

Nielce Meneguelo Lobo da Costa

**FUNÇÕES SENO E COSSENO:
UMA SEQUÊNCIA DE ENSINO A PARTIR DOS
CONTEXTOS DO “MUNDO EXPERIMENTAL”
E DO COMPUTADOR**

Mestrado em ENSINO DA MATEMÁTICA

PUC - SP

1997

Nielce Meneguelo Lobo da Costa

**FUNÇÕES SENO E COSSENO:
UMA SEQUÊNCIA DE ENSINO A PARTIR DOS
CONTEXTOS DO “MUNDO EXPERIMENTAL”
E DO COMPUTADOR**

Dissertação apresentada como exigência
parcial para obtenção do título de
MESTRE EM ENSINO DA MATEMÁTICA à
Pontifícia Universidade Católica de São
Paulo, sob orientação da Professora
Doutora Sandra M. P. Magina.

PUC - SP

1997

BANCA EXAMINADORA

Dedicatória.

Aos professores do meu país. Esses homens e mulheres idealistas que formam nossas crianças e jovens, moldando o futuro da sociedade. A eles, muitas vezes esquecidos pelos governantes e poderosos, dedico este trabalho.

AGRADECIMENTOS

À Prof^ª. Dr.^ª Sandra M. P. Magina pelo trabalho de orientação e pela amizade, paciência e entusiasmo que transformaram um projeto de pesquisa em realidade.

Ao Prof. Dr. Benedito Antonio da Silva e ao Prof. Dr. Marcelo de Carvalho Borba pelas sugestões, comentários e críticas que tanto contribuíram para esta dissertação.

À Prof^ª. Dr.^ª Tania M. M. Campos por todo o incentivo e sugestões.

À Prof^ª. Dr.^ª Marisa A. Cavalcante por orientar na idealização e montagem dos equipamentos utilizados na pesquisa, no contexto do “mundo experimental”. Aos funcionários do Laboratório de Física da P.U.C. / S.P. e da Marcenaria, pela confecção destes equipamentos.

Ao Prof. J. Rudney Tabacchi por autorizar e apoiar a aplicação da sequência didática no Colégio Dante Alighieri, e às Prof^ªs. Maria Teresa Martins Dias e Ana Maria d’Amato Haralyi pela participação e entusiasmo no desenvolvimento do projeto no colégio.

Aos alunos e professores do Colégio Dante Alighieri que gentilmente participaram do estudo piloto e da sequência didática.

Aos Mestres Vincenzo Bongiovanni e Lenira M. Martinho, pela revisão da História da Trigonometria.

A Fernando P. Kfourri pela revisão gramatical e ortográfica e a Fátima Tassinari pelas fotos que ilustram esta dissertação.

Aos colegas e amigos do Mestrado, pela cumplicidade, companheirismo e sugestões. Especialmente a Maria Célia, Maria Carolina, Sílvia e Ubiratan.

À CAPES, pela bolsa de estudos que permitiu uma maior dedicação ao Programa de Pós Graduação.

Ao PROEM por ceder seus Laboratórios de Informática e Ensino da Matemática para a realização do estudo piloto e ainda cooperar com material e equipamento.

Ao meu marido Jorge e minhas filhas Helena Regina e Marília, pela compreensão quanto às ausências e falhas como esposa, mãe e dona de casa e sobretudo pelo apoio e incentivo ao trabalho nos meus momentos de desânimo.

A Deus, sem o qual nada é possível.

RESUMO

O objetivo deste trabalho é investigar a influência de dois diferentes contextos — computador e “mundo experimental” — na aprendizagem da trigonometria.

Escolhemos como assunto alvo as funções seno e cosseno e partimos da hipótese de que é possível introduzi-las de maneira significativa. Preparamos uma sequência didática e trabalhamos com dois grupos de alunos, sendo que para um deles iniciamos o assunto por atividades no computador e demos continuidade por manipulações no “mundo experimental” e, para o outro grupo, a ordem de introdução foi invertida.

Nossa questão de pesquisa foi identificar qual a ordem de introdução, por contextos, que se apresenta mais eficaz para a aprendizagem. Assim sendo aplicamos três testes escritos: um antes de iniciar a sequência didática, um ao término das atividades de um dos contextos e um ao final do estudo.

Analisamos os dados sob os seguintes pontos de vista: desempenho dos grupos e dos sujeitos nos testes, taxa de variação de acertos por grupo, análise dos testes por objetivo, desempenho dos grupos nos itens (subdivisões das questões), sua taxa de variação e análise dos erros e procedimentos. Concluímos que a ordem de introdução do assunto interferiu na aprendizagem.

ABSTRACT

The aim of this work is to investigate the influence of two different contexts: computer and “experimental world” on Trigonometry learning.

We chose as main object the sine and cosine functions and we started from the hypothesis that it is possible to introduce them in a significative manner. We prepared a didactic sequence and worked with two groups of students. To the first group, the subject was introduced by computer activities, followed by “experimental world” manipulations. To the second group the introduction order was inverted.

The research topic is to identify which introduction order, in context, is more effective in learning. This way, we applied three written tests: one before the didactic sequence, one at the end of the context activities and one at the end of the whole study.

We analised the data through the following points: groups and each student development in tests, variation rate of right answers per groups, test analysis per objective, groups development in items (subdivision of questions) and its variation rate and analysis of wrong answers and procedures. We concluded that introduction order has indeed interferred in learning.

Í N D I C E

CAPÍTULO I: INTRODUÇÃO

1.1. Problemática e Objetivo.....	1
1.2. Descrição Sumária da Dissertação.....	6

CAPÍTULO II: ESTUDO HISTÓRICO E EPISTEMOLÓGICO

2.1. Introdução.....	7
2.2. A Trigonometria.....	8
2.2.1. Raízes.....	8
2.2.2. A Trigonometria e as Funções na Grécia.....	11
2.2.2.1. Almagesto.....	14
2.2.3. A Contribuição dos Hindus	17
2.2.3.1. Siddhanta	17
2.2.4. A Trigonometria dos Árabes e Persas.....	18
2.2.5. A Influência do Conhecimento Árabe sobre os Europeus.....	20
2.2.6. A Trigonometria na Europa a partir do século XIV.....	21
2.2.7. A Trigonometria Incorporada pela Análise Matemática.....	24
2.3. Ângulos.....	26
2.3.1. Definições de Ângulo.....	27
2.3.2. Setor Angular e Ângulos Geométricos.....	29
2.3.3. Medidas de Ângulos.....	30
2.4. Nomenclatura e Simbologia.....	30

CAPÍTULO III: FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

3.1. Introdução.....	33
3.2. A Formação de Conceitos.....	33
3.3. Aspectos da Transposição Didática.....	40
3.4. O Contexto: Uma Abordagem Teórica e Prática.....	45

	3.4.1. Os Contextos da Pesquisa.....	47	
	3.5. Revisão da Literatura.....	50	
CAPÍTULO IV: A ESCOLA E A TRIGONOMETRIA			
	4.1. Introdução.....	56	
	4.2. Análise de uma Proposta Curricular.....	56	
	4.3. Análise de Livros Didáticos.....	59	
	4.4. Análise dos Obstáculos e das Dificuldades de Ensino.....	68	
	4.4.1. Obstáculos Epistemológicos.....	68	
	4.4.2. Obstáculos Didáticos.....	71	
CAPÍTULO V: METODOLOGIA			
		5.1.	
	Introdução.....	77	
		5.2.	
	Proposta.....	77	
	5.2.1. Proposta Didática da Sequência.....	78	
	5.3. Objetivo.....	79	
		5.4. Desenho Geral do Experimento.....	81
	5.5. Os Sujeitos.....	82	
		5.6. Descrição da Aplicação Preliminar e suas Implicações.....	83
	5.7. Contexto do Mundo Experimental.....	85	
	5.7.1. Experimento “Simulador do Alarme Óptico”	86	
		5.7.1.1. Desenho	87
	5.7.1.2. Material.....	88	
	5.7.1.3. Procedimento.....	89	

5.7.2. Experimento “Roda com a Caneta a Laser”	93
5.7.2.1. Desenho.....	94
5.7.2.2. Material.....	95
5.7.2.3. Procedimento	96
5.7.3. Experimento “Pêndulo de Areia”	97
5.7.3.1. Desenho.....	98
5.7.3.2. Material.....	99
5.7.3.3. Procedimento.....	99
5.8. Contexto do Computador.....	101
5.7.1. Desenho.....	101
5.7.2. Material.....	104
5.7.3. Procedimento.....	105
5.9. Contexto da Sala de Aula.....	125
5.9.1. Desenho.....	125
5.9.2. Material.....	125
5.9.3. Procedimento.....	125
5.10. Os Testes.....	128
5.10.1. Pré Teste.....	130
5.10.2. Teste Intermediário	134
5.10.3. Pós Teste.....	136
5.10.4. Procedimento.....	138

CAPÍTULO VI: ANÁLISE

6.1. Introdução.....	139
6.2. Comentários Gerais sobre a Sequência e os Testes.....	139
6.3. Análise do Desempenho dos Grupos nos Testes.....	140
6.4. Análise da Taxa de Variação de Acertos por Grupo.....	143
6.5. Análise do Desempenho dos Sujeitos nos Testes.....	146
6.6. Análise dos Testes por Objetivo.....	148
6.7. Análise do Desempenho dos Grupos Experimentais nos Itens.....	152
6.8. Análise da Taxa de Variação por Item.....	155
6.9. Análise dos Erros e Procedimentos.....	156

CAPÍTULO VII: CONCLUSÕES

7.1. Introdução.....	164
7.2. Comentários Gerais.....	164
7.3. Discussão e Conclusões.....	167
7.4. Considerações Finais.....	170

CAPÍTULO VIII: REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Í N D I C E D E F I G U R A S

Figura 1. O Seqt Egípcio

Figura 2. O Gnômon

Figura 3. Teorema de Ptolomeu

Figura 4. O “Jiva” Hindu

Figura 5. A Idéia do Raio 1 de AL Battani

Figura 6. Fórmula Usada para Construir a Tabela de Al Battani

Figura 7. Associação entre um Número Real e seu Seno através do
 Ponto Correspondente no Ciclo

Figura 8. Classificação de Proclus para Ângulos

Figura 9. Definições de Seno, Cosseno e Tangente de um Ângulo Obtuso

Figura 10. As Múltiplas Representações da Função Seno

Figura 11. Detalhe do “Simulador de Alarme Óptico”

Figura 12. O “Simulador”

Figura 13. O Ciclo e as Funções Seno e Cosseno

Figura 14. A “Roda com a Caneta a Laser”

Figura 15. O “Pêndulo de Areia”

Figura 16. O Rastro de Areia

Í N D I C E D E Q U A D R O S

Quadro I - Planejamento do Experimento para os Três Grupos

Quadro II - Sequência de Trabalho dos Grupos

Quadro III - Contexto do “Mundo Experimental”- Objetivos

Quadro IV - Grupos de Atividades do Contexto do Computador

Quadro V - Arquivos Preparados no Cabri II

Quadro VI - Atividades e Páginas

Quadro VII - Levantamento de Dificuldades nos Itens 1 a 4

ÍNDICE DE ANEXOS

Anexo 2.2.1. Problemas do Papiro Rhind relativos ao seqt

Anexo 2.2.2. A Medida da circunferência da Terra

Anexo 2.2.6. As Tábuas Trigonométricas

Anexo 2.3.1. Definições de Ângulos

Anexo 4.2. A Proposta Curricular e os Conteúdos Programáticos

Anexo 5.8.2. Arquivos e Atividades do Contexto do Computador

Anexo 5.8.3. Telas Relativas às Sessões Computador 3 e 4

Anexo 5.10.1. Pré Teste

Anexo 5.10.2. Teste Intermediário

Anexo 5.10.3. Pós Teste

ÍNDICE DE GRÁFICOS

Gráfico I - Desempenho dos Grupos nos Testes

Gráfico II - Taxa de Variação de Acertos do Pré para o Pós-Teste

Gráfico III - Evolução dos Grupos na 1ª Parte e na 2ª Parte

Gráfico IV - Taxa de Variação de Acertos de cada Aluno

Gráfico V - Taxa Percentual de Acertos por Objetivo

Gráfico VI - Número de Acertos dos Grupos Experimentais por Item

Gráfico VII - Taxa de Variação de Acertos por Item

Capítulo I:

Introdução

INTRODUÇÃO

1.1. Problemática e Objetivo

A motivação do presente estudo surgiu a partir de nossa prática, tanto como docente quanto como pesquisadora, em ensino da matemática.

Desempenhando o papel de professor percebemos que, muitas vezes, para o aluno, as funções trigonométricas surgem como um conteúdo vazio de sentido, uma vez que geralmente são introduzidas sem nenhuma ligação com a vida cotidiana. Assim sendo, a trigonometria, que é uma das formas matemáticas do Homem compreender e interpretar a Natureza pode ser, para nossos alunos, apenas um assunto abstrato e sem utilidade.

Em nossas pesquisas, desenvolvemos um trabalho de investigação das concepções dos alunos sobre funções ao término de 2º Grau e início do 3º Grau (Gouvêa, F.A.T.; Oliveira, N.; Costa, N.M.L.; Almouloud, S., 1996), que nos trouxe novas inquietações sobre o ensino das funções trigonométricas, pois observamos que, na amostra estudada, muitos dos alunos não conseguiram identificar os gráficos das funções seno e cosseno, colocados próximos a gráficos de funções de 1º e 2º Grau. Esta pesquisa nos motivou a estudar possíveis formas não tradicionais de ensino das funções trigonométricas.

Como educadora, mas também com o propósito de pesquisa e sistematização de dados, desenvolvemos um conjunto de atividades de ensino, que foram aplicadas em alunos do colégio no qual lecionamos. Partimos da hipótese de que, por meio do computador poderíamos auxiliar o aluno em sua percepção do ciclo trigonométrico, favorecendo sua concretização. Para tanto, utilizamos o software Cabri-Géomètre^[1], no qual preparamos arquivos que continham o ciclo trigonométrico e, nele, um ponto móvel P. O aluno, ao movimentar o ponto ao longo do ciclo, observava as projeções de P sobre os eixos, associando cada arco ao seno e ao cosseno correspondentes. A

¹. Desenvolvido por Jean-Marie Laborde, Yves Baulac e Franck Bellemain, no Laboratoire de Structures Discrètes et de Didactique do Institut d'Informatique et de Mathématiques Appliquées de Grenoble, 1992.

partir de suas observações na tela, o aprendiz preenchia uma ficha de atividades que abordava sinal assumido pelo seno, cosseno e tangente em cada quadrante, crescimento e decrescimento, valores máximo e mínimo.

O objetivo era desenvolver um estudo exploratório do conteúdo, mediado pelos arquivos prontos no Cabri. Nesta fase inicial, não pretendíamos incluir construções ou medições. Esperávamos que, por meio de tais atividades, os alunos pudessem chegar à relação fundamental da trigonometria, e que analisassem a tangente de um ângulo, verificando em quais intervalos pode ser definida e observando que quanto maior o ângulo, maior a tangente.

Percebemos que os alunos estiveram motivados, pois elogiaram a atividade de laboratório e disseram que, finalmente, por meio da movimentação do ponto no ciclo trigonométrico, “enxergaram” o que se falava em sala de aula. Tais comentários nos levaram a lembrar a afirmação de Lobatchevsky, (citado em Laborde, 1992) no “New Principles of Geometry”: *“Todos os conceitos geométricos são produzidos pela mente humana e abstraídos a partir de propriedades do movimento”* (pág. 130).

Em vista desse resultado parcial, passamos a acreditar que o Cabri auxiliaria o aluno a visualizar o arco trigonométrico e também os segmentos que correspondem ao seu seno, cosseno, tangente, secante, cossecante e cotangente, principalmente pelo fato de acrescentar o movimento. No entanto, ao aplicar a prova, incluindo duas questões cujas respostas exigiam que eles usassem os conceitos trabalhados no laboratório, percebemos que o aprendizado ainda não estava satisfatório, pois muitos continuavam errando em perguntas triviais.

A partir dessa vivência, levantamos algumas questões, que listamos a seguir:

-
- 1) SERÁ QUE O CABRI PODE AUXILIAR A VISUALIZAÇÃO DA GEOMETRIA E DA TRIGONOMETRIA, PERMITINDO AO ALUNO COMPREENDER SUAS RELAÇÕES E PROPRIEDADES?
 - 2) O APRENDIZADO É EFETIVO OU O ALUNO COMPREENDE APENAS MOMENTANEAMENTE A PROPOSTA?
 - 3) O TRABALHO COM O CABRI LEVA O ALUNO A FAZER TRANSFERÊNCIAS DO CONTEÚDO?
 - 4) COMO LEVAR O ALUNO A DAR SENTIDO À TRIGONOMETRIA DESENVOLVIDA FORA DO TRIÂNGULO RETÂNGULO?
 - 5) SERÁ QUE A TRIGONOMETRIA, TAL COMO VEM SENDO TRABALHADA TRADICIONALMENTE NAS ESCOLAS, NÃO É MAIS UMA DAQUELAS COISAS QUE SE APRENDE SÓ PARA USAR “NO FUTURO” ?
 - 6) O ESTUDO DA TRIGONOMETRIA FICA ISENTO DE INTERESSE E SIGNIFICADO, JÁ QUE O ALUNO NÃO CONSEGUE FAZER UMA REPRESENTAÇÃO DO QUE ESTÁ OCORRENDO ?
-

Com essas questões em mente, resolvemos entrevistar sete alunos do 3º colegial das três áreas: dois de Exatas, três de Humanas e dois de Biológicas. O critério de escolha desses alunos baseou-se em dois aspectos:

- a) Serem considerados muito bons na visão de seus professores e, portanto, “do tipo que aprende tudo”;
- b) Estando no 3º ano, supostamente já terem aprendido algumas das utilizações das funções trigonométricas e, portanto, estarem aptos a responder às seguintes questões :

-
- 1)- VOCÊ ACHA IMPORTANTE TER APRENDIDO TRIGONOMETRIA? POR QUÊ?
 - 2)- PARA QUE VOCÊ USOU, OU ACHA QUE VAI USAR, A TRIGONOMETRIA?
 - 3)- QUAIS AS “PARTES” DA TRIGONOMETRIA QUE VOCÊ APRENDEU E ACHA QUE DEVEM SER ENSINADAS E O QUE, EM SUA OPINIÃO, PODERIA SER DESPREZADO?
-

Os alunos foram convidados a responder a essas questões fora da classe e do horário escolar. A entrevista foi individual e oral, cabendo-nos anotar as respostas.

Após a análise notamos que, para os alunos entrevistados, o importante era aprender o que eles chamavam de “o básico” da trigonometria, que se pode resumir ao triângulo retângulo, às relações seno, cosseno, tangente e à relação fundamental. Eles achavam que essa parte era importante porque ligava as medidas angulares às lineares, o que permitia resolver uma série de problemas. Em outras palavras, a princípio, os assuntos considerados importantes pelos alunos estavam todos contidos na trigonometria vista no final do primeiro grau. Somente ao serem estimulados com a pergunta: “*No seu curso, alguma outra disciplina usou a trigonometria que você havia aprendido em Matemática?*” é que os alunos mencionaram alguma utilidade para a trigonometria ensinada no 2º grau. Porém, tudo o que conseguiram lembrar foi a utilização da trigonometria para o estudo de vetores (novamente no triângulo).

Uma aluna chegou a mencionar que gostaria de ter “**perdido menos tempo**” com trigonometria para “*assistir mais aulas sobre juros, porcentagens, álgebra, probabilidade*” (sic) porque, em seu entender, tais assuntos eram de maior valia para o cotidiano e para o desenvolvimento do raciocínio. Estas palavras nos levaram a pensar que os alunos, em geral, podem ter a mesma opinião.

As respostas nos levaram novamente a questionar a validade de ensinar funções trigonométricas da forma tradicional, visto que tudo nos leva a crer que ela não atinja o estudante de 2^o grau. Com essas informações, resolvemos investigar o que pensavam os professores de matemática da escola. Escolhemos quatro professores que passaram um longo período de suas vidas ensinando trigonometria.

Elaboramos uma entrevista dirigida, para saber suas opiniões sobre:

-
- OS PONTOS IMPORTANTES NO ENSINO DA TRIGONOMETRIA;
 - AS GRANDES DIFICULDADES NO ENSINO DA TRIGONOMETRIA;
 - POR QUE ENSINAR TRIGONOMETRIA NO 2^o GRAU;
 - O QUE MUDA NA VIDA DO ALUNO COM O APRENDIZADO DE TRIGONOMETRIA.
-

As entrevistas foram individuais, voluntárias e dentro da escola, logo em seguida ao término das aulas.

Após a análise, percebemos que:

- Os professores tinham muito a dizer sobre os aspectos que consideravam importantes no ensino da trigonometria, tais como: localização de pontos no ciclo, identificação de cada função trigonométrica, redução ao 1^o quadrante .
- Tiveram grande dificuldade para justificar por que estes pontos eram importantes. Isto foi notado pelas respostas, em geral vagas, que os professores deram quanto ao porquê de se ensinar trigonometria no 2^o grau, por exemplo: *“Para usar no futuro...”*.
- Esta dificuldade era mais acentuada quando perguntávamos quais as mudanças na vida do aluno com o conhecimento da trigonometria. Aqui tivemos um professor que respondeu: *“Se o aluno for do curso de Humanas, é totalmente desnecessário”*.
- Houve unanimidade ao identificar como uma grande dificuldade o fato do aluno aprender o assunto dissociado da vida prática.

Por fim, fomos entrevistar os professores de Física da escola, seguindo procedimento e roteiro iguais aos que foram usados com os de Matemática. Esses sim

punderam expor suas necessidades e justificar o ensino da trigonometria como necessário para capacitar o aluno a compreender a mecânica (estática, dinâmica e cinemática), principalmente no que se refere ao movimento circular uniforme, ao movimento harmônico simples e a ondulatória. Entre as exposições desses professores, vale a pena salientar a observação feita explicitamente pelo professor Maldonado: *“Só a Trigonometria capacita ao estudo da Mecânica”*. Foi enfatizado ainda, nas entrevistas, que além da mecânica, pode-se mencionar o uso da trigonometria no triângulo retângulo na ótica.

A trigonometria surge, portanto, como **ferramenta** para o aprendizado da Física. Para finalizar, gostaríamos de mencionar, textualmente, a frase do professor Caldeira: *“Se houver integração entre as disciplinas, o aluno pode perceber a utilidade da ferramenta”*, o que é uma evidência do exposto acima.

Resumindo, podemos dizer que no 2^o grau não há relação entre a trigonometria aprendida e sua aplicação. A exceção está na Física, que a usa na projeção de vetores, movimento circular, ótica, movimento harmônico simples, etc.

Feitas essas considerações, resolvemos desenvolver uma sequência de ensino que partisse do conhecimento espontâneo do aluno, que fosse apoiada em resolução de problemas vivenciados em diversos contextos^[2] e que procurasse dar significado ao conceito. Pretendemos construir uma sequência didática que introduza as funções seno e cosseno e suas transformações de forma significativa para o aluno. É nossa intenção aplicá-la a dois grupos experimentais, variando a ordem de introdução do assunto, em função do contexto e ainda, acompanhar um grupo de referência, que obterá as informações a partir da sala de aula. Nosso objetivo neste trabalho é investigar qual o tipo de interferência dos ambientes nos quais a sequência estará inserida na formação do conceito.

². Pensamos em trabalhar os conceitos trigonométricos em pelo menos dois ambientes; o do “mundo experimental” (ou do mundo manipulável) e o do computador. Discutiremos oportunamente cada um destes ambientes.

1.2. Descrição Sumária da Dissertação

No capítulo I expusemos nossa motivação em relação ao tema. No capítulo II, iniciaremos um estudo histórico e epistemológico da trigonometria, com os objetivos de (a) tomar conhecimento da gênese e do desenvolvimento dos conceitos trigonométricos em geral, (b) localizar outros conceitos que interajam com as noções que estamos investigando, (c) analisar a evolução da noção de ângulo e sua interferência no estudo das noções trigonométricas, (d) entender como se chegou ao “saber sábio” quanto às funções trigonométricas, isto é, à visão que os matemáticos têm atualmente sobre elas.

No capítulo III discorreremos sobre a fundamentação teórica do trabalho, pois tomamos emprestado algumas idéias de psicólogos como Piaget, Vygotsky, Vergnaud e Nunes. Da teoria de Piaget discutiremos a função simbólica e o conhecimento figurativo e operativo. De Vygotsky utilizaremos os conceitos de mediador e de zona de desenvolvimento proximal. De Vergnaud, a teoria dos campos conceituais, a questão da concepção e competência, e a resolução de problemas como formadora do conhecimento. De Nunes emprestaremos o estudo do significado da situação. Usaremos também alguns dos conceitos da Epistemologia e Didática da Matemática definidos pelos didatas franceses, tais como a noção de obstáculo de Bachelard, a teoria das situações de Brousseau, a dialética Ferramenta-Objeto e o jogo de quadros de Douady, e os registros de representação de Duval. Faremos ainda uma abordagem teórica e prática sobre os contextos e apresentaremos a revisão de literatura.

Investigaremos, no capítulo IV, como o conteúdo trigonométrico é ensinado. Para tanto nos apoiaremos na Proposta Curricular para o Ensino da Matemática do 2º Grau do Estado de São Paulo, nos editais de alguns exames vestibulares e na análise de livros didáticos. Feito isso, procederemos ao levantamento das dificuldades e obstáculos à aprendizagem das funções trigonométricas.

No capítulo V descreveremos nossa metodologia de pesquisa, contendo a proposta e seu objetivo, o desenho do experimento, a aplicação preliminar, a descrição

de cada um dos ambientes (contextos) usados, com seu desenho, material e procedimento. Discutiremos também os testes que foram aplicados.

No capítulo VI faremos uma análise dos resultados e no capítulo VII apresentaremos nossas conclusões e sugestões para futuras pesquisas.

Capítulo II:
Estudo Histórico e
Epistemológico

2.1. Introdução

Neste capítulo, analisaremos a gênese e o desenvolvimento da trigonometria, o aparecimento do conceito de função trigonométrica e, em particular, o das funções seno e cosseno. Pensamos que um estudo histórico do surgimento de um conceito é muito importante para quem ensina Matemática, pois evidencia os obstáculos epistemológicos^[3] do processo de construção do saber matemático. Além disso, o estudo desses obstáculos, vividos pelos matemáticos no passado, nos ajuda a compreender as dificuldades dos alunos de hoje; ademais o nosso entendimento da História da Matemática pode ser ampliado a partir da análise dos erros e embaraços dos estudantes. (Arsac, 1987; Sierpinska, 1985; Vergnaud, 1994). O estudo histórico também pode ter como objetivo contribuir para que nós, professores, possamos enriquecer as aulas.

Para considerar a gênese, devemos discutir qual o significado que daremos ao termo *Trigonometria*. Se o tomarmos como a ciência analítica estudada atualmente, teremos a origem no século XVII, após o desenvolvimento do simbolismo algébrico. Mas, se o considerarmos para significar a geometria acoplada à Astronomia, as origens remontarão aos trabalhos de Hiparco, no século II a.C., embora existam traços anteriores de seu uso. Se o considerarmos, ainda, para significar literalmente “medidas do triângulo”, a origem será no segundo ou terceiro milênio antes de Cristo.

Limitaremos nosso trabalho ao desenvolvimento da idéia de funções trigonométricas em \mathbb{R} dando, porém, um esboço das raízes desta ciência, desde as tabelas de sombras (século XV a.C.) até a expansão das funções trigonométricas em séries (século XVIII).

Estudar a história da trigonometria também permite observar o surgimento e o progresso da Análise e da Álgebra, campos da matemática nela contidos de forma embrionária. Gostaríamos também de salientar que a trigonometria, mais que qualquer

3. O termo obstáculo está sendo usado aqui como um conhecimento que funciona bem em um certo contexto mas, em outro, produz respostas falsas. Discutiremos no capítulo III com mais detalhes os tipos de obstáculos.

ramo da matemática, desenvolveu-se no mundo antigo a partir de necessidades práticas, principalmente ligadas à Astronomia, Agrimensura e Navegação.

O estudo histórico será apresentado com os seguintes tópicos:

- 1 Trigonometria
2. Ângulos
3. Nomenclatura e Simbologia

2.2. Trigonometria

2.2.1. Raízes

Os rudimentos de uma trigonometria parecem ter surgido no Egito e na Babilônia, a partir de razões entre números e entre lados de triângulos semelhantes. No Egito, isto pode ser observado no Papiro **Ahmes**, conhecido como Papiro **Rhind**^[4], que data de aproximadamente 1650 a.C., contendo 84 problemas, dos quais quatro fazem menção ao **seqt** de um ângulo. Reproduzimos no *Anexo 2.2.1.* um desses problemas.

Ahmes não foi claro ao expressar o significado desta palavra mas, pelo contexto, pensa-se que o **seqt** de uma pirâmide regular seja equivalente, hoje, à cotangente do ângulo **OMV** (vide Figura 1). Na construção das pirâmides era essencial manter uma inclinação constante das faces, o que levou os egípcios a introduzirem o conceito de **seqt**, que representava a razão entre afastamento horizontal e elevação vertical.

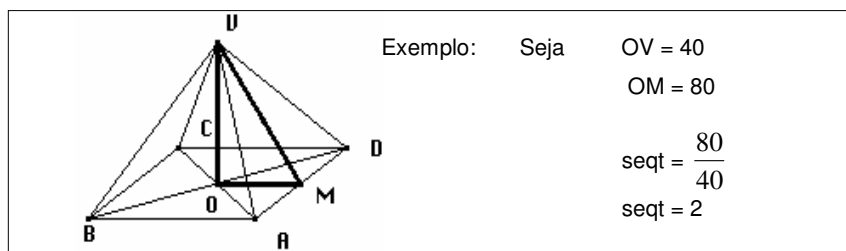


Figura 1 - O Seqt Egípcio

⁴. O Papiro **Ahmes** é o mais extenso documento egípcio em matemática que chegou aos nossos dias. Ele é uma cópia de um antigo papiro do sec XIX a.C. que esteve em poder do escriba **Ahmes**. Foi adquirido no Egito por H. Rhind e por isso é usualmente conhecido como Papiro **Rhind**.

Seria interessante lembrar que as pirâmides egípcias eram geralmente construídas com os ângulos de inclinação **VMO** aproximadamente constante (52°) e **OÂV** com valor em torno de 42° , mas não se sabe, até hoje, o porquê dessa medida.

Além da utilização da trigonometria nas medições das pirâmides, apareceu no Egito (1500 a.C. aproximadamente) a idéia de associar sombras projetadas por uma vara vertical a sequências numéricas, relacionando seus comprimentos com horas do dia (relógios de sol). Poderíamos dizer então que essas idéias estavam anunciando a chegada, séculos depois, das **funções** tangente e cotangente. Os predecessores da tangente e da cotangente, no entanto, surgiram de modestas necessidades de medição de alturas e distâncias.

Como já mencionamos, os primeiros vestígios de trigonometria surgiram não só no Egito, mas também na Babilônia. Os babilônios tinham grande interesse pela Astronomia, por suas ligações com os conceitos religiosos e por suas conexões com o calendário, as épocas de plantio e estações do ano.

Na Astronomia é impossível estudar as fases da Lua, os pontos cardeais e as estações do ano sem usar triângulos, um sistema de unidades de medidas e uma escala. Os babilônios foram excelentes astrônomos e influenciaram os povos posteriores. Construíram no século 28 a.C., durante o reinado de Sargon, um calendário astrológico e elaboraram, a partir do ano 747 a.C, uma tábua de eclipses lunares. Este calendário e estas tábuas chegaram até os nossos dias (Smith, 1958).

Foram os babilônios que escolheram o sistema sexagesimal. É provável que esta escolha estivesse relacionada com a facilidade de dividir o círculo em seis partes iguais, usando o raio como corda. O uso do sistema sexagesimal por esse povo pode ser observado na escrita de frações, cujos denominadores normalmente eram expressos por potências de 60.

Parece ter existido uma relação entre o conhecimento matemático dos egípcios e dos babilônios. Ambos, por exemplo, usavam as frações de numerador **1**. Também é

plausível supor que os povos posteriores tivessem conhecimento da trigonometria primitiva egípcia.

O conceito de ângulo e de como efetuar suas medições é de grande interesse na Trigonometria, por ser fundamental em diversas situações, como na compreensão das razões trigonométricas em um triângulo retângulo (números que dependem dos ângulos agudos do triângulo e não da particular medida dos lados). Neste trabalho acrescentamos uma seção para o estudo do desenvolvimento desse conceito. Aqui ressaltamos apenas que existem evidências de tentativas de medi-los, em datas muito remotas, pois chegaram até nossos dias fragmentos de círculos que parecem ter feito parte de astrolábios primitivos, provavelmente usados com propósito de medições (Smith, 1958).

Uma trigonometria primitiva também foi encontrada no Oriente. Na China, no reinado de Chóu-pei Suan-king, aproximadamente 1110 a.C., os triângulos retângulos eram freqüentemente usados para medir distâncias, comprimentos e profundidades. Existem evidências do conhecimento das relações trigonométricas, mas não se sabem os nomes dados pelos chineses para essas relações.

Na literatura chinesa encontramos uma certa passagem que podemos traduzir por: *“O conhecimento vem da sombra, e a sombra vem do gnômon”*, o que mostra que a trigonometria plana primitiva já era conhecida na China no segundo milênio a.C..

O conceito de ângulo e a forma de medi-lo também surgiram na China. Assim como aconteceu com os demais povos antigos, em razão do interesse astronômico dos chineses, fez-se necessário medir os ângulos, mas não sabemos como eram feitas as medições e quais as unidades de medida usadas.

No mundo Ocidental, o saber egípcio foi seguido pelo dos gregos. É reconhecido que, se os egípcios foram seus mestres, não tardou para que estes fossem superados pelos discípulos. A Matemática teve então um grande desenvolvimento, e a civilização grega passou a servir de preceptora a todas as outras nações.

2.2.2. A trigonometria e as funções na Grécia

Segundo o historiador **Heródoto** (490 - 420 a.C.), foram os gregos que deram o nome **gnômon** ao relógio de sol que chegou até eles através dos babilônios, mas também já havia sido utilizado pelos egípcios antes de 1500 a.C..

O mais antigo gnômon de que temos conhecimento e que chegou até nossos dias, está no museu de Berlim (Eves, 1995). Ele evidencia e reforça a hipótese de que a trigonometria foi uma ferramenta para observação dos fenômenos astronômicos, uma vez que a documentação relativa a esse período grego é praticamente inexistente.

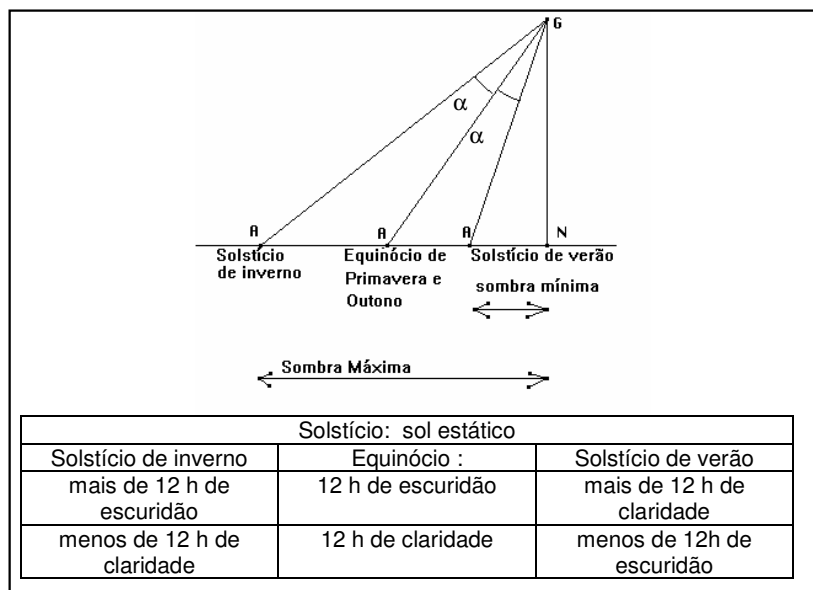


Figura 2 : O Gnômon

O gnômon era uma vareta que se espetava no chão, formando com ele um ângulo de 90° , e o comprimento de sua sombra era observado, num horário determinado: meio dia.

A vareta **GN** era chamada pelos gregos de **Gnômon**. Ela era erguida e a sombra **AN** observada. No solstício de verão, quando o sol está mais afastado do sul, a sombra é maior ao meio dia. No solstício de inverno ela é menor, pois o sol está mais afastado do norte.

Uma observação dos limites da sombra permitia medir a duração do ano. O movimento lateral diário do ponto **A** permitia medir a duração do dia, enquanto o movimento ao meio dia ao longo de **AN** dizia respeito à medição do tempo anual.

Como o tamanho do gnômon era constante, ou seja, usava-se sempre a mesma vareta, na mesma posição, o comprimento de **AN** ao meio dia variava com o ângulo

A.

Para nós isto significa uma colocação de **AN**, ou $\frac{AN}{GN}$ como uma “função” do ângulo **A**, nos dias de hoje denominada cotangente. Porém, não temos nenhum vestígio do nome, no período do qual estamos falando, mas apenas o **seqt**, conforme já mencionamos.

Sabemos que os diversos ramos da Matemática não se formaram nem evoluíram da mesma maneira e ao mesmo tempo, mas sim gradualmente. O desenvolvimento da trigonometria está intimamente ligado ao da geometria. Neste campo, a Grécia produziu grandes sábios; entre eles **Thales** (625 - 546 a.C.), com seus estudos de semelhança que embasam a trigonometria, e seu discípulo **Pitágoras** (570 - 495 a.C.). Conjectura-se que este último tenha feito a primeira demonstração do teorema que leva seu nome: *“Em todo triângulo retângulo a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos”*. Deste teorema deriva a relação fundamental da trigonometria.

A Escola Pitagórica, fundada no século V a.C., foi responsável por descobertas na acústica, elaborando uma lei de intervalos musicais. Essa lei relacionava os diapasões de notas emitidas por cordas distendidas, sob tensões iguais, aos comprimentos das cordas. Podemos tomar a lei dos intervalos musicais como um prenúncio do aparecimento das funções seno e cosseno no osciloscópio do futuro, para se estudar o som (Bell, 1945).

A primeira amostra documentada de contribuição grega para o estudo da trigonometria apareceu por volta de 180 a.C. quando **Hipsícles**, influenciado pela cultura babilônica, dividiu o zodíaco em 360 partes. Essa idéia foi posteriormente generalizada por **Hiparco** para qualquer círculo (Eves, 1995).

Por volta do ano 200 a.C. os astrônomos gregos estavam muito interessados em calcular a distância entre dois pontos da superfície terrestre e também o raio da

Terra. Surgiu, então a figura de **Eratóstenes de Cirene** (276 -196 a.C.), contemporâneo de **Arquimedes** (287-212 a. C.) e **Aristarco** (310-230 a. C.). Deve-se a ele a mais notável medida da Antiguidade para a circunferência da Terra, usando semelhança de triângulos e razões trigonométricas, o que o levou a perceber a necessidade de relações mais sistemáticas entre ângulos e cordas.

Apresentamos, no *Anexo 2.2.2.*, sua idéia e a forma como foram realizados os cálculos. Salientamos que, para tornar possível o trabalho de **Eratóstenes**, foi determinante na época o conhecimento do conceito de ângulo e de como medi-lo. O tratado *“Sobre a medida da Terra”* resume as conclusões a que ele chegou mas, infelizmente, esses escritos se perderam e tudo o que conhecemos sobre o assunto chegou até nós pelos relatos de **Ptolomeu** e **Heron**.

Concluimos que na Grécia, durante os dois séculos e meio compreendidos entre Hipócrates e Eratóstenes, a trigonometria esteve “engatinhando”, o que nos leva a concordar com a afirmativa de Boyer (1974),

“de Hipócrates a Eratóstenes os gregos estudaram as relações entre retas e círculos e as aplicaram na Astronomia mas disso não resultou uma trigonometria sistemática” (pág. 118).

Apareceu então, na segunda metade do século dois a.C., um marco na história da trigonometria: **Hiparco de Nicéia** (180-125 a.C.). Fortemente influenciado pela matemática da Babilônia, ele acreditava que a melhor base de contagem era a 60. Não se sabe exatamente quando se tornou comum dividir a circunferência em 360 partes, mas isto parece dever-se a Hiparco, assim como a atribuição do nome arco de 1 grau a cada parte em que a circunferência ficou dividida. Ele dividiu cada arco de 1° em 60 partes obtendo o arco de 1 minuto. Sua trigonometria baseava-se em uma única “**função**”, na qual a cada arco de circunferência de raio arbitrário, era associada a respectiva corda.

Hiparco construiu o que foi presumivelmente a primeira tabela trigonométrica com os valores das cordas de uma série de ângulos de 0° a 180° , em cuja montagem utilizou interpolação linear. Ele observou que num dado círculo a razão do arco para a corda diminui quando o arco diminui de 180° para 0° . Resolveu então associar a cada corda de um arco o ângulo central correspondente, o que representou um grande avanço na Astronomia e por isso ele recebeu o título de “**Pai da Trigonometria**”.

Em linguagem moderna, esse resultado seria: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$

Hiparco foi uma figura de transição entre a astronomia babilônica e o grande **Cláudio Ptolomeu**, (Klaudius Ptolemaios) autor da mais importante obra da trigonometria da Antiguidade, surgida no século dois de nossa era, em Alexandria, a “*Syntaxis Matemática*”, composta de treze volumes. Ela ficou conhecida como **Almagesto**, que significa em árabe “A maior” = Al magest, pois os tradutores árabes a consideravam a maior obra existente na época, em Astronomia. “*As obras de Autólico, Euclides, Ipsicle e Aristóteles em Astronomia, juntas formavam a Coleção Menor de Astronomia*”. A obra de Ptolomeu era a Coleção Maior: “**μεγιστη**”, e as duas eram indispensáveis para se entender o legado astronômico da Antiguidade grega (Loria,1982, pág. 85).

O Almagesto é um marco, um modelo de Astronomia que perdurou até **Copérnico**, no século XVI.

2.2.2.1. Almagesto

Um estudo histórico sugere que Ptolomeu, na verdade, sistematizou e compilou no Almagesto uma série de conhecimentos bastante difundidos em sua época e que a maior parte da obra é baseada no trabalho do astrônomo e matemático grego Hiparco, cujos livros se perderam. Isto aparece num comentário sobre trabalhos mais antigos, de **Teon de Alexandria**, que viveu dois séculos após e foi um dos matemáticos que pesquisaram sobre as descobertas dos gregos anteriores. Ele menciona que Hiparco escreveu doze livros sobre cálculo de cordas, incluindo uma tábua de cordas.

O Almagesto sobreviveu e por isso temos suas tabelas trigonométricas e também uma exposição dos métodos usados nas construções, o que é de grande importância para nós, visto que tanto daquela época se perdeu. Como disse Kennedy (1992) :

“Para os matemáticos o Almagesto tem interesse devido às identidades trigonométricas que Ptolomeu divisoou para auxiliá-lo a reunir dados para sua tabela de cordas” (pág.28 - cápsula 1: Larry Mossburg).

Dos treze livros que compõem o Almagesto, o primeiro contém as informações matemáticas preliminares, indispensáveis na época, para uma investigação dos fenômenos celestes, tais como proposições sobre geometria esférica, métodos de

cálculo, uma tábua de cordas e explicações gerais sobre os diferentes corpos celestes. Os demais livros são dedicados à Astronomia.

Ptolomeu desenvolveu o estudo da trigonometria nos capítulos dez e onze do primeiro livro do **Almagesto**. O capítulo 11 consiste numa tabela de cordas e o capítulo 10 explica como tal tabela pode ser calculada. Na verdade, não existe no **Almagesto** nenhuma tabela contendo as “funções” seno e cosseno, mas sim a função corda do arco x , ou **crd x** , embora naturalmente estes termos não apareçam.

A “função” corda do arco x era definida como sendo o comprimento da corda que corresponde a um arco de x graus em um círculo cujo raio é 60. Assim, na tabela de cordas de Ptolomeu existiam três colunas: a primeira listando os arcos, a segunda, o comprimento da corda correspondente a cada arco e a terceira que dava o aumento médio de $\text{crd } x$ correspondente a um acréscimo de um minuto em x . Esta coluna era usada para interpolações, isto é, para achar o valor de $\text{crd } x$ se x estivesse entre duas entradas na coluna de arcos.

Em resumo no **Almagesto** temos:

a — Uma tabela mais completa que a de Hiparco, com ângulos de meio em meio grau, de 0° a 180°

b — O uso da base 60 (com a circunferência dividida em 360 graus e o raio em 60 partes e frações sexagesimais) não só para expressar ângulos e sim para qualquer tipo de cálculo, com exceção dos de medida de tempo, para os quais só foi introduzida a base 60 por Teon de Alexandria (± 390 d.C.).

c — O Teorema de Ptolomeu:

Se ABCD é um quadrilátero convexo inscrito num círculo, então a soma dos produtos dos lados opostos é igual ao produto das diagonais.

A partir desse resultado, operando com as cordas dos arcos, Ptolomeu chegou a um equivalente das fórmulas de seno da soma e da diferença de dois arcos, isto é $\text{sen}(a + b)$ e $\text{sen}(a - b)$. Especialmente a fórmula para a corda da diferença foi usada por ele para a construção da tabela trigonométrica.

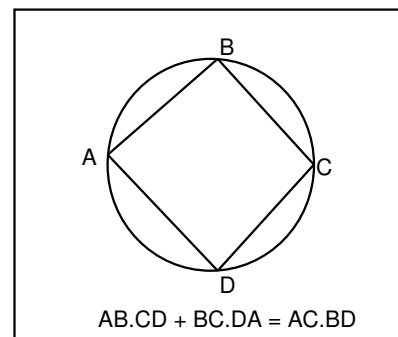


Figura 3: Teorema de Ptolomeu

d — O uso explícito de um equivalente, também usando cordas, do seno do arco metade: $\text{sen}^2(\theta/2) = \frac{1}{2}(1 - \cos \theta)$.

Em nosso entender, a mais importante contribuição do **Almagesto** foi tornar evidente a possibilidade de uma descrição quantitativa dos fenômenos naturais, pela Matemática, já que ele desenvolveu, como muito bem escreveu Aaboe (1984):

“...não somente seus modelos astronômicos, mas também as ferramentas matemáticas, além da geometria elementar, necessárias para a Astronomia, entre elas a trigonometria.(pág. 128). Mais do que qualquer outro livro, o Almagesto contribuiu para a idéia tão básica nas atividades científicas, de que uma descrição quantitativa matemática dos fenômenos naturais, capaz de fornecer predições confiáveis, é possível e desejável” (pág. 129).

Como o centro de nossas atenções é a trigonometria, propomo-nos a investigar aqui apenas a gênese das funções trigonométricas. Isso significa que o desenvolvimento do conceito de função será mencionado rapidamente. Um estudo histórico mais detalhado de funções pode ser encontrado nos trabalhos de Mendes (1994), Schwarz (1995) e Oliveira (1997).

Na Grécia Antiga o conceito de função não foi desenvolvido. Apenas Aristóteles apresentou idéias sobre variações de funções e quantidades variáveis, e Arquimedes e Apolônio representavam as cônicas por meio de “**Symptoms**”, na linguagem das proporções ou da álgebra geométrica. O “Symptom” de uma curva era a condição para que um ponto pertencesse a ela, estabelecendo uma dependência funcional. (Kennedy,1994).

A Matemática da Antiguidade Clássica não criou a noção geral de quantidade variável ou de função e concluímos com Youschkevitch (1981) que os métodos quantitativos de pesquisa, usados em Astronomia, tinham como objetivo representar, em tabelas, relações entre conjuntos discretos de quantidades dadas, mas sem a preocupação de generalização.

2.2.3. A contribuição dos hindus

No século IV da nossa era, a Europa Ocidental entrou em crise com as invasões dos bárbaros germânicos e com a queda do Império Romano. O centro da cultura começou a se deslocar para a Índia, que revolucionou a trigonometria com um conjunto de textos denominados **Siddhanta**, que significa sistemas de Astronomia.

2.2.3.1. Siddhanta

O que chegou até nós foi o **Surya Siddhanta**, que quer dizer Sistemas do Sol e é um texto épico, de aproximadamente 400 d.C, escrito em versos e em sânscrito. Os hindus diziam que seu autor texto foi Surya, o deus do Sol. Esta obra contém poucas explicações e nenhuma prova pois, afinal, tendo sido escrita por um Deus, seria muita pretensão exigir provas. (Boyer, 1974).

A importância do **Surya**, para nós, é que ele abriu novas perspectivas para a Trigonometria por não seguir o mesmo caminho de Ptolomeu, que relacionava as cordas de um círculo com os ângulos centrais correspondentes. Nas aplicações da “função” corda, na Astronomia, era necessário dobrar o arco antes de usá-lo na tábua de cordas. Naturalmente, era mais conveniente ter uma tábua na qual o próprio arco fosse a variável independente. No Surya, a relação usada era entre a metade da corda e a metade do ângulo central correspondente, chamada por eles de **jiva**. Isto possibilitou a visão de um triângulo retângulo na circunferência, como na Figura 4.

Definiam o **jiva** como sendo a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa.

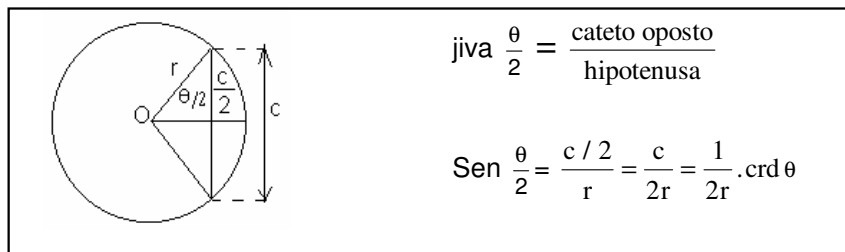


Figura 4: O “Jiva” Hindu

A metade da corda dividida pelo raio do círculo é o seno da metade do arco (ou da metade do ângulo central correspondente a todo o arco).

Com os hindus, as principais “funções” trigonométricas foram introduzidas e os métodos de tabulação se aperfeiçoaram, particularmente os de interpolação quadrática e linear.

Por volta de 500 d.C., o matemático hindu **Aryabhata** já calculava semi cordas e usava também o sistema decimal, desenvolvido aproximadamente em 600 d.C. Ao surgirem, os numerais hindus continham nove símbolos e não havia símbolo para o zero.

Quando os hindus introduziram os conceitos de semi corda e de seno, demonstraram algumas identidades, e encontramos em **Varahamihira**, no ano 505 d.C., o equivalente verbal de $\text{sen}^2 \theta + \text{cos}^2 \theta = 1$.

Após os hindus, foram os árabes e os persas a dar sua contribuição à trigonometria.

2.2.4. A Trigonometria dos Árabes e Persas

O Império Muçulmano ou Árabe, além da expansão econômica, viveu extraordinário avanço nos diversos campos das artes e da ciência do fim do século VIII até o século XI, com destaque ao século IX. A expansão do saber muçulmano deveu-se, sobretudo, à difusão da língua árabe, que substituiu o grego na condição de língua internacional. O emprego do árabe permitiu a fixação e a preservação de obras antigas, que foram traduzidas e assim difundidas entre os intelectuais muçulmanos.

Podemos dizer que a influência árabe começou com a fundação da Escola de Bagdad, no século IX, e um dos seus maiores expoentes foi o príncipe da Síria Mohamed-ben-Geber, conhecido como **AL Battani** (aproximadamente 850 a 929 d.C.), ou **Albategnius**, nas traduções latinas, chamado o **Ptolomeu de Bagdad**.

Os estudos de **AL Battani** ficaram entre o Almagesto e Siddhanta e foi por sua influência que a trigonometria hindu foi adotada pelos árabes, principalmente a partir de sua genial idéia de introduzir o círculo de raio unitário e com isso demonstrar que a razão **jiva** é válida para qualquer triângulo retângulo, independentemente do valor da medida da hipotenusa.

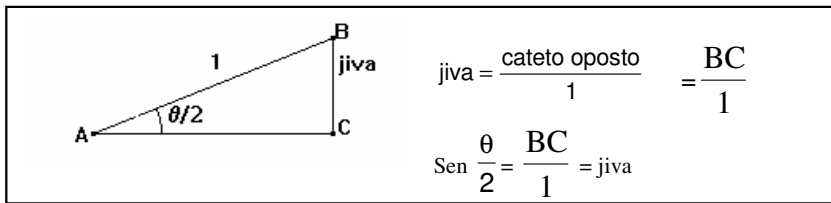


Figura 5: A Idéia do Raio 1 de AL Battani

Se um triângulo retângulo tem um ângulo agudo $\frac{\theta}{2}$ então, quaisquer que sejam as medidas do cateto oposto e da hipotenusa, podemos afirmar que: $\Delta ABC \approx \Delta AB^1C^1$

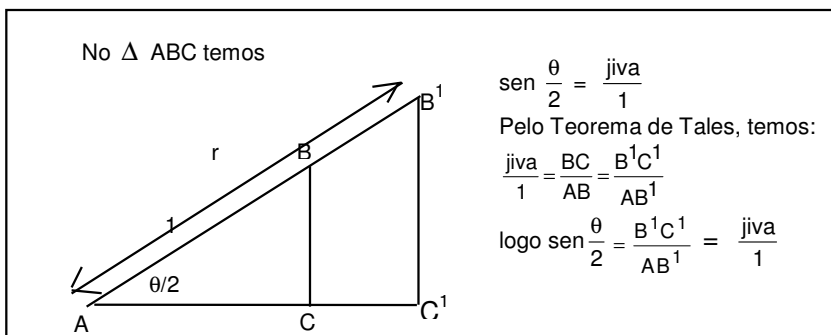


Figura 6: Fórmula Usada para Construir a Tabela de Al Battani

Com esta fórmula pôde-se construir uma tábua, de $\frac{1}{4}$ a 90 graus, variando de $\frac{1}{4}$ em $\frac{1}{4}$ de graus, ou seja uma tabela de senos, apesar deste nome não ter sido usado para designá-la. Al-Battani estava interessado em calcular a altitude do sol, para isso foi necessário usar as razões trigonométricas e construir tábuas mais precisas que as existentes na época.

Depois de Al-Battani, digno de nota entre os matemáticos árabes foi **Abû'l Wêfa** que, em 980, iniciou uma organização, uma sistematização de provas e teoremas de trigonometria.

Destacamos também o astrônomo Persa **Nasîr ed-dên al-Tûsî** autor, em 1250, do primeiro trabalho no qual a trigonometria plana apareceu como uma ciência por ela própria, desvinculada da Astronomia. Isto seria retomado na Europa, no século

XV, quando Regiomontanus estabeleceu a trigonometria como um ramo da Matemática.

Com o declínio da Escola de Bagdad, o centro das atividades intelectuais deslocou-se para o sul da Europa, na Península Ibérica, e com ele o estudo da trigonometria, particularmente nos triângulos esféricos necessários aos estudos astronômicos. A cidade de Toledo tornou-se o mais importante centro da cultura, a partir de 1085, quando foi libertada pelos cristãos do domínio mouro. Isto ocorreu porque para ela afluíram os estudiosos ocidentais, visando a adquirir o saber muçulmano. O século XII na História da Matemática foi, então, um século de tradutores dos quais citamos Platão de Tivoli, Gerardo de Cremona, Adelardo de Bath e Robert de Chester . Com isso, a Europa teve acesso à matemática árabe e à herança grega que havia sido conservada, na medida do possível, por eles. (Struik, 1992).

2.2.5. A Influência do Conhecimento Árabe sobre os Europeus

Os mais importantes escritores foram os astrônomos Ibrâhîm ibn Yahyâ al Naqqâsh, (conhecido como Abû Ishâq ou Ibn al-Zarqâla ou, nas traduções latinas como **Arzachel**, e que viveu em Córdoba) autor de um conjunto de tábuas trigonométricas em 1050, e Jabir ibn Aflah (conhecido como Jeber ibn Aphla, tendo vivido em Sevilha), cujos estudos astronômicos de 1145 se mostraram tão interessantes que, séculos mais tarde (1543), foram publicados em Nuremberg.

O matemático europeu mais habilidoso do século XIII foi **Fibonacci** (1170-1250), por ter estudado no norte da África e depois viajado pelo Oriente como mercador, ele sofreu grande influência dos árabes. Sua obra "*Practica Geometriae*", de 1220, é uma aplicação da trigonometria árabe na Agrimensura.

O rei Alfonso X de Castela ordenou, no ano 1250, a estudiosos (cristãos, mouros e judeus) de Toledo que traduzissem os livros de Astronomia e modernizassem as tábuas trigonométricas árabes. Em 1254 foram concluídas as

Tábuas Afonsinas, que junto com *Os Libros del Saber de Astronomia* foram considerados de grande valia, uma vez que “a cultura astronômica preservada na Península Ibérica foi o esteio da arte portuguesa de navegar, no século XV” (Serrão, pág. 49,1971).

2.2.6. A Trigonometria na Europa a partir do século XIV

Na Europa do século XIV alguns importantes passos foram dados para o desenvolvimento da Matemática. Pela primeira vez, as noções de quantidades variáveis e de função são expressas e, tanto na Escola de Filosofia Natural do Merton College de Oxford quanto na Escola de Paris, chega-se à conclusão de que a *Matemática é o principal instrumento para o estudo dos fenômenos naturais*. Com o início do estudo da velocidade instantânea ou pontual e a atenção especial dada ao movimento, tornou-se necessário desenvolver um suporte matemático.

Paralelamente ao desenvolvimento da trigonometria, que já vinha ocorrendo desde o século XI com a retomada do conhecimento árabe, ocorreu o desenvolvimento das funções. Neste campo surgiu Nicole Oresme (1323 -1382) com seu *“Treatise on the configuration of Qualities and Motions”*, no qual introduziu a representação gráfica que explicita a noção de funcionalidade entre variáveis (no caso velocidade por tempo). Seu trabalho influenciou Galileu (1564-1642) e Descartes (1596-1650) nos séculos XVI e XVII. Com os estudos de Oresme, começou a se desenvolver o conceito de função.

No século XIV, Purbach, na Inglaterra, retomou a obra de Ptolomeu e computou uma nova tábua de senos, muito difundida entre os estudiosos europeus. Purbach foi o mestre de Regiomontanus (1436-1475), um dos maiores matemáticos do século XV, cujo trabalho teve grande importância, estabelecendo a Trigonometria como uma ciência independente da Astronomia.

Regiomontanus escreveu um *“Tratado sobre triângulos”*, em cinco livros, contendo uma trigonometria completa. A invenção posterior dos logaritmos e alguns dos teoremas demonstrados por Napier (1550-1617) mostram que a Trigonometria de Regiomontanus não diferia basicamente da que se faz hoje em dia. No *“Tratado”* ele calculou novas tábuas trigonométricas, aperfeiçoando a de senos de Purbach, e introduziu na trigonometria européia o uso das tangentes, incluindo-as em suas tábuas. Podemos dizer que foi ele quem lançou as fundações para os futuros trabalhos na trigonometria plana e esférica.

Copérnico (1473-1543) também contribuiu ao completar, em 1520, alguns trabalhos de Regiomontanus, que incluiu em um capítulo de seu *“De Lateribus et*

Angulis Triangulorum”, publicado separadamente por seu discípulo Rhaeticus em 1542.

Com o advento da imprensa, a cultura se difunde e, a partir daí, nenhum grupo nacional conserva a liderança. Na Antiguidade foi a Grécia a sobrepujar os outros povos do Ocidente, na Idade Média o Mundo Árabe mas, do século XV em diante, com o desenvolvimento do Racionalismo, a atividade matemática desloca-se repetidamente para diversos países.

O primeiro trabalho impresso em trigonometria provavelmente foi a “*Tabula Directionum*” de Regiomontanus, publicado em Nuremberg certamente antes de 1485, pois a segunda edição data deste ano, em Veneza.

As seis funções trigonométricas foram definidas como funções do ângulo, em vez de funções do arco, e subentendidas como razões, pela primeira vez, no “*Canon Doctrinae Triangulorum*” de Joachim Rhaeticus em Leipzig, 1551, embora ele não tenha dado nomes para seno, cosseno ou cossecante, exceto *perpendicularum*, *basis* e *hypotenusa*.

Rhaeticus (1514-1576) retomou, um século depois, as tábuas de Regiomontanus de 1464, com maior rigor nos cálculos. Aumentou a precisão para onze casas decimais e os senos, cossenos, tangentes e secantes foram calculados de minuto em minuto para os arcos do primeiro quadrante e de dez em dez segundos para o arco de 1º. Ele foi o primeiro a adotar a organização das tábuas em semiquadrantes, dando os valores dos senos, cossenos e tangentes de ângulos até 45º e completando a tabela com o uso da igualdade $\sin x = \cos (\pi/2 - x)$. Deve-se também a Rhaeticus a introdução das secantes na trigonometria européia e os cálculos do $\sin(n\Phi)$ em termos de $\sin \Phi$, que foram retomados e aprimorados por Jacques Bernoulli, em 1702.

Neste relato histórico não poderíamos deixar de mencionar Viète (1540-1603), pois foi ele quem adicionou um tratamento analítico à trigonometria, em 1580. Ele foi o primeiro matemático a usar letras para representar coeficientes gerais, o que

representou grande progresso no campo da Álgebra. Também construiu tábuas trigonométricas e calculou o sen 1' com treze casas.

Viète iniciou o desenvolvimento sistemático de cálculo de medidas de lados e ângulos nos triângulos planos e esféricos, aproximados até minutos, e com a ajuda de todas as seis funções trigonométricas. Além disso, foi ele que introduziu métodos gerais de resolução em matemática. É dele a idéia de decompor em triângulos retângulos os triângulos oblíquos, para determinar todas as medidas dos seus lados e ângulos. Isto está em sua obra "*Canon Mathematicus*". No livro "*Variorum de rebus mathematicis*"

aparece um equivalente da nossa lei das tangentes: $\frac{\text{tg}(A+B)}{\text{tg}(A-B)} = \frac{a+b}{a-b}$, com A e B ângulos e **a** e **b** os arcos respectivos. Na verdade, esta relação só foi publicada pelo matemático dinamarquês Thomas Fincke, no seu "*Geometria Rotundi*", em Basel 1583, apesar de ser devida a Viète.

A figura seguinte na trigonometria foi Pitiscus que publicou um tratado, em 1595, no qual corrigiu as tábuas de Rhaeticus e modernizou o tratamento do assunto. A palavra **trigonometria** aparece pela primeira vez, como título de um livro seu.

Seguindo Pitiscus, destacamos o britânico Napier, que estabeleceu regras para triângulos esféricos, que foram amplamente aceitas, enquanto sua maior contribuição, os logaritmos, ainda estavam sendo analisados e não eram reconhecidos como válidos por todos. Suas considerações sobre os triângulos esféricos foram publicadas postumamente no "*Napier Analogies*", do "*Constructio*". (Edinburgh, 1619).

Outro grande expoente em trigonometria foi Oughtred. Em seu trabalho, de 1657, preocupou-se em desenvolvê-la do ponto de vista simbólico. No entanto, como o simbolismo algébrico estava pouco avançado para tornar isto possível, a idéia não foi aceita até que Euler exercesse sua influência neste sentido no século XVIII.

John Newton (1622-1678) publicou em 1658 o tratado "*Trigonometria Britannica*" que, embora baseado nos trabalhos de Gellibrand e outros escritores, era o mais completo livro do tipo que havia surgido em seu tempo. Newton e Gellibrand

anteciparam a tendência atual de introduzir divisões centesimais do ângulo nas tábuas trigonométricas.

O próximo importante passo em trigonometria foi dado por John Wallis (1616-1703) ao expressar fórmulas usando equações em vez de proporções, e por trabalhar com séries infinitas.

A contribuição à trigonometria de Sir Isaac Newton (1642-1727) foi grande pois, paralelamente aos seus estudos de cálculo infinitesimal apoiados fortemente na geometria do movimento, trabalhou com séries infinitas, tendo expandido $\arcsen x$ em séries e, por reversão, deduzido a série para $\sen x$. Além disso, comunicou a Leibniz a fórmula geral para $\sen (nx)$ e $\cos (nx)$ tendo, com isso, aberto a perspectiva para o $\sen x$ e o $\cos x$ surgirem como números e não como grandezas, sendo Kastner, em 1759, o primeiro matemático a definir as funções trigonométricas de números puros.

Finalizando, vale mencionar que Thomas-Fanten de Lagny foi o primeiro matemático a evidenciar a **periodicidade** das funções trigonométricas, em 1710, e a usar a palavra “*goniometry*”, em 1724, embora mais num sentido etimológico do que como mera medida de ângulo, como agora é o caso.

Acrescentamos no *Anexo 2.2.6.* a evolução das Tábuas trigonométricas.

2.2.7. A Trigonometria Incorporada pela Análise Matemática

A trigonometria toma a sua forma atual quando Euler (1707-1783) adota a medida do raio de um círculo como unidade e define funções, aplicadas a um número e não mais a um ângulo como era feito até então, em 1748. A transição das razões trigonométricas para as funções periódicas começou com Viète no século XVI, teve novo impulso com o aparecimento do Cálculo Infinitesimal no século XVII e culminou com a figura de Euler.

