MARIA JOSÉ FERREIRA DA SILVA

SOBRE A INTRODUÇÃO DO CONCEITO DE NÚMERO FRACIONÁRIO

Mestrado em ENSINO DA MATEMÁTICA

PUC/SP
1997

MARIA JOSÉ FERREIRA DA SILVA

SOBRE A INTRODUÇÃO DO CONCEITO DE NÚMERO FRACIONÁRIO

Dissertação apresentada como exigência parcial para obtenção do título de MESTRE EM ENSINO DA MATEMÁTICA à Comissão Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, sob orientação da Professora Doutora Tânia Maria Mendonça Campos.

PUC/SP
1997

AGRADECIMENTOS

À Professora Doutora Tânia Maria Mendonça Campos, pela amizade, confiança, orientação e dedicação a este trabalho.

Aos Professores Doutores Vinício de Macedo Santos, Saddo AG Almouloud e Benedito Antonio da Silva, por terem aceito a fazer parte de nossa banca examinadora e pelas valiosas sugestões.

À Professora Doutora Terezinha Nunes, pela atenção e sugestões que muito ajudaram na elaboração deste trabalho.

Às Professoras Doutoras Sonia Barbosa Camargo Igliori, Sílvia Dias Alcântara Machado e Maria Cristina S. de A. Maranhão pela amizade e estímulo em momentos difíceis.

Aos colegas e amigos, Ana Maria, Carolina, Cecília, Cristina, Francisco, Maria, Maria Célia, Lígia, Tereza e Vincenzo, que em algum momento colaboraram com este trabalho. Em particular à colega Filomena.

À Professora Marilda Helena P. Cabral, pela leitura, sugestões e críticas que muito melhoraram a redação.

Ao Professor Francisco Damito, ao CEFAM Dr. Emílio Hernandez Aguilar e as Professoras Prof. Rosangela Maria P. Muniz, Claudia Marques S. Silva, Gilza M. M. Galdino, Josefa R. Machado e Elaine S. da Silva que tornaram possível a realização deste trabalho.

À Escola Experimental Vera Cruz por ter contribuído com a minha formação.

O meu carinho especial aos meus pais e irmãos pela preocupação, pela ausência em momentos familiares importantes e pelo apoio sempre.

Aos meus filhos Alexandre, Maira e Emerson, meu amor e gratidão, pela compreensão nos momentos de ausência durante esta caminhada.

À Comissão de Ensino e Pesquisa da PUC/SP (CEPE) pelo auxílio na impressão e encadernação deste trabalho.

Ofereço este trabalho aos futuros professores:

Andreia, Ana Eloisa, Cleide, Cibele, Camila, Edilson, Eleni, Elaine, Fabiana, Glaucineia, Joselia, Juliana, Lauro, Marivone, Marlene, Márcia Pereira, Márcia Florêncio, Marcilene, Magali, Maria Cecília, Pablo, Patrícia, Rosangela, Sulien, Simone, Tatiani e Viviane.

RESUMO

Esta pesquisa trata da introdução do conceito de fração através das concepções parte/todo, medida e quociente junto aos futuros professores das séries iniciais do primeiro grau.

Para tanto elaboramos uma seqüência didática de dezoito horas, com atividades que colocassem os futuros professores em situações que lhes permitissem uma reflexão destas diferentes concepções.

Os resultados obtidos mostram que o objetivo foi atingido na medida que esses futuros professores reconhecem hoje, as concepções abordadas, e a maioria faz uma reflexão das mesmas ao elaborar novas situações-problema.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

O objetivo do nosso trabalho é introduzir o conceito de número fracionário junto aos futuros professores das séries iniciais do primeiro grau, via as concepções parte/todo, quociente e medida, de modo que eles reflitam sobre estas diferentes abordagens e dêem sentido a este conceito.

Na literatura encontramos contribuições relevantes de pesquisadores como Kieren, Marshall, Carpenter, Nunes, ... que indicam como concepções de frações: parte/todo, medida, quociente, razão e operador.

Entendendo a complexidade e abrangência desse estudo, escolhemos introduzir o conceito de fração em duas etapas. Esta pesquisa trata da primeira etapa, qual seja, uma introdução através das concepções parte/todo, medida e quociente.

Nossas hipóteses, baseadas nos resultados recentes de pesquisas são que os futuros professores não trabalham com as diferentes concepções do conceito; não têm o domínio necessário para controlar as concepções espontâneas de seus alunos, impondo modelos nem sempre adequados; a aprendizagem muitas vezes não tem sentido para o aprendiz, levando-o a criar regras próprias e erros conceituais, além da responsabilidade da aprendizagem ficar, muitas vezes, por conta do aluno.

A metodologia escolhida para tal trabalho foi a Engenharia Didática que compreendeu as seguintes fases: problemática, breve estudo histórico e epistemológico, para identificação de obstáculos epistemológicos; breve estudo da transposição didática para levantamento de obstáculos didáticos e conhecimento do estado atual do ensino dos números fracionários; elaboração da seqüência de atividades; análise e discussão dos resultados e conclusões do estudo.

1.0 – PROBLEMÁTICA E METODOLOGIA

1.1 – PROBLEMÁTICA

Parece-nos, através da nossa prática, que muitos professores são colocados em sala de aula totalmente despreparados para lidar com a complexidade da tarefa que têm a realizar, tanto no que diz respeito ao domínio dos conteúdos, quanto em relação ao processo de desenvolvimento cognitivo por que passam seus alunos. Normalmente, seu referencial de prática, são as lembranças que têm dos procedimentos de seus próprios professores, sem clareza de uma escolha pedagógica, que irá interferir diretamente na interação necessária entre professor, aluno e conteúdo a ser ensinado, o que vem a ser o suporte de um bom trabalho em sala de aula.

Acreditamos como Pavanello (1994), que em geral, os alunos têm um papel passivo nas aulas de matemática, pois normalmente não trabalham com questões que admitam diferentes respostas, nem que levantam contradições para serem analisadas e discutidas e, que os desafiem a obter diferentes soluções para um problema. Além disso, acreditamos que o professor deva empenhar-se na superação de suas limitações e deva ser ajudado a consegui-lo através do empenho das instituições educacionais em promover situações que propiciem a criação de novas possibilidades de atuação pelo professor.

Para que possamos obter esse tipo de professor, acreditamos como Santos (1993), que *"a adoção de novos pontos de vista e de novos estilos de prática pedagógica, em alinhamento com as novas orientações, faz ressaltar a importância do estudo das dificuldades dos professores na sua concretização. Traz também para o primeiro plano os problemas do desenvolvimento profissional e da formação, exigindo que estes sejam objeto de investigação. Impõe igualmente uma relativação do valor atribuído a estas orientações, que não podem mais ser vistas como dogmas perfeitamente estabelecidos, mas antes como perspectivas didáticas cuja aplicação educativa, tem de passar pela criatividade pedagógica do professor."*

Com o objetivo de tornar os professores mais criativos e reflexivos sobre sua prática, os pesquisadores devem levar aos professores seus estudos e resultados de pesquisas a fim de lhes proporcionar condições de desenvolver uma nova prática pedagógica. Com esse intuito fizemos este trabalho sobre o ensino e a aprendizagem dos números fracionários.

O ensino de frações, no Brasil, é apresentado a partir da segunda ou terceira série do primeiro grau e, a cada ano, é, teoricamente, aprofundado. Entretanto, estudos em vários países têm mostrado, o mau desempenho dos alunos ao trabalhar com frações, em todos os níveis do ensino. Isso levou Barbara Rogoff (citação em Clements, 1988) a afirmar que como o conhecimento de fração não é natural, torna-se pouco importante seu uso na sala de aula, sendo necessário somente para o estudo da Matemática.

Seguindo esse raciocínio, M. A. Clements (1988) questionando-se sobre a possibilidade ou não dos alunos adquirirem o conhecimento de fração "naturalmente", sem a participação do processo de ensino, fez um levantamento histórico, analisou esse conhecimento em culturas que não sofreram o domínio da Europa Ocidental e os conceitos de fração das crianças, a partir de várias pesquisas; concluindo que: *"o conhecimento de fração levou um longo tempo para chegar... não é uma coisa natural, e é necessário somente para o estudo de mais matemática"*.

Discordando dessas opiniões, como nós, encontramos em Behr e outros (1983), a afirmação de que o conceito de número racional é uma das mais complexas e importantes idéias matemáticas que as crianças encontram a partir das perspectivas prática, psicológica e matemática. Fazendo um levantamento matemático e curricular dos conceitos de número racional, Behr discute as sub-construções: parte/todo, medida, razão, quociente e operador, do ponto de vista de pré-requisitos cognitivos, do ensino e da aprendizagem, mostrando as dificuldades geradas pela ênfase na interpretação das frações como parte/todo, em detrimento das outras interpretações, esperando-se que as crianças façam essas transferências.

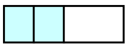
Estudando algumas pesquisas que confirmam o mau desempenho dos alunos, encontramos Hart (1981), discutindo uma pesquisa do grupo de matemática do projeto CSMS[1] da Universidade de Londres, onde dez mil crianças inglesas entre 11 e 16 anos foram questionadas sobre vários tópicos de matemática, entre eles frações e decimais; levanta algumas dificuldades com as interpretações das frações, entre elas a leitura de uma fração como dois inteiros não relacionados, a escolha, por uma grande maioria das crianças, do numerador ou denominador para julgar a grandeza da fração como se estivessem comparando números naturais, e, em conseqüência dessas interpretações, somar os numeradores e os denominadores, principalmente na adição de fração com denominadores diferentes. Conclui, finalmente, que a maioria das crianças são incapazes de lidar com o tipo de matemática que ensinamos e que nessa situação parece inútil ensinar todas as crianças como se elas tivessem a mesma base de conhecimento e fossem capazes de aprender os mesmos tópicos na mesma extensão.

No Brasil, Lima (1986), em sua participação no projeto "Aprender Pensando" do grupo SOPV[2] da Universidade de Pernambuco, que tinha como finalidade contribuir para a atualização de professores e pais em relação a certos conhecimentos sobre o desenvolvimento da inteligência, discute o critério histórico de iniciar o ensino de fração a partir do modelo parte/todo no contínuo, pois pode ocorrer da criança não ter adquirido ainda a conservação de quantidade contínua (área, comprimento, etc.). Baseando-se em pesquisas sobre a gênese das frações e em Piaget, que indicam o conceito de fração como uma aquisição do estágio das operações concretas (7 aos 12 anos), e trabalhando com crianças de 6 a 12 anos, mostrou que por volta dos 8 anos elas recusam-se a dividir as figuras geométricas apresentadas (círculos, retângulos, etc.) em partes e fazem uma fragmentação do todo (picotagem), confundindo o número de partes e o números de cortes para obter as partes ... Em torno de 12 anos, já não mais se impressionam com o número de pedaços e independentemente do tamanho que tenham, conseguem obter partes iguais sem dificuldades, fazem equivalências,

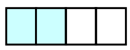
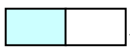
[1] Concepts in Secondary Mathematics and Science.

[2] Serviço de Orientação Pedagógica e Vocacional.

efetuam operações fundamentais, mas ainda mostram dificuldades nas expressões fracionárias.

Ainda no Brasil, Campos e outros (1989), trabalhando com 55 crianças de quinta série de 10 a 12 anos, mostram que o ensino de fração pela apresentação de "todos" divididos em "partes" onde algumas destas são diferenciadas das demais, encoraja os alunos a empregar um tipo de procedimento de dupla contagem (contar o total de partes e depois contar as partes pintadas) sem entender o significado deste novo tipo de número. Os resultados mostram, confirmando as previsões, que as crianças podem usar a linguagem das frações sem compreender sua natureza. Como o modelo de ensino apresenta as figuras totalmente divididas em partes iguais, para facilitar a contagem das partes e para mostrar que estas devem ser iguais, qualquer alteração nesse modelo, por exemplo, a retirada de um dos traços de divisão, faz com que a criança erre, mesmo aplicando corretamente a contagem que aprendeu. Por exemplo, na figura  mesmo estando claramente pintada a sua metade, 56% das crianças escolhem 2/3 para representar a parte pintada, aplicando corretamente a regra da dupla contagem, 12% associam-na à fração 2/4, visualizando o traço que está faltando e somente 4% vai além respondendo tanto 1/2 quanto 2/4, percebendo a equivalência.

Apesar desse modelo basear-se diretamente em medida de área (quantidade contínua), em nenhum momento essa discussão aparece, pois as crianças parecem ser treinadas para contar as partes e as figuras apresentadas garantem sempre essa visualização. Como não percebem a necessidade de as partes terem a mesma área independente da forma, para uma representação fracionária, transferem para os contextos contínuos os procedimentos aplicados às grandezas discretas.

No mesmo trabalho, notamos que aquelas crianças também sentem dificuldade em relacionar duas figuras divididas de maneiras diferentes a uma única fração. Por exemplo: elas aceitam facilmente que a figura  seja representada pela fração 2/4 e que a figura  seja representada pela fração 1/2, mas como a maneira de dividir através dos traços é diferente, não associam à segunda figura a fração 2/4 e à primeira a fração 1/2. No entanto, aceitam facilmente a equivalência entre os números 1/2 e 2/4, confirmando que existe alguma linguagem sobre frações, mas não o conceito.

Através dos resultados apresentados acima, podemos observar que, da mesma forma que na Inglaterra, os nossos alunos também apresentam diversas dificuldades em trabalhar com tal conceito, E mais, que depois de anos de estudo não conseguem perceber a fração nem como uma quantidade, pois não a percebem como um número; nem como um quociente, pois não a associam ao resultado de uma divisão; ao contrário, continuam trabalhando simbolicamente com números naturais, só que escritos de uma forma diferente, um em cima do outro.

Acreditando, como Behr (1983), que *"os números racionais proporcionam um rico campo dentro do qual as crianças podem desenvolver e expandir as estruturas mentais necessárias para um desenvolvimento intelectual contínuo",* pois além de propiciar o desenvolvimento de mais matemática, proporciona também o desenvolvimento de procedimentos que diferem dos requisitados pelos números naturais, enquanto os números fracionários necessitam de uma ação de divisão ou distribuição, os naturais só necessitam de uma ação de contagem.

Assim, acreditando que essa aprendizagem é de fato importante e que depende do ensino, pois não se concretizaria espontaneamente, encontramos em Carpenter (1994), um trabalho para o desenvolvimento de professores a partir do consenso de que o entendimento do conceito de número fracionário depende do entendimento de certas sub-construções, em que se propõe a ajudar os professores a entender esse desenvolvimento no contexto das sub-construções: partição (quociente), medida, operador e razão, colocando a unidade como o conceito central para o entendimento desse número e o conceito de equivalência e ordem, como a base para a comparação e a operação entre frações. Na realidade o objetivo do seu trabalho é ajudar os professores a entender o pensamento matemático das crianças e a partir desse conhecimento planejar a instrução que será dada.

A esse respeito, Carvalho (1989) depois de trabalhar com professoras brasileiras das séries iniciais, diz em uma de suas conclusões que as professoras que têm uma concepção de matemática diferente da que tiveram enquanto alunas, a conseguiram a partir de um curso ou estágio, com espaço de discussão e reflexão sobre sua prática e da disposição de trabalhar com seus alunos de maneira diferente. Além disso, Pavanello (1994) diz que o importante é ampliar as experiências de alunos e professores, num trabalho voltado para a criatividade, para que possam desenvolver sua capacidade de pensar e de inventar.

Interessados nesses resultados, decidimos aprofundar nossos estudos sobre frações e realizar um trabalho com os alunos do quarto ano de magistério, no sentido de lhes propiciar esse espaço de reflexão a partir de novos pontos de vista dos números fracionários que os levem a tentar uma maneira diferente de ensiná-los com criatividade, sem modelos nem receitas. Pretendemos criar um espaço de discussão e reflexão sobre tal conceito, mas diferente de Carpenter, iremos num primeiro momento, enfocar somente as concepções parte/todo, medida e quociente porque acreditamos serem as mais convenientes para a introdução de tal conteúdo.

O nosso objetivo é contribuir na formação desses futuros professores, elaborando e aplicando uma seqüência didática junto a alunos do quarto ano magistério, que proporcione momentos de reflexão sobre os conhecimentos dos números fracionários que já possuem e sobre novos pontos de vista, dando lhes o espaço necessário para discuti-los da maneira mais clara possível, levando-os a perceberem e refletirem sobre os diferentes esquemas de pensamento utilizados em cada uma dessas concepções e torná-los com isso um pouco mais preparados para lidar com o assunto com criatividade.

A partir disso formulamos algumas questões que gostaríamos de responder com o nosso trabalho, algumas que acreditamos sejam básicas para um bom entendimento do conteúdo e consequentemente para o seu ensino, e outras para uma boa conclusão do nosso próprio trabalho, a saber:

- *Será que os futuros professores percebem as diferenças de tratamento de situações envolvendo as concepções de fração como parte/todo, medida e quociente?*

- *Será que percebem as diferenças de tratamentos necessárias para o trabalho com as quantidades discretas e contínuas?*

- *Será que eles conseguem romper com seus conhecimentos anteriores e refletir as frações a partir de outros pontos de vista, que não o do ensino usual?*

- *Quais os pontos negativos e positivos alcançados com a aplicação de nossa seqüência didática?*

Para obter tais respostas, escolhemos a Engenharia Didática, como metodologia, pois nos permite a partir de um pequeno estudo histórico das frações, fazer uma breve análise epistemológica e levantar os possíveis obstáculos epistemológicos que possam estar presentes no processo de conceituação do número fracionário.

E também, um levantamento dos obstáculos didáticos, a partir da observação dos manuais didáticos; da verificação das concepções espontâneas que têm os alunos sem instrução e o que o ensino acrescenta após a introdução do conceito, e da concepção que o professor apresenta.

A partir dos dados obtidos nesses estudos, elaboraremos e aplicaremos uma seqüência didática aos futuros professores, iniciando e terminando com um teste que nos permita confrontar as transformações havidas.

1.2 – METODOLOGIA

Neste optamos pela metodologia de pesquisa Engenharia Didática, que segundo Douady (1988) é um conjunto de seqüências de aulas concebidas, organizadas e articuladas no tempo, de maneira coerente, para realizar um projeto de aprendizagem para uma certa população de alunos.

Assim a construção de nossa seqüência didática será desenvolvida em quatro etapas:

1. Estudos Preliminares - são os estudos que serviram de base para a elaboração da seqüência e consistem dos conhecimentos didáticos que o pesquisador já possui, e dos obtidos a partir das análises: epistemológica, do ensino usual e seus efeitos, das concepções dos alunos, dos professores e das dificuldades e obstáculos que surgem no desenvolvimento do ensino/aprendizagem.

Nesta etapa usamos como instrumento um questionário para levantar as concepções dos alunos de 3ª e 4ª séries do primeiro grau e um outro no levantamento das concepções dos professores de 1ª a 4ª séries.

Nos estudos preliminares para o levantamento das concepções dos alunos, num primeiro momento, foi realizada uma análise quantitativa para fins comparativos dos alunos de terceira e quarta série do 1º grau e a partir dos registros do teste uma análise qualitativa. No levantamento das concepções dos professores uma análise qualitativa baseada nas respostas apresentadas no questionário.

2. Análise a Priori e Elaboração da Seqüência - Para a construção da seqüência didática, estaremos considerando como variáveis globais[3], a elaboração de um curso de formação, em que os alunos do 4º magistério trabalhassem em grupo fazendo e discutindo as atividades da seqüência; e como

[3] Variáveis globais são aquelas relativas à organização global da seqüência.

variáveis locais[4], aquelas escolhas feitas na elaboração de cada questão que compõe a seqüência.

Na análise a priori o pesquisador descreve as escolhas feitas e as características de cada situação didática, analisando a importância dessas situações para o aluno, bem como predizendo procedimentos possíveis durante a realização do trabalho.

3. Experimentação - Como já havíamos escolhido trabalhar com os alunos de uma classe do 4º magistério, procuramos uma que pudesse freqüentar todas as sessões previstas. Encontramos essa possibilidade com uma classe do CEFAM Dr. Emílio Hernandez Aguilar, da cidade de Franco da Rocha em São Paulo.

Planejamos a aplicação da seqüência em seis sessões, propondo como parte do contrato didático[5], uma vinda dos alunos a PUC e uma ida do pesquisador a Escola em Franco da Rocha, por semana. Além disso, propusemos a aplicação do trabalho com os alunos resolvendo as atividades em grupos de três e criando momentos de institucionalização, a partir da seleção e organização do que teria significado para os alunos e o que consideraríamos matematicamente interessante, explicitando assim esse saber para a classe. Esses momentos aconteceriam ao final de cada atividade com a correção coletiva da mesma a partir da exposição das soluções dos grupos e de uma síntese organizada a partir dessas discussões.

Os procedimentos adotados com os alunos do magistério a cada sessão foram:

- Execução das atividades propostas em sala de aula com a intervenção do pesquisador no sentido de sanar dúvidas que pudessem emperrar o bom andamento do trabalho.

---

[4] Variáveis locais são aquelas relativas à organização de uma sessão ou de uma fase da seqüência.

[5] O contrato didático é um conjunto de condições que determinam implicitamente o que cada um, professor e aluno, deve administrar e responsabilizar-se. Normalmente tem como objetivo ajudar o aluno a assumir suas tarefas e o professor a dar as aulas.

- Discussão coletiva da atividade corrigindo e institucionalizando o conteúdo de cada uma delas.

- Elaboração de novas atividades como reinvestimento num assunto anterior para que o trabalho pudesse prosseguir.

4. Análise a Posteriori e Validação - nesta fase que segue a experimentação e analisamos e refletimos as produções dos alunos na classe e fora dela, a partir das fichas resolvidas e das discussões.

Na seqüência didática também demos um tratamento quantitativo ao pré-teste e pós-teste a fim de compararmos os resultados iniciais com os obtidos após a aplicação da seqüência. A análise da aplicação foi feita qualitativamente a partir das discussões gravadas em vídeo e quantitativamente a partir das fichas trabalhadas pelos alunos e gravações feitas em quatro grupos de suas discussões durante a execução.

A validação das hipóteses do trabalho fundamentaram-se essencialmente na confrontação das análises a priori e posteriori.

2.0 – ESTUDOS PRELIMINARES

A fim de cumprir a primeira etapa da metodologia escolhida, iremos, neste capítulo desenvolver um breve histórico das frações e levantar os obstáculos epistemológicos. A seguir, observar alguns aspectos da transposição didática através da análise dos manuais didáticos, do levantamento da concepção sobre frações de alunos e professores, e finalmente, os obstáculos didáticos encontrados.

2.1 – DESENVOLVIMENTO HISTÓRICO

A necessidade de medir, dividir e distribuir a riqueza material da sociedade impulsionou o nascimento do primeiro sistema de escrita, interligando o seu destino ao da matemática. Não se tem dados para fixar o período da história primitiva em que foram descobertos os números cardinais, embora os mais antigos documentos escritos encontrados, mostrem a presença desse conceito na China, Índia, Mesopotâmia e Egito, juntamente com as primeiras notações de frações.

Tentaremos rever o desenvolvimento das frações em diversos momentos da História, dividindo-a em três partes: até o século I DC, iremos considerar antigüidade, do século II ao XV, idade média e após o século XV, idade moderna.

2.1.1 – ANTIGÜIDADE

A maioria dos textos egípcios antigos contendo números são textos de economia, que mostram listas de ração, de trabalho, inventários, saídas e recebimentos, nos quais aparecem muitos métodos de cálculo envolvendo a idéia de fração, apesar de seu uso inexplorado.

Havia dois caminhos de representação para os números fracionários:

- algumas frações especiais (1/2, 1/3, 1/4, 2/3), que eram representadas por signos especiais.

• a representação padrão das frações unitárias, com um ponto colocado sobre o número n para representar o que hoje denotamos por $\frac{1}{n}$.

No papiro de Rhind (entre 1788 e 1580 AC) aparece uma tabela que dá as equivalências das frações do tipo $\frac{2}{n}$ como a soma de frações unitárias para todos os números ímpares de 5 a 101. Por exemplo[1]:2/5 seria representado por $\overline{3}\ \overline{15}$ que eqüivale hoje a 1/3 + 1/15.

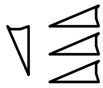
O caminho para a obtenção desses resultados não está explícito no documento, não nos permitindo saber o porquê de uma solução em detrimento de outras também possíveis, porém por causa da simplicidade de sua notação, essa maneira egípcia de operar com as frações unitárias foi praticada durante milhares de anos.

No sul da Mesopotâmia, as frações foram importantes nos textos de economia, relacionados ao direito dos herdeiros. Enquanto os legisladores descreviam os mecanismos particulares de distribuição de bens, sem recorrer ao emprego freqüente das frações, nos documentos que mostram a prática, aparece uma grande variedade de exemplos da utilização de frações, principalmente na distribuição de patrimônios, onde praticavam regras de divisão que contornavam as dificuldades aritméticas, respeitando sempre os costumes jurídicos em vigor.

Por volta da segunda metade do terceiro milênio, os Babilônios e os Sumérios já utilizavam um sistema numérico sexagesimal (base 60), empregando o princípio posicional; os números menores que 60 eram representados por um sistema de base 10 e os números maiores ou igual a 60 eram designados pelo mesmo princípio com a base 60.

Com a utilização do princípio relativo também para as frações, foram os primeiros a atribuírem uma notação racional, como hoje fazemos com as frações

[1] Usaremos uma barra sobre o número do denominador para transcrever as frações unitárias. Assim, $\overline{5}$ representará $\frac{1}{5}$.

de horas em minutos e segundos. Assim, $1+\frac{30}{60}$ ou $1\frac{1}{2}$ era representado por símbolos cuneiformes da seguinte forma: 

Porém, essa notação podia ser interpretada também como $1\times 60+30$, ou seja 90. Essa ambigüidade, no entanto, era desfeita no contexto e compensada pela flexibilidade que proporcionava para a confecção de tabelas para fins calculatórios.

Para os gregos, o uso das frações aparece nos tratados teóricos e demonstrativos, nos textos matemáticos calculatórios, (semelhantes em parte aos dos matemáticos egípcios, babilônios ou chineses) e nos documentos da prática como: declaração de propriedade, cálculos e registros de câmbio de moedas, taxas, realizações da arquitetura ...

Os gregos usaram para representar os números, entre outros sistemas, o alfabético de base 10, utilizando as letras com um acento à direita para diferenciar um número de uma palavra.

Para as frações unitárias, com exceção de 1/2 que tinha símbolos particulares, usavam um traço vertical no alto e à direita dos números que representavam o denominador:

$$\delta^{|}=\frac{1}{5} \qquad \pi\eta^{|}=\frac{1}{88} \qquad \delta^{\nu\varepsilon}=\frac{4}{55} \qquad \mu\beta^{\eta}=\frac{42}{8} \qquad \overline{\kappa\alpha}\varsigma^{|}=21\frac{1}{6}$$

Mas, quando propuseram-se a continuar o desenvolvimento das tabelas astronômicas, preferiram explicitamente o sistema sexagesimal babilônico, pois a sua numeração os impedia de atribuir uma notação geral para as frações.

Em seu *Almagesto*, Ptolomeu, o astrônomo, afirma: "*em geral usaremos o sistema numérico sexagesimal devido à inconveniência das frações*".

Para os romanos, o uso de frações aparecia nos cálculos com moeda e na metrologia. Cada fração tinha um nome especial e mantinham, geralmente, o denominador 12 como uma constante, provavelmente porque sua moeda de cobre *as*, que pesava uma libra, era dividida em 12 *unciae*.

Os vestígios encontrados no vale dos Hindus[2] atestam a existência na Índia de uma civilização de alto nível, já no terceiro milênio AC. A descoberta de um grande número de espécies de pesos de 13,6 g e de um fragmento de concha de alguns centímetros de comprimento, apresentando finas linhas gravadas a intervalos regulares, levaram alguns a sugerirem que possuíam uma unidade de massa e um instrumento de medida. Além disso, em alguns selos e inscrições da mesma época, foram encontrados agrupamentos de traços verticais que provavelmente representam números. No entanto, nada se pode afirmar, porque, infelizmente, a escrita dessa civilização ainda não foi decifrada.

2.1.2 – IDADE MÉDIA

Em documento recentemente encontrado, datado do século II AC, fica clara a existência de frações a partir da medida na China antiga. Tais conclusões são retiradas de um outro documento escrito no século I de nossa era, tendo aquele como referência, que se tornou um clássico para os matemáticos chineses até o século XIII chamado *"Nove Capítulos Sobre Os Procedimentos Matemáticos"*.

No século III, Liu Hui reorganiza o conteúdo dos *"Nove Capítulos"* com um tratamento aritmético completo, fornecendo as provas de algoritmos no interior de sua descrição e mostrando os procedimentos de passagem de um algoritmo para outro. As frações produzidas como as partes não inteiras dos resultados de divisões ocupam um lugar importante e não são definidas no início, mas, à medida em que vão aparecendo. Pode-se observar como foram concebidas e distinguir dois elementos nos procedimentos de cálculo, um numerador [*zi*, filhos] e um denominador [*mu*, a mãe], quanto aos próprios objetos, os chineses os nomeiam de *fen*, literalmente “as partes”.

No primeiro capítulo, aparece como simplificar, somar, subtrair, comparar, calcular média, dividir ou multiplicar frações, além dos algoritmos para efetuar as operações elementares como aplicação no cálculo de áreas variadas e também, pela primeira vez, no enunciado do 5º problema, é apresentada uma formulação padronizada e abstrata: x de y partes para designar x/y, com x < y. Porém, na

---
[2] Atual Paquistão

divisão, aparece uma ruptura no estilo abstrato dos enunciados, surgindo situações concretas:

"Agora temos sete homens que dividem oito sapecas[3] *e um terço. Perguntamos quanto um homem obtém"*, seguido do procedimento para resolvê-la.

Só tomamos conhecimento do trabalho dos matemáticos indianos a partir dos século V, através das obras de astrônomos e matemáticos, mas desde o século IV AC os teóricos lingüistas da Índia discutem e interrogam-se sobre a natureza das frações.

O primeiro tratado matemático conhecido, que dedica um capítulo às frações, é o de Aryabhata (n. 476). Apresenta todas as operações com frações, mostra a adição e a subtração sendo efetuadas somente depois da redução ao mesmo denominador. Já, Brahmagupta (n. 598) foi mais preciso na definição das operações e para a divisão enunciou: "*depois de ter invertido o denominador e o numerador do divisor, o denominador do dividendo é multiplicado pelo (novo) denominador e seu numerador pelo (novo) numerador...*"

Esse trabalho foi recuperado, simplificado e completado por Mahavira, no sul da Índia, no *"Compêndio essencial do Cálculo*" de 850, apresentando, do ponto de vista pedagógico, vantagens notáveis em relação aos trabalhos mais antigos e todo um capítulo dedicado às frações.

A palavra *ansa* (parte, porção) era usada para designar o numerador, *cheda* (divisor) para designar o denominador e a palavra *bhaga* (dividir, distribuir,...) também estava sempre presente. A quantidade de partes era expressa por meio de um número cardinal seguido de *bhaga* ou *ansa*; assim, *pancadasabhaga* (parte de cinco) designava uma quinta parte; os nomes de frações como 2/7 eram formados com o nome de um número cardinal seguido de um ordinal, por exemplo *divisaptama* significava dois sétimos.

Havia, nos matemáticos indianos uma concepção única para os números inteiros e fracionários, pois os números inteiros já eram considerados como

[3] Sapeca é uma pequena moeda chinesa

frações com a unidade no denominador e o termo *rapa-bhapa* era usado para nomear a fração 1/1.

Os árabes, tornando-se soberanos de uma grande parte do Oriente Médio e dos países banhados pelo Mediterrâneo, alcançaram o Atlântico e a Índia em 711, após a morte do profeta Maomé[4] em 632. De posse de tradições científicas, tão antigas quanto variadas, resolveram assimilar todo esse saber, através de um longo e complexo processo de tradução, que levou-os no século IX a dispor de conhecimentos matemáticos e de astronomia de diversas origens.

No Corão[5], nos versículos dedicados à divisão de heranças, podemos encontrar termos para "parte" (guz), a utilização da fração 2/3 e de frações do tipo $1/n$, para $2 \leq n \leq 6$ e $n = 8$.

Discussões filosóficas, sobre os objetos matemáticos que os gregos tratavam na Metafísica, são incorporadas aos trabalhos dessa época. Além de enumerarem sistematicamente os casos das diferentes classes de frações que aparecem nas operações, demonstraram os algoritmos de maneira diferente das conseguidas na China (recorrendo aos clássicos gregos) sintetizando os diferentes métodos de cálculo. Todos os autores árabes de manuais de cálculo concordam em apresentar os capítulos relativos às frações depois daqueles que tratam dos inteiros, mesmo que estas já tenham aparecido anteriormente nos capítulos sobre redução à metade e divisão.

As frações se apresentam como elemento do resultado de uma divisão, em um algoritmo comum em todos os livros. O exemplo abaixo aparece em um livro do século IX de al-Uqtidisi[6].

"(...) se dividimos 7964 por 6, suporemos que o seis está sob o sete, multiplicamos um por 6, retiramos do 7 e deslocamos o seis.

---

[4] Fundador do islamismo e do império árabe, iniciador de práticas sociais, religiosas e culturais de profunda relevância na história da humanidade. [Enciclopédia Barsa]
[5] Alcorão é o livro sagrado dos muçulmanos.
[6] Ao lado de cada passagem colocaremos a representação atual da divisão para melhor compreensão.

Obtemos 1964 — *7964 | 6*
6 — *6000* — *1*
1964

Multiplicamos 3 por 6, retiramos do que está acima dele e temos um como resto. Obtemos: 13

164 — *1964 | 6*
6 — *1800* — *3*
164

Deslocamos o seis sob o seis e procuramos por qual múltiplo de 6 podemos cobrir 16 ou sua maior parte possível. Encontramos 2, que inserimos em cima do seis, multiplicamos por 6, retiramos do que está em cima e temos o resto.

132 — *164 | 6*
44 — *120* — *2*
6 — *44*

Deslocamos o seis sob o quatro e procuramos o número a ser multiplicado por 6 para cobrir 44 ou sua maior parte possível. Encontramos sete. Multiplicamos 7 por 6 e levantamos o que está em cima. Temos dois de seis como resto; a linha superior dada:

1327 — *44 | 6*
2 — *42* — *7* — *1327+2/6*
6 — *2*

*E vai assim por todos os problemas semelhantes" (*Benoit, 1992)*.*

Nos trabalhos de cálculo dos séculos X e XI, as sete operações[7] aplicadas aos inteiros são retomadas, bem como as operações específicas para as frações[8], aparecendo a redução ao mesmo denominador aparece ou por ocasião da adição ou em um parágrafo próprio. Al-Uglidisi a expõe como o produto de todos os denominadores que aparecem no problema estudado e al-Bagdadi como a determinação do menor múltiplo comum entre os denominadores em questão,

[7] Adição, subtração, duplicação, redução à metade, multiplicação, divisão, raiz quadrada e raiz cúbica.
[8] Conversão, simplificação, comparação e redução ao mesmo denominador.

mas nem o conceito nem a operação que lhe é associada possuem um nome específico.

As obras desse período respondem a vários tipos de pensamentos e práticas calculatórias, como as dos astrônomos, dos agrimensores, dos juristas, dos contadores e dos comerciantes, sendo que os dois últimos tinham direito a um capítulo especial dedicado às operações aritméticas com frações gerais ou específicas.

A partir do século XII, encontramos nos livros árabes uma maneira própria de representar e de manipular as frações. Al-Hassar no procedimento do cálculo do produto de um inteiro ou de uma expressão fracionária por uma outra expressão fracionária, reduz as frações de cada fator ao mesmo denominador e depois multiplica numeradores e denominadores entre si.

O interesse pelas frações como instrumento de cálculo foi grande na sociedade islâmica medieval, principalmente pela sua utilidade prática, que fez com que os matemáticos não hesitassem em reservar seções inteiras de

seus livros a esses problemas. Além disso, a utilização intensiva das frações no domínio das heranças, que já aparece no tratado de álgebra de al-Kwarismi no século VII, não só favoreceu a difusão, como também fez surgir diferentes símbolos e certos aspectos teóricos para as frações,

No início do século XII, os hebreus[9], principalmente do sul da França e do nordeste da Espanha, empenharam-se na redação de obras originais e em um movimento de traduções das versões árabes, sob duas exigências: ser fiel às línguas de origens hebraicas e colocar no mundo de cultura judaica as novas noções veiculadas pelas ciências greco-árabes.

O primeiro representante da cultura árabe-judia, redigindo diretamente em hebreu, foi Abraham bar Hiyya (1065-1145), que entre obras de astronomia, astrologia e filosofia, escreveu duas de matemática. Uma delas, "*O livro das superfícies e das medidas*", é um pequeno tratado de geometria prática, em que as frações, ainda escritas em notação alfabética, não fazem parte de uma

[9] Povo semita dos Oriente Médio que habita a terra prometida (hoje Estado de Israel). São também chamados judeus (do reino de Judá).

exposição sistemática, mas aparecem quando necessárias e são designadas como "n partes de p".

Outro representante dessa cultura foi Abraham-ibn-Ezra, que nasceu em terra cristã, mas passou a maior parte de sua vida em peregrinações pela Europa. Escreveu obras de poesia, de gramática, de comentários bíblicos e em sua única obra matemática, "*O livro dos Números*", escrita por volta de 1160, expõe o sistema de numeração posicional com nove algarismos (representando-os pelas nove primeiras letras do alfabeto hebraico) e o zero, atribuindo-o explicitamente aos "sábios da Índia" que tinham constituído todos os números a partir de nove "figuras".

A definição de fração é apresentada como um desenvolvimento filosófico:

"Sabemos bem que o "Um" é como o ponto do centro da circunferência, e por isso, não pode ser fracionado. Se podemos a partir do Um, por pensamento, construir as frações e as frações de frações, é somente porque o todo é designado pelo termo Um, da mesma maneira que a forma, a qual faz do corpo um todo, o corpo sendo composto de superfície".

Na Europa, no começo da nossa era, aparecem Diofante de Alexandria (250 - 350), que introduziu uma notação não ambígua para frações colocando o denominador ligeiramente abaixo do numerador e Boécio (480-524), que em sua "*Aritmética*" não faz qualquer referência aos números fracionários. Por um longo tempo, em que tudo foi feito para evitar os números que não fossem inteiros e por isso como os romanos, aparecia no comércio e na distribuição de bens, as divisões de unidades de peso e de comprimento em sub-múltiplos que eram considerados como novas unidades.

Nos séculos XI e XII, enquanto a aritmética indo-arábica produzia um sistema de numeração e de escrita de frações, onde o numerador era colocado sobre o denominador, a tradição judia, coexistindo no sul da Europa com a tradição romana, exprimia as frações através de uma linguagem retórica, como quantidade de partes de unidades originadas dos pesos e medidas. Mas, a partir da assimilação do comércio árabe, os matemáticos judeus produziram as ferramentas que permitiram no fim da idade média, a expansão monetária e urbana, a eclosão das escolas nas cidades e a transformação radical dos meios científicos e culturais, fazendo com que essa nova maneira de conceber e de escrever as frações penetrasse no meio dos sábios.

Entre os trabalhos europeus do século XIII destacam-se o "*Algorismus vulgaris*" de Sacrobosco, que não trata de frações, e o "*Liber Abaci*" de Fibonacci (1180-1250), que expõe a numeração indo-arábica e trata de problemas sobre transações comerciais, através de um complicado sistema que utilizava frações contínuas ascendentes, que era praticado e já havia sido abandonado pelos árabes. Usava o termo "fractiones" e a barra horizontal para frações, mas a principal vantagem da notação posicional - sua aplicabilidade a frações - escapou não só a ele, mas também aos que usavam os numerais indo-arábicos durante os primeiros mil anos de sua existência.

No século XIV, os universitários passam a estudar os movimentos e Thomas Bradwardine (1290-1349), tendo uma visão mais ampla da proporcionalidade, tenta uma expressão matemática em termos de razões, para as relações entre uma força, a resistência que lhe é imposta e a velocidade que resulta[10]. Paralelamente, o mundo dos comerciantes mostrava, por intermédio dos mestres do cálculo, as vantagens que as frações ofereciam, o que permitiu o surgimento da álgebra na Europa e os cálculos a partir de frações algébricas (sem símbolo literal) que fez com que todos os tratados italianos dessa época, para uso dos comerciantes, reservassem um grande espaço às frações.

Na segunda metade da Idade Média, a Europa Ocidental passou de um mundo que havia desistido das frações, a um outro, onde as frações entravam na vida cotidiana do comerciante, fornecendo uma ferramenta essencial à álgebra nascente e à Física em suas primeiras tentativas de matematização. O cálculo fracionário se impôs do Oriente para o Ocidente, varrendo os sistemas de frações da antigüidade que foram substituídos por tipos de representação, de modos de cálculo e de conceitos melhores adaptados à solução dos problemas que se colocavam na época.

---

[10] Chegando à fórmula $V = k \log \frac{F}{R}$ onde *k* é a constante de proporcionalidade.

2.1.3 – IDADE MODERNA

No decorrer do século XVI, os tratados de aritmética apresentam o cálculo fracionário de uma maneira muito próxima ao que está nos livros dos séculos XIX e XX. Os matemáticos começam a levar em conta as frações maiores que a unidade e certos textos já consideram a fração como a expressão de uma divisão. Mas, os inconvenientes do cálculo fracionário, ainda conduziam os matemáticos à procura de resoluções para as operações só com a utilização dos inteiros, culminando no final do século com as obras que sistematizam e difundem o uso dos números decimais.

A notação moderna das frações se deve aos hindus pela sua numeração decimal de posição e aos árabes que inventaram a famosa barra horizontal para separar o numerador do denominador. Mas a descoberta das frações decimais, pouco a pouco, fez transparecer o interesse em prolongar a numeração decimal no outro sentido, isto é, na representação dos números “depois da vírgula”, que permitia a notação sem nenhuma dificuldade para todas as frações.

O uso de frações decimais não fazia parte do sistema hindu original. Na China antiga, encontra-se um uso incidental de tais frações, do mesmo modo na Arábia medieval e na Europa do Renascimento. Quando Vietè recomendou, em 1579, o uso das frações decimais no lugar das sexagesimais, utilizando-se de uma barra vertical para separar a parte inteira da fracionária, elas já eram aceitas pelos matemáticos que se encontravam nas fronteiras da pesquisa. No entanto, em 1592, Vietè descobriu através de frações esta fórmula para π:

$$\pi = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdots}$$

O primeiro tratamento sistemático das frações decimais aparece em 1582, no trabalho *“Die Thiende”* do belga Simon Stevin de Bugres, que em 1585, fez uma recomendação a favor da escala decimal tanto para frações, quanto para inteiros, concentrando-se em seus décimos, centésimos, milésimos, ... como numeradores inteiros, colocando em um círculo acima ou depois de cada dígito a potência de dez assumida como divisor inspirado em Rafael Bombelli (1523-1573).

Assim o valor aproximado de π aparecia como:

3⓪1①4②1③6④ ou $\begin{matrix} ⓪ & ① & ② & ③ & ④ \\ 3 & 1 & 4 & 1 & 6 \end{matrix}$

Dez anos depois, o suíço Jobst Bürgi (1552 - 1632) simplificou a notação eliminando a menção inútil da ordem das frações decimais consecutivas, colocando no alto das unidades simples o signo ^{o}, escrevendo então $67\overset{0}{9}567$ para 679,567.

O maior impulso ao uso de frações decimais se deu após a invenção dos Logaritmos por John Napier em 1614. Em sua obra “*Descriptio*” (tradução em Inglês de 1616) essas frações aparecem como hoje, com um ponto separando a parte inteira da fracionária e em *“Rhabdologia”* (1617), descreve os cálculos com o uso de barras, referindo-se à aritmética decimal de Stevin e propõe, então, o uso de um ponto ou de uma vírgula como separatriz decimal. Mas foi a partir de sua obra “*Constructio”* de 1619 que o ponto decimal se tornou padrão na Inglaterra, já a nossa vírgula foi adotada pelo neerlandês Wilbord Snellius no início do século XVII.

A numeração decimal de posição assim concluída introduziu a infinita complexidade do universo dos números e levou os matemáticos a um avanço prodigioso.

Roberval (1602-1675) elaborou uma teoria de ordem entre razões, diluindo as frações no corpo dos números racionais, que foi por longo tempo a mais completa e a mais coerente teoria sobre a estrutura de semi-grupo ordenado de razões de grandezas. As conseqüências desta racionalização da noção e da representação das frações foram incalculáveis em todos os domínios.

Em 1748, Leonhard Euler publicou em sua *"Introductio in Analysis Infinitorum"* um tratado sobre o número e sugerindo: *"Para o número cujo logaritmo é a unidade, anotemos e, que é 2,718281..."*.

Dado pela série: $e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots$

Ou através de duas expansões como frações contínuas:

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\vdots}}}}} \quad \text{ou} \quad e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{4}{\vdots}}}}}$$

Em 1792, a invenção do sistema métrico decimal, totalmente coerente e perfeitamente adaptado ao cálculo numérico, ofertado pela Revolução Francesa "*a todos os tempos e a todos os povos para seu maior proveito"*, substitui os velhos sistemas de unidades arbitrários, incoerentes e variáveis.

Em 1830, Galois desenvolve a noção de grupo, favorecendo a coesão da álgebra e o surgimento de novas idéias abstratas. Dedekind, em 1872, define um conjunto infinito e, em 1874, Cantor observa que os conjuntos infinitos não são todos iguais, construindo uma hierarquia entre eles de acordo com a sua "potência", mostrando que o conjunto de todas as frações racionais é também um conjunto contável, isto é, pode ser colocado em correspondência biunívoca com os números inteiros positivos, tendo portanto a mesma potência que estes.

Mas, foi em 1879 que Dedekind escreveu a primeira definição explícita de corpo numérico, dando então aos conjuntos dos números racionais, dos reais e dos complexos a estrutura algébrica de um corpo.

Em 1881, Kronecker (1823-1891) que já trabalhava com o corpo numérico, formado pelo conjunto dos números da forma $a + b\sqrt{2}$, voltando às antigas idéias pitagóricas, insiste que a aritmética e a análise deveriam basear-se nos números inteiros afirmando que:

"*Deus fez os inteiros e todo o resto é obra do homem*".

2.1.4 – BREVE ANÁLISE EPISTEMOLÓGICA

Faremos uma análise epistemológica do conceito de fração, procurando detectar os momentos da história que foram representativos no desenvolvimento geral desse conceito. Com certeza, a metrologia, a divisão de bens e o quociente entre dois inteiros utilizados por diferentes povos originaram e provocaram o desenvolvimento das frações em diferentes épocas.

➭ Cada povo no seu tempo, com suas necessidades e usando seus próprios recursos, começou a representar as frações na forma escrita de diversas maneiras. Os egípcios, os babilônios e os gregos, deixaram registros desses trabalhos, nos quais predominavam tabelas de conversão de frações para equivalentes de numerador 1 (egípcios) ou tabelas de multiplicação (babilônios). Claramente a representação dos números fracionários variou seguindo os passos do sistema de numeração em uso por cada civilização.

➭ Uma minoria, os calculadores, usava efetivamente as frações, enquanto o povo em geral, não tendo necessidade de tal conhecimento, limitava seu uso às frações 1/2, 1/3 e 1/4, que aparecem na história como desenvolvimentos naturais.

➭ Na antigüidade, não se aceitava as representações fracionárias como números, com exceção dos babilônios cuja base sexagesimal favorecia tal reconhecimento. Grandes matemáticos passaram pela história sem que o status de número fosse dado às frações e mesmo após onde tal sistematização no século XIX, a rejeição a essa idéia não foi completamente excluída.

➭ A dificuldade de trabalhar com os números fracionários era tamanha, como citada em vários momentos da história, que os matemáticos batalharam durante séculos a procura da representação posicional para as frações decimais, o que facilitaria os cálculos com uma nova escrita que pudesse representar todas as frações. Uma grande trajetória foi percorrida da representação 2/5 para a representação equivalente 0,4. Apesar do sistema posicional de base 10 estar completamente desenvolvido, ele não foi estendido às frações, antes do século XVII.

➩ A sistematização do sistema métrico decimal ocorreu só em 1792, adaptando-se completamente ao cálculo no sistema decimal já em uso, substituindo várias unidades de medidas arbitrárias e incoerentes, que foram desenvolvidas para evitar o uso de frações, mas que dificultavam as transações entre os povos.

➩ Depois da sistematização das frações decimais por Stevin, a Matemática teve um avanço prodigioso, principalmente na Álgebra, com o desenvolvimento das estruturas algébricas de grupo, corpo, anel, ...

Kronecker, já no século XIX, mesmo trabalhando e exemplificando corpos numéricos a partir de números irracionais, resistia a tudo isso defendendo somente o uso dos números inteiros na matemática.

➩ A divisão de quantidades contínuas e sua representação abstrata, trouxeram a discussão sobre a possibilidade da divisão ao infinito abstratamente, embora o corpo, objeto da fração, por sua existência concreta só possibilitasse divisões finitas. Entender a passagem do discreto para o contínuo e do finito para o infinito é difícil e tal discussão aparece em alguns momentos da história.

2.1.5 – A NOÇÃO DE OBSTÁCULO

Guy Brousseau (1982) introduziu a noção de obstáculo como uma nova maneira de olhar os erros dos alunos:

"*Um obstáculo se manifesta pelos erros, mas estes não são devidos ao acaso, não são transitórios, nem irregulares, eles são reprodutíveis e persistentes. Além disso, esses erros, em um mesmo sujeito, estão ligados entre si por uma causa comum: uma maneira de conhecer, uma concepção característica, um conhecimento antigo e que tem êxito em todo um domínio de ações".*

Para Perrin-Glorian, *"os erros provocados pelos obstáculos são resistentes e reaparecem mesmo depois que o sujeito rejeita esse modelo do seu sistema cognitivo consciente, pois o obstáculo tenta adaptar-se localmente modificando-se com o mínimo de desgaste. Isso explica por que 'transpor" um obstáculo exige um* *trabalho da mesma natureza que a implantação de um conhecimento, isto é, interações repetidas e dialéticas do aluno com o objetivo do seu conhecimento".*

Um obstáculo tem as seguintes características em didática:

- É um conhecimento, uma concepção, mesmo que seja falsa ou incompleta, não é uma dificuldade ou ausência de conhecimento.

- Tem um domínio de validade e eficácia que produz respostas adaptadas a certos problemas ou classes de problemas, mas que conduz a respostas erradas em outros tipos de problemas.

- É resistente a toda modificação ou transformação e se torna predominante em certas situações, mesmo após ter sido substituído aparentemente por um novo conhecimento.

- A rejeição a esse conhecimento conduzirá a um novo conhecimento.

