o auxílio do transferidor, formaram-se ângulos entre os espelhos;
- Observou-se o número de imagens formadas.

Os dados coletados foram organizados em uma tabela:

**Tabela 8**. Número de imagens em função do ângulo entre os espelhos. (Fonte: Daroit et al (2008, p. 5).

| Ângulo (em graus) | Número de imagens |
|---|---|
| 180 | 1 |
| 120 | 2 |
| 90 | 3 |
| 60 | 5 |
| 45 | 7 |
| 30 | 11 |
| 20 | 17 |
| 10 | 35 |

A interpretação da tabela 8 mostra que o número de imagens entre dois espelhos planos aumenta à medida que se reduz o ângulo entre eles. Ou seja, são grandezas inversamente proporcionais. Para perceber o objeto matemático que está sendo representado pela tabela 8 visando construir um registro simbólico do fenômeno é necessário convertê-la em um registro gráfico cartesiano.

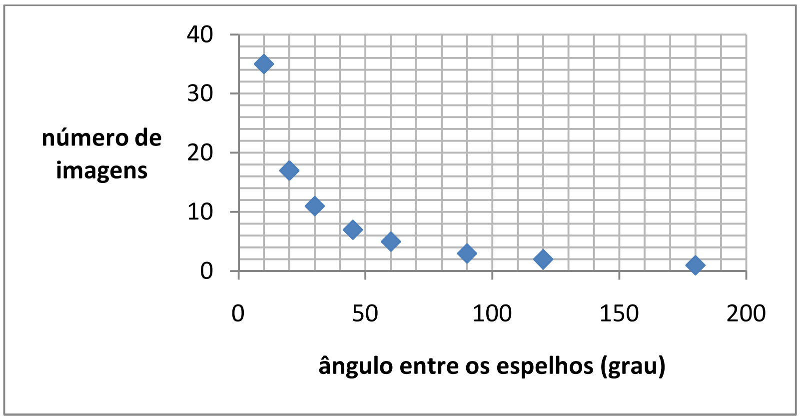



**Figura 27**. Gráfico referente ao número de imagens formadas em função do ângulo entre dois espelhos planos.

A curva formada pela união dos pontos referentes aos pares ordenados nos informa que o objeto matemático que pode estar sendo representado pelo gráfico é o objeto função potência. Desse modo, usaremos o aplicativo Excel para fazer um ajuste de curva potencial para os valores da tabela 8.

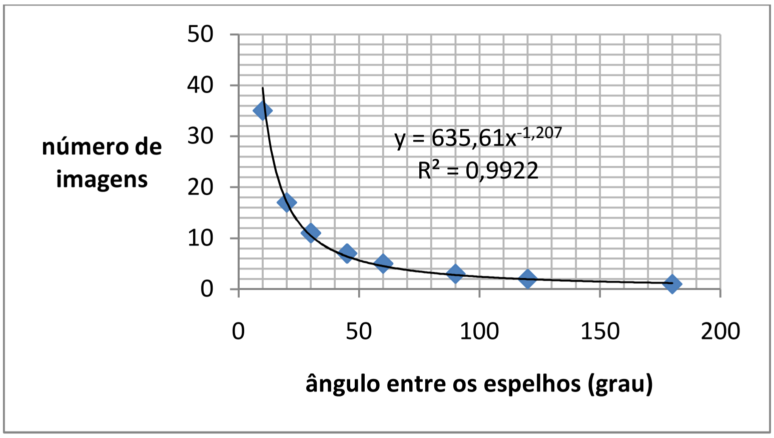



**Figura 28**. Gráfico referente ao ajuste de curva potencial para o número de imagens formadas em função de dois espelhos planos.

Assim, a equação de ajuste fornecida pelo Excel nos possibilita elaborar o seguinte modelo matemático para representar o número de imagens em função do ângulo entre dois espelhos planos.

$$\boldsymbol{N(\alpha) = 635,61\ \alpha^{-1,207}}$$

Ao compararmos essa expressão matemática com a equação normalmente encontrada nos livros didáticos para calcular o número de imagens formadas entre dois espelhos planos

$$N(\alpha) = \frac{360}{\alpha} - 1$$

encontramos divergência entre seus valores. Para um ângulo de 90º, encontramos $N$ =2,78 imagens aplicando o modelo matemático elaborado a partir do ajuste de curva potencial e $N = 3$ imagens usando a equação de sala de aula.

Uma análise crítica desses valores pode começar com a seguinte pergunta: qual das duas expressões matemáticas é a correta? Os livros didáticos fazem a seguinte observação para a expressão $N(\alpha) = \frac{360}{\alpha} - 1$ (SAMPAIO e CALÇADA, 2005, p. 368):

- Se $\frac{360}{\alpha}$ for número par, a fórmula será válida para qualquer posição entre os espelhos;
- Se $\frac{360}{\alpha}$ for ímpar, só podemos garantir que a fórmula funciona se o objeto estiver no plano bissetor do ângulo entre os espelhos.