Euler foi “*o construtor de notações mais bem sucedido de todos os tempos*” (Boyer,1974 pág. 326). Na obra “*Comentários de Petersburgo para 1734-1735*”, introduziu a letra grega π para a razão entre comprimento e diâmetro da circunferência e usou a notação $f(x)$ para a função de x que, embora já tivesse surgido no “*Synopsis Palmariorum Matheseos*” de William Jones, só foi difundida a partir do uso por Euler.

Uma idéia genial de Euler foi criar a função E, que denominaremos função de Euler. Ela associa a cada número um ponto de um círculo C_1 unitário e centrado na origem do plano cartesiano. Seu domínio é o conjunto \mathfrak{R} e o contra domínio é C_1 .^[5] $E: \mathfrak{R} \rightarrow C_1$ é uma função que, a cada $x \in \mathfrak{R}$, associa um ponto $P \in C_1$. $P = (a, b)$ pertence a C_1 se e somente se $a^2 + b^2 = 1$ (Teorema de Pitágoras).

Como essa função faz a correspondência entre cada número x e os pontos do círculo C_1 , ao número zero corresponde o ponto $A = (1,0)$ e, dado $x \in \mathfrak{R}$, $x > 0$, mede-se, a partir desse ponto A, um arco de comprimento x , no sentido anti - horário. A extremidade do arco é um ponto $P = E(x)$. Se $x < 0$, mede-se, a partir de A, um arco de comprimento x , no sentido horário, e se obtém o ponto $P = E(x)$ correspondente. A função $E: \mathfrak{R} \rightarrow C_1$ consiste em envolver a reta \mathfrak{R} como se fosse um fio inextensível sobre o círculo C_1 que, por sua vez, é imaginado como um carretel.

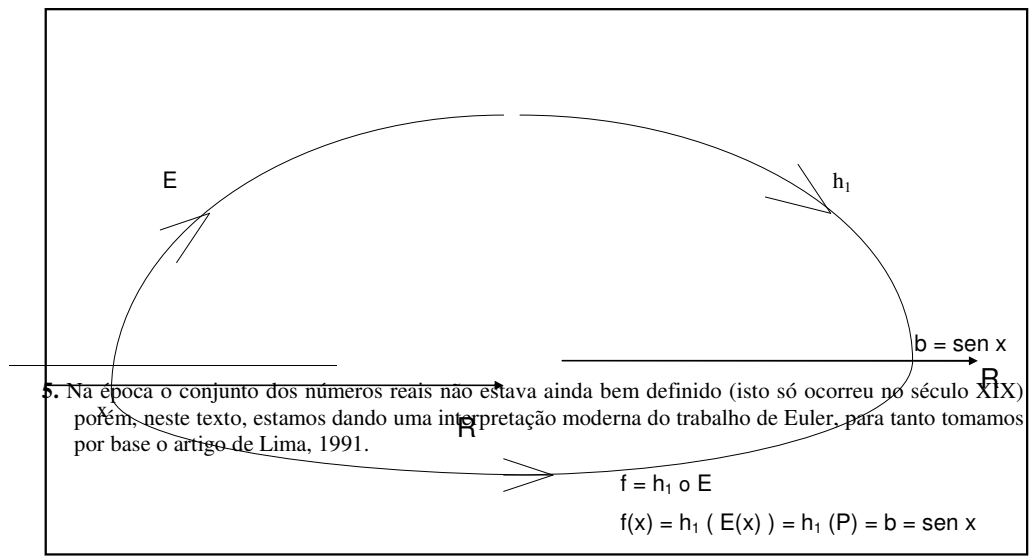
Definindo-se as funções:

$h_1: C_1 \rightarrow \mathfrak{R}$ por $h_1(P(a,b)) = a$ e $h_2: C_1 \rightarrow \mathfrak{R}$ por $h_2(P(a,b)) = b$,
 e tomando-se as compostas: $f = h_1 \circ E$ e $g = h_2 \circ E$,
 podem-se definir as funções seno e cosseno de um número real x e não mais de um **ângulo**, como era anteriormente necessário.

Dado $x \in \mathfrak{R}$, a ele se associa um ponto P, do círculo, sendo: $P = E(x) = (a,b)$.

Considerando **$a = \cos x$** e **$b = \text{sen } x$** definimos: $f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ e $g: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$
 $f(x) = \text{sen } x$ $g(x) = \cos x$

Sendo $\cos x$ a abscissa e $\text{sen } x$ a ordenada de $P = E(x)$. Vide figura abaixo.



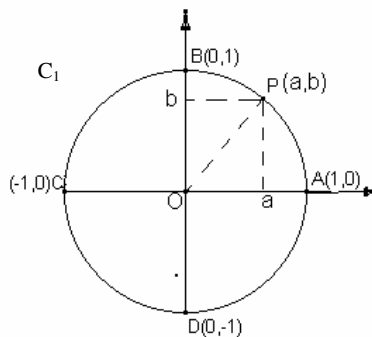


Figura 7: Associação entre um Número Real e seu Seno através do Ponto Correspondente no Ciclo
 Como muito bem falou Euler (199).

“A função de Euler $E: \mathbb{R} \rightarrow C_1$, que possibilita encontrar $\text{sen } x$ e $\text{cos } x$, como função de uma variável real x , abriu para a trigonometria as portas da Análise Matemática e de inúmeras aplicações às Ciências Físicas” (pág. 35).

A noção de função como sendo fundamental à Análise e o tratamento estritamente analítico das funções trigonométricas estão no livro de Euler “*Introductio in Analysin Infinitorum*”, de 1748, considerado a obra chave da Análise Matemática. Nele, o seno deixou de ser uma grandeza e adquiriu o status de número, não sendo mais necessariamente visto como um segmento, mas também como um número obtido pela ordenada de um ponto de um círculo unitário, ou o número definido pela série:

$$\text{sen } x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad \text{Ainda, foi ele quem mostrou que: } \text{sen } x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad \text{e}$$

$$\text{cos } x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \text{onde } i \text{ é a unidade imaginária, possibilitando definir as funções seno e cosseno a partir dessas relações, inserindo-as no campo dos números complexos.}$$

Enfim a trigonometria, no início uma auxiliar da Agrimensura e da Astronomia, tornou-se primeiramente autônoma e por fim transformou-se em uma parte da Análise Matemática, expressando um conjunto de relações entre números complexos, sem

necessidade de recorrer a arcos ou ângulos. Estes, entretanto foram tão importantes na evolução dos conceitos trigonométricos que a eles dedicamos a próxima seção.

2.3. Ângulos

Um estudo do desenvolvimento da trigonometria ficaria incompleto caso não analisasse a evolução das concepções, definições e medidas angulares. Nosso propósito é proceder a essa análise.

Não sabemos exatamente quando e onde o conceito de ângulo emergiu pela primeira vez. Segundo Kline (1953), pode ter surgido em tempos muito remotos, quando o homem observou a figura formada pelo braço, o antebraço e o cotovelo ou então pela perna, coxa e joelho. Apoiando-se nesta visão, ele cita o uso das palavras “**braço**” de um ângulo, em inglês, e “**perna**” de um ângulo, em alemão.

O conceito de ângulo foi usado pelos babilônios para resolver problemas práticos e pelos egípcios para as mensurações das pirâmides e de suas fazendas, constantemente inundadas pelo Nilo. Foi, porém, na civilização grega, quando o conceito de ângulo já estava arraigado não só no plano mas também em sólidos e em superfícies curvas, que surgiram as primeiras tentativas de defini-lo.

2.3.1. Definições de Ângulo

A maioria das antigas definições gregas tentava abranger todos os tipos de ângulo. Citamos no *Anexo 2.3.1* algumas delas, coletadas em “Os Treze Livros dos Elementos de Euclides”, de Heath (1956). Aqui mencionamos as mais avançadas e amplamente aceitas, que foram as de Euclides (aproximadamente 300 a.C.).

*“Um **ângulo plano** é a inclinação de uma em relação à outra de duas linhas no plano que se encontram e que não estão numa mesma reta”.*

*“Quando as linhas contendo o ângulo estão em linha reta, ele é chamado **retilíneo**” (pág.176 - definições 8 e 9).*

A frase “estão em linha reta” modernamente é estranha, pois a definição se refere tanto a ângulos formados por **curvas** como por **linhas retas**. O nosso ângulo plano era na época chamado de ângulo retilíneo.

Os gregos discutiam se ângulo seria uma quantidade, uma qualidade ou uma relação. Para Proclus^[6], ângulo englobaria as três, pois “*necessita da quantidade envolvida na magnitude, da qualidade, que é dada por suas formas e, por último, da relação que subsiste entre as retas ou planos que o limitam*” (Kennedy, 1992 pág. 31).

Eles se preocuparam em definir e também em classificar ângulos, sendo das mais antigas a definição e classificação de Proclus. Para ele ângulo era definido como:

“linha circunferência”, quando formado por uma linha reta e um arco de círculo, e como “linha convexa”, quando formado por uma linha reta e um arco circular com convexidade externa” (Heath, *Ibid*, pág. 178).

A classificação de Proclus, está resumidamente apresentada a seguir:

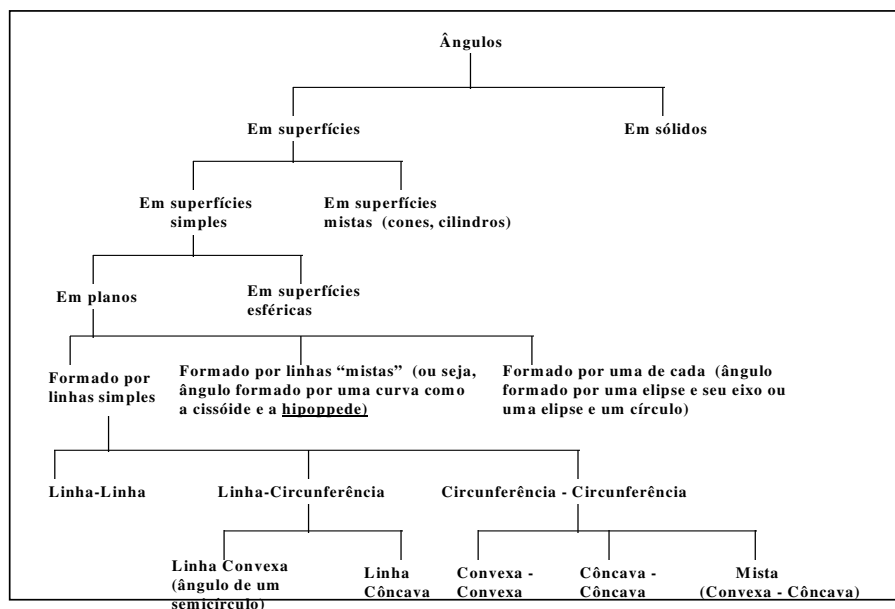


Figura 8: Classificação de Proclus para Ângulos.

6. Geômetra que viveu no século V, em Alexandria, e escreveu comentários sobre os Elementos. Grande parte do que sabemos hoje sobre a geometria anterior a Euclides se deve a Proclus.

Analisando a evolução do conceito e das definições de ângulo, notamos que é citado, com frequência, na literatura (Freudenthal, 1976; Heath, 1956; Close, 1982) que não há **uma** definição universalmente aceita para ângulo, mas que existem diversas definições em uso. Em 1893 o alemão Schotten as classificou em três categorias, representando as visões de ângulo como :

- 1) A DIFERENÇA DE DIREÇÕES ENTRE DUAS LINHAS RETAS.
- 2) A ROTAÇÃO NECESSÁRIA PARA TRAZER UM DE SEUS LADOS DESDE SUA POSIÇÃO INICIAL, ATÉ O OUTRO LADO, PERMANECENDO NO MESMO PLANO.
- 3) A PORÇÃO DO PLANO ENTRE DUAS SEMI-RETAS COM ORIGEM EM UM PONTO.

Também podemos classificá-las como estáticas ou dinâmicas, sendo os grupos 1 e 3 o das definições estáticas e, o grupo 2, as dinâmicas .

A definição de Euclides encontra-se no grupo 1. Exemplo típico de abordagem estática, não incluiu nem o ângulo nulo e nem o de 180° . As transformações geométricas são um exemplo de abordagem dinâmica. Nelas, as isometrias são um conceito central e permitem comparações de ângulos.

Outra forma de classificação pode ser como definições antigas ou modernas . Sob este ponto de vista, o grupo 1 é o das antigas e os grupos 2 e 3 das modernas.

Apresentamos no *Anexo 2.3.1.* definições mais modernas, tais como as de Choquet e Hilbert, que se encontram nos grupos 2 ou 3 e se referem ou à união dos conjuntos de pontos formando duas semi-retas ou à intersecção de dois semi-planos. As definições incluídas foram apresentadas por Close (1982).

O grupo 2 da classificação das definições baseia-se na idéia de rotação de uma linha-reta ou semi-reta em um plano, em torno de um ponto. Pode ser um conveniente método de introdução de ângulo. Porém, por ela se introduz primeiro a noção de ângulo e só depois a de ângulos de medidas iguais, já que não inclui concepções métricas.

O grupo 3 de definições não corresponde inteiramente à concepção atual de ângulo, podendo ser hoje o setor angular. Tal problema, no entanto, pode ser minimizado considerando um ângulo como *“junção de duas semi-retas com origem no vértice e incluídos no setor angular”* (Heath, 1956, pág. 178 e 179).

2.3.2. Setor Angular e Ângulos Geométricos

Exporemos a seguir as visões recentes do “saber sábio” em relação a ângulos, que abordam setor circular pela teoria de conjuntos e ângulo geométrico pela álgebra linear, como classe de equivalência. Apoiamo-nos em Lefort (1975) e temos como objetivo discutir a profundidade do assunto para auxiliar a escolha da forma de introdução, passando pelo ângulo ou não, das funções trigonométricas.

AXIOMA: TODA RETA DIVIDE O PLANO EM DOIS SUBCONJUNTOS TAIS QUE TODA LINHA QUE UNE DOIS PONTOS, UM EM CADA SEMI-PLANO, INTERCEPTA ESTA RETA, CHAMADA DE FRONTEIRA OU BORDA DOS SEMI-PLANOS.

DEFINIÇÃO: SE DOIS SEMI-PLANOS TÊM SUAS BORDAS PARALELAS E SE CADA UM DELES CONTÉM A BORDA DO OUTRO, ENTÃO SUA INTERSECÇÃO RECEBE O NOME DE FAIXA. SE DOIS SEMI-PLANOS TÊM SUAS BORDAS QUE SE INTERCEPTAM EM O, ENTÃO SUA INTERSECÇÃO SE CHAMA SETOR ANGULAR, AS BORDAS SÃO OS LADOS E O É O VÉRTICE DO SETOR ANGULAR.

PROPRIEDADE: UM SETOR ANGULAR É ISOMÉTRICO A OUTRO SE EXISTE UMA SUCESSÃO DE SIMETRIAS QUE TRANSFORMAM OS LADOS DO PRIMEIRO NOS DO SEGUNDO.

TEOREMA: A ISOMETRIA DOS SETORES ANGULARES É UMA RELAÇÃO DE EQUIVALÊNCIA.

DEFINIÇÃO: DENOMINAMOS ÂNGULO GEOMÉTRICO UMA CLASSE DE EQUIVALÊNCIA DE SETORES ANGULARES PELA RELAÇÃO DE ISOMETRIA. (PÁG. 8 E 9).

Trabalhamos aqui com a noção de ângulo geométrico. Para a extensão ao ângulo trigonométrico pensamos que seria interessante o aluno conhecer algumas definições dinâmicas, pois o “giro”, a rotação, poderiam auxiliá-lo na compreensão do ângulo de mais de uma volta.

2.3.3 Medidas de Ângulos

Lidar com ângulos significa lidar com suas medidas. As unidades comuns de medida são o grau e o radiano.

Não se sabe o porquê da escolha, pelos babilônios, do sistema sexagesimal como sistema de medidas e do grau para unidade de medida de ângulo. Muitas vezes o grau é a única unidade de medida introduzida nas escolas fundamentais.

O radiano, em sua origem, contrasta com o grau. Ele surgiu num trabalho do físico Thomson em 1873. Ele e o matemático Thomas Muir acharam necessário uma nova unidade angular, e escolheram o nome **radian**, que é uma combinação de radial angle. O radiano foi adotado na busca da simplificação de certas fórmulas matemáticas, como as derivadas e integrais de funções trigonométricas, e físicas, como as expressões para velocidade e aceleração em movimentos curvilíneos.

2.4. Nomenclatura e Simbologia

Nesta seção discutiremos o surgimento dos nomes seno e cosseno e o desenvolvimento da simbologia. Optamos por não inserir esta discussão na evolução da Trigonometria (seção 2.2) para tornar mais objetiva e simplificar a leitura deste tema.

O nome para a função hoje chamada seno foi primeiro encontrado nos trabalhos de Aryabata (510 d.C.) como **jiva**, palavra que significa corda. Embora fale sobre meia corda, usa *jiva* ou a abreviação *jya*. O *jiva* aparece nas obras de Brahmagupta como **kramajya**, isto é seno reto, para distinguir do seno reverso^[7]. Os árabes o chamavam *karaja* e assim aparece na escola de Bagdad, no século IX, e nos escritos de Ibn al-Zarqâla, no século XI.

No século XII, quando se iniciaram as traduções do árabe para o latim foi encontrada a palavra **jiva** copiada do sânscrito como **jiba**. Os árabes tinham por hábito escrever apenas as consoantes de uma palavra, deixando para o leitor acrescentar as vogais e por isso o matemático inglês Robert de Chester encontrou a palavra **jb** e acrescentou as vogais obteve **jaib** que significa baía ou enseada e a traduziu para o latim como **sinus** (em português **seno**). Kennedy(1992) defende que foi Gerardo de Cremona, em 1150, que traduziu **jayb** para sinus. De toda forma, seno é um erro de tradução do árabe para o latim, da palavra **jiva** em sânscrito.

Ao surgir, o termo seno não foi unanimemente aceito. Rhaeticus, em 1560, preferiu **perpendicularum**, e para o sen 90° era comum o uso dos termos **sinus totus** e **sinus perfectus**.

No que se refere à simbologia, foi A. Girard, em 1626, o primeiro a utilizar abreviação. Representava o seno do ângulo A por **A** e o cosseno de A por **a**. Dois anos antes, **sin** aparece em desenhos não publicados de Gunter. O primeiro a usar o símbolo **sin** para seno em um livro foi Hérigone, em 1634. Cavalieri, em 1643 sugeriu **Si** e em 1647 Oughtred usou o símbolo **S**, que foi adotado por vários escritores ingleses do século XVII. Em 1654, Seth Ward usou **s** para seno e **S'** para o sinus complementi, ou seja o cosseno.

7. O seno, ou *jya*, quando rotacionado de 90° e limitado pelo arco, tornava-se seno reverso (*versin*), *utkramajya*. E então: $\text{versin } x = 1 - \cos x$. Esta função é ainda hoje usada por agrimensores.

Quanto ao cosseno, inicialmente não teve utilidade, pois os gregos usavam a corda como função de um arco, não tendo interesse pela corda de seu complemento. Quando o triângulo retângulo foi tomado como base, tornou-se conveniente falar no seno do complemento do ângulo. Foi então que passou a ser usado o nome *kotijya* por Aryabhata, em 510 d.C.. Naturalmente, tendo o $\text{seno}(90^\circ - \Phi)$, muitos não sentiam necessidade do cosseno. Isto aconteceu, por exemplo, com os árabes.

O nome foi desenvolvido lentamente. Plato de Tivoli, em 1120 usou “*chorda residui*” para falar do seno do complemento do ângulo. Regiomontanus, em 1463, usou “*sinus rectus complement*”. Rhaeticus, em 1551, preferiu “*basis*” e Viète, em 1579, usou “*sinus residuae*”. Temos ainda Magini, em 1620 que usou “*sinus secundus*” enquanto Edmund Gunter, em 1620, sugeriu **co.sinus**, termo modificado por John Newton, em 1658 para **cosinus**, palavra que foi recebida muito bem.

Em relação à simbologia, Cavalieri, em 1643 usou a abreviação **Si.2**; Oughtred, **s co arc**; Scarburgh **c.s.**; Wallis Σ e Jonas Moore, em 1674 **cos**, que foi o símbolo adotado pelos escritores futuros.

Como um de nossos objetivos é estudar as funções seno e cosseno, explica-se a importância deste capítulo, uma vez que este estudo histórico foi fundamental para a composição da sequência didática desta pesquisa, além de nos auxiliar no levantamento de obstáculos. A introdução das funções seno e cosseno será feita utilizando a função de Euler no momento das institucionalizações.

Capítulo III:

Fundamentação Teórica

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

3.1. Introdução

Neste capítulo apresentaremos as idéias teóricas que nortearam esta pesquisa, vindas tanto da Psicologia Cognitiva quanto da Didática da Matemática. A partir da primeira, que se preocupa com a aquisição do conhecimento e o processo de formação dos conceitos, buscamos entender as questões psicológicas ligadas ao raciocínio humano e à aprendizagem. Por meio da segunda, que se preocupa com a transmissão do conhecimento da Matemática, procuramos entender o processo de ensino mediado. Assim sendo, emprestaremos algumas das idéias de Piaget, Vygotsky, Vergnaud, Nunes, Brousseau, Douady, Duval e Balachef. A seguir, discutiremos com mais detalhes os principais pontos teóricos desses autores, quanto à formação de conceitos e à transposição didática, que estarão presentes em todo o nosso trabalho.

3.2. A Formação de Conceitos

Como levar o aluno a aquisição de conhecimentos no processo ensino-aprendizagem é uma questão crucial para todo professor, o que nos leva a ter grande interesse pela Psicologia Cognitiva. Ela está centrada no estudo dos processos cognitivos básicos, isto é, sensação, percepção, *aprendizagem*, memória e pensamento. Entre as correntes da Psicologia Cognitiva destacamos o Construtivismo, para o qual o conhecimento é construído pelo sujeito a partir de sua interação com o objeto, ou seja, a partir do contato com o meio físico e social. Fundamentaremos nosso trabalho nesta linha psicológica.

Começamos pelas idéias de Piaget, considerado unanimemente como fundador do Construtivismo. Uma de suas maiores preocupações foi entender como surgem e se desenvolvem os conceitos e as funções cognitivas no indivíduo.

Para Piaget (1977) a criança constrói a própria versão da realidade, pelas suas experiências. Ela nasce com algumas estruturas cognitivas básicas que, em contato

com o objeto, vão se desenvolvendo. Quanto maior for esta interação, mais as estruturas se expandem. A aprendizagem se dá a partir da ação e da subsequente internalização desta ação. Piaget defende ainda que participam da construção do conhecimento fatores como o meio físico e o social, além da maturação do indivíduo. A influência de todos esses fatores está ligada ao processo de equilíbrio.

Piaget considera que as três facetas humanas, a biológica, a cultural e a psíquica, procuram estar sempre em equilíbrio. É por este motivo que ele considera o processo de equilíbrio como uma das idéias centrais de sua teoria, já que está presente tanto na interação do indivíduo com o meio físico (o mundo ao seu redor), quanto com o meio social (a cultura da qual faz parte), e ainda no seu desenvolvimento mental (maturação biológica). Este processo é o responsável pela organização das estruturas cognitivas num sistema coerente, interdependente, levando o indivíduo a uma adaptação à realidade.

A equilíbrio, por sua vez, é constituída por dois mecanismos: assimilação e acomodação. A assimilação é um processo externo que faz com que o homem incorpore idéias, concepções ou objetos, e se refere à interação dele com o meio. Quanto à acomodação, ela ocorre quando as estruturas antigas são modificadas pela aquisição de conhecimentos, informações e comportamentos, com o propósito de se ajustar a uma nova situação. Um bom exemplo do processo de equilíbrio biológica é a alimentação. Nela, primeiro o alimento é ingerido (assimilação), para depois haver a digestão (acomodação). O mesmo acontece com as funções psíquicas com relação a novos conhecimentos. Primeiro, o sujeito interage com o objeto assimilando suas propriedades, para então acomodá-las. Esses processos são complementares e estão presentes a vida toda fazendo parte, segundo Piaget, da busca da adaptação intelectual da pessoa.

Partindo dessas idéias de Piaget, é possível supor que uma boa forma de se adquirir ou expandir as estruturas cognitivas de um indivíduo é colocá-lo diante de uma situação-problema tal que seus conhecimentos sejam insuficientes para chegar à solução. Isto provocará conflito, sendo esperado que ele busque novas assimilações para modificar as estruturas cognitivas de forma que, no final do processo, possa exibir o comportamento que resolva o problema.

Dentro do Construtivismo existem diferentes enfoques para explicar o processo de aquisição de conhecimentos. A teoria de Vygotsky (1991, 1993) também, como a de Piaget, considera que ele depende do desenvolvimento mental da criança e enfatiza a importância da ação do sujeito na aprendizagem, mas o fator determinante neste processo é o sócio-cultural. Neste aspecto, seguiremos Vygotsky.

Para ele as funções psicológicas são o produto da atividade cerebral e o funcionamento psicológico fundamenta-se nas relações entre o indivíduo e o mundo exterior, num processo histórico, em que a relação homem/mundo é mediada pelo sistema simbólico. A partir dessas idéias sócio-construtivistas, ele elaborou sua teoria de aprendizagem e desenvolvimento. Para ele o aprendizado é uma das principais fontes de conceitos da criança em idade escolar e também é uma poderosa força que direciona e determina seu desenvolvimento mental.

Quando se estuda a aquisição de conhecimentos, em um conteúdo específico, outra importante questão que se apresenta para os professores e pesquisadores é como se processa a formação dos conceitos do indivíduo. Para Piaget (1978), há uma relação de dependência entre o conceito e a função semiótica^[8], ou simbólica, que surge quando o indivíduo adquire a capacidade de representar, em nível de pensamento, algo que está perceptualmente ausente.

Grande parte do trabalho de Piaget (1961,1971,1978) foi dedicada à análise de como a criança desenvolve a linguagem e a imagem mental, representando suas ações e as das outras pessoas. A função de representação, ou simbólica, só ocorre a partir do período sensório-motor, no momento em que a criança passa a diferenciar mentalmente os *significados* dos *significantes*. Na semiótica, o termo **referente** designa o objeto. Os símbolos, signos e sinais universalmente aceitos do objeto formam o **significante**. Já o sentido particular, pessoal, dado ao referente é o **significado**. É a partir do processo de representação, iniciado com a imitação, seguido da formação de “esquemas”^[9] e da internalização, que o indivíduo dá os primeiros passos em direção ao conhecimento.

8. A semiótica estuda os símbolos e signos. Símbolo é definido como tudo que se refere ao objeto. Por exemplo lua, moon, são signos do mesmo objeto, que também pode ser representado por um ícone. Os símbolos são arbitrários, dependem de cada cultura.

9. Esquemas (schème) são conceitos limitados, ou seja, funcionam e dão conta de uma determinada situação. São ações que podem ser transferidas ou generalizadas pela repetição em situações análogas e com isso ampliadas.

Sob esse prisma, para Piaget, a aquisição do conhecimento abrange dois aspectos: o figurativo e o operativo. Para ele, o conhecimento envolve mais do que a simples descrição do objeto, caracteriza-se quando o indivíduo pode operar sobre este objeto. Sendo assim, o conhecimento tem primeiro um aspecto figurativo, que é o estágio no qual o sujeito pode descrever o objeto pelo uso da percepção e memória, e um segundo aspecto operativo, que ocorre quando o indivíduo pode agir com o objeto, envolvendo o pensamento lógico. Por exemplo, uma criança que está adquirindo conhecimentos sobre triângulo, primeiro perceberá sua forma triangular, número de lados, tipos, entre outros. Será capaz de reconhecer um triângulo, mas este conhecimento envolve apenas um aspecto figurativo. Ele evolui para o aspecto operativo quando ela passa a reconhecer propriedades específicas de triângulos, tais como a medida da soma dos ângulos internos de qualquer triângulo, teoremas, etc. Isto significa que ela pode agir, ou seja, operar com a figura. Por tal razão, Laborde et al (1990) introduziram na Didática da Matemática os termos *desenho* e *figura* para se referirem a formas geométricas. O desenho é o traçado material, sem a consciência das propriedades inerentes a ele, e se transforma em figura para a criança quando ela muda seu ponto de vista “enxergando”, além da forma, características e propriedades do objeto geométrico que lhe permitem agir, por exemplo: classificar, decompor, reconhecer semelhanças e diferenças por comparação com outras formas.

Vale a pena salientar que o processo da formação de conceitos, para Piaget, é individual, isolado e interno. Já para Vygotsky ele é fortemente influenciado pela mediação da sociedade. Apesar de considerarmos o processo de equilíbrio fundamental para a aquisição do conhecimento, concordamos com Vygotsky quanto a importância do mediador social. Neste sentido, defendemos o ponto de vista que a mediação da sociedade interfere no momento da assimilação.

O processo de formação de conceitos foi um dos principais temas de estudo de Vygotsky, que os classificou como espontâneos e não espontâneos. Os primeiros são os desenvolvidos pela pessoa a partir de sua realidade, vêm das experiências do cotidiano e se desenvolvem com esforços mentais próprios. Os não espontâneos são os que requerem aprendizagem sistematizada. Os conceitos científicos fazem parte deste segundo grupo e são normalmente desenvolvidos na escola.

Vygotsky(1993) salienta que *“os dois tipos de conceitos se formam e se desenvolvem sob condições internas e externas totalmente diferentes, dependendo do fato de se originarem no aprendizado de sala de aula ou na experiência pessoal da criança”* (pág. 74).

Os conceitos espontâneos caracterizam-se pela falta de consciência das relações (são não-conscientes e assistemáticos). Assim sendo, ao operar com o cotidiano, o indivíduo centra sua atenção no objeto e não no próprio ato do pensamento. Já no conceito científico, *“a relação com o objeto é mediada, desde o início, por algum outro conceito”* (Ibid, pág.80) e *“o aprendizado escolar induz a percepção generalizante desempenhando um papel decisivo na conscientização da criança dos seus próprios processos mentais”* (Ibid, pág.79).

Para estudar a capacidade de aprendizagem é importante estar atento ao nível de desenvolvimento em que a criança se encontra. Vygotsky considera que existem dois níveis: o real, que evidencia a função psicológica já alcançada por ela e o potencial, ou aquele que o indivíduo pode realizar independentemente de sua raça e cultura, espelhando a expectativa.

Ele discute que, em geral, os testes a que as crianças são submetidas consideram apenas o nível pelas ações ou respostas que produzem, sem a intervenção de outra pessoa. Existe porém, uma diferença entre o nível de desenvolvimento real e o de desenvolvimento potencial, que Vygotsky (1991) denominou de zona de desenvolvimento proximal (z.d.p.) e definiu como sendo:

“a distância entre o nível de desenvolvimento real, que se costuma determinar pela solução independente de problemas, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado pela solução de problemas sob a orientação de um adulto ou em colaboração com companheiros mais capazes” (pág. 97).

De uma forma simplificada, podemos dizer que a z.d.p. define as funções psicológicas que não amadureceram, mas que estão em fase embrionária, potencial, a caminho de se completar. A discrepância entre a idade mental real de uma criança e o nível que ela atinge ao resolver problemas com o auxílio de outra pessoa indicam sua zona de desenvolvimento proximal. Quanto maior for a z.d.p. do aluno, melhor será seu aproveitamento escolar.

A idéia da **construção coletiva do saber** é o cerne do sócio-construtivismo de Vygotsky. Para ele é fundamental a mediação, entendida como o processo de intervenção de um agente intermediário, de forma que a relação entre o sujeito e o objeto deixa de ser direta. A cooperação e o papel do outro na aquisição do conhecimento têm um papel central, ou seja, primeiro deve haver a experiência coletiva para que possa existir a individual. Ele acredita que a criança pode ir além de seu nível de desenvolvimento quando orientada por um mediador. Isto significa que a aprendizagem impulsiona o desenvolvimento e o professor, como mediador, age na zona de desenvolvimento proximal do aluno.

No estudo da formação de conceitos, temos a importante contribuição de Vergnaud, para quem o conhecimento é obtido por campos conceituais e resolução de problemas. Para ele o objeto de estudo deve ser vivenciado em diversas situações, para que o aprendiz possa observá-lo e perceber os invariantes (propriedades) desse objeto. Para tanto, o aluno deveria fazer uso de vários conceitos estreitamente correlatos, para chegar à representação simbólica referente, formando, no final do processo, o conceito do objeto em estudo.

Para Vergnaud (1987,1994), na Educação Matemática, a pesquisa deve priorizar a coleta, análise e classificação de situações-problema que tornem um conceito matemático funcional e significativo, porque a resolução de problemas é a fonte e o critério do conhecimento operativo. Ele discorda da posição dos autores que consideram a resolução de problemas uma combinação de ações e regras que se apoiam sobre conhecimentos anteriores do sujeito e a formação de conceitos, como uma nova categoria de pensamento, uma nova forma de conceitualizar o mundo. Ao contrário, para ele a resolução de problemas é parte integrante do processo de formação de conceitos.

A resolução de problemas tem um papel central pois, para quem aprende, conceitos teóricos ou propriedades estão vazios de significado se não puderem ser aplicados a alguma situação-problema. É importante lembrar que muitos dos conceitos matemáticos nasceram do esforço em solucionar problemas práticos e teóricos.

Embora muitas vezes os professores não percebam, o desenvolvimento do conceito é um processo lento. Por isso, seria interessante estudar um mesmo conteúdo em diversas das séries escolares, aprofundando-se sempre, apresentando novos problemas que exijam o domínio de diferentes propriedades do conceito.

Ao lidar com problemas, existem relações e hierarquias a serem consideradas e, por isso, é necessário estudar a formação de partes relativamente grandes do conhecimento, que são os campos conceituais. A teoria dos campos conceituais, para Vergnaud (1990), é *“Uma teoria psicológica dos conceitos, ou seja, da questão de conceitualização da realidade, que estuda e analisa os diferentes passos do processo de aquisição do conhecimento”* (pág. 133). Um campo conceitual é um conjunto de situações cujo domínio requer uma variedade de conceitos, procedimentos e ainda o domínio da representação simbólica ligada a ele.

Para construir o conhecimento operacional, em primeiro lugar o aprendiz deve captar o conjunto de invariantes, isto é, o que caracteriza cada conjunto. Piaget foi quem primeiro introduziu a questão dos invariantes mas foi Vergnaud que reconheceu a importância da percepção de invariantes na formação de conceitos. É por ela que se inicia a formação de esquemas, que Vergnaud denominou teorema em ação, evoluindo para a competência até chegar ao conceito.

Uma concepção interativa da formação de conceito considera o campo conceitual como um tripé envolvendo:

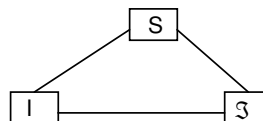
S - O CONJUNTO DE SITUAÇÕES QUE DÃO SIGNIFICADO AO CONCEITO.

I - O CONJUNTO DE INVARIANTES QUE CONSTITUEM O CONCEITO.

S̄ - O CONJUNTO DE REPRESENTAÇÕES SIMBÓLICAS USADAS PARA REPRESENTAR O CONCEITO, SUAS PROPRIEDADES E AS SITUAÇÕES A QUE ELE SE REFERE.

Fazendo um paralelo com a semiótica podemos dizer que:

S é o referente
I é o significado
S̄ é o significante



O significado é o centro da teoria de representação. Por meio dele, são feitas as predições e as inferências. Para dar significado ao conceito, o indivíduo deve reconhecer os invariantes e, por meio de ações, adequar o referente ao significado. A

relação entre significado e significante é mediada pela interação entre referente e significado e envolve a presença de um signo para representar o conceito.

Resumindo, para Vergnaud:

- 1) Uma situação não envolve tudo de um conceito e, se nosso objetivo for explorar o máximo possível um conceito, é necessário construir várias situações;
- 2) Uma situação não envolve um só conceito, mas um campo conceitual;
- 3) O processo de formação do conceito, especialmente se observado pela resolução de problemas, necessita de muitas interações, ou seja, o sujeito deve tomar contato com o assunto diversas vezes durante um longo período de tempo.

Outra questão importante no processo ensino-aprendizagem e na formação dos conceitos é a situação na qual o aprendiz é colocado com objetivos didáticos. Para melhor entender as situações de aprendizagem do ponto de vista cognitivo, apoiamos em estudos de Nunes et al (1993). A situação, para ela, deve ser de tal forma construída que, embora não esteja necessariamente inserida no mundo real, possibilite à criança estabelecer um paralelo com o que vivencia no cotidiano. Em tal ambiente, que ela denomina situação semântica, o aprendiz pode entender o propósito e dar significado a sua atividade.

Nunes(Ibid) também destaca a importância da função de organização de pensamento e ações envolvida na resolução de problemas. Esta função é fortemente influenciada pelo sistema de representação da criança e dos signos envolvidos na atividade. Por exemplo, se uma atividade é oral ou escrita temos diferentes sistemas simbólicos que interferem na organização funcional das ações do aluno. Este sistema por sua vez, é proveniente da cultura e depende dos símbolos e signos desta. Isto significa que o contexto social está sempre presente e que uma criança se comporta de forma diversa quando desempenha a mesma função em diferentes ambientes.

Ainda segundo Nunes (1992,1996), se temos interesse em ensinar um conceito específico ou investigar o que a criança sabe sobre ele, é importante colocá-la

em uma situação semântica e não necessariamente em uma situação da vida cotidiana. Desta forma, será facilitada a representação pessoal do objeto de estudo, pois a função simbólica é relevante e desempenha papel central na resolução de problemas.

Estas idéias nos deram subsídios para entender o processo de formação e evolução de conceitos e, a partir daí, buscar a construção de uma sequência didática que gere conflito e não se detenha apenas nos aspectos figurativos do conhecimento, como propõe Piaget. Que se encontre dentro da z.d.p. do aluno e leve em conta os conceitos, tanto espontâneos quanto científicos, que o aluno já possui, tal como se preocupa Vygotsky. Que seja construída a partir de situações-problemas que permitam ao aluno expandir seu campo conceitual das funções, como fala Vergnaud. Para tanto, deverá ser uma sequência composta de situações significativas, como defende Nunes, e ainda permitir ao professor cumprir seu papel de mediador, como propõe Vygotsky.

Pensando na operacionalização de nossa sequência didática, dedicamos a próxima seção às questões do processo ensino - aprendizagem especificamente da Matemática. Neste sentido, procuraremos discutir algumas das idéias e conceitos de Educação Matemática.

3.3. Aspectos da Transposição Didática

O primeiro conceito da Didática que tomaremos é o “**saber sábio**”. Entende-se por “**saber sábio**” o conjunto de conhecimentos disponíveis, ou seja, é o saber matemático aceito como válido pela comunidade científica, em nossos dias. O “**saber ensinado**” é o transmitido por nós, professores, aos alunos. Para que o “saber sábio” passe a ser “saber ensinado”, ele sofre uma série de transformações e adaptações.

O conjunto destas transformações foi denominado por Chevallard (1991) de “Transposição didática”. As etapas da transposição didática são:

SABER SÁBIO → OBJETOS A ENSINAR → SABER A ENSINAR → SABER ESCOLAR → SABER ENSINADO → SABER DISPONÍVEL.

O “**saber escolar**” é o que se encontra nos livros didáticos, e permite uma certa uniformização e instalação de uma cultura Matemática.

Cabe ao professor fazer uma nova adaptação do “**saber escolar**”, construindo situações de aprendizagem. Um resultado desta etapa da transposição didática é o “**saber ensinado**”. O aluno, por sua vez, faz a sua transposição, para chegarmos ao “**saber disponível**” (para mais detalhes ver Almouloud, 1994).

Outro importante conceito em Didática que usaremos é a noção de **obstáculo**. Este conceito foi introduzido por Bachelard (1965) e aplicado à Matemática por Brousseau (1983). Segundo este último:

“um obstáculo é constituído da mesma maneira que o conhecimento, com os objetos, relações e métodos de apreensão e previsão e com as evidências e consequências desprezadas e com ramificações imprevistas” (pág. 175).

Ele é uma concepção que produz respostas adaptadas num certo contexto e, fora dele, produz respostas falsas. Assim, cada conhecimento pode se tornar um obstáculo à aquisição de novos conceitos.

Gostaríamos de enfatizar que obstáculo não deve ser entendido como um sinônimo de dificuldade, tal qual na linguagem comum. O termo é usado para caracterizar um conhecimento local que resiste às contradições com os quais ele é confrontado e é um empecilho ao estabelecimento de um conhecimento melhor, mesmo após a tomada de consciência de sua inexatidão. Eles se manifestam pela incapacidade de compreender certos problemas, de resolvê-los com eficácia ou pelos erros cometidos. Uma vez superados, devem conduzir à instalação de um novo conhecimento.

Segundo Brousseau (1983) podemos classificar os obstáculos quanto a origens, em quatro tipos básicos: obstáculos epistemológicos, didáticos, psicológicos e ontogênicos. Em nosso estudo procuramos levantar os obstáculos epistemológicos e didáticos.

Os **obstáculos epistemológicos** são aqueles “*que tiveram um importante papel no desenvolvimento histórico dos conceitos e cuja rejeição precisou ser integrada explicitamente ao saber transmitido*”. Eles são identificados pelas dificuldades encontradas pelos matemáticos para superá-los na história . São inerentes

ao saber , são partes que constituem o conhecimento e deles “*não se pode e nem se deve fugir*” Brousseau (Ibid).

Os **obstáculos didáticos** são os que parecem depender apenas das escolhas, das estratégias e da transposição didática ou então de um projeto educativo que resulta em uma transposição inadequada. Eles permitem a formação de concepções errôneas ou inadequadas que se revelarão como obstáculos à apropriação dos conceitos. Assim como os epistemológicos, os obstáculos didáticos são inevitáveis, pois são inerentes à transposição didática.

Usaremos a **Dialética Ferramenta - Objeto**, de Douady (1986). Estes termos, **objeto e ferramenta**, foram trazidos por ela da Psicologia Cognitiva, aprofundados e adaptados para a Educação Matemática. Dizemos que um conceito matemático é **ferramenta** quando focalizamos nosso interesse em seu funcionamento dentro dos problemas que ele nos ajuda a solucionar.

Para transmitir os conceitos, o matemático procura desvinculá-los do contexto, dos aspectos acidentais e do tempo, expressando-os na forma mais simples e direta possível, num grau de generalidade adequado para sua reutilização ou sua adaptação, integrando-os de maneira coerente ao corpo de conhecimentos já constituído. Deste modo, estes conceitos assumem o status de **objeto**. Além disso, existe a criação direta de objetos que ocorre, por exemplo, quando se trata de organizar um dado ramo da Matemática ou de garantir seus fundamentos.

Douady chama de **Dialética Ferramenta-Objeto** um modelo de organização de ensino no qual o professor leva o aluno a uma situação de pesquisa, para provocar as condições de adaptação do saber anterior, isto é, construir situações respondendo a condições precisas, segundo o objetivo visado.

De Brousseau (1986) tomaremos emprestadas as idéias sobre a importância da situação dentro do processo ensino-aprendizagem. Ele definiu três tipos de **situações** em que os alunos têm um papel determinante: situações de ação, de formulação e de validação. As situações devem ser integradas num processo global de ensino que atribua a iniciativa e a responsabilidade tanto ao professor quanto ao aluno.

Brousseau transporta para a prática da sala de aula as idéias de Vygotsky sobre a relação intrínseca entre os conceitos espontâneos (contextualizados, provenientes do cotidiano do aluno) e científicos. Para ele, cabe ao mestre selecionar as tarefas, e entre os conhecimentos manipulados pelos alunos, dizer o que deve ser retido, fazendo a **institucionalização** do saber, desvinculando-o do contexto, dos aspectos acidentais e do tempo, e o acrescentado ao antigo. Podemos dizer que esta fase é a de **descontextualização**, quando se faz a abstração das condições particulares que deram sentido a esse saber para generalizá-lo e integrá-lo num modelo coerente. A seguir, ele deve passar pela fase do reinvestimento, é a **recontextualização**, quando se coloca o conhecimento adquirido novamente em situações artificiais para dar sentido aos novos conceitos. Pensamos que, desta forma o aluno possa construir um saber que lhe pareça ter significado.

Nossa seqüência didática procura apoiar-se, ainda, na noções de **Jogo de Quadros**, introduzidas por Douady(1986), de **registros de representação** e de **pontos de vista**, de Duval (1988).

Para Douady (Ibid) uma importante característica da Matemática é a capacidade de traduzir um problema em diversos quadros: algébrico, numérico, geométrico, analítica, fazendo com que tenhamos diversas ferramentas de resolução. Por iniciativa do docente, um problema, convenientemente escolhido, pode ser abordado sob diversos enfoques, aumentando assim as possibilidades de processos de resolução. Nesta situação estamos utilizando o **Jogo de Quadros**.

O “**registro de representação**” é introduzido para analisar a influência das representações dos objetos matemáticos sobre o ensino-aprendizagem. Um registro é uma maneira típica de representar o objeto. No nosso caso, funções, temos os registros das tabelas, das fórmulas como: $f(x) = \text{sen } x$; $g(t) = \text{cos } t$; etc., dos gráficos cartesianos, dos registros simbólicos, tais como f , $f + g$, f'' , etc...

Existem, para o mesmo objeto matemático, diversos registros de representação, o que levou os estudiosos, como Borba (1993), Confrey (1991) e Gomes Ferreira (1997), entre outros, a falarem em múltiplas representações e pesquisarem sua interferência no aprendizado.

“Pontos de vista” sobre um objeto matemático são as diferentes maneiras de olhá-lo, e fazê-lo funcionar, ou de defini-lo. Por exemplo, ao ensinarmos que a função cosseno é par, podemos usar dois pontos de vista:

- definir a função par como sendo a função para a qual $f(x) = f(-x)$, para qualquer valor de x , o que nos leva a usar o quadro algébrico e numérico, com o aluno “testando” os valores do Domínio, ou
- analisar o gráfico de f e observar que ele apresenta **simetria** em relação ao eixo Oy. Neste caso o aluno tem uma visão global, no quadro geométrico, do que é uma função trigonométrica par.

É importante lembrar que, na prática de sala de aula, o funcionamento da aprendizagem depende do contrato didático e de numerosas “variáveis” que condicionam as situações didáticas. Entendemos o contrato didático como Brousseau (1988) o definiu, ou seja, como o conjunto de regras de comportamento e convenções que determina explicita e implicitamente o que cada parceiro da relação didática deverá administrar e pelo que se responsabilizará perante o outro. Quanto às variáveis de ensino, enfocaremos as didáticas e as epistemológicas. As primeiras são ligadas às escolhas e interferências do professor, tais como as variáveis de situação, de contrato e de transposição, e as últimas são as relacionadas ao saber e aos alunos e envolvem as epistemologias da história, da matemática e da genética.

A partir das idéias e conceitos até agora discutidos, procuramos construir o “design” de nossa pesquisa. Buscamos situações-problema nas quais o aluno estivesse em ação e pudesse utilizar seus conhecimentos anteriores, como propõe Brousseau. Essas situações deverão ainda auxiliar o docente a proceder a mudança de quadros das razões trigonométricas (quadro geométrico e numérico) para o das funções trigonométricas (quadro funcional). Quanto ao contexto do computador, pesquisamos os softwares disponíveis no mercado e/ou nas escolas, para selecionar os que nos permitissem construir atividades abordando diversos registros de representação das funções e que pudessem ser definidas por meio de diferentes pontos de vista, como enfatiza Duval. O procedimento adotado na aplicação de toda a sequência didática teve por base a Dialética Ferramenta- Objeto, proposta por Douady

e durante toda a pesquisa tivemos em mente as diversas variáveis que interferem na aprendizagem. Contudo faz-se necessário, ainda, discutir sobre o que entenderemos por contexto e sua importância em nosso estudo.

3.4. O Contexto: Uma Abordagem Teórica e Prática

Em nossa pesquisa, diversas vezes, usaremos o termo contexto, motivo pelo qual nesta seção procuraremos definir o que designamos por contexto e justificar sua importância em pesquisas educacionais.

A palavra contexto tem um significado amplo e é usada de forma diversa nas áreas do conhecimento. Em Educação Matemática, Roth(1996) categorizou três diferentes sentidos para o termo.

O primeiro diz respeito a problemas de matemática que possuem um texto. Aqui a compreensão do texto é um aspecto fundamental do conhecimento. O termo contexto ("con-text", como diz Roth), usado neste sentido de "o que vem com o texto", refere-se a todo conhecimento adicional necessário para a compreensão do problema matemático. Este "con-text" é como uma história que envolve o problema, sendo que algumas vezes as idéias são expostas de forma explícita e, outras vezes, implícita. No último caso, muitas das idéias não são ditas ou explicadas detalhadamente. De toda forma, a interpretação do problema matemático e do texto vai depender da experiência em leitura que o indivíduo tenha. Citamos os pesquisadores Geertz(1973) e Rorty (1989), que usaram em seus estudos o contexto nesta acepção.

O segundo sentido do termo refere-se a alguns fenômenos do mundo que podem ser modelados de uma forma matemática particular. Quando os estudantes apropriam-se significativamente da forma matemática (ou conceito) ligando-a com o fenômeno, este pode ser considerado o contexto que auxiliou a elaboração do significado do conceito. Roth(Ibid) fornece um exemplo:

"A maneira tradicional de puxar água de um poço, usando uma roldana que dá voltas em torno de um sistema de eixos tendo uma corda com uma ponta presa a ela e a outra a um balde d'água, pode servir como um contexto físico para se ensinar função do 1^a grau. Neste a altura em que se encontra o balde está relacionada com o número de voltas que se deve dar na manivela para içá-lo" (pág. 491).

Este é um exemplo de como contexto pode ser o fenômeno físico que está sendo “traduzido” pela Matemática e, que pode ser usado como uma ponte para o entendimento do conceito. Citamos os pesquisadores Confrey (1991) e Magina (1994) que utilizaram o termo contexto neste sentido.

A terceira maneira de se entender contexto está ligada à noção de ambientes e situações. As situações são caracterizadas por aspectos sociais, físicos, históricos, espaciais e temporais, que são constituintes do contexto que formam a base para o desenrolar das atividades. Ambientes são entendidos aqui como os lugares físicos das atividades humanas como, por exemplo, um supermercado, um laboratório, uma cozinha, uma fábrica de laticínios, etc. Em cada um dos ambientes, existem diferentes situações que incluem diversas práticas, inclusive matemáticas. Por exemplo, o trabalho em uma fábrica de laticínios envolve, entre outras, as seguintes atividades: prever a demanda de produtos, proceder ao carregamento e a entrega dos mesmos, fazer os inventários. Quando as atividades envolvem práticas matemáticas, elas estão inseridas em outras práticas da vida em cada um dos ambientes e é justamente esta inserção que torna a matemática do dia a dia poderosa para o indivíduo. Quando o alinhamento com as práticas do cotidiano não é possível o desempenho matemático decai drasticamente, porque a pessoa não tem mais o apoio familiar do contexto para auxiliá-la.

Outra forma de categorizar o termo contexto vem de Lave (1988). Para ela, contexto pode se referir tanto ao ambiente quanto a fenômenos físicos que podem servir para introduzir conceitos matemáticos. Lave deixa claro que, seja em um ou em outro sentido, o contexto apresenta uma estrutura própria para a atividade nele inserida. Além disso, ele tem características que transcendem a experiência individual, interferindo no desempenho do sujeito. Isto ocorre porque *“os contextos são vivenciados diferentemente pelos indivíduos”* (pág.151). O termo contexto tem sido usado, para se referir ao ambiente, por pesquisadores como Borba (1987) e Saxe (1991), incluindo as atividades matemáticas e didáticas inseridas em cada um deles.

Por fim, mais um sentido para contexto é encontrado em Van Hiele (1986), que o vê como sendo o conteúdo a ser ensinado. Assim, a geometria é um contexto. Segundo ele, frequentemente o professor usa elementos do contexto geométrico que

não têm significado para a criança, e de nada adianta fazer uma explanação sobre estes elementos. Para que ela apreenda os conceitos, é preciso que os vivencie. Nessa linha de raciocínio de Van Hiele, a álgebra e a trigonometria são contextos e, ainda, um item dentro destes conteúdos, como as funções trigonométricas, são também contextos.

Como dissemos no início, contexto pode ter vários sentidos, porém é consenso entre os pesquisadores que é difícil ensinar qualquer conteúdo sem levar em conta a influência do contexto e sem uma situação na qual o assunto a ser apreendido possa ser vivenciado pelo aprendiz. Citamos Vergnaud (1987) e Nunes (1992) que defendem esta posição. O contexto pode ser entendido como a situação-problema, ou o ambiente onde a situação é construída, ou o fenômeno que dá sentido ao conceito.

Em nosso estudo, optaremos por usar o termo contexto para nos referirmos a ambientes (“settings”) onde as situações de aprendizagem acontecerão. Cada contexto terá equipamentos próprios para explorar os conceitos trigonométricos e as atividades serão construídas nesses ambientes. Utilizaremos três contextos, sobre os quais escreveremos um pouco na próxima seção.

3.4.1. Os Contextos da Pesquisa

Utilizaremos em nossa pesquisa três contextos que serão intitulados: contexto do “mundo experimental”, do computador e da sala de aula.

No primeiro teremos atividades de manipulação com objetos reais. Entendemos este contexto como sendo onde o aluno manipulará objetos concretos feitos de materiais tais como madeira, metal, areia, etc., que normalmente não fazem parte do aprendizado tradicional de Matemática. Não estamos querendo dizer que outros contextos, como por exemplo o do computador ou o do papel e lápis, usados geralmente no ensino, não utilizem materiais concretos, mas sim que nas atividades

desses contextos temos *representações* do que ocorre no mundo, virtuais no primeiro caso e esquemáticas no segundo, que exigem maior nível de abstração em relação ao contexto do “mundo experimental”, marcado pelo informalismo e pela manipulação direta com o objeto em si mesmo.

Imaginamos que este seria o melhor contexto para a introdução do assunto. É consenso entre os estudiosos da Psicologia Cognitiva que se deve partir dos conceitos espontâneos para atingir os científicos, como discutimos na seção 3.2., e que é importante construir uma situação semântica significativa, no sentido dado por Nunes et al (1996). Pensamos que, a partir das atividades do “mundo experimental”, ou por meio de uma simulação com a qual o aluno possa fazer um paralelo com o mundo real, estaríamos trabalhando dentro de situações semânticas que poderiam ajudar o aluno a criar e/ou desenvolver um sistema de representação coerente e significativo. É nossa crença que as atividades neste contexto serão o ponto de partida ideal para possibilitar futuras generalizações. Naturalmente, é preciso pesquisar se, para assuntos de alto grau de abstração como as funções trigonométricas, isto realmente ocorre. Teremos ordens diferentes de introdução ao assunto, isto é, cada grupo experimental começará a ter contato com a função trigonométrica por um contexto diferente, com o intuito de verificar se nossa hipótese está correta.

O segundo contexto que será utilizado é o “contexto do computador”. Na última década, ele tem sido usado em muitas pesquisas como ferramenta auxiliar na formação de conceitos. Magina (1994) usou o LOGO como um dos aplicativos para explorar o conceito de ângulo; Borba (1993) usou o aplicativo FUNCTION PROBE para o estudo de funções, e diversos outros trabalhos, como o de Hoyles (1991,1996), têm demonstrado a importância desse ambiente, ressaltando como vantagens o “feed back” imediato, a possibilidade de movimento e o controle de variáveis que não interessam na formação do conceito.

Acreditamos que o computador é uma ferramenta poderosa, que permite realizar uma simulação do mundo concreto e proporciona um ambiente rico, que possibilita a elaboração de situações significativas com o objetivo de auxiliar o aluno a fazer uma representação do conceito em questão. Além disso, este contexto apresenta

como vantagem a possibilidade de controle de algumas variáveis que não interessam para a formação do conceito em questão e eventualmente poderiam confundir o aluno.

Estabelecendo uma comparação entre as situações construídas no computador e as no “mundo experimental” podemos dizer que, muitas vezes, as montagens neste último contexto são dispendiosas e outras exigem um laboratório, o que pode dificultar a manipulação dos experimentos por classes inteiras, que têm em geral de 35 a 45 alunos. Além disso, nem sempre as experiências no contexto do mundo concreto podem ser quantitativas e ainda apresentam alguns inconvenientes a considerar, tais como quebra do material, erro experimental, etc.

Pensamos que a utilização do contexto do computador pode ser uma boa opção para o professor. Gostaríamos de enfatizar que, apesar do computador ser uma ferramenta de alto poder, dada a atração que exerce sobre o jovens, seu “feedback” imediato e a característica de fazer muitas figuras rapidamente, deve ser usada com cuidado pelo mestre uma vez que, sem atividades bem construídas e estruturadas, de nada adianta a máquina.

Para operacionalizar as atividades dentro deste contexto, selecionamos dois “softwares”. O Cabri-Géomètre foi escolhido porque, apesar de ter sido desenvolvido para funcionar como um caderno de rascunho em geometria oferece, na sua versão II, muitas possibilidades de uso em trigonometria. Já o aplicativo Graphmatica for Windows foi escolhido por ser um dos aplicativos que permitem a construção do gráfico, uma vez conhecida a expressão algébrica da função, e é de manipulação simples para o aluno.

O último dos três contextos será o da sala de aula. Para nós este é o mundo da Escola, no qual o aluno faz parte de uma classe e tem um horário pré estabelecido. Suas características predominantes são as aulas expositivas e/ou com material didático como livro, caderno, lápis, etc.

É nosso interesse pesquisar de que forma o contexto pode interferir no aprendizado. Para isso pretendemos construir situações que denominaremos

experimentos, no “contexto do mundo experimental” e atividades, no “contexto do computador”, e cada um de nossos sujeitos passará por todas elas, porém em diferentes ordens. Pretendemos ainda comparar o desempenho destes alunos com outros estudantes, que terão as informações vindas do contexto da sala de aula e serão do grupo de referência.

3.5. Revisão de Literatura

Encontramos na literatura diversas pesquisas sobre o ensino de funções, que é o nosso campo conceitual, mas não encontramos estudo específico de introdução das funções trigonométricas entre os pesquisadores brasileiros. Orientamos esta revisão da seguinte forma: analisamos trabalhos existentes em trigonometria e a seguir alguns dos trabalhos em funções. Nessas análises, procuramos acompanhar pesquisas no contexto do papel e lápis, no computador e no “mundo experimental”.

Em relação à introdução das funções trigonométricas, comentaremos o trabalho de Wenzelburger (1992). O objetivo da pesquisadora foi estudar a viabilidade e a eficiência do ambiente do computador gráfico na construção dos conceitos de funções trigonométricas. No estudo, ela comparou o desempenho de estudantes que trabalharam com estas funções no ambiente computacional com a de alunos para os quais elas foram introduzidas no contexto do papel e lápis, em sala de aula.

A pesquisa foi precedida de outras três usando o contexto computacional e, destas, duas envolveram a aquisição do conceito de função (Wenzelburger, 1989,1990,1991). Esta quarta pesquisa foi realizada em março de 1991, no México, com 31 alunos de uma escola secundária, dos quais oito foram escolhidos aleatoriamente para compor o grupo experimental. O estudo constou de dez sessões de 50 minutos cada, com a presença da pesquisadora em todas elas e cada estudante utilizando um computador.

Foi aplicado um pré teste, um pós teste e um teste de retenção do conteúdo três meses após o término do experimento. A sequência didática enfocou amplitude e período de funções do tipo $y = a \sin x$ e $y = a \cos x$ e período e amplitude de funções do tipo $y = a \sin (bx)$ e $y = a \cos (bx)$.

A conclusão do estudo foi que, para o grupo pesquisado, as atividades construídas no computador foram eficientes principalmente quanto à retenção dos conceitos envolvidos. O grupo experimental teve melhor desempenho tanto no pós teste, como no teste de retenção, com destaque para as meninas.

Wenzelburger discute que, por meio de programas gráficos, os estudantes puderam desenvolver atividades exploratórias e realizar descobertas por eles próprios.

Diversos pesquisadores, tais como Eisenberg (1989), Dreyfus (1991) e Bishop (1989) apresentaram, por meio de resultados de pesquisas, importantes argumentos a favor do potencial da abordagem visual na aprendizagem, fator que é extremamente facilitado pelo ambiente computacional. Contudo, Wenzelburger considera que é perigoso pensar apenas nos efeitos positivos da visualização na formação dos conceitos, uma vez que as representações visuais também apresentam ambiguidades.

Segundo ela, tanto a máquina e os programas gráficos funcionariam como agentes mediadores quanto o professor e o guia de estudos usado pelo aluno. Enfatiza ainda que é importantíssimo o papel dos agentes mediadores, uma vez que a organização feita só pelo aprendiz não garante que ele irá tirar o máximo proveito das situações de aprendizagem. Nós concordamos com a pesquisadora, tanto na sua preocupação quanto à tendência de superestimar o papel da visualização, quanto na importância dos agentes mediadores, no processo de formação de conceitos.

Este foi o único trabalho de introdução das funções trigonométricas via computador, que encontramos na literatura. Para nós foi um trabalho extremamente inspirador, pois pretendemos dar continuidade a este tipo de pesquisa. Porém, nossa intenção no presente estudo é associar o computador a outro ambiente e analisar o desempenho dos estudantes quando submetidos a ambos (ver seção 3.4).

A seguir destacamos o trabalho de Briguenti (1994), no qual é proposto um curso completo de trigonometria, na linha da aprendizagem significativa, com apoio da teoria de Ausubel. A pesquisa teve duas partes, sendo que comentamos a que diz respeito ao 2º grau e às funções trigonométricas. O estudo foi realizado de março a maio de 1993, em Bauru, São Paulo, com uma classe (não foi mencionado quantos sujeitos) de 2ª série e constou de 60 encontros, no período normal de aulas.

A proposta foi iniciada pela trigonometria no triângulo retângulo, seguida do estudo de arcos e ângulos, transformação de unidades de medida, arcos trigonométricos, redução ao primeiro quadrante, equações e inequações e, por fim, estabelecer a correspondência entre um número real e um ponto do ciclo e definir as funções seno, cosseno e tangente.

A atividade relativa à introdução dessas funções é iniciada pela sentença: “*A trigonometria dos números reais se desenvolveu a partir de fenômenos ondulatórios ou periódicos, ou seja, fenômenos que se repetem em intervalos constantes...*” (pág. 118).

Esta abordagem é interessante por permitir que o estudante estabeleça uma ligação do conceito a ser estudado com o dia-a-dia, já que no cotidiano temos diversos fenômenos periódicos que o aluno pode observar. Contudo, em nosso entender, essa introdução poderia partir de uma situação na qual a periodicidade pudesse ser vivenciada.

Na sessão de introdução das funções trigonométricas a pesquisadora usou, para a confecção do gráfico destas funções, um microcomputador e um “Data Show” acoplado a um retroprojetor. Naturalmente, este recurso visual é melhor que a lousa e o giz pois permite o traçado de um grande número de gráficos em pouco tempo, e ainda acrescenta a possibilidade de movimentação. Todavia, pensamos que apesar de todo esse esforço no sentido de usar a moderna tecnologia, os alunos que participaram desse estudo continuaram em situação passiva, sem explorar o conceito de forma a permitir sua construção.

A avaliação da pesquisa foi feita por uma entrevista coletiva, no final do estudo, na qual Briguenti solicitou aos alunos envolvidos que fizessem considerações sobre o curso. A conclusão final da pesquisadora foi que durante as sessenta aulas (encontros) ela observou que os alunos mantiveram-se motivados e na entrevista muitos disseram que gostaram bastante da maneira como o assunto foi abordado. Um ponto frágil deste estudo foi a não aplicação de instrumentos que pudessem avaliar sua eficácia.

Em relação às funções, no contexto do computador, existem diversos trabalhos. Um deles, que nos interessou sobremaneira, foi o de Borba (1993), que analisou a compreensão dos alunos nas transformações de funções utilizando, para tanto, “softwares” que permitem múltiplas representações.

O estudo foi feito com dois alunos de uma escola americana de Ithaca, N.Y., que tinham conhecimentos básicos sobre algumas funções, tais como as de 1º grau e quadráticas e sobre o computador, mas não sobre o “software”. A pesquisa foi realizada no laboratório do grupo de Educação Matemática da Cornell University, com a metodologia “experimento de ensino” (Cobb & Steffe, 1983)^[10] e constou de oito sessões de duas horas cada, com os alunos trabalhando individualmente, tendo à disposição um computador Macintosh. Eles foram encorajados a usar tanto a tecnologia quanto o papel e lápis.

O objetivo foi analisar a percepção dos estudantes em relação às transformações, isto porque elas “*conservam certas características das funções, como por exemplo o tipo de curva (típica da função de 1º grau, 2º grau, etc.), enquanto que outras, tais como a taxa de variação do crescimento a partir do valor inicial, são modificadas*” (pág. 2). O estudo abrangeu os seguintes tipos de transformações: alongamentos e translações, tanto verticais quanto horizontais, e reflexões. Para tanto, utilizou três famílias de funções: as quadráticas, as modulares e as escadas. Vale a pena observar que ele não trabalhou, especificamente, funções trigonométricas.

Borba (1993) investigou qual o papel da visualização quando utilizada como a primeira ferramenta no estudo das transformações de funções, em gráficos, tabelas e equações (nesta ordem), pois estabelecer a ligação entre estas representações é importante para facilitar e dar uma maior significado às respostas de problemas com os quais os estudantes lidam. Para a análise, aplicou um pré e um pós teste convencionais e uma entrevista teste, na qual o estudante interagiu com o pesquisador.

