

NANCI DE OLIVEIRA

**CONCEITO DE FUNÇÃO:
UMA ABORDAGEM DO PROCESSO
ENSINO-APRENDIZAGEM**

Mestrado em ENSINO DA MATEMÁTICA

PUC-SP

1997

Nanci de Oliveira

**CONCEITO DE FUNÇÃO: UMA ABORDAGEM
DO PROCESSO ENSINO-APRENDIZAGEM**

Mestrado em ENSINO DA MATEMÁTICA

PUC-SP

1997

Nanci de Oliveira

**CONCEITO DE FUNÇÃO: UMA ABORDAGEM
DO PROCESSO ENSINO-APRENDIZAGEM**

Dissertação apresentada como exigência parcial para obtenção do título de MESTRE EM ENSINO DA MATEMÁTICA à Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, sob orientação do Professor Doutor Saddo Ag Almouloud e co-orientação do Professor Doutor Benedito Antonio da Silva.

PUC-SP

1997

BANCA EXAMINADORA

-

AGRADECIMENTOS

Ao prof. Dr. Saddo Ag Almouloud pelo incansável trabalho de orientação, incentivo e, sobretudo, pela paciência, compreensão e amizade nos momentos difíceis.

Ao prof. Dr. Benedito Antonio da Silva, pela dedicação na tarefa de co-orientador, pelo incentivo, amizade, tranquilidade e confiança sempre presentes.

À prof^a Dra. Silvia Dias Alcântara Machado e à prof^a Dra. Gilda de La Roque Palis pelas sugestões e críticas que contribuíram para a melhoria da qualidade deste trabalho.

À prof^a Dra. Regina Flemming Damm, que com muita simpatia apresentou valiosas sugestões e críticas.

Aos amigos do Mestrado, pelo companheirismo e sugestões, em especial à Ana Lúcia e à prof^a Dra. Sandra Magina.

Ao Programa de Estudos Pós-Graduados da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, que através de sua Coordenação me ofereceu a oportunidade de estudar e concluir este Mestrado.

Aos professores de 2^o grau, de escolas públicas e particulares, que contribuíram para que pudéssemos levantar alguns aspectos relativos ao processo ensino-aprendizagem do conceito de função.

Aos alunos da Universidade de Mogi das Cruzes que gentilmente participaram da aplicação da atividade prévia e da seqüência didática.

Ao Carlos, Beatriz e Heloisa pelas observações feitas durante a aplicação da seqüência didática, que foram fundamentais para a descrição da realização e análise dos resultados da pesquisa.

À prof^a e amiga Lara, pela revisão gramatical e ortográfica.

À CAPES, pela bolsa de estudos, fruto da cidadania, que permitiu uma dedicação mais conseqüente no programa de pós-graduação.

À Universidade de Mogi das Cruzes, Universidade de Taubaté e Faculdade Maria Augusta Ribeiro Daher, pelo apoio financeiro e/ou afastamento das atividades acadêmicas.

Aos meus familiares, pelo apoio, incentivo e compreensão, principalmente nos momentos mais difíceis.

Ao meu esposo, amigo e companheiro, Alfredo, pelo apoio, incentivo, paciência, compreensão e pelos momentos de ausência durante a dedicação ao Mestrado.

À Nice Melo, por compartilhar momentos difíceis.

E, finalmente, ao Criador, Inteligência Suprema, pela oportunidade de crescimento e aquisição de novos conhecimentos.

RESUMO

Motivados pela constatação, através de estudos preliminares (histórico, epistemológico, da transposição didática do conceito de função...), da existência de dificuldades no campo conceitual das funções, pretendíamos elaborar uma seqüência didática para o ensino-aprendizagem do conceito de função. Tomamos por hipótese que é necessário colocar o aluno numa situação a-didática, na qual ele compreenda as noções de correspondência, dependência e variação, e utilize “jogo de quadros” e mudanças de registro de representação, para a compreensão do que é uma função. Sendo assim, nosso objetivo era construir situações-problema para fazer avançar as concepções dos alunos sobre o conceito de função, ou seja, para que houvesse uma evolução qualitativa na forma como os alunos concebem tal noção. Após a elaboração e análise a priori da seqüência, aplicamo-la em alunos do primeiro ano do curso de Engenharia. A análise a posteriori mostrou que atingimos o nosso objetivo com a maior parte dos alunos.

ABSTRACT

Impelled by the verification, through preliminary studies (historical, epistemological and of didactic transposition of the function's concept...) of the existent of difficulties in the conceptual field of functions, we intended to elaborate a didactic sequence to the teaching-learning of the function's concept. We assumed that it's necessary to put the student in a non-didactic situation, in which he understands the notions of correspondence, dependence and variation, and uses the interplays between settings and changes in representation register, for the comprehension of what a function is. In such case, our objective was to build problem solving to improve the student's concepts about function, or rather, for them to have a qualitative evolution in the way they think about this notion. After the elaboration and prior analysis of the sequence, we employed it in students of the Engineering first year. The posterior analysis showed that we reached our objective with most of the students

ÍNDICE

| | |
|---|------------|
| Agradecimentos..... | i |
| Resumo..... | iii |
| Introdução..... | 1 |
| Capítulo I: Fundamentação Teórica e Metodologia | |
| 1. Fundamentação Teórica..... | 4 |
| 2. Metodologia..... | 11 |
| Capítulo II: Estudo Histórico e Epistemológico sobre a Noção de Função | |
| 1. Evolução Histórica do Conceito de Função..... | 14 |
| 2. Obstáculos Epistemológicos..... | 24 |
| Capítulo III: Estudo da Transposição Didática do Conceito de Função | |
| 1. Análise da Proposta Curricular para o Ensino de Matemática do 1 ^o e 2 ^o Graus com Relação às Funções..... | 27 |
| 2. Análise de Livros Didáticos com Relação às Funções..... | 31 |
| 3. O Processo Ensino-aprendizagem do Conceito de Função e as Concepções dos Professores..... | 38 |
| 4. Concepções dos Alunos sobre o Conceito de Função..... | 47 |
| Capítulo IV: Problemática..... | 61 |
| Capítulo V: A Seqüência Didática | |
| 1. Análise a Priori da Seqüência Didática..... | 67 |
| 2. Descrição da Aplicação da Seqüência Didática..... | 83 |
| 3. Análise Didática da Seqüência..... | 93 |
| Capítulo VI: Conclusões..... | 130 |
| Referências Bibliográficas..... | 134 |
| Anexos | |
| Anexo 1: Questionário para Professores de Matemática..... | I |
| Anexo 2: Atividade Prévia..... | V |
| Anexo 3: Seqüência Didática..... | VIII |

INTRODUÇÃO

INTRODUÇÃO

Lecionando no Curso Universitário, área de Exatas, freqüentemente encontramos alunos que apresentam dificuldades e mesmo deficiências no que se refere à disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. Este fato provoca um grande número de reprovações.

Em busca das causas dos altos índices de repetência nessa disciplina e de tantos problemas no ensino-aprendizagem de temas como limites, derivadas e integrais, nos deparamos com um conceito básico: o conceito de função. A compreensão deste último conceito é um pré-requisito fundamental para o estudo do Cálculo, e aí residem muitas dificuldades dos alunos. Algumas destas referem-se à concepção que os alunos têm de função, no registro de representação gráfica, na mudança de um registro para outro, no domínio e no contradomínio, na construção de uma tabela de valores numéricos, na distinção entre variável dependente e independente, na notação matemática, etc.

A existência de tais dificuldades parece ser um consenso entre os professores, como pudemos constatar em diversos congressos de que participamos na área da Educação Matemática no Brasil, nas discussões com outros profissionais da área, nas observações feitas em sala de aula e em algumas publicações a que tivemos acesso.

Motivados pela constatação dessa situação, pretendemos elaborar uma seqüência didática para fazer avançar as concepções dos alunos sobre o conceito de função, ou seja, para que haja uma evolução qualitativa na forma pela qual os alunos concebem tal noção.

Nosso trabalho está fundamentado na linha francesa da Didática da Matemática e em algumas teorias da Psicologia Cognitiva. A metodologia utilizada consiste de um estudo histórico, epistemológico, e da transposição didática do conceito de função, na elaboração, aplicação e análise de uma seqüência didática. Estas idéias básicas constituem o Capítulo I: **Fundamentação Teórica e Metodologia.**

Após estabelecer os alicerces de nossa pesquisa, fizemos um **Estudo Histórico e Epistemológico sobre a Noção de Função** (Capítulo II), para levantar a gênese e a evolução desse conceito, e também os obstáculos epistemológicos inerentes ao assunto. Queríamos, com isto, compreender como e em quais circunstâncias foi elaborado o conceito de função.

A seguir, fizemos um **Estudo da Transposição Didática do Conceito de Função** (Capítulo III), ou seja, investigamos o conjunto das adaptações e transformações que o conceito de função sofre para ser ensinado. Nosso intuito, neste capítulo, é verificar quais os efeitos que essas adaptações e transformações provocam nos alunos, a fim de termos um embasamento para levantarmos a problemática. Por isso, é muito importante fazermos uma análise da Atual Proposta Curricular para o Ensino de Matemática do 1º e 2º Grau do Estado de São Paulo, de livros didáticos com relação às funções, um estudo do processo ensino-aprendizagem e as concepções dos professores e dos alunos sobre o conceito de função.

Através da análise da Proposta Curricular e de alguns livros didáticos, levantamos obstáculos didáticos sobre o conceito de função. Já as concepções dos professores de Matemática sobre o conceito de função e seu processo ensino-aprendizagem foram levantados através de um questionário escrito, e as concepções dos alunos, através de uma atividade que denominamos “*Atividade Prévia*”, por ter sido aplicada anteriormente a uma seqüência didática.

Os estudos anteriores, além de confirmarem os problemas apontados por algumas pesquisas sobre o ensino-aprendizagem do conceito de função, nos permitiram constatar a existência da **Problemática** (Capítulo IV). O fato dos alunos confundirem atributos do conceito com os exemplos, faz com que eles não cheguem a uma generalização do mesmo. Além disso, muitos deles incluem a noção de continuidade ao conceito de função, restringem o domínio e o contradomínio a conjuntos numéricos, confundem o conceito com a representação do mesmo, e ainda não sentem a necessidade da utilização de vários registros de representação. De acordo com alguns, função é sinônimo de equação e as funções dadas por mais de uma expressão algébrica não são bem compreendidas. Estes são alguns dos problemas levantados, e que estão relacionados aos alunos. Por outro lado, ao ensinar função, muitos professores

não fazem um “jogo de quadros” de maneira adequada. Os obstáculos epistemológicos e didáticos não são levados em consideração e parece que o aluno não participa da construção deste conceito.

Dado a problemática, pretendemos dar nossa contribuição no sentido de apresentarmos uma proposta para o ensino-aprendizagem do conceito de função. Tomamos por hipótese que é necessário colocar o aluno numa situação a-didática, na qual ele compreenda as noções de correspondência, dependência e variação, e utilize “jogo de quadros” e mudanças de registro de representação, para a compreensão do que é uma função. Para que a hipótese seja validada, construímos uma seqüência didática. Pretendemos responder às seguintes questões:

— *Nossa seqüência didática possibilitará a participação dos alunos na elaboração do conceito de função?*

— *Após a aplicação de nossa seqüência didática, os alunos terão dado um salto qualitativo nas suas concepções do conceito de função?*

— *Quais serão os efeitos positivos e negativos da aplicação da seqüência didática que construímos?*

Apresentamos nossa **Seqüência Didática** no Capítulo V. Fizemos a análise a priori da seqüência didática, compreendendo uma parte descritiva e uma previsão dos comportamentos possíveis dos alunos. O passo seguinte, foi a aplicação da seqüência didática, em alunos voluntários do 1º ano do curso de Engenharia. Depois, fizemos a análise a posteriori da seqüência didática, baseada nos dados recolhidos ao longo da experimentação e nas produções dos alunos.

Finalmente, no capítulo VI, apresentamos as **Conclusões**, e algumas sugestões, que talvez possam possibilitar a melhoria da seqüência didática e do ensino-aprendizagem do conceito de função.

CAPÍTULO I

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E METODOLOGIA

1- FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nossa pesquisa, sobre o conceito de função, está fundamentada, basicamente, na linha francesa da Didática da Matemática, que estuda os fenômenos de ensino e aprendizagem em Matemática. Também utilizamos algumas teorias da Psicologia Cognitiva.

Nosso estudo se apóia na **noção de obstáculo**. Segundo Guy BROUSSEAU, o obstáculo se caracteriza por um conhecimento, uma concepção, e não por uma dificuldade ou uma falta de conhecimento, que produz respostas adaptadas num certo contexto e, fora dele, produz respostas falsas. Assim, cada conhecimento é suscetível de ser um obstáculo à aquisição de novos conhecimentos. Os obstáculos se manifestam pela incompreensão de certos problemas ou pela impossibilidade de resolvê-los com eficácia, ou pelos erros que, para serem superados, deveriam conduzir ao estabelecimento de um novo conhecimento.

A noção de obstáculo pode ser utilizada tanto para analisar a gênese histórica de um conhecimento, como o ensino ou a evolução espontânea do aluno. Por isso, os obstáculos podem ser procurados a partir de uma análise histórica ou a partir da análise de dificuldades persistentes nos alunos.

Em nosso trabalho, vamos analisar os obstáculos relativos ao conceito de função encontrados na história e nos livros didáticos, para tentarmos levá-los em consideração no momento da elaboração da seqüência didática. Por isso, dentre os diversos tipos de obstáculos, utilizaremos apenas os epistemológicos e os didáticos.

Segundo BROUSSEAU, os **obstáculos epistemológicos** são aqueles que tiveram um papel importante no desenvolvimento histórico do conhecimento. A rejeição destes obstáculos precisou ser integrada explicitamente no saber transmitido. Portanto, obstáculos desta categoria são inerentes ao saber e identificáveis pelas dificuldades encontradas pelos matemáticos para superá-los, no decorrer da História.

Os **obstáculos didáticos** são aqueles que parecem depender apenas de uma escolha ou de um projeto do sistema educativo, que resultam de uma transposição didática que o professor pode dificilmente renegociar no quadro restrito da classe. Eles nascem da escolha das estratégias de ensino,

permitindo formar, no momento da aprendizagem, conhecimentos errôneos ou incompletos que se revelarão mais tarde como obstáculo ao desenvolvimento da conceituação. Por isso, obstáculos desta categoria são inevitáveis, inerentes à necessidade da transposição didática.

Yves CHEVALLARD, chama de **transposição didática** o conjunto das adaptações e transformações que o saber “sábio”⁽¹⁾ sofre para ser ensinado. Da escolha do saber a ser ensinado à sua adaptação ao sistema didático, existe todo um processo gerador de deformações, de criação de objetos de ensino, que termina no que chamamos de saber escolar, ou seja, o saber enunciado nos programas e, particularmente, observado nos livros didáticos. As condições de transmissão deste saber escolar também determinam o que, e de que maneira será adquirido pelos alunos. Daí a importância de fazermos, neste trabalho, um estudo da Proposta Curricular e de alguns livros didáticos com relação às funções. Além disso, é importante investigarmos a maneira que o professor procede no ensino-aprendizagem do conceito de função, pois é ele quem adaptará o saber escolar ao saber ensinado. Também levantaremos as concepções dos alunos, pois, geralmente, o que estes retêm não é exatamente o que lhes é ensinado.

Utilizamos ainda o “*jogo de quadros*” e a *dialética “ferramenta-objeto”*, definidos por Régine DOUADY ([14], p.1):

Dialética “ferramenta-objeto” é um processo cíclico que organiza os respectivos papéis do docente e dos alunos, durante o qual os conceitos matemáticos têm o papel ora de ferramenta para resolver um problema ora de objeto, tomando lugar dentro da construção de um certo saber organizado.

“Jogo de quadros” são as mudanças de quadros⁽²⁾ provocados pela iniciativa do docente, quando da ocasião de problemas convenientemente escolhidos, para fazer avançar as fases de pesquisa e evoluir as concepções dos alunos. A palavra quadro é tomada no sentido usual que ela tem quando falamos de quadro algébrico, quadro aritmético, quadro geométrico...

⁽¹⁾ Por saber “sábio” entende-se o conjunto dos conhecimentos, socialmente disponíveis, que foram objeto de publicações científicas ou de comunicações reconhecidas como válidas pela sociedade.

⁽²⁾ Segundo Douady & Glorian ([16], p. 389), um quadro é constituído de objetos de um ramo da Matemática, de relações entre objetos, de suas formulações, eventualmente diversas, e das imagens mentais que o sujeito associa a estes objetos e relações em um dado momento.

Para uma melhor compreensão do conceito de função é importante fazer um “jogo de quadros”, ou seja, provocar passagens do quadro geométrico para o numérico, do numérico ao geométrico, do algébrico ao numérico, do algébrico ao geométrico, etc. Por isso, tentaremos, nesta pesquisa, propor aos alunos situações-problema que favoreçam um jogo de quadros. As referidas situações nos permitirão utilizar o conceito de função e suas representações como uma ferramenta para resolvê-las, passando depois a utilizar o conceito de função como objeto de estudo. Desta forma, passaremos a trabalhar, em sala de aula, de modo distinto do habitual, onde o professor apresenta as definições e teoremas, seguido de exemplos e exercícios de “aplicação”.

Estas modificações, previstas para serem realizadas em sala de aula, estão diretamente relacionadas à noção de **contrato didático**, introduzida por Guy BROUSSEAU. Segundo o autor, *“contrato didático é o conjunto de regras que determinam, explicitamente, e sobretudo implicitamente, o que cada parceiro da relação didática vai ter que administrar e que será, de uma maneira ou de outra, responsável perante o outro”* [8]. Este contrato é o conjunto de comportamentos do professor que são esperados pelos alunos e vice-versa.

Para tentar contribuir com o esclarecimento da definição de contrato didático, apresentamos algumas observações feitas por M. HENRY em [23], p.73-74:

- ◆ A relação professor-aluno depende de um grande número de regras e de convenções, que não colocam sistematicamente em jogo o saber.
- ◆ O contrato didático depende da estratégia de ensino adotada. As escolhas pedagógicas, o estilo de trabalho pedido aos alunos, os objetivos das atividades, a formação e as representações do professor, as condições de avaliação, entre outros, fazem parte dos determinantes essenciais do contrato didático.
- ◆ A aquisição do saber pelos alunos é a causa fundamental do contrato didático. A cada nova etapa, o contrato didático deve ser renovado e renegociado. A maior parte do tempo, esta negociação passa despercebida.
- ◆ O contrato didático se manifesta sobretudo quando é transgredido por um dos parceiros da relação didática. Uma grande parte das dificuldades

dos alunos é explicável pelos efeitos do contrato, mal colocado ou incompreendido.

Segundo BROUSSEAU, a metodologia de ensino da Matemática que se apóia na apresentação axiomática esconde completamente a história do saber, ou seja, a sucessão das dificuldades e questões que provocaram a aparição dos conceitos fundamentais. Por isso iremos propor, em nossa pesquisa, uma mudança do contrato didático, na medida em que estabeleceremos um contrato com os alunos diferente do que é utilizado pelos seus professores em sala de aula. Iremos gerenciar as atividades de nossa seqüência didática, enquanto os alunos trabalham em duplas. Ao final de cada sessão, tentaremos, juntamente com os alunos, concluir as atividades que serão propostas nesta pesquisa.

Ao propormos uma mudança de contrato didático, faz-se necessário a construção de situações-problema, permitindo o desenvolvimento de situações a-didáticas. Segundo G. Brousseau, uma situação a-didática se caracteriza, entre outros, pelos seguintes fatos:

- O problema matemático é escolhido de modo que possa fazer o aluno agir, falar, refletir, evoluir por sua própria iniciativa;
- O problema é escolhido para provocar, no aluno, a aquisição de novos conhecimentos, justificados pela lógica interna da situação e que ele pode construir, sem ser alertado para as razões didáticas de tal problema.

Em nossa seqüência didática, vamos propor situações a-didáticas, na medida em que pretendemos elaborar atividades matemáticas nas quais o aluno deverá refletir, discutir com o parceiro da dupla e agir para solucioná-las. Além disso, vamos propor as atividades de tal forma que os alunos não serão alertados a respeito do tema em estudo, ou seja, vamos iniciar as atividades sem mencionar que o nosso interesse é a compreensão do conceito de função.

Da **Psicologia Cognitiva**, buscamos a teoria construtivista de Piaget e a teoria dos campos conceituais de Vergnaud.

De acordo com PIAGET, o processo do conhecimento é um caso particular dos **processos de assimilação e acomodação** que caracterizam a vida do indivíduo: assimilação de novos objetos às estruturas já existentes, e acomodação (modificação) dessas estruturas às novas características dos objetos. Além disso, a ação é o principal fator no processo do conhecimento.

Em nossa pesquisa, pretendemos propor aos alunos situações que provoquem conflito, que eles não estejam acostumados a enfrentar, e que coloquem em dúvida, de certa forma, seus conhecimentos atuais sobre função. Por exemplo: pretendemos elaborar uma atividade em que apresentamos diversos gráficos e pedimos para que os alunos identifiquem os que representam uma função. Esperamos que os alunos entrem em conflito, pois para a maioria deles, qualquer gráfico representa uma função. Portanto, o que devem fazer? Deverão se lembrar do que significa uma função, montar uma tabela de números ou tentar imaginar uma lei que esteja associada ao gráfico apresentado, discutir com os colegas, enfim, deverão agir sobre o objeto.

A **teoria dos campos conceituais** é uma teoria cognitivista e construtivista do pensamento. Segundo VERGNAUD, um campo conceitual é o espaço de problemas ou situações-problema cujo tratamento envolve conceitos e processos de vários tipos em estreita conexão. Um campo conceitual é caracterizado por um conjunto de vários conceitos de naturezas diferentes, que envolve muitas situações. Logo, *um conceito não se reduz à sua definição, e deve ser encarado como uma terna de conjuntos*^(*) $C = (S, I, R)$, onde:

- ◆ **S** é o conjunto de situações que tornam o conceito significativo;
- ◆ **I** é um conjunto de invariantes, que podem ser reconhecidas e usadas pelo indivíduo para entender as situações. Por exemplo: objetos, propriedades e relações;
- ◆ **R** é um conjunto de representações simbólicas, que servem para representar as situações e ajudar a resolver problemas. Por exemplo: linguagem natural, esquemas, diagramas e sentenças formais.

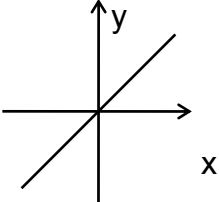
O campo conceitual das funções envolve muitos outros conceitos, como o de uma *relação entre conjuntos, variação, dependência e correspondência entre variáveis, variável dependente e independente*, entre outros. Para representar uma função, podemos utilizar uma tabela, um gráfico, um diagrama de flechas ou uma expressão algébrica. Estas representações, portanto, constituem **R**. Este campo conceitual envolve muitas situações da realidade,

^(*) O termo **conceito** será usado, neste trabalho, como a terna de conjuntos: de situações, de invariantes, e de representações simbólicas; ou ainda, como sinônimo de **definição**. Já o termo **concepção** será utilizado como sinônimo de **noção**, no sentido de idéia, modo de ver.

como por exemplo: a população do mundo é função do tempo, a pressão de um gás é função da temperatura etc. Estas situações, por sua vez, tornam o conceito significativo, e, portanto, constituem S. É no sentido de trabalhar com as idéias que acabamos de expor que vamos procurar elaborar nossa seqüência didática, ou seja, encarando o conceito de função como um campo conceitual.

Ressaltamos que, segundo esta teoria construtivista, o aluno deve agir sobre o objeto de ensino para compreendê-lo. Daí a importância da resolução de situações-problema em nossa pesquisa.

Utilizamos também algumas noções dadas por Raymond DUVAL. Segundo ele, não é possível estudar tudo o que se refere ao conhecimento sem recorrer à **noção de representação**, isto porque não existe conhecimento que possa ser mobilizado por uma pessoa sem uma atividade de representação. As representações gráficas são representações semióticas, da mesma forma que as figuras geométricas, que a escrita algébrica ou as línguas. Isto quer dizer que o representante visível (para as representações gráficas: linhas retas ou curvas, traçadas sobre um plano com eixos) têm leis de organização que lhes são próprias e que lhes permitem representar outra coisa (funções ou outros objetos matemáticos). As representações semióticas têm então dois aspectos: a forma (ou o representante) e o conteúdo (ou o representado). Existem vários **registros**^(*) possíveis **de representação** para um mesmo objeto, por exemplo, no caso de função:

| <i>Registro de representação gráfica</i> | <i>Registro de representação de escrita simbólica</i> | <i>Registro de representação lingüística</i> |
|---|---|--|
|  | $y = x$ $f(x) = x$ | uma função linear |

Citamos também o registro de representação das tabelas, que é utilizado, com freqüência, em nossas escolas.

(*) Um registro é uma maneira típica de representar um objeto matemático, um problema ou uma técnica.

Ainda segundo Duval, no ensino da Matemática não se presta atenção a esta dualidade forma/conteúdo das representações semióticas e à variedade dos registros de representação que se utiliza. E isto por uma razão muito simples, segundo Duval: um objeto matemático não deve ser confundido com a representação que se faz dele, é o *conteúdo representado* que é importante e não a forma sob a qual é representado. Porém, não podemos nos esquecer que as representações semióticas, que consideramos como representações “materiais”, são um suporte para as representações mentais.

Portanto, é essencial para a compreensão do conceito de função, a mobilização de vários registros de representação: gráfica, das tabelas, de escrita simbólica e lingüística, pois cada um deles têm suas características próprias. Sendo assim, pretendemos fazer com que os alunos compreendam que uma função pode ser representada por qualquer um destes registros, e que o conhecimento de um deles não implica, necessariamente, no conhecimento e necessidade de utilização dos outros registros.

É neste contexto teórico que desenvolveremos nossa pesquisa sobre o conceito de função.

2- METODOLOGIA

Nesta pesquisa, faremos um estudo histórico, epistemológico, e da transposição didática do conceito de função, e ainda, a elaboração, aplicação e análise de uma seqüência didática. Estamos chamando de **seqüência didática** uma série de atividades que serão propostas e aplicadas numa determinada ordem (seqüência), a um grupo de alunos, com o intuito de ensinar determinado conhecimento e identificar a evolução da aprendizagem dos alunos, que em nosso caso, é o conceito de função.

As características desta metodologia se baseiam em algumas pesquisas francesas. Buscamos em uma publicação de Michèle ARTIGUE ([3], p.36-49), algumas características de nossa metodologia, que seguem.

Nossa pesquisa se caracteriza por um esquema experimental baseado nas “realizações didáticas” em sala de aula, ou seja, na realização, observação e análises de seqüências de ensino. Também se caracteriza pelo registro que é

feito durante a aplicação da seqüência de ensino e pelas formas de validação às quais está associada. As investigações que recorrem à experimentação em sala de aula se sustentam, em geral, num enfoque comparativo com validação externa, baseada na comparação estatística do rendimento de grupos experimentais e grupos de controle. Este não é o caso de nossa pesquisa, que se baseia, pelo contrário, no registro dos estudos de caso e cuja validação, em essência, está baseada no confronto entre as análises a priori e a posteriori.

O nosso **OBJETIVO** é *elaborar uma seqüência didática para fazer avançar as concepções dos alunos sobre o conceito de função, ou seja, para que haja uma evolução qualitativa na forma como os alunos concebem tal noção.*

O processo experimental da nossa pesquisa apresenta quatro fases:

- fase 1: análises preliminares
- fase 2: concepção e análise “a priori” da seqüência didática
- fase 3: experimentação
- fase 4: análise “a posteriori” e validação.

As análises preliminares

A fase de concepção se baseia não somente em um quadro teórico geral e nos conhecimentos didáticos previamente adquiridos no campo de estudo, mas também em um determinado número de análises preliminares. Em nossa pesquisa, as análises preliminares constam de:

- ◆ Estudo histórico e epistemológico sobre o conceito de função
- ◆ Análise da atual Proposta Curricular para o Ensino de Matemática do 1º e 2º graus com relação às funções
- ◆ Análise de livros didáticos relativamente às funções
- ◆ Análise das concepções dos professores sobre o conceito de função e o ensino-aprendizagem de tal conceito
- ◆ Análise das concepções e dificuldades dos alunos sobre o conceito de função

A concepção e a análise a priori

Nesta segunda fase, tomaremos a decisão de atuar sobre um determinado número de variáveis do sistema. Por exemplo, decidiremos se em nossa seqüência didática vamos utilizar papel quadriculado ou não nas representações gráficas das funções, se utilizaremos números pequenos ou grandes nos registros das tabelas, se os números serão inteiros, decimais ou fracionários, etc.

Desde a fase da concepção começamos o processo de validação, por meio da “*análise a priori*” da seqüência didática, diretamente ligada à concepção local desta última.

O objetivo da análise a priori é determinar em que as escolhas feitas permitem controlar os comportamentos dos estudantes e seu significado. Esta análise se baseia em um conjunto de hipóteses. A validação destas hipóteses está, em princípio, indiretamente em jogo no confronto que se chega a cabo na curta fase entre a análise a priori e a análise a posteriori.

Esta análise a priori compreende uma parte descritiva e uma de previsão dos comportamentos possíveis dos alunos.

Experimentação, análise a posteriori e validação

Na fase da experimentação, aplicaremos a seqüência didática: é a realização do “experimento”. A esta fase segue uma de análise, a qual chamamos de “*análise a posteriori*”, que se baseia no conjunto de dados recolhidos ao longo da experimentação, a saber, as observações realizadas das seqüências de ensino, e igualmente as produções dos estudantes em sala de aula ou fora dela. Estes dados se completam com freqüência com outros obtidos da utilização de metodologias externas, como questionários, entrevistas individuais ou em pequenos grupos, aplicadas em distintos momentos do ensino ou durante seu transcurso. E, com o confronto dos dados das análises a priori e a posteriori, se fundamenta, em essência, a validação das hipóteses formuladas na pesquisa.

O confronto das duas análises, a priori e a posteriori, poderá suscitar o aparecimento de distorções. Estas não serão analisadas em termos de validação, isto é, não buscaremos nas hipóteses formuladas aquilo que as

distorções constatadas invalidam mas sim, iremos, provavelmente, propor modificações da seqüência didática.

CAPÍTULO II

ESTUDO HISTÓRICO E EPISTEMOLÓGICO SOBRE A **NOÇÃO DE FUNÇÃO**

EVOLUÇÃO HISTÓRICA DO CONCEITO DE FUNÇÃO

Faremos aqui um breve estudo histórico procurando levantar a gênese e a evolução do conceito de função, bem como tentar compreender os obstáculos epistemológicos ligados a este conceito. Utilizaremos parte da literatura disponível sobre o assunto, e nos deteremos nas principais etapas do desenvolvimento do conceito de função.

Para Youschkevitch, da Universidade de Moscou, existem três etapas principais do desenvolvimento da noção de função ([42], p.9):

“(1) A Antigüidade: etapa no curso da qual o estudo dos diferentes casos de dependência entre duas quantidades ainda não isolou as noções gerais de quantidades variáveis e de funções.

(2) A Idade Média: Nesta etapa, estas noções são pela primeira vez, e de maneira precisa, expressas sob uma forma geométrica e mecânica, mas durante a qual, como na

antigüidade, cada caso concreto de dependência entre duas quantidades é definida por uma descrição verbal ou por um gráfico, de preferência a uma fórmula.

(3) O período moderno: no curso do qual, a partir do fim do século XVI, e especialmente durante o século XVII, as expressões analíticas de funções começam a prevalecer; a classe das funções analíticas geralmente são expressas por meio de soma de séries infinitas, tornando-se logo a principal classe utilizada.”

Usaremos esta classificação para direcionar nosso estudo a respeito da evolução do conceito de função.

A ANTIGÜIDADE

A antigüidade foi a época do primeiro estágio da concepção de função. Encontramos entre os **abilônios**, em **2000 anos a.C.**, tabelas sexagesimais de quadrados e de raízes quadráticas, de cubos e raízes cúbicas, e outras. Tais tabelas de correspondência, escritas em tabletes de argila, revelam um “instinto funcional”. Segundo Bell:

“Não é generosidade nenhuma atribuir-lhes um instinto para a funcionalidade, pois uma função tem sido definida sucintamente como uma tabela ou uma correspondência.” ([25], p.13).

É importante destacar que, para os abilônios, cada problema era uma nova situação que exigia uma nova análise, pois eles não desenvolveram procedimentos ou regras gerais para resolverem problemas semelhantes.

Na **Grécia Antiga**, encontramos novas formas do aparecimento do conceito de função na Matemática e nas Ciências Naturais: em métodos práticos e não formulados, mas comunicados de mestre para aprendiz.

Entre os **pitagóricos**, aparece a idéia de função no estudo da interdependência quantitativa de diferentes quantidades físicas, como por exemplo, o comprimento e a altura da nota emitida por cordas da mesma

espécie, pinçadas com tensões iguais. Este estudo revelou uma interdependência inesperada entre número, espaço, e harmonia.

Mais tarde, durante o período **Alexandrino**, os astrônomos desenvolveram uma trigonometria completa de cordas, correspondendo à circunferência de um círculo de raio fixo e, utilizando teoremas de geometria e de regras de interpolação, calcularam tabelas de cordas, equivalendo efetivamente às tabelas de seno, que foram colocadas em uso pelos Hindus alguns séculos mais tarde. A mais antiga tabela de cordas se encontra em *Almagesto*, de **Ptolomeu**, que viveu por volta de **150 d.C.**. Na referida obra, figuram numerosas tabelas astronômicas de quantidades que equivalem às funções racionais e também às funções irracionais de seno (as mais simples).

Como os babilônios, os **egípcios** construíram tabelas para apresentar correspondências, geralmente em papiros. Segundo Boyer (citado em [25], p.13), eles elaboraram *“um grande corpo de conhecimento de relações numéricas e espaciais”*.

Apesar de tantos exemplos que indicam a presença das dependências funcionais, *“não havia nenhuma idéia geral de funcionalidade na Antigüidade”* ([42], p.13). Portanto, o pensamento matemático da Antigüidade não criou nenhuma noção geral nem de quantidade variável nem de função.

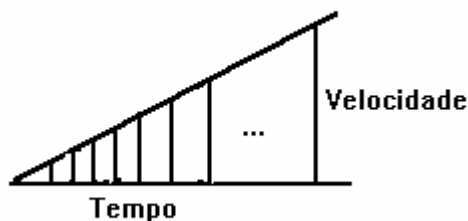
IDADE MÉDIA

A primeira vez que a noção de função aparece numa forma “mais genérica” é no **século XII**, nas escolas de filosofia natural em **Oxford e Paris**, pois até então, cada problema era tratado de maneira isolada. Nestas duas escolas, que prosperaram no século XIV, alguns matemáticos estudaram fenômenos como calor, luz, cor, densidade, distância, velocidade etc. Simultaneamente, a idéia que as leis quantitativas da natureza eram leis do tipo funcional, amadurecia pouco a pouco na filosofia natural.