E podem ser classificados, segundo Brousseau, em:

Epistemológicos - são inerentes ao próprio saber, constitutivos do próprio conhecimento. Podem ser percebidos nas dificuldades que os próprios matemáticos encontraram na história e por isso *"não podemos nem escapar deles nem deixá-los escapar."* Compreendemos estes obstáculos a partir de pesquisas em Epistemologia e História da Matemática, percebendo que as grandes questões da Matemática são igualmente obstáculos epistemológicos para os alunos.

Didáticos - são os que dependem da escolha de um projeto do sistema educacional, ou seja, são as dificuldades criadas pela escola, através da estratégia de ensino escolhida que provoca posteriormente obstáculos ao desenvolvimento da conceituação. Estes obstáculos muitas vezes são inevitáveis e inerentes à necessidade da transposição didática, porém a percepção de um obstáculo didático pelo professor, lhe permite retornar à apresentação original do conceito em questão, para melhor explicitar a dificuldade vivida pelo aluno.

<u>Ontogênicos</u> - são os que procedem de limitações do sujeito em um dado momento de seu desenvolvimento mental, normalmente aparecem quando a aprendizagem está muito deslocada em relação a maturidade conceitual do sujeito.

2.1.6 – OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS

A partir do estudo histórico e da análise epistemológica encontramos os seguintes obstáculos:

1) <u>Representação Simbólica</u> - A representação usada hoje foi conquistada depois de séculos e a partir das representações individuais de cada povo. Chegar a uma única representação, que não fosse ambígua, não foi uma conquista simples. Os egípcios se firmaram nas frações unitárias, colocando um ponto sobre o símbolo do denominador; os babilônios, mesmo com um sistema de escrita numérico e posicional, não conseguiram resolver a ambigüidade desse sistema; os gregos, por sua vez, com seu sistema alfabético tinham dificuldades até de operar com as frações representadas dessa forma.

Campos e outros (1995) observaram que existe mais facilidade de os alunos trabalharem com as frações unitárias, e outras pesquisas mostram que as crianças reproduzem o símbolo sem entender seu significado, o que caracterizamos por um obstáculo epistemológico pelo fato de a criança, dentro da escola, não ser requisitada a obter efetivamente a representação da situação a que está submetida, através da linguagem natural e da exploração de processos que possam dar significado às representações de fração.

2) <u>Negação Da Necessidade Das Quantidades Fracionárias</u> - Uma das situações, que levou o homem a sentir necessidade dos números fracionários, foi a questão da medida. No entanto, percebe-se que ele lutou muito contra isso através da procura incessante de unidades de medida que permitissem medir qualquer coisa e obter como resultado um número inteiro de vezes dessa unidade, pois o conhecimento dos números naturais através da contagem o induzia a essa procura. Notamos que nossas crianças, em algumas situações, também se negam a aceitar os "números quebrados" como resultado,

provavelmente porque não são colocadas frente a situações em que realmente percebam a necessidade desse tipo de número, por exemplo a medição através de unidades não usuais.

3) Dificuldade Em Aceitar As Frações Como Número - Uma das grandes dificuldades dos matemáticos foi aceitar a fração como sendo um número. Euler, já no século XVII, era um deles e por isso apresentava duas vezes as mesmas propriedades numéricas, uma vez para os "números" (naturais) e outra para as "frações". Mesmo após Stevin ter dado o status de número às frações, ainda permaneceu uma certa resistência, que só foi se dissipar após a revolução francesa.

Essa grande dificuldade é essencialmente devido ao fato de o número fracionário ser de natureza diferente da dos números naturais. Ele não surge simplesmente de um processo de contagem, mas sim de um ato de partição de "algo" que se toma como um inteiro, o que leva as crianças a interpretarem as frações como um par de números naturais e não como um único número que também representa uma quantidade.

4) O Conhecimento Dos Naturais É Um Obstáculo - O conhecimento dos números naturais constitui em si mesmo um obstáculo ao aprendizado dos números fracionários. A maioria das crianças passa pelo mesmo processo dos matemáticos da história, pois também para ela só os números naturais têm o status de número. Como todo o seu conhecimento numérico está relacionado ao conjunto dos naturais, as crianças ao iniciarem o trabalho com frações tentam aplicar os conhecimentos que já possuem, tratando as frações como dois números naturais, que estão escritos um em cima do outro.

À medida que o estudo se aprofunda permanece a dificuldade em aceitar situações em que o dividendo seja menor que o divisor, sendo comum, o aluno alegar que não dá para dividir 2 por 5 mesmo depois de ter recebido muita instrução sobre frações, sem nenhuma relação com o conhecimento anterior que aconteceu naturalmente.

5) O Modelo De Referência - O aluno, quando começa a trabalhar com as frações, tem como modelo de referência o conjunto dos números naturais que é um modelo discreto; no entanto, as frações são introduzidas a partir do modelo contínuo com a concepção parte/todo, com a intenção de apresentar ao aluno um novo conjunto numérico, em que poderá resolver algumas situações, que o antigo não resolvia. Na história, a origem das frações se deu no modelo parte/todo no contínuo (divisão de terras) sendo por isso o modelo preferido pelo ensino. No entanto o aluno é levado a contar as partes, num movimento de “discretização” da área envolvida em pedaços contáveis, fazendo com que volte ao modelo original e perca o sentido do inteiro inicialmente considerado. Além disso, esse processo pode provocar a concepção de que “fração” é o numero de partes da unidade.

O obstáculo que se encontra na passagem do discreto para o contínuo é bem conhecido na História. A descoberta das grandezas incomensuráveis, depois de tentarem se livrar de tal idéia, levou à introdução do infinito na matemática grega. O incômodo de explicitar as noções abstratas de infinito e de contínuo, opostas às de finito e de discreto, traduz-se explicitamente com Ibn-alBanná, árabe do século XIII, como visto no desenvolvimento histórico.

2.2 – ALGUNS ASPECTOS DA TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA

Faremos, neste capítulo, um estudo de alguns aspectos que envolvem a transposição didática dos números fracionários, definindo-a e apresentando alguns estudos que a compõem como: uma análise dos manuais didáticos, um estudo das concepções de alunos e professores e finalmente, o levantamento de obstáculos didáticos e ontogênicos.

2.2.1 – A NOÇÃO DE TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA

A transposição didática indica "*o conjunto de transformações que sofre um saber à fim de ser ensinado*". Yves Chevallard (1982) diz que para o estudo de uma transposição didática é preciso partir do que ele chama "*saber sábio*"[1] e observar as transformações que sofre esse saber até a obtenção de um "*saber a ensinar*". Ou seja, para que os conhecimentos organizados pelos matemáticos sejam transmitidos aos alunos, eles devem sofrer amplas transformações e serem reorganizados da melhor forma, a fim de poderem ser ensinados e retidos pelos alunos.

A escolha dos objetos a ensinar depende do momento histórico em que são feitas, pois são influenciadas pelo tipo de sociedade, de sistema educativo, de desenvolvimento tecnológico, de formação do professor....

Para que o saber, que será ensinado, chegue efetivamente à sala de aula, é necessário também que os especialistas transformem esse conjunto de conhecimentos (definições, propriedades, demonstrações, ...) em um outro conjunto de conhecimentos a que os alunos possam ter acesso. Em geral, os objetos do ensino são organizados em propostas curriculares oficiais, que caracterizam o modo de ver e conceber o ensino de Matemática e servem de orientação para a prática dos professores.

Por outro lado, os livros didáticos propõem-se a seguir as orientações das propostas curriculares oficiais oferecendo um certo tipo de saber, que contribuirá

[1] É o saber acumulado completamente descontextualizado, destemporalizado e despersonalizado no intuito de o tornar o mais geral possível.

para a instalação de uma cultura particular e irá interferir diretamente na cultura dos alunos de uma certa época.

Acreditamos que a elaboração do saber escolar se faz a partir dos guias curriculares, dos livros didáticos e principalmente dos professores, pois estes é que irão verdadeiramente agir na transposição didática, adaptando o saber escolar já determinado, em um saber que deverá ser ensinado, conciliando os objetos de ensino com seus próprios conhecimentos e organizando-os no tempo de ensino[2]. É na elaboração do saber escolar que professor faz as escolhas didáticas que irão interferir diretamente na percepção e na concepção que os alunos irão desenvolver do que será ensinado.

Por outro lado, o modo de ensinar do professor está estreitamente ligado ao que ele pensa sobre a aprendizagem, o ensino, a matemática, a educação, a sua relação com o aluno, além da visão que tem do mundo e da sociedade em que vive. Enfim, o modo de ensinar reflete o que o professor é, em relação a sua competência profissional, a sua posição como cidadão e como ser humano.

Ao aluno compete o papel de transformar o saber que foi transmitido, em saber efetivamente aprendido, personalizado-o e inserindo-o em suas próprias representações a partir do saber apresentado pelo professor. Para que essa transformação aconteça, temos que considerar o processo de aprendizagem do aluno, o tempo que leva para aprender e a maturidade necessária para cada aprendizagem, ...

2.2.2 – OS MANUAIS DIDÁTICOS

Uma boa seqüência de ensino deve propiciar ao aluno a aquisição de um novo conhecimento, que lhe dê competência para utilizá-lo sempre que estiver diante de um problema ou situação que solicite esse conhecimento. Para isso, o aluno deve ser colocado a frente de vários tipos de situações envolvendo diferentes pontos de vista sobre o objeto matemático em questão, para que possa apresentar suas hipóteses de solução e desenvolver a conceituação de tal objeto.

[2] O tempo de ensino compreende o tempo didático que é determinado pelo programa e o tempo lógico que é determinado pelo curso de matemática que progride de um modo linear e é cumulativo.

1 – A PROPOSTA CURRICULAR

Na proposta curricular, os autores apresentam algumas discussões teóricas acerca do ensino de Matemática.

"... Considerando que aprender a língua natural é mais do que aprender a descrever o mundo, é também interpretar, criar significados, construir esquemas conceituais desenvolver o raciocínio lógico, a capacidade de compreender, imaginar, extrapolar.

De modo análogo, aprender Matemática é mais do que aprender técnicas de utilização imediata; é também interpretar, construir ferramentas conceituais, criar significados, sensibilizar-se para perceber problemas tanto quanto preparar-se para equacioná-los ou resolvê-los, desenvolver o raciocínio lógico, a capacidade de conceber, projetar, transcender o imediatamente sensível". (p. 13)

Assim, *"esta proposta foi estruturada tendo em vista as questões até aqui apresentadas. Os assuntos que a compõem são distribuídos em três grandes temas: Números, Geometria e Medidas. Através deles pretende-se atingir as grandes metas para o ensino de Matemática na escola básica: as aplicações práticas e o desenvolvimento do raciocínio lógico..."(p.14)*

Com relação aos números fracionários é esperado dos alunos da 3ª série que:

- Associe a representação fracionária:

• ao resultado da divisão de dois números naturais, sendo o quociente diferente de zero

• à porção da unidade a ser considerada a partir da divisão da unidade em partes iguais.

- Identifique frações equivalentes, através de comparações em representações concretas.

- Efetue adições e subtrações de números fracionários que apresentam o mesmo denominador.

- Perceba que os números racionais em suas representações decimais se comportam de modo análogo aos números naturais, com agrupamentos e trocas na base 10.

- Perceba a necessidade de distinguir a parte maior que o inteiro da parte menor, em uma dada representação decimal.

A seguir, aparecem alguns comentários e observações, com o propósito de auxiliar o professor, na introdução dos conteúdos. Entre eles "números racionais absolutos" com a seguinte recomendação: "*apresentar um outro tipo de número, diferente do natural. Trabalhar situações-problema associadas à divisão tanto com a idéia de repartição eqüitativa de grandezas discretas, como idéia de medida... de modo que os alunos percebam que há problemas que admitem como resposta um número natural e problemas que exigem outro tipo de número como resposta..."(p.48)*

Apresentam, também, algumas atividades de representação e de equivalência de frações a partir dos modelos discreto e contínuo, de operações de adição e subtração e da representação decimal a partir das frações decimais.

Na 4ª série, espera-se que o aluno:

- Amplie a compreensão de números racionais e de suas representações fracionária e decimal.

- Efetue adições e subtrações de frações nos casos em que apresentam denominadores iguais ou em que o conceito de equivalência possa ser aplicado diretamente.

- Efetue multiplicações de um número natural por uma fração.

- Desenvolva o conceito de área de uma superfície plana.

- Realize medições de uma superfície com unidades não padronizadas e unidades padronizadas.

- Resolva problemas que envolvem áreas e perímetros.

A proposta não apresenta seqüências de ensino para os professores, mas algumas sugestões com alguns exemplos, onde as representações geométricas aparecem com todos os traços de divisões e são abordadas sempre pelo modelo parte/todo.

2 – O ENSINO DE FRAÇÕES E OS LIVROS DIDÁTICOS DO 1º GRAU

A partir do livro didático, podemos constatar que o primeiro contato com o conjunto dos números fracionários se dá entre a 2ª e a 4ª série do primeiro grau, através do conceito de fração. A princípio, as frações aparecem como sendo representações de algumas partes de um inteiro, simbolicamente através dos números fracionários e de figuras totalmente divididas em partes iguais. A noção de equivalência de frações e as quatro operações também aparecem nesse momento do ensino, seguidas do estudo dos decimais e da porcentagem.

Na quinta série, esse conhecimento é formalizado, com a definição do conjunto dos números racionais absolutos (Q_+), de suas propriedades e de suas operações (inclusive a potenciação e a raiz quadrada) tratadas algoritmicamente através de regras que devem ser memorizadas. O mesmo acontecendo para os números decimais.

Na sexta série, o conjunto é ampliado com o acréscimo dos números negativos, passando a ser chamado simplesmente de conjunto dos números racionais e definido por: $Q = \left\{ \frac{a}{b} \quad / a, b \in Z, b \neq 0 \right\}$. A seguir, desenvolve-se, o estudo das proporções, de suas propriedades e da regra de três, a partir da introdução da concepção de fração como razão. Logo depois vem o ensino de juros que retoma a porcentagem.

Na sétima série, os alunos são apresentados aos números irracionais e começam a trabalhar com o conjunto dos números reais. A partir daí, temos a predominância de um trabalho algébrico, no conjunto dos reais no qual a partir do estudo de polinômios, se ensina produtos notáveis, fatoração de expressões algébricas, máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum de polinômios, como introdução ao ensino das frações algébricas, que irá propiciar a resolução de equações fracionárias.

Na oitava série, começam trabalhando com potenciação e radiciação com os números reais, finalizando com o estudo das frações irracionais através de técnicas para a racionalização dos denominadores dessas frações, sem uma justificativa clara para essa operação. Apesar deste ensino, muitos referem-se ao conjunto dos números racionais como sendo "o conjunto das frações".

3 – O ENSINO DE FRAÇÕES E O LIVRO DIDÁTICO DA 3ª E 4ª SÉRIE DO 1º GRAU

Os professores do estado têm acesso também a um livro desenvolvido pela Secretaria de Educação chamado "Atividades Matemáticas"[3]. O da terceira série apresenta 95 atividades, que foram experimentadas em sala de aula, envolvendo os assuntos dessa série, inclusive a introdução do número racional a partir da concepção de fração como quociente e como parte/todo.

De maneira geral, as atividades são interessantes e trabalham vários aspectos que envolvem a introdução do conceito de número fracionário. A única questão que levantamos é se o professor somente com esse caderno na mão tem condições de entender com o que está trabalhando, se percebe as várias concepções vinculadas às frações e, consequentemente, as características inerentes a cada uma delas. Afinal, ele tem que enfrentar as concepções espontâneas das crianças, que, algumas vezes, são verdadeiras localmente e, em outras, não, mas são logicamente adquiridas.

Como o livro didático é o guia de trabalho da maioria dos professores, estes seguem somente as suas sugestões, a sua seqüência de conteúdo e fazem com que os alunos pratiquem seus conhecimentos através de seus exercícios. No Brasil, por conta da formação do professor e da existência de leigos no magistério, torna-se um instrumento muito poderoso. Por esse motivo, resolvemos indagar sobre como os livros didáticos abordam tal ensino e, para isso, escolhemos aleatoriamente sete coleções.

[3] *"Atividades Matemáticas"*, 3ª série do 1º Grau, Secretaria de Estado da Educação, CENP, São Paulo, 1989.

Verificamos que enquanto o guia curricular sugere a introdução de frações na terceira série, a maioria das coleções o faz na segunda e encontramos como objetivo para o ensino de frações na segunda série, em uma das coleções[4], o seguinte:

• Identificar a fração como parte do inteiro.

• Empregar os termos um meio, um terço e um quarto em frações.

• Interpretar e resolver exercícios e problemas que envolvem números fracionários.

A seguir, como estratégias de ensino vem:

- Uso de material concreto (cartolina, frutas, chocolates) para representação do inteiro e suas partes.

- Representação e leitura das frações 1/2, 1/3 e 1/4, a partir de desenhos e gráficos.

- Resolução de exercícios e problemas que envolvem números fracionários.

Mas quando observamos o livro de 5ª série, verificamos que os objetivos se particularizam em cada tópico ensinado e formalizam-se como "Conjunto dos Números Racionais Absolutos".

Na maioria deles, o conteúdo é reintroduzido a partir das frações mais comuns: meios, terços e quartas partes, onde mostram, através de retângulos ou outras figuras geométricas planas, as frações 1/2, 1/3, 2/3, 1/4, ¾ ...

Aí, nos perguntamos: "Como é possível na 5ª série retornarmos à apresentação das "frações mais comuns" se a criança, segundo os objetivos, desde a segunda série já deveria estar dominando esse tipo de fração?"

"Como praticar a leitura, se esta faz parte do desenvolvimento da concepção de fração que o aluno tem? Como aplicar em problemas do cotidiano, se essas situações deveriam estar sendo colocadas para desenvolver o conceito e não como simples aplicações?"

[4] "Alegria de Saber Matemática", Lucina Passos e outros, exemplar do professor, Editora Scipione, 1991

Para tentarmos responder a essas questões, iremos enfocar nesta análise quatro pontos: **a apresentação das frações**, **os primeiros exercícios, os erros encontrados** e **os títulos utilizados**.

A APRESENTAÇÃO DAS FRAÇÕES

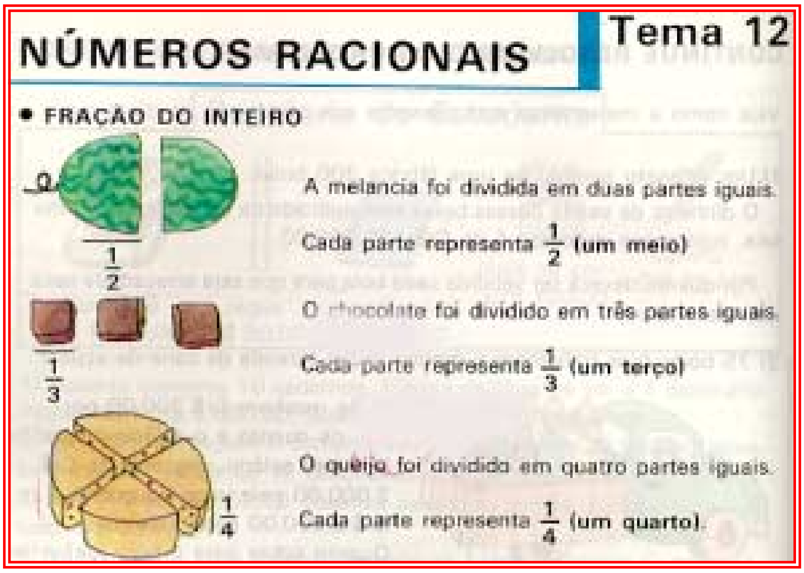


Ilustração da introdução de frações em um livro da 3ª série

Introdução das frações em quantidades discretas na 3ª série

CRITÉRIOS

Para esta análise, adotaremos os seguintes critérios de observação:

I) que situação é utilizada nessa apresentação,

II) se as situações variam nas primeiras apresentações,

III) que modelo é utilizado

IV) se as crianças são colocadas frente a situações vividas no decorrer da história para o desenvolvimento desse conceito (por exemplo: em situações de medição, distribuição, divisões,...).

V) se o conceito está implícito como ferramenta[5] para a resolução de uma situação problema (por exemplo: como sugere o guia, em situações de divisão em que o quociente não é um número natural) ou se aparece como um objeto de estudo.

RESULTADOS

		I			II	III	IV	V
Livro	Série	SITUAÇÃO			Variação da Situação	Modelo		
		1/2	1/3	1/4				
1	2ª	Campo futebol	Bolo	Bolo	não	parte/todo	não	objeto
2	3ª	Melancia	Chocolate	Queijo	não	parte/todo	não	objeto
3	2ª	Bolo	Bolo	Bolo	não	parte/todo	não	objeto
4	2ª	Bolo	Bolo	Chocolate	não	parte/todo	não	objeto
5	2ª	Chocolate	Pão	Bolo	não	parte/todo	não	objeto
6	2ª	Bolo	Bolo	Bolo	não	parte/todo	não	objeto
7	3ª	Retângulo	Retângulo	*****	não	parte/todo	não	objeto

CONSIDERAÇÕES

Observando o quadro podemos concluir que os livros didáticos com relação à introdução do conceito ferem alguns princípios básicos, tidos com fundamentais para uma boa aprendizagem

[5] Um conceito como ferramenta é adaptado a um problema se ele é necessário ou eficaz para resolvê-lo, podendo se adaptar a vários problemas e o caráter ferramenta desse conceito pode estar implícito ou explícito. Quando os conhecimentos são oficializados eles recebem o status de objeto matemático.

1) As situações colocadas para dar significado ao conceito;

- na realidade não são situações, pois os alunos não participam delas. Elas são simplesmente, ilustrações para “mostrar o que se quer ensinar”; a pura apresentação de ilustrações totalmente divididas nada garante, apenas desenvolve, quando muito, a linguagem de frações.

- não há variação de situações que permitam ao aluno dar realmente um significado ao que está aprendendo, o modelo é estático, pois as ilustrações mostram a divisão de bolos, maçãs, queijos, ... não colocando o aluno em uma outra situação, apenas o objeto muda, mas a “suposta” ação sobre ele não;

- as ilustrações são acompanhadas de definições do tipo: *"cada parte do inteiro é uma fração do inteiro"*, que não fala da necessidade das partes serem iguais, pois tudo o que é apresentado já está assim dividido, o que impede o aluno de desenvolver tal percepção. Da mesma forma, não fica explícito, quando citado, o que é para ser considerado como "partes iguais", levando o aluno a entender que só podemos identificar uma fração em um inteiro quando todas as partes desse inteiro têm mesmo tamanho e mesma forma.

- O significado dessas situações para o aluno também é questionável, pois ninguém corta uma maçã em três pedaços como os livros sugerem e ninguém corta um bolo em duas ou três partes, normalmente vai-se cortando em fatias aleatoriamente. Estas situações não fazem parte da realidade.

2) A maioria dos livros não esclarece o que está sendo considerado como o todo, o inteiro ou a unidade. Os modelos contínuo e discreto se misturam sem que o aluno seja colocado em situações onde possa perceber as diferenças de natureza entre o inteiro de um e de outro. Além disso, colocam situações onde uma figura geométrica, um bolo ou uma coleção de objetos são tratados igualmente e pedem ao aluno que "desenhe no seu caderno 2 inteiros do tamanho que você quiser", sem uma discussão anterior.

3) O modelo parte/todo no contínuo é utilizado em todos os livros como ponto de partida para o ensino. O modelo discreto aparece diretamente nos exercícios normalmente com o título *"frações de um número"*, onde sempre o número de elementos do conjunto é um múltiplo do número de partes que se

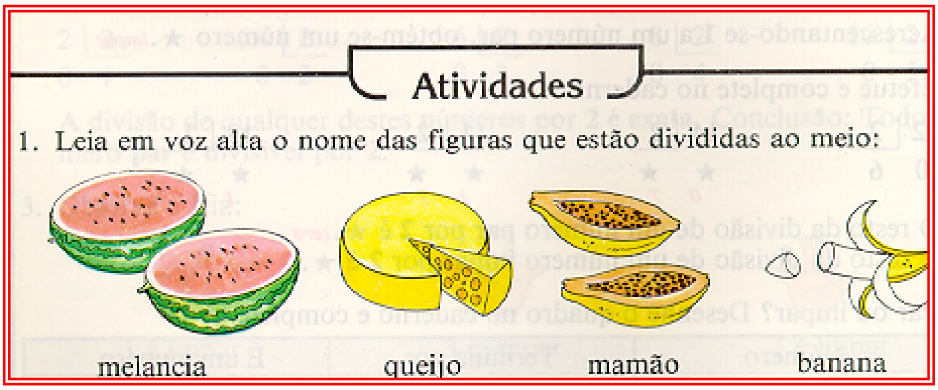
deseja, impedindo que se perceba as impossibilidades desse modelo. Não há, em nenhum momento, sugestões para que o aluno participe efetivamente de situações de partição.

4) Da forma como esse ensino é apresentado no livro didático, o aluno é conduzido a adquirir concepções errôneas sobre as frações (as partes podem ser desiguais), como desenvolver a linguagem própria das frações, a partir da nomeação de figuras sempre do mesmo padrão (completamente dividida), o que faz com que o aluno erre quando ocorre qualquer mudança nesse referencial,...Na realidade, acreditamos que o aluno não desenvolve uma compreensão clara sobre frações, pelo contrário desenvolve um procedimento de dupla contagem das partes no modelo contínuo, a partir da prévia divisão das figuras completamente em partes iguais.

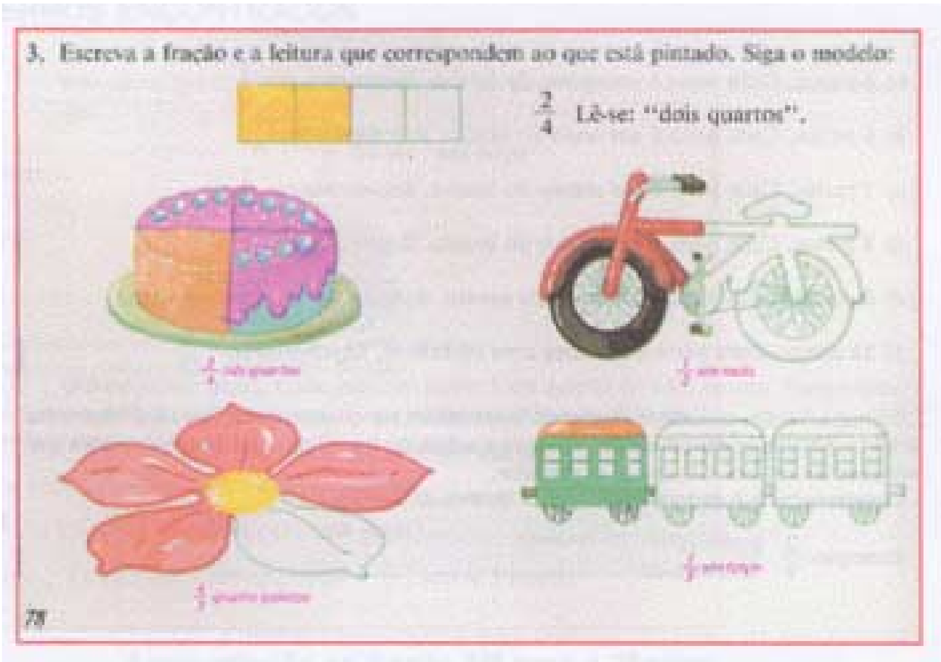
5) Nenhuma das coleções faz qualquer referência à história. O aluno não é colocado em uma situação de problema de divisão, de distribuição ou de medição, segue o modelo parte/todo, que historicamente foi um dos que permitiu o surgimento das frações, mas não se refere ao "tamanho" (área) nem à forma dessas partes.

6) Em nenhum momento aparece a fração implicitamente como ferramenta para a resolução de uma situação problema na introdução desse novo conhecimento. Todos os autores a tratam explicitamente como um objeto de ensino, e os problemas para os alunos resolverem são introduzidos como aplicações a partir de um modelo já resolvido.

OS PRIMEIROS EXERCÍCIOS



Exercício apresentado aos alunos de 2ª série.



Exercício de um livro de 3ª série

CRITÉRIOS

I - se permitem diversos métodos de resolução

II- se apresentam situações-problema onde o conceito possa ser utilizado.

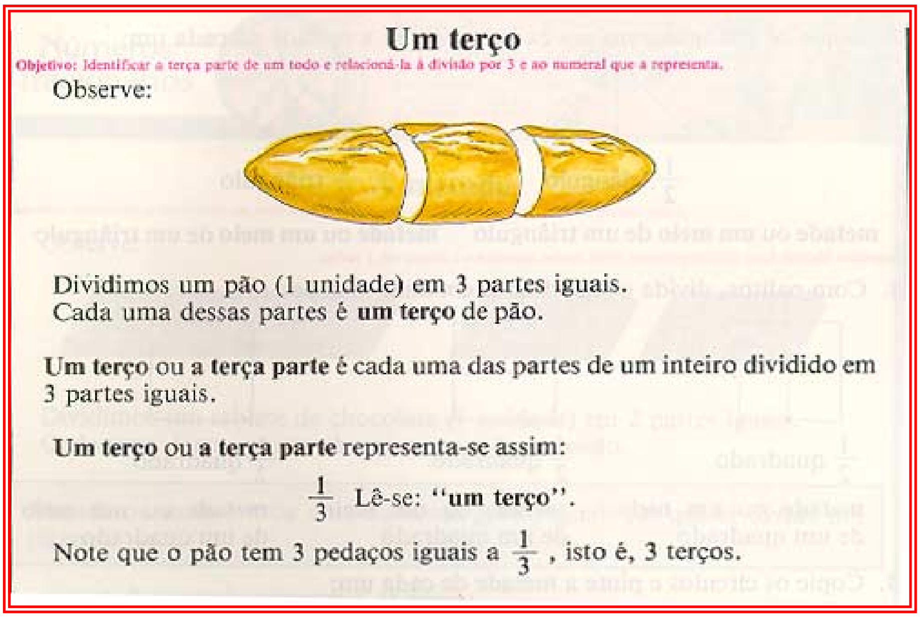
III - se o aluno tem autonomia nas resoluções

CONSIDERAÇÕES

As ilustrações da página anterior já nos dão uma idéia dos tipos de exercícios que encontramos nos livros didáticos. Eles não possibilitam ao aluno o uso de diversos processos de resolução e não permitem que o aluno tenha autonomia.

Na maioria das coleções é solicitado aos alunos que resolvam os exercícios a partir de um modelo dado, que preencham lacunas ou que façam cópias. O maior treino a que os alunos são submetidos é nomear as frações como parte de um inteiro anteriormente dividido e com isso adquirir uma linguagem através da repetição incansável.

OS ERROS ENCONTRADOS



Um terço

Objetivo: Identificar a terça parte de um todo e relacioná-la à divisão por 3 e ao numeral que a representa.

Observe:

Dividimos um pão (1 unidade) em 3 partes iguais.
Cada uma dessas partes é **um terço** de pão.

Um terço ou a **terça parte** é cada uma das partes de um inteiro dividido em 3 partes iguais.

Um terço ou a **terça parte** representa-se assim:

$\frac{1}{3}$ Lê-se: "**um terço**".

Note que o pão tem 3 pedaços iguais a $\frac{1}{3}$, isto é, 3 terços.

Apresentação na fração 1/3 para a 2ª série.

Na observação dessas coleções nos deparamos com diversos tipos de erros que levam os alunos a repeti-los e a não conceituar claramente o objeto que estão estudando. Por exemplo na figura anterior, claramente o pão não está dividido em partes iguais, trata-se de um contexto não verdadeiro. Alguns desses erros são:

I - Erros de Linguagem

Aparece constantemente a mistura da linguagem natural escrita com a linguagem matemática, que até seria permitida em situação de ensino, pois ela acontece na linguagem oral; no entanto, poderia ser evitada como um modelo a ser seguido como sugerem alguns livros.

II - Erros Conceituais

(a) Objeto confundido com a representação: Como sabemos, o número é um objeto matemático abstrato, sobre o qual não podemos agir; no entanto, alguns autores tomam o objeto pela sua representação, na medida em que colocam “Fração de um Número” como título para a introdução do trabalho com frações de quantidades discretas.

(b) Desigualdade das partes: Apresentação de ilustrações para serem representadas por frações, nas quais as partes visivelmente não são iguais.

(c) Contexto Inverossímil: A fração sendo tomada em cima de objetos impossíveis de serem representados por uma fração dentro da concepção apresentada: como a terça parte de um pão, uma parte das pétalas de uma flor...

(d) Concepção errônea de equivalência: o uso indevido da fração de quantidade discreta para mostrar o total de elementos do conjunto. Por exemplo, usar $\frac{2}{2} = 8$ para dizer que as duas metades do conjunto possuem oito elementos.

(e) Representação errônea de algoritmos: Para mostrar a equivalência de frações através da propriedade fundamental das proporções[1] (produto em cruz), o autor faz uso de um algoritmo inaceitável, sugerindo inclusive a sua reprodução.

$\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$ são frações equivalentes porque $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4} = \frac{4}{4}$.

---

[1] $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow a \times d = b \times c$ desde que $b, d \neq 0$

(f) Incoerência conceitual: Uma das coleções apresenta a fração $\frac{1}{2}$ como sendo o mesmo que $1 \div 2$, mas perde esta referência de divisão para as outras frações, como se $\frac{3}{5}$ não pudesse ser representada por $3 \div 5$.

O quadro abaixo sintetiza essas observações.

Livro	Série	Erro I	Erro II
1	2ª	sim	a
2	3ª	sim	a, b, c, d, e
3	2ª	sim	b, c
4	2ª	sim	b, c
5	2ª	sim	b, c, e
6	2ª	não	b, c
7	3ª	não	f

CONSIDERAÇÕES

Para “facilitar” o entendimento da criança, alguns erros de linguagem são cometidos, sendo que o principal deles é a mistura na escrita da linguagem natural com a linguagem matemática, em expressões do tipo: "metade de 8 = 8:2 = 4" ou "metade = meio = 1/2", que por aparecerem com muita freqüência podem levar o aluno a não entender a representação de uma igualdade através do símbolo "=", passando a utilizá-lo simplesmente como um símbolo que substitui a palavra “igual” em qualquer contexto.

Os erros conceituais encontrados fazem com que o aluno não desenvolva efetivamente a conceituação de fração, pois é obrigado a reproduzir os modelos que contêm tais erros. Em uma mesma coleção, a fração 4/4 têm vários significados diferentes e incoerentes, o que não poderia acontecer em um livro didático, onde a principal sugestão para o aluno é “seguir o modelo”.

OS TÍTULOS UTILIZADOS

Os títulos dos capítulos variam de capítulo para capítulo ou de livro para livro.

Livro	2ª Série	3ª Série	4ª Série
01	Números Fracionários: Meios, Terços e Quartos	Frações	Números Racionais: Frações
02	Números Racionais: Fração do Inteiro	Números Racionais: Fração do Inteiro	Números Racionais: Fração do Inteiro
03	Números Fracionários	Frações	Números Racionais: Frações
04	Números Fracionários	Números Fracionários	Números Fracionários
05	Números Fracionários	Números Fracionários: Representação	Números Fracionários
06	Números Fracionários: Meios, Terços e Quartos	Números Racionais	Números Racionais: Representação Fracionária
07	Noção de Fração	Noção de Fração	Os Números Racionais

A maioria das coleções altera o título, não impondo nenhuma diferença entre frações (forma de escrita), números fracionários (que podem representar números reais) e números racionais. Entendemos que a fração é uma representação que está diretamente ligada a uma situação, servindo para quantificá-la e que o termo fração está sempre ligado a uma maneira de representar uma parte de alguma coisa.

Na medida em que esse conhecimento é descontextualizado, forma-se o conceito de número fracionário, ou seja, os números que são escritos na forma de fração. Nas séries iniciais, acreditamos que os autores poderiam se deter em trabalhar com o desenvolvimento da noção de fração e na conceituação dos números fracionários, até porque o nome números fracionários é mais natural do que números racionais para essa faixa etária.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Acreditamos que, o ensino de frações está diretamente ligado à situação escolar, visto que alunos entre 8 e 9 anos não têm contato com números fracionários no seu dia-a-dia, a não ser com metade, terço ou quarto apenas na linguagem oral, pois não têm necessidade de representar de outra forma esses termos, o mesmo não acontece com os números decimais que são encontrados com muito mais freqüência nas calculadoras, nos preços, ...

Além disso, percebe-se um enfoque mecanicista no ensino de frações, a partir do livro didático. O conteúdo é apresentado a partir de definições e de modelos que devem ser reproduzidos mecanicamente, levando a um desenvolvimento precário da linguagem e do reconhecimento de frações, a partir de modelos estáticos que não permitem a aquisição plena desse conhecimento.

Um formalismo excessivo permeia todas as obras, sendo que muitas partem simplesmente de uma definição de fração e no lugar do desenvolvimento do conteúdo a partir de um trabalho de construção, apresentam algoritmos prontos para serem reproduzidos, por exemplo, o "produto em cruz" para a verificação de frações equivalentes imediatamente após a apresentação desse conceito através de algumas ilustrações ou tabelas.

Por outro lado, há sempre sugestões para os professores trabalharem em atividades com material concreto, porém essas sugestões não são concretas, pois não especificam o material mais apropriado e para que tipos de atividades poderia ser utilizado, além disso, não prevê a possibilidade de os professores não estarem habilitados para esse tipo de atividade. Na verdade, o professor deve ter clareza, por exemplo das diferenças inerentes às quantidades discretas e quantidades contínuas com relação a sua natureza, percebendo as possibilidades e limites de cada uma.

A riqueza de concepções e as características de cada uma delas faz das frações um conteúdo relativamente difícil de ser ensinado e entendido. Por isso, o enfoque dado pelo livro didático é apropriado quando se pensa que é mais fácil ensinar sob um único ponto de vista, até porque trabalhar todas as concepções, pensando em permitir ao aluno construir seu próprio conhecimento, implicaria numa melhor formação do professor em desenvolver habilidades e competências para lidar com situações de sala de aula. Para o professor, que se preocupa com a construção do conhecimento pelo próprio aluno, o livro didático e o livro do professor, ora observados, teriam que sofrer mudanças radicais em suas concepções.

Voltando às nossas questões da página 39, agora podemos entender o porquê do programa de quinta série reiniciar o ensino de frações. Aqui a formalização é explícita e o aluno tem a chance de memorizar definitivamente as regras que já deveria conhecer por outros caminhos. Acreditamos que como o conceito não é construído, se torna necessário, pelo menos, aprender a operar o mínimo possível com esses números para seguir em frente.

2.2.3 – A CONCEPÇÃO DOS ALUNOS

Aplicamos um mesmo teste (anexo 01) em alunos de duas classes do primeiro grau da rede pública municipal, com uma média de 11 anos de idade, sendo uma de 3ª série, com 25 alunos sem qualquer instrução sobre fração, e uma de 4ª série, com 29 alunos que já haviam tido alguma instrução. O objetivo era observar como as primeiras enfrentam intuitivamente situações de partição, de operação e de resolução de problemas, e o que é acrescentado de conhecimento após uma instrução inicial que foi feita no modelo parte/todo no contínuo.

O TESTE

O teste foi elaborado com 10 questões divididas em quatro grupos:

<u>GRUPO 1</u> - questões de distribuição (questões 1 a 3).

O objetivo das três questões deste grupo é perceber como as crianças enfrentam situações de distribuição simples, como as representam, ou seja, se ao dividir as figuras para dar as respostas, se preocupam com a igualdade das partes do inteiro e que linguagem usariam para darem as respostas.

<u>GRUPO 2</u> - questões de representação (questões 4 a 7).

O objetivo das quatro questões é analisar que tipo de representação a criança tem mais facilidade de manipular. Será que é natural para ela escrever um número na forma a/b? Será que é natural para ela associar um número na forma a/b a uma figura? Será que elas se preocupam com a igualdade das partes na representação geométrica?

GRUPO 3 - operações: adição e subtração (questão 8).

O objetivo dessa questão é analisar que tipo de algoritmo ou recursos o aluno utiliza, na resolução de adições e subtrações e observar sua percepção sobre a possibilidade de operar com "esses números".

GRUPO 4 - problemas (questões 9 e 10).

O objetivo é verificar o desempenho dos alunos na resolução de dois problemas envolvendo frações, um se utilizando da linguagem natural e procurando verificar se existe alguma intuição para os termos metade e quarta parte, e o outro já usando a linguagem de frações. Acreditamos que tanto os alunos de terceira como os de quarta, resolvam o primeiro problemas, mas o segundo só deve ser resolvido por alguns alunos da Quarta.

A APLICAÇÃO

O teste foi respondido individualmente pelo aluno em sala de aula, por escrito e na presença da professora da classe.

Foi solicitado tanto para os alunos da terceira série, quanto para os da 4ª, que resolvessem as questões da maneira que eles achassem mais apropriada e nada foi dito com relação ao conteúdo do teste. Tentou-se ao máximo perceber as respostas sem interferência externa.

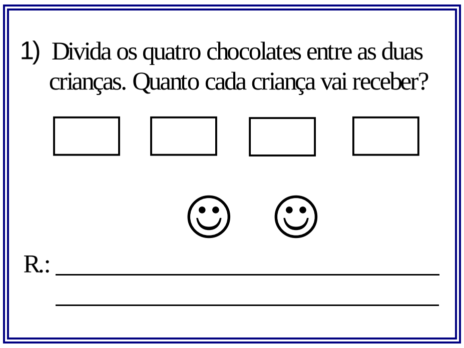
Os alunos da 3ª série quiseram saber o que era fração e afirmaram que ainda não tinham aprendido e os da 4ª série apresentaram uma grande preocupação em não errar, pois o conteúdo já havia sido ensinado mas, fizeram questão de dizer que não haviam aprendido a adição com frações de denominadores diferentes e a professora comentou também, que eles não haviam aprendido “mínimo múltiplo comum” para poderem responder tais questões.

Durante todo o teste, nenhuma criança pediu régua, provavelmente por não sentirem necessidade alguma de medir as figuras antes de dividi-las.

A ANÁLISE

Iremos apresentar cada questão e a seguir fazer uma análise com os objetivos, as possíveis resoluções e uma previsão do resultado mais provável.

QUESTÃO 01


1) Divida os quatro chocolates entre as duas crianças. Quanto cada criança vai receber?

R.: ______________________________

Apresentamos uma situação de distribuição de quatro chocolates entre duas crianças, esperando que todos acertassem a questão. A resposta pode ser encontrada pela simples divisão de 4 por 2, nos naturais, ou pela ligação de dois chocolates a cada criança. Acreditamos que esta distribuição seja simples para as duas turmas, sendo provável que os alunos para resolvê-la usem o segundo procedimento, dando como resposta que cada criança vai receber dois chocolates.

RESULTADOS

3ª série - 88% de acertos 4ª série - 76% de acertos

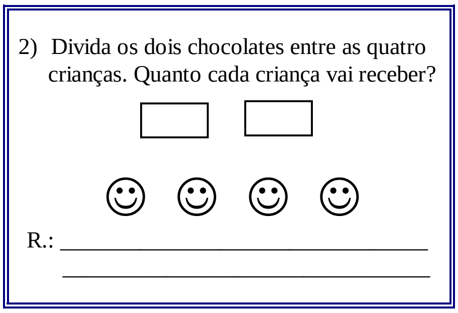
Os alunos da 3ª série, como previsto ligaram, 2 chocolates, a cada criança sem dificuldades, mas os da 4ª, como já haviam recebido instrução sobre fração, na tentativa de usar a linguagem apropriada, acabaram errando mais.

TIPOS DE ERROS ENCONTRADOS

- Os três alunos da terceira série que erraram fizeram a ligação de dois chocolates para cada criança, mas mesmo assim dois responderam 4 chocolates e o outro respondeu que a criança já havia recebido, provavelmente não entendendo a questão.

• Os alunos da 4ª deixaram de considerar um conjunto com quatro unidades e passaram a considerar cada chocolate como uma parte, isto é, 1/4 dos chocolates, respondendo, então, que cada criança receberia 2/4 ou 1/2 (4 alunos), "duas partes" (2 alunos), e um que dividiu os chocolates ao meio respondeu 4 partes.

<u>QUESTÃO 02</u>



Nesta situação, acrescentamos a necessidade de dividir os chocolates para que a distribuição seja possível. Com esta mudança, cada chocolate deverá ser tomado como um inteiro e deverá ser dividido em duas partes iguais. Esperamos que dividam sem problemas e que os alunos da terceira série respondam que cada criança vai receber um chocolate, pois provavelmente devem considerar cada parte como um pedaço e que os de quarta respondam metade de um chocolate.

<u>RESULTADOS</u>

3ª série - 20% de acertos　　　　4ª série - 66% de acertos

Consideramos acerto, para as duas turmas, a resposta “metade do chocolate”. Interessante notar que na 3ª série somente 2 alunos dividiram as figuras do chocolate e 11 ligaram um chocolate a duas crianças, o que não está completamente errado. Já na 4ª série, somente 4 alunos não dividiram as figuras, no entanto, nenhum se preocupou em dividir exatamente na metade.

Na 3ª série, entre os alunos que erraram, encontramos algumas respostas interessantes: *"duas crianças receberiam um chocolate cada uma e sobrariam duas crianças", "cada criança receberia um chocolate e duas ganhariam uma parte ou um pedaço", "cada duas crianças ganharia um chocolate" ou "uma* *metade" ou "um chocolate" ou "uma parte", "nem um chocolate", "não dá para dividir".*

Este resultado foi uma surpresa, pois acreditávamos que dividir 2 chocolates ao meio para distribuir entre 4 crianças fosse uma ação intuitiva sem problemas, da mesma forma que o termo metade. Mas, acreditamos que a situação do teste, efetuado na escola sem uma manipulação direta, fez com que os alunos procurassem um outro caminho, que não o da experiência, levando-os a errar, o que na vida real provavelmente fosse feito naturalmente.

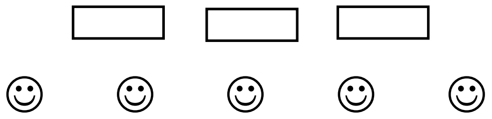
Na 4ª série, dos alunos que erraram após a divisão da figura, aparecem as seguintes respostas: "1 barra" ou "1 chocolate" ou "1 pedaço" ou "1 parte", considerando que cada parte assume, após a divisão, o papel de um novo inteiro. Outros responderam: "meia metade", "meia parte", ou "meio pedaço", tentando provavelmente responder a questão através da linguagem "já aprendida".

TIPOS DE ERROS ENCONTRADOS

- Tanto para os alunos da 3ª como para os de 4ª, depois da divisão cada parte encontrada é considerada como um novo inteiro.
- Não aparece o procedimento de dividir a figura, embora fique implícito quando ligam um chocolate a duas crianças.
- Os alunos da 4ª série usam inadequadamente a linguagem aprendida, respondendo: “meia metade” ou “meio pedaço”.

QUESTÃO 03

3) Divida os três chocolates entre as cinco crianças.
Quanto cada criança vai receber?



R.: ______________________________________
____

Aqui permanecemos no modelo parte/todo no contínuo, mas neste caso, além da necessidade da divisão de cada chocolate antes da distribuição, aumentamos o grau de dificuldade pretendendo verificar se o aluno percebe a necessidade de dividir cada chocolate em cinco partes, para depois distribuir três partes para cada uma das crianças. Como a resposta a esta questão exige do aluno a linguagem própria ao conceito, esperamos que os alunos da 4ª série respondam 3/5 de um chocolate ou 9/15 se "discretizar" os três chocolates, passando a entendê-los como quinze após a divisão. Para os alunos de 3ª série, esperamos que respondam que “cada criança irá comer três chocolates” se perceber a divisão, o que acreditamos seja muito difícil.

RESULTADOS

3ª série: nenhum acerto 4ª série: somente um acerto

Verificamos dois tipos de procedimentos:

- não dividiram as figuras dos chocolates

Com as seguintes respostas: "1 chocolate", "1 para cada", "1 barra", "sobram duas crianças", "3 crianças com 3 chocolates", "3 chocolates", "cada criança recebe 1 pedaço e 1 criança fica com 1 inteiro" ou "não dá para dividir", "não consegui", "não entendi", "nem um", "metade".

- dividiram as figuras dos chocolates

Com as seguintes respostas: "meia metade", "um pedaço", "uma parte", "cada um recebe um e sobra um" (dividindo cada chocolate ao meio), "quatro partes", "um inteiro", "um chocolate", "quatro recebem 1 e sobram duas crianças" etc..

Enquanto o aluno, sem instrução, recusa-se a dividir a figura para responder a questão, a instrução de fração acrescentou essa possibilidade, mas não a concepção de fração como parte de um todo. Os alunos dividem o chocolate, mas não esgotam o inteiro, fica implícita na maior parte dos casos a divisão de naturais com a resposta com restos. A linguagem aparece tanto na forma simbólica como na linguagem natural (1/2 ou metade), mas o problema fica sem solução. O único aluno que respondeu corretamente não dividiu a figura.

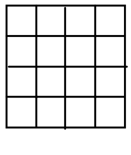
Além disso, não apareceu nenhuma resposta em que o aluno descrevesse a ação que poderia ter no cotidiano, como se a situação escolar intimidasse esses procedimentos, além disso percebe-se que a instrução desenvolveu a linguagem, mas não o conceito.

TIPOS DE ERROS ENCONTRADOS

- Impossibilidade de dividir a figura em mais de 2 ou 3 partes.
- Não esgotamento do inteiro na distribuição, sobram crianças quando não dividem os chocolates ou sobra chocolate quando o dividem ao meio.
- Uso inadequado da linguagem aprendida na escola.

QUESTÃO 04

4) O quadrado está dividido em 16 partes iguais.Pinte 12 dessas partes.
Você pintou que fração do quadrado?



R.: ______________________________
____

Nesta questão, partimos de uma explicação na linguagem natural associada à figura de um quadrado dividido igualmente em 16 partes, que pode ser interpretada como a reconfiguração parte/todo no contínuo de um quadrado ou como o agrupamento de dezesseis quadradinhos, com quantidade discreta formando o quadrado maior. Permanecendo no modelo parte/todo no contínuo, pedimos que ele pintasse 12 dos 16 quadradinhos e depois identificasse a fração do quadrado que pintou. Estamos introduzindo a palavra fração, sem nenhuma instrução, a fim de observar o que o aluno associa a essa palavra.

Acreditamos que pintar 12 partes das 16 não ofereça nenhuma dificuldade e por isso todos pintarão o que está sendo pedido. No entanto, os alunos da terceira série devem responder simplesmente que pintaram 12 quadradinhos e os da quarta, que já possuem alguma linguagem de fração, respondam 3/4 ou 12/16, visto que a figura da questão não foge ao modelo que ele recebeu no ensino.

