Mário Servelli Rosa

NÚMEROS COMPLEXOS

“Uma Abordagem Histórica Para Aquisição do Conceito”

Mestrado: ENSINO DA MATEMÁTICA

PUC - SP
1998

Mário Servelli Rosa

NÚMEROS COMPLEXOS

“Uma Abordagem Histórica Para Aquisição do Conceito”

Mestrado em EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Dissertação apresentada como exigência parcial, para obtenção do título de MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, à Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, sob a orientação do Professor Doutor Saddo AG ALMOULOUD e com co-orientação do Professor Doutor Benedito Antonio da Silva.

PUC - SP
1998

BANCA EXAMINADORA

____

____

____

RESUMO

O objetivo deste trabalho é criar uma seqüência didática, ou seja, propor uma série de atividades, para que os alunos entrem em contato com os números complexos da maneira como eles surgiram na História, e também para que operem com esses números.

Essa maneira de introduzir os números complexos surgiu, quando analisando alguns livros didáticos, observamos que a maioria, propunha uma equação do 2º grau para ser resolvida, como por exemplo $x^2 + 1 = 0$, e davam como solução um número i tal que $i^2 = -1$. Essa maneira de abordar esses números dá - nos a impressão de que na Matemática, tudo surge da inspiração de algumas pessoas que “inventam” os conceitos. Além disso, as equações do segundo grau não motivaram o surgimento dos complexos, uma vez que quando a resolução de uma equação do segundo grau, proveniente de um problema, apresentava um discriminante negativo, isso apenas indicava que tal problema não tinha solução.

Nesta seqüência didática que criamos, pretendemos que os alunos sintam a necessidade da extração da raiz quadrada de um número negativo, e que operando com esses números, eles cheguem a respostas reais de problemas concretos.

Para validar esse trabalho, aplicamos um teste em alunos que já haviam estudado os números complexos de maneira diferente daquela por nós proposta; e o mesmo teste, para alunos que haviam realizado nossa seqüência didática, dois meses depois desse fato. Os resultados mostraram que as nossas atividades foram bem mais eficazes que outras maneiras de ensinar. Os alunos que já haviam estudados os números complexos, eram do 1º ano de Engenharia Mecânica da Universidade de Mogi das Cruzes, portanto vindos de colégios diferentes, com ensinamentos diferentes, mas, por uma das respostas dadas, concluímos que nenhum estudou como estamos propondo

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Saddo Ag. Almouloud que, com muita competência, nos orientou neste trabalho, dando-nos sugestões valiosas, criticando de maneira pertinente, estando sempre disponível. Sua constante cobrança foi, sem dúvida, responsável pela realização desta pesquisa.

Ao Prof. Dr. Benedito Antonio da Silva, pelas importantes observações que muito melhoraram a apresentação deste texto.

Ao Prof. Dr. Sergio Nobre, por aceitar participar da banca examinadora a pelas sugestões que contribuíram par o aperfeiçoamento deste trabalho.

Ao corpo docente do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática e aos professores visitantes, todos muito importantes para a minha formação.

À CAPES que me proporcionou condições para realizar esta obra, concedendo-me bolsa de estudos.

Aos alunos do colégio São Marcos, Unidade I, de Mogi das Cruzes, que compareceram fora do horário normal das aulas, para realizar as atividades da seqüência didática.

À minha esposa e aos meus filhos, pelo incentivo e compreensão, que me permitiram ter tempo e tranqüilidade, para a execução deste trabalho.

À professora Onélia Miranda, da disciplina Técnica de Redação, do Colégio São Marcos, que colaborou na revisão deste texto.

NÚMEROS COMPLEXOS

"Uma Abordagem Histórica Para Aquisição do Conceito"

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

Este trabalho visa organizar uma série de atividades para que os alunos consigam operar com números complexos, não como se fossem apenas símbolos matemáticos, mas como números mesmo, com os quais se chega em respostas reais de problemas. A idéia é propor a resolução de equações do 3º grau, para os alunos resolverem pelo método de Cardano-Tartaglia. Ao tentar encontrar as soluções de uma dessas equações, eles se defrontarão com a raiz quadrada de um número negativo; mas, por uma análise prévia, descobrirão que a equação tem soluções, e este é o motivo para que continuem com essa resolução, desde que suponham a existência da raiz quadrada de um número negativo.