Nicole Oresme (1323-1382), no **século XIV**, desenvolveu a teoria das latitudes e longitudes das formas, que pode ser considerada como a precursora da representação gráfica de função. Seu objetivo era representar a intensidade de uma característica de um assunto por meio de uma figura geométrica. Estas intensidades eram representadas por segmentos. Ele explica seu método no

trabalho “De configurationibus qualitatum et motuum”. Neste tratado, o autor fornece um método de representar as características mutáveis no âmbito de um assunto. As intensidades das características (as velocidades) são representadas por segmentos verticais, perpendiculares a outro segmento, o tempo. Obtem-se, desse modo, um gráfico ilustrando as intensidades de uma qualidade ou de uma velocidade em diferentes pontos do representante ou diferentes tempos. A figura assim obtida representa a distribuição total das intensidades da qualidade. Vejamos um exemplo, apresentado em [13], p.122-123:

Suponhamos que desejemos representar a velocidade de um móvel de acordo com o tempo. A longitude será uma linha horizontal representando o tempo. Para certos tempos dados, traçamos uma linha perpendicular, a latitude, representando a intensidade da velocidade nesse tempo. Desta forma, obtemos uma figura, como a abaixo:



Um dos objetivos visados por Oresme com seu método era permitir às pessoas a compreensão mais rápida e fácil da natureza das mudanças. Suas representações marcam um passo à frente, em direção ao conceito de função ou de variável dependente. Entretanto, não se pode dizer que ele se utilizasse de funções. Com efeito, Oresme não se interessava pela forma na qual uma qualidade varia por razão do objeto que está dependente, mas antes pela configuração global da qualidade do objeto. Além disso, suas representações eram totalmente imaginárias e qualitativas, e ele jamais utilizou medidas. Quem introduz o quantitativo nas suas representações é Galileu.

O PERÍODO MODERNO

Galileu Galilei (1564-1642) deu uma grande contribuição com relação à evolução da noção de função, introduzindo o quantitativo nas representações gráficas. Foi sua obstinação em encontrar os resultados e as relações que proviessem mais da experiência do que apenas do pensamento que contribuiu para a evolução da noção de função. Isto representa uma grande diferença em relação a Oresme, para quem a teoria pura, isenta da experiência, era suficiente. Para Galileu, a experimentação foi facilitada pelo advento dos instrumentos de medida, e por consequência, pela introdução do quantitativo, onde antes só se falava do qualitativo, como por exemplo, o calor e o frio. Assim, diferentemente de Oresme, seus gráficos, apesar de às vezes muito parecidos, resultam da experiência e da medida. As associações de causa e efeito são expressas de forma quantitativa, verificáveis e verificadas.

O principal campo de estudo de Galileu foi o movimento e, conseqüentemente, a velocidade, a aceleração, a distância percorrida. Ele procurou reunir os diferentes conceitos com auxílio das leis inspiradas na experiência e observação. Efetou muitas medidas, retomou numerosas vezes suas experiências, a fim de obter os resultados mais exatos e “verdadeiros” possíveis. Esta insistência em querer estudar os movimentos de forma quantitativa, por intermédio da experimentação, contribuiu grandemente para a evolução da noção de função: Lidou de forma funcional com as causas e efeitos, e esta necessidade é essencial à concepção de variável dependente.

No início do **século XVI**, os procedimentos algébricos se restringiam apenas a encontrar os valores desconhecidos numa dada equação com coeficientes numéricos específicos. A idéia de se estudar uma equação geral que representasse uma classe inteira de equações ainda não havia surgido, e esta idéia básica, de se fazer uma distinção clara entre parâmetros (valores conhecidos) e variáveis (valores desconhecidos) surgiu com François Viète.

François Viète (1540-1603) usou vogais para representar variáveis e consoantes para representar parâmetros. Segundo Youschkevitch ([42], p.23),

“a importância desta notação que, pela primeira vez, tornou possível a colocação por escrito sob uma forma simbólica das equações algébricas e de expressões contendo quantidades desconhecidas e coeficientes arbitrários (um trabalho que também nasceu com VIÈTE) poderia ser subestimada.

Entretanto, o criador da nova Álgebra não utiliza sua notável descoberta para “fazer avançar” o conceito de função: pensar em termos de função não foi característica de seu espírito”.

Com o advento da álgebra simbólica, literal, e ao mesmo tempo, a extensão correspondente do conceito de número, que no **fim do século XVI** abrangia o campo dos números reais, dos números imaginários e complexos, encontramos as preliminares para a introdução da noção de função como relação entre dois conjuntos de números.

Aplicando a “nova” álgebra à geometria, Fermat e Descartes, independentemente um do outro, apresentaram o método analítico da introdução das funções, abrindo assim uma nova era na Matemática ([42], p.25):

Segundo **Fermat (1601-1665)**, *“tão logo duas quantidades desconhecidas aparecem em uma igualdade, há um lugar geométrico e o ponto terminal de uma das duas quantidades descreve uma reta ou curva”*. Aqui, a função e o argumento são chamados quantidades desconhecidas, este termo significando, na realidade, segmentos de reta de comprimento variando de forma contínua.

Descartes (1596-1650) desenvolve a noção de função de uma forma mais detalhada em “La géométrie”, onde, pela primeira vez e de modo completamente claro, é sustentada a idéia de que uma equação em x e y é um meio para introduzir uma dependência entre quantidades variáveis de modo a permitir o cálculo dos valores de uma delas correspondendo aos valores dados da outra. Ele distingue a classe das curvas algébricas (que ele chama de curvas geométricas): Todos os pontos destas curvas estão em relação com todos os pontos de uma reta, com a possibilidade de representar esta relação por uma equação, a mesma para cada ponto da curva dada.

A introdução das funções sob a forma de equações produziu o efeito de uma revolução no desenvolvimento da Matemática. Este método de representação das funções foi imediatamente estendido a outros ramos, em primeiro lugar, ao reino do cálculo infinitesimal.

Isaac Newton (1642-1727) deu uma interpretação cinemático-geométrica das concepções básicas da Análise Matemática. No entanto, suas

concepções tendem para uma compreensão mais abstrata dos termos filosóficos e mecânicos.

A primeira vez que a palavra “**função**” aparece em um manuscrito foi com **Leibniz**, em **1673**, num trabalho intitulado “*Methodus tangentium inversa, seu de functionibus*”. No entanto, no início do manuscrito, Leibniz não utiliza ainda a palavra função para designar a relação formal que liga a ordenada de um ponto de uma curva à sua abscissa, mas ele já tem a idéia do conceito geral de função, que ele designa pela palavra “*relatio*”. Porém, mais adiante, a palavra função toma novo sentido: o de um termo geral para diferentes segmentos ligados a uma curva dada.

No mesmo sentido, relativamente amplo, da geometria diferencial, uma definição de função aparece pela primeira vez em alguns artigos de Leibniz publicados em 1692 e 1694; ele chama de função os segmentos de retas obtidas por construção de retas correspondendo a um ponto fixo e a pontos de uma curva dada.

Com **Jean Bernoulli (1694-1698)** aparece a primeira definição explícita de uma função como expressão analítica:

“Chamamos função de uma grandeza variável uma quantidade composta de qualquer maneira que seja desta grandeza variável e constantes” ([42], p.35).

Ele propõe o uso da letra grega φ para caracterizar uma função, escrevendo ainda o argumento φx sem parênteses.

Na sua definição, Bernoulli não dá indicação sobre o modo de constituir função a partir da variável independente. Mas, nessa época, parece evidente que ele pensa de fato nas expressões analíticas das funções, isto estando de acordo com a tendência fundamental no desenvolvimento da análise infinitesimal que, conservando e mesmo reforçando seus vínculos com a geometria, a mecânica e a física no **século XVIII**, torna-se uma disciplina científica mais e mais contida nos seus próprios princípios.

Euler, no **século XVIII**, foi figura essencial para o desenvolvimento do conceito de função. Ele começou por definir noções iniciais, discriminando as quantidades variáveis das constantes. Depois, distinguiu as funções contínuas

das descontínuas. Ele criou o símbolo \ddot{Y} e parênteses para designar função. Entre as várias definições dadas por Euler, citamos a seguinte ([42], p.36):

“Uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica composta de qualquer modo que seja, desta quantidade e números ou quantidades constantes”.

Na sua definição de função, Euler segue seu mestre Jean Bernoulli, substituindo, todavia, a palavra “quantidade” por “expressão analítica”, exercendo uma influência positiva no desenvolvimento posterior da Matemática. Durante todo o **século XVIII**, a Análise Matemática apresentou um crescimento espantoso, através do estudo de novos problemas, sem, no entanto, existir uma preocupação de colocá-la em bases formais.

No **século XIX** iniciou-se um processo de fundamentação rigorosa da Análise, que veio a ser conhecido por “*aritmização da Análise*” ([25], p.39). **Condorcet (1778)**, **Cauchy (1789)**, **Lacroix (1797)**, **Fourier (1821)**, **Lobatchevsky (1837)** se inspiraram nos trabalhos de Euler e estudaram e aprofundaram a concepção de função, além de corrigirem algumas noções limitadas de Euler.

Um avanço importante é alcançado por **Condorcet**. Ele foi o primeiro a usar o termo “*função analítica*” para a descrição de função de natureza arbitrária, o adjetivo “*analítico*” aplicando-se a todas as funções consideradas em análise matemática.

Em **meados do século XIX**, as funções já não precisavam ter a forma “bem comportada” com que os matemáticos estavam acostumados. De acordo com Boyer ([7], p.405), em 1837, **Dirichlet** sugeriu uma definição muito ampla de função:

“Se uma variável y está relacionada com uma variável x de tal modo que, sempre que é dado um valor numérico a x , existe uma regra segundo a qual um valor único de y fica determinado, então diz-se que y é função da variável independente x .”

Esta definição chega perto da noção moderna de uma correspondência entre dois conjuntos de números, mas o conceito de “conjunto” e de “número

real” ainda não tinham sido estabelecidos. Para indicar a natureza completamente arbitrária da regra de correspondência, Dirichlet propôs uma função muito “mal comportada”: quando x é racional, ponha-se $y = c$, e quando x é irracional seja $y = d \neq c$. Essa função, freqüentemente chamada função de Dirichlet, é tão artificial que não há valor de x para o qual seja contínua.

A definição geral de função dada nos cursos de análise matemática no **fim do século XIX** e no **começo do século XX** era a de **Hankel**, que dizia ter se baseado na de Dirichlet, é a seguinte ([42], p.61):

“Diz-se que y é uma função de x se a cada valor de x de um certo intervalo, corresponde um valor bem definido de y sem que isto exija entretanto que y seja definido sobre todo intervalo pela mesma lei em função de x , nem mesmo que y seja definido por uma expressão matemática explícita de x ”.

A **matemática moderna** teve dificuldade em estabelecer a definição universal de função que não é algorítmica. Em 1972, H. Weyl sustenta que:

“Ninguém jamais soube explicar o que é uma função. Mas uma função f é definida se por um meio qualquer podemos associar a um número a , um número b ... Dizemos então que b é um valor da função f para o valor a do argumento” ([42], p.64).

Em **meados do século XX**, a filosofia formalista predominou em textos e publicações matemáticas. De acordo com o grupo **Bourbaki**, a definição de função é a seguinte ([25], p.53):

“Sejam E e F dois conjuntos, distintos ou não. Uma relação entre uma variável x de E e uma variável y de F é dita uma relação funcional em y , ou relação funcional de E em F , se qualquer que seja $x \in E$, existe um e somente um elemento $y \in F$ que esteja associado a x na relação considerada.

Dá-se o nome de função à operação que desta forma associa a todo elemento $x \in E$ o elemento $y \in F$ que se encontra ligado a x na relação dada; diz-se que y é o valor da função para o elemento x , e que a função está determinada pela relação funcional considerada. Duas relações funcionais equivalentes determinam a mesma função”.

É desta época a definição de função como um certo subconjunto do produto cartesiano $A \times B$, o que nada mais é do que a definição de função como um conjunto de pares ordenados:

“Uma função f de um conjunto A em um conjunto B é um subconjunto do produto cartesiano $A \times B$ que a cada a em A associa um único elemento b em B tal que $(a,b) \in f$ ” ([35], p.14).

Neste caso constata-se que a importância está de acordo, não mais com uma regra de correspondência, mas se resume simplesmente à correspondência ou uma série de correspondências entre os elementos $a \in A$ e $b \in B$. Por exemplo: Sejam $A = \{0, 2, 4, 6\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ e a relação $f = \{(0, 1), (2, 2), (4, 1), (6, 3)\}$; f é função, pois a cada elemento de A aparece como primeiro elemento em somente um par ordenado de f .

Segundo Sophie de Cotret, é necessário deixar claro na função as suas componentes de variação, dependência e correspondência. Porém, com os matemáticos algebristas, a definição de função se afastou dos aspectos variação e dependência, como na seguinte definição:

“Uma função f de um conjunto A num conjunto B , é uma regra de correspondência que associa a cada elemento de A no máximo um elemento de B ” ([13], p.116).

O aspecto importante desta definição é a regra de correspondência. Por exemplo: Sejam $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{0, 1, 2, 3\}$ e a regra $x = y$. Portanto, $f = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ é uma função.

Como veremos mais adiante, na análise de livros didáticos, estas últimas definições são as utilizadas, atualmente, pelos professores de Matemática do Estado de São Paulo.

OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS

Segundo COTRET, é importante saber que a noção de variável independente, que aparece no conceito de função, nasceu da conjunção de estudos qualitativos e quantitativos do movimento, e isto, por intermédio das representações gráficas. Até o fim da Idade Média, os movimentos eram estudados somente de forma qualitativa, descrevendo o sentido de variação, direta ou inversamente proporcional, mas sem chegar a relações numéricas precisas. Não se considerava que certos valores se integravam dentro do conceito de grandeza variável, pois havia uma separação muito nítida entre os números e as grandezas. Esta separação era devida aos obstáculos das proporções, da homogeneidade e da incomensurabilidade. Vejamos então estes obstáculos epistemológicos, levantados por Cotret e descritos em [13]:

Proporção

Entre os gregos, e até a Idade Média, as relações entre grandezas ou entre quantidades eram expressas por meio de proporções. Deste fato deve-se sempre considerar 4 elementos aleatórios. Esta forma de proceder dissimulava a relação de funcionalidade que podia existir entre as 2 variáveis em jogo. Por exemplo, para exprimir a relação que existe entre a área e o diâmetro de um círculo, procedia-se assim: $A_1 / A_2 = (d_1)^2 / (d_2)^2$. Dizia-se então que a razão das áreas é igual à razão dos quadrados dos diâmetros, mas não se conhecia a relação entre a área e o diâmetro de um círculo. Este elemento de funcionalidade não pode ser expresso pela proporção.

Homogeneidade

O princípio de homogeneidade estipulava que só se poderia comparar elementos da mesma natureza, as áreas ou os segmentos ou ainda os volumes. Não se podia colocar em relação um diâmetro e uma área, pois eles não são elementos de mesma natureza (ou dimensão). Portanto, comparavam o quadrado do diâmetro com a área, mas sempre passando pelas proporções. Pode-se dizer que a homogeneidade reforçou a utilização das proporções.

Para dar outro exemplo do obstáculo da homogeneidade, pode-se sublinhar o fato que antes da extinção deste obstáculo, era impossível dar-se uma definição métrica da velocidade, quer dizer, não se podia definir a velocidade como uma função da distância e do tempo, isto é, $v = d/t$, pois estes elementos são de naturezas diferentes. Utilizava-se então sempre as proporções, por exemplo: $v_1 / v_2 = t_1 / t_2$.

Na realidade, o que se perdia não eram os próprios elementos, mas as relações desses elementos, e essas relações podiam ser quantitativas, mas também, simplesmente, as relações de grandezas que não pudessem ser expressas numericamente.

Incomensurabilidade

Segundo a autora, não se pode dizer que o conhecimento da incomensurabilidade seja um obstáculo como tal ao desenvolvimento da noção de função, mas sua influência sobre a utilização das proporções foi considerável.

A escola pitagórica tinha um lema: “Tudo é número”. Ela queria expressar tudo de forma numérica e então, por decorrência, as proporções tendiam a ser relações numéricas. Tal numerização talvez pudesse ter participado do desenvolvimento da noção de função se não fosse a descoberta da incomensurabilidade.

Quando se tentava exprimir duas grandezas de modo numérico, eis que apareceu a impossibilidade para certos casos, por não existir qualquer unidade comum de medida! É a incomensurabilidade. Por exemplo: a diagonal e o lado de um quadrado; portanto, podem-se comparar as relações entre grandezas, mas nem sempre é possível saber o valor dessas relações.

Além de provocar um retrocesso, a incomensurabilidade criou um mal entendido a tudo que toca ao infinito. Será o universo composto de indivisíveis ou de infinitamente divisíveis? Este problema é de grande importância, pois se relaciona com tudo que tem a ver com os conceitos de variações.

Separação entre números e grandezas

Todos os obstáculos contribuíram para uma separação entre números e grandezas. As relações de grandezas não podem ser necessariamente expressas por relações de números, e deve-se, portanto, tratá-los diferentemente.

Com a escola pitagórica, havia-se avançado um passo à frente, em direção ao conceito de função, eis que com a incomensurabilidade recuaram-se dois. Fizeram-se então teoremas para os números e outros para as grandezas, e a função necessita da unificação destes dois elementos a fim de exprimir claramente a relação entre dois elementos variáveis. A função não apenas necessita saber que um elemento varia de acordo com outro, mas também é preciso saber os termos destas dependências, para estabelecer precisamente o que se passa e poder predizer. Por exemplo, dentro de “Os Elementos” de Euclides, alguns livros são reservados às proporções entre números e outros às proporções entre grandezas. Todos os teoremas, apesar de muito parecidos, são demonstrados dentro de cada caso. Entretanto, é interessante notar que Euclides, às vezes, faz referência a uma demonstração relativa às grandezas dentro de uma demonstração sobre as proporções entre números.

Após este breve estudo a respeito das circunstâncias em que foi elaborado o conceito de função e dos obstáculos epistemológicos inerentes ao assunto, passaremos a investigar de que forma tal conceito chega até nossos alunos em sala de aula, verificando as adaptações e transformações que ocorrem com este objeto do saber.

CAPÍTULO III

ESTUDO DA TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA DO

CONCEITO DE FUNÇÃO NO ESTADO DE SÃO PAULO

Apresentaremos, neste capítulo, um estudo da transposição didática do conceito de função, ou seja, um conjunto de adaptações e transformações que o saber sábio sofre para ser ensinado. Nosso intuito é verificar quais os efeitos que essas adaptações e transformações provocam nos alunos. Para isso, faremos uma análise da atual Proposta Curricular para o Ensino de Matemática, do 1º e 2º Graus, do Estado de São Paulo, de livros didáticos, um estudo do processo ensino-aprendizagem do conceito de função, das concepções dos professores de matemática, e, finalmente, um levantamento das concepções dos alunos sobre o conceito de função.

1- ANÁLISE DA PROPOSTA CURRICULAR PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA DO 1º E 2º GRAUS COM RELAÇÃO ÀS FUNÇÕES

Nosso intuito, ao fazer uma análise da Proposta Curricular para o Ensino de Matemática do Estado de São Paulo, é compreender quais são os objetivos e conteúdos relacionados ao ensino das funções que devem ser transmitidos aos alunos, segundo a Secretaria de Estado da Educação, São Paulo, e também os efeitos e obstáculos possíveis desta etapa da transposição didática.

Na terceira versão da **Proposta Curricular para o Ensino de Matemática do 1º Grau**, editada em 1988, o conteúdo é apresentado “*em diferentes níveis de abordagem, em que se procura respeitar a integração dos temas a serem trabalhados, bem como seu desenvolvimento ‘em espiral’, conforme preconiza Jerome Bruner:*

“...dominar as idéias básicas, usá-las eficientemente, exige constante aprofundamento da compreensão que delas se tem, o que se pode conseguir aprendendo-se a utilizá-las em formas progressivamente mais complexas.”” ([33], p.8).

No que se refere à abordagem dos temas, a Proposta Curricular do 1º grau ressalta que o trabalho do professor com os alunos deve observar a seqüência dos temas e sua interdependência. Além disso, o professor deve utilizar situações-problema, em que o aluno é desafiado a refletir, discutir com o grupo, elaborar hipóteses e procedimentos, extrapolar as aplicações e

enfrentar situações novas, não se restringindo apenas àqueles problemas que conduzem a uma única solução ou que tenham caráter repetitivo de aplicação de conceito.

A Proposta Curricular apresenta sugestões de distribuição e detalhamento de temas. É na 7^a série que aparecem, ao nosso ver, temas importantes ligados à noção de função e à sua representação gráfica, como **“Equações e Inequações do 1^o grau com uma incógnita”** e **“Sistemas de duas equações do 1^o grau com duas incógnitas”**, onde são apresentados problemas introdutórios envolvendo sistemas. Acreditamos que a Proposta pouco sugere como o professor deve introduzir a representação no plano cartesiano. Seria necessário uma preocupação maior por parte da Proposta Curricular, pois a representação no plano cartesiano é muito importante dentro da Matemática, e gera muitas dúvidas nos alunos, como levantamos no capítulo da problemática.

Outro tema a ser tratado na 7^a série e que é importante, no nosso entender, para a noção de função é a **“Proporcionalidade”**. Segundo a Proposta, a noção de proporcionalidade é uma idéia de fundamental importância, pois ela se aplica, por exemplo, em semelhança e em outras áreas do conhecimento: Geografia, Química, Física, Economia, Matemática Financeira, Estatística etc; porém, muitos tópicos têm sido trabalhados de forma isolada, dificultando a aprendizagem do aluno.

Na 8^a série, é proposto o ensino sobre **“Noções de Estatística”**. *“A inclusão desse tópico deve-se ao fato de que, nesse momento, o aluno já conhece vários outros conteúdos (frações, porcentagens, circunferência e ângulos etc.), que, juntamente com o de proporcionalidade, oferecerão os instrumentos básicos necessários para a devida compreensão e exploração desse assunto”* ([33], p.121). Este tema também é fundamental para tratarmos posteriormente o tema “Funções”, já que sugere a construção e interpretação de gráficos cartesianos, entre outros tipos de gráficos. Neste caso, acreditamos que a Proposta Curricular oferece boas idéias para um bom tratamento do assunto.

Ainda na 8^a série propõe-se o ensino de **“Equação do 2^o grau com uma variável”**. Porém, a Proposta não propõe, neste momento, uma resolução

gráfica das equações do 2º grau. Isso só será proposto no 2º grau, que será motivo de nossa atenção, a seguir.

Entre as questões metodológicas, a **Proposta Curricular para o Ensino de Matemática do 2º Grau** [34] sugere a participação do aluno na elaboração de seu conhecimento. Por isso, a função do professor deve ser a de um orientador da aprendizagem, propondo, como ponto de partida do desenvolvimento de um tema, um problema, ou seja, uma situação que desafie o aluno a refletir, a levantar hipóteses, a procurar caminhos para solucioná-la, a exercitar a criatividade, a generalizar propriedades, a descobrir outras soluções e a discuti-las, verificando as condições para que elas sejam válidas. O professor deve utilizar contra-exemplos, para que o aluno compreenda “o que é” pela contraposição com aquilo que “não é” e o que “vale” a partir do que “não vale, e propor ao aluno problemas abertos que, dependendo da interpretação ou da imposição de determinadas condições, poderão apresentar diferentes soluções ou nenhuma, pois contribuem para que não se instale no estudante a crença de que todo problema tem uma e uma só solução. Ainda segundo a Proposta, a linguagem utilizada na introdução dos conceitos deve aproximar-se, o mais possível, da linguagem do aluno, e depois de interiorizados, é que deve-se chegar a uma linguagem matemática formal. Portanto, parece que a Proposta Curricular é construtivista (Piagetiana).

Entre os conteúdos sugeridos para que o aluno trabalhe prioritariamente estão as funções que constam da tabela abaixo, que aparecem na 1ª série do 2º grau. O estudo das funções trigonométricas no círculo e suas propriedades deve ser feito no 3º grau, em cursos específicos que delas necessitam, quando os conceitos de função, continuidade, periodicidade estiverem mais amadurecidos nos alunos.

É apresentado o seguinte quadro (p.22), com os tópicos a serem estudados dentro do tema “Funções”:

| | |
|--|---|
| <i>I - Familiarização com o conceito de função.</i> | <i>A. Primeiras noções de função. B. Gráficos e representações por conjuntos.</i> |
| <i>II - Uma primeira sistematização do conceito de função.</i> | <i>A. Definição de função. B. Estudo gráfico da variação de uma</i> |

| | |
|---|---|
| <p>III - Estudo das funções: constante, do 1º grau e do 2º grau.</p> <p>IV - Gráficos de outros tipos de funções.</p> | <p>função.</p> <p>A. Classificação: funções constantes, do 1º e 2º graus.</p> <p>B. Estudo das funções constantes.</p> <p>C. Estudo das funções do 1º grau.</p> <p>D. Estudo das funções do 2º grau.</p> <p>E. Convenções utilizadas nas aplicações de função.</p> <p>F. Máximos e mínimos.</p> |
|---|---|

Correspondendo ao conteúdo da tabela, são dados os objetivos e observações/sugestões de atividades.

A Proposta Curricular propõe a seguinte definição de função: “qualquer associação entre os elementos de A e de B, de modo que a cada elemento de A corresponda um único elemento de B” ([34], p. 27). Tal definição, como vimos, proposta pelos algebristas, não deixa claro os aspectos de variação e correspondência.

A Proposta Curricular não faz menção à história das funções, aos obstáculos epistemológicos ligados à sua noção (proporção, homogeneidade, incomensurabilidade, separação entre números e grandezas), nem à formação de seu conceito.

As situações-problema “concretas” não parecem tão concretas, pois nela há alunos da classe média e das classes populares, o que faz com que o que seja concreto para uma determinada classe pode não ser para outra.

A Proposta Curricular apresenta, na maioria das vezes, nos exemplos de funções, primeiro as representações algébricas e tabelas, para depois apresentar os seus respectivos gráficos. Em outras situações, porém, é proposta a situação inversa, quando é dado um gráfico para que o aluno dê a lei de associação da função. Portanto, é proposto um jogo de quadros, porém não é dado ênfase a esse fato tão importante para a aprendizagem das funções.

Achamos interessante o fato de que a Proposta, em quase nenhum momento quando trata das funções, sugere exercícios como mero treino, sem uma situação-problema, embora o treino também seja necessário.

Somos da opinião de que, se a Proposta Curricular de Matemática analisada não resolve todos os problemas ligados ao ensino das funções, pelo menos ela pode ajudar na mudança de postura do professor, pois esta é uma referência importante, de caráter oficial. Ela propõe inovações quanto à metodologia, o que se deve, acreditamos, ao seu processo de elaboração, que contou com discussões dos professores da Rede Estadual de Ensino de São Paulo, e com a contribuição de educadores matemáticos da CENP (Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas), USP (Universidade de São Paulo), UNICAMP (Universidade de Campinas), UNESP (Universidade Estadual Paulista) e PUC-SP (Pontifícia Universidade Católica de São Paulo).

2-ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS COM RELAÇÃO ÀS FUNÇÕES

Sabe-se que os livros didáticos influenciam demasiadamente os professores em sua prática docente. Por isso, faremos a análise de alguns Livros Didáticos de Matemática, para verificar qual é a proposta dos mesmos com relação ao ensino das funções, ou seja, como é feita a passagem do saber sábio ao saber ensinado (como propõem o saber escolar). Para isso, utilizaremos os seguintes critérios:

- ◇ História da evolução do conceito de função;
- ◇ Abordagem do conceito de função / Linguagem e Notação;
- ◇ Obstáculos epistemológicos;
- ◇ Obstáculos didáticos;
- ◇ Exercícios:
 - se são “fechados” ou “abertos”, ou seja, se apresentam uma, mais de uma, ou nenhuma solução,
 - se são contextualizados,
 - se propiciam o desenvolvimento do raciocínio lógico ou se são meros cálculos.

Os livros que serão analisados são [5], [6], [22], [27], [29], [36] e [37].

História da Evolução do Conceito de Função

Entre os livros pesquisados, os que fazem menção à história, apresentam uma citação a respeito dela, perdida no meio do tratamento do conceito. Portanto, estes livros didáticos deixam muito a desejar no que se refere à história das funções, o que faz com que elas sejam apresentadas, pela maioria dos livros, de maneira pronta e acabada. O leitor tem a impressão de que tudo “caiu do céu” e de que as funções não têm aplicação nenhuma na vida cotidiana. Sendo assim, o estudo fica totalmente sem sentido para o aluno.

Abordagem do Conceito de Função/ Linguagem e Notação

Na maioria dos livros pesquisados, os autores começam a desenvolver o tema através das “Relações”, iniciando com a apresentação do sistema cartesiano ortogonal, introduzindo a definição de produto cartesiano, seguido de exemplos e exercícios propostos. A seguir, é dada a definição de relação e a representação gráfica, através de exemplos, utilizando diagramas de flechas (esquema de flechas entre dois conjuntos), mostrando o “conjunto de partida”, e o “conjunto de chegada”, justamente quando se definem domínio e imagem da relação. Então, seguem-se os exercícios propostos. Depois disso, a definição de “função” é apresentada. Citaremos algumas definições:

1) “Sejam A e B dois conjuntos não-vazios. Chama-se função de A em B , qualquer relação de A em B que associa a cada elemento de A um único elemento de B ” ([5], p.41).

2) “Uma relação de A em B é uma função se e somente se todo elemento de A tem imagem em B , a imagem de cada elemento de A é única. Indica-se: $f: A \rightarrow B$ ”

$$x \mapsto y = f(x)$$

(lê-se f é uma função de A em B , que associa a cada x de A um único y em B , dado pela lei $y = f(x)$)” ([27], p.29).

3) “Uma relação $R: A \rightarrow B$ é uma função ou aplicação de A em B se, e somente se, para todo e qualquer $x \in A$ existe um único $y \in B$, tal que $(x, y) \in R$ ” ([36], p.65).

4) “Dados dois conjuntos, A e B , não-vazios, dizemos que a relação f de A em B é uma função se, e somente se, para

qualquer x pertencente ao conjunto A , existe, em correspondência, um único y pertencente a B , tal que o par ordenado (x, y) pertença a f . Simbolicamente: f é uma função de A em $B(x \in A, \exists y \in B (x, y) \in f)$ " ([22], p.44).

5) *"Sempre que duas grandezas, x e y , estão relacionadas entre si, de modo que:*

- *x pode assumir qualquer valor em um conjunto A ;*
 - *a cada valor de x corresponde um único valor de y em um conjunto B ;*
- dizemos que a grandeza que assume valores y é uma função da grandeza que assume valores x , isto é, que y é uma função de x " ([6], p.171).*

De acordo com estas definições, não ficam claras as noções de dependência, de variável dependente e independente.

Em geral, o conceito de função aparece como objeto de estudo, e não como instrumento para resolver algum problema. Sendo assim, não se realiza a "dialética ferramenta-objeto".

A notação de função, por sua vez, pode ser algo muito estranho para muitos alunos, como por exemplo, na definição 4), onde aparecem alguns quantificadores. O uso correto da linguagem e desses símbolos matemáticos podem criar um tipo de obstáculo, chamado **obstáculo ontogênico**, que aparece pelas limitações do aluno no momento do desenvolvimento do conceito de função. Este obstáculo pode fazer com que o aluno não compreenda o conceito de função.

Depois de apresentar o conceito de função, muitos autores definem domínio, conjunto-imagem e contra-domínio. Apresentam a forma algébrica, constroem a tabela correspondente e com os dados da tabela fazem o gráfico de cada função no sistema cartesiano.

Constatamos que os autores desenvolvem muitos conceitos que envolvem as funções, e que são complexos, em poucas páginas dos livros. Sendo assim, *"não é dado ao aluno tempo necessário para o amadurecimento e acredita-se que o aluno é capaz de reificar⁽³⁾ a concepção de função em mais ou menos dois meses!"* (SCHWARZ, [35], p.161).

⁽³⁾ Segundo Anna SFARD (citada em [35], p. 22-23, e em [25], p.66), **reificação** é uma habilidade de ver uma nova entidade (função) como um objeto permanente. Sem reificação, a noção do aluno sobre o conceito de função permanece puramente operacional, ou seja, ele a concebe como um procedimento computacional.

Obstáculos Epistemológicos

Os obstáculos epistemológicos podem ser utilizados para analisar a gênese histórica e a evolução do aluno com relação a um conhecimento. Alguns obstáculos desta natureza, que tiveram um papel importante na gênese do conceito de função, ainda podem ser encontrados entre os estudantes, pois são inerentes ao saber. Identificamos alguns destes obstáculos nos livros didáticos analisados.

O obstáculo razão e proporção, está implícito nas funções e gráficos que aparecem nos livros, pois à medida que a variável independente x sofre acréscimos, a variável dependente cresce ou decresce proporcionalmente (direta ou inversamente).

Na análise da Proposta Curricular, vimos que muitos tópicos da Matemática são tratados de forma desvinculada da proporcionalidade. Isto também ocorre nos livros didáticos, o que pode provocar o aparecimento do *obstáculo razão e proporção*.

Quanto ao obstáculo epistemológico homogeneidade, muitos livros didáticos analisados, algébrica ou geometricamente, enfocam funções entre números de mesma natureza, principalmente os números naturais, quando se define função e se apresentam os primeiros exemplos. No entanto, implicitamente, um gráfico de uma função pode representar elementos diferentes, como por exemplo, simbolizar a velocidade de um móvel como função da distância e do tempo. Portanto, parece que estes livros não contribuem para que o obstáculo da homogeneidade seja superado.

Obstáculos didáticos

Levantamos, nos livros de Matemática analisados, alguns obstáculos didáticos, ou seja, obstáculos que são o resultado das estratégias de ensino propostas.

O fato de muitos Livros Didáticos apresentarem primeiro as funções na sua forma algébrica e depois o seu gráfico, sem fazer o caminho inverso, constitui um obstáculo didático para a resolução de problemas que partem da

situação inversa, ou seja, do quadro geométrico para o algébrico. Além disso, o aluno não percebe a necessidade de se trabalhar no quadro geométrico. A passagem de um quadro para outro é feita sem nenhuma explicação ou sem nenhuma necessidade aparente.

O sistema segmentado dos Livros Didáticos, que fazem um estudo separado das diversas funções (já que para cada função é destinado um capítulo) também é um obstáculo didático, pois não é feita praticamente nenhuma relação entre estas funções. Quando o aluno tem que resolver algum exercício em que aparecem várias funções, de uma só vez, ele começa a fazer confusão. Esse fato ocorre entre alunos do Colegial e da Universidade, como constatamos numa pesquisa que realizamos no 2º semestre de 1994, a respeito das concepções dos alunos sobre o conceito de função.

Alguns autores de livros explicam:

“para verificar se um gráfico representa uma função, podemos traçar, por qualquer ponto de seu domínio, uma reta paralela ao eixo das ordenadas. Se esta reta interceptar a curva em um único ponto, o gráfico representa uma função” [(27), p.31].

Este fato pode provocar um obstáculo didático, pois os autores de livros, em sua maioria, usam x para variável independente e y para variável dependente. Caso sejam permutadas, ou se usem outras letras que não estas, muitos alunos não sabem identificar a qual variável devem atribuir valores (variável independente) para fazer uma tabela e o gráfico correspondente à função dada. Isso é muito comum acontecer com alunos do Ensino Superior, como temos observado em nossa prática docente. Então, esse “processo prático” é válido somente quando x é a variável independente e y a variável dependente, o que não ocorre, por exemplo na função f : dada por $x = f(y) = y^2$, ou ainda em $x = f(y) = \text{sen } y$.

Os gráficos aparecem, em muitos livros, sem escala e sem representação em papel apropriado (milimetrado ou quadriculado). Além disso, eles não propõem que o aluno construa gráficos usando esses tipos de papel, podendo ocorrer distorções na construção de escalas, principalmente se não forem alertados pelo professor. Isto constitui um obstáculo didático. Se o professor, ao trabalhar com estes livros, atentar para estas possíveis

distorções, provavelmente não teremos o surgimento deste obstáculo didático. Por outro lado, parece que não há a possibilidade de provocar um obstáculo didático devido à utilização excessiva de papel apropriado.