Uma das grandes contribuições desse estudo, em nosso entender, advém da discussão profunda sobre a importância de se estudar transformações de funções por múltiplas representações no contexto computacional. Além disso o pesquisador chama a atenção para o fato de que o professor hoje encontra diversos “softwares” dinâmicos no mercado, que incluem tabelas, expressões algébricas, gráficos cartesianos e de barras, o que aumenta a necessidade de se entender como funcionam as transformações em cada uma das possíveis representações.

Borba (Ibid) conclui que o uso da tecnologia facilitou o estabelecimento da conexão entre as representações, graças à flexibilização das investigações feitas pelos

10. Os experimentos de ensino são constituídos de entrevistas no estilo piagetiano, nas quais é entendido que sempre o entrevistador interage com o aluno, mesmo de forma involuntária.

alunos e, ainda, que as atividades no computador permitiram o desenvolvimento de estratégias originais quanto à resolução de problemas. Contudo, adverte que é necessário considerar que computadores gráficos podem confundir os estudantes dependendo da forma como são usados, ou de como são construídas as atividades, ou ainda das próprias características do contexto. Variáveis como a escala, o tamanho reduzido, a resolução dos gráficos nas telas e ainda limitações no que se vê, podem induzir a erro. Exemplifica dizendo que os estudantes acreditaram que uma mudança na escala no ambiente gráfico podia metamorfosear a expressão algébrica de uma função quadrática em uma função linear. De toda forma, em sua pesquisa, para a percepção de diversos dos aspectos das transformações que são invariantes nas famílias de funções, nas diferentes representações, foi fundamental o contexto computacional, os “softwares” usados e a abordagem por visualização das transformações que, durante o experimento, teve papel central tanto para a superação das dificuldades quanto para as generalizações.

Outra pesquisa interessante, utilizando o computador, foi realizada por Gomes Ferreira (1997), na qual é discutida a importância das representações em matemática.

O objetivo do estudo foi investigar as percepções dos estudantes sobre funções, quando eles interagem com as diferentes representações dinâmicas das mesmas, em ambiente computacional, com o auxílio de dois “softwares”: Function Probe (Confrey et al, 1991) e DynaGraph (Goldenberg et al, 1992). O estudo de caso envolveu 4 pares de estudantes que já haviam aprendido funções e foi realizado em Recife, Pernambuco. Sua pesquisa esteve voltada para o levantamento das diferentes formas dos alunos analisarem funções: pontual, variacional, global e pictorial. Para tanto, em suas atividades, selecionou 12 funções para exploração de algumas características, tais como: periodicidade, simetria, conjunto Imagem e variação. O foco da pesquisa foi a análise das diferentes maneiras pelas quais cada estudante percebe as propriedades funcionais nas diferentes representações dinâmicas.

A pesquisadora adota em seu trabalho a posição de que idéias e representações são inseparáveis, porque idéias são sempre representadas e é por meio de nossas ações e representações que construímos o significado matemático. Assume que *“a conexão entre percepção de um conceito em diferentes representações são essenciais para a construção do conceito”* (pág. 29).

Enfatiza a importância, com a qual concordamos, de se usar em funções múltiplas representações, isto porque as propriedades de uma função não têm o mesmo “status” em qualquer representação. Exemplifica com a função de 1º grau, na qual a raiz e o coeficiente angular têm diferente destaque na representação cartesiana e na algébrica.

Para Gomes Ferreira (Ibid) os resultados desta pesquisa sugerem que precisam ser feitas modificações no currículo brasileiro, no tocante à forma de introdução de funções. Tal argumento advém de terem sido encontradas limitações nas percepções das propriedades por parte dos alunos envolvidos no projeto e, ainda, terem sido identificadas barreiras que parecem ser derivadas do tipo de abordagem feita na escola. Entre outras modificações, a autora propõe a criação de situações motivadoras como, por exemplo, jogos e o uso de softwares dinâmicos.

Acreditamos ser importante o uso de softwares dinâmicos e procuraremos, quando da criação de nossa sequência, estar atentos para as considerações discutidas nos estudos acima descritos.

Ainda no campo das funções, citamos o trabalho de Oliveira (1997) que, com a aplicação de uma sequência no contexto do papel e lápis, teve por objetivo auxiliar a evolução qualitativa da concepção de função dos estudantes do 3º Grau. A pesquisa foi aplicada para 16 alunos do 1º ano de Engenharia, com 4 sessões de 2 horas de duração cada uma. Nas 3 primeiras sessões os alunos trabalharam em dupla e na última individualmente. Como esses alunos já haviam aprendido função anteriormente, Oliveira apresentou a eles atividades criadas a partir de dados e gráficos de revistas, livros e jornais, com a finalidade de facilitar o estabelecimento da ligação entre o assunto função e a vida cotidiana desses estudantes. Em nosso entender esta é uma postura extremamente importante para dar sentido ao ente matemático.

Nas conclusões de sua pesquisa Oliveira (Ibid) argumenta que aspectos funcionais tais como variação, correspondência e dependência entre variáveis começaram a ser identificados pelos alunos e que, a partir de tabelas, gráficos ou expressões algébricas, muitos reconheceram funções e *“perceberam que algumas funções podem corresponder a situações da realidade e ainda que podemos usar diversos registros de representação”* (pág. 131).

Com relação ao contexto do “mundo experimental”, infelizmente, não encontramos na literatura especializada pesquisa abordando funções trigonométricas.

A leitura das pesquisas acima relatadas, tanto as relacionadas ao contexto do papel e lápis — como a de Oliveira (1997), que abordou as concepções de funções, e a de Briguenti (1994), que nos forneceu informações sobre o ensino da trigonometria — quanto as ligadas ao contexto do computador — como a de Wenzelburger (1991), sobre a interferência de parâmetros nas funções trigonométricas, a de Borba (1993), que estudou transformações de funções, e a de Gomes Ferreira (1997), sobre as diferentes formas dos alunos as analisarem — foram de grande valia quando da elaboração do desenho de nosso estudo, auxiliando-nos na seleção dos conteúdos e na maneira de abordá-los

Capítulo IV: A Escola e a Trigonometria

A ESCOLA E A TRIGONOMETRIA

4.1. Introdução

O objetivo deste capítulo é avaliar quais são os conteúdos trigonométricos ensinados e como isto é feito nas escolas. Para tanto analisaremos o Currículo Escolar e Livros Didáticos, já que esses são os dois melhores indicadores do que e como os alunos aprendem trigonometria. Ao final faremos um levantamento dos obstáculos e das dificuldades ligadas a este assunto.

4.2. Análise de uma Proposta Curricular

Não há, no Brasil, um Currículo unificado, nacional. Analisamos, então, a “Proposta Curricular para o Ensino de Matemática do 2º Grau”, de 1992 (a mais recente), da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo.

Iniciamos mencionando que, na seção “Preocupações Metodológicas” está que: “*a participação do aluno na elaboração de seu conhecimento é um dos pontos fundamentais da concepção atual de aprendizagem*” (pág. 10). O que demonstra a preocupação dos educadores paulistas com a ação do aprendiz, pedra fundamental do Construtivismo.

O processo ensino-aprendizagem no 1º e no 2º graus não pode prescindir do “concreto”. A “Proposta” alerta que, na busca das concretizações, pode-se correr o risco de artificializar aplicações e que muitas vezes é preferível justificar a introdução de um conceito apenas como suporte para o aprendizado de outros. Exemplifica afirmando que: “*em Trigonometria, a concretização do ciclo trigonométrico, por meio de um objeto manipulável, seria um artificialismo*” (pág. 12). Para nós isto não é necessariamente verdadeiro.

Embora concordemos que existam ramos da Matemática nos quais um conceito deva ser introduzido como ferramenta para assuntos posteriores, como os de Álgebra Linear; pensamos que no caso específico do ciclo e, em particular, das funções trigonométricas é possível apresentar situações artificiais, no mundo real, que procurem pôr o aluno em ação para auxiliá-lo a dar significado ao conceito.

Queremos provocar no estudante uma mudança de ponto de vista em relação às razões trigonométricas (do triângulo retângulo para o ciclo), aos ângulos (do quadro geométrico para o trigonométrico) e, ainda, tornar significativos o ciclo e as funções circulares. Para atingir esses objetivos, as situações idealizadas no “mundo experimental” podem ser um ponto de partida, uma vez que é possível aproveitar conhecimentos advindos do cotidiano. Naturalmente não podemos limitar o estudo a elas, é necessário depois descontextualizar e generalizar, de forma a auxiliar o aluno a atingir o conhecimento operativo. É a proposta deste estudo.

No capítulo dos Conteúdos Programáticos está salientado que existe diferença no número de aulas semanais de matemática das Escolas, o que determina conteúdos diversos. No *Anexo 4.2.* eles estão reproduzidos.

Vale destacar o seguinte comentário, relativo ao programa:

“Consideramos que o estudo das funções trigonométricas no círculo e suas propriedades deva ser feito no 3º Grau, em cursos específicos que dela necessitam, quando os conceitos de função, continuidade, periodicidade estiverem mais amadurecidos em nossos alunos” (pág. 21).

Consideram-se como mais significativas para a formação do aluno as relações entre as medidas de lados e ângulos agudos de um triângulo retângulo e a extensão à 1ª volta, no ciclo trigonométrico. A Proposta ainda sugere que: *“Podemos fazer a Trigonometria da 1ª volta sem sequer falar em graus ou radianos”* (pág. 21).

Quanto ao conteúdo Trigonometria da 1ª volta, ele foi inserido no início da 2ª série e inclui Funções Circulares. Parece-nos que o objetivo geral: *“caracterizar o ciclo trigonométrico e estender os conceitos para qualquer ângulo”* (pág. 28) dificilmente será atingido apenas com o estudo da 1ª volta, uma vez que aspectos fundamentais do ciclo não poderão ser discutidos.

Nos Comentários dos Conteúdos (vide *Anexo 4.2.*) pede-se para *“associar a cada número real um ponto no ciclo utilizando a unidade radiano”*, o que contradiz a sugestão de abordagem, já mencionada, sem a utilização do radiano.

Pensamos que a idéia da “Proposta” não é impor a cada escola os conteúdos, mas estabelecer o mínimo a ser cumprido. Porém, em relação à Trigonometria, não é claro o que deve ser ensinado.

Após essa análise, formulamos as seguintes questões:

1. COMO ATINGIR O OBJETIVO GERAL PROPOSTO PARA FUNÇÃO CIRCULAR?
2. É INTERESSANTE INTRODUIR O CICLO E AS FUNÇÕES SEM USAR GRAUS OU RADIANOS?
3. QUAIS AS CONSEQUÊNCIAS DE RETIRAR DO 2º GRAU AS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS?.
4. QUAL O CONTEÚDO TRIGONOMÉTRICO EXIGIDO NO VESTIBULAR?

Tentemos respondê-las. Quanto à primeira, não é possível chegar às funções trigonométricas de variável real $f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$, pela abordagem sugerida (com ângulos de 0° a 360°). Neste caso, ensinamos uma função cujo domínio é o conjunto dos ângulos

geométricos de 0° a 360° e cujo conjunto imagem é o mesmo da função $f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$, $f(x) = \text{sen } x$. Podemos denominá-la função **Seno**, usando maiúsculas, como é feito em alguns países e é sugerido por Watanabe (1996), para que não se forme uma concepção inadequada.

Ainda em relação à primeira questão, pensamos que um importante aspecto, a mudança de ponto de vista em relação ao ângulo, do geométrico para o trigonométrico, não foi focado. Em geral, apenas o quadro geométrico é largamente utilizado na trigonometria do triângulo retângulo. A mudança para o quadro da geometria analítica também não foi adequada, pois a extensão para o ciclo tem na trigonometria da 1ª volta, usando graus, apenas uma etapa.

A grande diferença de estatuto do ângulo geométrico para o trigonométrico, já discutida no capítulo II, é que o último pode incluir mais de uma volta, enquanto o primeiro não é maior que 360° e, dependendo da definição adotada, nem sequer maior ou igual a 180° . Na trigonometria podemos falar em ângulos de 1220° , por exemplo, ou em ângulos negativos como -3672° , por exemplo.

Quanto à segunda questão, sobre o interesse de se introduzir funções trigonométricas sem falar em graus ou radianos, pensamos que, ainda que se possa estudar só no quadro da geometria analítica essas funções, uma vez que o radiano surge na história muito depois das funções seno ou cosseno, pensamos que esta não seria uma boa forma. Sugerimos, ao contrário, que se discuta a necessidade do uso do radiano, como facilitador de cálculos.

Em relação à retirada das funções trigonométricas de variável real do currículo do 2º Grau, teríamos como consequência a impossibilidade de introduzir, por exemplo, na Física, o Movimento Harmônico Simples e a Ondulatória, cujas equações dependem das funções trigonométricas.

Pensando na última questão, sobre os conteúdos programáticos exigidos nos vestibulares, pesquisamos os editais de alguns dos principais destes exames^[11], de 1996. Sabemos que eles são importantes para os alunos de 2º Grau, já que este não é um curso profissionalizante. Estabelecemos uma comparação com o que é exigido

[11] 11. Analisamos os editais da FUVEST (Fundação Universitária para o Vestibular), que envolve por volta de 140.000 estudantes e é o mais concorrido do Estado; o da P.U.C. (Pontifícia Universidade Católica de São Paulo) e o da F.G.V. (Fundação Getúlio Vargas).

nestes exames e o que está na “Proposta”. O que observamos foi que, se as escolas oficiais e particulares atendessem apenas ao mínimo nela exposto, em relação à Trigonometria, os alunos precisariam de estudos complementares para dominar o conteúdo exigido para os principais vestibulares.

Os editais desses exames incluem medidas de arcos e ângulos, não mencionando explicitamente as unidades de medidas, mas uma análise dos últimos vestibulares mostra que o radiano vem sendo solicitado. Exigem ainda o conhecimento dos gráficos das funções circulares e das funções inversas.

4.3. Análise de Livros e Manuais Didáticos

A próxima etapa em nossa pesquisa sobre a Transposição Didática foi a análise dos livros didáticos que são, na verdade, a base do trabalho do professor.

Para tanto nos apoiamos nos estudos da didática francesa Robert (1988), referentes a análise de manuais didáticos. Procuramos escolher como amostra obras cujo uso é bastante difundido nas escolas de 2º grau do Estado de São Paulo. Analisamos ainda um livro específico de trigonometria e um outro não brasileiro, da década de 60. Este último foi selecionado para que verificássemos como era o enfoque do assunto há trinta anos.

Os livros escolhidos foram os seguintes:

- Livro 1: BONGIOVANNI, V; VISSOTO, O.R.; LAUREANO, J.L.- “Matemática e Vida”, 2º Grau. Volumes: 1, 2 e 3, Editora Ática, São Paulo, 1993.
- Livro 2: GIOVANNI, J.R; BONJORNIO J.R. - “Matemática 2”, Editora F.T.D., São Paulo, 1992.
- Livro 3 : MACHADO, Antonio dos Santos - “Matemática Temas e Metas” Volume 2 Trigonometria e Progressões, Editora Atual, São Paulo, 1986.
- Livro 4 : SCHOOL MATHEMATICS STUDY GROUP - Matemática - Curso Colegial, vol.II - tradução da série Mathematics for High School, Yale University Press, New Haven, U.S.A., EDART - Livraria Editora Ltda, São Paulo, 2ª edição, 1966. (Livro largamente usado, na época, em escolas americanas).

Para proceder à análise estabelecemos critérios :

1. Com relação ao conteúdo, verificamos se os livros analisados seguiram ou não a “Proposta” e o conteúdo dos editais dos vestibulares. Isto foi feito para observar qual a influência de ambos na confecção dos livros didáticos.

2. Na parte teórica observamos:

- * qual forma de introdução dos conceitos,
- * se foram retomados os pré requisitos do assunto,
- * se houve ou não uma preocupação em relação à história e qual foi a importância dada a ela no texto,
- * se os obstáculos epistemológicos e didáticos podem ser superados pela abordagem proposta no texto,
- * se houve preocupação em dar sentido às funções seno e cosseno,
- * se a abordagem pode desenvolver concepções errôneas nos alunos.

3. Com relação aos exercícios observamos :

- se são contextualizados, estabelecendo uma ligação com a vida prática,
- se apresentam um único tipo de solução ou várias e ainda se são propostos problemas sem solução,
- se há mudança de quadros, múltiplas representações e diversos pontos de vista,
- se é dada autonomia ao aluno,
- se os problemas são abertos ou fechados,
- se a quantidade de exercícios pode ser considerada suficiente para aprendizagem e fixação.

Comentaremos cada um dos livros analisados, visto que a sequência de apresentação do assunto difere de um para outro e no final apresentamos nossas observações gerais.

Os autores do Livro 1 propõem um estudo sistemático da trigonometria ao longo de todo o 2º Grau (seguindo a proposta do currículo em espiral) e, por isso, analisamos os três volumes da coleção.

Seguem a sugestão da “Proposta” quanto ao conteúdo do 1º e 2º anos e a seguir complementam o estudo com as funções trigonométricas de domínio \mathbb{R} atendendo, portanto, também às exigências do vestibular.

No volume 1 são apresentadas as razões trigonométricas no triângulo retângulo e no volume 2 é introduzido o ciclo trigonométrico. Iniciam o segundo volume por uma revisão de pré requisitos como: gráficos cartesianos, o conceito de função e a semelhança de figuras. Seguem introduzindo o radiano e a transformação de unidades de medida de ângulo. Definem, a seguir, seno, cosseno e tangente de um ângulo obtuso. Reproduzimos a forma de introdução na figura seguinte. As definições são justificadas como necessárias para cálculos trigonométricos.

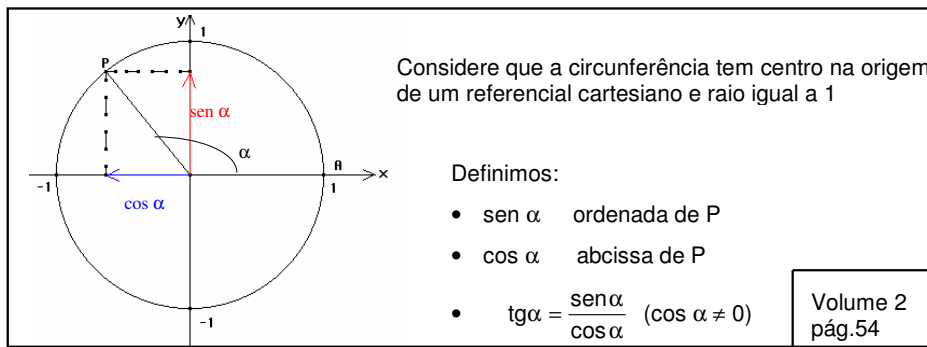


Figura 9: Definições de seno, cosseno e tangente de um ângulo obtuso

Algumas páginas à frente definem o ciclo trigonométrico e usam a relação fundamental da trigonometria para ângulos de 0° a 360° . Observamos que, apesar da intenção ser a de estender a validade da relação para os ângulos maiores de 90° , o desenho apresentado está no 1º quadrante. É mencionada a sua validade para outros quadrantes e para os valores 0° , 90° , 180° , 270° , 360° , casos nos quais o teorema de Pitágoras não seria aplicado; porém não há demonstração.

A primeira função trigonométrica a ser introduzida é a função seno. Ela é definida para um número real $x \in [0, 2\pi]$, da seguinte forma:

“Sobre uma circunferência trigonométrica, efetua-se um percurso de comprimento x no sentido anti-horário, a partir do ponto $A(1,0)$. Seja P o ponto de chegada desse percurso. Então define-se $\text{sen } x$ como $\text{sen } \theta$ rad, isto é a ordenada do ponto P , observando que $x = \theta$ ” (pág. 114).

Os autores alertam que em alguns países diferencia-se **sen**^º como sendo o símbolo usado para quando se usa o arco em graus e **sen**rd, em radianos e que o símbolo **sen** é reservado apenas para o caso do seno de um número real.

É apresentado o gráfico, com domínio $[0, 2\pi]$, e o estudo da imagem; dos valores máximo e mínimo, dos intervalos nos quais a função é crescente e decrescente e feita uma análise dos sinais assumidos, ou seja, dos intervalos onde a função é positiva ou negativa.

Só no volume 3 é iniciada a trigonometria dos números reais. Observam que:

"A trigonometria estudava as relações entre as medidas dos lados e dos ângulos de um triângulo. Com o tempo os conceitos foram se estendendo para abranger os movimentos circulares. Muitos problemas exigiram que os conceitos se ampliassem ainda mais. É o caso dos estudos de fenômenos periódicos de todas as espécies, abrangendo desde o vaivém do pêndulo de um relógio ou as oscilações de um lustre até o movimento dos planetas e fenômenos ondulatórios" (pág. 145).

Isto mostra a preocupação em estabelecer a ligação com a vida do dia a dia.

Após o estudo das equações trigonométricas é introduzida a função seno pela seguinte definição: *"Uma função f de R em $[-1,1]$ recebe o nome de função seno quando associa a todo x real o elemento y , tal que $y = \text{sen } x$ " (pág. 166 - volume 3).* Apresentam o gráfico e analisam o Domínio, a Imagem e o Período da função. Sobre a periodicidade escrevem:

"Observe o gráfico acima ($f(x) = \text{sen } x$). Podemos imaginar sua construção a partir de um carimbo, no qual o período ($p = 2\pi$) é o comprimento do lado do carimbo paralelo ao eixo x . Matematicamente $\text{sen}(x + p) = \text{sen } x$, para qualquer x real. Em Física, este comprimento do carimbo é chamado de comprimento de onda" (pág 166).

Para a função cosseno o raciocínio é análogo, sendo repetido até mesmo o comentário acima, para o caso da função cosseno.

Quanto ao Livro 2 a proposta é diferente. A trigonometria está toda concentrada neste volume e a sugestão é que seja usada por alunos do 2º ano.

A sequência de apresentação do assunto é a seguinte: iniciam revendo a trigonometria no triângulo retângulo, definem arco de circunferência e diferenciam medida angular da linear. Introduzem o radiano e as transformações de unidades de medidas de ângulo, retomam o cálculo do comprimento da circunferência e de um arco de circunferência.

Definem a circunferência trigonométrica, os arcos côngruos e as funções circulares. Apresentam o gráfico da função seno desenhado de 0 a 3π . É mencionado que ele continua à esquerda e à direita, mas pensamos que seria conveniente apresentar, logo abaixo, um gráfico em que isso ocorresse, para evitar a formação de uma concepção errônea no aluno.

Definem a função cosseno e repetem estudo análogo ao do seno.

Observamos que em nenhum momento o livro usa ângulos que necessitem uma consulta à tabela trigonométrica e, apesar de mencionar que **cos x** e **sen x** são respectivamente abcissa e ordenada de um ponto P do ciclo trigonométrico, só propõe um exercício, na parte de fixação e no final do capítulo, sobre determinação das coordenadas de P.

Quanto ao Livro 3 : “Matemática - Temas e Metas” Volume 2, ele integra uma coleção com os conteúdos matemáticos distribuídos por assunto e não por série escolar, cabendo ao professor dividir este conteúdo nas três séries, ou como achar mais conveniente.

A sequência de apresentação do assunto é a seguinte: Inicia com a trigonometria nos triângulos retângulos e quaisquer. Prossegue com medidas na circunferência, discute o comprimento de arco e quais são as unidades de medidas de ângulo, define o radiano e passa à transformação de unidades. Define o arco trigonométrico e o ciclo, a seguir o seno e o cosseno de um número real x são definidos como ordenada e abcissa do ponto P, imagem de x , no ciclo. Define ainda o seno e cosseno dos arcos côngruos, denominados “números congruentes” (pág. 48).

Por fim introduz as funções trigonométricas. A definição da função seno é a seguinte: “Denominamos função seno a função que a cada número real x faz corresponder o número $y = \text{sen } x$ ” (pág. 50).

É apresentado o gráfico de um período da função, construído a partir de uma tabela de valores e é discutida a periodicidade, de forma clara, porém abstrata e descontextualizada, sem aproveitar este momento para a ligação com o dia a dia.

Na sequência é feito um estudo da função $y = a \sin x + b$, sendo a e b números conhecidos (não é mencionado de qual conjunto), com $a \neq 0$.

O estudo da função cosseno foi análogo ao do seno.

A definição de função par e ímpar é relembra para discutir que: $f(x) = \cos x$ é par. Isso é feito atribuindo-se valores de x e observando-se que $\cos x = \cos (-x)$. Não é feita mudança de ponto de vista, ou seja, no caso não é discutido que esta propriedade traduz-se, no quadro gráfico, por uma simetria em relação à origem.

A relação fundamental é apresentada depois das funções seno e cosseno.

Quanto à periodicidade das funções senoidais, ela é analisada em apêndice inserido no final da trigonometria, quando o aluno já aprendeu as fórmulas de transformação em produto de forma que se pode provar, algebricamente, que se $f(x) = \sin wx$ é periódica de período p , então $p = \frac{2\pi}{w}$.

No Livro 4, o último que analisamos, tivemos por objetivo identificar as mudanças ocorridas quanto ao enfoque do assunto, após 30 anos de sua publicação. Este foi um livro adotado em algumas escolas paulistas na década de 60.

A trigonometria está no volume 2, logo após os logaritmos e as funções exponenciais e logarítmicas. Ela é iniciada com o estudo de ângulos e percursos, procurando modificar o conceito de ângulo geométrico. O “ângulo no sentido elementar” é retomado e, a seguir, é introduzido o ângulo orientado, como sendo o ligado a um percurso. Para tanto consideram um círculo unitário de centro A e um percurso iniciado num ponto P e terminado num ponto Q , sendo AP o “lado inicial” do ângulo e AQ o “lado terminal”. A partir desta nomenclatura definem ângulo orientado, discutindo que uma direção, um módulo e um sentido são associados a ele.

O próximo assunto é o cálculo da medida de um ângulo θ , em radianos, como sendo a razão entre comprimento do arco e raio. Só depois os autores apresentam outras medidas de ângulos, como a “*revolução*” e o “*grau*”.

Consideramos interessante esta abordagem das unidades de medida de ângulo, pois mostra que o “grau” é apenas uma das unidades possíveis. Destacam:

“Costuma-se medir ângulos em graus, minutos e segundos na agrimensura e na resolução de triângulos. O radiano, entretanto, é a unidade mais

simples para medir ângulos nos problemas que envolvem cálculo diferencial e integral” (pág. 334).

Vimos em nosso estudo histórico que o radiano surge como um facilitador de cálculos para as derivadas, pois a derivada de $\sin x$ só é $\cos x$ se o ângulo x for medido em radianos. O livro procurou justificar a introdução da unidade como ocorreu na História.

Pensamos que apesar do uso de uma nomenclatura um tanto sobrecarregada (ângulos equivalentes, co-terminais, em posição normal, entre outras...), o livro procura ampliar adequadamente o conceito de ângulo, utilizando para tanto sete páginas e 29 desenhos explicativos.

As Funções Trigonômicas são inicialmente definidas para ângulos arbitrários e não números reais. O seno é definido como ordenada de um ponto P do ciclo e são introduzidas as seis funções ao mesmo tempo, primeiro para ângulos em “posição normal” e depois para ângulos quaisquer. Um ângulo está em posição normal “*se e somente se, o seu vértice estiver na origem e o seu lado inicial se estender ao longo do eixo positivo dos x . Todo ângulo é equivalente a um, e somente um, ângulo em posição normal*” (pág. 329 - Livro 4).

Estendem o cálculo das seis funções para o caso de estarmos com um círculo não unitário e retomam os ângulos agudos no triângulo retângulo mostrando que as definições das seis funções são equivalentes às definições já conhecidas das razões trigonométricas no triângulo retângulo.

Definem “ângulo fundamental” como sendo o ângulo compreendido entre 0 e 360° e destacam as propriedades como teoremas, sendo o primeiro a relação fundamental da trigonometria. Incluem a recíproca da relação fundamental, ou seja, se x_0 e y_0 são dois números quaisquer tais que $x_0^2 + y_0^2 = 1$, então existe um único ângulo fundamental θ tal que $\cos \theta = x_0$ e $\sin \theta = y_0$. Em nosso entender é muito interessante esta abordagem e, normalmente, ela não aparece nos livros didáticos atuais.

Como propriedade colocam que se $-1 \leq y_0 \leq 1$ temos dois ângulos fundamentais com seno igual a y_0 . Esses ângulos têm cossenos dados por $\sqrt{1-y_0^2}$ e $-\sqrt{1-y_0^2}$.

Dão um tratamento da Geometria analítica para pontos do ciclo que têm mesmo seno e são portanto simétricos em relação ao eixo dos senos. Nos livros atuais tira-se a conclusão de que $\sin a = \sin (\pi - a)$ por análise do desenho (congruência de triângulos). O mesmo tipo de abordagem é feito em relação a ângulos que têm o mesmo cosseno. Como última propriedade analisam os arcos côngruos.

Observamos várias mudanças na forma de apresentação do assunto. Em relação à nomenclatura são introduzidos diversos termos e definições acessórios e a sequência de abordagem é bastante diferente. Quanto ao uso da tabela, é dedicado um subcapítulo totalmente a ela e explicado ao aluno que, como os valores de seno e cosseno, em geral, são números irracionais, as tabelas fornecem aproximações decimais. Discutem, em cada tipo de tabela, qual o número de casas que se pode considerar correto e apresentam uma com precisão de três casas decimais. Ensinam como efetuar interpolações e calcular funções de ângulos que não estão incluídos na tabela.

Quanto aos gráficos das funções trigonométricas, não é feito estudo das transformações, isto é, não encontramos estudo de Domínio, Imagem e Período de funções do tipo $y = a \sin (wx + x_0) + b$, com $a \neq 0$.

Feita a descrição de como os livros analisados abordam a trigonometria, relataremos nossas observações gerais.

- a) as funções trigonométricas são estudadas utilizando pouca ou nenhuma contextualização.
- b) O tratamento dos pré-requisitos, tais como o conceito de função, os gráficos de funções, ângulos, unidade de medidas e a trigonometria no triângulo retângulo, nem sempre é adequado. Por exemplo: as razões trigonométricas e as formas de medidas de ângulos, em geral, são vistas antes de se introduzir função trigonométrica, mas o conceito de função e a semelhança muitas vezes não são lembrados.
- c) Quanto à História da Matemática, ela geralmente aparece no início ou no final de cada capítulo, como curiosidade, mostrando desta forma uma tendência ou modismo, que não contribui efetivamente ao desenvolvimento do assunto em si. Muitas vezes é

abordada a biografia de algum matemático, contendo detalhes de sua vida pessoal sem ligação com o contexto.

d) Em relação aos exercícios, os ligados às razões no triângulo retângulo têm relação com a vida prática, mas nos que envolvem as funções trigonométricas nem sempre isto ocorre. Apresentam, normalmente, solução única e não encontramos referências a problemas impossíveis. Em geral eles são fechados e não é dada autonomia ao aluno.

e) Observamos, ainda, que nem sempre os livros se preocupam com a mudança de ponto de vista de ângulo do geométrico para o trigonométrico,

f) Em geral as demonstrações são feitas no primeiro quadrante e fica a cargo do aluno generalizá-las.

g) Nem sempre há uma preocupação com a tabela trigonométrica, sua construção e utilização em exercícios. Os exemplos para o uso da tabela, em geral, são em **graus** e quando em radianos deve-se fazer a transformação de unidades, o que pode levar o aluno a pensar: Será que o radiano só surge para atrapalhar? Em geral não é explicado o porquê da introdução desta unidade.

Assim, a partir da análise da “Proposta Curricular do Estado de São Paulo” e de livros didáticos, passamos a uma visão mais apurada dos conteúdos e dos materiais disponíveis ao professor e nos predispomos, quando da preparação da sequência didática, a tentar evitar alguns aspectos falhos que observamos nos livros didáticos. Procuraremos, por exemplo, trabalhar em todos os quadrantes e evitar os exercícios de fixação que só envolvam algoritmos e procedimentos. Acrescentamos que as reflexões sobre a Transposição Didática nos remeteram às questões da pesquisa empírica (relatada no capítulo de Introdução), quanto ao que foi dito pelos alunos sobre a trigonometria. Cada vez mais nos convencemos da necessidade de se repensar o ensino de trigonometria no 2º grau.

4.4. Análise dos Obstáculos e das Dificuldades de Ensino

Esta seção dedica-se ao levantamento do que entendemos como obstáculos epistemológicos e didáticos e, ainda, as dificuldades de ensino em trigonometria.

4.4.1. Obstáculos Epistemológicos

Segundo Bachelar(1965) os obstáculos epistemológicos ocorrem tanto no desenvolvimento histórico do pensamento científico como na prática educacional. Analisaremos os obstáculos ligados ao conceito de função, já que as trigonométricas são funções particulares, e em seguida os inerentes à trigonometria. Para os primeiros tomamos por base o estudo da didata francesa Cotret (1988).

Constatamos, na História, que o conceito de função mudou, tanto na forma quanto no conteúdo. Isto é, ao longo do tempo, foram mudando tanto a definição propriamente dita quanto os conceitos e elementos aos quais ela se refere.

Na Antiguidade encontramos as primeiras idéias de funcionalidade, pelo uso de tabelas sexagesimais, de quadrados e raízes quadradas. No fim da Idade Média, os movimentos eram estudados de modo qualitativo, dando uma descrição do sentido de variação como sendo diretamente ou inversamente proporcional, mas sem chegar às relações numéricas precisas. Estudavam-se de forma quantitativa apenas certos valores isolados do fenômeno, que tendiam a disfarçar o aspecto de variação contínua.

Foi por representações gráficas para os estudos qualitativos e quantitativos do movimento que se estabeleceu a noção de variável dependente. No começo, com Oresme (1323-1382), elas não eram quantitativas. Galileu (1564-1642), buscando como e por quê ocorre o movimento, introduziu o numérico nas representações gráficas e Descartes (1596-1650), definiu bem a noção de variável dependente.

Gouvêa et al (1996) discutem que, desde Euclides, havia uma nítida separação entre números e grandezas, o que provocava **obstáculos epistemológicos** quanto à homogeneidade, proporção e incomensurabilidade. Vejamos tais obstáculos:

A) Proporção

Entre os gregos e até a Idade Média as relações entre grandezas ou quantidades eram expressas por proporções, o que disfarçava a relação de funcionalidade que poderia existir entre as duas "variáveis". Por exemplo: era sabido que a razão entre as áreas de dois círculos é igual à razão entre os quadrados dos diâmetros, mas não se conhecia a relação entre a área e o diâmetro de um círculo, pois esse elemento de funcionalidade não era exprimível pelas proporções.

B) Homogeneidade

O princípio da homogeneidade (axioma de Eudoxo) estipulava que só se comparavam elementos de mesma natureza. Não se podia relacionar um diâmetro e uma área, porque não são de mesma natureza ou dimensão. Isto reforçou a utilização das proporções em detrimento da funcionalidade. Devido ao princípio, era impossível uma definição métrica da velocidade, ou seja, defini-la como uma função da distância e do tempo, isto é: $v = \frac{d}{t}$. Utilizavam-se, então, as proporções $\frac{V_1}{V_2} = \frac{t_1}{t_2}$.

O axioma excluía problemas envolvendo diferentes dimensões. Na obra “*Geométrica*”, de Heron, aparece uma questão que pede diâmetro, perímetro e área de uma circunferência dada a soma das grandezas e ele a resolve para um caso particular. Esta questão deveria estar fora de qualquer “*consideração teórica pois as três grandezas não são de mesma dimensão, mas do ponto de vista numérico, não crítico o problema faz sentido*” (Boyer, 1974 - pág.125).

C) Incomensurabilidade

A numerização da época da Escola Pitagórica levaria ao desenvolvimento da noção de função. Porém, a descoberta da incomensurabilidade influenciou sobre a utilização das proporções. Quando tentavam expressar as razões numéricas entre grandezas, os pitagóricos descobriram que algumas delas eram incomensuráveis, já que era impossível estabelecer a razão por um sistema de unidade de medidas. Por exemplo, no quadrado podemos comparar a medida da diagonal e do lado, mas não obter o valor dessa relação. No estudo das funções trigonométricas em \mathfrak{R} temos o número π e, portanto, este obstáculo estará presente.

D) Separação entre números e grandezas

Na Antiguidade foram feitas teorias para os números e outras para as grandezas, pois pensava-se que *as relações de grandezas não pudessem ser necessariamente expressas por relações de números, devendo-se, portanto, tratá-los diferentemente*. Tanto é verdade que, nos “Elementos” existem livros reservados às proporções entre números e outros às entre grandezas, com os teoremas demonstrados para cada caso.

O conceito de função necessitava da unificação desses dois elementos para expressar claramente a relação entre duas variáveis, uma vez que ele exige saber que um elemento varia com o outro, e ainda os termos dessa variação.

Além desses comentários, acrescentamos que as questões de dependência e variação são fundamentais para o conceito de função e elas aparecem também quanto às funções trigonométricas. Percebeu-se primeiro a dependência entre um arco e a corda correspondente e depois a que há entre ângulo e seno, por exemplo.

Em nosso entender, o aluno facilmente perceberá dependências, variações e a periodicidade das funções seno e cosseno, mas dificilmente entenderá que estas se enquadram na abstrata definição de função.

Funções são muito importantes por si sós e não podem ser vistas ou pensadas como um caso particular de relação, talvez sem importância. É fundamental procurar transmitir ao aluno que elas são modelos matemáticos usados em situações nas quais a dependência necessita ser expressa. Em muitos textos modernos, as definições adotadas para funções podem esconder esta idéia. No caso das trigonométricas, o professor pode explorar bem a variação e a dependência, auxiliando o aluno a melhor compreender função. Neste sentido, citamos novamente Cotret (1988), com a qual concordamos, quando ela considera que:

“Certos conceitos que foram expressos por funções são melhor adaptados ao ensino do que outros pois eles permitem uma abordagem mais intuitiva e prática. Permitem “ver”, através da experiência, os fenômenos que determinam, que constroem as funções” (pág.116).

Em nosso entender, as funções trigonométricas seno e cosseno, periódicas e com imagem limitada, enquadram-se perfeitamente em tal caso.

Além dos obstáculos inerentes às funções, existem os específicos da Trigonometria, a saber:

a) Ligado ao “Jogo de Quadros”

O estatuto dos objetos trigonométricos pode gerar um obstáculo uma vez que estes objetos surgem no quadro geométrico e numérico atrelados ao triângulo retângulo e não têm características funcionais. No caso das funções trigonométricas, é necessário estender as definições de seno e cosseno para o ciclo, introduzir o arco e ângulo orientado, o sistema de coordenadas cartesianas e ainda estabelecer a

correspondência entre cada ponto da reta real e os respectivos seno e cosseno. Quando se definem as funções seno e cosseno e se introduzem os diversos registros de representação, saímos do quadro numérico e geométrico para o quadro funcional. A concepção da trigonometria, que está estabelecida sob uma forma, deve ser modificada para que se possa chegar às funções trigonométricas.

b) Quanto à origem dos arcos

Na trigonometria, a origem dos arcos é no ponto A (1,0). Considerando que o aluno aprendeu o funcionamento do relógio, cujo ponto de partida corresponderia ao ponto B(0,1) do ciclo, podemos ter aí um obstáculo ao aprendizado do ciclo. Na história, surgiu o relógio e muito depois o ciclo trigonométrico, e o aprendizado do último pode ser afetado pelo conhecimento do funcionamento do relógio, que tem origem em outro ponto e deslocamento em outro sentido. Este é um conhecimento antigo e forte, já que se encontra no cotidiano, sendo usado nas séries iniciais em várias escolas não só para a noção de tempo como também para o ensino da tabuada do cinco.

c) Quanto à concepção de ângulo

A concepção de ângulo geométrico precisa ser modificada para que se possa entender o ângulo e arco trigonométrico. É necessário que o aluno “enxergue” o ângulo sempre em uma circunferência, ou seja, o ângulo central e, ainda, que perceba a necessidade do ângulo ser orientado e a possibilidade dele incluir voltas.

O conhecimento que o aluno tem sobre ângulos e a maneira de lidar com eles na trigonometria no triângulo retângulo pode se tornar obstáculo ao aprendizado dos ângulos trigonométricos.

4.4.2. Obstáculos Didáticos

A partir do estudo da Transposição Didática, levantamos algumas questões que podem ser consideradas como obstáculos didáticos ou dificuldades do ensino das funções trigonométricas. Os obstáculos didáticos são os que parecem depender das escolhas didáticas e que em um outro sistema educacional não se apresentariam. São

eles ligados ao conceito de função, à ausência de análises qualitativas, à geometria analítica. Analisaremos também dificuldades do ensino como as referentes aos diversos registros de representação, às concepções de ângulos e às formas de medi-los. Discutiremos a seguir cada um.

- Obstáculos ligados ao conceito de função

As funções trigonométricas são funções particulares, assim sendo, o conhecimento de função que o aluno tem, já que ele estudou as de 1^a e 2^a graus, a exponencial e a logarítmica, pode ser um obstáculo ao aprendizado das trigonométricas. Estas envolvem uma redefinição do seno e do cosseno, vistos agora como válidos para qualquer número real e não apenas para ângulos agudos, como era do conhecimento do aluno, e envolvem ainda o domínio da nomenclatura funcional.

Na tentativa de minimizar este obstáculo, o professor poderia retomar o assunto função lembrando alguns pontos importantes, tais como a simbologia, o conjunto Domínio, o conjunto Imagem e as múltiplas representações de uma função.

- Dificuldades de articulação dos diversos registros de representação

Sabemos que uma função pode ser abordada sob diferentes registros de representação, ou seja o mesmo **objeto** matemático tem vários significantes. Apresentamos na próxima figura, como exemplo, a função seno que pode ser representada, entre outras, das seguintes maneiras:

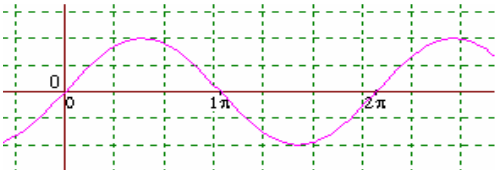
— 1) Por meio do registro algébrico:

— 2) Por meio de uma tabela com alguns valores da função calculados:

x	y
0	0

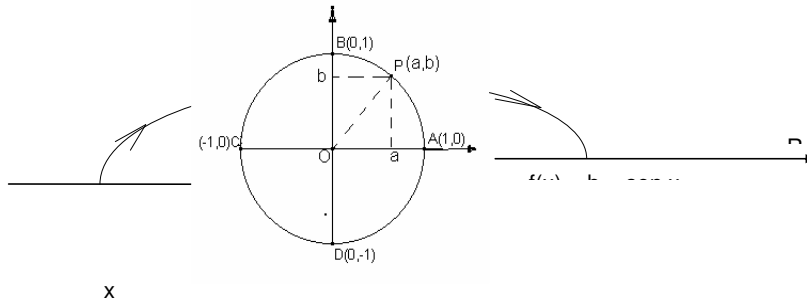
$f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$
 $f(x) = \text{sen } x$

— 3) Por meio de um registro gráfico:



$\pi/2$	1
π	0
$3\pi/2$	-1
2π	0

- 4) Por meio da representação no ciclo trigonométrico, associando a cada número real um arco do ciclo e a ordenada da extremidade desse arco.



x
Figura 10: As Múltiplas Representações da Função Seno

Enfatizamos que, quanto às funções trigonométricas, temos um registro suplementar, o último citado, que é fundamental para sua compreensão. É por meio deste registro que fica clara a ligação existente entre os números reais representados na reta (domínio da função) e os pontos do ciclo.

Entre as representações, a tabela provavelmente é a que mais dificulta uma visão global da função, já que o domínio não é explicitado. Nela temos apenas a colocação de alguns valores (no caso alguns pares ordenados), cabendo ao aluno levar estes pontos para o gráfico e “ligá-los”. Desta forma, será necessário fazer a passagem do discreto, que está na tabela, para o contínuo, no gráfico.

A articulação entre as múltiplas representações é de fundamental importância na forma de se ver e pensar sobre as funções. No caso do estudante não conseguir lidar com cada uma das representações e entender suas conexões, terá grande dificuldade na compreensão do assunto. É fundamental que o professor procure usar diversas representações, porque as várias formas de apresentar o objeto matemático podem auxiliar o aluno a dar significado ao conceito, já que todas estas representações são significantes que tratam do mesmo referente. Além disso, uma só representação não explora, na totalidade, o conceito.

- Obstáculo ligado à ausência de análises qualitativas

Notamos que a preocupação no ensino tradicional brasileiro está no estudo quantitativo de funções. Neste sentido direciona-se para a atribuição de valores do domínio e cálculo da imagem correspondente. Dificilmente são feitas análises enfocando só os aspectos qualitativos das funções, principalmente das trigonométricas. Isto pode provocar um obstáculo didático, pois o ciclo tem uma forte ligação com o movimento que, até o fim da Idade Média, era estudado apenas qualitativamente. Essa informação histórica, em geral, não é levada em conta quando ensinamos este assunto.

Podemos propor atividades que procurem dar condições para o aluno perceber características qualitativas das funções tais como os intervalos em que ela é crescente ou decrescente, os sinais assumidos e a “forma” do gráfico. Isto é válido também em relação a seno e cosseno, quando estudados no ciclo trigonométrico.

- Obstáculos ligados à geometria analítica

Um ponto **P** é localizado no ciclo trigonométrico por suas coordenadas cartesianas $P = (\cos x, \text{sen } x)$ em que x é um número real. Apesar desta representação “estar ligada” ao ângulo central correspondente a x , ela tem a vantagem de dispensar o conhecimento da medida deste ângulo, bastam as projeções seno e cosseno. Lidar com isso exige uma desenvoltura no quadro da geometria analítica que nem sempre o aluno possui, já que ela é estudada em detalhes apenas no 3º ano, num momento posterior à introdução das funções trigonométricas. Com o que, novamente, nos defrontamos com um obstáculo didático.

Usamos o título **função trigonométrica**. Quando se trata de função, o aluno está acostumado a “enxergar” cada um de seus pontos pelas coordenadas cartesianas. Por exemplo, em uma linear como $f(x) = 2x$ temos pontos do tipo $P=(x, 2x)$ e o estudante pode formar um esquema, no sentido de Piaget, no qual sempre em um ponto $P= (x, y)$ o y é igual a $f(x)$. Porém, ele deve distinguir os pontos P do ciclo de coordenadas $P= (\cos x, \text{sen } x)$, onde $\text{sen } x$ não é $f(\cos x)$ dos pontos P pertencentes

às funções. Na verdade estudaremos duas funções: em uma delas os pontos do gráfico são da forma $P=(x, \text{sen } x)$ e na outra $P=(x, \text{cos } x)$.

Em outras palavras, um enfoque é o do ponto P da função e outro o do ponto P, extremidade do arco $\widehat{AP} = x$, no ciclo trigonométrico. Neste contexto P é ponto do plano cartesiano e suas coordenadas são o cosseno e o seno do arco \widehat{AP} , ligadas pelo Teorema de Pitágoras. (a relação $\text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x = 1$ não expressa uma função).

- Obstáculos ligados às concepções de ângulos

Sabemos que existem diversas definições de ângulo mas, geralmente, este conceito é introduzido por uma única definição e ponto de vista. Se, entretanto, o professor não se preocupar com as concepções do aluno, isto pode provocar um obstáculo didático à apropriação do conceito de arco e ângulo trigonométrico.

O aprendiz que tem a concepção de ângulo como *a região do plano compreendida entre duas semi retas de mesma origem* poderá ter dificuldades para entender o ângulo interno do triângulo e, por conseguinte, as razões trigonométricas. Ele pode ter uma visão de ângulo como algo que começa no vértice e vai até infinito. No caso do ângulo interno de um triângulo, ele começa no vértice e “termina” no lado oposto. Ora, desta forma estaremos colocando o aluno frente a um paradoxo, estabelecendo um obstáculo didático ao estudo da trigonometria no triângulo retângulo.

A concepção de ângulo como região do plano pode dificultar a compreensão do ângulo trigonométrico. Isto porque ele está no ciclo, é ligado ao ângulo central, envolve uma visão dinâmica de ângulo, isto é, a noção de “giro” e ainda inclui ângulos maiores que 360° e ângulos negativos. Estes fatores contrariam também o conhecimento do dia-a-dia do estudante. Se o professor não levar em conta que o aluno deve mudar seu ponto de vista sobre ângulo para só então estar apto a compreender a trigonometria no ciclo, teremos, além do epistemológico, um obstáculo didático.

- Dificuldades Ligadas às Mensurações

Em relação às unidades de medidas, usamos dois sistemas de medidas, **decimal** para raio e comprimento do arco e **sexagesimal** para o ângulo central correspondente. Isto constitui um obstáculo, pois na história, como já discutimos, apareceram primeiro arco e raio medidos no mesmo sistema, o sexagesimal. Só muito depois se adotou o sistema decimal para a medida do raio.

No sistema educacional brasileiro os alunos trabalham com graus, minutos e segundos, para a medida dos ângulos. A introdução de uma nova unidade de medida, o **radiano**, constitui uma dificuldade pois, normalmente, vem ligada ao ciclo trigonométrico e acompanhada do irracional π . Além disso, necessita o conhecimento da medida do comprimento da circunferência, para determinar quantos radianos tem o ângulo de uma volta.

O obstáculo da homogeneidade está presente porque usamos para o arco de circunferência medidas lineares (comprimento do arco em cm, m, km...) e também angulares (medida do ângulo central correspondente em graus ou radianos).

O aprendizado anterior de medida de ângulo, pode, em nosso entender, tornar-se um obstáculo à introdução do **radiano**, pois a única unidade de medida mencionada é o grau. Não se discute que existem outras e que qualquer escolha de unidades de medidas é arbitrária.

O aluno, para quem ângulo é algo que sempre foi medido em graus, pode não entender o porquê da necessidade de se trabalhar com outra unidade. Façamos uma comparação com, por exemplo, o tempo que é medido em horas (e seus submúltiplos). Imaginemos que, de repente, fossemos introduzir a unidade “xipts” para sua medida. Como convencer o aluno da necessidade tanto desta medida quanto do aprendizado da transformação das unidades de medida de tempo que conhece para “xipts”?

Seria interessante que o professor levasse em conta que, para quem está aprendendo, pode ser muito estranho que no triângulo retângulo a unidade de medida seja o grau mas no ciclo trigonométrico deva-se usar radianos.

- Dificuldades Ligadas às Operações Calculatórias

Podemos considerar ainda a transformação de unidades de graus para radianos e vice-versa, como sendo uma dificuldade, já que envolve o conhecimento da regra de três simples e cálculos ligados aos submúltiplos do grau.

Estes foram os obstáculos e as dificuldades que notamos no ensino-aprendizagem das funções trigonométricas. Com eles consideramos encerrado nosso estudo sobre a Escola e a Trigonometria e a seguir descreveremos a metodologia da nossa pesquisa de campo.

Capítulo V:

Metodologia

METODOLOGIA

5.1. Introdução

Neste capítulo descreveremos a proposta, o objetivo da pesquisa e como ela foi concebida e desenvolvida.

A partir da proposta e do objetivo, descreveremos o desenho geral do experimento, composto por cinco fases consecutivas de pesquisa. Em seguida, discorreremos sobre os sujeitos que foram distribuídos em três grupos, sendo dois experimentais e um de referência. Descreveremos ainda o estudo piloto, denominado “Aplicação Preliminar”, e indicaremos as alterações que consideramos necessárias para um melhor desenho do estudo definitivo. Por fim, descreveremos o estudo principal, com suas atividades e o procedimento adotado.

5.2. Proposta

Neste trabalho iremos investigar a introdução das funções seno e cosseno em três contextos. O primeiro chamaremos de “Mundo experimental”, no qual os alunos resolverão grupos de atividades, tratados como experimentos por nós, construídas a partir de materiais, tais como relógio, areia, madeira e metal, que serão manipulados pelo aluno. O segundo será chamado de “Contexto do computador” e irá explorar o ambiente computacional. O último contexto refere-se à sala de aula, e será constituído por aulas, ministradas pelo professor responsável pela disciplina, em uma classe de 2ª série do 2º grau.

Para os dois primeiros contextos pretendemos introduzir as funções seno e cosseno dando-lhes um tratamento que as torne significativas para o aluno e que considere seu desenvolvimento cognitivo, isto é, que: (a) leve em conta a sua realidade, partindo de seu conhecimento espontâneo; (b) concilie as questões teóricas com situações-problemas que façam sentido na vida prática, (c) valorize as questões do cotidiano para garantir a ligação entre vida dentro e fora da escola e (d) auxilie na construção do conceito das funções seno e cosseno. Para tanto, propomos a elaboração e o desenvolvimento de uma sequência didática.

5. 2. 1. Proposta Didática da Sequência

A sequência didática, que servirá de ferramenta para atingir nossos objetivos, procurará focar o porquê da necessidade de:

1. Estender a definição de seno e cosseno do triângulo retângulo para o ciclo,
2. Definir seno e cosseno como funções de um número real,
3. Localizar um ponto no ciclo com o uso de coordenadas cartesianas.

A sequência didática propõe-se a:

- * Retomar as razões trigonométricas seno e cosseno,
- * Definir o seno e cosseno no ciclo,
- * Definir as funções seno e cosseno de variável real,
- * Construir o gráfico das funções seno e cosseno,
- * Trabalhar algumas das transformações destas funções.

Concluída a sequência didática, a expectativa é que o aluno seja capaz de :

- **α** . Associar um número real ao arco correspondente, no ciclo trigonométrico, e determinar seu seno e cosseno;
- **β** . Reconhecer e aplicar a relação fundamental da trigonometria;
- **χ** . Interpretar expressões do tipo:
$$f(x) = a \operatorname{sen} (\omega x + x_0) + b$$
, ou
$$f(x) = a \operatorname{cos} (\omega x + x_0) + b$$
 com a, b, ω, x_0 , reais, $\omega > 0$ e $a \neq 0$
reconhecendo a conexão entre gráfico e expressão algébrica com diferentes coeficientes;
- **δ** . Analisar Domínio, Imagem e Período em gráficos e expressões que envolvam estas funções;
- **ϵ** . Ligar fenômenos periódicos às funções senoidais ou cossenoidais.

Na tentativa de alcançar estas metas, retomaremos o estudo de função, trabalhando gráficos, simetrias, Domínio e Imagem. Isto é necessário porque, como estudaremos funções particulares, será fundamental estabelecer a ligação com o conceito genérico de função.

Nossos sujeitos serão alunos da 1ª e da 2ª série do 2º grau, que já estudaram alguns tipos de funções, como as polinomiais de 1º e de 2º graus, a constante, a modular, a exponencial e a logarítmica. A expectativa é que, ao longo das atividades do estudo, o aluno construa tabelas e, a partir delas, gráficos. Poderemos então retomar o conceito de função e analisar seu Domínio e Imagem, levando-o a perceber que os gráficos construídos representam funções.

O campo conceitual de nosso estudo é o das funções e, ao inserir as duas trigonométricas, estaremos dando condições para que a estrutura cognitiva do aluno seja ampliada. Iremos retomar características já estudadas, tais como sinais das funções (onde é positiva, negativa ou nula), crescimento e decrescimento e, além disso, estaremos discutindo outras totalmente novas para o estudante, como a periodicidade e a amplitude.

Procuraremos introduzir o conceito de periodicidade de uma função pois, em nosso entender, esta é uma importante propriedade das funções trigonométricas circulares que nos permite estudar, por exemplo, os fenômenos oscilatórios. Como pretendemos fazer uma ligação entre a vida prática (mundo real) e a teoria, podemos ter nesta questão um ponto de partida.

Trabalharemos ainda o conceito de amplitude, já que as funções seno e cosseno apresentam valor máximo e valor mínimo e, portanto, são limitadas. Sabemos que tanto a periodicidade quanto a amplitude são conceitos novos para os alunos de nossa amostra, uma vez que as funções conhecidas por eles até então não possuíam tais características. Desta forma, estaremos facilitando uma ampliação da concepção de função por parte desses estudantes.

5.3. Objetivo

Com esta pesquisa temos o objetivo de observar a influência dos contextos na aprendizagem. Pesquisaremos se uma mesma sequência, constituída de atividades nos contextos do computador e do mundo experimental, aplicada a dois grupos de alunos, advindos de uma mesma população, sofre a influência da ordem de aplicação de tais contextos. Teremos ainda um grupo de referência, para o qual o assunto será

desenvolvido na sala de aula. Procuraremos ponderar sobre a eficácia de cada contexto e sua interferência no momento da aprendizagem.

Pretendemos construir, no “mundo experimental”, atividades que envolvam desafios, por meio de (a) um problema, (b) uma tarefa de descrição e (c) uma de previsão. No computador teremos atividades de retomada das definições das razões trigonométricas, extensão ao ciclo, introdução das funções seno e cosseno e algumas transformações destas funções. Nossa intenção é pesquisar qual a ordem de introdução do assunto que se mostra mais interessante, desafiadora e eficaz para a aprendizagem, ou seja, investigar se é preferível trabalhar primeiro no mundo experimental, com formalização mais limitada, para depois complementar o estudo no computador, ou vice-versa.

Nosso propósito é que as atividades desenvolvidas em cada contexto sejam complementares porém independentes, não estabelecendo pré-requisitos entre elas. Pretendemos, ainda, observar se o aluno aplica em um dos contextos o que aprendeu no outro. Com o propósito de auxiliar as observações, construiremos três testes, que serão aplicados ao longo do estudo.

Procuraremos apresentar, quanto aos dois primeiros contextos, atividades que possibilitem a elaboração, por parte do aluno, do significado do conceito das funções seno e cosseno. Para tal pretendemos estabelecer um paralelo entre essas funções e a realidade.

Resolvemos usar contextos distintos porque resultados de pesquisas em Educação Matemática (Magina, 1994; Nunes et al,1993) têm apontado para diferenças no desempenho dos sujeitos, conforme o ambiente e a situação em que as atividades estão inseridas. Em nosso estudo, um mesmo sujeito de qualquer dos grupos experimentais terá contato com o assunto em dois diferentes contextos e dentro destes, em diversas situações. Assim teremos a possibilidade de avaliar os contextos da pesquisa como sendo ambientes favoráveis, ou não, para a formação do conceito em questão. Acreditamos ainda, seguindo o Construtivismo, que o sujeito deve ter vários e diferentes contatos (interações) com o objeto. Desta forma, entendemos que a diversificação de contextos poderá auxiliá-lo.

5.4. Desenho Geral do Experimento

A pesquisa envolverá 32 alunos distribuídos em três grupos, que denominamos Grupos A, B e C, sendo o primeiro o de referência e os dois últimos os grupos experimentais. Descreveremos a seguir as cinco fases do estudo a que eles serão submetidos.

Fase 1 : Aplicação de um Pré-Teste, feita coletivamente em cada um dos grupos, com resolução individual e sem consulta. O objetivo será a investigação do que o aluno consegue resolver, antes das atividades.

Fase 2: Compreende a aplicação da sequência didática, com atividades do mundo experimental para o Grupo B e as do contexto do computador para o Grupo C, com as respectivas discussões e institucionalizações locais. É necessário esclarecer que esta fase envolverá os dois contextos simultaneamente, porém com grupos distintos. Para o Grupo A esta fase se resume às aulas ministradas pelo professor da disciplina em sala de aula. Este grupo terá a introdução às funções trigonométricas por meio de explicações e resoluções de problemas, como previsto no currículo e no plano de aula de seu professor de Matemática, que não será a pesquisadora.

Fase 3: Aplicação do Teste Intermediário para os três grupos.

Fase 4: Compreende a continuação da aplicação da sequência didática envolvendo as atividades no computador para o Grupo B, e as do mundo experimental para o Grupo C, incluindo para ambos discussões e a institucionalização. O Grupo A continuará com as aulas previstas.

Fase 5: Aplicação do Pós-Teste para os três grupos. O objetivo será a investigação do que o aluno consegue resolver, depois da sequência didática.

O quadro seguinte é um resumo das fases da pesquisa

Fase 1	<i>Pré - Teste</i>		
	Grupo A	Grupo B	Grupo C
Fase 2	Aulas Grupo A	Experimentos Grupo B	Computador Grupo C
Fase 3	<i>Teste Intermediário</i>		
	Grupo A	Grupo B	Grupo C
Fase 4	Aulas Grupo A	Computador Grupo B	Experimentos Grupo C
Fase 5	<i>Pós - Teste</i>		
	Grupo A	Grupo B	Grupo C

Quadro I - Planejamento do Experimento para os Três Grupos

5.5. Os Sujeitos

Trabalharemos com 32 sujeitos todos advindos de uma mesma escola pertencente à rede particular de ensino da cidade de São Paulo. O critério adotado para a escolha dessa amostra foi o interesse e a disponibilidade dos alunos em participar da pesquisa em horário extra-classe, além de estarem cursando o 2º grau, porém sem ter aprendido as funções trigonométricas. Estes sujeitos foram distribuídos em três grupos, descritos a seguir:

Grupo A

Composto por 16 alunos do 2º colegial, que terão apenas as atividades do **ensino formal** realizadas por seu professor, em sala de aula^[12]. Este será nosso grupo de referência. Para efeito de coleta de dados, participará apenas dos testes, ou seja, do **Pré-Teste**, que será aplicado antes do início das aulas sobre as funções trigonométricas, do **Teste Intermediário**, que será aplicado após três aulas e do **Pós-Teste**, no final das seis aulas destinadas ao assunto em questão.

Grupo B

Composto de 8 alunos, sendo seis deles do 1º e dois do 2º ano do 2º grau, formando duplas, que trabalharão isoladas umas das outras. A sequência experimental para esse grupo será primeiramente um **Pré-Teste**, depois atividades inseridas no contexto do “mundo experimental”, que serão realizadas no Laboratório de Ensino da Matemática do Centro de Ciências Exatas e Tecnologia da P.U.C./ São Paulo. A seguir, realizaremos um **Teste Intermediário** e, então, o Grupo passará por atividades no contexto do computador, que serão realizadas também fora da sala de aula e do horário escolar, no Laboratório de Informática do Colégio. Por fim, aplicar-se-á um **Pós-Teste**. As quatro duplas só se encontrarão nos três testes. As demais sessões serão com uma dupla de cada vez.

Grupo C

Composto de 8 alunos do 2º ano que trabalharão em duplas, do mesmo modo que o Grupo B. A sequência do experimento para este grupo será o **Pré-Teste**, seguido das atividades realizadas no computador, do **Teste Intermediário**, dos experimentos do mundo real e, por último, do **Pós-Teste**.

12. Nossa intenção era que toda a classe, composta de 32 alunos, participasse da pesquisa. Na verdade só 16 desses alunos poderão participar pois foram os que não faltaram a quaisquer das aulas destinadas ao assunto e ainda, voluntariamente, se apresentaram fora do horário normal para a participação dos três Testes.

As etapas de atuação dos grupos encontram-se resumidas no quadro abaixo:

<i>Design Grupo</i>	<i>Pré-Teste</i>	<i>Grupo de Atividades</i>	<i>Teste Intermediário</i>	<i>Grupo de Atividades</i>	<i>Pós-Teste</i>
Grupo A	sim	Sala de aula	sim	Sala de aula	sim
Grupo B	sim	"Mundo experimental"	sim	Computador	sim
Grupo C	sim	Computador	sim	"Mundo experimental"	sim

Quadro II - Sequência de Trabalho dos Grupos

5.6. Descrição da Aplicação Preliminar e suas Implicações

A aplicação preliminar aconteceu dois meses antes do estudo definitivo e foi realizada com apenas uma dupla de alunos do 2º ano do mesmo colégio onde foi posteriormente aplicada a pesquisa. Teve por objetivo ajustar as atividades que havíamos elaborado para nossa sequência didática. Esses estudantes não participarão do estudo definitivo.

Foram realizados seis encontros com a dupla. No encontro inicial, explicamos qual seria o desenvolvimento do estudo (que denominamos projeto de ensino) e aplicamos o Pré-Teste. O tempo gasto para a resolução das questões foi de quarenta minutos. Tivemos então dois encontros, realizados no Laboratório de Ensino da Matemática da P.U.C./ São Paulo, com duas horas de duração cada um, explorando o contexto do "mundo experimental"^[13]. O primeiro deles foi totalmente dedicado ao experimento denominado por nós de "Simulador de Alarme Óptico". No segundo, demos sequência ao experimento da sessão anterior e desenvolvemos os experimentos "Roda com a caneta a Laser" e "Pêndulo de Areia". Tivemos então dois encontros no contexto do computador, realizados no Laboratório do PROEM^[14] da P.U.C./São Paulo. No primeiro deles trabalhamos com o software Cabri -Géomètre II e no segundo com o Graphmatica for Windows. Por fim, no sexto encontro, tivemos a aplicação do Pós-Teste, com quarenta minutos de duração.

Das observações e análise desta aplicação-piloto saíram as modificações que deram origem ao desenho definitivo do experimento. Os encontros de duas horas

13. Os experimentos desse contexto serão descritos na próxima sessão, uma vez que sofreram alterações.

14. PROEM - Programas de Estudos e Pesquisas no Ensino da Matemática da PUC/São Paulo

mostraram-se muito longos para os alunos. Observamos que, após aproximadamente uma hora, o interesse e rendimento diminuam, o que nos levou a alterar a duração para uma hora.

O tempo reservado para a exploração de cada contexto também foi mudado. Mantivemos dois encontros para a aplicação das atividades no do “mundo experimental”, o que representou, neste caso, uma redução de duas horas. Percebemos que esses encontros de uma hora seriam suficientes, desde que o procedimento sofresse algumas modificações. Para o contexto do computador reservamos quatro encontros, sendo dois deles com o software Cabri II e os outros com o Graphmatica. Observamos ser esse o número necessário, pois a familiarização e a manipulação de cada software consumiram um tempo um pouco maior que o previsto, mesmo com os alunos acessando arquivos prontos e usando a calculadora do Cabri II para agilizar os cálculos. Continuamos portanto com as mesmas quatro horas, porém distribuídas em quatro encontros em vez de dois.