RESULTADOS

3ª série - nenhum acerto 4ª série - 45% de acertos

Na 3ª série, todos pintaram 12 quadradinhos dos 16, como tínhamos previsto. Mas, ao contrário do que esperávamos, somente 5 crianças responderam que haviam pintado 12 quadradinhos, as outras respostas foram: "em pé" ou "deitado" ou "verde" ou "azul", referindo-se à qualidade do que fizeram e não à ação feita; "pintou 12 e sobrou 4" (influência do conhecimento dos números naturais); outros pintaram, mas responderam ou que não sabiam ou deixaram em branco, e um respondeu “12 infrações”, induzido pelo termo usado no próprio teste.

Na 4ª série, por causa da instrução recebida, aparecem respostas do tipo: *"doze avos dessas frações do quadrado", "fração 12 inteiros", "12/12", "4/12", "12/4", ...* O ensino desenvolveu uma nova linguagem e forma de escrita, mas com um significado próprio para a criança, pois aparece principalmente concepções do tipo parte/parte, para a representação apresentada, talvez uma noção intuitiva de razão entre as partes através da comparação.

TIPOS DE ERROS ENCONTRADOS

- Todos os alunos da 3ª série pintaram os 12 quadradinhos, mas nenhum relacionou os números 12 e 16, o que nos leva a crer que a linguagem simbólica não é natural. E mais, a palavra fração não tem significado para eles, pois muitos queriam saber o que era fração.

- Os alunos da 4ª série perderam a referência do inteiro em que estavam trabalhando, mas usaram a linguagem aprendida, respondendo 12/12 ou 1/12.

- Apareceu, nos alunos da 4ª série, a interpretação parte/parte[1] para a situação com as respostas 12/4 ou 4/12 e também a interpretação todo/parte[2], com a resposta 16/12.

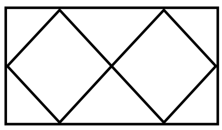
- Nos alunos da 4ª série é facilmente percebido o desenvolvimento da linguagem de frações mas não do conceito, pois responderam a questão na forma de fração, aparecendo outras interpretações.

QUESTÃO 05

5) Pinte na figura abaixo:

$\frac{1}{16}$ de verde $\frac{7}{16}$ de azul

$\frac{5}{16}$ de amarelo $\frac{3}{16}$ de vermelho



R.: ____

____

Nesta situação, pedimos que o aluno pintasse de cores diferentes algumas frações de um inteiro, representado através de uma figura. Insistimos no denominador 16 para ver se o aluno faria alguma analogia com o exercício anterior e percebesse que poderia dividir a nova figura em 16 partes. A figura dada foge ao padrão usual e, se o aluno realmente tivesse conhecimento do que é uma fração do inteiro, ele poderia responder a questão, até sem dividir um dos quadrados. Na verdade, queremos perceber se os números fracionários que aparecem na questão têm algum significado tanto para o aluno de 4ª, quanto para o de 3ª e se ele consegue reconhecê-los na figura dada. Acreditamos que os de

[1] Relação da parte pintada para a parte não pintada da figura.
[2] Relação do número total de partes para as partes pintadas da figura.

3ª não resolvam a questão, pois esses conhecimentos não são intuitivos e que os de 4ª redividam a figura e pinte as partes solicitadas.

RESULTADOS

3ª série - nenhum acerto 4ª série - 34% de acerto

Nenhum aluno da 3ª série dividiu a figura na tentativa de conseguir 16 partes, visto que, como previmos, as frações apresentadas não devem ter significado para eles. A maioria pintou alguma parte da figura com as cores sugeridas na questão, mas sem relação com a proposta da questão.

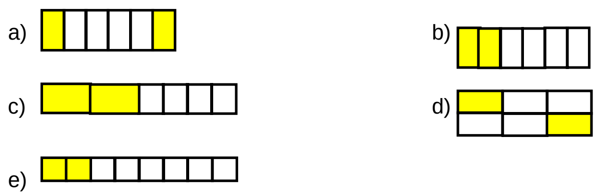
Os alunos da 4ª série, como já vimos, dividem a figura com mais facilidade, no entanto, 13 alunos não o fizeram e ainda apresentaram o mesmo comportamento que os da 3ª série. Isso nos leva a crer que a maioria ainda resiste em redividir a figura dada para associá-la à fração pedida, pois estão acostumadas a recebê-las totalmente divididas. Dos que dividiram a figura, somente 2 não conseguiram representar corretamente.

TIPOS DE ERROS ENCONTRADOS

- Nas duas séries, aparece com força a impossibilidade da redivisão da figura dada para associar a fração pedida.

QUESTÃO 06

6) Quais dos desenhos abaixo podem ser representados pela fração $\frac{2}{6}$?



Nesta situação, permanecemos com o modelo parte/todo no contínuo e pedimos a associação da representação simbólica com a representação geométrica, solicitando que o aluno identificasse as figuras que representassem a fração dada. Nos itens (a) e (b), as figuras são congruentes, mas as partes pintadas estão em locais diferentes; no item (c), o inteiro está dividido também em seis com as partes visivelmente diferentes; no item (d), o retângulo é congruente aos das questões (a) e (b), mas as partes iguais têm forma diferente, e no item (e), a figura está dividida em oito partes iguais, com duas pintadas e dois sextos representando a interpretação parte/parte.

Pretendemos verificar se as diferentes maneiras de representar geometricamente uma fração interferem ou não na resposta; isto é, se os alunos percebem a desigualdade das partes, se assinalam mais de uma figura, aceitando a equivalência entre elas e a representação por uma única fração.

RESULTADOS

3ª série - 24% de acerto 4ª série - 45 % de acerto

Foi considerado como acerto a criança que respondeu uma, duas ou as três alternativas corretas, isto é, assinalou (a), (b), (d), (a, b), (a, d), (b, d) ou (a, b, d).

Na 3ª série, nenhum aluno respondeu somente (a, b, d), alguns responderam parcialmente certo e um aluno marcou todas as alternativas, o que nos leva a crer que a relação entre o total de partes da figura com as partes pintadas não tem a ver com a fração simbólica. No entanto, impressionou-nos que 14 dos alunos assinalassem somente a alternativa (e), levando-nos a pensar que, intuitivamente entendem a fração como razão, através da relação entre a parte pintada e a parte não pintada da figura (interpretação parte/parte).

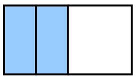
Na 4ª série, somente 5 alunos responderam as três alternativas corretas, levando-nos a pensar que a relação entre a representação simbólica e a representação geométrica não é percebida pela maioria. Além disso, como havíamos previsto, a concepção de fração como parte/todo, também, não está clara para muitos, pois alguns responderam a questão parcialmente correta, outros, de acordo com o que estudaram, duas partes pintadas num total de 6 partes, mas não se preocuparam em observar a igualdade das partes. E quatro alunos responderam somente a questão (e), mantendo ainda a relação parte/parte para a fração, comportamento semelhante aos da 3ª.

TIPOS DE ERROS ENCONTRADOS

- Na 3ª série, nenhum dos alunos percebeu a equivalência.
- Na 3ª série aparece predominantemente a interpretação parte/parte.
- Nos alunos da 4ª série, aparece claramente a dupla contagem das partes, como a escola ensinou, sem a preocupação com a igualdade das partes.

QUESTÃO 07

7) A parte pintada do desenho pode ser representada por quais frações?



a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{2}{1}$

d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{2}{4}$ f) $\frac{1}{3}$

g) nenhuma da alternativas

Ainda na concepção parte/todo no contínuo, apresentamos um retângulo com uma das metades pintada e dividida ao meio, acrescentando a dificuldade do inteiro não estar totalmente dividido, fugindo do modelo usual do ensino, e pretendendo que a criança associe à figura uma ou mais frações, que representem essa figura.

Procuramos variar as frações de acordo com concepções que as crianças possam ter a respeito da representação geométrica apresentada. Se a criança interpreta a fração como todo/parte, ela irá assinalar a fração 3/2, mas se utilizar a dupla contagem, destacará a fração 2/3. No entanto, ela poderá assinalar 1/3, considerando a situação parte/todo, mas levando em conta a parte não pintada para o numerador, talvez assinale 1/2 ou 2/4, na medida em que perceba que a metade está pintada ou visualize a equivalência, e ainda poderá assinalar 2/1 se fizer a leitura parte/parte, embora também possa representar 1/2 com essa interpretação. Acreditamos que entre os alunos de 4ª série predomine a resposta 2/3 e que nos de 3ª predomine a resposta 1/2.

RESULTADOS

3ª série - 40% de acerto 4ª série - 14% de acerto

Foi considerado correto quem respondeu (b), (e) ou (b, e), para responder (b, e) o aluno terá que perceber a equivalência da figura dada com uma figura com duas partes iguais e uma pintada e com uma outra dividida em quartos partes iguais e uma pintada, o que acreditamos seja difícil para ambas as turmas (Campos, 1989), pois a questão não trata somente da equivalência entre os números 1/2 e 2/4.

Na 3ª série, nenhuma criança percebeu a equivalência, respondendo 1/2 e 2/4. Algumas escolheram só 1/2 ou só 2/4 e destas houve quem dividisse a outra metade da figura. Também assinalaram a alternativa 2/1, apresentando a relação parte/parte, e outras deixaram a questão em branco.

Na 4ª série, também nenhum aluno apresentou a equivalência entre 1/2 e 2/4 e erraram bem mais que os da 3ª série. Alguns acertaram, respondendo só 1/2 ou só 2/4; outros usaram a contagem aprendida na escola, respondendo 2/3 (8 alunos) e houve aqueles que, por não saberem lidar com a questão ou por terem percebido que as partes não eram iguais, assinalaram a alternativa g, nenhuma das alternativas.

Isso nos leva a crer que o ensino fez com que perdessem a noção intuitiva de metade, mas não a substituiu por um novo conhecimento e comparando com as respostas da questão 6, acreditamos que seja mais significativo para o aluno associar uma fração a várias representações geométricas do que o contrário, porque não deve ser natural para ele associar a uma figura mais do que uma fração, já que é contando as partes dessa figura que ele identifica a fração em questão.

<u>QUESTÃO 08</u>

8) Complete:

a) $\frac{1}{6}+\frac{2}{6}=$ c) $\frac{27}{35}-\frac{6}{35}=$

b) $\frac{1}{5}+\frac{1}{8}=$ d) $\frac{3}{4}-\frac{3}{9}=$

Nesta questão, colocamos duas adições e duas subtrações com frações de mesmo denominador e de denominadores diferentes.

O mais provável é que os alunos de terceira série reproduzam a forma de escrita que vêem e operem como se tivessem dois números naturais independentes, escritos um em cima do outro. Já os alunos de quarta série, devem resolver as que possuem mesmo denominador sem problemas e nas outras duas devem usar os mesmos recursos dos alunos da terceira.

RESULTADOS

3ª série

Adição

Nenhum aluno acertou as duas adições propostas, um respondeu com uma adição: 3 + 12 e 2 + 13, três reproduziram a forma simbólica (um sem o traço) e a maioria (19) respondeu com um número natural, operando com os números de várias formas diferentes, aparecendo na questão (a): 15, 1266, 78, 312... e na questão (b): 15, 69, 1158, 96, 213 ... Para dar algum significado à operação pedida, eles trabalham com os naturais, fazendo com que estes apareçam como um obstáculo epistemológico ao novo conhecimento.

Subtração

Nenhum dos alunos da terceira série acertou as subtrações, alguns responderam que não dava para tirar 9 de 5 (impossibilidade da subtração nos naturais), deixando em branco, e outros responderam com um número natural, repetindo os mesmos tipos de respostas que deram para a adição.

4ª série

Todos os que responderam colocaram na forma de fração.

Adição

(a) 8 alunos somaram numerador com numerador e denominador com denominador.

(b) Nenhum aluno acertou, 18 (62%) somaram numerador com numerador e denominador com denominador.

Subtração

(c) 10 subtraíram numerador do numerador e denominador do denominador.

(d) Nenhum aluno acertou, 10 responderam 0/5, 2 responderam 3/5, invertendo a regra, mantendo o numerador e operando com o denominador.

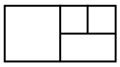
Segue um quadro com as respostas dadas pelos alunos da quarta série para cada uma das operações solicitadas e as respectivas porcentagens de incidência de cada uma, a fim de possibilitar uma visão global do raciocínio usado em cada caso.

			4ª Série				
Questão 8a		Questão 8b		Questão 8c		Questão 8d	
Resp.	%	Resp.	%	Resp.	%	Resp.	%
3/6	59	2/13	65,5	21/35	51,5	11/29	38
3/12	38	2/8	14	21/0	31	0/0	13,5
1/6	3	Bco	10	33/70	3,5	não dá	13,5
		2/10	3,5	6/21	3,5	0/	7
		2/12	3,5	13/70	3,5	3/5	7
		2/14	3,5	1/1	3,5	6/13	3,5
				não dá	3,5	3/13	3,5
						3/9	3,5
						9/14	3,5
						0/49	3,5
						0/9	3,5

QUESTÃO 09

9) Um sitiante fez uma plantação em parte de seu terreno retangular do seguinte modo:
- a metade do terreno foi plantada com feijão.
- na metade da outra metade plantou milho.
- o quarto restante foi dividido em 2 partes: metade para o pomar e metade para construir a casa.

a) Faça uma figura representando a distribuição feita pelo sitiante em seu terreno.
b) Que tipo de plantação ocupa maior parte do terreno? E que tipo ocupa menor parte?
c) O que é maior: a região deixada para a construção da casa ou para o pomar?
d) Represente com números:
- a parte do terreno plantada com feijão
- a parte do terreno plantada com milho
- a parte do terreno onde fica o pomar.

Nesse primeiro problema, os alunos deverão a partir de uma situação escrita através da linguagem natural, representá-la através de uma figura e depois responder às questões propostas. Acreditamos que, se seguirem a descrição, chegarão à figura  sem grandes problemas. No entanto, a falta de todas as divisões na figura deve aparecer como um dificultador para os alunos de quarta série, pois essa figura foge ao padrão usual, levando-os a não responder às questões ou a redividirem todo o retângulo, para identificar a menor parte 1/8. Além disso, acreditamos que os de terceira série desenharão alguma coisa, mas não conseguirão responder às questões. Além disso, é necessário o entendimento do texto, que ficará por conta dos alunos, visto que resolvemos não interferir em nenhum momento e acreditamos que alguns devam apresentar também esta dificuldade. Por outro lado o problema apresenta as frações na linguagem natural, o que é um aspecto facilitador, pois mesmo os alunos sem instrução conhecem o significado.

RESULTADOS

A linguagem utilizada no problema, foi um dificultador pois palavras como “sitiante” não faziam parte do vocabulário das crianças. Além disso o texto longo dificultou sua interpretação, o que nos impediu de conhecer o verdadeiro motivo dos erros encontrados.

Na terceira série, muitos alunos desenharam plantações e casinhas, seis tentaram dividir um quadrado em quatro, mas não deram respostas, e um aluno chegou a representar um triângulo.

Na quarta série, nenhum aluno acertou, alguns também desenharam plantações, quatro desenharam triângulos, dois desenharam círculos com as frações 1/2, 1/3 e 1/4, mas sem responder à questão, o restante deixou em branco ou escreveu que não entendeu.

QUESTÃO 10

10) A capacidade de $\frac{3}{5}$ de um recipiente é 36 litros. A capacidade de $\frac{1}{5}$ do recipiente é _________ litros. O recipiente tem a capacidade de ________ litros.

Nesta questão, a fração se apresenta sob a concepção de operador e pedimos que o aluno faça a operação inversa para responde-la, isto é, a partir da fração do inteiro reconstituir o próprio inteiro, o que não é natural para a criança e, com certeza, ela não terá recursos para dar essas respostas.

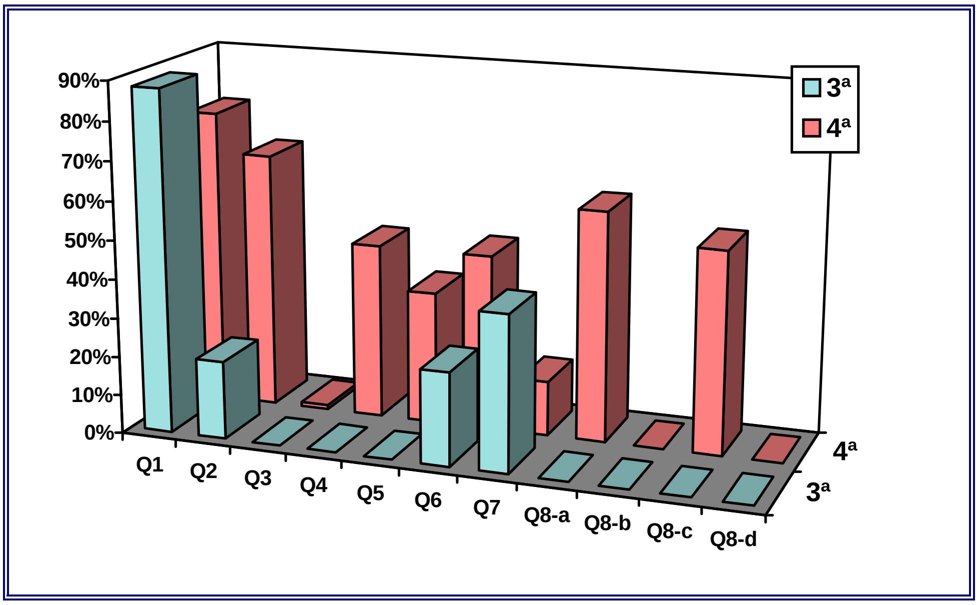
Acreditamos que se pedíssemos diretamente 1/5 da capacidade total do tanque, as de 4ª acertariam e talvez até algumas de 3ª. Mas a partir de uma fração reconstituir o inteiro e fazer novas distribuições não é tão simples e envolve uma compreensão da concepção de fração como parte/todo no contínuo bem desenvolvida o que não acontece em ambos os casos. Fora isso, esse tipo de exercício não é habitualmente trabalhado na introdução do conceito.

RESULTADOS

A linguagem utilizada nos problemas foi um dificultador, pois a palavra "recipiente" não fazia parte do vocabulário das crianças. O que levou a maioria a deixar o exercício em branco e alguns a responderem 36, para a capacidade do recipiente e 6 para 1/5 do recipiente (provavelmente pela soma: 1 + 5).

CONSIDERAÇÕES

Para facilitar uma comparação quantitativa entre as duas turmas, fizemos um gráfico com as porcentagens de acerto em cada questão.



De uma maneira geral, percebemos que apesar de a criança, no seu dia-a-dia (mesmo não gostando de dividir o que é seu), enfrentar situações semelhantes de distribuição com tranqüilidade, no ambiente escolar, ela resiste a aplicar os mesmos processos que usaria no cotidiano e nem ao menos tenta explicar esse procedimento.

A partir dos objetivos e das observações feitas, iremos analisar separadamente as duas turmas.

<u>3ª Série</u>

1. Nota-se claramente que antes do ensino tanto o termo "fração" como o código de representação simbólica não têm significado para os alunos dessa terceira. Continua predominando o conhecimento de naturais e nenhuma tentativa é feita no sentido de uma outra representação.

2. A criança sem instrução não tem intuitivamente qualquer concepção sobre frações, como pensávamos anteriormente. A representação simbólica não aparece nem por simples imitação e o termo fração não é significativo, inclusive porque, durante o teste, os alunos perguntavam o que era fração. Então supor que a transmissão desse novo conhecimento seja simples, é pura ilusão, já que não dá para contar com concepções espontâneas anteriores. A única que

aparece é a de razão parte/parte, o que nos leva a entender que o ensino de frações a partir do modelo parte/todo não é a melhor escolha e precisa ser desenvolvido em situações efetivamente significativas.

3. Aparece claramente a força do conhecimento anterior dos números naturais, os quais fazem parte de um conhecimento já adquirido. É com eles que as crianças tentam trabalhar e isto ficou claro nas situações de operações. Elas não têm nenhuma concepção sobre frações, sendo que as manipulam como pares de números naturais, desenvolvendo processos variados para obter uma resposta final como um número natural.

4. Os alunos sem instrução resistem à divisão das figuras dadas e quando o fazem, dividem somente em duas ou três partes e depois tomam cada parte como um novo inteiro. Além disso, não esgotam o inteiro em suas divisões, dando as respostas com restos.

5. Essas crianças, no seu dia-a-dia, quando enfrentam situações de divisão/distribuição chegam a uma maneira de resolvê-las e, com certeza, de forma correta. Elas não permitiriam que uma comesse mais chocolate que a outra. Mas, na situação de sala de aula, não conseguem reproduzir esses processos nem verbalmente.

4ª Série

1. Igualmente as crianças com algum ensino de frações, após a divisão passam a tomar cada parte como um novo inteiro, mas com um número menor de incidência.

2. Na situação dos quatro chocolates, por exemplo, os alunos não os consideram como quatro inteiros e sim como um conjunto de quatro elementos (discreto), cada um sendo representado pela fração ¼. Isto para responder à questão utilizando a linguagem de fração que já "aprenderam", o que fez com que estes alunos errassem mais do que os da terceira série, que simplesmente distribuíram os chocolates como unidades.

3. O modelo de ensino parte/todo permite a dupla contagem das partes, que a partir de representações convenientes conduz o aluno ao acerto. Porém, em qualquer alteração nesse modelo, o aluno mantém simplesmente a contagem mecânica dessas partes e começa a errar, fazendo exatamente o que aprendeu. Além disso, esse modelo impede que muitas crianças consigam fixar o que devem contar e registrar, desenvolvendo assim outros procedimentos de representação: todo/parte e principalmente parte/parte. Assim, confirmamos que esse modelo de ensino desenvolve, na realidade, a linguagem de frações, a partir de um mesmo padrão (todas as figuras divididas em partes iguais), mas se as partes da figura estiverem desiguais, os alunos não percebem e acabam contando e representando da mesma forma.

4. Os alunos de quarta série trabalharam em cima das figuras com mais tranqüilidade que os de terceira, mas é interessante perceber que quando necessitavam efetivamente dividir a figura para tentar visualizar a resposta, não conseguiram dividi-la. Por exemplo um chocolate em cinco. Também só dividiram em duas ou três partes e responderam da mesma forma que os outros. Isso provavelmente porque na situação de aprendizagem ele sempre foi colocado à frente de figuras previamente divididas e efetivamente não teve que dividir nenhuma.

5. Na questão das operações, supúnhamos que as crianças somavam numeradores e denominadores de forma intuitiva. No entanto nos surpreendemos quando verificamos que quem usa esse procedimento são exatamente as crianças que já tiveram alguma instrução sobre frações, provavelmente porque tais operações lhes são apresentadas a partir de simples regras sem sentido, o que faz com que as crianças procurem outros caminhos mais significativos para sua solução, mantendo a nova forma de escrita aprendida para a resposta.

2.2.4 – A CONCEPÇÃO DOS PROFESSORES

Não resta a menor dúvida de que o compromisso do professor com seus alunos, com a escola e com a sociedade ultrapassa os limites da sala de aula. Quando o professor ensina, apresenta em sua ação, de forma implícita ou explícita, a sua formação cultural: origem, religião, postura como cidadão, ... a sua formação profissional: que tipo de cursos freqüentou, se continua estudando ou não, se participa de pesquisas, se lê as novas publicações, ... e as conseqüências da sua condição de trabalho: onde trabalha, em que condições, que metodologia a escola defende, salário, condições de vida... No entanto, existem dois pontos que atingem diretamente a sala de aula: como o professor concebe a Matemática e seu ensino, e que papel assume perante os alunos, isto é, qual o contrato didático que irá gerenciar essa relação.

Bruner (1987), dizia: “*O professor não é apenas um comunicador, mas também um modelo. Alguém que não veja nada de belo ou eficaz na matemática não será capaz de despertar nos outros o sentimento de entusiasmo inerente ao assunto. Um professor que não queira, ou não possa, dar vazão à sua própria intuição dificilmente será eficaz em estimular a intuição de seus alunos. Ser tão inseguro a ponto de temer ser apanhado em erro não tornará o professor um modelo convincente de ousadia. Se o professor não arrisca uma hipótese duvidosa, como poderá o aluno fazê-lo?”*

Entendemos então, que o professor tem que ser, acima de tudo, um investigador para poder ajudar seus alunos a desenvolver uma matemática, de entendimento e não de reprodução. Por isso, precisa analisar o conteúdo a ser ensinado no sentido de levantar idéias, procedimentos e caminhos de raciocínio, selecionando e construindo modelos, exemplos, histórias, ilustrações e problemas, que favoreçam o desenvolvimento do conhecimento matemático dos alunos, a partir de um domínio de representação em que a criança já esteja familiarizada.

Ensinar matemática dessa forma não é fácil, pela própria complexidade da prática e pela influência das experiências tradicionais que os professores vivenciaram que os impedem de conceber e desempenhar um tipo de ensino centrado no entendimento e no raciocínio matemático.

Carvalho (1989), em sua tese sobre as concepções de matemática dos professores das séries iniciais, afirma que: "*As professoras percebem que a Matemática tem uma gênese diferenciada das outras ciências; entretanto, não conseguem explicitar claramente essa diferença. Os exemplos na área de ensino são, como era de se esperar, citados mais freqüentemente que os relativos a outras áreas de atividade humana. Em seus depoimentos, nenhuma professora revelou conceber a existência do matemático profissional, o pesquisador que faz a ciência, nem mesmo a professora habilitada, por Licenciatura Curta em Ciências, a lecionar Matemática... As entrevistas revelaram conceber a Matemática como um instrumento para interpretação, para melhor entendimento, para percepção, para "ver", para entender as relações, para organizar o real, o mundo".*

Pretendendo levantar as concepções de fração das professoras do ensino elementar e como pensam e como agem quando ensina tal conteúdo, elaboramos um questionário (anexo 02) que foi respondido por 24 professoras de 1ª a 4ª séries do primeiro grau, da rede estadual de ensino, e 4 da rede particular individualmente.

O questionário contém 17 perguntas, divididas em três partes: a primeira (questões 1 a 7), procurou observar os dados de formação e prática dessas professoras e em que se apoiam para trabalhar; a segunda (questões 8 a 14), levantou suas práticas na introdução do conceito de fração, que dificuldades percebem nos seus alunos e o que fazem para saná-las; finalmente, na terceira parte (questões 15 a 17), as professoras foram colocadas diretamente numa situação de correção de uma suposta produção de alunos.

1ª PARTE

1) Qual a rede de ensino que trabalha?

( ) Municipal ( ) Estadual ( ) Particular

2) Qual é a série em que está trabalhando neste ano?

3) Em que séries você já trabalhou?

4) Há quantos anos você está formado? Há quantos anos você leciona?

5) Qual é a sua formação?

6) Você segue ou consulta o guia curricular?

7) Você adota algum livro didático? Qual? Por quê?

Das professoras pesquisadas, com exceção das recém formadas (2), todas já lecionaram nas diferentes séries iniciais, sendo que uma delas está com a primeira série há 16 anos. A média do tempo de formação dessas professoras é de 12 anos e a experiência é de 11,2 anos. Das 28 professoras, 15 só têm formação no magistério e as restantes possuem um curso superior, na maioria Pedagogia, 24 estão atuando na rede pública e 4 na rede particular de ensino.

2ª PARTE

8) Como você introduziria o ensino de frações? Em que série?

9) Você usa algum tipo de material para esse ensino? Qual? Por quê?

10) Como você introduz a equivalência de frações?

11) Você relaciona a fração com alguma operação? Qual? Que tipo de relação? Se não, por quê?

12) Você usa fração em alguma situação do dia-a-dia? Se sim, quais e por quê? Se não por quê?

13) Aponte três dificuldades que freqüentemente você encontra nos seus alunos, quando ensina fração.

14) O que você proporia para sanar essas dificuldades?

80% delas consultam a proposta curricular e algumas adotam o livro didático, mas a maioria prefere pesquisar vários livros para preparar as aulas. As justificativas são as mais variadas desde "*o governo mandou*" até busca de sugestões, apoio ao trabalho, referencial, reforço para lição de casa... Somente uma das professoras não adotou livro este ano, porque não é a proposta da escola.

Com relação à introdução do ensino de frações, a maioria acha que deve começar na primeira série (algumas desde o pré), através de material concreto, desenho, figuras, lanche dos alunos, bolo, maçã, barra de chocolate, folhas de sulfite, disco de fração... Sugerem a noção na primeira e segunda séries para se saber aplicar e ter menos dificuldades na terceira e na quarta.

As quatro professoras da rede particular falam em iniciar o ensino a partir da divisão com material concreto. No entanto, usam o termo fração descontínua em quantidades discretas e fração contínua[1] para quantidades contínuas. Isso mostra que apesar de perceberem as diferentes características das duas quantidades, acabam nomeando as frações de forma inadequada.

18 das professoras responderam que associam a fração à divisão, para dividir a figura, repartir as partes do todo, repartir em partes iguais, pelo fato de representar um processo de medida e distribuição.

Mas algumas a associam à subtração:

"*Subtração - na fração o numerador corresponde às partes tomadas e o denominador ao inteiro. Divisão: repartir o inteiro".*

No dia-a-dia, usam frações para repartir alimentos, frutas e na culinária. Aparece muitos bolos, pizzas, maçãs e receitas. Uma delas usa a fração na sala de aula para qualificar os alunos:

"*Metade são bons, um quarto médio e um quarto fraco. Mostro com números e com desenhos, os que estão dentro da parte em perigo."*

Para elas, os alunos apresentam dificuldades em relacionar as frações nas atividades do dia-a-dia, com operações de frações, equivalência e divisão. Não conseguem abstrair e há falta de concentração, interesse e participação.

Para sanar essas dificuldades, a maioria das professoras sugere trabalhos com material concreto, mas algumas falam da necessidade de especialistas que as ensinem a trabalhar com tal material. Outras retomariam o conteúdo para sanar as dificuldades e sentem que os alunos precisariam "treinar" mais a divisão desde a primeira série.

---

[1] Ver na página 24 exemplos de fração contínua.

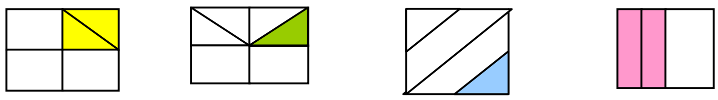
3ª PARTE

15) Um aluno deu as respostas abaixo para quatro contas envolvendo frações:

a) $\frac{1}{6}+\frac{2}{6}=\frac{3}{6}$ b) $\frac{1}{5}+\frac{1}{8}=\frac{2}{13}$ c) $\frac{27}{35}-\frac{6}{35}=\frac{21}{0}$ d) $\frac{3}{4}-\frac{3}{9}=\frac{0}{5}$

O que você lhe diria depois da correção?

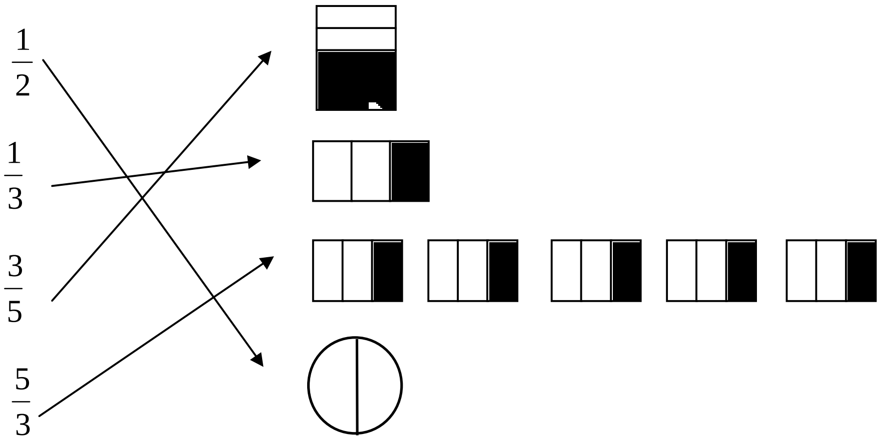
16) As figuras abaixo foram apresentadas para dois alunos que as identificaram com as frações que estão abaixo. Quais respostas você consideraria como certas e como explicaria essas respostas para os alunos.



Aluno (1)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	não é fração	$\frac{1}{2}$
Aluno (2)	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{1}$

17) Foi dado para um aluno quatro frações para que ele relacionasse com algumas figuras. O resultado foi o seguinte:

Frações Representações



O que você comentaria com ele à respeito do seu trabalho?

Nas questão 15, a maioria apenas fez a correção da questão e a passaria para o aluno, mostrando o erro, e que ele "esqueceu o m.m.c.." Somente seis delas falaram em retomar o conteúdo para ver onde estão as dificuldades e repensar a prática. Uma das professora diria o seguinte:

"*Falta de atenção, não entendeu a matéria e colou a 1ª questão".*

Na questão 16, a maioria apenas corrigiu e explica o porquê da correção, usando sempre a questão da necessidade das partes iguais na figura. Somente 8 professoras consideraram o aluno 1 correto e falaram do seu entendimento sobre equivalência.

Na questão 17, a maioria diz que o aluno já sabe a noção e que o "mais difícil" (a fração imprópria) ele acertou, mas falta atenção, pois na última figura a metade deveria estar pintada. Algumas não aceitaram a falta do traço na primeira representação onde "*o aluno deveria ter feito todas as divisões bem nítidas"* e que 5/3 está errada, pois "*não representa que repartiu em 3 partes iguais e tomadas cinco partes"* ou "*a fração diz que alguma coisa foi ÷ em 3 partes e tomadas 5, portanto ele deveria pintar os três quadradinhos da 1ª figura + duas da 2ª figura".*

CONSIDERAÇÕES

Observamos que as professoras não se sentiram seguras com relação a esse conteúdo e que falaram muito em material concreto, mas não sabem bem o que fazer com ele. Parece que o uso do "material concreto" resolve todos os problemas. Como esperávamos, elas seguem exatamente o ensino usual, até nos exemplos se percebe a influência do livro didático, por isso apresentam também suas falhas, possuem a linguagem, mas têm dúvidas conceituais. A necessidade de as figuras estarem divididas (com todos os traços) é muito forte e algumas não entendem a fração como divisão (5 : 3) mas sim como parte do todo, apesar de responderem que associam a fração com a divisão. Na realidade, confundem o ato de dividir uma figura com a operação de divisão.

Por outro lado, aparece a concepção que elas têm de sua prática, solicitando a atenção do aluno, o qual sempre erra por falta de atenção. Poucas assumem o erro do aluno como uma falha do seu ensino e nenhuma delas tentou perceber o que o aluno estava pensando para que respondesse daquela forma. O papel delas é ensinar e o aluno tem que aprender daquela forma. Isso nos leva a concluir que as professoras não estão preparadas para trabalhar com as concepções dos alunos. Elas nem pensam nessa possibilidade, todas preferem recomeçar o conteúdo, "ensinar de novo".

2.2.5 – OBSTÁCULOS DIDÁTICOS

A partir do estudo didático até agora realizado, procuramos levantar alguns obstáculos didáticos relacionados ao ensino/aprendizagem de frações. São eles:

1. Ponto de vista único - a concepção parte/todo no contínuo é praticamente a única com que os alunos se deparam na introdução do conceito de fração e de números decimais. As outras concepções (razão, medida, operador, quociente) não são apresentadas aos alunos das séries iniciais. Elas serão dadas formalmente, a partir da quinta série, totalmente desvinculadas de qualquer relação com situações concretas, pois já são trabalhadas com o conjunto dos números racionais. No entanto, as concepções de quociente e medida podem ser desenvolvidas nas séries iniciais, inclusive com mais facilidade de apreensão pelos alunos do que o modelo parte/todo.

2. Dupla contagem das partes - o modelo parte/todo no contínuo, dado a partir da contagem das partes, desenvolve a linguagem de fração sobre um modelo estático em que as figuras são apresentadas com todos os traços de divisão aparentes, e, neste padrão, leva alguns alunos ao sucesso. Uma simples alteração na representação induz ao erro, pois o aluno aplica sempre a contagem para identificar as frações. Isso mostra que a conceituação de fração desse aluno já está comprometida, por um procedimento mecânico de identificação.

Além disso, este procedimento fortalece o obstáculo epistemológico dos naturais sobre os fracionários, pois, à medida que está sempre contando, o aluno acaba interpretando a fração como um par de números naturais separados por um traço, o que faz com que ele generalize os conceitos, principalmente operatórios, que tem com os naturais para os fracionários, às vezes se prolongando por toda a vida tal concepção.

3. Discretização do Contínuo - O modelo de referência que a criança tem é o de quantidade discretas representadas pelos números naturais, o que cria dificuldades para ela trabalhar com o modelo parte/todo no contínuo usado na maioria dos livros e pelos professores na introdução da fração. Tal modelo, naturalmente, provoca esse obstáculo, pois a criança é levada a contar as partes

de uma figura já dividida e pintada, permanecendo então o processo de contagem, que a induz a estar trabalhando com o discreto.

4. Visão deturpada no trabalho com quantidades discretas - o uso de quantidades discretas só aparece para trabalhar a fração de quantidade (operador sobre os naturais) e visto somente sob a concepção parte/todo. Este tipo de trabalho leva o aluno a não perceber as características inerentes a cada modelo (o contínuo e o discreto) e a fração de quantidade fica diretamente atrelada ao trabalho com os números naturais, não se desenvolvendo a concepção de transformação que o operador pode exercer sobre quantidades tanto discretas quanto contínuas.

5. Nomeação aleatória - os livros didáticos de forma geral, até a quarta série, introduzem o conceito de fração com vários títulos: fração, números fracionários, número racional. Como já falamos antes, esse tipo de procedimento leva a um obstáculo intransponível, a nosso ver, durante toda a escolaridade. Encontramos até em alunos do terceiro grau a confusão de que fração são todos os elementos do conjunto dos racionais, mesmo com um trabalho feito em cima das frações irracionais (racionalização de denominadores) e as equações fracionários (com $x \in R$). Entendemos que esse obstáculo se deve à falta de clareza do próprio professor sobre o objeto matemático com que trabalha.

6. Formalização abusiva - é comum nos livros didáticos das séries iniciais a introdução de algoritmos para introduzir alguns conceitos como os de equivalência de frações e para as operações. Tais procedimentos impedem que os alunos desenvolvam as relações entre os conceitos que estão trabalhando, produzindo um conhecimento mecânico, que não desenvolve as habilidades necessárias para o trato das diversas situações em que poderiam usar tal conhecimento.

2.2.6 – OBSTÁCULOS ONTOGÊNICOS

Entendemos que há dois pontos que provocam esse tipo de obstáculo no ensino dos números fracionários: o formalismo abusivo com que é apresentado o conceito de número fracionário, que não condiz com a faixa etária em que é apresentado, por volta de 8 anos, pois as crianças ainda estão no período das operações concretas, em que os conhecimentos transmitidos somente através de algoritmos não têm significado, elas ainda precisam experimentar e verificar processos antes de chegar a generalizações. Além disso, o modelo utilizado geralmente no ensino (parte/todo) é apresentado mecanicamente através da contagem sem que se verifique os pré-requisitos necessários (conservação de área, medida, ...).

3.0 - A SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Neste capítulo apresentaremos a seqüência didática elaborada para os futuros professores visando o ensino-aprendizagem do conceito dos números fracionários. Estaremos aqui nos limitando as concepções parte todo, quociente e medida, tendo em vista nossa crença que a introdução desses números não deverá ser esgotada num único momento. Assim as concepções referentes a razão e operador farão parte de uma outra seqüência.

3.1 - ANÁLISE A PRIORI

A análise a priori é parte integrante da Engenharia Didática. É aqui que considerando dados dos estudos preliminares realizados nos capítulos 1 e 2, e dos resultados significativos de pesquisas, com os quais estamos de acordo, fizemos nossas escolhas a fim de que a seqüência construída pudesse atender ao objetivo proposto neste estudo. São elas:

1. Obstáculos Epistemológicos – a representação simbólica, a negação da necessidade das quantidades fracionárias, dificuldade em aceitar as frações como número, o conhecimento dos naturais e o modelo de referência.

2. Obstáculos Didáticos – ensino de um único ponto de vista, a dupla contagem das partes, a discretização do contínuo, visão deturpada no trabalho com quantidades discretas, nomeação aleatória e formalização abusiva.

3. Escolhas macro-didáticas[1] – para iniciarmos a elaboração da seqüência fizemos as seguintes escolhas macro-didáticas: situações-problema envolvendo as quantidades discretas e contínuas; situações-problema envolvendo as concepções de medida, parte/todo e quociente, as duas últimas com quantidades discretas e contínuas; situações-problema que levantassem contradições ou várias soluções, representações das três concepções que fugissem aos modelos convencionais; situações de formulação, em que o aluno é solicitado a enunciar algumas relações trabalhadas e situações de criação de novas situações-problemas envolvendo as concepções estudadas.

[1] Que se referem a organização global da seqüência.

4. Variáveis de situação[2], baseando-nos nas sugestões de Carvalho (1989), Pavanello (1994) e Santos (1993), optamos pela aplicação da seqüência através de uma série de sessões, que se caracterizaram por uma oficina de formação, com o objetivo de construir a concepção de número fracionário dos futuros professores, permitindo que ampliem suas experiências e sua capacidade de pensar e criar com esse número.

Além disso, organizamos as atividades da seqüência de modo que fossem resolvidas pelos futuros professores em grupos de três, pois entendemos que esse número de participantes proporcionaria interação, estimularia a reflexão e facilitaria o consenso entre eles.

A duração prevista seria de 18 horas, divididas em seis sessões, em que seriam trabalhadas sete atividades, distribuídas da seguinte forma:

- Pré-teste
- Atividade 01 – Quantidades contínuas e quantidades discretas.
- Atividade 02 – A concepção parte/todo no contínuo e no discreto.
- Atividade 03 – A concepção de medida.
- Atividade 04 – A concepção de quociente.
- Atividade Extra-Classe – Aplicação da atividade 04 em crianças de 8/9 anos de idade.
- Pós-Teste.

5. Variáveis de Contrato[3] - o contrato didático foi estabelecido na primeira sessão, onde explicamos que o trabalho seria aplicado pela própria pesquisadora, na presença da coordenadora pedagógica e de duas professoras de metodologia da Escola, o que permitiu com que o vínculo e o contrato entre os alunos e seus professores ficasse implícito, durante o trabalho, garantindo assim a sua realização.

Explicamos também, que durante a realização das tarefas, estaríamos a disposição para tirar qualquer dúvida que pudessem surgir, e que após a

[2] Referem-se a escolha das atividades, da forma de trabalho e ao tempo necessário para a aprendizagem.
[3] O contrato didático segundo Henry (1991) é um conjunto de regras, a maior parte implícitas, que determinam a responsabilidade que cada um, aluno e professor, deve administrar na relação didática.

realização de cada atividade, iríamos propiciar momentos de debates coletivos, através da correção das questões, onde os grupos pudessem comparar suas soluções e fizessem posteriores reflexões.

A institucionalização[4] ocorreria ao final de cada atividade, através de uma síntese organizada pela pesquisadora, a partir das soluções e opiniões surgidas durante a correção. A avaliação de cada aula será constante, no sentido de percebermos a necessidade ou não, de acrescentar atividades extras para que o objetivo inicial seja alcançado.

3.2 – A REALIZAÇÃO DA SEQÜÊNCIA

A seqüência didática foi ministrada pela pesquisadora e contou com uma auxiliar de pesquisa para observações e filmagem. Desenvolveu-se durante seis sessões de três horas cada, com um pequeno intervalo para lanche, com alunos do quarto ano magistério do CEFAM[5] Dr. Emílio Hernandez Aguilar, da cidade de Franco da Rocha em São Paulo, na presença de duas professoras de metodologia e da coordenadora pedagógica do curso.

No início do trabalho estavam presentes 29 alunos, mas por vários motivos participaram efetivamente da oficina do início ao fim 23 alunos. É com estes alunos que iremos fazer todas as nossas análises.

Foi colocado à disposição dos grupos papel pautado para possíveis anotações, régua, esquadro, compasso, lápis preto e colorido, além da ficha com a atividade e o material específico para a realização de algumas tarefas, que foi fornecido individualmente.

A pesquisadora em todas as atividades procedeu da seguinte maneira:

- distribuiu as fichas contendo as atividades,
- pediu a montagem dos grupos de trabalho,
- circulou pela sala a fim de sanar as dúvidas,
- geriu a discussão e a síntese final,

[4] Situações onde os conhecimentos tratados anteriormente são reconhecidos, traduzidos em termos rigorosos, descontextualizados e despersonalizados.
[5] Centro Específico de Formação do Aluno do Magistério.

- recolheu todo o material ao final de cada sessão e o colocou em saquinhos plásticos individuais, para serem redistribuídos ao início da sessão seguinte.

A primeira sessão foi realizada com a vinda dos alunos à PUC[6] no dia 11 de abril e a primeira tarefa foi a aplicação individual do pré-teste, durante aproximadamente 60 minutos. O passo seguinte foi a explicitação do contrato didático e a organização dos grupos, que deveriam permanecer fixos até o final da seqüência e foram escolhidos por eles. Fizeram então a atividade 01 que foi corrigida e discutida coletivamente, assim que todos terminaram. A seguir, realizamos uma síntese desta discussão que os alunos anotaram no verso da ficha e eles iniciaram a atividade 02.

A segunda sessão, foi realizada com a ida da pesquisadora e uma auxiliar até a escola em Franco da Rocha, em 17 de abril. Os alunos terminaram a segunda atividade e após correção, discussão e síntese iniciaram a atividade 03.

A terceira sessão, foi realizada na PUC em 18 de abril. Iniciamos esta sessão com uma mudança no procedimento previsto pois não distribuímos a atividade 3 para que terminassem, antes de introduzir uma atividade extra. O motivo desta alteração foi a percepção que tivemos, de que a maioria, na sessão anterior, encontrava muita dificuldade em quantificar os segmentos dados na questão 2, com a unidade de um pé. Naquele momento, entendemos que para vencer tais dificuldades os futuros professores precisariam vivenciar uma situação de medição em que surgisse a necessidade de criação de sub-unidades de medida. Essa atividade será descrita com mais detalhes mais à frente como "atividade extra de medição" e consistiu da medição da classe com uma tira de papel em branco de 30 cm de comprimento.

Após a conclusão desse trabalho eles terminaram a atividade 3 e iniciamos sua correção. No entanto, com a introdução dessa atividade extra, consumimos mais tempo do que havíamos prevista para a atividade 3, o que nos levou a interromper a sua correção, retomando-a na sessão seguinte, para que iniciassem a atividade 4. Isto se fez necessário, pois esta atividade seria usada pelos

[6] PUC/SP – CCET – Centro das Ciências Exatas e Tecnologia.

professores, numa atividade extra-classe, em que a aplicariam em crianças de 8/9 anos e este trabalho perderia o sentido se os futuros professores não a tivessem realizado anteriormente.

A quarta sessão, foi em Franco da Rocha no dia 24 de abril, e nela terminamos todas as discussões sobre medida, fizemos a síntese do assunto e tivemos tempo para terminar, corrigir e discutir a atividade 04.

Na quinta sessão, na PUC em 25 de abril, fizemos uma síntese das três concepções trabalhadas e as relações entre elas, os alunos ainda apresentaram algumas dúvidas e discutimos os resultados da atividade extra-classe.

Na sexta sessão, realizada na PUC em 30 de abril, aplicamos o pós-teste individualmente e encerramos o trabalho.

3.3 – ANÁLISE E RESULTADOS DAS ATIVIDADES

3.3.1 – PRÉ-TESTE

Elaboramos um instrumento inicial de avaliação (anexo 03) contendo nove questões, com o objetivo de verificar a concepção que os futuros professores têm antes de qualquer instrução sobre números fracionários.

O pré-teste foi elaborado a partir dos testes utilizados no levantamento da concepção dos alunos e dos professores. Seus resultados serão usados na comparação com os resultados do pós-teste, com o intuito de verificar se os objetivos propostos foram atingidos e avaliar a seqüência.

QUESTÃO 01

Esta questão tem como objetivo levantar as experiências ou fatos que marcaram os estudos de frações dos futuros professores.

1) Que boa experiência você teve durante sua aprendizagem de frações?

Acreditamos que poucos se reportem a boas experiências e, que a maioria deve dizer que não teve nenhuma experiência no assunto.

RESULTADOS

Respostas	Total
Nenhuma ou nada marcante	7
Algumas, mas esqueci tudo	5
Foi ter a noção de que fração é dividir um inteiro em partes iguais, com desenho na lousa	3
Não houve boa experiência, mas aprendi ou não é difícil	4
Boas experiências, mas não aprendi bem	1
Hoje procuro utilizar a lógica	1
Atividades com o concreto	1
Só teoria	1

Podemos observar, como havíamos previsto, que os futuros professores não relataram nenhuma experiência vivida e que somente um referiu-se a atividades com o concreto, mas não as especificou. De forma geral, 52% deles não conseguiram lembrar ou não souberam descrever algo que os tivesse marcado durante seus estudos de fração.

QUESTÃO 02

O objetivo é observar como eles se colocam perante o conhecimento que têm, e se conseguem explicitar as suas dificuldades e competências.

2) Como você se sai quando trabalha com frações?

Acreditamos que muitos comentem sobre suas dificuldades.

RESULTADOS

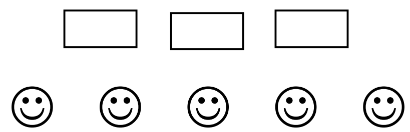
Respostas	Total
Meio complicada, às vezes me confundo, tenho algumas dificuldades, não me saio muito bem, é difícil, tenho dificuldade.	12
Geralmente me saio bem, tenho que relembrar nos livros, tem coisas que nunca ficam claras, esqueço algumas regras	5
Não tive oportunidade de ensinar ainda	4
Certa facilidade com os números, mas não me dou bem com desenhos e figuras.	1
Nunca tive problemas, mas posso melhorar	1

Alguns alunos interpretaram a palavra trabalha da questão ao fato de ensinar frações e não ao fato de eles operarem as mesmas. Como havíamos previsto, a maioria (74%) fala de suas dificuldades, até porque somente um admite nunca ter tido problemas ao lidar com as frações.

QUESTÃO 03

Gostaríamos de verificar que tipo de procedimento eles usam para resolver tal situação de distribuição em quantidades contínuas, tais como: a divisão de figuras que representam chocolates e que tipo de divisão usam, se aparece a distribuição com restos e ainda se a resposta aparece como um número fracionário ou como um decimal.

3) Divida os três chocolates entre as cinco crianças.
Quanto cada criança vai receber?



R.: ______________________________________

Nesta questão a situação obriga a divisão dos chocolates e a conseqüente resposta através de um número fracionário. Optamos pela relação entre 3 e 5 porque são números pequenos, que não complicam a resolução, principalmente para aqueles que sintam necessidade de dividir as figuras dos chocolates.

Acreditamos que a maioria deva responder 3/5 e que muitos devam dividir as figuras dos chocolates para responder.