Os diagramas de flechas são usados de maneira excessiva quando se define *relação* e *função*, e geralmente com números inteiros. Quando o aluno começa a estudar as representações gráficas de uma função, muitas vezes com números reais, ele não vê relação nenhuma entre os diagramas e os gráficos.

Exercícios

Os livros analisados apresentam exemplos de função, porém são poucos os que apresentam exemplos de relação que não é função.

Quanto aos exercícios, muitos livros não permitem aos alunos fazerem conjecturas. Em geral, eles são repetições de exemplos dados no tratamento do assunto, e por isso não estimulam a criatividade nem o raciocínio lógico. Por exemplo, alguns livros apresentam, nos exercícios resolvidos, um conjunto, que é o domínio de uma função, dada por uma determinada lei, e pede-se para determinar o conjunto-imagem. Nos exercícios propostos, são dados outros domínios e outras funções para que o aluno determine o conjunto-imagem. Outro tipo de exemplo apresentado ao aluno é aquele em que são dadas relações de A em B, mostradas em esquemas de flechas, para se indicar as que são funções. Ou ainda, são dados dois conjuntos e várias relações para se fazer os diagramas e identificar quais são as funções. Na seqüência de exercícios propostos, são dados os mesmos tipos de exercícios apenas mudando as relações e os conjuntos.

Apesar de sabermos que os cálculos são importantes, a maior parte dos livros analisados apresentam exercícios que são meros cálculos, sem nenhum sentido para quem os resolve; é um simples treino e/ou “adestramento”! Veja-se este fato, por exemplo, nos exercícios propostos em [22], p.47, onde são dadas funções, através de suas leis, para que o aluno calcule o valor da função quando x tem diversos valores.

Em geral, os livros apresentam quase que repetições de exercícios de outros livros, apenas mudando números e “layout”. Além disso, eles não

apresentam problemas abertos, que podem admitir diferentes soluções. Ao contrário, apresentam apenas exercícios com uma única solução, o que não nos parece bom, pois dá ao aluno a idéia de que todos os problemas admitem solução com os dados apresentados. E ainda mais, dá a falsa idéia que os exercícios sempre têm solução! Citamos um exemplo deste tipo de exercício, que foi apresentado pelo Prof. Dr. Mariano Moreira em sua tese de doutorado [26]: *“Uma criança mede 115 cm aos 10 anos. Qual será sua altura aos 20 anos?”*, para o qual a maioria dos alunos entrevistados tentaram encontrar uma solução matemática.

Alguns livros analisados, a minoria em nossa opinião, apresentam problemas interessantes, que são diferentes dos exemplos e que desafiam o aluno a refletir, a levantar hipóteses, a procurar caminhos para solucioná-los, enfim, são “problemas” de acordo com a concepção da Proposta Curricular. Citamos como exemplo:

“Uma bola elástica é abandonada de uma certa altura. Até que o movimento cesse, a bola atinge o solo e volta a subir repetidas vezes. Em cada subida, alcança $\frac{8}{9}$ da altura em que se encontrava anteriormente. Se depois do segundo choque com o solo ela sobe 80 cm, de que altura foi abandonada ?” ([6], p.178).

Certos livros costumam apresentar exercícios propostos em Vestibulares anteriores às suas publicações. Isto parece ocorrer pelo fato de alguns alunos terem interesse em ingressar em uma faculdade, ao final do 2º grau, e esse tipo de exercício, de certa forma, atrai suas atenções, e conseqüentemente, as dos professores.

A maior parte dos livros analisados não parece levar em consideração os obstáculos inerentes ao conceito de função. As definições apresentadas não deixam claros os aspectos de dependência e variação. A transposição didática do conceito de função, salvo raras exceções, não está de acordo com a Proposta Curricular e pode provocar o aparecimento de alguns obstáculos didáticos.

3- O PROCESSO ENSINO-APRENDIZAGEM DO CONCEITO DE FUNÇÃO E AS CONCEPÇÕES DOS PROFESSORES

Com o objetivo de verificar como é feita a transposição didática do conceito de função pelos professores, ou seja, como eles fazem a adaptação do saber escolar ao saber ensinado, e ainda levantar as suas concepções sobre o referido conceito, elaboramos um questionário (Anexo nº 1, p. I) direcionado aos mesmos. Foram considerados como aspectos principais:

- 1) Formação profissional / acadêmica e experiência profissional.
- 2) Conhecimento da atual Proposta Curricular de Matemática do Estado de São Paulo.
- 3) Utilização de materiais didáticos, incluindo o livro didático de Matemática, no ensino das funções.
- 4) Utilização de procedimentos didáticos para o ensino das funções.
- 5) Concepções dos professores sobre o conceito de função.
- 6) Mudanças de quadro utilizadas ao ensinar funções; vantagens e desvantagens desse uso.

Com o objetivo de contemplar esses itens, criamos questões abertas e fechadas para aferir esses aspectos a partir das perspectivas do professor. Essas questões foram agrupadas em três partes: Identificação do Informante, Metodologia e Conteúdo Matemático.

Para a *coleta de dados*, utilizamos a *amostragem por julgamento*, pois essa pesquisa se limitou a um grupo de *voluntários*. Desse processo participaram 17 professores de Matemática, que responderam ao mencionado questionário no mês de setembro de 1995.

Análise e resultados

Para a análise e organização dos resultados do questionário, utilizamos apenas alguns itens, pois neste momento, verificamos que algumas questões estavam mal elaboradas, ou ainda, que os dados obtidos não eram de relevância para o nosso trabalho.

Formação profissional / acadêmica

Dentre os 17 professores que responderam o questionário, apenas um (5,88%) não especificou sua formação, oito (47,06%) têm formação em Matemática, sendo que alguns deles com Pós-Graduação, e oito (47,06%) estuda na área (Licenciatura ou Mestrado em Matemática).

Grau de ensino em que leciona

Mais da metade dos professores entrevistados, lecionam no 2º grau, o que nos leva a concluir que eles ensinam o conceito de função. Outros, somente no 1º grau, o que nos indica que estes professores trabalham em sala de aula com a questão dos gráficos de equações do 1º e 2º grau. O professor que leciona apenas no 3º grau, que representa uma pequena parcela dos que responderam o questionário, provavelmente, ensina funções, de maneira explícita (numa revisão), e/ou de maneira implícita (tratando de outros tópicos como continuidade, derivada e integral). Portanto, a maior parte dos professores trabalha ou já trabalhou no ensino das funções.

Tabela 1:

Conhecimento da atual Proposta Curricular de Matemática do Estado de São Paulo com relação ao tema “funções”

| Conhece a Proposta | Nº de Respostas | Porcentagem (%) |
|--------------------|-----------------|-----------------|
| Sim | 9 | 52,9 |
| Não | 8 | 47,1 |
| Total | 17 | 100,0 |

A tabela mostra que quase a metade dos professores desconhece a Proposta Curricular de Matemática, com relação às funções. Consideramos esse fato negativo, pois estes professores nem podem optar por segui-la ou não, nem podem dar sua opinião a respeito da mesma. Será culpa dos próprios professores ou da Secretaria Estadual de Educação?

Tabela 2:

Como o professor trabalha para ensinar funções

| Forma de ensinar funções | Nº de Respostas |
|--------------------------|-----------------|
| Aula expositiva | 14 |
| Resolução de problemas | 11 |
| Em grupos | 9 |
| Pesquisa | 2 |
| Outros (*) | 5 |

(*) Outras formas de ensinar funções que foram citadas são:

- aulas práticas (laboratório);
- pranchas pedagógicas;
- resolução de exercícios / listas de exercícios apostiladas;
- desafios (contas difíceis, valendo pontos).

Pela tabela, podemos constatar que os professores têm utilizado mais de uma “técnica” para ensinar função, porém, a aula expositiva ainda é a mais utilizada. A seguir, a forma mais utilizada é a resolução de problemas, seguida do ensino em grupos.

Tabela 3:

Material utilizado no ensino das funções

| Material que utiliza | Nº de Respostas | Porcentagem(%) |
|----------------------|-----------------|----------------|
| Jornais | 7 | 53,8 |
| Revistas | 6 | 46,2 |
| Livros | 9 | 69,2 |
| Outros (*) | 4 | 30,8 |

(*) Os outros materiais utilizados no ensino das funções que foram citados por alguns professores são:

- cartazes,
- jogos,
- computador,
- apostilas,
- textos,
- livros de outras disciplinas onde aparecem funções (Biologia, Física, Química, Português e Filosofia),
- quadro negro.

Dos 13 professores que responderam a esta questão, constatamos que mais da metade deles utiliza livro didático para ensinar funções, quase a metade utiliza jornais e revistas, além de outros materiais. Portanto, os professores não tem se fixado somente no livro didático para o ensino das funções.

Concepções dos professores sobre o conceito de função

Entre as concepções dos professores sobre o conceito de função, temos as que seguem:

“Relação entre conjuntos quando podemos variar as suas grandezas”.

“É uma relação em que cada elemento do conjunto A faz corresponder um único elemento em B”.

“É qualquer associação entre os elementos dos conjuntos A e B de modo que a cada elemento de A corresponde um único elemento em B”.

“Função de A em B é uma relação onde todo elemento de A possui um único correspondente em B”.

“É qualquer associação entre os elementos dos conjuntos A e B de modo que para cada elemento de A corresponde um único elemento de B”.

Como podemos observar, as definições dadas são relativas à concepção de função dada pelos algebristas, vigente em nosso meio acadêmico.

Outras definições que foram apresentadas se referem à concepção de função que dá ênfase à dependência ou correspondência entre grandezas ou variáveis. Vejamos algumas:

“Relação de dependência entre elementos de dois conjuntos”.

“Qualquer correspondência entre dois ou mais conjuntos”.

“Quando duas grandezas se relacionam de tal modo que variando uma delas a outra varia, dizemos que uma é função da outra (noção intuitiva)”.

Entre as definições apresentadas pelos professores, apenas uma delas apresenta linguagem matemática (com símbolos). É a seguinte:

*“f é aplicação de A em B $\Leftrightarrow (\forall x \in A, \exists! y \in B / (x,y) \in f)$
(previamente foram definidos os conjuntos A e B)”.*

Maior dificuldade dos alunos com relação às funções, do ponto de vista do professor

De acordo com a opinião dos professores, as maiores dificuldades dos alunos com relação às funções são:

- a transposição dos problemas (linguagem escrita) para a expressão (linguagem algébrica)
- transferir para a realidade
- o domínio da função
- representação gráfica
- análise dos gráficos
- associar grandeza variável
- a abstração, com rigores matemáticos, dos conceitos
- a simbologia
- a lei de correspondência
- a definição abstrata
- as diversas representações de uma função

Tabela 4:

O que é mais difícil ensinar com relação a função

| O que é mais difícil ensinar | Nº de Respostas |
|-------------------------------------|-----------------|
| Conceito de função | 9 |
| Representação gráfica de uma função | 7 |
| Nem o conceito, nem o gráfico | 1 |
| Total | 17 |

Segundo os professores, tanto o conceito como a representação gráfica de uma função é difícil ensinar.

Tabela 5:

Mudanças de registro de representação utilizadas ao ensinar funções

| Mudanças de registro | Nº de Respostas |
|------------------------|-----------------|
| Algébrico para gráfico | 9 |
| Gráfico para algébrico | 6 |
| Tabela para gráfico | 15 |
| Gráfico para tabela | 8 |
| Outra (*) | 2 |

(*) As outras mudanças utilizadas são a mudança do registro algébrico para o da tabela e vice-versa.

Como podemos observar, a mudança de registro de representação mais utilizada é da tabela para o gráfico, o que era de se esperar, pois a maior parte dos livros didáticos que analisamos propõem essa mesma situação, o que pode provocar o aparecimento de obstáculos didáticos para alunos, como no caso em que tiverem de resolver algum problema em que apareçam outras mudanças de registro.

Vantagens do uso das mudanças de registro de representação

Os professores que responderam o questionário citaram as seguintes vantagens do uso das mudanças de registro de representação, em sala de aula, para a compreensão do conceito de função:

- é um modo de “firmar conceitos” (ou de fazer com que adquiram)
- torna-se mais lógico e perceptível
- adquirir todas as idéias (ou quase todas) sobre o conceito de função
- o aluno pode abstrair e ampliar conceitos de difícil compreensão

- o aluno pode adquirir uma noção geral de função
- explorar melhor o conteúdo
- melhor compreensão
- visão geral para o aluno
- ocorre uma interação entre as formas de apresentação do conceito de função
- é uma maneira construtiva de se mostrar o comportamento de cada função em determinadas situações e assim a assimilação é mais rápida e eficaz
- os alunos compreendem com mais clareza tópicos importantes como taxa de variação, crescimento e decrescimento, máximos e mínimos.

Desvantagens do uso das mudanças de registro de representação

Segundo alguns professores, as desvantagens do uso das mudanças de registro de representação (para a compreensão do conceito de função) são as seguintes:

- o tempo é curto para a compreensão mais sedimentada do assunto
- as aulas são curtas (uma aula pode ser interrompida e retomada uma semana depois)

As mudanças de registro de representação têm muitas vantagens e são muito valorizadas pelos professores de Matemática que responderam o questionário. O que nos resta é fazer algumas indagações: Já que essas mudanças apresentam muitas vantagens, por que os professores, em geral, não usam e abusam deste recurso no ensino das funções? Será falta de conhecimento de como colocá-lo em prática?

Tabela 6:

Material utilizado pelos alunos para a representação gráfica de uma função

| Material utilizado na representação gráfica | Nº de Respostas |
|---|-----------------|
| Papel milimetrado | 8 |
| Papel quadriculado | 8 |
| O próprio caderno | 12 |
| O livro didático | 1 |

Como podemos observar na tabela, os alunos, segundo os professores utilizam mais de um material para fazer a representação gráfica de uma função. Embora aparecendo o papel milimetrado e o quadriculado, o caderno ainda é o material mais utilizado. Isso mostra como os professores ainda não trabalham de maneira adequada ao se fazer a representação gráfica das funções, o que pode provocar nos alunos obstáculos didáticos, como a utilização inadequada de escalas.

Conclusão

Em geral, as concepções dos professores que responderam o nosso questionário são aquelas que aparecem nos livros didáticos.

Os referidos professores têm utilizado uma variedade de materiais didáticos para o ensino das funções, mas o livro didático ainda impera como o recurso mais utilizado ou considerado importante nessa tarefa.

Quanto à metodologia utilizada no ensino das funções, constatamos que os professores ainda utilizam as aulas expositivas com maior frequência, porém procuram mudar essa situação trabalhando em grupos e na resolução de problemas. Além disso, a maior parte desses professores têm a preocupação de partir de alguma situação que possa ocorrer no dia-a-dia dos alunos, dar uma definição intuitiva, e depois de um certo tempo dar a definição formal de função. Isso tudo está de acordo com a Proposta Curricular de Matemática.

Embora utilizando metodologia mais adequada à Proposta Curricular, quase 50% desses professores não a conhecem.

Concluimos ainda que a maior parte dos professores não utilizam, ao ensinar funções, as mudanças de registro de representação de maneira completa, passando geralmente da tabela para o gráfico. Apesar disso, quase a metade deles já utilizam outras mudanças de registro, como do algébrico para o gráfico e do gráfico para tabela, e têm a visão de que as mudanças de registros oferecem mais vantagens do que desvantagens no ensino das funções.

Seria interessante que os professores dessem mais importância às representações gráficas em papel apropriado, como papel quadriculado e milimetrado.

Para finalizarmos esta etapa da transposição didática, queremos registrar que os resultados obtidos com a análise dos questionários nos deixou um pouco otimistas com relação à atuação dos professores na tentativa de mudar para melhor. Achamos que o caminho deve ser esse mesmo!

4- CONCEPÇÕES DOS ALUNOS SOBRE O CONCEITO DE FUNÇÃO

Fizemos uma atividade inicial, que denominamos “atividade prévia” (Anexo nº 2, p. V), para ser aplicada antes da seqüência didática que iremos elaborar. O objetivo da referida atividade é o de levantarmos as concepções e dificuldades dos alunos sobre o conceito de função, ou seja, a forma como os alunos concebem tal noção. Para isso, eles deverão responder o que entendem por função, como se pode representá-la, e ainda identificar, entre tabelas, fórmulas e gráficos, as que representam função, justificando as respostas. Esta atividade servirá como parâmetro, para avaliarmos, ao final da aplicação da seqüência didática, se houve uma evolução qualitativa nas concepções dos alunos.

Salientamos que a referida atividade é composta de exercícios diferentes dos que os alunos estão acostumados a resolver, o que fará com que eles, provavelmente, tenham dificuldades. Porém, para analisá-la, levaremos em consideração, principalmente, as justificativas apresentadas pelos mesmos.

Aplicamos a atividade prévia no dia 04/06/96, a um grupo de 22 alunos voluntários do 1º ano de Engenharia diurno da Universidade de Mogi das Cruzes. Eles levaram, aproximadamente, 30 minutos para resolver a atividade. Salientamos que, dentre estes alunos, 16 participaram das atividades de nossa seqüência didática, que iremos tratar no capítulo V deste trabalho.

Análise e resultados da Atividade Prévia

Critérios utilizados para classificação das concepções dos alunos

Alguns pesquisadores, como Dubinsky, Harel, Breidenbach, Schwingendorf, citados em [25], consideram que o processo ensino-aprendizagem de função, além de evolutivo, lento e gradual, passa por algumas etapas, chamadas **concepções**. DUBINSKY, em particular, considera três maneiras de pensar sobre funções: pré-função, ação e processo, as quais tentaremos utilizar na análise da atividade prévia.

Vejamos as principais características destas concepções, baseados em DUBINSKY ([17], p. 251 a 253):

- **Concepção pré-função:**

Nesta etapa, o sujeito não revela muito do conceito de função e o que quer que o termo signifique para ele, este significado não é muito útil na execução das tarefas matemáticas relacionadas com funções.

- **Concepção ação:**

Uma ação é uma manipulação repetitiva, mental ou física, de objetos (números, figuras geométricas, conjuntos). Tal concepção de função envolveria, por exemplo, a habilidade de colocar números em uma expressão algébrica e calcular.

- **Concepção processo:**

Esta concepção envolve uma transformação dinâmica de objetos (números, figuras geométricas, conjuntos), de acordo com alguns meios repetitivos que, dado o mesmo objeto original, produzirá sempre o mesmo objeto transformado. O sujeito pode pensar na transformação como uma atividade completa, começando com objetos do mesmo tipo, modificando-os, e obtendo novos objetos como resultado do que foi feito.

Segundo Dubinsky, a transformação em um processo pode ser completamente mental e, portanto, não se restringe a funções computáveis no senso matemático. Em termos de um indivíduo isolado, cujo entendimento de funções está sendo construído, pode-se considerar que uma concepção ação é

um tipo de concepção “*pré-processo*”. Isto significa que muitos indivíduos estarão em transição da ação para o processo e, como com todas as transições cognitivas, o progresso nunca é em uma única direção. Isto torna muito difícil, em casos extremos, determinar precisamente que o conceito de função de um indivíduo é limitado à ação ou que ele tem um conceito de processo. Como resultado, qualquer interpretação de reações individuais deve ser em termos amplos, e claras distinções não podem ser feitas com muita precisão. Ao pedir aos alunos para responder, por escrito, à pergunta “O que é uma função?”, este pesquisador agrupou as respostas em quatro categorias: pré-função, ação, processo e outras. Uma resposta foi enquadrada na categoria pré-função se, por exemplo, ela foi:

Eu não sei.

Uma equação matemática com variáveis.

Uma afirmação matemática que descreve alguma coisa.

Uma reunião social.

Como ações, categorizou aquelas que enfatizaram o ato de substituir números por variáveis e calcular para conseguir um número, mas não se referiu a nenhum outro processo de começar com um valor (numérico ou outro) e fazer algo que resultasse num valor. Qualquer resposta na qual uma menção explícita de começo ou de objetos resultantes não foi feita, foi categorizada como ação. Se todas as três categorias estavam presentes, mas o processo estava ligado a uma expressão ou equação, ou se os objetos de input ou output foram fortemente restritos, falando de números inteiros, então a categoria ação foi escolhida. Aqui estão alguns exemplos do tipo de respostas que foram colocados na categoria ação:

Uma função é algo que calcula uma expressão em termos de x .

Uma função é uma equação na qual uma variável é manipulada de modo que uma resposta é calculada usando números em lugar da variável.

Uma função é uma combinação de operações usadas para derivar uma resposta.

Uma função é uma expressão que vai calcular alguma coisa quando as variáveis ou os números estão ligados à função.

Na resposta processo, o input, a transformação, e o output estavam presentes, integrados e moderadamente generalizados. Aqui estão alguns exemplos:

Uma função é uma afirmação que quando recebe valores vai operá-los e retornar algum resultado.

Uma função é algo como um input sendo processado, um modo de dar algum tipo de output.

Uma função é um algoritmo que projeta um input em designado output.

Uma função é uma operação que aceita um dado valor e retorna um valor correspondente.

Além dessas categorias, em algumas respostas Dubinsky não foi capaz de dizer se uma concepção processo estava presente. Essas respostas foram classificadas como “outras”. Ainda segundo o pesquisador, um número de respostas sugerem uma combinação de categorias, o que indica que as quatro categorias não apresentam “estágios em desenvolvimento” do conceito função, e sim, diferentes modos de se pensar sobre funções.

Baseados nestas categorias, passaremos a classificar as concepções dos alunos que responderam a atividade prévia.

Concepções dos alunos sobre o conceito de função

Encontramos as seguintes concepções entre os alunos que responderam a **questão 1** (*O que você entende por função?*):

As respostas abaixo parecem que denotam uma **CONCEPÇÃO PRÉ-FUNÇÃO**, pelo fato de os alunos não apresentarem um conceito claro de função:

“Número ou variável que define um gráfico no plano cartesiano”.

“São dados que podem ser representados por números, gráficos ou tabelas”.

Vejamos as respostas que parecem denotar uma **CONCEPÇÃO AÇÃO**, pois envolvem a habilidade de colocar números em uma expressão algébrica e fazer cálculos:

“Em uma função aplicam-se valores para “x” obtendo-se um único correspondente y. Exemplo: $2x$;

| x | y |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 2 |
| 2 | 4 |

não obtendo dois valores (...).”

“É parte da Matemática que funciona para calcular um número não definido”. — Aqui, parece que o aluno confunde função com incógnita de uma equação.

“São $f(x)$ que tem suas variáveis em incógnita ou através de substituição são resolvidas”.

“É dado um valor para uma incógnita (x), joga o valor na função $f(x)$. Exemplo: $x^2 - 1$ e encontra-se y ”. — Neste caso, o aluno dá uma definição através de uma fórmula e parece que a concebe como uma seqüência de passos.

A resposta seguinte parece indicar que o aluno restringe o conceito de função a números, e o fato dele relacionar o conceito à correspondência é um aspecto positivo.

“Todo número que possa se corresponder a outro através de uma fórmula ou um gráfico”.

As respostas seguintes parecem indicar a **CONCEPÇÃO PROCESSO**:

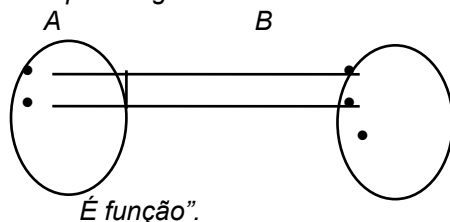
“Função são dois conjuntos, um de entrada e um de saída, sendo que o inicial tem um elemento correspondente para cada um de seus elementos”.

“Entendo por função todo conjunto de elementos que possui uma única imagem, sendo que esta pode ser imagem de vários elementos”.

“Ligação dos elementos de um conjunto A com a sua imagem no conjunto B ”.

“É um valor que varia em função de outro, por exemplo, a velocidade varia em função do tempo”.

“Para ser uma função $f:A \rightarrow B$, os elementos de A , que é o ponto de partida, tem que chegar em um só de B . Exemplo:



A definição acima mostra o quanto as representações pelos diagramas de flechas estão presentes no ensino do conceito de função, e parece indicar pelo exemplo, que cada $x \in A$ existe um único $y = f(x) \in B$. Portanto, parece indicar que o aluno sabe o que é função, mas não sabe dizer em linguagem própria.

Classificamos algumas respostas como **OUTRAS**:

“Função é um conjunto de números racionais e irracionais”.

“O ponto que tem em x e y que forma uma reta e parábola”.

“Função é um conjunto que possui o mesmo elemento e a mesma imagem”.

“Função são números que cortam os eixos cartesianos (x e y) e que formam um gráfico”.

Na **questão 2**, quanto à representação de uma função, obtivemos as respostas que constam na tabela seguinte:

Como podemos representar uma função

| TIPOS DE REPRESENTAÇÃO | NÚMERO DE RESPOSTAS |
|-----------------------------------|---------------------|
| Equação Matemática ^(*) | 13 |
| Gráfico | 11 |
| Tabela | 02 |
| Diagrama de Flechas | 02 |
| Outros ^(**) | 05 |

^(*) Ao citarem *equação matemática* como uma representação de função, provavelmente, os alunos estavam se referindo a uma *fórmula*. Por outro lado, ela pode significar que esses alunos possuem uma concepção ação de função.

^(**) Os outros tipos de representação de uma função que foram citados são:

- $f(x)$, $g(x)$, $f(g(x))$. — Neste caso, parece que os alunos (2 deles) confundem a representação da imagem com a representação da função;
- *Conjunto dos números inteiros*,
- *Números*,
- *Determinando o conjunto imagem e o domínio*. — Neste caso, parece que o aluno está se referindo ao *diagrama de flechas*.

Como podemos constatar, os 21 alunos que responderam esta questão lembram-se mais da representação de uma função através de uma fórmula (61,9%) e do gráfico (52,4%). Isto provavelmente ocorre devido ao fato de os professores trabalharem mais o registro de representação algébrica, seguido

do registro gráfico, como apontamos em análises anteriores. E ainda, quase 24% dos alunos que responderam esta questão, citaram outro tipo de registro de representação, que consideramos inadequadas.

Apresentamos o quadro seguinte com o número de acertos, erros e respostas em branco das **questões 3, 4 e 5**, para termos uma visão geral dos resultados:

Quadro de respostas

| QUESTÃO | RESPOSTA CORRETA | RESPOSTA INCORRETA | RESPOSTA EM BRANCO |
|-----------|------------------|--------------------|--------------------|
| 3a | 22 | — | — |
| 3b | 10 | 12 | — |
| 3c | 7 | 15 | — |
| 4a | 18 | 4 | — |
| 4b | 15 | 5 | 2 |
| 4c | 8 | 14 | — |
| 5a | 13 | 7 | 2 |
| 5b | 12 | 8 | 2 |
| 5c | 6 | 14 | 2 |

Entre os resultados que obtivemos das questões 3, 4 e 5, enfatizamos as seguintes dificuldades e/ou concepções que encontramos com mais frequência:

♦ Para alguns alunos, provavelmente, basta que os dados possam ser representados graficamente, ou por uma equação (neste caso, parece que o aluno possui a concepção pré-função, dada a presença da palavra “equação”), para que represente uma função. Este fato parece indicar a presença do obstáculo didático provocado pelo fato de os professores, em geral, apresentarem o registro algébrico de uma função, seguido da tabela e do registro gráfico. Por isso, se apresentamos qualquer um destes registros, muitos alunos o associam aos outros dois e à noção de função, mesmo que estes sejam apenas representações de uma relação qualquer. Vejamos algumas respostas dadas pelos alunos:

- Referindo-se a “tabela”:

Representa função porque...

...“define um gráfico”.

...“definidos como x e y , os dados da tabela podem ser colocados no plano cartesiano”.

- Referindo-se a “fórmula”:

“Se é dado um número e for pedido para montar um gráfico, é função”.

Representa função porque...

...“acham-se valores para u e monta-se um gráfico”.

...“é uma equação e pode ser representada em gráfico”.

- ◆ A justificativa seguinte, parece indicar que o aluno confunde função constante com função crescente:

“A tabela representa uma função constante (crescente)”.

- ◆ A resposta seguinte parece indicar que o aluno faz confusão entre a variável dependente e independente, pois segundo ele (referindo-se a uma tabela), x corresponde à primeira linha, e isto nos permite concluir que x representa a variável independente e y a variável dependente, o que equivale a dizer que “ y está em função de x ”, ao contrário de sua afirmação:

“A primeira linha pode ser considerada x e a outra y , isto é, x em função de y ”.

- ◆ Parece que alguns alunos não compreendem o comportamento de uma função constante:

- Referindo-se a “tabela” (da questão **3b**):

Não representa função porque...

...“todos os números do primeiro membro se ligam a um só do segundo”.

...“possui somente uma imagem”.

...“todos os pontos do conjunto A estão ligados no mesmo ponto do conjunto B ”.

...“não forma gráfico”.

...“os valores de y não se enquadram com os valores de x em nenhum tipo de função”.

...“porque o número 7 está sendo repetido, não podendo dar um resultado coerente”.

◆ Certas explicações parecem confirmar que alguns alunos possuem a concepção ação de função. Por exemplo:

- Encontramos alunos que justificaram que uma tabela representa função (questão **3c**), através de uma expressão algébrica, relacionando a mesma a cálculos, para se obter os valores apresentados na tabela:

“Entendo que aplicando valores obtemos resultados. Exemplo: $f(x) = x \cdot 10 = 0,5 \cdot 10 = 5; 0,6 \cdot 10 = 6...$ ”.

“Dada uma função $f(x)$ para x igual aos valores dados, o resultado de y se enquadra em $f(x) = x \cdot 10$ ”.

- Referindo-se à fórmula “ $v = 3t + 1$ ” (questão **4a**):

Representa função porque...

...“porque o t é variável. Se adquirimos um valor para t encontraremos o valor do v , que é a equação ou em forma de gráfico”.

...“porque podemos dar o resultado de uma variável sabendo o valor de uma”.

“A cada valor aleatório que admitirmos para ‘ t ’ encontraremos um valor respectivo para ‘ v ’”.

◆ Alguns alunos, pelo que podemos observar abaixo, parece que confundem domínio com elemento do domínio e/ou conjunto com elemento do conjunto, ou ainda, confundem a representação do conjunto com elementos do conjunto. Vejamos alguns casos:

- referindo-se a gráfico (questão **3c**):

Representa função “porque o domínio pode ter duas imagens”.

- referindo-se a fórmula “ $v = 3t + 1$ ” (questão **4a**):

“Só vai ser função quando “t” for igual aos \mathcal{R} ”.

“Porque sendo uma equação do 1º grau, qualquer valor obtido terá a sua própria imagem, ou seja, vale para todos os \mathcal{R} ”.

Não representa função “porque possuem duas variáveis”.

◆ Alguns alunos responderam que $v = 3t + 1$ representa uma função porque relacionaram esta fórmula com velocidade:

“A fórmula acima é uma função, pois para cada tempo, temos um valor para a velocidade v. V depende de t”.

“É uma função em torno da velocidade “v””.

“Em Física, v é velocidade e t é tempo, portanto, velocidade em função do tempo”.

“Substituindo o tempo acha-se a velocidade”.

◆ Algumas respostas parecem indicar desconhecimento e/ou dificuldade dos alunos na compreensão de funções dadas por mais de uma sentença. Isto está de acordo com os estudos anteriores pois, em geral, os professores, conforme os livros didáticos e a Proposta Curricular de Matemática, não trabalham com funções dadas por mais de uma sentença. Encontramos indicações deste fato nas referências dos alunos à questão **4b**, na qual apresentamos $z = \begin{cases} u & \text{para } u < 0 \\ u + 3 & \text{para } u \geq 0 \end{cases}$. Vejamos alguns exemplos:

Não representa função porque...

...“é um sistema”.— Aqui, parece que o aluno associou a expressão algébrica a um sistema de duas equações, devido à presença da “chave”.

...“é inequação”.— Neste caso, parece que o aluno confunde função com equação, e pela presença da desigualdade na “chave”, esta parece lhe indicar uma inequação, e portanto, concluiu que não representa função.

...“neste caso, nós não sabemos o valor de u”.

...“é um vetor ‘u’ ”.— Esta resposta parece nos indicar um obstáculo didático relacionado ao ensino de vetores, pois, em geral, os professores e

livros didáticos representam um vetor com a letra \underline{u} ou \underline{v} , e no caso da representação de função, utilizam uma fórmula cujas variáveis são \underline{x} e \underline{y} .

Representa função porque...

...“os pontos estão alinhados”.

...“quando u for $\neq 0$ ”.

“Só poderá ser função quando o “ u ” for igual a 3”.

As duas últimas respostas parecem mostrar que os alunos não compreendem também a simbologia utilizada, o que pode indicar um *obstáculo ontogênico**, criado pela utilização correta da linguagem e dos símbolos matemáticos pelos professores e livros didáticos.

◆ Parece provável que alguns alunos não compreendam o significado da simbologia \pm (parece significar uma aproximação ou valor incerto), como podemos verificar nas respostas da questão **4c**, na qual foi apresentado $y = \pm\sqrt{x-2}$:

Representa função, “onde x está em função de y , isto é, para cada valor de x temos um valor em y ”.

Não representa função porque...

...“neste caso, não sabemos o valor de x ”.

...“a função não tem \pm ”.

◆ As justificativas abaixo parecem indicar um desconhecimento do tipo de representação gráfica da função apresentada na questão **4c**:

Não representa função porque...

...“os pontos estão alinhados”.

...“tem tendência de formar uma reta”.

...“define um ponto”.

* Os **obstáculos de origem ontogênica** são aqueles que aparecem pelo fato do aluno apresentar limitações em um momento de seu desenvolvimento.

♦A explicação que segue (referente à questão **4c**) reproduz a falsa idéia de que uma parábola sempre representa uma função, não importando se o seu eixo de simetria é horizontal ou vertical, o que parece indicar a presença do obstáculo didático provocado pelo fato de os professores e livros didáticos, em geral, apresentarem a parábola como exemplo de representação de uma função quadrática, conforme já descrevemos neste trabalho:

“Substituindo na fórmula encontra-se 2 resultados simétricos (uma função do 2º grau)”.

♦Pelas colocações seguintes, parece que os alunos se referem (na questão **5a**), inadequadamente, implícita ou explicitamente, à “regra prática” citada nos livros didáticos e que, como já foi dito neste trabalho, provoca um obstáculo didático:

Não representa função porque...

...“se traçarmos uma reta paralela ao eixo x, teremos vários pontos”.

...“para um único valor de x poderemos obter vários valores em y”.

...“há mais de um elemento correspondente para o conjunto de saída”.

♦A seguir, aparece claramente a falsa idéia de que um gráfico só pode representar uma função se for conhecida a sua expressão algébrica:

Não representa função “porque não tem equação que forme esse tipo de reta”.

♦Pela resposta que segue, parece que o aluno que não reconhece a função trigonométrica seno, pois justifica que o gráfico apresentado na questão **5a** representa função porque:

“É função seno”.— Parece que o aluno se deteve no fato do gráfico apresentar a aparência de estar restrito a um trecho do eixo vertical, podendo assim indicar que o contradomínio está restrito, ou ainda, ele pode ter atentado simplesmente para a oscilação apresentada no gráfico.

◆ Em algumas colocações referentes à questão **5a**, temos a impressão de que os alunos se referiam a uma função cuja expressão algébrica é dada por duas sentenças, pois eles parecem interpretar cada trecho do gráfico como uma função:

“A partir de 2 funções descobrimos uma curva e uma reta”.

“(...) acima é uma parábola (equação do 2º grau) e abaixo uma equação do 1º grau”.

“É uma função mista”.

“É uma função de 2º grau para valores $x \geq 0$, função de 1º grau para $x \leq 0$ ”.

◆ Algumas explicações parecem indicar uma falta de compreensão do registro de representação gráfica de uma função:

O gráfico não representa função porque...

...“não pode ser uma reta e depois uma curva”.