Em relação ao desenho do experimento e ao procedimento adotado na aplicação preliminar, efetuamos modificações a serem executadas no estudo definitivo, que serão apresentadas segundo o contexto no qual se encontram.

- No contexto do “mundo experimental”, pretendemos ampliar o nosso papel de **mediador**, ou seja, pretendemos auxiliar um pouco o aluno, sobretudo na resolução do problema inicial. Estamos usando o termo mediador, no sentido dado por Vygotsky e discutido no capítulo III. Resolvemos questionar as idéias irrelevantes para a questão expostas pelas duplas, porque dessa forma provavelmente economizaremos o tempo gasto pelos alunos na resolução do problema, evitando, além do cansaço desnecessário, um tal grau de frustração que os impeça de seguir adiante na atividade. Esta postura foi motivada pela observação da dupla piloto que, na busca da solução do problema da primeira atividade do “mundo experimental”, resolveu construir uma tabela de valores da posição da sombra do ponteiro sobre o papel milimetrado, em função do tempo. Foram consumidos quarenta e cinco minutos na coleta dos dados e confecção do gráfico para só então discutirmos, no papel de mediador, que este caminho não levaria a uma solução confiável. A dupla mostrou-se desanimada e necessitou de estímulos para iniciar outra coleta de dados, mesmo assim deixando claro o receio de que esta não levasse à resolução do problema.

Os outros dois experimentos desse contexto não sofreram alterações.

- No contexto do computador pretendemos modificar as atividades que se mostraram muito longas e repetitivas para a dupla. Assim, as tabelas nelas contidas serão menores, reduzindo o trabalho de medições. Iremos propor à dupla tarefas mais participativas e interativas. Deste modo, os alunos deverão prever o que vai ocorrer para só depois conferir no computador. A tarefa de previsão de dados se justifica dentro da teoria de Piaget (também discutida no capítulo III) segundo a qual estaremos estimulando os alunos a trabalharem a partir de suas representações, apresentando algo que se encontra perceptualmente ausente. Neste caso poderemos observar se utilizam aspectos **operativos** do conhecimento de função.

Essas foram as mudanças realizadas em nossa pesquisa, a partir da aplicação do piloto. A seguir descreveremos o estudo definitivo, segundo cada contexto.

5.7.O Contexto do “Mundo Experimental”

Neste contexto realizaremos três experimentos. O primeiro será denominado “*Simulador do alarme Óptico*”, o segundo “*Roda com a Caneta a Laser*” e o último “*Pêndulo de Areia*”^[15]. Relataremos a seguir cada um deles.

Procuramos simulações que auxiliassem o aluno a “descobrir” as funções seno e cosseno. Para isso escolhemos fenômenos do campo da Física, explorando o Movimento Circular Uniforme e o Movimento de um Pêndulo Simples. O que motivou a escolha desses fenômenos foi a facilidade de visualização do movimento periódico. Embora isto também fosse possível se criássemos experimentos que envolvessem o som ou molas, seria mais difícil controlar fatores como amortecimento ou interferências.

Procuramos construir experimentos que facilitassem tanto a observação do fenômeno quanto a coleta de dados. Além disso, optamos por utilizar materiais robustos, para que o aluno pudesse manipulá-los sem muitas quebras. Por fim,

15. Os experimentos foram idealizados por nós e confeccionados no Laboratório de Física da P.U.C./SP.

levamos em consideração ainda o custo da fabricação do material e a facilidade de sua construção, de forma a viabilizar um possível uso em escolas.

5.7.1. Experimento “Simulador do Alarme Óptico”

Desenvolvido a partir do mecanismo de rotação de um relógio, o equipamento possibilita efetuar medições, que relacionam um “ponto”, com as suas projeções nos eixos. Utilizamos duas fontes de luz que iluminam um “ponteiro” e com isso provocam uma sombra em um papel milimetrado, simulando um Ponto do ciclo trigonométrico em movimento e suas projeções, cosseno e seno. Para facilitar a compreensão inserimos as figuras 11 e 12, que contêm a reprodução de fotos^[16] do “Simulador” e de um detalhe do mesmo.

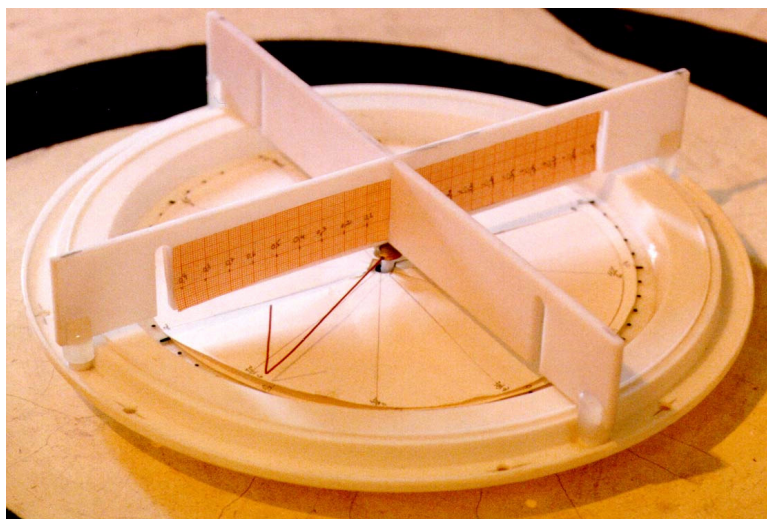


Figura 11: Detalhe do “Simulador do Alarme Óptico”

16. Todas as fotos que ilustram este capítulo são de autoria de Fátima Tassinari.



Figura 12: O “Simulador”

5.7.1.1. Desenho

Este experimento será iniciado com a apresentação do problema, que está abaixo reproduzido, para a dupla resolver.

“VOCÊ PRECISA DESATIVAR UMA BOMBA NUCLEAR INSTALADA NUMA BASE SECRETA. A BOMBA É CONTROLADA POR UMA REDE DE COMPUTADORES. PARA IMPEDIR O ACESSO À REDE FOI RETIRADO UM DOS “CHIPS” DO SERVIDOR. O SEU PROBLEMA É RECOLOCAR O “CHIP” QUE, UMA VEZ ACOPLADO, PERMITE ACESSAR A REDE E DESARMAR A BOMBA. ESTE “CHIP” É PROTEGIDO POR UM SISTEMA DE ALARME ÓPTICO. ELE ESTÁ EM UMA CÂMARA FECHADA NA QUAL EXISTE UMA ABERTURA POR ONDE É POSSÍVEL OBSERVAR A LUZ PROVENIENTE DO SISTEMA DE ALARME, QUE “VARRE” CONSTANTEMENTE O “CHIP”. O ALARME PODE SER DESLIGADO COM UM TIRO NA FONTE DE LUZ. VOCÊ NATURALMENTE NÃO PODE VER A FONTE DE LUZ, MAS NOSSO SERVIÇO DE ESPIONAGEM NOS FORNECEU UM MODELO PARA SIMULAÇÃO DO MOVIMENTO DA FONTE. O SIMULADOR NÃO CONTÉM AS MESMAS DIMENSÕES DO SISTEMA A SER DESARMADO”.

Com esse problema procuraremos apresentar um desafio ao aluno, para que ele vá em busca de novas assimilações, já que seus conhecimentos serão insuficientes para chegar à solução. Informaremos que no laboratório temos um equipamento que pode ser um simulador do alarme descrito no problema.

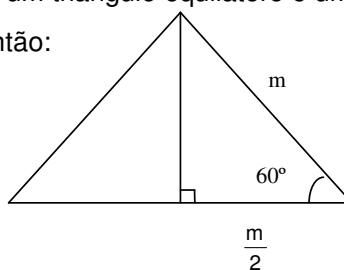
Pretendemos, por meio dessa montagem, introduzir o ciclo trigonométrico. Na verdade, observamos no simulador um movimento circular uniforme de um “ponto”, no sentido anti-horário, com origem fixa.

Este é o único experimento deste contexto, em nossa pesquisa, que apresenta caráter quantitativo. Pretendemos que o aluno colete dados e, a partir deles, produza tabelas e gráficos. Assim, poderemos retomar os conceitos básicos de função, tais como Domínio e Imagem, analisar a ligação entre o arco e o seno e cosseno, e ainda as simetrias ao longo dos quadrantes, como por exemplo que $\sin a = \sin(\pi - a)$.

Ao longo da experiência, introduziremos o **radiano** e discutiremos a questão do erro experimental e da necessidade de se tabelarem os valores de seno e cosseno. Procuraremos, se houver oportunidade, dizer aos alunos como isto foi feito na História da Matemática e discutir a tabela trigonométrica e, ainda, como calcular os valores por outras formas, não experimentais. Por exemplo, geometricamente, pode-se calcular o $\cos 60^\circ$. Para isso, basta que se considere um triângulo equilátero e uma das alturas dividindo-o em dois triângulos retângulos. Então:

$$\cos 60^\circ = \frac{m/2}{m} = \frac{1}{2}$$

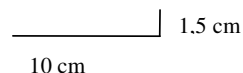
sendo m a medida do lado do triângulo equilátero.



5.7.1.2. Material

— Um relógio com diâmetro aproximado de 20 cm. O ponteiro dos segundos foi substituído por uma haste feita com um fio de cobre de 2 mm de espessura e comprimento 10 cm, contendo uma dobra em sua ponta final, conforme o desenho.

Ela se desloca em Movimento Circular Uniforme,



com período fixo e igual a 60 segundos. Os outros ponteiros foram retirados.

— Dois sarrafos aparelhados de 10 cm de largura por 2,5 cm de espessura e 1 m de comprimento, parafusados no relógio.

— Duas lâmpadas de 25 W e 12 V e dois soquetes.

— Dois transformadores (para ligações elétricas individuais).

- Duas placas de acrílico branco com comprimento igual ao diâmetro do relógio e largura 2,5 cm.
- Dois cilindros metálicos em cujo interior foi feita a instalação das lâmpadas.
- Três rodela de cartolina branca, de diâmetro igual ao do relógio (para cobrir seus números), todas com 12 divisões, a primeira sem numeração e a segunda com as divisões numeradas em radianos e a última numerada em graus.
- Um pedaço de barbante de comprimento um pouco maior que 20p cm.
- Papel milimetrado, régua, lápis e borracha.
- Gravador, filmadora, máquina fotográfica, lousa, giz colorido.

5.7.1.3. Procedimento

Iniciamos dizendo aos alunos que neste encontro teríamos um problema para resolver, que foi entregue por escrito e lido em voz alta com eles.

Explicamos que foi montado no nosso laboratório um modelo para simular o alarme descrito no problema. Eles poderiam reproduzir o que estaria ocorrendo no momento da retirada do “chip” e analisar de que forma poderiam se orientar com o propósito de ter sucesso no desarme da bomba. O objetivo era auxiliar a análise do problema em todas as suas nuances, de modo a sugerir diversas formas de solução, que pudessem ser postas em prática sob as mais variadas circunstâncias e situações no momento do “desarme”.

Mostramos então o modelo, dizendo a eles que:

- 1) A placa acrílica correspondia ao “chip”, e poderia ser colocada em duas posições: horizontal ou vertical. Prevenimos que eles deveriam analisar as duas situações, pois não se poderia determinar em qual delas o “chip” estaria no dia do “desarme”.
- 2) A haste do modelo correspondia à fonte de luz no alarme real.
- 3) A luz projetada no “chip”, no alarme real, correspondia, no modelo, à sombra da haste. Para produzir a sombra tínhamos lâmpadas, cuja única função era esta.

Dissemos ainda que não havia necessidade de se preocupar com as distâncias entre as lâmpadas e o modelo.

- 4) As dimensões não eram as mesmas, mas o movimento ocorria exatamente como no alarme real.

Nossa expectativa era que os alunos tentassem relacionar os movimentos da haste e da sombra, de forma que pudessemos fazer um paralelo com o ciclo trigonométrico e as projeções correspondentes a seno e cosseno.

Esperamos que viessem sugestões. Várias duplas tiveram a idéia de construir uma tabela para avaliar o comprimento da sombra em função do tempo. Quando isto não ocorreu procuramos apresentá-la, já que, em nosso entender, as tabelas seriam familiares e ligadas aos conhecimentos anteriores dos alunos, porque são ensinadas quando do estudo das funções.

Logo em seguida passamos a discutir a inconveniência de seguir este raciocínio, uma vez que a sombra dependeria da velocidade do foco de luz que, se fosse alterada, tornaria nossos dados totalmente inúteis e nosso trabalho estaria todo perdido. Por fim, discutimos que mesmo a velocidade sendo constante, se não fosse possível marcar o tempo (não dispuséssemos de um relógio), teríamos dificuldades para o desarme.

Na situação descrita acima, lançamos as seguintes perguntas:
“Conseguiríamos informações ou relações ligadas às características geométricas do objeto? Que instrumento matemático poderíamos usar ?”

A partir disso, demos a cada dupla um pedaço de barbante e pedimos que com ele medissem a circunferência do simulador e constatassem a relação entre seu comprimento e a medida do raio. Discutimos a fórmula do comprimento da circunferência e também a questão de arcos orientados, que seriam necessários para o estudo. Procuramos induzi-los a construir uma tabela que ligasse o ângulo (em rad.) com a sombra.

Para as duplas que sugeriram o uso do ângulo e o grau como unidade de medida, apresentamos a questão da escala (como representar no eixo a medida de 1 grau). Sugerimos o uso do radiano e, para a medida da sombra, o dm. Estariam

relacionando o comprimento do arco percorrido com a sombra e teríamos a mesma unidade de medida, por exemplo, dm para ambos.

Naturalmente o comprimento do arco depende do raio da circunferência à qual ele pertence e o comprimento da circunferência é $2\pi r$. Se considerássemos o raio da circunferência como sendo 1, a medida do arco e do ângulo (em rad.) seria representada pelo mesmo número.

Sugerimos então uma tabela contendo o comprimento do arco e a medida da sombra horizontal (cosseno), concluindo que os valores numéricos de arcos e ângulos eram os mesmos.

Para as duplas que não apresentaram a idéia de uso do ângulo, propusemos direto a idéia de se trabalhar com o comprimento do arco. Para tanto, apresentamos um papel contendo as seguintes sugestões:

arco x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
cos x									
arco x	$7\pi/6$	$5\pi/4$	$4\pi/3$	$3\pi/2$	$5\pi/3$	$7\pi/4$	$11\pi/6$	2π	$13\pi/6$
cos x									

Nossa preocupação, ao introduzir esta tabela, foi evitar que os alunos escolhessem valores para arcos e ângulos nos quais houvesse grande imprecisão, devido à montagem. Foi feita uma avaliação para determinar o erro percentual das medidas obtidas pelo equipamento, e observamos que ele era grande para os ângulos menores que 24° . Assim, procuramos evitar que fossem escolhidos.

Discutimos, a seguir, a questão do sentido do movimento e os arcos que receberão sinal negativo. Sugerimos, para as duplas que não apresentaram esta idéia, a confecção de um gráfico. Entregamos papel milimetrado para isso.

Pedimos que repetissem o procedimento supondo o “chip” na posição vertical. Nesta etapa nos afastamos e interferimos o mínimo possível no trabalho da dupla. Novamente, entregamos papel milimetrado para o gráfico.

Feito o gráfico, perguntamos se ele se referia a uma função e discutimos o porquê. Foi bastante interessante mas o problema que deu origem ao estudo permanecia sem solução.

Discutimos então que, se imaginássemos que existe um sistema cartesiano acoplado ao nosso movimento, cada ponto no ciclo (ou seja, cada ponto sobre a circunferência orientada, com o sentido anti horário sendo o positivo) poderia ser encontrado desde que conhecessemos os valores de sua sombras horizontal e vertical, que são respectivamente a abcissa e a ordenada do ponto no plano cartesiano.

Sugerimos que calculassem os valores para as coordenadas de P em alguns casos. Para isso, analisaram a sombra vertical e a sombra horizontal e organizaram os dados em tabelas. Foi associado um sinal a cada sombra, usando a convenção do sistema cartesiano. Um exemplo, a tabela seguinte.

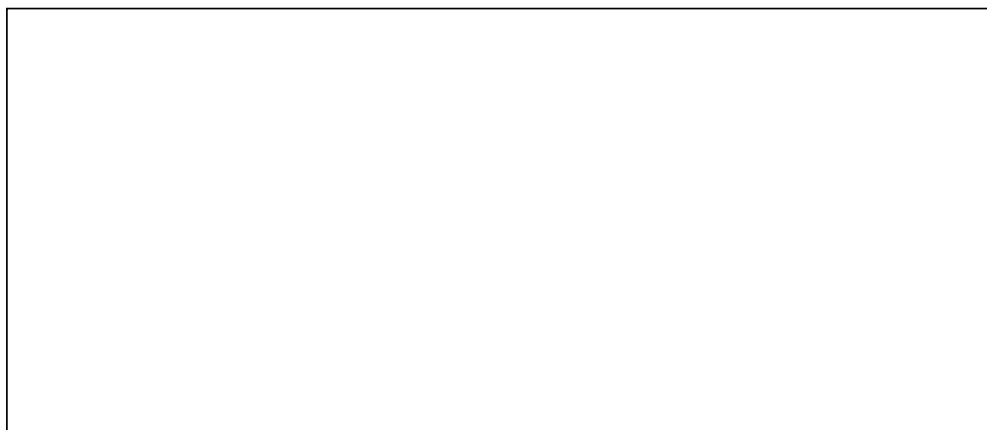
ângulo x (rad.)	$\pi/3$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$7\pi/6$	$3\pi/2$	$5\pi/3$	2π
sombra horizontal (cos x)								
sombra vertical (sen x)								
$\cos^2 x + \sin^2 x$								

Desta forma pudemos discutir a necessidade das duas projeções para determinar a posição correta do ponto.

Institucionalização

Nosso objetivo, nesta etapa, foi introduzir as funções reais, de variáveis reais, cosseno e seno. Para tanto usamos como suporte a função de Euler e reproduzimos, com os alunos, o que foi exposto nas pág.28 e 29 desta dissertação.

A figura 13, a seguir, é uma mostra do cartaz que utilizamos para sintetizar as idéias acima. Ela foi apresentada aos alunos no momento da institucionalização em cartolina tamanho padrão



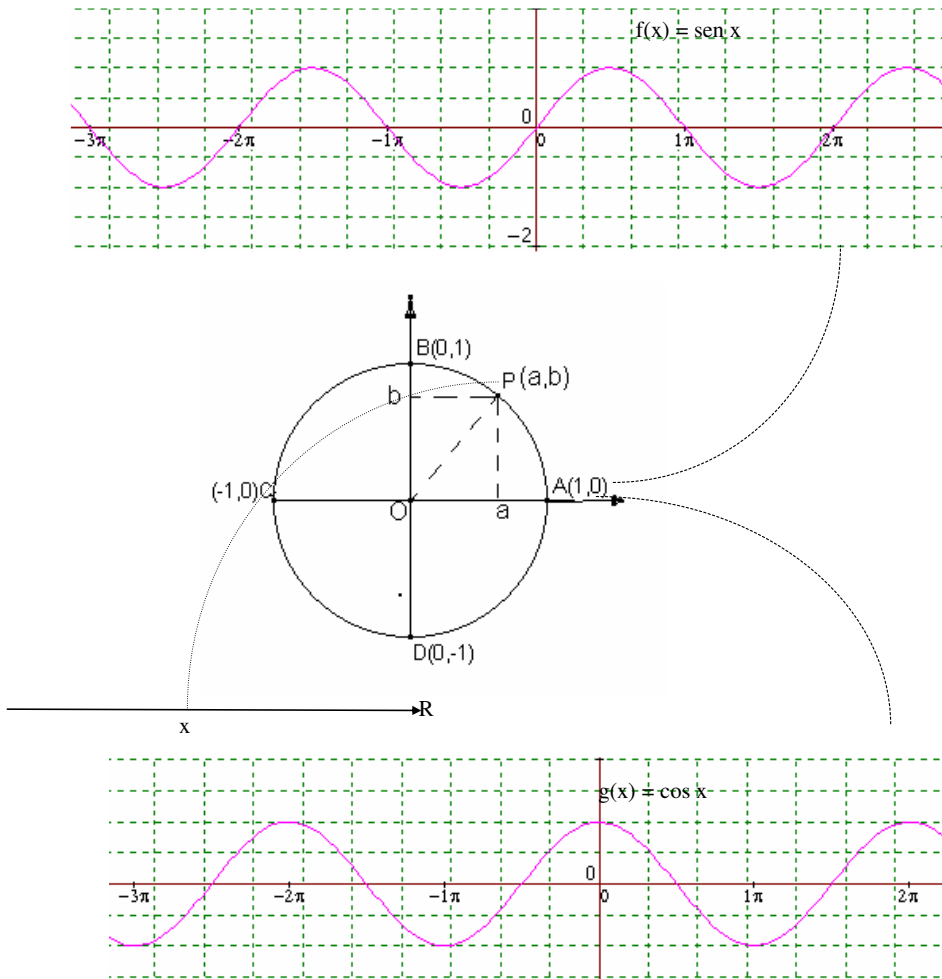


Figura 13: O Ciclo e as Funções Seno e Cosseno

Encerramos a sessão, sendo que algumas das duplas já resolveram o problema na hora, enquanto outras o levaram para pensar em casa e discutir no início da sessão seguinte.

5.7.2. Experimento “Roda com a Caneta a Laser”

Este segundo experimento foi concebido com o objetivo de estabelecer uma ligação entre o ciclo trigonométrico e as funções seno e cosseno. Nossa idéia foi construir um equipamento em madeira, que possuísse duas rodas acopladas. Em uma delas foi fixado um disco metálico com um suporte para uma caneta com a ponta de luz a laser. Uma vez girando a roda, teremos a projeção da luz sobre um anteparo, e poderemos observar o aparecimento da função cosseno compondo dois movimentos: o circular da roda e um retilíneo do conjunto todo.

Apresentamos abaixo a Figura 14, reproduzindo uma foto do equipamento usado, com o objetivo de facilitar o entendimento.

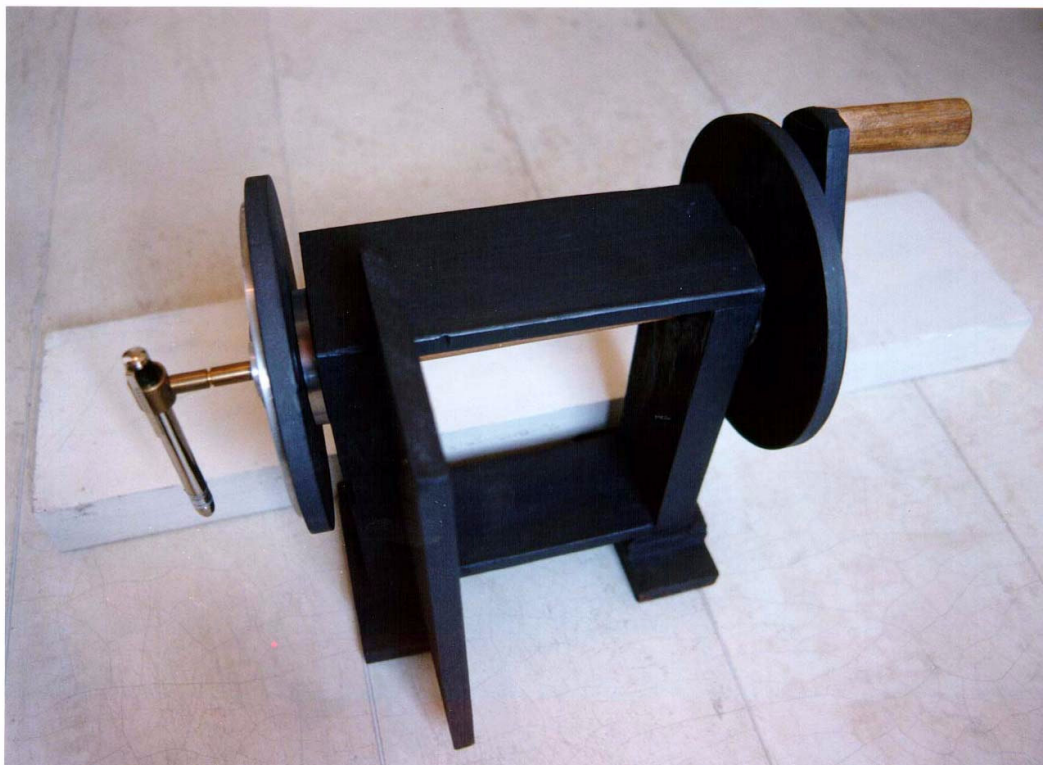


Figura 14: A “Roda com a Caneta a Laser”

5.7.2.1. Desenho

Nesta experiência pretendemos propor uma tarefa e não um problema. Os dois alunos da dupla provocarão o movimento de uma caneta em cuja ponta está uma fonte de luz a laser. Esta caneta está acoplada a um disco e um dos alunos irá movimentá-lo, no sentido anti-horário. Teremos assim um movimento circular do disco, aproximadamente uniforme que, por sua vez, provoca um movimento da luzinha da caneta a laser sobre a mesa. O aluno que estará vendo o movimento deverá relatar ao outro a trajetória da luz e, por isso, será chamado por nós de aluno *relator*. O outro aluno estará sentado do lado oposto e irá contribuir na realização do movimento empurrando o conjunto todo sempre para a frente. Sua tarefa será fazer um desenho da trajetória da luz sobre a mesa. Este aluno será denominado *desenhista*. Na posição em que ele estará, não será possível ver a caneta, nem sequer a luz que ela produz, mas ele poderá perceber a roda girando.

Desta atividade gostaríamos que resultasse uma figura com o formato do gráfico da função cosseno.

Esta experiência tem um caráter puramente qualitativo. Pretendemos colocar o aluno em ação, para que ele possa perceber os invariantes, no sentido dado por Vergnaud, isto é, propriedades tais como amplitude, período, e outras. Não pediremos aos alunos que façam medições, já que nosso objetivo é estabelecer a ligação entre o ciclo trigonométrico e o gráfico da função, percebendo sua forma.

Criamos esta tarefa para tentar observar o que os alunos pensam por intermédio do que dizem. Estaremos, com ela, pesquisando a **verbalização**, que, segundo Vergnaud, está ligada à concepção.

Esperamos que o aluno relator, vendo o movimento, faça a ligação entre o movimento circular da roda e o rastro de luz da caneta que, no caso, é o gráfico da função cosseno. Pretendemos que ele aluno perceba que a trajetória não é um simples desenho e sim uma **figura**, no sentido dado por Laborde, e que possa perceber o que interfere na formação do rastro de luz.

Pensamos que a dificuldade nesta tarefa está em o aluno relator perceber que ele deve descrever o efeito e não a causa. De nada adianta, por exemplo, dizer ao colega que o caminho descrito pela luz é a resultante de uma composição de dois movimentos: um circular (da roda) e outro retilíneo (do conjunto todo), pois tal descrição, embora procedente, não fornece subsídios suficientes para que o colega, que não viu o efeito produzido pelo giro do disco, possa desenhar a trajetória da luz.

Para fazer uma descrição correta do fenômeno, o aluno relator precisará estar atento para as propriedades e características (os invariantes) que ele quer descrever e, ainda, pensar em como descrevê-las. Para tanto surgirão, naturalmente, a necessidade de um referencial, da observação do sentido e da direção do movimento da luz.

Provavelmente, na primeira tentativa, o aluno desenhista não será bem sucedido, porque nem sempre as informações dadas pelo colega serão suficientes. Por este motivo, daremos à dupla três oportunidades para efetuar o desenho. Feito o primeiro, ele será mostrado ao colega, que dirá se está correto ou não. O aluno relator poderá, a partir dos erros no desenho inicial, acrescentar informações que omitiu e deveriam ser explicitadas para uma melhor compreensão do colega, ou incluir correções nas idéias expostas pelo desenho desse colega. Desta forma, é nossa crença que estaremos permitindo ao aluno diversas aproximações com o objeto, como propõe Vergnaud, facilitando a assimilação dos conceitos.

5.7.2.2. Material

- Um conjunto composto por duas rodela interligadas de madeira, um disco metálico acoplado a uma delas, uma manivela contendo um suporte para a caneta e um cilindro de madeira para ligar o conjunto (vide foto na pág. 93).
- Uma caneta com a ponta contendo uma fonte de luz a laser.
- Um apoio com o formato de um paralelepípedo reto retângulo com dimensões 1m, 20cm e 2 cm, usado na posição indicada na figura ao lado.
- Uma mesa com 2m de comprimento por 1,5 m de largura.
- Uma cadeira.

— Gravador, filmadora, máquina fotográfica, lousa, giz colorido.

5.7.2.3. Procedimento

Explicamos à dupla que teríamos a seguinte tarefa a realizar.

Um dos alunos da dupla seria o “**aluno desenhista**” e faria o papel de observador além de empurrar a base da roda e o outro componente seria o “**aluno relator**”, o qual realizaria o movimento e o descreveria, usando apenas palavras, não podendo usar as mãos ou sinais. Terminada a experiência o aluno desenhista receberia uma folha e tentaria desenhar o movimento realizado pelo foco de luz da caneta à laser. Feito o desenho, ele seria mostrado ao aluno relator, que diria se este desenho coincidia ou não com aquele que ele havia visto. Se estivesse errado, a experiência poderia ser repetida no máximo mais duas vezes.

Pedimos ao aluno desenhista que saísse da sala. Explicamos então, em detalhes, como deveria ser o movimento e qual seria o papel do aluno relator. Pedimos a ele que ocupasse a cadeira onde ficaria o seu par e, isto feito, ensaiamos como seria a situação. Chamamos a atenção para o fato de que, na posição em que ele estava, e que seria a do colega, não era possível ver a luz e nem sequer saber que ela existiria. Pedimos a ele que observasse bem quais deveriam ser as informações pertinentes para a confecção do desenho. Por fim fizemos um movimento com a caneta e a roda parada, para que ele observasse como iríamos descrever a trajetória resultante. Fizemos a descrição, no caso um segmento de reta, e pedimos que fosse feito um desenho.

Em seguida, o aluno desenhista foi chamado e a experiência realizada.

Na discussão da atividade procuramos fazer a conexão entre a trajetória encontrada e o gráfico obtido no experimento do “Simulador”. Fizemos a institucionalização desenhando no quadro-negro o ciclo trigonométrico e procurando estabelecer a ligação entre os arcos do ciclo trigonométrico, que por sua vez correspondem a números reais, e a função cosseno. Finalizando, discutimos os desenhos que eles realizaram e repetimos a experiência para que o aluno desenhista pudesse observar a trajetória.

Passamos a realizar, no mesmo encontro, o último experimento, que relataremos a seguir.

5.7.3. Experimento “Pêndulo de Areia”

Esse será o último experimento do contexto. Foi idealizado com o objetivo de levar o aluno a estabelecer uma ligação entre fenômeno periódico e sua forma matemática. No caso, funções que envolvem seno ou cosseno.

O equipamento usado será um pêndulo de areia que estará preso em uma haste metálica suspensa sobre uma mesa e um rolo de papel do tipo formulário contínuo para computador.

A figura 15 refere-se ao equipamento “Pêndulo de Areia” e ao rastro formado pela areia, quando da realização da experiência, e que se pode ser observado sobre o rolo de papel. Na foto substituímos o rolo de formulário contínuo por um tecido negro, para facilitar a visualização.

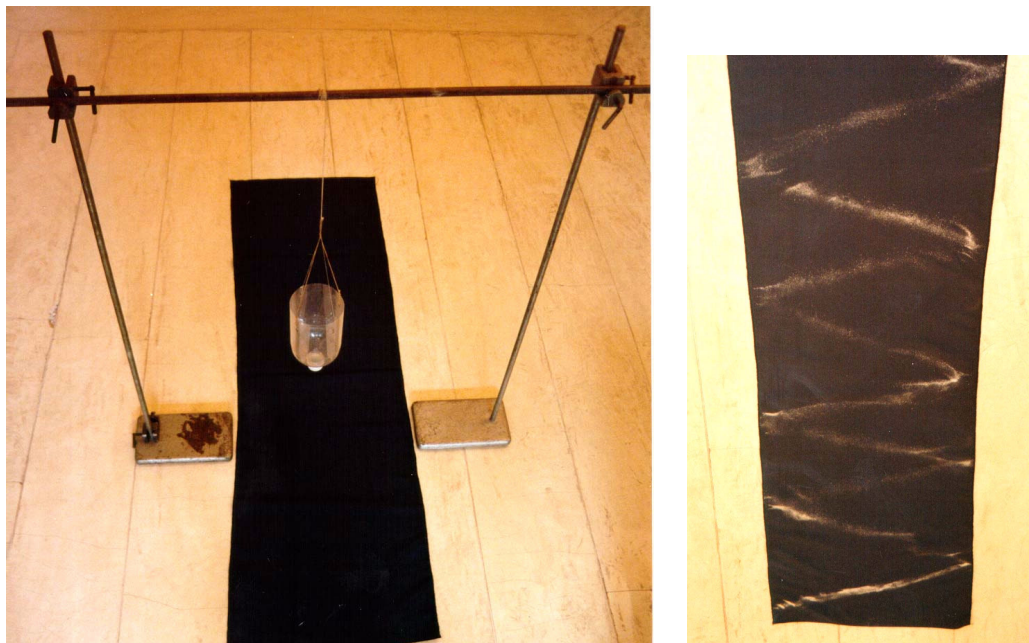


Figura 15: O “Pêndulo de Areia” e o Rastro

5.7.3.1. Desenho

Esta será uma atividade de previsão, seguida da experiência prática.

A experiência será a seguinte: um dos alunos irá puxar, com velocidade aproximadamente constante, o papel em direção e sentido previamente determinados, enquanto o outro aluno da dupla irá provocar um movimento do pêndulo (paralelo à haste de sustentação, com velocidade não muito grande) ao mesmo tempo em que abrirá a tampa para que a areia caia sobre o papel.

Antes de realizar a experiência, pediremos que façam uma previsão do tipo de rastro de areia surgirá no papel.

Com este experimento poderemos discutir, mais uma vez, a necessidade de um referencial, a importância da posição, no instante inicial, do furo por onde escapará a areia para a formação do rastro e, ainda, que este depende da direção e sentido para onde é puxado o rolo de papel.

Nossa preocupação aqui foi criar uma situação que desse origem a uma função **periódica**. Neste caso estaremos trabalhando com o movimento harmônico simples (M. H. S.) do pêndulo de areia, que é um movimento periódico gerado por forças elásticas e que possui velocidade e aceleração variáveis.

Esperamos que com esta atividade os alunos possam perceber que um fenômeno periódico pode ser interpretado matematicamente por meio de funções cujo gráfico se assemelha ao das funções seno ou cosseno. Em outras palavras, esperamos que, a partir da manipulação e da realização do experimento, os alunos possam estabelecer a ligação entre a periodicidade e a função trigonométrica.

Poderemos ainda discutir a amplitude, mudando o comprimento do pêndulo e observando o que ocorre, voltando então à questão do raio constante e igual a **um**, no ciclo trigonométrico, se os alunos levantarem a questão.

Enfatizamos que, em nosso entender, esse experimento irá possibilitar discussões sobre várias questões, tais como as forças que estão agindo, o sentido do movimento, etc. Surgirá então um caráter interdisciplinar, já que poderemos estabelecer relações, promovendo um entrosamento entre a Física (ciência fenomenológica) e a Matemática (geralmente repleta de conceitos abstratos e desligados da realidade para o aluno). Tal entrosamento, que é altamente desejável, normalmente não surge em uma aula tradicional de trigonometria no 2º grau.

5.7.3.2. Material

- Três hastes metálicas de 1m de comprimento cada uma.
- Engates e suportes para as hastes.
- Um invólucro de plástico, feito com uma garrafa de coca-cola de 2 l, cortada a aproximadamente 12cm da tampa.
- Barbante e Fita crepe.
- Areia fina e bem seca.
- Uma tampa para a garrafa com um furo central para escapar a areia.
- Papel formulário contínuo para computador.
- Mesa com 2m de comprimento por 1,5 m de largura.

5.7.3.3. Procedimento

Iniciamos dizendo à dupla que, nesta atividade o aluno antes desenhista, no experimento da “roda”, faria agora a experiência e o colega, outrora relator, o auxiliaria. O experimento consistiria em provocar o movimento do Pêndulo, empurrando-o logo após ter retirado a fita que vedava a saída da areia

Em seguida, discutimos com os alunos quais os tipos de movimento que poderiam ser produzidos no “Pêndulo” e entre estes, solicitamos que fosse escolhido o movimento horizontal paralelo a haste de sustentação. Enfatizamos, ainda, que a velocidade não deveria ser muito grande, de maneira que, quando a tampa fosse retirada, a areia derramada não ultrapasse o limite do papel.

Antes de iniciarmos o experimento, pedimos que o aluno relator da experiência anterior previsse onde cairia a areia e discutisse que “forma” a areia teria no papel. A seguir o outro aluno disse se concordava com o colega. Só então a dupla realizou a experiência e observou se as previsões estavam corretas.

Todas as duplas tiveram grande facilidade em descrever o tipo de movimento e não hesitaram no momento de fazer a previsão do rastro como sendo um segmento de reta

Dissemos então que gostaríamos que o aluno relator puxasse o papel enquanto o outro produzia o movimento do pêndulo. Nesta situação, perguntamos de que forma deveria ser o rastro de areia. Obviamente não mais um segmento de reta. Pensamos que poderia ser uma surpresa para eles o surgimento de um rastro muito parecido com a trajetória do foco de luz da caneta à laser sobre a mesa, porém a maioria das duplas fez a previsão correta do rastro. Os alunos que erraram o desenho apresentaram dificuldades maiores quanto a orientação do rastro do que propriamente quanto à sua forma.

Pedimos que relacionassem o tipo de rastro obtido nesta experiência com a trajetória do foco de luz da caneta a laser, e que estabelecem os porquês das semelhanças.

Na discussão procuramos mostrar que quando temos movimentos periódicos o tipo de gráfico que surge é sempre este que observamos no experimento. Analisamos, ainda, a amplitude, mudando o comprimento do pêndulo e observando o que ocorreu. Discutimos a questão do raio constante e igual a um, do ciclo trigonométrico.

Com isso encerramos nosso relato quanto a este contexto e, em linhas gerais, o Quadro seguinte apresenta um resumo dos experimentos e seus objetivos.

Experimento	Simulador do Alarme Óptico	Roda com a Caneta a Laser	Pêndulo de Areia
Objetivo →	Introduzir o ciclo trigonométrico, localizar arcos, observar as simetrias,	Fazer a ligação entre os arcos do ciclo e o gráfico das funções	Ligar a periodicidade à função. Analisar a

	construir o gráfico das funções seno e cosseno e analisar Imagem e Período	seno e cosseno	amplitude
--	--	----------------	-----------

Quadro III: Contexto do “Mundo Experimental”

5.8. Contexto do Computador

Neste contexto procuramos criar atividades nas quais o aluno possa lidar com as razões trigonométricas, trabalhando no quadro geométrico e numérico, passando depois ao quadro funcional, com a extensão das definições de seno e cosseno para o ciclo trigonométrico e a introdução das funções seno e cosseno. Além disso trabalharemos algumas das transformações destas funções. Nossa intenção é fazer o “Jogo de Quadros”, na acepção de Douady.

O estudo das razões trigonométricas e a introdução das funções seno e cosseno será feito utilizando-se o “software Cabri II”. As transformações destas funções e os diversos registros de representação serão estudados por meio do aplicativo Graphmatica.

Utilizando o computador, o aluno poderá explorar o ciclo trigonométrico e, assim como ocorreu nas atividades do mundo experimental, analisar período, amplitude, imagem, e observar simetrias. Estará, desta forma, trabalhando em um ambiente sem atrito e demais influências de forças dissipativas e, portanto, não sujeito aos erros experimentais. Entretanto, estará sujeito às imprecisões e limitações dos aplicativos.

Teremos um roteiro de atividades desvinculado de um problema real. Queremos pesquisar se um estudo exploratório, via computador, sem a existência de um problema, influirá positivamente na resolução posterior de problemas.

5.8.1. Desenho

Faremos quatro encontros neste contexto. Os dois primeiros com o Cabri II e os outros com o Graphmatica. Eles serão denominados sequências Computador 1, 2, 3 e 4.

A sequência Computador 1 terá a Atividade 1 que estará dividida em duas partes: A e B.

Na Parte A iremos resgatar os conhecimentos antigos do aluno, revendo:

1. As razões trigonométricas no triângulo retângulo.
2. O comprimento da circunferência.
3. Medidas de ângulo: graus e radianos e suas transformações.

Na Parte B o objetivo será:

1. Definir o seno e o cosseno de um ângulo maior que 90° .
2. Introduzir o ciclo trigonométrico.
3. Definir $\cos x$ e $\sin x$ como abcissa e ordenada, respectivamente, de um Ponto P do ciclo, correspondente à extremidade do arco de medida x .
4. Fazer uma análise qualitativa dos valores de $\sin x$ e $\cos x$ em função de x , estudando os sinais, crescimento e decréscimo.
5. Determinar alguns valores assumidos pelo seno e pelo cosseno. Por exemplo, os dos números: $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$.
6. Determinar os valores máximo e mínimo assumidos pelo seno e pelo cosseno.
7. Relacionar **sen x** e **cos x** pela Relação Fundamental da Trigonometria.

Na sessão Computador 2 será desenvolvida a Atividade 2, com o objetivo de introduzir as funções $\sin x$ e $\cos x$. Nela o aluno irá coletar dados e construir com eles uma tabela e o gráfico. Nossa opção foi que o gráfico da função surgisse pela primeira vez pela mão do aluno e não pelo computador. Discutiremos ainda se o gráfico representa uma função e por quê. A seguir estudaremos Domínio, Imagem e Período da função. No final do encontro entregaremos à dupla uma folha tarefa.

A sequência Computador 3 conterà a Atividade 3a, ficando a 3b para a próxima sessão. A atividade 3a tem por objetivo:

1. Interpretar e analisar gráficos, identificando Domínio, Imagem, Período e ainda a “forma” de funções que envolvam o seno, do tipo:

$$f(x) = a \operatorname{sen}(\omega x + x_0) + b, \text{ com } a \neq 0 \text{ e } \omega > 0.$$

2. Identificar os intervalos nos quais estas funções são crescentes e decrescentes e em quais são positivas, negativas ou nulas.
3. Analisar a interferência das constantes reais **a**, **b**, **ω** , no gráfico, no Domínio, na Imagem e no Período das funções.

Escolhemos para as variáveis **a** e **b** números inteiros tais que o gráfico pudesse ser totalmente visualizado na tela. Para a variável **ω** colocamos os valores 1, 2 e $\frac{1}{2}$, de forma a facilitar a compreensão das propriedades, sem introduzir dificuldades operatórias. Quanto à variável **x_0** , optamos por atribuir inicialmente o valor zero, analisando $f(x)=a \operatorname{sen}(\omega x)+b$, deixando para a última atividade, quando o aluno já estivesse familiarizado com a interferência das outras constantes e também com o aplicativo, o estudo de valores de **x_0** diferentes de zero.

A sequência Computador 4 terá as atividades **3b** e **4** com o seguinte objetivo:

1. Interpretar gráficos e analisar a periodicidade, amplitude e imagem de uma função trigonométrica que envolva o cosseno, do tipo:

$$f(x) = a \operatorname{cos}(\omega x + x_0) + b, \text{ com } a \neq 0 \text{ e } \omega > 0.$$

2. Analisar a interferência das constantes reais **a**, **b** e **ω** na função citada em 1.
3. Trabalhar o significado do número **x_0** nas funções:

$$f(x) = a \operatorname{sen}(\omega x + x_0) + b, \text{ com } a \neq 0 \text{ e } \omega > 0.$$

$$f(x) = a \operatorname{cos}(\omega x + x_0) + b, \text{ com } a \neq 0 \text{ e } \omega > 0.$$

Neste encontro iremos supor que o aluno já se familiarizou com o software e, por isso, o roteiro será simplificado e as atividades pouco dirigidas.

No decorrer das atividades, procuraremos analisar propriedades das funções trigonométricas tais como sinais, crescimento, pontos de máximo ou de mínimo, que são características funcionais já estudadas pelos alunos nas funções de 1° e 2° grau, por exemplo. Desta forma, estaremos aplicando conhecimentos antigos do aluno e inserindo as trigonométricas como funções particulares.

Procuramos levar em conta os obstáculos levantados em nossa pesquisa; neste sentido, deixaremos o aluno explorar e tentar tirar suas próprias conclusões, para então fazer a institucionalização local, por um debate. Procuraremos utilizar diversos registros de representação, ao longo das atividades.

Esperamos que o aluno possa, com o apoio dos roteiros, interagir não apenas com o computador mas, principalmente, com o colega. Sabemos que o processo de construção do conhecimento é individual, mas é possível compartilhar este conhecimento com outras pessoas, principalmente se elas se encontram na zona de desenvolvimento proximal. Desta forma é nossa expectativa que as duplas possam perceber as propriedades matemáticas que se mantiveram constantes ao longo da atividade (os invariantes).

O quadro abaixo resume as atividades no computador e seus objetivos.

Sessão→	Computador 1	Computador 2	Computador 3	Computador 4
Aplicativo →	Cabri II	Cabri II	Graphmatica	Graphmatica
Objetivo→	<ul style="list-style-type: none"> - Rever a trigonometria no triângulo retângulo. - Estudar o ciclo trigonométrico e a Relação Fundamental da Trigonometria 	<ul style="list-style-type: none"> - Coletar valores de seno e cosseno no ciclo e construir o gráfico. - Analisar Domínio, Período e Imagem. - Observar simetrias 	<ul style="list-style-type: none"> - Interpretar gráficos. - Analisar a Periodicidade, Imagem e amplitude de funções que envolvam seno. 	<ul style="list-style-type: none"> - Interpretar gráficos. - Analisar a Periodicidade, amplitude e Imagem de funções que envolvam cosseno. Dar significado à constante x_0

Quadro IV - Grupo de Atividades do Contexto do Computador

5.8.2. Material

Usaremos o seguinte equipamento:

- Um computador IBM / P.C. 486.
- Impressora e Disquetes tamanho 3 ½.
- Filmadora e gravador.

- Lousa branca (de fórmica) e pincéis atômicos de várias cores.
- Dois softwares: Cabri- Géomètre II e Graphmatica for Windows.
- Arquivos preparados no software Cabri II, a saber:

Atividade	Nome do Arquivo
Atividade 1	Ni.1, Trigo 1, Trigo 2, Trigo 3
Atividade 2	Ni.2

Quadro V - Arquivos Preparados no Cabri II

- Roteiros para o aluno, do tipo estudo acompanhado, denominados Atividades^[17]. O número de páginas de cada roteiro e a atividade na qual foram usados estão esquematizados no seguinte quadro:

Encontro	Computador 1	Computador 2	Computador 3	Computador 4	
Atividade→	1	2	3a	3b	4
Páginas→	5	2	5	2	1

Quadro VI - Atividades e Páginas

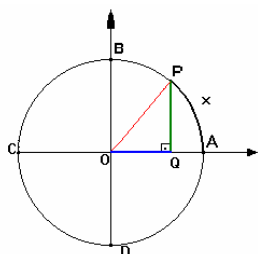
5.8.3. Procedimento

Descrição da Sessão Computador 1 - Parte A

Iniciamos a sessão distribuindo para a dupla um roteiro de atividades e relembro as definições de seno e cosseno no triângulo retângulo. Para isto, fizemos uma rápida explicação na lousa, que foi acompanhada pelos alunos no roteiro, não havendo necessidade de cópia. O que foi discutido no quadro, e estava no roteiro, apresentamos a seguir.

SEJA x A MEDIDA DO ÂNGULO CENTRAL CORRESPONDENTE AO ARCO AP . NO TRIÂNGULO OPQ O ÂNGULO $PÔQ$ PODE ASSUMIR VALORES TAIS QUE $0 < x < 90^\circ$.

17. A reprodução, na íntegra, dos roteiros encontra-se no Anexo 5.8.2., no qual também foram inseridas telas impressas dos arquivos citados.



PQ É O CATETO OPOSTO A $\hat{P}OQ$.
OQ É O CATETO ADJACENTE A $\hat{P}OQ$.
OP É A HIPOTENUSA.

Os alunos foram orientados a completar o roteiro. Destinamos para isso aproximadamente quinze minutos. Os cálculos necessários foram efetuados por eles com o auxílio da calculadora do Cabri II (consulte o arquivo Ni.1 no Anexo 5.8.2.).

O item 1 do roteiro está reproduzido abaixo:

1) ABRA O ARQUIVO Ni 1.

VOCÊ PODE MOVIMENTAR O PONTO P E O PONTO P'. INICIALMENTE DESLOQUE P' EM DIREÇÃO A O, TAL QUE $OP' = 5$ CM. A SEGUIR DESLOQUE P, TAL QUE X ASSUMA OS VALORES ABAIXO E ENTÃO COMPLETE A TABELA, COM EXCEÇÃO DA 3ª E 6ª COLUNAS:

x ($^{\circ}$)	$\frac{PQ}{OP}$	$\frac{P'Q}{OP'}$	$\frac{P'Q}{OP}$	$\frac{OQ}{OP}$	$\frac{OQ}{OP'}$	$\frac{OQ}{OP}$
30 $^{\circ}$						
40 $^{\circ}$						
70 $^{\circ}$						

***** MOVIMENTE P' ATÉ QUE $OP' = 7$ CM E ENTÃO TERMINE DE PREENCHER A TABELA.**

O QUE VOCÊ PODE CONCLUIR, COMPARANDO AS RAZÕES CALCULADAS NOS TRIÂNGULOS?

EXPLIQUE POR QUÊ ISSO OCORRE.

Fizemos então a institucionalização local, ou seja, discutimos com a dupla o que se podia concluir da atividade e pedimos que completassem o quadro do roteiro.

O que foi listado como conclusões e escrito na lousa, a partir da fala da dupla está apresentado a seguir:

1. As razões não dependem das medidas dos lados do triângulo e sim do ângulo considerado.
2. Generalizando: Em qualquer triângulo retângulo:

$$\text{sen } x = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} \quad \text{e} \quad \text{cos } x = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$
3. Se no triângulo retângulo considerado a hipotenusa **OP** tiver valor 1, ficará muito mais fácil calcular seno e cosseno de x . Bastará considerar o segmento **PQ** e já teremos o **sen x** e o segmento **OQ** será o **cos x**
4. O **sen x** e o **cos x** são números reais, pois são razões entre grandezas.

CONCLUSÕES DESTA ATIVIDADE :

(espaço para escreverem as conclusões)

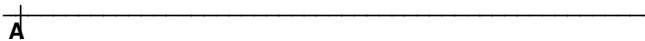
Discutimos ainda o comprimento da circunferência e as unidades de medida de ângulo: graus e radianos. Finalmente os alunos completaram o roteiro.

PARA FINALIZAR... RELEMBREMOS:

1. O COMPRIMENTO DA CIRCUNFERÊNCIA É $2\pi R$

ENTÃO SE RETIFICARMOS A CIRCUNFERÊNCIA DE RAIOS $R = 1$, SEU COMPRIMENTO SERÁ 2π .

REPRESENTE-A, LOCALIZANDO OS PONTOS A, B, C E D.



2. EXISTE OUTRA UNIDADE DE MEDIDA DE ÂNGULO ALÉM DO GRAU, QUE É O RADIANO.

CONVERSÃO DE UNIDADES.

$x(^{\circ})$	0	90	180	270	360
$x(\text{rad})$	0				2π

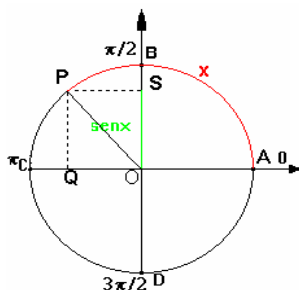
A seguir comentamos o preenchimento da tabela pela dupla, corrigindo-o, se necessário, e concluindo a parte A dizendo que: “Na próxima atividade você trabalhará com a medida em radianos”.

Descrição da Sessão Computador 1 - Parte B

Iniciamos esta parte da sessão com uma exposição, de aproximadamente 15 minutos, sobre o assunto, já que os alunos não tinham estudado a trigonometria no ciclo. O exposto e esquematizado na lousa do laboratório foi distribuído como uma folha resumo.

A seguir apresentamos uma reprodução da folha resumo sobre a explanação, distribuída para que a dupla pudesse acompanhar as explicações, sem que fosse necessário fazer anotações.

NA ATIVIDADE ANTERIOR TRABALHAMOS COM ÂNGULOS AGUDOS E AS DEFINIÇÕES DE SENO E COSSENO VISTAS SÓ PODEM SER USADAS PARA ÂNGULOS ENTRE 0° E 90° , POIS SE BASEIAM EM LADOS DE UM TRIÂNGULO RETÂNGULO. PARA ESTENDER A DEFINIÇÃO PARA ÂNGULOS MAIORES QUE 90° , IREMOS CONSIDERAR x COMO A MEDIDA DE UM ÂNGULO CENTRAL, OU SEJA, COM VÉRTICE NO CENTRO DA CIRCUNFERÊNCIA. A TAL ÂNGULO CORRESPONDERÁ UM ARCO DE CIRCUNFERÊNCIA. E AINDA:



CONSIDERAMOS UM SISTEMA CARTESIANO ORTOGONAL ACOPLADO A UMA CIRCUNFERÊNCIA DE RAIOS UNITÁRIO, COM A ORIGEM COINCIDENTE COM O CENTRO O DA CIRCUNFERÊNCIA. SEJAM A, B, C, D OS PONTOS DE INTERSEÇÃO DOS EIXOS DO SISTEMA CARTESIANO COM A CIRCUNFERÊNCIA. ENTÃO SE A MEDIDA DO ARCO $AP = x$ DEFINIMOS

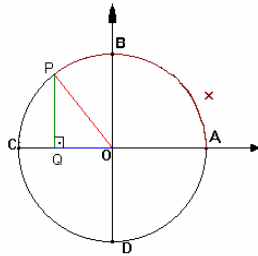
SEN $x = OS$
(PROJEÇÃO DE OP SOBRE O EIXO VERTICAL)

COS $x = OQ$
(PROJEÇÃO DE OP SOBRE O EIXO HORIZONTAL)

COMO ESTAMOS NO SISTEMA CARTESIANO, TEMOS QUE, SE OS ESTÁ NA SEMI RETA OB É POSITIVO E SE ESTÁ NA SEMI RETA OD , NEGATIVO.

QUANTO AO COSSENO, SE OQ ESTÁ NA SEMI RETA OA TERÁ SINAL POSITIVO E NA SEMI RETA OC , SINAL NEGATIVO.

ESTAS DEFINIÇÕES DE SENO E COSSENO DE x , PARA ÂNGULOS MAIORES DE 90° SÃO EQUIVALENTES ÀS DEFINIÇÕES PARA $0 < x < 90^\circ$, JÁ QUE:



NO TRIÂNGULO OPQ TEMOS :

$$\text{sen } x = \frac{PQ}{OP} \text{ E } \text{cos } x = \frac{OQ}{OP}$$

COMO $OP = 1$ (POIS É O RAIOS), TEMOS:

$$\text{SEN } x = PQ \text{ E } \text{COS } x = OQ$$

$$\text{COMO OS} = PQ \Rightarrow \text{SEN } x = \text{OS}$$

ALÉM DISSO, SE CONSIDERARMOS UMA ORIGEM PARA OS ARCOS (O PONTO A) E UM SENTIDO DE PERCURSO COMO SENDO O POSITIVO (O ANTI HORÁRIO), PODEMOS DETERMINAR SENOS E COSENOS DE ÂNGULOS MAIORES DE 360° E TAMBÉM DE ARCOS CUJAS MEDIDAS SEJAM NEGATIVAS.

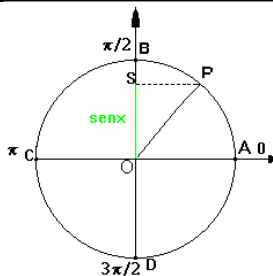
AINDA TEMOS A VANTAGEM DE PODER RELACIONAR O ARCO AP, DE MEDIDA X COM A PROJEÇÃO EM CADA UM DOS EIXOS, COMPARANDO COMPRIMENTOS.

A PARTIR DAQUI VAMOS TRABALHAR COM NÚMEROS REAIS, TENDO A RETA REAL "ENROLADA" NO CICLO TRIGONOMÉTRICO, O ZERO COINCIDINDO COM O PONTO ORIGEM A E PERCURSO NO SENTIDO ANTI-HORÁRIO. PARA ISSO A MEDIDA DO ARCO ESTARÁ SEMPRE REPRESENTADA EM RADIANOS. ASSIM, POR EXEMPLO, UM ARCO DE 2 RAD COM ORIGEM A E EXTREMIDADE P CORRESPONDE AO NÚMERO REAL 2, REPRESENTADO NO CICLO PELO PONTO P.

Terminada esta discussão, os alunos passaram ao trabalho no computador. Para isso utilizaram os arquivos prontos Trigo1, Trigo2 e Trigo3. Neles o ciclo trigonométrico não veio acompanhado de nenhuma medida, porque nosso objetivo era levar o aluno a fazer uma análise qualitativa dos valores de seno e cosseno.

Nesta atividade, os alunos completaram as tabelas subsequentes, de acordo com suas próprias observações.

No item 1 solicitamos que abrissem o arquivo Trigo 1, deslocassem o ponto P do ciclo trigonométrico ao longo dos quadrantes e, então, investigassem crescimento e decréscimo dos valores do seno, para preencher a primeira tabela. Já para a segunda, os alunos completaram alguns valores de seno e cosseno, sem que estes aparecessem na tela, ou seja, sem conferir no software. Com isso procuramos investigar o que eles aprenderam até aqui.



1) ABRA O ARQUIVO TRIGO 1.

SEJA $AP = x$

DESLOCANDO O PONTO P, NO SENTIDO ANTI-HORÁRIO, AO LONGO DOS QUADRANTES, DE TAL FORMA QUE $AP = x$ ESTEJA NAS POSIÇÕES I A IV ABAIXO, COMPLETE A TABELA.

CONFORME P SE APROXIMA	AP = X	VALOR DE SEN X (AUMENTA OU DIMINUI)	SINAL DE SEN X (POSITIVO OU NEGATIVO)
I DE B	$0 < AP < \pi/2$		
II DE C	$\pi/2 < AP < \pi$		
III DE D	$\pi < AP < 3\pi/2$		
IV DE A	$3\pi/2 < AP < 2\pi$		

COMPLETE:

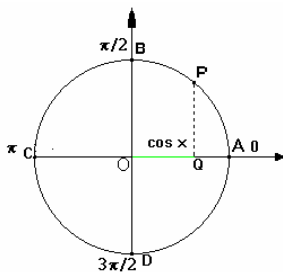
PONDO P SOBRE A TEMOS:	AP = X = 0	SEN 0 = 0
PONDO P SOBRE B TEMOS:	AP = X = $\pi/2$	SEN =
PONDO P SOBRE C TEMOS:	AP = X = π	SEN =
PONDO P SOBRE D TEMOS:	AP = X = $3\pi/2$	SEN =
PONDO P SOBRE A TEMOS:	AP = X = 2π	SEN =

OBSERVANDO OS DADOS ACIMA, RESPONDA:

1. QUAL O VALOR MÁXIMO ASSUMIDO PELO SENOS ? _____ E QUAL O VALOR MÍNIMO? _____
2. SE CONTINUAR A MOVIMENTAR O PONTO P DE TAL FORMA QUE $AP > 2\pi$, O QUE VOCÊ PODE PREVER EM RELAÇÃO AOS SINAIS E AO CRESCIMENTO OU DECRESCIMENTO DO SENOS?

Em seguida, a dupla abriu o arquivo **Trigo 2** para preencher o roteiro, segundo suas próprias observações. Desta feita, pedimos que fizessem uma *Previsão* dos valores para só então conferir com o computador.

Nosso objetivo foi verificar se os alunos transferiram para este caso o que observaram na tela anterior.



ABRA O ARQUIVO TRIGO 2.

SUPONDO QUE O PONTO P SE DESLOQUE, NO SENTIDO ANTI-HORÁRIO, AO LONGO DOS QUADRANTES, DE TAL FORMA QUE O ARCO $AP = X$ ESTEJA NAS POSIÇÕES I A IV ABAIXO, FAÇA UMA PREVISÃO DO QUE DEVERÁ OCORRER E COMPLETE A TABELA:

CONFORME P SE APROXIMA	AP = X	VALOR DE COS X (AUMENTA OU DIMINUI)	SINAL DE COS X (POSITIVO OU NEGATIVO)
I- DE B	$0 < AP < \pi/2$		
II- DE C	$\pi/2 < AP < \pi$		
III- DE D	$\pi < AP < 3\pi/2$		
IV- DE A	$3\pi/2 < AP < 2\pi$		

COMPLETE:

PONDO P SOBRE A TEMOS:	AP = X = 0	COS 0 = 1
PONDO P SOBRE B TEMOS:	AP = X = $\pi/2$	COS =
PONDO P SOBRE C TEMOS:	AP = X = π	COS =
PONDO P SOBRE D TEMOS:	AP = X = $3\pi/2$	COS =

PONDO P SOBRE A TEMOS:	$AP = x = 2\pi$	$\cos =$
------------------------	-----------------	----------

DESLOQUE O PONTO P E CONFIRME NO COMPUTADOR AS SUAS RESPOSTAS.

OBSERVANDO OS DADOS ACIMA, RESPONDA:

1. QUAL O VALOR MÁXIMO ASSUMIDO PELO COSSENO ? ____ E QUAL O VALOR MÍNIMO? ____
2. SE VOCÊ CONTINUAR A MOVIMENTAR O PONTO P DE TAL FORMA QUE $AP > 2\pi$, O QUE VOCÊ PODE PREVER EM RELAÇÃO AOS SINAIS E AO CRESCIMENTO /DECRESCIMENTO DO COSSENO?

Ainda sem ter feito nenhuma discussão que permitisse validar as suas observações, os alunos abriram o arquivo Trigo 3, deslocaram o ponto P e completaram o roteiro seguinte, com suas próprias reflexões.

3) ABRA O ARQUIVO TRIGO 3.

A) DESLOCANDO O PONTO P AO LONGO DO 1º QUADRANTE, OBSERVE O $\triangle OPQ$. QUE TIPO DE TRIÂNGULO É ESTE? _____

B) IDENTIFIQUE O QUE CADA SEGMENTO COLORIDO REPRESENTA, EM RELAÇÃO AO TRIÂNGULO:

OP VERMELHO _____ OQ AZUL _____ PQ VERDE _____

C) QUAL A RELAÇÃO IMPORTANTE ENTRE OS LADOS DESSE TRIÂNGULO?

D) MOVENDO P AO LONGO DO CICLO TRIGONOMÉTRICO, O QUE ACONTECE COM O TAMANHO DE OP? _____

ESTE SEGMENTO REPRESENTA, EM RELAÇÃO AO CICLO, O _____ E PORTANTO SEU VALOR É 1.

SENDO O ARCO AP DE MEDIDA X, O QUE REPRESENTAM: OP = _____ E PQ = _____

SUBSTITUINDO ESTES DADOS NO ITEM C CONCLUI-SE QUE:

QUE É A RELAÇÃO FUNDAMENTAL DA TRIGONOMETRIA

E) DESLOCANDO O PONTO P AO LONGO DO 1º Q, COMPARE OS SEGMENTOS OQ E PQ E EXPLIQUE O QUE ACONTECE COM OS SEUS TAMANHOS.

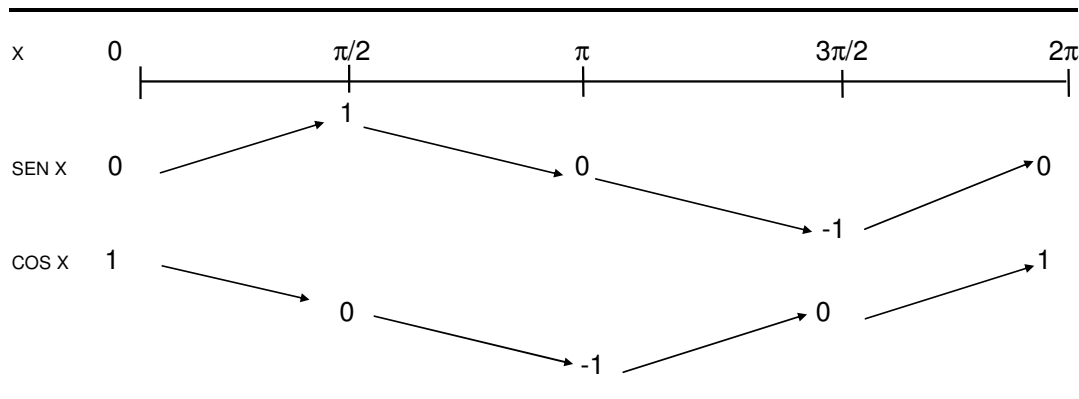
F) EXISTE ALGUM PONTO EM QUE ESSES SEGMENTOS SÃO IGUAIS ? _____ SE SIM, QUAIS OS ARCOS CORRESPONDENTES? _____ JUSTIFIQUE POR QUE ISSO OCORRE. _____

Discutimos, para que eles completassem o quadro das conclusões que variaram de dupla para dupla, embora todos tenham chegado a um consenso durante o debate.

