Maria Carolina Cascino da Cunha

AS OPERAÇÕES DE MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO JUNTO A ALUNOS DE 5ª e 7ª SÉRIES

Dissertação apresentada como exigência parcial para obtenção do título de MESTRE EM ENSINO DA MATEMÁTICA à Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, sob orientação da Professora Doutora Tânia Maria Mendonça Campos.

PUC - SP

1997

BANCA EXAMINADORA

Resumo

Partindo das hipóteses que os alunos têm as concepções "multiplicação sempre aumenta" e "divisão sempre diminui", a pesquisa visa investigar concepções de alunos de 5ª e 7ª séries sobre multiplicação e divisão e se as mesmas interferem quando os alunos trabalham com estas operações no domínio dos decimais.

Os resultados, obtidos por meio de um teste diagnóstico, indicaram que os alunos têm as concepções "multiplicação sempre aumenta" e "divisão sempre diminui".

Baseados nesses resultados, construímos uma seqüência de atividades, buscando uma mudança de concepções relativa às operações de multiplicação e divisão.

Ao término da seqüência de atividades, elaboramos um teste final e entrevistas individuais, visando confirmarmos se os alunos haviam mudado as concepções.

Os resultados apontaram, dentre outras coisas, que as concepções "multiplicação sempre aumenta" e "divisão sempre diminui" estão muito interiorizadas pelos alunos e que provavelmente uma mudança de concepções só ocorreria se desde o início da vida escolar dos alunos a multiplicação e a divisão fossem introduzidas e trabalhadas por meio de diversas abordagens, não somente como adições repetidas e como subtrações sucessivas.

Agradecimentos

À Pontifícia Universidade Católica pela oportunidade que me foi dada para meu crescimento profissional e para contribuir com a educação do país.

À minha orientadora professora Doutora Tânia Maria Campos Mendonça pela orientação, incentivo, amizade e grande colaboração para o desenvolvimento deste trabalho.

À professora e amiga Doutora Sandra Magina pelas contribuições valiosas e tão importantes para o trabalho.

À professora Doutora Beatriz D'Ambrosio pelas grandes contribuições a este trabalho.

À amiga Silvia pelo apoio incansável e solidariedade em todos os momentos difíceis que foram vividos durante a realização desse trabalho.

Às amigas Nielce e Célia pela colaboração durante a aplicação do experimento.

Aos todos os colegas do Mestrado pelo adorável convívio e construção de momentos que para mim se tornarão inesquecíveis.

À direção, à professora Marília Centurión e aos alunos do Colégio Pueri Domus pela imensa colaboração e pela participação na seqüência de atividades.

À direção e aos alunos do Colégio Marco Polo pela participação nas entrevistas.

Dedicatória

À Deus pela presença constante.
Aos meus pais e irmãos por todo apoio.
Ao Warderley pela compreensão e amizade.
Às minhas avós Giuseppina e Carolina (em memória).

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

Desde o início de nossa carreira como docente, temos pensado em como se dá o processo de ensino/aprendizagem envolvendo a multiplicação e a divisão. Atuando especialmente no 1º grau, temos refletido sobre as dificuldades encontradas pelos alunos, na resolução de problemas envolvendo estas operações. Talvez não possamos definir quando as mesmas se iniciam, mas podemos dizer, baseados em nossa experiência, que elas persistem, acarretando dificuldades na aquisição de outros conceitos relacionados com estas operações. Parece-nos ainda que as concepções de multiplicação e divisão dos professores podem também interferir neste processo.

Valendo-se disso, faremos um estudo diagnóstico para investigarmos concepções de multiplicação e divisão junto a alunos de 5ª e 7ª séries, trabalhando tanto no domínio dos números inteiros positivos, quanto no domínio dos racionais. Em seguida, elaboraremos uma seqüência de atividades, na tentativa de superação das dificuldades então detectadas. Finalmente, faremos um teste final e entrevistas, e em seguida, apresentaremos os resultados obtidos.

O leitor encontrará no capítulo I os principais motivos para a realização desse estudo, a problemática existente ao redor do tema, bem como as principais pesquisas feitas na área.

No capítulo II realizaremos um breve estudo de aspectos históricos da multiplicação e da divisão, relacionados ao nosso tema. Buscaremos levantar obstáculos epistemológicos.

No capítulo III, numa tentativa de conhecermos como o saber matemático chega a sala de aula, analisaremos a Proposta Curricular de Matemática de 1º grau vigente e alguns dos livros didáticos mais comumente adotados pelas escolas, enfocando como se dá a abordagem de multiplicação e de divisão tanto nas séries iniciais, quanto no início do 1º grau maior. Nesse momento, faremos um levantamento de obstáculos didáticos.

No capítulo IV apresentaremos o experimento, no qual descreveremos a metodologia adotada. Esta compor-se-á por um estudo diagnóstico, uma seqüência de atividades, um teste final e entrevistas. Cada uma dessas fases, por sua vez, será subdividida em (a) desenho do experimento referente à fase, (b) sujeitos, (c) material, (d) procedimento e (e) análise e discussão dos resultados referente à fase.

Finalmente, no capítulo V apresentaremos as conclusões do nosso estudo, justificando a sua importância.

O capítulo VI listará em ordem alfabética nossas referências bibliográficas.

CAPÍTULO I:

ESTUDO DO PROBLEMA E FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

O objetivo de nossa pesquisa é investigar concepções sobre as operações de multiplicação e divisão em alunos de 5ª e 7ª séries.

Na busca de nosso objetivo e embasados em nosso referencial teórico, faremos um levantamento das principais pesquisas que tratam do tema, um breve estudo de aspectos históricos da multiplicação e da divisão, um estudo de uma das fases da transposição didática, para finalmente realizarmos nosso experimento, e posteriormente apresentarmos as conclusões de nosso trabalho. Nosso experimento será composto de quatro fases: teste diagnóstico, seqüência de atividades, teste final e entrevista.

1.1. REFERENCIAL TEÓRICO

Pesquisas sobre o desenvolvimento de conceitos matemáticos nas crianças têm mostrado que os mesmos se desenvolvem de maneira inter-relacionada. Os estudos de Vergnaud (1983, 1987, 1988, 1990, 1994) mostram que um conceito não se refere apenas a um tipo de situação, bem como uma situação não pode ser analisada por meio de um único conceito. Ou ainda, um conceito geralmente não é desenvolvido de forma isolada, mas em inter-relação com outros conceitos, por meio de uma variedade de problemas e com a ajuda de simbolismos. Por exemplo, um trabalho com as estruturas aditivas exige o conceito de medida, de comparação, diferença, o conceito de número natural, dentre outros. Por isso, visando entendermos melhor a aquisição e o desenvolvimento de conceitos, em relação a situações e problemas, introduziremos a seguir a noção de campo conceitual, segundo Vergnaud (1988).

Assim, um campo conceitual é definido como um conjunto de situações e problemas, cuja apropriação requer o domínio de vários conceitos de naturezas diferentes. Todos os conceitos têm um domínio de validade restrito, que pode variar de acordo com a experiência e com o desenvolvimento cognitivo de cada indivíduo. Em especial, nossa pesquisa terá como suporte teórico o campo conceitual multiplicativo (sobretudo as operações de multiplicação e divisão), o qual tem como pressuposto a interligação entre conceitos, tais como relações, transformações, leis de composição de operações, operações envolvendo uma ou mais multiplicações ou divisões, etc. (Vergnaud, 1983).

O campo conceitual multiplicativo é simultaneamente um aglomerado de situações e um aglomerado de conceitos. Um conceito adquire significado por meio de uma variedade de situações, e diferentes aspectos de um mesmo conceito e operações estão envolvidas em diferentes situações. É claro que as estruturas multiplicativas relacionam-se parcialmente com as aditivas, mas elas também têm a sua própria organização intrínseca, a qual não é redutível aos aspectos aditivos.

Também visando interpretarmos o comportamento de uma criança frente a problemas aritméticos elementares, Vergnaud (1982) acredita ser essencial distinguir dois tipos de cálculo. O “cálculo numérico” que significa as operações ordinárias de adição, subtração, multiplicação e divisão e o “cálculo relacional” que significa as operações de pensamento que são necessárias para reconhecer as relações envolvidas em uma situação. Este cálculo pode ser geralmente expresso por meio de teoremas (quando é válido), ou em termos de falsas inferências (quando não é válido). Esses teoremas ou inferências não são necessariamente expressos ou explicados pela criança; eles podem ser somente hipotetizados pela observação das ações das crianças. Vergnaud chama-os teoremas-em-ação.

Em outras palavras, teoremas-em-ação são relações matemáticas que os alunos levam em consideração quando escolhem uma operação ou uma seqüência de operações para resolver um dado problema. Eles geralmente não são expressados verbalmente, podendo até estarem errados. Eles aparecem espontaneamente em contextos simples, não tendo um valor universal, mas nos permitem traçar o conhecimento matemático no nível de esquemas e ação.

Tomemos como exemplo: Carla quer comprar 4 carrinhos de plástico. Eles custam 5 reais cada. Quanto ela precisa ter para pagar? (Vergnaud, 1988).

(a) 5 + 5 + 5 + 5 = 20.

(b) 4 . 5 = 20

(c) 5 . 4 = 20

(d) 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 20

O procedimento (b) envolve um processo de pensamento que pode ser expresso como 4 carros custam 4 vezes mais do que 1 carro, ou seja, o custo (dos 4 carros) = 4 . custo (de 1 carro). Isso pode ser expresso mais genericamente no simbolismo matemático por meio da aplicação f: $Z \rightarrow Z$ tal que $f(n \cdot 1) = n \cdot f(1)$, para qualquer número inteiro n, que é um caso especial de uma afirmação ainda mais genérica $f(\lambda \cdot 1) = \lambda \cdot f(1)$, para qualquer número real λ. É a partir dessa aplicabilidade mais ampla que um teorema-em-ação atinge sua força intelectual.

No procedimento (c) podemos identificar como teorema-em-ação: “multiplica-se o número de carros pelo preço de um carro”. O teorema que o formaliza é bem diferente, ele pode ser expresso no simbolismo matemático como $f(x) = ax$. O procedimento (b) é mais uma concatenação significativa do procedimento (a). O custo de 4 carros é igual ao custo de 1 carro, mais o custo de 1 carro, mais o custo de 1 carro, mais o custo de 1 carro. Quando formalmente expresso temos: $f(1 + 1 + 1 + 1) = f(1) + f(1) + f(1) + f(1)$ ou $f(4 \,.\, 1) = 4 \,.\, f(1)$.

O procedimento (d) não é significativo em termos de carros e custos. 20 reais não podem ser 5 carros + 5 carros + 5 carros + 5 carros. As crianças aparentemente estão conscientes disso e quase nunca usam o procedimento (d). Há uma forte assimetria entre os procedimentos (b) e (c). Em termos conceituais eles não são o mesmo, embora possam ser considerados matematicamente equivalentes por causa da comutatividade da multiplicação.

Em resumo, geralmente os alunos usam teoremas-em-ação em domínios de contextos fáceis e valores numéricos simples. No entanto, eles são a primeira base intuitiva que os professores podem utilizar para estender e formalizar os conceitos dos alunos. Os professores podem expressar e objetivar os teoremas-em-ação, ajudando assim os alunos a estender o uso dessas inter-relações para situações mais complexas.

Utilizaremos ainda como referencial teórico, as noções de transposição didática, obstáculos, concepção e variáveis, entre outras. No que segue, elas serão retomadas.

1.2. A MULTIPLICAÇÃO E A DIVISÃO

Parece que, normalmente, a escola explora bastante as continuidades entre o raciocínio aditivo e multiplicativo, nas quais a multiplicação é vista como um modo mais rápido de fazer adições repetidas. Contudo, o trabalho de Piaget (1977), mostra que a multiplicação não trata somente de um modo mais rápido de fazer adições repetidas, mas de uma operação que requer um pensamento mais elaborado.

Ainda segundo Piaget, a adição é uma operação inerente a construção de número. Multiplicação, entretanto, é uma operação mais complexa, que é construída em um nível maior de abstração do que a adição.

Sendo assim, Piaget (1987) salienta em seu trabalho, diferenças entre a adição e a multiplicação, tais como o número de níveis de abstração e o número de relações de inclusão que a criança faz simultaneamente.

Ilustrando o que já foi mencionado, tomemos como exemplo a figura 1a (Clark & Kamil, 1996). Aqui o pensamento aditivo envolve somente um nível de abstração, no qual cada unidade de *três* que a criança adiciona é formada por *três* unidades de *um*. A criança também faz relações de inclusão em somente um nível; ela inclui *um* em *dois*, e *dois* em *três*, chegando assim ao *doze*. Os grupos são combinados sucessivamente: 3 + 3, depois 6 + 3, e finalmente 9 + 3.

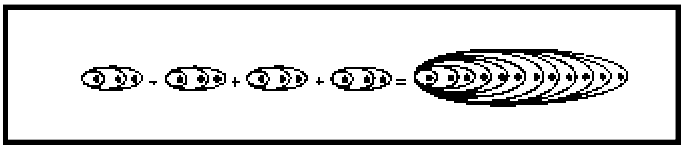


Figura 1(a): pensamento aditivo (3+3+3+3).

Em contrapartida, a multiplicação envolve necessariamente dois tipos de relações não requeridas na adição: (a) a correspondência muitas-para-uma entre unidades de um e uma unidade de três (ver Nunes & Bryant, 1996); e (b) a composição de relações de inclusão em mais do que um nível.

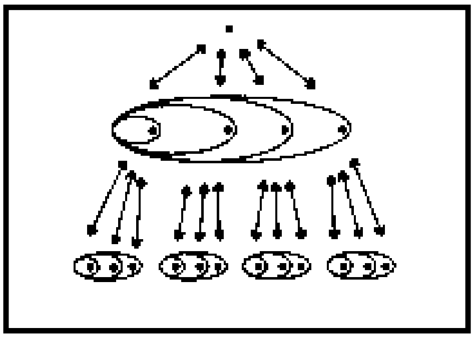


Figura 1 (b): pensamento multiplicativo (4 x 3).

A figura 1(b) ilustra que estabelecer correspondências entre *três* unidades de *um* em uma unidade de *três* requer um nível maior de abstração do que pensar somente em unidades de *um*. Existem relações de inclusão representadas horizontalmente no nível de unidades de *um*, onde *um* é incluído em *dois* e *dois* em *três*, e no nível de unidades de *três*. Relações de inclusão também são representadas verticalmente. Na realidade, temos na horizontal, uma unidade de *um* contida em uma unidade de *um* e contida em mais uma unidade de *um*, formando uma unidade de *três*. Sendo assim, *doze* (resultado de 4 x 3) representa um grupo formado de quatro subgrupos, sendo cada um deles formados de *três* unidades cada. As setas apontam em ambas as direções para ilustrar que todas estas relações devem ser realizadas simultaneamente. Então, quando a criança se torna capaz de pensar multiplicativamente, ela pode pensar simultaneamente sobre unidades de *um* e sobre unidades de mais do que *um*.

Nesse sentido, com o objetivo de explorar as descontinuidades entre o raciocínio aditivo e o multiplicativo, Hoyles, Noss & Sutherland (1991,1992) trabalharam com jogos multiplicativos e com problemas de ampliação, com alunos de 13 anos de uma escola pública de Londres.

Uma das tarefas solicitadas era: “ Por exemplo, tomando 13 como ponto de partida, como fazer para alcançar o número 100 por meio de sucessivas multiplicações?” A tarefa foi feita em pares e os alunos se revezavam. Cada rodada (exceto na primeira) envolvia multiplicar o resultado da multiplicação precedente por um novo número que traria o produto seguinte tão próximo quanto possível do alvo. Como os alunos facilmente ultrapassaram o alvo, eles se colocaram frente a uma questão: “Como obter um número menor que os fatores utilizando a multiplicação?” Ou ainda, a multiplicação diminui? Com esta atividade, os pesquisadores observaram que a idéia dos alunos é que “multiplicação aumenta”, na medida em que não se explora continuamente as descontinuidades entre o raciocínio aditivo e o multiplicativo.

Inúmeras pesquisas têm mostrado que crianças apresentam um fraco desempenho em problemas relativos a multiplicação e a divisão (Anghileri e Johnson, 1988; Kouba et al. 1988). Problemas de multiplicação e divisão nos níveis elementares usualmente se limitam ao domínio dos inteiros positivos. Esta situação não reflete a realidade, podendo levar as crianças a concluir falsamente que a "multiplicação sempre aumenta" e a "divisão sempre diminui" (Greer, 1988).

Nessa mesma linha, Harel, Behr, Post e Lesh (1994) em recente esforço para um melhor entendimento do campo conceitual multiplicativo, sobretudo a fase de transição das estruturas aditivas para as multiplicativas, investigaram a questão da incongruência. As concepções de que "multiplicação aumenta" e "divisão diminui" têm validade quando se fala no domínio dos números inteiros positivos, mas são incongruentes, por exemplo, no domínio dos números racionais, podendo bloquear as estratégias de sucesso para vários problemas multiplicativos envolvendo quantidades decimais ou frações.

Igualmente Hart (1981), no curso de um vasto trabalho (500 alunos, 13-15 anos), sublinhou, dentre outras coisas, a dificuldade dos alunos em ultrapassar as estratégias aditivas. Eles insistem também sobre as concepções implícitas (em sua maioria) das generalizações tiradas do domínio dos inteiros positivos, como por exemplo, a "multiplicação aumenta" e a "divisão diminui".

Além disso, pesquisas também mostram que as soluções de problemas multiplicativos podem ser afetadas pelo tipo de multiplicador (Greer, 1988). Problemas, cujo o multiplicador é um número inteiro, podem ser significativamente mais fáceis do que problemas com multiplicadores decimais maiores que 1, e ainda mais fáceis do que aqueles cujo o multiplicador é um decimal positivo menor que 1. Ainda foi mostrado que não existe diferença significativa de dificuldade em problemas cujo o multiplicando é um número inteiro, decimal maior ou menor do que 1 (Luke, 1988).

Segundo Fischbein et al. (1985), o modelo associado com problemas de multiplicação é o de adições repetidas. Um dos fatores chamado multiplicador, consiste no número de coleções equivalentes, enquanto o outro fator, chamado multiplicando, consiste no tamanho de cada coleção. Estas concepções aparentemente levam o sujeito a intuir a regra que os multiplicadores devem ser números inteiros, resultando em uma outra regra: o produto deve ser maior do que o multiplicando, ou ainda, a multiplicação aumenta (Bell et al., 1984; Hart, 1984; Bell et al., 1981).

Complementando essa idéia, Schwartz (1988) aponta uma série de falhas em se introduzir a multiplicação como uma maneira eficiente de fazer adições repetidas. Ele dá uma abordagem dimensional diferente, a qual focaliza o tipo de referente em questão, uma quantidade extensiva ou intensiva. Na adição e na subtração trabalhamos com quantidades extensivas, aquelas que podem ser contadas ou medidas diretamente, como por exemplo, o número de biscoitos ou a altura de uma pessoa.

Enquanto na quantidade extensiva o referente é uma entidade simples (unidimensional). Na intensiva o referente envolve duas entidades (bidimensional), isto é, estruturas multiplicativas combinam duas magnitudes com diferentes referentes para produzir uma quantidade cujo referente não é o mesmo que o multiplicando ou que o multiplicador. Por exemplo, ao dizermos 5 balas, o referente é *balas* (uma entidade), uma quantidade extensiva, mas ao dizermos 60 quilômetros por hora, a quantidade é intensiva, na medida em que os referentes são quilômetros e hora (duas entidades). Ele sugere a possibilidade de se construir seqüencialmente a seguinte tabela de quantidades extensivas.

Por exemplo:

5 balas/pacote x 6 pacotes
5 balas correspondem a 1 pacote
10 balas correspondem a 2 pacotes
15 balas correspondem a 3 pacotes
20 balas correspondem a 4 pacotes
25 balas correspondem a 5 pacotes
30 balas correspondem a 6 pacotes

É importante observar que a multiplicação de uma quantidade com o referente *balas/pacote* e uma quantidade com o referente *pacotes* gera uma quantidade cujo referente não é *balas/pacote* e nem *pacotes*. No caso seria *balas*. Isto depende então, de nossa habilidade em traduzir a relação expressa pela quantidade intensiva *(5 balas/pacote)* em uma associação entre duas quantidades extensivas, *balas* e *pacotes*.

Schwartz acrescenta ainda, que também existem falhas em se introduzir a divisão como um modo eficiente de solucionar problemas de distribuição. Por exemplo, suponhamos que se tenha *30 balas* para serem distribuídas em *6* *pacotes*, então temos *30 balas/6 pacotes*. Note que o quociente de uma quantidade com o referente *balas* e uma quantidade com o referente *pacotes* gera uma quantidade cujo referente não é nem *balas* e nem *pacotes*. No caso é *balas/pacote.*

Podemos dizer que os modelos de multiplicação e divisão acima citados, aplicados aos números inteiros positivos, permitem aos alunos pensar que:

- A multiplicação sempre resulta numa nova quantidade que é maior em magnitude do que os fatores do produto;

- A divisão sempre resulta num quociente que é menor em magnitude do que o dividendo.

Essas idéias podem levar os alunos a acreditar que o resultado, obtido por meio de cálculos com quantidades do mesmo tipo, tem sempre o mesmo referente, fato este que não corresponde a realidade, como será discutido a seguir.

Entendemos que é possível definir um conjunto básico de operações binárias com quantidades que podem ser medidas ou contadas. Essas operações podem ser usadas para gerar novas quantidades, que podem, ou não, ter novos referentes. A composição de duas quantidades matemáticas para compor uma terceira quantidade derivada, pode ter duas formas, composições que preservam referente ou composições que transformam referente.

Compor duas quantidades para produzir uma terceira quantidade, é, fundamentalmente, um tipo de composição que os processos aritméticos da adição e da subtração permitem. Tais composições são denominadas composições que preservam referente. As composições de duas quantidades iguais ou distintas, para produzir uma terceira, em geral diferente das duas quantidades originais, são denominadas composições que transformam referente.

É preciso salientar que a multiplicação e a divisão são composições que transformam referente, enquanto na adição e na subtração o referente é preservado.

Em relação a divisão, Fischbein et al. (1985) sugeriram dois modelos intuitivos. Um associado a repartir, ou problemas de partição e outro com medida, ou problemas de quota.

No modelo de partição, um objeto, ou coleção de objetos, é repartido (particionado) em um número de fragmentos ou subcoleções equivalentes. O tamanho do objeto é representado pelo dividendo, o número de fragmentos equivalentes, ou subcoleções, é representado pelo divisor e o tamanho de cada fragmento, ou subcoleção, é representado pelo quociente. Como resultado, certas regras são intuitivas e tornam-se associadas a esse modelo: (1) O divisor deve ser um número inteiro, (2) o divisor deve ser menor que o dividendo e (3) o quociente deve ser menor que o dividendo, ou divisão diminui. Em outras palavras, esta última regra é derivada das duas outras iniciais.

O modelo de quota (medida) é associado com problemas nos quais se deseja encontrar quantas vezes uma dada quantidade está contida em uma outra. Este modelo pode levar o aluno a criar uma concepção que os divisores sejam menores que os dividendos.

As crianças são competentes e criativas na modelagem de ambos os tipos de divisão. Elas representam de maneira diferente os problemas que envolvem divisão partitiva e os que envolvem divisão quotitiva (Kouba, 1989). Por exemplo:

- Na resolução de um problema de medida no qual 88 giz de cera devem ser agrupados 8 em cada caixa, muitas crianças poderão contar os 88 giz de cera fazendo grupos de 8, até que os 88 sejam utilizados.

- Na resolução de um problema de partição no qual 88 giz de cera devem ser colocados igualmente em 11 caixas, as crianças poderão utilizar estratégia tentativa-e-erro. Assim, elas contam os 88 giz, em seguida tentam supor o número que deve ser colocado em cada caixa, e observam se a suposição resultará em 11 grupos. Se não resultar, elas tentam outra vez, e assim sucessivamente. As crianças podem ainda tentar a estratégia de repartir, colocando um por um nas 11 caixas e contando o número de caixas até chegar à resposta. Algumas crianças podem utilizar uma abordagem construtiva em conjunto com as estratégias de tentativa-e-erro ou de repartir.