Os autores completam dizendo ainda que tal fórmula serve para resolver problemas do tipo “dado um ângulo $\boldsymbol{\alpha}$ qual é o número de imagens?” Não servindo para resolver problemas do tipo inverso, ou seja, “dado o número de imagens, qual é o valor de $\boldsymbol{\alpha}$?”, pois podemos ter o mesmo número de imagens para diferentes valores de $\boldsymbol{\alpha}$*.*

Vemos, portanto, que a fórmula usada em sala de aula possui algumas restrições. Por outro lado, o modelo matemático encontrado por meio do ajuste de curva potencial pode ser usado para qualquer valor de $\alpha$ independentemente da localização do objeto entre os espelhos.

O resultado $N = 2{,}78$ imagens para um ângulo de 90º obtido por meio do modelo matemático elaborado a partir da tabela 8 indica que são formadas duas imagens inteiras mais 0,78 ou 78% de uma imagem. Observando a figura a seguir é possível notar que a imagem do fundo está reduzida de tamanho, ou seja, a figura mostra duas imagens inteiras e "parte" de uma imagem, como prediz o modelo matemático formulado.

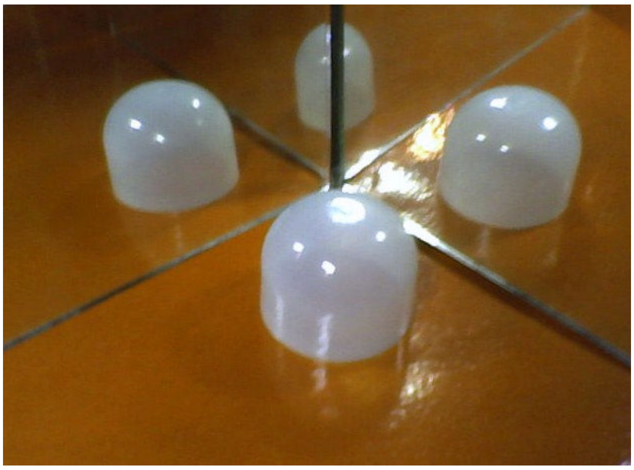


**Figura 29**. Imagem formada entre dois espelhos planos.

Desse modo, o modelo matemático elaborado prevê ângulos para os quais o número de imagens formadas entre dois espelhos planos não são números inteiros, mas racionais.

Nessa atividade, vimos que o processo de modelagem matemática aplicado a fenômenos físicos, no caso, a formação de imagens entre dois espelhos planos, pode originar modelos matemáticos um tanto diferentes, tanto em forma quanto em conteúdo, das expressões matemáticas comumente encontradas nos livros didáticos.

# CONSIDERAÇÕES FINAIS

Objetivando responder à seguinte questão de pesquisa:*a mobilização de registros de representação em atividades de modelagem matemática favorece a conceituação em Física?* É que realizamos um estudo sobre a teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval. Essa teoria trata da apreensão conceitual em matemáticas, no entanto, como o próprio psicólogo salienta, pode servir de base para a apreensão de qualquer conhecimento que requeira a utilização de sistemas de expressão e de representação, como é o caso do conhecimento em Física. A aprendizagem das matemáticas constitui somente o domínio no qual esta questão [refere-se ao uso de diversos sistemas de representação semiótica] se coloca de uma maneira mais manifesta e mais aguda que nas outras (DUVAL, 2009, p. 14).

Considerando que um modelo matemático é um registro de representação semiótica, e que a apreensão de conhecimentos em Física enfatiza, em grande parte, o uso de sistemas de representação semiótica, acreditamos que essa teoria tem grande aplicabilidade no que se refere à aquisição conceitual durante a construção de modelos matemáticos no ensino de Física.

Acreditamos que tal aplicabilidade tenha sido demonstrada nesse trabalho durante seu aporte teórico e quando realizamos o desenvolvimento e análise de seis (06) atividades de Modelagem Matemática de fenômenos físicos. Destacamos a importância da atividade cognitiva de conversão de registros de representação para a compreensão do conteúdo conceitual de Física.

Vimos que uma mesma situação de Física pode ser representada por diferentes registros de representação e que cada registro suscita um custo cognitivo diferente para ser interpretado. Ao interpretar as diferentes representações matemáticas referentes ao mesmo fenômeno físico, o discente desenvolve as funções cognitivas necessárias à apreensão conceitual.