CONCLUSÕES:

(espaço para escreverem as conclusões)

Foram escritas no quadro do roteiro as seguintes conclusões:



Com esta discussão, demos por encerrada a atividade e informamos à dupla que no próximo encontro continuariam trabalhando com o mesmo “software”.

Descrição do encontro Computador2

Nesta sessão, os alunos trabalharam com o arquivo Ni.2, no qual é possível fazer uma análise quantitativa dos valores de seno e cosseno. Novamente, completaram o roteiro a partir de suas próprias observações e da manipulação do arquivo, no computador. Apresentamos abaixo o item 1 do roteiro.

1) ABRA O ARQUIVO Ni.2

DESLOQUE O PONTO P AO LONGO DOS QUADRANTES, DE TAL FORMA QUE O ÂNGULO CENTRAL CORRESPONDENTE AO ARCO AP ASSUMA OS VALORES ASSINALADOS ABAIXO E COMPLETE A TABELA

x (°)	x (RAD.)	OQ = COS X	OS = SEN X
0	0		
30	$\pi / 6$		
45	$\pi / 4$		
60	$\pi / 3$		
90	$\pi / 2$		
120	$2\pi / 3$		
135	$3\pi / 4$		
150	$5\pi / 6$		
180	π		

2) EXISTEM VALORES DE X, ENTRE OS DADOS QUE VOCÊ COLETOU, QUE POSSUEM O MESMO SENOS? _____ SE SIM, CITE ALGUNS _____

E QUANTO AO COSSENO? _____

3) COMPARE SEN 20° COM O SEN 160°. O QUE OCORRE COM SEUS VALORES? _____

JUSTIFIQUE O PORQUÊ _____

Solicitamos aos alunos que fizessem previsões dos valores, para verificar se eles perceberam as simetrias. Só depois deveriam conferir no computador. Abaixo, o item quatro, do roteiro.

4) FAÇA UMA PREVISÃO DO COS X E DO SEN X PARA OS SEGUINTE VALORES DE X:

X (°)	X (RAD.)	OQ = COS X	OS = SEN X
210	$7\pi/6$		
225	$5\pi/4$		
240	$4\pi/3$		
270	$3\pi/2$		
300	$5\pi/3$		
330	$7\pi/4$		
360	$11\pi/6$		
390	$2\pi + \pi/6$		

5) CONFIRA NO COMPUTADOR E VEJA SE VOCÊ ACERTOU. CITE DOIS VALORES DE X CUJOS SENOS SEJAM NÚMEROS OPOSTOS _____

6) DÊ DOIS VALORES DE X TAIS QUE $\cos x = -0,5$ _____

Solicitamos que fizessem um gráfico com os valores obtidos. Nossa opção foi que o gráfico da função seno aparecesse pela primeira vez pela mão do aluno e não pelo computador. Este tipo de abordagem foi escolhido porque quando se usa o computador, com o Graphmatica, a resposta é imediata. Basta digitar a expressão algébrica relativa à função e o comando ENTER que o gráfico surge na tela. Na próxima sessão ele terá oportunidade de analisar gráficos construídos pela máquina, mas não desta primeira vez. No caso, queríamos que o aluno percebesse detalhes relativos a cada gráfico que a confecção com papel e lápis poderia facilitar.

Foi apresentado no roteiro um quadro em branco para a colocação do gráfico, ficando por conta da dupla decidir a posição dos eixos e a escala. A seguir, o item sete do roteiro.

7) FAÇA UM GRÁFICO COLOCANDO NO EIXO HORIZONTAL OS VALORES DO ARCO X E NO EIXO VERTICAL OS VALORES CORRESPONDENTES DO SEN X.

(espaço para o gráfico)

ESTE GRÁFICO PODE ESTAR REPRESENTANDO UMA FUNÇÃO? _____
JUSTIFIQUE SUA RESPOSTA. _____

8) REPITA O PROCEDIMENTO COLOCANDO NO EIXO VERTICAL OS VALORES DE COS X.

(espaço para o gráfico)

Fizemos então a institucionalização, discutindo todos os itens do roteiro e apresentando as seguintes conclusões que foram listadas com a dupla, escritas na lousa e acrescentadas ao roteiro:

1. Se no eixo horizontal escolhermos um número real x e no vertical $y = \text{sen } x$, teremos o gráfico da função $f(x) = \text{sen } x$, de Domínio \mathfrak{R} , Imagem = $[-1;1]$ e Período 2π .
2. Se considerarmos no eixo horizontal os números reais x e no vertical $y = \text{cos } x$; teremos o gráfico da função $f(x) = \text{cos } x$, de Domínio \mathfrak{R} , Imagem = $[-1; 1]$ e Período 2π .

Estas conclusões foram acrescentadas ao roteiro.

Descrição das Atividades Computador 3.

Iniciamos dizendo aos alunos que trabalharíamos com um outro software e que nosso objetivo, além do desenvolvimento do conteúdo matemático, seria a familiarização com o aplicativo, novo para eles. A primeira parte (3a) foi, por isso, bastante dirigida.

Distribuímos o roteiro e demos as seguintes instruções:

1. Verificar se **Default Grid** está acionado.
2. Escolher, no Menu **View**:

Colors	Range		Graph Paper
White background	Left -1	Right 13	Trig Gridlines
	Top 4,71	Bottom - 4,71	

Iniciamos pela função $f(x) = \text{sen } x$, que já foi estudada por eles no encontro Computador 2, ou seja, fizemos a ligação com a sessão e o assunto anteriores, com uma abordagem diferente. O computador agora fornecia o gráfico e, por intermédio da observação deste gráfico, o aluno preenchia o roteiro.

No item b da questão 1 falamos sobre função limitada e solicitamos ao aluno que justificasse o porquê desta classificação. Desta forma tivemos respostas pessoais e procuramos chamar a atenção para o fato de as funções seno e cosseno, além de limitadas, apresentarem um valor máximo e um valor mínimo. Ainda no mesmo item pedimos a determinação do Conjunto Imagem da função.

No item c abordamos a questão da periodicidade, que também foi analisada na atividade anterior, e cabe aqui o mesmo comentário feito no item b, ou seja, procuramos chamar a atenção para o fato de a função apresentar período.

ATIVIDADE 3A: ESTUDO DO SENO

1) PARA OBTER O GRÁFICO DA FUNÇÃO $f(x) = \text{sen } x$, DIGITE $Y = \text{SIN}(X)$ E PRESSIONE ENTER OU CLIQUE EM GRAPH

A) OBSERVE O GRÁFICO E DÊ O DOMÍNIO DA FUNÇÃO _____

B) ESTA FUNÇÃO É UM EXEMPLO DO QUE CHAMAMOS FUNÇÃO LIMITADA. VOCÊ PODERIA DAR UMA EXPLICAÇÃO PARA ESSA CLASSIFICAÇÃO?

QUAL É O CONJUNTO IMAGEM DA FUNÇÃO? _____

C) ESTA É UMA FUNÇÃO PERIÓDICA. POR QUE ELA RECEBE ESTE NOME E QUAL É O SEU PERÍODO? _____

D) QUANTOS PERÍODOS COMPLETOS VOCÊ ESTÁ VISUALIZANDO NA TELA? _____

Na **questão 2** o gráfico analisado foi $y = \sin x + 1$. Pedimos que a dupla encontrasse o Domínio, a Imagem e o Período, para que pudessem perceber que apenas a Imagem mudava, em relação à função anteriormente estudada.

2) DIGITE $Y = \sin(x) + 1$ E PRESSIONE ENTER.

ESCREVA: A) O DOMÍNIO $D =$

B) O CONJUNTO IMAGEM $IM = [\quad ; \quad] = \{ \quad \}$

C) O PERÍODO $P =$ _____

Na **questão 3** estudamos a função dada por: $y = \sin x - 1$, que apresentava os mesmos Domínio e Período das funções abordadas nas questões 1 e 2 e apenas a Imagem diferente. Apesar de não formularmos ainda uma questão focalizando o ocorrido, pensamos que os alunos iriam comparar as três questões.

3) DIGITE $Y = \sin(x) - 1$ E PRESSIONE ENTER.

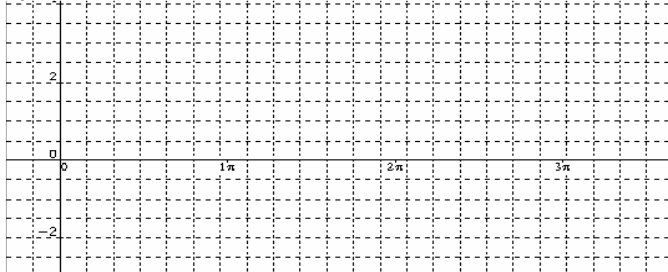
ESCREVA: A) O DOMÍNIO $D =$

B) O CONJUNTO IMAGEM $IM = [\quad ; \quad] = \{ \quad \}$

C) o período $P =$ _____

Na **questão 4** procuramos auxiliá-los na percepção das semelhanças e diferenças entre os gráficos das três questões anteriores, ao solicitar que “copiassem” a tela, fazendo um esboço dos gráficos. O que o aluno viu na tela está no Anexo 5.7.3.

4) FAÇA UM ESBOÇO DA TELA, NO VERSO, CONTENDO OS TRÊS GRÁFICOS



COMPARE OS TRÊS GRÁFICOS. QUAL A TRANSFORMAÇÃO QUE OCORRE DE $Y = \text{SEN}X$ PARA $Y = \text{SEN}X + 1$ E $Y = \text{SEN}X - 1$? _____

O QUE MAIS VOCÊ OBSERVA COMPARANDO OS TRÊS GRÁFICOS? _____

A seguir, interrompemos o trabalho da dupla no computador para fazer uma discussão e a institucionalização local. Optamos por chamar a atenção dos alunos sobre os aspectos que nos interessavam neste ponto do estudo porque, desta forma, ao analisar os demais gráficos, eles poderiam observar sozinhos o que estava acontecendo.

Discutimos com eles que:

“Comparando-se o gráfico da função dada por $y = \text{sen } x + 1$ com o gráfico de $y = \text{sen } x$, observamos que uma unidade foi adicionada à ordenada de cada ponto do gráfico de $y = \text{sen } x$ e, com isso, ele se desloca “para cima”. No caso de $y = \text{sen } x - 1$, o gráfico desloca-se “para baixo”, ou seja, acontece uma translação vertical do gráfico para cima ou para baixo, mas o formato dos três gráficos é o mesmo”.

* DEVERÁ SER PREENCHIDO APÓS A DISCUSSÃO.

Na **questão 5** pedimos que eles limpassem a tela, para que houvesse maior clareza, e não confundissem os gráficos. Deveriam, então, identificar o Domínio, a Imagem e o Período do gráfico de **$y = 2\text{sen } x$** , uma vez na tela. Optamos por questões fechadas, indicando o valor pelo qual deveria ser multiplicado o seno, em vez de deixar livre escolha do aluno, para que pudéssemos exercer controle sobre o que e como o aprendiz estaria visualizando a tela.

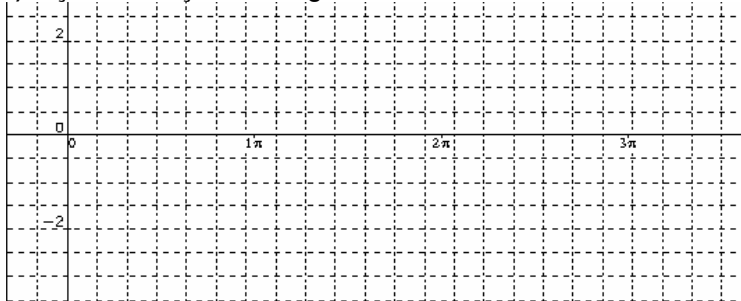
5) PARA LIMPAR A TELA VAMOS CLICAR EM CLEAR.
DIGITE AGORA $Y = 2 \text{ SIN } (X)$ E PRESSIONE ENTER, PARA OBTEN O GRÁFICO DE $F(X) = 2 \text{ SENX}..$
ESCREVA :A) O DOMÍNIO $D =$ _____
B) O CONJUNTO IMAGEM $Im = [\quad ; \quad] = \{ \text{_____} \}$
C) O PERÍODO $P =$ _____

Na **questão 6**, procuramos uma maior familiarização com o aplicativo ensinando como voltar para a tela uma função que já foi usada na atividade. Voltando à tela o gráfico, no caso, de **$y = \text{sen } x$** pedimos que fosse mostrado **$y = 3 \text{ sen } x$** , para que, vendo as três funções na tela, os alunos pudessem compará-las facilmente (vide Anexo 5.8.3.).

6) PARA COMPARAR AS FUNÇÕES, SEM LIMPAR A TELA, REFAÇA O GRÁFICO DA FUNÇÃO $Y = \text{SENX}$.
PARA ISSO BASTA VOCÊ CLICAR SOBRE A SETA QUE ESTÁ NO CANTO SUPERIOR DIREITO DA TELA, CLICAR EM $Y = \text{SIN } (X)$ E PRESSIONAR ENTER. A SEGUIR, NOVAMENTE SEM LIMPAR A TELA, DIGITE $Y = 3\text{SIN}(X)$ E PRESSIONE ENTER. ESCREVA, DA ÚLTIMA FUNÇÃO :
A) O DOMÍNIO $D =$ _____
B) O CONJUNTO IMAGEM $Im = [\quad ; \quad] = \{ \text{_____} \}$
C) O PERÍODO $P =$ _____

Na **questão 7**, solicitamos que fizessem um esboço dos três gráficos obtidos. Desta forma fizemos uma repetição do raciocínio das questões 1 a 4, na tentativa de levar o aluno a concluir sobre o que interfere na variação da Imagem e na distorção do gráfico. Observamos que, ao pedir que os alunos registrassem o gráfico no papel, tivemos por objetivo que eles não apenas visualizassem, mas também “traçassem” o gráfico para permitir uma análise durante a discussão da atividade.

7) Faça um esboço dos três gráficos abaixo



COMPARE-OS . A QUE CONCLUSÕES QUE VOCÊ PODE CHEGAR? _____

Na **questão 8**, considerando $D=[0, 2\pi]$, pedimos que fosse preenchida uma tabela comparativa entre as funções $y = \text{sen } x$ e $y = -\text{sen } x$, para que eles observassem que a Imagem e o Período são iguais. O objetivo aqui era que percebessem que os gráficos são diferentes, apesar da coincidência do Domínio, da Imagem e do Período, e que isto se deve ao sinal negativo, único fator que as diferencia. A seguir foi solicitado à dupla que classificasse em quais intervalos a função é positiva e em quais é negativa e ainda onde é crescente e onde é decrescente. Pensamos que desta forma eles perceberiam a influência do sinal negativo, no formato do gráfico.

8) NO MENU REDRAW ESCOLHA CLEAR ALL.

PARA OBTER O GRÁFICO DA FUNÇÃO $F(x) = \text{SEN } X$ COM $D = [0, 2\pi]$ DIGITE $Y = \text{SIN } (X)$ {0,2P} SEM LIMPAR A TELA DIGITE $Y = - \text{SIN } (X)$ {0,2P} . ANALISANDO OS DOIS GRÁFICOS COMPLETE:

$Y = \text{SEN } X$ COM $D = [0, 2\pi]$	$Y = - \text{SEN } X$ COM $D = [0, 2\pi]$
Im =	Im =
P =	P =

NOS INTERVALOS ABAIXO CLASSIFIQUE A FUNÇÃO COMO POSITIVA OU NEGATIVA

	$0 < X < \pi/2$	$\pi/2 < X < \pi$	$\pi < X < 3\pi/2$	$3\pi/2 < X < 2\pi$
$Y = \text{SEN } X$				
$Y = - \text{SEN } X$				

EM QUE INTERVALOS DE X A FUNÇÃO É CRESCENTE E EM QUAIS É DECRESCENTE ?

	$0 < X < \pi/2$	$\pi/2 < X < \pi$	$\pi < X < 3\pi/2$	$3\pi/2 < X < 2\pi$
$Y = \text{SEN } X$				
$Y = - \text{SEN } X$				

Na **questão 9**, sem limpar a tela, deveriam adicionar a função $y = -2 \sin x$ com $D = [0, 2\pi]$. Com os três gráficos na tela, (vide *Anexo.5.8.3.*) poderiam compará-los e tirar conclusões.

9) SEM LIMPAR A TELA ACRESCENTE A FUNÇÃO $Y = -2 \sin x$ COM $D = [0, 2\pi]$, PARA ISSO DIGITE $Y = -2 \sin(x) \{0, 2\pi\}$. COMPARE OS TRÊS GRÁFICOS.
CONCLUSÕES: _____

Na **questão 10** dissemos como pôr o título no gráfico. Seria interessante que os alunos soubessem como fazê-lo, para não confundir um gráfico com outro. O “software” dá diferentes cores para os gráficos, mas mesmo assim eles poderiam, depois de traçar vários deles, ficar em dúvida sobre qual é a expressão algébrica correspondente a cada um. O objetivo desta questão está ligada à familiarização com o aplicativo.

10) PARA COLOCAR TÍTULO NO GRÁFICO: CLIQUE NO MENU LABELS E ESCOLHA ANNOTATE, DIGITE NA CAIXA $F(x) = \sin x [0, 2\pi]$, CLIQUE EM PLACE E ARRASTE COM O BOTÃO ESQUERDO DO MOUSE PRESSIONADO, APONTE PARA O GRÁFICO CORRESPONDENTE E SÓ ENTÃO SOLTE O BOTÃO.

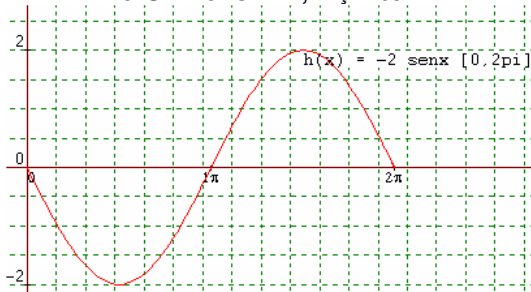
Na **questão 11**, pedimos que pusessem os títulos nos demais gráficos da tela e que identificassem para quais arcos as funções assumem o mesmo valor.

11) REPITA O PROCEDIMENTO PARA OS OUTROS GRÁFICOS: DIGITE $G(x) = -\sin x [0, 2\pi]$ E $H(x) = -2\sin x [0, 2\pi]$.
RESPONDA:
EXISTEM VALORES DE x , NO INTERVALO CONSIDERADO, PARA OS QUAIS $F(x) = G(x) = H(x)$?
SE SIM, QUAIS? _____

Na **questão 12**, o aluno deveria trazer novamente o último gráfico traçado à tela. Apresentamos no roteiro o gráfico. O objetivo foi orientar os alunos para que, se estivessem trabalhando de forma errada, pudessem perceber e nos pedir ajuda ou, ainda, tentar corrigir a falha sozinhos. No caso da tela estar idêntica ao gráfico do roteiro, teriam a confirmação de que o trabalho estava correto, o que, esperamos, lhes daria segurança e incentivo para continuar. Solicitamos, novamente, que fizessem uma análise de onde a função é crescente, decrescente, positiva ou negativa e o que ainda não havia sido abordado. Por fim, pedimos que identificassem onde a função tem máximo e onde tem mínimo e quais os valores de x para os quais isto ocorre.

Desta maneira retomamos características funcionais já estudadas pelos alunos, por exemplo, na função quadrática, presentes nas funções senoidais.

12) CLIQUE EM CLEAR , RECOLOQUE A ÚLTIMA FUNÇÃO E VERIFIQUE SE SUA TELA ESTÁ COMO A ABAIXO. SE NÃO ESTIVER, PEÇA AJUDA.



ASSINALE NO GRÁFICO QUAIS OS VALORES DE X PARA OS QUAIS A FUNÇÃO É CRESCENTE E PARA OS QUAIS É DECRESCENTE.

ASSINALE NO GRÁFICO QUAIS SÃO OS VALORES DE X PARA OS QUAIS A FUNÇÃO É POSITIVA E PARA OS QUAIS É NEGATIVA.

QUAL O VALOR MÁXIMO DA FUNÇÃO E QUAL O VALOR MÍNIMO ? _____

QUAL O VALOR DE X PARA Y_{\min} ? _____

QUAL O VALOR DE X PARA Y_{\max} ? _____

Na **questão 13**, solicitamos que limpassem a tela e então passamos a um estudo comparativo de $y = \text{sen } x$ com $D = [0, 4\pi]$, $y = \text{sen}(2x)$ com $D = [0, 4\pi]$ e $y = \text{sen}(x/2)$ com $D = [0, 4\pi]$. Pensamos que, desta forma, seria fácil para o aluno completar a tabela pedida e perceber que só o período mudava, “encolhendo” ou “esticando” o gráfico e, no caso da última função, que o domínio de $[0, 2\pi]$ não daria um período completo. Naturalmente, durante a discussão, chamamos a atenção para este fato, caso a dupla não tivesse observado nada disso por si própria.

13) LIMPE A TELA USANDO A OPÇÃO CLEAR ALL NO MENU REDRAW PARA LIMPAR INCLUSIVE OS NOMES DOS GRÁFICOS (LABELS).

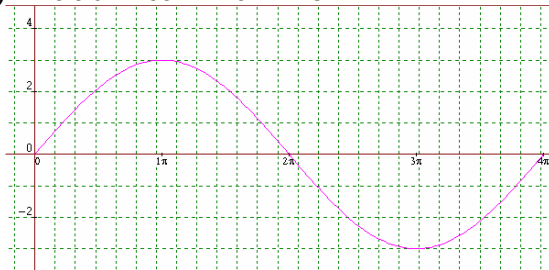
FAÇA O GRÁFICO DE $Y = \text{SEN } X ; D = [0, 4\pi]$. LEMBRE-SE: DIGITE $Y = \text{SEN}(X) \{0, 4P\}$ SEM LIMPAR A TELA, DIGITE $Y = \text{SEN}(2X) \{0, 4P\}$ E $Y = \text{SEN}(X/2) \{0, 4P\}$ PARA OBTEN OS GRÁFICOS DE $Y = \text{SEN}(2X)$, $D = [0, 4\pi]$ E $Y = \text{SEN}(X/2)$ $D = [0, 4\pi]$ ANALISANDO A TELA, COMPLETE A TABELA ABAIXO:

FUNÇÃO	DOMÍNIO	IMAGEM	PERÍODO
$Y = \text{SEN } X$	D =	IM =	P =
$Y = \text{SEN}(2X)$	D =	IM =	P =
$Y = \text{SEN}(X/2)$	D =	IM =	P =

Na **questão 14** mudamos o registro de representação, fornecemos um gráfico no roteiro e pedimos ao aluno Domínio, Imagem, Período e a expressão algébrica correspondente. Nas questões anteriores o gráfico era construído a partir da expressão

algébrica. O objetivo é que o aluno faça a passagem do quadro gráfico para o algébrico com a possibilidade de conferir, no computador, se acertou, e então imprimir seu trabalho.

14) DADO O GRÁFICO ABAIXO PEDE-SE:



a) DOMÍNIO _____

b) IMAGEM _____

c) PERÍODO _____

D) A EXPRESSÃO ALGÉBRICA CORRESPONDENTE À FUNÇÃO: F: → TAL QUE:
 $F(x) =$

CONFIRA NO COMPUTADOR SE VOCÊ ACERTOU. SE O GRÁFICO OBTIDO FOR IGUAL AO ACIMA, IMPRIMA O SEU TRABALHO. (MENU FILE OPÇÃO PRINT). CASO CONTRÁRIO SOLICITE AUXÍLIO.

Nossa interferência limitou-se ao auxílio das duplas quanto às dificuldades de uso do computador.

Completado o roteiro, fizemos um debate e a institucionalização, que resumimos abaixo:

1. Seja $f(x) = a \sin(\omega x + x_0) + b$, com $a \neq 0$. Então, em relação à Imagem podemos dizer que: se $y = \sin x$ é tal que $Im = [-1; 1]$, ou seja:

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow -a \leq a \cdot \sin x \leq a \quad \text{se } a > 0 \Rightarrow -a + b \leq a \cdot \sin x + b \leq a + b$$

Então $-a + b \leq f(x) \leq a + b$, o que nos leva a concluir que **$Im = [-a + b; a + b]$** .

Quando $a < 0$ a Imagem é a mesma de $a > 0$ porém, nos intervalos onde uma é crescente a outra é decrescente e onde uma é positiva a outra é negativa.

2. Quanto ao Período, até aqui observamos que $P = \frac{2\pi}{\omega}$.

Desta maneira encerramos a sessão Computador 3.

Descrição da Sessão Computador 4

Iniciamos a sessão dizendo aos alunos que continuariam utilizando o aplicativo do último encontro e completando um roteiro. Nesta atividade pressupusemos o conhecimento do “software” e, portanto, não mais indicamos onde clicar e quais as ações que deveriam ser efetuadas para a obtenção dos gráficos.

Na **questão 1** solicitamos a construção dos gráficos de $y = \cos x$, já conhecida do aluno, de $y = \cos x + 2$ e de $y = \cos x - 1$ e, a partir deles, a determinação da Imagem e do Período de cada função. Repetimos o raciocínio da questão 1 da atividade anterior. Nosso objetivo aqui foi estudar a função cosseno. As variáveis nesta questão são as constantes a serem somadas: 2 e -1, que foram escolhidas para que os três gráficos ficassem bem visíveis na tela e fosse simples determinar Período e Imagem.

ATIVIDADE 3B : ESTUDO DO COSSENO

1) FAÇA OS GRÁFICOS DAS FUNÇÕES $Y = \cos x$; $Y = \cos x + 2$ E $Y = \cos x - 1$ COM DOMÍNIO \mathbb{R}
(VEJA AS INSTRUÇÕES NA ATIVIDADE 3A)

PREENCHA A TABELA:	IMAGEM	PERÍODO
$Y = \cos x$	IM =	P =
$Y = \cos x + 2$	IM =	P =
$Y = \cos x - 1$	IM =	P =

Na **questão 2**, o aluno construiu e comparou os gráficos das funções dadas por: $y = 2 \cos x$, $y = 2 \cos x - 1$, $y = 2 \cos x + 3$. Optamos por mostrar sempre na tela três gráficos. No caso, todos têm a constante 2 multiplicando $\cos x$ mas as constantes somadas mudam, o que esperamos tenha facilitado a percepção da translação em relação ao eixo y, pois a “forma” da função não muda.

2) LIMPE A TELA. CONSTRUA OS GRÁFICOS DE $Y = 2 \cos x$, $Y = 2 \cos x - 1$, $Y = 2 \cos x + 2$

PREENCHA A TABELA:	IMAGEM	PERÍODO
$Y = 2 \cos x$	IM =	P =
$Y = 2 \cos x - 1$	IM =	P =
$Y = 2 \cos x + 2$	IM =	P =

Na **questão 3** solicitamos a colocação na tela dos gráficos das funções com lei de formação: $y = \cos (2x)$, $y = \cos (x/2)$ e $y = \cos x$, nas quais a variação é apenas da constante ω . Pensamos desta forma ter contribuído para que o aluno fizesse

analogia com a atividade anterior e percebesse que se podem estender para esse caso as conclusões já obtidas, expandindo e consolidando os conceitos vistos.

3) LIMPE A TELA. CONSTRUA OS GRÁFICOS DE $Y = \cos(2x)$, $Y = \cos(x/2)$ E $Y = \cos x$

PREENCHA A TABELA:	IMAGEM	PERÍODO
$Y = \cos(2x)$	IM =	P =
$Y = \cos(x/2)$	IM =	P =
$Y = \cos x$	IM =	P =

Na **questão 4** foram comparados os gráficos das funções dadas por:

$y = 3 \cos\left(\frac{x}{2}\right) + 1$, $y = 3 \cos\left(\frac{x}{2}\right) - 1$ e $y = \cos x$. O objetivo foi levar os alunos a observarem qual é a influência das constantes: 3, $\frac{1}{2}$, 1 e -1 no formato do gráfico e no Domínio, na Imagem e no Período de cada função.

4) LIMPE A TELA. CONSTRUA OS GRÁFICOS $Y = 3\cos(x/2)+1$ E $Y = 3\cos(x/2)-1$ E REFAÇA $Y = \cos(x/2)$

PREENCHA A TABELA:	IMAGEM	PERÍODO
$Y = 3 \cos(x/2) + 1$	IM =	P =
$Y = 3 \cos(x/2) - 1$	IM =	P =
$Y = \cos(x/2)$	IM =	P =

Na **questão 5**, demos um valor negativo para a constante **a**. Isto foi feito para que os alunos comparassem, quanto a Imagem e Período, as funções dadas por: $y = -2 \cos(2x) + 1$, $y = 2 \cos(2x) + 1$ e $y = 2 \cos x + 1$. Todas elas apresentavam a constante $b = +1$ adicionada à função e todas têm o mesmo Conjunto Imagem pois tinham 2 ou -2 multiplicando o cosseno. As duas primeiras tinham o mesmo período, mas este era diferente do período da terceira. Esperávamos que concluíssem que isto era devido ao coeficiente de x , que não era mais o mesmo. Nossa expectativa era de que percebessem também que a primeira função tinha sinais diferentes da segunda, nos mesmos intervalos do Domínio, devido ao sinal contrário do coeficiente que multiplicava o cosseno.

5) LIMPE A TELA.

CONSTRUA OS GRÁFICOS $Y = -2 \cos(2x) + 1$ E $Y = 2 \cos(2x) + 1$ E $Y = 2 \cos x + 1$ E PREENCHA A

TABELA:	IMAGEM	PERÍODO
$Y = -2\cos(2x) + 1$	IM =	P =
$Y = 2\cos(2x) + 1$	IM =	P =
$Y = 2\cos x + 1$	IM =	P =

Na **questão 6** foi dada a Imagem e a expressão $y = a \cos x$ para que a dupla identificasse o valor de **a** e conferisse no computador se havia acertado. Pretendemos

desta forma favorecer uma mudança de “ponto de vista”, no sentido dado por Duval (vide capítulo III). Até então eles conheciam a expressão algébrica da função, por exemplo, $y = 2 \text{ sen } x$ e, a partir daí, e com o auxílio do gráfico chegavam à conclusão que o conjunto Imagem é $[-2, 2]$. Agora, fariam o caminho inverso.

6) DADO $Y = A \text{ COS } X$ E SABENDO-SE QUE $IM = [-4, 4]$ ENTÃO $A =$ _____
 FAÇA O GRÁFICO CORRESPONDENTE E CONFIRA SE VOCÊ ACERTOU.

Repetimos o procedimento na **questão 7**. Dada a expressão $y = a \text{ cos } x + b$ tal que $Im = [-1, 3]$, pedimos que os alunos tentassem identificar **a** e **b** e, a seguir, conferissem com o software se haviam acertado. Nossa intenção foi explorar o “feed back” imediato dado pelo computador.

7) DADO $Y = A \text{ COS } X + B$ TAL QUE $IM = [-1, 3]$, ENTÃO $A =$ _____ E $B =$ _____

Na **questão 8**, pedimos aos alunos que procurassem fazer a generalização. Pensamos com isto estar incentivando o debate entre eles.

8) PROCUREMOS GENERALIZAR :

SE $Y = A \text{ COS } X$	ENTÃO TEMOS	$D =$ _____	$IM =$ _____	$P =$ _____
SE $Y = A \text{ COS } X + B$	ENTÃO TEMOS	$D =$ _____	$IM =$ _____	$P =$ _____

Na **questão 9**, repetimos o procedimento para que os alunos tirassem conclusões sobre o Período e pedimos que traçassem o último gráfico obtido. Desta vez apresentamos apenas um espaço em branco, de forma que o aluno iria colocar os eixos, escolher a escala, etc.

9) SE $Y = 2 \text{ COS } (\omega X)$ TAL QUE $P = \pi$ ENTÃO $\omega =$ _____
 SE $Y = 3 \text{ COS } (\omega X)$ TAL QUE $P = 4\pi$ ENTÃO $\omega =$ _____
 CONFIRA COM O SOFTWARE E TRACE ABAIXO O ÚLTIMO GRÁFICO OBTIDO.
(espaço para o gráfico)

A seguir fizemos uma rápida institucionalização estendendo as conclusões da atividade anterior para as funções cossenoidais.

CONCLUSÕES DESTA AULA

SE $Y = A \text{ COS } (\omega X) + B$ ENTÃO $IM =$ _____ E $P =$ _____
 * REVEJA A ATIVIDADE 1 E VERIFIQUE SE TAMBÉM É VÁLIDO PARA $Y = A \text{ SEN } (\omega X) + B$

Dando continuidade à sessão, os alunos iniciaram a Atividade 4. Nela, nossa intenção foi que os alunos investigassem o que deve ocorrer para que se tenha uma

translação com vetor paralelo ao eixo x , ou seja, como “empurrar” a função para a direita ou esquerda sem deformá-la.

Na **questão 1** colocaram na tela os gráficos das funções dadas por:

$y = \text{sen } x$, $y = \text{sen}(x + \frac{\pi}{3})$ e $y = \text{sen}(x - \frac{\pi}{3})$. Pensamos que, usando os conhecimentos adquiridos nas atividades já desenvolvidas, seria fácil perceber a influência do fator somado à variável x , que não aparecia nos exercícios anteriores.

ATIVIDADE 4: COMPLEMENTAÇÃO DO ESTUDO DAS FUNÇÕES SENOIDAIS E COSENOIDAIS.

1) FAÇA O GRÁFICO DE $Y = \text{SEN } X$, $Y = \text{SEN}(X + \pi/3)$ E $Y = \text{SEN}(X - \pi/3)$
COMPARE OS TRÊS GRÁFICOS. O QUE VOCÊ OBSERVA ?

Na **questão 2** repetimos o raciocínio para a função cosseno. Isto foi feito para que os alunos percebessem que o comportamento é o mesmo da função seno, isto é, o deslocamento horizontal não depende da função considerada e sim da constante x_0 .

2) LIMPE A TELA.

FAÇA O GRÁFICO DE $Y = \text{COS } X$, $Y = \text{COS}(X + \pi/3)$ E $Y = \text{COS}(X - \pi/3)$.
COMPARE OS TRÊS GRÁFICOS. O QUE VOCÊ OBSERVA ?
IMPRIMA O SEU TRABALHO.

Na **questão 3**, pedimos Domínio, Imagem e Período da função $y = \text{cos}(x + \frac{\pi}{4})$ e uma comparação com $y = \text{cos } x$, para que o aluno percebesse que são os mesmos, embora o gráfico tenha sofrido uma translação com vetor paralelo ao eixo x . Isso posto, pudemos discutir, no fechamento da sessão, que só Domínio, Imagem e Período não são registros de representação suficientes para caracterizar uma função.

3) SE UMA FUNÇÃO TEM COMO EXPRESSÃO $Y = \text{COS}(X + \frac{\pi}{4})$ QUAIS DEVEM SER SEUS DOMÍNIO, IMAGEM E PERÍODO? _____
COMPARE COM DOMÍNIO, IMAGEM E PERÍODO DE $Y = \text{COS } X$. O QUE OCORRE?

Na **questão 4** repetimos o procedimento com $y = \text{sen } x$ e $y = \text{sen}(x - \frac{\pi}{5})$ para que os alunos percebessem que isto ocorre tanto com o seno quanto com o cosseno.

4) COMPARE AGORA $Y = \text{SEN } X$ COM $Y = \text{SEN}(X - \pi/5)$. QUAL O DOMÍNIO, A IMAGEM E O PERÍODO DE CADA UMA ? _____

Finalmente, na **questão 5**, procuramos fazer com que o aluno generalizasse.

QUAL A INTERFERÊNCIA DO NÚMERO x_0 NO GRÁFICO DE $Y = \text{SEN}(\omega X + x_0)$?
Este foi o procedimento do contexto do computador.

5.9.Contexto da sala de aula

Estamos entendendo por contexto da sala de aula o ambiente escolar, no qual o aluno faz parte de uma classe e tem um horário pré estabelecido, no caso de nossa amostra, contendo cinco aulas semanais de matemática. A aula é a tradicional, dada coletivamente.

5.9.1. Desenho

Foram ministradas seis aulas sobre o assunto, para o Grupo A, distribuídas da seguinte forma: 1 aula para a introdução da função seno,

1 aula para a introdução da função cosseno,

2 aulas para exercícios e complementação da teoria,

1 aula para a orientação e confecção de gráficos pelo aluno,

1 aula para entrega de um trabalho, com discussão e correções.

5.9.2. Material

A professora utilizou a lousa, giz colorido e régua graduada. E os alunos utilizaram, por recomendação da escola e da professora, caderno, o livro texto adotado^[18], régua graduada, lápis e papel milimetrado.

5.9.3. Procedimento

O presente procedimento foi escrito tendo por base o diário de classe, conversas com a professora e observações obtidas por nós em duas das seis aulas destinadas ao assunto que estamos investigando, às quais assistimos.

A função seno foi introduzida por meio de aula expositiva que começou pela confecção de um desenho do ciclo trigonométrico e definição da função real $f(x) = \sin x$.

18. "Matemática Temas e Metas" - volume 2 - Antônio dos Santos Machado - Editora Atual, 1986.

Foi confeccionada uma tabela com os seguintes valores de x : $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$, dos quais os alunos já conheciam o seno. A aula foi dialogada, com a classe auxiliando a colocação dos valores na tabela.

A seguir, a professora acrescentou à tabela valores de arcos de fácil determinação do seno correspondente, tais como: $\pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$.

Na mesma tabela foram ainda colocados os seguintes valores do arco: $\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}, \frac{11\pi}{6}$ e feita uma exposição sobre as simetrias em relação ao eixo vertical. Segundo a professora, a intenção foi tornar mais simples à classe a percepção do formato do gráfico, enquanto estes valores iam sendo localizados no plano cartesiano.

Antes de iniciar a construção do gráfico na lousa foi discutida a escala a ser adotada e a localização do π . Ficou estabelecido que a medida 2 cm seria a unidade da escala, assim sendo o valor π corresponderia a 6,28 cm. Passou então à construção do gráfico no quadro negro.

Feito isso, a docente discutiu o Domínio e a Imagem da função e classificou-a como crescente ou decrescente em cada um dos quadrantes. Comparou os sinais dos valores do seno e para tal usou tanto o gráfico quanto o ciclo. Finalizou discutindo o que ocorre na segunda volta e, introduziu o conceito de período.

Na segunda aula foi ensinada a função $y = \cos x$. Neste caso a tabela de valores foi menor, contendo: $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ e $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$. Foi repetido o procedimento da função seno, ou seja, discutiu-se o Domínio, a Imagem, sinais, crescimento e decréscimo.

Foi determinado como tarefa que o aluno confeccionasse, em papel milimetrado, os gráficos das funções: $y = 1 + \sin x$; $y = \sin x$ e $y = \sin x - 1$.

Na terceira aula o assunto foi retomado e feita uma rápida revisão dos principais pontos das aulas anteriores. A seguir, houve a construção do gráfico da função **$y = 2\sin x$** , e a discussão de Domínio, Imagem e Período. Refez então o

gráfico de $y = \text{sen } x$, superpondo os eixos, de tal forma a estabelecer uma comparação entre ambos. Em seguida foi discutida a influência do **2** na lei de formação da função. A professora perguntou aos alunos o que ocorreria se a função dada fosse $y = 3 \text{ sen } x$ e, a partir daí, generalizou para $y = a \text{ sen } x$. Passou então à correção da lição de casa, solicitando a três dos alunos da classe que fossem ao quadro negro com seus apontamentos e construíssem os gráficos, após o que discutiu com a classe se eles estavam corretos.

Na quarta aula foram construídos os gráficos das seguintes funções: $y = \text{cos } x$, $y = \text{cos} \left(\frac{x}{2} \right)$ e $y = \text{cos } 2x$, com a estratégia da sobreposição dos eixos para compará-los. Isto foi feito, segundo a professora, com a intenção de que a classe percebesse a mudança do Período. A seguir foi feita a generalização para $y = \text{cos } \omega x$.

A segunda parte da aula foi dedicada a esclarecimento de dúvidas e atendimento individual quanto aos gráficos feitos como tarefa.

Na quinta aula foi dada uma lista de exercícios contendo doze funções, cujos gráficos deveriam ser confeccionados em papel milimetrado, incluindo a lei de formação da função, a tabela de valores utilizada como apoio para a confecção, o Domínio, a Imagem e o Período de cada função.

Os gráficos da lista foram divididos em quatro grupos e os alunos foram orientados para que cada um desses grupos tivesse os eixos x e y sobrepostos de tal forma a facilitar uma comparação entre eles. A classe iniciou nesta aula a construção dos gráficos, com orientação da docente.

A lista de exercícios foi a seguinte:

CONSTRUA OS GRÁFICOS DAS FUNÇÕES REAIS ABAIXO, DETERMINANDO O DOMÍNIO, A IMAGEM E O PERÍODO DE CADA UMA.

1º GRUPO	2º GRUPO	3º GRUPO	4º GRUPO
$Y = 1 + \text{SEN } X$	$Y = \text{COS } X$	$Y = \text{SEN } X$	$Y = \text{SEN} \left(x + \frac{\pi}{3} \right)$
$Y = \text{SEN } X - 1$	$Y = 1 + \text{COS } X$	$Y = \text{SEN } 2X$	$Y = \text{SEN} \left(x - \frac{\pi}{3} \right)$
$Y = \text{SEN } X$	$Y = 1 - \text{COS } X$	$Y = \text{SEN} \frac{x}{2}$	$Y = 2\text{SEN} \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$

Na última das seis aulas dedicadas ao assunto a professora recolheu e comentou os trabalhos dos alunos e construiu no quadro negro os doze gráficos.

Estas foram as aulas que nosso grupo de referência (Grupo A) acompanhou e que faziam parte de seu curso normal de trigonometria.

5.10. Os Testes

Três testes foram aplicados ao longo do trabalho de campo: o primeiro, que chamamos de **Pré-Teste**, foi feito antes de ter início qualquer das atividades planejadas. O segundo, denominado por nós **Teste Intermediário**, foi realizado na metade do experimento e o terceiro aconteceu após a aplicação de toda a sequência e o chamamos **Pós-Teste**.

Os testes foram do tipo formal, como os utilizados nas escolas. Contiveram problemas descontextualizados, com exceção de uma questão em cada um deles. Esta foi incluída para identificar se o aluno consegue efetuar transferências, ou seja, se uma vez aprendido o conteúdo na Matemática, é possível adaptar esse conhecimento na resolução de um novo problema fora dela. No caso, exploramos o movimento harmônico simples, cuja equação para estudo do deslocamento em função do tempo envolve a função cosseno.

O **Pré-Teste** foi feito no primeiro encontro, para saber o que os alunos conseguiam resolver a partir de seus conhecimentos anteriores (espontâneos ou não), tendo em vista que eles já estudaram a trigonometria no triângulo retângulo e as funções (de primeiro e segundo grau, exponencial e logarítmica). Dividimos o Pré-Teste em duas partes. Na Parte A investigamos se os sujeitos tinham os pré requisitos necessários sobre o assunto. Em outras palavras o objetivo da Parte A foi fazer uma sondagem sobre os conhecimentos prévios dos alunos que se faziam necessários para que pudessem participar do experimento nivelados (em pé de igualdade). Tal parte não entrará em nossa análise quantitativa e nem tampouco na qualitativa, uma vez que as questões visavam apenas identificar possíveis lacunas na formação desses alunos, que pudessem interferir em nosso trabalho. Antes do início das sessões que compuseram o estudo, os alunos tiveram a correção da Parte A do Pré-Teste e foi

retomado, individualmente, pelo professor de sua sala, cada um dos assuntos que resultou em resposta errada. Com esse procedimento acreditamos ter nivelado os nossos sujeitos, garantindo que eles tivessem o conhecimento mínimo do conteúdo, que lhes permitisse desenvolver as atividades. Na Parte B apresentamos questões referentes ao assunto a ser discutido ao longo do estudo, semelhantes às questões que serão feitas no término da pesquisa. Nosso objetivo foi obter subsídios para comparar o que o aluno consegue responder com os seus conhecimentos prévios e o que conseguirá responder após passar pela sequência didática.

O **Teste Intermediário** foi aplicado após ter sido desenvolvida 50% da sequência didática. O principal objetivo foi acompanhar a evolução do aproveitamento de cada um deles, avaliando a influência que o contexto exerce no desempenho dos sujeitos, já que o contexto foi uma das variáveis de nosso estudo. Com este teste pudemos comparar o aproveitamento dos alunos que passaram primeiro pelo mundo concreto (Grupo B) com os que começaram com as atividades do computador (Grupo C) e, ainda, com aqueles que haviam assistido a metade das aulas reservadas para o assunto, no ensino formal, em sala de aula (Grupo A).

Com o **Pós-Teste** pretendemos investigar até que ponto a sequência de ensino que elaboramos, envolvendo os dois contextos, foi frutífera para o aluno se apropriar do conceito das funções seno e cosseno. Ele teve equivalência matemática e semântica com o Pré-Teste.

Quanto ao conteúdo, os testes procuraram avaliar os conhecimentos sobre:

— Construção, interpretação de gráficos, periodicidade, amplitude e imagem de funções trigonométricas tais como.

$$f(x) = a \cos(\omega x + x_0) + b \quad \text{com } \omega > 0, a \neq 0; a, b, x \text{ e } \omega \text{ reais.}$$

$$f(x) = a \sin(\omega x + x_0) + b \quad \text{com } \omega > 0, a \neq 0; a, b, x \text{ e } \omega \text{ reais}$$

— O significado das constantes a , b , ω , x_0 acima mencionadas.

— A relação fundamental da trigonometria.

Os testes estão reproduzidos na íntegra no Anexo 5.10.

5.10.1. Pré-Teste

Esta sessão destina-se a relatar detalhadamente as questões contidas no Pré-Teste. Faremos uma análise expondo o objetivo de cada uma delas e, muitas vezes, nossa expectativa com relação ao desempenho do aluno.

Parte A

- A 1ª Questão solicitou a construção de dois gráficos de funções, dadas as representações algébricas de cada uma (lei de formação). O aluno deveria passar do quadro algébrico para o gráfico e, para isso, construiria uma tabela. Desta forma ele estaria usando três dos registros de representação da função. Além disso, deveria indicar o Domínio e a Imagem da função. Nosso objetivo foi verificar sua competência em relação às funções de 1ª e 2ª graus.

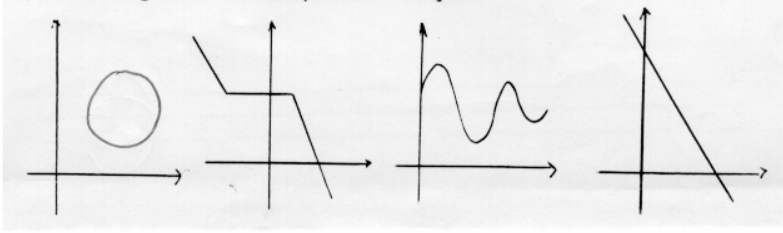
1) CONSTRUA O GRÁFICO E DÊ O DOMÍNIO E A IMAGEM DAS FUNÇÕES:

A) $F(x) = 3x - 1$

B) $Y = x^2 - 4x + 3$

- A segunda questão envolveu a identificação de uma função a partir de seu gráfico. Solicitamos ao aluno que justificasse suas respostas para observarmos os critérios usados por ele para a identificação dos gráficos que representavam funções.

2) QUAIS DOS GRÁFICOS ABAIXO REPRESENTAM FUNÇÕES:



A) SIM
B) NÃO

A) SIM
B) NÃO

A) SIM
B) NÃO

A) SIM
B) NÃO

JUSTIFIQUE SUAS RESPOSTAS:

-
-
- O objetivo da terceira questão foi verificar se o aluno sabia calcular o comprimento de uma circunferência, dado o seu raio. Esse conhecimento anterior será usado em nossa sequência didática.

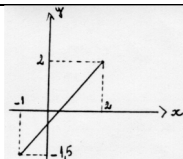
3) SE UMA CIRCUNFERÊNCIA TEM RÁIO 5 CM, SEU COMPRIMENTO É _____

- Na quarta questão, investigamos se o aluno conhecia o radiano como unidade de medida de ângulos e se sabia transformar unidades de medida, de grau para radiano.

4) UM ÂNGULO DE MEDIDA 30° É EQUIVALENTE A UM ÂNGULO DE MEDIDA _____ RAD.

- O último exercício foi de identificação, a partir do gráfico, do Domínio e da Imagem de uma função. Estes eram dados em intervalos fechados e pretendíamos observar como o aluno iria se expressar para indicá-los, uma vez que poderia usar a notação de conjuntos ou a específica de intervalo fechado. Isto se fez necessário porque no estudo iremos usar as duas notações para indicar o Domínio e a Imagem de funções.

5) ESCREVA O DOMÍNIO E A IMAGEM DA FUNÇÃO REPRESENTADA NO GRÁFICO AO LADO.



Parte B

Foi constituída de oito questões com 10 itens no total.

- A primeira questão abordou a comparação de dois valores de seno e de dois valores de cosseno. Consideramos um item o conjunto formado pelas três perguntas sobre seno e outro item formado pelas três sobre cosseno.

Nosso objetivo foi verificar se o aluno já possuía conhecimentos que permitissem comparar senos (ou cossenos), principalmente de ângulos com medidas maiores do que 90° . Porém, ainda que ele conseguisse comparar senos ou cossenos que incluíssem ângulos obtusos, sabíamos que provavelmente não saberiam comparar senos e cossenos de ângulos maiores que 180° . Lembramos que os alunos de nossa amostra já aprenderam no curso de 1° Grau as leis dos senos e dos cossenos.

1) COMPLETE COM $>$, $<$ OU $=$.
SEN 40° _____ SEN 70°

COS 30° _____ COS (-30°)

$$\begin{array}{ll} \text{SEN } 120^\circ & \text{SEN } 150^\circ \\ \text{SEN } 210^\circ & \text{SEN } 330^\circ \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{COS } 60^\circ & \text{COS } 120^\circ \\ \text{COS } 240^\circ & \text{COS } 300^\circ \end{array}$$

- A segunda questão teve por objetivo verificar se o aluno já sabia que um mesmo valor de seno (ou cosseno) pode corresponder a mais de um valor do ângulo e, também incitá-lo a pensar sobre isso. O aluno já estudou, no 1º grau, senos de ângulos obtusos e poderia se lembrar que, por exemplo, $\text{sen } 30^\circ$ e $\text{sen } 150^\circ$ são iguais e valem 0,5. Sabemos que esses ângulos são usados em exercícios de aplicação da lei dos senos ou cossenos, mas nossa hipótese era que a maioria dos alunos teria conhecimentos apenas sobre os senos de ângulos agudos, tendo em vista que os exercícios estudados no 1º grau envolvem, em sua maioria, ângulos desse tipo. Quanto ao cosseno, a questão é mais complexa, pois envolve número negativo. Novamente se o aluno já teve contato com esta situação ao resolver exercícios com a lei dos cossenos, provavelmente foi superficial e pensamos que talvez ele não se lembre.

2) Dê dois valores de θ , $0 < \theta < 2\pi$, tais que:

$$\text{sen } \theta = 0,5 \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\text{cos } \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

- A terceira questão, do tipo completar, envolveu dois itens, que foram a determinação dos valores máximo e mínimo de uma função desconhecida para os alunos. Eles já aprenderam máximo (ou mínimo) de uma função do 2º grau e aqui investigamos conseguiriam estabelecer máximos e mínimos para a função dada, partindo de um suposto conhecimento sobre o maior ou menor valor que o seno pode assumir.

3) DADA $y = 3 \text{ sen } x + 1$ DÊ O VALOR MÁXIMO ASSUMIDO PELA FUNÇÃO

$$y_{\text{MAX}} = \underline{\hspace{2cm}} \quad \text{E O VALOR MÍNIMO } y_{\text{MIN}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

- A quarta questão envolveu a determinação do valor de uma constante na lei de formação da função, uma vez conhecido seu conjunto Imagem. Entendemos que o aluno não teria condições de resolver essa questão, mas poderia ser aguçada sua curiosidade. Além disso, ele pode levantar a hipótese de que exista uma ligação entre a constante a e o conjunto Imagem da função.

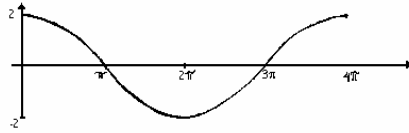
4) SE $f(t) = a \text{ cost } + 1$ TAL QUE $\text{Im} = [-3,5]$, ENTÃO O VALOR DE a É $\underline{\hspace{2cm}}$

- O próximo teste, de múltipla escolha, solicitou a associação de um gráfico dado com sua lei de formação. O aluno necessitaria fazer a passagem da representação gráfica

para a algébrica. Pedimos a justificação da resposta, para que pudéssemos analisar o raciocínio que foi feito para a escolha da alternativa.

5) A FIGURA ABAIXO MOSTRA PARTE DO GRÁFICO DA FUNÇÃO DADA POR:

- A) $\cos x$
- B) $2 \cos \frac{x}{2}$
- C) $2 \sin x$
- D) $2 \sin 2x$
- E) $\cos 2x$



JUSTIFIQUE SUA RESPOSTA. _____

- A resolução da questão seis envolvia o uso da relação fundamental da trigonometria. Pensamos que esta seria bastante simples para o aluno pois, na verdade, ele estaria aplicando o teorema de Pitágoras, que é um conhecimento antigo e forte.

6) DADO $\sin x = -2/3$, QUAIS OS POSSÍVEIS VALORES DE $\cos x$?

- A sétima foi uma questão contextualizada, usando o Movimento Harmônico Simples. Este assunto é completamente desconhecido para o aluno, por isso pensamos que ele não teriam condições de resolver o teste. Todavia, de modo análogo à questão quatro, poderia se sentir interessado sobre o assunto.

7) (U.F.PA) A EQUAÇÃO DO MOVIMENTO HARMÔNICO SIMPLES DESCRITO POR UMA PARTÍCULA É: $Y = 10 \cos (100\pi t + \pi/3)$ SENDO Y EM CM E T EM SEG . ENTÃO A AMPLITUDE E O PERÍODO DESSE MOVIMENTO SÃO, RESPECTIVAMENTE,

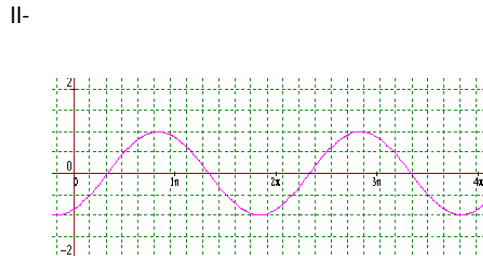
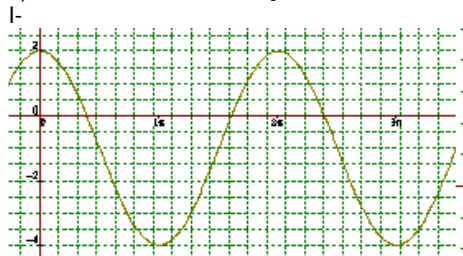
- A) 10 CM E 1/50 SEG
- B) 10 CM E 1/100 SEG
- C) 50 CM E 1/50 SEG
- D) 50 CM E 1/100 SEG
- E) 10 CM E $3/\pi$ SEG

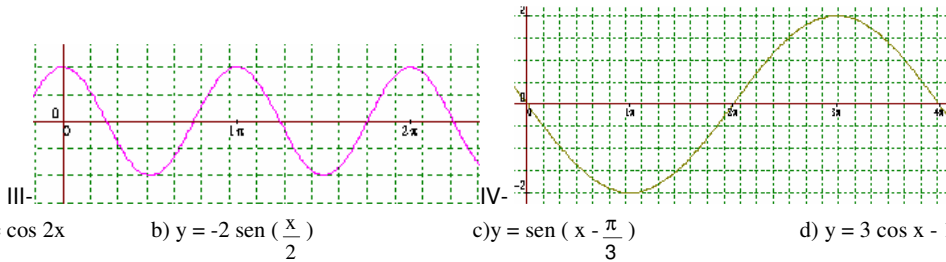
OBSERVAÇÃO: A AMPLITUDE É A METADE DO COMPRIMENTO DO INTERVALO DE VARIAÇÃO DA IMAGEM E O PERÍODO É O MENOR INTERVALO DE TEMPO PARA QUE O FENÔMENO SE REPITA

JUSTIFIQUE SUA RESPOSTA: _____

- A última questão foi de associação. Dados quatro gráficos, abaixo apresentados, deveria ser feita a correspondência com quatro expressões algébricas dadas.

8) LIGUE O GRÁFICO À FUNÇÃO:





Nesta questão não foi pedida a justificação. O aluno poderia fazer as ligações observando os valores, ou determinando alguns pontos do gráfico pela atribuição de valores para x e correspondente cálculo de $f(x)$, ou raciocinar por exclusão. Pedimos que os cálculos não fossem apagados para que pudéssemos acompanhar o raciocínio.

5.10.2. Teste Intermediário

Elaboramos um número menor de questões, em relação aos outros dois testes. Isto ocorreu para que não repetíssemos o mesmo tipo de questão, para não cansar ou desestimular o aluno, sobretudo com assuntos que ainda não tenham sido ensinados, tais como os das questões três, quatro e cinco do Pré-Teste .

- A primeira questão foi um teste de múltipla escolha, contextualizado, porém mais simples que o teste sete do Pré-Teste. Para a resolução desta questão o aluno deveria substituir o valor 2 na variável t e observar que 6π corresponde a três voltas no ciclo

trigonométrico; portanto $6\pi + \frac{\pi}{3}$ é côngruo a $\frac{\pi}{3}$ e ambos têm o mesmo cosseno.

Enfatizamos que questões como esta não foram trabalhadas nas atividades pelas quais passaram os grupos B e C.

1) (U.C.M.G.) Um corpo oscila, executando um M.H.S. cujo deslocamento em função do tempo é dado por: $y = 6 \cos \left(3\pi t + \frac{\pi}{3} \right)$.

O deslocamento do corpo no instante $t = 2s$ é, em metros,
 A) 0,5 B) 1,0 C) 2,0 D) 2,5 E) 3,0

- A segunda questão foi equivalente à questão seis do Pré-Teste . Observamos que a maioria dos alunos acertou esta questão no teste inicial, e resolvemos inserir um erro no enunciado tornando os dados incompatíveis: foi dado um valor positivo para o cosseno de um arco que pertence ao segundo quadrante, quando é impossível um arco desse quadrante ter cosseno positivo. Nosso objetivo foi verificar se o aluno

analisa os dados do problema e os critica, ou se simplesmente aplica o formulário, no caso a Relação Fundamental da Trigonometria, sem se preocupar com a veracidade de suas informações iniciais. Aqui abrimos possibilidade para futuras discussões com os alunos sobre a necessidade de análise do sinal. Nossa expectativa era de que alguns deles percebessem o dado errado de imediato e outros no momento da análise do sinal do seno obtido por eles. Investigamos nesta questão se eles possuíam um conhecimento figurativo ou operativo em relação ao conteúdo abordado.

2) DADO $\cos x = \frac{1}{3}$ E $\pi/2 < x < \pi$, DETERMINE O VALOR DE $\sin x$.

- A terceira questão equivale à primeira do Pré-Teste e desta vez o aluno já passou por atividades que permitiriam resolvê-la. Deixamos claro que, de forma diversa ao que normalmente ocorre em sala de aula, o aluno não teve um exercício parecido com este. Para a resolução ele deveria transferir o que observou ao longo das atividades para este contexto.

3) COMPLETE COM > , < OU =

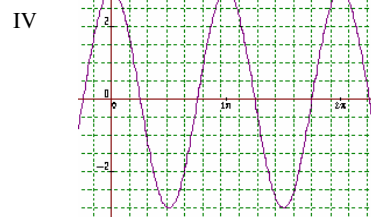
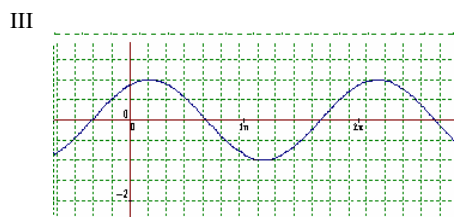
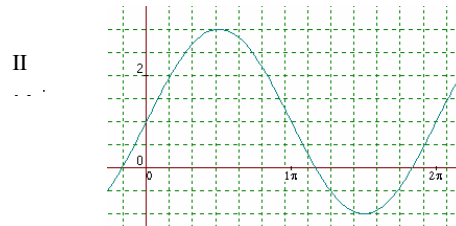
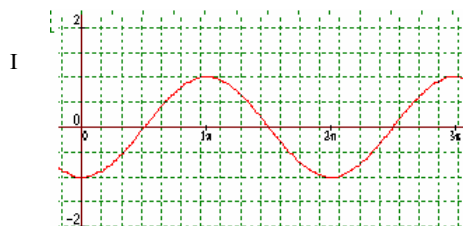
SEN 50° _____	SEN 80° _____	COS 45° _____	COS (-45°) _____
SEN 120° _____	SEN 160° _____	COS 30° _____	COS 150° _____
SEN 240° _____	SEN 300° _____	COS 210° _____	COS 330° _____

- A quarta questão foi introduzida por ter havido um grande número de acertos na última questão do Pré-Teste, o que poderia nos levar a crer que o aluno já conhecesse algo sobre os gráficos das funções nele abordadas. Se isto ocorresse, então o aluno teria condições de resolver esta questão e por ela não ter solução única poderiam surgir respostas tais como: $f(x)=3 \sin x + 1$, $f(x)=3 \cos x + 1$, $f(x) = 1 - 3 \cos x$ ou $f(x) = 1 - 3 \sin x$. Com tal questão criamos condições para discutir que a caracterização de uma função não se completa só pelo conhecimento de seus Domínio, Imagem e Período.

**4) SEJA F UMA FUNÇÃO TAL QUE $D = \mathbb{R}$, $IM = [-2, 4]$, $P = 2\pi$
A FUNÇÃO F É DADA PELA EXPRESSÃO $F(x) =$**

- A quinta questão aqui é equivalente à última do Pré-Teste e pensamos que o aluno não teria todos os dados para resolvê-la e, portanto, precisaria trabalhar com o que sabe em relação aos valores assumidos pelo seno e pelo cosseno.

5) LIGUE CADA GRÁFICO À FUNÇÃO



A) $Y = \text{SEN} \left(\frac{\pi}{3} + X \right)$

B) $F(X) = -\text{COS } X$

C) $Y = 2 \text{ SEN } X + 1$

D) $Y = 3 \text{ COS } (2X)$

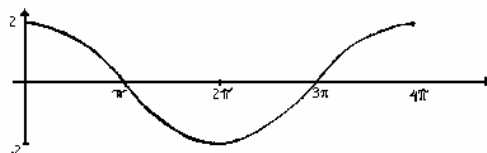
5.10.3. Pós-Teste

Mantivemos os mesmos tipos de perguntas do Pré-Teste . Foram mudados os dados e a ordem de apresentação das questões, mantida a equivalência matemática e semântica.

- A primeira questão é semelhante à cinco do Pré-Teste

5) A FIGURA ABAIXO MOSTRA PARTE DO GRÁFICO DA FUNÇÃO DADA POR:

- A) $2 \text{ SEN } 2X$
- B) $2 \text{ COS } \frac{X}{2}$
- C) $\text{SEN } 2X$
- D) $-2 \text{ SEN } 2X$
- E) $\text{COS } 2X$



JUSTIFIQUE SUA RESPOSTA. _____

- Esta questão é equivalente à seis do Pré-Teste ou à segunda do Teste Intermediário, porém sem nenhum problema em relação à coerência de dados

2) DADO $\text{COS } X = \frac{-2}{3}$, $\pi/2 < X < \pi$ CALCULE O VALOR DE $\text{SEN } X$.

- A próxima questão é exatamente igual à questão sete do Pré-Teste . Não foi abordada ao longo do estudo e faz parte do Pós-Teste para que possamos investigar se existem

alguns alunos que conseguem reinvestir seus conhecimentos. Pretendemos, também, provocar novo desequilíbrio que possa levar à predisposição, ou seja a motivação, para adquirir novos conhecimentos.

3) A EQUAÇÃO DO MOVIMENTO HARMÔNICO SIMPLES DESCRITO POR UMA PARTÍCULA É:
 $Y = 10 \cos(100\pi T + \pi/3)$, SENDO Y EM CENTÍMETROS (CM) E O TEMPO T EM SEGUNDOS (S). ENTÃO A AMPLITUDE E O PERÍODO DESSE MOVIMENTO SÃO, RESPECTIVAMENTE,

- A) 10 CM E $3/\pi$ S
- B) 50 CM E 1/50 S
- C) 10 CM E 1/50 S
- D) 10 CM E 1/100 S
- E) 50 CM E 1/100 S

OBSERVAÇÃO: A AMPLITUDE É A METADE DO COMPRIMENTO DO INTERVALO DE VARIAÇÃO DA IMAGEM E O PERÍODO É O MENOR INTERVALO DE TEMPO PARA QUE O FENÔMENO SE REPITA.

JUSTIFIQUE SUA RESPOSTA _____

- A questão número quatro equivaleu à três do Pré-Teste. Nossa expectativa foi de que os alunos a acertassem, pois ela fez parte das atividades de exploração dos valores máximo e mínimo assumidos pelas funções.

4) SEJA A FUNÇÃO DADA POR $Y = 3 \cos X - 1$. DÊ O VALOR MÁXIMO ASSUMIDO $Y_{MAX} =$ _____
 E O VALOR MÍNIMO $Y_{MIN} =$ _____

- A questão cinco foi equivalente à segunda do Pré-Teste .