Pensando nos aspectos acima mencionados envolvendo a multiplicação e a divisão, foi realizado uma pesquisa com 20 professores das séries iniciais e 20 professores licenciados em Matemática (Campos, T. et al, 1996). Esta pesquisa constou de dois testes. Um de multiplicação, contendo cinco questões e outro de divisão, contendo quatro questões. As questões abordadas trataram dos seguintes conteúdos: (a) área de regiões retangulares; (b) criação de situações-problema envolvendo divisão de números naturais (enfocando tanto o raciocínio partitivo quanto o quotitivo); (c) divisão de frações, bem como multiplicação de números decimais. Além disso , uma das questões enfocou dupla-proporção. As questões foram baseadas nos estudos de Simon (1993), Simon & Blume (1994) e Thompson & Thompson (1994). Após uma análise cuidadosa dos dados obtidos, constatou-se uma grande dificuldade dos professores ao se depararem com situações envolvendo operações que transformam referente (mencionadas anteriormente). Verificou-se ainda que, embora esses professores tenham conhecimento de algoritmos, eles muitas vezes não possuem a compreensão dos mesmos.

No Brasil, estudos também têm sido feitos sobre o ensino dessas operações. Por exemplo, o SAEB (1995), Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica, realizou um levantamento de informações a fim de subsidiar seus três eixos de estudo, dos quais nos interessa no momento apenas um deles: o rendimento do aluno.

Tais testes de rendimento foram elaborados com base nos conteúdos mínimos que eram comuns às propostas curriculares dos estados. Foi testado o desempenho escolar dos alunos das 5ª e 7ª séries (dentre outras) em algumas disciplinas, incluindo a Matemática. Algumas questões do teste exigiam apenas memorização do conteúdo, outras envolviam a compreensão do que era solicitado ou a resolução de um problema ou de uma situação envolvendo a aplicação de algum conteúdo já aprendido. Na 5ª série, apenas 3,1% dos alunos obtiveram sucesso entre 50% e 100% das questões do teste de Matemática. Na 7ª série este índice não foi muito diferente, 5,9%. O desempenho dos alunos foi fraco nas questões relativas a números decimais e frações, dentre outros.

1.3. LEVANTANDO HIPÓTESES

Entendemos que os conceitos de multiplicação e divisão envolvidos no campo conceitual multiplicativo tornam-se essenciais para a formação matemática da criança, constituindo uma das fundamentações de todo o conhecimento matemático subseqüente.

Sendo assim, acreditamos que os alunos das séries a serem investigadas têm como concepções de multiplicação e de divisão que “multiplicação sempre aumenta e divisão sempre diminui”, sendo estas decorrentes de como este saber é ensinado, ou seja, acreditamos que elas sejam decorrentes do modo de como a escola introduz o conceito para os alunos nas séries iniciais e também como ele é reforçado durante toda a vida escolar desses alunos.

1.4. CONSIDERAÇÕES IMPORTANTES

Considerando a idéia defendida por Nehring (1996) de que a concepção matemática que os professores têm e transmitem por meio de suas aulas, evidencia uma matemática pronta, definitiva, teórica e distante da realidade, revestida de uma abstração e que serve para justificar, muitas vezes, as dificuldades que os alunos encontram na escola. Considerando ainda, que talvez esta concepção tenha como uma das origens os livros didáticos, podendo ser observada em situações concretas de sala de aula, bem como no diálogo com professores, elaboraremos um breve estudo de uma das fases da *transposição didática*, buscando entender como se dá a transmissão dos conceitos de multiplicação e divisão. Com isso, tentaremos levantar os *obstáculos didáticos*, as *concepções* errôneas relativas à estas operações, levando em conta as *variáveis* envolvidas, pois acreditamos que as mesmas possam interferir no processo.

Segundo Chevallard, uma *transposição didática* é uma série de transformações e adaptações pelo qual passa o *saber sábio* (conjunto de conhecimentos válidos para toda uma comunidade e que estão publicados nas revistas científicas ou apresentados nos meios de comunicação) até tornar-se ensinável. O saber que encontramos nos livros didáticos é o escolar, sendo o professor o responsável pelas adaptações que o mesmo sofre até torná-lo ensinável, ou seja, o saber ensinado. Nós focalizaremos em nosso trabalho principalmente essa etapa da transposição didática.

Buscando evidenciar a pluralidade dos pontos de vista possíveis num mesmo objeto matemático, diferenciar as representações e os modos de tratamento associados a ele, evidenciar sua adaptação à resolução de problemas, bem como diferenciar o saber que o ensino quer transmitir e os conhecimentos efetivamente construídos pelos alunos, introduziremos a noção de concepção.

Segundo Duroux (1983), no processo de aquisição de conhecimentos, certas situações são privilegiadas em relação à outras, permitindo o aparecimento de conhecimentos locais, operando sobre subconjuntos do campo conceitual. Esse saber local é chamado de *concepção*.

As concepções na Didática da Matemática podem ser vistas como:

- as “concepções matemáticas” a priori para uma noção dada;
- as concepções desenvolvidas pelos alunos no seu ambiente cultural ou no quadro de um processo de aprendizagem.

Sendo assim, as concepções tornam-se modelos que o pesquisador constrói visando analisar as situações do ensino e os comportamentos cognitivos dos alunos. Elas permitem interpretações, previsões e construção de modelos, tendo em vista descrever somente uma parte do comportamento mental do aluno, ou seja, uma parte de seus conhecimentos em uma dada situação.

Pela incapacidade de compreender certos problemas ou de resolvê-los com eficácia ou ainda pelos erros, que para serem superados, deveriam conduzir a instalação de um novo conhecimento, manifesta-se os *obstáculos*.

Para Brosseau, o erro deve ser visto como uma manifestação explícita de concepções espontâneas (integradas por meio de representações cognitivas), que pode se tornar um obstáculo à aquisição e ao domínio de novos conceitos. Nesse sentido, a noção de obstáculo é necessária e muito importante, na medida em que visa um saber que está sendo construído pelo aluno, e a construção desse conhecimento passa pelos conhecimentos espontâneos (provisórios). Portanto, um obstáculo não representa uma dificuldade ou uma falta de conhecimento, mas sim uma concepção ou até um conhecimento que pode produzir respostas corretas em um dado contexto e respostas falsas fora deste.

Brosseau (1976) distingue várias origens para os obstáculos identificados na Didática. Alguns deles serão abordados neste trabalho, a saber:

- Obstáculos epistemológicos: ligados a construção do saber matemático. São resultado de verdadeiras dificuldades conceituais, gerando bloqueios ao desenvolvimento da aprendizagem. São colocados em evidência pelas pesquisas dos historiadores de Matemática, quando estes se colocam sobre o terreno da Epistemologia.

- Obstáculos didáticos: aqueles que parecem depender apenas de uma escolha ou de um projeto do sistema educativo, sendo resultados de uma transposição didática que o professor pode dificilmente renegociar no quadro restrito da classe. Sendo assim, eles estão ligados as condições nas quais os conhecimentos são abordados em classe. Eles são muito importantes em nossa investigação, pois nascem da escolha de uma ou outra estratégia de ensino, deixando se formar, no momento da aprendizagem, *conhecimentos errados* ou *incompletos* que se revelarão mais tarde como *obstáculo* ao *desenvolvimento da conceitualização*.

Segundo Douady (1986) existe uma distinção entre ensino e aprendizagem que nos permite, independente do ponto de vista, refletirmos sobre a distância existente entre os objetivos de um ensino e a realidade de aquisição dos alunos. Estão em jogo no funcionamento do processo de aprendizagem, numerosas variáveis que o condicionam. Elas podem ser *variáveis de contexto*:

- *Do lado do professor:* escolha dos objetivos de ensino, concepções dos professores e suas relações com a Matemática, escolhas pedagógicas e a prática em sala de aula;

- *Do lado do saber:* elaboração de novas ferramentas conceituais e diversificação do saber matemático (Álgebra, Estatística, Geometria, etc.), interdisciplinaridade, entre outros;

- *Do lado do aluno:* a origem e história do aluno, sua vivência das aprendizagens fundamentais, seu estado sociológico e psicológico.

Podem ser ainda, variáveis didáticas, aquelas estão a disposição do professor e que determinam a situação didática. Neste caso, diferentes escolhas provocam modificações no nível das estratégias a serem utilizadas. Dentre elas, nos deteremos especialmente nas *variáveis de situação*, nas quais estão compreendidas: a escolha de atividades, resolução de problemas, trabalho individual ou em grupo, tempo previsto para a aprendizagem, entre outros.

Os conhecimentos colocados em jogo ou elaborados numa situação didática vão depender da escolha das variáveis didáticas. Sua determinação é um ponto importante na teoria. Uma primeira escolha de variável pode servir, dentre outras coisas, para o encaminhamento da estratégia a ser utilizada, ou seja, dependendo da escolha das variáveis o aluno pode escolher um ou outro procedimento diferente para resolver o problema.

Neste trabalho, a escolha dessas variáveis, bem como a identificação dos obstáculos, terão papel importante nas atividades didáticas que serão propostas adiante.

1.5. SUMÁRIO

Então visando investigarmos concepções dos alunos de 5ª e 7ª séries relativas as operações de multiplicação e divisão, primeiramente elaboraremos um estudo diagnóstico, ou seja, um pré-teste. Com isso, esperamos detectar algumas dificuldades dos alunos relativas a estas operações, analisando o desempenho dos mesmos. A partir daí, elaboraremos atividades na busca da superação das dificuldades então detectadas. Em seguida, faremos um teste final, em correspondência matemática com o teste diagnóstico, e entrevistas, a fim de verificarmos se os alunos superaram as dificuldades detectadas anteriormente. Os dados obtidos serão analisados de modo quantitativo e posteriormente, qualitativo.

Para tanto, faremos um breve estudo de aspectos históricos, buscando identificar obstáculos epistemológicos, bem como um breve estudo da transposição didática, a fim de verificarmos a abordagem da multiplicação e da divisão, e ainda, levantarmos obstáculos didáticos.

CAPÍTULO II:

UM BREVE ESTUDO DE ASPECTOS HISTÓRICOS DA MULTIPLICAÇÃO E DA DIVISÃO

Tão cedo quanto o tempo de história registrada, desenvolveram-se o conceito de número e o processo de contagem.

Os procedimentos usados para se efetuar cálculos matemáticos básicos, tais como a multiplicação e a divisão, estiveram sempre ligados as limitações implicitamente impostas pelo sistema notacional em uso. Assim, talvez as formas escritas ou algoritmos foram influenciados pelos materiais de escrita disponíveis na época. Baseados nisso, vamos contar um pouco da história da multiplicação e da divisão.

2.1. SOBRE A DEFINIÇÃO DE MULTIPLICAÇÃO

Uma das melhores definições elementares de multiplicação refere-se aos números inteiros, sendo igualmente uma das mais velhas em nossa linguagem. Em The Crafte of Nombrynge (1300) ela aparece como sendo: multiplicação é uma maneira de representar coisas na forma de números, na qual um número contém tantas vezes um outro escrito numa potência de 2. A mesma definição é encontrada na Aritmética de Maximus Planudes (1340), na primeira Aritmética impressa (1478), na primeira Aritmética comercial notável (1484), e em outros inúmeros trabalhos. Recorde (1542) estabeleceu o modelo inglês dizendo: multiplicação é uma operação $i \cdot j$, que é uma soma produzida gerando um terceiro número, que representa tantas vezes o primeiro número contém o segundo.

Uma definição mais refinada incluindo a noção de razão, foi estabelecida para multiplicadores fracionários aparecendo ocasionalmente nos primeiros livros impressos, como em Huswirt (1501).

2.2. TERMINOLOGIA DA MULTIPLICAÇÃO

Dos termos aplicados, *"multiplicand*" é meramente uma contração de *numerus multiplicandus* (números que devem ser multiplicados). Na maioria dos antigos livros de latim impressos, ele aparece de forma integral, mas ocasionalmente o *numerus* foi se perdendo, ficando somente *multiplicandus*, e isto levou aqueles que não eram escritores de latim a usar o termo simples. Alguns escritores de latim sugeriram "*multiplicatus"*. Em seus vernáculos, porém, muitos escritores tendiam a não usar termos técnicos, simplesmente falando do número multiplicado.

A palavra "multiplier" (multiplicador) teve os mais variados cursos. Tendo em vista que a palavra *numerus* freqüentemente era abandonada pelos escritores de latim em suas traduções, o termo técnico apareceu como uma palavra simples, com semelhantes invariantes, tais como *multiplicans*, *moltiplicante*, *multiplicator*, *multipliant* e *multiplier* (tendo o mesmo significado que multiplicador).

A palavra produto poderia ter sido usada como o resultado de qualquer outra operação aritmética tanto quanto é para a multiplicação. Ela significa simplesmente um resultado. Contudo, ela foi usada em outras operações por muitos escritores, e sua especial aplicabilidade para o resultado da multiplicação é comparativamente recente.

Os autores de antigos livros geralmente aceitavam o sensível fato de não se ter um nome especial para o resultado da multiplicação. Alguns deles usavam soma ou soma produzida, ao passo que outros defendiam *“factus”* (fator).

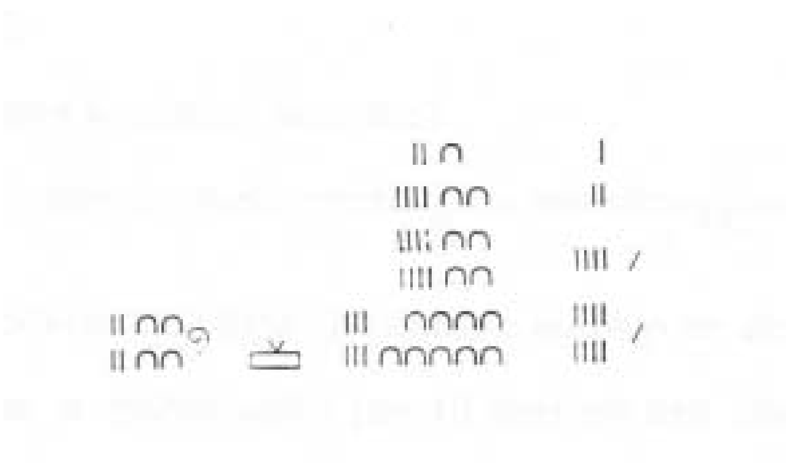
Finalmente, porém, o *numerus* foi deixado de lado de *numerus productus*, e produto permaneceu.

2.3. OS PROCESSOS DE MULTIPLICAÇÃO

2.3.1. A Multiplicação no Egito

No Egito, a operação fundamental era a adição. Por isso, a subtração era definida em termos de adição, não podendo existir sem ela. Já as operações de multiplicação e divisão eram efetuadas no tempo de Ahmes por sucessivas “duplações”, baseados no fato que qualquer número inteiro pode ser representado como uma soma de potências de 2. Nossa palavra multiplicação, na verdade, sugere o processo egípcio.

É possível que na Antigüidade, inúmeras pessoas e seus sucessores por muitas gerações, tenham feito uso deste método, pois ele aparece em muitos livros do Renascimento. O problema 32 do Papirus Rhind mostra o processo usado pelos egípcios para calcular 12 **.** 12. Ele está ilustrado a seguir (a leitura deve ser feita da direita para a esquerda).



A ilustração corresponde a seguinte: (a leitura deve ser feita da esquerda para a direita).

1	______	12	
2	______	24	
\ 4	______	48	
\ 8	______	96	soma 144

Por exemplo, uma multiplicação de 69 por 19 seria efetuada somando 69 com ele mesmo para obter 138, depois adicionando a si próprio para alcançar 276, novamente duplicando para obter 552 e mais uma vez duplicando para obter 1104, que é, naturalmente, 16 vezes 69. Como 19 = 16 + 2 + 1, então o resultado da multiplicação de 69 por 19 é 1104 + 138 + 69, ou seja, 1311. Para simplificar, ao invés de hieróglifos, nós usaremos numerais hindo-arábicos:

#	1 . 69 = 69
#	2 . 69 = 138
	4 . 69 = 276
	8 . 69 = 552
#	16 . 69 = 1104
	19 . 69 = 1311

Nasce uma questão:

_ Este método sempre pode ser feito?

_ Sim, desde que se possa escrever o multiplicador (inteiro) como soma de potências de 2.

_ E sempre é possível fazer isto?

_ Sim. Podemos concluir então que o método egípcio é geral.

Para acelerar o processo e reduzir o número de símbolos que tinham que ser registrados, a multiplicação por 10 também era usada, sendo natural na notação hieroglífica decimal. A multiplicação por 10, seguida pela divisão por 2 (mediação), aparecia ocasionalmente em registros de multiplicação egípcia. Exemplos de cada uma destas são dados a seguir, nos quais o produto de 85 por 21 é retrabalhado pelo método modificado, e o produto de 16 por 41 inclui tanto a duplação quanto a mediação.

# 1 . 85 =	85
10 . 85 =	850
# 20 . 85 =	1700
soma	1785

1 . 41 =	41
10 . 41 =	410
5 . 41 =	205
soma	656

Existe também um exemplo contemporâneo do uso de duplações que pode ser encontrado hoje entre os camponeses russos. Para multiplicar de 49 por 28, primeiro duplica-se 28 e dividi-se pela metade 49, sucessivamente. Observe a ilustração:

49/1	49/2	49/4	49/8	49/16	49/32
49	24	12	6	3	1
1 . 28	2 . 28	4 . 28	8 . 28	16 . 28	32 . 28

Aqui 49 . 28 = (32 + 16 + 1). 28 = 896 + 448 + 28 = 1372 é o produto de 28 por 49.

2.3.2. A Multiplicação na Babilônia

O sistema numérico posicional babilônico tinha base sexagesimal. Por esta razão, suas tábuas de multiplicação estendiam-se a 59 x 59. Nós sabemos, por meio das inumeráveis tabuletas de barro que foram escavadas, que os babilônicos guardaram um conjunto completo de tábuas. Em uma dessas tabuletas aparece os múltiplos de um dos números entre um e cinqüenta e nove, organizados aqui e ilustrados na tábua para o sete. Aqui para simplificar, usaremos numerais hindo-arábicos.

7	vezes	1,	7
	vezes	2,	14
	vezes	3,	21
	....		
	....		
	vezes	19,	133
	vezes	20,	140
	vezes	30,	210
	vezes	40,	280
	vezes	50,	350
	....		

Uma tábua de multiplicação babilônica

A tábua de multiplicação completa consiste de cinqüenta e nove tabuletas.

2.3.3. Nosso Método de Multiplicação

Dos mais de uma dúzia de esboços para a multiplicação, que tem sido usados durante os últimos séculos, nós consideraremos somente o mais comum deles. Pacioli chamou a nossa forma comum de multiplicação de *"Multiplicatio bericocoli vel scachierij"* ou multiplicação por meio do tabuleiro de xadrez, e ela aparece em seu tratado da seguinte forma:

9 8 7 6

6 7 8 9

			8	8	8	8	4	
		7	9	0	0	8		
	6	9	1	3	3			
5	9	2	5	6				
6	7	0	4	8	1	6	4	soma

Os venezianos chamaram este método de *"per scachieri* (pelo xadrez), devido a sua semelhança com um tabuleiro de xadrez, enquanto os florentinos chamaram-no *"per bericuocolo"* (bolinhas vendidas nas feiras de Toscana usadas nos tabuleiros de xadrez).

Em Verona, ele era chamado *"per organetto"* (pelo órgão), devido a semelhança das linhas com as de um órgão, e *"a scaletta"* (a escada) era algumas vezes usado, devido aos seus poucos degraus como aparece na figura anterior. Este método não foi encontrado diretamente em Lilavati (ver Smith, 1958), mas dois semelhantes estão ilustrados abaixo.

[1]

```
  135
 12
 12 (1 . 12)
  36 (3 . 12)
   60 (5 . 12)
 1620
```

[2]

```
  135
  12
 135 (1 . 135)
  270 (2 . 135)
 1620
```

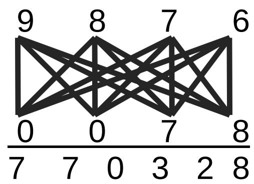
2.3.4. Método Castelo

Em alguns países da Europa, a multiplicação é feita pelo método castelo, no qual se começa com o primeiro dígito do multiplicador adicionando-se o número de zeros necessários em cada linha, conforme o seguinte exemplo:

```
 4 1 7 6                0
 8 7 3 2                2
-------------------------
     3 4 9 2 8 0 0 0  (4 . 8732)
         8 7 3 2 0 0  (1 . 8732)
         6 1 1 2 4 0  (7 . 8732)
           5 2 3 9 2  (6 . 8732)
     3 6 4 6 4 8 3 2     0
```

2.3.5. Multiplicação em Cruz

O quarto método de Pacioli publicado em Suma (1494) recebeu o nome de "multiplicação em cruz". Ele o chamou de *"crocetta"* ou *"casella",* dizendo ser mais fantástico e engenhoso que os outros métodos. Sua mais elaborada ilustração está reproduzida a seguir para o produto de 78 por 9876.



2.3.6. Método do Quadrilátero

Um outro método interessante de multiplicação da Antigüidade é o método do quadrilátero. Ele é praticamente o método do tabuleiro de xadrez mais compactado.

Observe a localização do multiplicador e do multiplicando na seguinte ilustração. O resultado final é obtido por meio da adição ao longo das diagonais.

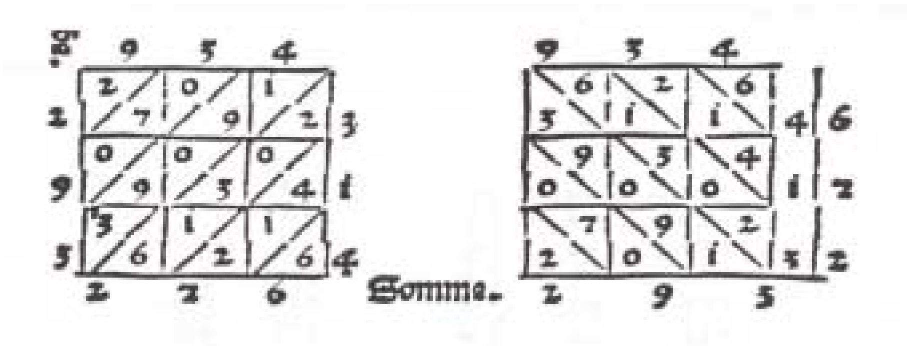
			8	7	3	2		
			3	4	9	2	8	4
				8	7	3	2	1
			6	1	1	2	4	7
			5	2	3	9	2	6
3	6	4	6	4	8	3	2	

Similarmente ao método do quadrilátero apareceu o método rede ou da gelosia, que foi usado pelos árabes e hindus.

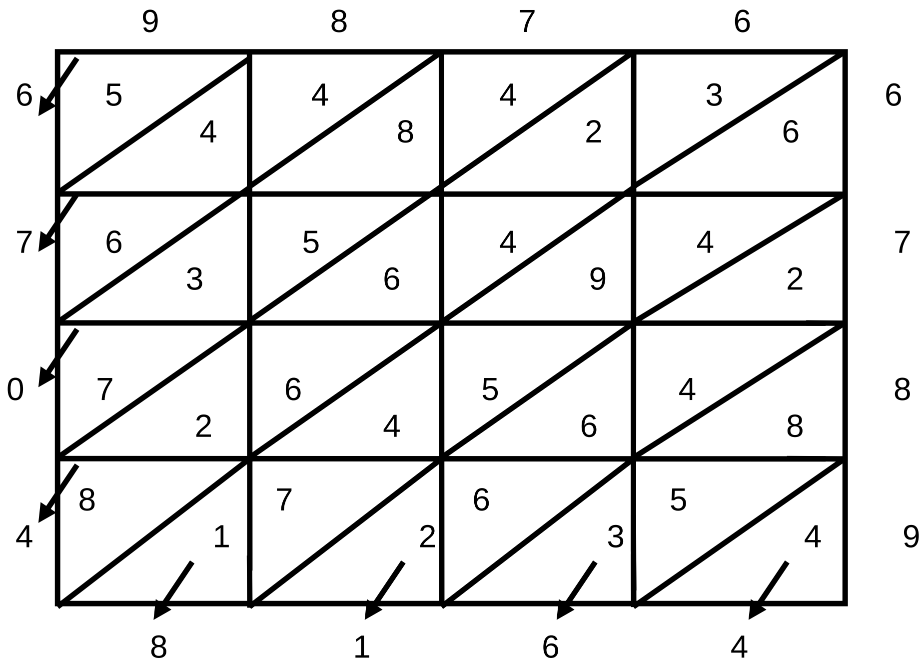
2.3.7. Método Rede ou da Gelosia

Este método foi talvez o mais popular método de multiplicação longa. Por ter aparecido em um comentário em Lilavati e em outros trabalhos hindus, acreditamos que seu desenvolvimento provavelmente tenha se iniciado na Índia.