A pesquisa bibliográfica que realizamos evidenciou que, no ensino de Física, a modelagem matemática tem sido desenvolvida de acordo com três recursos didático-pedagógicos:

- Por meio da proposição de problemas no contextualizados;
- Por meio de simulações computacionais e
- Por meio de experimentos.

Esses recursos metodológicos não são auto-excludentes e não possuem uma linha divisória bem determinada. São, antes de qualquer coisa, uma tentativa de organizar, ao menos didaticamente, as atividades de modelagem no ensino de Física. Durante o desenvolvimento do processo de modelagem nesses ambientes, os discentes devem ser estimulados a articularem e interpretarem os diversos registros de representação semiótica.

Acreditamos, portanto, ter alcançado o objetivo geral da pesquisa que se baseou em propor reflexões sobre o papel da coordenação de registros de representação em ambiente gerado pelo processo de modelagem matemática no ensino e aprendizagem de Física. No entanto, sabemos que ainda restam questionamentos de ordem teórica e empírica a serem investigados futuramente:

- A coordenação de registros de representação semiótica pode contribuir para a resolução de problemas no âmbito do ensino de Física?
- Os critérios de congruência de Duval podem auxiliar na avaliação de modelos matemáticos?

# Referenciais bibliográficos

BARBOSA, J. C. *Modelagem matemática:* concepções e experiências de futuros professores. 2001. 256f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

BASSANEZI, R. C. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*. 2ed. São Paulo: Contexto, 2004, 389p.

BIEMBENGUT, M, S.; HEIN, N. *Modelagem matemática no ensino*. 3ed. São Paulo: Contexto, 2003, 127p.

BIEMBENGUT, M. S. *30 anos de modelagem matemática na educação brasileira:* Revista Alexandria, v. 2, n. 2, p. 7-32, 2009.

BORGES, A. T. Um estudo de modelos mentais. *Revista Investigação em Ensino de Ciências,* Rio Grande do Sul, v. 2, n. 3, dez 1997. Disponível em <http://www.if.ufrgs.br/ienci/artigos/Artigo_ID34/v2_n3_a1997.pdf> Acesso em 13 set 2009.

BRAGA, M. R. *Modelagem matemática e tratamento do erro no processo de ensino-aprendizagem das equações diferenciais ordinárias*. 2009. 180f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas) – NPADC, Universidade Federal do Pará.

BRASIL, Ministério da Educação. *Diretrizes Curriculares Nacionais:*Ensino Médio, 2006. (Disponível em http://portal.mec.gov.br, acesso em 8/5/09).

____, Ministério da Educação. *Parâmetros Curriculares Nacionais:*Ensino Médio. Parte I (Bases legais), 2000a. (Disponível em http://portal.mec.gov.br, acesso em 8/5/09).

____, Ministério da Educação. *Parâmetros Curriculares Nacionais:*Ensino Médio. Parte III (Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias), 2000b. (Disponível em http://portal.mec.gov.br, acesso em 8/5/09).

BURAK, D. *Modelagem matemática:* ações e interações no processo de ensino-aprendizagem. Tese de Doutorado em Educação-UNICAMP, São Paulo, 1992.

____. *Modelagem matemática:* uma metodologia alternativa para o ensino da matemática na 5ª série. Dissertação de mestrado em Educação Matemática-UNESP, São Paulo, 1987.

____. Modelagem matemática e a sala de aula. In: ENCONTRO PARANAENSE DA MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (EPMEM), *Anais...*.Londrina, 2004.

CHAVES, M. I. A.; ESPÍRITO SANTO, A. O. Modelagem matemática: uma concepção e várias possibilidades. *Boletim de Educação Matemática.* Rio Claro, ano 21, n. 30, Fev 2008. Disponível em <http://cecemca.rc.unesp.br/ojs/index.php/bolema/article/view/1781/1568>. Acesso em 13 set 2009.

DAROIT. L.; HAETINGER. C.; DULLIUS. M. M. *O ensino de fenômenos físicos através da modelagem matemática. Disponível em* http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/cd_egem/fscommand/RE/RE_35.pdf. Acesso em 10/08/2009.

DAMORE, B. *Elementos de didática da matemática*. São Paulo: Livraria da Física, 2007. 449p.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática*.* In: MACHADO, S. D. A. (Org.). *Aprendizagem em matemática:* registros de representação semiótica. 4 ed. Campinas: Papirus, 2008, p.11-33.

____. *Semiósis e pensamento humano*: registros semióticos e aprendizagens intelectuais. Tradução: Lênio Levy e Marisa Silveira. São Paulo: Editora da Física, 2009, 113p.

FERNANDES, R. G. *Modelos mentais em Mecânica Introdutória*: uma simulação computacional. 2000. 158f. Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2000.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. *Investigação em educação matemática*: percursos teóricos e metodológicos. 2 ed. São Paulo: Autores Associados, 2007, 226p.