...“na mesma equação não se forma uma reta e parábola”.

...“forma uma parábola e uma reta no mesmo gráfico”.

Conclusões

Como podemos constatar, os estudantes que responderam a atividade prévia, em geral, confundem função com equação, e tratam uma fórmula como uma seqüência de comandos para realizar um cálculo. Isto vem confirmar alguns estudos que têm sido realizados e publicados a respeito das concepções dos alunos sobre o conceito de função.

Também constatamos que eles apresentam deficiências no campo conceitual de função, pois a maioria deles se lembra apenas das fórmulas e gráficos para representá-la; muitos não reconhecem a função constante, e alguns parece que incluem a noção de continuidade a esse conceito, e um salto no gráfico é suficiente para lhes indicar que este não pode ser o gráfico de uma função; alguns não compreendem seus registros de representação, e ainda, não admitem que ela possa ser representada por mais de uma expressão algébrica.

Estes problemas também estão de acordo com resultados de pesquisas recentes sobre o assunto, o que indica que as deficiências no ensino-aprendizagem deste conceito são praticamente as mesmas, e que é preciso que algo seja feito para tentar modificar tal situação.

CAPÍTULO IV

PROBLEMÁTICA

Através de nossa experiência em sala de aula, constatamos que muitos alunos, quando chegam à Universidade, encontram dificuldades no estudo do Cálculo Diferencial e Integral I e II, que fazem parte dos currículos dos cursos da área de Exatas. No entanto, muitos dos problemas apresentados por eles, ao estudar limites, derivada e integral, concentram-se nas funções reais, assunto que, geralmente, é revisto no início do ano letivo, pois é um dos requisitos básicos da referida disciplina.

Com relação às funções, encontramos dificuldades que vão desde o seu conceito, na representação gráfica, como na determinação do domínio e do conjunto imagem, na classificação em função par ou ímpar, em função crescente, decrescente e constante, entre outras. Levando em consideração estes aspectos, realizamos uma pesquisa, juntamente com Filomena A. T. Gouvêa e Nielce M. L. da Costa, no 2º semestre de 1994. Nosso objetivo, naquele momento, era o de fazer um estudo sobre as concepções e dificuldades dos alunos sobre as funções, ao término do 2º grau e início do 3º grau.

Iniciamos a referida pesquisa com um breve levantamento histórico, buscando aspectos importantes na formação do conceito de função, para elaborarmos um teste. O teste era composto de 9 gráficos e uma lista com 14 dados, que os alunos deveriam relacionar. Fizemos uma análise “a priori” do teste para levantar possíveis dificuldades e erros na resolução do mesmo. A seguir, aplicamos o teste numa amostra de 100 alunos, sendo 45 do 1º ano do ensino superior e 55 do 3º colegial. Depois, analisamos os dados obtidos, através de uma análise qualitativa, quantitativa, hierárquica de similaridade e de coesão. Para a análise dos dados, utilizamos o software “CHIC” (Classification Hiérarchique, Implicative et Cohésitive), elaborado pelo IRMAR - Institut de Recherche Mathématique de Rennes (França). Para finalizar, entrevistamos os alunos que apresentaram o maior número de acertos no teste. Entre os resultados desta pesquisa, verificamos que os alunos realmente têm dificuldades com relação aos aspectos citados e ligados ao conceito de função, bem como ao reconhecimento de uma função linear, constante, quadrática, modular, exponencial, seno e cosseno, tanto no ensino de 2º grau como no ensino universitário e, em geral, muitas delas não são levadas em conta no ensino atual.

A partir da referida pesquisa, passamos a nos interessar mais pelo assunto, e através de algumas leituras de teses, dissertações e artigos, pudemos constatar que o conceito de função tem sido estudado por um número razoável de pesquisadores, tanto no Brasil como no exterior, pois é uma das idéias fundamentais da Matemática Moderna, e bastante problemática.

Entre as conclusões descritas por Maria Helena M. MENDES, em sua dissertação de Mestrado ([23], p.104-108), sobre o conhecimento do conceito de função dos alunos ao final do 2º grau / início do 3º grau, citamos: em geral, os alunos que ingressam no 3º grau, na área tecnológica, não possuem a noção de funcionalidade, e os que já atingiram uma concepção de função têm um conhecimento muito restrito e com deficiências. A maioria deles apresenta a “restrição da manipulação”, pois para eles, as funções não podem ser dadas arbitrariamente, mas devem seguir alguma regra bem explícita, de preferência uma expressão algébrica. Além disso, eles fazem confusão entre as noções de função e equação, pensam que as funções descontínuas e as definidas por partes não são funções. Com vista nas dificuldades encontradas, a pesquisadora propõe:

“Um maior conhecimento da evolução histórica do conceito de função, seguido de um estudo mais aprofundado das dificuldades e obstáculos que surgiram na evolução deste conceito, daria aos professores uma fundamentação teórica sólida, permitindo que os mesmos detectassem os problemas de aprendizagem dos alunos e buscassem soluções para tal, levando estes últimos a atingirem, ainda no 2º grau, uma concepção processo de função.” ([23], p.108).

Esta pesquisadora realizou um estudo da evolução histórica do conceito de função, levantou as concepções de professores e alunos sobre este conceito, dando algumas sugestões interessantes para a solução de alguns problemas levantados.

Entre as conclusões de sua dissertação de Mestrado, Osmar SCHWARZ ([32], p.130-131) deixa claro que é necessário não só rever o processo ensino-aprendizagem da concepção de função, mas também levar em conta que é necessário trabalhar as diferentes representações de uma função. Este pesquisador, por sua vez, realizou um estudo histórico do conceito de função, e levantou as concepções de alguns alunos sobre este conceito.

As pesquisas de SCHWARZ e de MENDES, levantaram aspectos históricos, para melhor compreender as concepções dos alunos, detectando assim, problemas importantes relacionados ao processo ensino-aprendizagem do conceito de função.

De acordo com os estudos de Shlomo VINNER [37], a respeito de hábitos mentais com relação a definições e imagens, percebemos um conflito entre a definição e os exemplos típicos usados no ensino, que causaram a formação de imagens erradas ou limitadas, e que, em geral, os estudantes não usaram definições para resolver as questões, das quais uma envolvia o conceito de função.

Segundo Maryse NOGUÈS ([26], p.39), uma função é uma correspondência arbitrária entre elementos de conjuntos de qualquer natureza, e as situações propostas no colégio não permitem aos alunos formular assim este conceito. Eles estudam alguns exemplos particulares, como função afim, linear, que mascaram a generalidade do conceito. A manipulação atual dessas funções, no colégio, como ferramentas, através de um conjunto de situações, ainda que faça intervir diversos modos de representação, não é suficiente para fazer emergir o conceito de função. Os alunos que chegam ao 2^o grau, têm somente à sua disposição alguns exemplos particulares de função. Ainda segundo a autora, o ensino privilegia o aspecto utilitário dos conceitos. As situações propostas fazem com que os alunos utilizem técnicas operatórias ou esquemas suficientes para um resultado imediato nas suas avaliações. Além disso, os alunos confundem atributos do conceito com os exemplos de seu conceito, o que faz com que eles não cheguem a uma generalização.

Para nós, uma função não deve ser vista apenas como uma correspondência arbitrária entre elementos de conjuntos de qualquer natureza, mas devemos levar em consideração outros aspectos, como veremos mais adiante.

Muitos dos problemas citados por diversos pesquisadores foram confirmados pelas análises preliminares de nossa pesquisa: os alunos, em geral, confundem atributos do conceito com os exemplos de função; incluem a noção de continuidade ao conceito de função; para eles, o domínio e o contradomínio se restringem a conjuntos numéricos, definem função como uma equação, não compreendem funções dadas por mais de uma expressão algébrica, fazem confusão entre uma função constante e contínua, entendem que a existência de uma lei ou gráfico é suficiente para afirmar que estes representam uma função, não compreendem a notação matemática, etc. Além disso, vimos que o “jogo de quadros” e a mudança de registro de

representação, no caso do estudo das funções, são feitos de maneira inadequada, tanto nos livros didáticos, como na atual Proposta Curricular de Matemática, o que reflete na atuação do professor em sala de aula. E ainda, no ensino-aprendizagem do conceito de função não é levado em consideração o aspecto qualitativo da mesma, nem os obstáculos epistemológicos e didáticos ligados ao conceito.

A situação do ensino-aprendizagem do conceito de função é bastante problemática, e muitos estudos têm apontado as dificuldades dos alunos, porém, não temos visto propostas para a melhoria desta situação. Portanto, dada a problemática, pretendemos dar nossa contribuição no sentido de apresentarmos uma proposta para o ensino-aprendizagem do conceito de função.

Nossa **hipótese** é a seguinte: para que um aluno compreenda o que é uma função, é necessário colocá-lo numa situação a-didática, na qual ele compreenda as noções de correspondência, dependência e variação, bem como utilize as mudanças de registro de representação. Sendo assim, nosso **OBJETIVO** é elaborar uma seqüência didática para fazer avançar as concepções dos alunos sobre o conceito de função, ou seja, para que haja uma evolução qualitativa na forma como os alunos concebem tal noção.

Assim, nosso trabalho tentará responder às seguintes questões:

— Nossa seqüência didática possibilitará a participação dos alunos na elaboração do conceito de função?

Esperamos que nossa seqüência didática possibilite aos alunos a participação ativa na elaboração do conceito de função, pois além de nos basearmos em situações-problema, os alunos irão trabalhar em duplas, sem a nossa intervenção direta.

— Após a aplicação de nossa seqüência didática, os alunos terão dado um salto qualitativo nas suas concepções do conceito de função?

Embora a aplicação da nossa seqüência didática seja prevista para uma curta duração, esperamos que os alunos que possuem a concepção pré-função e concepção ação do conceito de função consigam dar um salto qualitativo em

suas concepções. Esperamos que os alunos consigam compreender a variação, a correspondência e a dependência entre variáveis, que expressem, com suas palavras, o que é uma função, que reconheçam uma função entre tabelas, gráficos e leis, e ainda percebam que uma função pode representar muitas situações da realidade.

Provavelmente, os alunos que possuem concepções pré-função e ação do conceito de função irão ampliá-las com a realização da seqüência didática, pois eles estarão em contato com situações diferentes das normalmente vistas em sala de aula.

— Quais serão os efeitos positivos e negativos da aplicação da seqüência didática que construímos?

Os efeitos positivos que esperamos, com as atividades, são os seguintes:

- a participação do aluno na elaboração do conceito de função;
- as discussões e troca de idéias entre os alunos no transcorrer das atividades;
- a compreensão de que um gráfico pode representar uma função, independentemente da existência ou do conhecimento de sua representação algébrica;
- a compreensão de que uma tabela numérica pode representar uma função, independentemente de conhecermos sua representação algébrica;
- fazer mudanças de registro de representação da linguagem escrita para tabela e gráfico, gráfico para tabela e vice-versa, fórmula para gráfico, gráfico para tabela e tabela para fórmula;
- fazer gráficos de algumas funções, ora utilizando papel quadriculado, para evitar distorções, ora sem utilizá-lo;
- trabalhar com exemplos de relações que são e que não são função, distinguindo o domínio do contra-domínio;
- verificar quando e como podemos unir os pontos de um gráfico, e que esta decisão depende do domínio da função.

Esperamos que a aplicação da seqüência didática não surta efeitos negativos, porém o curto espaço de tempo disponível para a aplicação da

mesma pode gerar alguma dificuldade ou confusão nos alunos, pelo fato do conceito de função ser muito complexo, envolvendo muitos outros conceitos.

CAPÍTULO V

A SEQÜÊNCIA DIDÁTICA

1- ANÁLISE A PRIORI DA SEQÜÊNCIA DIDÁTICA

Após os estudos preliminares, elaboramos uma seqüência didática, composta de 5 grupos de atividades. Nosso **objetivo** é fazer uma **análise das funções**, sem fórmulas, através da construção e interpretação de gráficos, destacando que uma função não se resume a uma fórmula, nem a um processo de cálculo de $f(x)$, a partir de x e, algumas vezes, podemos ter necessidade de traçar e interpretar um gráfico.

“Estudar” uma função pelo seu gráfico permite justamente levar em consideração estes aspectos. Escolhemos exercícios que favoreçam as mudanças de registro de representação, pois achamos que a inter-relação desses registros pode favorecer a construção do conceito de função. Portanto, parece necessário não nos limitarmos às funções: afim, quadrática, trigonométricas..., pois as regras de passagem entre fórmulas e gráficos

dessas funções podem se transformar em algoritmos, com perda de significado, e não favorecer o acesso ao conceito de função.

As atividades estão previstas para serem realizadas em 4 sessões de, aproximadamente, 2 horas de duração cada uma.

Pretendemos aplicar a seqüência didática nos dias 10, 11, 17 e 18 de junho de 1996, a alunos voluntários, do 1º Ano de Engenharia diurno, da Universidade de Mogi das Cruzes, fora do horário de aula. Trabalharemos com alunos que estudam no período diurno, pois supomos que eles tenham mais tempo disponível.

Cada grupo de atividades será trabalhado numa sessão, exceto as dos grupos 2 e 3, que serão realizadas numa única sessão. Nas três primeiras sessões, os alunos irão trabalhar em duplas, o que, julgamos, facilitará a troca de experiências e discussão entre os componentes. Já na última, os alunos realizarão as atividades individualmente, para podermos avaliar a evolução dos alunos.

A seguir, passaremos à análise de cada uma das atividades da seqüência didática.

Atividades do grupo 1

O grupo 1 é constituído por 5 atividades compostas de situações-problema, onde a Matemática foi utilizada como instrumento por meios de comunicação (revista e livro), fazendo com que os alunos discutam, além de alguns aspectos de função envolvidos no contexto, certos problemas sócio-econômicos de nosso país e do mundo.

As atividades deste grupo têm ainda por **objetivos** provocar as *mudanças de registro de representação de dados*, tentar fazer os alunos *compreenderem as componentes variação e dependência*, ligadas ao conceito de função, *a importância de se definir o domínio de uma relação*, bem como *interpretarem as representações dos dados e reconhecerem que essas representações servem para chamar a atenção* das pessoas pelo impacto visual que provocam. Também pretendemos, ao final das atividades desse

grupo, fazer a institucionalização² do conceito de domínio. Para isso, colocamos funções tanto com domínio discreto quanto contínuo.

A noção de variação que aparece nas atividades refere-se à variação nos eixos (principalmente nas atividades 2, 3 e 4) e a dependência refere-se à dependência ponto a ponto (principalmente nas atividades 2 e 4). Utilizaremos essas idéias básicas, relacionadas à noção de função, para fazer uma institucionalização local³, através de observações e comentários que serão feitos a respeito das próprias atividades ao final de cada uma delas.

Em nenhuma das atividades utilizamos as proporções, para tentarmos evitar o obstáculo epistemológico ligado a este conceito, que impede a percepção da relação de funcionalidade existente entre as variáveis em jogo, que poderia dificultar a construção do conceito de função.

Na atividade 1 (Anexo 3, p. VIII), apresentamos uma questão que envolve as mudanças de registro de representação de dados: mudanças da linguagem escrita para a tabela de valores e o gráfico. Portanto, estamos propondo uma mudança de registros diferente daquela proposta habitualmente pelos livros e professores, para evitarmos o obstáculo didático que faz com que os alunos só façam a passagem de fórmulas para a tabela de valores, e desta para o gráfico.

Esperamos que os alunos não tenham dificuldade para fazer a representação no quadro numérico, ou seja, a tabela de valores, pois achamos que isto seja algo bastante simples. Porém, para a representação gráfica, achamos que os alunos terão certa dificuldade, principalmente pelo fato de os dados serem números “grandes”, fazendo com que os alunos tenham problemas com a escala. Talvez também haja alguns alunos com dificuldade em saber o que é um “gráfico no plano cartesiano”. Para esta última tarefa, nós lhes forneceremos um quadriculado, a fim de tentar evitar possíveis distorções.

Entre as representações dos dados em tabelas, esperamos que apareçam tabelas horizontais ou verticais. Para nós, qualquer uma delas é válida, e isso será discutido com os alunos ao final da atividade.

² Utilizamos a palavra *institucionalizar* no sentido de estabelecer (instituir) o conhecimento que desejamos que seja adquirido pelos alunos. É o momento em que descontextualizamos o conhecimento para torná-lo objeto do saber.

³ Utilizamos o termo *institucionalização local* para designar o estabelecimento do conhecimento que desejamos que seja adquirido pelos alunos, porém, no contexto em que estamos trabalhando.

Esperamos que entre as soluções dos alunos apareçam diferentes gráficos para a representação dos dados, como gráfico de pontos, de curva, de barras e pictograma, por serem mais freqüentes na mídia.

Após a atividade 1, para a institucionalização local, iremos destacar as informações pertinentes a respeito dos gráficos que foram apresentados pelos alunos. E então, tentaremos mostrar que o gráfico apresentado pela revista (curva obtida pela ligação dos pontos) foi feito dando um tratamento estatístico à série temporal, para análise de tendências, e que a rigor, matematicamente, não poderíamos fazê-lo porque se tem apenas alguns dados isolados (a variável é discreta).

Finalmente, destacaremos que eles podem representar os dados de duas maneiras diferentes: através de uma tabela numérica e de um gráfico, deixando os dados de uma forma mais organizada e atrativa para o leitor.

A **atividade 2** (Anexo 3, p. IX) foi proposta com o intuito de trabalharmos a questão da variação. Queremos saber se os alunos compreendem o sentido da palavra variação, conceito este ligado ao da noção de função. Fazemos também um questionamento quanto ao entendimento do gráfico, se os alunos associam o crescimento da curva ao aumento dos depósitos de poupança, que deve estar ligado a um fluxo maior de dinheiro no mercado. Além disso, queremos verificar se eles conseguem identificar pontos no gráfico, associando-os às suas abscissas e ordenadas.

Nesta atividade, os alunos poderão apresentar dificuldades no que se refere à leitura dos eixos coordenados, pois as datas não iniciam no zero. Os alunos poderão responder, por exemplo, que a variação dos depósitos de poupança foi de aproximadamente 3 bilhões de dólares, e que a variação do tempo foi de 1995. Isto poderá ocorrer pelo fato de as demarcações dos eixos não se iniciarem no zero. Além disso, poderão ter dificuldade na leitura da escala, pois esta apresenta números decimais no eixo vertical, ou ainda, fazerem a diferença do maior valor pelo menor valor, o que resultaria em uma variação de 2,5 bilhões de dólares nos depósitos de poupança nos últimos 5 anos, sem levar em conta o gráfico apresentado, que mostra uma variação de aproximadamente 0,9 a 2,9 bilhões de dólares.

Após a atividade 2, iremos analisar com os alunos, o significado da variação do tempo e dos depósitos de poupança descritos pelo gráfico. Além

disso, comentaremos que o gráfico mostra um crescimento nos depósitos de poupança e ressaltaremos sobre o período em que houve maior aumento nos depósitos e de quanto foi esse aumento. Ainda faremos menção ao fato de, novamente, termos um problema matemático onde os depósitos correspondem a um conjunto discreto de pontos, porém como foi dado um tratamento estatístico aos dados, aparece um gráfico contínuo. Iremos falar também da correspondência, pois queremos saber de quanto foi o aumento dos depósitos de poupança que corresponde a um determinado período de tempo descrito pelo gráfico.

Na **atividade 3** (Anexo 3, p. X), apresentamos uma tabela para que os alunos façam a mudança para o registro de representação gráfica, utilizando-se de papel quadriculado, para tentarmos evitar distorções. Provavelmente a dificuldade, neste momento, esteja na representação de um número negativo e de números decimais no eixo do IGP-M (Índice Geral de Preços de Mercado).

Esperamos que os alunos construam gráficos de pontos, pois no item **a** da atividade foi explicitado que os dados deveriam ser representados desta forma. Porém, pode ser que alguns alunos não atentem a este fato, e façam algum outro tipo de gráfico.

Nesse exercício, também questionamos se podemos unir todos os pontos do gráfico. Ao nosso ver, esta questão deve ser difícil para os alunos, pois esta questão depende do domínio da função, mais especificamente, da variável ser discreta ou contínua. Matematicamente, não podemos uní-los, pois trata-se de variável discreta, porém, no estudo estatístico de série temporal, unimos os pontos para análise de tendências. Esperamos que alguns alunos respondam que podemos unir os pontos e outros que não.

Também queremos, nesta atividade, verificar se os alunos sabem quais são as variáveis em jogo. Para tentarmos evitar respostas fora do contexto, colocamos na questão **c** “quais são as duas variáveis representadas na tabela e no gráfico?”.

Após esta atividade, destacaremos que é possível, a partir de uma tabela, construir um gráfico correspondente aos seus dados, e que novamente temos dados isolados porém, dependendo do tratamento que for dado é que saberemos se podemos ou não unir os pontos. Além disso, iremos nos

preocupar em esclarecer quais são as duas variáveis representadas na tabela e no gráfico: o tempo (meses) e o IGP-M (em %).

Na **atividade 4** (Anexo 3, p. XII), partimos da representação gráfica para que os alunos interpretem os dados através de algumas questões.

Nessa atividade, introduzimos a palavra depende, para que os alunos comecem a relacionar variação com dependência, noções importantes para a construção do conceito de função. Contudo, a dependência que tratamos aqui é a dependência pontual.

Também queremos saber se os alunos conseguem, como na atividade 2, atentar para a escala. Aqui, o zero também não aparece no eixo horizontal, podendo fazer com que eles dêem uma resposta errada quanto às previsões do número de habitantes do mundo para o ano 2000 e 2070, através de uma leitura errada do eixo vertical.

Além disso, queremos verificar se os alunos relacionam o aumento da população do mundo com o crescimento da curva apresentada nessa atividade.

Após a realização desta atividade, concluiremos, com os alunos, que a população do mundo cresceu entre 1770 e 1970, e que esse crescimento não foi muito acentuado, e para chegarmos a essa conclusão tivemos que comparar a curva entre esse período e a curva toda, ou ainda, encontrar os valores correspondentes a 1770 e 1970 e verificar a variação da população. Além disso, para encontrar as previsões do número de habitantes do mundo para o ano 2000 e para 2070, também tivemos que fazer a correspondência pontual. E por fim, iremos destacar que o número de habitantes depende do tempo.

A **atividade 5** (Anexo 3, p. XIII) foi inspirada num exercício proposto por Manhúcia P. Liberman et al ^(*) e os valores que apresentamos na tabela são iguais aos do referido exercício.

Nesta atividade, apresentamos uma tabela para que os alunos façam a mudança para o registro de representação gráfica, utilizando o quadriculado

^(*) AVERBUCH, Anna / GOTTLIEB, Franca Cohen / NAZARETH, Helenalda Resende de Souza / LIBERMAN, Manhúcia Perelberg / SANCHEZ, Lucília Bechara. “Fazendo e Compreendendo Matemática”, 7ª Série, Editora Solução, São Paulo, 1996, p. 166.

que lhes é fornecido. A dificuldade, nesta passagem, pode residir na construção da escala, pois a tabela contém números decimais e inteiros.

Embora tenhamos colocado no enunciado que não sabemos qual foi o comportamento da temperatura no mesmo dia, esperamos que alguns alunos façam um gráfico contínuo, unindo todos os pontos, o que não caberia neste caso. É por isso que questionamos sobre o que seria necessário para se ter uma idéia real da variação da temperatura durante os 9 dias, a que se refere a atividade. Esta questão, em particular, parece-nos difícil, porém fornecemos alguns subsídios, através das questões anteriores, para que os alunos respondam corretamente a esta pergunta, mesmo se tiverem unido os pontos no gráfico.

Nosso intuito, com a atividade 5, é fazer com que os alunos percebam a importância do domínio da função num gráfico, uma vez que ao modificarmos o domínio, o gráfico se altera. Ao final, pretendemos aproveitar as respostas corretas, referentes à última questão, para apresentar mais pontos, que podem ser sugeridos pelos alunos, e esboçar um gráfico contínuo. É nesse momento, então que pretendemos institucionalizar o conceito de domínio de uma função, utilizando os gráficos.

Atividades do grupo 2

O grupo 2 é constituído por 2 atividades, e tem por **objetivo trabalhar a representação algébrica** de uma função, *os conceitos de variável dependente e independente*, bem como *apresentar um exemplo de uma situação do dia-a-dia que não representa função*.

A **atividade 1** desse grupo (Anexo 3, p. XIV) foi proposta com o intuito de fazer os alunos compreenderem a dependência entre variáveis, que é muito importante para a noção de função. Trata-se da dependência da velocidade e tempo, uma em relação a outra. Desejamos que os alunos façam a representação algébrica da velocidade em função do tempo e do tempo em função da velocidade, mantendo o espaço constante.

Escolhemos para a atividade 1 uma questão ligada à velocidade pensando no obstáculo da homogeneidade, pois assim, enfocando grandezas de natureza diferente, tentaremos evitar este obstáculo epistemológico. Como

vimos na História, a homogeneidade pressupunha que só se poderia comparar elementos de mesma natureza, e sempre passando pelas proporções, como por exemplo $v_1 / v_2 = t_1 / t_2$, não podendo definir a velocidade como uma função da distância e do tempo.

Com relação aos cálculos do tempo e da velocidade, referentes às questões 1, 2, 5 e 6, esperamos que os alunos não encontrem dificuldades pois eles, provavelmente, já devem ter feito, em Física, um estudo do movimento, e em consequência, da velocidade. Porém, talvez alguns alunos apresentem dificuldade em escrever a lei existente entre o tempo e a velocidade ($t = 600/v$), e entre a velocidade e o tempo ($v = 600/t$), estando o espaço fixo (constante), podendo dar a mesma lei na resposta das questões 4 e 8, ou seja, $v = s/t$ ou $v = 600/t$, ou ainda $s = v t$, onde s é o espaço, v é a velocidade e t o tempo.

Após esta atividade, iremos institucionalizar os conceitos de dependência entre variáveis, variável dependente e independente, porém intuitivamente. Vamos salientar qual é a variável dependente, através das respostas das questões 3 e 7, para então dizer que a outra variável é considerada como independente. Também pretendemos, com as respostas da última questão, chegar à conclusão de que as leis são diferentes se pensarmos que em uma delas o tempo é a variável dependente, e na outra, é a velocidade. Porém, se fizermos alguma operação algébrica, podemos passar de uma lei para outra. Finalizaremos a atividade, constatando que podemos utilizar um registro de representação algébrica para questões que envolvam alguns dados numéricos.

A **atividade 2** deste grupo (Anexo 3, p. XVI) foi proposta com o intuito de fazer com que os alunos não pensem que todas as situações do dia-a-dia representam função. Pode ocorrer que a cada elemento do domínio exista mais de um correspondente. Desta forma, tentaremos evitar o obstáculo didático provocado quando só apresentamos exemplos de função, sem apresentar situações que não representam funções.

Nesta atividade, apresentamos uma situação da nossa realidade, onde a relação entre os preços da gasolina e os postos, não representa uma função, para que os alunos verifiquem, através do gráfico, que a um mesmo valor do domínio existe um ou mais correspondentes. Não forneceremos o papel quadriculado aos alunos, pois achamos que eles também devem construir

gráficos sem esse recurso. Queremos com isso, evitar o obstáculo didático que faz com que os alunos só construam gráficos em papel quadriculado.

Talvez os alunos encontrem dificuldades em colocar escala no eixo das abcissas por tratar-se de números decimais, e por não utilizarem papel quadriculado.

Para indicar o(s) posto(s) correspondente(s) a cada preço de gasolina, acreditamos que os alunos não terão dificuldade, pois a resposta está escrita, de maneira implícita, no enunciado dessa atividade, mesmo sabendo que isso não é um exercício freqüente em sala de aula.

Após a atividade 2, iremos comentar com os alunos que a representação do tipo de situação apresentada aqui difere das atividades do grupo 1 pelo fato de existir mais de um correspondente para um mesmo elemento do domínio. Além disso, iremos institucionalizar o conceito de relação entre duas grandezas variáveis, ou entre dois conjuntos, onde o primeiro é o domínio e o segundo é o contradomínio.

Atividade do grupo 3

A **atividade** desse grupo (Anexo 3, p. XVIII) tem por **objetivo relacionar três tipos de registro de representação de uma função: representação algébrica, gráfico e tabela.**

O fato de escolhermos números próximos do zero, é uma *variável didática*. Fizemos essa escolha para tentarmos não complicar a atividade, pois o efeito desejado é relacionar os três tipos de representação de uma mesma função.

Provavelmente, os alunos terão dificuldades para relacionar os gráficos e tabelas às respectivas leis, pois esse tipo de atividade não costuma ser trabalhada por eles, como vimos na análise da atual Proposta Curricular de Matemática e de alguns livros didáticos.

Uma outra dificuldade que os alunos podem apresentar é na leitura dos gráficos, ou seja, para relacioná-los às tabelas, pois, embora tenham sido desenhados em papel quadriculado, os mesmos foram feitos em escalas diferentes.

No **item (1)** desta atividade, colocamos a função do 2º grau, definida por $y = x^2$. Acreditamos que os alunos não terão dificuldade em relacioná-la ao gráfico, pois trata-se de uma parábola, que é bastante explorada pelos professores em geral, como constatamos no estudo da transposição didática. Quanto à tabela correspondente, talvez alguns alunos escolham a que apresenta uma variável sendo o dobro da outra, ao invés do seu quadrado. Isto pode ocorrer devido a uma generalização abusiva por parte do aluno no seguinte sentido:

$2^2 = 2 \times 2 = 4$, então $4^2 = 2 \times 4 = 8$, ao invés de $4^2 = 4 \times 4 = 16$,
e concluir que $x^2 = 2x$.

No **item (2)**, aparece a função dada por $y = 1/x$, cujo gráfico é uma hipérbole. Para associar esta função ao respectivo gráfico, provavelmente os alunos terão dificuldade pois, em geral, ela não é estudada no 2º grau. Para encontrar a tabela, talvez os alunos façam correspondência correta, pois é o único gráfico que não passa pela origem e a tabela correspondente é a única que não contém o ponto (0, 0).

No **item (3)**, temos a função definida por $u = 2t$. Neste caso, pode acontecer de alguns alunos fazerem a correspondência com o gráfico da função dada por $w = -2v + 1$, por se tratar também de uma reta. Geralmente os alunos têm em mente que à função do 1º grau corresponde uma reta, pois este fato é bastante explorado. Além disso, existe o problema do coeficiente angular das duas funções, cujo valor, em módulo, é 2. Os alunos podem desprezar o sinal, e como o coeficiente angular não é um assunto que os professores e livros didáticos dão ênfase, podem trocar a reta crescente por uma decrescente. Esperamos que seja uma tarefa mais fácil associar a função representada neste item à sua tabela, pois trata-se de encontrar aquela que apresenta a segunda variável como o dobro da primeira. Neste momento, se os alunos escolheram para o **item (1)**, da função dada por $y = x^2$, a tabela da função definida por $u = 2t$, eles provavelmente perceberão e então corrigirão a associação errada.

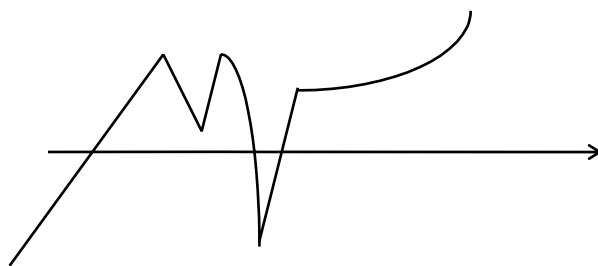
No **item (4)**, apresentamos $z = u^3$, que representa uma função não muito conhecida pelos alunos (no 2º grau, em geral, não é muito trabalhada pelos professores, e no Ensino Superior, provavelmente, o estudo é feito muito

rapidamente), o que pode provocar algum erro na associação de seu gráfico. Quanto à tabela correspondente, talvez alguns escolham a que corresponde à função dada por $w = -2v + 1$, pois seu primeiro ponto é $(-1, 3)$. O que pode levá-los a este erro é o fato de, ao invés de elevarem -1 ao cubo, multiplicarem por 3 , sem levarem em conta o sinal. Talvez ainda escolham a tabela que corresponde à função definida por $y = 1/x$, por apresentar o número $-3, -1/3, 1/3$ e 3 , associando esses números ao expoente da função representada por $z = u^3$.

No **item (5)**, temos a função f , definida por duas sentenças, o que a torna mais difícil para os alunos, e o gráfico pode ser conhecido entre eles como o da função modular representada por $f(x) = |x|$, definida em \mathbb{R} . Além disso, funções com mais de uma sentença raramente são estudadas no ensino de segundo grau, e no terceiro grau, parece que os alunos têm muita dificuldade para compreendê-las, entendendo-as como se fossem mais de uma função, representando cada sentença com um gráfico. Se houver este tipo de raciocínio nesta questão, os alunos poderão escolher os gráficos das funções representadas por $w = -2v + 1$ e $u = 2t$, por apresentarem uma função decrescente e outra crescente. A associação à tabela parece ser simples, neste caso, pois basta verificar que para $x < 0$, o número correspondente na segunda linha é o mesmo da primeira, com o sinal trocado, e para $x \geq 0$, o número é o mesmo.

No **item (6)**, a função definida por $w = -2v + 1$, por ser do 1º grau, pode levar alguns alunos a associarem ao seu gráfico, ou ao da função dada por $y = 2t$, que também é uma reta. Além disso, temos o problema do coeficiente angular, que foi discutido no **item (3)**. Este item não deve apresentar dificuldades, pois as funções do 1º grau são bastante exploradas pelos professores do 2º grau.

Após esta atividade, iremos destacar, com os alunos, que uma relação entre duas grandezas variáveis, ou uma relação entre dois conjuntos, pode ser representada, quase sempre, ou por uma fórmula, ou por um gráfico ou por uma tabela. Neste momento, apresentaremos um exemplo de uma relação, dada pelo gráfico abaixo, cuja fórmula não conseguimos escrever se apenas observarmos seus pontos no gráfico ou numa tabela.



Atividades do grupo 4

O **objetivo** das atividades deste grupo é fazer com que os alunos *diferenciem uma função de uma relação* (sem contudo falarmos em função), ou seja, queremos que os alunos verifiquem que existem algumas relações em que a cada elemento do domínio corresponde um único elemento no contradomínio, e que existem outras com mais de um correspondente do mesmo elemento. Para isso, partimos de relações expressas por tabelas (atividade 1), gráficos (atividade 2) e fórmulas (atividade 3).

Na **atividade 1** (Anexo 3, p. XIX), os alunos deverão verificar, para cada tabela dada, se a cada elemento do domínio corresponde um único elemento no contradomínio. Para verificarmos se os alunos realmente compreenderam, pedimos para que destaquem, com um círculo, os que apresentam mais de um correspondente. Nesta atividade, provavelmente, os alunos apresentem dificuldades, pois é algo bastante distinto dos exercícios apresentados pelos livros didáticos e pela atual Proposta Curricular de Matemática.

Para a organização desta atividade, nos inspiramos nas atividades de Marc Rogalsky, da Universidade Lille - França, sugeridas em um curso, ministrado na PUC/SP no mês de setembro de 1995, no qual ele apresentou uma tabela de valores de x e y para que os alunos respondam se a grandeza y é uma função da grandeza x , justificando sua resposta. Elaboramos então uma atividade na qual pedimos aos alunos que identifiquem relações em que, para cada valor do domínio, associe um único correspondente (na realidade, os alunos já estarão identificando as que representam função). Na institucionalização das atividades do grupo 1, havíamos previsto que o domínio corresponderia à primeira linha ou coluna das tabelas, e o contradomínio à segunda.