5) DÊ DOIS VALORES, EM CADA ITEM, DE θ , COM $0 < \theta < 2\pi$, TAIS QUE:
 A) $\text{SEN } \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ _____ B) $\text{COS } \theta = 0,5$ _____

- A seis foi equivalente à primeira do Pré-Teste e à terceira do Teste Intermediário.

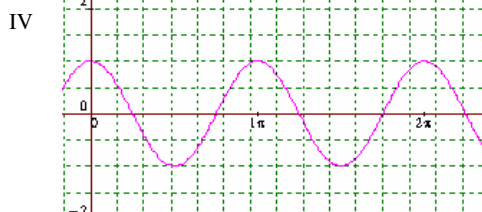
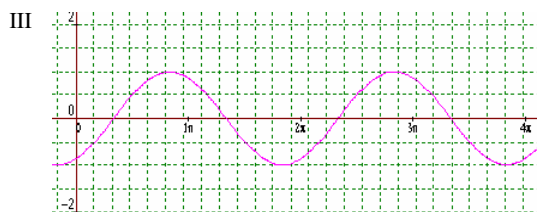
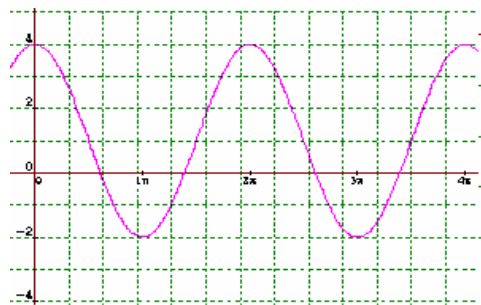
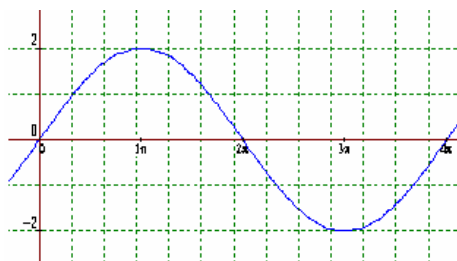
6) COMPLETE COM > , < OU =.
 $\text{SEN } 40^\circ$ _____ $\text{SEN } 70^\circ$ _____ $\text{COS } 30^\circ$ _____ $\text{COS } (-30^\circ)$ _____
 $\text{SEN } 120^\circ$ _____ $\text{SEN } 150^\circ$ _____ $\text{COS } 60^\circ$ _____ $\text{COS } 120^\circ$ _____
 $\text{SEN } 210^\circ$ _____ $\text{SEN } 330^\circ$ _____ $\text{COS } 240^\circ$ _____ $\text{COS } 300^\circ$ _____

- A sétima questão foi análoga à número quatro do Pré-Teste .

7) SE $F(T) = A \text{SEN } T + 1$ TAL QUE $\text{IM} = [-3,5]$, ENTÃO O VALOR DE A É _____

- A última questão foi equivalente à última do Pré e do Teste Intermediário.

8) LIGUE O GRÁFICO À FUNÇÃO:
 I _____ II _____



$a) = \cos 2x$
 $Y = 2 \text{ SEN} \left(\frac{x}{2} \right)$
 $Y = \text{SEN} \left(x - \frac{\pi}{3} \right)$
 $F(T) = 3 \cos t + 1$

5.10.4. Procedimento

Nos três dias de aplicação o procedimento foi o seguinte :

- Para o Grupo A (Grupo de Referência)

Explicamos ao grupo, de prévio acordo com a professora de matemática, que esta é uma pesquisa sem objetivo de atribuição de nota, mas de entender as dúvidas e dificuldades que os alunos apresentam ao longo do seu processo de aprendizado das funções trigonométricas, e que eles seriam submetidos a três testes. Um antes do aprendizado do conteúdo, outro na metade das aulas destinadas a ele e um terceiro no final do estudo. Dissemos que os testes conteriam questões que eles saberiam resolver e outras que seriam completamente desconhecidas para eles, e que tentassem fazer o melhor possível.

- Para os Grupos B e C (Grupos Experimentais)

Explicamos o número de sessões previstas, e que eles passariam por uma pesquisa na qual tentaríamos identificar um novo método para ensino e que não eram eles que estavam em observação, mas a técnica de ensino. Ainda foi dito que

sabíamos que eles não haviam aprendido o assunto e não haveria uma expectativa de que tivessem conhecimentos. A seguir explicamos que seriam submetidos a três testes, repetindo para estes dois grupos o exposto acima para o Grupo A.

Apresentada nossa metodologia de pesquisa, procederemos, no próximo capítulo, à análise dos testes.

Capítulo VI:

Análise

ANÁLISE

6.1. Introdução

Neste capítulo procederemos à análise dos dados coletados em nossa pesquisa. Planejamos analisá-los sob diferentes pontos de vista, de forma a obtermos uma maior precisão nos resultados. Iniciaremos fazendo uma discussão sobre os testes realizados ao longo do experimento. Apresentaremos comentários gerais sobre o desempenho de cada grupo de alunos, seguidos da taxa de variação de acertos entre o Pré e o Pós-Teste, de uma análise a partir dos objetivos didáticos e das questões apresentadas, acompanhada da taxa percentual de evolução, tanto por objetivo didático quanto por questão. Verificaremos o desempenho de cada um dos dezesseis sujeitos e sua evolução percentual, teste a teste. Por fim analisaremos os procedimentos e técnicas de resolução bem como o tipo de erro cometido.

Salientamos que, em relação à preservação dos dados, foram tomados os seguintes cuidados: gravações em áudio e vídeo, transcrições dos “tapes” das sessões, notas de campo, anotações feitas pelos estudantes nas guias de estudo durante as atividades e os testes: Pré, Intermediário e Pós.

6.2. Comentários Gerais sobre a Sequência e os Testes

O caminho que escolhemos para analisar a eficiência das atividades construídas em cada contexto, no que diz respeito a seu papel de facilitador da aprendizagem, foi o dos testes formais. Optamos por construí-los no papel e lápis porque esse é o contexto por excelência da Escola e é nele que os alunos estão habituados a responder questões. Consideramos ainda que, se os testes fossem no computador ou no “mundo experimental”, estaríamos privilegiando o grupo que passou pela nossa sequência didática e não poderíamos estabelecer comparação com o grupo de referência. Além disso, procuramos evitar uma avaliação ligada a um dos contextos

da pesquisa justamente para que pudéssemos observar as possíveis transferências de conhecimento dos alunos, de um ambiente específico para o ambiente formal. Pensamos que, se o aluno resolvesse questões no computador ou no “mundo experimental”, não poderíamos concluir que as resolveria formalmente, no papel e lápis. Assim, na tentativa de tornar a mais isenta possível nossa avaliação, procuramos apresentar, nos testes, questões que não fossem repetições do que foi discutido nas atividades da sequência didática, mas que abrangessem conhecimentos gerais de trigonometria. Desta forma, o grupo experimental teria recebido as informações necessárias para respondê-las, a partir da sequência, e o grupo de referência, a partir da sala de aula.

Temos consciência de que o modelo de avaliação que escolhemos, os testes, é limitado, uma vez que espelha apenas um momento do aprendiz em algumas questões referentes ao objeto, e não o conhecimento que este aluno possa ter adquirido, nem a capacidade de retenção do conteúdo. Optamos por utilizá-los na tentativa de verificar o que acontece com o aluno, em relação à aquisição de conceitos trigonométricos, após passar pelas atividades de cada um dos contextos e após todo o estudo. Medir o desempenho do aluno por testes é a forma normalmente usada no sistema escolar para avaliá-lo, o que é mais uma razão para reforçar nossa intenção de usá-los, com propósito de avaliação.

6.3. Análise do Desempenho dos Grupos nos Testes

Nesta primeira etapa fizemos um levantamento, por grupo, de respostas certas nos testes com o objetivo de comparar o desempenho de cada um deles. Para o grupo A, temos 16 alunos que responderam 10 itens no Pré-Teste, o que nos dá uma possibilidade de 160 respostas corretas. Para os grupos B e C, com 8 alunos cada, temos a possibilidade de 80 respostas corretas em cada um. No Pós-Teste a mesma situação do Pré-Teste se repete, e no Teste Intermediário existe a possibilidade de 80

respostas corretas para o Grupo A, pois temos 5 itens, e 40 possíveis respostas certas para cada um dos Grupos B e C.

As porcentagens referentes aos acertos estão apresentadas no quadro abaixo.

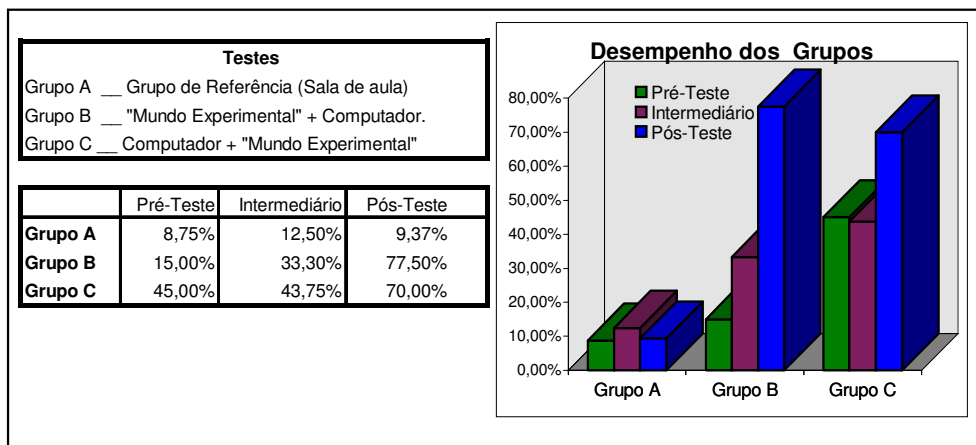


Gráfico I : Desempenho dos Grupos nos Testes

A partir do Gráfico I podemos perceber que o grupo A foi o que teve menor sucesso no Pré-Teste. O que chama a atenção no entanto é que, embora seu desempenho tenha apresentado, no Teste Intermediário, melhora de 50% em relação ao estágio inicial, o índice de acertos está muito aquém do que poderíamos considerar como bom resultado. O mais grave é que, no final, o percentual de acertos é praticamente o mesmo obtido antes desse grupo ter assistido às aulas. Tais dados podem estar indicando que, para esses alunos, o ensino tradicional não surtiu efeito, quanto a melhorar a eficiência na resolução das questões relativas aos tópicos abordados nos testes.

Com relação ao grupo B, seu desempenho inicial foi apenas um pouco melhor que o do grupo A já que, partindo de seus conhecimentos anteriores, os alunos não chegaram a resolver nem $\frac{1}{5}$ do teste. No Teste Intermediário, embora o desempenho do grupo tenha melhorado mais de 100% em relação ao Pré-Teste, não se pode considerar que houve sucesso, uma vez que a quantidade de respostas certas não chegou nem a 50% do número máximo. No Pós-Teste, novamente, o desempenho melhora mais de 100% em relação ao teste anterior, mas agora podemos considerar o

resultado como um sucesso, já que os alunos resolveram mais de $\frac{3}{4}$ do teste de forma correta e tal desempenho é definitivamente satisfatório, em qualquer sistema escolar.

O grupo C foi o que obteve maior sucesso em nosso Pré-Teste. Em uma etapa posterior, analisaremos os procedimentos dos alunos durante as resoluções das questões, objetivando entender o porquê do nível de acerto ter sido tão alto, próximo da metade do teste. No Teste Intermediário o desempenho é praticamente igual ao do Pré-Teste, o que poderia ser um indício de que a sequência pela qual passaram, constituída das atividades no computador, não teve grande interferência. Apesar de ser prematuro, neste momento, tirar conclusões, podemos especular a razão da pequena queda no índice de respostas corretas. Inicialmente poderíamos pensar que as atividades construídas no computador eram muito mais próximas das atividades de sala de aula, no sentido de serem descontextualizadas. Além disso, o aluno tinha um guia de estudos a preencher, de forma que seu trabalho exploratório frente ao computador não era livre. Ao término de cada sessão, ademais, era feita a institucionalização, com a intenção de sistematizar as informações que foram transmitidas nas atividades e que julgamos importantes para serem explicitadas. Esta situação era completamente diferente da vivenciada na primeira etapa da sequência à qual foi submetido o Grupo B pois, no “mundo experimental”, os alunos eram postos frente a problemas e tarefas que exigiam o desenvolvimento de uma estratégia, por parte da dupla, que pudesse levar ao sucesso. Ao final das sessões era discutido o problema específico ou a tarefa. Saliemos contudo que, comparando o índice de acerto dos Grupos B e C, no Teste Intermediário o Grupo C é superior.

Antes do início do experimento nós esperávamos que o desempenho do Grupo B no Pré-Teste fosse muito aquém dos demais grupos, visto que ele era composto, em sua maioria, por alunos de 1^o ano, enquanto nos dois outros todos os alunos eram de 2^o ano. Na verdade, se compararmos o desempenho inicial dos dois grupos experimentais, realmente o Grupo B obteve um sucesso inicial inferior. Porém, quando o comparamos com o grupo A, observamos que este último foi o pior, embora próximo

de B. Tal fato nos despreocupou em relação à diferença de escolaridade entre os grupos e descartamos, por hora, este fator como causa do maior ou menor sucesso no Pré-Teste, uma vez que os alunos dos grupos A e C estão na mesma série e colégio.

Uma possível explicação para o resultado desfavorável do grupo A pode ser a falta de comprometimento com o projeto, pois os alunos tinham conhecimento de que não participariam da sequência didática, sendo apenas um grupo de referência. Ainda, é importante notar que as diferenças individuais também são um determinante fator de interferência. Se considerarmos a hipótese do não comprometimento do Grupo A, observamos que a diferença destes alunos para os do Grupo C está no fato desses últimos terem se disposto a participar do estudo fora do horário escolar, o que é um indício do seu envolvimento com a matéria ou, pelo menos, com o experimento. O não comprometimento com o projeto pode ter sido ainda uma das causas do Grupo A ter deixado um grande número de respostas em branco (33,12% no Pré-Teste, contra 21,5% no Grupo B e 16,25% no Grupo C). Aproveitamos para enfatizar que, embora em nossa pesquisa tivéssemos alunos de duas das séries do 2^a grau, o que foi fundamental para nós é que nenhum destes alunos havia tido contato anterior com o assunto Funções Trigonométricas.

Por fim, observamos que, comparando os grupos experimentais (B e C) com o grupo de referência (A), percebemos que nos primeiros houve tendência de crescimento do Pré para o Pós-Teste, enquanto no Grupo A existiu uma tendência de crescimento durante o estudo mas, ao final, no Pós-Teste, o desempenho foi praticamente o mesmo do Pré-Teste (que correspondia a um momento em que eles não haviam aprendido o conteúdo). Quanto ao Pós-Teste, enfatizamos que o percentual de questões respondidas de forma correta pelo grupo experimental foi acima de 70%, resultado que, em qualquer sistema escolar, é considerado um sucesso.

6.4. Análise da Taxa de Variação de Acertos por Grupo

Como vimos, houve grande diferença no comportamento dos Grupos, quanto ao número de acertos no Pré-Teste. Para nós é importante analisar a evolução do desempenho destes grupos. Para tanto, consideramos como ponto de partida o que os

alunos dos três grupos conseguiram resolver de forma correta antes da sequência e comparamos com o que acertaram depois. Estabelecemos a partir daí a taxa de variação percentual, ao longo do experimento. É nosso objetivo desprezar o que cada um conseguiu responder certo antes, para analisar qual foi o desenvolvimento do aluno ao final da sequência.

A tabela abaixo apresenta o número de questões certas no Pré e no Pós-Teste e a variação percentual que isto representa para cada um dos grupos.

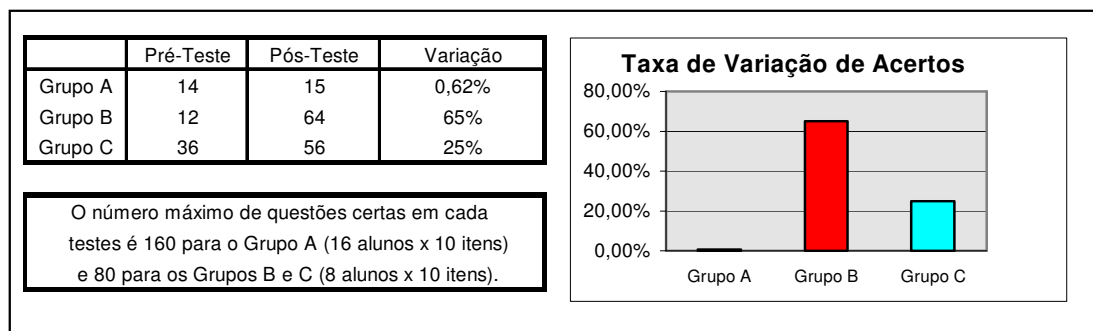


Gráfico II - Taxa de Variação de Acertos do Pré para o Pós-Teste

O gráfico acima mostra que a maior taxa de variação foi do grupo B. Gostaríamos contudo, de enfatizar que ambos os grupos experimentais, como já mencionamos, chegaram a 70% ou mais de acertos, ao final do experimento.

O Grupo C, por sua vez, acertou no Pré-Teste 36 dos 80 itens apresentados. Uma possível causa para esse desempenho razoável pode ser o fato desse grupo ser constituído por alunos da 2ª série do 2º grau e que, portanto, já possuíam alguns conhecimentos de trigonometria. Para esse grupo o ciclo trigonométrico já havia sido introduzido em sala de aula, assim como as definições de seno e cosseno no ciclo. Em nossa sequência, retomamos estes conteúdos para só então introduzir as funções trigonométricas. A partir desse ponto de vista poderíamos explicar sua menor evolução com relação ao grupo B, que era composto predominantemente por alunos do 1º ano (seis dos oito). Em outras palavras, os alunos dos grupos B e C não estavam no mesmo patamar no ponto de partida. É possível que o não conhecimento da trigonometria no ciclo por parte do grupo B tenha levado este grupo a iniciar num patamar mais baixo, apresentando uma evolução muito maior. Esta diferença entre nossos grupos prevalece ainda no Teste Intermediário em que o número de acertos do

grupo C é maior (veja Gráfico I). No entanto, ao término do experimento, no Pós-Teste, o Grupo B ultrapassa C, alcançando maior nível de sucesso.

Salientamos que ainda é prematura qualquer conclusão sobre o melhor contexto para a introdução do assunto já que, para esses dois grupos experimentais, a grande melhoria de desempenho (o maior “salto”) se deu entre o Teste Intermediário e o Pós-Teste, o que pode ser um indicador de que os dois contextos são complementares e necessários.

Pensando na questão acima apresentada, comparamos a taxa de variação percentual de acertos do Pré para o Teste Intermediário (na tabela indicada como 1ª Parte da Aplicação), e deste para o Pós-Teste (indicada como 2ª Parte), para procurar entender para qual grupo foi maior a possível interferência do contexto. Para tanto consideramos apenas a evolução nas questões que estiveram presentes nos três testes

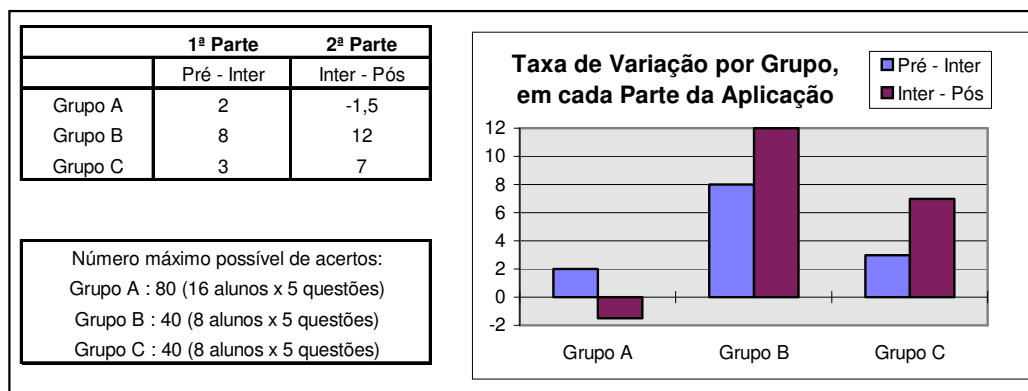


Gráfico III - Evolução dos Grupos na 1ª Parte e na 2ª Parte

Observamos que para o Grupo B a evolução de desempenho é maior quando ele passa pelas atividades do computador, enquanto para o Grupo C a maior taxa de variação ocorre quando passa pelas atividades do “mundo experimental”, o que novamente, pode apontar para a necessidade de utilização dos dois contextos, aqui vistos como complementares. Contudo, é importante observar que os “saltos” do Grupo B são mais expressivos que os do Grupo C.

Os dados da tabela e do Gráfico III nos sugerem que o caminho trilhado pelo Grupo B (grupo experimental primeiro) foi o mais adequado para levar a uma maior evolução no desempenho. De toda forma é necessário analisar nossos dados com mais acuidade antes de considerar tal fato como conclusivo. Neste sentido investigaremos, na próxima seção o desempenho, no Pré e no Pós-Teste, de cada indivíduo dos grupos experimentais.

6.5. Análise do Desempenho dos Sujeitos nos Testes

Na próxima etapa de nossa análise verificaremos a taxa de variação percentual de acertos de cada sujeito, que indica sua evolução do Pré para o Pós-Teste. Para tanto, cada aluno do grupo experimental recebeu um número de 1 a 16, sendo que os números de 1 a 8 referem-se aos alunos do grupo B e os números de 9 a 16 aos alunos do Grupo C. O Pré e o Pós-Teste possuíam 10 itens cada, portanto o número máximo de acertos por aluno é 10.

Apresentamos abaixo uma tabela com o número de questões certas por aluno e calculamos a taxa de variação percentual para os dois grupos experimentais.

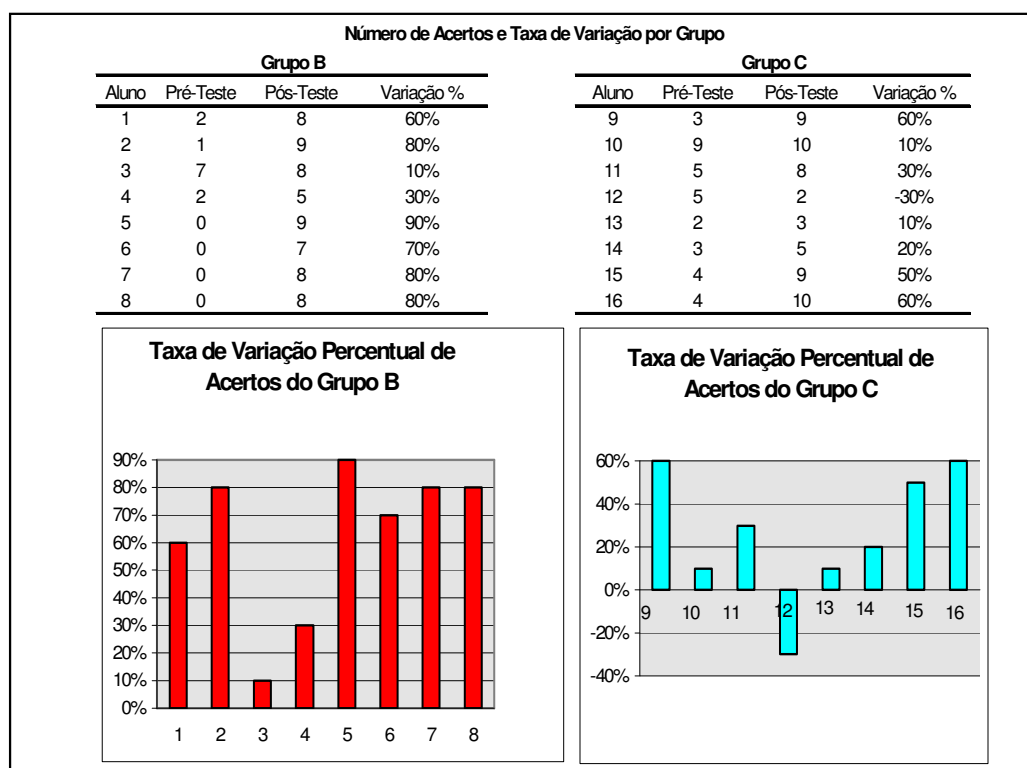


Gráfico IV - Taxa de Variação de Acertos de cada Aluno

Observamos que para 15 dos 16 alunos da amostra experimental (87,5%) houve acréscimo no número de questões certas do Pré para o Pós-Teste. Somente para um aluno (do grupo C) houve decréscimo.

No Grupo B estão as maiores taxas de evolução. Tivemos quatro alunos que erraram todas as questões do Pré-Teste (50% da amostra) e, no final, um desses alunos chegou a acertar 9 dos 10 itens, dois acertaram 8 dos 10 e um acertou 7.

Vale a pena salientar que não é possível tirar conclusões totalmente confiáveis analisando apenas o gráfico da variação percentual. É preciso analisar, também, a tabela de dados que o acompanha. Um exemplo disso é o aluno nº10, que apresenta uma evolução igual à do nº13, embora a situação de cada um desses alunos seja completamente diferente. Enquanto o aluno nº10 acertou 100% do teste final, o nº13 acertou apenas 30%. Aliás, este último foi um dos dois alunos de nossa amostra experimental cujo índice de acertos pode ser considerado um fracasso.

Analisando a tabela de dados, notamos que os alunos de nº12 e nº13 do Grupo C são os únicos da amostra que não conseguiram chegar a 50% de acertos, que seria o patamar mínimo para considerar sucesso. Esperamos que, quando fizermos a análise dos tipos de erros que os alunos apresentaram, consigamos entender o porquê de tal desempenho.

Ainda em relação à tabela de dados, agora do Grupo B, vemos que sete dos oito alunos acertaram um número elevado de questões no Pós-Teste e apenas um acertou 50%, o que é razoável, já que tal porcentagem é geralmente considerada satisfatória, no nosso sistema escolar. O que nos causou surpresa foi justamente o fato deste aluno (nº 4) ser do 2º ano^[19].

A partir dessas análises podemos dizer que, no caso de nossa amostra, os dados apresentaram uma taxa de variação individual bem maior entre os alunos do 1º ano que participaram do Grupo B. Isto nos leva a questionar se o fato dos outros alunos trazerem alguns conceitos do sistema escolar referentes ao assunto não foi um fator dificultador, em vez de auxiliar a aprendizagem. Em outras palavras, a taxa de evolução sugere que, para os alunos do Grupo C, obstáculos didáticos podem ter sido instalados com os conhecimentos anteriores.

Com o objetivo de melhor entender nossos dados faremos, na próxima seção, uma análise desses dados a partir dos objetivos didáticos da sequência.

6.6. Análise dos Testes por Objetivo

Em nossa pesquisa os testes foram elaborados tendo em mente os objetivos da sequência didática. Assim sendo, torna-se necessário analisá-los sob a óptica dos objetivos, na tentativa de identificar quais foram atingidos.

Relembramos os objetivos no quadro abaixo:

α	Associar um número real ao arco correspondente no ciclo trigonométrico e determinar seus seno e cosseno;
β	Reconhecer e aplicar a Relação Fundamental da Trigonometria;
χ	Estabelecer a conexão entre gráfico e expressão algébrica da função

19. Os dois alunos do 2º ano, neste grupo, são os de nº 3 e 4. O aluno nº 3 que teve o melhor desempenho do grupo no Pré-Teste, apresentou uma evolução de apenas 10%, tendo errado 20% do teste final.

	com diferentes coeficientes;
δ	Interpretar Domínio, Imagem e Período em gráficos e expressões que envolvam as funções seno e cosseno;
ϵ	Conectar fenômenos periódicos às funções seno e cosseno

A tabela seguinte relaciona as questões de cada um dos testes, com os objetivos aos quais elas se referem.

	Pré-Teste	Intermediário	Pós-Teste
Questão	1. α	1. δ	1. χ
Questão	2. α	2. β	2. β
Questão	3. δ	3. α	3. δ e ϵ
Questão	4. δ	4. δ	4. δ
Questão	5. χ	5. χ	5. α
Questão	6. β		6. α
Questão	7. δ e ϵ		7. δ
Questão	8. χ		8. χ

Antes de iniciar a análise, gostaríamos de salientar que o objetivo ϵ não foi diretamente avaliado por meio de uma questão por considerarmos difícil fazê-lo desta maneira. Para atender a tal propósito talvez a melhor forma fosse um teste posterior de retenção. Como em nossa metodologia optamos pela observação das duplas durante o experimento e aplicação de testes ao longo da sequência, provavelmente estaremos limitados, a partir da análise dos testes, quanto a este objetivo ter sido ou não atingido.

Vale a pena ressaltar que tivemos a preocupação de abordar um mesmo objetivo em cada um dos testes. O mesmo aconteceu durante o desenvolvimento de nossa sequência. Neste aspecto, seguimos a idéia de Vergnaud, de que a formação de um conceito requer vários contatos do estudante com o mesmo problema, de maneiras diferentes.

Discutiremos a seguir os resultados dos testes por objetivo didático. A tabela abaixo contém as porcentagens de acertos das questões que se referem a cada objetivo, para os Grupos B e C.

Grupo B			
Objetivo	Pré-Teste	Intermediário	Pós-Teste
α	15,62%	56,25%	78,12%
β	25%	0%	62,50%
χ	31,25%	50%	93,75%
δ	0%	12,50%	70,83%
ϵ	0%	12,50%	37,50%

Grupo C			
Objetivo	Pré-Teste	Intermediário	Pós-Teste
α	56,25%	43,75%	62,50%
β	87,50%	25%	100,00%
χ	43,75%	87,50%	68,75%
δ	12,50%	50,00%	70,83%
ϵ	12,50%	50,00%	50,00%

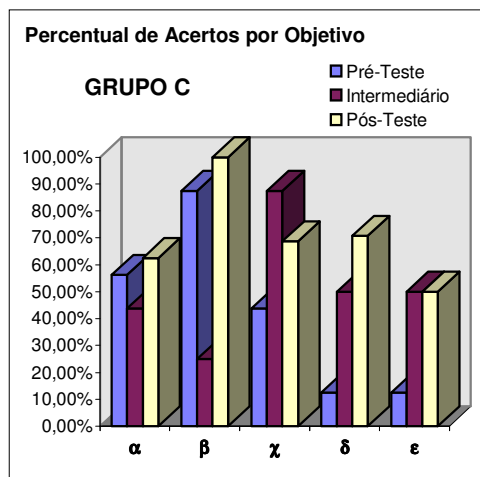
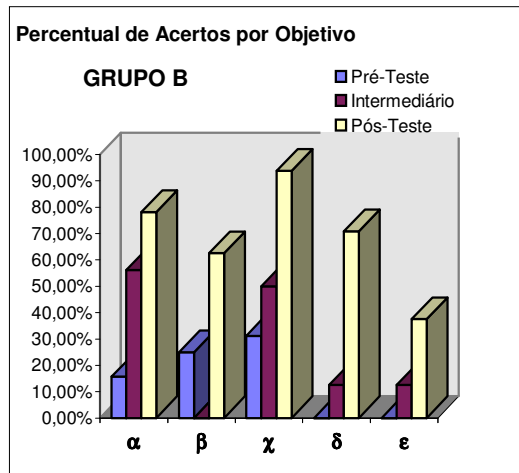


Gráfico V - Taxa Percentual de Acertos por Objetivo

A partir dos gráficos podemos inferir que, quanto aos objetivos α , χ e δ observamos que a evolução da competência foi grande no Grupo B. É nítido o aumento sistemático de acertos neste grupo, há uma melhora do Pré para o Intermediário e deste para o Pós-Teste, ou seja, o aluno apresenta evolução teste a teste. Podemos, ainda, considerar que todos os objetivos foram atingidos, com exceção daquele que visava o estabelecimento de conexão entre os fenômenos periódicos e as funções trigonométricas (o ϵ), que é o único em que não se atingiu 50% de acertos. Porém este objetivo, como já mencionamos, não é possível verificar pelos testes.

Com relação ao objetivo β — reconhecer e aplicar a Relação Fundamental da Trigonometria — nota-se, para o grupo B, uma queda no Teste Intermediário, quando o índice de acerto é zero. Tal desempenho poderia nos levar a questionar se houve uma “desaprendizagem” durante o experimento, já que $\frac{1}{4}$ dos alunos deste grupo acertou a questão no Pré-Teste. Por fim, no Pós-Teste o grupo voltou a ter um desempenho satisfatório. Esta dúvida poderia se estender para toda a amostra experimental, já que o grupo C também apresentou decréscimo de acertos no Teste

Intermediário para o objetivo β . Todavia, este resultado era esperado por nós, uma vez que podemos dizer que este insucesso foi “provocado”.

De fato, enquanto o Pré e o Pós-Teste foram desenhados antes do início do trabalho de campo, o Intermediário foi preparado para atender também às características do grupo com o qual trabalhamos. Em outras palavras, o Teste Intermediário serviria não apenas como indicador da influência dos contextos sobre a aprendizagem, mas também como instrumento para investigar determinadas questões, que provocassem nos alunos comportamentos, erros ou procedimentos contrários às nossas expectativas. Este foi o caso da questão relativa ao objetivo β , que apresentou um imprevisível alto índice de acertos no Pré-Teste. Como explicamos em nosso desenho dos testes (capítulo 5, seção 5.9.) resolvemos introduzir na questão dois do Teste Intermediário um “erro”, de forma que os dados fossem incompatíveis. Nossa intenção foi investigar se o conhecimento do aluno no assunto era apenas procedural (se ele conhecia o procedimento para chegar à resposta) ou se ele, além de obter o resultado, iria analisá-lo, aceitando-o ou não.

Ao interpretarmos as respostas dos alunos a essa questão percebemos que elas não nos levavam a tirar uma conclusão, uma vez que, na sessão posterior à aplicação do Teste Intermediário, comentamos com os alunos que uma das questões continha um dado errado e que apenas dois dos dezesseis estudantes haviam percebido e escrito no teste que a questão era incompatível. Ouvimos de alunos comentários como os seguintes:

“Eu percebi que o sinal não era aquele, então ‘consertei’ o dado, achei que era erro de datilografia, e resolvi certinho...”

“Eu achei estranho, mas como foi dado pela senhora, professora, não liguei! Resolvi assim mesmo e analisei o outro sinal de forma correta”.

“Não me preocupei em analisar o que o problema deu, que é lógico que está certo, só me preocupei em analisar o resultado que eu encontrei”.

Estas considerações dos alunos nos levaram a refletir sobre o extremado papel de dominância que a escola exerce sobre eles. O professor sempre “está certo” e sempre “sabe a resposta dos problemas”. Para o aluno todas as questões propostas na escola possuem uma solução que é, ainda, a única admissível. Neste caso, mais que o conhecimento ou desconhecimento do conteúdo, o que podemos notar é a força do contrato didático, que estabelece explícita e implicitamente as regras

comportamentais da relação entre o professor e seus alunos em situações de aprendizagem. O professor detém o saber, a ser transmitido, de forma que não cabe ao aprendiz questionar a veracidade das informações recebidas por intermédio do mestre. Retirado o “erro” e refeita a questão no Pós-Teste, o objetivo β foi atingido com o maior índice de sucesso, 100% de acertos, no Grupo C.

Analisando o grupo C como um todo, observamos que apenas com relação ao objetivo δ — interpretar Domínio, Imagem e Período em gráficos e expressões que envolvam as funções seno e cosseno — houve aumento sistemático do sucesso, teste a teste. Podemos afirmar que o comportamento quanto à porcentagem de acertos foi bem diferente entre um grupo e o outro. Embora consideremos que o Grupo C atingiu todos os objetivos (nenhum deles apresentou menos de 50% de acertos nas questões correspondentes), observamos que em relação ao objetivo χ — estabelecer a conexão entre gráfico e expressão algébrica da função com diferentes coeficientes — houve uma grande evolução do Pré-Teste para o Intermediário, porém no Pós-Teste este desempenho piorou, embora continuasse a apresentar um índice de acertos que indicava este objetivo ter sido alcançado.

O mais baixo percentual de acertos, quando comparado com os demais, foi apresentado pelo objetivo ϵ — estabelecer conexão entre os fenômenos periódicos e as funções trigonométricas —. No Grupo C ele ainda pode ser considerado como um resultado satisfatório (tivemos 50% de acertos), o que já não podemos afirmar para o Grupo B (37,5% de acertos). Todavia relembremos que esta questão foi feita para ser um reinvestimento dos conhecimentos adquiridos. Além disso, a questão não tinha congruência semântica, ou seja, a terminologia não era familiar ao aluno. O termo “movimento harmônico” foi mencionado na sequência didática, na atividade do pêndulo de areia, mas não suas equações, ou o termo amplitude.

Devemos assumir que a forma de avaliar o objetivo ϵ deveria ter sido mais completa. Porém, por economia de tempo, para que o teste não ficasse muito exaustivo para o aluno, optamos por elaborar apenas uma questão para este objetivo. Por consequência, verificamos agora que não podemos concluir, a partir dos dados de que dispomos, se este objetivo foi atingido. Como já discutimos ele não pode ser analisado por apenas uma questão em um teste. É possível, contudo, que este objetivo

possa ser analisado qualitativamente no desenvolvimento da sequência. De fato, a pesquisadora Gomes Ferreira (citada no capítulo 3, seção 3.5.) comentou que este tipo de dificuldade apareceu em sua sequência e que também em seu estudo não foi possível analisar um dos objetivos.

Portanto, em relação a todos os objetivos o Grupo B saiu de patamares mais baixos que o Grupo C e, ao final do experimento, superou-o nos objetivos α e χ e igualou-se a ele no objetivo δ .

Em resumo, a partir da análise dos resultados dos Pré e Pós-Testes, nos dois grupos experimentais, segundo nossos objetivos, observamos que houve um aumento significativo no percentual de acertos das questões a eles ligadas, o que nos leva a supor que os objetivos foram alcançados. O que consideramos o de maior sucesso foi o δ , no qual ambos os grupos partiram de índices muito baixos de acertos (0% no Grupo B e 12,5% no C) e chegaram a mais de 70% de sucesso. Naturalmente, objetivos como o β e o χ , em que se chegou a 93% de acertos, também foram considerados atingidos.

6.7. Análise do Desempenho dos Grupos Experimentais nos Itens

A seguir, passamos a analisar qual foi a evolução da competência dos alunos em relação a cada item das questões apresentadas nos testes.

O Pré e o Pós-Teste possuíam oito questões subdivididas, totalizando dez itens. O Teste Intermediário possuía cinco questões, totalizando seis itens; destas questões quatro eram equivalentes a questões dos outros dois testes. Entre o Pré e o Pós-Teste houve equivalência entre todas as questões (tanto semântica quanto matemática).

Para facilitar a consulta esquematizamos no quadro seguinte as questões com os respectivos conteúdos e a correspondente numeração dos itens.

Item	Pré-Teste	Intermediário	Pós-Teste	Conteúdo de cada item
1	Questão 1a	Questão 3a	Questão 6a	Completar comparando $>, <, =$ (seno)
2	Questão 1b	Questão 3b	Questão 6b	Completar comparando $>, <, =$ (cosseno)
3	Questão 2a		Questão 5a	Dar dois valores de θ dado $\text{sen}\theta$
4	Questão 2b		Questão 5b	Dar dois valores de θ dado $\text{cos}\theta$
5	Questão 3		Questão 4	Completar o valor de $y_{\text{máx}}$ e $y_{\text{mín}}$
6	Questão 4		Questão 7	Completar a dado Im^{**}
7	Questão 5		Questão 1	Associar a forma algébrica ao gráfico (teste de múltipla escolha)
8	Questão 6	Questão 2	Questão 2	Aplicar a relação Fundamental da Trigonometria
9	Questão 7	Questão 1	Questão 3	Teste de múltipla escolha contextualizado
10	Questão 8	Questão 5	Questão 8	Associar o gráfico à expressão algébrica

* A questão 4 do Teste Intermediário não tem equivalente semântica nos outros dois.

** Estabelecer a ligação entre o conjunto Imagem e o valor da constante a na expressão algébrica da função.

A seguir apresentamos o número de alunos que acertou cada item no Pré e no Pós-Teste, para que possamos perceber se houve aumento na competência.

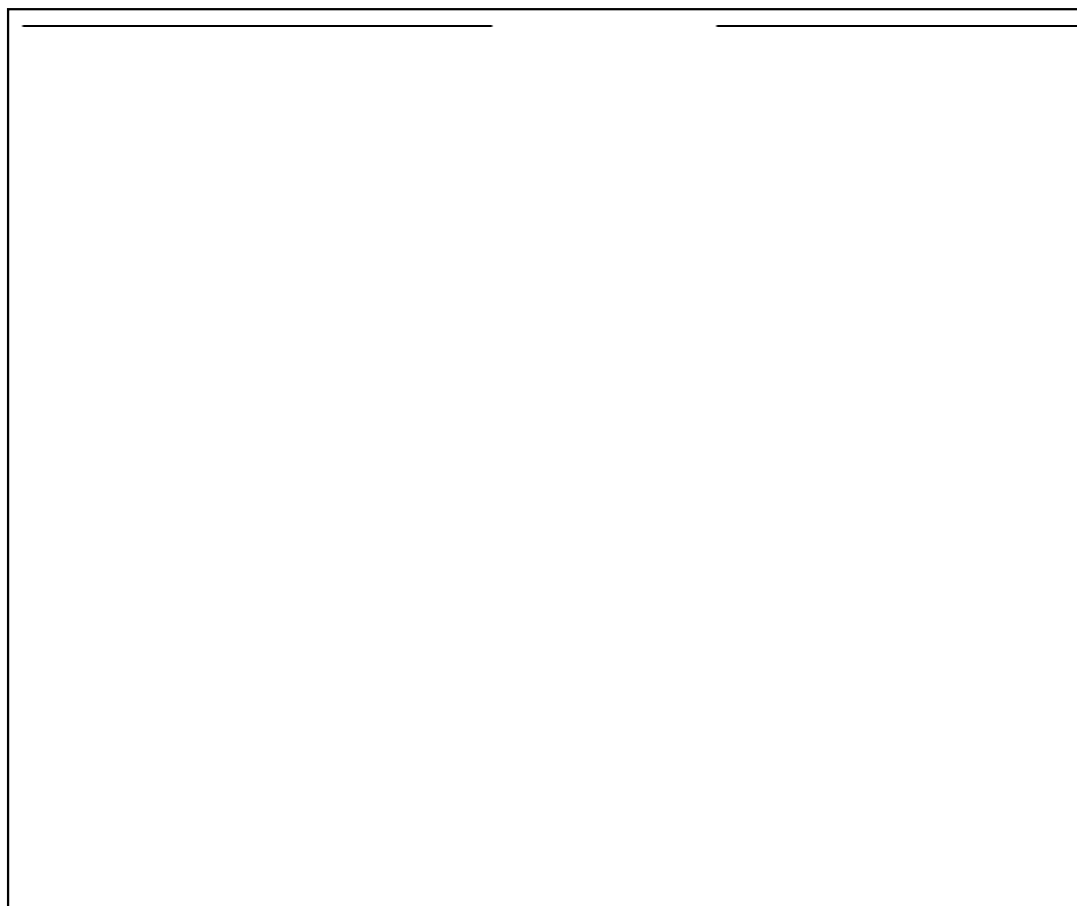


Gráfico VI - Número de Acertos dos Grupos Experimentais por Item

Ao analisarmos os resultados do Pós-Teste observamos que, para o Grupo B, os itens 1,3,6,7 e 10 apresentaram alto índice de acertos. Os itens 1 e 3 são relativos ao objetivo α , o 6 ao objetivo δ e os itens 7 e 10 referem-se ao objetivo χ . Assim sendo, podemos considerar, numa primeira análise, que esses três objetivos foram plenamente atingidos pelo grupo.

Para o Grupo C os itens em que houve elevado número de acertos foram os de números 6 e 8, o primeiro relativo ao objetivo δ e o segundo ao objetivo β . Comparando os dois grupos, o que nos chama a atenção é que, embora ambos tenham feito as mesmas atividades nos contextos, apenas com a ordem invertida, o comportamento ao final do estudo foi bastante diferente, o que se traduziu por melhores desempenhos em objetivos distintos. Apenas o objetivo δ foi atingido da mesma forma por ambos os grupos.

Suspeitamos que a diferença entre os grupos B e C no desempenho no item 8 foi causada pela variável escolaridade, uma vez que o item 8 refere-se à Relação Fundamental da Trigonometria, que surge com frequência nos exercícios escolares e, como sabemos, nossos alunos do grupo C estavam iniciando a trigonometria no ciclo, em sala de aula. Em nossa sequência a Relação Fundamental aparece em uma das atividades do computador, no software Cabri, mas não são feitos exercícios de fixação, como é comum na escola, o que explica a menor familiaridade do grupo B com o assunto. Como não prevíamos tal interferência, procuraremos investigar, na próxima seção, os tipos de erros apresentados pelos alunos para que possamos entender melhor os resultados acima discutidos.

O Grupo B apresenta melhores resultados que o C nos itens 1,2,3,6,7 e 10, ou seja em 60% dos itens apresentados, e no 4 e no 5 os desempenhos se igualam. Assim, numa análise por itens, o B foi melhor.

Como no momento do Pós-Teste ambos os grupos passaram pela sequência didática toda, para que possamos entender o porquê da discrepância entre eles procuraremos analisar qual foi a evolução de cada grupo nos itens. Iremos comparar qual o número de alunos de cada grupo que acertava o item antes da sequência com o que acertava após o estudo, identificando qual o “salto” dado.

6.8. Análise da Taxa de Variação por Item

Apresentamos abaixo tabelas e gráficos comparando a evolução do desempenho de cada grupo, por item, do Pré para o Pós-Teste.

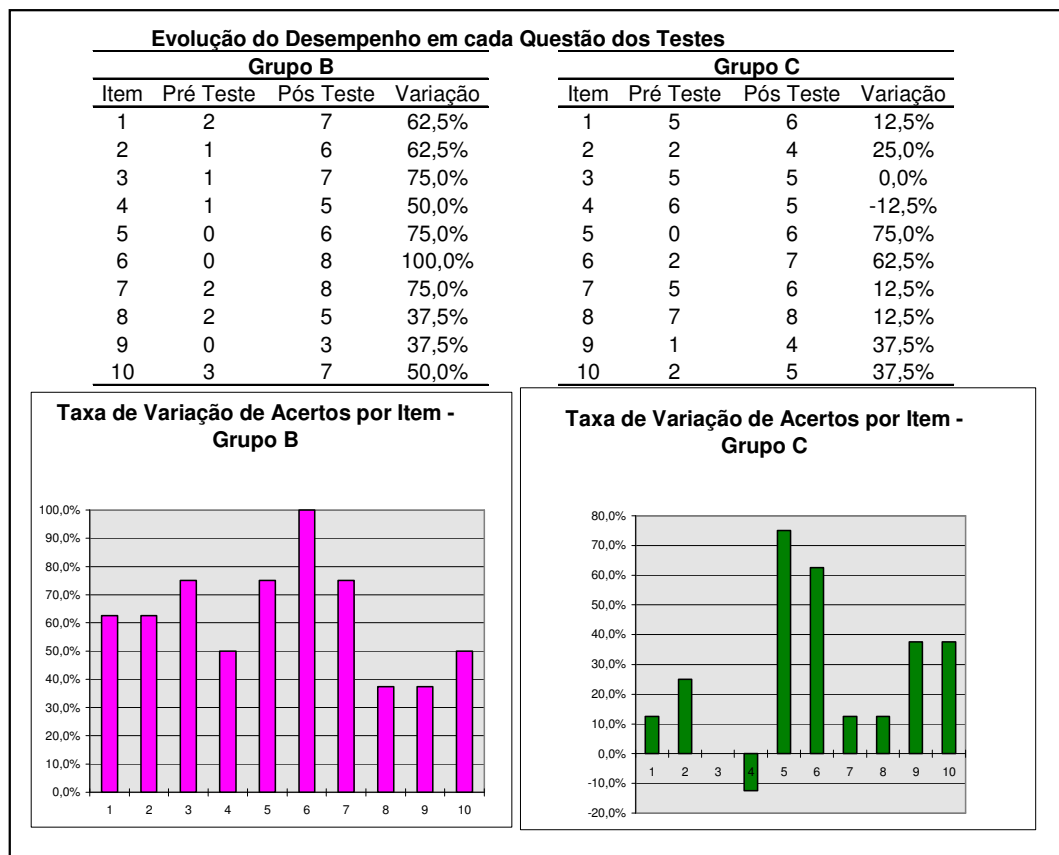


Gráfico VII - Taxa de Variação de Acertos por Item

Observamos que em todos os itens o Grupo B apresentou uma maior evolução, o que é um indício de que a ordem de aplicação da sequência didática levou a uma aprendizagem mais efetiva para esse grupo de alunos.

Entre os itens, o grupo se destaca principalmente no 6, apresentando uma evolução de 100%, e no 5, que inicia em acerto zero e no Pós-Teste sobe a 75% de acertos.

Quanto ao Grupo C, com relação ao item 5 apresenta resultado idêntico ao do Grupo B. Vale a pena observar que em todos os itens o grupo C não supera o B, ou seja sua taxa de variação é a mesma em dois itens e inferior nos outros oito.

Um dado que nos chamou a atenção no Gráfico VI foi que todos os itens apresentaram evolução, no Grupo B, o que não ocorreu no Grupo C.

Novamente sentimos a necessidade de investigar as dificuldades que surgiram na resolução das questões, assim como identificar se os alunos que erraram questões equivalentes no Pré e no Pós Teste são os mesmos, e a partir dos enganos cometidos pelos alunos, procurar entender o porquê da discrepância entre os grupos.

6.9. Análise dos Erros e Procedimentos

Nesta seção pretendemos identificar as dificuldades que os alunos apresentaram ao resolver os testes. É nossa intenção fazer um acompanhamento da evolução (ou involução) do desempenho dos grupos, a partir de uma comparação entre os tipos de erros que surgiram no Pré-Teste e no Pós-Teste. Para tanto, os itens serão agrupados tendo como critério o objetivo didático ao qual eles se referem.

Analisaremos, sempre que possível, os procedimentos de resolução. Desta forma, buscaremos compreender como se desenvolveu o processo de aprendizagem.

Pela leitura dos testes pudemos identificar oito categorias (ou tipos) de erros. Nos **Itens 1, 2, 3 e 4** relativos ao objetivo α — ASSOCIAR UM NÚMERO REAL AO ARCO CORRESPONDENTE NO CICLO TRIGONOMÉTRICO E DETERMINAR SEUS SENOS E COSENO — surgiram as seguintes categorias:

E1. O valor do seno (ou cosseno) varia em função direta com o ângulo

Consideramos que o aluno cometeu este tipo de erro quando fazia uma associação do tipo: quanto maior o ângulo, maior o seno (ou o cosseno).

Apresentamos, como exemplo desta categoria, o procedimento de um aluno que completou da seguinte forma o item 1:



Complete com $>$, $<$ ou $=$

$$\sin 40^\circ < \sin 70^\circ$$

$$\sin 120^\circ < \sin 150^\circ$$

$$\sin 210^\circ < \sin 330^\circ$$

(aluno nº 1, Pré-Teste)

E2. O valor do cosseno varia em função inversa com o ângulo

Classificamos o erro neste tipo quando o raciocínio implícito envolvido considerava que quanto maior o ângulo menor é o seu cosseno.

O exemplo abaixo ilustra esta categoria:

Complete com $>$, $<$ ou $=$

$$\cos 30^\circ < \cos (-30^\circ)$$

$$\cos 60^\circ > \cos (120^\circ)$$

$$\cos 240^\circ > \cos (300^\circ)$$

(aluno nº 7, item 2, Pré-Teste)

E3. A determinação do valor do cosseno de ângulos de mesmo módulo prioriza o sinal positivo

Esta categoria de erro advém da suposição que o cosseno de um ângulo positivo é sempre maior que o de um ângulo negativo.

Podemos exemplificar **E3** com a seguinte resolução

Complete com $>$, $<$ ou $=$

$$\cos 30^\circ > \cos (-30^\circ)$$

(aluno nº 8, item 2, Pré-Teste)

E4. Associação unívoca entre o ângulo e o valor do seu seno (ou cosseno)

Nesta classificação está o erro cometido pelos alunos que pensavam que dado um valor de seno (ou cosseno), só existe um ângulo a ele associado. Um exemplo:

Dê dois valores de θ , $0 < \theta < 2\pi$, tais que:

$$\sin \theta = 0,5 \quad \theta = \frac{\pi}{6}$$

(aluno 13, item 3, Pré-Teste)

E5. O módulo do seno (ou cosseno) é suficiente para determinar os ângulos correspondentes

Este tipo de erro está ligado a uma concepção que leva em conta prioritariamente o módulo do valor do seno ou cosseno para a determinação dos ângulos ou para o estabelecimento de comparações.

A solução apresentada no exemplo abaixo ilustra **E5**

<p>Dê dois valores de θ, $0 < \theta < 2\pi$, tais que:</p> $\text{sen } \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \theta = \frac{\pi}{4}, \theta = \frac{3\pi}{4}$

(aluno 12, item 4, Pós-Teste)

E6. Localização ou valor errado

Classificamos nesta categoria o engano proveniente do desconhecimento dos valores corretos da tabela para os ângulos básicos (30° , 45° , 60° , 0° , 90° , 180° , 270° , 360°) ou advindo de distração, no momento de localizar o arco no ciclo trigonométrico. Exemplos:

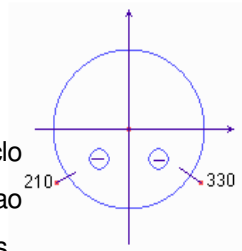
1) Dê dois valores de θ , $0 < \theta < 2\pi$, tais que:

$\text{sen } \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \theta = 240^\circ \text{ ou } \theta = 300^\circ$
--

(aluno 6, item 3 - Pós-Teste)

2) Complete com $>$, $<$ ou $=$

$\text{sen } 210^\circ > \text{sen } 330^\circ$ <p>(aluno nº 4, item 1, Pós-Teste)</p>
--



No segundo exemplo o aluno localizou os arcos no ciclo trigonométrico, apresentando um esboço semelhante ao reproduzido ao lado, mas não percebeu a igualdade dos senos.

Esses foram os tipos de erros que identificamos nos itens ligados ao objetivo α . Apresentamos a seguir um quadro resumo das dificuldades encontradas na análise das resoluções dos testes, quanto aos itens 1,2,3 e 4.

--

Grupo B					Grupo C				
Pré-Teste					Pré-Teste				
Item	1	2	3	4	Item	1	2	3	4
Aluno 1	E1	E1	—	—	Aluno 9	E1	C	C	C
Aluno 2	E1	E2	E4	—	Aluno 10	C	C	C	C
Aluno 3	C	C	C	C	Aluno 11	C	E(NI)	C	C
Aluno 4	C	E(NI)	E4	E4+E5	Aluno 12	C	E5	C	C
Aluno 5	E1	E1	E4	E4	Aluno 13	E(NI)	E5	E4+E5	E5
Aluno 6	E1	E1	E4	E4+E5	Aluno 14	E1	E5	E5	E5
Aluno 7	E1	E2	E4	E4	Aluno 15	C	E5	E5	C
Aluno 8	E1	E2	E4	E4+E5	Aluno 16	C	E5	C	C
Grupo B					Grupo C				
Pós-Teste					Pós-Teste				
Item	1	2	3	4	Item	1	2	3	4
Aluno 1	C	C	C	E6	Aluno 9	C	C	E6	C
Aluno 2	C	C	C	E6	Aluno 10	C	C	C	C
Aluno 3	C	C	C	C	Aluno 11	C	E3	C	C
Aluno 4	E6	E3	C	C	Aluno 12	E6	E3+E5	E5	E5
Aluno 5	C	C	C	C	Aluno 13	E1	E3	E5	E5
Aluno 6	C	C	E6	E6	Aluno 14	C	E3	C	E5
Aluno 7	C	E3	C	C	Aluno 15	C	C	C	C
Aluno 8	C	E3	C	C	Aluno 16	C	C	C	C
Legenda:	C	questão certa			E(NI)	erro não identificado			
	—	questão em branco			En	Erro listado			

Quadro VII - Levantamento de Dificuldades nos Itens 1 a 4

Os itens 1 e 2 tratavam da comparação de valores de seno ou de cosseno, por isso iremos analisá-los conjuntamente e a seguir comentaremos os itens 3 e 4. Iniciaremos, para facilitar a leitura, pelas análises do Grupo B, comparando Pré e Pós-Teste e continuaremos pelo Grupo C com a mesma sistemática.

Podemos observar no Quadro VII que no Pré-Teste, o Grupo B, apresentou dois tipos de erros **E1** e **E2**. Para os seis alunos que erraram o item 1, a dificuldade foi unicamente **E1**. Uma possibilidade que explica tal postura é a transposição dos conhecimentos ligados à trigonometria no triângulo retângulo para ângulos que não são agudos. Em outras palavras, um conhecimento local, que funcionava bem num determinado domínio foi generalizado pelo aluno, que o aplicou em outro campo no qual não era válido. Quanto ao item 2, três alunos cometeram o erro **E1**. Observamos que eles estabeleceram uma ligação permanente entre crescimento do ângulo e da razão trigonométrica, essa concepção levou ao erro. Os outros três apresentaram o erro **E2**, novamente trazendo conhecimentos da trigonometria no triângulo retângulo, já que isto é verdade para ângulos agudos.

A primeira observação advinda do Pós-Teste foi que esses erros desapareceram. Quanto ao item 1 os seis alunos que haviam anteriormente errado passaram a acertá-lo. Por conseguinte podemos admitir que tenham superado a concepção inadequada anterior.

Já no item 2, o único erro apresentado foi do tipo **E3**, o qual não havia surgido no Pré-Teste. Os alunos consideraram $\cos 30 > \cos (-30^\circ)$. Isto pode ser um indício que, para eles o cosseno de um ângulo positivo é sempre maior que o de um ângulo negativo.

Quanto aos itens 3 e 4 é necessário informar que eles foram considerados como respondidos de forma correta somente para os alunos que apresentaram os dois valores solicitados. Os erros identificados no Pré-Teste, no Grupo B, foram das categorias **E4** e **E5**. No item 3, para os alunos que erraram a questão, o único valor apresentado para o ângulo θ foi 30° , em vez dos dois pedidos (**E4**). A unidade de medida usada foi sempre o grau, apesar da questão ter requisitado o uso do radiano. Podemos dizer que não houve propriamente um erro, mas um desconhecimento de outro valor possível para o ângulo. Novamente observamos que houve transferência dos conceitos da trigonometria no triângulo retângulo para outros arcos. No item 4, cinco dos alunos apresentaram, em graus, um só valor. Destes cinco, três consideraram apenas o módulo do valor do cosseno e não o sinal, apresentando também a dificuldade classificada como **E5**.

No Pós-Teste não observamos a incidência dos erros acima mencionados para os itens 3 e 4, porém surgiu um outro tipo de engano: **E6**. Um aluno errou ambos os itens por ter considerado valores errados da tabela e, além deste, dois outros alunos erraram o item 4, pelo mesmo motivo. Uma observação interessante quanto ao procedimento é que apenas um dos alunos escreveu as respostas em radianos, os outros continuaram se expressando em graus. Isto pode ser um indício de que eles não sentiram a necessidade de uma nova medida para ângulo, ou ainda, torna-se evidente que os conhecimentos antigos desempenharam um papel dominante nos procedimentos dos alunos, uma vez que a unidade de medida de ângulo mais familiar o grau é normalmente.

Ao analisar o que ocorreu com o único aluno do Grupo B que acertou os quatro itens em ambos os testes notamos que houve mudança nos procedimentos de resolução. Ele passou a fazer desenhos localizando os arcos no ciclo trigonométrico, sendo provavelmente esta a estratégia usada para chegar à resposta correta dos itens 1 e 2 no Pós-Teste. Quanto aos itens 3 e 4 suas respostas, que estavam em graus, passaram a ser dadas em radianos. Assim sendo, interpretamos a sequência didática como produtiva quanto à aquisição de conceitos, pois mesmo para esse aluno houve um avanço,.

Vejamos o Grupo C quanto aos itens 1 e 2. Neste grupo os erros que surgiram no Pré-Teste foram do tipo **E1** e **E5**. No item 1 o erro identificado foi **E1** e no item 2,

curiosamente, cinco dos seis alunos que erraram apresentaram **E5**, um erro que não surgiu no Grupo B. Eles consideraram $\cos 60^\circ = \cos 120^\circ$ e/ou $\cos 240^\circ = \cos 300^\circ$. Interpretamos que, para esses, a comparação estabelecida entre os valores baseou-se no módulo e não o sinal. No Pós-Teste, para o item 1, o erro **E1** persistiu em apenas um aluno. Um outro, que havia acertado anteriormente o item, cometeu o erro **E6**, que na verdade pode estar ligado a uma distração deste aluno. Quanto ao item 2, o erro apresentado, que não havia surgido no Pré-Teste, foi **E3** e para um aluno ele veio acompanhado de **E5**.

Quanto aos itens 3 e 4, observamos no Pré-Teste a incidência dos erros dos tipos **E4** e **E5**. No Pós-Teste **E4** desapareceu, mas **E5** permaneceu.

Observamos que erros como **E1**, **E2** e **E4** foram erradicados para todo o grupo experimental. Por outro lado surgiram erros dos tipos **E3** e **E6**, o que denota mudança nas concepções e evolução. Notamos também uma diferença em relação à incidência de erros nos dois grupos, isto é, enquanto no Grupo B a sequência parece ter sido eficiente para erradicar aqueles erros, no Grupo C alguns deles foram resistentes, como por exemplo o **E5**.

Os erros que surgiram no item 8 e que se referem ao objetivo β — RECONHECER E APLICAR A RELAÇÃO FUNDAMENTAL DA TRIGONOMETRIA — foram:

E7. Não usar a relação fundamental

Classificamos neste tipo as respostas dos alunos que tentaram utilizar outros recursos tais como regra de três ou aproximações, em vez da relação fundamental da trigonometria. Podemos citar como exemplo:

Dado $\sin x = -2/3$, quais os possíveis valores de $\cos x$?

Resolução: $\sin 45^\circ \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin x \rightarrow -\frac{2}{3}$ Por regra de três simples: $-\frac{2}{3} \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x$

e portanto $x = 30 \sqrt{2}$. Se $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, então $\cos (30 \sqrt{2}) = y$

Novamente por regra de três determinou o valor de $\cos x$. (aluno nº 5, item 8, Pré-Teste)

E8. Erro de algoritmo

Nesta categoria consideramos as respostas que continham erros nos cálculos, embora os alunos tivessem usado corretamente a relação fundamental.

O exemplo seguinte ilustra **E8**.

Dado $\cos x = \frac{-2}{3}$, $\pi/2 < x < \pi$ calcule o valor de $\sin x$.

Resolução: $\left(\frac{-2}{3}\right)^2 + \sin^2 x = 1$

$$1 = \frac{-4}{9} + \sin^2 x$$

(aluno nº1, item 8, Pós-Teste)

.....

Iniciaremos nossa análise, como nos itens anteriormente discutidos, pelo Grupo B. No Pré-Teste dois alunos acertaram, três deixaram em branco e três erraram. O erro apresentado foi do tipo **E7**. Podemos então dizer que não houve propriamente um erro, mas o desconhecimento da relação fundamental. No Pós-Teste, três alunos erraram, porém apenas um não usou a relação fundamental, os outros dois usaram-na e erraram nos cálculos (**E8**). O número de alunos que passou a acertar subiu para cinco.

Quanto ao Grupo C, no Pré-Teste tivemos sete respostas certas e uma em branco e no Pós-Teste todos os alunos acertaram. Podemos analisar esse resultado como sendo um indicador de que esse conhecimento já era de domínio dos alunos do grupo, que continuaram apresentando bom resultado após a sequência.

A seguir analisaremos os **itens 7 e 10**, referentes ao objetivo χ — ESTABELECE A CONEXÃO ENTRE GRÁFICO E EXPRESSÃO ALGÉBRICA DA FUNÇÃO COM DIFERENTES COEFICIENTES.

Apesar de termos observado diversas respostas erradas,^[20] os procedimentos foram tão diversificados que nos foi impossível agrupá-los em categorias. Podemos, então, dizer que não identificamos erros comuns, os que surgiram parecem ser características individuais. Comentaremos alguns dos procedimentos dignos de nota.

Antes de iniciar os comentários é importante dizer que o item 10 só foi considerado correto para o aluno que fez todas as quatro associações certas.

O Pré-Teste, no Grupo B, teve dois alunos que acertaram os itens 7 e 10 e o procedimento adotado, no 10, foi substituir valores de x , determinar o valor da função e identificar qual o gráfico correspondente. Esses alunos apresentaram uma visão pontual da função. Já no Pós-Teste todos os alunos do grupo acertaram o item 7 e somente um errou o item 10. O que nos chamou a atenção foram os processos de resolução. Cinco alunos analisaram o Domínio, a Imagem e o Período da função e

20. Ver cap. 6, seção 6.7., gráfico VI, pág. 153.

quatro deles analisaram a forma do gráfico e as transformações sofridas a partir dos coeficientes presentes na expressão algébrica. Quanto ao item 10 seis dos sete que acertaram apresentaram o procedimento de análise do Domínio, Imagem e Período. Desta forma consideramos como plenamente atingido o objetivo χ , para o Grupo B.