FLORES, C. R; MORETTI, M. T. O funcionamento cognitivo e semiótico das representações gráficas: ponto de análise para a aprendizagem matemática. *Reremat-Revista Eletrônica de Republicação em Educação Matemática.* Santa Catarina, p. 26-38, 2006. *Disponível* em <http://www.redemat.mtm.ufsc.br/reremat/republic_07_artigo.PDF>. Acesso em 02/10/09).

FREIRE, P. *Pedagogia da autonomia*: saberes necessários à prática educativa. 37 ed. São Paulo: Paz e Terra, 2008, 146p.

____. *Pedagogia do oprimido*. 46 ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2007, 213p.

LEVY, L. F. *Os professores, uma proposta visando à transdisciplinaridade e os atuais alunos de matemática da educação pública municipal de jovens e adultos de Belém, Pará*. 2003. 148f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas) – NPADC, Universidade Federal do Pará.

LOZADA, C. O. *Alternativas de modelagem matemática aplicada ao contexto do ensino de física:* relevância do trabalho interdisciplinar entre matemática e física. (www.sbem.com.br/files/ix_enem/Comunicacao_Cientifica/Trabalhos/CC19292253859T.doc, acesso em 18 de maio de 2009).

LOZADA, C. O; MAGALHÃES, N. S. Uma relato de experiência sobre a prática da modelagem matemática aplicada ao ensino de física. In: VI CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (VI CNMEM), Londrina-Pr. *Anais...Londrina*: 2009. (Publicação em CD-ROM).

MACHADO JÚNIOR. A. G. *Modelagem matemática no ensino-aprendizagem:* ação e resultados. 2007. 142f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas) – NPADC, Universidade Federal do Pará.

MOREIRA, M. A. Modelos mentais. *Revista Investigação em Ensino de Ciências,* Rio Grande do Sul, v. 1, n. 3, dez 1996. Disponível em <http://www.if.ufrgs.br/ienci/artigos/Artigo_ID17/v1_n3_a1.pdf>. Acesso em 13 set 2009.

OLIVEIRA, M. K.*Vygotsky*: aprendizado e desenvolvimento, um processo sócio-histórico. São Paulo: Scipione, 1999, 109p.

PANTOJA, L. F. .L. *A conversão de registros de representações semióticas no estudo de sistemas de equações algébricas lineares*. 2008. 105f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas) – NPADC, Universidade Federal do Pará.

PINHEIRO, T. F. Modelização de variáveis: uma maneira de caracterizar o papel estruturador da matemática no conhecimento científico. In: PIETROCOLA, M. (Org.). *Ensino de física*: conteúdo, metodologia e epistemologia numa concepção integradora. Florianópolis: UFSC, 2001. p. 33-150.

ROZAL, E. F. *Modelagem matemática e os temas transversais na educação de jovens e adultos*. Belém, 2007. 164f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas) – NPADC, Universidade Federal do Pará.

SAMPAIO, J. L.; CALÇADA, C. S. *Universo da Física*. 2ed. v. 2. São Paulo: Atual, 2005, 520p.

SILVA, K. A. P.; ALMEIDA, L. M. W. Modelagem matemática e semiótica: algumas relações. In: VI CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. *Anais...*Londrina-PR: Universidade Estadual de Londrina, 2009. (Publicação em CD-ROM).

SOUZA, E. S. R.; ESPÍRITO SANTO, A. O. Modelagem matemática como metodologia para o ensino-aprendizagem de Física. In: VI ENCONTRO PARAENSE DE MODELAGEM MATEMÁTICA (VI EPAEM), Belém-Pa. *Anais...*Belém: SBEM, 2008a. (Publicação em CD-ROM).

____. O objeto modelo matemático e suas diversas representações semióticas: uma concepção de modelagem matemática. In: VI CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. *Anais...*Londrina-PR: Universidade Estadual de Londrina, 2009. (Publicação em CD-ROM).

____. Modelagem matemática: uma visão holística da realidade?In: VI ENCONTRO PARAENSE DE MODELAGEM MATEMÁTICA (VI EPAEM), Belém-Pa. *Anais...*Belém: SBEM, 2008b. (Publicação em CD-ROM).

VERGNAUD, G. ¿En qué sentido la teoría de los campos conceptuales puede ayudarnos para facilitar aprendizaje significativo?.*Revista Investigação em Ensino de Ciências*, Rio Grande do Sul, v. 12, n. 2, ago 2007. Disponível em <http://www.if.ufrgs.br/ienci/artigos/Artigo_ID172/v12_n2_a2007.pdf>. Acesso em 13 set 2009.