Nesta atividade, pode acontecer de alguns alunos não levarem em conta que o domínio está na primeira linha e o contradomínio na segunda, levando-os aos seguintes erros:

- No item **a**, responderem que a cada elemento do domínio existe mais de um correspondente, referindo-se aos pares ordenados $(-2, 40)$ e $(2, 40)$, ao invés de referirem-se aos pares $(2, 40)$ e $(2, 3)$.
- No item **e**, responderem que a cada elemento do domínio existe mais de um correspondente, referindo-se aos pares $(-0,5; 3)$, $(-0,4; 3)$, $(-0,3; 3)$, $(-0,2; 3)$ e $(0; 3)$.
- No item **b**, responderem que a cada elemento do domínio existe um único correspondente.

Além desses erros, os alunos podem responder, nos itens **c** e **f**, que existe mais de um correspondente, referindo-se ao par $(0, 4)$, que aparece duas vezes na tabela do item **c**, e ao par $(1, 5)$, que aparece duas vezes na tabela do item **f**.

Quanto à tabela do item **d**, que para cada elemento do domínio existe um único correspondente, e não aparecem pares de números repetidos, esperamos que os alunos não tenham nenhuma dificuldade.

Se os alunos levarem em consideração que o domínio está na primeira linha e o contradomínio na segunda, provavelmente não terão muita dificuldade na resolução desta atividade.

Após a realização da atividade 1, iremos discuti-la com os alunos, coletando as respostas dadas pelos mesmos e tirando possíveis dúvidas. Depois, iremos destacar que existem algumas situações representadas por tabelas, em que a cada elemento do domínio corresponde um único elemento no contradomínio, e que em outras situações isso não ocorre.

Na **atividade 2** (Anexo 3, p. XXI), os alunos também deverão identificar as relações que são funções, verificando a quantidade de elementos correspondentes a cada elemento do domínio, através da representação gráfica, e explicar suas respostas. Esta atividade parece ser difícil, pois não ensinamos a “regra prática” apresentada pelos livros didáticos propondo que “basta traçar uma reta paralela ao eixo y, e se esta interceptar o gráfico em um

único ponto, este é de uma função”. Para tentarmos amenizar esta dificuldade, construímos os gráficos sobre um quadriculado.

Provavelmente, os alunos farão uma correspondência ponto a ponto, associando pontos do domínio com pontos do gráfico, pois eles fizeram correspondências deste tipo em atividades anteriores (do grupo 1). Achamos que o quadriculado será útil neste momento.

Se seguirem a estratégia anterior, esperamos que os alunos não tenham dificuldades para responder corretamente cada item desta atividade. Porém, o **item e** deve ser mais difícil pois, além de tratar-se de uma função praticamente desconhecida por parte dos alunos, ela contém pontos de descontinuidade, dando a impressão de que nesses pontos, existem dois correspondentes a cada elemento do domínio.

Após a atividade 2, iremos levantar os possíveis erros e dúvidas com os alunos, partindo de suas respostas. Depois, iremos destacar que existem situações representadas por gráficos, em que a cada elemento do domínio corresponde um único elemento no contradomínio, e que em outras situações isso não se dá.

Também como nas atividades 1 e 2 deste grupo, a **atividade 3** (Anexo 3, p. XXIII) propõe que os alunos verifiquem, para cada caso, se a cada elemento do domínio corresponde um único elemento, explicando suas respostas. Nesta atividade, as funções estão representadas algebricamente.

Das três atividades deste grupo, esta última deve ser a mais difícil, pois os alunos não visualizam, de certa forma, os elementos do domínio e do contradomínio, mas somente as suas relações, dadas por leis. Esperamos que os alunos tentem visualizar as relações através do tabelamento de alguns valores e, possivelmente, do esboço do gráfico.

Em particular, os **itens a** e **b** devem ser os mais difíceis, por se tratarem de funções dadas por mais de uma sentença. Isso é esperado porque os professores, em geral, não trabalham funções deste tipo no ensino de 2º grau, e na Universidade, apresentam poucos exemplos, gerando um obstáculo didático. Se os alunos não fizerem um esboço do gráfico, talvez no **item a**, por aparecer o número zero nas três sentenças, eles achem que ele terá três correspondentes. De modo análogo, os alunos poderão achar que, no **item b**,

para o número 0 existe dois correspondentes, pelo fato dele aparecer nas duas sentenças. Portanto, se usarem este raciocínio, devem errar na resposta.

No **item c**, os alunos podem apresentar dificuldade pela presença da raiz quadrada e pelo sinal \pm . Alguns alunos, porém, podem perceber que a cada valor atribuído a x , têm-se dois correspondentes: um positivo e outro negativo.

Talvez o **item d** seja mais fácil. Os alunos podem associar a lei representada por $f(x) = x+3$ à função do 1º grau, cujo gráfico é uma reta, em que a cada valor do domínio corresponde um único elemento.

Após esta atividade, iremos destacar que existem algumas situações representadas por expressões algébricas, que a cada elemento do domínio corresponde um único elemento no contradomínio, e que outras situações não se comportam da mesma maneira. Caso os alunos apresentem alguns erros ou dúvidas, iremos discutir, com eles, quais são as respostas corretas, através de uma tabela e/ou um esboço do gráfico.

Após as atividades do grupo 4, iremos destacar que, em geral, nos casos de representação de alguma situação real, temos “**relações especiais**” entre as grandezas em jogo, que são denominadas **funções**. Assim, iremos institucionalizar o **conceito de função**. Apresentaremos o seguinte:

Definição: *Dados dois conjuntos A e B , chama-se função de A em B qualquer relação entre tais conjuntos que faça corresponder a cada elemento de A um único elemento de B .*

Indicaremos a função de A em B por $f: A \rightarrow B$. O conjunto A é chamado domínio da função; o conjunto B , contradomínio.

Numa função de A em B há um relacionamento entre duas variáveis. A variável que assume valores em A é chamada de variável independente, enquanto a variável que assume valores em B é a variável dependente.

Atividades do grupo 5

As **atividades** deste grupo (Anexo 3, p. XXIV a XXVIII) têm por **objetivo** *propiciar a consolidação do conceito de função*, que foi institucionalizado após as atividades anteriores (do grupo 4). Queremos também *verificar se os alunos compreenderam o que é uma função e se os mesmos identificam, entre tabelas, gráficos e expressões algébricas, quais representam função, justificando suas respostas.*

Na **questão 1** deste grupo de atividades, onde perguntamos o que é uma função, esperamos que os alunos dêem uma definição com suas próprias palavras.

Na **questão 2**, pedimos aos alunos para identificar as tabelas que representam uma função, justificando as respostas. Esperamos que, em geral, os alunos não tenham dificuldade nesta atividade, pois eles já resolveram, no grupo 4, algo semelhante. Os **itens a** e **b**, em particular, devem ser mais fáceis que os outros, pois não aparecem números repetidos, e a cada elemento do domínio corresponde um único elemento no contradomínio. No **item c** pode ocorrer de algum aluno responder que não representa função pelo fato de aparecer duas vezes o par $(1, 7)$, embora nas atividades do grupo 4 tivessem visto e discutido este tipo de ocorrência. No **item d**, provavelmente os alunos irão perceber que para o número 1 correspondem os números 1 e 6, respondendo corretamente que a tabela não representa uma função. Se pensarem, erroneamente, que o domínio está na 2ª linha e o contradomínio na 1ª linha, também podem responder que não é função, justificando que, ao número 4 correspondem os números -2 e 2. No **item e**, em que aparecem em correspondência, para vários valores do domínio, o número 2, pode ocorrer de alguns alunos errarem esta questão, embora tenha sido trabalhada em atividades anteriores. O problema aqui é que a tabela representa uma função constante, e os alunos, em geral, sentem dificuldade para compreendê-la.

Na **questão 3**, os alunos deverão identificar os gráficos que representam função, justificando suas respostas. Esperamos que eles façam uma correspondência ponto a ponto, como previmos nas atividades do grupo 4, verificando, para diversos pontos do domínio (eixo horizontal), quantos pontos existem em correspondência no gráfico. Se seguirem esta estratégia, que deve

ser comentada no final das atividades do grupo 4, provavelmente responderão corretamente. Em particular, os **itens b, c e d** devem ser os mais fáceis, pois os alunos poderão associar os gráficos às funções de 1º grau, 2º grau e função seno ou cosseno, que não foram comentadas em nossas atividades, mas que provavelmente já foram estudadas no 2º grau e no Ensino Superior.

□ Na **questão 4**, os alunos deverão identificar as expressões algébricas que representam função, justificando as respostas. Como estratégias de solução, esperamos que os alunos façam uma tabela e/ou um esboço do gráfico correspondente à expressão algébrica dada, e então, utilizando raciocínio análogo ao utilizado nas atividades 2 e 3 deste grupo, encontrem a resposta correta. Uma outra maneira de chegarem às respostas corretas também pode ser verificando que nos **itens a, c e f** as funções são do 1º grau, cuja representação gráfica é uma reta, e portanto representam funções. No **item b** a função é de 2º grau, cujo gráfico representa uma parábola, e portanto, representa função. No **item e**, os alunos podem constatar que para cada valor de x têm-se dois valores correspondentes: um positivo e outro negativo, e portanto não representa função. Já no **item d**, que deve ser o mais difícil por se tratar de uma função definida por duas sentenças, o que constitui um *obstáculo didático*, talvez alguns alunos façam confusão, principalmente pensando que para $x = 0$ existe dois correspondentes, errando a resposta.

Faremos agora uma descrição da aplicação da seqüência didática, para depois fazermos uma análise mais profunda.

2- DESCRIÇÃO DA APLICAÇÃO DA SEQÜÊNCIA DIDÁTICA

Inicialmente, aplicamos a seqüência didática num aluno do 2º ano do curso de segundo grau (Colegial), com o objetivo de detectar possíveis falhas das atividades, verificar se o tempo previsto para a realização era suficiente, e para fazermos as modificações que se fizessem necessárias. Desta aplicação, destacamos que reescrevemos alguns enunciados de algumas atividades, pois davam margem a dúvidas.

Descreveremos agora como transcorreu a aplicação da seqüência, apontando eventuais alterações realizadas no decorrer da mesma.

Conforme previsto, a aplicação da seqüência didática ocorreu em 4 sessões, nos dias 10, 11, 17 e 18 de junho de 1996, na Universidade de Mogi das Cruzes. Cada sessão teve duração de aproximadamente 2 horas, e foram realizadas fora do horário escolar.

Salientamos que no dia 06/06/96 tivemos um primeiro encontro com alunos voluntários do 1º ano de Engenharia, de diversas turmas, quando explicamos nossos objetivos (pesquisa de Mestrado) e marcamos as sessões, de acordo com as possibilidades da maioria dos 22 alunos que estavam presentes. Em troca, em tempo não inferior ao período que fosse realizado as atividades, ficaríamos à disposição dos alunos para sanar dúvidas das disciplina ligadas à Matemática, o que foi oficializado, juntamente à Diretoria do Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade de Mogi das Cruzes. Depois, aplicamos a “Atividade Prévia”, como já relatamos no capítulo 3, no item das “Concepções dos Alunos sobre o Conceito de Função”.

Passaremos agora a relatar o transcorrer de cada sessão.

Primeira Sessão

No dia 10/06/96 realizamos a primeira sessão, das 14h e 20min às 16h e 20min, à qual compareceram 12 alunos, sendo que outros 4 fizeram esta sessão fora do horário previsto.

Inicialmente, explicamos aos alunos que as atividades faziam parte de uma pesquisa de Mestrado e que as mesmas não seriam utilizadas para avaliá-los no curso que freqüentavam.

Explicamos ainda que a maior parte das atividades seriam realizadas em dupla, e que eles deveriam escolher seus parceiros naquele momento, o que foi feito prontamente.

Foi explicado também que haveria um observador, que iria estar presente durante a realização das atividades, com o objetivo de anotar dados da discussão de alguma dupla, que seria escolhida aleatoriamente. Além disso, que os dados anotados seriam utilizados na análise das respostas, pois o raciocínio que levou à resolução das atividades é muito importante para a

pesquisa, e por isso também seria feita a gravação, em fita k-7, de 2 duplas, também escolhidas aleatoriamente.

Salientamos que a dupla observada foi uma daquelas escolhidas para a gravação.

Nesta sessão, aplicamos as 5 atividades do grupo 1 (Anexo 3, p. VIII a XIV). Inicialmente, explicamos que eles iriam analisar algumas situações que foram retiradas de revistas e livro.

A atividade 1 transcorreu sem grandes problemas. Apenas uma dupla perguntou se poderia fazer qualquer tipo de gráfico, obtendo a resposta afirmativa. Esta dupla também apresentou dúvidas em como fazer a escala e no traçado da curva. Inicialmente, eles só haviam feito o gráfico, e foram alertados para o enunciado da questão. Foi então que a dupla percebeu que era necessário fazer uma tabela com os dados, mostrando que não sabiam, inicialmente, quais dados colocariam na tabela. Isto também aconteceu com mais duas duplas. Mesmo alertando os alunos, tivemos ainda duas duplas que não fizeram a tabela. Quanto aos tipos de tabela, apareceram horizontais e, principalmente, verticais.

Após a resolução da atividade, comentamos sobre os tipos de gráficos feitos pelos alunos (gráfico de pontos, curva e gráfico de barras) e comparamos com o apresentado pela revista, mostrando-o aos mesmos.

Na atividade 2, uma dupla contou o número de pontos que estavam representados no gráfico para encontrar a variação dos anos, o que fez com que respondessem de maneira errada a questão a. Quanto à questão b, a mesma dupla encontrou a média dos depósitos em bilhões de dólares, ao invés de achar a variação deles. Estes pontos foram analisados na discussão que foi realizada ao final da atividade. As outras duplas parece que não tiveram dificuldades, resolvendo rapidamente a questão.

A atividade 3 provocou certa polêmica na dupla observada: Um dos alunos achava que não poderiam unir os pontos do gráfico, pois estes não representam o ano de 1995 completo, ou poderiam uní-los se ignorassem o mês 9 (setembro), e o outro achava que sim, sem restrição alguma, não chegando a uma conclusão. A dúvida só foi esclarecida durante as discussões, ao final da atividade.

Além deste fato, uma dupla perguntou a respeito do significado do “**índice parcial*” que aparece abaixo da tabela, o que foi explicado pelas outras duplas, a nosso pedido.

Notamos ainda que os alunos, em geral, tiveram certa dificuldade em colocar a escala nos eixos horizontal e vertical, provavelmente devido ao quadriculado, fazendo com que se demorassem mais do que nas outras atividades para resolvê-la.

Os gráficos que apareceram foram o gráfico de pontos e o de curvas, construídas pela ligação dos pontos.

Ao final desta atividade, fizemos alguns comentários como foi previsto na análise a priori, dizendo que é possível, a partir de uma tabela, construir um gráfico correspondente aos seus dados.

As atividades 4 e 5 foram resolvidas sem problemas aparentes, e conforme o previsto na análise a priori. Porém, na atividade 5, apenas uma dupla não fez um gráfico sem interrupções, contrariando nossas expectativas.

Devido à demora dos alunos na resolução das atividades desta sessão, não esboçamos um gráfico sem interrupções com os dados da atividade 5 e outros que deveriam ser sugeridos pelos alunos, como havíamos planejado. Só comentamos que poderiam construí-lo, e como fazê-lo.

Após as atividades desta sessão, fizemos a institucionalização local do conceito de domínio da seguinte forma:

- *“As situações vistas anteriormente mostram, todas, um relacionamento entre dois conjuntos, ou seja, uma **relação entre dois conjuntos**. Por exemplo:*
 - *na 1ª atividade, temos um relacionamento entre o conjunto dos números de meninas-mãe e o conjunto dos anos. O conjunto dos anos, representado pelo eixo horizontal, no gráfico, e pela 1ª linha (ou pela 1ª coluna), na tabela, é chamado de **domínio**;*
 - *na última atividade, por exemplo, temos dois conjuntos relacionados: o conjunto dos dias e o conjunto das temperaturas (em °C). O conjunto dos dias é chamado de **domínio**, e estava representado pela 1ª linha da tabela”.*

Segunda Sessão

À segunda sessão, realizada no dia 11/06/96, das 14h e 25min às 16h e 15min, compareceram 10 alunos, porém, mais 6 fizeram as atividades fora do horário previsto.

Nesta sessão, aplicamos as atividades dos grupos 2 e 3.

Vejamos como transcorreram as duas atividades do grupo 2 (Anexo 3, p. XV a XVII).

Atividade 1:

As questões 1 e 2 foram respondidas, aparentemente, sem muita dificuldade, a partir de conhecimentos que já possuíam, principalmente da Física.

A questão 3 também não causou problema na resolução.

Na questão 4, a maior parte das duplas apresentou dificuldade na interpretação do enunciado. Os alunos não entenderam, de imediato, o que queria dizer “relação (lei)”. Achavam que a relação fosse o método adotado por eles para fazer os cálculos das questões 1 e 2. A dificuldade nesta questão havia sido prevista na análise a priori.

As questões 5, 6 e 7 foram resolvidas sem questionamentos por parte dos alunos.

Na questão 8, análoga à questão 4, alguns alunos ainda tiveram dificuldade na compreensão do enunciado.

Na questão 9, alertamos que havia um erro de digitação no enunciado: ao invés de comparar as leis das questões 4 e 9, deveriam comparar as leis das questões 4 e 8.

Após a atividade 1, fizemos a institucionalização dos conceitos de dependência entre variáveis, variável dependente e independente, através da discussão das questões, juntamente com os alunos. Salientamos:

- *“Pelas questões 1, 2 e 3, o **tempo** é uma grandeza variável, pois o tempo de viagem pode variar, por exemplo, pode ser de 3 ou 6 horas. A **velocidade** também é uma grandeza variável, já que assume diversos valores, como por exemplo 200 e 100 km/h. Portanto, o tempo e a velocidade são variáveis, mas seus valores não são independentes entre si.*

O tempo (de viagem) depende da velocidade (do automóvel), ou seja, para cada velocidade existe um tempo de viagem. Neste caso, o **tempo é a variável dependente**, pois depende da velocidade, e a **velocidade é a variável independente**”.

- “Pelas questões 5, 6 e 7, a **velocidade** é uma **grandeza variável**, pois a velocidade do automóvel pode variar, podendo ser de 150 e 120km/h, por exemplo. O **tempo** também é uma **grandeza variável**, pois pode variar, por exemplo, pode ser de 4 e 5 horas. Portanto, a velocidade e o tempo são variáveis, e seus valores não são independentes entre si. A velocidade do automóvel depende do tempo de viagem, ou seja, para cada tempo de viagem existe uma velocidade do automóvel. Neste caso, a **velocidade é a variável dependente**, pois depende do tempo, e o **tempo é a variável independente**”.
- “As representações algébricas obtidas nesta atividade são diferentes, se pensarmos que em uma delas o tempo é a variável dependente, e na outra, a velocidade. Porém, se fizermos alguma operação algébrica, verificamos que se trata da mesma lei: $t = s/v$ ou $v = s/t$, onde t indica o tempo, v a velocidade e s o espaço”.
- “Observamos também que podemos utilizar um registro de representação algébrica para questões que envolvem alguns dados numéricos”.

Atividade 2:

Nesta atividade, os alunos apresentaram dificuldade na representação gráfica (item a). Embora estivesse no enunciado que os preços deveriam ser colocados no eixo horizontal e os postos no vertical, 2 duplas fizeram o

contrário, sendo que os alunos de uma delas, que estavam sendo observados, percebendo que era “impossível” unir os pontos, resolveram apagar o que haviam feito, para então fazerem o gráfico corretamente. E ainda apareceram, nesta atividade, 2 gráficos em que os alunos uniram os pontos, traçando uma curva, o que não deveria ser feito nesta situação.

Quanto à questão b, houve dúvida de interpretação de uma dupla, pois para alguns preços havia mais de um posto correspondente, e para um preço, apenas um posto. Por isso, a dupla não sabia como responder à primeira parte da questão: *“Na relação representada acima, a cada preço de gasolina corresponde um ou mais postos?”* Então, esclarecemos que, se para um preço houvesse mais de um posto correspondente, a resposta seria afirmativa, senão, a resposta seria negativa. Depois disso, os alunos da dupla sentiram-se esclarecidos, respondendo a referida questão.

Após a atividade 2, fizemos uma discussão a respeito das soluções apresentadas pelos alunos. Em seguida, falamos sobre as grandezas discretas e contínuas, aproveitando os gráficos construídos pelos alunos, inclusive comentando sobre as atividades da primeira sessão. E ainda, salientamos que *“O tipo de situação apresentada nesta atividade difere das atividades do grupo 1 pelo fato de existir mais de um correspondente para um mesmo elemento do domínio”*.

Foi então que institucionalizamos o conceito de relação entre duas grandezas variáveis, ou entre dois conjuntos, onde o primeiro é o domínio e o segundo, o contradomínio.

Iniciamos a atividade do grupo 3 (Anexo 3, p. XVIII) com uma leitura e comentário do que deveriam fazer. Os alunos levaram bastante tempo para resolver esta atividade, e comentaram, durante a sua resolução, que estava difícil. Alguns alunos tiveram dificuldade em identificar, nas tabelas, quais eram os valores da variável independente e dependente.

A dupla observada começou a atividade associando as expressões algébricas às tabelas, observando se uma tal fórmula era compatível com determinada tabela. Depois, associaram as tabelas aos gráficos apresentados, procurando, nos gráficos, os pontos obtidos pela tabela. Esta estratégia de resolução não havia sido prevista na análise a priori, e a maior parte dos alunos a utilizaram, como pôde ser constatado na discussão final.

Quanto às justificativas das associações, os alunos apresentaram dificuldades para fazê-las.

Após esta atividade, destacamos, junto aos alunos, que *“uma relação entre duas grandezas variáveis, ou seja, entre dois conjuntos, pode ser representada, quase sempre, ou por uma expressão algébrica, ou por um gráfico e por uma tabela”*, apresentando uma situação, de acordo com a análise a priori, dizendo que *“este gráfico representa uma relação, cuja expressão algébrica não conseguiremos escrever”*.

Terceira Sessão

Realizamos as atividades do grupo 4 (Anexo 3, p. XIX a XXIII) no dia 17/06/96, das 14h e 20min às 16h e 10min, com a presença de 13 alunos. Os 3 alunos que faltaram fizeram as referidas atividades no dia seguinte, fora do horário previsto.

Na atividade 1 deste grupo, alguns alunos não se lembravam do que era domínio e contradomínio de uma relação. Comentamos que eles tinham, em cada tabela, a representação de uma relação entre dois conjuntos, havendo uma correspondência entre os elementos da primeira linha (domínio) e os da segunda linha (contradomínio).

Após a resolução da atividade 1, discutimos as respostas dos alunos e ressaltamos que *“existem relações representadas por tabelas, nas quais a cada elemento do domínio corresponde um único elemento, e em outras situações isto não ocorre”*.

Na atividade 2, os alunos não sabiam, inicialmente, como explicar a resposta, o que foi dito por eles próprios. Pedimos para que eles arrumassem o gráfico do item e: colocar “bola aberta” na origem, ao invés de “bola fechada”, como estava no gráfico. Esta alteração modificava totalmente a resposta da questão, pois, no caso de “bola fechada”, o gráfico não representava uma função, e no caso de “bola aberta”, sim.

Após a atividade 2, fizemos uma discussão com os alunos e salientamos que *“existem relações representadas por gráficos, nas quais a cada elemento do domínio corresponde um único elemento, e em outras situações isto não ocorre”*.

Na atividade 3, alguns alunos apresentaram dificuldade no início, mas depois de discutirem com os parceiros, resolveram as questões sem problemas aparentes.

Após a atividade 3, fizemos, com a “ajuda” (verbal) dos alunos, tabelas e esboço dos gráficos dos itens em que apareceram erros de algumas duplas, para que compreendessem as respostas corretas. Depois, dissemos que *“existem relações representadas por expressões algébricas, nas quais a cada elemento do domínio corresponde um único elemento, e em outras situações isto não ocorre”*.

Após as atividades do grupo 4, fizemos a institucionalização do conceito de função, como prevemos na análise a priori. A única modificação feita foi que utilizamos retro-projetor, entregando uma cópia das transparências utilizadas aos alunos. Além das definições que foram apresentadas, que são os conhecimentos que os alunos devem reter (como previsto na análise a priori), as transparências continham os seguintes comentários:

*“De acordo com a definição de função, os **gráficos** das atividades do grupo 1 (1^o dia de atividades) são **representações de funções**, cujos domínios são os conjuntos representados no eixo horizontal, e os contradomínios no eixo vertical. Assim, ao apresentarmos, por exemplo, o gráfico de depósitos de poupança, podemos dizer que se trata do **gráfico do depósito de poupança em função do ano**.*

*As **tabelas** das atividades deste mesmo grupo são **representações de funções**, cujos domínios são os conjuntos representados na 1^a linha ou 1^a coluna, e os contradomínios na 2^a linha ou 2^a coluna. Assim, ao apresentarmos, por exemplo, a tabela da variação do IGP-M (Índice Geral de Preços de Mercado), em %, podemos dizer que se trata da **tabela do IGP-M (em %) em função do mês**.*

*As **fórmulas** da atividade 1 do grupo 2 (2^o dia de atividades), são **representações de funções**. Por exemplo, em $v = s/t$, onde o espaço estava fixo e igual a 600 km, ou seja, $v = 600/t$*

Neste caso:

- **a velocidade é função do tempo**

- a **velocidade** é a **variável dependente**
- o **tempo** é a **variável independente**

A = conjunto dos tempos (**domínio da função**)

B = conjunto das velocidades (**contradomínio da função**)

De acordo com a definição de função, a atividade que apresentava a relação entre os postos e o preço da gasolina não é função. Nesta situação nós tínhamos mais de um posto correspondente para alguns preços de gasolina. Logo, **o posto não é função do preço da gasolina**.

Pelos exemplos de função que vimos nas atividades anteriores, podemos representar uma função através de:

- **gráfico (representação gráfica)**
- **fórmula (representação algébrica)**
- **tabela de valores (representação numérica)**”.

Quarta Sessão

Aplicamos as atividades do grupo 5 (Anexo 3, p. XXIV a XXVIII), referentes à avaliação da seqüência didática, no dia 18/07/96, das 10 às 12 horas, porém a maioria dos alunos terminou após cerca de 1 hora do início das mesmas. A esta sessão compareceram 16 alunos.

Feitos estes relatos, de como transcorreu a aplicação da seqüência didática, iremos analisar as atividades.

3-ANÁLISE DIDÁTICA DA SEQÜÊNCIA

Faremos aqui a análise a posteriori da seqüência didática baseada nos dados recolhidos ao longo da realização das atividades e nas observações feitas durante as mesmas.

ATIVIDADES DO GRUPO 1

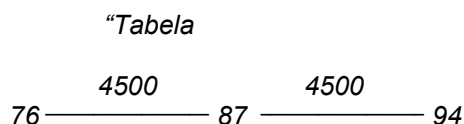
Os objetivos das atividades deste grupo eram provocar as mudanças de registro de representação de dados; tentar fazer os alunos compreenderem as componentes variação e dependência, ligadas ao conceito de função, e a importância de se definir o domínio de uma relação, bem como interpretar as representações dos dados e reconhecerem que essas representações servem para chamar a atenção das pessoas pelo “impacto visual” que provocam.

Atividade 1

Nesta atividade (Anexo 3, p. VIII), os alunos deveriam fazer uma tabela e um gráfico no plano cartesiano, utilizando um quadriculado, para representar os dados que apresentamos a respeito do crescimento do número de meninas-mães, nos últimos anos, no Brasil.

Entre as representações dos dados em tabelas, os alunos apresentaram uma horizontal, cinco verticais, e duas duplas não apresentaram nenhuma delas. Isto está de acordo com o nosso estudo da transposição didática pois, no ensino do conceito de função, em geral, aparecem tabelas verticais.

Uma solução apresentada por uma dupla, que não consideramos como uma tabela, é a seguinte:



— *taxa de variação de cada ano.*”

Neste caso, parece que a dupla não compreende o significado de “taxa de variação”, pois a interpretou como o próprio aumento do número de meninas-mães. Porém, em um dos extremos da folha de resolução da atividade, encontramos a seguinte anotação, como se fosse um “rascunho” de uma tabela que, provavelmente, indica que os alunos têm a idéia de correspondência pontual:

| | |
|-----|--------|
| “76 | 2500 |
| 87 | 7000 |
| 94 | 11500” |

Também notamos a presença desta correspondência pontual em outra dupla de alunos. Após a apresentação de uma tabela, encontramos alguns comentários a respeito da mesma: *“no ano de 1976 havia 2500 meninas-mães; em 1987, esse número quase triplicou, chegando a 7000 mães; em 1994, o número subiu muito, atingindo 11500”*. Parece que os alunos também compreenderam o significado dos dados da situação, devido à interpretação que fizeram dos mesmos.

Encontramos ainda entre as soluções, uma bastante curiosa:

| | | |
|------|------|-------|
| 1976 | —— | 2500 |
| 1976 | 1987 | 7000 |
| 1976 | 1994 | 11500 |

Além de não especificar quais são as variáveis, não fica claro a dependência entre as mesmas, pois na segunda e terceira linhas, ao invés de aparecer o número de meninas-mães correspondente ao ano, encontramos este número correspondendo a dois valores para o ano. Acreditamos que, ao fazerem tal tabela, os alunos pensaram no período em que houve o aumento, e não na correspondência pontual, ou, talvez esta resposta indique que eles não compreendem a noção de dependência e correspondência ponto a ponto. Embora não tivéssemos previsto este tipo de solução, isto parece coerente com o ensino atual, no que se refere à função, pois não é dado ênfase aos aspectos de correspondência e dependência pontual.

O fato de alguns alunos não terem apresentado nenhuma tabela, e de outros apresentarem dúvidas em relação a quais dados deveriam nela colocar é, provavelmente, consequência do ensino, pois os professores, em geral, não fazem a passagem do registro da linguagem escrita para a tabela de valores, no estudo das funções. Quanto aos tipos de tabelas, de acordo com o previsto, os alunos apresentaram as horizontais, e principalmente as verticais. Isto também deve ser influência do ensino, pois, geralmente, são apresentadas tabelas verticais e, raramente, horizontais.

Quanto às representações gráficas, as duplas apresentaram diferentes soluções, conforme havíamos previsto na análise a priori: gráfico de pontos, de

curva e de barras. Nenhuma dupla apresentou como solução um pictograma. Parece que isto é um reflexo do contrato didático estabelecido no ensino tradicional, pelo qual os alunos só devem resolver os problemas e/ou exercícios utilizando os conhecimentos matemáticos que foram aprendidos em sala de aula.

Com relação à escala, duas duplas apresentaram erro em um dos eixos coordenados: uma delas na representação de uma abcissa, e a outra na de uma ordenada de um ponto. Estes problemas foram previstos, pois os números eram “grandes”.

Três duplas representaram o tempo em função do número de meninas-mães, ou seja, colocaram a variável independente no eixo vertical e a variável dependente no eixo horizontal, o que não havíamos previsto.

Apenas duas duplas especificaram quais eram as variáveis representadas no gráfico: o ano e o número de meninas-mães. Isto pode ser um reflexo do próprio ensino, pois, geralmente, as variáveis são apresentadas como x e y .

Uma das duplas mostrou-se bastante empenhada para calcular outros valores, além dos apresentados no problema, o que fez com que levassem mais tempo em relação às outras duplas para fazer esta atividade. Para isso, utilizaram uma calculadora; apresentaram um gráfico com treze pontos, dos quais havíamos fornecido apenas um (o primeiro). A solução indica que estes alunos dividiram a variação do número de meninas-mães (9000) pelo número de unidades do eixo horizontal do quadriculado (25), obtendo 360; então, fizeram a escala de duas em duas unidades. Porém, ao invés de anotarem cada valor, acrescentando 720 ao anterior, utilizaram 820, por descuido ou por erro de cálculo.

Esta atividade permitiu que os alunos fizessem mudanças de registro de representação da linguagem escrita para a tabela de valores (no quadro numérico) e para o gráfico, que era nossa proposta.

Atividade 2

Nesta atividade (Anexo 3, p. IX), apresentamos um gráfico a respeito da evolução dos depósitos de poupança na NOSSA CAIXA-NOSSO BANCO, nos últimos anos, para que os alunos respondessem quatro questões: **a**, **b**, **c** e **d**.

Quadro de respostas

| Questão | Alunos que acertaram | Alunos que erraram |
|----------|----------------------|--------------------|
| a | 13 | 2 |
| b | 9 | 6 |
| c | 15 | — |
| d | 13 | 2 |

A seguir, vamos analisar as respostas a cada uma das questões desta atividade.

a) Neste item, os alunos deveriam responder qual é a variação de tempo descrita pelo gráfico. A maior parte deles não apresentou dificuldades para o entendimento da variação do tempo, embora tivéssemos esperando a ocorrência deste fato. Alguns responderam que a variação do tempo descrita pelo gráfico é de 5 anos, outros, que é de aproximadamente 5 anos e 6 meses, pois no gráfico aparece indicado “Junho de 1995”. Eles consideraram, portanto, a variação de 6 meses no último ano indicado. Provavelmente, esses últimos alunos tenham respondido mais adequadamente à questão em análise, o que não havíamos previsto, pois no gráfico não aparece especificado se os depósitos de poupança são relativos ao ano todo, se os dados foram coletados sempre num determinado mês e em que mês. Outros alunos responderam que essa variação é de um ano, explicando, durante as discussões ao final desta atividade, que a variação é de “um em um ano”, ou seja, consideraram os intervalos de tempo descritos pelo gráfico (a unidade utilizada no gráfico, pelo informe da revista, é de um ano). Por isso, consideramos as respostas deles como corretas. Talvez pudéssemos obter apenas “5 anos” como resposta, se a pergunta tivesse sido formulada da seguinte forma: “Qual é a variação total de tempo descrita pelo gráfico, em anos?” Portanto, parece que os alunos foram influenciados pela variável redacional, ou seja, pela maneira como foi redigida a questão.

A resposta que consideramos incorreta é a que diz ser a variação de tempo de 6 anos, pois o aluno que respondeu desta forma disse, durante as discussões finais, que contou o número de pontos que estavam representados no gráfico. Portanto, apenas este aluno parece que não tinha a noção de variação, que neste caso é $\Delta t = t_{\text{final}} - t_{\text{inicial}} = 1995 - 1990 = 5 \text{ anos}$.

b) Neste item, perguntamos qual foi a variação dos depósitos de poupança nos últimos cinco anos, em bilhões de dólares. A maior parte dos alunos respondeu corretamente que a variação foi de, aproximadamente, 2 bilhões de dólares. Incluímos nessa resposta, aqueles que responderam 2,1 e 1,9 bilhões de dólares, pois as leituras do tipo de gráfico apresentado nesta atividade quase sempre são feitas com aproximações.

Quanto aos alunos que não acertaram esta questão, uma dupla respondeu que a variação foi de aproximadamente 2,8 bilhões de dólares, agindo como se o eixo dos depósitos se iniciasse no zero quando, na verdade, começa em 0,5. Outra dupla respondeu que essa variação foi de 2,5 bilhões de dólares, pois fizeram a diferença entre o maior e o menor valor apresentado no eixo vertical. Estes dois erros foram previstos, e indicam dificuldades na compreensão do gráfico.

c) Neste item, perguntamos o que ocorreu com os depósitos de poupança na NOSSA CAIXA-NOSSO BANCO no período descrito pelo gráfico. Todos os alunos acertaram, respondendo que houve um aumento ou crescimento nos depósitos. Isto está de acordo com o esperado pois, para esta questão, não tínhamos previsto nenhum tipo de dificuldade.

d) Nesta questão, perguntamos em que período houve maior aumento nos depósitos de poupança e de quanto foi esse aumento. A maior parte dos alunos respondeu corretamente que o período em que houve maior aumento foi entre 1993 e 1994, e que ele foi de, aproximadamente, um bilhão de dólares. Incluímos nesta resposta, aqueles que responderam 0,9 e 1,1 bilhões de dólares.