RESULTADOS

Dividiram em cinco ou não dividiram			Dividiram ao meio	
Resposta	Total	Dividiram	Resposta	Total
Em branco	5		Não deu resposta	2
3/5	6	4	0,5 ou 1/2 + 0,10	1
3/5 = 0,6	3	1	Metade de cada barra e mais um pedacinho	1
0,6 = 1/3	3	3		
Três partes	2	2		
Meio chocolate e sobrará uma parte	2	1		
1/5	1	1		
1/4	1	1		

Somente 10 alunos (43%) acertaram a questão, consideramos como corretas as respostas: 3/5, 3/5 = 0,6 e 0,5 + 0,10. O restante ou ficou sem resolvê-la ou resolveu de forma inadequada. 17 alunos dividiram os chocolates para dar a resposta, mas destes somente 6 chegaram a resposta correta. Além disso, dos 4 que optaram por inicialmente dividir os chocolates ao meio somente 1 visualizou nessa forma de distribuição a resposta correta, mas a registrou em forma de adição de fração e decimal.

Interessante notar que 7 deles responderam a questão com números decimais e que destes 3 transformaram a fração 3/5 encontrada inicialmente em número decimal, provavelmente achando que a fração não pudesse ser a resposta do problema. Ao contrário, 3 fizeram a conversão do número decimal encontrado (0,6) para a fração (1/3) de maneira incorreta. Percebemos também que 5 alunos responderam a questão referindo-se a partes e a restos na linguagem natural.

Podemos concluir que a maioria encontra dificuldade em trabalhar com distribuições no contínuo, não sabendo o que fazer com a figura nem como dar a resposta.

<u>QUESTÃO 04</u>

Queremos observar os procedimentos de distribuição utilizados, se verificando se necessitam representar tortas para visualizar uma distribuição; se para obter respostas distribuem tortas inteiras, dividindo somente uma, ou se dividem todas as tortas. De que forma escrevem esta resposta: como fração imprópria, pela forma mista ou como adição. Se fazem direto a divisão dos naturais dando a resposta como um número decimal. Finalmente, se aparece a operação de divisão na sentença matemática.

4) Se dividirmos 4 tortas entre três crianças, que fração das tortas cada criança vai receber? Que sentença matemática posso usar para representar essa situação?

Continuamos com uma situação de distribuição, em que não é necessário dividir todas as tortas para obter a resposta e esta deve ser dada através de um número fracionário. Acreditamos que a maioria responda com a fração 4/3 ou 1 1/3 e a sentença matemática 4 : 3 = 4/3 ou 1 1/3, e que precisem desenhar as tortas para isso.

RESULTADOS

Contrariando nossas previsões somente 7 alunos desenharam as tortas para fazer a distribuição e responder a questão.

Resposta	Total	Resposta	Total
Em branco	3	1/3 de torta	1
4/3 = 1,3	4	0,13 porque 4 : 3 = 0,13	1
4/3	2	1/3 de cada torta, totalizando 4 pedaços	1
4 : 3 = 1,3	2	12 partes porque x : 4 = 3	1
1,3 por que 4: 3 = 1,3	2	1 torta e a 4ª dividida em 3 partes iguais	1
1/3 porque 4 : 3 = 1,3 e 4/4 = 3/1	2	1 torta e meia para cada	1
1 1/4 porque 4/1 : 3 = 4/1	1	1 torta mais uma parte	1

Consideramos corretas as respostas: 4/3, 4/3 = 1 1/3 e 1/3 de cada torta. Observando a tabela acima podemos observar que 11 alunos (48%) acertaram a questão, sendo que destes 2 responderam direto com a fração 4/3, 4 transformaram a fração em decimal e 4 responderam 1,3 obtidos diretamente da divisão de 4 por 3. No entanto os responderam com um decimal (43%) o fizeram com o número 1,3 e não com 1,3... como deveriam, o que reflete uma resposta aproximada da questão.

O restante ou usou procedimentos inadequados na transformação de decimais para frações ou na operação de divisão, e houve quem respondesse na linguagem natural sem uma resposta que fosse correta.

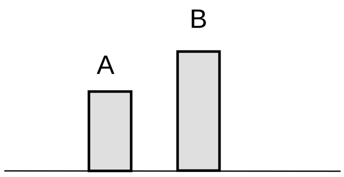
Um deles não respondeu corretamente a questão porque na tentativa de "algebrizar" a questão num processo de discretização do contínuo, colocou a incógnita como o total de partes, que divididas por 4 daria 3. Chegou a 12 partes sem perceber que na equação que usou já estava usando a resposta da questão, que no discreto seria 4 partes.

Entendemos que a apresentação do problema em linguagem natural, diminuiu significativamente o número de alunos que se utilizou da figura para resolver a questão, porque aqui eles teriam que representar primeiro as tortas para depois dividirem. Além disso, esses resultados nos mostram que realmente não apresentam o domínio de distribuições no contínuo.

<u>QUESTÃO 05</u>

Temos como objetivo nesta questão verificar se eles relacionam duas medidas e representam essa relação através de uma fração.

5) Que fração representa a relação entre a altura do retângulo A e a altura do retângulo B?



Nesta questão estamos pedindo que estabeleçam uma relação entre as medidas das alturas de dois retângulos e a represente através de uma fração. Desenhamos o retângulo A com 2 cm de altura e o retângulo B com 3 cm de altura para facilitar a divisão em partes iguais e a relação esperada. Para resolver ele deve escolher um dos retângulos como unidade ou usar a concepção de razão todo/todo.

Eles poderão responder que A é 2/3 de B ou que B é 3/2 de A, dependendo do referencial de unidade que escolherem. Esperamos que percebam a divisão de A em duas partes e B em três partes iguais e acreditamos que respondam que A é 2/3 de B.

<u>RESULTADOS</u>

Contrariando nossa previsão, 14 alunos deixaram a questão em branco e somente 6 dividiram a figura para responder a questão.

Resposta	Total
1/3	3
Retângulo A 1/3 e retângulo B 1 inteiro	1
2/3	1
A 2/2 e B 2/2	1
3/4 - O triângulo A possui 3/4 do tamanho do triângulo B	1
1/2	1
1 1/4	1

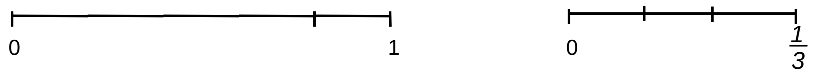
Observando o quadro notamos que 4 alunos acertaram a questão, sendo que um considerou A como uma parte de B e três consideraram a diferença entre as alturas.

O restante dos alunos visualizam a divisão da figura de forma inadequada, o que fez com que chegassem a respostas incorretas. Podemos concluir que a maioria não conseguiu relacionar as alturas dos dois retângulos nem através das medidas de suas alturas usando uma delas como unidade, nem como razão, talvez porque não soubessem o que é a altura de um retângulo, o que só a entrevista poderia nos responder.

<u>QUESTÃO 06</u>

O objetivo é observar como interpretam situações de medidas de segmentos, se percebem a existência e a importância da unidade de medida nesta concepção, o que permitirá, no segundo segmento, reconstituir a unidade a partir de uma parte da mesma.

6) Indique os números racionais que correspondem aos pontos marcados nos segmentos abaixo.



Nesta questão desenhamos um segmento com 5 cm de comprimento, representando uma unidade e um ponto a 4 cm da origem para ser representado por um número racional. Para responder o aluno deverá perceber que essa unidade pode ser dividida em 5 partes iguais e que o ponto marcado corresponde a 4/5 da unidade.

O outro segmento mede 3 cm e está dividido em 3 partes iguais, mas o segmento representa 1/3 da unidade. Para responder o aluno deverá perceber que o inteiro terá que ter 3 segmentos iguais a esse, e que por isso o inteiro está dividido em 9 partes. Logo, 1/3 é equivalente a 3/9 do inteiro e os pontos marcados correspondem respectivamente às frações 1/9 e 2/9. Optamos por usar o termo número racional por ser amplamente utilizado no ensino elementar.

Acreditamos que a maioria acerte a fração do primeiro segmento, pois é uma situação comum, apesar da unidade não estar totalmente dividida, e que poucos respondam as frações do segundo segmento, pois este tipo de exercício não é normalmente trabalhado no ensino, apresentando por isso um grau de dificuldade maior que o anterior.

RESULTADOS

Questão (a)		Questão (b)	
Respostas	Total	Respostas	Total
Em branco	11	Em branco	9
2	2	1/5 – 1/4	3
0,75	2	0,2 – 0,25	2
1/2	1	1/1 – 1/2	1
4/5	1	1 – 1/2	1
1/8	1	0,4 – 0,5	1
0,8	1	1 – 2/3	1
1/4	1	3/3 – 2/3	1
1/5	1	1/2 – 1/4	1
0 – 1/8 – 1/6 – 1/4 – 1/2 – 1	1	0 – 1/2	1
0 – 5 – 4 – 3 – 2 – 1	1	– – 1/2	1
		1 – 1	1

No primeiro segmento 4 alunos o dividiram para responder a questão mas todos erram a resposta, pois quem respondeu com a fração 4/5 ou o decimal 0,8 não dividiu a figura do segmento. Podemos perceber, contrariando as nossas previsões, que além dos dois alunos (9%) que acertaram, a maioria (48%) deixou a questão em branco e os que tentaram responder (43%) colocaram respostas que fogem totalmente ao raciocínio esperado para a solução, aparecendo de novo divisões e transformação de fração para decimal incorretas.

No segundo segmento, provavelmente por estar totalmente dividido diminuiu o número dos que deixaram a questão em branco (39%), mas nenhum acertou a questão tentando prolongar o segmento para encontrar a unidade e então identificar as frações marcada.

As respostas apresentadas para a questão fazem algum sentido, mas em grande parte são aleatórias e mostram que a concepção de número fracionário associado a medida não existe para eles.

QUESTÃO 07

O objetivo desta questão é perceber, a partir de quatro operações, a atitude que tomam perante a correção da produção de um aluno, através do comentário que fariam sobre essa correção. Gostaríamos de observar se aparece alguma postura de trabalho com o erro do aluno ou se simplesmente observam o certo ou errado, responsabilizando o aluno por seus próprios erros. Indiretamente queremos também perceber como operam com as frações através das correções efetuadas.

> 7) Um aluno deu as respostas abaixo para quatro contas envolvendo frações:
>
> a) $\frac{1}{6}+\frac{2}{6}=\frac{3}{6}$ b) $\frac{1}{5}+\frac{1}{8}=\frac{2}{13}$ c) $\frac{27}{35}-\frac{6}{35}=\frac{21}{0}$ d) $\frac{3}{4}-\frac{3}{9}=\frac{0}{5}$
>
> O que você lhe diria depois da correção?

Colocamos duas adições e duas subtrações simples, em que aparecem frações com mesmo denominador e frações com denominador diferentes. As respostas apresentadas são comuns em produções de crianças da escola elementar.

No item (a) a operação foi feita corretamente, nos itens (b) e (c) "os alunos" somam ou subtraem numeradores e denominadores e no item (d) fazem o menor número sendo subtraído do maior, sem se preocupar com a coerência da operação feita no item (a).

Acreditamos que a maioria deva responder que as questões (b), (c) e (d) estão erradas porque ele não sabe o m.m.c., visto que as operações de adição e subtração baseiam-se somente nesse procedimento.

RESULTADOS

3 alunos deixaram a questão em branco e dos que responderam pudemos levantar três tipos de respostas: as que não apresentam a correção das operações e têm comentários (9), as que apresentam a correção e têm comentários (8) e as que apresentam correção e não têm comentários (3.)

Dos 18 que fizeram algum comentário somente um mostrou alguma preocupação com a aprendizagem do seu aluno comentando:

"Sinceramente não sei, mas me esforçaria para que ele realmente compreendesse o resultado e todo o processo."

Dos demais, 8 referem-se ao uso do m.m.c., 3 referem-se a falta de atenção do aluno, mostrando a pedagogia "do prestar atenção" como seus mestres faziam. Um deles lança uma questão:

"Se ele decidiu resolver as operações também nos denominadores, porque ele não o fez no ä"?"

Os outros justificam as correções feitas e um deles justifica: *"que (b) e (c) estão corretas porque fez a soma lógica."*

Podemos observar que os comentários, como havíamos previsto, referem-se a técnica que o aluno deveria usar para acertar a questão, responsabilizam o aluno por seus erros ou ainda mostra a própria falta de conhecimento sobre o assunto do futuro professor.

Consideraram as questões como incorretas o seguinte total de alunos.

Questões	Correta Total	Errada Total	Correções sugeridas			
			Fração	Total	Fração	Total
(a)	8	3	3/12	1	8/6	1
(b)	3	8	13/40	5		
(c)	3	7	21/35	3		
(d)	2	9	15/36	3	0/36	1

Os alunos que não fizeram sugestão de correção apenas assinalaram que a questão estava correta ou errada. Podemos observar que os 8 alunos que consideraram a primeira correta não mantiveram a coerência para as outras operações, pois somente 5 corrigiram a operação (b) adequadamente e 3 o fizeram para as operações (c) e (d).

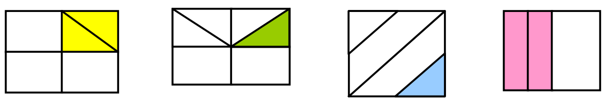
Além disso, aparecem sugestões para as questões (a) e para as demais questões como corretas, o que mostra que para alguns o procedimento adotado pelo aluno está correto.

Podemos então concluir, que na realidade, somente três alunos (13%) têm domínio das operações de adição e subtração, porque corrigiram corretamente as operações apresentadas, o restante prefere assinalar somente com certo ou errado, sem arriscar uma sugestão do que seria correto ou não se expõem, fazendo comentários gerais sem corrigir a questão.

<u>QUESTÃO 08</u>

Gostaríamos de verificar a interpretação que os futuros professores dão para figuras que não estão totalmente divididas e que não tenham mesma forma. Além disso qual tipo de comentários farão acerca do que consideram errado com os seus alunos. Indiretamente estaremos observando como interpretam tais representações.

8) As figuras abaixo foram apresentadas para dois alunos que as identificaram com as frações conforme segue. Quais respostas você consideraria como certas e como explicaria essas respostas para os alunos.



Aluno (1)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	não é fração	$\frac{1}{2}$
Aluno (2)	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{1}$

Esta questão apresenta uma situação para correção, através da associação de números fracionários a figuras. Apresentamos quatro retângulos, divididos de forma não usual, associados a números fracionários como sendo as respostas de dois alunos.

O aluno (1) mostra que tem alguma noção de equivalência e não considera a parte pintada do terceiro retângulo, como um representante fracionário, o que é coerente com o ensino usual, pois as partes não são iguais. O aluno (2) usa para as duas primeiras figuras a dupla contagem das partes e para as outras duas a relação da parte pintada para a parte não pintada (parte/parte), não mostrando preocupação com a igualdade das partes.

Acreditamos que a maioria considere o aluno (2) mais correto do que o (1) por causa da dupla contagem e apenas corrijam as questões sem muitas explicações, até porque estão acostumados à correção através do certo ou errado.

RESULTADOS

Nesta questão 4 alunos deixaram em branco e do restante 6 não fazem comentários, apresentando somente a correção e 6 apenas descrevem o que o aluno fez.

Nos comentários que aparecem citam a questão de ter que contar os quadradinhos, que as partes devem ser iguais, que existe mais de uma possibilidade de interpretar uma fração (referindo-se a 1/2 e 2/1 como certas) e que o aluno não entendeu. Vamos destacar um que mostra bem a força da divisão de toda a figura em partes iguais e da dupla contagem das partes:

"A lógica para isso seria dividir as frações todas em tamanhos iguais para que pudessem enxergar logicamente o que realmente é." Esse comentário sugere que o coerente (lógico) para eles é exatamente o procedimento da dupla contagem das partes que gostaríamos de evitar.

O quadro abaixo mostra as correções feitas apenas com certo ou errado.

Aluno (1)				Aluno (2)			
	Certa	Errada	Branco		Certa	Errada	Branco
1/4	11	8		2/5	9	9	1
1/8	5	12	2	1/6	9	9	1
não é fração	2	14	3	1/3	4	10	5
1/2	7	12		2/1	9	9	1

Com relação ao aluno (a) dos 11 que consideraram 1/4 correta, 6 mudam de ponto de vista, pois somente 5 consideram 1/8 correta, provavelmente porque efetivamente a primeira figura está dividida em 4 partes, mas a segunda teria que ser dividida para que aparecessem as 8 partes. O mesmo se verificando para a fração 1/2 que apenas 7 consideram correta. Com relação a referência “não é fração”, 14 a consideraram errada e não fizeram nenhuma sugestão. Somente a entrevista poderia nos revelar o que estariam considerando como correto.

Um número maior de futuros professores consideram o aluno (2) correto, como havíamos previsto, mostrando a força da dupla contagem em situações que não caberia esse procedimento.

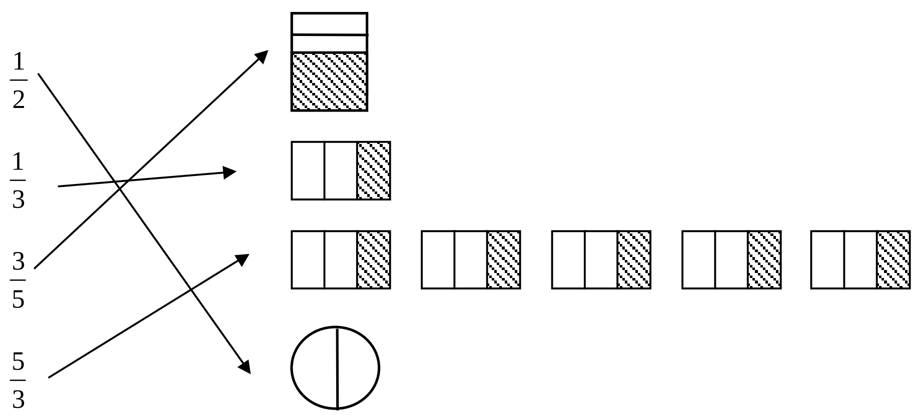
Podemos concluir que poucos têm percepção do envolvimento da área na concepção parte/todo no contínuo e percebem os traços que estão faltando ou estão a mais (1/4) nas figuras.

<u>QUESTÃO 09</u>

O objetivo desta questão é, a partir de relações de números fracionários com figuras usuais ou não, colocá-los frente a uma situação de correção, verificando, nos comentários que farão, as concepções que possuem sobre esse tipo de relação e suas representações.

9) Foi dado para um aluno quatro frações para que ele relacionasse com algumas figuras. O resultado foi o seguinte:

<u>Frações</u> <u>Representações</u>



O que você comentaria com ele a respeito do seu trabalho?

A primeira é a fração 1/2 associada a um círculo dividido em duas partes, com nenhuma pintada. A segunda é a fração 1/3 associada a uma figura comum com todos os traços de divisão visíveis. A terceira é a fração 3/5 associada a uma figura onde a parte pintada aparece sem subdivisões, mas que com o auxílio de uma régua, dá para perceber que ela estaria dividida em cinco partes iguais com três delas pintadas. A quarta é a fração 5/3 associada a cinco retângulos idênticos ao da fração 1/3, mostrando a divisão de vários inteiros ao mesmo tempo.

Acreditamos que a maioria fará comentários sobre a necessidade de pintar uma das partes do círculo e considerará a primeira e a terceira figuras como erradas, pois esses tipos de figuras não são comuns no ensino.

RESULTADOS

6 alunos deixaram esta questão em branco, 2 corrigiram mas não fizeram nenhum comentário e 8 não corrigiram mas fizeram comentários .

Deste último grupo um comentário reflete bem os demais:

"Que ele deveria ser mais atencioso em trabalhos seguintes, pois houve acertos, mas erros também foram observados."

Quase todos falam no acerto parcial da questão, mas como não corrigiram ficamos sem saber efetivamente o que estavam considerando errado.

A correção apresentada foi a seguinte:

	Certo	Errado	Branco
1/2	4	3	2
1/3	6	2	1
3/5	3	5	1
5/3	1	6	2

Como havíamos previsto, somente três alunos consideraram a fração 3/5 correta e 1 a fração 5/3, o fato da fração 1/2 não estar pintada não afetou 4 alunos que a consideraram correta. Estranho que 2 alunos consideraram a fração 1/3 errada, visto que é uma figura bem comum e dentro dos padrões normalmente estabelecidos.

De qualquer forma, podemos notar que a maioria fugiu a esta questão não a corrigindo e outros evitando comentários.

Os comentários dos futuros professores que apresentam correção referem-se a coerência que o aluno tem, que ele assimilou boa parte dos estudos (considerando 5/3) errado), que está caminhando para chegar nas frações, ... Um deles merece citação:

"Que infelizmente ele acertou só uma (1/3) e que pensasse um pouco no que ele fez, explicaria que quem determina a quantidade de inteiros é o número de baixo do traço." O que mostra a preocupação com regras pré-determinadas e não com o que se passa na cabeça do aluno, acredito também que na hora de escrever trocou "partes" por "inteiros".

3.3.2 – ATIVIDADE 1

Quantidades Discretas e Quantidades Contínuas

JUSTIFICATIVA

É fundamental para o ensino de frações que o professor perceba as diferenças entre as situações e as ações que envolvem as quantidades discretas e as quantidades contínuas. Mesmo sendo o mundo da criança dominado pelo discreto, muito pouco se trabalha com esse tipo de quantidade no ensino de frações, provavelmente pelo fato de aparecerem muitas limitações e diferenças de procedimento em relação às quantidades contínuas, que inclusive podem provocar obstáculos em outros momentos.

Se faz necessário então, que os professores se apropriem desse conhecimento, no sentido de poderem perceber quando os alunos usam esquemas de pensamento para um tipo de quantidade quando estão trabalhando com outro, principalmente a discretização do contínuo. É a partir da percepção das concepções dos alunos, que o professor pode agir a fim de colaborar com a aprendizagem de cada um.

OBJETIVOS

A princípio gostaríamos que refletissem sobre o que é quantificar e sobre as duas possibilidades de quantificação: a contagem e a medida. Com isso, encaminhá-los a perceber que as quantidades discretas surgem da contagem e que por isso são representadas pelo conjunto dos números naturais. E que a divisão euclidiana, é uma ferramenta bem adaptada para a distribuição desses objetos. Por exemplo, 7 bolinhas distribuídas entre 2 crianças, resultará em 3 bolinhas para cada uma e sobrará uma bolinha.

Mas, normalmente não aparece no ensino, que essas divisões com resto quando estão relacionadas com quantidades contínuas, tem os números fracionários como ferramentas bem adaptadas para resolvê-las. Por exemplo, 7 chocolates para 2 crianças, que resultará em 3 1/2 de chocolate para cada um. Essa percepção não acontece porque essas divisões, são normalmente usadas para serem respondidas com números decimais.

É importante também perceberem que as frações podem representar as divisões com resto nos naturais, que normalmente não aparecem no ensino pois são encobertas pela introdução dos números decimais, por exemplo que $5 \div 2$ dá 2 e resta 1 e pode ser representado por 2 1/2 e não só por 2,5.

Nas quantidades contínuas, podemos efetuar as divisões dos objetos, sem que eles percam suas características, por exemplo, um chocolate pode ser dividido em várias partes, sem deixar de ser chocolate e podendo ser consumido de qualquer forma.

Enfim, gostaríamos que percebessem as diferenças entre as situações e ações que envolvem os dois tipos de quantidades, a partir de situações de quantificação levando-os a discutir e explicitar tais diferenças e a produzir novos exemplos para os dois tipos de quantidades, não confundindo o objeto matemático, números fracionários, com os objetos utilizados na situação, pois apesar da existência física das impossibilidades de distribuições nos naturais, elas não podem ser representadas por frações e sim pela divisão euclidiana.

ESCOLHAS DIDÁTICAS

Trabalhamos com a representação de uma fita com 9 cm de comprimento, que no decorrer do trabalho seria dividida ao meio três vezes seguidas, resultando em pedaços com 4,5 cm, 2,25 cm e 1,125 cm de comprimento, para que percebessem, a principal característica das quantidades contínuas, que é a possibilidade de divisões sucessivas, até que fisicamente fosse impossível continuar a divisão em uma situação concreta.

Apresentamos, também, um conjunto discreto com 12 botões que deveria ser dividido em dois grupos três vezes seguidas, resultando em conjuntos com 6 botões e 3 botões nas duas primeiras. Na última distribuição, deveria aparecer a impossibilidade da divisão de 3 botões para duas pessoas, pois a divisão de um botão ao meio, nos dá dois pedaços de um material qualquer, sem as características de um botão, pois não tem mais utilidade.

RESULTADOS ESPERADOS

Acreditamos que os futuros professores não dêem conta dessas situações, e que atuassem sobre elas simplesmente da maneira como aprenderam, sem consciência da importância de tal conhecimento para atuar com seus alunos. E também, que os objetivos seriam atingidos somente nas discussões de correção.

CORREÇÃO

Gostaríamos de esclarecer que os alunos fizeram as fichas das atividades em grupos e, que antes de darmos início à correção, solicitamos que não apagassem as respostas que estavam registradas, fazendo a correção ou em uma folha à parte ou com uma caneta de outra cor. Ao levantar, os resultados apresentados nas fichas, pudemos perceber que a maioria corrigiu adequadamente as questões e fizeram também muitas anotações sobre as discussões.

Por outro lado, como havíamos previsto, muitos resolveram as questões de forma incorreta, acreditando que estavam corretas, o que os levou a perceber o *erro cometido somente na correção coletiva.*

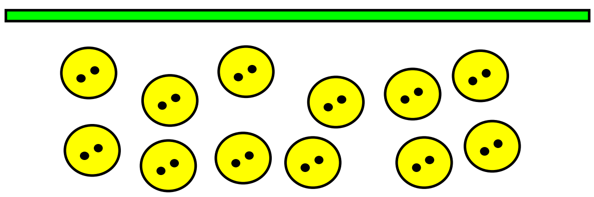
Iniciamos a atividade com a definição de quantificação para facilitar as respostas das questões seguintes.

Quantificar significa determinar a quantidade ou o valor de alguma coisa. Essa quantidade pode ser expressa pelo número de objetos de um conjunto ou pela medida que possui.

A seguir apresentaremos as previsões e os resultados para cada questão desta atividade.

QUESTÃO 01

1) As figuras abaixo estão representando um pedaço de fita e alguns botões. Quantifique-os.



Esperamos que a maioria, a partir da definição, perceba que deve contar os botões e medir a fita para quantificá-los, respondendo 12 botões e 9 cm. É provável que alguns alunos respondam 1 fita e 12 botões pois não estão habituados com representações em medidas reais.

RESULTADOS

Observando a ficha encontramos os seguintes resultados: 10 alunos responderam 9 cm e 12 botões, sendo que três deles escreveram "um conjunto de 12botões"; 8 responderam 1 fita e 12 botões, 3 responderam 13 objetos e 2 alunos deixaram a questão em branco.

DEBATE

Durante a correção coletiva surgiram as seguintes respostas: *"13 objetos", 12 botões e 1 fita" e "nós medimos a fita e contamos os botões"*.

Colocamos então que o procedimento adotado nas duas primeiras respostas foi contar 12 botões mais um pedaço de fita, quantificando a fita como um pedaço qualquer que poderia ter 9 cm , 1m, 5m, ... o que não identificaria aquele pedaço de fita que estava representado em tamanho real. Procuramos mostrar que na realidade, temos quantidades que devem ser medidas e outras que devem ser contadas, para que possam ser particularizadas e ter um número associado a elas.

QUESTÃO 02

2) O que você fez para associar a cada uma dessas figuras uma quantidade?

Acreditamos que respondam que usaram a contagem para quantificar os botões e a medição para quantificar o pedaço de fita.

RESULTADOS

Os que responderam 9 cm e 12 botões escreveram: *usamos a régua para medir a fita e para os botões a contagem*; os que responderam 1 fita e 12 botões escreveram: *contamos* e os que responderam 13 objetos escreveram: *usamos a adição para se formar o conjunto.*

DEBATE

Na discussão mostramos a coerência das respostas dadas com os procedimentos adotados para a quantificação na questão anterior, e sobre as ações que cada um dos dois tipos de quantidades exigem, para que lhes seja associada um número, pois contar e medir são ações que exigem procedimentos de naturezas diferentes.

QUESTÃO 03

3) Distribua igualmente a fita e os botões entre duas costureiras. Quanto cada uma vai receber?

Esperamos que a maioria divida os botões em dois grupos e a fita ao meio, respondendo que cada costureira ficará com seis botões e 4,5 cm de fita. Alguns podem responder 1/2 fita se a quantificaram como 1 fita.

RESULTADOS

Constatamos que 11 alunos responderam 4,5 cm de fita e 6 botões, o que mostra que um deles passou a medir a fita; 4 responderam 1/2 fita e 6 botões, sendo que três deles mostraram 12/2 = 6 botões; 2 que haviam deixado as anteriores em branco responderam 6 botões e metade da fita; 2 responderam que "para cada metade da fita, elas receberam 6 botões", usando o raciocínio de razão da fita para os botões e 1 respondeu 1/2 fita ou 4,5 cm e 6 botões usando os dois tipos de quantificação para a fita.

DEBATE

Explicamos que os que haviam medido e contado responderam *"6 botões e 4,5 cm de fita para cada costureira"*, enquanto que os outros responderam *"cada costureira recebeu 6 botões e 1/2 fita"*. Os que responderam meia fita estavam pegando a fita como uma unidade, como um pedaço de fita qualquer. Imediatamente um aluno justificou a sua resposta, como havíamos previsto: *"Nós pensamos assim, aqui é uma maneira ilustrada, poderia ter 15, 20, 50, 1 metro. Nós não limitamos só a esse pedacinho aqui."*

Mostramos então, que o grupo que mediu, havia particularizado a representação daquele pedaço de fita, enquanto o outro grupo havia pensado a mesma situação de forma diferente, entendendo aquela representação como sendo algum pedaço de fita, em que a metade poderia ter qualquer medida.

QUESTÃO 04

4) Apareceram mais duas costureiras. Divida de novo em dois o que estava com as outras. Quanto cada uma vai receber?

Acreditamos que a maioria divida as quantidades obtidas no exercício anterior por dois, respondendo que cada costureira receberá 3 botões e 2,25 cm de fita. No entanto, os que responderam anteriormente 1/2 fita, devem responder 1/4.

RESULTADOS

Observamos que 11 alunos responderam 2,25 cm de fita e 3 botões, 8 responderam 1/4 de fita e 3 botões, 3 responderam com as sentenças $\frac{1}{2} \div 2 = \frac{1}{4}$ e $6 \div 2 = 3$, e 1 aluno respondeu 1/4 de fita ou 2,25 cm e 3 botões.

DEBATE

Na correção ficou claro que com mais duas costureiras, cada uma delas ficaria com *"3 botões, 1/4 de fita ou 1,25 cm de fita"*, dependendo estas respostas das que foram dadas anteriormente. Não apareceram maiores discussões ou dúvidas.

QUESTÃO 05

5) Se aparecessem mais quatro costureiras e as costureiras anteriores tivessem que dividir em dois os que elas receberam. Seria possível redistribuir a fita e os botões igualmente entre elas? Justifique a sua resposta.

Esperamos que a maioria divida as quantidades obtidas anteriormente, respondendo que cada costureira receberia 1,125 cm de fita e um botão e meio, mesmo percebendo que embora um botão possa ser dividido ao meio, ele não preste para nada. Na realidade a ferramenta adequada para solução desta questão é a divisão euclidiana.

Os que responderam na questão anterior 1/4 da fita, devem responder 1/8 da fita.

RESULTADOS

Levantamos que para esta questão 14 alunos responderam: 1/8 ou $\frac{1}{4} \div 2 = \frac{1}{8}$ da fita e 3 responderam 1,12 cm, para os botões responderam 3/2 ou 1 1/2 botões, referindo-se ou a impossibilidade de divisão ou a inutilidade de 1/2 botão. Para os demais encontramos: 1 aluno responde que fica 1 cm de fita para cada e sobra 1 cm e para os botões faz a seguinte razão: 12 botões/8 costureiras; 1 aluno escreve: 1,10 cm e 25 milímetros de fita e 1 e 1/2 botões, sendo o único que acertou a divisão mas registra separando centímetros de milímetros e finalmente, 2 alunos respondem com a sobra de um botão, mas um deles responde 0,5625 cm de fita, errando assim a divisão de 2,25 por 2.

DEBATE

Questionados sobre as respostas que deram, um dos grupos respondeu que *"cada costureira pegou 1 botão e deu para as quatro novas, então as quatro anteriores ficam com 2 e as quatro novas com 1"*, o que mostra um recurso de distribuição mantendo a utilidade dos botões.

Outros responderam:

- *"Nós distribuímos, mas os botões não dava para serem usados porque dividimos eles ao meio"*, dando um botão e meio para cada costureira.

- *"Bem, aqui deu um botão e meio para cada costureira e 1/8 da fita, não deu para dividir igualmente, porque meio botão não tem utilidade"*.

Perguntamos sobre a possibilidade de dividir um botão ao meio e um dos grupos, como havíamos previsto respondeu:

- *"Lógico que não tem um botão e meio, por lógica não tem, por matemática tem."*

Mostramos então, que dependendo do objeto a sua distribuição fica limitada, pois com a divisão ele pode perder a sua utilidade. Nestes casos, a ferramenta adequada para a solução, seria a utilização da divisão com resto.

QUESTÃO 06

6) Que diferenças você notou nesses dois tipos de quantidades?

Acreditamos que estas diferenças só ficariam claras na discussão final, pois teriam dificuldades em percebe-las e explicitá-las, visto que estes aspectos não são normalmente abordados no ensino, no máximo devem falar que existem objetos que são contados e outros que são medidos.

RESULTADOS

Nesta questão os registros mostram, como havíamos previsto, que muitos tiveram dificuldades em perceber as diferenças, alguns falam em frações proporcionais e desproporcionais, no uso de centímetros e números cardinais,... No entanto, 10 alunos, de uma forma de outra, perceberam que dependendo do material poderíamos fazer diversas divisões.

DEBATE

Questionados sobre as respostas que deram, de imediato três grupos se manifestaram com as seguintes respostas:

- *"Por objetos e por medida".*

- *"Dependendo do material, pode ser dividido, por exemplo a fita ela pode sempre ser dividida, que resultará sempre em um pedaço menor que pode ser utilizado. Agora, os botões não tem como, porque meio botão não existe maneira dele ser utilizado. Então dependendo do material que o objeto é constituído ele pode ser dividido".*

- *"Nós pensamos dessa maneira, mas nós voltamos para a matemática entendeu? Nós não pensamos no uso dele no dia-a-dia, só no caso da matemática e da fração, como o trabalho está voltado para isso nós nos limitamos a pensar assim."*

Perguntamos então, que resposta eles acreditariam que uma criança daria, se eles pedissem para que ela dividisse 5 bolinhas com um colega. De imediato veio a resposta:

- *"Ele vai ficar com três e vai dar duas para o colega"*.

Falamos então sobre o significado que poderia ter para essa criança, falar que ela deverá dividir igualmente, dividindo uma bolinha ao meio porque ela está estudando matemática. Todos concordaram que tal argumento não teria sentido.

Mostramos então, que o conjunto dos naturais representa resultados de contagens, e que nele quando dividimos 3 por 2 temos quociente 1 e resto 1, o que representaria na situação dos botões, que daríamos um botão para cada costureira e sobraria um, pois com os números naturais só são possíveis as divisões onde o dividendo é múltiplo do divisor. Além disso, que seria possível fisicamente dividir um botão, uma bolinha de gude, ... mas com isso esses objetos perderiam suas características deixando de ter utilidade.

No entanto, se estivermos trabalhando só com números, no conjunto dos números fracionários, poderíamos fazer qualquer divisão e dar a resposta ou em fração ou em número decimal, pois a limitação física desapareceria porque não estaríamos mais em uma situação concreta.

QUESTÃO 07

7) Dê dois exemplos com outras situações que envolvam esses dois tipos de quantidades.

Esperamos que reproduzam simplesmente as situações apresentadas, alterando os tipos de objetos.

RESULTADOS

Seis alunos deixaram a questão em branco e observando as fichas pudemos notar que só a resolução da atividade não garantiu a percepção da quantificação e das diferenças existentes entre o tratamento do discreto e do contínuo.

Porém, um grupo lança a questão da possibilidade de distribuir 8 xícaras entre 10 pessoas, outro apresenta a distribuição de 1 papel e 3 canetas no sentido de razão, dando como resposta 1/3 do papel para cada caneta, um outro grupo fala de 8 pratos e 1 bolo, mostrando a impossibilidade de distribuição dos pratos e alguns tentam reproduzir uma nova versão das situações já trabalhadas.

Apenas um dos grupos apresentou uma situação que a nosso ver atinge os objetivos:

"Tenho 1 pizza para dividir em 3 pessoas. Com quantos pedaços ficará cada um? R: 1/3 para cada um".

"Tenho 3 caixas de bombons para dividir em 2 pessoas. R: Ficaram 1 1/2 caixa de bombom".

<u>DEBATE</u>

Não discutimos estas sugestões, pois tínhamos como objetivo procurar as produções na própria ficha e além disso, levaria muito tempo para discutirmos os 12 grupos de problemas que apareceram.

3.3.3 – ATIVIDADE 2 - Concepção Parte/Todo

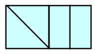
<u>JUSTIFICATIVA</u>

Dando continuidade, trabalharemos inicialmente com a concepção parte/todo, pois ela é <u>normalmente encontrada</u> como origem das demais concepções e como geradora da linguagem e das representações,

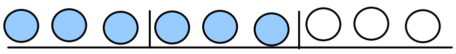
Por outro lado, estamos considerando o conhecimento que os futuros professores já possuem, pois a concepção parte/todo é a referência que eles têm de seu aprendizado e este trabalho deve provocar rupturas nas concepções já adquiridas, dando lugar a uma nova maneira de pensar e a outros pontos de vista para esta concepção. Além disso, acreditamos que se começássemos a discutir o assunto por uma outra concepção, eles ficariam durante algum tempo em conflito com o conhecimento que já possuem, o que poderia provocar um processo de resistência a outras reflexões.

OBJETIVOS

Gostaríamos que percebessem que a concepção parte/todo, depende da divisão de um inteiro em partes ou séries iguais, equivalentes como quantidades de superfície ou quantidade de objetos.

Nas quantidades contínuas, gostaríamos que percebessem que a definição de igualdade das partes refere-se a área das partes e não a forma. O que permite associar partes de um inteiro divididas em formas diferentes a uma mesma fração. Por exemplo, que cada parte desta figura  pode ser representada pela fração 1/4.

Por outro lado, a divisão de uma figura geométrica, exige conhecimentos específicos e um planejamento de ações, pois permite várias possibilidades de divisão. Além disso, a divisão de quadriláteros é mais simples, pois pode ser feita apenas com régua, o que não acontece com os círculos que são aconselháveis para a identificação de frações, mas não para a sua reprodução ou divisão.

Nas quantidades discretas o inteiro é representado por um conjunto de objetos idênticos, onde cada elemento constitui uma parte desse conjunto. Por exemplo:  este conjunto de bolinhas pode ser representado pela fração 6/9, relacionando as bolinhas pintadas ao total de bolinhas, e pela fração 2/3, entendendo que ele foi dividido em três grupos com mesma quantidade e destes foram considerados 2.

Nestes tipos de situações, podemos nos deparar com situações concretas, como por exemplo, determinar ¼ de quinze bolinhas, que implicaria na divisão de 15 por 4. Isto acontece, pelo fato do conjunto dos números naturais não ser fechado em relação à divisão, nos levando a só poder dividir exatamente nesse conjunto quando o dividendo for um múltiplo do divisor.

RESULTADOS ESPERADOS

Acreditamos que os objetivos devem ser atingidos efetivamente nas discussões de correção da atividade, pois a princípio eles devem resolver as questões com seus conhecimentos, o que pode levar ao erro sem que o percebam.

Durante essas discussões devem se impressionar com os novos pontos de vista para a concepção, a partir das questões que fogem aos padrões, o que deve desestabilizar o procedimento de dupla contagem das partes, pois perceberão que esse procedimento não garantiu a resolução correta das questões.

MATERIAL UTILIZADO

Para a realização da primeira questão foi entregue para cada aluno uma folha de papel sulfite amarela (A4 - 210 x 297).

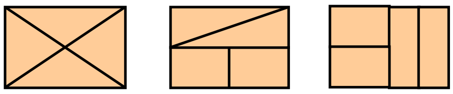
QUESTÃO 01

O objetivo é levantar a questão da igualdade das partes levando-os a refletir sobre a área e a forma que elas possuem, além da sua representação através do mesmo número fracionário. Além disso, levantar a questão da representação através de figuras de uma situação.

> 1) Vocês receberam 3 folhas de papel sulfite. Cada um irá pegar uma das folhas e irá fazer a seguinte divisão:
>
> O primeiro irá: dobrar a folha na direção das diagonais e depois irá cortar nessas diagonais.
>
> O segundo irá dividir a folha ao meio no sentido do comprimento e depois irá dividir uma das partes na diagonal e a outra parte ao meio no sentido da largura.
>
> O terceiro irá dividir a folha ao meio no sentido da largura e depois irá dividir uma das partes ao meio no sentido da largura e a outra ao meio no sentido do comprimento.
>
> a) Posso falar que dividimos cada retângulo em quatro partes iguais? Por quê?
>
> b) Posso associar a cada uma das partes uma fração? Qual?
>
> c) Compare as partes dos três retângulos e diga que relação existe entre elas.
>
> d) Represente no verso da folha os três retângulos divididos.

É um exercício fundamental de representação de uma situação concreta de divisão no contínuo e a sua representação através de figuras e de um número fracionário.

Cada aluno irá dobrar e recortar a folha que recebeu de uma maneira, levando o grupo a obter o seguinte resultado:



Levando-os a perceber que apesar das formas diferentes cada uma das partes de um retângulo e todas as partes (dos três retângulos) têm a mesma área, pois as folhas fornecidas eram iguais e que por isso, podem ser representadas pela fração 1/4.

Na questão (a) acreditamos que a maioria responda que as partes não são iguais porque as formas são diferentes. Em (b) a maioria deve responder "não", pois as figuras não foram divididas em partes iguais. Em (c) é possível que alguns notem que a área das partes tem mesma medida e respondam que elas têm o mesmo tamanho. Em (d) acreditamos que não terão rigor algum na representação dos retângulos fazendo-a aleatoriamente, não representando os três retângulos com as mesmas dimensões e não usando a régua.

RESULTADOS

No item (a) da questão, contrariando nossas previsões, 15 alunos responderam que "sim", com a maioria percebendo que embora as formas das partes fossem diferentes a área ou o tamanho permanecia o mesmo. Mas, 2 desses alunos justificam que não importa a direção (provavelmente do traço de divisão) ou o formato da área, e um outro que a soma dos lados de todas as figuras são iguais, apesar de formas diferentes (o que não é verdade), provavelmente está se referindo ao perímetro das folhas iniciais.

Os 8 que responderam "não", referem-se a três divisões diferentes em partes diferentes, a medidas diferentes, a formas diferentes ou que seria possível se o retângulo tivesse os quatro lados iguais.

No item (b), 2 alunos deixaram em branco e o restante respondeu que "sim" associando a fração 1/4, sendo que dois destes alunos responderam que seria a fração 1/2 analisando por pares e 1/4 analisando por 1 inteiro. Este resultado mostra que seis alunos embora tenham afirmado na questão anterior que os retângulos não estavam divididos em quatro partes iguais, associaram a essas partes a fração 1/4.

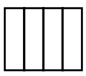
No item (c), 9 alunos referem-se a área ou a medida que são iguais para todas as partes; 5 falam que as partes podem ser representadas por fração; 2 que a soma das áreas de cada parte resulta na área do retângulo inicial, não falando que precisam ser consideradas quatro partes para isso; 3 falam sobre a medida dos lados dos retângulos e do paralelismo e 4 da mesma quantidade que têm as partes, mas das formas diferentes.

No item (d), 1 aluno deixou a questão em branco e 1 desenhou um só retângulo ocupando quase toda a página, do restante 11 usaram régua para desenhar. Dos alunos que desenharam os três retângulos 10 os desenharam do mesmo tamanho. Isso confirma a nossa previsão de que a representação de situações não é clara para a maioria, pois além de muitos não usarem a régua, desenhando a mão livre, os que a usam não representam os três com as mesmas dimensões.

DEBATE

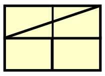
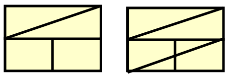
Comentamos que havíamos percebido discussão entre eles, das partes serem iguais ou não, e que depois que recortaram e compararam as partes ouvimos comentários do tipo: *"são iguais mas não são iguais"*.

Iniciamos a discussão colocando no quadro uma figura, como a que

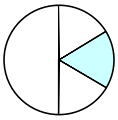


está ao lado, mostrando que neste caso não haveria nenhuma dúvida sobre a igualdade das partes e a fração 1/4. E que no caso dos retângulos, como todos tinham concordado que as partes tinham a mesma área, também podíamos dizer que as partes eram iguais e associar a cada delas a fração 1/4. Logo podemos concluir que cada um dos retângulos tinha quatro partes de áreas iguais, que podiam ser representadas pela fração 1/4, embora as formas delas fossem diferentes. Além disso, como as folhas de papel também eram iguais, todas as doze partes que encontraram tinham a mesma área.

A seguir, mostramos que podíamos ter as partes visivelmente iguais, como estavam acostumados fazendo outros recortes nas partes que encontraram.

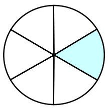
Por exemplo neste retângulo  poderíamos obter: 

Insistimos que na concepção parte todo no contínuo, quando falamos em partes iguais, estamos nos referindo a área e não a forma das partes. Levamos então a discussão para a explicitação ou não dos traços de divisão e para isso usamos a seguinte figura:



Questionados sobre qual fração da figura estava pintada, alguns responderam que era 1/4, enquanto outros não concordavam porque a figura não estava dividida em quatro partes iguais.

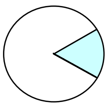
Desenhamos então todos os traços de divisão da figura e então todos concordaram que a fração pintada era 1/6.



Quisemos saber porque agora tinham tanta certeza da resposta. Responderam que bastava contar 1, 2, 3, 4, 5, 6 e como somente uma das partes estava pintada, dava 1/6.

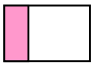
Mostramos então que esse tinha sido o processo utilizado no desenho inicial por quem respondeu 1/4, mas como a figura não estava dividida em quatro partes iguais eles haviam chegado à fração errada. Voltamos ao desenho e apagamos os traços, retornando a figura inicial e todos concordaram que efetivamente não poderíamos associar a fração 1/4.

Apagamos mais dois traços e perguntamos se havia mudado alguma



coisa na parte pintada da figura. Concordaram que não, e alguns argumentaram que apenas ficaria mais difícil dizer qual era a fração do círculo que estava pintada.

Tentamos mostrar que a necessidade de todos os traços na figura, estava diretamente ligada ao processo de identificação das frações através da contagem das partes em que o inteiro foi dividido e da contagem das partes que foram pintadas, e como esse procedimento é muito usado, quando algum traço desaparece, os erros surgem.

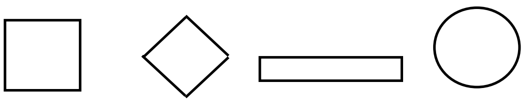
Falamos também, da necessidade de refletir bastante sobre essas situações pensando na área e não na forma das partes, sendo possível dar uma figura deste tipo  para uma criança e pedir a fração do retângulo que está pintada. Isso a levaria a usar uma régua para descobrir em quantas partes iguais havia sido dividido o comprimento do retângulo e dar a resposta. Com certeza, desenvolveria uma concepção de fração muito mais consistente, do que se estivesse trabalhando com as figuras totalmente divididas e usando apenas a contagem para identificar uma fração.

Comentamos que tínhamos visto muitos deles contando e dividindo as figuras que não estavam totalmente divididas quando trabalhavam, porque haviam aprendido somente daquela forma e por isso entendiam que era necessário dividir toda a figura para depois identificar a fração. Mas que embora esse procedimento não fosse errado, ele nos priva de enxergar outras possibilidades.

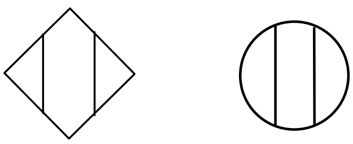
QUESTÃO 02

Temos como objetivo colocá-los em situações comuns e não comuns de divisão de figuras, mostrando as dificuldades que aparecem e os cuidados que devem ser tomados na divisão do círculo e do losango.

2) Pinte dois terços das figuras abaixo.



Acreditamos que alguns façam os traços com o uso da régua e que não tenham nenhuma dificuldade na primeira e terceira figuras, o que provavelmente não ocorrerá com as outras, pois alguns devem dividir as figuras com dois traços, sem a preocupação com a igualdade das partes, obtendo representações destes tipos:



RESULTADOS

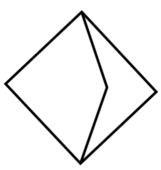
Como havíamos previsto, para a divisão do quadrado, 9 alunos não utilizaram a régua, mas se preocuparam com a igualdade das partes, pois somente dois apresentaram as partes visivelmente diferentes. Para o losango a maioria usou a régua, mas 3 alunos, como havíamos previsto, dividiram a figura a partir da divisão da diagonal em três partes e os mesmos 2 alunos que dividiram aleatoriamente o quadrado também o fizeram aqui. A divisão do retângulo não apresentou problemas, embora os mesmos dois alunos das questões anteriores e mais dois que não estavam usando a régua, tenham apresentado as partes diferentes. No círculo,7 alunos, como havíamos previsto, desenharam duas cordas aleatórias e os demais a partir de um centro não geometricamente determinado, fizeram a divisão em três partes, aparecendo em alguns desenhos as partes visivelmente diferentes.

DEBATE

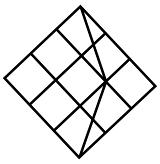
No início da discussão quisemos saber de uma aluna, que havia pedido o compasso, o que ela teria feito com ele. Ela respondeu que não havia usado *"porque deu para dividir certo com a régua"*.

Colocando no quadro as soluções que havíamos previsto, não houve discussão para o quadrado, mas a maioria rejeitou a solução do losango argumentando que no desenho dado, havia duas partes iguais e uma diferente, e que a igualdade das partes não estava acontecendo nem em área, nem em forma.

Uma aluna trouxe a solução, apresentada a seguir, alegando que a parte menor era 1/3 e que a maior era 2/3, justificando que havia colocado “um pouquinho” mais que a metade da diagonal. Solicitamos então, que nos mostrasse as três partes de mesma área em sua figura, mas ela não sabia dizer quanto era o "pouquinho" que havia colocado a mais. Sugerimos que tentasse justificar sua construção pensando em medidas.



Na aula seguinte, ela nos trouxe uma tentativa de solução, mas ainda sem conseguir mostrar o que pretendia, sugerimos que pegasse um losango de papel e tentasse mostrar através de dobradura. Momentos depois veio a solução, que foi apresentada e todos perceberam que havia um ponto exato



na diagonal para essa solução. Através da dobradura a aluna mostrou que os triângulos que apareceram eram congruentes e que portanto a parte maior representava 2/3 da figura e a parte menor 1/3.