Da Índia ele passou para os trabalhos chineses, árabes e persas. Ele está muito bem ilustrado por dois exemplos da Aritmética de Treviso (1478).



Um outro exemplo ilustrando o método aparece a seguir:

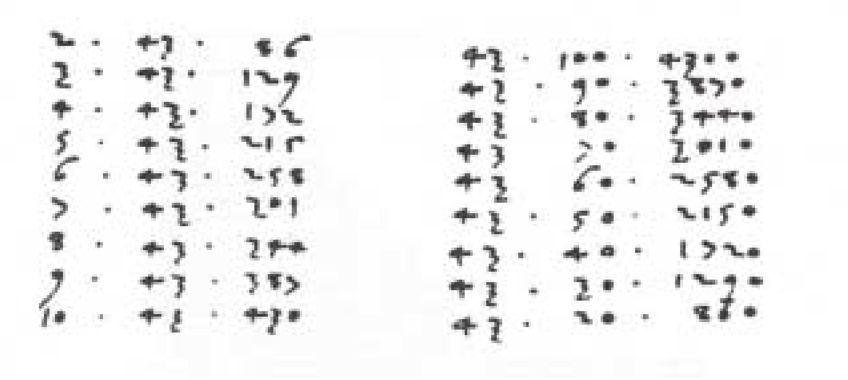


O multiplicando é colocado acima da rede e o multiplicador ao lado direito. Cada dígito do multiplicador é multiplicado por cada dígito do multiplicando e o produto é registrado nos quadrados apropriados da rede. O produto final é obtido por meio da soma ao longo das diagonais.

Apesar ter sido bastante popular na Europa, a dificuldade envolvendo a sua impressão levou as pessoas a abandoná-lo.

2.3.8. As Tábuas de Multiplicação

As mais antigas organizações de tábuas de multiplicação conhecidas são as por colunas.



Tábua de multiplicação medieval

Esta tábua foi encontrada sobre os cilindros babilônicos e comumente usada pelos escritores italianos na Aritmética Mercantilista. Em geral, o produto não aparecia mais do que uma vez; ou seja, depois que 2 x 3 = 6 fosse dado, 3 x 2 era julgado desnecessário, sendo esta uma visão dos aritméticos japoneses. As aritméticas mercantilistas italianas elaboraram, visando um fácil encaminhamento, tábuas com os produtos de todos os primos para 47 x 47, ou freqüentemente para 97 x 97. Os italianos obtiveram a idéia do East, Rhabdas (1341).

A segunda organização de tábua tinha a forma quadrada e era geralmente usada pelos escritores não mercantilistas. Conhecida como a "*Tábua pitagórica*" , da qual, como Hylles observou, "alguns afirmam ser Pitágoras o primeiro autor". Ela foi encontrada na Aritmética de Boethius e num trabalho atribuído a Bede (710). Seu aparecimento era comum nos trabalhos medievais e nos primeiros livros impressos. Alguns escritores cuidadosamente atribuíram sua elaboração a

Boethius, enquanto outros organizaram tábuas de adição, subtração e divisão sobre o mesmo plano, mas dando a elas o nome de Pitágoras.

Tábuas de multiplicação em formato triangular e quadrado.

A terceira forma de tábua tinha uma disposição triangular.

Widman (1489) fala dela como um esquema hebraico, censurando o fato dela provavelmente ser árabe.

Ela não era tão popular como as organizações de colunas e quadrados, embora ela tenha sido usada por escritores como Widman (1489), Gemma Frisus (1540), Recorde (1542), Baker (1568), e Trenchant (1566).

2.4. SOBRE A DEFINIÇÃO DE DIVISÃO

A divisão era geralmente considerada como uma das quatro operações fundamentais (Aritmética de Treviso, 1478), a quinta quando a numeração era incluída e a sétima quando a duplação ou a mediação eram consideradas separadamente.

Em geral, a operação era conhecida como divisão (Fibonacci, 1202) ou como partição (Huswirt, 1501; Galileu, 1521; Stifel, 1544; Scheubel, 1545; Cataldi, 1602; Ortega, 1512; Savonne, 1563 e Santa-Cruz, 1594), mas muitos escritores usavam ambos os termos (Pacioli, 1494; Tartaglia, 1556; Trenchant, 1566 e Clavius, 1583). Assim Baker (1568) fala de *“deuision or partition”* (divisão ou partição), e Digges (1572) diz *“to deuide or parte”* (dividir ou repartir). Dizendo que *“diuision sheweth onlely howe often the lesse summe is conteyned in the bigger”,* (a divisão mostra somente quantas vezes a soma menor está contida na maior, Digges, 1572) ou que

> *Diuision doth search how oft the divisor*
> *In Diuidend may be quoted or found*
> *Whereof the quotient is the decidor,*

(a divisão procura quantas vezes o divisor pode ser fracionado ou encontrado no dividendo, sendo o quociente aquele que vai decidir, Digges, 1600).

Uma segunda definição que teve alguma sanção trata de “encontrar um número que está contido um certo número de vezes no dividendo”. Ela pode ser encontrada em Maximus Planudes (1340) e na Aritmética de Treviso.

2.5. TERMINOLOGIA DA DIVISÃO

Os escritores antigos geralmente davam nomes para somente dois dos números usados na divisão, o *"numerus dividendus"* (número que deve ser dividido) e o *"numerus divisor"* (número que divide), sendo que nenhum nome específico foi dado ao quociente e ao resto. Estes não são, é claro, termos técnicos, e eles aparecem como meras expressões coloquiais em vários trabalhos medievais. Gradualmente, entretanto, o *numerus* foi deixado de lado e *dividendus* vem sendo usado como nome técnico, até o momento. Nomes como "resposta" ou "resultado" eram comumente usados para quociente.

Os nomes dos termos sofreram inúmeras mudanças. O divisor era freqüentemente chamado de *"parter"* (partidor) ou *"dividens"* (dividindo). O dividendo tem sido comumente chamado por este nome, embora tenha existido termos equivalentes como *"partend"* (partindo). O quociente era freqüentemente chamado o "produto" (Frisius, 1540), a "parte" (Aritmética de Treviso, 1478) e o resultado.

2.6. OS PROCESSOS DE DIVISÃO

A operação de divisão era considerada uma das mais difíceis no século XV. Pacioli (1494) afirmou que "se um homem pode dividir bem, tudo mais torna-se fácil". Gebert (980) deu não menos do que dez etapas de resolução, começando pelo cálculo com unidades por unidades, tratadas por subtrações contínuas.

2.6.1. A Divisão no Egito

Provavelmente, uma das mais antigas formas de divisão era usada pelos egípcios. Ela era baseada sobre o processo de duplação e mediação. Sendo assim, para dividir 19 por 8, eles pegavam 2 x 8 = 16, ½ de 8 = 4, e selecionavam os números na coluna direita (vide tabela abaixo) cuja soma tinha como resultado 19, por exemplo, 16 + 2 + 1 = 19. Portanto, o quociente era 2 + ¼ + 1/8. Na ilustração os multiplicadores foram assinalados por asteriscos.

1	8
∗2	16
½	4
∗1/4	2
∗1/8	1

É interessante notar que o processo de divisão egípcia tem uma vantagem pedagógica de não parecer uma nova operação. Por exemplo, ao invés deles calcularem 45 ÷ 9, eles diziam: “Calcule com 9 até conseguir chegar no 45”.

Nós começamos multiplicando 9, como segue:

\	1	9	
	2	18	
\	4	36	Soma 45.

Sendo assim, segue que (1 + 4) . 9 = 45, ou 45 ÷ 9 = 5.

Hoje, freqüentemente definimos a divisão como a operação inversa da multiplicação. Em outras palavras, em um problema de divisão damos um produto e um de seus fatores, no qual a questão é encontrar o outro fator. Por exemplo: 45 ÷ 9 =   , ou ainda,   x 9 = 45.

2.6.2. Divisão Breve

Um dos métodos mais simples de divisão era chamado de divisão breve inglesa (baseado no reconhecimento dos produtos nas colunas das tábuas de multiplicação). Era também conhecido por divisão por coluna, por regra, ou por tábua, como uma divisão oral. Dentre outros, o método está ilustrado abaixo, como aparece em um livro de Treviso.

Lo partitore	.2.	7624	o lauanzo,
La parte		3812	

Significa que 7624 ÷ 2 = 3812, com 0 como resto.

2.6.3. A Divisão na Babilônia

Muito interessante era o modo babilônico de divisão. Eles tratavam todas as divisões como um tipo de multiplicação por tentativas.

Por exemplo, um problema de divisão a ÷ b era visto como se ele fosse um problema multiplicativo do tipo a x 1/b. Sendo assim, um conjunto especial de tábuas de números recíprocos foi preparada para este propósito.

Para evitar ter que dar detalhes sobre a notação sexagesimal, nós ilustraremos o método por meio de um exemplo do sistema decimal. Para dividir 128 por 4, consideraremos o problema 128 x 1/4. Nas tábuas de recíprocos, poderia ser encontrado que o recíproco do número 4 seria expresso como 25/100. Aqui o denominador especifica uma mudança de dois lugares na notação posicional do produto 128 x 25, o qual poderia ser obtido observando a tábua de multiplicação. É claro que os babilônicos não expressavam o denominador como uma potência de 10 como nós fizemos, mas como uma potência de 60, já que a base do sistema deles era sexagesimal.

2.6.4. Divisão por Fatores

Um dos método de divisão, comum ao fim da Idade Média, consistia em usar os fatores do divisor, e era conhecido como *“per repiego”* (decomposição em fatores). A ilustração foi dada por Pacioli (1494) para 9876 ÷ 48. Considerando os fatores 6 e 8 de 48, ele primeiro divide 9876 por 6, obtendo como resultado 1646. Em seguida, divide 1646 por 8 (“o outro número de “repiego”), obtendo 205 6/8 ou 205 3/4.

2.6.5. O Método Galé

Um modo mais comum de divisão usado antes de 1600, era conhecido como galé (antiga embarcação de guerra, comprida e com grandes remos), batello, ou “método das ranhuras”. Parece ter origem hindu. Ilustraremos para o caso de 65284 ÷ 594, como na Aritmética de Treviso (1478). Para tornar o trabalho claro, os seis passos são dados separadamente como segue:

(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)
65284 | 1 594	1 65284 | 1 594	16 65284 | 1 594	5 168 65284 | 1 594	5 168 65284 | 10 5944 59	5 168 65284 | 109 59444 599 5

O trabalho completo (a explicação ocupa duas páginas e meia), segue:

$$\begin{array}{r|l} \cancel{1}5 & \\ 5\cancel{3}\cancel{3} & \\ \cancel{1}\cancel{6}\cancel{8}\cancel{7}8 & \\ \cancel{6}\cancel{5}\cancel{2}\cancel{8}\cancel{4} & 109 \\ \cancel{5}\cancel{9}\cancel{4}\cancel{4}\cancel{4} & \\ \cancel{5}\cancel{9}\cancel{9} & \\ \cancel{5} & \end{array}$$

Temos 65284 ÷ 594 = 109, com resto 538 .

O nome galé ou batello refere-se a um barco antigo, cujo contorno tem uma semelhança com o método. Uma interessante ilustração dessa semelhança é vista em um manuscrito de 1575, como pode ser visto na figura abaixo:

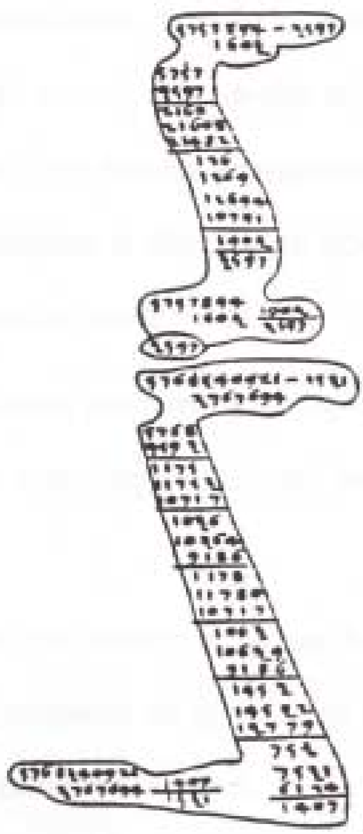
2.6.6. Nossa Divisão Longa

É impossível de estabelecermos uma data exata para a origem do nosso atual método de divisão longa, visto que ele foi se desenvolvendo progressivamente.

No século XV apareceu um método chamado de *“danda”,* sendo um dos precursores da nossa divisão atual.

O nome “danda” em algumas partes da Toscana ainda é usado para designar este método de dividir.

Um dos primeiros exemplos de divisão longa moderna que se conhece, apareceu em 1460, conforme ilustração:



2.7. DISCUSSÃO

Neste breve estudo de aspectos históricos da multiplicação e da divisão, pudemos observar dentre outras coisas:

A operação de adição era considerada fundamental, pois a partir dela todas as outras foram definidas. Tomemos como exemplo a multiplicação egípcia, feita por sucessivas duplações, na qual a multiplicação era escrita como soma de potências de 2. Observamos a exploração das continuidades entre o raciocínio aditivo e o multiplicativo. Neste caso, a multiplicação sempre aumenta. Isto pode provocar um obstáculo epistemológico, na medida em que pode influenciar a aprendizagem da multiplicação de números decimais.

A divisão egípcia era também escrita por meio de sucessivas duplações ou mediações. Já a multiplicação babilônica era feita através de tábuas de multiplicação. A divisão babilônica era feita como uma multiplicação por tentativas, ou seja, a divisão $a \div b$ era escrita como se fosse $a \times 1/b$, e os recíprocos eram encontrados em tábuas preparadas especialmente para isso. Essa forma de divisão caracteriza a dificuldade que se tinha de operar com a mesma, muito mais do que com a multiplicação.

Outras divisões eram feitas pelo processo de sucessivas subtrações, o que é chamado hoje de processo americano, que pode levar a concepção que divisão sempre diminui.

Observamos também que diversos povos buscaram algoritmos para a multiplicação e a divisão, na tentativa de otimizar os cálculos, mas neste trabalho foram utilizados somente os números inteiros.

CAPÍTULO III:

A MULTIPLICAÇÃO E A DIVISÃO NA ESCOLA

Em virtude das dificuldades apresentadas tanto pelas crianças, quanto pelos professores em pesquisas citadas anteriormente, acreditamos que seja necessário verificarmos como é feita a abordagem da multiplicação e da divisão (de números inteiros positivos e de racionais escritos na forma decimal) na escola. Alguns livros didáticos mais comumente adotados pelas mesmas serão analisados, na medida em que estes servem muitas vezes como um guia de aula para o professor, ou seja, uma fonte de consulta para eventuais dúvidas.

Daremos também um panorama geral da abordagem de multiplicação e divisão de inteiros positivos e de decimais na Proposta Curricular de Matemática de 1º grau.

3.1. PROPOSTA CURRICULAR DE MATEMÁTICA DE 1º GRAU VIGENTE

3.1.1. Multiplicação

No que tange a multiplicação de números naturais, a sugestão é que se faça uma primeira abordagem da mesma associada à idéia de adição de parcelas iguais, por meio de situações de jogos (para a formação de agrupamentos), bem como trabalhando com papel quadriculado, a fim de que os alunos construam os fatos fundamentais da multiplicação.

Sugere diversas configurações para o algoritmo, até que no final se chegue a forma mais comum, encontrada nos livros didáticos.

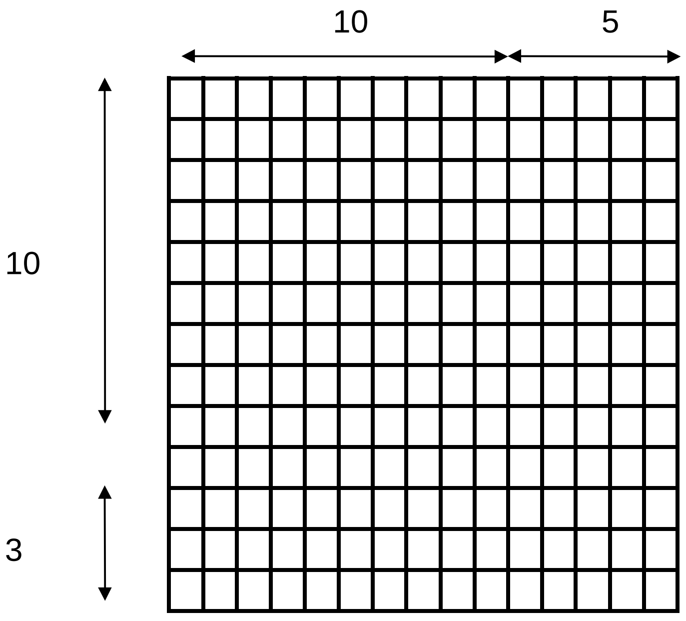
Por exemplo:

50 + 3 x 4 200 + 12 212	ou	50 + 3 x 4 12 + 200 212

Proposta curricular de matemática (1992), página 36.

Em seguida, se propõe a utilização da multiplicação em situações-problema envolvendo: problemas de contagem e a multiplicação de um número natural qualquer por um número maior que 10 (utilizando papel quadriculado), a fim de que os alunos estabeleçam uma melhor maneira de dispor o algoritmo. Por exemplo:

15 x 13 = (10 + 5) x (10 + 3) = 10 x 10 + 10 x 3 + 5 x 10 + 5 x 3



Representação:

$$\begin{array}{r} 10 + 5 \\ \times\ 10 + 3 \\ \hline 100 + 50 + 30 + 15 \\ 195 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 10 + 5 \\ \times\ 10 + 3 \\ \hline 15 \\ +\ 30 \\ 50 \\ 100 \\ \hline 195 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10 + 5 \\ \times\ 10 + 3 \\ \hline 15 \\ +\quad 80 \\ 100 \\ \hline 195 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 10 + 5 \\ \times\ 10 + 3 \\ \hline \left.\begin{array}{r} 15 \\ 30 \end{array}\right] + \\ \left.\begin{array}{r} 50 \\ 100 \end{array}\right] + \\ \hline 195 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 10 + 5 \\ \times\ 10 + 3 \\ \hline 45 \\ +\ 150 \\ \hline 195 \end{array}$$

Proposta curricular de matemática (1992), página 46.

Em relação a multiplicação de números racionais escritos na forma decimal, sugere que sejam trabalhados algumas questões como pré-requisitos:

_ O que acontece com o produto de dois números quando:

(1) um de seus fatores for multiplicado por um número natural.

(2) ambos os fatores forem multiplicados por um número natural (distintos ou não).

É proposto em seguida, uma atividade para determinar o produto de dois números racionais (escritos na forma decimal), transformando os dois números inteiros e corrigindo o resultado de acordo com os números dados inicialmente. Com uma certa quantidade de cálculos desse tipo, os alunos podem formular uma regra prática para posicionar a vírgula no produto.

1,8 x 2,63
x 10 ↓ ↓ x 100 = 4734 (este produto é 1000 vezes maior que o
18 x 263 dos números dados anteriormente)

4734 ÷ 1000 = 4,734.

Então 1,8 x 2,63 = 4,734.

Proposta curricular de matemática (1992), página 64.

Antes de introduzir o conceito de potência, sugere a apresentação de situações problema envolvendo multiplicações sucessivas de fatores iguais (problemas de contagem).

3.1.2. Divisão

Inicialmente, a sugestão é que se trabalhe a divisão associada às idéias de repartição eqüitativa (partição) e medida (quota), sendo que as mesmas devem estar ligadas ao conceito mais geral de divisão, a divisão euclidiana (separar um certo número de objetos em subgrupos com a mesma quantidade de elementos). Com esta finalidade, deve-se oferecer aos alunos inúmeras situações para a formação de grupos, trabalhando com fichas, folhas de sulfite, lápis, entre outros. Deve-se ressaltar a relação existente entre a multiplicação e a divisão, quando o resto da mesma é zero.

Sugere que se trabalhe num primeiro momento, a divisão de números naturais por meio do processo americano (que associa a divisão a subtrações sucessivas), até que os alunos percebam que não há necessidade de distribuir de 1 em 1, economizando passagens.

Em seguida, sugere a introdução do processo longo ou do processo breve, ressaltando a ordem de grandeza prevista para o quociente, antes de iniciar o processo. A forma sintética do algoritmo da divisão poderá ser apresentada ao final de um processo, onde os alunos já tenham compreendido o significado da cada etapa.

Na divisão de números naturais nas quais o quociente é um número decimal, sugere que se trabalhe com material concreto, a fim de justificar o aparecimento da vírgula no quociente e as transformações sucessivas nos restos obtidos.

```
        5 ÷ 4                5 |4
                            -4   1, 2 5
                             1u  u déc. c
1 unidade = 10 décimos  10 déc.
                            -  8
                               2 déc.
2 décimos = 20 centésimos 20
                              -20
                                0
```

Proposta curricular de matemática (1992), página 63

Já na divisão de números racionais escritos na forma decimal, a sugestão é que se faça a abordagem de maneira análoga à que foi sugerida para a multiplicação, determinando o quociente de um número racional (escrito na forma decimal) por uma potência de 10, relacionando a mudança de posição da vírgula com o conceito de valor posicional.

Por exemplo:

$0{,}5 \div 2 \xrightarrow{\quad} 5 \div 2 = 2{,}5 \xrightarrow{\quad} 2{,}5 \div 10 = 0{,}25,$

para corrigir o quociente

x 10

logo 0,5 ÷ 2 = 0,25.

Ou ainda, 6,21 ÷ 1,8 = 621 ÷ 180 = 3,45.

x 100 x 100

Proposta curricular de matemática (1992), página 64.

Em problemas onde o elemento desconhecido é um dos termos da multiplicação ou da divisão, ressalta a importância de se utilizar as propriedades dessas operações, bem como a relação de uma com a outra.

3.2. LIVROS DIDÁTICOS

Fizemos uma breve análise das obras abaixo descriminadas, no que concerne a multiplicação e a divisão no domínio dos números inteiros positivos e decimais. A análise envolveu livros didáticos das séries iniciais (1ª a 4ª séries) e da 5ª série (pois nesta ocorre uma retomada dos conteúdos). Foram observadas as seguintes obras:

(1) Matemática no planeta azul (1ª a 4ª séries).

Célia Maria Carolino Pires, Maria Nunes e Marília Barros de Almeida Toledo. Editora Contexto, 1995.

(2) Matemática ao vivo (1ª a 4ª séries).

Luiz Márcio Imenes, José Jakubovic e Marcelo Lellis. Editora Scipione, 1993.

(3) Alegria de saber: Matemática (1ª a 4ª séries).

Lucina Passos, Albani Fonseca e Marta Chaves. Editora Scipione, 1992.

(4) Como é fácil ! _ Matemática (1ª a 4ª séries).

Maria Emília Correa e Mauro Galhardi. Editora Scipione, 1991.

(5) Mundo Mágico: Matemática (1ª a 4ª séries).

Mariana Andrade e Lídia Maria de Moraes. Editora Ática, 1992.

(6) A conquista da Matemática: teoria e aplicação (1ª a 4ª séries).

José Ruy Giovanni e José Ruy Giovanni Jr.. Editora F.T.D., 1992.

(7) Matemática moderna (1ª a 4ª séries).

Walter Diniz Palumbo. Editora Lisa, 1988.

(8) Matemática e vida (5 ª série).

Vincenzo Bongiovanni, Olímpio Rudinin Vissoto Leite e José Luiz Tavares Laureano. Editora Ática, 1995.

(9) Matemática na medida certa (5 ª série).

José Jakubovic e Marcelo Lellis. Editora Scipione, 1994.