No capítulo I, **O Objeto Matemático,** mostramos a construção do sistema de números complexos, por uma extensão do sistema de números reais, incluindo neste último, números de um tipo tal, que toda equação do segundo grau tivesse uma solução, independente do valor do seu discriminante. Deduzimos as regras para operar com esses novos números; fizemos a representação gráfica e os escrevemos na forma trigonométrica.

No capítulo II, **Problemática e Metodologia da Pesquisa,** nos referimos aos problemas encontrados no ensino-aprendizagem dos números complexos, e à teoria sobre a qual vamos nos fundamentar com o intuito de elaborarmos uma série de atividades que façam com que os alunos adquiram o conceito desses números. Utilizamos uma metodologia fundamentada na linha francesa da Didática da Matemática, que consiste de um estudo histórico e epistemológico do conceito de números complexos, da transposição didática desse conceito e da elaboração, aplicação e análise da série de atividades que os alunos deverão efetuar.

No capítulo III: **Estudo Histórico e Epistemológico dos Números Complexos**, estudamos a origem e a evolução desse conceito, bem como os obstáculos epistemológicos referentes a ele. Esse estudo, contribuirá para a elaboração das atividades propostas aos alunos, para que eles sintam a necessidade de se extrair raiz quadrada de número negativo, como a sentiram os matemáticos que descobriram os complexos.

No capítulo IV: **Estudo da Transposição Didática dos Números Complexos,** procuramos saber quais as adaptações e transformações que o conceito dos números complexos sofreu para ser ensinado. Para tanto, fizemos uma análise da Proposta Curricular Para o Ensino da Matemática do 2º Grau (atualmente designado de ensino médio) do Estado de São Paulo e também de alguns livros didáticos. Através de um questionário procuramos saber qual a concepção dos alunos sobre o conceito de números complexos e esses dados foram analisados através de dois softwares: o CHIC e o CHADOC (Ag. Almouloud. S. 1992).

No capítulo V: **Seqüência Didática**, elaboramos as atividades juntamente com uma análise que faz a previsão dos possíveis comportamentos dos alunos frente à elas. Descrevemos

No capítulo VI, **Realização da Seqüência e Análise a Posteriori**, descrevemos como transcorreu a aplicação da nossa seqüência didática e fizemos uma análise a posteriori dessa aplicação.

No capítulo VII, **Conclusões,** apresentamos os resultados do teste que aplicamos, dois meses depois, com os alunos que efetuaram as atividades da seqüência didática. Esses resultados comparados com os que obtivemos com os alunos que haviam estudado os complexos de maneira diferente da nossa, parece nos mostrar o sucesso deste trabalho.

CAPÍTULO I
O OBJETO MATEMÁTICO

Vamos descrever, neste capítulo a formação de um novo sistema de números, que chamaremos de sistema dos números complexos. Este trabalho pretende apresentar uma proposta de ensino para esse objeto matemático, através de atividades a serem realizadas pelos alunos.

Sabemos que uma equação da forma $ax^2 + bx + c = 0$, possui duas soluções reais diferentes, se $b^2 - 4ac > 0$, duas soluções iguais se $b^2 - 4ac = 0$ e não possui soluções reais se $b^2 - 4ac < 0$.

O sistema de números complexos é uma extensão do sistema de números reais, no qual toda equação quadrática com coeficientes reais possui solução, independente do valor de $b^2 - 4ac$. Aliás esse sistema, nos dá as soluções de todas equações polinomiais de qualquer grau com coeficientes reais.

Sempre que na Aritmética estendemos um sistema numérico, o novo sistema deve:

1. conservar todas as propriedades algébricas do sistema antigo.
2. incluir todos os números do sistema antigo, de tal maneira, que as operações algébricas novas e antigas, quando aplicadas aos números do sistema antigo sejam as mesmas.
3. conter novos números, do tipo que necessitamos.

Então descobrimos as regras para operar com os novos números como conseqüências lógicas das propriedades admitidas.

Designaremos esse novo sistema com a letra C, e suas propriedades específicas são:

Conjunto de propriedades C-1.

(i) O sistema dos números complexos é <u>fechado</u> em relação às operações de adição (+) e multiplicação (.).
(ii) A adição é associativa e comutativa.
(iii) C possui um, e somente um, elemento neutro para a adição.
(iv) Cada elemento de C possui um, e somente um, oposto.
(v) A multiplicação é associativa e comutativa.
(vi) C possui um, e somente um, elemento neutro para a multiplicação.
(vii) Cada elemento de C, diferente do elemento neutro da adição, possui um e somente um, inverso.
(viii) A multiplicação é distributiva em relação à adição.