Quanto ao Grupo C, no Pré-Teste dois alunos deixaram em branco e apenas um errou o item 7 porém, o que nos chamou a atenção foi que, dos cinco alunos que acertaram, dois não justificaram suas escolhas e os outros três o fizeram de forma errada, ou seja, nenhum chegou a resposta pelo conceito. Analisando o desempenho desses alunos no item 10 observamos que todos eles erraram. No Pós-Teste os estudantes que haviam anteriormente errado ou deixado em branco o item 7 passam a acertar os dois itens (7 e 10). Quanto aos cinco outros alunos, dois erraram ambos os itens, um acertou mas não justificou, um acertou apenas o item 7 e um último acertou o 7 sem justificar e errou o 10. A partir dessas considerações não podemos afirmar que houve, neste grupo, uma evolução sistemática quanto a esses itens.

Finalizando apresentaremos nossa análise quanto aos **itens 5,6 e 9**, relativos aos objetivos δ — INTERPRETAR DOMÍNIO, IMAGEM E PERÍODO EM GRÁFICOS E EXPRESSÕES QUE ENVOLVAM AS FUNÇÕES SENO E COSSENO, e ao ϵ — CONECTAR FENÔMENOS PERIÓDICOS ÀS FUNÇÕES SENO E COSSENO.

No Pré-Teste todos os alunos do Grupo B erraram ou deixaram em branco os três itens. No Pós-Teste todos os alunos acertaram o item 6 e dois erraram o 5, porque consideraram zero como sendo o menor valor de $\cos x$ (**E6**). No item 9 três alunos acertaram, quatro deixaram em branco e um errou e não justificou. Como este último item era o que relacionava-se também com o objetivo ϵ e foi colocado para ser um reinvestimento dos conhecimentos adquiridos, consideramos o sucesso nos itens 5 e 6 suficiente para indicar que a sequência foi eficiente para atingir o objetivo δ .

Antes de finalizar esta seção, gostaríamos de salientar que não analisamos os erros no Teste Intermediário uma vez que nossa intenção nunca foi analisar se um contexto era melhor que o outro. Do mesmo modo não detalhamos os procedimentos do Grupo A porque este era o grupo de referência e não era nossa intenção avaliar o contexto da sala de aula.

Uma vez analisado o desempenho dos alunos dos grupos experimentais por sete diferentes perspectivas, interpretamos que os dois grupos apresentaram melhoria. O Grupo B teve maior sucesso que o C na resolução dos testes. No capítulo seguinte, a partir das análises dos dados, apresentaremos a conclusão de nosso estudo.

Capítulo VII:

Conclusões

CONCLUSÕES

7.1. Introdução

No capítulo anterior analisamos os dados obtidos em nosso experimento procurando organizá-los sob diversos pontos de vista de modo a facilitar uma interpretação mais abrangente. Neste capítulo iniciaremos fazendo comentários gerais sobre o estudo a partir de observações e reflexões nossas que nem sempre se apoiam no referencial teórico da pesquisa ou em fatos ou dados sistematizados. A seguir procederemos a discussão e conclusões obtidas a partir das análises feitas no capítulo anterior. Para tanto teremos sempre em mente nossos objetivos, questões de pesquisa e fundamentação teórica. Na última seção discutiremos a contribuição deste trabalho para a Educação Matemática e indicaremos pontos para futuros estudos. Finalizando, apresentaremos uma reflexão sobre o nosso próprio crescimento durante a pesquisa.

7.2. Comentários Gerais

Nosso objetivo foi construir uma sequência didática que pudesse introduzir as funções seno e cosseno e suas transformações de forma significativa para o aluno e, a partir dela, investigar o tipo de interferência dos contextos (computador e “mundo experimental”) na construção desse conhecimento.

Durante toda a elaboração e aplicação da sequência tivemos em mente o princípio básico do Construtivismo, proposto por Piaget, segundo o qual o aluno deve desempenhar um papel ativo na construção do conhecimento. Podemos dizer que a participação do estudante na formação do conceito em questão foi um dos pontos mais relevantes de nosso estudo.

Com relação ao contexto do computador, devemos acrescentar que em nosso entender, a primeira tarefa do professor deve ser, antes da aplicação das atividades com as quais pretende discutir um conteúdo, identificar se essas são viáveis em termos de

economia de tempo, simplificação do ensino e contribuição para a aprendizagem. Neste sentido vale a pena analisar a complexidade de uso dos aplicativos e ainda se as investigações dos estudantes podem ser completamente controladas pelo mestre de forma a atingir os objetivos didáticos.

Em nosso estudo, o software Cabri II mostrou-se um ambiente extremamente fértil para as atividades de exploração do ciclo trigonométrico, tais como os valores e sinais assumidos por seno e cosseno em cada quadrante, redução ao primeiro quadrante e simetrias. Para o trabalho de exploração utilizamos arquivos prontos, tanto no estudo da trigonometria no triângulo retângulo, quanto no ciclo trigonométrico.

O desenvolvimento das atividades com o “software” Graphmatica procurou facilitar a exploração do gráfico das funções a partir de suas representações algébricas, sem que o recurso da tabela fosse usado como intermediário. O Domínio, a Imagem e o Período das funções puderam ser observados e a ligação entre as duas representações — gráfica e algébrica — estabelecida. Foi bom perceber que as tarefas que preparamos estimularam os estudantes a investigarem propriedades das funções trigonométricas. Observamos que os alunos reagiram positivamente, algumas vezes até de forma eufórica, frente às descobertas.

Com relação ao contexto do “mundo experimental”, uma observação digna de nota é que todas as duplas, na atividade da “Roda com a Caneta a Laser” melhoraram o desenho quando o refizeram e, em geral, acertaram na terceira tentativa. Isto nos remete às idéias de Piaget, para quem o aluno aprende enquanto está resolvendo um problema e também com os próprios enganos.

Os alunos tiveram contato com alguns fenômenos periódicos e puderam observar a sua modelagem matemática por meio das funções seno e cosseno. Procuramos valorizar a trigonometria mostrando-a como uma das formas matemáticas de compreensão e interpretação dos fenômenos da Natureza. Não foi possível avaliar se a ligação entre fenômeno periódico e função que envolva seno ou cosseno pode ser estabelecida pelo aluno, já que nosso critério de avaliação foi a análise dos testes.

Foi curioso notar que nas primeiras construções do gráfico de um período da função cosseno os alunos sempre faziam o comentário: “é uma parábola”. Especulando sobre o porquê de tal afirmação (para nós totalmente imprevisível), pensamos que provavelmente os alunos tivessem procurado “encaixar” à nova situação seus conhecimentos anteriores sobre funções. Como as mais comumente estudadas por eles são as de 1ª e 2ª graus, que têm como gráfico uma reta ou uma parábola, acreditamos que no momento inicial do estudo, eles tentaram estender as representações já conhecidas para as demais funções e, a partir daí, concluíram que se o gráfico em questão certamente não era uma reta, então só poderia ser uma parábola. Observamos contudo que esse conhecimento anterior não foi um obstáculo didático uma vez que, logo em seguida, ao construírem mais um período do gráfico da função foi simples verificar qual o tipo de gráfico. Encontramos respaldo teórico para nossa afirmação no processo de equilíbrio de Piaget (discutido no cap.3, seção 3.2.). Quando o aluno depara-se com um problema e seus conhecimentos não são suficientes para solucioná-lo ele busca novas assimilações (por exploração e aprendizagem) até que possa resolver o referido problema.

Constatamos, com surpresa, que a análise dos sinais assumidos pelo seno ao longo dos quadrantes mostrou-se mais simples para os alunos que a dos sinais do cosseno. Acreditamos que a explicação para tal comportamento esteja na vida cotidiana, uma vez que em situações corriqueiras, tais como no uso de elevadores ou na manipulação de termômetros, encontra-se convencionalizado que os valores positivos são para cima e os negativos para baixo. No caso do cosseno no ciclo temos para a direita os valores positivos e para a esquerda os negativos, que é uma convenção estabelecida pela escola e somente usada para determinados conteúdos.

É importante salientar que os momentos de discussão que tivemos com os grupos (as institucionalizações) desempenharam papel relevante no estabelecimento das conclusões dos estudantes.

Outro fator que muito provavelmente trouxe reflexos positivos para nosso estudo foi a mudança no contrato didático. O trabalho de forma voluntária, permitindo tomadas de decisões, realizado em dupla, etc., que normalmente não faz parte da

relação professor-aluno, parece ter tido grande influência nos procedimentos e ações dos alunos que participaram do experimento.

Consideramos que a sequência didática que propusemos tenha privilegiado situações que permitiram ao aluno fazer o “jogo de quadros” — do geométrico para o funcional — e ainda possibilitado a utilização de múltiplas representações das funções, procurando estabelecer a ligação entre os diversos registros (algébrico, numérico e gráfico). Desta forma o estudo procurou, como aconselha Vergnaud, proporcionar ao aluno condições para a percepção dos invariantes, auxiliando-o a compreender o objeto matemático. Uma preocupação sempre presente foi a de trabalhar no campo conceitual das funções, provocando sua ampliação e dando ao aluno a oportunidade de ter vários contatos com o objeto, em diferentes situações. Neste sentido as funções seno e cosseno foram trabalhadas de diversas formas, tanto no “mundo experimental”, quanto no computador. Houve, de nossa parte, a intenção de levar os alunos a traçarem os gráficos no papel e lápis além de construí-los no computador. Apresentamos a eles diferentes tipos de papel, ora o quadriculado, ora a folha de sulfite simples modelo A4, ora um espaço limitado (retangular) no guia de estudos, para que efetuassem essas construções.

A presença do gravador, da filmadora e dos observadores exerceu influência sobre os alunos. Notamos que quando as duplas estavam sendo observadas apenas por nós, aparentemente demonstravam maior descontração e conversavam mais, porém, por exemplo, frente ao gravador falavam tão baixo que a maior parte das fitas ficaram inaudíveis.

7.3.Discussão e Conclusões

Nesta pesquisa objetivamos investigar se a aprendizagem, por meio de uma mesma sequência didática constituída de atividades no contexto do computador e no mundo experimental aplicada em dois grupos de alunos advindos de uma mesma população, sofre a influência da ordem de aplicação dos contextos.

A análise geral do desempenho dos alunos que participaram de nosso experimento apontou para um crescimento constante na formação e desenvolvimento dos conceitos, para os dois grupos experimentais, evidenciado a partir de significativo aumento no número de respostas corretas do Pré para o Pós-Teste. A aplicação da sequência didática mostrou o quanto foi proveitoso trabalhar nos dois ambientes, uma vez que observamos, no desenrolar do trabalho, que os alunos estabeleceram correspondências entre as tarefas apresentadas em cada contexto. Principalmente alunos do Grupo B, quando realizavam as atividades no computador, diversas vezes se referiam a ocorrências observadas no “mundo experimental”. Estamos convencidos de que, para o desenvolvimento do assunto abordado, segundo nosso tipo de sequência didática, os dois contextos foram necessários e complementares.

Fazendo uma síntese de nossas análises podemos afirmar que:

- 1) Na análise geral dos grupos observamos que o Grupo B foi o que atingiu o melhor desempenho no Pós-Teste (77,50%).
- 2) Na análise da variação de acertos do Pré para o Pós Teste e na análise da evolução da 1ª Parte para a 2ª Parte do experimento foi o Grupo B que apresentou maior taxa de variação de acertos (65%) e melhor evolução tanto na 1ª Parte, quanto na 2ª Parte.
- 3) Na análise de desempenho dos sujeitos observamos que para quinze dos dezesseis alunos da amostra houve acréscimo no número de questões certas do Pré para o Pós-Teste, mas esse aumento foi muito mais acentuado no Grupo B, além de ter ocorrido para todos os alunos do grupo.
- 4) Na análise quanto aos objetivos da sequência didática, a partir dos testes detectamos que o Grupo B novamente se saiu melhor, uma vez que superou o Grupo C em dois dos objetivos e em um igualou-se.
- 5) Na análise a partir dos itens (subdivisões das questões) o Grupo B apresentou melhores resultados que o C em 60% dos itens apresentados e em 20% igualou-se. Investigando a taxa de variação de acertos dos alunos nos itens, observamos que em todos eles a taxa de variação foi positiva e maior que a do Grupo C em 80 % dos itens, enquanto nos 20% restantes foi igual.

6) Na análise de erros observamos que as dificuldades apresentadas foram muito diferentes entre os grupos porém comuns intra grupo. No Pós-Teste os erros outrora apresentados pelo Grupo B foram, em sua maioria, erradicados, o que nos leva a concluir que houve avanço quanto às concepções dos alunos. É importante observar que novos erros surgiram, o que mostra a necessidade de reinvestimento no ensino com retomada do assunto. Para o Grupo C alguns dos erros mostraram-se resistentes. Como ambos os grupos passaram pela mesma sequência tínhamos a expectativa de que não haveria discrepância quanto à erradicação de erros. Este resultado levou-nos a levantar a hipótese de que, por serem tão diversas as dificuldades dos alunos de cada grupo, o fator escolaridade pode ter interferido no experimento além do que havíamos previsto e que alguns erros e procedimentos do Grupo C podem ter ocorrido por interferência de obstáculos didáticos.

As conclusões do experimento, respaldadas pelas análises a que procedemos no capítulo anterior e que resumidamente apresentamos acima, são que nesta pesquisa, a ordem de introdução por contextos interferiu na aprendizagem. Seja qual for o aspecto a partir do qual tenhamos observado, o grupo de alunos que teve maior sucesso foi o que passou primeiro pelas atividades construídas no contexto do “mundo experimental” e depois pelas do computador (Grupo B). Nesse sentido, nosso estudo sugere que o aprendizado no contexto computacional torna-se mais eficiente quando:

- a) o aluno não teve contato anterior com o assunto,
- b) é precedido por manipulações concretas em situações menos comprometidas com o formalismo.

A primeira sugestão encontra reforço na observação de Gomes Ferreira (1997) que constatou em sua pesquisa a possibilidade de que conhecimentos prévios correlatos possam atuar como obstáculos didáticos no atual processo de aprendizagem do aluno.

Quanto à segunda sugestão, é reconhecido na Psicologia Cognitiva a necessidade do aluno de estabelecer uma ligação com a vida cotidiana e seus conceitos espontâneos para chegar ao conhecimento científico (Vygotsky, 1993, Nunes, 1992). Em nosso estudo, o aprendizado do assunto funções trigonométricas, que é normalmente ensinado de forma

teórica exigindo alto nível de abstração por parte do estudante, foi beneficiado pela concretização. Esta conclusão encontra respaldo nos relatos de Nunes et al (1993) sobre a importância de se introduzir o aluno em uma situação semântica para facilitar a aprendizagem.

A partir dos resultados da análise de erros e procedimentos constatamos uma melhora na eficiência na resolução de problemas, em todo o grupo experimental e em particular no Grupo B. Justificamos essa conclusão baseados no fato dos alunos terem feito uma transferência de conhecimentos de um contexto para o outro, detectado por meio do uso de um tipo de raciocínio ou técnica de resolução de um problema anterior aplicados a outros, o que resultou em melhoria na capacidade de solucionar as questões apresentadas. Sentimo-nos capazes de garantir tal afirmação principalmente porque em momento algum os testes apresentaram questões idênticas a aquelas trabalhadas durante as atividades de cada contexto. O fato dos alunos solucionarem os problemas sem terem feito tarefas, lições de casa ou ainda exercícios de fixação, é um forte indício que eles deram sentido às funções seno e cosseno.

Constatamos por meio da análise dos tipos de erros (cap.6, seção 6.9.) e da resolução dos itens que os alunos de toda a amostra apresentaram mudanças no procedimento de resolução dos problemas incorporando novas técnicas teste a teste. Um exemplo que respalda tal afirmação é que, enquanto no Pré-Teste os alunos chegam a conclusões sobre os gráficos a partir da análise de pontos isolados das funções, no Pós-Teste, essas conclusões passam a ser alcançadas a partir de parâmetros presentes na expressão algébrica dessas funções.

Outra conclusão importante a que chegamos a partir da análise dos acertos de cada sujeito e sua evolução teste a teste, é que o trabalho em dupla mostrou-se extremamente produtivo e fundamental para atingir os objetivos. A opção de trabalharmos com pares de alunos foi proposital e respaldada na teoria de aprendizagem de Vygotsky. Pudemos observar que é realmente possível agir na zona de desenvolvimento proximal dos alunos, de forma a impulsionar a aquisição de conhecimentos. No nosso experimento verificamos que em algumas das duplas nas quais, no Pré-Teste um dos alunos se saía muito melhor que o outro, no Pós-Teste o

desempenho de ambos passou a ser equivalente e em outras, em que os alunos acertaram um número próximo de questões observamos que no Pós-Teste o número de questões certas aumentava para ambos. Estamos convencidos que é necessário alertar os educadores para que permitam aos estudantes a exploração e discussão em conjunto das situações, problemas e atividades propostas. Desta forma estarão viabilizando a aplicação das idéias de Vygotsky.

7.4. Considerações Finais

Em nosso entender a sequência didática desenvolvida para o estudo, que foi nossa ferramenta para responder a questão de pesquisa, pode ser considerada como uma contribuição para a Educação Matemática. A utilização dos contextos do “mundo experimental” e do computador mostrou-se uma possibilidade viável para o professor na sua busca de ambientes didáticos para criar situações que facilitem o entendimento e o processo de construção do conhecimento. Pensamos que a sequência foi um importante subproduto, uma vez que privilegiou a resolução de problemas, pondo o aluno em uma posição de ação e de tomada de decisões. Confirmamos, na prática, que a formação de conceitos tem na resolução de problemas sua origem e uma parte fundamental no desenvolvimento, como defende Vergnaud.

A pesquisa foi feita fora da sala de aula, portanto em um ambiente artificial para o aluno. Além disso as sessões aconteciam com apenas uma dupla, não havia o compromisso de atribuição de nota e o tempo utilizado não foi o que normalmente se despenderia na escola. Isto significa que eventuais utilizações das atividades, tanto as do contexto do computador quanto do “mundo experimental”, que porventura venham a ser feitas por educadores, necessitarão adaptações, e estas poderão levar a diferentes resultados. Salientamos que é indispensável que o professor proceda sempre à organização das idéias dos alunos e à sistematização das conclusões.

Para o desenvolvimento da sequência, no tocante ao contexto do “mundo experimental”, foi necessário inventar equipamentos que permitissem a concretização das situações. Esperamos que esses possam servir de exemplos de como, a partir de montagens simples, o professor pode criar atividades que sejam interdisciplinares e

ainda introduzam conceitos matemáticos. Todavia é interessante chamar a atenção para o tempo que sempre se consome na compreensão do funcionamento dos equipamentos. Cabe ao mestre decidir se é vantajoso despende tal tempo para trabalhar com seus alunos o conteúdo alvo.

Devemos, ainda, salientar que nossa amostra foi pequena e realizada em uma escola particular. Futuras pesquisas poderiam ser feitas com um número maior de alunos e tendo várias duplas trabalhando simultaneamente nos ambientes de laboratório e/ou com alunos de escolas públicas. Sugerimos que sejam feitos testes de retenção ou acompanhamento do desempenho dos estudantes na trigonometria, após a participação em pesquisas. Entrevistar os alunos ao término das sequências de introdução de funções via computador e “mundo experimental” também pode trazer contribuições valiosas. Naturalmente tais procedimentos, que não foram incluídos em nosso estudo dadas as limitações e escolhas que são obrigatórias a toda pesquisa, trariam novas informações e fariam avançar os conhecimentos sobre a aprendizagem com o uso de modernas tecnologias e em contextos alternativos.

Acrescentamos que a escolha da escala dos gráficos, que foram construídos pelos alunos durante o desenvolvimento das atividades no Graphmatica, foi feita de forma meticulosa para que pudéssemos exercer algum controle sobre o que eles estavam vendo na tela. O que nos levou a este procedimento foi o tempo limitado para a realização do experimento, que não permitiria a abordagem das distorções ligadas à escala em um “software” gráfico. Nossos esforços concentraram-se em levar os alunos a observarem na tela gráficos semelhantes aos que se constroem na sala de aula. Para futuras pesquisas seria muito interessante acrescentar atividades que exigissem mudanças de escala e outras em que o aluno pudesse explorá-las livremente. Sugerimos estudos nos quais os alunos possam construir os arquivos no Cabri para, em seguida, trabalhar a trigonometria no triângulo retângulo e no ciclo trigonométrico. Por fim, pesquisas no contexto do computador poderiam ser feitas com alunos que já possuíssem conhecimentos dos “softwares” nelas usados, de forma que as atividades pudessem ser menos formais e dirigidas do que foram algumas das nossas.

Pretendemos prosseguir na pesquisa, continuando em contato com os alunos para os quais aplicamos nossa sequência didática. Alguns deles estarão cursando o 2^o

ano (quando o conteúdo trigonométrico será apresentado de forma tradicional em sala de aula) e outros, já no 3º ano, deverão aplicar seu conhecimento no estudo da Física, além da Matemática, que o utilizará no assunto Números Complexos.

Por último, mas não menos importante, gostaríamos de afirmar publicamente que a pesquisa causou-nos um enorme crescimento e valorização do papel de educador. No desenvolvimento das sessões foi possível observar muito do que nos escapa em sala de aula, principalmente no tocante a quanto um aluno motivado pode ir além do que prevemos. As reflexões que fizemos ao longo da pesquisa nos levam a crer que todo professor poderia ser também um pesquisador de forma a contribuir tanto para seu próprio aprimoramento quanto para o das técnicas de ensino. Finalizando, apresentamos a expectativa de que esta pesquisa tenha sido, para nós, o primeiro passo no sentido de atingir um objetivo maior: ensinar Matemática levando o aluno a construir e dar significado ao seu conhecimento.

**Capítulo VIII:
Referências
Bibliográficas**

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AABOE, A. - *“Episódios da História Antiga da Matemática”* - trad. de J.B. Pitombeira de Carvalho - Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 1984.
- AUSUBEL, D.P. - *“Educational Psychology: A cognitive View”* - Ed. Holt, Rinehart and Winston, New York, U.S.A., 1968.
- ALMOULOUD, S. Ag. - *“Didactique des Mathématiques: Concepts Didactiques et Problèmes de Méthodologie de Recherche”* - Caderno PROEM, PUC/S.P., 1994.
- ARSAC, G. - *“L’ Origine de la Demonstration: Essai d’ Epistémologie Didactique”*, Revista Recherche en Didactique des Mathématiques (RDM), vol 8, nº 3, pp 267-312, Ed. La Pensée Sauvage, France, 1987.
- ARTIGUE, M. - *“Epistémologie et Didactique”*, Revista Recherche en Didactique des Mathématiques (RDM), vol 10, nº 2, Ed. La Pensée Sauvage, France, 1990.
- BACHELARD, G. - *“La Formation de l’ Esprit Scientifique”* - Ed. J. Vrin, France, 1965.
- BELL, E.T.- *“The Development of Mathematics”*, 2ª edition. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, U.S.A., 1945.
- BONGIOVANNI, V; VISSOTO, O.R.; LAUREANO, J.L.- *“Matemática e Vida”*, 2º Grau - Volumes:1, 2 e 3, Ed. Ática, São Paulo, 1993.
- BORBA, M. - *“Student’s Understanding of Transformation of Functions Using Multi-representational Software”*, Tese de Doutorado, Cornell University, Ithaca, New York, 1993. (Publicada pela Associação de Prof. de Matemática de Portugal, 1995).
- _____ *“Um Estudo de Etnomatemática: sua Incorporação na Elaboração de uma Proposta Pedagógica para o “Núcleo-Escola da Vila Nogueira- São Quirino”*, Dissertação de Mestrado, UNESP / Rio Claro, 1987.
- BOURBAKI, N. - *“Elementos de História de las Matemáticas”*, Alianza Editorial S.A., Madrid, 1976.
- BOYER, C. - *“História da Matemática”* - trad. de Elza Gomide, Ed. Edgard Blücher Ltda, São Paulo, 1974.

- BRIGUENTI, M. J. L. - *“Ensino e Aprendizagem da Trigonometria: Novas Perspectivas da Educação Matemática”*- Dissertação de Mestrado - UNESP/ Rio Claro, 1994.
- BROUSSEAU, G. - *“Les Obstacles Épistémologiques et les Problèmes en Mathématiques”*, RDM, vol. 4, nº 2, 1983.
- _____ *“Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques”*, RDM, vol 7 / 2, pp. 333-115, 1986.
- _____ *“Le Contrat Didactique: le Milieu”*- RDM, vol.9 / 3, pp 309-336, 1988.
- CHACE, A. B. - *“The Rhind Mathematical Papyrus”*- volume 8 - Colection Classics in Mathematics Education of The National Council of Teachers of Mathematics - NC Classics TM 2ª Edição, U.S.A., 1986.
- CHEVALLARD, I.; JOHSUA, M. A. - *“La Transposition Didactique”* - Édition La Pensée Sauvage, France, 1991.
- CLOSE, G. S. - *“Children’s Undertanding of Angle at the Primary/Secondary Transfer Stage”*.The Departament of Mathematical Sciences and Computing, Borough Roal, London , SEI, OAA, 1982.
- CONFREY, J. - *“The Concept of Exponential Functions: A Student’s Perspective”* - em *“Epistemological Foundations of Mathematical Experience*, Ed. L.Steffe, New York: Springer, U.S. A.,1991.
- CONFREY, J.; SMITH, E. ;& Carroll, F. - *“Function Probe[®] - Computer Program”* - Intellimation Library for the Macintosh, Santa Bárbara, CA , U.S.A., 1991.
- COTRET, S. - *“Une Expérimentation sur Les Conceptions de La Notion de Fonction à Travers Les Représentations Graphiques du Mouvement”*, Séminaire de Didactique des Mathématiques et de L’ Informatique, 1986-87 et 1987-88, Institut Fourier, France, 1988.
- DOUADY, R. - *“Jeux de Cadres et Dialectique Outil - Objet”* - RDM vol 7, nº 2, 1986.
- DREYFUS,T. *“On the Status of Visual Reasoning in Mathematics and Mathematics Education”* - Proceedings of PME 15, Itália, 1991.
- DUVAL, R. *“Graphiques et Équations: L’ Articulation deux Registres”* Annales de Didactique et de Sciences Cognitives 1, p.235-253, IREM de Strasbourg, 1988.

- EVES, H. - *"Introdução à História da Matemática"*- trad de Hygino H. Domingues, Editora da UNICAMP, 1995.
- EISENBERG, T.; DREYFUS, T. - *"Spatial Visualization in the Mathematics Curriculum. Focus on Learning Problems in Mathematics"* - Vol. 11, nº 1, 1989.
- FUVEST- Fundação Universitária para o Vestibular - *"Manual do Candidato"*, 1996.
- FREUDENTHAL, H. - *"Mathematics as an Educational Task"* - D. Reidel Publishing Company, Holland, 1973.
- GIOVANNI, J.R.; BONJORNO J.R. - *"Matemática 2"*, Ed. F. T. D., São Paulo, 1992.
- GEERTZ, C. - *"The Interpretation of Cultures: Selected Essays"* - New York Basic Books, U.S.A., 1973.
- GOLDENBERG, E.P. et al - *"DynaGraph - Computer Program"* - Academic Version, Department of Education, Cornell University, Ithaca - NY, U.S. A., 1992.
- GOMES FERREIRA, V. - *"Exploring Mathematical Functions through Dynamic Microworlds"*- Tese de Doutorado, Institute of Education, University of London, 1997.
- GOUVÊA, F.A.T.; OLIVEIRA, N.; COSTA, N.M.L.; ALMOULOU, S. - *"Estudo das Concepções dos Alunos sobre o Conceito de Função"*, Revista da Universidade de Taubaté - Ano II, Volume 2 - nº 1, pp 51-64, 1996.
- HEATH, T. L.- *"The Thirteen Books of Euclid's Elements"*_Traduzido para o inglês, do texto de Heiberg, Volume I , Dover Publications, Inc. New York, 1956.
- HOYLES, C.; HEALY, L. - *"Visualisation, Computers and Learning"*, Final Report to the Economic and Social Research Council, Institute of Education, University of London, pp.1-14 e apêndices,1996.
- _____ *"Logo, Computers and Math."*, Institute of Education, London, 1991.
- KENNEDY - E. S. - *"Tópicos de História da Matemática para Uso em Sala de Aula"*, volume 5: Trigonometria, trad. de Hygino H. Domingues - Ed. Atual Ltda, 1994.
- KLINE, M. - *"Mathematics in Western Culture"*, Oxford University Press, New York, 1953.
- LABORDE, C. - *"Solving problems in computer based geometry environments: The influence of the features of the software"*, Revista ZDM nº 4, 1992.

Anexo 2. 2. 1.

- LABORDE, C; LABORDE, J.M. - "*Micromondes Intelligents et Environnement d' apprentissage*", Laboratoire de Structures Discrètes et de Didactique CNRS (I.M.A.G.), France, 1990.
- LAVE, J. - "*Cognition in Practice*" - Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
- LIMA, E. L. - "*Meu Professor de Matemática e outras histórias*" - I.M.P.A., Vitae, Rio de Janeiro, 1991.
- LEFORT, J. - "*Pour un Enseignement Specificque de La Mathematique dans les C.E.T* - Institut de Recherche pour L'enseignement des Mathématiques, Strasbourg, 1975.
- LORIA, G. - "*Storia delle Matematiche dall' Alba della Civiltà al Tramonto del Secolo XIX*", Ed. Ulrico Hoepli, Milano, 1982.
- MACHADO, A. - "*Matemática Temas e Metas*" Volume 2 - Trigonometria e Progressões, Ed. Atual, São Paulo, 1986.
- MAGINA, S. - "*Investigating the Factors which Influence the Child's Conception of Angle*" - Tese de Doutorado, Institute of Education, University of London, 1994.
- MENDES, M. H. - "*O Conceito de Função: Aspectos Históricos e Dificuldades Apresentadas por Alunos na Transição do 2º para o 3º Grau*" - Dissertação de Mestrado - PUC/ Rio, 1994.
- NUNES, T. - "*Cognitive Invariants and Cultural Variation in Mathematical Concepts*", International Journal of Behavioral Development, Vol. 15, n^o 4, pp 435-455, 1992.
- NUNES, T.; SCHLIEMANN, A. & CAHARRER, D. "*Street Mathematics and School Mathematics*", Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- NUNES, T.; BRYANT, P. "*Children Doing Mathematics*", Blackwell - Publishers, London, 1996.
- OLIVEIRA, N. - "*Conceito de Função: uma Abordagem do Processo Ensino-Aprendizagem*" - Dissertação de Mestrado - PUC /São Paulo, 1997.
- PIAGET, J. - "*Biology and Knowledge*", em Gruber, H.E. e Vomech, J.J. "*The Essencial Piaget*", Routledge and Kegan Paul Ltda, London, 1977.
- _____ "*A Formação do Símbolo na Criança*" - Ed. Guanabara Koogan, Rio de Janeiro, 1978.

- _____. *"Play, Dreams and Imitation in Childhood"*, Routledge and Kegan Paul Ltda, London, 1961.
- _____. *"Mental Image in the Child"*, Routledge and Kegan Paul Ltda, London, 1971.
- ROBERT, A. - *"Reflexions sur L'Analyse des Textes D'Exercices des Manuels"*- Cahier de Didactique des Mathematiques, I.R.E.M, Paris VII nº 51, maio 1988.
- RORTY, R. - *"Contingency, irony, and solidarity"*, Cambridge University Press, England 1989.
- ROTH, W. - *"Where Is the Context in Contextual Word Problems?"*- Revista Cognition and Instruction, vol. 14, nº 4, 1996.
- SAXE, G.B. - *"Culture and Cognitive Development: Studies in Mathematics Understanding"* - Hillsdale, N. J. Lawrence Erlb Associates Inc., New Jersey, U.S.A. ,1991.
- SCHWARZ, Osmar - *"Sobre as Concepções de Função dos Alunos ao Término do 2º Grau"* - Dissertação de Mestrado - PUC / São Paulo, 1995.
- SERRÃO, J. - *"Dicionário de História de Portugal"*, Iniciativas Editoriais, Porto, 1971.
- SIERPINSKA, A. - *"Obstacles Épistémologiques Relatifs a la Notion de Limite"*- RDM vol. 6, 1, pp 5-67, 1985.
- SCHOOL MATHEMATICS STUDY GROUP - *"Matemática - Curso Colegial, vol.II"* - tradução da série Mathematics for High School, Yale University Press, New Haven, U.S.A., EDART - Livraria Editora Ltda, São Paulo, 2ª edição, 1966.
- SECRETARIA DA EDUCAÇÃO DO ESTADO DE SÃO PAULO, Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas (CENP) - *"Proposta Curricular para o Ensino de Matemática"*; 2º Grau, 3ª Edição, São Paulo, 1992.
- SMITH, D.E. - *"History of Mathematics"*, vol. I, Dover Publications, INC. New York, 1958.
- STRUİK, D.J. - *"História Concisa Das Matemáticas"* - Trad. de J.C. Santos Guerreiro, Ed. Gradiva, Lisboa, 1992.
- VAN HIELE, P. - *"Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education"*, Academic Press Inc., London, 1986.
- VERGNAUD, G. - *"Problem Solving and Concept Development in Learning of Mathematics"* E. A.R.L.I., Second Meeting, Tübingen, September, 1987.

_____ "*La Théorie des Champs Conceptuels*" RDM, vol. 10 / **2.3.**, pp 133-170, 1990.

_____ "*Epistemology and Psychology in Mathematics Education*" em "Mathematics and Cognition", Nesher, P. e Kilpatrick, J., pp 14 -30, Cambridge University Press, 1994.

VYGOTSKY, L.S. - "*Formação Social da Mente - O Desenvolvimento dos Processos Psicológicos Superiores*" - Trad. de J. Cipolla Neto e outros, Editora Martins Fontes, 4ª Edição, São Paulo, 1991.

_____ "*Pensamento e Linguagem*" - trad. de J. L. Camargo, Editora Martins Fontes, São Paulo, 1993.

WATANABE, R. G. - "*Seno de 30 é um meio ?*"- Revista do Professor de Matemática - nº 30, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 1996.

WENZELBURGER, E. - "*Cápsulas Gráficas para Microcomputadoras en Matemáticas*" - Memória de la 3ª Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigadores en Matemática Educativa, Costa Rica, 1989.

WENZELBURGER, E. - "*Computers Graphics for the Acquisition of Function Concepts*" - Proceedings of PME 14, México, 1990.

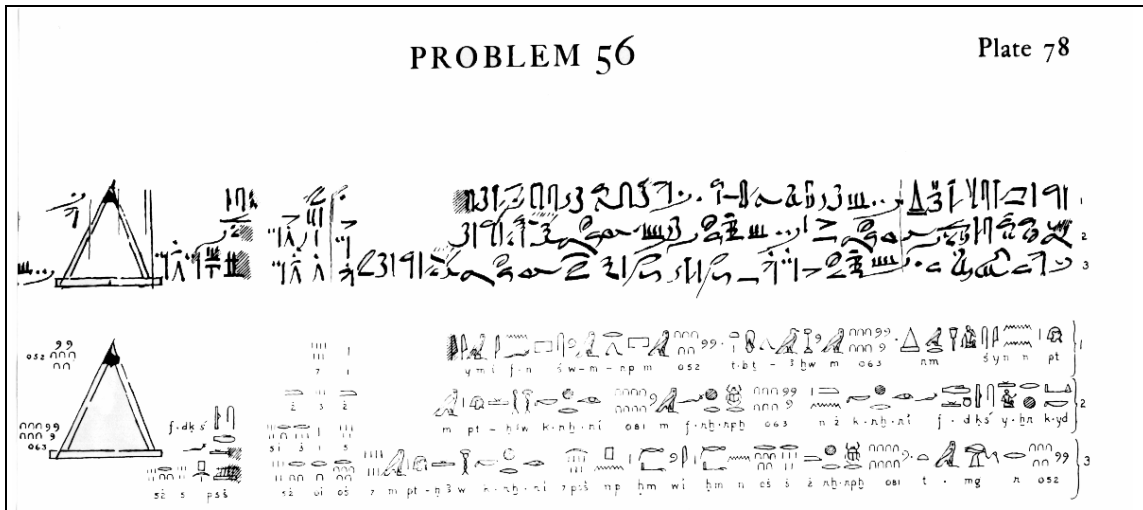
WENZELBURGER, E. - "*Graphical Environment for the Constuction of Function Concepts*" - Proceedings of PME 15, Vol. III, pp. 332-339, Itália, 1991.

WENZELBURGER, E. - "*The Learning of Trigonometric Functions in a Graphical Computer Environment*" - Proceedings of PME 16, Vol. III, pp. 106-113, 1992.

YOUSCHKEVTCH - "*Le Concept de Fonction Jusqu'au Milieu du XIX^e siècle*", Fragments d' Histoire des Mathématiques, Brochure A.P.M.E.P. nº **41**, trad: Jean- Marc Bellemin, pp 7 - 67, 1981.

Problemas do Papiro Rhind relativos ao Seqt

No Papiro Rhind são apresentados cinco problemas relativos às medidas de pirâmides, dos quais quatro fazem menção ao seqt. São os problemas 56 a 60, que estão nas pranchas 78 a 82, do Papiro. Reproduzimos o problema 56, retirado de Chace (1986, pág.122-123). A prancha apresenta as duas linguagens da época; a primeira a hierática, que era a popular e a segunda hieróglifos, que era a escrita dos reis e escribas. Abaixo acrescentamos a tradução para o inglês.



Problem 56

tp n nyš mr 360 m wh'-tb-t 250 m pr-m-wš n-f imy² dy · k rh · y
Example of reckoning a pyramid; 360 in the ukha-thebet¹, 250 in the per-em-us¹ to it therein; cause thou that know I

škd · f
the seked¹ of it.

ir-hr · k 2 n 360 hpr-hr · f m 180 ir-hr · k w'h-tp m 250 r gm-t 180 hpr-hr 2 š 50
Make thou 1/2 of 360; becomes it : 180. Make thou the operation on 250 for the finding of 180; there becomes 1/2 1/2 1/2

n mh iw mh pn³ [m] šsp 7 ir-hr · k w'h-tp m 7
of a cubit. Is cubit this : palm 7. Make thou the operation on 7.

1	7
2	3 2
5 ⁴	1 3 5
50	10 25.

škd · f šsp 5 25
The seked of it is palm 5 1/2.

¹ See volume 1, pages 37-38. These words mean, respectively, the side of the base, the altitude, and the ratio of the two (which is, as Peet says, the batter of the face of the pyramid). Gunn (page 134) has suggested the probable literal meanings of these terms. The wh'-tb-t is *what the base requires* (literally *sole*, as the word-sign, a sandal, indicates). The pr-m-wš is *what goes up from the ws* (a chamber beneath the pyramid). One wonders whether the vertical line at the right of the figure represents this. The word pr-m-wš may be the origin of the Greek *πυραμύς*. The škd is the *turning or deflection* from the vertical.

² The phrase n-f imy found in Problems 56-60 is simply an involved method of expressing the possessive: *its* per-em-us. Apparently, imy is an adverb derived from the preposition m, *in*. So far as we know it is found only in this construction. Though differing in form it seems to resemble in meaning the common adverb *in*.

³ This is a cursive form of pn which occurs also in Problem 58 and twice in Problem 67. A certain resemblance between this sign and m may have caused the scribe to omit the preposition which we have placed after pn. For another possible emendation, making this sentence like those beginning with lw lr in Problems 58 and 62, see Gunn, page 134. As Gunn suggests, this statement is included to show that the unit is the royal cubit and not the short cubit of 6 palms.

⁴ Fractional dot omitted.

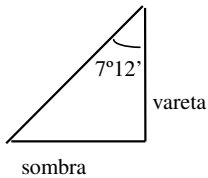
Comentário:

A Medida da Circunferência da Terra.

Eratóstenes de Cirene, para calcular a medida da circunferência da Terra usou as seguintes informações:

- 1- No solstício de verão em Assuan uma vareta fincada no solo não faz sombra ao meio dia.
- 2- A distância entre Assuan e Alexandria é de aproximadamente 793 km (na unidade da época: 5000 stadium).
- 3- Alexandria e Assuan ficam aproximadamente no mesmo meridiano.
- 4- A cidade de Assuan fica no Trópico de Câncer.

Se fincarmos uma vareta verticalmente em Alexandria, no mesmo dia e no mesmo horário do solstício de verão em Assuan, podemos calcular o ângulo formado entre a vareta e a sua sombra.

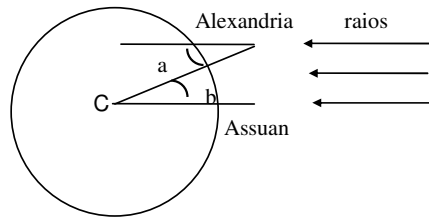


Relacionando estes tamanhos chegou ao ângulo de $7^{\circ}12'$, provavelmente com o uso da cotangente,

Seja C o centro da terra

\hat{a} = ângulo entre a vareta e a sombra em Alexandria

\hat{b} = ângulo com vértice C e com lados que são os prolongamentos das varetas fincadas em Alexandria e Assuan.



Os raios do sol são aproximadamente paralelos, então \hat{a} e \hat{b} são ângulos alternos internos e concluímos que $\hat{a} = \hat{b} = 7^{\circ}12'$

Então por uma regra de três simples temos :

$7^{\circ}12'$	→	793 km
360°	→	x

$$x = \frac{360^{\circ} \cdot 793}{7^{\circ}12'} = 50.793 = 39650 \text{ km}$$

Então a circunferência da Terra é aproximadamente 40000 km e o raio da Terra é de 6310 km. Na unidade de medida da época :

$7^{\circ}12'$	→	5000 stadium
360°	→	x

$$x = \frac{360^{\circ} \cdot 5000}{7^{\circ}12'} = 50.5000 = 250000 \text{ stadium}^{[1]}.$$

1. As informações deste Anexo foram baseadas em BOYER, 1974.

Tábuas Trigonométricas

Como já discutimos, a primeira relação para os astrônomos foi entre a corda e o arco em um círculo de raio arbitrário. A escolha do raio era importante para facilitar as aproximações dos comprimentos das cordas. Um exemplo, era o 60.

A 1ª tábua de cordas parece ter sido feita por Hiparco, mas foi perdida e não temos conhecimento de sua extensão ou grau de acuidade. A próxima tábua da qual tivemos uma boa evidência foi a de Menelau (100 d.C.), também perdida, embora seu trabalho “*Sphericas*” mostre o uso da função corda.

A 3ª tábua de cordas foi a de Ptolomeu, de grande interesse para nós, por conter as explicações sobre seu método de cálculo. Ele dividiu o círculo em 360 partes e o diâmetro em 120 partes iguais, provavelmente por 120 ter muitos fatores primos, e pelo antigo uso do valor 3 para π . Usou frações sexagesimais, o raio consistindo de 60 moirai, cada moira de 60 minutos e assim por diante. O **moira** foi usualmente traduzido como **grau** (símbolo $^{\mu}$, onde μ é o início da palavra moira).

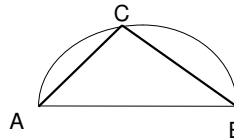
A tabela de Ptolomeu relaciona cada arco α com sua respectiva corda (simbolizada por $\text{crd } \alpha$). A $\text{crd } \alpha$ definida como o comprimento da corda que corresponde a um arco de α graus em um círculo de raio 60. O cálculo das cordas, nas tábuas de Ptolomeu dependia de quatro princípios:

I Dos lados de um polígono inscrito de 3, 4, 5, 6 e 10 lados calculamos:

$$\text{crd } 36^{\circ} = 37^{\mu} 4'55'', \text{ crd } 72^{\circ} = 70^{\mu} 32'3'', \text{ crd } 90^{\circ} = 84^{\mu} 51'10'', \text{ crd } 60^{\circ} = 60^{\mu}, \text{ crd } 120^{\circ} = 103^{\mu} 55'23''$$

No semicírculo como o da figura $BC^2 + CA^2 = AB^2$

e então $\text{crd } (180^{\circ} - 36^{\circ}) = \text{crd } 144^{\circ} = 114^{\mu} 7'37''$



II **Teorema de Ptolomeu:** Em um quadrilátero inscritível a soma dos produtos dos lados opostos é igual ao produto das duas diagonais.

III Podemos calcular a corda da metade do arco dada a corda do arco, isto é, dada a $\text{crd } 12^{\circ}$ é possível encontrar a de 6° e então a de 3° e assim por diante.

IV Por interpolação é possível aproximar a $\text{crd } \frac{1}{3}\alpha$, quando $\text{crd } \alpha$ é conhecida.

Com os princípios, Ptolomeu calculou cordas de ângulos por aproximações. Encontrou o valor da $\text{crd } 1^{\circ} 0'$ como igual a $1^{\mu} 2'50''$, com o que calculou $\frac{1}{2} \text{ crd } 1^{\circ}$ (ou $\text{sen } 30'$) como $0^{\mu} 31'25'' = 0,0087268$, que difere do valor atual (0,0087265) só na sétima casa.

A primeira tábua de senos, e não de cordas, surgiu com os hindus. Nos Siddhantas aparece com os senos dados para ângulos em graus, até 90°. Para relacionar o comprimento do arco com o seno usavam para π o valor $\sqrt{10}$, tanto que este ficou conhecido como o valor hindu para π .

Tábuas de senos aparecem no **Surya Siddhanta** (400 d.C.) e nos trabalhos de Aryabhata (510 d.C.). Estas últimas foram reproduzidas por Brahmagupta e Bhaskara, em 1150, no Siddhanta Siromani e apresentam o método, usado na época, de construção da tábua de senos para qualquer grau.

Reproduzimos, ao lado, pequena porção da tábua do Surya Siddhanta, a mesma de Aryabhata. Nela notamos o grau de acuidade. *O valor atual, convertido para a unidade usada na época, o minuto.

Arco	Seno	Valor Atual *
3°45'	225'	224.84'
7°30'	449'	448.72'
11° 15'	671'	670.67'
15°	890'	889.76'

O método de trabalho de Aryabhata era tomar o sen 3° 45' igual ao arco de 3° 45' e com ele encontrar os senos dos múltiplos deste ângulo usando regra de recorrência contida no

Surya: $\text{sen} (n+1)\alpha = \text{sen } n\alpha + \text{sen } \alpha - \text{sen} (n-1)\alpha - \frac{\text{sen } n\alpha}{\text{sen } \alpha}$, correta exceto pelo último termo.

Falemos dos métodos árabes para cálculo de tábuas. No início houve “na Arábia dois tipos de trigonometria, a grega de cordas como no Almagesto e a hindu de senos”. (BOYER, 1974 - pág. 172) mas, pouco a pouco, o sistema hindu se firmou e os árabes usaram as tabelas e cálculos hindus. Posteriormente porém, desenvolveram métodos originais e acrescentaram novas fórmulas e funções à trigonometria. Um dos mais conhecidos desses métodos foi o de Mîram Chelebî (1520) em seu comentário no Ulugh Beg (1435). Sugeriu uma forma de cálculo similar à de Ptolomeu, e uma segunda envolvendo aproximadamente a solução de uma equação cúbica da forma : $ax - b = x^3$.

Em relação aos europeus, um dos últimos calculistas da Idade Média e do pré Renascimento foi Regiomontanus, matemático que, embora tivesse grande destaque e renome, usava métodos que não eram novos. Na verdade, desde o tempo de Ptolomeu até a invenção dos modernos métodos baseados em séries ou sequências numéricas, nada substancialmente novo foi produzido.

Quanto às tábuas impressas, vale mencionar que elas introduziram o raio dividido de forma decimal. Em 1533 foram publicadas por Apianus tábuas contendo as seis funções trigonométricas baseadas em um arranjo com semiquadrantes. Em 1551 publicou-se a tábua de Rhaeticus, calculando as funções trigonométricas de 10' em 10' com sete casas decimais, estendida por Viète para qualquer minuto (1579).

Apenas no final do século XVIII o uso do sistema métrico e da divisão centesimal de um ângulo foi encontrando simpatizantes. No entanto, só no final do século XIX esta idéia tornou-se forte entre os matemáticos, quando a escola francesa liderava^[2].

Definições de Ângulos

As definições apresentadas a seguir estão em HEATH (1956) e ilustram o pensamento grego da Antiguidade.

1. Definição de Apollonius

“Ângulo é uma “contração” de uma superfície ou de um sólido em um ponto sobre uma semi-linha, onde novamente um ângulo deve ser formado por uma semi-linha ou superfície” (pág.176).

2. Definição de Plutarch

“Ângulo deve ser a primeira distância sob a quebra (ou deflexão) de superfícies” (pág.177).

3. Definição de Carpus de Antioch

“Ângulo é uma quantidade chamada de distância entre linhas ou superfícies contendo-a” (pág.177).

Esta terceira definição foi a precursora da noção de ângulo como uma rotação. As definições mais avançadas e amplamente aceitas foram feitas por Euclides, referindo-se a ângulos no plano e estão no texto do capítulo 2.

Além dessas definições, vale lembrar que Aristóteles associou ângulo à idéia de **“deflexão”** ou **“quebra”** de linhas, ou seja, *“o movimento com que se abandona uma linha que se descrevia, para seguir outra”*.

Apresentamos a seguir visões modernas de definições, coletadas por CLOSE(1982).

A. Definição de David Hilbert, 1972.

“Seja α um plano e h, k duas semi-retas quaisquer distintas com origem em $O \in \alpha$ e em retas distintas. O par de semi-retas h, k recebe o nome de ângulo e é denotado por (h, k) ou por $\sphericalangle(h, k)$ ” (pág. 10).

É uma definição estática de ângulo em termos de semi-reta e está muito próxima do espírito euclidiano. Hilbert também excluiu de sua definição os ângulos nulos, retos e os reflexos, estes últimos também chamados ângulos rasos.

B. Definição de Gustave Choquet, 1969.

“Para todo $O \in \mathbb{R}^2$, uma rotação sobre O recebe o nome de ângulo com vértice em O . Se (A_1, A_2) é um par de semi-retas de origem em O , a rotação sobre O levando A_1 para A_2 é o ângulo formado pelo par; e se escreve $A_1 A_2$ ” (pág. 10).

2. Este anexo teve por base, além dos autores mencionados no texto, SMITH (1958) e BOURBAKI (1976).

Anexo 2. 3. 1.

Usa a definição dinâmica de ângulo como rotação no plano \mathbb{R}^2 . Sua abordagem baseia-se no conceito central de isometrias. Chama-se rotação o conjunto das isometrias lineares do plano que preserva orientação e é um grupo comutativo.

Nesta definição de forma diversa da de Hilbert ou da antiga definição de Euclides, os ângulos nulo, reto e reflexo estão incluídos e ângulos com vértices distintos são comparados por translação. Ângulos reflexos aparecem como um par de semi-retas e como ângulos interiores de polígonos côncavos.

A Proposta Curricular e os Conteúdos Programáticos.

Reproduzimos abaixo Quadros apresentados na Proposta Curricular com a distribuição dos conteúdos de acordo com o número de aulas semanais de matemática de cada escola.

Quadro I		
Opção de distribuição de conteúdos para escolas com 2 ou 3 aulas semanais ao longo das três séries do 2º Grau.		
1ª Série	2ª Série	3ª Série
<ul style="list-style-type: none"> - Função - <u>Trigonometria no triângulo</u> - Potências e Expoentes 	<ul style="list-style-type: none"> - Análise Combinatória - Probabilidade - Geometria 	<ul style="list-style-type: none"> - Geometria - Geometria Analítica - Matemática Financeira

Apresentam como justificativa para as escolhas dos conteúdos que devem ser desenvolvidos pelas escolas que optaram por uma grade curricular de apenas 2 ou 3 aulas semanais de Matemática, o interesse das mesmas, pois elas: *“objetivaram para seus alunos uma formação mais voltada para a área de humanas”* (pág. 15).

No Quadro II temos as opções de distribuição de conteúdos para escolas com 4 ou 5 aulas semanais ao longo das três séries do 2º Grau.

Quadro II		
1ª Série	2ª Série	3ª Série
<ul style="list-style-type: none"> - Função (com Progressão Aritmética) - <u>Trigonometria no triângulo</u> - Potências e Expoentes com Exponencial e Logaritmo 	<ul style="list-style-type: none"> - <u>Trigonometria da 1ª volta</u> - Análise Combinatória - Probabilidade - Geometria. Prismas - Sistemas Lineares com Matriz e Determinante 	<ul style="list-style-type: none"> - Geometria Analítica - Matemática Financeira ou Estatística - Geometria - Polinômios e Equações Polinomiais. - Números Complexos.

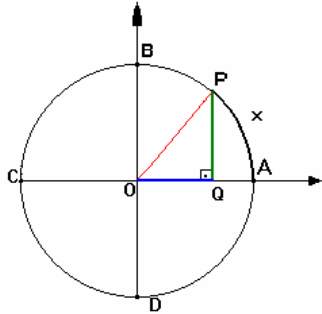
Observamos que o conteúdo retirado totalmente, quando as escolas têm um menor número de aulas, foi a Trigonometria da 1ª volta e conseqüentemente as funções trigonométricas.

Em relação aos conteúdos da 2ª Série, apresenta nas pág. 28 e 29 o seguinte:

1. TRIGONOMETRIA DA 1ª VOLTA E FUNÇÕES CIRCULARES.	
Objetivo geral: caracterizar o ciclo trigonométrico, estender os conceitos de seno e cosseno para <i>qualquer</i> ângulo e estudar funções circulares	
Conteúdo 1	Comentários
Caracterização do ciclo trigonométrico. Função seno, cosseno e tangente. <i>Objetivo:</i> Estender os conceitos de seno e cosseno para ângulos de 0º a 360º. Reduzir arcos ao primeiro quadrante. Conceituar a função tangente.	Associar a cada número real um ponto do ciclo trigonométrico utilizando a unidade, radiano. Associar as coordenadas de ponto ao seno e cosseno desse número, para compor as funções circulares seno, cosseno e tangente. O ciclo trigonométrico é útil ainda na redução ao primeiro quadrante.
Conteúdo 2:	
Resolução de Equações, inequações trigonométricas e Identidades trigonométricas <i>Objetivo:</i> Resolver equações e inequações trigonométricas. Demonstrar identidades simples.	Utilizar a redução de arco ao primeiro quadrante para resolver equações e inequações trigonométricas.
Conteúdo 3:	
Resolução de problemas de triangulação. <i>Objetivo:</i> Compreender e aplicar a Lei do seno e a Lei do Cosseno em triângulos quaisquer.	A triangulação é útil para determinar distâncias inacessíveis ou elementos dos polígonos por decomposição de triângulos em triângulos retângulos convenientes.

Nome : _____ n.º _____ Dupla n.º _____
 Nome : _____ n.º _____ Data _____

Seja x a medida do ângulo central correspondente ao arco AP. No triângulo OPQ o ângulo PÔQ pode assumir valores tais que $0 < x < 90^\circ$.



PQ é o cateto oposto a PÔQ
 OQ é o cateto adjacente a PÔQ
 OP é a hipotenusa

1) Abra o arquivo **Ni 1**.

Você pode movimentar o ponto P e o ponto P'. Inicialmente desloque P' em direção a O, tal que $OP' = 5 \text{ cm}$. A seguir desloque P, tal que x assumira os valores abaixo e então complete a tabela, com exceção das 3ª e 6ª colunas:

x ($^\circ$)	$\frac{PQ}{OP}$	$\frac{P'Q'}{OP'}$	$\frac{P'Q'}{OP'}$	$\frac{OQ}{OP}$	$\frac{OQ'}{OP'}$	$\frac{OQ'}{OP'}$
30°						
40°						
70°						

*** Movimente P' até que $OP' = 7 \text{ cm}$ e então termine de preencher a tabela. O que você pode concluir, comparando as razões calculadas nos triângulos?

Explique por que isso ocorre.

Discussão.

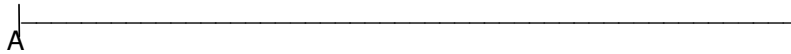
Conclusões desta atividade :

Para finalizar... Relembremos:

1. O comprimento da circunferência é $2\pi r$

Então se retificarmos a circunferência de raio $r = 1$, seu comprimento será 2π .

Represente-a, localizando os pontos A, B, C e D.



2. Existe outra unidade de medida de ângulo além do grau, que é o radiano.

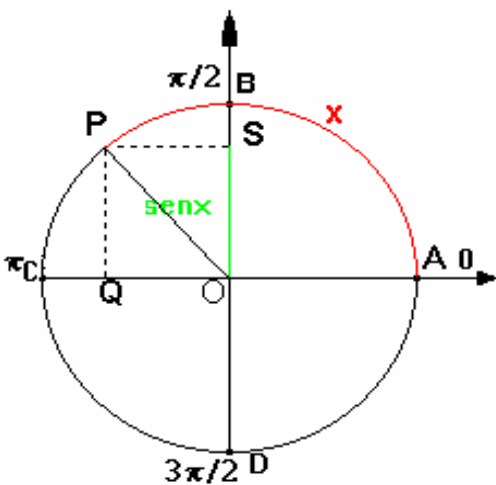
Conversão de unidades.

$x(^{\circ})$	0	90	180	270	360
$x(\text{rad.})$	0				2π

Na próxima atividade você trabalhará os ângulos com a medida em radiano.

Folha Resumo

Na atividade anterior trabalhamos com ângulos agudos e as definições de seno e cosseno vistas só podem ser usadas para ângulos entre 0° e 90° , pois se baseiam em lados de um triângulo retângulo. Para estender a definição para ângulos maiores que 90° , iremos considerar x como a medida de um ângulo central, ou seja, com vértice no centro da circunferência. A tal ângulo corresponderá um arco de circunferência. E ainda:



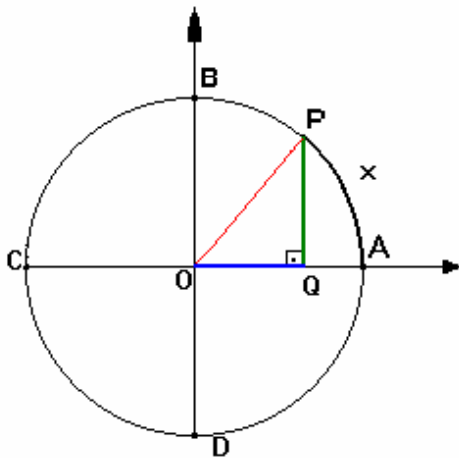
Consideramos um sistema cartesiano acoplado a uma circunferência de raio unitário, com a origem coincidente com o centro O da circunferência. Sejam A, B, C, D os pontos de interseção dos eixos do sistema cartesiano com a circunferência. Então se a medida do arco $AP = x$ definimos

$$\begin{aligned} \text{sen } x &= OS \\ & \text{(projeção de } OP \text{ sobre o eixo vertical)} \\ \text{cos } x &= OQ \\ & \text{(projeção de } OP \text{ sobre o eixo} \\ & \text{horizontal)} \end{aligned}$$

Como estamos no sistema cartesiano, temos que, se OS está na semi-reta \overrightarrow{OB} é positivo e, se está na semi-reta \overrightarrow{OD} , negativo.

Quanto ao cosseno, se OQ está na semi-reta OA terá sinal positivo e na semi-reta OC , sinal negativo.

Estas novas definições de seno e cosseno de x , para ângulos maiores de 90° são equivalentes às definições para $0 < x < 90^\circ$, já que:



No triângulo OPQ temos :

$$\text{sen } x = \frac{PQ}{OP} \quad \text{e} \quad \text{cos } x = \frac{OQ}{OP}$$

como $OP = 1$ (pois é o raio),
temos:

$$\text{sen } x = PQ \quad \text{e} \quad \text{cos } x = OQ$$

$$\text{como } OS = PQ \Rightarrow \text{sen } x = OS$$

Além disso, se considerarmos uma origem para os arcos (o ponto A) e um sentido de percurso como sendo o positivo (o anti horário), podemos determinar seno e cosseno de ângulos maiores de 360° e também de arcos com medidas negativas.

Ainda temos a vantagem de poder relacionar o arco AP, de medida x com a projeção em cada um dos eixos, comparando comprimentos.

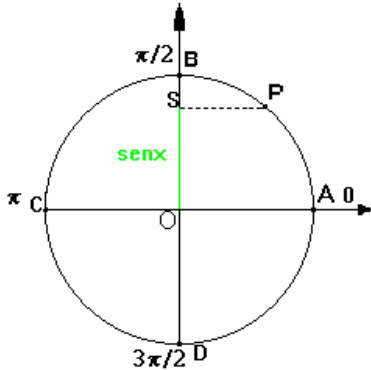
A partir daqui vamos trabalhar com números reais, com a reta Real “enrolada” no ciclo trigonométrico, o zero coincidindo com o ponto origem A e percurso no sentido anti-horário. Para isso a medida do arco estará sempre representada em radianos. Assim, por exemplo, um arco de 2 rad com origem A e extremidade P corresponde ao número real 2, representado no ciclo pelo ponto P.

Roteiro do Aluno - Atividade 1 - Parte B

Nome: _____ n^o _____ Dupla n^o _____

Nome: _____ n^o _____

Software Utilizado: Cabri II



1) Abra o arquivo **Trigo 1**.

Seja $AP = x$,

Deslocando o ponto P, no sentido anti-horário, ao longo dos quadrantes, de tal forma que $AP = x$ esteja nas posições I a IV abaixo, complete a tabela.

Conforme P se aproxima	$AP = x$	valor de $\sin x$ (aumenta ou diminui)	sinal de $\sin x$ (positivo ou negativo)
I - de B	$0 < AP < \pi/2$		
II - de C	$\pi/2 < AP < \pi$,		
III - de D	$\pi < AP < 3\pi/2$		
IV - de A	$3\pi/2 < AP < 2\pi$		

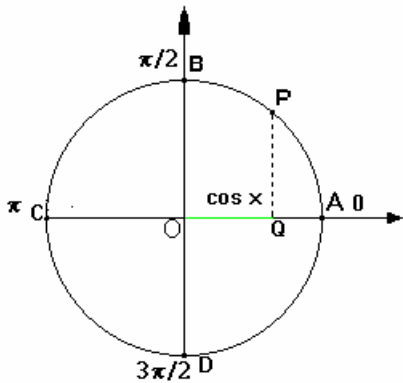
Complete:

Ponto P sobre A temos:	$AP = x = 0$	$\sin 0 = 0$
Ponto P sobre B temos:	$AP = x = \pi/2$	$\sin =$
Ponto P sobre C temos:	$AP = x = \pi$	$\sin =$
Ponto P sobre D temos:	$AP = x = 3\pi/2$	$\sin =$
Ponto P sobre A temos:	$AP = x = 2\pi$	$\sin =$

Observando os dados acima, responda:

- Qual o valor máximo assumido pelo seno ? _____ e qual o valor mínimo?
- Se você continuar a movimentar o ponto P de tal forma que $AP > 2\pi$, o que você pode prever em relação aos sinais e ao crescimento ou decréscimo do seno?

2) Abra o arquivo **Trigo 2**.



Supondo que o ponto P se desloque, no sentido anti-horário, ao longo dos quadrantes, de tal forma que o arco **AP = x** esteja nas posições I a IV abaixo, faça uma *previsão* do que ocorrerá, sem deslocar o ponto P e complete a tabela :

Conforme P se aproxima	AP = x	valor de cos x (aumenta ou diminui)	sinal de cos x (positivo ou negativo)
I- de B	$0 < AP < \pi/2$		
II- de C	$\pi/2 < AP < \pi,$		
III- de D	$\pi < AP < 3\pi/2$		
IV- de A	$3\pi/2 < AP < 2\pi$		

Complete:

Ponto P sobre A temos:	$AP = x = 0$	$\cos 0 = 1$
Ponto P sobre B temos:	$AP = x = \pi/2$	$\cos =$
Ponto P sobre C temos:	$AP = x = \pi$	$\cos =$
Ponto P sobre D temos:	$AP = x = 3\pi/2$	$\cos =$
Colocando P sobre A temos:	$AP = x = 2\pi$	$\cos =$

Desloque o ponto P e confirme no computador suas respostas.

Observando os dados acima, responda:

- Qual o valor máximo assumido pelo cosseno ? _____ e qual o valor mínimo? _____
- Se você continuar a movimentar o ponto P de tal forma que $AP > 2\pi$, o que você pode prever em relação aos sinais e ao crescimento / decrescimento do cosseno?

3) Abra o arquivo **Trigo 3**.

a) Deslocando o ponto P **ao longo do 1º quadrante**, observe o \triangle **OPQ**. Que tipo de triângulo é este? _____

b) Identifique o que cada segmento colorido representa, em relação ao triângulo:

OP vermelho _____ **OQ** azul _____ **PQ** verde _____

c) Qual a relação importante entre os lados desse triângulo?

d) Movendo P ao longo do ciclo trigonométrico, o que acontece com o tamanho de OP? _____. Este segmento representa, em relação ao ciclo, o _____ e portanto seu valor é 1.