As obras foram analisadas levando em conta os seguintes critérios:

I - Comentários históricos: Em nenhuma das obras analisadas fez-se referência a história da multiplicação e da divisão. Não há comentários de quando e nem como se deu o desenvolvimento da multiplicação e da divisão, da definição, da terminologia e dos algoritmos.

II -Definições:

• **Multiplicação de números naturais**

Nas obras analisadas, pudemos encontrar dois tipos de abordagem envolvendo a multiplicação de números naturais:

Em continuidade à adição, ou seja, a multiplicação como adições sucessivas de parcelas iguais.

"**Multi** significa **muitos** ou **muitas vezes**.

A palavra **multiplicar** significa **adicionar muitas vezes** a mesma quantidade.

Em Matemática, quando queremos **adicionar muitas vezes** a mesma quantidade usamos a operação da **multiplicação**, conforme veremos nas situações seguintes:

• Você está vendo um prédio de apartamentos. Esse prédio têm 5 andares e em cada andar há 3 janelas. Quantas janelas há nesse prédio de apartamentos?

Resolução:

São 5 andares e em cada andar temos 3 janelas. Então, temos:

$\underbrace{3 + 3 + 3 + 3 + 3}_{\text{5 vezes}} = 15$ janelas

5 vezes 3 dá 15.

5 x 3 = 15

x → sinal da multiplicação; significa vezes

Daí temos:

$\underbrace{3 + 3 + 3 + 3 + 3}_{\text{5 vezes}} = 5 \times 3 = 15$

→ forma de multiplicação

→ forma de adição".

A conquista da Matemática 1, página 80.

"Um campeonato de futebol vai reunir 12 equipes. sabendo que, no futebol, cada equipe tem 11 jogadores titulares, qual o total de atletas titulares que irá participar desse campeonato?

Quando o homem passou a reunir quantidades de vários conjuntos com o mesmo número de elementos, nasceu a **multiplicação**.

Assim:

11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 = 12 x 11".

Matemática e vida 5ª série, página 41 e 42.

Em algumas das obras das séries iniciais, esta abordagem é utilizada, mas dando ênfase a linguagem de conjuntos.

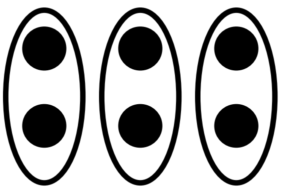
Multiplicação

Observe os desenhos e leia com atenção:

São 3 conjuntos de 2 patinhos.
2 + 2 + 2 = 6 ou 3 **vezes** 2 é igual a 6.

3 x 2 = 6

Como é fácil! _ Matemática 1ª série , página 93.



"Quantos grupos de 2?

3 grupos de 2

2 + 2 + 2 = 3 x 2 = 6"

Matemática moderna 1ª série, página 96.

Associada ao raciocínio combinatório, no qual combinamos quantidades de objetos, agrupando-os e em seguida fazendo a contagem.

> “Antônia tem 4 blusas (branca, azul, lilás e laranja) e 7 saias.
> - Usando a blusa branca, ela pode se vestir de quantos modos?
> - E usando a blusa azul, de quantos modos ela pode se vestir?
> - Considerando as 4 blusas e as 7 saias, há quantas possibilidades?”

Matemática ao vivo 4, página 91.

- **Multiplicação de números decimais**

Encontramos vários tipos de abordagem para a multiplicação de números decimais:

Multiplicação de um número inteiro (diferente de 10, 100 e 1000) por um número decimal, a fim de que a multiplicação possa ser escrita como adições repetidas de parcelas iguais.

> “Zico vendeu 0,2 do tabuleiro de cocadas pela manhã, 0,2 à tarde e 0,2 à noite. Vamos saber a porção do tabuleiro que Zico vendeu:
>
> $\frac{2}{10} + \frac{2}{10} + \frac{2}{10} = \frac{6}{10}$ ou
>
> 0,2 + 0,2 + 0,2 = 0,6
>
> 3 x 0,2 = 0,6
>
> $$\begin{array}{r l} 0{,}2 & \longrightarrow \text{uma casa decimal} \\ \times\ 3 & \\ \hline 0{,}6 & \longrightarrow \text{uma casa decimal”.} \end{array}$$

Alegria de saber: Matemática 3ª série, página 133.

Por meio de uma regra:

> “Para multiplicar dois números decimais, devemos, no final, contar as casas depois da vírgula.
>
> Veja:
>
> $$\begin{array}{r l} 3{,}2 & \longrightarrow \text{uma casa} \\ \times\ 3 & \text{depois da} \\ \hline 9{,}6 & \longrightarrow \text{vírgula} \end{array}$$
>
> (multiplicam-se como números inteiros)
>
> Exemplo:
>
> $$\begin{array}{r l} 2{,}35 & \longrightarrow \text{duas casas} \\ \times\ 4{,}6 & \longrightarrow \text{+ uma casa} \\ \hline 1410 & \\ 940 & \\ \hline 10{,}810 & \longrightarrow \text{três casas depois da vírgula”} \end{array}$$

Matemática moderna 4ª série, página 86.

Multiplicação de um número decimal por potências de 10.

“ Vamos começar multiplicando decimais por 10, 100, 1000, etc.. Para isso, transformaremos os decimais em frações e iremos efetuar as multiplicações com essas frações.

Vamos multiplicar 1,223 por 10, 100 e por 1000.

Lembrando que $1{,}223 = \frac{1223}{1000}$, temos:

$$1{,}223 \cdot 10 = \frac{1223}{\cancel{1000}} \cdot \cancel{10} = \frac{1223}{100} = 12{,}23$$

$$1{,}223 \cdot 100 = \frac{1223}{\cancel{1000}} \cdot \cancel{100} = \frac{1223}{10} = 122{,}3$$

$$1{,}223 \cdot 1000 = \frac{1223}{\cancel{1000}} \cdot \cancel{1000} = 1223$$

Multiplicando um número decimal por 10, a vírgula avança uma posição para a direita; por 100, a vírgula avança duas posições para a direita; por 1000, avança três; e assim por diante”.

Matemática na medida certa, página 194.

Transformando os números decimais a serem multiplicados em números inteiros, e corrigindo o resultado de acordo com os números dados inicialmente.

“Nós já sabemos que para determinar a área de um retângulo, basta multiplicar a medida da base pela medida da altura.

Então vamos calcular a área deste retângulo fazendo : 2,8 x 4,5

2,8 cm

4,5 cm

Como você faria esta conta ?

Olívia também tem uma sugestão, veja só:

$$\begin{array}{rcr}
2{,}8 & \xrightarrow{\times 10} & 28 \\
\times\, 4{,}5 & \xrightarrow{\times 10} & \times\, 45 \\
\hline
 & & 140 \\
 & & 1120 \\
\hline
 & & 1260 \xrightarrow{\div 100} 12{,}60
\end{array}$$

”.

Matemática no planeta azul 4, página 143.

• Divisão de números naturais

Em se tratando da divisão de números naturais, encontramos três tipos de abordagens:

Divisão associada a idéia de repartição eqüitativa (distribuir igualmente).

> “Seu Alfredo comprou 6 brinquedos para dar de presente a seus dois filhos. Cada criança recebeu 3 brinquedos. Seu Alfredo fez uma *divisão* dos brinquedos”.
>
> $6 \div 2 = 3$
>
> 6 dividido por 2 é igual a 3
>
> $$\begin{array}{r|l} 6 & 2 \\ \cline{2-2} -6 & 3 \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Como é fácil! _ Matemática 1ª série , página 100.

<u>Observação</u>: Este tipo de abordagem aparece em todas as obras analisadas para introduzir inicialmente a divisão.

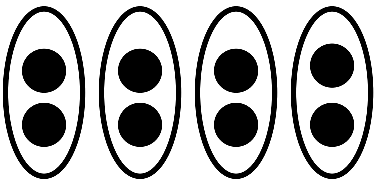
Divisão associada a idéia de formação de grupos com o mesmo número de elementos (divisão quotitiva ou medida).

> “Numa granja, os ovos são acondicionados em caixas com 30 unidades cada uma. A granja produz 1550 ovos por dia. Quantas caixas de ovos são produzidas diariamente?”

Matemática e vida 5ª série, página 59.

<u>Observação</u>: Este tipo de abordagem aparece inicialmente com menor freqüência nas obras analisadas. Geralmente, ela aparece na introdução do algoritmo da divisão (por subtrações sucessivas).

Divisão como a operação inversa da multiplicação.



> “Quantos grupos de 2?
>
> $\boxed{4}$ grupos
>
> Oito dividido por 2 é igual a quatro.
>
> $4 \times 2 = 8 \iff 8 \div 2 = 4$**”.**

Matemática moderna 1ª série, página 108.

• Divisão envolvendo números decimais

Encontramos vários tipos de abordagens para a divisão de números decimais:

Apresenta inicialmente divisão de inteiros com quociente decimal e em seguida de um número inteiro por um decimal. Para isso, utiliza regras (passos da divisão):

"_ Devo efetuar 35 | 6 . Como fazer?

_ Vamos ver 35 | 6

```
 35 | 6
-30   5
  5
```

_ O resto é 5.

_ E agora? Como continuar?

_ Epa já sei! Vamos acrescentar um zero ao resto e uma vírgula ao quociente.

```
 35 | 6
-30   5
 50
```

_ Agora dividimos 50 por 6.

_ Então:

```
 35 | 6
-30   5,83
 50  → Acrescentamos mais um zero.
-48
 20
-18
  2  ← O resto é 2.
```

35 dividido por 6 não resultou em divisão exata.
$35 \div 6 = 5{,}83$ ou
$\frac{35}{6} = 5{,}83$

Então:

Acrescenta-se zero ao 1º resto e a vírgula no quociente. Depois, para cada casa além da vírgula, vamos acrescentando zero ao resto.

Observe agora!

Como fazer neste caso: 6,25 | 5

1°) Iguala-se o número de casas depois da vírgula: 6,25 | 5,**00**

2°) Elimina-se a vírgula e divide-se normalmente:

```
 625  | 500
 1250   1,25
  2500
   000
```

$62{,}5 \div 5 = 1{,}25$ ou

$\frac{62{,}5}{5} = 1{,}25$".

Matemática moderna 4ª série, página 89 e 90.

Divisão de dois decimais transformando-os em números inteiros e corrigindo o resultado de acordo com os números dados inicialmente (como a proposta sugere):

“0,8 ÷ 0,2 = ?	16,4 ÷ 0,4 = ?	1,69 ÷ 1,3 = ?
x 10 ↓ ↓ x 10	x 10 ↓ ↓ x 10	x 100 ↓ ↓ x 100
8 ÷ 2 = ?	164 ÷ 4 = ?	169 ÷ 130 = ?
583,2 ÷ 4,8 = ?	31,5 ÷ 3,5 = ?	0,4 ÷8 = ?
x 10 ↓ ↓ x 10	x ? ↓ ↓ x ?	x 10 ↓ ↓ x 10
5832 ÷ 48 = ?	? ÷ ? = ?	4 ÷ 80 = ?”.

Matemática no planeta azul 4, página 146.

Utilizando notas e moedas, para que o aluno reparta quantias efetuando divisões com quociente decimal:

“(3) Efetuem as divisões usando notas e moedas. Depois, completem:
- Dividindo igualmente Cr$11,00 entre 4 pessoas, cada uma recebe_______
- Dividindo igualmente Cr$12,00 entre 5 pessoas, cada uma recebe_______
- Dividindo igualmente Cr$6,00 entre 5 pessoas, cada uma recebe_______
- Dividindo igualmente Cr$7,00 entre 4 pessoas, cada uma recebe_______”.

Matemática ao vivo 4, página 101.

III - Algoritmo: Geralmente, a multiplicação é trabalhada por meio de adições repetidas e do algoritmo, muitas vezes de modo desvinculado, sem que o aluno perceba a necessidade e compreenda o porquê do algoritmo. O algoritmo têm aparecido como uma “receita”, onde o aluno deve saber os passos para realizar o cálculo.

Já em relação a divisão, ela é trabalhada algoritmicamente pelo processo americano ou pelo processo longo ou breve, muitas vezes no segundo caso desvinculada do conceito.

IV - Exercícios:

As tabuadas de multiplicação aparecem em todas as obras das séries iniciais que foram analisadas.

Inúmeros exercícios e problemas, tanto de multiplicação como de divisão precedidos de modelos aparecem em três obras das séries iniciais que foram analisadas.

Problemas envolvendo multiplicação de naturais, os quais por falta de dados tornam-se imprecisos:

> “Uma caixa de uva pesa 4 quilos. Quantos quilos pesam 3 caixas de uvas?”

Como é fácil ! _ Matemática 1ª série, página 97.

Neste caso, não sabemos se as três caixas de uvas têm o mesmo peso e por isso não podemos determinar o peso delas no total.

Problemas envolvendo a multiplicação de decimais sem contexto, por exemplo:

> “Gastei por dia 0,3 de 210 cruzados. Em três dias quanto gastei?”

Matemática moderna 3ª série, página 113.

> “Um periquito come 0,3 de mamão por dia. Quanto come em uma semana?”

Alegria de saber: Matemática 3ª série, página 135.

> “Gastei 0,3 de Cr$ 5 600,00. Quanto gastei?”

Como é fácil ! _ Matemática 4ª série, página 113.

Problemas envolvendo a divisão de números naturais associada a idéia de repartição eqüitativa, imprecisos na colocação dos dados, podendo levar a soluções diversas. Veja alguns exemplos:

> "Vou distribuir 12 morangos em 3 cestas. Quantos morangos caberão em cada cesta?"
> "Tenho 168 livros para guardar em 4 caixas. Quantos livros devo colocar em cada caixa?"

Mundo mágico: Matemática 2, página 96 e 97.

> "Comprei 6 cadernos por 48 cruzados? Quanto custou cada caderno?"

Matemática moderna 2ª série, página 100.

Em relação aos problemas apresentados falta a palavra "igualmente" para que a divisão esteja associada a idéia de repartição eqüitativa, pois como aparece podemos colocar quantos morangos e livros desejarmos em cada uma das cestas e caixas respectivamente. No terceiro problema não sabemos se os cadernos tinham o mesmo preço.

Exercícios envolvendo a elaboração de problemas com as operações:

> "Invente problemas para serem resolvidos com as operações:

20 + 20	16 - 8
16 + 8	16 ÷ 4
35 - 20	4 x 8
10 + 5 + 3	3 x 4
20 ÷ 5	18 ÷ 3 ".

Matemática no planeta azul 2, página 69.

Exercícios envolvendo o cálculo do valor desconhecido na divisão apresenta somente o dividendo como o valor a ser descoberto, possibilitando assim que o aluno faça sempre a operação inversa para encontrar a solução. Tal abordagem não permite que o aluno estabeleça todas as relações possíveis entre o dividendo, divisor, quociente e resto. Somente em duas das obras analisadas foi colocado o divisor como valor desconhecido.

3.3. DISCUSSÃO

Observamos que os livros didáticos exploram bastante as continuidades entre os raciocínios aditivo e o multiplicativo, visto que em todas as obras analisadas a multiplicação é introduzida como uma maneira mais rápida de fazer adições repetidas de parcelas iguais. Pesquisas anteriormente citadas apontam para este fato. É provável que esta abordagem pode provocar um obstáculo didático, pois ela é válida no domínio dos inteiros positivos, mas no dos decimais ela falha. Além do que, este tipo de abordagem pode desenvolver nos alunos a concepção de que “multiplicação sempre aumenta”. A superação deste obstáculo pode ocorrer na medida em que se evidencie e se trabalhe também com as descontinuidades entre os raciocínios aditivo e o multiplicativo.

Um outro fator que notamos é a ênfase ao trabalho de um conceito somente por meio de uma abordagem. Por exemplo, os alunos sabem multiplicar por meio de repetidas somas, e o que será que acontece quando a multiplicação é apresentada como medida de área? Será que eles são capazes de fazer tal conexão?

Observamos também que geralmente a multiplicação não é abordada por meio do raciocínio combinatório, envolvendo o princípio multiplicativo. Este envolve a resolução de situações-problema nas quais existem dados de várias naturezas.

Acreditamos que uma abordagem bem feita envolvendo o princípio multiplicativo oferecerá condições bastante satisfatórias para que os alunos de 5ª à 8ª séries compreendam potenciação e radiciação, dentre outras coisas.

Observamos que, muitas vezes o algoritmo é dado de forma desvinculada ao conceito, não permitindo assim, que os alunos façam conexão entre conhecimento de conceitos e conhecimento de processos, ou seja, que os alunos dêem significado às operações. O algoritmo geralmente é introduzido por meio de subtrações sucessivas. Tal abordagem pode provocar um obstáculo didático, pois pode criar nos alunos a concepção que “divisão sempre diminui”.

A divisão, em grande parte, é explorada associada à idéia de repartição eqüitativa, permitindo que o aluno não faça conexões entre o algoritmo e o conceito, visto que a mesma também envolve a idéia de formação de grupos (medida ou quota).

CAPÍTULO IV

EXPERIMENTO E ANÁLISES

4.1. TESTE DIAGNÓSTICO

Alinhados às idéias de Vergnaud, que diz ser o uso de problemas significativos um dos pontos mais importantes da Educação Matemática a fim de que os conhecimentos teóricos e práticos possam ser vistos pelos alunos como uma ajuda genuína na resolução de problemas reais, no teste diagnóstico escolhemos dar ênfase aos seguintes aspectos do campo conceitual multiplicativo:

- Possíveis relações entre dividendo, divisor, quociente e resto em uma divisão.
- Descontinuidade entre adição e multiplicação, trabalhada no domínio dos inteiros positivos (no qual ela pode ser vista como um modo mais rápido de fazer adições repetidas de parcelas iguais) e no domínio dos decimais.

4.1.1. Desenho do teste diagnóstico

Baseados nos resultados de pesquisas, no breve estudo de aspectos históricos e na análise de livros didáticos, anteriormente citados, elaboramos o teste diagnóstico envolvendo as operações de multiplicação e de divisão.

Tal teste foi composto de duas questões, uma envolvendo multiplicação e a outra divisão, conforme segue:

Questão (1):

---

1) Em minha casa possuo 2 cães sem raça definida e um passarinho “canário da terra”. O consumo mensal de ração pelos cães é de aproximadamente 15 quilos. Já o passarinho nem chega a consumir um quilo de ração para pássaros (ele come aproximadamente 0,65 quilos). Agora responda:

(a) Se o quilo da ração para cães custa R$ 3,45, quanto gasto mensalmente para alimentar meus cães?

(b) Já o quilo da ração de pássaros custa um pouco mais caro, R$ 4,00 (pois é própria para canários da terra). Qual será então o meu gasto mensal para alimentar meu passarinho?

Agora justifique o porquê das operações escolhidas para resolver os itens (a) e (b) da questão 1.

Em qual dos casos acima (a) e (b) eu gastei mais dinheiro? Porquê?

O objetivo desta questão é verificarmos por meio de uma situação multiplicativa a existência das concepções *“multiplicação aumenta”* e *“divisão diminui”* nos alunos. Sabemos que as mesmas têm seu domínio de validade somente no conjunto dos inteiros positivos.

Nossa hipótese é que eles estendam essas concepções para o domínio dos números decimais, por isso nossa escolha em trabalhar com esses números. Na realidade, estas concepções podem ser identificadas como teoremas-em-ação (Vergnaud, 1983, 1987, 1988), pois podem funcionar, correta ou incorretamente, antes mesmo de serem objetos de ensino.

As variáveis didáticas escolhidas visando o objetivo proposto na questão e que poderão influenciar nas estratégias a serem utilizadas pelos alunos são:

• <u>Tipo de número</u>: No item (a), a escolha dos números 3,45 (um decimal maior do que 1) como multiplicando, e 15 (um número inteiro) como multiplicador, poderá ser um facilitador na escolha da operação multiplicação, bem como no momento da realização do cálculo, visto que neste caso a multiplicação poderá ser vista como um modo mais rápido de fazer adições repetidas.

No item (b), acreditamos que a influência desta variável poderá ser maior, levando em conta o que já foi constatado por Fischbein et al. (1985). Neste caso, sendo o multiplicando um número inteiro (4) e o multiplicador um número decimal menor que 1 (0,65), o grau de dificuldade na escolha da operação correta e no cálculo a ser efetuado poderá ser maior.

- Tipo de contexto em que o problema foi inserido: O fato dos alunos terem que comparar o consumo de ração pelos cães e pelo pássaro (levando em conta que o pássaro come menos que os cães), poderá influenciar novamente na escolha da operação a ser efetuada.

As soluções corretas poderão ser as seguintes:

Esperamos que no item (a) os alunos calculem o gasto do consumo mensal de ração dos cães por meio da multiplicação R$ 3,45 x 15 = R$ 51,75. Neste item os alunos poderão não encontrar muita dificuldade, visto que somente o multiplicando é um número decimal maior do que 1 (ver Fischbein et al., 1985).

Eles poderão também adicionar 15 vezes o preço da ração (R$ 3,45).

No item (b), esperamos que os alunos façam a multiplicação de R$ 4,00 por 0,65, encontrando como resultado R$ 2,60, que é menor que o preço inicial, pois mensalmente o pássaro come menos ração do que os cães.

Segundo os resultados de pesquisas apontadas anteriormente, a dificuldade nesse item poderá ser maior do que no item anterior, em virtude do multiplicador ser um número decimal menor do que 1 e o produto ser menor que o multiplicando. Isso só poderia ser testado por estimativas, mas os alunos freqüentemente deixam de avaliar a qualidade de suas respostas.

As soluções incorretas poderão se apresentar da seguinte forma:

Item (a):

Os alunos poderão escolher a operação correta (R$ 3,45 x 15), mas efetuarem os cálculos incorretamente.

Este item pode ser visto como um item de controle, não se antecipando erro (enquanto escolha da operação), pelo fato do multiplicador ser um número inteiro e a situação ser bastante simples.

Item (b):

- É possível que os alunos calculem o gasto por meio da divisão R$ 4,00 $\div$ 0,65 $\cong$ R$ 6,15, já que o multiplicador é menor que 1. Neste caso, a escolha da operação divisão, pelos alunos, pode ser um primeiro indício da presença das concepções “multiplicação aumenta” e “divisão diminui”, pois o consumo de ração pelo pássaro é menor que um quilo. Sendo assim, para que o resultado da operação escolhida seja menor, segundo essas concepções, a operação a ser feita deverá ser a divisão.

• Eles poderão também realizar outra operação (adição ou subtração).

• Os alunos poderão escolher a operação correta (R$ 4,00 x 0,65), mas efetuar os cálculos incorretamente.

Questão (2):

---

2)Resolva as questões propostas abaixo:

1) 414÷ [   ] = 23 .   2) [   ] ÷ 59 = 27.

Como você poderia me convencer que a sua resolução para as questões acima apresentadas é a correta?

O objetivo desta questão é verificarmos se os alunos ao serem colocados frente a uma divisão são capazes de estabelecer as relações possíveis entre dividendo, divisor, quociente e resto.

Sabemos que nem sempre é possível apelar para a operação inversa em questões nas quais se quer descobrir o valor desconhecido, como por exemplo no item (1).

As variáveis didáticas escolhidas visando o objetivo proposto na questão e que poderão influenciar nas estratégias a serem utilizadas pelos alunos são:

• <u>Tipo de número</u>: A escolha por números inteiros maiores que 20, poderá influenciar de duas maneiras no desempenho da questão.

Primeiro, estes números não sendo tão “pequenos” (ordem de grandeza das dezenas e das centenas) podem desencorajar os alunos a buscarem a solução por meio de cálculos mentais e sim efetuarem os cálculos usando papel e lápis. Isto permite que consigamos saber as estratégias usadas pelos alunos na resolução da questão.

Segundo, os números são inteiros, o que poderá facilitar os cálculos dos alunos, levando a um índice de sucesso maior do que em questões envolvendo números racionais, por exemplo.

- Tipo de operação: A escolha da operação divisão foi feita de maneira propositai, buscando o objetivo proposto da questão. Se tivéssemos escolhido a multiplicação, por exemplo, não seria possível verificar se os alunos realmente refletiram sobre a operação a ser feita ou se eles apenas se utilizaram do fato que a multiplicação e a divisão são operações inversas. Em outras palavras, não poderíamos verificar se os alunos são capazes de estabelecer as relações entre dividendo, divisor, quociente e resto em uma divisão.