Conjunto de propriedades C-2

(i) Todo número real pertence à C.
(ii) A soma de dois números reais em C é igual a sua soma no sistema de números reais.
(iii) O produto de dois números reais em C é igual ao seu produto no sistema de números reais.
(iv) O elemento neutro da adição em C é o número 0 dos reais.
(v) O elemento neutro da multiplicação em C é o número 1 dos reais.

Propriedade C-3

(i) O conjunto C possui um elemento especial <u>i</u> o qual goza da propriedade

$$i \cdot i = i^2 = -1$$

Chamamos esse elemento de unidade imaginária.

A propriedade C-3 assegura que C contém, no mínimo, um elemento não pertencente ao conjunto dos números reais, porque nenhum número real tem o quadrado negativo.

Por C-1, C é fechado em relação às operações de adição e multiplicação, de modo que se **a** e **b** forem números reais, o produto **bi** e a soma **a** + **bi** pertencerão a C, porque i é elemento de C, e por C-2, a e b também pertencem a C. Vemos então que todos os números da forma **a + bi** nos quais **a** e **b** são reais, pertencem à C. O número i e todos os números reais podem ser escritos dessa forma. Assim, i = 0 + 1i, ou a = a + 0i, se a for um número real qualquer.

Propriedade C-4.

(i) Todo elemento de C pode ser escrito sob a forma a + bi, sendo a e b números reais.

O Sistema C gozando as propriedades C-1, C-2, C-3 e C-4 é o sistema de números complexos.

Adição, Multiplicação e Subtração

As regras para calcular com os números complexos, serão vistas agora através de teoremas que dão fórmulas para a soma, produto e diferença de dois desses números.

Teorema 1: (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i

Demonstração: Supondo a + bi e c + di dois números complexos quaisquer dados, seja a expressão
(a + bi) + (c + di)

Como a adição em C é associativa e comutativa (propriedade (ii) de C - 1)

$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (bi + di)$

e como a propriedade distributiva é válida em C - 1, teremos:

$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

Teorema 2: $(a + bi) . (c + di) = (ac + bd) + (ad + bc)i$

Demonstração: dados os números $a + bi$ e $c + di$ consideremos a expressão

$(a + bi) . (c + di)$

Usando a propriedade distributiva, obtemos:

$(a + bi).(c + di) = a(c + di) + bi(c + di)$

Usando novamente a distributiva e a comutativa da multiplicação, vem:

$(a + bi).(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2$

Como $i^2= -1$, podemos escrever:

$(a + bi).(c + di) = ac + adi + bci - bd$

Fazendo uso da propriedade comutativa da adição, e da distributiva, obtemos:

$(a + bi).(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

Teorema 3: Se $a + bi$ é um número complexo (a, b reais), então, seu oposto é

$-(a + bi) = -a + (-b)i$

Demonstração : Consideremos o número $z = a + bi$. Vamos chamar o oposto de z por $-z$ tal que, por definição temos: $z + (-z) = 0$

Dado $z = a + bi$, devemos achar um número $-z = x + yi$ tal que

$$(a + bi) + (x + yi) = 0$$

Pelo teorema 1 teremos:

$(a + bi) + (x + yi) = (a + x) + (b + y)i = 0 + 0i$

que será satisfeita se $a + x = 0$ e $b + y = 0$

isto é, se $x = -a$ e $y = -b$.

Como o oposto de um complexo é único, $(-a) + (-b)i$ é o oposto de $a + bi$.

Teorema 4. $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$

Demonstração:

$(a + bi) - (c + di) = (a + bi) + [-(c + di)]$ usamos que $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$

$= (a + bi) + [(-c) + (-di)]$ usamos o Teorema 3

$= [a + (-c)] + [b + (-d)]i$ usamos o Teorema 1

$= (a - c) + (b - d)i$

Teorema 5. Se a, b, c e d são números reais, então a + bi = c + di se e somente se a = c e b = d.

Demonstração:

a) Se a = c e b = d então a + bi = c + di. Esta parte do teorema é óbvia, uma vez que os resultados de adição e multiplicação são únicos.

b) Se a + bi = c + di então a = c e b = d.