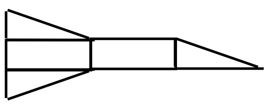
Aproveitamos para lembrar que não podemos argumentar com "pouquinhos", pois no caso do losango, poderíamos pegar qualquer ponto da diagonal, o que não traria a solução correta.

A seguir, passamos à discussão do círculo, colocando no quadro a divisão que havíamos previsto e todos concordaram que tal solução estava incorreta. Levantamos então a questão das dificuldades que aparecem na divisão de um círculo em partes iguais, questionados sobre a possibilidade de uma criança dividir um círculo em três partes iguais e concordaram que dificilmente uma criança conseguiria executar tal tarefa. Em vista disso, falamos da existência de técnicas complexas de desenho geométrico que permitem a divisão do circulo em partes iguais, com o uso de compasso e régua, que não são aconselhadas para as crianças. Assim, o círculo é bom para a manipulação e identificação de frações, mas nunca para ser reproduzido ou dividido, embora divisões em 2, 4, 8, ... partes sejam possíveis com muito cuidado.

<u>QUESTÃO 03</u>

O objetivo desta questão é discutir sobre a não necessidade da divisão de toda a figura para identificar uma fração pedida.

3) Colorir quatro sétimos da figura:



Apresentamos uma composição de triângulos e retângulos que esboça a figura de um foguete e a partir de um enunciado em língua natural pedimos que identifiquem 4/7 dessa figura. No entanto, acreditamos que a grande maioria divida toda a figura em triângulos para pintarem quatro deles.

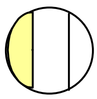
RESULTADOS

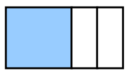
Como havíamos previsto, ninguém percebeu que o retângulo era formado por dois triângulos congruentes aos demais, desenhando todos os traços de divisão no foguete para identificar a fração, o que mostra que o procedimento da dupla contagem está presente com muita força nos procedimentos desses futuros professores.

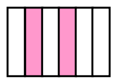
QUESTÃO 04

O objetivo é desestabilizar a dupla contagem e mostrar a possibilidade da fração equivalente como representante da mesma área, a partir da identificação da figura que representa uma fração dada,.

4) Quais desenhos têm 1/3 pintado?

a) 

b) 

c) 

Nesta questão apresentamos três figuras para que identifiquem em qual delas está pintada a fração 1/3. Nas duas primeiras a fração 1/3 responde ao procedimento da dupla contagem das partes. Na terceira, como a figura está dividida em seis partes iguais, com duas delas pintadas, a aplicação do mesmo procedimento conduz à fração 2/6, que seria equivalente a fração dada porque representa também a quantidade 1/3 do retângulo.

Acreditamos que a maioria assinale as alternativas (a) ou (b).

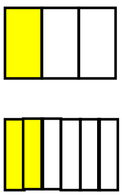
RESULTADOS

Observando as fichas vimos que 3 alunos deixaram em branco, 4 afirmaram que nenhuma das figuras estava com 1/3 pintado, 3 marcaram somente a alternativa (a), 4 marcaram somente a alternativa (b), 4 marcaram as alternativas (a) e (b) e, finalmente, 6 alunos marcaram somente a alternativa (c) sendo que três confirmaram a equivalência escrevendo 2/6 = 1/3.

Como havíamos previsto a maioria marcou as questões (a) ou (b), somente 6 alunos visualizaram a equivalência da parte pintada da figura com a fração 1/3, predominando o procedimento da dupla contagem, mesmo com as partes das figuras visivelmente diferentes.

DEBATE

Durante a discussão quando perguntados sobre o Item (a), todos, agora, concordaram que não estava pintado 1/3, pois as partes eram claramente diferentes, no (b) que também não estava pintado 1/3 e sim 3/5 e no (c) houve discussão, pois alguns diziam que era 1/3 e outros que era 2/6.



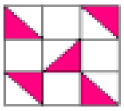
Colocamos as duas figuras ao lado, no quadro e falamos que provavelmente uma criança diria que as figuras eram diferentes, pois uma foi dividida em três partes e a outra em seis, e além disso, que 1/3 é uma fração e 2/6 é outra.

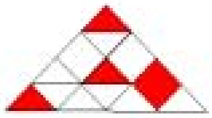
Para perceber a equivalência temos que aceitar dois números associados ao mesmo desenho e também duas figuras associadas a uma mesma fração, embora dividir em três partes e pegar uma seja diferente de dividir em seis partes e pegar duas. Além disso, as crianças quando trabalham com os naturais e escreve o número 2, elas não têm dúvidas sobre ele, porque não existe um outro número natural equivalente a 2. Logo a (c) estaria correta a partir da percepção de que nas duas situações estamos pegando a mesma quantidade do retângulo.

QUESTÃO 05

O objetivo é discutir sobre os traços de divisão implícitos e explícitos, através de figuras que não estão totalmente divididas.

5) Qual fração da figura está pintada?





Temos um quadrado e um triângulo divididos em partes que não são visivelmente iguais, para que identifiquem a fração que está pintada.

Acreditamos que muitos respondam corretamente após a divisão de toda a figura em "partes iguais", respondendo 5/18 e 5/16 respectivamente, e que alguns apliquem simplesmente a dupla contagem das partes respondendo 5/14 e 5/13 respectivamente.

RESULTADOS

Como havíamos previsto, 15 alunos dividiram as duas figuras para obter todas as partes iguais, mas um deles trocou o numerador com o denominador respondendo com as frações 18/5 e 16/5 e outro colocou as frações 5/14 e 5/16, como se não tivesse dividido a primeira figura.

Três alunos não dividiram nenhuma das duas e um deles respondeu com a fração 5/14 e 4/13, simplesmente contando as partes, os outros dois responderam corretamente.

Quatro alunos dividiram somente a primeira figura e destes, três acertaram as frações, o outro colocou 5/14 e 4/13 como se não tivesse dividido nenhuma delas. Um aluno dividiu somente a segunda e respondeu também com 5/14 e 4/13.

Podemos observar que a maioria que acertou teve que dividir a figura para aplicar corretamente a dupla contagem das partes, pois nesses casos ela garante o acerto.

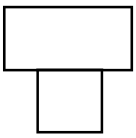
<u>DEBATE</u>

Na correção das questões destacamos os dois procedimentos mais presentes: a divisão de toda a figura para dar a resposta e a aplicação direta da contagem na figura, o que levou ao erro, pois as partes não eram iguais. Procuramos mostrar que quando se domina o assunto, não há necessidade de dividirmos toda a figura, porque podemos perceber os traços que estão escondidos e determinar a quantidade de partes iguais em que a figura foi dividida. E que nos tipos de figuras dadas quando se aplica só a contagem para determinar as frações, se esquece que as partes devem ter a mesma área, o que leva a identificação da fração errada.

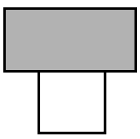
QUESTÃO 06

Gostaríamos nesta questão de provocar a reflexão sobre possibilidades diferentes de dividir uma figura não comum, retomando a discussão da igualdade das partes e da equivalência, a partir de uma situação de correção.

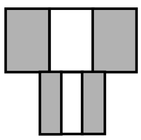
6) Um professor pediu para seus alunos marcarem 2/3 da seguinte figura:



Um desenhou



O outro desenhou



O primeiro aluno está correto? ________________________________

O segundo aluno está correto? ________________________________

Justifique sua resposta. ____

Para que respondam que os dois estão corretos, é necessário perceber que a parte superior da primeira figura, tem duas partes iguais à parte inferior. Na segunda tanto a parte superior, quanto a parte inferior estão divididas em três partes iguais, tendo 6/9 da figura pintada, o que eqüivale a 2/3. o que eqüivale a ter 6/9 da figura pintada. É fácil perceber essas frações a partir da divisão da parte superior da figura em seis partes iguais as da parte inferior.

É provável que a maioria responda que só o aluno (1) está correto, pois na outra figura as partes não estão iguais.

RESULTADOS

Contrariando nossa previsão, 17 alunos responderam que os dois alunos estavam corretos, um deles colocando a equivalência 6/9 = 1/3; 2 responderam que os dois estavam errados, *“pois não dividiram a figura por um todo”*, provavelmente referindo-se a necessidade de todas as partes aparecerem iguais e 4 responderam que o primeiro estava errado e o segundo estava certo, pois *“o primeiro dividiu em 2 partes e pintou a maior, o segundo dividiu a primeira parte em 3 e pintou 2 a segunda também”*.

DEBATE

A partir da figura no quadro questionamos sobre o aluno (1) estar correto, de imediato alguns responderam: *“Ele não está correto, porque ele não dividiu em 2/3.”* Continuamos a discussão colocando o traço que faltava na figura e mostrando que a área pintada não se alterava e que tínhamos 2/3 da figura pintada.

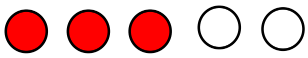
Com relação ao aluno (2), alguns achavam que ele estava correto e outros que não. Perguntamos porque estava errado e explicaram que: *“Ele não dividiu de uma vez só.”*

Pedimos então que colocassem os traços que faltavam para a figura ficar totalmente dividida em partes iguais, e responderam que tinha 6/9 pintados pois ela ficou com 9 partes iguais com 6 delas pintadas. Ficou claro então que as duas figuras tinham a mesma quantidade pintada, só que representadas de formas diferentes.

QUESTÃO 07

O objetivo é mostrar que nas quantidades discretas o inteiro é representado por um conjunto de objetos e cada elemento é tomado como uma parte do inteiro.

7) Que fração das bolinhas é vermelha?



Apresentamos um conjunto com 5 bolinhas onde cada uma delas representa 1/5 desse conjunto. Acreditamos que a maioria responda 3/5 sem problemas.

RESULTADOS

Nesta questão, como havíamos previsto, a maioria respondeu 3/5 e somente dois alunos escreveram 5/3 e depois corrigiram. Acreditamos que como no discreto a questão das áreas não acontece e o procedimento da contagem é que determina a fração, a incidência de erros desaparece.

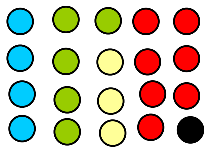
DEBATE

Não houve discussões ou dúvidas.

QUESTÃO 08

O objetivo é fazer com que percebam que no caso discreto a distribuição pode ser feita, e representada por uma fração, sem que cada parte tenha necessariamente a mesma quantidade de bolinhas, a partir da relação entre a quantidade de cada parte e a quantidade total. Mas, que algumas dessas relações podem admitir equivalentes se dividimos o inteiro em partes com a mesma quantidade de bolinhas.

8) Se temos um conjunto de fichas coloridas como representado abaixo, indique a fração das fichas de acordo com as cores.



Acreditamos que a maioria responda corretamente: azul 4/20, verde 5/20, amarela 3/20, vermelha 7/20 e preta 1/20, e que alguns percebam as equivalências 4/20 = 1/5 das bolinhas e 5/20 = 1/4 das bolinhas.

RESULTADOS

Observando as fichas notamos que 21 alunos (91%) acertaram a questão, colocando as frações 4/20, 5/20, 3/20, 7/20 e 1/20, sendo que três deles mostraram as equivalências.

2 continuaram trocando numeradores com denominadores e corrigindo na discussão.

DEBATE

Aqui também, não houve dúvidas e discutimos a questão de termos um inteiro composto de 20 bolinhas, em que cada uma era considerada uma parte do inteiro (1/20) e por isso obtemos frações do inteiro que representavam quantidades de bolinhas diferentes.

QUESTÃO 09

O objetivo é que percebam que nesta situação a distribuição deve ser feita em partes com a mesma quantidade de bolinhas, podendo essas partes serem representadas por frações.

9) Em um saco, há 20 bolinhas de gude que devem ser divididas igualmente entre cinco crianças. Represente a quantidade que cada criança vai receber de duas maneiras diferentes, como fração.

Na divisão de 20 bolinhas em 5 partes temos dois representantes fracionários: 4/20, cada um recebe 4 das 20 bolinhas ou 1/5 do total de bolinhas, dependendo da maneira como tratamos o inteiro antes da distribuição. Esperamos que alguns cheguem nas duas frações pedidas, mas acreditamos que muitos irão resolver através da divisão de naturais e não saberão relacionar a fração à questão com a concepção parte/todo.

<u>RESULTADOS</u>

Somente sete alunos desenharam as bolinhas, mas interpretando-as como 20 inteiros. Encontramos os seguintes resultados: 6 alunos responderam com as frações 20/5 = 4/1; 5 alunos com 20/5 = 4 (4 bolinhos) e 4/20 (4 em 20 ou 1/5); 3 responderam 4/20 e 1/5; 3 com 4/20 e 1/4; 2 com a operação de divisão, sem fração; 2 com 4/5 (4 bolinhas para 5 crianças) ou 5/4 e 2 alunos com 4/20 ou 4 inteiros.

Podemos notar aqui o obstáculo provocado pelo conhecimento dos números naturais, pois a maioria associou a situação a divisão de naturais, não considerando as 20 bolinhas como um inteiro. A concepção parte/todo não faz sentido nessas situações e sim a concepção quociente.

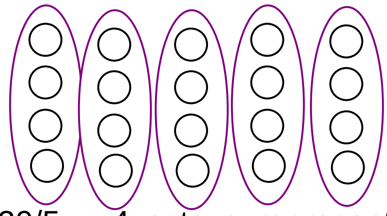
<u>DEBATE</u>

Na correção ficou clara a confusão que estavam fazendo entre a representação da situação através da divisão de 20 por 5 (quociente) e a representação através da concepção parte/todo no discreto. Mostramos que se considerássemos o inteiro sendo representado pelo conjunto das 20 bolinhas, teríamos as frações 4/20 ou 1/5 das bolinhas para cada criança.

De imediato dois alunos justificaram suas respostas:

- *“Nós colocamos assim, 1/5 equivalente a 4/20”*
- *“Eu coloquei 20/5 = 4”*.

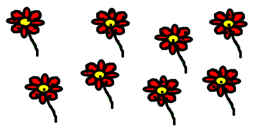
Desenhamos a situação no quadro e argumentamos que eram duas maneiras diferentes de tratar a mesma situação. Na primeira as 20 bolinhas estavam sendo consideradas como um inteiro e por isso representávamos a distribuição pelas frações 4/20 ou 1/5 das bolinhas. No segundo caso estavam considerando 20 unidades e a fração 20/5 = 4 estava representando a operação de divisão realizada para obter a resposta: 20 ÷ 5 = 20/5 = 4.



O objetivo das <u>questões 10 a 14</u> é levantar a discussão sobre a distribuição em uma quantidade discreta. Existem situações associadas as divisões não exatas com números naturais, que são impossíveis de serem representadas por um número fracionário. Teremos a possibilidade de representar tais frações de um conjunto, quando a quantidade total desse conjunto for um número múltiplo da quantidade de partes desejada. Acreditamos que esta discussão seja importante pois os alunos das séries iniciais estão acostumados a trabalhar com divisões não exatas com os naturais e estas historicamente são uma das possibilidades da introdução dos números fracionários.

<u>QUESTÃO 10</u>

10) Circule três quartos das flores.



Nesta questão são colocadas oito flores para que sejam marcadas as que representam 3/4 desse conjunto. Acreditamos que não haverá nenhum problema, pois é uma tarefa possível, simples e comum.

<u>RESULTADOS</u>

No agrupamento das flores apareceram os seguintes procedimentos:

Circularam:	Total
3 grupos de 2 flores	5
6 flores	5
2 grupos de 4 e em cada um 3 flores	5
4 grupos de 2 flores	4
4 flores e destas 3, desprezando 4	2
Individualmente 6 flores	2

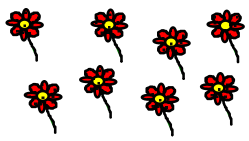
Podemos notar que apenas dois alunos erraram a questão, considerando quatro flores e desprezando as outras quatro, como se nesse tipo de situação o denominador representasse o total de elementos do conjunto.

DEBATE

Na discussão ficou explícita as maneiras diferentes que usaram para representar a fração pedida das flores.

QUESTÃO 11

11) Circule um terço das flores.



Pedimos que circulassem 1/3 de 8 flores, mas acreditamos que a conclusão da impossibilidade deverá sair somente na discussão de correção da questão. A princípio os alunos devem desenhar mais uma flor e circular três ou retirar duas circulando três, para tornar a resposta possível. Esta última hipótese deve ser a mais freqüente, pois representaria a divisão de 8 por 3, que resulta no quociente 2 e resto 2.

RESULTADOS

Circularam:	Total
Nenhuma	9
2 e desprezaram 2	5
3, 3 e 2 flores	4
2 flores e destas 1	2
2, 2, 3, e 1 flor	1
2 flores	1
3 flores	1

Dos nove que não mexeram no desenho, 6 deixaram em branco e 3 responderam com algoritmos 1/3 ÷ 8 = 1/3 x 8 = 1/24, interpretando 1/3 de 8 como uma divisão, e 8/3 = 2 2/3 e 8 ÷ 3 = 2,666, o que mostra que não importa a situação que está sendo representada e sim as operações necessárias com os números que aparecem.

Os cinco que desprezaram duas flores, acreditamos que representam a divisão de 8 por 3, que tem quociente 2 e resto 2. Já os que circularam 3, 3 e 2 flores, provavelmente pensaram como os anteriores, mas não ficou explícito que estavam desprezando 2 delas.

O que circulou apenas 3 flores, escreveu ao lado 3/8, provavelmente querendo mostrar que usando o número 3 (que aparece em 1/3) só temos a possibilidade de circular 3 em 8 flores.

O restante circulou as flores de maneiras que não conseguimos entender o raciocínio usado apenas pela figura.

DEBATE

Voltamos à discussão da primeira atividade, lembrando o exemplo do ovo de páscoa, que quando é quebrado deixa de ser um ovo, mas mantém a mesma quantidade de chocolate.

A seguir falamos dos algoritmos que apareceram, mostrando que se estivéssemos numa situação numérica, trabalhando com os números fracionários, eles fariam sentido. Seria o mesmo que pedir para somar 15 + 17 ou 27 + 29 ou 1/3 de 8, mas neste caso estávamos numa situação concreta e com os números naturais.

Quando pedimos 1/3 de um retângulo, o dividimos em três partes iguais e consideramos uma delas, se queremos 1/3 de 8 ...

Alguém respondeu: *“8 dividido por 3 e pega 1 vez, dá 8/3.”*

Completamos dizendo que aí estávamos fazendo um cálculo que não tinha nenhuma relação com flores ou outro objeto qualquer, 1/3 de 8 pode sempre nos números fracionários.

"Pode e dá 2 e sobra 2 então dá 2 inteiros e 2/3."

Aproveitamos a resposta para mostrar que normalmente a divisão de 8 por 3 é ensinada a partir dos números decimais, mas que poderia ser usada para mostrar também o resultado fracionário.

8	3	8 : 3 dá quociente 2 e resto 2 nos números naturais e 2 2/3
2	2	nos números fracionários.

Voltamos à questão das flores mostrando que quando estamos numa situação concreta com os números naturais, a fração de uma quantidade discreta, só é possível quando o total fosse um número múltiplo do número de partes e por isso se o total de flores fosse 9 ou 12 ou 15 eles não teriam dificuldades em responder.

E que apesar das divisões com resto estarem intimamente ligadas às frações e aos números decimais, em situações concretas teríamos que nos preocupar em não despetalar uma flor ou dividir um botão. O que levou um aluno a comentar: *"Poderia pensar sobre isso, quando não é múltiplo, vai ter sempre um caso que um vai ficar com mais, porque vai dar partes iguais e vai sobrar alguma coisa."*

Concordamos com a colocação e passamos para a questão seguinte.

<u>QUESTÃO 12</u>

12) Desenhe um conjunto de maçãs do qual dois quintos são vermelhas e o resto são verdes.

Queremos que percebam que a quantidade total de maçãs deve ser representada por um número múltiplo de cinco, para que a resolução seja possível. No entanto, acreditamos que a maioria deverá colocar cinco maçãs pintando duas de vermelho e três de verde.

RESULTADOS

Como havíamos previsto 21 alunos representaram 5 maçãs (duas vermelhas e três verdes) e 2 alunos desenharam 10 maçãs (4 vermelhas e 6 verdes).

DEBATE

Na discussão apenas aumentamos o número de maçãs ampliando as possibilidades de representar a situação.

QUESTÃO 13

13) Ilustre as frações 2/3 e 1/3 desenhando uma série de bolas que mostre que 2/3 das bolas são pretas e um terço das bolas são vermelhas.

Nesta questão o total deve ser um múltiplo de 3, acreditamos como na questão anterior que a maioria deve desenhar três bolas, com duas pretas e uma vermelha.

RESULTADOS

Como previsto, 14 alunos desenharam 3 bolinhas (duas pretas e uma vermelha), 4 desenharam 6 (quatro pretas e duas vermelhas) e 5 desenharam 2 grupos de 3 bolinhas, em um pintaram duas pretas e no outro uma vermelha, provavelmente interpretando, no sentido de razão, 2/3 como 2 em 3 e 1/3 como 1 em 3, separadamente.

QUESTÃO 14

14) Aumente o conjunto anterior sem mudar a relação.

Pedimos a ampliação do conjunto do exercício anterior, no sentido de reforçar o objetivo das duas questões anteriores. Esperamos que a maioria faça um conjunto com 6 bolinhas, em que quatro são pretas e duas vermelhas.

RESULTADOS

13 alunos desenharam 6 bolinhas, 2 desenharam 12 bolinhas, 2 desenharam 9 bolinhas, 1 aluno desenhou 24 bolinhas, todos representando corretamente a questão. 5 repetiram o procedimento dado no exercício anterior desenhando um conjunto de 6 bolinhas com 4 pretas e outro de 6 bolinhas com 2 vermelhas.

DEBATE

Corrigimos as questões 13 e 14 juntas ampliando as possibilidades de representação da questão 14 e ninguém apresentou novas questões.

QUESTÃO 15

O objetivo é estimular a criação de novas situações que envolvam a concepção parte/todo tanto com quantidades discretas, quanto com quantidades contínuas.

> 15) Agora, elabore você duas situações problema, uma trabalhando com a fração envolvendo quantidades contínuas e a outra com quantidades discretas.

Acreditamos que se o futuro professor percebe que tem possibilidades de criar novas situações, isto o torna mais confiante com relação a sua prática, pois terá que trabalhar em cima do raciocínio do aluno criando novas situações que comprovem ou não esse raciocínio.

RESULTADOS

Nas fichas conseguimos selecionar 12 grupos de situações.

Para as quantidades contínuas aparecem os seguintes objetos: corda, bolo, chocolate, tecido, fita métrica, pizza, novelos de lã, doce de amendoim e rolo de barbante. Para as discretas: tampinhas de garrafas, balas, lápis, bolas, figurinhas, bolinhas de gude, carros, laranjas e pratos. A maioria pede na situação que seja feita uma distribuição, mas dois na situação discreta questionam sobre a possibilidade da distribuição ter um resultado igual para todos ou não.

De maneira geral as situações solicitam distribuições com quantidades discretas e com quantidades contínuas como havia sido solicitado. Mas em dois grupos a situação no discreto não traduz uma distribuição e sim uma adição, através de dois problemas sem muito sentido para o nosso objetivo:

“Numa cidade haviam apenas 8 carros, mas com o passar dos anos mais 5 adquiriram carro, desses 4 bateu o carro e foi perda total, o restante continuou na cidade e adquiriram um número igual ao que ficou. Quantos carros permaneceu na cidade?”

“Em uma floresta, dia 2, há 15 pássaros, 18 formigas e 9 tamanduás. Um homem introduziu no dia 3, 27 macacos, mas neste mesmo dia 7 formigas foram mortas e 5 tamanduás tiveram 3 filhotes cada um. No dia 3 quantos animais haviam na floresta?”

3.3.4 – ATIVIDADE EXTRA DE MEDIÇÃO

Como os futuros professores, apresentaram muitas dificuldades na resolução da questão 3, da atividade 3, pois não conseguiam identificar as marcas da régua que representava 1 pé, e Entendemos que seria conveniente propor uma atividade extra, em que vivenciassem uma situação de medição, para que pudessem continuar resolvendo a atividade. Entregamos para todos uma tira de papel em branco, para que medissem com ela a mesa da sala, esperando que notassem a necessidade da divisão daquela unidade e das frações para representá-las.

DEBATE

Iniciamos essa atividade explicando que o nosso objetivo era medir o comprimento e a largura da mesa e não tendo nenhum outro instrumento e também, não querendo usar a palma da mão ou subir na mesa para medir com passos, iríamos usar aquela tira de papel.

A princípio queríamos saber se eles acreditavam que com aquela medida linear, com aquela unidade de medida de comprimento, daria para medir as dimensões daquela mesa. De imediato responderam que sim.

Pedimos então para que alguém medisse a mesa. Um aluno mediu e concluiu que o comprimento tinha 3 unidades e mais um pedaço da unidade.

Argumentamos que a resposta dada não quantificava aquela medida e com a nossa insistência, eles voltaram atrás dizendo que não daria para fazê-lo. Perguntamos então, se o corte da tira ao meio ajudaria na medição, e eles continuaram a responder que não daria para medir.

Pedimos para um outro aluno medir a largura da mesa e pudemos verificar que o pedaço que sobrava era diferente do que havia sobrado na medição do comprimento e insistimos na solução do problema. O que poderíamos fazer com essa unidade para que pudéssemos medir a mesa ou outra coisa qualquer? Finalmente, um aluno respondeu: *"Dividir a medida, para dar valores. "*

Aproveitamos a resposta para mostrar que tínhamos que criar sub-unidades, para podermos medir qualquer coisa, que estávamos criando uma nova unidade de medida, a tira de papel era uma unidade e se a dividíssemos poderíamos usá-la. Perguntamos então, sobre qual seria a primeira sub-unidade a ser determinada e responderam que era 1/2. Sugerimos então que dobrassem a tira ao meio e marcassem a medida.

A seguir, perguntamos se só aquela divisão iria adiantar para resolver o nosso problema e todos responderam que tinham que dividir mais uma vez. Perguntamos então que sub-unidade estavam criando e responderam que era 1/4. Pegamos uma tira de papel e mostramos que a primeira marca que tinham feito representava 1/4 daquela unidade, que a segunda valia 2/4 ou 1/2, a terceira era 3/4 e a última seria 4/4, que eqüivale a nossa unidade, sem esquecer que o ponto de partida era o zero, o início da nossa unidade.

Insistimos em saber , se aquelas quatro divisões eram suficientes para medirmos qualquer coisa, a maioria respondeu que não. Pedimos então que fizessem mais divisões, dobrando e marcando a medida correspondente.

Depois de algum tempo concluíram que as divisões feitas já eram suficientes e mediram o comprimento da mesa, chegando a 3 unidades mais 45/64 da unidade.

Escrevemos no quadro: (3 + 45/64) u.c. explicando que “u.c.” representava uma unidade de comprimento qualquer, de poderia até ser chamada de pé se tivesse mais meio centímetro. Uma aluna perguntou se podia chamar de “lua” e ao concordarmos ela completou: *“então tem 3 luas e 45/64 de uma lua.”*

Aproveitamos para explicar que na história podíamos encontrar muitas unidades de medida com nomes e tamanhos diferentes, o que causou problemas de comunicação entre os povos que as usavam, pois enquanto um não conseguisse entender a unidade de medida que o outro usava e descobrisse uma maneira de transformar uma unidade na outra, não conseguiam se entender. E foi um problema de comunicação desse tipo que aconteceu com a questão da unidade pé.

Explicamos também, que eles não tiveram dificuldades com a régua de polegadas porque ela era semelhante a régua que estamos acostumados a usar, em que as unidades são pequenas e cabiam inteiras nos segmentos que estavam sendo medidos, o que não acontecia com a outra. Pois, não estavam percebendo que aquelas divisões da régua do pé eram divisões da unidade e que por isso tinha um ponto que era 1/8, outro era 1/32, ... que a unidade pé já estava dividida, faltando só identificar as medidas que representavam aquelas divisões. Depois dessa discussão retomaram a ficha para terminá-la.

3.3.5 – ATIVIDADE 3 - Concepção de Medida

PARTE 1

JUSTIFICATIVA

Não dá para falar de frações sem falar em medidas, historicamente a medida foi responsável pelo surgimento das frações, em várias civilizações. Como usamos um sistema métrico decimal, que no cotidiano é representado apenas por números decimais, a representação de medidas na forma de fração passa despercebida, levando a perda da referência de unidade, pois as sub-unidades criadas no nosso sistema são consideradas como novas unidades. O que pudemos constatar com os resultados da questão 6 do pré-teste. Apesar de a concepção de medida envolver implicitamente a concepção parte/todo, ela nos remete a outras possibilidades de trabalho, como as frações maiores que um, a percepção da fração efetivamente como um número e o aprofundamento da noção de equivalência.

OBJETIVOS

Gostaríamos que os futuros professores percebessem que a concepção de medida envolve, antes de mais nada, uma unidade invariável durante a medição. Além disso, a necessidade de subdivisões dessa unidade a fim de possibilitar qualquer tipo de medição e a sua conseqüente representação através de um ou vários números fracionários.

Que na concepção de medida a fração a/b representa a ocorrência da sub-unidade $1/b$, a vezes, ou seja a unidade de medida foi divida em b partes.

E também, que a concepção de medida, além de favorecer o tratamento das frações efetivamente como números, é um contexto natural para a adição de duas medidas e para o trabalho com as frações maiores que um, além de fortalecer a concepção parte/todo e a equivalência de números fracionários.

MATERIAL UTILIZADO

Para resolver a questão 2 cada aluno recebeu uma régua de 6 polegadas. Para a questão 3 recebeu uma outra régua de 1 pé (12 polegadas) com as marcas de divisões iguais as da régua anterior e os números 0 e 1 indicando que a régua representava uma unidade.

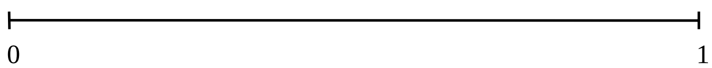
Além disso, receberam uma tira de papel sulfite (5 cm x 30 cm) para servir de unidade de medida, utilizada em uma atividade extra antes da resolução da questão 3. Cada grupo recebeu três quadrados de 5 cm, de 7 cm e de 10 cm de lado, e uma folha de sulfite amarela de 21 cm x 29 cm para que pudesse resolver a questão 4.

RESULTADOS ESPERADOS

Como normalmente as medições usuais são representadas por números decimais, acreditamos que resistirão na sua representação através de números fracionários. Por isso, esperamos atingir os objetivos propostos na discussão final e que devem solicitar mais ajuda para esta tarefa do que nas anteriores, principalmente no que diz respeito as medições com unidades não usuais.

QUESTÃO 01

O objetivo é perceber que a unidade pode ser dividida em cinco segmentos iguais e que a fração relacionada representa a incidência de uma sub-unidade de medida.

> 1) Divida o segmento dado em cinco partes iguais, identifique cada uma das partes e diga que medida tem cada parte do segmento.
>
> 
>

Apresentamos um segmento de 9 cm para ser dividido em 5 partes iguais, cada uma medindo 1/5 da unidade e que por isso se repete 5 vezes no segmento dado. Colocamos 9 cm para que eles tivessem que pensar nessa divisão em 5 e estarem usando também as subdivisões da régua. Acreditamos que realizarão a tarefa sem problemas, pois trata-se de um exercício comum.

RESULTADOS

18 alunos marcaram corretamente todas as frações, sendo que 16 apresentaram 1/5 como sendo a medida de cada parte e 2 deram a equivalência 6/30 ou 1/5. Os demais marcaram: 1/5 e 1,8 cm, usando o tamanho de cada parte

também em centímetro; 1/5 e 0,758 não mostrando como obteve esse resultado, provavelmente errando a conta de divisão; 1/5 de polegada referindo-se a unidade que usou para a divisão e 6/30 = 5 confundindo o tamanho de cada parte com a quantidade de partes que encontrou.

DEBATE

Na correção perguntados sobre a identificação das partes e a maioria respondeu: 1/5, 2/5, 3/5, 4/5 e 5/5. Com relação a medida de cada parte, responderam que era de 1/5. Como ninguém questionou ou apresentou dúvidas e mostramos que 1/5 da unidade se repetia 5 vezes naquele segmento e que cada ponto mostrava quantas vezes ela já havia ocorrido, ou seja $\frac{3}{5} = 3 \times \frac{1}{5}$.

QUESTÃO 02

O objetivo é fazer com que efetuem medições usando a polegada como unidade de medida.

> 2) Dê as medidas dos três segmentos abaixo, usando a régua que você recebeu e responda quantas polegadas tem cada segmento?
>
> a) b)
>
> c)

Os futuros professores receberam uma régua com 6 polegadas (anexo 7), que foram divididas em oito partes iguais, medindo cada uma 1/8 de polegada, para facilitar a medição dos segmentos. Em (a) eles devem concluir que o segmento mede $\frac{15}{8}$ ou $1\frac{7}{8}$ polegadas; em (b) que o segmento mede $\frac{12}{8}$ ou $\frac{3}{2}$ ou ainda $1\frac{1}{2}$ polegadas e finalmente que o segmento (c) mede $\frac{24}{8}$ ou 3 polegadas. Acreditamos que não devam ter dificuldades para a medição e encontrarão uma das alternativas acima para cada segmento mas, que alguns tentem dar a resposta com números decimais.

RESULTADOS

18 alunos responderam: 15/8, 1 1/2 e 3.

5 responderam 15/8, 1 1/2 e 3,1; esta última provavelmente pela colocação da régua um pouco mais à esquerda.

DEBATE

Perguntados sobre a medida do segmento (a) e (b) todos responderam sem problemas, mas para o segmento (c) alguns responderam 3,1 polegadas. Perguntamos então sobre o significado de 0,1 e responderam que era um décimo.

Esclarecemos que o segmento tinha exatamente 3 polegadas e que alguns provavelmente pela colocação da régua chegaram a uma pequena diferença escrevendo 3,1 polegada, o que representaria (3 + 1/10) da polegada, portanto a polegada deveria estar dividida em 10 partes e estavam e sendo considerada então dessas partes. O que na realidade não aconteceu.

Fizemos um parênteses para que notassem que as frações, inclusive as maiores que 1, apareceram naturalmente nas situações de medida e que tínhamos o hábito de escrever as medidas com números decimais, porque o nosso sistema métrico era decimal, mas que os povos antigos representavam os resultados de medições com frações, precisando de muito tempo para o homem passar da escrita 1 1/2 para a escrita 1,5.

QUESTÃO 03

O objetivo é faze-los converter uma medida em uma unidade para outra unidade de medida.

3) Um "pé" é uma unidade de medida que eqüivale a 12 polegadas. Você recebeu uma outra régua que mede um pé. Dê a medida dos segmentos anteriores em pé.

Os alunos receberam uma régua medindo 1 pé, com as mesmas divisões da régua anterior, para medirem os mesmos segmentos do exercício anterior com esta nova unidade de medida. A princípio devem perceber que a unidade está dividida em $12 \times 8 = 96$ partes iguais e que portanto, cada divisão da unidade é equivalente a $\frac{1}{96}$ de um pé. O segmento (a) terá então $\frac{15}{96}$ ou $\frac{5}{32}$ do pé, o segmento (b) terá $\frac{12}{96}$ ou $\frac{4}{32}$ ou ainda $\frac{1}{8}$ do pé, e o segmento (c) terá $\frac{24}{96}$ ou $\frac{3}{12}$ do pé.

Acreditamos que devem chegar a uma dessas possibilidades e que alguns devam tentar resolver a situação através de regra de três, fazendo uma relação do tipo: 1 pé 12 polegadas

x 1,5 polegadas

RESULTADOS

A maioria acertou a questão, aparecendo as seguintes equivalências nas respostas: $\frac{5}{32} = \frac{15}{96}$ para o segmento (a), $\frac{1}{8} = \frac{1{,}5}{12} = \frac{3}{24} = \frac{6}{48} = \frac{12}{96} = \frac{24}{192}$ para o segmento (b) e $\frac{1}{4} = \frac{3}{12} = \frac{12}{48}$ para o segmento (c). Os erros encontrados foram só no segmento (a) onde um aluno respondeu 1/6 e outro 1/12.

DEBATE

Na correção, depois que eles falaram as frações que correspondia a cada segmento, mostramos todas as equivalências possíveis para cada um dos segmentos e alertamos para que não esquecessem que as frações encontrada eram de um pé.

A seguir, mostramos que alguns haviam resolvido através da regra de três fazendo a seguinte relação: se 1 pé eqüivale a 12 polegadas então 1 polegada eqüivale a 1/12 pé, mas não insistimos neste tipo de solução.

QUESTÃO 04

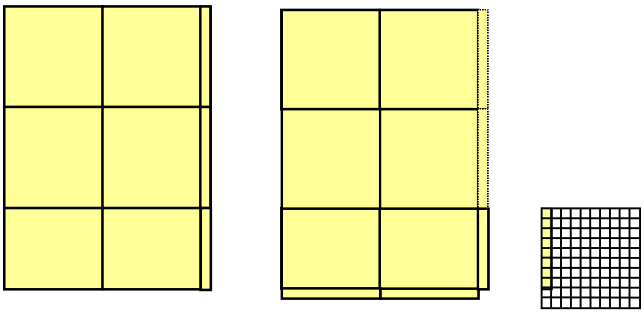
O objetivo é levá-los a refletir sobre a possibilidade da medição de áreas através de ladrilhamento e da multiplicação de frações

> 4) Usando o quadrado de cartão que você recebeu, como unidade de medida, dê o comprimento, a largura e a área da folha amarela. Represente a folha com as medidas encontradas.

Cada grupo recebeu três cartões quadrados de 5 cm, 7 cm e 10 cm de lado, para serem usados como unidade de medida. Devem medir a largura, o comprimento e da área de uma folha de papel de 21 cm x 29 cm. Fizemos estas opções para que fosse possível fazer as divisões da unidade com uma régua e para que calculem a maior parte da área por ladrilhamento, ficando uma pequena parte calculada através da multiplicação do comprimento pela largura.

Acreditamos que a maioria encontre o comprimento e a largura sem dificuldades, no entanto, poucos devem chegar a área da folha. A questão só deve ficar clara na discussão final com a percepção inclusive da multiplicação das frações para a obtenção da área.

Para o quadrado com lado 10 cm teremos solução é a seguinte:

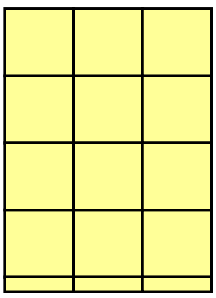


Comprimento: $2\frac{9}{10}$ u.c.[1]

Largura: $2\frac{1}{10}$ u.c.

Área: 6 u.a. + $\frac{1}{10}\times\frac{9}{10}$ u.a., o que dá: $6\frac{9}{100}$ u.a.

Para o quadrado de 7 cm de lado a solução é:



Comprimento: $4\frac{1}{7}$ u.c.

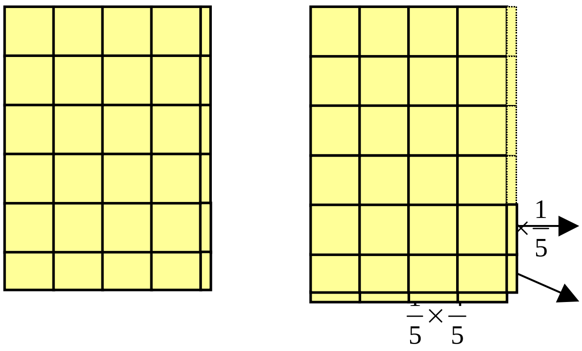
Largura: 3 u.c.

Área: 12 u.a. + $3\times\frac{1}{7}$ u.a.

O que dá: $12\frac{3}{7}$ u.a.

[1] Usaremos u.c. para abreviar unidade de comprimento e u.a. para abreviar unidade de área.

A solução para o quadrado de 5 cm de lado apresenta um maior grau de dificuldade e tem a seguinte solução:



Comprimento: $5\frac{4}{5}$ u.c.

Largura: $4\frac{1}{5}$ u.c.

Área: 24 u.a. + $1 \times \frac{1}{5}$ u.a. + $\frac{1}{5} \times \frac{4}{5}$ u.a., o que dá : $24\frac{9}{25}$ u.a.

RESULTADOS

11 alunos trabalharam com o quadrado de lado 10 centímetros (4 deixando a questão em branco), 6 com o quadrado de 7 cm de lado e 6 com o de 5 cm de lado.

A maioria acertou a questão com relação ao comprimento e a largura da folha, com os três quadrados. Aparece uma resposta em que o comprimento e a largura são dados em relação aos quadrados e não aos seus lados, uma resposta para o quadrado de 7 cm de lado em polegadas: 12 para o comprimento e 9 para a largura, que não está correta, e uma resposta para o mesmo exercício, em que a largura tem 3 partes e o comprimento tem 4 partes mais 1/7 da mesma.

Com relação a área encontramos os seguintes tipos de respostas:

Quadrado de lado 10 cm: $6\frac{9}{100}$ (4 alunos), $2 + \frac{1}{10} \times 2 + \frac{9}{10} = \frac{21}{10} \times \frac{29}{100}$ e $\frac{66}{100}$, sendo que esta última está incorreta e não aparece os cálculos para entendermos como chegou a tal resultado. Os demais estão corretos, pois o que deixou a multiplicação bastava concluí-la para chegar ao resultado.

Quadrado de lado 7 cm: $12\frac{3}{7}$ (2 alunos), $12 + \frac{3}{7}$, $4\frac{1}{7} \times 3$, 108 polegadas e um deixou a área em branco. Excluindo o que respondeu errado em polegadas, os outros responderam corretamente mas alguns dão a resposta na forma de adição ou de multiplicação não as concluindo.

Quadrado de lado 5 cm: 5 alunos deixaram a questão da área em branco e os demais responderam: $24\frac{1}{5}+\frac{4}{25}$ (4 alunos) não concluindo a operação, $24\frac{9}{25}$ quadrados e $24+\frac{1}{5}$ esquecendo o pedacinho menor que tinha 4/25.

DEBATE

Na discussão de correção desta questão, esclarecemos que agora estávamos usando um quadrado como unidade de medida e começamos pelo quadrado de 10 centímetros de lado. De imediato responderam que a largura tinha duas unidades e um décimo (2 1/10) e que o comprimento deu duas unidades e nove décimos (2 9/10). Desenhamos a folha no quadro e marcamos as medidas encontradas, quadriculando a folha para facilitar a medição da área.

Lembramos que o lado do quadrado representava uma unidade de comprimento e que por isso o quadrado estava representando uma unidade de área. Responderam então que a área teria 6 unidades de área mais o pedacinho que tinha 1/10 de largura por 9/10 de comprimento. Alguém respondeu de imediato que o pedacinho media então 9/10. Perguntamos se ele estava dizendo que $\frac{1}{10}\times\frac{9}{10}$ dava $\frac{9}{10}$ e um outro respondeu rapidamente: *"dá centésimos, esse pedaço dá nove centésimos"*. Escrevemos no quadro: $\frac{1}{10}\times\frac{9}{10}=\frac{9}{100}$ e concluímos que a área tinha $6\frac{9}{100}$ u.a.

Passamos para o quadrado de lado 7 centímetros, repetindo o processo do anterior e mostramos que estávamos encontrando medidas diferentes para a mesma folha de papel, porque estávamos usando unidades diferentes e que além disso estávamos multiplicando frações para encontrar a área dos pedaços menores que a unidade. Muitos comentaram que nunca haviam feito tal operação para encontrar áreas.

Para o quadrado menor, foi mais difícil encontrar a área, mas após o desenho no quadro com as divisões, fomos escrevendo a solução que trouxeram naquele momento.

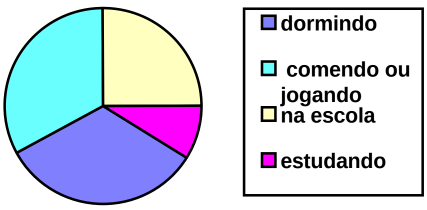
$21 + \frac{4}{5} + \frac{4}{5} + \frac{4}{5} + \frac{4}{5}$ já agrupando cinco partes de 1/5 como sendo uma unidade de área. Continuaram dizendo que 4 vezes 4/5 era 16/5 e que portanto tínhamos $21 + \frac{16}{5}$, que dava $21 + 3\frac{1}{5}$ sendo então igual a $24 + \frac{1}{5}$.

Mas ainda faltava a área do pedacinho que tinha 1/5 de largura por 4/5 de comprimento, imediatamente falaram que bastava fazer a multiplicação $\frac{4}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{4}{25}$ passando então a área da folha a ter $24 + \frac{1}{5} + \frac{4}{25}$ o que daria finalmente $24\frac{9}{25}$ u.a.

QUESTÃO 05

O objetivo é mostrar que temos outras maneiras de representar medidas, a partir de um gráfico de pizza.

5) O gráfico abaixo mostra o tempo gasto por uma criança em algumas atividades diárias. Quantas horas ela gasta em cada uma dessas atividades? E que fração do dia representam as partes pintadas do gráfico?



A figura mostra um gráfico de pizza representando por cores e partes diferentes, o tempo que uma criança gasta em suas atividades diárias. O círculo, neste caso, está representando 1dia ou 24 horas, e a partir de subdivisões, esperamos que a maioria responda que a criança passa 8 horas ou 1/3 ou 4/12 do dia dormindo, 8 horas ou 1/3 ou 4/12 do dia comendo ou jogando, 6 horas ou 1/4 ou 3/12 do dia na escola e 2 horas ou 1/12 do dia estudando.

RESULTADOS

19 alunos acertaram a questão, alguns apresentando as equivalências entre as frações encontradas. Os que erraram apresentaram as seguintes soluções: $\frac{21}{24}, \frac{11}{24}, \frac{3}{24}, \frac{1}{24}$; $\frac{4}{24}, \frac{4}{24}, \frac{3}{24}, \frac{1}{24}$; $\frac{8}{12}, \frac{8}{12}, \frac{3}{12}, \frac{1}{12}$ e $\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{12}$.

DEBATE

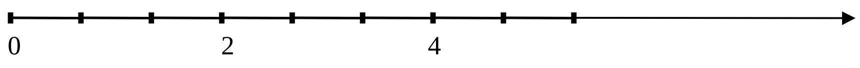
Na discussão mostramos que estávamos usando um gráfico de pizza, em que cada fatia representava uma medida de tempo. Questionados sobre o valor da menor fatia que haviam encontrado, responderam que era equivalente a fração 1/12 que representava 2 horas. A partir daí responderam então que a criança passava 8 horas dormindo, 8 horas comendo ou jogando, 6 horas na escola e 2 horas estudando e as respectivas frações: 4/12 ou 1/3, 4/12 ou 1/3, 3/12 ou 1/4 e 1/12 do dia.

Nas questões de 6 a 8, a maioria aproveitou os desenhos dos segmentos para fazer a correção, impedindo-nos de verificar realmente o que fizeram na sua resolução.

QUESTÃO 06

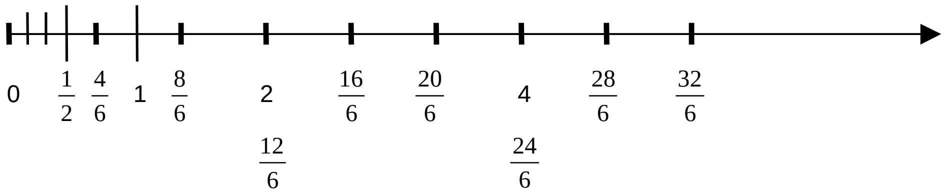
O objetivo é levá-los a identificar a fração que representa os pontos marcados em uma semi-reta, onde a unidade não está explícita.

6) Identifique na reta abaixo o ponto 1/2 e a fração que representa os pontos marcados.



Se está claro o que é medir, então a partir do resultado de uma medição e sua representação na semi-reta, podemos identificar a unidade utilizada e efetuar outras medições que não tenham sido explicitadas.

Para resolver a questão é necessário que marquem primeiro a unidade, dividindo a distância de 0 a 2 (3 cm) ao meio. A seguir devem dividir a unidade em partes iguais obtendo partes equivalentes a 1/6, que é a medida do ponto 1/2 até o primeiro ponto marcado. Assim, este corresponderá a 4/6, e como os demais estão a uma distância de 4/6 um do outro, seriam 8/6, 12/6 ou 2, 16/6, 20/6, 24/6 ou 4, 28/6 e 32/6.



Acreditamos que tenham dificuldades de resolver a tarefa, pois esse tipo de exercício não é comum no ensino e apresenta um alto grau de dificuldade. Por isso devem terminar a tarefa corretamente somente depois de alguma ajuda.

<u>DEBATE</u>

Começamos a discutir essa questão explicando que nela diferente do que estávamos habituados com a régua comum, não apareciam os traços de divisão da unidade e perguntamos o que era necessário fazer para a colocação do ponto 1/2. De imediato responderam que precisavam descobrir onde estava a unidade.

Mas, um outro aluno respondeu em seguida, que o ponto marcado com o 2 era 2/8 porque o segmento estava dividido em 8. Fizemos percebe-lo que estava dizendo que 2/8 era equivalente a 2 inteiros e ele entendeu que havia raciocinado errado. Aproveitando o comentário perguntamos sobre o que estava representando aquele 2 colocado no segmento e responderam que era 2 unidades, acrescentamos que tínhamos ali 2 unidades, mas que não sabíamos qual era.

Desenhamos o segmento no quadro e voltamos a questão perguntando onde colocaríamos o 1 e todos responderam que era na metade da distância entre 0 e 2. Passamos para a identificação do ponto 1/2 e responderam que deveria ser colocado na metade, entre o 0 e o 1.

A seguir, perguntamos sobre o primeiro ponto marcado quanto representava e responderam que era 2/3, afirmando que o pedacinho que tinha entre o 1 e o ponto marcado media 1/3. Alguns tiveram dificuldades para entender e refizemos o processo em um outro desenho.

A partir daí entenderam e identificaram as frações que representavam os pontos marcados, percebendo por exemplo, que do ponto $3\frac{1}{3}$ tinham que somar $\frac{2}{3}$ para identificar o próximo. Colocamos no quadro a adição $3\frac{1}{3}+\frac{2}{3}$ que era equivalente a $3+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}$ sendo o mesmo que $3+\frac{3}{3}$ ou seja 4 inteiros.

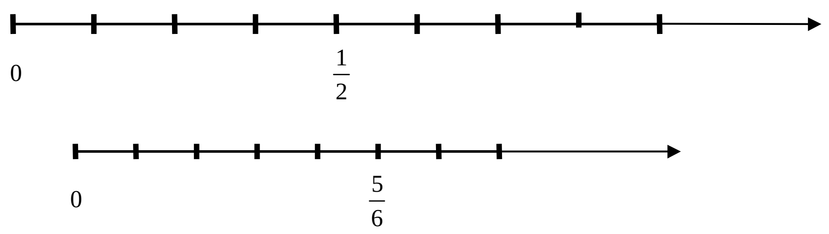
Retomamos explicando que na concepção de medida era importante estar sempre verificando qual era a unidade, pois a fração representa uma parte da unidade que foi usada para fazer a medição e se não sabemos qual é a unidade não podemos identificar fração alguma.