- Posição dos números: Sabemos que na divisão a função dos números não é a mesma, não havendo simetria entre dividendo e divisor. Portanto, quando apresentamos o valor a ser descoberto, primeiro como divisor e posteriormente como dividendo, esperamos soluções envolvendo não só a multiplicação, mas também a divisão.

No item (1), esperamos que os alunos façam 414 x 23 = 9522, e não 414 ÷ 23 = 18, reforçando a idéia que eles têm de que "*a multiplicação e a divisão são operações inversas, então se tivermos uma divisão devemos fazer multiplicação e vice-versa".* Sendo assim, esperamos um índice de sucesso inferior comparado ao item (2). Neste caso eles não estariam refletindo sobre as relações envolvidas na divisão e sim aplicando diretamente regras contidas em livros didáticos.

No item (2), esperamos que os alunos não apresentem maiores dificuldades, visto que temos [   ] ÷ 59 = 27, cujo o valor desconhecido poderá ser encontrado por meio da operação inversa. Ou seja, fazendo 59 x 27 e obtendo como resultado 1593.

Os tipos de justificativas que poderão ser encontradas são do tipo:

- Tanto no item (1) como no (2) devemos multiplicar os números dados para encontrar o valor desconhecido, visto que a multiplicação é a operação inversa da divisão. Neste tipo de justificativa confirmamos a idéia citada anteriormente de que "*como a multiplicação e a divisão são operações inversas, então se eu tenho divisão eu devo fazer multiplicação e vice-versa".*

- No item (1) devemos dividir 414 por 23, a fim de encontrarmos o número que multiplicado por 23 tem como resultado 414. Descobriremos assim, o número pelo qual 414 deve ser dividido para se obter como resultado 23.

No item (2) devemos multiplicar 59 por 27, para encontrarmos o número que dividido por 59 tem como resultado 27.

- Também esperamos que os alunos somente efetuem os cálculos, sem justificativas, visto que eles não estão acostumados a dar justificativas neste tipo de questão.

4.1.2. Sujeitos

O estudo foi realizado com um grupo de 32 alunos na faixa etária de 11-14 anos de idade. Destes, 16 cursavam a 5ª série (sendo 11 meninas e 5 meninos) e 16 cursavam a 7ª série do 1º grau (7 meninas e 9 meninos) em uma escola da rede particular, considerada de classe média alta por possuir uma variedade de recursos, tais como computadores, um grande acervo na biblioteca, professores qualificados, entre outros. Os sujeitos foram escolhidos de forma aleatória e trabalharam durante o teste diagnóstico sempre em duplas.

Fizemos a escolha das séries citadas acima, baseados nos seguintes fatos:

- Na 5ª série, podemos supor que as crianças já possuam uma formação bastante sólida de como se trabalhar com as quatro operações fundamentais e nesta série, mais especificamente, se inicia a passagem da Aritmética para a Álgebra.

- Na 7ª série, esperamos que as crianças tenham um desenvolvimento cognitivo mais formal e sejam capazes de abstrair. Neste nível as crianças já vêm trabalhando por dois anos com conceitos mais complexos dentro do campo conceitual multiplicativo (as quatro operações, entre outras coisas, estão sendo usadas dentro de conhecimentos mais sofisticados).

Fizemos a opção pelo trabalho em duplas, pois somente desta maneira conseguimos gerar um conflito cognitivo, no qual um aluno argumenta com o outro tentando convencê-lo de que a sua solução é a correta, constituindo assim um processo de construção de conhecimento.

É necessário salientarmos também que o trabalho em duplas é uma variável de situação, na medida em que poderá influenciar de maneira positiva no desempenho dos alunos, levando em conta o que já foi citado anteriormente.

Finalmente, escolhemos uma escola da rede particular em conseqüência de dois fatores:

- O alto nível de repetência verificado na escola pública poderia não garantir que os sujeitos tivessem idades próximas as que foram estabelecidas para o estudo, sendo assim, escolhemos a escola privada. Tal fato, poderia interferir nos resultados da pesquisa, já que o desenvolvimento cognitivo dos sujeitos de idades distintas não é o mesmo.

- Além disso, após o contato com a direção da escola para mostrar a finalidade da pesquisa, houve interesse e uma pré-disposição da equipe da mesma em participar.

4.1.3. Material

Os alunos utilizaram lápis, borracha e uma folha de rascunho na resolução.

A fim de que tivéssemos um acompanhamento efetivo dos alunos na resolução das questões, foram observadas e foram gravados os diálogos de cinco duplas de cada série.

4.1.4. Procedimento

Os alunos trabalharam em duplas, aleatoriamente, sendo oito duplas de cada série. O teste teve duração de aproximadamente uma hora e meia, e foi realizado em duas etapas: a primeira com as duplas da 7ª série e a segunda com as duplas da 5ª série.

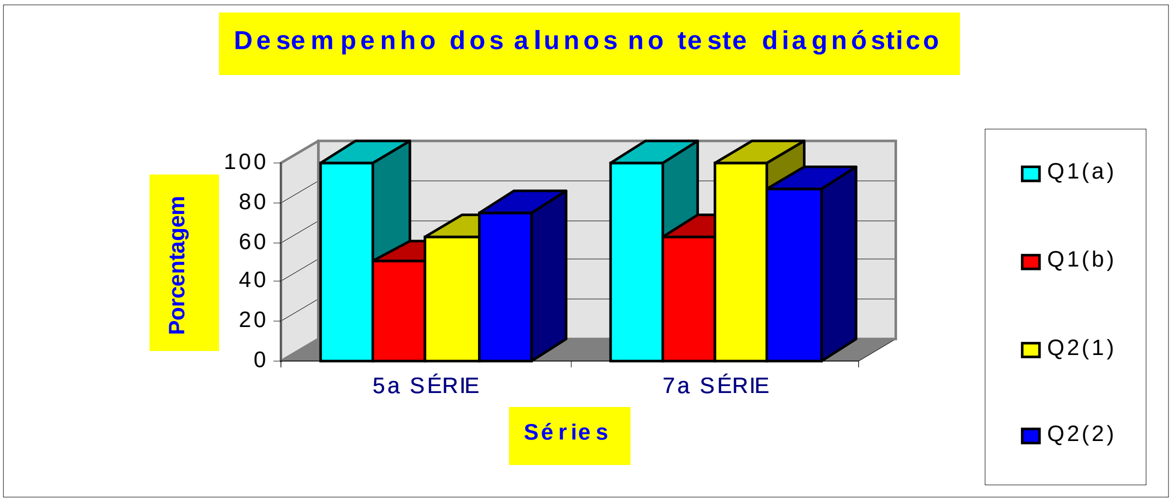
Entregamos um teste para cada dupla. O teste foi lido em voz alta no início de cada etapa. As duplas foram dispostas em uma sala de aula bastante grande, a uma distância de mais ou menos 1,5 metro uma da outra. Todas as questões foram resolvidas a lápis.

Durante a resolução das questões, cinco duplas foram acompanhadas por um observador cada uma, sendo que este fez anotações e uso do gravador para o acompanhamento dos diálogos das duplas.

4.1.5. Análises

4.1.5.1. <u>Panorama Geral do Teste Diagnóstico</u>

Primeiramente faremos uma análise em termos quantitativos da competência (sucessos e fracassos) das duplas nas duas questões do teste diagnóstico. A seguir um gráfico mostra o desempenho (quanto aos sucessos) das duplas de nossa amostra nas questões analisadas.



Em nossa amostra, composta de 32 alunos, trabalhando em duplas, dentro das 64 possíveis respostas corretas, obtivemos 51, indicando um índice de sucesso geral de 79,7%.

Porém, ao analisarmos esta amostra pelo grau de instrução dos alunos, constatamos uma ligeira superioridade dos alunos da 7ª série em relação aos da 5ª série. Observamos que os alunos da 7ª série obtiveram um índice médio de sucesso de 87,5%, enquanto os da 5ª série obtiveram 71,9%.

É importante salientarmos que consideraremos como índice satisfatório de sucesso quando este for maior ou igual a 75%.

Considerando os quatro itens analisados, percebemos que no item 1(b) os alunos das duas séries que compunham a nossa amostra obtiveram um fraco desempenho (índice de sucesso inferior a 75%). Já nos itens 1(a) e 2(2), os alunos de ambas as séries de nossa amostra obtiveram um desempenho satisfatório (índice de sucesso igual ou superior a 75%).

A partir destes dados podemos dizer que as dificuldades comuns aos alunos das duas séries de nossa amostra residiram nos itens envolvendo a operação de multiplicação, sendo o multiplicador da mesma um número decimal menor que 1. Parece-nos também que os alunos da 5ª série apresentaram dificuldade em estabelecer as relações entre dividendo, divisor, quociente e resto, pois obtiveram um índice de sucesso inferior a 75%.

4.1.5.2. Panorama detalhado do teste diagnóstico

Questão 1

Na questão [1] composta de dois itens, os alunos tinham que encontrar o valor mensal gasto para comprar ração para dois cães e em seguida para um pássaro canário da terra.

Os alunos de ambas as séries de nossa amostra obtiveram 100% de sucesso no item 1(a). As 16 duplas se utilizaram com sucesso da multiplicação de R$ 3,45 por 15 e obtiveram R$ 51,75. Como havíamos previsto no desenho do teste, os alunos não encontraram dificuldade na resolução deste item, talvez pelo fato do multiplicador ser um inteiro positivo. Pesquisas anteriormente citadas mostram que os alunos parecem não encontrar dificuldades em reconhecer o tipo de operação e realizá-la quando o multiplicador é um número inteiro positivo. Não obtivemos nenhum tipo de solução que levasse ao fracasso.

No item 1(b) envolvendo também a multiplicação, verificamos um índice de sucesso de 62,5% dos alunos da 7ª série e 50% dos alunos da 5ª série. As soluções de sucesso foram obtidas pela multiplicação de R$ 4,00 por 0,65, encontrando como resultado R$ 2,60, como havíamos previsto no desenho do teste.

Ao compararmos os resultados obtidos nos itens 1(a) e 1(b), eles parecem indicar que a presença de um número decimal como multiplicador, no caso 0,65 (que é menor do que 1) pode ter sido um complicador. Pesquisas anteriormente citadas mostram que os alunos podem apresentar maior dificuldade em multiplicações quando o multiplicador das mesmas é um número decimal (especialmente quando o mesmo é menor que 1).

Três duplas de nossa amostra, duas da 7ª série e uma da 5ª série, percebendo a dificuldade em se trabalhar com o multiplicador 0,65 (um decimal menor que 1), trocaram a ordem dos fatores, ou seja, fizeram 0,65 multiplicado por R$ 4,00, obtendo é claro, o resultado correto. Este tipo de solução representa 33,3% das soluções corretas apresentadas. Não havíamos previsto esta solução no desenho do teste. É possível que os alunos tenham se lembrado que a multiplicação é uma operação comutativa ou ainda que eles tenham trocado a ordem dos fatores por não saberem solucionar o problema com um multiplicador decimal menor do que 1. As duas duplas da 7ª série que optaram por esta solução foram observadas e durante a resolução fizeram os seguintes comentários:

Dupla 7C: (F): - Nós temos que multiplicar 4 por 0,65.
(G): - Faz 0,65 x 4. É mais fácil do que 4 x 0,65.
Dupla 7F: (P): - É mais fácil multiplicar 0,65 por 4 do que somar 0,65 quatro vezes.

Já as soluções incorretas que levaram ao fracasso foram do tipo:

(a) Escolha da operação correta, mas erro no cálculo da multiplicação de R$ 4,00 por 0,65. Os alunos não souberam como posicionar a vírgula no resultado obtido. Tal fato indica que há uma concepção multiplicativa, porém verificamos que os alunos apresentam dificuldades relativas à competência algorítmica (conhecimento de processos).

(b) Escolha de uma operação incorreta. Neste caso a divisão de R$ 4,00 por 0,65, apresentando como justificativa: *"Como R$ 4,00 é o preço de um quilo, para saber o preço de menos de um quilo devemos dividir, pois quando você multiplica um número ele aumenta e quando você divide ele diminui".* Como havíamos previsto, este tipo de solução com tal justificativa, pode ser um indício nos alunos da existência das concepções "a multiplicação aumenta" e "a divisão diminui". Durante a resolução os comentários de duas das duplas foram os seguintes:

Dupla 7B: (F): - Para descobrir o gasto com a ração do pássaro você deve multiplicar 4 que é o preço do quilo por 0,65 Kg.

(T): - Não é, porque custa 4 reais o quilo e ele gasta menos que 4, pois ele não come nem 1 quilo por mês. Então tem que dividir.

Finalmente a dupla concorda que a operação a ser realizada deve ser a divisão de 4 por 0,65.

Dupla 7A: Após a leitura do item 1(b)

(C): - Tem que fazer isto vezes 4.

(CV): - Tem que fazer divisão. Faz 4 ÷ 10.

(C): - Porquê dividir por 10?

(CV): - Porque depois a gente soma o resultado 6 vezes mais a metade.

(C): - Não vai dar certo, pois ele não gasta 65 quilos de ração, é 65 gramas. Um quilo de ração custa R$ 4,00.

(CV): - Faz 4 por 10.

Pesquisadora: - Porquê você acha que deve dividir por 10?

(CV): - Porque o resultado que der, eu somo 6 vezes e mais a metade do resultado, porque eu não achei um número somando desse 65.

Pesquisadora:- Você acha que devem ser feitas duas operações?

(C): - É complicado.

Pesquisadora: - Você quer fazer 4 dividido por 10, depois somar 6 vezes e mais a metade do que vai dar.

(CV): - 0,65 quilo é igual a 65 gramas.

(C): - Nós podemos fazer outra operação. Tem que ser 0,65 dividido por 4.

Fizeram os cálculos e uma delas encontrou como resultado 21 e outra 1,6.

(CV): - Não pode! Pois tem que dar no mínimo 2 reais, pois ele gasta mais do que a metade de um quilo de ração e aqui deu 1,60.

(C): - Vamos voltar depois para a primeira questão.

(c) Escolha de uma operação incorreta. A subtração 0,65 de R$ 4,00, apresentando como justificativa: “Como o passarinho come menos que os cães devemos subtrair”. Houve neste caso, a associação da expressão “come menos” com a idéia de subtrair, muitas vezes porque na sala de aula o professor fala que “subtrair é fazer conta de menos”.

(d) Escolha da operação multiplicação. No caso 0,65 multiplicado por 1000, acreditando ter que transformar as unidades quilograma em grama. Apesar de terem feito este cálculo, perceberam que estava incorreto, pois justificaram que o pássaro come menos que os cães e não poderia ter gasto mais. Não havíamos previsto este tipo de solução.

Assim sendo, as estratégias que levaram ao fracasso podem ser representadas como abaixo:

Fracasso	**(a)**	**(b)**	**(c)**	**(d)**
Porcentagem	57,1%	14,3%	14,3%	14,3%

Questão 2

A questão [2] composta de dois itens e da justificativa, envolveu o cálculo do valor desconhecido em duas divisões, sendo um deles o dividendo e o outro o divisor.

No item 2(1) obtivemos um índice de sucesso de 100% dos alunos da 7ª série e 62,5% dos alunos da 5ª série.

76,9% das soluções de sucesso foram obtidas por meio da divisão de 414 por 23, enquanto 23,1 % das soluções de sucesso foram obtidas por meio de multiplicações por tentativas, fazendo por exemplo, 23 x 11, 23 x 12, 23 x 13,..., e finalmente 23 x 18. Talvez o fato da multiplicação e a divisão serem operações inversas possa ter influenciado este tipo de resolução.

Observamos nas soluções de sucesso, um índice de 38,5% de justificativas do tipo *"fizemos a prova real".* Ainda dentro das soluções de sucesso, tivemos uma justificativa do tipo: *"Quando eu tenho o dividendo e o quociente eu divido para saber qual é o divisor e quando eu tenho o divisor e o quociente eu multiplico para saber qual é o dividendo".* Este pode ser um indício de que tais alunos reconheceram as possíveis relações entre dividendo, divisor, quociente e resto, ou ainda, que eles decoraram regras.

Como já havíamos dito, somente os alunos da 5ª série de nossa amostra, obtiveram soluções que levaram ao fracasso, sendo que estas apresentaram-se da seguinte forma:

- Fazendo 414 multiplicado por 23 e obtendo como resultado 9522, apresentando como justificativa a utilização da operação inversa ou ainda "se a conta é de dividir e o contrário da conta de dividir é multiplicar, então nesses casos devemos fazer o contrário da conta". Tais justificativas mostram (como havíamos previsto) que os alunos não estabeleceram relações entre dividendo, divisor, quociente e resto. É possível que eles tenham memorizado o fato que quando se tem multiplicação ou divisão em questões do tipo "encontrar o valor desconhecido", deve-se aplicar a operação inversa. Este tipo de solução representa 66,7% das soluções incorretas.

- Soluções em branco, representando 33,3% das soluções incorretas.

No item 2(2) obtivemos um índice de sucesso de 87,5% dos alunos da 7ª série e 75% dos alunos da 5ª série. Todas as soluções de sucesso foram obtidas por meio da multiplicação de 59 por 27, ou seja, por meio da operação inversa.

Comparando esses resultados, observamos que o desempenho dos alunos da 5ª série foi inferior no item 2 (1), visto que a solução correta não era obtida por meio da operação inversa. É possível então que os alunos não consigam estabelecer todas as relações possíveis entre dividendo, divisor, quociente e resto. Vejamos os comentários de mais significativos algumas duplas observadas durante a resolução desta questão:

Dupla 7A: (C): - Eu lembro direitinho que você tem que fazer a operação contrária para dar o resultado, ou seja, tem que fazer 414 vezes 23.
Pesquisadora: - O que você chama de operação contrária?
(C): - O vezes é o contrário do dividir e o mais é o contrário do menos. Eu aprendi assim, mas não tá dando certo.

Dupla 5A: (J):- Se a conta é de mais eu tenho que fazer menos ou vice- versa. Se a conta é de dividir, eu tenho que fazer vezes.

Dupla 5C: (AL): - Resolva as questões abaixo: 414 dividido por alguma coisa dá 23. Tem que fazer aquela operação inversa, não é?
(C): - Eu sei isso, mas esqueci.

Dupla 5E: A dupla fez 414 vezes 23, mas achou que o resultado encontrado era muito grande. Chegaram a desistir de resolver o problema e até que um dos elementos da dupla resolveu dividir.

Podemos confirmar, a partir desses comentários, que nem sempre os alunos estabelecem as relações entre dividendo, divisor, quociente e resto. Parece-nos que num primeiro momento eles memorizaram uma regra do tipo:

"Para descobrir o valor desconhecido devemos efetuar a operação inversa àquela que aparece".

Conforme resultados acima, observamos, dentre outras coisas, que as maiores dificuldades dos alunos residiram:

- Em uma situação-problema multiplicativa quando o multiplicador é um número decimal (principalmente quando este é menor que 1) e o produto é menor que o multiplicando. Ou seja, o tipo de número pode ter influenciado na escolha da operação e na resolução do problema.

- Em estabelecer as possíveis relações entre dividendo, divisor, quociente e resto.

4.2. SEQÜÊNCIA DE ATIVIDADES

Levando em conta as dificuldades apresentadas pelos alunos no teste diagnóstico, nós elaboramos uma seqüência de atividades buscando a superação das mesmas .

4.2.1. Desenho da Seqüência de Atividades

Na elaboração dessa seqüência consideramos as macro-escolhas originadas no teste diagnóstico, a saber:

- Situações-problema envolvendo multiplicação de números decimais, nas quais ou o multiplicando é um número decimal, ou o multiplicador é um número decimal, ou ainda, quando os dois são números decimais. As situações envolverão também números racionais escritos na forma fracionária.

• Problemas envolvendo divisão, trabalhando as relações entre dividendo, divisor, quociente e resto.

Segue então, a seqüência de atividades:

Atividade I

(1) Sabemos que 1 quilo de ração para pássaros custa R$ 4,00. Quanto pagarei se comprar:

(a) 8 quilos

(b) 4 quilos

(c) ½ quilo

(d) 1/10 de quilo

(e) A metade de 1/10 de quilo

(f) 6/10 de quilo

- Vamos agora discutir as nossas soluções com as dos demais colegas.

(2) Calcule mentalmente e assim que terminar os cálculos de cada item, coloque o resultado na cartolina e levante a mão para poder apresentar o seu resultado aos demais colegas e explicar como você pensou.

Cada metro de fio de arame custa R$ 1,60. Dê o preço de:

(a) 3 metros de arame;

(b) 3,5 metros de arame;

(c) 0,75 metro de arame.

- Vamos então debater os nossos resultados com os dos colegas.

O objetivo desta atividade é trabalhar com a multiplicação tanto no domínio dos números inteiros, quanto no domínio dos racionais, promovendo um debate sobre as estratégias de soluções dos alunos e tentando fazer com que os mesmos percebam que as concepções de que “multiplicação aumenta” e “divisão diminui” têm validade somente no domínio dos inteiros positivos, não se estendendo ao domínio dos racionais.

Escolhemos como variáveis didáticas nesta atividade:

• Tipo de número: A escolha tanto de números inteiros como de números racionais, sob a forma de fração e na notação decimal, vem de encontro ao objetivo da atividade, ou seja, a fim de mostrar aos alunos que as concepções que “multiplicação sempre aumenta” e “divisão sempre diminui” representam conhecimentos locais, visto que são válidos somente no domínio dos inteiros positivos.

• Forma de representação do número: O fato de termos representado os números racionais do item (1) na forma de fração e não na notação decimal poderá favorecer na escolha da operação, no caso a multiplicação, já que no teste diagnóstico percebemos que um racional escrito na forma decimal pode ter sido um complicador, tanto na escolha da operação correta a ser realizada, bem como nos cálculos a serem efetuados.

• Cálculo mental: O fato de trabalharmos com o cálculo mental na questão (2) poderá incentivar os alunos a resolverem a mesma, visto que eles deverão somente apresentar o resultado e não a estratégia utilizada para chegar a solução.

• Debate entre os alunos: A promoção de um debate entre os alunos ao final da resolução das questões poderá fazer com que consigamos saber mais facilmente como os alunos raciocinaram, visto que eles terão que argumentar sobre suas soluções.

Nossa expectativa é que os alunos não apresentem dificuldades no item (1), pois eles poderão resolvê-lo por meio de correspondências uma-para-muitas (Nunes & Bryant, 1996), como por exemplo: “Se 1 quilo custa R$ 4,00, então 8 quilos custarão R$ 32,00, e assim sucessivamente", ou até calcularem mentalmente. É possível que eles apresentem dificuldade para determinar 6/10 de quilo, pois requer um pensamento multiplicativo mais elaborado.

No item (2) esperamos que eles não apresentem dificuldades na escolha da operação multiplicação, visto que o item (1) já deverá ter encaminhado o raciocínio dos alunos para a realização da multiplicação. Talvez, eles possam apresentar dificuldade em realizar os cálculos mentalmente, mas o item (1) poderá induzir os alunos a transformar os decimais em frações.

O uso da propriedade distributiva poderá ser um facilitador na resolução dos itens, por exemplo: na multiplicação 3 por 1,60 eles poderão fazer primeiro 3 x 1, depois 3 x 0,60 e em seguida somar. Formalizando este raciocínio, podemos escrever: 3 x (1 + 0,60) = 3 x 1 + 3 x 0,60 = 3 + 1,80 = 4,80.

Atividade II

Vamos trabalhar com a calculadora?

(a) Como vocês poderiam encontrar o resto da divisão de 59 847 394 por 98762 usando uma calculadora? Lembramos que a calculadora faz somente as quatro operações básicas, adição, subtração, multiplicação e divisão (não tem um botão para encontrar o resto). Além disso, observamos que se a resposta da divisão (o quociente) não for um número inteiro, o resultado dado pela calculadora será apresentado na forma decimal.

Descreva como você poderia usar a calculadora para encontrar o resto e porquê. Descreva um segundo método se você puder.

(b) Imagine que em sua calculadora o botão da divisão $\boxed{\div}$ está quebrado. Como você faria para encontrar o resto da divisão de 1692 por 45, usando somente as operações de adição $\boxed{+}$, subtração $\boxed{-}$ e multiplicação $\boxed{x}$.

Descreva pelo menos um método.