Supondo que a, b, c e d sejam números reais e que a + bi = c + di, então

(a - c) + (b - d)i = 0 e daí, a - c = -(b - d)i

Se b - d não for zero podemos escrever,

$$\frac{a-c}{b-d} = -i \quad ou - \left(\frac{a-c}{b-d}\right) = i$$

mas isto implicaria **i** ser um número real, uma vez que a, b, c e d são números reais. Como **i** não é um número real, concluímos que b - d = 0. Mas se b-d = 0, então -(b - d)i = 0, e como (a - c) = -(b - d)i, segue-se que a - c = 0.

Nomenclatura

A representação de um número complexo z, por z = a + bi onde a e b são números reais, chama-se forma algébrica de z. Note que z é real se, e somente se, b = 0. Chamaremos portanto a, de parte real de a + bi. O número real b chama-se parte imaginária de a + bi. Assim, um número complexo é real quando sua parte imaginária for igual a zero. Um número complexo a + bi no qual a parte real é igual a zero (a = 0) chama-se número imaginário puro. Um número complexo que não é real costumamos chamar de imaginário.

Divisão.

Conforme o conjunto de propriedades C-1, todo número complexo diferente de zero, tem um, e somente um, inverso. Como no caso dos reais, representamos o inverso de z por 1/z .

Considerando que $\frac{z_2}{z_1} = z_2 . \frac{1}{z_1}$, vamos encontrar o inverso de a + bi, não nulo.

Devemos encontrar um número complexo x + yi tal que (a + bi) . (x + yi) =1

Efetuando a multiplicação vamos obter: (ax -by) + (bx + ay)i = 1

Esta equação será satisfeita se, e somente se,

$$\begin{cases} ax - by = 1 \\ bx + ay = 0 \end{cases}$$

A solução deste sistema é x = $\frac{a}{a^2 + b^2}$ e y = $\frac{-b}{a^2 + b^2}$

Assim o inverso de a + bi é $\frac{1}{a+bi}$ = $\frac{a}{a^2 + b^2}$ + $\frac{-b}{a^2 + b^2}$ i

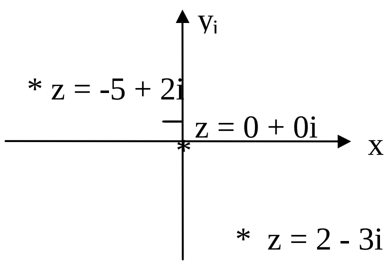
Vamos nesse momento obter uma fórmula para o quociente de dois números complexos:

$$\frac{c+di}{a+bi} = (c+di).\left(\frac{1}{a+bi}\right) = (c+di).\left(\frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2}i\right) =$$
$$= \frac{ac}{a^2+b^2} - \frac{bc}{a^2+b^2}i + \frac{ad}{a^2+b^2}i + \frac{bd}{a^2+b^2} = \frac{ac+bd}{a^2+b^2} + \frac{ad-bc}{a^2+b^2}i$$

Representação Gráfica:

Conforme a propriedade C-4 e o Teorema 5, cada número complexo pode ser escrito de uma, e somente uma maneira sob a forma algébrica a + bi, sendo a e b números reais. Desta maneira cada número complexo z determina, e é determinado por um par ordenado (a,b) de números reais: **a** é a parte real de z, **b** é a parte imaginária de z. Considerando que os pares ordenados de números reais constituíram o ponto de partida da geometria com coordenadas, podemos representar os números complexos por pontos no plano xy_i. Convencionando associar z ao ponto (a,b) se, e somente se, z = a + bi, estabelecemos uma forma biunívoca entre os elementos de C e os pontos do plano xy_i, que quando tem essa finalidade, recebe o nome de plano de Argand-Gauss.

Na figura, temos um plano de Argand-Gauss, mostrando os pontos (0,0), (2,-3) e (-5,2). Os pontos no eixo dos x correspondem a números reais e os pontos no eixo dos y, correspondem a números imaginários puros.



Módulo de um número complexo

Quando um número real é representado por um ponto na reta real, seu valor absoluto é igual à distância do ponto que o representa até a origem. Analogamente, definimos o valor absoluto |z| do número complexo z = a + bi, como a distância da origem do sistema de coordenadas, ao ponto (a,b).