Para esclarecer melhor a situação usamos um outro exemplo com um segmento que representava 3 unidades e tinha um ponto marcado. Repetimos o processo de procura da unidade através da divisão do segmento em 3 partes iguais e depois identificamos o ponto marcado.

<u>QUESTÃO 07</u>

O objetivo é reforçar e estimular a reflexão sobre a questão anterior

7) Associe uma fração à cada ponto:



Para resolver, a primeira situação, devem perceber que se, do zero até o ponto 1/2, temos 4 partes iguais, então as 8 partes marcadas representarão o inteiro e cada divisão eqüivale a 1/8. Com isso poderão representar os pontos pelas frações: 1/8, 2/8, 3/8, 4/8 ou 1/2, 5/8, 6/8, 7/8 e 8/8 ou 1.

Na segunda situação devem perceber que se cinco partes representam 5/6 da unidade é porque cada uma delas eqüivale a 1/6, podendo então associar aos outros pontos as frações: 1/6, 2/6, 3/6, 4/6, 5/6, 6/6 ou 1 e 7/6.

Acreditamos que aqueles que resolveram o exercício anterior, consigam resolver esta questão. Mesmo assim muitos devem pedir ajuda.

DEBATE

Começamos desenhando o segmento no quadro e perguntando qual seria o primeiro ponto a ser identificado, visto que só tínhamos o ponto 1/2 no segmento. Responderam que era o ponto 1/4 que estava no meio, e que os outros eram 1/8 e 3/8. Mostramos então que o ponto 1/4 poderia ser representado também por 2/8 e o ponto meio pela fração 4/8. A partir daí responderam que os outros pontos seriam 5/8, 6/8, 7/8 e 8/8 sendo este último a unidade.

Mostramos um outro segmento marcado do 0 até 1/3 com um ponto na metade dessa distância e perguntamos qual era a fração desse ponto, imediatamente responderam que era 1/6, fomos dividindo em novos segmentos pela metade e eles foram identificando as frações: 1/12, 1/24, 1/48...

Reforçamos então que a medida era uma boa concepção para introduzir o trabalho com números fracionários independentes de situações concretas, a partir da reta numérica. E que também era fácil enxergar nesse modelo as frações maiores que um, enquanto que na concepção parte/todo para representar, por exemplo 1 1/3 de um retângulo seria necessário desenhar mais um retângulo o que traz uma sensação de incoerência com o modelo inicial que exige a representação de um inteiro.

QUESTÃO 08

O objetivo é fazer com que percebam que entre duas frações dadas sempre podemos colocar uma outra.

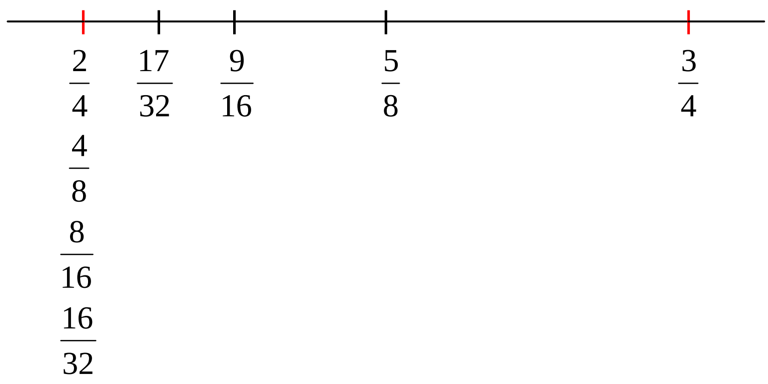
8) Represente num segmento as medidas 2/4 e 3/4 e dê uma medida que esteja entre elas.

Para resolver é necessário que estipulem uma medida para a unidade e a partir dessa unidade identifiquem os pontos relacionados às frações 2/4 e 3/4, podendo então procurar as frações que podem ser acrescentadas. Acreditamos que devam marcar a fração 5/8 por estar exatamente na metade da distância entre 2/4 e 3/4, mas durante a correção queremos que percebam que existe uma infinidade de possibilidades.

<u>DEBATE</u>

Começamos a discussão dizendo que já tínhamos visto que todos haviam colocado uma fração no meio, entre 2/4 e 3/4 e que alguns haviam dividido todo o segmento em oito partes para marcar o ponto 5/8, o que não era necessário. Explicamos que como eles sabiam que a metade de quartos era oitavos, bastava pegar a equivalente da fração meio em oitavos, para poder identificar a fração seguinte.

Fomos desenhando pontos para que eles fossem seguindo esse raciocínio e chegamos as seguintes frações.



A partir disso reforçamos o fato de que poderíamos continuar dividindo e colocando uma infinidade de frações entre duas frações dadas. Um aluno trouxe então a questão do espaço para poder dividir, comentamos que ele poderia pegar uma lupa para enxergar melhor onde colocar o traço e um outro aluno de imediato respondeu que poderíamos pegar uma unidade maior.

PARTE 2

JUSTIFICATIVA

É comum a identificação de frações em situações, envolvendo principalmente quantidades contínuas, mas normalmente depois da divisão os alunos perdem a referência do inteiro. Essa perda faz com que muitos errem em situações, principalmente de comparação, exatamente por não se preocuparem com o fato de que a fração, na concepção parte/todo, surge de alguma coisa tomada como inteiro ou unidade e que na concepção de medida temos que ter uma unidade para as medições.

OBJETIVO

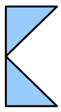
Gostaríamos que a partir da representação de uma fração do inteiro, reconstituam esse inteiro. E que percebam nas quantidades contínuas, que o inteiro poderá ser representado de formas diferentes, mas com a mesma área. Nas quantidades discretas, ao contrário, a solução é única com uma quantidade fixa de elementos, o mesmo acontecendo na concepção de medida com a unidade.

CORREÇÃO

Iniciamos a discussão relembrando que até agora havíamos trabalhado com duas concepções parte/todo e medida, e que nelas eram consideradas somente uma variável o inteiro ou a unidade. Lembramos que quando dividimos o inteiro ou uma unidade e identificamos suas partes, estamos identificando frações desse inteiro ou dessa unidade. No entanto, se não sabemos qual é a unidade ou o inteiro, mas temos uma fração, podemos estar descobrindo em que unidade foi feita a medida ou em que inteiro foi encontrada aquela parte da figura. Os três próximos exercícios tratam desse assunto, que chamamos de reconstrução do inteiro, pois estamos pedindo que reconstruam o inteiro a partir de uma parte.

QUESTÃO 09

9) Se a figura abaixo é um terço do inteiro, represente o inteiro.



Para resolver é necessário que percebam que a nova figura deverá ser uma composição de três figuras iguais a original, imaginando a forma que terá e fazendo um plano para desenhá-la.

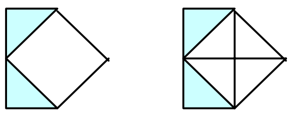
Esperamos que não tenham dificuldades em reconstruir o inteiro e que apareçam várias soluções.

RESULTADOS

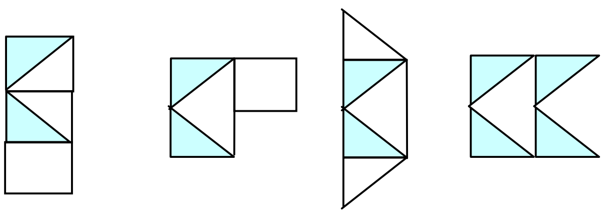
Somente 3 alunos erraram a construção do inteiro.

DEBATE

Pedimos para que os alunos viessem ao quadro representar os inteiros que encontraram e apareceram as seguintes soluções.



Sendo que as figuras acima eram diferentes porque a segunda tem os traços.



Levantamos então a questão de terem aparecido tantas construções, quando na realidade a figura inicial representava 1/3 de um inteiro, e todos perceberam que as figuras construídas estavam certas porque nesse caso poderíamos ter várias soluções.

QUESTÃO 10

10) Se 2/7 das bolinhas de Sérgio são brancas e ele tem 12 bolinhas brancas, qual o total de bolinhas que Sérgio possui?

Para resolver deve perceber que se 2/7 das bolinhas eqüivale a 12 bolinhas, então 1/7 corresponderá a 6 bolinhas e portanto, o inteiro (total de bolinhas) terá 42 bolinhas. Acreditamos que cheguem a essa conclusão sem grandes problemas, mas que alguns devam desenhar as bolinhas para visualizar a situação e pode ser que alguns usem regra de três.

RESULTADOS

Somente dois alunos erraram aplicando regra de três para resolver a questão.

Apareceram vários processos de resolução, que não foram explicitados na discussão de correção.

4 alunos desenharam as bolinhas e responderam 7/7 = 42 bolinhas.

2 alunos desenharam somente 6 bolinhas.

3 alunos fizeram um retângulo dividido em 7 partes com o número 6 abaixo de cada parte.

2 alunos fizeram um segmento de reta dividido em 7 partes, marcaram cada duas partes com 12 e uma delas com 6.

3 alunos colocaram 7 círculos com o número 6 dentro, associaram a dois deles o número 12 e a fração 2/7.

2 alunos fizeram um segmento de reta dividido em 7 partes e marcaram as frações 1/7, 2/7, ... 7/7 = 1 inteiro, ao lado escreveram que 1/7 correspondia a 6 bolinhas, que 2/7 eram 12 e 7/7 eram 42 bolinhas.

3 alunos resolveram com a seguinte regra de três

$$\begin{array}{ll} \frac{2}{7} & 12 \\ \frac{7}{7} & x \end{array}$$

Mas quando chegaram a $x = \dfrac{12}{\frac{2}{7}}$ concluíram que $x = \dfrac{12}{2} \times \dfrac{7}{2} = \dfrac{84}{2} = 42$, reduzindo as frações ao mesmo denominador e multiplicando só os numeradores.

1 aluno usou a mesma regra de três do grupo anterior, mas na conclusão escreveu: $\dfrac{2}{7} \cdot x = \dfrac{7}{7} \cdot 12 \Rightarrow 2x \cdot \dfrac{84}{7} .... x = 24$

2 alunos responderam que $\dfrac{2}{7} = \dfrac{12}{x} \Rightarrow 2x = 84 \Rightarrow x = \dfrac{84}{2} \Rightarrow x = 42$, usando o raciocínio de razão.

1 aluno: resolveu com a seguinte regra de três:

$$\begin{array}{ll} \frac{2}{7} & 12 \\ 1 & x \end{array} \Rightarrow x = \dfrac{\frac{12}{1}}{\frac{2}{7}} \Rightarrow x = 12 \times \dfrac{2}{7} \Rightarrow x = \dfrac{24}{7}$$

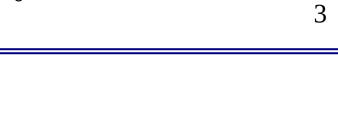
Podemos notar que alguns apresentam o raciocínio proporcional, mas se confundem com as operações necessárias para sua resolução, não chegando a concluí-los corretamente.

DEBATE

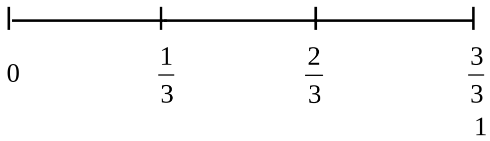
Questionados sobre a resolução argumentaram que se 2/7 eram 12 bolinhas, então 1/7 seria 6 bolinhas e 7/7 era o total de 42 bolinhas. Todos concordaram e não apareceu nenhuma outra solução ou resposta.

QUESTÃO 11

11) Desenhe a unidade a partir do segmento abaixo.



Para chegar a solução deverá medir e dividir o segmento dado em duas partes iguais e a seguir prolonga-lo até obter três partes iguais as anteriores.



Acreditamos que a maioria peça ajuda para resolve-lo, pois esses tipos de questões não são tão simples como parecem, nem trabalhadas no ensino.

RESULTADOS

19 alunos: 0, 1/3, 2/3, 3/3 = 1 prolongando o segmento. 2 alunos: 0, 1/6, 1/3 = 2/6, 3/6, 2/3 = 4/6, 5/6, 3/3 = 1= 6/6 dividindo o segmento prolongado em seis partes. 1 aluno: 0, 1/3, 1/2, 2/3, 3/3 prolongando o segmento e acrescentando o ponto 1/2. 1 aluno: 0, 1/2, 1/6 ... 1 prolongando o segmento mas colocando os pontos 1/2 e 1/6 nessa ordem.

DEBATE

Na discussão desenhamos o segmento no quadro e questionamos onde estaria a unidade, o ponto 1. Responderam “depois”, argumentamos que “depois” poderia ser em qualquer lugar, e imediatamente responderam 1/3 depois. Completaram explicando que se dividisse os 2/3 ao meio, iria dar 1/3 e pegando essa medida depois apareceria 3/3, que era a unidade. Nesse momento um aluno levantou a questão da dificuldade de uma criança trabalhar esse tipo de exercício, porque ela teria que estar imaginando. Respondemos que o problema não era a criança imaginar, e sim ter domínio do assunto para saber onde quer chegar, e que esses tipos de exercícios só poderiam ser dados na hora certa, depois que ela já dominasse as concepções de medida e parte/todo.

3.3.6 – ATIVIDADE 4 - Concepção de Fração como Quociente

JUSTIFICATIVA

Esta concepção é tida por vários pesquisadores, como Streefland (1991), como a ideal para a introdução do conceito de fração nas séries iniciais, que sugere no contexto da divisão de quantidades contínuas, problemas com diferentes soluções encorajando as crianças a discutir e comparar suas soluções, reconhecendo a equivalência de seus procedimentos.

OBJETIVO

Gostaríamos que percebessem que nesta concepção, diferente da situação parte/todo, o numerador pode ser maior, menor ou igual ao denominador e que podem estar representando objetos diferentes. Nas situações de quociente temos duas variáveis (por exemplo, chocolates e crianças) enquanto que nas situações parte/todo e medida temos somente uma variável (o inteiro ou a unidade).

Nesta concepção, podemos indicar a divisão $a \div b$ pelo número fracionário $\frac{a}{b}$, associando a fração diretamente à operação de divisão de um número natural por outro.

No caso das quantidades contínuas, a concepção parte/todo fica implícita, permanecendo as dificuldades da procura de partes com mesma área. No entanto, como nesta concepção é solicitada uma distribuição, a divisão da figura em partes da mesma forma se torna mais comum.

Além disso, como esta concepção se presta à divisão de várias regiões ao mesmo tempo, as distribuições possibilitam resultados diferentes na representação da situação, pois as vezes temos que dividir todos os inteiros em partes iguais e em outras podemos faze-lo ou não, pois podemos distribuir inteiros e partes. Aparecendo assim naturalmente a forma mista de escrita das frações impróprias.

No caso discreto, a distribuição resultará sempre em conjuntos com a mesma quantidade de objetos é necessário que a quantidade a ser distribuída tenha um número de objetos, que seja múltiplo do número de partes que se deseja. Gostaríamos também que associassem a estas situações as divisões não exatas, através da sentença matemática que representa a situação, mas acreditamos que isso só acontecerá na discussão de correção.

Usaremos esta concepção para que façam algumas comparações entre frações, procurando usar representações de figuras e não algoritmos.

RESULTADOS ESPERADOS

Acreditamos que a maioria deva ter mais facilidade nesta atividade do que nas anteriores. No entanto a relação entre esta concepção e a operação de divisão e a representação das divisões com resto nos naturais a partir de uma fração só devam acontecer nas discussões finais.

CORREÇÃO

No início da correção alguns fizeram considerações sobre esta atividade ter sido mais fácil do que a de medidas, e que nela podiam estar dividindo vários inteiros.

Aproveitamos para lembrar que havíamos trabalhado com a concepção parte/todo, em que dividíamos em partes iguais um inteiro representado por figuras (bolinhas ou retângulos). O mesmo sendo feito com as unidades de medida.

Que nesta atividade estávamos trabalhando com a concepção quociente, que representava o resultado de divisão, e como nestas situações fazíamos distribuições, passaríamos a trabalhar com duas variáveis, por exemplo no primeiro exercício temos chocolates e crianças. Falamos também que na história aparecem esses tipos de problemas, principalmente em situações de divisão de heranças.

QUESTÃO 01

O objetivo é faze-los perceber que uma fração menor que 1 pode ser representada nesta situação por vários inteiros e pela operação de divisão.

1) Temos quatro barras de chocolate para reparti-las igualmente entre cinco crianças. Qual a fração que representa a cota de chocolate de cada criança?

Acreditamos que a maioria responda 4/5, desenhando as figuras das 4 tortas sem perceber que a mesma fração na concepção parte todo só pode ser representada por um inteiro. A representação da situação por 4 ÷ 5. Também não deve acontecer neste momento.

RESULTADOS

8 alunos responderam 4/5 sem o desenho das barras de chocolate.

10 alunos desenharam as barras e responderam 4/5.

2 alunos desenharam as barras e responderam 4/20 = 1/5

1 aluno desenhou as barras e escreveu 4 : 5 = 4/5

1 aluno dividiu cada barra em 4 partes e respondeu 3/4 e 1/20.

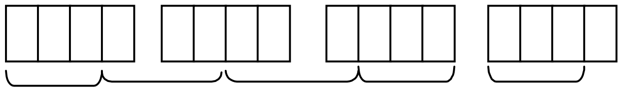
Podemos notar que somente um aluno associou a operação de divisão à situação e que dois discretizaram o contínuo respondendo 4/20. A maioria teve que desenhar as barras de chocolate para garantir a resolução.

DEBATE

Iniciamos a correção mostrando que a situação era mais simples, pois fugia da rigidez de uma só variável das concepções anteriores e que por isso permitia mais possibilidades de solução.

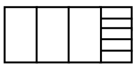
Colocamos no quadro a representação dos quatro chocolates divididos em cinco partes iguais, supondo que a maioria havia resolvido dessa forma e respondido que cada criança ganharia 4/5 do chocolate. Concluímos dizendo que quatro chocolates distribuídos entre cinco crianças, poderia ser representado por $4 \div 5 = \frac{4}{5}$. Todos concordaram.

Questionados sobre outra solução, um aluno se manifestou e pedimos que ele colocasse no quadro a sua solução.



Ele explicou que cada criança receberia 3 pedaços e que o 1/4 que sobrou teria que ser dividido por cinco e escreveu no quadro: $\frac{1}{4} \div 5 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$ e concluiu que cada criança recebeu $\frac{3}{4} + \frac{1}{20}$.

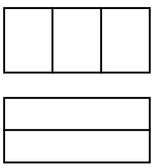
Falamos então que não havíamos gostado da conta feita, pois ele poderia ter conseguido no próprio desenha a fração que queria encontrar. Ele voltou ao último retângulo e dividiu a última parte em cinco.



Perguntamos se todos haviam entendido a solução e uma aluna Respondeu: *"Eu entendi, só que estou pensando, que quando passar para a barra de chocolate e for dividir, vai ficar meio difícil dividir a barra de chocolate em 20 pedacinhos."* Respondemos que esse não seria o problema, porque poderíamos usar uma barra maior para dividir, não em 20 pedaços, mas até em um número maior.

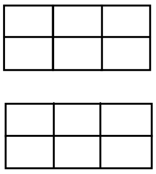
Retomamos a nossa questão afirmando que a primeira resolução tinha dado 4/5, enquanto esta dava 3/4 + 1/20 para cada criança, e que só estaria correto se $\frac{3}{4} + \frac{1}{20} = \frac{4}{5}$.

Todos concordaram que era e perguntamos o que teríamos que fazer para mostrar essa igualdade, responderam que precisavam fazer a soma com o m.m.c.. Perguntamos então para que servia o m.m.c. e responderam que era para igualar as partes e retrucamos, querendo saber porque era necessário igualar as partes e responderam que era para igualar os denominadores e poder somar.

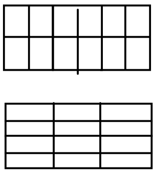


Desenhamos no quadro um retângulo dividido em três partes iguais e um outro dividido em duas partes. Esclarecemos que ao dividir um retângulo em três partes e chamamos cada parte de terços, as estamos nomeando para que possamos identificá-las e não confundir com as partes, por exemplo do outro retângulo que são chamadas de meio ou metade.

Além de nomear as partes, associamos um número a cada uma delas (1/3 e 1/2) para que possamos operar com essas quantidades. Se queremos somar 1/3 com 1/2 fica impossível dar esse resultado em terços ou em meios e por isso temos que dividir de novo os retângulos para que cada uma dessas partes (1/3 e 1/2) possam ser identificadas pelo mesmo nome.



Neste caso encontramos sextos e a identificação $\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$ e $\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$ o que nos dá $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$.



Dividimos de novo as partes encontradas e perguntamos se alguém achava que estava errado. Todos concordaram que não e que a resposta poderia ser dada com $\frac{10}{12}$.

Concluímos, alertando que a operação de adição poderia ser feita com esses tipos de argumentos, sem necessidade de falar em m.m.c., pois era mais importante entender o que acontece quando somamos frações, do que passar uma regra de resolução, até porque não era essencial que o denominador fosse o menor múltiplo.

Voltamos a questão mostrando então que 15/20 era uma fração equivalente a 3/4 com denominador 20 e que podíamos então escrever $\frac{3}{4}+\frac{1}{20}=\frac{15}{20}+\frac{1}{20}=\frac{16}{20}=\frac{4}{5}$.

O objetivo das questões 2, 3 e 4 é colocá-los em uma situação com várias possibilidades de solução.

QUESTÃO 02

> 2) 24 crianças de uma classe foram comemorar o aniversário de uma delas numa pizzaria e a professora já havia encomendado 18 pizzas para a comemoração.
>
> Como poderia ser feita a distribuição das crianças nas mesas em grupos iguais e como poderiam ser distribuídas as pizzas de modo que cada grupo receba a mesma cota de pizza?
>
> Encontre pelo menos três soluções.

Esta questão nos possibilita as seguintes soluções:

Mesas	Crianças	Pizzas	Mesas	Crianças	Pizzas
1	24	18	6	4	3
2	12	9	8	3	2 1/4
3	8	6	12	2	1 1/2
4	6	4 1/2	24	1	3/4

Acreditamos que a maioria deve optar pelas soluções que se referem a 2, 3 e 6 mesas pela facilidade nas distribuições .

RESULTADOS

12 alunos fizeram a escolha por 3, 6 e 2 mesas, como havíamos previsto, 4 alunos escolheram 6, 3 e 4 mesas, 2 alunos optaram por 2, 6 e 8 mesas, 2 alunos por 3, 4 e 8 mesas, 2 alunos por 2, 4 e 6 mesas e 1 aluno colocou a opção 1, 2 e 6 mesas

DEBATE

Começamos explicando que nesta situação estávamos fazendo duas distribuições: as crianças em relação às mesas e as pizzas em relação às mesas. Um aluno interrompeu dizendo que não sabia o número de mesas. Dissemos que estávamos fazendo arranjos e que por isso nós é que iríamos determinar o número de mesas para depois distribuir as pizzas.

A seguir fomos para o quadro registrar as soluções que encontraram para a primeira distribuição: 3 grupos de 8, 8 grupos de 3, 6 grupos de 4, 4 grupos de 6 e 2 grupos de 12.

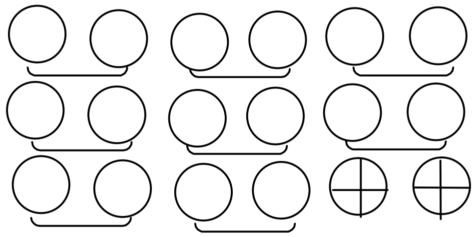
A seguir, perguntamos o que eles fariam, se o restaurante só tivesse 5 mesas, de imediato responderam que não poderiam dividir uma criança e que teriam mesas com mais crianças que outras.

Passamos então para a segunda distribuição e foram falando o que fizeram:

- 3 mesas – 6 pizzas para cada mesa - $18 \div 3 = \frac{18}{3} = 6$.

- 8 mesas – 2 pizzas e 2/8 - $18 \div 8 = \frac{18}{8} = 2\frac{2}{8}$.

Interrompemos a correção, para perguntar como representariam essa distribuição com figuras e eles foram descrevendo enquanto desenhávamos no quadro.



Primeiro dá duas pizzas para cada mesa e as duas que sobram dividimos em quatro partes dando uma para cada mesa, o que dá $2\frac{1}{4}$ que é igual a $2\frac{2}{8}$.

Continuamos a correção:

- 6 mesas – 3 pizzas inteiras - $18 \div 6 = \frac{18}{6} = 3$.

- 4 mesas – 4 pizzas e meia - $18 \div 4 = \frac{18}{4} = 4\frac{2}{4}$.

- 2 mesas – 9 pizzas - $18 \div 2 = \frac{18}{2} = 9$.

<u>QUESTÃO 03</u>

3) Que fração da pizza cada criança vai receber em cada organização de grupo?

Dependendo da solução que encontraram na questão anterior, irão procurar quanto cada criança vai receber, chegando a resposta 3/4 de pizza para cada criança. Acreditamos que cheguem a essa conclusão através da equivalência que é possível entre todas as situações anteriormente citadas: $\frac{18}{24} = \frac{9}{12} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.

<u>RESULTADOS</u>

6 alunos: 3/4, 6/8 e 9/12	4 alunos: 6/8 da pizza
3 alunos: 6/8 ou 3/4	2 alunos 3/12, 3/24, 3/18
2 alunos 6/8 = 3/4, 3/4, 9/12 = 3/4	2 alunos 3/4 da pizza

2 alunos 1/3 + 1/3 do pedaço que sobrou, 4/6 + 1/6 da metade e 3/4

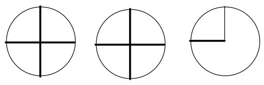
2 alunos: 6/24 = 3/4, 9/12 = 3/4 e 3/4

Notamos que só 4 alunos não chegaram à equivalência.

DEBATE

Para a mesa com 8 crianças e 6 pizzas responderam que era 3/4 e mostramos que de fato dava isso, porque $6 \div 8 = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.

Para o grupo que tinha 2 pizzas mais 1/4 para 3 crianças, também responderam que 3/4 e retrucamos dizendo que nessa situação não estávamos enxergando os 3/4. Então foram descrevendo a distribuição feita enquanto desenhávamos no quadro.



"Temos que dividir todas as duas pizzas em quartos e dar para cada criança três dessas partes."

Concluímos então que poderíamos afirmar que $2\frac{1}{4} \div 8 = \frac{3}{4}$ mas não entramos em detalhes sobre a operação.

Para o grupo de 4 crianças com 3 pizzas a resposta foi imediata, $3 \div 4 = \frac{3}{4}$.

Para o grupo de 6 crianças com 4 pizzas e meia também veio a sugestão de dividir as pizzas em quartos e com isso fica claro que cada criança ganharia $\frac{3}{4}$ da pizza e colocamos $4\frac{1}{2} \div 6 = \frac{3}{4}$.

E finalmente, para o grupo de 12 crianças com 9 pizzas responderam que dava 9/12 que era equivalente a 3/4.

QUESTÃO 04

4) A organização dos grupos alterou o resultado?

Acreditamos que percebam que independente da organização, como a quantidade de crianças e a quantidade de pizzas são fixas, cada criança receberá a mesma quantidade de pizza.

RESULTADOS

A maioria (20 alunos), respondeu que não, porque o número de pizzas e crianças não alterou, porque os resultados eram equivalentes, porque todas as crianças comeram três pedaços, porque todas comeram a mesma quantidade, porque os resultados são equivalentes e proporcionais e porque as pizzas foram distribuídas proporcionalmente nos grupos. 3 dos que não chegaram à equivalência na questão anterior, responderam coerentemente que sim, porque um resultado não era equivalente ao outro.

DEBATE

Na discussão concluíram que todas as crianças receberam a mesma quantidade porque o número de pizzas e de crianças não haviam sido alterados.

QUESTÃO 05

O objetivo é faze-los refletir sobre uma questão de resposta imediata sem necessidade de registros.

5) Uma professora deu o seguinte problema para a classe:

"Se distribuirmos duas tortas de tal forma que cada criança receba 2/5 de uma torta, para quantas crianças podemos distribuir as tortas?"

Um aluno respondeu imediatamente: - É claro que serão cinco crianças.

Como você acha que ele raciocinou para chegar a essa resposta?

Para responder devem perceber que se cada criança recebe 2/5 de uma torta e temos duas tortas, podemos de imediato responder que são 5 crianças, pois somente dividindo duas tortas por cinco crianças (2 : 5) podemos obter o resultado 2/5. Esperamos que a maioria o perceba, embora alguns tenham que confirmar representando as tortas.

O objetivo das questões 6, 7 e 8 é faze-los perceber que as situações de comparação podem ser resolvidas através da representação da situação por figuras, rompendo com a concepção que esses tipos de atividades só podem ser resolvidos através da transformação das frações em equivalentes com o uso do m.m.c.

RESULTADOS

Todos concordaram que o aluno estava correto, mas a justificativa variou bastante.

6 alunos desenharam as tortas, alguns até crianças, para visualizar a situação.

6 alunos justificaram a partir da divisão de 10 por 2, discretizando o contínuo com a divisão das duas tortas em dez pedaços, um deles dizendo que o aluno raciocinou pela lógica.

4 justificaram dizendo que só a divisão de 2 por 5 podia dar 2/5.

1 respondeu que ele não pensou nada, foi pela lógica.

O restante respondeu como se já soubessem que eram cinco crianças, apresentando na justificativa a divisão das tortas em cinco partes.

DEBATE

Na discussão ficou claro para todos que a única possibilidade de termos o resultado 2/5 de torta para cada criança, seria a situação de 2 tortas sendo divididas entre 5 crianças.

Ampliamos a discussão perguntando se tivéssemos 3 tortas querendo que cada criança recebesse 3/4 e responderam que teria que ser 4 crianças. Continuamos perguntando agora se fossem 5 tortas para cada criança receber 5/9 e responderam 9 crianças sem problemas.

QUESTÃO 06

6) Se distribuirmos igualmente 5 chocolates para um grupo de 8 crianças e 5 chocolates para um outro grupo de 6 crianças. As crianças de que grupo vão comer mais chocolate?

Para resolver a questão devem perceber que quando temos, em duas situações de distribuição, o mesmo número de inteiros iguais para serem distribuídos em quantidades diferentes, a maior parte será a resultante da divisão pelo menor número de partes.

Neste caso, as crianças do segundo grupo irão receber mais chocolate, pois 5 ÷ 6 resulta em partes maiores que 5 ÷ 8. Acreditamos que a maioria tenha esta percepção e que respondam a questão sem problemas, mas provavelmente não percebam a comparação entre 5/8 e 5/6. E que alguns, a percebam e resolvam a questão comparando as frações equivalentes com mesmo denominador, através do m.m.c.

RESULTADOS

2 alunos deixaram a questão sem resposta e os demais acertaram, alguns justificando que seria o grupo com menos crianças porque receberiam uma parte maior. Somente um aluno notou através da fração de cada parte a comparação que estava sendo efetuada, respondendo que seriam as crianças do segundo grupo porque 1/6 é maior que 1/8.

Contrariando a nossa previsão nenhum aluno fez a comparação entre as frações, não aparecendo assim o uso do m.m.c.

DEBATE

Na discussão ficou claro que como a quantidade a ser dividida era a mesma, o grupo que tinha menos crianças receberia partes maiores. Mostramos que estávamos fazendo a comparação entre 5/6 e 5/8 e chegando a conclusão que 5/6 era maior que 5/8, podendo representar essa relação por $\frac{5}{6} > \frac{5}{8}$.

QUESTÃO 07

7) Se distribuirmos igualmente 3 chocolates para um grupo de 5 crianças e 9 chocolates para um outro grupo de 15 crianças. Qual é o grupo em que as crianças vão comer mais?

Para resolver basta perceber a equivalência entre as frações 3/5 e 9/15. Acreditamos que a maioria a perceba e responda que as crianças dos dois grupos irão receber a mesma quantidade de chocolate. Na correção pediremos a representação através de figuras para justificar a solução.

RESULTADOS

1 aluno deixou a questão sem resposta e 1 respondeu que eram as crianças do primeiro grupo, não percebendo a equivalência entre as duas distribuições.

Os demais responderam corretamente justificando de formas variadas, desde que todas comeriam a mesma quantidade de chocolate, até porque as quantidades foram aumentadas de forma proporcional ou porque 3/5 é igual a 9/15 (1 aluno).

DEBATE

Imediatamente todos responderam que os dois grupos comeriam a mesma quantidade porque era equivalente dividir três em cinco partes e nove em quinze partes e que por isso poderíamos escrever 3/5 = 9/15.

Acrescentamos então que como era simples trabalhar com as comparações nessa concepção, daria para apresentar para as crianças os conceitos de maior, menor e equivalente com os números fracionários.

QUESTÃO 08

> 8) Se distribuirmos igualmente 3 tortas entre 4 crianças e 4 tortas iguais às primeiras entre outras 5 crianças, quem comerá mais?

Apresentamos mais uma questão de comparação, em que gostaríamos que usassem figuras para visualizar a situação e dar a resposta. No entanto acreditamos que alguns resolvam comparando 3/4 e 4/5 através do m.m.c. para obterem as equivalentes 15/20 e 16/20. Outros devem responder que os dois grupos irão comer a mesma quantidade pois tanto as pizzas quanto as crianças aumentaram.

RESULTADOS

3 alunos deixaram a questão sem resposta.

3 responderam “ninguém” e 2 que receberiam partes iguais porque o aumento foi proporcional.

Os demais responderam corretamente, sendo que 3 deles além de representar a situação com desenhos, efetuaram as operações 3 : 4 = 0,75 e 4 : 5 = 0,8 respondendo que as crianças com 4 tortas comeriam 1/20 a mais; 4 usaram os desenhos para justificar a resposta e os outros que a parte da torta do segundo grupo seria maior.

DEBATE

No início da correção um aluno respondeu que achava que dava o mesmo, imediatamente um outro rebateu dizendo que não.

Mostramos que se estávamos comparando a distribuição de 4 tortas entre 5 crianças com a distribuição de 3 tortas entre 4 crianças, estávamos comparando as frações 3/4 e 4/5. E que se chegássemos a conclusão de que dava a mesma quantidade, estávamos dizendo que as frações 3/4 e 4/5 eram equivalentes.

A maioria concordou que isso não era verdade, mas o aluno rebateu dizendo que não havia a equivalência, mas que aumentou proporcionalmente. Um outro questionou:

"É, aumentou mais uma criança e aumentou mais uma torta, mas a torta foi dividida em pedaços, então aumentou mais, a criança vai comer mais, 4/5 vai ter mais que 3/4."

Retomamos a discussão, esclarecendo que o colega havia concluído que as cinco crianças comeriam mais que as outras quatro e que portanto 4/5 é maior que 3/4. O impasse continuou alguns achando que os dois grupos comeriam a mesma quantidade e outros achando que não.

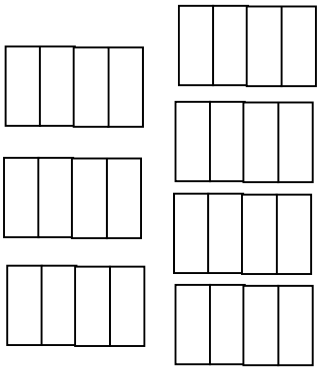
Perguntamos então o que poderíamos fazer para resolver a questão definitivamente e alguns responderam: vamos desenhar.

Fomos para o quadro e desenhamos as duas situações, três retângulos divididos em quatro partes iguais e outros quatro retângulos divididos em cinco partes iguais. Um aluno imediatamente respondeu que juntando os 4 pedaços iria ficar mais que os 3. Acrescentamos que apenas juntar os pedaços não responderia a questão e queríamos uma resposta definitiva e sem dúvidas.

Um aluno perguntou se teria que ser no desenho e respondemos que gostaríamos que fosse no desenho pois foi essa a sugestão inicial. Ela perguntou se podia responder de outra forma e concordamos. Ela foi para o quadro e escreveu: $3 \div 4 = 0{,}75$ e $4 \div 5 = 0{,}8$. Completamos a resolução acrescentando 3/4 = 0,75 e 4/5 = 0,8 e perguntamos se agora todos concordavam que 4/5 era maior que 3/4. Todos concordaram.

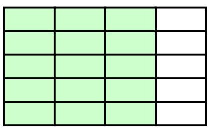
Retornamos aos desenhos e pedimos a sua solução, esclarecendo que agora todos sabiam que havia a desigualdade usando a divisão, mas que gostaríamos de ver a solução através do desenho, como se ainda não soubéssemos fazer tais divisões.

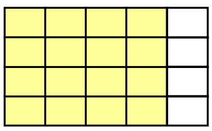
Uma aluno levantou e disse que naquele desenho não dava para comparar porque as partes eram diferentes e que havia desenhado de outra forma. Foi para o quadro e descreveu o processo que usou.



"Eu dividi as quatro tortas também em quatro partes iguais. Aí eu dei 3/4 para cada criança e sobrou 1/4 que eu dividi por 5, aí deu 3/4 + 1/20 para cada uma delas e no outro eles só ganham 3/4".

Todos aceitaram a solução e voltamos ao desenho anterior explicando que as tortas que estavam divididas em quatro partes poderiam ter sido





divididas de novo em cinco partes e as que estavam divididas em cinco em quatro partes. Com isso poderíamos enxergar que no primeiro caso as crianças receberiam 15/20 e no segundo 16/20, aparecendo também aqui o pedaço de 1/20 que a colega falou que o segundo grupo comeria a mais.

Concluímos mostrando que na representação das figuras tínhamos que chegar nas partes iguais para fazer a comparação e esta tinha sido, em parte, a saída usada pelo colega. Por outro lado, tanto as operações de divisão, como o uso do m.m.c. para igualar os denominadores se tornavam procedimentos mecânicos e o ideal seria manipular, recortar, desenhar, ... para que se chegasse ao entendimento da comparação realizada.

QUESTÃO 09

O objetivo é apresentar uma situação em que a solução seja uma fração imprópria e discutir as várias possibilidades de fazer a distribuição.

9) Distribuir 9 bolinhos entre quatro crianças. Qual a fração que representa a cota de bolinhos de cada criança?

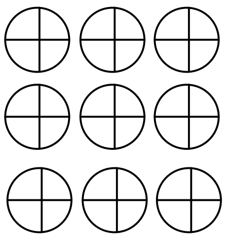
Apresentamos uma questão de distribuição representada por uma fração maior que 1. Acreditamos que todos respondam que cada criança irá receber 9/4 dos bolinhos ou 1 1/4 a partir da representação dos bolinhos e que apareçam representações e respostas diferentes, para perceberem as possibilidades de divisão dos inteiros.

RESULTADOS

19 alunos desenharam os bolinhos para chegar a resposta e nestas aparecem a fração 9/4, a fração mista 2 1/4 e as equivalências 9/4 ou 2 1/4 e 9/4 = 2 + 1/4 = 2 1/4, um dos alunos respondeu 2/9 + 1/36 que não entendemos. Dos 4 alunos que não desenharam, dois responderam 2 1/4 e dois com 9/4.

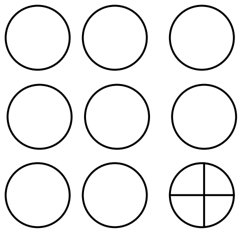
DEBATE

Iniciamos falando que para as crianças o ideal seria que a solução fosse através de desenhos, porque facilitaria a percepção da resposta.



Um aluno falou que era só pegar os 9 bolinhos e dividir por 4. Desenhamos a situação no quadro e de imediato responderam que cada um receberia 9/4.

Perguntamos então se eles percebiam outro caminho de distribuição e um dos alunos respondeu dar bolinhos inteiros.



Desenhamos então a situação no quadro e responderam que dava 2 1/4 para cada criança. Concluímos então que 9/4 era equivalente a 2 1/4.

Uma aluna interrompeu dizendo que dava 2/9 e 1/36 dos bolinhos, de imediato outra disse que estava errado. A primeira então se justificou dizendo:

"É que eu não reparti em quartos eu esgotei o bolinho inteiro, os 9 bolinhos é um. Eu dei 2 bolinhos para cada um, então deu 2/9, aí sobrou 1/9 dos bolinhos, não sobrou? Aí esse 1/9 eu dividi por 4."

Um outro aluno concluiu*: "Eu achei que ela dividiu os 9 bolinhos em 4 e fez a conta total, aí dá esse resultado."*

Explicamos que ele estava dizendo que a colega havia dividido os nove bolinhos em quatro partes, totalizando 36 partes e que como 2/9 era equivalente a 8/36, cada um teria recebido 8/36 + 1/36 que dá 9/36 que é equivalente a 1/4.

Mas, a aluna retrucou dizendo que não, que no dela deu 2/9 + 1/36 e explicamos para ela que a sua solução era equivalente a 1/4. Um outro aluno completou dizendo que ela juntou num só.

Retomamos a discussão explicando que nas respostas 9/4 e 2 1/4 estávamos considerando 9 inteiros e que a colega estava considerando um conjunto com 9 bolinhos. Que quando chegamos ao resultado 1/4, tínhamos que ter falado de quantos bolinhos, como ela considerou um inteiro, a resposta seria 1/4 de 9 bolinhos que daria os 9/4.

Considerando a resposta dada 2 bolinhos representariam 2/9 do inteiro, mas ao dividir 1/4 por 9 respondendo 1/36, o inteiro passou a ter 36 partes, o que levaria os 2/9 a serem considerados como 8/36 do inteiro, totalizando 9/36.

Este resultado corresponde a 9 partes das 36 que tinha ou 1/4 dos 9 bolinhos.

Na realidade ela considerou cada bolinho como 1/9 dos bolinhas que tinha e não percebeu que ao dividir um bolinho em 4, dentro do raciocínio que estava usando, que cada bolinho passou a ser considerado 4/36.

Concluímos lembrando que a questão tinha sido interessante porque permitia várias maneiras de distribuição e acabou aparecendo a concepção de quociente quando chegamos a 9 : 4 = 9/4 e a concepção parte/todo, neste caso no discreto porque os 9 bolinhos se transformaram em 36 bolinhos menores, sendo distribuídos 9/36 dos bolinhos para cada criança.

QUESTÃO 10

O objetivo é colocá-los numa situação de reflexão e registro das diferenças percebidas.

> 10) Quando você pensa nas situações desta ficha e nas situações da ficha anterior, que diferenças você observa entre elas?

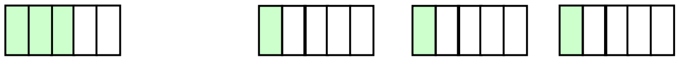
Gostaríamos que percebessem e redigissem as diferenças que citamos inicialmente, mas acreditamos que estas apareçam só na discussão de correção, pois devem ter sentido que o modo de tratas estas situações é diferente das com parte/todo e medida, mas será difícil verbalizar essas sensações.

RESULTADOS

13 alunos compararam as situações desta atividade com as situações de medida, concluindo que aquelas eram mais fáceis porque a situação poderia ser resolvida de várias formas, porque as situações eram concretas, enquanto as situações de medida não permitiam variar as soluções.

3 alunos compararam com a possibilidade de procurar o inteiro ou a unidade nas concepções anteriores e que nesta temos o inteiro para ser dividido.

4 alunos disseram que nas anteriores só tínhamos um inteiro e que nesta podíamos trabalhar com vários inteiros. Três deles fizeram representações para mostrar essa diferença. Abaixo mostramos uma delas.



3/5 1/5 1/5 1/5 = 3/5

2 alunos disseram que as situações anteriores eram mais complexas e envolviam medidas e valores numéricos, enquanto que nesta as situações eram concretas.

1 aluno: grau de dificuldade: o inteiro → partes, inteiros → inteiros, parte → inteiros.

Podemos notar que a maioria das comparações levou em conta as dificuldades encontradas e não resta a menor dúvida que isso aconteceu na atividade de medida. Além disso, é interessante observar que eles não consideraram as atividades de medida como sendo situações concretas.

QUESTÃO 11

Como nas atividades anteriores gostaríamos de observar seus processos de criação.

11) Crie uma situação que envolva a concepção de fração vista nesta ficha.

Como nas atividades anteriores gostaríamos de perceber seus processos de criação.

RESULTADOS

1 aluno deixou em branco e abaixo transcrevemos as situações apresentadas:

"Três crianças receberam 7 balas para repartir igualmente entre si. Quantas balas cada criança irá receber?" (2 alunos).

"Um restaurante vende cerca de 50 pizzas para 150 pessoas por noite. Qual a fração que representa o tanto que cada um comer? Cada pessoa comer 3/4 da pizza." (2 alunos).

"Foram distribuídas algumas maçãs para um grupo de sete crianças. Se cada criança recebeu 5/7 de maçã. Quantas maçãs tinham?" (3 alunos).

"Temos 3 chocolates para dividir entre 2 crianças, qual a parte de chocolate que cada criança receberá? 1 1/2." (2 alunos)

"Tenho 12 cocadas para dividir entre 5 crianças. Qual a fração que representa a cota de cocadas de cada criança? Resp. 12/5 ou 2 2/5." (3 alunos, representam a solução com figuras).

"Pegaremos 2 bolos e dividiremos para um grupo de 32 crianças. Qual a fração que cada criança vai receber? 1 1/16 do bolo para cada criança." (2 alunos).

"Minha vizinha comprou 5 ovos de páscoa e deseja dividir entre 4 crianças, mas por maldade quer deixar 2 crianças com o dobro do chocolate das outras duas. Qual a parcela de chocolate que as crianças irão receber?" (2 alunos).

"Um bolo está dividido em 12 pedaços, 3 crianças irão receber 3 pedaços, quantos pedaços sobraram? Represente em fração.

 *3/12 = 1/4"* (1 aluno)

"Foram distribuídas 7 maçãs entre 4 crianças. Qual a fração que representa a cota de maçãs de cada criança?" (2 alunos)

"O dia tem 24 horas, qual seria o valor em horas de 10/24?" (2 alunos)

"Uma mãe comprou 1 bandeja de danone. Cada filho ficou com 3/6 deste inteiro. Quantos filhos tem esta senhora?" (1 aluno).

Podemos perceber que a qualidade das situações melhorou bastante, o que reflete a facilidade que já expressaram em trabalhar com a concepção quociente. Apenas no último problema, acreditamos que o aluno tenha esquecido de mencionar a quantidade que vem em cada bandeja, para que possa ser resolvido. E o desenho apresentado no problema do bolo não representa nem o bolo, nem a sobra dele.

3.3.7 – ATIVIDADE EXTRA-CLASSE

Cada futuro professor aplicará a atividade 4 da seqüência, que trata da concepção de fração como quociente, em duas crianças de terceira ou quarta série, com o objetivo de perceber e analisar as concepções que as crianças apresentam e os processos de resolução que apresentam.

Antes que eles aplicassem as atividades esclarecemos que eles só poderiam ajudar as crianças a entender as questões, e que o objetivo era fazer com que eles procurassem compreender as soluções que as crianças apresentariam, percebendo como elas agiam para resolver os problemas.

DEBATE

Na apresentação dos resultados pedimos para que os grupos se reunissem por uns 20 minutos, para que trocassem os resultados encontrados e fizessem o levantamento do que achavam interessante, os que não conseguiram aplicar nenhuma atividade se juntariam aos outros grupos.

O primeiro grupo falou de um adulto que estava vendo o assunto no supletivo e de um aluno de quarta série. Comentaram que na primeira questão a criança fez a divisão com resto e o adulto, que diz ter dificuldades com cálculos, desenhou os chocolates e resolveu a questão.

Na questão 9 a criança responde certo, mas não representa com frações e o adulto desenhou os bolinhos dividiu o que sobrou em 4 partes e respondeu que eram 2 bolinhos mais 1/4 para cada um.

Mostraram também que a criança havia criado a seguinte situação: *"7 dadinhos para 5 meninos. Quantos sobram?"*, associando a situação à divisão com resto dos naturais.

Concluíram que o adulto era mais prático, porque desenhou tudo e resolveu, e que a criança como trabalhou com contas, ficou mais abstrato, não conseguindo por esse caminho resolver alguns exercícios. Completaram dizendo que o adulto comentou, que é mais fácil resolver mentalmente, porque na roça ele não precisava colocar no papel, por isso ele tem dificuldades em fazer as contas.

O segundo grupo trabalhou com uma criança de quarta série e de imediato comentaram que ela só trabalhou com números. A primeira questão ela conseguiu resolver, mas nas outras na hora da divisão colocou o zero e a vírgula mas não conseguia continuar. Comentamos que o aluno usou essa saída porque já havia aprendido os números decimais e por isso não conseguiu enxergar um outro caminho de solução. Acrescentamos que eles também no primeiro trabalho haviam transformado todas as frações que encontraram em decimais e que alguns também só haviam resolvido algumas questões por divisão.

O terceiro grupo aplicou o teste em uma criança de terceira série, uma de quarta e uma de segunda. Comentaram que a de terceira série começou a dividir, a de quarta não teve nenhuma visão das questões e não conseguiu resolver nada e a de segunda colocou os desenhos e dividiu, resolvendo o problema dos chocolates (questão 1) e o das pizzas (questão 2), neste foi dividindo até achar um número que dava para dividir por 24.

O quarto grupo aplicou em um aluno de sétima série e um de quarta série. Comentaram que o de sétima havia acertado a primeira questão e que na questão 5 ele desenhou duas tortas e dividiu em 5 e foi pintando 2 para uma criança, pintou mais 2 e sobrou 1 em cada, aí ele juntou deu para mais uma criança, chegando a conclusão que eram cinco crianças.

Na questão 7 ele representou 3/5 e 9/15 e aí ele fez 3, 4, 5 deu 2 (5 – 3=2) e 9, 10, ...,15 deu 6 (15 – 9 = 6), achando que como aumentou, quem comeu mais foi o grupo de 3/5. Comentamos que como a questão pedia “quem comeu mais” ela usou o raciocínio dos naturais com as frações, mas não funciona, além disso que ele sabia que o grupo que tivesse menos comeria mais, porque concluindo que no segundo grupo aumentou, os do primeiro comeriam mais. Mas, o interessante é perceber que sendo um aluno de sétima série não percebeu a equivalência entre as frações.

O de quarta série só acertou a primeira questão e a sétima. Na oitava tentou repetir o raciocínio usado na resolução da sétima, colocando dois números diferentes e foi aumentando para ver se conseguia enxergar a solução, mas não conseguiu.

O quinto grupo aplicou em uma criança de quarta série, classificada como fraca, que apenas começou a ver fração. Na primeira questão ela dividiu os 4 chocolates em quatro partes e distribuiu 3 pedaços para cada uma e o 1/4 que sobrou foi dividido em cinco partes, pegando 1/5 de 1/4. Só que no papel ela respondeu 3 e 1/5. Explicamos que na realidade o 3 da resposta era 3/4, mas que ela considerou como 3 pedaços, e que ela não percebeu que quando ela dividiu 1/4 em cinco partes passou a ter o chocolate dividido em 20 partes. E mais, ela começou fazendo a distribuição para quatro e depois mudou para cinco e discretizando o contínuo pois um chocolate virou 20 chocolates menores.