O objetivo desta atividade é trabalhar com os alunos as relações entre dividendo, divisor, parte inteira do quociente, parte não-inteira do quociente e o resto. Além disso, essa atividade também tem o intuito de observar como os alunos entendem as relações entre a multiplicação e a divisão.

Escolhemos como variáveis didáticas as que seguem:

- Tipo de número: A escolha por números inteiros poderá facilitar os cálculos dos alunos, levando a um índice de sucesso maior do que em questões envolvendo números decimais.

- "Tamanho" dos números: Os números escolhidos são bastante "grandes", na ordem dos milhões, para desencorajar os alunos a efetuarem qualquer tipo de cálculo com lápis e papel.

- Trabalho com calculadora: A escolha do uso da calculadora aparece como motivador, e com o intuito de fazer com que os alunos percebam as relações entre o dividendo, divisor, quociente e resto, além das relações entre a multiplicação e a divisão.

Esperamos primeiramente que os alunos tentem criar um contexto para o problema, como uma estratégia para dar significado aos números envolvidos na atividade. É possível que eles estabeleçam relação entre o processo de divisão e o conceito de divisão como criação de grupos iguais (divisão medida).

Esperamos que eles apresentem como métodos:

- Calcula-se o produto da parte inteira do quociente pelo divisor e depois subtrai-se do dividendo. Temos um indício que os alunos estabeleceram tal relação com a divisão euclidiana : $D = d.q + r$.

- Multiplica-se a parte decimal do quociente pelo divisor. Se o resultado for um número decimal, deve-se arredondar para o número inteiro mais próximo. Neste caso, o aluno multiplica a parte decimal do quociente pelo divisor, pois a parte decimal representa algo que restou e que "cabe" tantas vezes o divisor no dividendo.

- Subtrai-se sucessivamente o divisor do dividendo, verificando quantas vezes o divisor cabe no dividendo (divisão medida).

É possível ainda que os alunos apresentem como solução que a parte decimal do quociente é o resto, sendo esta considerada incorreta.

4.2.2. Sujeitos

Trabalhamos na seqüência de atividades com uma amostra de apenas 12 sujeitos, sendo seis alunos de cada série (três duplas). Todos eles já haviam participado do teste diagnóstico.

4.2.3. Material

A seqüência, buscando a superação das dificuldades detectadas no teste diagnóstico, foi composta de duas atividades.

Os alunos trabalharam com lápis e borracha para a resolução das questões. Cartolinas e canetas piloto foram utilizadas na atividade I item (2), visto que após encontrarem o resultado da operação por meio de cálculo mental, eles deveriam apresentá-los para a classe levantando a cartolina com o resultado escrito na mesma. Na atividade II cada dupla pode utilizar uma calculadora simples (com as quatro operações fundamentais).

Utilizamos uma filmadora para registrar os debates ocorridos durante a aplicação da seqüência.

4.2.4. Procedimento

Os alunos novamente trabalharam em duplas, sendo três duplas de cada série. Pedimos aos alunos que as duplas fossem formadas pelos mesmos elementos participantes do teste diagnóstico. As atividades I e II foram trabalhadas em uma sessão com duração de 3 horas com cada uma das séries em separado.

Iniciamos a sessão com cada uma das séries explicando o motivo da aplicação da seqüência de atividades. Logo após, distribuímos um papel contendo o item 1 da atividade I para cada uma das duplas.

Fizemos a leitura do item 1 integralmente e explicamos que a resolução poderia ser obtida por meio de cálculo mental ou por meio de algoritmos utilizando papel e lápis, para posteriormente discutirmos as estratégias usadas. O tempo utilizado para a resolução foi de 20 minutos. Iniciamos então um debate sobre as estratégias ou o procedimento utilizado por cada uma das duplas para a resolução de cada um dos itens.

Durante o debate, levantamos questões para cada uma das duplas, como por exemplo:

- Vocês consideram mais fácil trabalhar com números escritos na forma de fração ou na forma decimal?

- O fato dessa frações serem decimais facilitou o cálculo mental ou não?

O debate durou aproximadamente 20 minutos, totalizando uma duração de 40 minutos para o item 1.

Finalizado este item, explicamos que o item 2 da atividade I tratava-se de um jogo com algumas questões envolvendo cálculo mental. Nós então distribuímos três pedaços retangulares de cartolina e uma caneta piloto para cada dupla.

Entregamos para cada dupla uma folha fechada contendo o item (a). Em seguida pedimos que as duplas abrissem o papel e resolvessem a questão por meio de cálculo mental, colocando, o mais rápido possível, o resultado obtido na cartolina e levantando-a para os demais colegas observarem o resultado. Repetimos o mesmo procedimento para o item (b) e (c). Assim que alguma dupla levantava a cartolina com o resultado, nós discutíamos as estratégias utilizadas. Mesmo os resultados incorretos foram discutidos. O tempo de duração deste item foi de aproximadamente 30 minutos.

Perguntamos aos alunos:

- O item 1 foi mais fácil do que o item 2? Porquê?

Entre a atividade I e a atividade II, os alunos tiveram um intervalo de 20 minutos.

Para a atividade II, primeiramente entregamos aos alunos uma calculadora e um papel contendo o item (a). Lemos em voz alta a atividade. Estabelecemos um tempo máximo de 30 minutos para o término do item (a). Na medida em que os alunos encontravam um método, nós solicitávamos que eles o aplicassem para divisões com números inteiros menores, como por exemplo, $9 \div 4$.

Discutimos os métodos encontrados pelas duplas durante 15 minutos. Em seguida, repetimos o procedimento utilizado no item (a) no item (b).

Durante a aplicação das duas atividades as duplas foram filmadas.

4.2.5. Discussão dos resultados da seqüência

Visando um melhor acompanhamento de nossa seqüência de atividades, no sentido de permitir que o leitor se intere da dinâmica da mesma, transcreveremos diversos debates, ora com uma dupla em particular, ora com todo o grupo. Após a transcrição, faremos comentários fundamentados em nosso referencial teórico, nos principais resultados de pesquisas, na análise de livros didáticos, entre outros. Dessa forma, a primeira transcrição diz respeito á atividade I, da qual transcreveremos abaixo parte do debate de uma das duplas da 7ª série, seguido da discussão geral com o grupo todo. A seguir, faremos também uma transcrição de uma das duplas da 5ª série, acompanhada do debate geral, visando ilustrar as concepções dos alunos relativas a multiplicação no domínio dos números inteiros positivos e também no domínio dos racionais.

Atividade I _ 1ª Parte

Dupla 7B : Pesquisadora: - Como vocês fizeram para calcular?
(T): - Fizemos a tabuada do 8 e do 4 (no a e no b) e no (c) fizemos de cabeça. Os outros itens não eram tão óbvios porque eram frações.
Pesquisadora: - Mas o item (c) também era fração!
(T): - Mas é a metade de um quilo.
Pesquisadora: - O que vocês fizeram no item (d)?
(C):- 10/10 é igual a 4 reais então 1/10 é igual a 0,40.
Pesquisadora: -E para achar a metade desse 1/10?
(T): - É 0,20.
Pesquisadora: - E como vocês encontraram 0,20 rapidamente?
(T): - É porque é a metade do 0,40.
Pesquisadora: - E 6/10 de quilo?
(T): - Nós fizemos 0,40 x 6.
Pesquisadora: - Porquê?
(T): - Porque 1/10 era 0,40.
Pesquisadora: - Vocês não tiveram nenhuma dificuldade na escolha da operação multiplicação?
(T): - Não.

Neste diálogo, nos parece que a dupla não encontrou dificuldade em trabalhar com as frações. Talvez isso tenha ocorrido pelo fato das frações terem sido representadas na forma decimal (o que pode ter facilitado os cálculos). Acreditamos que a dificuldade seria maior, tanto na escolha da operação como nos cálculos, se tivéssemos escrito 0,6 ao invés de 6/10, visto que 0,6 é um decimal menor do que 1. Resultados de pesquisas anteriormente citados (por exemplo, Greer, 1988) e o teste diagnóstico apontaram dificuldades nessa direção. Tal fato, continua a dar indícios a respeito de nossa hipótese sobre as concepções dos alunos.

Ao final dos debates do item 1 perguntamos aos alunos se o tipo de número proposto havia influenciado nas estratégias utilizadas para a resolução, a fim de que pudéssemos ter maiores indícios sobre as concepções dos alunos. Transcreveremos abaixo parte desse debate.

Pesquisadora: - Ninguém tentou transformar os números em decimais?
Todos:- Não.
Pesquisadora: - É mais difícil trabalhar com números decimais do que frações?
Todos: _ É.
Pesquisadora: - Se eu tivesse colocado 0,1 ao invés de 1/10, vocês teriam dúvida na hora de calcular?
(O): - Não. Só demoraria mais para calcular.
Pesquisadora: - Tanto faz eu colocar 0,1 de quilo ou 1/10 de quilo que o resultado é o mesmo?
Todos: - Sim.
Pesquisadora: - O que aconteceu com o que eu vou pagar pela ração do item (a) até o item (f)? Utilizamos o mesmo raciocínio para todos os itens, mas o que aconteceu?
Todos: - Foi diminuindo.
Pesquisadora: - Qual a operação utilizada no item (a)? E no item (b)?
Todos: - Multiplicação.
Pesquisadora :- No item (c), é a mesma coisa multiplicar por 0,5 ou dividir por 2. Qual é a diferença entre o número 8 (item a) e o 0,5? Eles pertencem ao mesmo conjunto?
(G): - Não. O 0,5 não é inteiro. Ele está no conjunto dos decimais.
Pesquisadora: - Mas o que aconteceu da multiplicação por 8 para a multiplicação por 0,5?
Todos: - Diminuiu.

Pesquisadora: - A multiplicação tanto pode ter como resultado um número maior que os fatores quanto um número menor?
Todos: - Sim.

A nossa intenção com esse debate era dar subsídios para que os alunos pudessem perceber que a multiplicação nem sempre aumenta e que tal fato depende do domínio onde se está trabalhando. Se tal fato aconteceu, poderemos comprovar no teste final e na entrevista.

Dupla 5AA : Pesquisadora: - Como vocês calcularam o custo de 8 quilos se 1 quilo de ração custa 4 reais?

(R): - A gente simplificou 4 reais para o número 4 e depois a gente multiplicou por 8 e deu 32. Aí nós colocamos os zeros no final.

Pesquisadora: - Para 4 quilos, vocês fizeram a mesma coisa?

(R): - Sim.

Pesquisadora: - E para calcular meio quilo?

(R): - A gente dividiu o preço do quilo por 2.

Pesquisadora: - E 1/10 de quilo?

(R): - A gente dividiu 4 reais por 10, aí deu 0,4 que é 40 centavos.

Pesquisadora: - E a metade de 1/10 de quilo?

(R): - A gente pegou o 1/10 e dividiu por 2 para dar a metade.

Pesquisadora: - E 6/10 de quilo?

(R): - A gente sabe que 6/10 é mais da metade. Pegamos a metade mais 1/10.

Pesquisadora :- E se ao invés de 6/10 eu perguntasse 0,6, ficaria mais fácil ou mais difícil de calcular?

(R): - A mesma coisa, porque não muda. Só muda na hora de escrever.

Pesquisadora: - Vocês preferem trabalhar com fração ou decimal?

(R e A): - Tanto faz. Decimal ou fração !

Atividade I _ 2ª Parte

Item (a):

Transcreveremos abaixo parte do debate com a 7ª série, e em seqüência com a 5ª série, com o intuito de mostrar que os alunos não apresentam maiores dificuldades em resolver problemas envolvendo multiplicação com multiplicando decimal e com multiplicador inteiro positivo, já que nesse caso é válida a abordagem de multiplicação como adições repetidas de uma mesma parcela. Ainda como em resultados de pesquisas citadas anteriormente (por exemplo, Luke, 1988), não existe diferença significativa de dificuldade em problemas cujo o multiplicando é um número inteiro, ou ainda, decimal maior ou menor que 1.

A dupla 7C resolveu o item (a) primeiro e levantou a cartolina com o número 4,80.

Pesquisadora: - Foi fácil calcular isso?
(G): - Sim.
Pesquisadora: - Como vocês calcularam?
(G): - Fizemos 1,60 x 3.
Pesquisadora: - Como você fez?
(G): - Primeiro nós fizemos 0,60 por 3 que dá 1,80 e depois multiplicamos 3 por 1 e somamos.

Note aqui que a dupla utilizou a propriedade distributiva como facilitadora do cálculo, visto que o multiplicando era um decimal, como havíamos previsto. Podemos considerá-la como um teorema-em-ação, na medida em que os alunos talvez não soubessem formalizá-lo [a x (b + c) = a x b + a x c].

Pesquisadora: - Como vocês fizeram o cálculo?
Dupla 5DD: (C): - Fizemos 1,60 + 1,60 + 1,60.
Pesquisadora: - Vocês fizeram por somas repetidas?
(C): - É.

É importante salientarmos que a concepção de multiplicação como adições repetidas de uma mesma parcela aparece bastante clara no discurso da dupla acima. Uma outra dupla da 7ª série também utilizou essa mesma estratégia. É fundamental observarmos como os alunos estendem conhecimentos válidos no domínio dos inteiros positivos para o domínio dos racionais. Acreditamos que tal fato seja decorrente da transposição didática, visto que a escola costuma trabalhar com muito mais ênfase no domínio dos inteiros, principalmente nas séries iniciais, nas quais os conceitos de multiplicação e divisão são introduzidos. Podemos considerar também esse procedimento como um teorema-em-ação, ou seja, o custo de 3 metros de arame é igual ao custo de 1 metro, mais 1 metro e mais 1 metro, e que pode ser expresso formalmente por meio da aplicação linear $f: Z \rightarrow Z$: $f(1+1+1)= f(1) + f(1) + f(1)$ ou $f(3 \cdot 1) = 3 \cdot f(1)$.

Pesquisadora: - A dupla vencedora calculou como?
Dupla 5AA: (R): - A gente multiplicou por 2. Depois a gente adicionou 60 centavos e depois mais 1. Só que na realidade a gente tirou a vírgula e colocou o total como 48 e depois a gente colocou a vírgula novamente.
Pesquisadora: - Vocês preferem trabalhar com números inteiros?
(R): - É bem melhor.

Neste caso, a dupla percebendo a dificuldade em se trabalhar com números decimais, tentou decompor os números a serem multiplicados e além disso, tirou a vírgula dos mesmos trabalhando com eles como se fossem inteiros.

Novamente percebemos uma influencia da escola na ênfase ao trabalho com números inteiros.

Item b:

A seguir, apresentaremos parte do debate com a 7ª série, visando mostrar que os alunos também parecem não apresentar dificuldades em trabalhar com multiplicador decimal (sendo este maior que 1), confirmando resultados obtidos por Greer (1988).

Pesquisadora: - Como vocês fizeram?
Dupla 7C: (G): - A gente dividiu 1,60 por 2 e somamos com 4,80.
Pesquisadora: - (M) e (O) como fizeram? Pode falar.
Dupla 7H: (M): - A gente fez a mesma coisa, pegou primeiro a parte inteira e depois a parte decimal.
Pesquisadora: - As meninas fizeram a mesma coisa? Não tentaram fazer o cálculo no papel?
Dupla 7B: (T): - Fizemos a mesma coisa. A gente já sabia quanto valia 3 metros e somamos com meio metro.
Pesquisadora: - No caso, vocês acham que facilitou a seqüência de cálculos, pelo fato de vocês terem a possibilidade de utilizar cálculos anteriores? Se eu tivesse colocado somente o 3,5 metros e não o 3 metros?
(T): - Sim. Com certeza, nós calcularíamos 3 metros primeiro, para depois calcular 3,5 metros.
Pesquisadora: - 3 metros e 3,5 metros são números diferentes, um é inteiro e o outro decimal. A multiplicação aumentou ou diminuiu do item (a) para o (b)?
Todos: - Aumentou.
Pesquisadora: - Mas o que aconteceu na primeira parte da atividade I? A gente multiplicou certos decimais e...
Todos: - Foi diminuindo.
Pesquisadora: - Aqui nós multiplicamos primeiro por um inteiro e depois por um decimal, e o que aconteceu na multiplicação?

Todos: - Aumentou.

Pesquisadora: - Existe uma regra básica para a multiplicação? Eu posso falar que ela sempre aumenta ou sempre diminui?

(G): - Na primeira parte nós multiplicamos o 4 por números menores que ele, por isso diminuiu.

Pesquisadora: - Ela pode diminuir ou aumentar?

Todos: - Pode.

Mais uma vez, nos parece que após os debates os alunos perceberam que as concepções de que *"multiplicação sempre aumenta"* e *"divisão sempre diminui"* só são válidas no domínio dos inteiros positivos.

Item c:

Abaixo descreveremos as estratégias usadas por duas duplas, uma da 7ª série e outra da 5ª série, no sentido de mostrar que um problema envolvendo uma multiplicação na qual o multiplicador é um número decimal menor que 1, faz com que os alunos busquem estratégias diferentes, pois nesse caso a multiplicação como adições de parcelas repetidas não é válida. Mostraremos ainda, que a forma de escrita do número racional pode influenciar no desempenho dos alunos, visto que muitas vezes, eles transformaram os decimais para a forma fracionária, buscando facilitar os cálculos.

Pesquisadora: - As meninas fizeram como?

Dupla 7B: (T): - A gente pegou a metade de 1,60 e a metade da metade de 1,60 e somou.

Pesquisadora: - Porquê a metade da metade? A metade de 1,60 dá quanto?

(T): - 0,80.

Pesquisadora: _ E depois?
(T): - Depois a gente pegou a metade da metade e somou, pois assim daria 0,75.
Pesquisadora: - Vocês não pensaram em transformar 0,75 em fração?
(T): - Não.

Percebemos que a dupla acima citada usou uma estratégia bastante interessante, na medida em que utilizaram-se, talvez até inconscientemente, da propriedade distributiva da multiplicação em relação à soma. Novamente um teorema-em-ação. Nós havíamos previsto que a utilização dessa propriedade poderia vir a ser um facilitador para os cálculos com os decimais e com as frações.

Pesquisadora: - Como vocês fizeram?
Dupla 5B: (AL): - Nós fizemos 1,60 dividido por 4.
Pesquisadora: - Vocês lembraram que 0,75 é a mesma coisa quê?
(AL): - 3/4. Então nós fizemos 1,60 dividido por 4 para depois multiplicar por 3.
Pesquisadora: - Para fazer cálculo mental é mais fácil transformar em fração?
(AL e L): - É.
Pesquisadora: - Se não houvesse tempo para conferir esse cálculo, eu saberia que deve dar um número maior ou menor do que 1,60?
(L e AL): - Menor.
Pesquisadora: - Porquê menor?
(L e AL): - Porque 0,75 é menor que 1 metro.

A dupla acima parece confirmar nossas hipóteses de que os alunos têm maior facilidade em trabalhar com números escritos na forma fracionária do que na forma decimal (principalmente quando o mesmo é um decimal menor do que 1). Nesta atividade trabalhamos com a idéia de Schwartz (1988), que aponta uma série de falhas em se introduzir a multiplicação como um modo mais rápido de fazer adições repetidas de uma mesma parcela. Focalizando o referente em questão, trabalhamos com quantidades extensivas e intensivas. Observamos, por exemplo, que a multiplicação de uma quantidade com o referente *preço/metro* e uma quantidade cujo o referente é *metros* gera uma quantidade cujo referente não é nem *preço/metro* nem *metros*. No caso é *preço*. Tal fato depende então, como Schwartz complementa, da habilidade em se interpretar a relação expressa pela quantidade intensiva (*preço/metro*) em uma associação de duas quantidades extensivas, preço e metros.

Atividade II _ 1ª Parte

Duas duplas da 7ª série apresentaram procedimentos iguais para encontrar o resto da divisão de 597847394 por 98762, relacionando a mesma com a divisão euclidiana, como será descrito a seguir:

Pesquisadora: - O que vocês fizeram?

Dupla 7H: (O): - Eu fiz a divisão dos números e peguei o resultado da divisão e multipliquei pelo divisor.

Pesquisadora: - Como era esse resultado? Inteiro ou decimal?

(O): - Era decimal.

Pesquisadora: - O que você fez?

(O): - Eu peguei o quociente...

Pesquisadora: - Você pegou o número todo que apareceu no visor da calculadora?

(O): - 605,97592.

Pesquisadora: - Você pegou esse número e multiplicou por quanto?

(O): - Por 98762. E o resultado eu subtrai do dividendo.

Pesquisadora: - E o resto deu quanto?

(O): - 1.

Pesquisadora :- E você sabe me explicar se esse método é correto?

(O): - Depois eu conferi e achei que está certo.

Pesquisadora: - Se você fizesse uma divisão com números menores, por exemplo 5 ÷ 3, você acha que estaria certo?

(O): - 5 ÷ 3 dá 1,666... e por esse método o resto dá 0,0000002.

Pesquisadora: - Para que esse método seja eficiente ele deveria ser válido para qualquer divisão. Tente achar outro método.

Neste caso os alunos perceberam que o método encontrado não era válido para uma divisão bastante simples e que seria necessário encontrar um método válido para encontrar o resto em qualquer divisão.

Pesquisadora: - Como vocês fizeram para encontrar o resto?

Dupla 7C: (G): - A gente fez a divisão e deu 605,97592, aí nós descartamos os números após a virgula do 605. Ficamos só com a parte inteira. Aí a gente multiplicou por 98762 e deu 59751010 e daí a gente subtraiu esse número de 59847394 e deu 98384 que é o resto.

Pesquisadora: - Esse método funciona para 7 dividido por 4?

(G): - Dá 3 como resto. Tá certo!

A dupla acima descrita parece ter estabelecido uma das relações possíveis da divisão euclidiana, ou seja, se $D = d.q + r$, então $D - q.d = r$. Percebemos que o simples fato do método ser válido para uma divisão com números menores, faz com que os alunos generalizem o processo para qualquer divisão. Na 5ª série, nenhuma das duplas conseguiu encontrar um método para achar o resto.

Atividade II _ 2ª Parte

Nesta etapa, duas duplas da 7ª série e uma da 5ª série apresentaram métodos iguais. O botão da divisão estava quebrado e os números a serem divididos eram “menores” do que os apresentados na primeira parte, tal fato pode ter induzido os alunos a utilizarem a estratégia de subtrações sucessivas, visto que a mesma é geralmente utilizada na escola para introduzir a divisão. A atividade tinha o intuito de mostrar, entre outras coisas, que a divisão não é um conceito isolado (ela deve ser abordada dentro de um campo conceitual), ou seja, ela se inter-relaciona com a adição, subtração e principalmente com a multiplicação.

> *Pesquisadora: - Como vocês encontraram o resto 27?*
> *Dupla 5DD: (AP) :- A gente foi multiplicando por 45 alguns números (10, 20 ,30) e verificamos que por 35 dava perto. Então multipliquei por 36, 37 e 38, e vimos que dava 37.*
> *(CC): - Então a gente pegou 37 x 45 e deu 1665. Pegamos 1692 - 1665 e deu 27 como resto.*

Logo após a dupla da 5ª série apresentar esse método, as outras da mesma série verificaram que esse também era válido para a divisão da primeira parte da atividade.

Uma das duplas da 7ª série fez por subtrações sucessivas. Nesse caso, é forte a concepção *"divisão sempre diminui"*, visto que para fazer subtrações sucessivas o dividendo deve ser maior que o divisor, reforçando nossa hipótese sobre as concepções dos alunos, anteriormente citada.

Os alunos parecem ter encontrado menor dificuldade nesse item. Talvez se deva pelo fato dos números serem de ordem menor do que os apresentados na primeira parte.

Conforme a discussão dos resultados da seqüência de atividades acima descritos, aparentemente acreditamos que os alunos superaram as dificuldades então detectadas no teste diagnóstico. Sendo assim, faremos um teste final para confirmarmos tal fato.

4.3. TESTE FINAL

O objetivo do teste final foi verificarmos se após a aplicação da seqüência de atividades proposta anteriormente, os alunos superaram as dificuldades detectadas no teste diagnóstico.