Se z = a + bi então $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Complexo Conjugado

Definição: Se z = a + bi, chamamos de conjugado de z, ao número $\bar{z}$ = a - bi

A fórmula do inverso de um número complexo z = a + bi, que é

$$\frac{1}{a+bi} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2}\,i,$$

pode ser escrita usando-se o conjugado de z:

$\frac{1}{a+bi} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ ou $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ de onde sai que $z.\bar{z}=|z|^2$

Pode-se usar esse resultado ($z.\bar{z}=|z|^2$) para efetuar divisão de números complexos, multiplicando-se o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador, obtendo-se um número real neste último.

Teorema: Se z_1 e z_2 são números complexos quaisquer, então

a) $\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1}+\overline{z_2}$

b) $\overline{z_1.z_2} = \overline{z_1}.\overline{z_2}$

c) $\overline{z_1-z_2} = \overline{z_1}-\overline{z_2}$

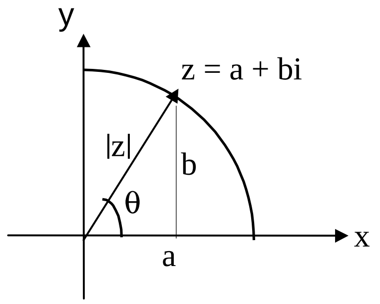
d) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

Vamos provar a): Sejam z_1 = a + bi e z_2 = c + di.

$$\overline{z_1+z_2} = \overline{a+bi+c+di} = \overline{(a+c)+(b+d)i} = (a+c)-(b+d)i =$$
$$a-bi+c-di = \overline{z_1}+\overline{z_2}$$

A Forma Trigonométrica de Um Número Complexo

Consideremos o número complexo z = a + bi, representado geometricamente:



Dessa figura temos que: a = |z|.cosθ e b = |z|.senθ

O ângulo θ, 0 ≤ θ < 360º, que tem como lado inicial, o eixo positivo dos x, e como lado final, o segmento que liga a origem dos eixos ao ponto que representa o número z, chama-se argumento desse número.

Como z = a + bi então a forma trigonométrica do número z = a + bi será z = |z|.(cosθ + isenθ), na qual |z| = $\sqrt{a^2+b^2}$

Vamos multiplicar dois números complexos dados na forma trigonométrica.

Sejam $z_1 = |z_1|.(\cos\theta_1 + i.sen\theta_1)$ e $z_2 = |z_2|.(\cos\theta_2 + isen\theta_2)$

$$z_1.z_2 = |z_1|.|z_2|.(\cos\theta_1.\cos\theta_2 + i.sen\theta_2.\cos\theta_1 + i.sen\theta_1.\cos\theta_2 - sen\theta_1.sen\theta_2)$$

$$z_1.z_2 = |z_1|.|z_2|.(\cos\theta_1.\cos\theta_2 - sen\theta_1.sen\theta_2) + i(sen\theta_1.\cos\theta_2 + sen\theta_2.\cos\theta_1)$$

Da trigonometria temos que:

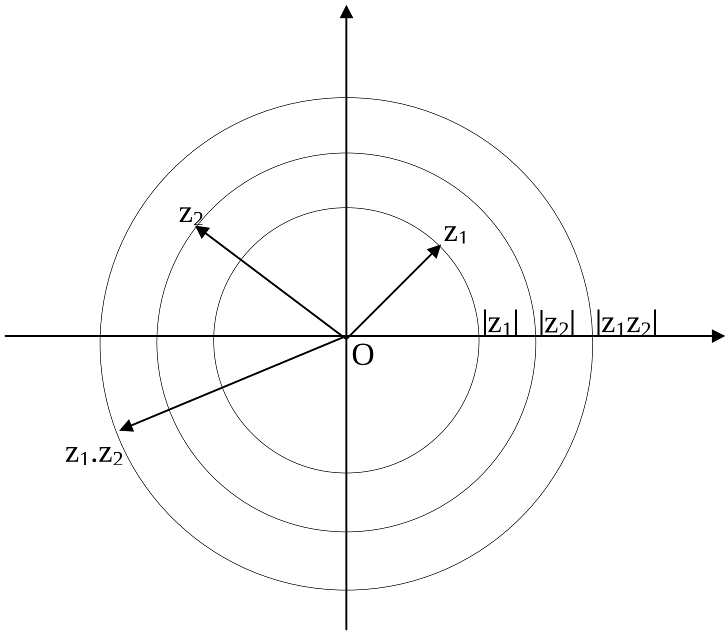
$\cos(\theta_1+\theta_2) = (\cos\theta_1.\cos\theta_2 - \mathrm{sen}\,\theta_1.\mathrm{sen}\,\theta_2)$ e