Uma dupla respondeu que o período em que houve maior aumento nos depósitos de poupança foi 1994, e esse aumento foi de 1600 para 2500, em

torno de 850 milhões de dólares. Provavelmente, esses alunos interpretaram que o aumento foi durante o ano de 1994, e não entre 1993 e 1994. Pode ser que eles não estejam errados pois, se os valores forem referentes ao mês de dezembro, então, o aumento ocorrido entre 1993 e 1994, corresponde ao aumento ocorrido em 1994. Uma aluna respondeu que “*Em todos os períodos o aumento foi de 0,5. Iguais em todos os anos*”. Este erro deve-se ao fato de ela estar se referindo à escala do eixo vertical, indicando variações de 0,5 em 0,5 unidade.

A atividade 2 propiciou uma discussão a respeito da variação nos eixos e da dependência pontual, que parece ter sido esclarecedora para aqueles alunos que cometeram os erros já descritos e analisados, que indicavam, provavelmente, uma incompreensão por parte deles. Portanto, parece que atingimos nossos objetivos nesta atividade: a compreensão do sentido da palavra variação, a associação do crescimento da curva ao crescimento dos depósitos de poupança e a identificação de pontos no gráfico, associando-os às suas abcissas e ordenadas.

Atividade 3

Nesta atividade (Anexo 3, p. X), apresentamos uma tabela da variação do IGP-M (Índice Geral de Preços de Mercado), em 1995, em %.

Quadro de respostas

| Questão | Alunos que acertaram | Alunos que erraram |
|----------------|-----------------------------|---------------------------|
| a | 5 | 11 |
| b | 13 | 3 |
| c | 15 | 1 |

Analisando os dados obtidos:

a) Neste item, os alunos deveriam representar os dados da tabela através de pontos, no plano cartesiano, utilizando um quadriculado que lhes foi fornecido. A maior parte errou esta questão, porque construiu um gráfico sem interrupções, ou seja, uniram os pontos representados no plano cartesiano.

Havíamos previsto tal representação gráfica, porém, esperávamos que apenas alguns alunos o fizessem dessa forma, devido ao enunciado da atividade (“Represente os dados da tabela através de pontos,...”). Isto parece ser devido ao ensino atual, pois, em geral, os gráficos apresentados em sala de aula são curvas (gráficos sem interrupções). Por isso, para muitos alunos, basta que haja alguns pontos, num gráfico, para uni-los. Além disso, para alguns, apenas os pontos não representam um gráfico. Encontramos na nossa prática docente, com frequência, esta noção distorcida de gráfico de uma função entre os alunos universitários.

Quanto às escalas, 5 alunos cometeram algum erro, por exemplo, na representação do -0,5, que foi localizado bem próximo do correto. Apenas uma dupla fez a escala de duas em duas unidades do quadriculado, representando cada valor do IGP-M (em %) nessa escala, sem a preocupação de verificar que a variação desta última não era na mesma proporção. Por exemplo, de 0,5 em 0,5, ou de 0,3 em 0,3 unidades. Já havíamos previsto dificuldades na representação do número negativo -0,5 e de números decimais no eixo do IGP-M.

b) Nesta questão, perguntamos se podemos unir todos os pontos do gráfico do item anterior através de uma curva e o por quê. Embora alguns tivessem respondido corretamente que não podemos unir os pontos do gráfico do item **a**, suas explicações estavam erradas, como por exemplo:

Porque...

...“há muitas variações, onde não seria possível a representação de uma curva”;

...“as variações são muito bruscas”;

...“os dados utilizados não foram os completos. O gráfico só poderá ser “ligado” se não for levado em conta o valor do IGP-M do mês 9”;

...“os pontos estão desalinhados”.

Outros alunos, responderam que sim, que podemos unir os pontos do gráfico do item **a**, obtendo uma curva, porque:

- “representaríamos melhor a variação dos preços, em média, durante todo o mês”;

- “estatisticamente sim, mas não uma curva, e sim, retas”;

- “temos todos os dados necessários”.

Parece que os alunos não aceitam que uma reta seja uma curva. E aparece, novamente, a idéia de que bastam os dados numéricos para unir os pontos, não importando se a variável é discreta ou contínua.

Estas explicações permitiram que fizéssemos uma discussão a respeito da variável representada pelo gráfico. Por ser discreta, e não por não sabermos o que ocorreu com o IGP-M entre um mês e outro, não podemos, matematicamente, unir os pontos do gráfico, embora os meios de comunicação o façam, com frequência, para análise de tendências. As conseqüências didáticas parecem evidentes: basta a representação de alguns pontos para que os alunos esbocem um gráfico sem interrupções, ou seja, para que unam estes pontos.

c) Nesta questão, perguntamos quais são as duas variáveis representadas na tabela e no gráfico. Um único aluno errou, parecendo que não tem noção alguma do que é uma variável.

A atividade 3, portanto, permitiu a mudança de registro da tabela para o gráfico e discussões no sentido de unir ou não os pontos do gráfico, conforme nossos objetivos. Além disso, quase todos os alunos responderam, com sucesso, quais eram as variáveis em jogo. Parece que estes resultados indicam que a atividade foi bem compreendida pelos alunos.

Atividade 4

Nesta atividade (Anexo 3, p. XII), apresentamos um gráfico, representando a expansão demográfica mundial a partir de 1770, com previsões até o ano 2070, para que os alunos interpretassem os dados através de algumas questões.

Vamos analisar os resultados desta atividade, na qual não obtivemos respostas erradas:

a) Neste item, perguntamos o que ocorreu com a população do mundo entre 1770 e 1970. Todos os alunos responderam que houve um aumento. Alguns ainda completaram a resposta, escrevendo que esse aumento não foi muito significativo, em comparação com o seguinte, descrito pelo gráfico.

b) Nesta questão, perguntamos qual é a previsão do número de habitantes do mundo para o ano 2000 e para 2070. A maior parte dos alunos respondeu que a previsão do número de habitantes do mundo para o ano 2000 é de, aproximadamente, 7 bilhões, e no ano 2070, de 25 bilhões de habitantes. Alguns deram a previsão, para o ano 2000, de 6; 6,3 e 7 a 7,5 bilhões de habitantes. Todas estas respostas foram consideradas corretas, devido às aproximações das leituras do gráfico apresentado nesta atividade.

c) Neste item, perguntamos de qual variável depende a variação do número de habitantes, de acordo com o gráfico. Os alunos responderam que esta variação depende dos anos, ou seja, do tempo. Parece que, desta forma, eles começam a perceber a dependência entre as variáveis.

Os resultados da atividade 4 indicam que obtivemos sucesso, o que pode ser consequência das atividades anteriores. Ela permitiu que os alunos começassem a relacionar *variação* com *dependência*, além de fazer com que relacionassem o aumento da população com o crescimento da curva, como era nosso objetivo. Ela também permitiu que os alunos interpretassem o gráfico apresentado, como pudemos constatar através das discussões realizadas e das respostas dadas por eles.

Atividade 5

Nesta atividade (Anexo 3, p. XIII), constando de quatro itens, apresentamos uma tabela descrevendo a variação da temperatura axilar de um paciente hospitalizado no período de nove dias, tomadas às quinze horas de cada dia. Nosso objetivo era fazer com que os alunos percebessem a importância do domínio da função, num gráfico.

Quadro de respostas

| Questão | Alunos que acertaram | Alunos que erraram |
|---------|----------------------|--------------------|
| a | 4 | 12 |
| b | 12 | 4 |

| | | |
|----------|----|---|
| c | 10 | 6 |
| d | 13 | 3 |

Analisando cada uma das questões:

a) Neste item, os alunos deveriam fazer um gráfico, no plano cartesiano, utilizando um quadriculado que lhes foi apresentado, para representar os dados da tabela. A maioria dos alunos errou, por terem unido os pontos, fazendo um traçado contínuo. Novamente, aparece a falsa idéia de que apenas uma curva representa um gráfico. Este fato parece ser conseqüência de um obstáculo didático, provocado pela forma como é feita a transposição didática do estudo das funções, e que parece ser difícil superar. Além disso, alguns deles tiveram dificuldade na escala, justamente com os números decimais, o que fez com que aparecessem erros na representação de alguns pontos do gráfico. Erros deste tipo já haviam sido previstos.

b) Nesta questão, que perguntávamos se as leituras das temperaturas foram feitas de maneira contínua durante os nove dias, tivemos um grande número de acertos, embora a maioria dos alunos tivesse errado a questão anterior, que tinha relação com esta. Isto vem confirmar nossas expectativas. O fato de grande parte dos alunos terem acertado esta questão é devido, provavelmente, à relação feita desta atividade àquelas trabalhadas e discutidas anteriormente. A seguinte resposta exemplifica qual foi a interpretação dada por alguns alunos: *“Não, foram feitas uma vez por dia, às 15 h, e não sabemos se a temperatura do paciente se alterou durante o resto do dia”*.

c) Neste item, perguntamos se podemos supor, sem cometer nenhum erro, que o crescimento da temperatura do primeiro para o segundo dia foi “contínuo” e por quê. Os alunos que acertaram, justificaram as respostas salientando que, no decorrer do dia, pode ter havido uma oscilação (variação) da temperatura axilar do paciente. Já os alunos que erraram, explicaram que foi contínuo porque as leituras da temperatura foram feitas no mesmo horário, porque foi um dia após o outro, ou ainda, porque aumentou 1°C. Parece que os

alunos que erraram não compreenderam a questão, e isto pode ser devido à forma como ela foi elaborada.

d) Nesta questão, perguntamos o que o aluno acha que seria necessário para se ter uma idéia da variação da temperatura durante os nove dias, baseado nas respostas anteriores, e por quê. Os que acertaram, responderam que, para se ter uma idéia real da variação da temperatura durante os 9 dias, as leituras deveriam ocorrer constantemente. Alguns não explicaram desta forma, porém, deixaram claro que deveriam medir a temperatura mais vezes entre um dia e outro, como de hora em hora, por exemplo.

Provavelmente, os alunos que erraram esta questão não a compreenderam. Um estudante limitou-se a descrever como foi a variação da temperatura durante os 9 dias, enquanto que uma dupla respondeu que seria necessário tirar a média do primeiro com o nono dia, porque assim teríamos a diferença de temperatura que o corpo sofreu.

As discussões a respeito da atividade 5 parece que permitiram que os alunos percebessem a importância do domínio da função num gráfico, uma vez que se modificarmos o domínio, o gráfico se altera. Além disso, ela propiciou a institucionalização local do conceito de domínio de uma função, utilizando o seu gráfico e os das atividades anteriores, conforme nossos objetivos.

ATIVIDADES DO GRUPO 2

As duas atividades deste grupo foram propostas com o objetivo de trabalhar a representação algébrica de uma função, os conceitos de variável dependente e independente, bem como apresentar um exemplo de uma situação do dia-a-dia que não representa função.

Atividade 1

Nesta atividade (Anexo 3, p. XV), apresentamos uma situação na qual um profissional viaja, periodicamente, de São Paulo a uma cidade do interior do Rio de Janeiro, percorrendo uma distância de 600 km. A seguir, havíamos

proposto nove questões, com o intuito de fazer as alunos compreenderem a dependência entre variáveis. Com exceção das questões **3** e **4**, todos responderam corretamente as perguntas. Vejamos, em particular, as seguintes questões:

3) Aqui, gostaríamos de saber, de acordo com os cálculos das questões **1** e **2**, de qual informação (variável) o tempo depende. Lembramos que nas referidas questões, dado uma determinada velocidade (200 km/h e 100 km/h, respectivamente), os alunos deveriam encontrar o tempo que o profissional levaria para fazer a viagem. Apenas um aluno respondeu que o *“tempo depende da distância”*, e não da velocidade do automóvel, como esperávamos, pois a distância estava fixa. Por isso, consideramos sua resposta incorreta, embora o tempo também dependa da distância entre as duas cidades.

4) Neste item, perguntamos qual a relação (lei) existente entre as variáveis utilizadas para fazer os cálculos das questões **1** e **2**. Apenas uma dupla errou, respondendo que *“para se fazer os cálculos foi usado um princípio da Física, que consiste em $\Delta t/\Delta s$ ”*, embora tivessem acertado as questões anteriores. Já as respostas que consideramos corretas são:

“ $\Delta t = \Delta s/v_m$ ” , *“ $v_m = \Delta s/\Delta t$ ”* , *“ $v = d/t$ ” (onde d é a distância)* , *“ambas possuem informação dada em distância”*, e *“a relação da distância e da velocidade”*. Uma dupla explicou que *“o tempo variou em função da velocidade”*. Portanto, quase todos os alunos fizeram, conforme esperávamos, a representação algébrica da velocidade em função do tempo, mantendo o espaço constante.

7) Aqui, queríamos de saber, de acordo com os cálculos das questões **5** e **6**, se a velocidade está dependendo de alguma informação. Nas referidas questões, dado um determinado tempo de viagem (4 e 5 horas, respectivamente), os alunos deveriam encontrar a velocidade do automóvel para fazer o mesmo percurso. Todos os alunos responderam, corretamente, que a velocidade está dependendo do tempo de viagem.

8) Nesta questão, perguntamos qual a relação (lei) existente entre as variáveis utilizadas para fazer os cálculos das questões 5 e 6. As respostas dos alunos foram consideradas corretas. São elas:

“ $v = d/t$ ” , “ $v = \Delta s/\Delta t$ ” , “ $v_m = \Delta s/\Delta t$ ” , “(...) distância dividida pelo tempo”. Uma dupla explicou que “A velocidade variou em função do tempo”. Portanto, todos os alunos fizeram, conforme esperávamos, a representação algébrica do tempo em função da velocidade, mantendo o espaço fixo.

9) Neste item, os alunos deveriam comparar as leis obtidas nas questões 4 e 8 e tirar uma conclusão a respeito delas. Um aluno não a respondeu. Os outros tiraram conclusões como as que seguem:

- *“É a mesma lei, apenas muda as posições das variáveis da lei”;*
- *“Fixando a distância, podemos variar a velocidade e o tempo”;*
- *“As duas leis são iguais e podem ser usadas nos dois tipos de problemas”;*
- *“A velocidade depende das variáveis tempo e distância”;*
- *“É a mesma lei, com a diferença que na primeira foi isolado o termo Δt e, na segunda, o termo isolado foi a v_m ”.*

A atividade 1 deste grupo superou nossas expectativas pois, além da maior parte dos alunos acertarem as questões, suas respostas parecem ser uma indicação de que atingimos nossos objetivos. Parece que os alunos compreenderam a dependência entre variáveis (da velocidade e tempo, uma em relação à outra). Eles fizeram as representações algébricas solicitadas e chegaram a conclusões importantes, como as apresentadas como resposta à questão 9. Além disso, esta atividade propiciou que fizéssemos a institucionalização local da dependência entre variáveis, de variável dependente e independente.

Atividade 2

Nesta atividade (Anexo 3, p. XVII), apresentamos uma situação da nossa realidade, onde a relação entre os preços de gasolina e os postos, não representa uma função, para que os alunos verifiquem, através do gráfico, que a um mesmo valor do domínio existe um ou mais correspondentes.

Quadro de respostas

| Questão | Alunos que acertaram | Alunos que erraram |
|---------|----------------------|--------------------|
| a | 12 | 4 |
| b | 15 | 1 |

Analisando as respostas dos alunos:

a) Neste item, os alunos deveriam representar os dados através de um gráfico no plano cartesiano, colocando os preços no eixo horizontal e os postos no eixo vertical. Alguns uniram os pontos do gráfico, fazendo com que errassem esta questão. Talvez eles tenham cometido este erro por não terem participado das discussões finais com os outros estudantes, após as atividades do grupo 1 (lembramos que seis alunos fizeram as atividades do referido grupo fora do horário previsto). Dos que acertaram, apenas três não colocaram quais eram as variáveis representadas no plano cartesiano. Portanto, os alunos não apresentaram dificuldades em colocar escala no eixo dos preços de gasolina por tratar-se de números decimais e por não utilizarem papel quadriculado, como pensávamos que pudesse ocorrer.

b) Nesta questão, os alunos deveriam responder se na relação representada no item anterior, a cada preço de gasolina corresponde um ou mais postos, e ainda, indicar, para cada preço, o(s) posto(s) correspondente(s). O aluno que errou esta questão, respondeu que *“corresponde um preço só”*. Portanto, ele interpretou de outra forma a questão, pois, realmente, a cada posto de gasolina corresponde um só preço. Porém, a questão era se a cada preço de gasolina corresponde um ou mais postos. Sendo assim, sua resposta foi considerada errada por não responder o que foi pedido.

A atividade 2 permitiu que fizéssemos a institucionalização local do conceito de relação entre duas grandezas variáveis, ou entre dois conjuntos, conforme nossas expectativas. Além disso, alcançamos nossos objetivos com a maior parte dos alunos, pois eles fizeram registro de representação algébrica de uma função, trabalharam com os conceitos de variável dependente e

independente, bem como parece terem compreendido que nem todas as relações são funções.

ATIVIDADE DO GRUPO 3

Nesta atividade (Anexo 3, p. XVIII), apresentamos uma lista de leis (dadas por representações algébricas), gráficos e tabelas, para que os alunos façam associações, de modo que representem a mesma situação. Para isso, eles deveriam colocar, em parênteses correspondentes aos gráficos e tabelas o mesmo número que aparece na fórmula.

Dez (10) alunos fizeram todas as associações corretamente, e cinco (5), erraram algumas. Encontramos os seguintes erros:

- Um aluno trocou os gráficos dos itens (1) e (2), ou seja, à função $y = x^2$, associou o gráfico de $y = 1/x$, e vice-versa. A explicação dada por este aluno é que foi feita a comparação com sua tabela.

- Um aluno, no item (1), associou à função $y = x^2$, o gráfico de $y = 1/x$. A explicação dada é que, *“dados os pontos na tabela e uma dada função, transportando para o gráfico, encontramos o relativo gráfico para dada função”*.

- Ao item (3), dada a função $u = 2t$, dois alunos associaram o gráfico das

funções $y = 1/x$ e de $f(x) = \square$. As explicações são, respectivamente, *“por causa dos pontos da tabela”*, e *“porque $u \in \square_+$ ”*.

- Associação à função $z = u^3$, do item (4), o gráfico de $u = 2t$ (item (3)), justificando que *“ $z \in \square$ ”*.

- Associação à função $f(x) = \square$, do item (5), o gráfico de $w = -2v + 1$ (item (6)), de $z = u^3$ (item(4)) e de $u = 2t$ (item(3)), e a tabela da função $y = 1/x$ (item (2)). Os alunos fizeram as associações dos gráficos desta forma porque compararam com sua tabela e, no caso da última associação, porque *“ $x \in \square$ tanto é positivo quanto negativo”*. Quanto à associação da tabela, o aluno não explicou, e tudo indica que foi por

eliminação, pois, para todas as outras tabelas, encontramos cálculos realizados pelo aluno.

- Um aluno associou à função $w = -2v + 1$, do item (6), o gráfico de $y = 1/x$ (item (2)), e a explicação é que foi comparado com a tabela.

Nesta atividade, os alunos cometeram poucos erros. Saliemos que os que erraram, utilizaram como estratégia de resolução, a escolha da tabela, substituindo números nas leis dadas, seguida da escolha dos gráficos. Parece que os alunos que acertaram, além de terem sido influenciados pelas atividades do grupo 1 e 2, em geral, associaram os gráficos utilizando conhecimentos já adquiridos, a respeito do comportamento de algumas funções, como nas seguintes explicações: “o gráfico da função quadrática é uma parábola”, “ $u = 2t$ forma uma reta, passando pela origem, sem ser paralela aos eixos”, “ $w = -2w + 1$ não passa pela origem”. Esta última estratégia confirma parte da análise a priori desta atividade, e a primeira, utilizada pelos alunos que erraram, está de acordo com o jogo de quadros proposto pelos livros didáticos: do algébrico para o numérico, e deste para o geométrico. Além disso, os erros, como havíamos previsto, estão relacionados às funções

$y = 1/x$, $z = u^3$ e $f(x) =$, as quais são pouco exploradas pelos professores do Colegial.

Esta atividade permitiu que os alunos relacionassem, de maneira bastante satisfatória, três tipos de registro de representação de uma função: representação algébrica, gráfico e tabela, de acordo com nosso objetivo. Ela superou nossas expectativas, pois os alunos cometeram poucos erros, apesar de terem comentado que a atividade estava difícil.

ATIVIDADES DO GRUPO 4

Nas atividades deste grupo, partimos de relações expressas por tabelas (atividade 1), gráficos (atividade 2) e fórmulas (atividade 3), para que os alunos identifiquem as que representam função, verificando que existem relações em que a cada elemento do domínio corresponde um único elemento no

contradomínio, e que existem outras com mais de um correspondente do mesmo elemento.

Atividade 1

Nesta atividade (Anexo 3, p. XIX), os alunos deveriam responder, para cada tabela dada, se a cada elemento do domínio corresponde um único elemento no contradomínio, e ainda destacar, com um círculo, os que apresentam mais de um correspondente.

Quadro de respostas

| Questão | Alunos que acertaram | Alunos que erraram |
|----------------|-----------------------------|---------------------------|
| a | 9 | 7 |
| b | 8 | 8 |
| c | 9 | 7 |
| d | 14 | 2 |
| e | 10 | 6 |
| f | 10 | 6 |

Analisaremos os erros dos alunos, referentes a cada questão desta atividade.

Alguns, como havíamos previsto, responderam as questões, considerando o domínio na segunda linha e o contradomínio na primeira, o que provocou os erros das questões a, b e e, no seguinte sentido:

a) Responderam que a cada elemento do domínio existe mais de um correspondente, referindo-se aos pares $(-2, 40)$ e $(2, 40)$, ao invés de $(2, 40)$ e $(2, 3)$.

b) Responderam que a cada elemento do domínio existe um único correspondente.

e) Embora os alunos não tenham destacado, com um círculo todos os pares de números da tabela, justificando que existe mais de um correspondente a cada elemento do domínio, acreditamos que o raciocínio que os levou a tal resposta está de acordo com a análise a priori (consideraram 3 como elemento do domínio).

Os erros descritos acima estão de acordo com as dificuldades apresentadas por alguns alunos na resolução desta atividade; eles não lembravam o que era domínio e contradomínio de uma relação. Parece que isto também está relacionado com o fato de alguns terem feito as atividades dos grupos anteriores fora do horário previsto, o que fez com que eles não participassem das discussões a respeito das mesmas com os outros.

Quanto aos erros referentes aos itens c e f, os alunos responderam que existe mais de um correspondente, referindo-se ao par (0, 4), que aparece duas vezes na tabela do item c, e ao par (1, 5), que aparece duas vezes na tabela do item f, o que havíamos previsto.

Já no item d, a dupla que errou, assinalou os pares (1; -2,5) e (4; 1,7). Parece que os alunos interpretaram os números decimais como dois números, ou seja, para o número 1 corresponde os números -2 e 5, e ao número 4 corresponde 1 e 7, o que mostra insegurança no conceito e notação de par ordenado. Esta resposta não foi prevista na análise a priori, e parece indicar a presença de um obstáculo didático provocado pelos professores e livros, pois estes, em geral, utilizam apenas números inteiros nas tabelas referentes às funções.

Atividade 2

Nesta atividade (Anexo 3, p. XXI), os alunos deveriam identificar as relações que são funções, verificando a quantidade de elementos correspondentes a cada elemento do domínio, através da representação gráfica, e explicar suas respostas.

Quadro de respostas

| Questão | Alunos que | Alunos que |
|----------------|-------------------|-------------------|
|----------------|-------------------|-------------------|

| | acertaram | erraram |
|---|-----------|---------|
| a | 16 | — |
| b | 16 | — |
| c | 15 | 1 |
| d | 14 | 2 |
| e | 14 | 2 |
| f | 13 | 3 |
| g | 15 | 1 |
| h | 16 | — |
| i | 15 | 1 |

A maior parte dos alunos resolveu esta atividade com sucesso, fazendo uma correspondência pontual, associando pontos do domínio a pontos do gráfico, como havíamos previsto. Isto pode ser constatado através de anotações feitas nos gráficos e tabelas feitas, próximas deles, nas atividades de alguns estudantes. Esta estratégia parece ser uma consequência positiva das atividades do grupo 1, nas quais os alunos fizeram correspondências ponto a ponto.

Esperávamos que o item **e** fosse o mais difícil pois, além de tratar-se de uma função praticamente desconhecida por parte deles, ela contém pontos de descontinuidade, dando a impressão de que nesses pontos, existem dois correspondentes a cada elemento do domínio. No entanto, apenas dois alunos erraram este item, e não foi pelo fato de, durante a aplicação da atividade, termos pedido para que os alunos arrumassem o gráfico, colocando “bola aberta” na origem, ao invés de “bola fechada”, como estava no gráfico, pois estes alunos fizeram esta correção.

Encontramos, entre sete alunos, explicações que indicam que eles ainda confundem o elemento de um conjunto com o próprio conjunto. (Este problema foi levantado nos estudos preliminares de nossa pesquisa). Vejamos um exemplo: *“Porque para cada domínio existe apenas um contradomínio correspondente”*. Este problema parece não ter sido resolvido por nossa seqüência didática, pois o encontramos várias vezes, em respostas de vários alunos.

Atividade 3

Nesta atividade (Anexo 3, p. XXIII), os alunos deveriam verificar, entre as relações dadas por fórmulas, se a cada elemento do domínio correspondia um único elemento, explicando suas respostas.

Quadro de respostas

| Questão | Alunos que acertaram | Alunos que erraram |
|---------|----------------------|--------------------|
| a | 10 | 6 |
| b | 11 | 5 |
| c | 5 | 11 |
| d | 16 | — |

Analisando as respostas:

a) A maior parte dos alunos acertou este item, respondendo que a cada elemento existe um único correspondente. A justificativa que nos parece explicar melhor a resposta dada é a seguinte: *“Porque montando uma tabela com as fórmulas obtém-se esse resultado”*. (O estudante, neste caso, refere-se a uma tabela feita, cujo resultado citado refere-se aos valores obtidos na segunda coluna). Esta estratégia parece estar de acordo com a análise a priori, na qual esperávamos que os alunos tentassem visualizar as relações através do tabelamento de alguns valores, e deve-se, provavelmente, às atividades anteriores (grupos 1, 2 e 3).

Entre os que erraram esta questão, encontramos essas explicações:

“Porque vai existir y com mais de um x”.

“Porque x^2 para $x < 0$ fica positivo, o que iguala x, para $x > 0$ ”.

b) Os alunos que acertaram este item, respondendo que a cada elemento existe um único correspondente, deram explicações como as que seguem:

“Só há um único número para x”.

“Porque os x não possuem dois y ”.

Entre os que erraram, encontramos como explicação:

“Fica positivo, pois x é negativo e o número é negativo”.

Neste último caso, a dupla de alunos fez a seguinte anotação:

$y =$ $, e ainda, - - 2 = 2.$ Portanto, é

provável que os alunos tiveram o seguinte raciocínio, parcialmente incorreto: para $x = -2$ e $x = 2$, temos $y = 2$; e como 2 é o correspondente de dois valores de x , então, para cada elemento existe mais de um correspondente. A questão era se para cada elemento x do domínio correspondia um único elemento y do contradomínio. Talvez o aluno tenha considerado 2 como elemento do domínio e, -2 e 2, do contradomínio.

Parece que os alunos que erraram as questões a e b não compreenderam a representação algébrica da relação dada. Segundo nossas expectativas, os alunos poderiam apresentar dificuldades nos referidos itens, pois contém funções dadas por mais de uma sentença, que quase não são trabalhadas no ensino secundário e superior.

c) Menos da metade dos alunos acertou este item, respondendo que a cada elemento existe mais de um correspondente. Suas justificativas estão de acordo com o esperado, e seguem o exemplo abaixo:

“Para cada valor de x haverá dois correspondentes em $f(x)$, um positivo e um negativo”.

As explicações entre os alunos que erraram esta questão são:

“Tirando-se a raiz existe apenas um número correspondente”.

“Porque não existe um número com duas raízes”.

“Só há um único número para x ”.

Portanto, parece que os alunos erraram este item devido à presença da raiz quadrada e pelo sinal \pm , conforme prevíamos.

d) Todos os alunos acertaram este item, respondendo que a cada elemento do domínio existe um único correspondente no contradomínio. As explicações apresentadas, entre outras, são:

“Para cada elemento x do domínio haverá somente um único y no contradomínio”.

“Dado qualquer número para x obtém-se um único resultado”.

Esperávamos que este item fosse o mais fácil para os alunos, por apresentar uma função do primeiro grau, bastante trabalhada no ensino secundário, o que realmente ocorreu.

Através das atividades do grupo 4, os alunos, em geral, verificaram que existem relações expressas por tabelas, gráficos e fórmulas, em que a cada elemento do domínio corresponde um único elemento no contradomínio, e que existem outras com mais de um correspondente do mesmo elemento. Além disso, as discussões provocadas pelas atividades deste grupo propiciaram a *institucionalização do conceito de função*, que era nosso principal objetivo.

ATIVIDADES DO GRUPO 5

As atividades deste grupo (Anexo 3, p. XXIV a XXVIII) tinham por objetivo propiciar a consolidação do conceito de função. Queríamos também verificar se os alunos compreenderam o que é uma função e se os mesmos identificam, entre tabelas, gráficos e expressões algébricas, aqueles que representam função, justificando suas respostas.

1) Nesta questão, os alunos deveriam responder o que é uma função. Esperávamos que eles dessem uma definição com suas próprias palavras. Através de suas respostas, classificamos as suas concepções conforme as maneiras de pensar sobre função, apresentadas por Dubinsky e comentadas no capítulo III deste trabalho:

- As respostas seguintes parecem denotar uma **CONCEPÇÃO PRÉ-FUNÇÃO**, pelo fato de os alunos não apresentarem um conceito claro de função:

“É a parte da Matemática que constrói gráficos e tabelas conforme seus números de domínio e contradomínio”.

“Todo e qualquer ponto de x (domínio) representado em um gráfico com y sendo seu contradomínio”.

“É uma relação dos conjuntos, sendo um domínio e um contradomínio”.

“Função é a relação do domínio e o contradomínio, onde domínio é dependente e o contradomínio independente” — Neste caso, o aluno parece confundir variável dependente com independente, e ainda, estas noções se confundem com a de domínio e contradomínio. Talvez possa ser uma variável redacional, ou seja, o aluno não utilizou uma linguagem exata.

- As respostas que parecem denotar uma **CONCEPÇÃO AÇÃO**, pelo fato de envolver a habilidade de colocar números em uma expressão algébrica e fazer cálculos são as seguintes:

“É toda variável que depende de outra variável para se determinar o valor, como por exemplo, $y = 2x + x^2 + 3x$, y depende do valor de x ”.

“É uma relação entre um domínio e contradomínio; $f:A \rightarrow B$. Dada uma função $f(x)$, jogando-se valores para x (valor independente), encontra-se y (dependente)”.

- As concepções seguintes parecem indicar uma **CONCEPÇÃO PROCESSO**, pois sugerem uma transformação de objetos (números, conjuntos), começando com elementos de um mesmo conjunto, fazendo algo para eles (através de uma relação), e obtendo novos elementos como resultado do que foi feito:

“Pode ser representado através de tabelas, gráficos ou equações. A cada conjunto de elementos existirá um conjunto de elementos correspondentes, sendo estes elementos correspondentes a apenas um do outro conjunto”.

“Função é um conjunto de números A (chamado domínio), que é interligado com um outro grupo B (chamado contradomínio), com apenas uma imagem”.

“Função é uma relação entre dois conjuntos, onde o contradomínio é um único elemento do domínio. $f: A \rightarrow B$, onde A é o domínio e B é contradomínio”.

“É uma relação entre dois conjuntos, sendo que um elemento do primeiro conjunto tem um único correspondente no segundo conjunto”.

“É uma relação entre dois conjuntos, desde que o domínio só tenha um correspondente no contradomínio”.

Conforme nossas expectativas, os alunos deram uma definição de função com suas próprias palavras. Em geral, eles relacionaram este conceito com seus aspectos de variação, correspondência e dependência entre variáveis, o que parece ser uma consequência positiva de nossa seqüência didática pois, na atividade prévia não encontramos esses aspectos. Este fato parece indicar que houve uma evolução dos estudantes com relação às suas concepções, ou seja, na maneira de pensar sobre funções, apesar de muitas vezes a linguagem por eles utilizada ser inadequada.

2) Nesta atividade, composta de 5 itens, os alunos deveriam identificar, entre as tabelas, quais representam uma função. Esperávamos que eles, em geral, não apresentassem dificuldade, pois eles já haviam resolvido e discutido, no grupo 4, algo semelhante.

Quadro de respostas (atividade 2)

| Questão | Resposta correta | Resposta incorreta |
|---------|------------------|--------------------|
| a | 14 | — |
| b | 14 | — |
| c | 11 | 3 |
| d | 12 | 2 |
| e | 14 | — |

Analisando as respostas dos alunos a esta atividade, destacamos:

- Algumas justificativas parecem indicar que os alunos compreenderam o conceito de função que apresentamos na institucionalização que fizemos, ao final das atividades do grupo 4 da seqüência didática:

Representa função porque...

...“cada elemento do domínio só tem um correspondente no contradomínio”.

...“para cada número do domínio encontramos apenas um correspondente em seu contradomínio”.

...“para cada x possui um único y ”.

Não representa função porque...

...“para cada número do domínio tem 2 correspondentes”.

...“existe mais do que um número correspondente no contradomínio para cada número do domínio”.

- Outras justificativas parecem indicar que alguns alunos confundem o domínio com elementos do domínio, e o contradomínio com elementos do contradomínio, ou que estes utilizam uma linguagem inexata:

Representa função porque...

...“para cada domínio possui um contradomínio”.

...“ $f:A \rightarrow B$ cada domínio tem um respectivo contradomínio”.

Não representa função porque...

...“existem domínios com duas imagens”.

...“para um mesmo domínio aparecem dois contradomínios”.

- Os alunos, em geral, apresentam dificuldades na redação, ou seja, na forma de exprimir suas idéias. Isto poderá ser constatado mais adiante nas justificativas dadas pelos alunos.

A seguir, vamos citar outras respostas referentes a cada item desta atividade, procurando analisar algumas delas.

2a) Todos os alunos acertaram este item, respondendo que a tabela representa uma função.

Alguns alunos deram suas justificativas associando uma expressão algébrica à tabela dada:

$f(x) = x \cdot 10$, ou seja, $f(x) = 10x$.

“Existe a relação de duas variáveis, uma dependente e outra independente; função $x \cdot 10$ ”.

As seguintes justificativas, respectivamente, parecem indicar que os alunos têm a idéia das componentes correspondência (devido à presença da palavra “interligado”) e variação de uma função:

“Forma uma reta com x interligando os pontos representados em y saindo do ponto 0”.

“Porque os pontos de contradomínio variam com os de domínio”.

2b) Todos os alunos acertaram este item, respondendo que a tabela representa uma função.

Um aluno justificou sua resposta associando uma expressão algébrica à tabela dada, da seguinte forma: $f(x) = 2x$.

Vejamos mais algumas justificativas:

“É uma função, pois o conjunto A tem apenas um número para cada número do conjunto B ”.

“Porque os pontos do contradomínio variam com os do domínio”.

“A cada x depende um y ”.

O fato de todos acertarem as questões **2a** e **2b** está de acordo com a análise a priori. Em particular, considerávamos elas as mais fáceis, por não aparecerem números repetidos, e a cada elemento do domínio correspondia um único elemento no contradomínio.