4.3.1. Desenho do Teste Final

Elaboramos o teste final em correspondência matemática com o teste diagnóstico, ou seja, enfocando os aspectos do campo conceitual multiplicativo nos quais os alunos apresentaram maior dificuldade. Este teste tem por objetivo verificar se houve um crescimento no desempenho dos alunos após a aplicação da seqüência de atividades.

Apresentamos a seguir o teste final:

(1) Sabemos que a distância entre Araçatuba e São Paulo é aproximadamente 5 vezes a distância de São Paulo até Campinas. Essa última distância é de 100 Km. Qual é então a distância entre Araçatuba e São Paulo?

(2) A distância entre Porto Alegre e Florianópolis é quatro décimos da distância entre Aracaju e Fortaleza, sendo essa de 1190 Km. Qual é então a distância entre Porto Alegre e Florianópolis?

(3) Descubra o valor desconhecido em cada um dos itens abaixo:

(a) $414 \div \quad = 23$ (b) $\quad \div 59 = 27$

4.3.2. Sujeitos

Trabalhamos com a mesma amostra envolvida na seqüência de atividades (12 alunos).

4.3.3. Material

Os alunos utilizaram lápis, borracha e uma folha de rascunho na resolução das questões.

4.3.4 Procedimento

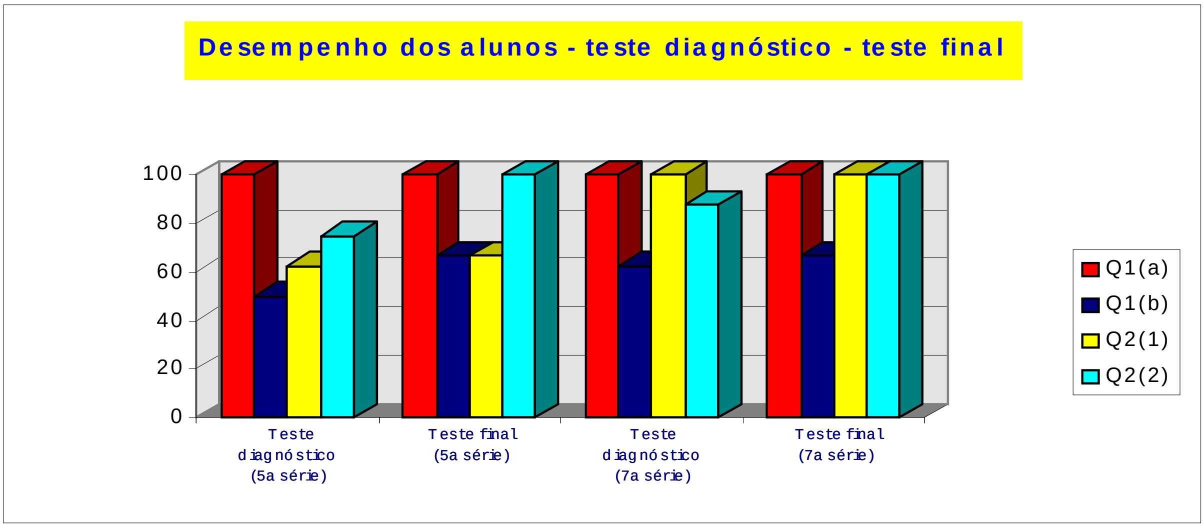
Os alunos trabalharam em duplas, aleatoriamente, sendo três duplas de cada série. O teste teve duração de aproximadamente uma hora e foi realizado em duas etapas: a primeira com as duplas da 7ª série e a segunda com as duplas da 5ª série.

Entregamos um teste para cada dupla. O teste foi lido em voz alta no início de cada etapa. Todas as questões foram resolvidas a lápis.

4.3.5. Análises

O gráfico a seguir nos mostra o desempenho de nossa amostra composta de 12 alunos no teste final, trabalhando em duplas, após participarem da seqüência de atividades. Dentro das 24 possíveis respostas corretas, obtivemos 21, indicando um índice de sucesso geral de 87,5%. Tal índice de sucesso representa um aumento de aproximadamente 10% em relação ao teste diagnóstico.

Ao analisarmos esta amostra pelo grau de instrução dos alunos, constatamos ainda uma ligeira superioridade dos alunos da 7ª série em relação aos da 5ª série. Observamos que os alunos da 7ª série obtiveram um índice médio de sucesso de 91,7%, enquanto os da 5ª série obtiveram 83,3%. Mas também percebemos que em comparação ao teste diagnóstico, a 5ª série apresentou um crescimento variacional maior do que a 7ª série.



Como já havíamos observado, a 7ª série parece não apresentar maiores dificuldades nas questões envolvendo as relações entre dividendo, divisor, quociente e resto na divisão, pois o desempenho dos alunos nessas questões, tanto no teste diagnóstico, como no teste final, foi bastante satisfatório, ou seja, acima de 75%. Como nós avaliamos somente duas questões envolvendo essas relações, não podemos dizer que os alunos estabelecem todas as relações possíveis na divisão. Portanto, acreditamos que seja necessário entrevistarmos os alunos individualmente, a fim de constatarmos, entre outras coisas, se eles realmente estabelecem as relações na divisão, ou se eles somente conhecem alguns procedimentos que para essas questões são válidos, ou seja, verificaremos se eles têm o conhecimento de processos ou o conhecimento de conceitos (Simon, 1993).

4.4. ENTREVISTA

4.4.1. Desenho da Entrevista

Na análise do teste final percebemos que não havíamos explorado todas situações que pudessem confirmar nossas hipóteses. Resolvemos elaborar entrevistas individuais, nas quais investigaremos aspectos que nos mostrem se realmente os alunos superaram as dificuldades encontradas no teste diagnóstico, expandindo seus campos conceituais multiplicativos, na medida em que pudessem perceber que os conceitos de multiplicação e divisão não se resumem à adições repetidas de uma mesma parcela e à subtrações sucessivas. Além disso, não nos foi possível verificar se os alunos realmente avançaram, ou seja, se o saber foi capitalizado após a aplicação da seqüência de atividades. Assim sendo, escolhemos uma proposta formal para as entrevistas, pois estamos interessados em saber se os alunos estão descontextualizando o saber ora apreendido.

Outro objetivo das entrevistas é também verificar por meio de questões envolvendo o cálculo do valor desconhecido na multiplicação e na divisão, se os alunos conseguem estabelecer relações entre a multiplicação e a divisão e ainda, se eles, após a seqüência, conseguem ver a multiplicação não só como um modo mais rápido de fazer adições repetidas e a divisão como subtrações sucessivas.

Encontre o valor desconhecido em cada um dos itens abaixo:

Parte I

(a) [ ] ÷ 45 = 100	(b) 62 ÷ [ ] = 248
(c) 98 ÷ [ ] = 1	(d) [ ] ÷ 0 = 0
(e) 0 ÷ [ ] = 0	(f) 27 x [ ] = 108

Parte II

(g) 32 x [ ] = 16	(h) [ ] x 576 = 576
(i) 0 x [ ] =0	(j) [ ] x 1 = 387
(l) 618 x [ ] = 0	(m) [ ] x 0 = 171

4.4.2. Sujeitos

A mesma amostra envolvida na seqüência de atividades (12 alunos) participou da entrevista. Entrevistamos também uma amostra de 12 alunos de outra escola particular (sendo 6 da 5ª série e 6 da 7ª série) que não havia participado da seqüência de atividades, para que pudéssemos tê-la como parâmetro de comparação.

4.4.3. Material

Os alunos utilizaram lápis, borracha e uma calculadora simples na resolução das questões.

4.4.4 Procedimento

O procedimento utilizado nas entrevistas foi o mesmo com as duas amostras de alunos. Os alunos foram entrevistados individualmente. A entrevista teve duração de aproximadamente 30 minutos, sendo realizada em duas etapas: a primeira com os alunos da 5ª série e a segunda com os alunos da 7ª série.

Foi explicado para cada aluno que eles poderiam ou não utilizar a calculadora para resolver as questões da entrevista. Eles poderiam resolvê-las também por meio de cálculo mental ou por meio de cálculos a serem efetuados com lápis e papel.

As questões da entrevista foram distribuídas em fichas, contendo dois itens em cada uma delas. Os alunos receberam uma ficha por vez para ser resolvida. Assim que uma ficha era resolvida ele recebia outra.

Durante a resolução, perguntamos algumas questões para os alunos, baseados num roteiro de entrevista previamente elaborado. Esse roteiro foi feito para garantir uma sistematização de como e porquê os alunos estavam resolvendo. Vale salientar que o roteiro contém questões básicas. Outras questões poderiam surgir durante a entrevista, dependendo da clareza das respostas dos alunos. Por exemplo:

- Nas questões (d) e (e) perguntamos:

- O que significa para você dividir por zero?

- O que significa para você a operação divisão?

- O que significa o dividendo para você?

- O que significa o divisor para você?

- Nas questões (h), (i), (j) e (l) perguntamos:

- O que significa multiplicar para você?

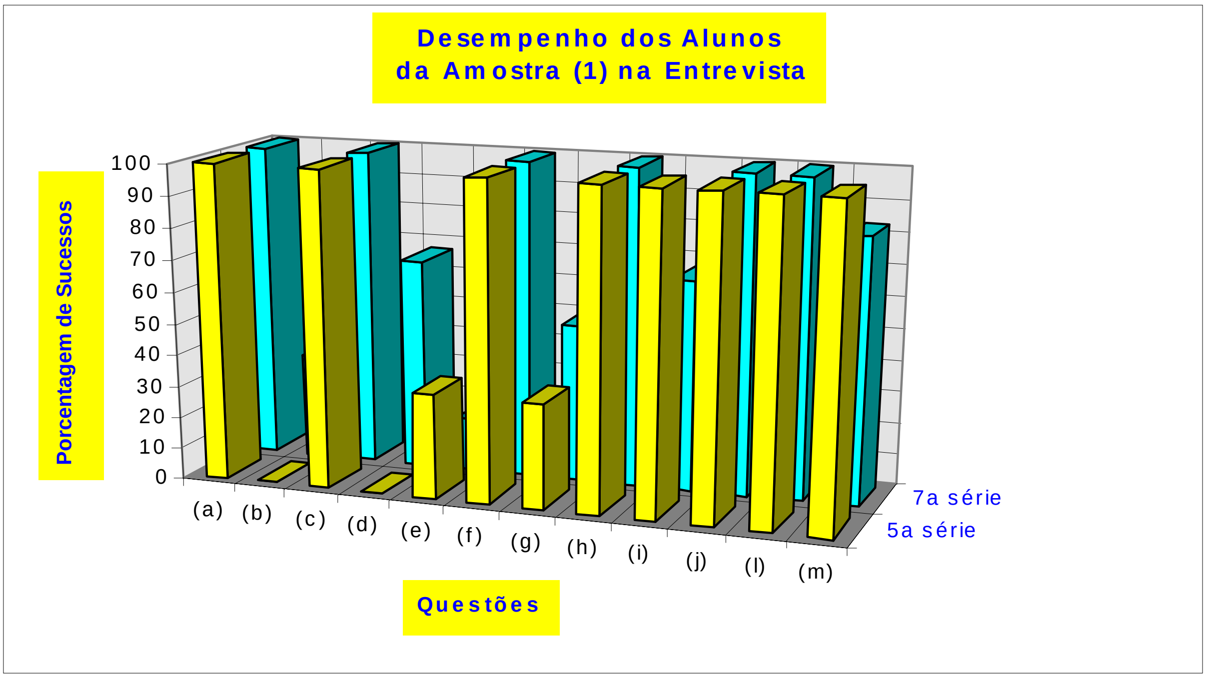
- O resultado da multiplicação pode ser igual a um dos fatores ou ela sempre aumenta?

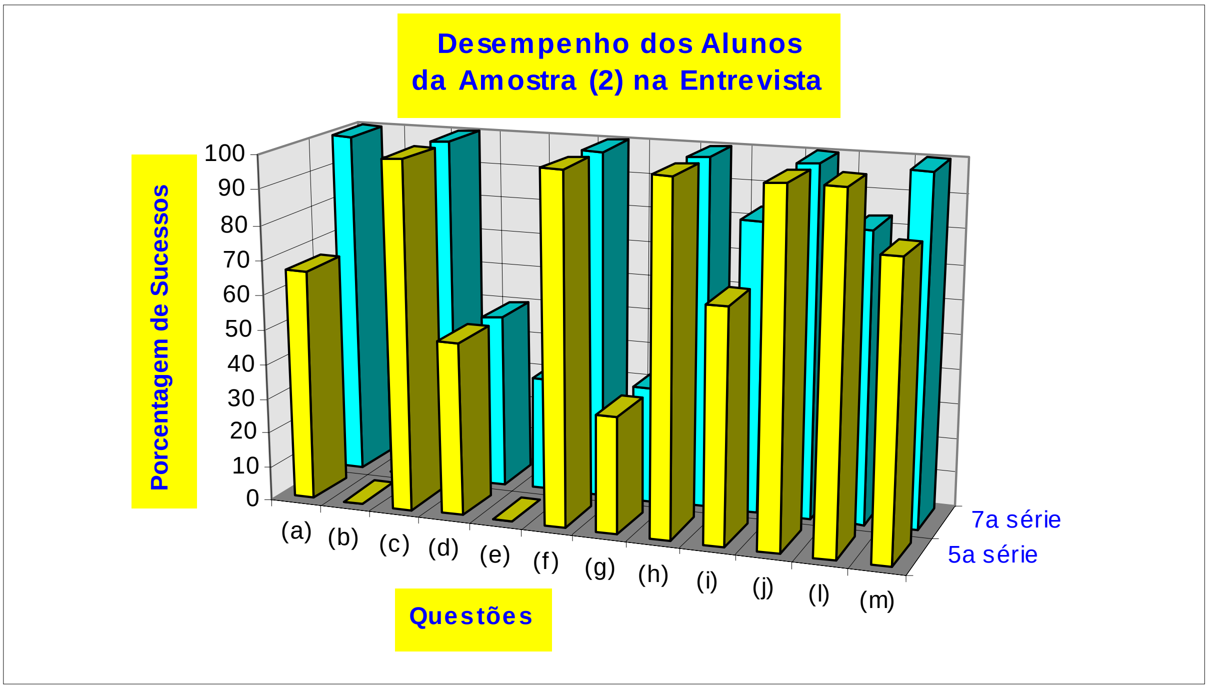
Os diálogos ocorridos durante a entrevista foram gravados.

4.4.5. Análises

A fim de simplificarmos a notação na análise das entrevistas, chamaremos de amostra (1) a amostra de alunos que participaram da seqüência de atividades, e de amostra (2) a amostra de alunos que participaram somente das entrevistas, os quais servirão como parâmetro de comparação.

Primeiramente apresentaremos um gráfico mostrando um panorama geral dos índices de sucesso das duas amostras entrevistadas.





Neste panorama geral, podemos verificar superficialmente que houve uma ligeira superioridade no desempenho da amostra (1), que participou da seqüência de atividades, sobre a amostra (2), que participou somente das entrevistas. Das

144 possíveis respostas corretas, 109 foram obtidas pelos alunos da amostra (1), representando um índice médio de sucesso de 75,7%. Já a amostra (2) obteve 87 respostas corretas, representando um índice médio de sucesso de 60,4%.

A seguir nós discutiremos as questões das entrevistas conforme cinco níveis, os quais foram criados a partir dos sucessos dos alunos das duas amostras.

• **Nível (1)** - Fazem parte deste nível as questões (c), (f), (h) e (j), nas quais o índice de sucesso obtido pelas duas amostras (considerando as duas séries) foi de 100%. De fato, encontramos nessas quatro questões características comuns quanto ao modo de resolvê-las. Por exemplo:

• <u>Uso da operação inversa</u>: Todas as questões poderiam ser resolvidas pela aplicação da operação inversa, fato esse que os alunos parecem ter memorizado em suas aulas, pelo que pudemos verificar da breve análise da transposição didática. Por exemplo, 83,3% dos alunos da amostra (1) e 50% dos alunos da amostra (2) utilizaram a operação inversa para resolver o item (f).

• <u>Uso de uma propriedade</u>: Algumas delas poderiam também serem resolvidas por meio de cálculo mental ou aplicando uma propriedade largamente difundida nos livros didáticos, por exemplo:

“Qualquer número vezes 1 dá o próprio número”. 50% dos alunos de ambas as amostras apresentaram esse tipo de justificativa na questão (h) e 41,7% dos alunos de ambas as amostras justificaram dessa maneira na questão (j).

“Qualquer número dividido por ele mesmo dá 1”. 16,7% dos alunos da amostra (1) e 58,3% dos alunos da amostra (2) apresentaram esse tipo de justificativa na questão (c).

• **Nível (2):** Consideraremos neste nível apenas a questão (a), na qual obtivemos um índice de sucesso praticamente semelhante às questões do nível (1). A única exceção foi a 5ª série da amostra (2) que obteve um índice de sucesso um pouco inferior (66,7%). Tal desempenho se comparado aos índices dos outros alunos nessa questão pode ser um indicativo de que este conteúdo não havia sido solicitado ainda em sala de aula, pois alguns alunos comentaram a esse respeito durante a entrevista. Outra possibilidade seria a tensão dos alunos no início da entrevista, visto que essa questão era a primeira da mesma.

• **Nível (3):** Incluímos neste nível as questões (i), (l) e (m), as quais envolveram multiplicação por zero, sendo este ora multiplicando, ora multiplicador, ou ora produto.

O índice de sucesso foi bastante satisfatório para ambas as amostras. Veja tabela abaixo:

Amostra	Sucesso 5ª série Q(i)	Sucesso 7ª série Q(i)	Sucesso 5ª série Q(l)	Sucesso 7ª série Q(l)	Sucesso 5ª série Q(m)	Sucesso 7ª série Q(m)
(1)	100%	66,7%	100%	100%	100%	83,3%
(2)	66,7%	83,3%	100%	83,3%	83,3%	100%

Como nas questões (h) e (j) do nível (1), aqui também os alunos poderiam se valer da aplicação de uma propriedade largamente difundida nos livros didáticos, na qual a multiplicação por zero obtém-se zero no produto.

Praticamente todos os alunos de ambas as amostras apresentaram como justificativa para essas questões a que segue:

"Qualquer número multiplicado por zero dá como resultado zero".

Considerando que nenhum dos grupos obteve um índice de sucesso inferior a 2/3, podemos supor que a multiplicação na qual um dos fatores é zero não é problema para os alunos de ambas as amostras entrevistadas. É interessante salientar que os mesmos alunos aceitam o fato do produto ser igual á um dos fatores da multiplicação (contrariando a concepção de que multiplicação sempre aumenta). Acreditamos que eles tenham memorizado tal fato como uma regra, sem fazer reflexões a respeito disso.

• **Nível (4):** Neste nível consideraremos as questões (d) e (e), envolvendo divisão, ora com dividendo zero e ora com divisor.

É a partir deste nível que as dificuldades começam a aparecer, como mostra a tabela abaixo:

	Amostra(1) Sucesso 5ª série	Amostra(1) Sucesso 7ª série	Amostra(2) Sucesso 5ª série	Amostra(2) Sucesso 7ª série
Questão (d)	0%	66,7%	50%	50%
Questão (e)	33,3%	16,7%	0%	33,3%

A tabela mostra ainda que os alunos de ambas as amostras encontraram maiores dificuldades na resolução da questão (e), visto que o índice de sucesso encontrado foi inferior.

Na questão (e), diversos tipos de raciocínio foram encontrados, não sendo possível estabelecer categorias, com uma única exceção.

16,7% dos alunos da amostra (1) disseram que a resposta é 1, justificando que todo número dividido por 1 dá ele mesmo. Mais uma vez, os alunos demostram ter memorizado uma regra, sem contudo refletirem a respeito da divisão na qual o dividendo é zero, além de não estabelecerem relações na mesma.

Para entendermos o porquê do fraco desempenho nestas questões precisamos nos deter no que os alunos disseram durante a entrevista. Podemos categorizar essas falas conforme dois tipos de explicação:

(a) Zero considerado como "nada", "nenhum" e "conjunto vazio" : Na questão (d) 16,7% dos alunos da amostra (1) e 50% dos alunos da amostra (2) disseram que dividir por zero é como dividir por nada, como podemos ilustrar com os diálogos abaixo:

Pesquisadora: - O que significa para você dividir por zero?
(C): - Se você tem nada e vai dividir por nada, quanto você vai ficar? Com nada. Você nem tinha antes. (Amostra (2) - 5ª série).

(I): - Não dá para dividir nenhum número por zero. É impossível.
Pesquisadora: - Porque não dá para dividir nenhum número por zero? O que significa dividir para você?
(I): - Distribuir um número por outro número.
Pesquisadora: - Me dê um exemplo.
(I): - Distribuir 5 lápis para 5 pessoas, você dá um para cada uma.
Pesquisadora: - E o que significa dividir por zero?
(I): - É dividir para ninguém. Você divide por nada. (Amostra (2) - 7ª série).

Observamos no que foi citado acima que os alunos associam o zero às palavras “nada”, “nenhum”, “conjunto vazio”, entre outros. Como já foi dito anteriormente, um dos conceitos envolvidos no campo conceitual multiplicativo é o conceito de número. Como o número zero não expressa grandeza, os alunos dizem que ele representa nada.

(b) Regra matemática: 16,7% dos alunos da amostra (1) disseram que é uma regra matemática não ser possível a divisão por zero.

Pesquisadora: - O que significa para você o divisor ser zero?
(R): - Impossível isso. É contra as regras matemáticas. O divisor não pode ser zero. (Amostra (1) - 5ª série).
(O): - Não pode dividir por zero.
Pesquisadora: - Porque eu não posso dividir por zero?
(O): - A gente aprendeu que não podia dividir por zero.
Pesquisadora: - O que significa para você a divisão por zero?
(O): - Não dividir.
Pesquisadora: - Então o que significa a divisão?
(O): - Dividir é separar algum número em partes iguais.
Pesquisadora: - Então não existe divisão neste caso?
(O): - É, não tem como separar em partes iguais. (Amostra (1) - 7ª série).

Adicionalmente, pudemos perceber uma outra categoria. Em 41,7% dos alunos da amostra (1) e em 50% dos alunos da amostra (2) houve uma associação da divisão com a idéia de repartição eqüitativa, como por exemplo:

(A): - Zero não tem nada. Ele é um conjunto vazio.
Pesquisadora: - E o que significa para você dividir?
(A): - Se eu tenho uma torta com 8 pedaços e quero dividir entre 2 pessoas, eu vou dar 4 pedaços para uma e quatro pedaços para outra.
Pesquisadora: - E não tem problema dividir por zero?
(A): - Não. Toda coisa que você divide por zero dá zero.
Pesquisadora: - Porquê?

(A): - Porque zero é um conjunto vazio. (Amostra (2) - 5ª série).

• **Nível (5):** Neste último nível consideraremos as questões (b) e (g), nas quais o índice de sucesso foi o mais baixo em relação à todas as questões da entrevista. Nestas duas questões devido ao tipo de números escolhidos para a multiplicação e para a divisão, contraria as concepções dos alunos que “multiplicação sempre aumenta” e “divisão sempre aumenta”. Vejamos em detalhes cada uma das categorias:

	Amostra(1) Sucesso 5ª série	Amostra(1) Sucesso 7ª série	Amostra(2) Sucesso 5ª série	Amostra(2) Sucesso 7ª série
Questão (b)	0%	33,3%	0%	0%
Questão (g)	33,3%	50%	33,3%	33,3%

Observando os resultados da questão (b) temos um forte indício de que os alunos, mesmo após a seqüência, não conseguiram ainda estabelecer relações entre dividendo, divisor, quociente e resto. Não existe diferença significativa entre os alunos que participaram da seqüência e os que não participaram. Um fator que pode ter influenciado o desempenho dos alunos é que nesse caso, o quociente da divisão é maior que o dividendo e isso pode ter contrariado a concepção dos mesmos que “divisão sempre diminui”. Ilustrando nossas suspeitas seguem alguns diálogos:

(A): - Esta conta está errada, pois você não pode dividir o número e o resultado ser maior que o próprio dividendo. O dividendo tem que ser maior.

Pesquisadora: - Sempre?

(A): -Sempre.

Pesquisadora: - Quer dizer que a divisão não pode aumentar?

(A): - Tem que sempre diminuir, pois você está dividindo e não multiplicando. Agora se você multiplicasse o 62 poderia dar 248.