Na questão 6 a criança desenhou os cinco chocolates e dividiu cada um em 8, chegando a 40 pedacinhos, pegou 8 pedacinhos para cada um escrevendo 8/40. Na segunda situação ela dividiu os 5 chocolates em 6 partes e considerou os 30 pedaços, juntou tudo e deu 5 para cada um, chegando em 5/30, não respondeu quem comer mais, mas circulou no enunciado da questão o número 6 provavelmente, querendo dizer que quem comeu mais foi o grupo de 6.

Completaram dizendo que a criança respondeu "comeram 8 dos 40 chocolates", apresentando um típico raciocínio de discretização do contínuo, acrescentamos. E observaram também, que a criança de quarta série dividia tudo no meio, para ela tudo era metade, inclusive na questão (2) das pizzas mesmo as que não precisavam ela dividiu e que primeiro representava tudo com desenhos, para depois chegar ao número, desenhando inclusive as cadeiras da mesa. Lembramos que eles faziam a mesma coisa no começo dos nossos trabalhos.

Mas, na questão 7 ela desenhou os chocolates da primeira situação maiores que os da segunda e quando fez as divisões chegou a conclusão que os da primeira situação comeram mais porque as partes eram maiores. Observamos que a criança havia perdido o referencial de inteiro de uma situação para a outra, o que a levou ao erro.

O sexto grupo trabalhou com uma criança de terceira série e uma de quarta e acharam interessante a solução das questões 6 e 7 pela criança de quarta, porque ela de imediato respondeu tem menos crianças vai comer mais. Já para a questão 8 ele usou o seguinte argumento: *"como ou outro (exercício) foi de menos, nesse aqui os 3/5 vai comer mais."* Sem desenhar nem calcular nada, como se o professor nunca desse dois exercícios com o mesmo tipo de resposta seguidos.

A de terceira resolveu a questão 7 dividindo os 3 chocolates para um grupo de 5 e deu 3/5 e 9 chocolate para um grupo de 15 e deu 9/15. Aí ela dividiu o 9 por 3, porque era o número de chocolates do primeiro grupo e deu 3/5, só então ela respondeu que os dois comeram igual. Comentamos que provavelmente ela estaria simplificando a fração, mas que eles deveriam ter perguntado porque ela estava dividindo pelo número de chocolates do outro grupo.

O sétimo grupo tentou trabalhar com uma criança de quarta série, mas ela não conseguiu responder nada, como estavam estagiando resolveram pedir para uma criança de primeira série que resolvesse só a primeira questão. A criança desenhou os chocolates, dividiu e deu a resposta.

Explicaram também, que a professora da criança da quarta série comentou que ainda não havia dado frações e acharam interessante ela não ter conseguido resolver nada, enquanto que a da primeira, que também não estudou fração, ter resolvido pelo menos a primeira questão.

O oitavo grupo com uma criança de terceira série acharam interessante, que na questão 6 ele relacionou com a prática dizendo: *"se eu tivesse 1 chocolate e desse para você levar para a sua casa, para você dividir para você e suas 4 irmãs seriam 5 crianças. E se eu pegasse o chocolate e levasse para minha casa, que somos só em 2 irmãos, seria 2 crianças, então nós iríamos comer mais, então quem comeu mais foi o grupo de menos crianças."*

Mas, na questão 7, ela não conseguiu relacionar com a equivalência, desenhou tudo, pensou muito, mas não conseguiu resolver, provavelmente já estava cansada.

Terminada a apresentação explicamos primeiro que um dos objetivos de termos forçado a solução dos problemas através de figuras, era de fazer com que pensassem nessas soluções, porque as crianças tinham mais facilidade com esse tipo de procedimento. E eles teriam que ter recursos para entender as representações apresentadas pelos seus alunos.

Além disso, que deveriam ter notado que a maioria, de uma forma ou de outra, enxergou uma solução, mesmo respondendo com pedaços e que estas estariam prontas para trabalhar com frações alguns, pois apresentavam recursos para isso, pois a partir das soluções encontradas através dos desenhos daria para introduzir o conceito de número fracionário.

E também, que eles devem ter notado que as tentativas de resolução a partir da operação de divisão, tinham levado a maioria que a usou ao erro, ou por não saber fazer a conta, ou por não saber o que fazer com o resultado. O que mostra, que por um lado, o novo conhecimento que poderia ser usado como um novo recurso para a resolução de problemas, não é assim utilizado porque normalmente o número decimal não dá sentido como resposta de situações de distribuição e, por outro lado, esse novo conhecimento encobre recursos anteriormente úteis, como o uso de figuras, que poderiam estar sendo utilizados. Nossa hipótese é que se faz necessário um trabalho sistemático da mudança de registro da escrita dos números decimais e fracionários.

3.3.8 – SÍNTESE

Apresentaremos a seguir a síntese realizada no final da aplicação da seqüência, incluindo as sínteses feitas ao final de cada atividade e levantando apenas os principais tópicos trabalhados.

1. Quantidades Discretas e Quantidades Contínuas

- Mostramos que tínhamos, no nosso trabalho, dois tipos de problemas os que podiam ser resolvidos com os números naturais e os que só podiam ser resolvidos com os números fracionários. Por exemplo: 9 chocolates para 3 crianças e 3 chocolates para 9 crianças.

- Que as quantidades discretas representavam os objetos que eram quantificados somente através da contagem (bolinhas, botões, flores, ...) o que limitava as distribuições.

- Que as quantidades contínuas representavam os objetos que eram quantificados através da medida (metro, gramas, ...) e que por isso podiam ser distribuídos de qualquer maneira.

2. Concepção Parte/Todo

- A concepção parte todo mostrava a relação existente entre a parte e o inteiro considerado.

- Que a soma da quantidade de partes não deve ser maior do que a quantidade de partes em que o inteiro foi dividido, pois deixaria de representar a relação entre um inteiro e uma parte dele.

Discreto

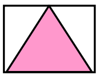
- O total de objetos deve ser um número múltiplo do número de partes desejadas e neste caso cada parte tem a mesma quantidade de bolinhas. Por exemplo: 1/3 de 9 bolinhas.

- Que cada elemento pode ser considerado como uma parte do inteiro, o que permitiria que tivéssemos um conjunto de 9 bolinhas, com 3/9 das bolinhas amarelas, 2/9 das bolinhas azuis e 4/9 das bolinhas vermelhas, por exemplo.

- Que a partir de uma quantidade que representa uma parte do conjunto inicial, podemos reconstruir o inteiro, descobrindo a quantidade única de elementos que possui.

Contínuo

- A definição do que é igualdade das partes é muito importante, pois quando falamos nessa igualdade estamos nos referindo a área e não a forma de cada parte.

Por exemplo:  $\frac{1}{2}$

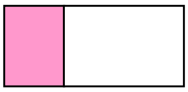
- Que a soma das áreas das partes não poderia ser menor do que a área do inteiro considerado, pois significaria que a divisão deixou resto. Por isso a criança que vai trabalhar com esta concepção tem que já ter desenvolvido a conservação de área, para esgotar o inteiro quando fizer as divisões.

- A divisão de figuras é mais difícil do que a distribuição de objetos, porque é necessário um planejamento anterior para saber onde colocar os traços de divisão.

- A divisão de círculos, em geral, dá como resultado as partes de mesma forma, enquanto que na divisão de outras figuras podemos encontrar várias possibilidades de divisão com formas diferentes para as partes.

- Que trabalhar com as figuras totalmente divididas, conduzia ao uso da contagem para a identificação da quantidade de partes e que este procedimento era perigoso, porque quando a figura apresentada não estava totalmente dividida em partes iguais o resultado encontrado seria incorreto.

Por exemplo:

 $\frac{1}{3}$

- Que a partir de uma parte (fração) da figura original (o inteiro), podemos reconstruí-la obtendo várias soluções para esse inteiro procurado.

<u>Medida</u>

- Uma fração *a/b* significa que uma unidade de medida foi dividida em *b* partes e na medição feita apareceu *a* vezes. Isto é $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$. A fração *1/b* é uma sub-unidade da unidade que está sendo usada.

- A reta numérica é uma representação que facilita a visualização e o entendimento da concepção de medida.

- Que nesta concepção ficam facilitadas as situações com frações maiores que um, a comparação entre frações e a possibilidade de colocação de uma infinidade de frações entre duas frações dadas.

- Que nas situações de medida, com a utilização da reta numérica, as frações passam a ser vistas realmente como números fracionários, o que não acontece com a situação parte/todo.

- A partir de um segmento que representa o resultado de uma medição, podemos descobrir a única unidade possível com que esse segmento foi medido.

- Que as frações equivalentes aparecem na concepção de medida com naturalidade, representando a medição de alguma coisa através de sub-unidades diferentes.

<u>Quociente</u>

- A concepção quociente é representada por situações de distribuição e por isso como o próprio nome diz, representa resultados de divisões e por isso a fração *a/b* pode ser também representada pela divisão $a \div b$.

- Nestas situações podemos relacionar objetos diferentes e por isso dizemos que aqui trabalhamos com duas variáveis, por exemplo bolinhas e crianças. E por isso a fração *a/b* vai indicar que *a* está sendo distribuído em *b* partes.

- Esta concepção facilita bastante a percepção das frações maiores que um e do código misto de escrita.

<u>Contínuo</u>

- Aparecem representações de vários inteiros sendo divididos ao mesmo tempo, representando frações maiores que um ou não.

- As distribuições podem ser feitas de várias maneiras, mas também precisam de um planejamento anterior.

<u>Discreto</u>

- No discreto a distribuição sempre vai resultar em partes com a mesma quantidade de objetos.

- A quantidade que vai ser distribuída tem ser um número múltiplo do número de distribuições a serem feitas.

Durante a apresentação da síntese fomos interrompidos em vários momentos de dúvidas, mas duas colocações merecem citação:

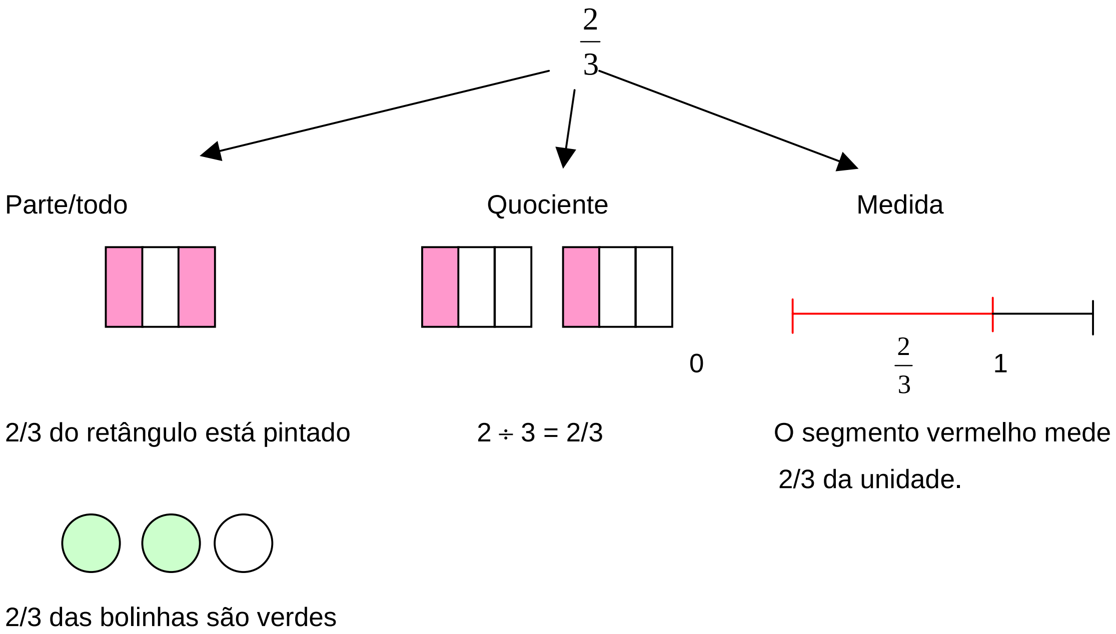
- Um aluno retomou a discussão de adição de frações, porque só sabia fazer com o m.m.c. e queria entender com as figuras. Refizemos todo o processo já apresentado anteriormente.

- Durante a discussão sobre medidas, um aluno sugeriu que poderíamos ensinar as crianças a partir dessa concepção, usando o mesmo tipo de atividade que fizeram, alegando que era mais fácil enxergar as frações assim do que com bolos ou pizzas. Respondemos que não tínhamos certeza de qual seria o melhor caminho, mas tudo levava a crer que a concepção quociente parecia a mais natural.

Concluímos a síntese mostrando que um número fracionário poderia estar representando muitas situações diferentes e escolhemos 2/3 para exemplificar algumas delas.

- Atrás do número fracionário 2/3 temos uma classe de equivalência: 4/6, 8/12, ... que representavam igualmente a quantidade 2/3.

- Fizemos o seguinte resumo no quadro.



Mostramos que tínhamos aí três maneiras diferentes de pensar para a mesma fração, que exigiam raciocínios diferentes para tratamento de cada uma delas.

3.3.9 – PÓS-TESTE

JUSTIFICATIVA

Como parte da nossa metodologia, o pós-teste foi realizado alguns dias após o término da seqüência, com o propósito de analisar seus resultados e compará-los com os resultados do pré-teste.

OBJETIVO

A partir de questões semelhantes as colocadas no pré-teste, queremos verificar se houve alguma mudança de atitude, no processo de resolução e nas estratégias usadas quando trabalham com frações. Através desses resultados iremos também avaliar a seqüência aplicada.

RESULTADOS ESPERADOS

Esperamos que apresentem resultados mais satisfatórios do que os constatados no pré-teste, embora alguns devam continuar apresentando algumas dificuldades, pois já são adultos e trabalham há muito tempo da mesma maneira.

Não resta a menor dúvida, que o tempo de aprendizagem varia individualmente e que por isso, alguns precisassem de mais tempo para refletir sobre o novo enfoque dado aos números fracionários. De qualquer forma, esperamos que a maioria tenha adquirido uma nova maneira de ver esses números a partir das três concepções trabalhadas e que se sintam mais capazes de ensiná-los.

<u>QUESTÃO 01</u>

O objetivo é observar que pontos da seqüência foram mais significativos.

1) Que boa experiência você teve durante esta seqüência de trabalho com frações?

<u>RESULTADOS</u>

Os alunos expressam claramente sua surpresa em trabalhar com os novos pontos de vista apresentados.

Classificamos as experiências citadas no teste de acordo com o assunto a que ela se refere da seguinte forma: gerais (as que não se referem a uma experiência específica) (12 alunos), quantidades discretas ou contínuas (2), parte/todo (3), medida (5) e quociente (1)

A seguir selecionamos de cada um algumas, que a nosso ver expressam bem os sentimentos dos alunos em relação às experiências vividas.

<u>Experiências gerais</u>

- "Foi aprender de uma maneira diferente e clara o que é fração e perceber que atrás de um número em cima do outro existe uma situação."

- *"Adorei! Nunca imaginei que frações fosse tão interessante."*

- *"Aprendi muitas coisas que não sabia sobre frações, achei super interessante. Irá me ajudar mas tarde quando eu estiver atuando."*

<u>Quantidades discretas e Contínuas</u>

- "Tive uma ótima experiência pois pude compreender o verdadeiro significado das frações. Existem coisas que podem ser divididas várias vezes até sumirem, ex. chocolate. Porém, existem outras coisas, que se forem divididas perdem o valor, ex. bola de vôlei."

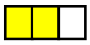
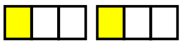
Parte/todo

- "Desprendeu daquela coisa do livro didático que já vem tudo dividido e igual e já pintado, só esperando que as partes fossem contadas e marcados os resultados na frente do desenho."

Medida

- "Foi bastante interessante a questão da medida. De pegar um papel qualquer, utilizá-lo como unidade de medida, fazer as subdivisões dessa medida e dar um nome à ela."

Quociente

- *"Muito interessante o fato de*  *= 2/3 e*  *= 2/3.*

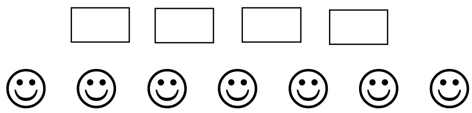
Percebo nos livros e estágios que isso não ocorre e em minha época de primário não ocorreu."

QUESTÃO 02

O objetivo é comparar com a questão semelhante do pré-teste e observar as estratégias que usaram para responder a questão

2) Divida as quatro tortas entre as sete crianças.

Quanto cada criança vai receber?



R.: ___________________________________

RESULTADOS

Consideramos como corretas as respostas: 4/7, 4/7 = 0,57, 1/7 de cada torta e 4/7 = 1/2 + 1/14 = 8/14.

16 alunos acertaram a questão.

20 alunos dividiram as representações das tortas.

Dos que dividiram as quatro tortas em sete partes iguais ou não dividiram a figura temos:

Respostas	Total	Dividiram
4/7 das tortas	12	9
4/28	2	2
1/7 de cada torta	2	2
4/7 ou 0,57	1	1

Dos que dividiram as 4 tortas ao meio e uma metade em sete partes temos:

Respostas	Total
7/49 = 1/7	1
1/2 + 1/7	2
1/2 e 1/7	1
4/7 = 1/2 + 1/14 = 8/14	1
2 2/7	1

Um aluno dividiu as tortas em 4 partes e duas destas em sete partes, dando como resposta 2 2/7, esquecendo que as partes que ele dividiu em sete representam metade de cada torta.

Percebemos que os que dividem completamente a figura acertam mais e não apresentam dificuldades em relacionar a figura, com exceção dos que discretizam o contínuo, do que os que usam outros procedimentos de divisão.

QUESTÃO 03

Temos como objetivo nesta questão verificar se representarão as tortas para responderem e se aparece a operação de divisão na sentença matemática.

> 3) Se dividirmos 8 tortas entre seis crianças, que fração das tortas cada criança vai receber? Que sentença matemática posso usar para representar essa situação?

RESULTADOS

20 acertaram a questão.

14 alunos desenham e dividiram as oito tortas.

Os resultados foram os seguintes:

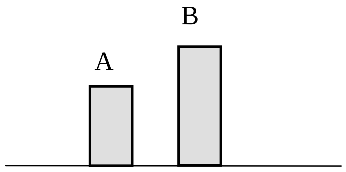
Respostas	Total	Respostas	Total
8/6	3	8/6 ou 8 : 6 = 1,33	1
8 : 6 = 8/6	3	1 2/6 ou 8 : 6 = 1,33	1
1 1/3	3	1 1/3 ou 8 : 6 = 1,33	1
8/6 ou 1 2/6 ou 8:6	2	8/6 → 4/3 ou 1 1/3	1
8/6 ou 1 1/3	2	6/8	1
1/6 das tortas	1	1 + 2/6	1
1 + 2/12	1	1 + 1/3	1

Podemos notar que os tipos de respostas variaram bastante e alguns mostram várias formas de escrita para o mesmo número, embora na escrita decimal dêem um resultado aproximado. E também que somente 6 alunos apresentaram a sentença matemática.

QUESTÃO 04

Gostaríamos de observar se aparece alguma mudança de estratégia de resolução desde o pré-teste, pois a questão é a mesma.

4) Que fração representa a relação entre a altura do retângulo A e a altura do retângulo B?



RESULTADOS

7 alunos dividiram as figuras

Os resultados são os seguintes:

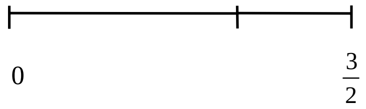
Respostas	Total
1/3 mostrando a diferença	10
A é 2/3 de B	6
2/3	6
1/4	1

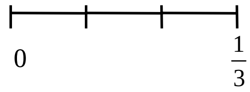
Notamos que a maioria relacionou as medidas das alturas dos retângulos, ou considerando A como parte de B, ou como a diferença das alturas. Somente 1 aluno errou a questão usando a fração 1/4, provavelmente para mostrar a diferença, mas equivocando-se na quantidade de partes de B.

QUESTÃO 05

O objetivo é verificar se realmente perceberam o que é medir e com isso possam identificar os pontos marcados nos segmentos, identificando inicialmente a unidade usada para tal medição.

5) Indique os números racionais que correspondem aos pontos marcados nos segmentos abaixo.





RESULTADOS

15 alunos dividiram o segmento (a) para dar a resposta.

Questão (a)		Questão (b)	
Respostas	Total	Respostas	Total
2/2	9	1/9 – 2/9	14
2/2 ou 1	6	Em branco	3
1	5	4/12 – 2/6	3
2/3	2	2/4 – 4/4	1
em branco	1	1/5 – 1/4	1
		1/7 – 1/5	1

Podemos perceber que a maioria conseguiu identificar os pontos marcados nos segmentos, os outros ainda não estão conseguindo perceber a unidade de medida e encontraram algum critério para marcar os pontos.

QUESTÃO 06

Gostaríamos de observar se as respostas aqui obtidas diferem em qualidade das que foram apresentadas no pré-teste, no sentido de verificar se existe um outro tipo de preocupação com o erro do aluno e com relação a correção.

6) Um aluno deu as respostas abaixo para quatro contas envolvendo frações:

a) $\frac{1}{5}+\frac{1}{8}=\frac{2}{13}$

b) $\frac{3}{4}-\frac{3}{9}=\frac{0}{5}$

O que você lhe diria depois da correção?

RESULTADOS

Um aluno deixou em branco.

12 alunos não fizeram a correção mas comentaram, sendo que 8 deles fizeram a correção correta no comentário.

4 alunos fizeram a correção e não comentaram.

6 alunos fizeram a correção e comentaram.

Dos 12 que não fizeram a correção na questão, podemos notar através dos comentários feitos, que 8 corrigiram corretamente. Citaremos dois desses comentários:

- *"Que ele para dar um nome ao resultado, tinha que redividir todas essas quantidades em partes iguais e não simplesmente somá-las sem considerar o que a quantidade realmente representa."*

- *"Que estava errado, mas o raciocínio matemático dele estava certo, como são duas frações diferentes não dá para somar como partes iguais."* (Referindo-se aos denominadores diferentes das frações).

Ainda aparecem comentários que com muita força consideram somar numeradores e denominadores como um procedimento lógico e matematicamente correto, pois acreditamos que esses enxergam a fração como dois números naturais não relacionados.

Dos alunos que corrigiram obtivemos a seguinte correção:

Questão (a)		Questão (b)	
Certa	Errada	Certa	Errada
1	17 (13/40)	2	16 (15/36)

Podemos notar que dos 10 que corrigiram, 9 o fizeram corretamente para o item (a) e 8 para o item (b).

Desses alunos citaremos apenas dois comentários, que a nosso ver são bastante representativos:

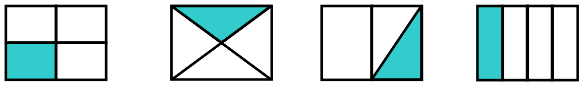
- *"Eu lhe diria que para somar ou subtrair frações é preciso que os denominadores sejam iguais, ou seja, com o mesmo nome, por isso essas resoluções estão erradas."*

- *"O raciocínio lógico está correto, ou seja, se somarmos ou subtrairmos essas frações realmente dá certo, mas tem um porém: na fração não se deve fazer como os alunos fizeram."*

QUESTÃO 07

O objetivo é verificar se perceberam que na concepção parte/todo no contínuo precisamos nos preocupar com a área de cada parte e não somente com a sua forma.

7) O que você pode falar sobre as partes pintadas das figuras abaixo?



RESULTADOS

19 alunos afirmam que todas elas representam 1/4 da figura e que isso acontece em todas, alguns justificando que as áreas são iguais, embora as partes tenham formas diferentes.

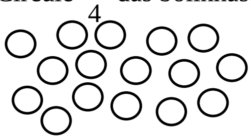
3 alunos se referem a mesma área com formas diferentes, mas não relacionam a fração 1/4.

1 aluno afirma “que cada parte pintada de cada figura é representada pela fração 1/4 ou se eu olhar no geral 4/16”, visualizando também as 4 figuras discretizadas em 16 partes de mesma área.

QUESTÃO 08

Temos como objetivo verificar se as estratégias de distribuição mudaram, passando a enxergar o conjunto de bolinhas como um inteiro na concepção parte/todo no discreto e não como 16 inteiros.

8) Circule $\frac{3}{4}$ das bolinhas.



RESULTADOS

- Circulou 12 bolinhas (18 alunos).
- Dividiu em 4 grupos e em cada um pintou 3 bolinhas (3 alunos).
- Circulou 12 bolinhas e acrescentou 3/4 = 6/8 = 12/16 (1 aluno).
- Circulou 4 bolinhas (1 aluno).

Não aparecem muitas maneiras de agrupamento das bolinhas e com exceção de um aluno, o restante acertou a questão.

QUESTÃO 09

O objetivo é verificar se representam a área pedida pintando 1/6 do retângulo e se aparece a multiplicação $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ na determinação dessa área.

9) Pinte 1/3 da metade do retângulo abaixo. Que fração do retângulo você pintou?

RESULTADOS

- Pintou e associou a fração 1/6 (17 alunos).
- Pintou corretamente mas não deu a fração (4).
- Não pintou e escreveu 1/6 (1 aluno).
- Pintou 1/3 e não deu a fração (1 aluno).

Todos os que pintaram a figura usaram a régua e a maioria acertou a questão. Somente um aluno não pintou a figura e respondeu corretamente, provavelmente calculando mentalmente o resultado.

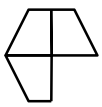
Dos que dividiram a figura, com exceção de dois alunos, o restante não a dividiu totalmente, dividindo uma metade em três partes ou mostrando somente 1/6 da figura pintada.

A operação de multiplicação não apareceu em nenhuma das respostas. E tudo nos leva a crer que estão trabalhando melhor com as figuras.

QUESTÃO 10

Gostaríamos de observar se reconstituem um inteiro no contínuo a partir de uma fração do mesmo.

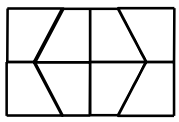
10) Se a figura abaixo é 3/8 da figura, qual é a figura?



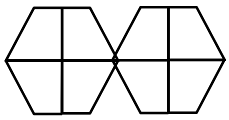
RESULTADOS

- 17 alunos acertaram a questão e 6 não, destes um completou a figura inicial mas não desenvolveu o inteiro. dos demais, dois colocaram duas partes a mais na figura e três colocaram a quantidade correta de partes mas não perceberam espaços que a figura teria na maneira como imaginaram, alterando assim as medidas dos lados.

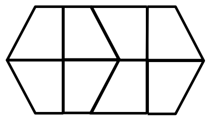
Os inteiros representados foram



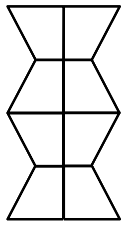
5 alunos



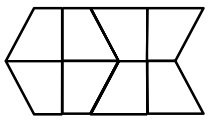
4 alunos



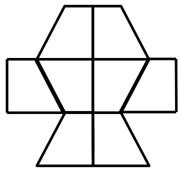
3 alunos



3 alunos



1 aluno



1 aluno

QUESTÃO 11

O objetivo e levantar que concepções e que tipos de situações preferem.

11) Crie duas situações-problema envolvendo a fração 3/5.

De uma forma geral as situações, a meu ver, estão melhor elaboradas e do levantamento que fizemos pudemos detectar 18 problemas envolvendo a concepção parte/todo, 25 com a concepção de quociente e 2 envolvendo medidas.

Desses problemas 35 tratavam de quantidades contínuas e 10 de quantidades discretas.

A seguir mostraremos alguns dos tipos de problemas apresentados.

Um deles referindo-se a 3/5 de 9 balas, provavelmente esperando a impossibilidade da resposta, visto que o segundo problema estava muito bem elaborado.

Um outro apresentada uma composição de círculos e retângulos para que fosse pintado 3/5 dessa figura.

Um pedia para pintar 3/5 de um retângulo.

Com, uma parte pintada (1/5) de uma figura, perguntava se o aluno pintou 3/5 (deve ter confundido a pergunta com a parte não pintada).

Apareceu uma situação de reconstrução de um inteiro a partir de uma figura parecida com a da questão 10.

3.4 – COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS INICIAIS E FINAIS DA SEQÜÊNCIA

A partir da análise anteriormente feita, acreditamos que a aplicação da seqüência provocou discussões importantes, que levaram os futuros professores a refletir sobre os seus conhecimentos e a observar os números fracionários sob outros pontos de vista. Sentiram-se satisfeitos com a oportunidade de rever o assunto participando ativamente de todas as propostas.

Para melhor localizarmos os resultados específicos iremos, a princípio, avaliar a performance desses futuros professores comparando algumas questões do pré-teste e do pós-teste.

Distribuímos essas questões em 8 grupos e identificaremos as questões do pós-teste em algarismos romanos, para diferenciá-las das questões do pré-teste.

1º GRUPO

(1) – Questão 1 do pré-teste.

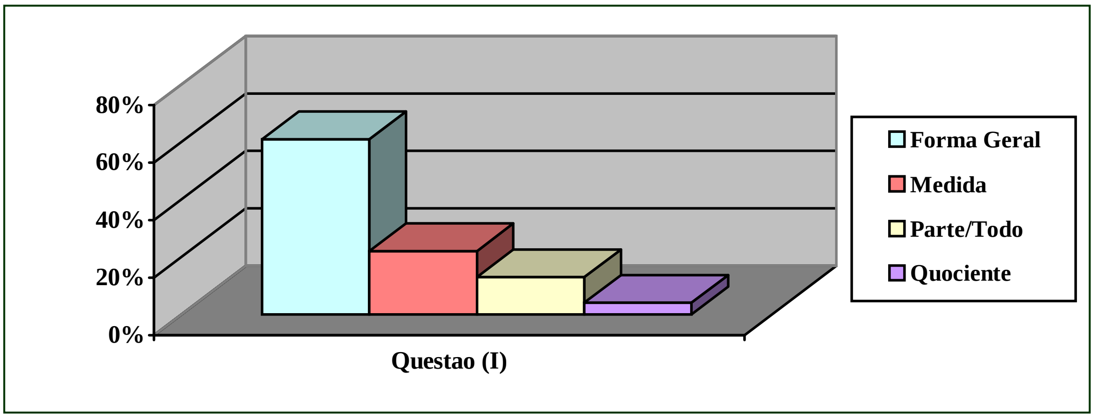
(2) – Questão 2 do pré-teste.

(I) – Questão 1 do pós-teste.

Se observarmos as experiências citadas na questão (1) podemos notar que no início do trabalho os futuros professores não conseguiam relatar experiência alguma, a maioria falou de suas dificuldades, argumentando que o conteúdo era difícil e que continha “coisas” que nunca ficavam claras, o que foi reforçado pelas respostas da questão (2).

Após a realização da seqüência, na questão (I), podemos observar que a maioria se refere a esse trabalho, de uma forma geral, como uma boa experiência na aprendizagem de frações, pois reconhecem que foi um momento em que puderam ampliar e discutir seus conhecimentos. Além disso, reconhecem também as diferentes concepções trabalhadas conforme gráfico abaixo.

Por outro lado, pudemos observar uma facilidade maior de expressão e de melhor qualidade nos relatos do que os observados nas questões (1) e (2).

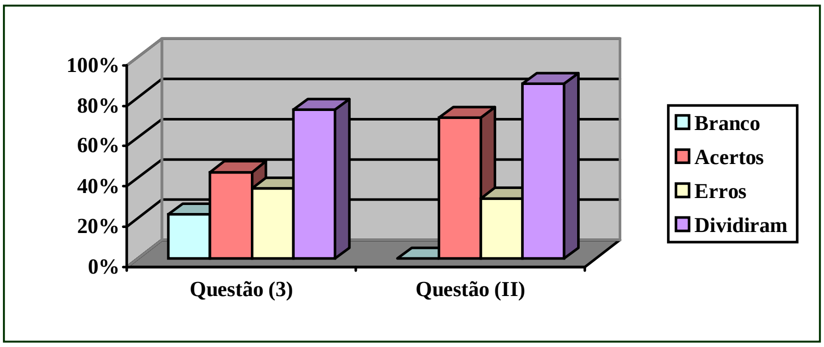


<u>2º GRUPO</u>

(3) – Questão 3 do pré-teste.

(II) – Questão 2 do pós-teste.

Apresentamos abaixo um gráfico comparativo com os resultados das duas questões.



O primeiro resultado que podemos notar é que todos os alunos responderam a questão (II), eliminando assim as questões em branco que alguns haviam deixado na questão (3).

Além disso, a partir das análises apresentadas anteriormente, não aparecem mais respostas referindo-se a restos ou pedacinhos ou partes, todos procuram uma resposta objetiva através de números fracionários, o que conduziu também à redução de respostas com números decimais que apareceu com ênfase no pré-teste.

As estratégias empregadas, não sofrem alterações de uma questão para a outra, alguns dividem todas as figuras em sete partes e outros partem da divisão pela metade, embora o número de alunos que dividem a figura para resolver a questão tenha aumentado. Por outro lado, os que usam a primeira estratégia chegam a resposta correta com mais facilidade, enquanto os outros, como no início dos trabalhos, têm mais dificuldade em encontrar a fração adequada para representar a divisão feita na figura.

Podemos observar também que o número de acertos para a questão (II) aumenta e o de erros diminui, o que mostra que alguns alunos que antes haviam errado ou deixado a questão em branco, agora conseguiram respondê-la corretamente. Apesar dessa questão apresentar um grau de dificuldade maior, pois além das figuras que representam as tortas permanecerem do mesmo tamanho nas duas questões, colocarmos mais tortas para serem distribuídas, em um número maior de partes (sete).

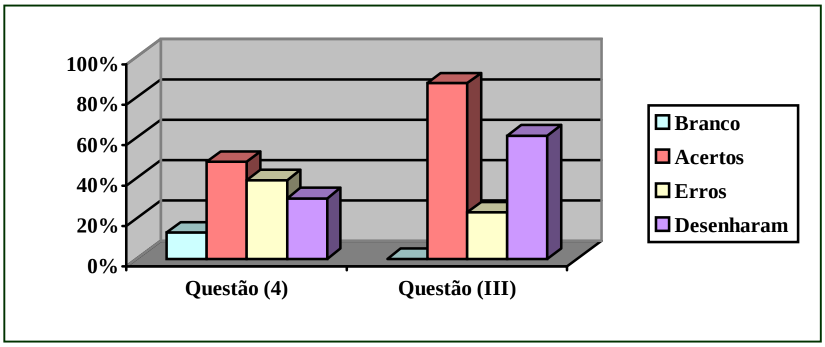
Para essa questão aparecem também respostas que mostram a discretização do contínuo, pela divisão de todas as figuras e a consideração do total de partes como o inteiro. No entanto, os que usaram este procedimento não conseguiram chegar ao resultado correto, pois não conseguiram determinar o número de partes para cada distribuição.

Acreditamos que não apresentaram um maior número de acertos porque esse tipo de exercício, foge do habitualmente trabalhado, pois exige a divisão da figura para a identificação da fração de cada cota da distribuição feita, o que alguns ainda não conseguiram perceber ou se o fizeram não conseguiram encontrar a fração.

3º GRUPO

(4) – Questão 4 do pré-teste.

(III) – Questão 3 do pós-teste.



Com relação a estratégia, observamos que dobra o número de alunos que representam as figuras das tortas para resolver a questão. No entanto, percebemos também que nas questões do grupo anterior, um número maior de alunos usou esse recurso, provavelmente porque as figuras já aparecem na questão.

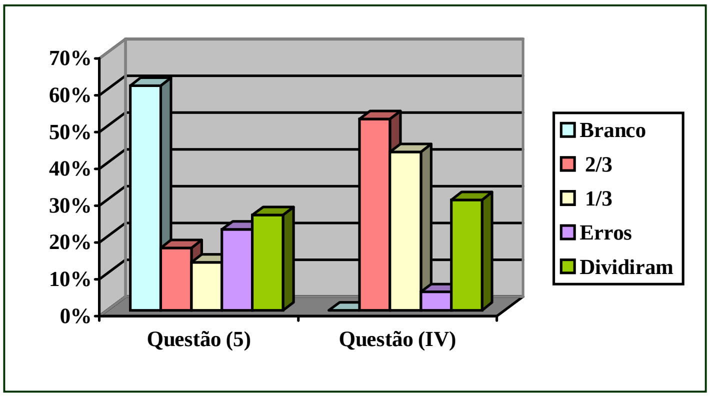
Observando o gráfico acima, podemos ver que cresce a quantidade de acertos. Acreditamos que a representação das figuras como suporte para a resolução da questão tenha sido a responsável por essa alteração nos resultados. O que consideramos um ponto favorável, pois a faixa etária com que esses futuros professores irão trabalhar, exige e usa esse recurso para a resolução de problemas semelhantes, como pudemos constatar na atividade extra-classe que realizaram.

A questão da "sentença matemática", tão usada no ensino primário, é apresentada por uma minoria, através de uma igualdade, sem explicitação de que se tratava da sentença matemática do problema. Esperávamos que fossem colocar a representação da operação de divisão associada a resposta encontrada como essa sentença matemática, mas isso não aconteceu, pelo contrário, menos alunos usam a igualdade nas suas respostas do pós-teste.

4º GRUPO

(5) – Questão 5 do pré-teste.

(IV) – Questão 4 do pós-teste.



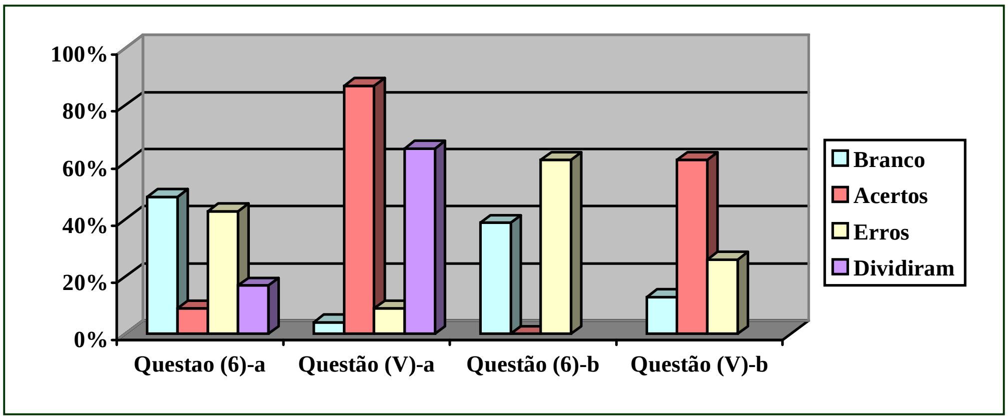
Repetimos a mesma questão do pré-teste, no pós-teste e pudemos observar, que o número de alunos que precisou dividir a figura para responder a questão se manteve praticamente o mesmo. No entanto, o número de acertos aumentou e o de questões em branco diminui consideravelmente, o que mostra que provavelmente, mediram as duas alturas com a régua e as relacionaram sem precisar dividir a figura.

Como podemos observar no gráfico acima, todos responderam a questão (IV), fazendo os mesmos tipos de relações anteriormente apresentadas no pré-teste, apenas um aluno não conseguiu a resposta correta porque dividiu o segundo retângulo em quatro partes.

5º GRUPO

(6) – Questão 6 do pré-teste.

(V) – Questão 5 do pós-teste.



As duas questões apresentadas, dificilmente são apresentadas no ensino e exigem conhecimentos específicos de medida. Apesar de muitos terem concluído, que o trabalho com medidas foi mais difícil, argumentando que não foi um trabalho concreto porque envolvia mais o uso de números do que de outra “coisa”, o resultado da questão (V) nos leva a crer que algumas dificuldades dessas dificuldades foram superadas.

Como já havíamos observado nos grupos anteriores, mais alunos dividem a figura para encontrar a resposta, o que aqui se torna um procedimento essencial, que deve Ter levado à redução do número de questões em branco e respostas incorretas, encontradas no pré-teste nas questões (6)-a e (6)-b.

No item (a) da questão (V), mesmo aumentando o grau de dificuldade da questão, com a colocação da representação de um segmento maior que a unidade, o número de acertos aumentou consideravelmente. A questão (6)(a), em que o segmento representa uma unidade, considerávamos de simples solução, pois bastava dividi-lo em cinco partes para obter a resposta isso não ocorreu e poucos conseguiram associar corretamente a fração do ponto marcado. O que mostra que a questão não era tão simples como acreditávamos.

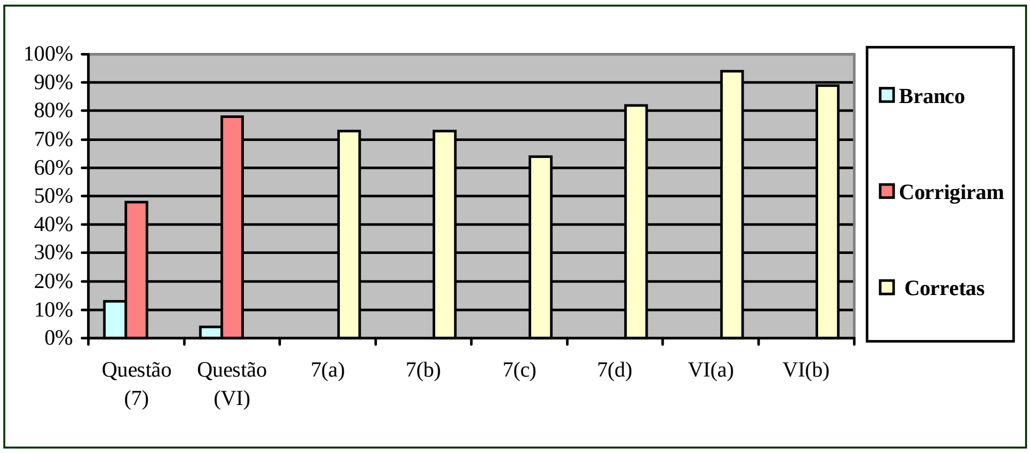
A questões (6)-b e (V)-b são idênticas e pudemos constatar que ainda no pós-teste alguns a deixaram em branco, embora o número de acertos tenha aumentado sensivelmente. O que nos leva a crer que a grande maioria prolongou o segmento (ou o imaginou prolongado) até completar o inteiro e com isso pode identificar corretamente os pontos marcados.

6º GRUPO

(7) – Questão 7 do pré-teste.

(VI) – Questão 6 do pós-teste.

O gráfico na página seguinte mostra os resultados das duas questões com a porcentagem de correções adequadas para cada questão.



Poucos alunos explicitaram efetivamente a correção feita, embora na questão (VI) alguns o tenham feito no interior dos comentários, mas sem sugestão de correção.

Apesar de não termos feito um trabalho específico com as operações, a adição apareceu, em alguns momentos no decorrer dos trabalhos, servindo inclusive para muitos expressarem suas dificuldades no assunto. Na análise da seqüência, anteriormente apresentada, pudemos ver que a necessidade do m.m.c. para a adição e a compreensão do porquê de sua utilização não era clara. Todos entendiam, essa utilização, como um procedimento mecânico que permitia efetuar a adição. Provavelmente por isso, no pós teste somente dois alunos comentaram sobre o uso do m.m.c., mas agora o associam a percepção da equivalência. Além disso, as sugestões de correção que aparecem no pós-teste são corretas e mais alunos consideram as respostas incorretas como tal.

Por outro lado, na questão (VI) não aparecem mais referências à “falta de atenção do aluno” e percebe-se mais claramente, uma tentativa dos futuros professores em explicar o procedimento correto para o suposto aluno. Porém, continua aparecendo, em menor número, citações em que o futuro professor considera o procedimento de somar numeradores e denominadores como lógicos ou representantes de um raciocínio matemático correto.

7º GRUPO

(8) – Questão 8 do pré-teste.

(9) – Questão 9 do pré-teste.

(VII) – Questão 7 do pós-teste.

Observando os resultados das questões (8) e (9), anteriormente apresentados, pudemos notar que os futuros professores apresentavam sérias dificuldades em associar frações a figuras que não estivessem totalmente divididas, e se preocupavam somente com a questão das partes terem a mesma forma. Durante os trabalhos essas questões foram atacadas em vários momentos, e pudemos notar que não foi fácil para muitos, romper com o anteriormente estabelecido e passar a enxergar as partes das figuras como áreas e não somente como formas.

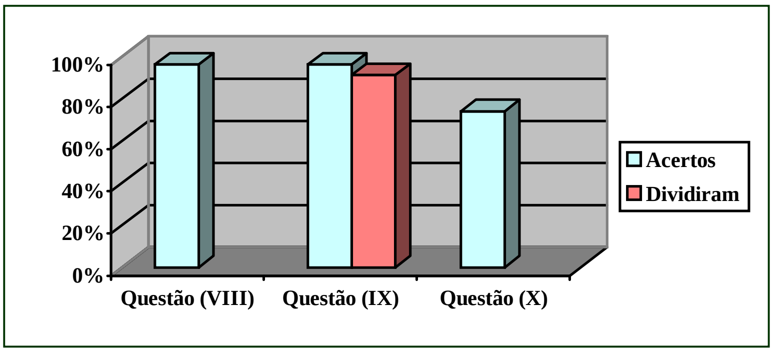
Apesar de na questão (VII) não termos colocado nenhuma figura com o traço de divisão implícito, notamos que todos relacionaram as partes pintadas das figuras apresentadas, à fração correta, mesmo com divisões em formas diferentes, e também relacionaram as partes de todas as figuras entre si, visto que todas eram congruentes e estavam divididas no mesmo número de partes. A nosso ver isto representa um avanço na interpretação da fração como uma parte de um inteiro no contínuo.

8º GRUPO

(VIII) – Questão 8 do pós-teste.

(IX) – Questão 9 do pós-teste.

(X) – Questão 10 do pós-teste.

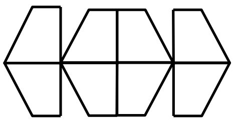


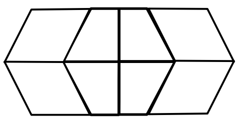
Na questão (VIII) pudemos observar que foram mais objetivos ao dar a resposta, pois não aparecem tantos procedimentos para a identificação pedida, como apareceu em uma questão semelhante da atividade 2.

Observando os resultados da questão (IX), pudemos notar que mesmo os alunos que apresentaram em vários momentos, a solução através de algoritmos, não o fazem aqui. Pelo contrário, a maioria trabalhou na figura e nenhum deles mostra a multiplicação como um recurso para a obtenção da área pedida.

Além disso, a maioria (91%) representam o retângulo sem todos os traços de divisão, o que mostra que não precisaram dividir totalmente a figura para associar a fração 1/6, a maioria dividiu em três partes somente uma das metades. Mostra também, uma mudança no comportamento desse grupo, pois a princípio (ver questão 8 do pré-teste) só associavam uma fração a uma figura que estivesse totalmente dividida e usando a dupla contagem das partes para faze-lo.

A questão (X) foge completamente aos tipos de exercícios normalmente utilizados para a concepção parte/todo e seus resultados mostram que a maioria conseguiu reconstituir a figura do inteiro, a partir de uma parte, mostrando sua criatividade através de seis soluções diferentes. A questão não era simples, pois o encaixe das partes exigia cuidado para a construção do inteiro. Alguns alunos apesar de imaginarem uma figura com as 8 partes, não perceberam que apareceriam alguns espaços em branco entre elas e juntaram uma parte na outra. Abaixo, podemos observar um exemplo desse tipo de erro, em que mostramos na primeira figura o que acreditamos pretendiam desenhar e a segunda mostra o que foi efetivamente desenhado.



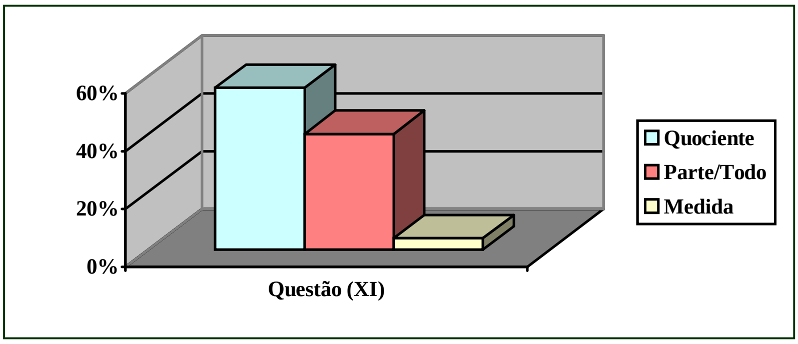


<u>9º GRUPO</u>

(XI) – Questão 11 do pós-teste.

Pudemos levantar 45 problemas diferentes distribuídos, conforme mostra o gráfico abaixo, em situações de quociente, parte/todo e medida.

Apesar de na questão (I) apenas um aluno falar da concepção de fração como quociente, na elaboração das situações essa concepção é a que mais aparece. Provavelmente por terem associado esses tipos de situações, às de divisão não a explicitando na questão (I).



Embora não possamos considerar todos os problemas apresentados como bem elaborados ou em condições de serem aplicados, esse resultado mostra o produto de todo um processo de elaboração de situações, que foi vivenciado durante todo o decorrer do trabalho.

E apresenta um avanço nesse sentido, pois de forma geral, melhorou a elaboração e a qualidade das situações, com o uso inclusive de pontos de vista absolutamente novos para eles, como as situações envolvendo distribuições impossíveis no discreto e as de reconstituição do inteiro.

4.0- CONCLUSÕES

Nosso trabalho teve como objetivo levar os futuros professores a perceberem as diferenças de tratamento entre as situações que envolvem o conceito de fração, nas concepções parte/todo, medida e quociente a fim de refletir e dar significado a este conhecimento.

Para isso optamos colocar os futuros professores em situações para as quais seus conhecimentos não fossem suficientes ou os levassem ao erro. Com isso pretendíamos provocar um desequilíbrio que proporcionasse as condições necessárias, para a eventual substituição desses conhecimentos por outros, através de novos pontos de vista sobre o assunto e do desenvolvimento de alguma criatividade pedagógica, conforme sugerem os trabalhos de Santos (1993) e Pavanello (1994).

Construímos então uma seqüência de atividades levando em conta as pesquisas de Behr (1983), Carpenter (1994), Lima (1i86), Campos (1989) e dos trabalhos de Kieren (1976, 1988), Marshall (1993) e Ciscar (1988), buscando através das concepções escolhidas, colocar o maior número possível de problemas de ensino/aprendizagem dos números fracionários levantados nesses trabalhos. Queríamos que os futuros professores refletissem sobre os principais pontos da introdução do número fracionário no ensino: trabalhar com as diversas concepções do conceito, ter o domínio necessário para controlar as concepções espontâneas de seus alunos, dar significado a essa aprendizagem e sentir-se também responsável por ela.