2c) 78,57% dos estudantes acertou esta questão, respondendo que a tabela representa função. Vejamos a seguinte justificativa de um aluno que acertou:

$f(x) = x+6$ — Achamos interessante o fato de o aluno, com esta resposta, ter associado dois registros de representação da função dada: a tabela e a fórmula .

Os que erraram, respondendo que a tabela não representa função, deram as seguintes justificativas, entre outras:

“Porque tem dois domínios e contradomínios iguais” — Aqui, há um problema com a linguagem utilizada pelo aluno (variável redacional): parece que ele queria dizer: *“Não representa função porque há dois elementos do domínio com o mesmo elemento no contradomínio”*.

“Porque no domínio o número 1 se repete e se forma como constante”.

Os alunos que erraram esta questão, provavelmente chegaram à conclusão que a tabela não representa função devido ao par (1, 7) aparecer duas vezes nela, conforme havíamos previsto.

2d) 85,71% dos alunos acertou esta questão, respondendo que a tabela não representa função, pois perceberam que ao número 1 correspondem os números 1 e 6, conforme prevíamos. Vejamos algumas justificativas dos que acertaram:

Não representa função porque...

...“um mesmo x não pode ter dois contradomínios diferentes”.

...“o número 1 tem 2 correspondentes”.

“existe um elemento do domínio com mais de um correspondente no contradomínio”.

Vejamos uma justificativa de um aluno que errou esta questão:

“ $f(x) = x^2$ ” — Esta resposta parece indicar que o aluno observou apenas os primeiros dados da tabela, pois $(-2)^2 = 4$; $(-1)^2 = 1$; $(-0,5)^2 = 0,25$; $0^2 = 0$; $1^2 = 1$; $2^2 = 4$; porém, $1^2 \neq 6$. Portanto, é provável que se ele tivesse atentado para o último valor da tabela, não teria errado esta questão.

2e) Todos os alunos acertaram esta questão, respondendo que a tabela representa uma função. Algumas justificativas são:

“Existe uma relação de duas variáveis; existe uma função correspondente $x.0 + 2$ ”.

“ $f(x) = x.0 + 2$ ”.

“Para qualquer número que escolhermos em seu domínio o contradomínio será o mesmo (função constante)”.

“Cada x tem seu único y , mesmo este sendo uma constante”.

“É uma função constante, pois todos os números do domínio (A) estão em comum o número do contradomínio”.

Comparando esta última questão com uma análoga, apresentada na atividade prévia (questão **3b**, anexo 2, p. V), constatamos que os alunos avançaram significativamente, pois naquela questão, 54,54% apresentaram resposta errada, enquanto que na questão **2e** (do grupo 5), 100% responderam corretamente. Portanto, parece que passaram a compreender o comportamento de uma função constante, quando representada por uma tabela.

Considerando as respostas dadas na atividade 2, concluímos que grande parte dos alunos não apresentou dificuldades em reconhecer, entre tabelas, as que representam função, conforme os objetivos estabelecidos.

3) Nesta atividade, os alunos deveriam identificar, entre os gráficos, os que representam uma função, justificando suas respostas. Esperávamos que eles fizessem uma correspondência ponto a ponto, verificando, para diversos pontos do domínio (eixo horizontal), quantos pontos existem em correspondência no gráfico. Em particular, considerávamos os **itens b, c e d** os mais fáceis, pois eles poderiam associar os gráficos às funções de 1º grau, 2º grau e função seno ou coseno, que provavelmente já foram estudadas anteriormente à aplicação de nossa seqüência didática.

Quadro de respostas (atividade 3)

| Questão | Resposta correta | Resposta incorreta | Resposta em branco |
|----------|------------------|--------------------|--------------------|
| a | 11 | 3 | — |
| b | 14 | — | — |

| | | | |
|----------|----|---|---|
| c | 12 | 2 | — |
| d | 9 | 5 | — |
| e | 9 | 3 | 2 |
| f | 9 | 4 | 1 |
| g | 11 | 3 | — |
| h | 9 | 2 | 3 |

Alguns estudantes fizeram uma correspondência ponto a ponto, verificando, para um ponto do domínio, quantos pontos existem em correspondência no gráfico. Notamos que eles seguiram esta estratégia pelas anotações feitas nos gráficos, “ligando” pontos do domínio (ou seja, do eixo horizontal) a pontos do gráfico, e destes até pontos do contra-domínio (ou seja, do eixo vertical). Também podemos perceber este fato na seguinte resposta: “A cada ponto do eixo horizontal encontraremos dois pontos correspondentes no eixo y”.

Também encontramos, em todos os itens em que o gráfico apresentado corresponde a uma função, as justificativas que já foram citadas na análise da atividade 2, ou seja, aquelas que parecem indicar que alguns alunos compreendem o conceito de função que propusemos com a seqüência didática, bem como as que parecem indicar que outros fazem confusão entre conjunto e elemento do conjunto, ou que utilizam uma linguagem incorreta. Faremos a seguir, referências a cada item da atividade 3, citando as respostas que diferem daquelas que já vimos:

3a) 78,57% dos alunos acertou esta questão, respondendo que o gráfico não representa função. Os que erraram, deram as seguintes justificativas, que podem indicar dificuldades na compreensão do gráfico ou de função:

“É função que para cada elemento do domínio existe dois elementos menos no ponto de origem”.

“Pois o domínio correlaciona com o contradomínio”.

“A cada x diferente um y independente”.

3b) Todos os alunos acertaram esta questão, respondendo que o gráfico representa função. Isto confirma nossas expectativas. Eles apresentaram, entre

outras, as seguintes justificativas, relacionadas à função do 1º grau, como havíamos previsto:

“Porque forma uma reta que passa pelo eixo x e y, sem x repetir”.

“Existe apenas um ponto no contra-domínio para cada ponto no domínio. Representa uma equação do 1º grau por ser uma reta”.

3c) 85,71% dos alunos acertou esta questão, respondendo que o gráfico representa uma função. Isto está de acordo com a análise a priori. Além disso, entre os alunos que acertaram, encontramos estas justificativas, relacionadas à função do 2º grau, como havíamos previsto:

“Porque a função é de 2º grau, toda função de 2º grau é uma parábola, e porque cada número do domínio tem um único correspondente”.

“É uma equação do 2º grau por ser uma parábola e apenas havendo um valor correspondente cada valor do domínio”.

As justificativas abaixo parecem indicar, respectivamente, que o aluno não compreende o comportamento do gráfico apresentado, e que não compreende o significado da variável independente:

“Domínio sempre zero e contradomínio negativo”.

“Porque x não se repete e y é independente”.

3d) Esperávamos que este item fosse um dos mais fáceis. 64,29% dos alunos acertou esta questão, respondendo que o gráfico representa uma função, porém, ao contrário do que esperávamos, nenhum deles, aparentemente, associou o gráfico deste item ao da função seno ou coseno.

Entre os que erraram, encontramos a seguinte justificativa, que parece indicar que o aluno não compreende o que é uma variável dependente:

“O domínio não é dependente, ou seja, se repete do eixo x”.

3e) 64,29% dos alunos acertou esta questão, respondendo que o gráfico representa função. As justificativas são, entre outras, as que seguem:

“A primeira parte do gráfico possui uma parábola indicando uma função do 2º grau e a segunda parte uma reta, representando uma função do 1º grau”.

“Temos uma parábola (x^2) e uma reta (x), portanto, é uma função”.

Não conseguimos perceber se está claro para os autores destas respostas que nem sempre a justaposição de dois gráficos de duas funções resulta num gráfico que representa função. No caso da questão proposta, isto é verdade. Por outro lado, pode ser que os alunos não conseguiram se expressar corretamente, e que tinham em mente que o gráfico é a representação de uma função definida por mais de uma expressão algébrica. Qualquer uma destas hipóteses não haviam sido previstas.

3f) 64,29% dos alunos acertou esta questão, respondendo que o gráfico representa função. Entre os que erraram, citamos as seguintes explicações:

Não representa função porque...

...“não existe relação do domínio com o contra-domínio”.

...“a cada x que se repete um y independente”.

3g) 78,57% dos alunos acertou este item, respondendo que o gráfico não representa função. Vejamos uma das explicações dadas, que parece estar indicando que o aluno compreende o aspecto de correspondência de uma função:

“Vários pontos de x se interligam em mais de um y ”.

Entre os alunos que erraram, encontramos a seguinte justificativa:

“Uma circunferência é uma função, pois os números não se coincidem”.

3h) 64,29% dos alunos respondeu corretamente esta questão, ou seja, que o gráfico representa função. Citamos as seguintes justificativas:

Representa função porque...

...“possui três partes. A primeira é uma equação do 1º grau. A segunda é uma equação do 2º grau. A terceira é uma função constante”.

...“temos uma função constante positiva, uma parábola e uma reta crescente”.

Estas justificativas parecem indicar o mesmo problema comentado no item **3e** (p. 123).

Em geral, os alunos conseguiram identificar, entre gráficos, os que representam função, conforme o nosso objetivo, na atividade 3.

4) Nesta atividade, os alunos deveriam identificar, entre expressões algébricas, as que representam função, justificando suas respostas. Como estratégias de solução, esperávamos que os alunos fizessem uma tabela e/ou um esboço do gráfico correspondente à expressão algébrica dada, e então, utilizando raciocínio análogo ao utilizado nas atividades 2 e 3 deste grupo, encontrassem a resposta correta.

Quadro de respostas (atividade 4)

| Questão | Resposta correta | Resposta incorreta |
|----------|------------------|--------------------|
| a | 13 | 1 |
| b | 12 | 2 |
| c | 10 | 4 |
| d | 9 | 4* |
| e | 8 | 6 |
| f | 14 | — |

* Um aluno não respondeu esta questão.

Através das respostas apresentadas, verificamos que apenas alguns alunos utilizaram, como estratégias de resolução, a construção de tabela e/ou esboço do gráfico correspondente à lei dada, conforme análise a priori desta atividade. Também encontramos, em todos os itens desta atividade, justificativas que parecem confirmar que os alunos compreenderam o que é uma função. Além disso, encontramos novamente justificativas que denotam confusão por parte deles no que se refere ao domínio e elemento do domínio, bem como do contradomínio com elemento do contradomínio, ou que eles utilizam uma linguagem incorreta. (As justificativas que indicam tais fatos já foram citadas na análise da atividade 2 deste grupo). Salientamos, porém, que surgiram respostas mais variadas nesta atividade do que nas anteriores, como poderá ser constatado a seguir.

4a) Os alunos que acertaram esta questão (92,86%), respondendo que $y = 2x$ representa função, deram, entre outras, as justificativas:

“Função crescente, sendo uma reta” — Aqui, o aluno associa o registro algébrico ao registro gráfico da função apresentada, o que está de acordo com nossas previsões.

“Se colocada em um gráfico os pontos terão somente um correspondente”.

“Joga-se um número no lugar da variável x para encontrar y ” — Esta justificativa parece denotar uma concepção ação de função, pois aparece a idéia de colocar números na expressão numérica e fazer cálculos.

O único aluno que errou esta questão, respondeu:

Não representa função porque...

“se colocarmos o zero, teremos um mesmo contradomínio”.— A impressão que temos é que o aluno refere-se ao fato de para $x = 0$ temos $y = 0$, interpretando como se houvesse mais de um correspondente para um mesmo elemento (parece assim que não compreendeu o comportamento da função).

4b) 85,71% dos alunos responderam corretamente esta questão, ou seja, que $z = t^2 + 1$ representa função, e deram justificativas como as que seguem:

“ x tem apenas um correspondente y ”.

“É uma função do 2º grau e a cada valor encontraremos um único correspondente”.

Os dois alunos que erraram esta questão (14,29%), respondendo que $z = t^2 + 1$ não representa função, deram as justificativas que seguem:

“Porque existe mais de um correspondente para t”.

“Porque pode ser + ou -, e x não será dependente”.

Parece que os que deram estas justificativas tiveram o seguinte raciocínio: “Se atribuirmos à variável t números que têm o mesmo quadrado, por exemplo, +1 e -1, teremos $z = 2$, e portanto, para um mesmo z , temos dois valores correspondentes”. Se tiverem raciocinado desta forma, isto pode indicar que eles não conseguiram identificar quais são as variáveis dependente e independente, ou ainda, não compreenderam estas noções.

4c) Os alunos que acertaram esta questão (71,43%), respondendo que $f(y) = y$ representa função, justificaram, por exemplo, da seguinte forma:

“É uma função do 1º grau. Apenas haverá um ponto correspondente”

— Aqui, o aluno fez referência à função do 1º grau, conforme esperávamos.

Os alunos que erraram esta questão justificaram, entre outras, das formas seguintes:

Não representa função porque...

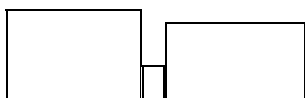
...“não existe x”.

...“não existe o domínio”.

...“existem 2 variáveis dependentes”.

Estas justificativas parecem nos indicar que alguns alunos não compreenderam o registro de representação algébrica apresentado nesta atividade. Para eles, parece ser necessário a existência de duas letras distintas para que existam as variáveis independente e dependente. Isto não havia sido previsto por nós. Na realidade, não trabalhamos muito esta questão em nossa seqüência didática, o que poderia ser repensado.

4d) 64,29% dos alunos acertaram esta questão, respondendo que



representa função. Esta porcentagem de acertos está de

acordo com o esperado, por se tratar de uma função que os professores, em geral, não trabalham, o que constitui um obstáculo didático. Destacamos a seguinte justificativa, dada por um aluno que acertou:

Representa função porque...

...“a primeira é uma função do 1º grau e a segunda uma função constante”.

Dos que erraram esta questão, apenas um justificou sua resposta:

“Porque vários elementos terão contradomínio iguais”.

4e) Os alunos que acertaram esta questão (57,14%), respondendo que não representa função, deram justificativas referindo-se ao sinal \pm , que indica que a um mesmo x pode corresponder dois valores de y (um positivo e outro negativo), conforme havíamos previsto.

Citamos algumas justificativas dos alunos que erraram esta questão, indicando para eles, basta a existência de uma expressão algébrica com duas letras distintas para que represente uma função (parece que isto denota uma concepção ação de função):

“Sim, pois achando o de x achamos o de y ”.

“Joga-se um número no lugar da variável x para encontrar y ”.

4f) Todos os alunos acertaram esta questão, respondendo que $y = 3x - 2$ representa função. Alguns citaram o fato da função ser do 1º grau, cuja representação gráfica é uma reta, conforme prevíamos. Citamos as seguintes justificativas apresentadas:

“Função de uma reta”.

“Porque x possui apenas um y ”.

“Só existe um correspondente”.

Ao contrário de nossas expectativas, a questão mais difícil desta atividade foi a **4e**. Provavelmente isto se deve à presença do sinal \pm pois, em

geral, os alunos têm dificuldades na compreensão da linguagem matemática, como pudemos constatar nas análises preliminares.

Concluindo, as **atividades do grupo 5** permitiram, conforme prevíamos, que os alunos, em geral, identificassem, entre tabelas, gráficos e expressões algébricas, quais representam função, justificando suas respostas. Além disso, parece que conseguimos propiciar a consolidação do conceito de função entre a maior parte dos alunos que participaram da aplicação de nossa seqüência didática, que era o nosso objetivo.

CAPÍTULO VI

CONCLUSÕES

Através das análises preliminares de nossa pesquisa, verificamos que os alunos, em geral, confundem atributos do conceito com os exemplos de função, incluem a noção de continuidade a este conceito, definem função como uma equação, não compreendem funções dadas por mais de uma expressão algébrica, fazem confusão entre função constante e contínua, entendem que a existência de uma expressão algébrica ou gráfico é suficiente para afirmar que estes representam uma função. Além disso, vimos que o “jogo de quadros” e a mudança de registro de representação, no caso do estudo das funções, são feitos de maneira inadequada, tanto nos livros didáticos, como na atual Proposta Curricular de Matemática do Estado de São Paulo, o que reflete na atuação dos professores em sala de aula. E ainda, no processo ensino-aprendizagem do conceito de função, não é levado em consideração o aspecto qualitativo da mesma, nem os obstáculos ligados ao conceito.

Ao constatarmos a existência desta problemática, pretendíamos dar a nossa contribuição no sentido de apresentarmos uma proposta para o ensino-aprendizagem do conceito de função. Tomamos por hipótese que é necessário colocar o aluno numa situação a-didática, na qual ele compreenda as noções de correspondência, dependência e variação, e utilize “jogo de quadros” e mudanças de registro de representação, para a compreensão do que é uma função. Sendo assim, nosso objetivo era construir uma seqüência didática para fazer avançar as concepções dos alunos sobre o conceito de função, ou seja, para que houvesse uma evolução qualitativa na forma como eles concebem tal noção. Pretendíamos responder às seguintes questões:

— *Nossa seqüência didática possibilitará a participação dos alunos na elaboração do conceito de função?*

— *Após a aplicação de nossa seqüência didática, os alunos terão dado um salto qualitativo nas suas concepções do conceito de função?*

— *Quais serão os efeitos positivos e negativos da aplicação da seqüência didática que construímos?*

A análise a posteriori de nossa seqüência didática permitiu que chegássemos às seguintes conclusões, que são indícios de que atingimos o nosso objetivo:

Parece que nossa seqüência didática provocou um avanço nas concepções dos alunos sobre o conceito de função, na medida em que começaram a relacioná-lo com seus aspectos de variação, correspondência e dependência entre variáveis. Muitos identificaram diversas funções entre tabelas, gráficos e expressões algébricas. Eles perceberam que algumas funções podem corresponder a situações da realidade e que podemos utilizar vários registros de representação, entre outros, a tabela, ou o gráfico, ou a fórmula (nos quadros numérico, geométrico e algébrico).

Interpretando estes resultados através da teoria de Vergnaud, os alunos passaram a encarar a função como um campo conceitual, pois para compreendê-la, trabalharam com vários aspectos, como o de variação, dependência e correspondência, e ainda, utilizaram vários registros de representação simbólica, envolvendo muitas situações da realidade. Além disso, esta aquisição parece ser resultado da dialética “ferramenta-objeto” (Douady, [11]), na medida em que utilizaram este campo conceitual e alunos

registros de representação de função como ferramenta para resolver as situações-problema propostas, passando a vê-lo como objeto matemático.

Quanto aos efeitos positivos que esperávamos, parece que conseguimos obter os seguintes, com a maior parte dos alunos:

- Trabalhando em duplas, eles participaram ativamente na elaboração do conceito de função, discutindo com seus parceiros cada atividade proposta neste trabalho.
- Compreenderam que um gráfico e uma tabela podem representar uma função, independentemente da existência e/ou conhecimento de sua representação algébrica.
- Fizeram passagens da linguagem escrita para tabela e gráfico, deste para tabela e vice-versa, fórmula para gráfico, deste para tabela e desta para fórmula. Portanto, fizeram mudanças de registro de representação de algumas funções, envolvendo “jogo de quadros” (quadro numérico, geométrico e algébrico).
- Construíram gráficos de algumas funções, ora utilizando papel quadriculado ora sem utilizá-lo.
- Trabalharam com exemplos de relações que são e que não são funções, distinguindo o domínio do contradomínio. Verificaram, nas situações-problema, quando e como podemos unir os pontos de um gráfico, e que esta decisão depende do domínio da função.

Embora estes resultados constituam indícios de que a mudança do contrato didático estabelecida nesta pesquisa foi positiva, conseguimos detectar os seguintes efeitos negativos na aplicação da seqüência didática, que parecem indicar que alguns alunos não o compreenderam, ou simplesmente o transgrediram:

- Aqueles que tiveram seus debates gravados se inibiram, e suas discussões eram realizadas em voz baixa, não permitindo que fizéssemos a escuta e análise das fitas.
- Trabalhar com os alunos fora do horário de aula parece que provocou em alguns deles certo desconforto/preocupação com o tempo, pois demonstravam-se impacientes quando alguma dupla demorava um pouco mais na resolução de uma atividade.

- O fato de alguns terem realizado as atividades fora do horário previsto fez com que não participassem das discussões e institucionalizações realizadas com o grupo todo, o que parece ter comprometido o seu rendimento em algumas atividades.

Quanto às perspectivas de continuidade do trabalho, sentimos a necessidade de trabalhar alguns aspectos mais detalhadamente, como as noções de domínio e contradomínio, destacando a diferença entre estes conjuntos e seus elementos. Percebemos também a necessidade de reinvestimento, ou seja, apresentar aos alunos novas situações-problema, em que apareçam algumas funções e/ou alguns de seus registros de representação. Talvez fosse mais produtivo se fizéssemos um intervalo de tempo maior entre um grupo de atividades e outro, para que o aluno tenha mais tempo para refletir sobre as atividades.

Restam-nos as seguintes indagações:

- Será que o professor que não possui uma visão histórica e didática, tendo acesso à nossa pesquisa, tratará a nossa seqüência como uma atividade de um livro didático, simplesmente reproduzindo e aplicando o material?

Caso isto aconteça, acreditamos que o professor não obterá resultados análogos aos nossos pois, provavelmente, ele não levará em consideração os obstáculos e dificuldades levantados neste trabalho. Além disso, sabemos que, se aplicarmos a nossa seqüência didática novamente, na mesma turma ou em outra, não obteremos os mesmos resultados, devido às diferentes condições de momento e dos próprios alunos (suas histórias de vida escolar, suas concepções e dificuldades).

- O professor, ao aplicar nossa seqüência didática levará em consideração as análises preliminares? Irá ele compreender a importância da análise a priori da seqüência didática? Será que ele vai se preocupar em fazer uma análise didática dos resultados, para analisar os erros dos alunos e verificar se houve a aquisição do conceito de função?

Se isto ocorrer, provavelmente os resultados serão positivos.

Aos que pretendem aplicar a nossa seqüência didática, sugerimos que levem em consideração os principais resultados levantados, para tentar

compreender como e em quais circunstâncias surgiu o conceito de função, bem como ter uma visão de como é feita a transposição didática deste conceito, para compreender o porquê e quais os objetivos de cada atividade de nossa seqüência. Salientamos ainda que é necessário que haja uma mudança de postura do professor para a aplicação da mesma, para que as atividades propiciem conflito nos estudantes e eles possam agir sobre o objeto em estudo, conforme a teoria construtivista de Piaget. É importante que os alunos discutam entre si cada uma das atividades, e que o professor faça as institucionalizações no momento adequado.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] AG ALMOULOU, Saddo. “Didactique des mathématiques: concepts didactiques et problèmes de méthodologie de recherche”, *Caderno PROEM*, PUC-SP, 1994.
- [2] ARTIGUE, Michèle. “Ingénierie Didactique”, *RDM*, vol.9, nº 3, 1988.
- [3] ARTIGUE, Michèle. “Ingeniería Didáctica”, *Ingeniería Didáctica em Educación Matemática*, Grupo Editorial Iberoamérica, Bogotá, 1995, p. 33-59.
- [4] ARTIGUE, Michèle. “Epistémologie et didactique”, *RDM*, vol10, nº 2, 3,1990, p. 241 a 286.
- [5] BEZERRA, Manoel Jairo / JOTA, José Carlos Putnoki. *Novo Bezerra Matemática, 2º Grau*, Volume Único, Editora Scipione, São Paulo, 1994.
- [6] BONGIOVANNI, Vincenzo / VISSOTO, Olímpio Rudinin / LAUREANO, José Luiz Tavares. *Matemática e Vida, 2º Grau*, Volume 1, Editora Ática S.A., São Paulo.
- [7] BOYER, Carl Benjamin. *História da Matemática*, São Paulo, Edgard Blücher, 10ª impressão, 1993.

- [8] BROUSSEAU, Guy. "Le contrat didactique: le milieu", *RDM*, Vol.9, n° 3, 1988, p.309 a 336.
- [9] BROUSSEAU, Guy. "Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques", *RDM*, vol.7, n° 2, 1986.
- [10] BROUSSEAU, Guy. "Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques", *RDM*, vol.4, n° 2, 1983.
- [11] CHEVALLARD, Yves / JOHSUA, Marie-Alberte. "*La transposition didactique*", Éditions la Pensée Sauvage, ed. 1991.
- [12] CHEVALLARD, Yves. "Sur l'ingénierie didactique", *IREM d'Aix-Marseille*, 1982.
- [13] COTRET, Sophie Rene de. "Une expérimentation sur les conceptions de la notion de fonction à travers les représentations graphiques du mouvement", *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique*, Année 1986-1987, Année 1987-1988, LSD IMAG.
- [14] DOUADY, Régine. "Un exemple d'ingénierie didactique où sont à l'oeuvre jeux de cadres et dialectique outil-objet", *Séminaires de didactique des mathématiques*, Année 1986-1987, IRMAR de Rennes 1.
- [15] DOUADY, Régine. "L'ingénierie didactique: un moyen pour l'enseignant d'organiser les rapports entre l'enseignement et l'apprentissage", *Cahier DIDIREM 19₁*, IREM, Paris VII, 1993.
- [16] DOUADY, Régine et GLORIAN, Marie-Jeanne Perrin. "Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane", *Educational Studies in Mathematics 20*, Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 1989, p. 387 a 424.
- [17] DUBINSKY, Ed. "*Educational Studies in Mathematics*", Volume 23, numéro 3, June 1992, Kluwer Academic Publishers Dordrecht, Boston, London, p. 247 a 285.
- [18] DUVAL, Raymond. "Graphiques et équations: l'articulation de deux registres", *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives 1*, IREM de Strasbourg, 1988, p.235 a 253.
- [19] DUVAL, Raymond. "*Sémiosis et pensée humaine - Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*", Peter Lang S.^a, Suisse, 1995.
- [20] FARIA, Anália Rodrigues de. "*O desenvolvimento da criança e do adolescente segundo Piaget*", Editora Ática S.A., São Paulo, 1989.

- [21] FURTH, Hans G. *“Piaget e o conhecimento: fundamentos teóricos”*, tradução de Valerie Rumjanek, Rio de Janeiro, Forense-Universitária, 1974.
- [22] GENTIL/ MARCONDES/ GRECCO/SÉRGIO/ BELLOTTO. *Matemática para o 2º Grau*, Vol. 1, Editora Ática, São Paulo, 1990.
- [23] HENRY, Michel. *“Didactique des Mathématiques: une présentation de la didactique en vue de la formation des enseignants”*, IREM de Besançon, outubro, 1991.
- [24] LÓPEZ, Rafael Ernesto. *“Introdução à Psicologia Evolutiva de Jean Piaget”*, Editora Cultrix, São Paulo, 1992-93.
- [25] MENDES, Maria Helena Monteiro. *“O conceito de função: aspectos históricos e dificuldades apresentadas por alunos na transição do segundo para o terceiro grau”*, Dissertação de Mestrado, PUC-Rio de Janeiro, 1994.
- [26] MOREIRA, Mariano M. *“Le traitement de la vérité mathématique à l’école”*, Tese de Doutorado, Universidade de Bordeaux I, 1992.
- [27] NETTO, Scipione Di Pierro / ALMEIDA, Nilze Silveira de. *Matemática-Curso Fundamental*, Vol. 1, 2º Grau, Editora Scipione, 1990.
- [28] NOGUÈS, Maryse. *“Le concept de fonction”*, *Bureaux du D.E.A. de didactique des disciplines scientifiques*, Université des Sciences et Techniques du Languedoc, Montpellier II, Année universitaire 92/93.
- [29] OLIVEIRA, Antônio Marmo de / SILVA, Agostinho. *Lisa - Biblioteca da Matemática Moderna*, Volume 2, Comp. Melhoramentos de São Paulo, São Paulo, 1968.
- [30] OLIVEIRA, Marta Kohl de. *“Vygotsky, Aprendizado e Desenvolvimento, um Processo Sócio-histórico”*, Série Pensamento e Ação no Magistério, Editora Scipione, São Paulo, 1993.
- [31] OLIVEIRA, Nanci de. *“Estudo Histórico, Epistemológico e da Transposição Didática do Conceito de Função”*, *Anais do IV EPDM*, PUC-SP, São Paulo, 1996, p.157 a 164.
- [32] OLIVEIRA, Nanci de / GOUVÊA, Filomena Aparecida Teixeira / COSTA, Nielce Meneguelo Lobo da / AG ALMOULOU, Saddo. *“Estudo das concepções dos alunos sobre o conceito de função”*, *Ciências*

Humanas - Revista da Universidade de Taubaté - Ano II - V.2 - Nº 1, 1996, p.51 a 64.

- [33] SÃO PAULO (ESTADO), Secretaria de Estado da Educação, Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. *“Proposta Curricular para o Ensino de Matemática - 1º Grau”*, 3ª Edição, São Paulo, 1988.
- [34] SÃO PAULO (ESTADO), Secretaria de Estado da Educação, Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. *“Proposta Curricular para o Ensino de Matemática - 2º Grau”*, 2ª Edição, São Paulo, 1991.
- [35] SCHWARZ, Osmar. *“Sobre as Concepções de Função dos Alunos ao Término do 2º Grau”*, Dissertação de Mestrado em Ensino da Matemática, PUC- São Paulo, 1995.
- [36] SIGNORELLI, Carlos Francisco. *Matemática 2º Grau*, Vol. 1, Editora Ática, São Paulo, 1992.
- [37] TROTTA, Fernando / IMENES, Luiz Márcio Pereira / JAKUBOVIC, José. *Matemática Aplicada, 2º Grau*, Vol. 1, Editora Moderna, São Paulo, 1979.
- [38] VERGNAUD, Gerard. “Epistemologia e Psicologia da Educação Matemática”, *ICMI Study Series Mathematics and Cognition: A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Editors A. G. Howson and J.- P. Kahane, Cambridge, New York - USA, 1990, p.14 a 30.
- [39] VERGNAUD, Gerard. “La théorie des champs conceptuels”, *RDM*, vol. 10 nº 2.3, 1990, p. 133 a 170.
- [40] VINNER, Shlomo. “The role definitions in the teaching and learning of mathematics”, *Advanced Mathematical Thinking*, Edited by David Tall, Mathematics Education Library, 1991, p.65 a 81.
- [41] VYGOTSKY, L. S. *“Pensamento e Linguagem”*, Editora Martins Fontes, São Paulo, 1987.
- [42] YOUSCHKEVITCH. *“Le concept de fonction jusqu’au milieu du XIX^e siècle”*, Fragments d’histoire des Mathématiques, Brochure A.P.M.E.P. nº 41, 1981, p. 7 a 67.

ANEXOS

ANEXO 1

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PROGRAMA DE ESTUDOS PÓS-GRADUADOS EM ENSINO DA MATEMÁTICA**

QUESTIONÁRIO PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Este instrumento tem por objetivo obter dados dos professores de Matemática com vistas a fornecer subsídios para a dissertação de Mestrado de Nanci de Oliveira em Ensino da Matemática.. Suas respostas são fundamentais para qualificar as informações geradas a partir deste instrumento.

1ª Parte - IDENTIFICAÇÃO DO INFORMANTE.

Para as questões de múltipla escolha, preencha com X.

1) Sexo: () Masculino () Feminino

2) Idade:

- () até 20 anos
- () de 21 a 30 anos
- () de 31 a 40 anos
- () de 41 a 50 anos
- () mais de 50 anos

3) Há quanto tempo leciona Matemática ?

- () menos de 1 ano
- () de 1 a 4 anos
- () de 5 a 9 anos
- () de 10 a 20 anos
- () mais de 20 anos

4) Em que grau(s) de ensino leciona ?

- () 1º grau
- () 2º grau
- () 3º grau

5) Em que(quais) escola(s) leciona ?

- () Municipal
- () Estadual
- () Particular

6) Qual a sua formação acadêmica/profissional ?

- () Não graduado
- () Graduado em Matemática (Bacharelado)
- () Graduado em Matemática (Licenciatura)
- () Engenheiro
- () Arquiteto
- () Técnico. Em que ? _____.
- () Estudante. Qual curso ? _____.
- () Pós-graduado. Qual curso ? _____.
- () Outros. Qual ? _____.

- 7) Você trabalha:
 tempo integral tempo parcial

2ª Parte - METODOLOGIA

Para as questões de múltipla escolha, preencha com X.

- 8) Você conhece a Proposta Curricular de Matemática do Estado de São Paulo com relação ao tema “Funções” ?
 Não Sim

- 9) Qual a sua opinião a respeito da Proposta Curricular de Matemática do Estado de São Paulo ?

- Péssima
 Ruim
 Regular
 Boa
 Ótima

Comente sua resposta: _____

- 10) Você utiliza livro didático ?

Sim. Qual ? (Cite autor e título) _____

Não. Por quê ? _____

- 11) Se você respondeu sim na questão anterior, você acha que a abordagem do livro didático citado está de acordo com a Proposta Curricular de Matemática do Estado de São Paulo no que se refere às funções ?

Sim. Por quê? _____

Não. Por quê? _____

- 12) Você acha importante o uso do livro didático para o ensino das funções ?

Sim. Por quê? _____

Não. Por quê? _____

13) Em sala de aula, você trabalha de que(quais) forma(s) para ensinar funções ?

Aula expositiva

Pesquisa

Em grupos

Resolução de problemas

Outro. Qual ? _____.

Comente sua resposta: _____

14) Você utiliza material didático para ensinar funções ?

Sempre

Nunca

Às vezes

Comente sua resposta: _____

15) Se utiliza material para ensinar funções, quais são eles?

Jornais

Revistas

Livros

Outros. Quais? _____

3ª Parte - CONTEÚDO MATEMÁTICO

Para as questões de múltipla escolha, preencha com X.

16) O que é função? _____

17) Qual tipo de definição você propõe em sala de aula sobre a noção de função?

18) Como você ensina funções aos seus alunos? _____

19) Qual é, na sua opinião, a maior dificuldade dos alunos com relação às funções?

20) Na sua opinião, o que é mais difícil ensinar: o conceito de função ou a representação gráfica de uma função? _____

21) Ao ensinar funções você utiliza quais mudanças de quadro?

- Algébrico para o gráfico
- Gráfico para o algébrico
- Tabela para gráfico
- Gráfico para tabela
- Outra. Qual ? _____

22) Quais as vantagens e desvantagens do uso das mudanças de quadros, em sala de aula, para a compreensão do conceito de função? _____

23) Ao fazer a representação gráfica de uma função, seus alunos utilizam:

- Papel milimetrado
- Papel quadriculado
- O próprio caderno
- O livro didático
- Outro. O que ? _____

24) Qual (quais) dos seguintes itens representa(m) o conceito de função ?

- f
- f(x)
- tabela de valores
- representação gráfica

ANEXO 2

NOME: _____ DATA: / /96

ATIVIDADE PRÉVIA

1) O que você entende por função?

2) Como podemos representar uma função?

3) Dadas as tabelas abaixo, coloque um "X" na resposta correta, justificando as respostas.

a)

| | | | | |
|---|---|---|----|----|
| 0 | 1 | 2 | 4 | 5 |
| 0 | 1 | 4 | 16 | 25 |

() Representa função.

() Não representa função.

JUSTIFIQUE: _____

b)

| | | | | | |
|------|------|------|-----|-----|-----|
| -0,3 | -0,2 | -0,1 | 0,1 | 0,2 | 0,3 |
| 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 |

() Representa função.

() Não representa função.

JUSTIFIQUE: _____

c)

| | | | | | |
|-----|-----|----|----|----|-----|
| 0,5 | 0,6 | 1 | 4 | 6 | 0,5 |
| 5 | 6 | 10 | 40 | 60 | 50 |

() Representa função.

() Não representa função.

JUSTIFIQUE: _____
_____.

4) Dadas as fórmulas abaixo, coloque um "X" na resposta correta, justificando as respostas.

a) $v = 3t + 1$

() Representa função.

() Não representa função.

JUSTIFIQUE: _____
_____.

b) $z = \begin{cases} u & \text{para } u < 0 \\ u + 3 & \text{para } u \geq 0 \end{cases}$

() Representa função.