Pesquisadora: - Então você acha que é impossível de se resolver?

(A): - Eu acho. (Amostra (1) - 5ª série).

(O): - Acho estranho, pois você vai dividir 62 e o quociente dá maior. Vou tentar dividir 248 por 62. Deu 4. Não dá, pois 62 dividido por 4 dá um número menor. É impossível pelo fato de dividir e dar um número maior. (Amostra (1) - 7ª série).

Pesquisadora: - Na divisão não pode dar um número maior?
(B): - Não, porque você vai dividir e cada pessoa vai ficar com menos. A resposta vai diminuir.
Pesquisadora: - Então não vai ter resposta?
(B): - Por exemplo, eu tenho 62 coisas e vou dividir por 4 pessoas, não pode dar 248, se eu só tenho 62 coisas. (Amostra (2) - 7ª série).

(I): - Não dá para fazer essa conta, pois 248 é maior que 62. (Amostra (2) - 7ª série).

Já na questão (g) observamos que como a multiplicação proposta contraria a concepção de que “multiplicação sempre aumenta", o desempenho dos alunos foi bastante insatisfatório. Não há diferença significativa entre os alunos da amostra (1) e os da amostra (2), principalmente no que tange a 5ª série. As justificativas abaixo descritas nos mostram maiores indícios de nossas suspeitas:

(AL): - Nenhum número, pois multiplicar você só vai aumentando e 32 é menor que 16. (Amostra (1) - 5ª série).

(R): - Nenhum número, pois na multiplicação você aumenta o número e não diminui. (Amostra (1) - 5ª série).

(C): - Se eu multiplicar vai sempre aumentar e não diminuir. (Amostra (1) - 7ª série).

(D): - Não dá para fazer, pois 32 é maior que o resultado. (Amostra (2) - 5ª série).

(B): - Não tem nenhum número.

Pesquisadora: - Porque não existe um número que 32 multiplicado por ele dê 16?
(B): - Porque 16 é menor que 32 e 32 multiplicado por 1 já dá 32 que é maior que 16, então o resultado nunca pode ser maior. Não pode, porque 32 vezes qualquer número vai ser maior que 16. (Amostra (2) - 7ª série).

(I): - Nenhum. O menor número que dá para multiplicar é o 1 que dá 32 e não 16. (Amostra (2) - 7ª série).

Percebemos no que foi descrito, um indício de como a escola enfatiza o trabalho com números inteiros, pois os alunos nem tentaram multiplicar por números racionais. Nossa hipótese a respeito das concepções dos alunos continua sendo reforçada como foi ilustrado nas transcrições acima.

CAPÍTULO V:

CONCLUSÃO

Nossa pesquisa teve por objetivo investigar concepções de alunos de 5ª e 7ª séries sobre as operações de multiplicação e divisão, para a partir daí propor uma seqüência de atividades que trabalhasse estas operações tanto no domínio dos inteiros positivos como dos decimais, visando a aprendizagem das mesmas não somente como adições repetidas e subtrações sucessivas. Para o desenvolvimento dessa pesquisa partimos das idéias de Piaget (1987) e também da teoria dos conceituais de Vergnaud (1982, 1983, 1983, 1987, 1988, 1990, 1994) que salienta diferenças significativas entre o pensamento aditivo e o multiplicativo, destacando os níveis de abstração e o número de relações de inclusão que a criança faz simultaneamente, já que a multiplicação requer dois tipos de relações que a adição não requer, tais como correspondências muitas-para-uma (Nunes & Bryant, 1996) e composição de relações de inclusão em mais de um nível. Sendo assim, partimos das hipóteses que os alunos a serem investigados têm como concepções "multiplicação sempre aumenta" e "divisão sempre diminui", fato este que acreditamos ser decorrente da maneira como são abordadas estas operações durante a vida escolar dos alunos.

Resultados de pesquisas (Greer, 1988) apontaram dificuldades por parte dos alunos no sentido de trabalhar com a multiplicação no domínio dos decimais (especialmente quando a mesma envolvia multiplicadores menores do que 1). Por exemplo, resultados de pesquisa feita com alunos de 4ª e 5ª séries de Israel e dos Estados Unidos por Graeber & Tirosh (1990) mostraram que eles, em sua maioria, ao serem questionados sobre o significado da multiplicação na sentença 4 x 5 = 20, associavam a multiplicação ao modelo primitivo de adições repetidas. Hoyles, Noss & Sutherland (1991, 1992) em pesquisa realizada com alunos de 13 anos também apontou dificuldades dos alunos ao tentarem solucionar a tarefa: “Tomando 13 como ponto de partida como fazer para obter o número 100 por sucessivas multiplicações?”. Durante a resolução da tarefa os alunos se depararam com a questão: “Como obter um número menor que os fatores utilizando a multiplicação?”. Constataram que a idéia desses alunos era que “multiplicação aumenta”.

Tentando também conhecermos como é dada a abordagem da multiplicação e da divisão, fizemos um breve estudo de aspectos históricos e uma análise de livros didáticos, nos quais pudemos verificar que, desde a Antigüidade até os dias de hoje, se explora, com muito mais ênfase, as continuidades entre o raciocínio aditivo e o multiplicativo. Nessa direção, a multiplicação é vista como adições repetidas de uma mesma parcela e a divisão como subtrações sucessivas. Sendo assim, acreditamos que tal abordagem pode provocar um obstáculo didático.

Buscando trabalhar com as concepções dos alunos sobre estas operações e testar nossas hipóteses, sendo assim elaboramos um teste diagnóstico. Propusemos uma questão, baseados na tarefa de Hoyles, Noss & Sutherland (1991, 1992), na qual a primeira parte da mesma poderia ser resolvida tanto por adições repetidas como por multiplicação. Os alunos não apresentaram dificuldades na resolução da mesma. Já na segunda parte da mesma questão, por se tratar de um multiplicador decimal menor que 1, os alunos apresentaram dificuldades iniciais para escolher a operação que solucionaria o problema e depois para efetuarem a multiplicação que “não aumentava” e sim “diminuía”. Na segunda questão, buscávamos verificar se os alunos estabeleciam as relações possíveis entre a multiplicação e a divisão. Podemos citar como maiores dificuldades identificadas entre nossos alunos:

- crença que a “multiplicação sempre aumenta e “divisão sempre diminui”;
- resolver questões de divisão para descobrir o valor desconhecido sempre por meio da multiplicação (operação inversa), sem refletir sobre as relações possíveis na divisão.

Sendo assim, confirmamos os estudos (por exemplo, Schwartz, 1988) já citados no Capítulo I que aponta uma série de falhas em se introduzir a multiplicação por meio de adições repetidas e divisão como um modo eficiente de solucionar problemas de distribuição, pois podem fazer com que os alunos criem as concepções de que “multiplicação sempre aumenta” e “divisão sempre diminui”.

Na seqüência de atividades buscamos trabalhar situações multiplicativas e problemas, no domínio dos inteiros positivos e dos racionais (tanto frações como decimais), visando colocar os alunos em situações em que eles pudessem refletir sobre as descontinuidades entre o raciocínio aditivo e o multiplicativo e também pudessem estabelecer relações entre as operações multiplicação e divisão, possibilitando a eles ir além do que é transmitido nos manuais didáticos. Analisando as atividades da seqüência, verificamos que o trabalho com a cálculo mental na Atividade I foi bastante rico no que concerne as estratégias dos alunos, pois nos parece que os alunos ficaram bastante a vontade para resolver as questões, sem a preocupação de registrar os cálculos. Parece também que os alunos ficaram mais motivados em resolver a atividade dessa maneira do que se ela fosse proposta através dos cálculos tradicionais feitos com lápis e papel. A atividade II também foi de bastante rica, na medida em que os alunos trabalharam com a calculadora, que pode ter motivado a resolução da atividade, visto que a calculadora é pouco utilizada em sala de aula. Ao final da seqüência, nos parecia que os alunos percebiam que seus conhecimentos sobre as operações de multiplicação e divisão eram apenas conhecimentos locais, ou seja, que suas concepções sobre essas operações não poderiam ser estendidas ao domínio dos racionais, ou ainda, que a multiplicação e a divisão eram muito mais abrangentes.

Visando confirmarmos se os alunos ampliaram seus conhecimentos locais para o domínio dos racionais, ou seja, se eles mudaram suas concepções elaboramos um teste final e o aplicamos. Verificamos que houve um crescimento em termos de sucessos dos alunos ao compararmos com o teste diagnóstico (aproximadamente 10%). Mas ainda, não satisfeitos com os problemas explorados no teste final, resolvemos entrevistar os alunos individualmente, para que com isso pudéssemos explorar problemas mais diversos envolvendo multiplicação e divisão e confirmarmos se os alunos ainda estendiam ou não conhecimentos apreendidos no domínio dos inteiros positivos para o domínio dos racionais. Nessa direção, as entrevistas foram bastante ricas de resultados.

Nas entrevistas, percebemos entre outras coisas, por meio das respostas dos alunos, que apesar de no momento dos debates ocorridos durante a aplicação das atividades parecer que os alunos haviam mudado suas concepções, ainda alguns alunos diziam que “multiplicação sempre aumenta” e “divisão sempre diminui” (vide Capítulo IV).

Tal fato pode nos levar a concluir que a seqüência de atividades ainda não tenha possibilitado totalmente que os alunos mudassem suas concepções sobre multiplicação e divisão. Nos parece ainda, que isso não foi possível, devido ao modo como esse saber vem sendo abordado durante toda a vida escolar dos alunos.

Acreditamos na necessidade de diversas abordagens da multiplicação e da divisão, desde as séries iniciais, como por exemplo, medida de área, ou por meio do raciocínio combinatório, não somente enfatizando "adições repetidas" e "subtrações sucessivas", para que talvez os alunos não criem as concepções de que "multiplicação sempre aumenta" e "divisão sempre diminui".

É possível também que, para promover realmente um alargamento no campo conceitual multiplicativo dos alunos, no que tange especialmente as operações de multiplicação e divisão, nossa seqüência de atividades deveria abranger uma diversidade maior de situações multiplicativas e o tempo de trabalho com as atividades junto aos alunos deveria ser maior, possibilitando talvez uma reflexão mais cuidadosa a respeito dessas operações.

CAPÍTULO VI:

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDRADE, M., MORAES, L. M. (1992). *Mundo mágico: Matemática*. S. Paulo: Ática.

ANGHILERI, J., JOHNSON, D. C. (1988) "Arithmetic operations on whole numbers: multiplication and division". Em *Teaching Mathematics in grades K-8*, editado por Thomas R. Post, Boston: Allyn & Bacon.

BELL, A., SWAN, M., TAYLOR, G. (1981). "Choice of operations in verbal problems with decimal numbers". *Educational Studies in Mathematics*, **12**, pp. 399-420.

BELL, A., FISCHBEIN, E. , GREER, B. (1984). "Choice of operation in verbal arithmetic problems: The effect of number size, problem structure and context". *Educational Studies in Mathematics* **15,** pp. 129-147.

BONGIOVANNI, V., LEITE, O. R. V., LAUREANO, J. L. T. (1995). *Matemática e vida*. São Paulo: Ática.

BOYER, C. B. (1974). *História da Matemática*. Tradução Elza F. Gomide, São Paulo, Edgard Blücher.

BROUSSEAU, G. (1983). "Les obstacles épistemologique et les problémes en mathematiques". *Recherches en Didactique des Mathématiques* **2**, vol. 4.

BUNT, L. N. H., JONES, P. S., BEDIENT, J. D. (1976). *The historical roots of elementary Mathematics*. Prentice Hall, Inc.. New Jersey.

CAMPOS, T., MAGINA, S., CUNHA, M. C. C., CANÔAS, S. S. (1996) "Referent Transforming Operations: Teachers' Solution", 20 *PME*, Vol 2.

CARVALHO, D. L. (1990). *Metodologia do Ensino da Matemática*. São Paulo: Cortez.

CHEVALLARD, Y., JOHSUA, M. (1991). *La transposition didactique.* Editions de la Pensée Sauvage.

CLARK, F. B., KAMIL, C. (1996). "Identification of multiplicative thinking in children in grades 1-5". *Educational Studies in Mathematics* **1** vol. 27, pp. 41-51.

CLEMENTS, D. H., MCMILLEN, S. (1996). "Concrete manipulatives". *Teaching Children Mathematics* **5**, vol. 2, pp. 270-278.

CORREA, M. E., GALHARDI, M. (1991). *Como é fácil ! _ Matemática*. São Paulo: Scipione.

DAVIS, H. T. (1992). *História da Computação. Tópicos de história da Matemática para uso em sala de aula*; volume 2. Tradução Hygino H. Domingues, São Paulo: Atual.

DOUADY, R. (1986). "Rapport enseignement apprentissage: dialectique outil-objet, jeux de cadres". *Cahiers de Didactique* des Mathématiques **3**, IREM, Universidade de Paris VII.

DRISCOOL, M. J. (1983). *Research within Reach: Elementary school mathematics and reading*. St. Louis: CEMREL.

DUROUX, A. (1983). "La valeur absolue: dificultés majeures pour un notion mineure". *Petit x*, **3**.

EVES, HOWARD W. (1983). *An introduction to the history of Mathematics*. Fifth edition. CBS College Publishing.

FISCHBEIN, E., DERI, M., NELLO, M., MARINO, M. (1985). "The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division". *Journal for Research in Mathematics Education* **16**, pp. 3-17.

GIOVANNI, J. R., GIOVANNI, J. R. J. (1992). A conquista da Matemática: Teoria e aplicação. São Paulo: F.T.D..

GRAEBER, A. O., TIROSH, D. (1990). "Insights fourth and fifth graders bring to multiplication and division with decimals". *Educational Studies in Mathematics* **21**, pp. 565-588.

GREER, B. (1988). "Nonconservation of multiplication and division: Analysis of a sympton". *Journal of Mathematical Behavior* **7**, pp. 281-298.

GROZA, V. S. (1968) *A survey of Mathematics: Elementary concepts and their historical development*. Holt Rinehart and Winston.

HAREL, G., BEHR, M.,POST, T., LESH, R. (1994). "The impact of number type on the solution of multiplication and division problems: Further considerations", em Harel, G. & Confrey, J. (eds.), *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics*. State University of New York Press.

HART, K. M. (1981). *Children's understanding of mathematics*, J. Murray, London.

________ (1984). *Ratio: Children's strategies and errors in secondary mathematics project*. Windson, Berkshire:NFER-NELSON.

HENRY, M. (1991). “Didactique des mathématiques: une presentation de la didactique en vue de la formation des enseignants”, *IREM de Bensançon.*

HOYLES, C., NOSS, R., SUTHERLAND, R. (1991) *The ratio and proportion microworld: Final report of the microworlds project,* vol.III. London: Institute of Education, University of London.

IMENES, L. M., JAKUBOVIC, J., LELLIS, M. (1993). *Matemática ao vivo.* São Paulo: Scipione.

JAKUBOVIC, J., LELLIS, M. (1994). *Matemática na medida certa.* São Paulo: Scipione.

KOUBA, V. L. (1989). “Children’s solutions strategies for equivalent set multiplication and division word problems”. *Journal for Research in Mathematics Education* **20**, pp. 147-158.

KOUBA, V. L, BROWN, C., CARPENTER, T. P., LINDQUIST, M. M., SILVER, E., SWAFFORD, J. O. (1988). “Results of the Fourth NAEP Assessment of Mathematics: Number operations and word problems.” *Arithmetic Teacher* **35**, pp. 14-19.

LEVAIN, J. P. (1992). “La resolution de problemes multiplicatifs a la fin du cycle primaire”. *Educational Studies in Mathematics* **2**, vol. 23, pp. 139-161.

LUKE, C. (1988). “The repeated addition model of multiplication and children’s performance on mathematical word problems”. *Journal of Mathematical Behavior* **7**, pp. 217-226.

NEHRING, C. M. (1996). *A multiplicação e seus registros de representação nas séries iniciais.* Tese de mestrado, UFSC, Florianópolis.

NESHER, P. (1988). “Multiplicative school word problems: Theoretical approaches and empirical findings”. In J. Hiebert & M. Behr (eds.), *Number Concepts and Operations in Middle Grades* . Hillsdale, New Jersey: Erlbaum, pp. 19-40.

NUNES, T., BRYANT, P. (1996). *Children doing Mathematics.* Blackwell-Publishers, London.

PASSOS, L., FONSECA, A., CHAVES, M. (1992). *Alegria de saber: Matemática*. São Paulo: Scipione.

PALUMBO, W. D. (1988). *Matemática moderna*. São Paulo: Lisa.

PIAGET, J., GRIZE, J., SZEMINSCA, A., & BANG, V. (1977). *Epistemology and psychology of functions* (F. Castelanos & V. Arderson, Trans.). Dordrecht, The Netherlands: D. Reidel Publishing.

PIAGET, J. (1987). *Possibility and necessity.* Minneapolis: Univerty of Minnesota Press.

PIRES, C. M. C., NUNES, M., TOLEDO, M. B. A. (1995). *Matemática no planeta azul.* São Paulo: Contexto.

SAEB - 1993: Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (1995)/ Mariza Polens, Jane Hudson de Abranches, Maria Cândida L. Muniz Trigo et al.. Brasília: Secretaria de Desenvolvimento Inovação e Avaliação Educacional: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais

SÃO PAULO (Estado) Secretaria da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas (1992). *Proposta curricular para o ensino de Matemática: 1º grau*. 5ª edição. São Paulo: SE/CENP.

SÃO PAULO (Estado) Secretaria da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas (1992). *Atividades Matemáticas, volume 1.* São Paulo: SE/CENP.

SÃO PAULO (Estado) Secretaria da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas (1992). *Atividades Matemáticas, volume 2.* São Paulo: SE/CENP.

SCHWARTZ, J. (1988). "Intensive quantity and referent transforming arithmetic operations". In J. Hiebert & M. Behr (eds.), *Number Concepts and Operations in Middle Grades*. Hillsdale, New Jersey: Erlbaum,pp. 41-52.

SCRIBA, C. T. (1968). *The concept of number*. Hochschulskripten Bibliographisches Institut. Zurich.

SIMON, M. A. (1993). "Prospective elementary teachers' knowledge of division". *Journal for Research in Mathematics Education* **24**, pp. 223-254.

SIMON, M. A., & BLUME, G. (1994). "Building and understanding multiplicative relationships: A study of prospective elementary teachers". *Journal for Research in Mathematics Education* **25**, pp. 472-493.

SMITH, D. E. (1958). *History of Mathematics*. Dover Publications, Inc.. New York.

SOWELL, E. J. (1989). “Effects of manipulative materials in mathematics instruction*”. Journal for Research in Mathematics Education* **20**, pp. 498-505.

SUYDAM, M. N. (1986). “Research report: Manipulative materials and achievement”. *Arithmetic Teacher* **33**, pp. 10,32.

THOMPSON, P. W., & THOMPSON, A. G. (1994). “Talking about rates conceptually, Part I: A teachers struggle”. *Journal for Research in Mathematics Education* **25**, pp. 279-303.

VERGNAUD, G. (1983). “Multiplicative structures”. Em R. Lesh & Landau (eds.), *Aquisitions of mathematics concepts and procedures*. New York: Academic Press, pp. 127-174.

_________________ (1987). “Problem solving and concept development in learning of Mathematics”. *E.A.R.L.I., Second meeting*, Tübigen, September.

________________ (1988). “Multiplicative structures”, em Hilbert, J. e Behr,M. (eds.), *Number Concepts and Operations in Middle Grades,* Hillsdale, New Jersey: Erlbaum, pp. 141-161.

________________ (1994). “Multiplicative Conceptual Field: What and Why?” em Harel, G. & Confrey, J. (eds.), *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics*. State University of New York Press.

________________ (1990) “ La théorie des champs conceptuels”. *Recherches en Didactique des Mathématiques* **23**, vol. 10, pp. 133-170.

_________________ (1982) “ A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems”. em Carpenter, T.; Moser, J.; Romberg, T. (Eds.) *Addition and Subtraction: A Cognitive Perspective*, New Jersey, Lawrence Erlbaun. pp. 60-67.

ANEXOS

Nomes:_____________________________________ Dupla:____ . Série:_____.

____

Projeto de pesquisa

[1] Em minha casa possuo 2 cães sem raça definida e um passarinho “canário da terra”. O consumo mensal de ração pelos cães é de aproximadamente 15 quilos. Já o passarinho nem chega a consumir mensalmente um quilo de ração para pássaros (ele come aproximadamente 0,65 quilos). Agora responda:

(a) Se o quilo da ração para cães custa R$ 3,45, quanto gasto mensalmente para alimentar meus cães?

(b) Já o quilo da ração de pássaros custa um pouco mais caro, R$ 4,00 (pois é própria para canários da terra). Qual será então o meu gasto mensal para alimentar meu passarinho?

Agora justifique o porquê das operações escolhidas para resolver os itens (a) e (b) da questão 1.

____

____

Em qual dos casos acima (a) e (b) eu gastei mais dinheiro? Por quê?____

____

[2] Resolva as questões propostas abaixo:

1) 414÷ [   ] = 23

2) [   ] ÷ 59 = 27

Como você poderia me convencer que a sua resolução para as questões acima apresentadas é a correta? Explique:

____

____

____

____

____

Seqüência de Atividades

Nomes: ____________________________________**Dupla:** ______**Série**______
____

Atividade I

(1) Sabemos que 1 quilo de ração para pássaros custa R$ 4,00. Quanto pagarei se comprar:

(a) 8 quilos

(b) 4 quilos

(c) ½ quilo

(d) 1/10 de quilo

(e) A metade de 1/10 de quilo

(f) 6/10 de quilo

- Vamos agora discutir as nossas soluções com as dos demais colegas.

Atividade I

(2) Calcule mentalmente cada um dos itens abaixo. Assim que você encontrar a solução de cada item, coloque o resultado na cartolina e levante a mão para poder apresentá-lo aos demais colegas e explicar como você pensou.

Cada metro de fio de arame custa R$ 1,60. Dê o preço de:

(a) 3 metros de arame;

Atividade I

(b) 3,5 metros de arame;

Atividade I

(c) 0,75 metro de arame.

• Vamos então debater os nossos resultados com os dos colegas.

Nomes: ____________________________________**Dupla:** ______**Série**______
____

Atividade II

Vamos trabalhar com a calculadora?

(a) Como vocês poderiam encontrar o resto da divisão de 59847394 por 98762 usando uma calculadora? Lembramos que a calculadora faz somente as quatro operações básicas, adição, subtração, multiplicação e divisão (não tem um botão para encontrar o resto). Além disso, observamos que se a resposta da divisão (o quociente) não for um número inteiro, o resultado dado pela calculadora será apresentado na forma decimal.

Descreva como você poderia usar a calculadora para encontrar o resto e porquê. Descreva um segundo método se você puder.

Atividade II

(b) Imagine que em sua calculadora o botão da divisão $\boxed{\div}$ está quebrado. Como você faria para encontrar o resto da divisão de 1692 por 45, usando somente as operações de adição $\boxed{+}$, subtração $\boxed{-}$ e multiplicação $\boxed{\times}$.

Descreva pelo menos um método.

Teste Final

(1) Sabemos que a distância entre Araçatuba e São Paulo é aproximadamente 5 vezes a distância de São Paulo até Campinas. Essa última distância é de 100 Km. Qual é então a distância entre Araçatuba e São Paulo?

(2) A distância entre Porto Alegre é quatro décimos da distância entre Aracaju e Fortaleza, sendo essa de 1190 Km. Qual é então a distância entre porto Alegre e Florianópolis?

(3) Descubra o valor desconhecido em cada um dos itens abaixo:

(a) $414 \div [\quad] = 23$

(b) $[\quad] \div 59 = 27$

Nome :____ Série: _______

Encontre o valor desconhecido em cada um dos itens abaixo:

(a) [ ] ÷ 45 = 100	(b) 62 ÷ [ ] = 248
(c) 98 ÷ [ ] = 1	(d) [ ] ÷ 0 = 0
(e) 0 ÷ [ ] = 0	(f) 27 x [ ] = 108

Parte II

(g) 32 x [ ] = 16	(h) [ ] x 576 = 576
(i) 0 x [ ] =0	(j) [ ] x 1 = 387
(l) 618 x [ ] = 0	(m) [ ] x 0 = 171