Durante a realização da seqüência, o contrato didático foi estabelecido, surgindo uma relação de respeito e amizade, entre os futuros professores e a pesquisadora. O trabalho foi visto por eles como um momento descontraído de aprendizagem e em nenhum momento notamos desânimo, pelo contrário, quando as dúvidas surgiam ouviam e questionavam atentamente. No desenrolar das atividades a atitude e a disposição dos alunos mantiveram-se as mesmas, tanto na PUC, quanto na própria escola, pois não notamos diferenças provocadas pela mudança de ambiente. Essa atitude não mudou, mesmo quando durante as correções surgiam discussões acaloradas, quase sempre, geradas pelo rompimento que propúnhamos com o conhecimento estabelecido.

No entanto, como já era previsto, muitos grupos não tiveram dúvidas na execução das questões, porque acreditavam, naquele momento, que estavam corretos e só foram perceber seus erros na correção das atividades. Além disso, foi interessante notar que soluções apresentadas nas fichas não foram explicitadas na discussão e questões que aparentemente estavam bem resolvidas nas fichas transformaram-se em polêmicas na correção, como por exemplo a questão oito da atividade quatro.

Com relação aos resultados, acreditávamos, num primeiro momento, que os futuros professores deveriam resolver todas as questões do pós-teste, para que mostrassem um domínio razoável do conteúdo trabalhado. Porém, pudemos perceber que para alguns o conhecimento adquirido anteriormente, apresentava raízes profundas, e necessitaria de um trabalho, mais longo para que essas raízes fossem removidas e pudessem crescer novamente com mais força e em outras direções.

Nesse sentido, consideramos os conhecimentos que os professores já possuíam como concepções espontâneas durante a realização, mas entendendo que muitas delas eram obstáculos já conhecidos por nós através dos estudos preliminares e por isso, pudemos classificá-los como de origem didática e epistemológica.

Com relação aos didáticos pudemos detectar o seguinte:

– Confirmando os resultados de Kieren (1988) e Campos (1989), a concepção de que para associar uma fração a uma figura, esta deveria estar, necessariamente, dividida em partes iguais, considerando a área e a forma dessas partes. Esta necessidade se estabelece pelo uso da dupla contagem das partes na identificação da fração. Por outro lado, esta concepção, conduz ao que chamamos de discretização do contínuo, pois a referência do inteiro inicial é substituída pelo número de partes conseguidas após a divisão.

– A dificuldade de perceber o desenho e a divisão de figuras como suportes para a solução de algumas situações, provocada pelo constante trabalho em cima de situações em que as figuras aparecem previamente divididas.

– A dificuldade de perceber as várias maneira com que se pode dividir mais do que um inteiro ao mesmo tempo.

– A falta de entendimento do conceito de medição, dificultando as medições com outras unidades não usuais.

– A tendência ao uso de algoritmos, em detrimento de um trabalho construtivo com a representação de figuras, principalmente em momentos de adição e divisão, como pudemos verificar no pré-teste.

– Os resultados de divisões normalmente apresentados em decimais, impedindo a percepção da representação desse quociente também através de frações. Ou seja, os resultados das divisões com resto, passam, normalmente no ensino, a ser representados somente por números decimais, sem que se faça uma relação daqueles quocientes também com os números fracionários. Isto leva o aluno, principalmente, em situações de distribuição a não relacionar o número decimal encontrado com a situação apresentada, como pudemos ver, principalmente nos resultados da atividade extra. O entendimento de 1/3 do chocolate ser diferente de 0,33... do chocolate. Aqui, insistimos na necessidade de um trabalho incessante da conversão de uma forma de escrita para a outra, para que o aluno perceba em que situações é mais conveniente o uso de uma forma ou outra.

Com relação aos obstáculos de origem epistemológica, pudemos notar com mais persistência dois:

– O conhecimento dos naturais levando a crença de que na adição de frações somar os numeradores e denominadores é uma "soma lógica" ou representa um "raciocínio matemático correto". O que mostra a interpretação da fração como dois naturais não relacionados e não como um número que representa uma quantidade, confirmando resultado encontrado por Hart (1981).

Embora não tenhamos feito uma atividade específica para a adição, em alguns momentos pudemos trabalhar com essa operação privilegiando o uso de figuras e não de algoritmos, em que muitos perceberam o significado do uso do m.m.c. para tal operação. Pela análise anterior, podemos perceber que muitos entenderam, mas um pequeno grupo ainda na última sessão pedia novas explicações porque só sabiam resolver através do m.m.c. Ainda que, o número de alunos que julgava, a soma pelo processo descrito acima como "lógica", diminuísse consideravelmente, ainda encontramos afirmações do tipo, *"a soma das frações está errada mas a "soma lógica" está correta".* Para esses alunos, o obstáculo persiste com outras características.

– O uso constante do nosso sistema métrico representado exclusivamente por números decimais, dificultando a percepção de resultados de medidas com números fracionários, levando-os a usar décimos para representar qualquer medida bem pequena, em qualquer unidade, sem que esta tenha sido dividida em dez partes. Isso nos leva a concluir que além de não conseguirem dar significado aos décimos, centésimos, ... que usam normalmente, não percebem o que é uma unidade de medida, qualquer que seja ela, pois tiveram muita dificuldade em graduar, não só os segmentos dados nas atividades, como a tira de papel que representava uma unidade de medida. Este resultado não previsto nos fez aplicar uma atividade extra visando o conceito de medição e unidade de medida, conforme Carpenter (1994).

Foi uma surpresa para a todos o processo de medição da mesa com uma unidade aleatória e a representação das divisões necessárias dessa unidade, para que a medição pudesse concretizar-se, através de frações. É preciso lembrar que o programa de quarta série, como vimos no capítulo dois, sugere que os professores façam exatamente esse tipo de trabalho com os seus alunos.

Nestas situações ficou bastante claro, que os alunos em busca de modelos já aprendidos, não param para refletir sobre o que cada situação apresentava, para perceber que tipo de abordagem era a mais conveniente. Isso ficou evidente, principalmente na atividade de medida, em que não havia a preocupação em observar realmente o que a questão pedia, e muitos colocavam respostas que refletiam a falta de domínio no assunto e de reflexão, como vimos no pré-teste onde o segmento que media 1/3 e estava dividido em 3 partes iguais, tinham essas partes associadas às frações 1/1, 1/2 e 1/3, com os denominadores seguindo a ordem dos naturais.

Muito interessante foi a aplicação da atividade extra-classe, em que alguns já esboçam uma tentativa de entender o processo usado pela criança. Os resultados confirmaram as nossas previsões de que as crianças têm condições para aprender tal conteúdo, desde que se trabalhe com a concepção quociente e se aproveite as suas concepções espontâneas. Aqui, os futuros professores puderam notar que as crianças mais novas, usando principalmente figuras, respondem as questões, enquanto as outras na tentativa de usar algoritmos já aprendidos, na maioria das vezes, não chegam à solução do problema. Este resultado surpreendeu os mesmos, pois não conseguiam entender como que as crianças que tinham mais estudo também erravam mais.

Além disso, não aparece no pós-teste (questão 6) comentários do tipo: “o aluno deveria prestar mais atenção para aprender”. Este argumento pedagógico, usado por seis futuros professores no pré-teste, desaparece no final do trabalho, dando lugar a comentários e correções um pouco mais consistentes.

No decorrer da seqüência, em diferentes momentos foi solicitado a elaboração de atividades com o intuito de avaliar a evolução da aprendizagem do conceito envolvido. Pudemos constatar na produção escrita, uma evolução na criatividade da apresentação das atividades por eles elaboradas. Entendemos que atividades deste tipo deveriam estar presentes no cotidiano da formação desse professor, assim como a explicitação dos objetivos para cada atividade.

Um ponto positivo e que reforça a nossa opção pelo trabalho com as várias concepções, apresentando novos pontos de vista sobre os números fracionários na formação do professor, reside no fato de que a maioria aceitou a proposta e não resistiu a nenhuma discussão, o que os levou a uma mudança de comportamento para quase todas as dificuldades apresentadas, com exceção das já citadas.

Gostaríamos também de ressaltar que durante os trabalhos, principalmente nos de comparação, muitos falaram em proporcionalidade e apareceu a regra de três como processo de resolução de algumas situações, que nos levou a reforçar a necessidade de um trabalho específico, num segundo momento, com a concepção de razão, desenvolvendo o raciocínio proporcional, e os preparando para trabalhar melhor com essa concepção que aparece espontaneamente em algumas crianças, como pudemos ver nos nossos estudos preliminares, quando interpretam as frações a partir da leitura parte/parte.

Além disso, o fato de apresentarem tão enfaticamente o uso do m.m.c., nos leva a sugerir também um trabalho específico com as quatro operações, em que se desenvolvesse o conteúdo de tais operações com os números fracionários através de outros pontos de vista, que não os de algoritmos prontos. Assim sugerimos que no terceiro ano do magistério sejam trabalhadas as atividades de introdução ao conceito de número fracionário aqui apresentadas, com as sugestões descritas acima, e no quarto ano o trabalho poderia ser retomado, consolidando o conteúdo trabalhado no ano anterior e as abordagens de razão e operador sendo acrescentadas, bem como o trabalho com as operações. O que levaria os futuros professores a desenvolverem em sua formação, uma visão global com os números fracionários nas séries iniciais.

Gostaríamos de observar que entendemos que o estudo ideal para introdução do conceito de fração deveria ser iniciado pelas concepções: quociente, parte/todo e medida, nesta ordem. A inversão aqui apresentada deveu-se ao fato da necessidade atual de rompermos com as concepções errôneas de parte/todo encontradas nesses futuros professores.

Podemos concluir então que as questões inicialmente colocadas foram, em parte, respondidas satisfatoriamente, e que é possível fazer um trabalho mais construtivo com várias concepções na formação dos professores das séries iniciais, reforçando a necessidade de um trabalho de formação a partir de novos enfoques didáticos e pedagógicos, para o conceito de número fracionário. Com isso acreditamos que possamos mudar, a longo prazo, os resultados apresentados no capítulo um, principalmente por Campos (1989) na avaliação dos alunos, consequentemente teremos alunos preparados, não só para desenvolver mais matemática pelo entendimento, como também para entender mundo que os rodeia.

Com relação a nossa seqüência, acreditamos que poderíamos ter criado algumas atividades que fossem resolvidas pelos futuros professores em casa, entre uma sessão e outra, com o objetivo de propiciar mais alguns momentos de reflexão e de investimento nos novos conhecimentos adquiridos.

Esperamos que os resultados e as conclusões desta pesquisa contribuam efetivamente para o desenvolvimento do ensino de frações, tornando-o significativo, não só para o professor, como também para a criança. Esperamos ter contribuído também para a prática pedagógica do professor, independente do conteúdo abordado, levando-o a refletir sobre as concepções espontâneas de seus alunos, inclusive seus erros, permitindo várias soluções para um mesmo problema e não a repetição de modelos pré-determinados para cada tipo de situação. Naturalmente espera-se que com a prática e o amadurecimento do professor, sua contribuição pessoal e dos alunos envolvidos tragam contribuições importantes para o processo de ensino/aprendizagem dos números fracionários.

Acreditamos, como já colocamos anteriormente, que o ensino de frações seja necessário, não só para o desenvolvimento de mais matemática, Clements (1988), mas também porque os esquemas de pensamentos utilizados na aprendizagem dos números fracionários, são diferentes dos necessários para o trabalho com os números naturais, provocados pela própria natureza desses números, provocando assim um desenvolvimento cognitivo que o leva a ter novos recursos para resoluções de outros tipos de situações, Behr (1983).

Para finalizar gostaríamos de citar a opinião de um dos futuros professores sobre o trabalho realizado, que nos estimula a continuar tentando o melhor caminho para o ensino:

“Aprender e ensinar frações pode ser muito simples, desde que não façamos algo mecânico e sim algo pensado.”

BIBLIOGRAFIA

O símbolo RDM refere-se à revista Recherches en Didactique des Mathématiques.

AABOE, Asger, *"Episódios da História Antiga da Matemática"*, Coleção: Fundamentos da Matemática Elementar, SBM, 1984.

ALMOULOUD, Saddo Ag; *"Didactique des Mathématiques - Concepts Didactiques et Problèmes de Méthodologie de Recherche"*, Caderno de Educação Matemática, vol. 1, PROEM, PUC/SP, 1994.

ALPHONSE, Munyazikwiye; "*Problèmes Didactiques Liés aux Écritures des Nombres"*, RDM, vol. 15, nº 2, pp. 31-62, 1995.

ANDRADE, Mariana e MORAES, Lídia Maria; *"Mundo Mágico"*, Exemplar do Professor, Editora Ática, São Paulo, 1992.

ARTIGUE, Michèle; *"Epistemologie et Didactique"*, RDM, vol 9, nº 3, pp. 281- 308, 1988

BEHR, M. J., LESH, R., POST T. R e SILVER, E. A.; *"Rational-Number Concepts"*, em "Acquisicion of Mathematics Concepts and Processes", pp. 91-128, R. Lesh e M. Landau Editions, New York, 1983.

BELLUCCI, Maria Eugênia e CAVALCANTE, Luiz Gonzaga; *"Integrando o Aprender"*, Exemplar do Professor, Editora Scipione, São Paulo, 1991.

BENOIT, Paul; CHEMLA, Karine e RITTER, Jim (coord.); *"Histoire de Fractions, Fractions d'Histoire"*, Birkhäuser Verlag; Vasel, Boston, Berlin, 1992.

BOYER, Carl B.; *"História da Matemática"*, EDUSP, 1974.

BRUNER, Jerome S.; *"O Processo da Educação"*, Coleção: Atualidades Pedagógicas, volume 126, Companhia Editora Nacional, 1987.

BROUSSEAU, Guy; *"Les Obstacles Epistemologiques et Les Problèmes en Mathématiques"*, RDM, vol 4, nº 2, pp. 164-198, 1983.

CAMPOS, Tânia Maria M., JAHN, A. P., LEME DA SILVA, M. C. e FERREIRA DA SILVA, M. J.; *"Lógica das Equivalências"*, PUC/SP, Relatório de Pesquisa não publicado, 1995.

CARPENTER, Thomas P. e outros; *“Teaching and Learning Rational Numbers”*, Wisconsin Center for Education Research, School of Education, University of Wisconsin – Madison, dezembro de 1994, a aparecer.

CARVALHO, Dione Lucchesi de; *"A Concepção de Matemática dos Professores também se Transforma"*, Tese de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, 1989.

CHEVALARD, Yves e JOSHUA, Marie-Albert; *"Un Exemple de La Transposition Didactique: La notion de Distance"*, RDM, vol. 3, nº 1, 1982.

CISCAR, Salvador Linares e GARCÍA, Maria Victoria Sanchez (coord.); *"Fracciones: La Relacion Parte/Todo"*, Editorial Sintesis, Madrid, 1988.

CLEMENTS, M. A. e DELCAMPO, G.; *"How Natural is Fraction Knowledge?"*, Documento apresentado no 6º Congresso Internacional de Educação Matemática, Budapeste, 1988.

DAHAM, Dalmedico e outros; *"Une Histoire des Mathématiques - Routes et Dédales"*, Éditions du Seuil, 1986.

DAVIS, Harold T.; *"Computação"*, coleção "Tópicos de História da Matemática Para Uso em Sala de Aula", Atual Editora, São Paulo, 1992.

DIENES, Zoltan P.; *"Frações"*, E.P.U. Editora, São Paulo, 1975.

DOUADY, Régine; *"Ingénierie Didactique"*, RDM, vol. 1, nº 1, 1988.

DOUADY, Régine; *"De La Didactique des Mathématiques a L'Heure Actuelle"*, Cahier de Didactique des Mathématiques, nº 6, IREM, Université Paris VII.

FIORENTINI, Dario; *"Alguns Modos de Ver e Conceber o Ensino da Matemática no Brasil"*, Revista Zetetiké, ano 3, nº 4, novembro de 1995.

FRAGA, Maria Lúcia; *"A Matemática na Escola Primária: Uma Observação do Cotidiano"*, Editora EPU, 1988.

GUNDLASH, Bernard H.; *"Números e Numerais"*, Coleção: Tópicos da História da Matemática, Atual Editora, 1992.

HART, K.; *"Children's Understanding of Mathematics"*, Chapter 5, pp. 66-81, London, John Murray, 1981.

HENRY, Michel; *"Didactique des Mathématiques"*, Besançon, mars 1991.

IFRAH, George; *"Os Números: A História de Uma Grande Invenção"*, Editora Globo, 1989.

KIEREN, Thomas E.; *"Number and Measurement"*, Em Mathemathical, Cognitive and Instructional Foundations of Rational Numbers, pp. 101-144, Columbus, OH:ERIC/SMEAC, 1976.

Kieren, Thomas E.; *"Personal Knowledge of Rational Numbers: Its Intuitive and Formal Development"*, Em "Number Concepts and Operations in the Middle Grades, J. Hiebert & M. Behr (Eds.), pp. 162-181, 1988.

KINDT, Martin; *"Enfoque Realista de la Educacion Matemática"* em "Aspectos Didácticos de Matemáticas 4, Instituto de Ciências de La Educacion, Zaragoza, 1993.

LIMA, J. M. F.; *"Iniciação ao Conceito e o Desenvolvimento da Conservação de Quantidades"*, em "Aprender Pensando", pp. 81-126, Editora Vozes, 1986.

MAROTE, D'Olim; *"Aquarela"*, Exemplar do Professor, Editora Ática, São Paulo, 1992.

MARSHALL, Sandra P.; *"Assessment of Rational Number Understanding: A Schema-Based Approach"*, em Rational Numbers: Na Integration of Research, Lawrence Erlbaum Associates Publishers, Hillsdale, New Jersey, 1993.

NIVEN, Ivan; *"Números: Racionais e Irracionais"*, Coleção Fundamentos da Matemática Elementar, Sociedade Brasileira de Matemática, 1984/.

NUNES, Terezinha e BRYANT, Peter; *"Children doing Mathematics"*, Blackwell Publishers, Londres, 1996.

NUNES, Terezinha; *"O Desenvolvimento de Conceitos Matemáticos"*, Curso ministrado na PUC/SP, Agosto de 1993.

PASSOS, Lucina; FONSECA, Albani e CHAVES, Marta; *"Aprender com Alegria"*, Exemplar do Professor, Editora Scipione, São Paulo, 1991.

PASSOS, Lucina; FONSECA, Albani e CHAVES, Marta; *"Alegria de Saber Matemática"*, Exemplar do Professor, Editora Scipione, São Paulo, 1991.

PAVANELLO, Regina Maria; *"Educação Matemática e Criatividade"*, Revista da SBEM, ano II, nº 3, pp. 5-11, 1994.

PERRIN-GLORIAN, Marie-Jeanne; *"Representation des Fractions et des Nombres Decimaux Chez des Eleves de CM_2 et du College"*, Petit X, nº 10, pp. 5-29, 1986.

SANTOS, Vania Maria Pereira dos; *"Matemática - Conhecimento, Concepções e Consciência Metacognitiva de Professores em Formação e em Exercício"*, Anais do 1º Seminário Internacional de Educação do Rio de Janeiro, UFRJ, 1993.

SANTOS, Maria da Glória Mariano; *“Texto e Contexto em Matemática”*; Exemplar do Professor, Editora do Brasil, São Paulo, 1987.

STRUIK, Dirk J.; *"História Concisa da Matemática"*, Editora Gradiva, Lisboa, Abril 1992.

STREEFLAND, Leen; *"Fractions in Realistic Mathematics Education"*, Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 1991.

THEREZA, Ana; *“Crescer em Matemática”*, Editora FTD, São Paulo, 1990.

VERA, Francisco; *"Breve História de La Matemática"*, Editorial Losada S.A., Buenos Aires, 1946.

VERGNAUD, G.; *"Question de Represéntation et de Formulation dans la Résolution de Problemes Mathématiques"*, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, pp. 33-55, IREM de Strasbourg, 1988.

VERGNAUD, G., *"Conceitos e Esquemas numa Teoria Operatória da Representação"*, Revista Psychologie Française, nº 30 - 3/4, Novembro 1985, pp. 245-252, tradução de Anna Franchi e Dione L. Carvalho.

VERGNAUD, G., *"Teoria dos Campos Conceituais"*, Anais do 1º Seminário Internacional de Educação do Rio de Janeiro, UFRJ, 1993.

(ANEXO 01)

PUC/SP

Programa de Estudos Pós-Graduados no Ensino da Matemática

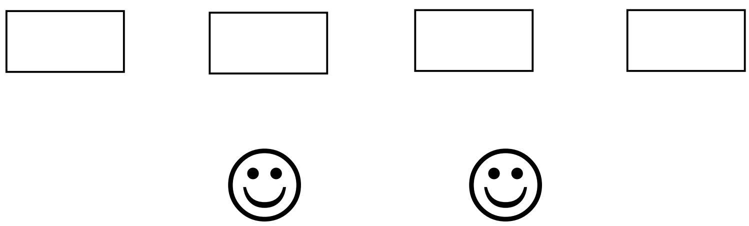
TESTE - FRAÇÕES

NOME: ____ IDADE: ________

CLASSE: ____

1) Divida os quatro chocolates entre as duas crianças.

Quanto cada criança vai receber?

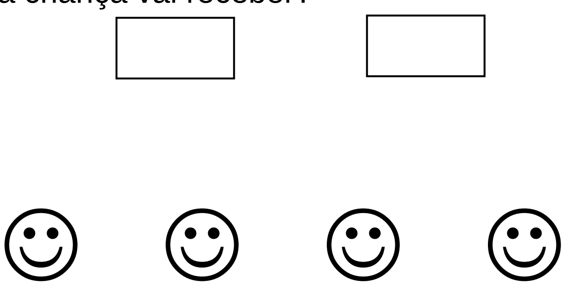


R. : ____

____

2) Divida os dois chocolates entre as quatro crianças.

Quanto cada criança vai receber?

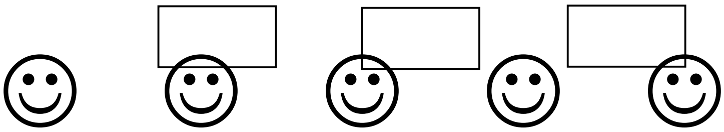


R. : ____

____

3) Divida os três chocolates entre as cinco crianças.

Quanto cada criança vai receber?



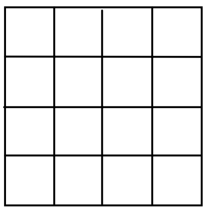
R. : ____

____

4) O quadrado está dividido em 16 partes iguais.

Pinte 12 dessas partes.

Você pintou que fração do quadrado?



R. : ____

____

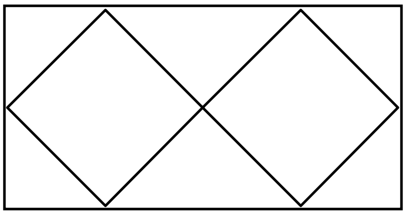
5) Pinte na figura abaixo:

$\frac{1}{3}$ de verde

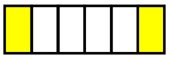
$\frac{7}{16}$ de azul

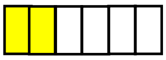
$\frac{5}{16}$ de amarelo

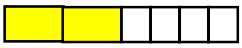
$\frac{3}{16}$ de vermelho

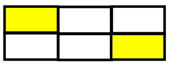


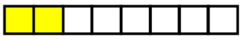
6) Quais dos desenhos abaixo podem ser representados pela fração $\frac{2}{6}$?

a) 

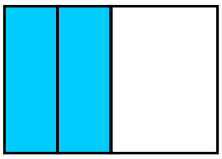
b) 

c) 

d) 

e) 

7) A parte pintada do desenho pode ser representada por quais frações?



a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{2}{1}$ d) $\frac{2}{3}$

e) $\frac{2}{4}$ f) $\frac{1}{3}$ g) nenhuma da alternativas

8) Complete:

a) $\frac{1}{6}+\frac{2}{6}=$

b) $\frac{1}{5}+\frac{1}{8}=$

c) $\frac{27}{35}-\frac{6}{35}=$

d) $\frac{3}{4}-\frac{3}{9}=$

9) Um sitiante fez uma plantação em parte de seu terreno retangular do seguinte modo:

- a metade do terreno foi plantada com feijão,
- na metade da outra metade plantou milho,
- o quarto restante foi dividido em 2 partes: a metade para o pomar e metade para construir a casa.

a) Faça uma figura representando a distribuição feita pelo sitiante em seu terreno.

b) Que tipo de plantação ocupa maior parte do terreno?

E que tipo ocupa menor parte?

c) O que é maior: a região deixada para a construção da casa ou para o pomar?

d) Represente com números:

- a parte do terreno plantada com feijão
- a parte do terreno plantada com milho
- a parte onde fica o pomar.

10) A capacidade de $\frac{3}{5}$ de um recipiente é 36 litros.

A capacidade de $\frac{1}{5}$ do recipiente é _________ litros.

O recipiente tem a capacidade de ___________ litros.

(ANEXO 02)

Nome: ____

Escola: ____

1) Qual a rede de ensino que trabalha?

( ) Municipal ( ) Estadual ( ) Particular

2) Qual é a série em que está trabalhando neste ano?

____

3) Em que séries você já trabalhou?

____

____

4) Há quantos anos você está formado? Há quantos anos você leciona?

____

5) Qual é a sua formação?

____

6) Você segue ou consulta o guia curricular?

____

7) Você adota algum livro didático? Qual? Por quê?

____

____

____

____

____

8) Como você introduziria o ensino de frações? Em que série?

____

____

____

____

____

____

9) Você usa algum tipo de material para esse ensino? Qual? Por quê?

10) Como você introduz a equivalência de frações?

11) Você relaciona a fração com alguma operação? Qual? Que tipo de relação? Se não, por quê?

12) Você usa fração em alguma situação do dia-a-dia? Se sim, quais e por quê? Se não por quê?

13) Aponte três dificuldades que freqüentemente você encontra nos seus alunos, quando ensina fração.

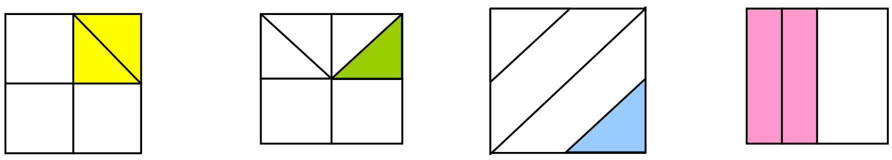
14) O que você proporia para sanar essas dificuldades?

15) Um aluno deu as respostas abaixo para quatro contas envolvendo frações:

a) $\frac{1}{6}+\frac{2}{6}=\frac{3}{6}$ b) $\frac{1}{5}+\frac{1}{8}=\frac{2}{13}$ c) $\frac{27}{35}-\frac{6}{35}=\frac{21}{0}$ d) $\frac{3}{4}-\frac{3}{9}=\frac{0}{5}$

O que você lhe diria depois da correção?

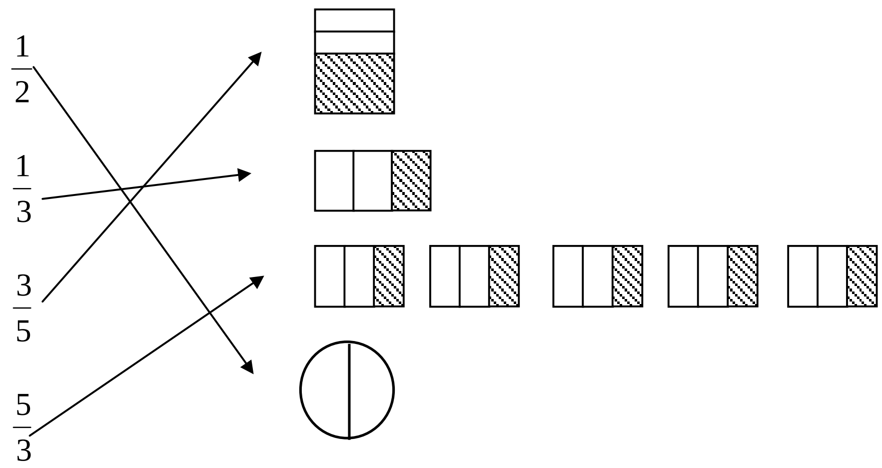
16) As figuras abaixo foram apresentadas para dois alunos que as identificaram com as frações que estão abaixo. Quais respostas você consideraria como certas e como explicaria essas respostas para os alunos.



Aluno (1)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	não é fração	$\frac{1}{2}$
Aluno (2)	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{1}$

17) Foi dado para um aluno quatro frações para que ele relacionasse com algumas figuras. O resultado foi o seguinte:

Frações Representações



O que você comentaria com ele à respeito do seu trabalho?

(ANEXO 03)

PUC/SP
Programa de Estudos Pós-Graduados no Ensino da Matemática

FRAÇÕES

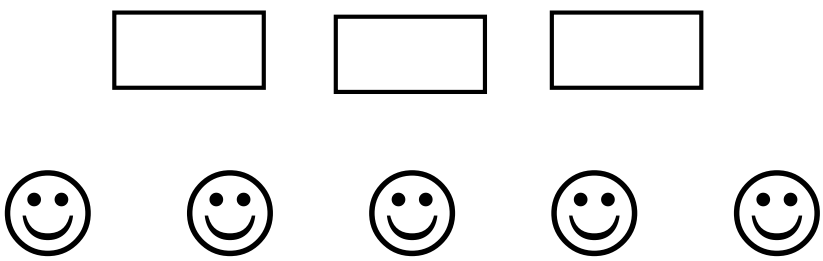
NOME: ____ - 1997

PRÉ-TESTE

1) Que boa experiência você teve durante sua aprendizagem de frações?

2) Como você se sai quando trabalha com frações?

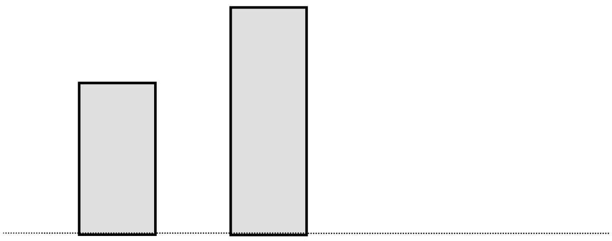
3) Divida os três chocolates entre as cinco crianças.
Quanto cada criança vai receber?



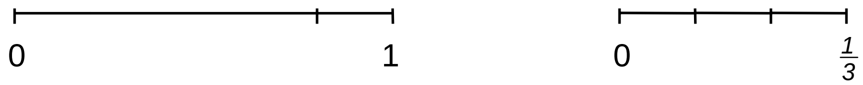
R.: ____

4) Se dividirmos 4 tortas entre três crianças, eu fração das tortas cada criança vai receber? Que sentença matemática posso usar para representar essa situação?

5) Que fração representa a relação entre a altura do retângulo A e a altura do retângulo B?



6) Indique os números racionais que correspondem aos pontos marcados nos segmentos abaixo.



7) Um aluno deu as respostas abaixo para quatro contas envolvendo frações:

a) $\frac{1}{6}+\frac{2}{6}=\frac{3}{6}$ b) $\frac{1}{5}+\frac{1}{8}=\frac{2}{13}$

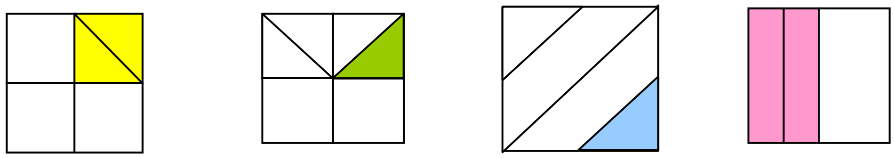
b) c) $\frac{27}{35}-\frac{6}{35}=\frac{21}{0}$ d) $\frac{3}{4}-\frac{3}{9}=\frac{0}{5}$

O que você lhe diria depois da correção?

____

____

8) As figuras abaixo foram apresentadas para dois alunos que as identificaram com as frações conforme segue. Quais respostas você consideraria como certas e como explicaria essas respostas para os alunos .



Aluno (1)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	não é fração	$\frac{1}{2}$
Aluno (2)	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{1}$

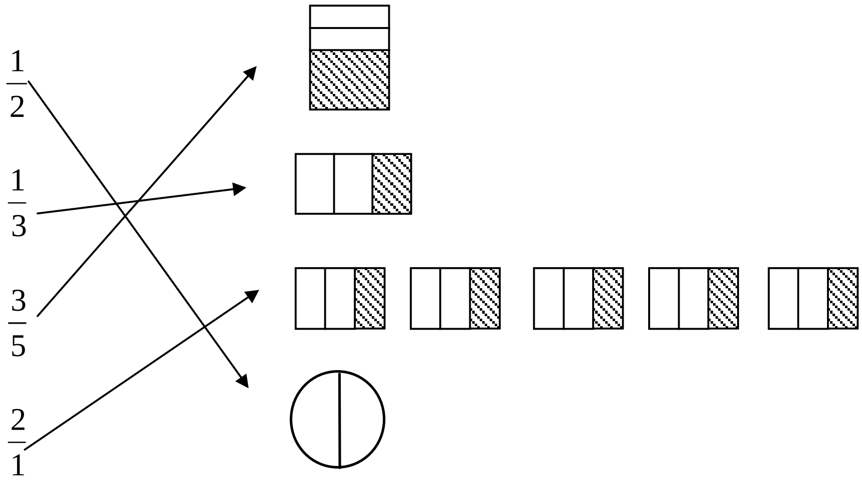
____

____

____

9) Foi dado para um aluno quatro frações para que ele relacionasse com algumas figuras. O resultado foi o seguinte:

Frações — Representações



O que você comentaria com ele a respeito do seu trabalho?

____

____

PUC/SP
Programa de Estudos Pós-Graduados no Ensino da Matemática

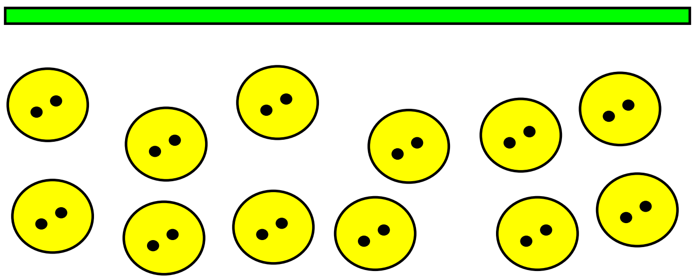
FRAÇÕES

NOME: ____ - 1997

ATIVIDADE 1

Quantificar significa determinar a quantidade ou o valor de alguma coisa. Essa quantidade pode ser expressa pelo número de objetos de um conjunto ou pela medida que possui.

1) As figuras abaixo estão representando um pedaço de fita e alguns botões. Quantifique-os.



2) O que você fez para associar a cada uma dessas figuras uma quantidade?

____

____

____

3) Distribua igualmente a fita e os botões entre duas costureiras. Quanto cada uma vai receber?

____

____

4) Apareceram mais duas costureiras. Divida de novo em dois o que estava com as outras. Quanto cada uma vai receber?

____

____

5) Se aparecessem mais quatro costureiras e as costureiras anteriores tivessem que dividir em dois os que elas receberam. Seria possível redistribuir a fita e os botões igualmente entre elas? Justifique a sua resposta.

____

____

____

____

____

____

6) Que diferenças você notou nesses dois tipos de quantidades?

____

____

____

____

____

____

____

____

7) Dê dois exemplos com outras situações que envolvam esses dois tipos de quantidades.

____

____

____

____

____

____

(ANEXO 05)

PUC/SP
Programa de Estudos Pós-Graduados no Ensino da Matemática

FRAÇÕES

NOME: ____ - 1997

ATIVIDADE 2

1) Vocês receberam 3 folhas de papel sulfite. Cada uma irá pegar uma das folhas e irá fazer a seguinte divisão:

A primeira irá: dobrar a folha na direção das diagonais e depois irá cortar nessas diagonais.

A segunda irá dividir a folha ao meio no sentido do comprimento e depois irá dividir uma das partes na diagonal e a outra parte ao meio no sentido da largura.

A terceira irá dividir a folha ao meio no sentido da largura e depois irá dividir uma das partes ao meio no sentido da largura e a outra ao meio no sentido do comprimento.

a) Posso falar que dividimos cada retângulo em quatro partes iguais? Por quê?

____

____

b) Posso associar a cada uma das partes uma fração? Qual? _____________

____

c) Compare as partes dos três retângulos e diga que relação existe entre elas.

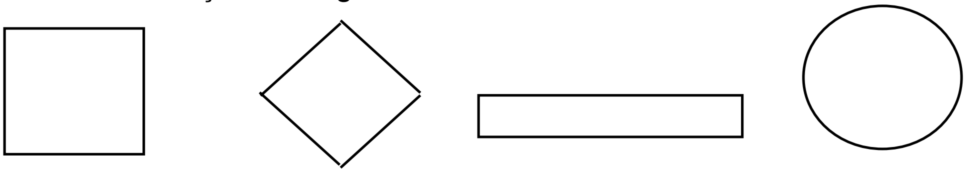
____

____

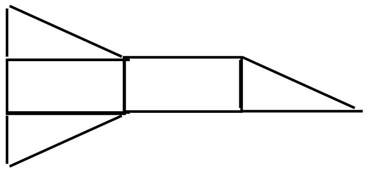
____

d) Represente no verso da folha os três retângulos divididos.

2) Pinte dois terços das figuras abaixo.

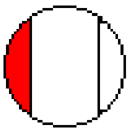


3) Colorir quatro sétimos da figura:

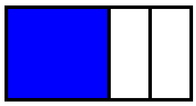


4) Quais desenhos têm 1/3 pintado?

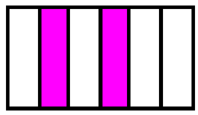
a)



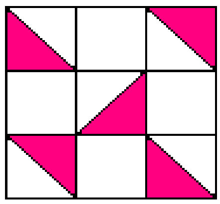
b)

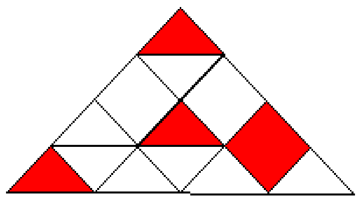


c)

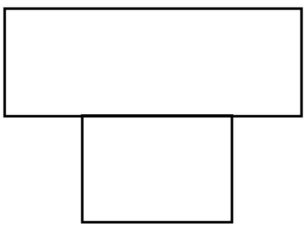


5) Qual fração da figura está pintada?

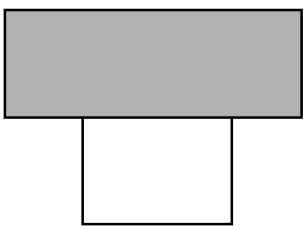




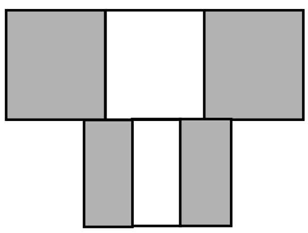
6) Um professor pediu para seus alunos marcarem 2/3 da seguinte figura:



Um desenhou



O outro desenhou



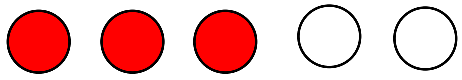
O primeiro aluno está correto? ____

O segundo aluno está correto? ____

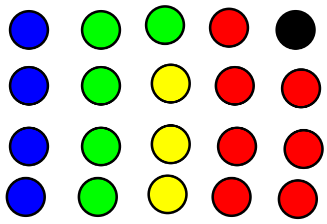
Justifique sua resposta. ____

____

7) Que fração das bolinhas é vermelha?

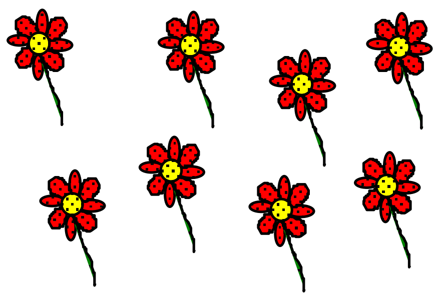


8) Se temos um conjunto de fichas coloridas como representado abaixo, indique a fração das fichas de acordo com as cores.



9) Em um saco, há 20 bolinhas de gude que devem ser divididas igualmente entre cinco crianças. Represente a quantidade que cada criança vai receber de duas maneiras diferentes, como fração.

10) Circule três quartos das flores.



11) Circule um terço das flores.

12) Desenhe um conjunto de maçãs do qual dois quintos são vermelhas e o resto são verdes.

13) Ilustre as frações 2/3 e 1/3 desenhando uma série de bolas que mostre que 2/3 das bolas são pretas e um terço das bolas são vermelhas.

14) Aumente o conjunto anterior sem mudar a relação.

15) Agora, elabore você duas situações problema, uma trabalhando com a fração envolvendo quantidades contínuas e a outra com quantidades discretas.

____

____

____

____

____

____

____

(ANEXO 06)

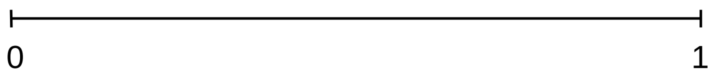
FRAÇÕES

NOME: ____ - 1997

ATIVIDADE 3

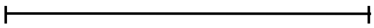
PARTE 1

1) Divida o segmento dado em cinco partes iguais, identifique cada uma das partes e diga que medida tem cada parte do segmento.

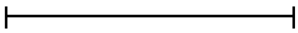


2) Dê as medidas dos três segmentos abaixo, usando a régua que você recebeu e responda quantas polegadas tem cada segmento?

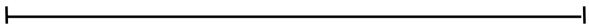
a)



b)



c)

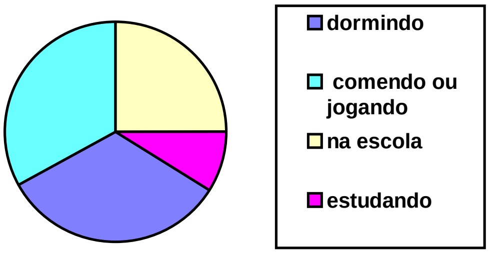


3) Um "pé" é uma unidade de medida que eqüivale a 12 polegadas. Você recebeu uma outra régua que mede um pé.

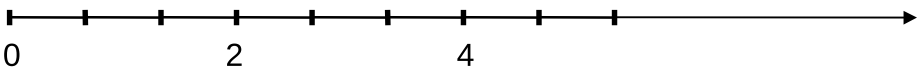
Dê a medida dos segmentos anteriores em pé.

4) Usando o quadrado de cartão que você recebeu, como unidade de medida dê o comprimento, a largura e a área da folha amarela. Represente a folha com as medidas encontradas.

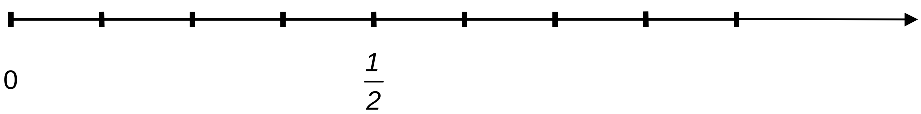
5) O gráfico abaixo mostra o tempo gasto por uma criança em algumas atividades diárias. Quantas horas ela gasta em cada uma dessas atividades? E que fração do dia representam as partes pintadas do gráfico?

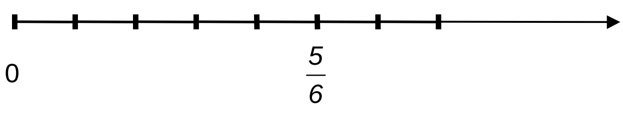


6) Identifique na reta abaixo o ponto 1/2 e a fração que representa os pontos marcados.



7) Associe uma fração à cada ponto:

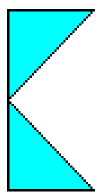




8) Represente num segmento as medidas 2/4 e 3/4 e dê uma medida que esteja entre elas.

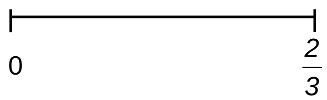
PARTE 2

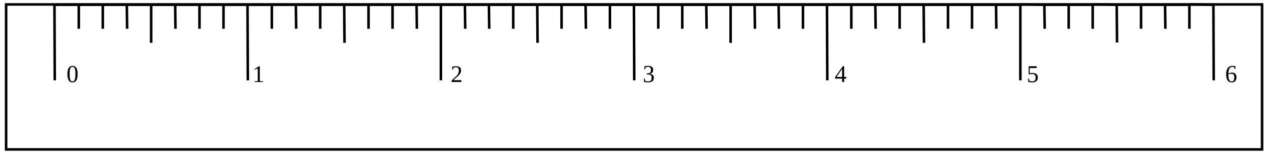
9) Se a figura abaixo é um terço do inteiro, represente o inteiro.



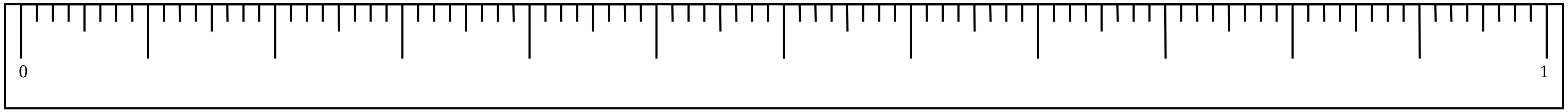
10) Se 2/7 das bolinhas de Sérgio são brancas e ele tem 12 bolinhas brancas, qual o total de bolinhas que Sérgio possui?

11) Desenhe a unidade a partir do segmento abaixo.





Régua 1 - Tamanho original



Régua 2 - Tamanho Reduzido - No original tinha 12 polegadas

Régua 1 - Tamanho reduzido - No original tinha 30 centímetros

FRAÇÕES

NOME: ____ - 1997

ATIVIDADE 4

1) Temos quatro barras de chocolate para reparti-las igualmente entre cinco crianças. Qual a fração que representa a cota de chocolate de cada criança?

2) 24 crianças de uma classe foram comemorar o aniversário de uma delas numa pizzaria e a professora já havia encomendado 18 pizzas para a comemoração.

Como poderia ser feita a distribuição das crianças nas mesas em grupos iguais e como poderiam ser distribuídas as pizzas de modo que cada grupo receba a mesma cota de pizza?

Encontre pelo menos três soluções.

3) Que fração da pizza cada criança vai receber em cada organização de grupo?

4) A organização dos grupos alterou o resultado?

5) Uma professora deu o seguinte problema para a classe:

"Se distribuirmos duas tortas de tal forma que cada criança receba 2/5 de uma torta, para quantas crianças podemos distribuir as tortas?"

Um aluno respondeu imediatamente: - É claro que serão cinco crianças.

Como você acha que ele raciocinou para chegar a essa resposta?

6) Se distribuirmos igualmente 5 chocolates para um grupo de 8 crianças e 5 chocolates para um outro grupo de 6 crianças. As crianças de que grupo vão comer mais chocolate?

7) Se distribuirmos igualmente 3 chocolates para um grupo de 5 crianças e 9 chocolates para um outro grupo de 15 crianças. Qual é o grupo em que as crianças vão comer mais?

8) Se distribuirmos igualmente 3 tortas entre 4 crianças e 4 tortas iguais às primeiras entre outras 5 crianças, quem comerá mais?

9) Distribuir 9 bolinhos entre quatro crianças. Qual a fração que representa a cota de bolinhos de cada criança?

10) Quando você pensa nas situações desta ficha e nas situações da ficha anterior, que diferenças você observa entre elas?

11) Crie uma situação que envolva a concepção de fração vista nesta ficha.

(ANEXO 08)

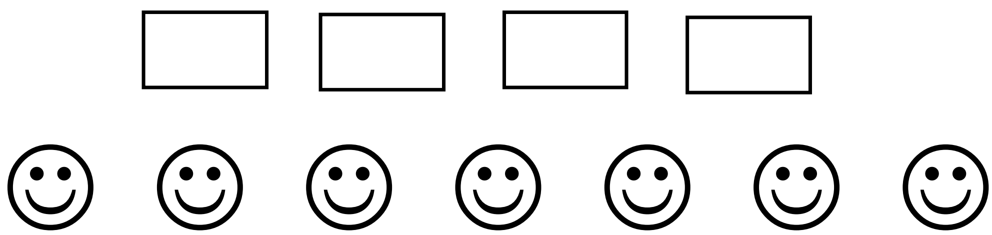
PUC/SP
Programa de Estudos Pós-Graduados no Ensino da Matemática

PÓS-TESTE - FRAÇÕES

NOME: ____ - 1997

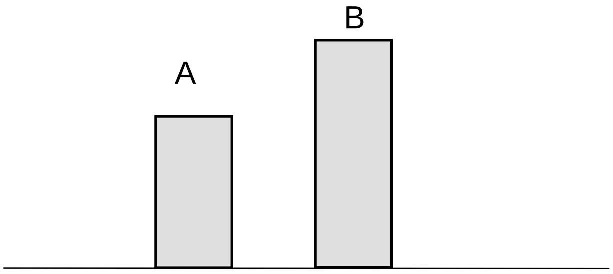
1) Que boa experiência você teve durante esta seqüência de trabalho com frações?

2) Divida as quatro tortas entre as sete crianças.
Quanto cada criança vai receber?

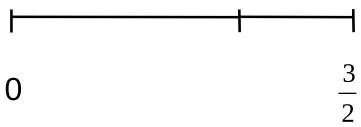


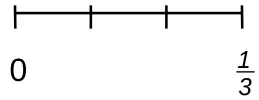
3) Se dividirmos 8 tortas entre seis crianças, que fração das tortas cada criança vai receber? Que sentença matemática posso usar para representar essa situação?

4) Que fração representa a relação entre a altura do retângulo A e a altura do retângulo B?



5) Indique os números racionais que correspondem aos pontos marcados nos segmentos abaixo.





6) Um aluno deu as respostas abaixo para quatro contas envolvendo frações:

a) $\frac{1}{5}+\frac{1}{8}=\frac{2}{13}$

b) $\frac{3}{4}-\frac{3}{9}=\frac{0}{5}$

O que você lhe diria depois da correção?

____

____

____

____

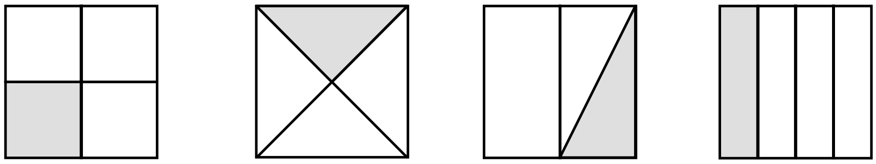
____

____

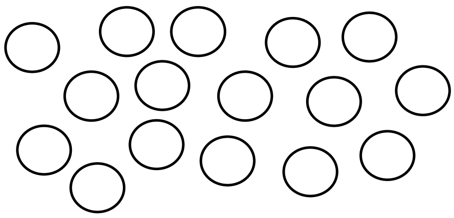
____

____

7) O que você pode falar sobre as partes pintadas das figuras abaixo?

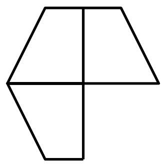


8) Circule $\frac{3}{4}$ das bolinhas.



9) Pinte 1/3 da metade do retângulo abaixo. Que fração do retângulo você pintou?

10) Se a figura abaixo é 3/8 da figura, qual é a figura?



11) Crie duas situações-problema envolvendo a fração 3/5.