Sendo o arco **AP** de medida **x**, o que representam: **OQ** = _____ e **PQ** = _____

Substituindo estes dados no item c conclui-se que:



Que é a **Relação Fundamental da Trigonometria**

e) Deslocando o ponto **P** ao longo do 1º Q, compare os segmentos \overline{OQ} e \overline{PQ} e explique o que acontece com os seus tamanhos.

f) Existe algum ponto em que esses segmentos são iguais? _____ Se sim, quais os arcos correspondentes? _____ Justifique porque isso ocorre. _____
—

Discussão

Conclusões:



Atividade 2

Nome: _____ n.º _____ Dupla n.º _____
 Nome: _____ n.º _____ Data _____

1) Abra o arquivo **Ni.2**

Desloque o ponto P ao longo dos quadrantes, de tal forma que o ângulo central correspondente ao arco AP assuma os valores assinalados abaixo e complete a tabela

x (º)	x (rad.)	OQ = cos x	OS = sen x
0	0		
30	$\pi / 6$		
45	$\pi / 4$		
60	$\pi / 3$		
90	$\pi / 2$		
120	$2\pi / 3$		
135	$3\pi / 4$		
150	$5\pi / 6$		
180	π		

2) Existem valores de x, entre os dados que você coletou, que possuem o mesmo seno? _____ Se sim, cite alguns _____

E quanto ao cosseno? _____

3) Compare $\sin 20^\circ$ com o $\sin 160^\circ$. O que ocorre com seus valores? _____

Justifique o porquê _____

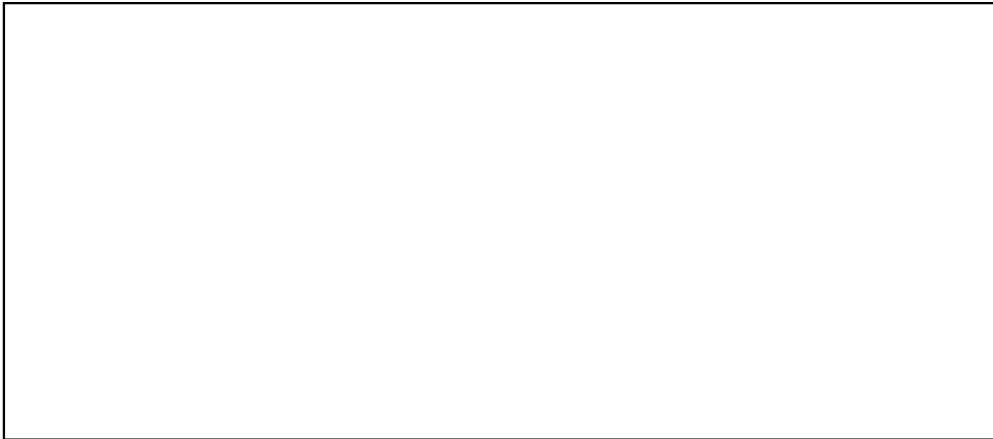
4) Faça uma previsão do **cos x** e do **sen x** para os seguintes valores de x:

x (º)	x (rad.)	OQ = cos x	OS = sen x
210	$7\pi/6$		
225	$5\pi/4$		
240	$4\pi/3$		
270	$3\pi / 2$		
300	$5\pi/3$		
330	$7\pi/4$		
360	$11\pi/6$		
390	$2\pi + \pi/6$		

5) Confira no computador e veja se você acertou. Cite dois valores de x cujos senos sejam números opostos _____

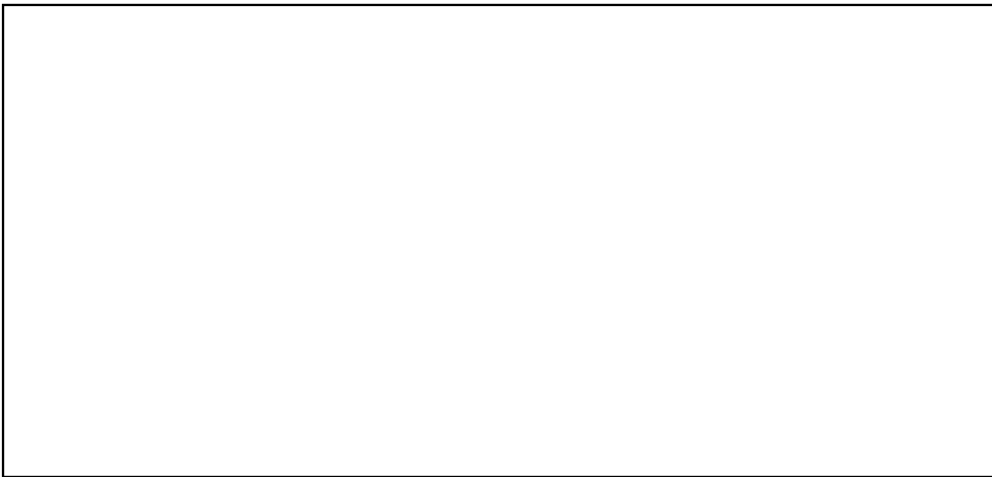
6) Dê dois valores de x tais que $\cos x = -0,5$

7) Faça um gráfico colocando no eixo horizontal os valores do arco x e no eixo vertical os valores correspondentes do $\text{sen } x$.



Este gráfico pode estar representando uma função? _____
Justifique sua resposta. _____

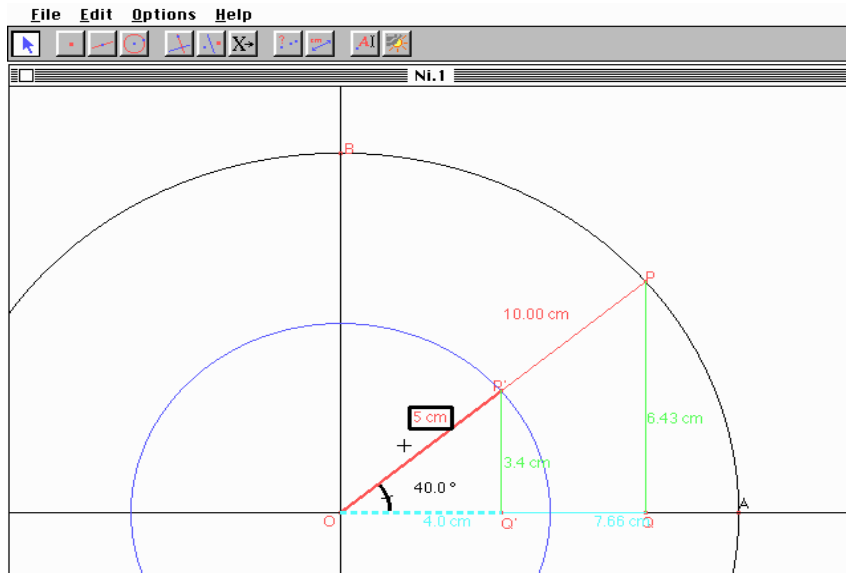
8) Repita o procedimento colocando no eixo vertical os valores de $\text{cos } x$.



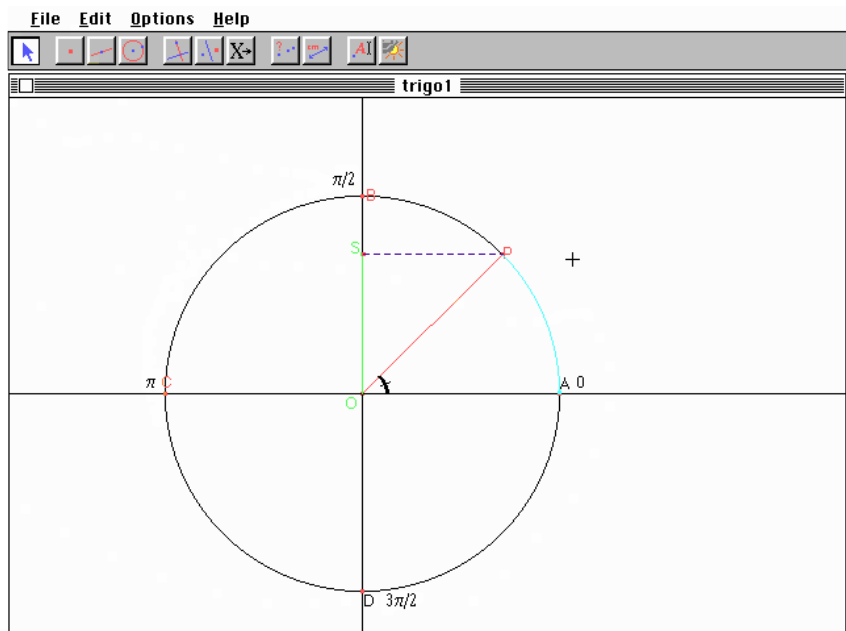
Conclusões (preencher, após discussão):

Reprodução de Telas Referentes aos Arquivos Preparados no Cabri II

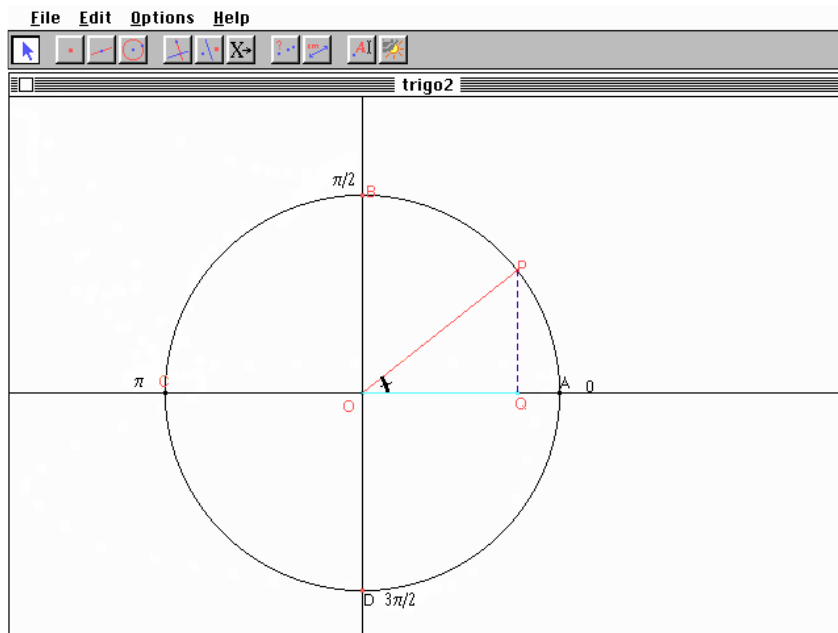
1. Tela Ni.1 (Atividade 1 - Parte A)



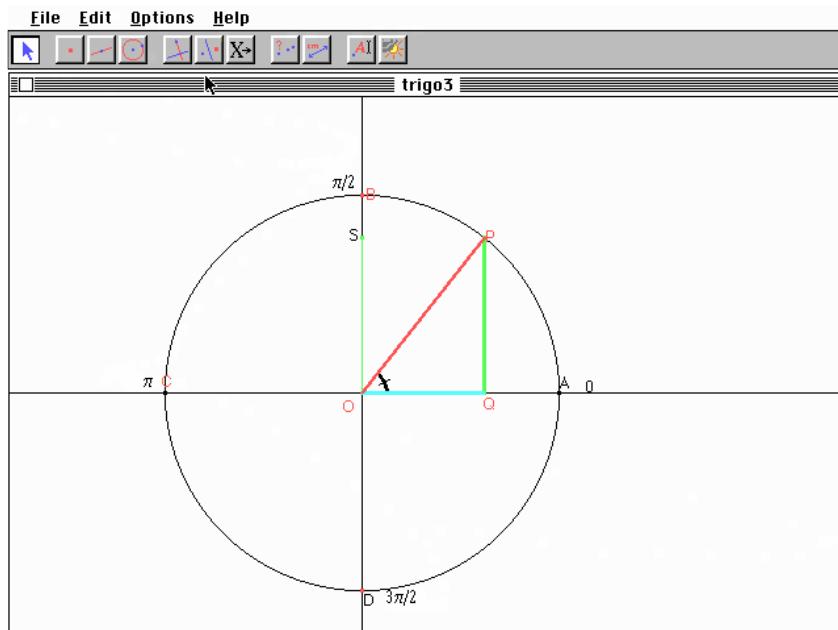
2. Tela Trigo 1 (Atividade 1 - Parte B)



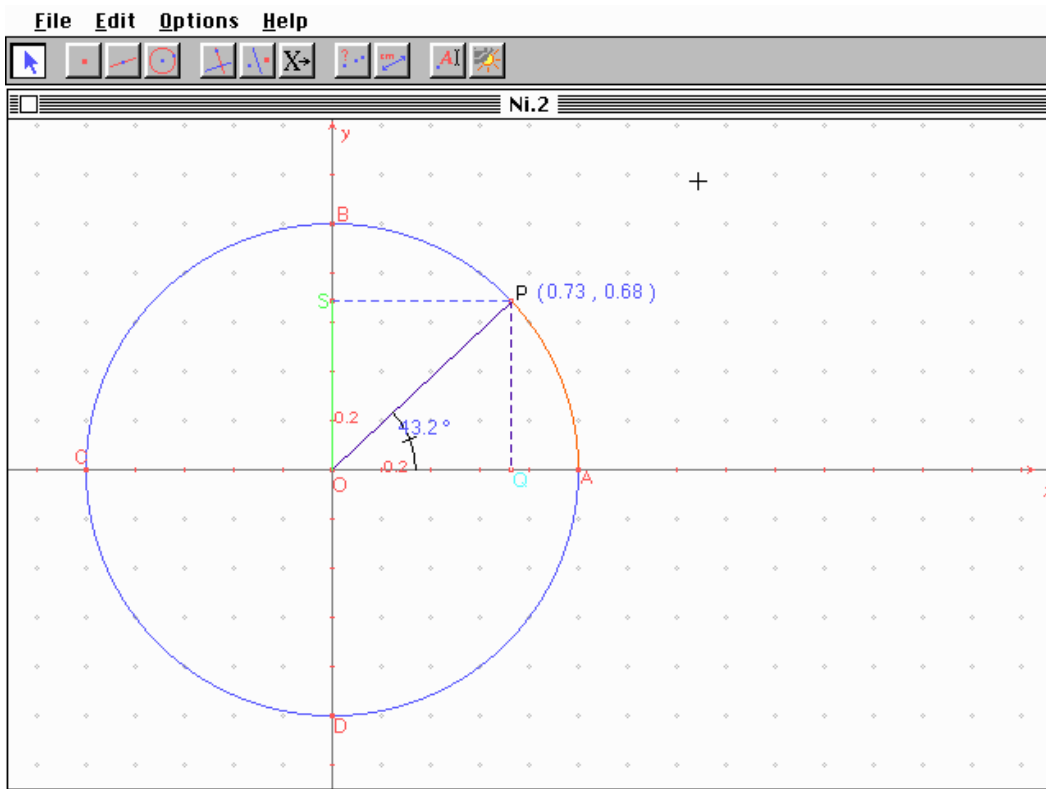
3. Tela **Trigo 2** (Atividade 1 - Parte B)



4. Tela **Trigo 3** (Atividade 1 - Parte B)



5. Tela Ni. 2 (Atividade 2)



Atividade 3: Interpretação e Análise de gráficos

Nome : _____ n^o _____

Dupla _____

Nome : _____ n^o _____

Dupla _____

Atividade 3a: - Estudo do Seno

1) Para obter o gráfico da função $f(x) = \sin x$, digite **y = sin (x)** e pressione **Enter** ou clique em **Graph**

a) Observe o gráfico e dê o domínio da função _____

b) Esta função é um exemplo do que chamamos **função limitada**. Você poderia dar uma explicação para essa classificação?

Qual é o conjunto **Imagem** da função? _____

c) Esta é uma **função periódica**. Por que ela recebe este nome e qual é o seu período ?

d) Quantos períodos completos você está visualizando na tela? _____

2) Digite **y = sin (x) + 1** e pressione **Enter**.

Escreva: a) o domínio **D** =

b) o conjunto imagem **Im** = [;] = { _____ }

c) o período **P** = _____

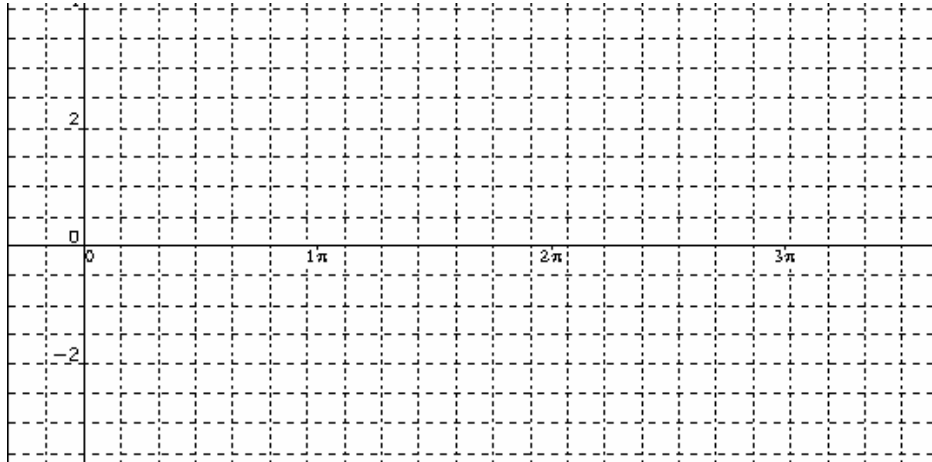
3) Digite **y = sin (x) - 1** e pressione **Enter**.

Escreva: a) o domínio **D** =

b) o conjunto imagem **Im** = [;] = { _____ }

c) o período **P** = _____

4)Faça um esboço da tela, no verso, contendo os três gráficos



Compare os gráficos. Qual a transformação que ocorre de $y = \text{sen}x$ para $y = \text{sen}x + 1$ e $y = \text{sen}x - 1$? _____

O que mais você observa comparando os três gráficos? _____

* Deverá ser preenchido após a discussão.

5) Para limpar a tela vamos clicar em **Clear**. Digite agora $y = 2 \sin(x)$ e pressione **Enter**, para obter o gráfico de $f(x) = 2 \text{sen}x$.

Escreva :a) o domínio $D =$ _____

b) o conjunto imagem $Im = [\quad ; \quad] = \{ \text{_____} \}$

c) o período $P =$ _____

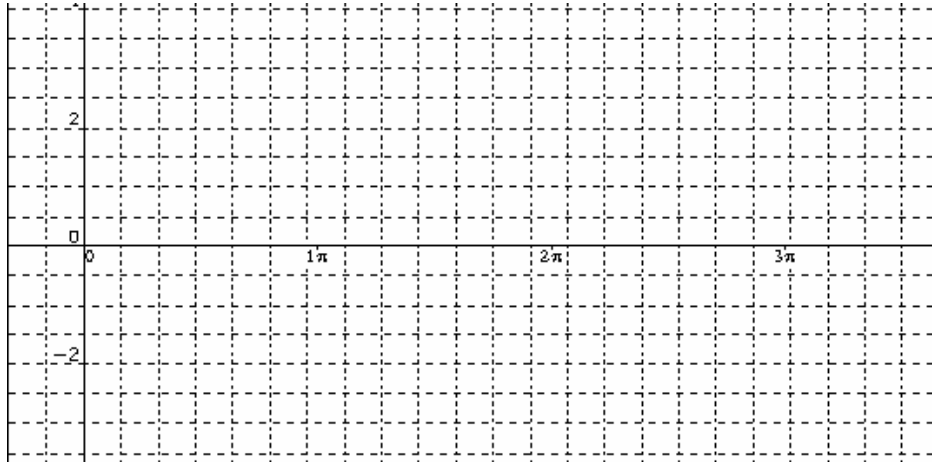
6) Para comparar as funções, sem limpar a tela, refaça o gráfico da função $y = \text{sen}x$. Para isso basta você clicar sobre a seta que está no canto superior direito da tela, clicar em $y = \sin(x)$ e pressionar **Enter**. A seguir, novamente sem limpar a tela, digite $y = 3\text{sen}(x)$ e pressione **Enter**. Escreva, da última função :

a) o domínio $D =$ _____

b) o conjunto imagem $Im = [\quad ; \quad] = \{ \text{_____} \}$

c) o período $P =$ _____

7) Faça um esboço dos três gráficos abaixo



Compare os três gráficos. Quais as conclusões que você pode tirar? _____

8) No menu **Redraw** escolha **Clear All**.

Para obter o gráfico da função $f(x) = \text{sen } x$ com $D = [0, 2\pi]$ digite $y = \sin(x)$ {0,2P}

Sem limpar a tela digite $y = -\sin(x)$ {0,2P} . Analisando os dois gráficos complete:

$y = \text{sen } x$ com $D = [0, 2\pi]$	$y = -\text{sen } x$ com $D = [0, 2\pi]$
Im =	Im =
P =	P =

Nos intervalos abaixo classifique a função como positiva ou negativa

	$0 < x < \pi/2$	$\pi/2 < x < \pi$	$\pi < x < 3\pi/2$	$3\pi/2 < x < 2\pi$
$y = \text{sen } x$				
$y = -\text{sen } x$				

Em que intervalos de x a função é crescente e em quais é decrescente ?

	$0 < x < \pi/2$	$\pi/2 < x < \pi$	$\pi < x < 3\pi/2$	$3\pi/2 < x < 2\pi$
$y = \text{sen } x$				
$y = -\text{sen } x$				

9) Sem limpar a tela acrescente a função $y = -2 \sin x$ com $D = [0, 2\pi]$, para isso digite

$y = -2 \sin (x) \{0,2P\}$. Compare os três gráficos.

Conclusões: _____

10) Para colocar título no gráfico: clique no Menu **Labels** e escolha **Annotate**, digite na caixa $f(x) = \sin x [0, 2\pi]$, clique em **Place** e arraste com o botão esquerdo do mouse pressionado, aponte para o gráfico correspondente e só então solte o botão.

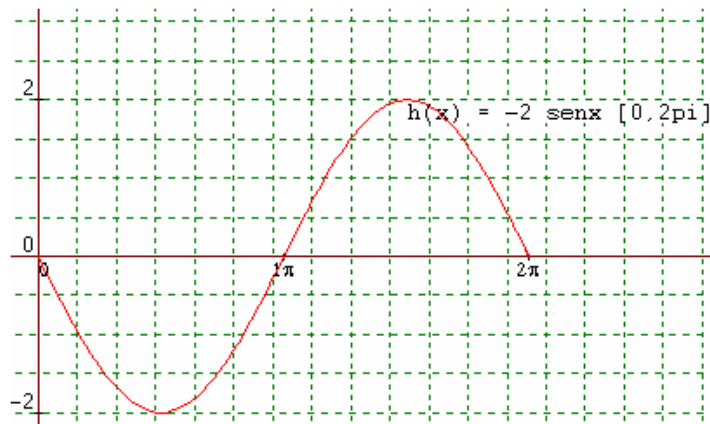
11) Repita o procedimento para os outros dois gráficos: digite $g(x) = -\sin x [0, 2\pi]$ e $h(x) = -2\sin x [0, 2\pi]$.

Responda :

Existem valores de x , no intervalo considerado, para os quais $f(x) = g(x) = h(x)$?

Se _____ sim,
 quais? _____

12) Clique em **Default grid** e verifique se sua tela está como a abaixo. Se não estiver, peça ajuda.



Assinale no gráfico os valores de x para os quais a função é crescente e para quais é decrescente.

Assinale no gráfico para quais valores de x a função é positiva e para quais é negativa.

Qual o valor máximo da função e qual o valor mínimo ?

Qual o valor de x para y_{min} ? _____

Qual o valor de x para y_{max} ? _____

13) Limpe a tela usando a opção **Clear All** no Menu Redraw para limpar inclusive os nomes dos gráficos (labels).

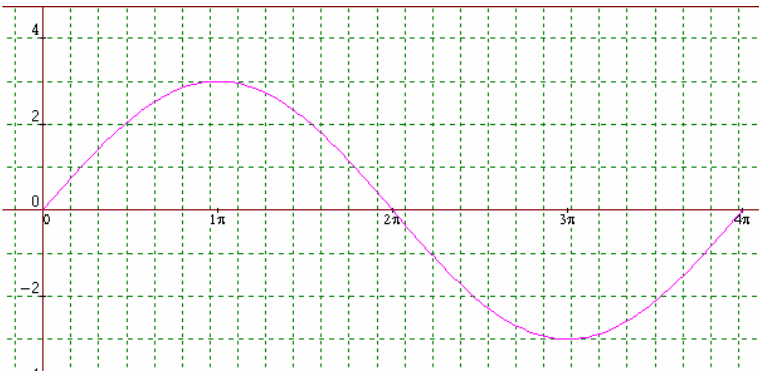
Faça o gráfico de $y = \text{sen } x$; $D= [0,4 \pi]$. Lembre-se: digite $y = \text{sin } (x)$ {0,4P}

Sem limpar a tela, digite $y = \text{sin } (2x)$ { 0, 4P} e $y = \text{sin } (x/2)$ { 0, 4P} para obter os gráficos de $y = \text{sen } (2x)$, $D=[0,4 \pi]$ e $y = \text{sen } (x/2)$ $D=[0,4\pi]$

Analisando a tela, complete a tabela abaixo:

Função	Domínio	Imagem	Período
$y = \text{sen } x$	D =	Im =	P=
$y = \text{sen } (2x)$	D =	Im =	P=
$y = \text{sen } (x/2)$	D =	Im =	P=

14) Dado o gráfico abaixo pede-se:



- a) Domínio _____
- b) Imagem _____
- c) Período _____

d) A expressão algébrica correspondente à função: $f: \rightarrow$ tal que:
 $f(x) =$

Confira no computador se você acertou. Se o gráfico obtido for igual ao acima, imprima o seu trabalho. Caso contrário chame o professor. (Menu **File** opção **Print**).

Conclusões desta aula. (Deverá ser preenchido após a Discussão).

Atividade 3b : Estudo do Cosseno

1) Faça os gráficos das funções $y = \cos x$; $y = \cos x + 2$ e $y = \cos x - 1$ com Domínio R (Veja as instruções na atividade 1)

Preencha a tabela:	Imagem	Período
$y = \cos x$	Im =	P =
$y = \cos x + 2$	Im =	P =
$y = \cos x - 1$	Im =	P =

2) Limpe a tela. Construa os gráficos de $y = 2 \cos x$, $y = 2 \cos x - 1$, $y = 2 \cos x + 2$

Preencha a tabela:	Imagem	Período
$y = 2\cos x$	Im =	P =
$y = 2\cos x - 1$	Im =	P =
$y = 2\cos x + 2$	Im =	P =

3) Limpe a tela. Construa os gráficos de $y = \cos (2x)$, $y = \cos (x/2)$ e $y = \cos x$

Preencha a tabela:	Imagem	Período
$y = \cos (2x)$	Im =	P=
$y = \cos (x /2)$	Im =	P =
$y = \cos x$	Im =	P =

4) Limpe a tela. Construa os gráficos $y = 3 \cos (x/2) + 1$ e $y = 3 \cos (x/2) - 1$ e recoloque $y = \cos (x/2)$

Preencha a tabela:	Imagem	Período
$y = 3 \cos (x/2) + 1$	Im =	P=
$y = 3 \cos (x /2) - 1$	Im	P =
$y = \cos (x/2)$	Im =	P =

5) Limpe a tela.

Construa os gráficos $y = - 2 \cos(2x) + 1$ e $y = 2 \cos(2x) + 1$ e $y= 2 \cos x + 1$ e

Preencha a tabela:	Imagem	Período
$y = -2\cos(2x) + 1$	Im =	P =
$y = 2\cos(2x) + 1$	Im =	P =
$y = 2\cos x + 1$	Im =	P =

6) Dado $y = a \cos x$ e sabendo-se que $Im = [-4, 4]$ então $a =$ _____
 Faça o gráfico correspondente e confira se você acertou.

7) Dado $y = a \cos x + b$ tal que $Im = [-1, 3]$, então $a =$ _____ e $b =$ _____

8) Procuremos generalizar :

Se $y = a \cos x$	então temos	$D =$ _____	$Im =$ _____	$P =$ _____
Se $y = a \cos x + b$	então temos	$D =$ _____	$Im =$ _____	$P =$ _____

9) Se $y = 2 \cos(\omega x)$ tal que $P = \pi$ então $\omega =$ _____

Se $y = 3 \cos(\omega x)$ tal que $P = 4\pi$ então $\omega =$ _____

Confira com o software e trace abaixo o último gráfico obtido.



Conclusões desta aula (Preencher após a Discussão).

Se $y = a \cos(\omega x) + b$ então $Im =$ _____ e $P =$ _____

* Reveja a atividade 1 e verifique se também é válido para $y = a \sin(\omega x) + b$

Atividade 4 :Complementação do estudo das funções senoidais e cossenoidais.

- 1) Faça o gráfico de $y = \text{sen } x$, $y = \text{sen } (x + \pi /3)$ e $y = \text{sen } (x - \pi /3)$
Compare os três gráficos. O que você observa ?

- 2) Limpe a tela.

Faça o gráfico de $y = \text{cos } x$, $y = \text{cos } (x + \pi /3)$ e $y = \text{cos } (x - \pi /3)$.
Compare os três gráficos. O que você observa ?

Imprima o seu trabalho.

- 3) Se uma função tem como expressão $y = \text{cos } (x + \pi /4)$ quais devem ser seus Domínio, Imagem e Período? _____

Compare com o Domínio, Imagem e Período de $y = \text{cos } x$. O que ocorre?

- 4) Compare agora $y = \text{sen } x$ com $y = \text{sen } (x - \pi /5)$. Qual o Domínio, Imagem e Período de cada uma ?

- 5) Qual é a interferência do número x_0 no gráfico de $y = \text{sen } (\omega x + x_0)$?

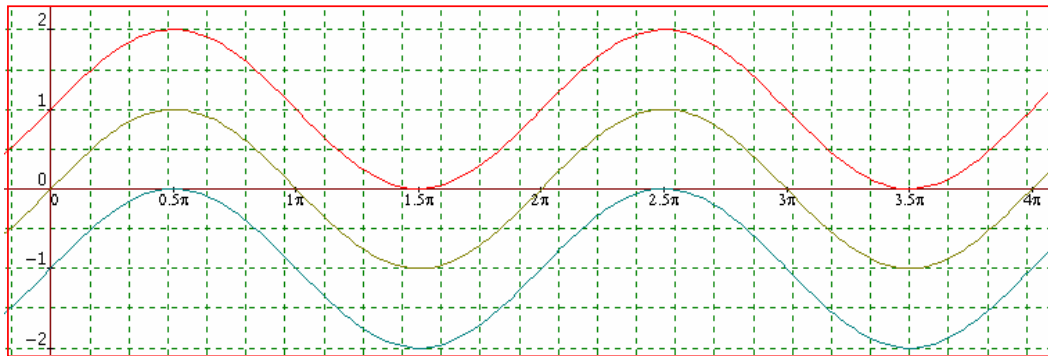
Conclusões: (Preencher após a Discussão).

Telas Relativas às Sessões Computador 3 e 4

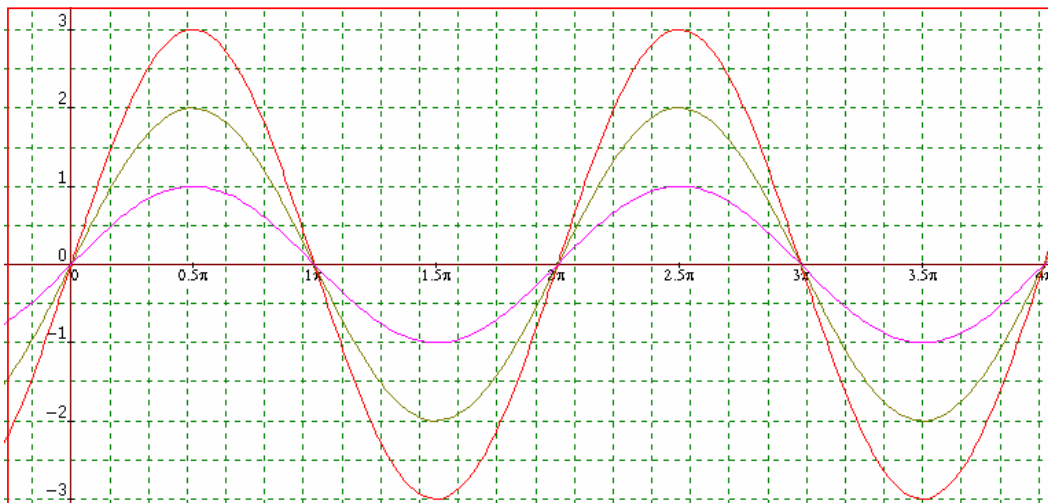
Apresentamos abaixo as telas que correspondem ao que o aluno estará vendo no computador nas questões indicadas.

Atividade 3 a - Estudo do Seno

Questão 4

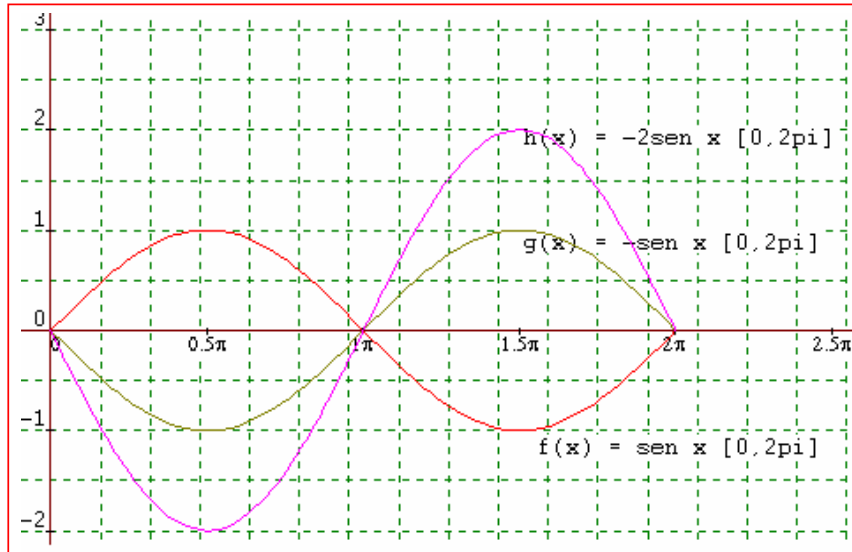


Questão 7

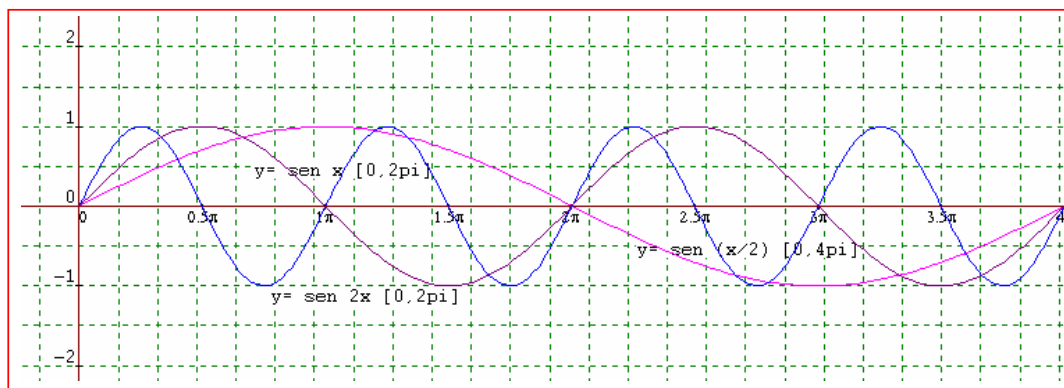


Atividade 3 a. - Estudo do Seno

Questão 9



Questão 13

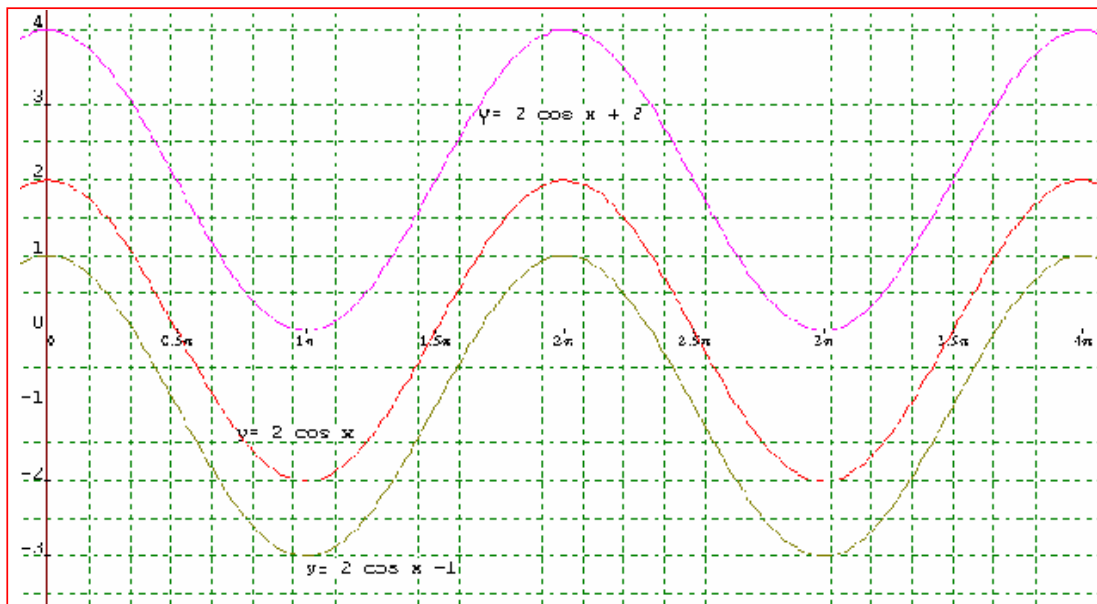


Atividade 3b - Estudo do Cosseno

Questão 1

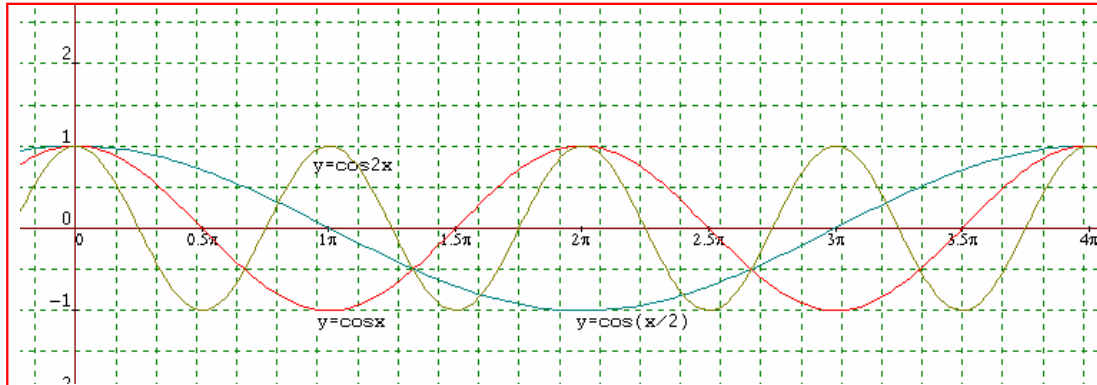


Questão 2

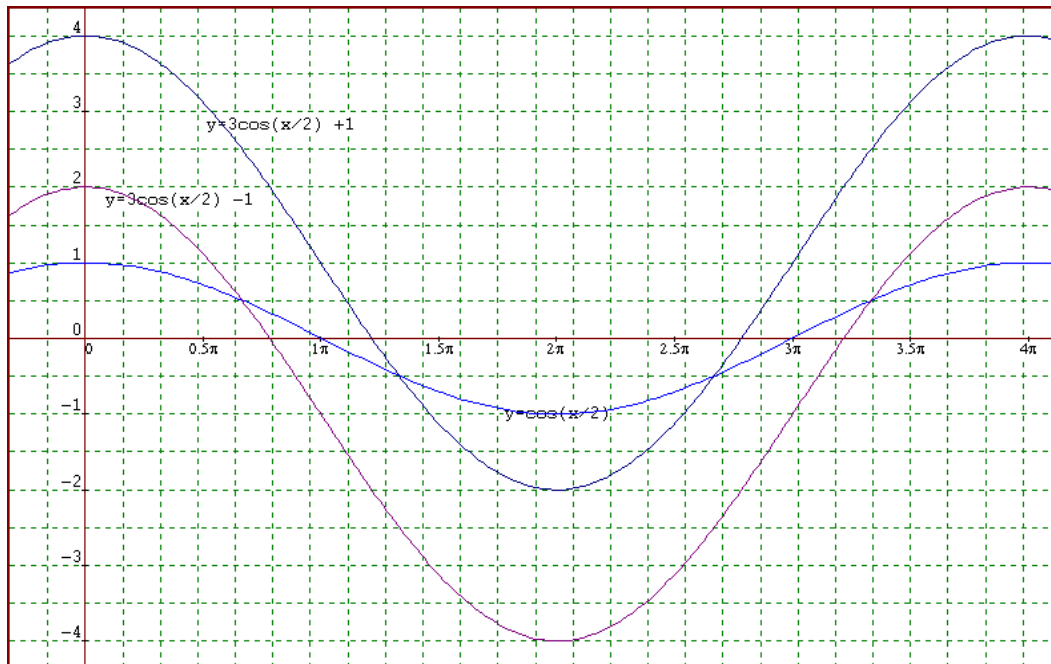


Atividade 3b - Estudo do Cosseno

Questão 3

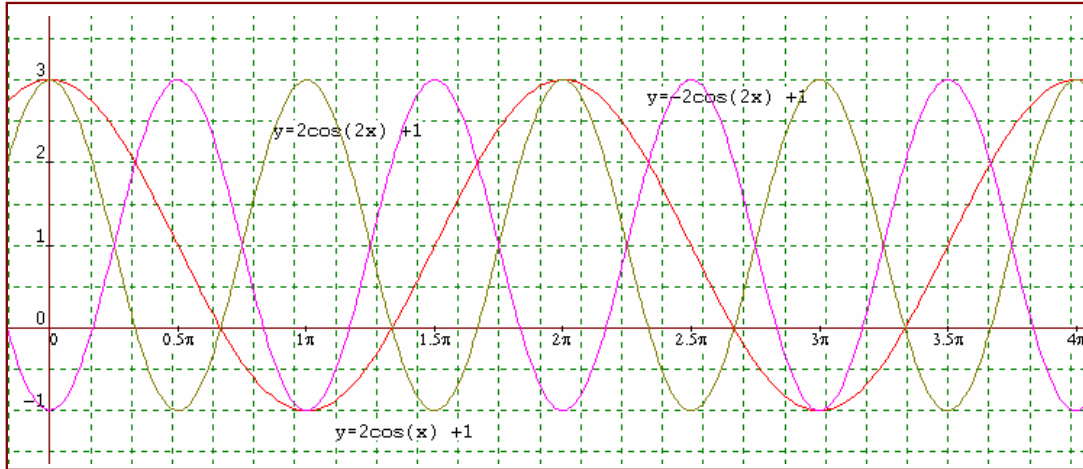


Questão 4

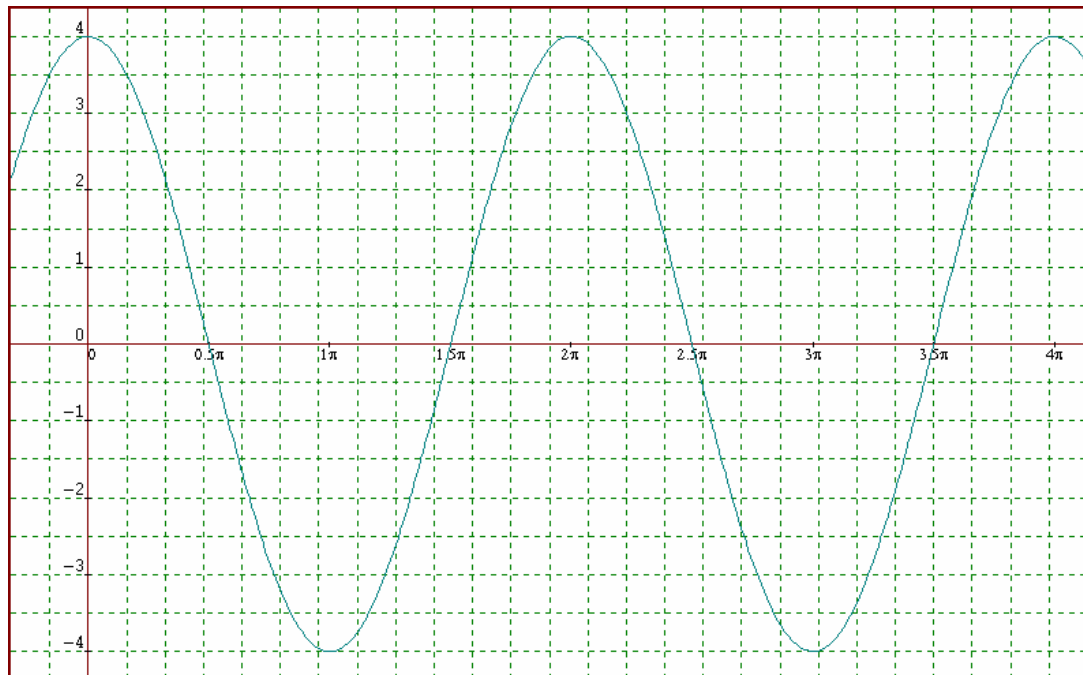


Atividade 3b - Estudo do Cosseno

Questão 5

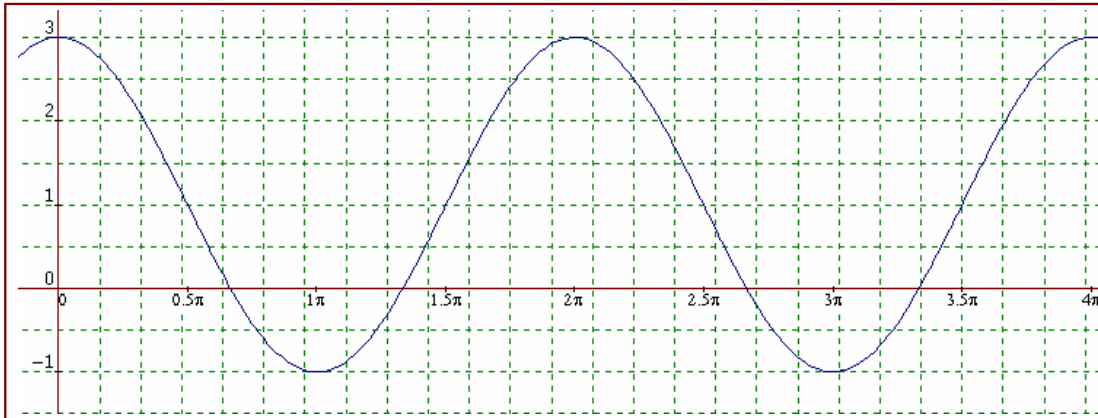


Questão 6

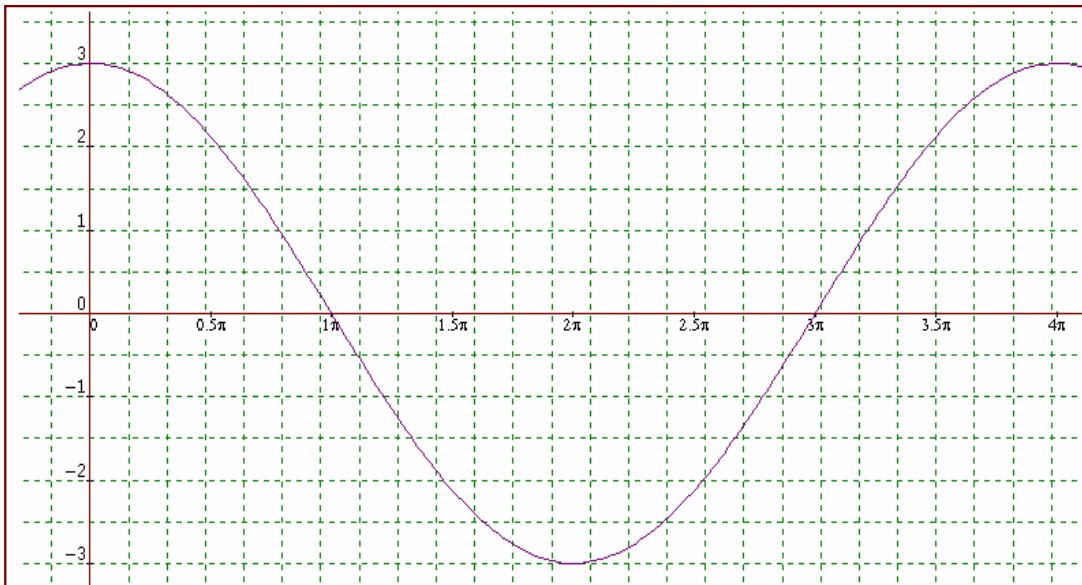


Atividade 3b - Estudo do Cosseno

Questão 7

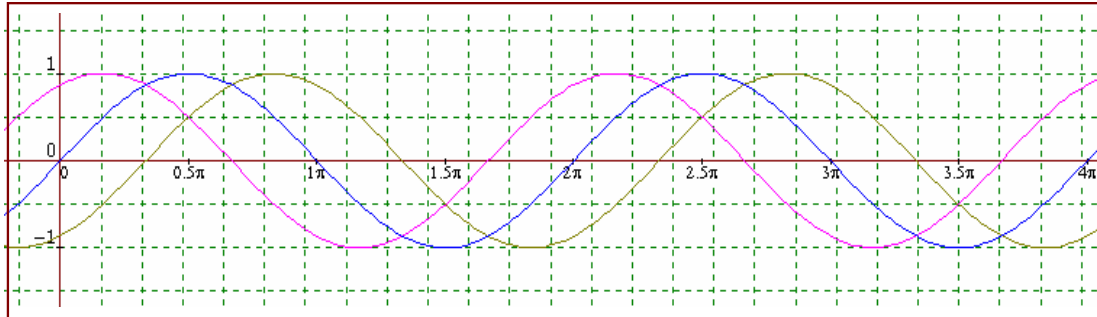


Questão 9

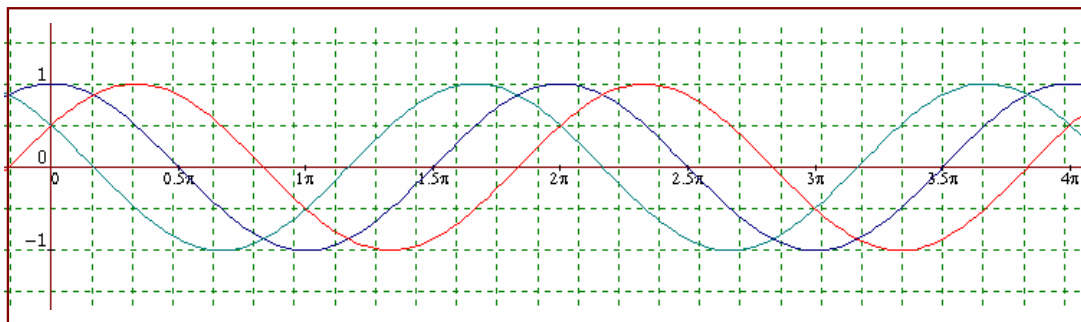


Atividade 4- Complementação do Estudo das Funções Senoidais e Cossenoidais

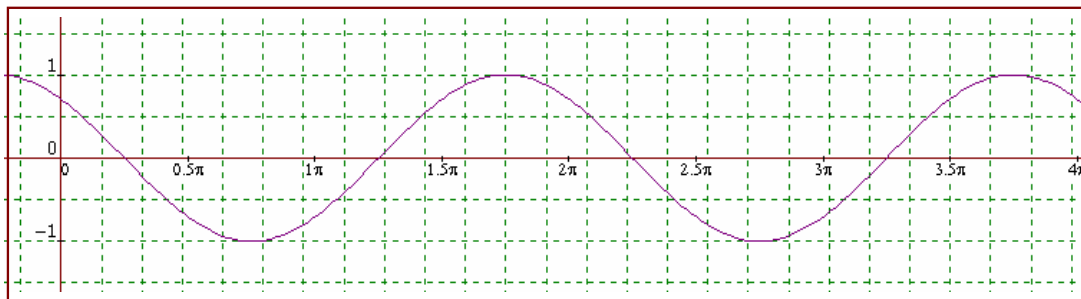
Questão 1



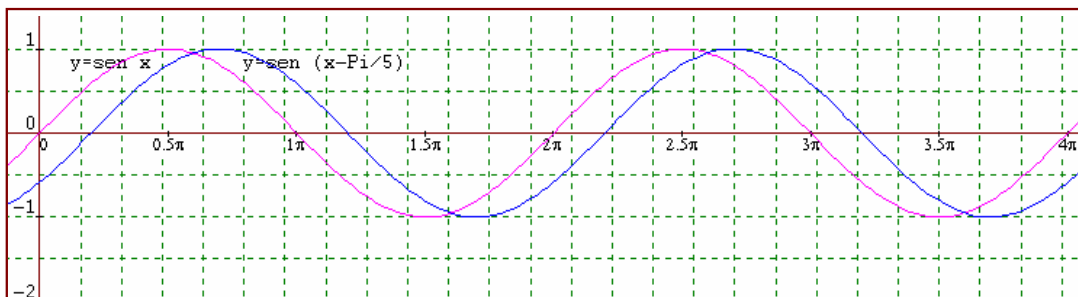
Questão 2



Questão 3



Questão 4



Pré-Teste

Parte A

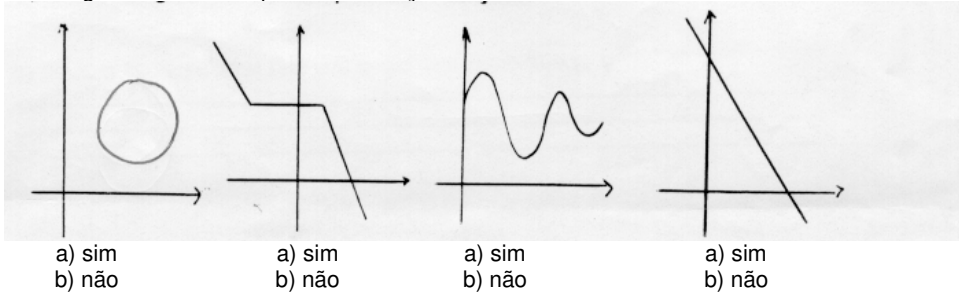
Nome: _____ nº _____ Dupla: _____

1) Construa o gráfico e dê o domínio e a imagem das funções, dadas por:

a) $f(x) = 3x - 1$

b) $y = x^2 - 4x + 3$

2) Quais dos gráficos abaixo representam funções:

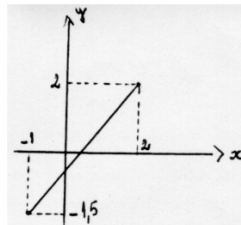


Justifique suas respostas:

3) Se uma circunferência tem raio 5 cm, seu comprimento é _____

4) Um ângulo de medida 30° é equivalente a um ângulo de _____ rad.

5) Escreva o domínio e a imagem da função representada no gráfico ao lado.



Pré Teste

Parte B

Nome: _____ nº _____ Dupla: _____

1) Complete com > , < ou =.

sen 40° _____	sen 70° _____	cos 30° _____	cos (-30°) _____
sen 120° _____	sen 150° _____	cos 60° _____	cos 120° _____
sen 210° _____	sen 330° _____	cos 240° _____	cos 300° _____

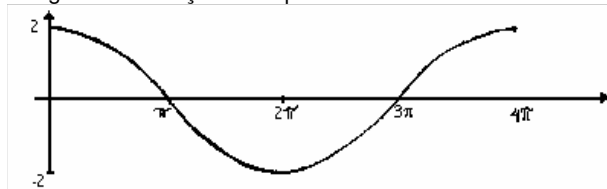
2) Dê dois valores de q, 0 < q < 2π, tais que: sen q = 0,5 _____
 cos q = - $\frac{\sqrt{2}}{2}$ _____

3) Dada y = 3 sen x + 1 dê o valor máximo assumido pela função, y_{max} = _____ E o valor mínimo y_{min} = _____

4) Se f(t) = a cost + 1 tal que Im = [-3,5], então o valor de a é _____

5) A figura abaixo mostra parte do gráfico da função dada por:

- a) cos x
- b) 2 cos $\frac{x}{2}$
- c) 2 sen x
- d) 2 sen 2x
- e) cos 2x



Justifique sua resposta. _____

6) Dado sen x = -2/3, quais os possíveis valores de cos x ?

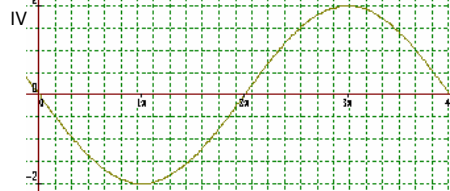
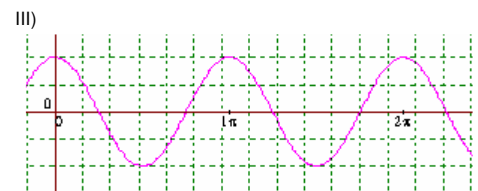
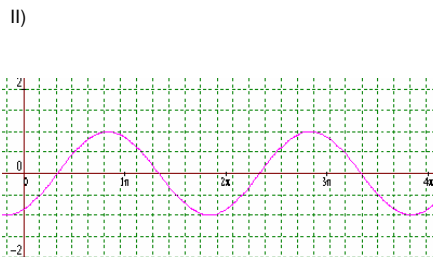
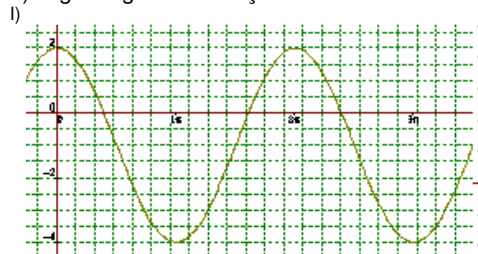
7) (U.F.PA) A equação do movimento harmônico simples descrito por uma partícula é: y = 10 cos (100π t + π/3) sendo y em **cm** e t em **seg** .Então a amplitude e o período desse movimento são, respectivamente,

- a) 10 cm e 1/50 seg
- b) 10 cm e 1/100 seg
- c) 50 cm e 1/50 seg
- d) 50 cm e 1/100 seg
- e) 10 cm e 3/π seg

Observação: a amplitude é a metade do comprimento do intervalo de variação da imagem e o período é o menor intervalo de tempo para que o fenômeno se repita.

Justifique sua resposta

8) Ligue o gráfico à função:



a) f(x) = cos 2x

b) y = -2 sen ($\frac{x}{2}$)

c) y = sen (x - $\frac{\pi}{3}$)

d) y = 3cos x - 1

Intermediário-Teste

Nome: _____ n.º _____ Dupla: _____

1) (U.C.M.G.) Um corpo oscila, executando um M.H.S. cujo deslocamento em função do tempo é

dado por: $y = 6 \cos \left(3\pi t + \frac{\pi}{3} \right)$.

O deslocamento do corpo no instante $t = 2s$ é em metros:

- a) 0,5 b) 1,0 c) 2,0 d) 2,5 e) 3,0

2) Dado $\cos x = \frac{1}{3}$ e $\pi/2 < x < \pi$, determine o valor de $\sin x$.

3) Complete com $>$, $<$ ou $=$

$\sin 50^\circ$ _____ $\sin 80^\circ$
 $\sin 120^\circ$ _____ $\sin 160^\circ$
 $\sin 240^\circ$ _____ $\sin 300^\circ$

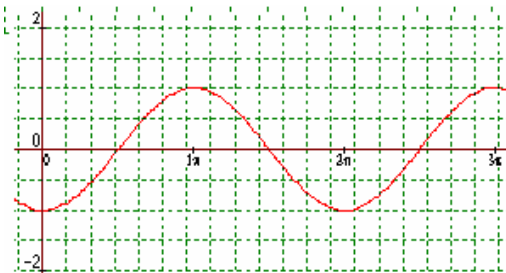
$\cos 45^\circ$ _____ $\cos (-45^\circ)$
 $\cos 30^\circ$ _____ $\cos 150^\circ$
 $\cos 210^\circ$ _____ $\cos 330^\circ$

4) Seja f uma função tal que $D = \mathbb{R}$, $\text{Im} = [-2, 4]$, $P = 2\pi$

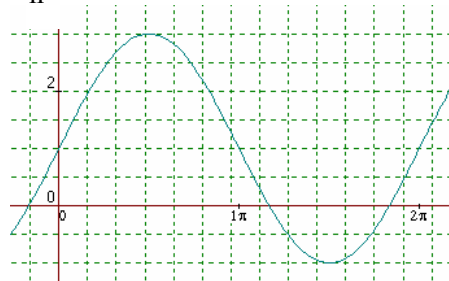
A função f é dada pela expressão $f(x) =$

5) Ligue cada gráfico à função correspondente

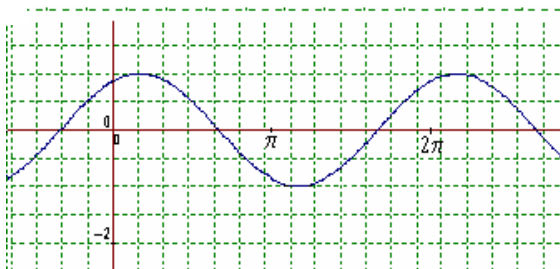
I)



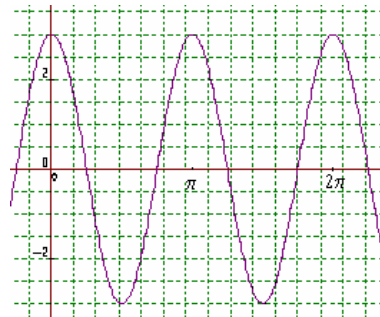
II



III



IV



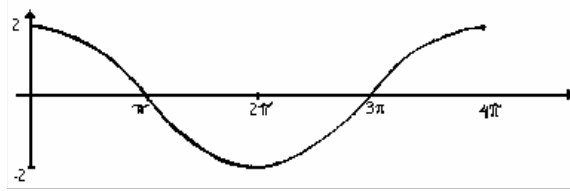
- a) $y = \sin \left(\frac{\pi}{3} + x \right)$ b) $f(x) = -\cos x$ c) $y = 2 \sin x + 1$ d) $y = 3 \cos (2x)$

Pós Teste

Nome: _____ nº _____ Dupla _____

1) A figura abaixo mostra parte do gráfico da função:

- a) $2 \sin 2x$
- b) $2 \cos \frac{x}{2}$
- c) $\sin 2x$
- d) $-2 \sin 2x$
- e) $\cos 2x$



Justifique sua resposta

2) Dado $\cos x = \frac{-2}{3}$, $\pi/2 < x < \pi$ calcule o valor de $\sin x$.

3) A equação do movimento harmônico simples descrito por uma partícula é:

$y = 10 \cos(100\pi t + \pi/3)$ sendo y em centímetros (**cm**) e o tempo t em segundos (**s**). Então a amplitude e o período desse movimento são, respectivamente,

- a) 10 cm e $3/\pi$ s
- b) 50 cm e $1/50$ s
- c) 10 cm e $1/50$ s
- d) 10 cm e $1/100$ s
- e) 50 cm e $1/100$ s

Observação: a amplitude é a metade do comprimento do intervalo de variação da imagem e o período é o menor intervalo de tempo para que o fenômeno se repita.

Justifique sua resposta

4) Seja a função dada por $y = 3 \cos x - 1$. Dê o valor máximo assumido $y_{\max} = \underline{\hspace{2cm}}$ E o valor mínimo $y_{\min} = \underline{\hspace{2cm}}$

5) Dê dois valores, em cada item, de θ , com $0 < \theta < 2\pi$, tais que:

- a) $\sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ _____ b) $\cos \theta = 0,5$ _____

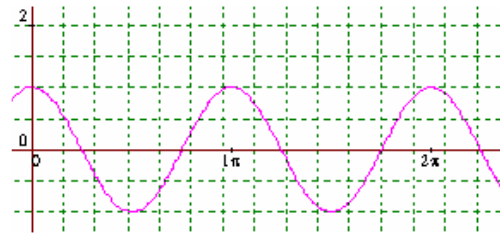
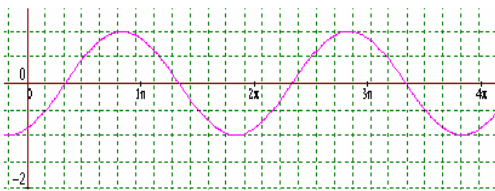
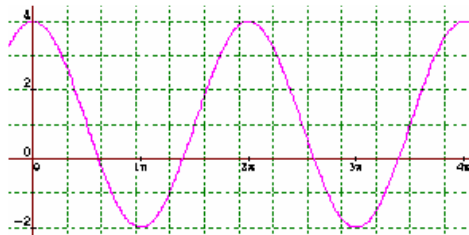
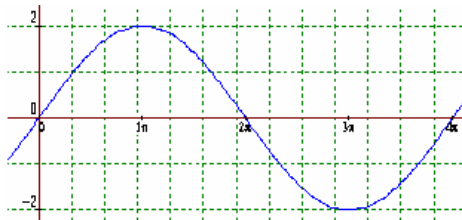
6) Complete com $>$, $<$ ou $=$.

$\sin 40^\circ$ _____ $\sin 70^\circ$
 $\sin 120^\circ$ _____ $\sin 150^\circ$
 $\sin 210^\circ$ _____ $\sin 330^\circ$

$\cos 30^\circ$ _____ $\cos (-30^\circ)$
 $\cos 60^\circ$ _____ $\cos 120^\circ$
 $\cos 240^\circ$ _____ $\cos 300^\circ$

7) Se $f(t) = a \sin t + 1$ tal que $\text{Im} = [-3,5]$, então o valor de a é _____

8) Ligue o gráfico à função:



- a) $f(x) = \cos 2x$ b) $y = 2 \sin(\frac{x}{2})$ c) $y = \sin(x - \frac{\pi}{3})$ d) $f(t) = 3 \cos t + 1$

Justifique suas escolhas