() Não representa função.

JUSTIFIQUE: _____
_____.

c) $y = \pm\sqrt{x-2}$

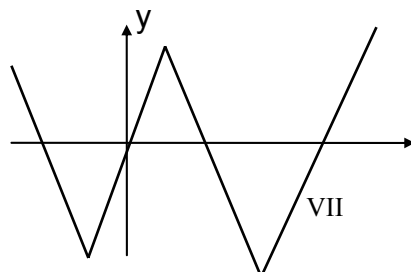
() Representa função.

() Não representa função.

JUSTIFIQUE: _____
_____.

5) Dados os gráficos abaixo, verifique em qual deles y é função de x . Coloque um "X" na resposta correta, justificando as respostas.

a)



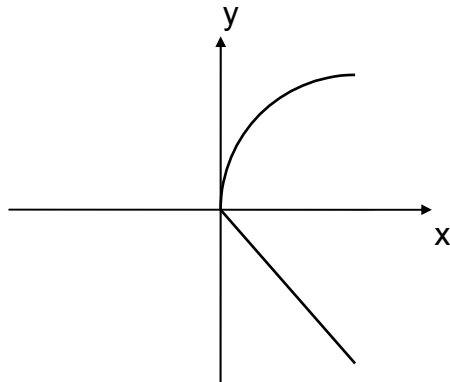
x

Representa função.

Não representa função.

JUSTIFIQUE: _____
_____.

b)

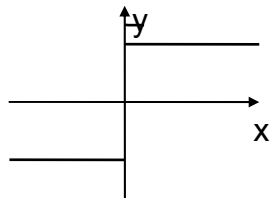


Representa função.

Não representa função.

JUSTIFIQUE: _____
_____.

c)



Representa função.

Não representa função.

JUSTIFIQUE: _____
_____.

ANEXO 3

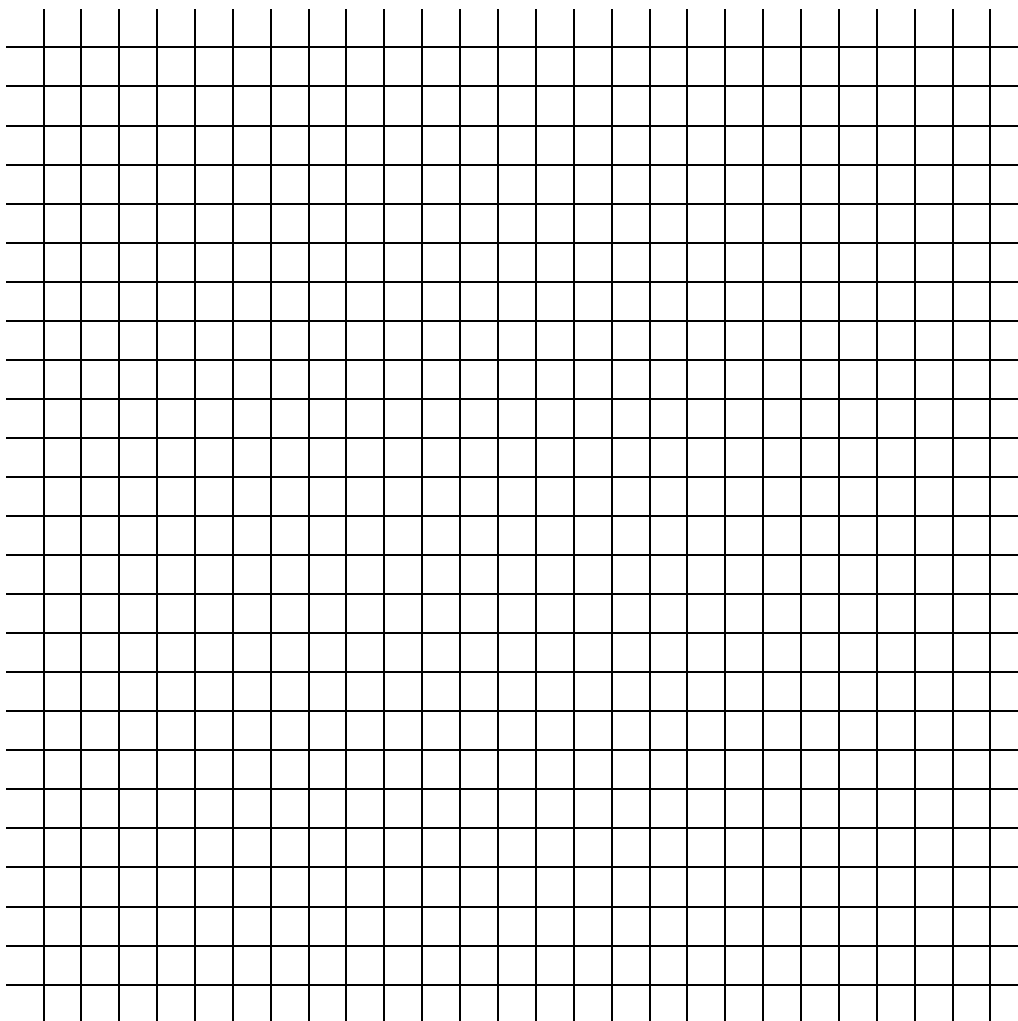
NOME: _____ - DATA: / /96

GRUPO 1 - ATIVIDADE 1

A revista Veja, de 29 de Novembro de 1995, publicou que o crescimento do número de meninas-mães no Brasil foi muito grande nos últimos anos. De acordo com o IBGE, em 1976 haviam aproximadamente 2500

mães com menos de 15 anos, em 1987 haviam 7000 e em 1994, cerca de 11500, no país.

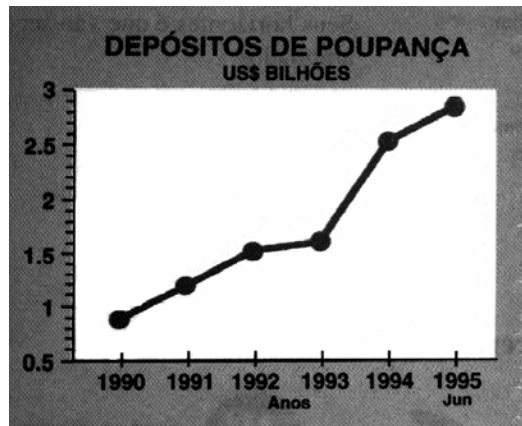
Supondo que você fosse o responsável pela publicação dessa notícia, faça uma tabela e um gráfico no plano cartesiano, utilizando o quadriculado abaixo, para representação dos dados, com o intuito de chamar a atenção do leitor.



NOME: _____ **DATA:** / /96

GRUPO 1 - ATIVIDADE 2

Encontramos na revista Veja, de 26 de Julho de 1995, um informe da NOSSA CAIXA-NOSSO BANCO apresentando a sua evolução ao longo dos últimos anos. Para tanto, ela apresenta um gráfico, que reproduzimos abaixo.



Observando o gráfico acima, responda:

a) Qual é a variação de tempo descrito pelo gráfico?

_____.

b) A variação dos depósitos de poupança nos últimos 5 anos foi de quantos bilhões de dólares?

_____.

c) No período de tempo descrito pelo gráfico, o que ocorreu com os depósitos de poupança na NOSSA CAIXA-NOSSO BANCO?

_____.

d) Em que período houve maior aumento nos depósitos de poupança? E de quanto foi esse aumento?

_____.

_____.

_____.

NOME: _____ **DATA:** / / 96

GRUPO 1 - ATIVIDADE 3

Os dados da tabela abaixo indicam a variação do IGP-M (Índice Geral de Preços de Mercado), da FGV (Fundação Getúlio Vargas), em 1995, em %.

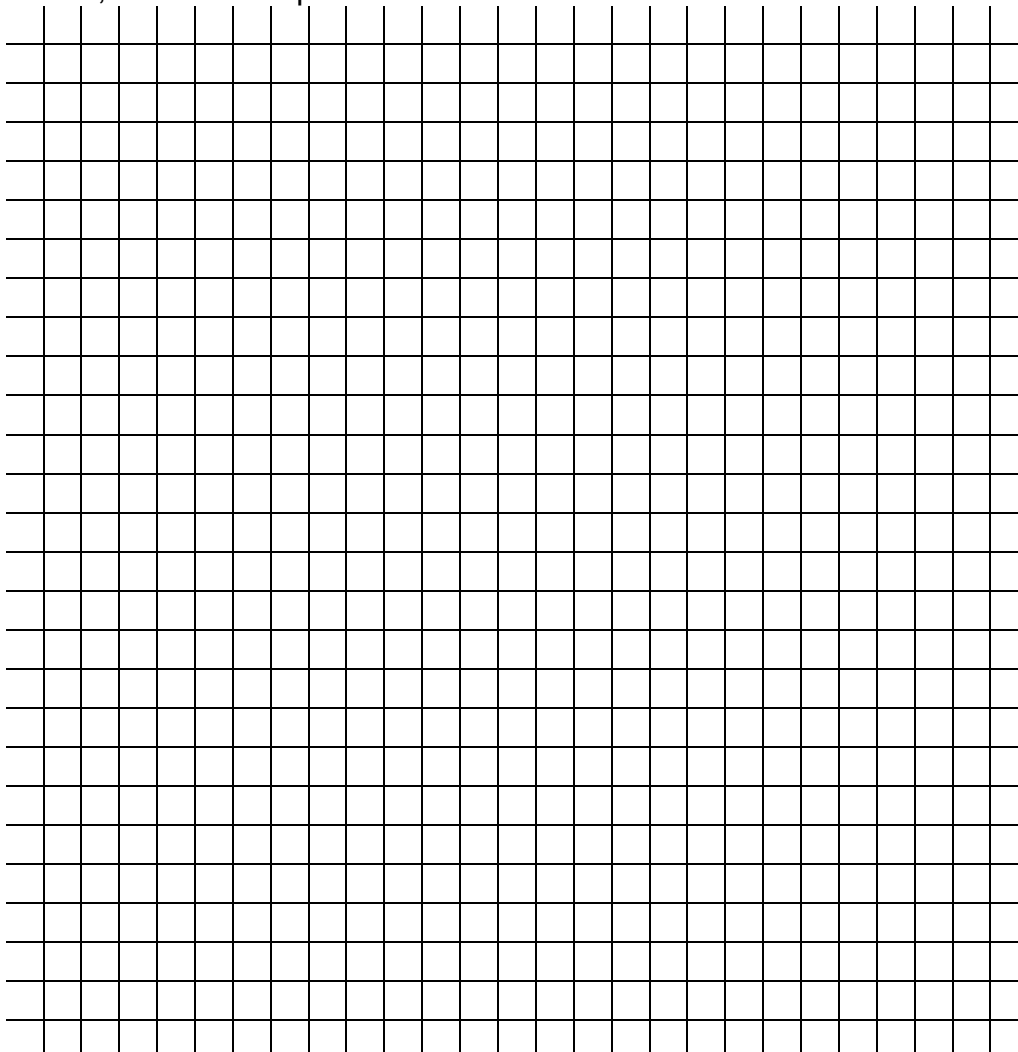
| Meses | IGP-M (em %) |
|-------|--------------|
| 1 | 0,6 |
| 2 | 1,2 |
| 3 | 0,9 |

| | |
|---|--------|
| 4 | 1,6 |
| 5 | 0,6 |
| 6 | 1,9 |
| 7 | 1,4 |
| 8 | 2,0 |
| 9 | - 0,5* |

* índice parcial

Fonte: Revista Veja, 27 de Setembro, 1995.

a) Represente os dados da tabela através de pontos, no plano cartesiano, utilizando o quadriculado abaixo.



b) Podemos unir todos os pontos do gráfico do item anterior, através de uma curva? Por quê?

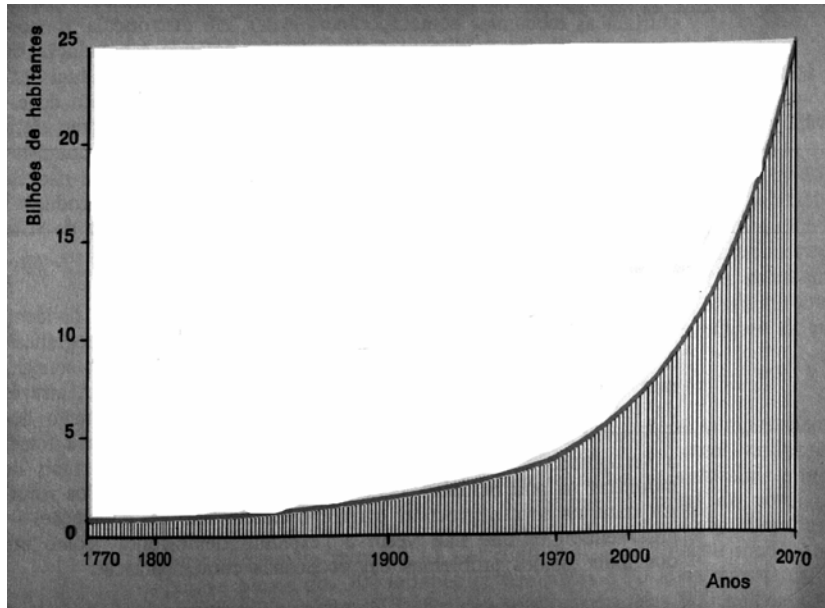
c) Quais são as duas variáveis representadas na tabela e no gráfico?

NOME: _____ DATA: / /96

GRUPO 1 - ATIVIDADE 4

Encontramos em um livro de Economia* o gráfico abaixo, representando a expansão demográfica mundial a partir de 1770, com previsões até o ano 2070.

* ROSSETE, José Paschoal. *“Introdução à Economia”*, 12ª edição, Editora Atlas, São Paulo, 1987, p.410.



a) O que ocorreu com a população do mundo entre 1770 e 1970?

b) Qual é a previsão do número de habitantes do mundo para o ano 2000? E para 2070?

c) De acordo com o gráfico, a variação do número de habitantes depende de qual variável?

NOME: _____ **DATA:** / /96

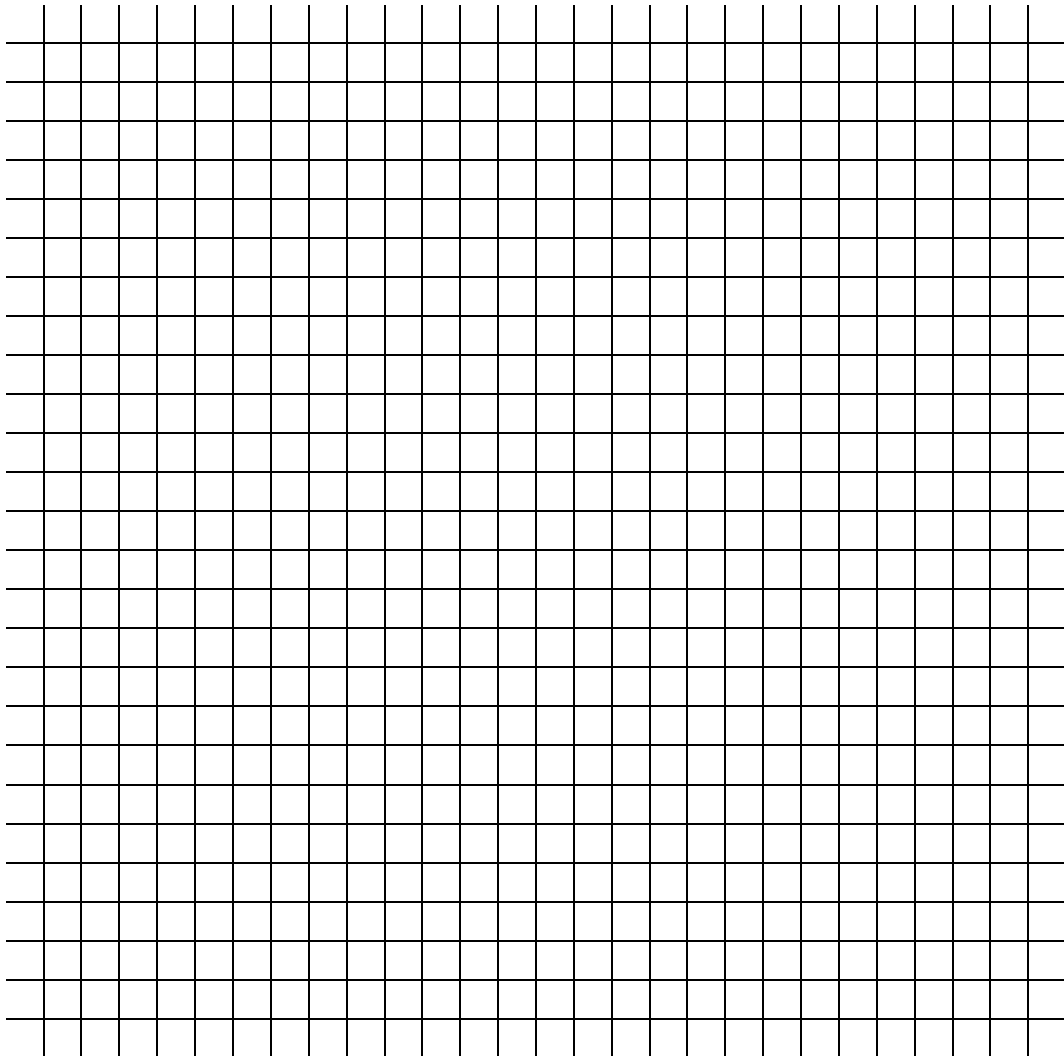
GRUPO 1 - ATIVIDADE 5

Apresentamos abaixo uma tabela com a variação de temperatura axilar de um paciente hospitalizado no período de 9 dias, tomadas às 15 h de cada dia. Portanto, não sabemos qual foi o comportamento (se houve variação ou não) da temperatura no mesmo dia.

| | | | | | | | | | | |
|-------------|-----|------|------|----|----|----|------|----|------|------|
| dias | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| temperatura | (em | 37,5 | 38,5 | 39 | 38 | 38 | 37,5 | 37 | 36,5 | 36,5 |

| | | | | | | | | | |
|-----|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| °C) | | | | | | | | | |
|-----|--|--|--|--|--|--|--|--|--|

a) Faça um gráfico no plano cartesiano, utilizando o quadriculado abaixo, para representar os dados da tabela.



b) As leituras das temperaturas foram feitas de maneira contínua, ou seja, a cada instante, durante os 9 dias?

c) Podemos supor, sem cometermos nenhum erro:

— Que o crescimento da temperatura do 1^o para o 2^o dia foi “contínuo”?

Por quê?

d) Baseados na respostas das questões anteriores, o que você acha que seria necessário para se ter uma idéia real da variação da temperatura durante esses 9 dias? Por quê?

NOME: _____ **DATA:** / /96

GRUPO 2 - ATIVIDADE 1

Um profissional viaja, periodicamente, de São Paulo a uma cidade do interior do Rio de Janeiro. Sabendo que a distância de uma cidade a outra é de 600 km, responda:

1) Se a firma na qual esse profissional trabalha lhe fornecesse um automóvel potente para fazer a viagem, e se a lei permitisse, ele poderia fazer

o percurso com uma velocidade de 200 km/h. Sendo assim, quanto tempo ele levaria para fazer a viagem?

2) Caso a firma na qual esse profissional trabalha lhe fornecesse um automóvel menos potente, ele seria obrigado a fazer o percurso com uma velocidade de 100 km/h. Nesse caso, quanto tempo ele levaria para fazer a viagem?

3) De acordo com os cálculos anteriores (questões 1 e 2), o tempo depende de qual informação (variável)?

4) Qual a relação (lei) existente entre as variáveis utilizadas para fazer os cálculos das questões 1 e 2?

5) Se o mesmo profissional quiser fazer o mesmo percurso em 4 horas, qual deve ser a velocidade do seu automóvel?

6) E no caso em que esse profissional queira fazer a mesma viagem em 5 horas, qual deve ser a velocidade do seu automóvel?

7) De acordo com os cálculos anteriores (questões 5 e 6), a velocidade está dependendo de alguma informação? Qual?

_____.

8) Qual a relação (lei) existente entre as variáveis utilizadas para fazer os cálculos das questões 5 e 6?

_____.

9) Compare as leis obtidas nas questões 4 e 8. Que conclusão você pode tirar a respeito delas?

_____.

NOME: _____ **DATA:** / /96

GRUPO 2 - ATIVIDADE 2

Pesquisando o preço da gasolina em alguns postos, após a liberação dos preços do combustível pelo governo, verificamos que há uma variação entre eles, da seguinte forma: o litro de gasolina custa R\$ 0,65 nos postos 1, 2 e 5; R\$ 0,66 nos postos 4 e 6, e R\$ 0,67 no posto 3.

a) Represente os dados através de um gráfico no plano cartesiano, colocando os preços no eixo horizontal e os postos no eixo vertical.

b) Na relação representada acima, a cada preço da gasolina corresponde um ou mais postos? Indique, para cada preço, o(s) posto(s) correspondente(s).

NOME: _____ **DATA:** / /96

GRUPO 3 - ATIVIDADE

Associe as leis aos gráficos e tabelas, de modo que representem a mesma situação. Para isso, coloque nos parênteses correspondentes dos gráficos e tabelas o mesmo número que aparece na lei.

leis

(1) $y = x^2$

(2) $y = 1/x$

(3) $u = 2t$

(4) $z = u^3$

(5)

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{para } x < 0 \\ x, & \text{para } x \geq 0 \end{cases}$$

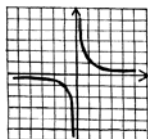
(6) $w = -2v + 1$

tabelas

| | | | |
|----|---|---|---|
| -1 | 0 | 1 | 2 |
| -1 | 0 | 1 | 8 |

() EXPLIQUE:

gráficos

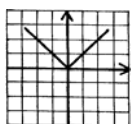


()

EXPLIQUE:

| | | | | |
|----|---|---|---|---|
| -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| -2 | 0 | 2 | 4 | 6 |

() EXPLIQUE:

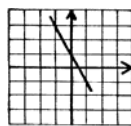


()

EXPLIQUE:

| | | | | |
|------|----|-----|---|-----|
| -3 | -1 | 1/3 | 1 | 2 |
| -1/3 | -1 | 3 | 1 | 1/2 |

() EXPLIQUE:

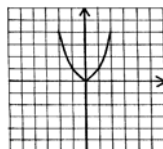


()

EXPLIQUE:

| | | | |
|----|---|-----|----|
| -1 | 0 | 1/2 | 1 |
| 3 | 1 | 0 | -1 |

() EXPLIQUE:

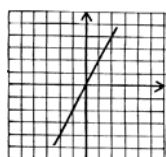


()

EXPLIQUE:

| | | | |
|----|------|---|---|
| -2 | -0,5 | 0 | 2 |
| 4 | 0,25 | 0 | 4 |

() EXPLIQUE:

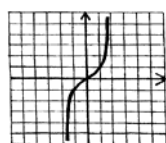


()

EXPLIQUE:

| | | | | |
|----|------|---|-----|---|
| -1 | -1/2 | 0 | 1/2 | 1 |
| 1 | 1/2 | 0 | 1/2 | 1 |

() EXPLIQUE:



()

EXPLIQUE:

GRUPO 4 - ATIVIDADE 1

1) As tabelas abaixo representam algumas situações em que a cada elemento da 1ª linha corresponde algum(s) elemento(s) da 2ª linha. Verifique, em cada caso, se a cada elemento do domínio corresponde um único elemento no contradomínio e assinale a resposta correta.

a)

| | | | | | | | | | |
|----|----|---|----|----|----|----|----|---|----|
| -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 5 | 6 | 8 | 2 | 5 |
| 40 | 1 | 0 | 20 | 40 | 25 | 30 | 10 | 3 | 15 |

- () Existe um único correspondente.
 () Existe mais de um correspondente.

b)

| | | | | |
|---|---|---|---|----|
| 1 | 1 | 3 | 6 | 10 |
| 2 | 5 | 8 | 9 | 12 |

- () Existe um único correspondente.
 () Existe mais de um correspondente.

c)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | 3 | 0 | 7 |
| 4 | 1 | 4 | 8 |

- () Existe um único correspondente.
 () Existe mais de um correspondente.

d)

| | | | | |
|------|---|---|-----|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| -2,5 | 0 | 1 | 1,7 | 6 |

- () Existe um único correspondente.
 () Existe mais de um correspondente.

e)

| | | | | |
|------|------|------|------|---|
| -0,5 | -0,4 | -0,3 | -0,2 | 0 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |

- () Existe um único correspondente.
 () Existe mais de um correspondente.

f)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 4 |
| 5 | 5 | 6 | 8 |

- () Existe um único correspondente.
 () Existe mais de um correspondente.

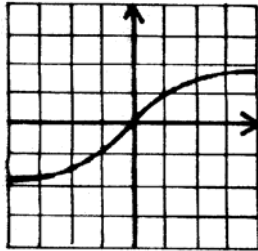
2) Nas tabelas do exercício anterior em que existe mais de um elemento correspondente a algum elemento do domínio, destaque-os com um círculo.

NOME: _____ **DATA:** / /96

GRUPO 4 - ATIVIDADE 2

Supondo que os gráficos abaixo representam algumas situações, verifique a quantidade (número) de elementos correspondentes a cada elemento do domínio e assinale a resposta correta. (O domínio está representado no eixo horizontal e o contradomínio no vertical).

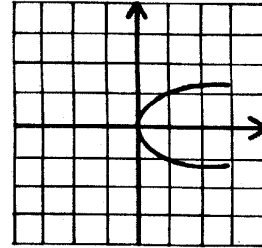
a)



- () Cada elemento tem um único correspondente.
- () Cada elemento tem mais de um correspondente.

Explique: _____

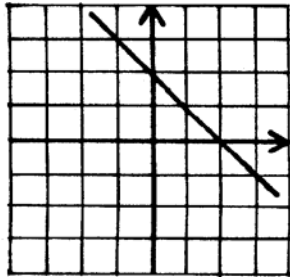
b)



- () Cada elemento tem um único correspondente.
- () Cada elemento tem mais de um correspondente.

Explique: _____

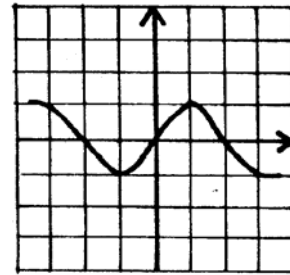
c)



- () Cada elemento tem um único correspondente.
- () Cada elemento tem mais de um correspondente.

Explique: _____

d)

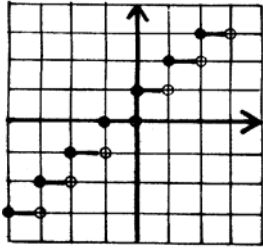


- () Cada elemento tem um único correspondente.
- () Cada elemento tem mais de um correspondente.

Explique: _____

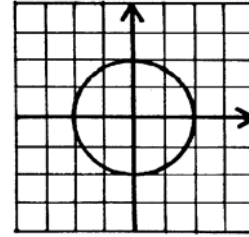
e)

f)



- () Cada elemento tem um único correspondente.
- () Cada elemento tem mais de um correspondente.

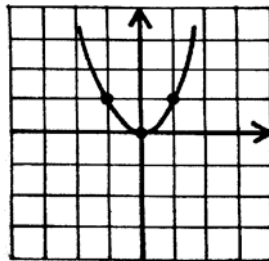
Explique: _____



- () Cada elemento tem um único correspondente.
- () Cada elemento tem mais de um correspondente.

Explique: _____

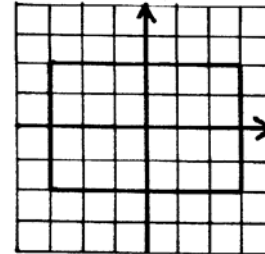
g)



- () Cada elemento tem um único correspondente.
- () Cada elemento tem mais de um correspondente.

Explique: _____

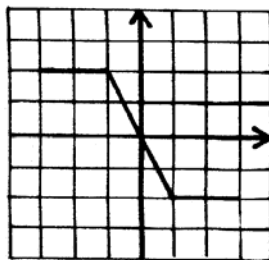
h)



- () Cada elemento tem um único correspondente.
- () Cada elemento tem mais de um correspondente.

Explique: _____

i)



- () Cada elemento tem um único correspondente.
- () Cada elemento tem mais de um correspondente.

Explique: _____

NOME: _____ DATA: / /96

GRUPO 4 - ATIVIDADE 3

As leis abaixo representam algumas situações. Verifique, em cada caso, se a cada elemento do domínio corresponde um único elemento no contradomínio e assinale a resposta correta. Nos itens **a**, **b** e **d**, o domínio e o contradomínio é \mathbb{R} (conjunto dos números reais), e no item **c**, o domínio é \mathbb{R}_+ e o contradomínio, \mathbb{R} .

a)

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{para } x < 0 \\ 0, & \text{para } x = 0 \\ x, & \text{para } x > 0 \end{cases}$$

() A cada elemento existe um único correspondente.

() A cada elemento existe mais de um correspondente.

EXPLIQUE: _____.

b)

$$y = \begin{cases} -x, & \text{para } x < 0 \\ x, & \text{para } x \geq 0 \end{cases}$$

() A cada elemento existe um único correspondente.

() A cada elemento existe mais de um correspondente.

EXPLIQUE: _____.

c)

$$f(x) = \pm\sqrt{x}$$

() A cada elemento existe um único correspondente.

() A cada elemento existe mais de um correspondente.

EXPLIQUE: _____.

d) $y = x + 3$

() A cada elemento existe um único correspondente.

() A cada elemento existe mais de um correspondente.

EXPLIQUE: _____.

NOME: _____ DATA: / /96

GRUPO 5 - ATIVIDADES

1) O que é uma função?

2) Dadas as tabelas abaixo, identifique as que representam uma função colocando um "X" na resposta correta.

a)

| | | | | | |
|---|----|----|----|----|----|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 0 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 |

() Representa função

() Não representa função.

JUSTIFIQUE: _____

b)

| | | | | |
|------|------|---|-----|-----|
| -3,0 | -1,5 | 0 | 1,0 | 2,5 |
| -6,0 | -3,0 | 0 | 2,0 | 5,0 |

() Representa função.

() Não representa função.

JUSTIFIQUE: _____

c)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|----|
| 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 6 | 7 | 7 | 8 | 9 | 10 |

() Representa função.

() Não representa função.

JUSTIFIQUE: _____
_____.

d)

| | | | | | | |
|----|----|------|---|---|---|---|
| -2 | -1 | -0,5 | 0 | 1 | 2 | 1 |
| 4 | 1 | 0,25 | 0 | 1 | 4 | 6 |

() Representa função.

() Não representa função.

JUSTIFIQUE: _____
_____.

e)

| | | | | |
|----|---|---|---|---|
| -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |

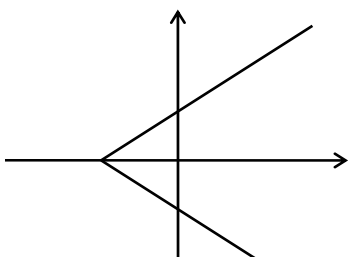
() Representa função.

() Não representa função.

JUSTIFIQUE: _____
_____.

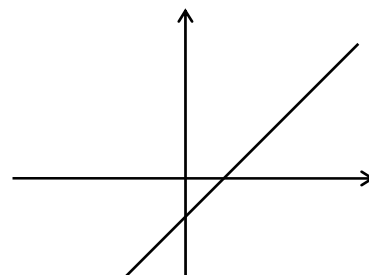
3) Dados os gráficos abaixo, identifique os que representam função, colocando "X" na resposta correta e justificando a mesma.

a)



b)

XXV



() Representa função.

() Não representa função.

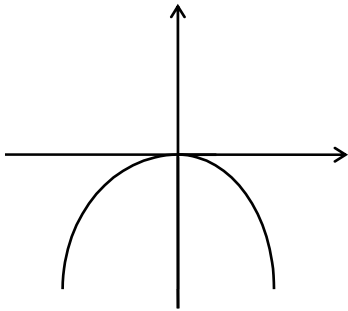
JUSTIFIQUE: _____

() Representa função.

() Não representa função.

JUSTIFIQUE: _____

c)

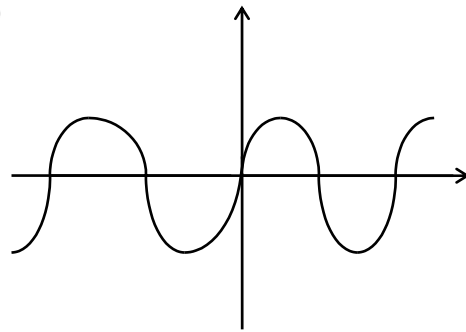


() Representa função.

() Não representa função.

JUSTIFIQUE: _____

d)

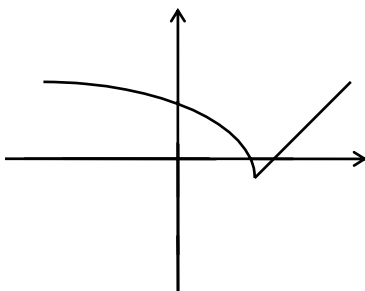


() Representa função.

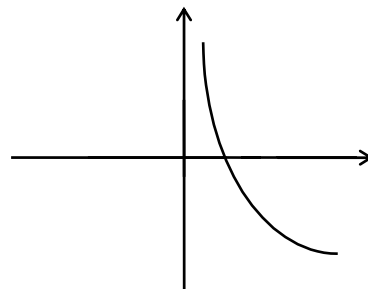
() Não representa função.

JUSTIFIQUE: _____

e)



f)



() Representa função.

() Representa função.

() Não representa função.

() Não representa função.

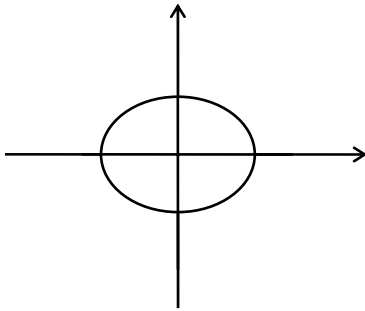
JUSTIFIQUE: _____

JUSTIFIQUE: _____

_____.

_____.

g)



() Representa função.

() Representa função.

() Não representa função.

() Não representa função.

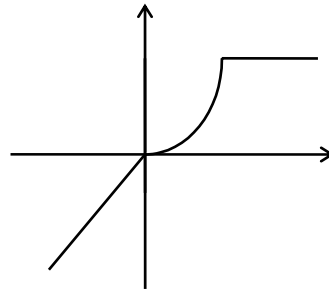
JUSTIFIQUE: _____

JUSTIFIQUE: _____

_____.

_____.

h)



() Representa função.

() Representa função.

() Não representa função.

() Não representa função.

JUSTIFIQUE: _____

JUSTIFIQUE: _____

_____.

_____.

4) Dadas as fórmulas abaixo, identifique as que representam função, colocando "X" na resposta correta.

a) $y = 2x$

b) $z = t^2 + 1$

() Representa função.

() Representa função.

() Não representa função.

() Não representa função.

JUSTIFIQUE: _____

JUSTIFIQUE: _____

_____.

_____.

_____.

c) $f(y) = y$

() Representa função.

() Não representa função.

JUSTIFIQUE: _____

_____.

d) $f(x) = \begin{cases} x & , \text{ se } x \leq 0 \\ 1 & , \text{ se } x > 0 \end{cases}$

() Representa função.

() Não representa função.

JUSTIFIQUE: _____

_____.

e) $y = \pm\sqrt{x}$

() Representa função.

() Não representa função.

JUSTIFIQUE: _____

_____.

f) $y = 3x - 2$

() Representa função.

() Não representa função.

JUSTIFIQUE: _____

_____.