$\mathrm{sen}(\theta_1+\theta_2) = (\mathrm{sen}\,\theta_1.\cos\theta_2 + \mathrm{sen}\,\theta_2.\cos\theta_1)$

Portanto $z_1.z_2 = |z_1|.|z_2|[\cos(\theta_1+\theta_2) + i.\mathrm{sen}(\theta_1+\theta_2)]$

Essa expressão nos mostra que o produto de dois números complexos, é um número complexo, cujo módulo é igual ao produto dos módulos dos fatores, e cujo argumento é igual à soma dos argumentos dos fatores.

Geometricamente, z_1 é representado por um ponto de uma circunferência de centro O e raio $|z_1|$, e z_2 por um ponto de uma circunferência de centro O e raio $|z_2|$, logo $z_1.z_2$ será representado por um ponto de uma circunferência de centro O e raio $|z_1|.|z_2|$ e terá um argumento igual à soma dos argumentos de z_1 e de z_2.



Podemos generalizar o resultado da multiplicação de dois, para n números complexos. Vejamos como multiplicar três desses números:

$$z_1.z_2.z_3 = (z_1.z_2).z_3 = |z_1|.|z_2|.|z_3|\left[\cos[(\theta_1+\theta_2)+\theta_3] + i.\text{sen}[(\theta_1+\theta_2)+\theta_3]\right] =$$

$$= |z_1|.|z_2|.|z_3|\left[\cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3) + i.\text{sen}(\theta_1+\theta_2+\theta_3)\right]$$

Potenciação de Números Complexos

Como a potência z^n é um produto de n fatores iguais a z, teremos:

$$z^n = |z|.|z|.|z|..........|z|.\left[\cos(\theta+\theta+\theta+........+\theta) + i.\mathrm{sen}(\theta+\theta+\theta+..........+\theta)\right]$$

$$\log o$$

$$z^n = |z|^n.\left[\cos(n.\theta) + i.\mathrm{sen}(n.\theta)\right]$$

Vamos agora encontrar todas as potências inteiras positivas de i

$|i| = 1$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$ (θ = argumento de i) . Daí

$i^2 = 1(\cos\pi + i.\mathrm{sen}\pi) = -1 + 0i = -1$

$i^3 = 1(\cos\frac{3\pi}{2} + i.\mathrm{sen}\frac{3\pi}{2}) = 0 -1i = -i$

$i^4 = 1(\cos 2\pi + i\mathrm{sen}\ 2\pi) = 1 + 0i = 1$ Daqui em diante as potências se repetem.

Através do produto de números complexos na forma trigonométrica podemos deduzir identidades como $\cos 3\theta = (\cos\theta)^3 - 3\cos\theta\,(\mathrm{sen}\theta)^2$

Vamos deduzir essa identidade: $\cos 3\theta + i\mathrm{sen}3\theta = (\cos\theta + i\mathrm{sen}\theta)^3 =$

$= (\cos\theta)^3 + 3(\cos\theta)^2.i\mathrm{sen}\theta + 3\cos\theta.(i\mathrm{sen}\theta)^2 + (i\mathrm{sen}\theta)^3 = (\cos\theta)^3 - 3\cos\theta.(\mathrm{sen}\theta)^2 +$
$+ i[3(\cos\theta)^2\mathrm{sen}\theta - (\mathrm{sen}\theta)^3]$

Igualando as partes real e imaginária:

$\cos 3\theta = (\cos\theta)^3 - 3\cos\theta.(\mathrm{sen}\theta)^2$ e
$\mathrm{sen}3\theta = 3(\cos\theta)^2\mathrm{sen}\theta - (\mathrm{sen}\theta)^3$

De maneira análoga podemos deduzir fórmulas para $\cos 5\theta$, $\mathrm{sen}5\theta$, $\cos 6\theta$, $\mathrm{sen}6\theta$,....$\cos n\theta$, $\mathrm{sen}n\theta$.

Radiciação De Números Complexos

Define-se raiz enésima do número complexo $z = |z|.(\cos\theta + i.sen\theta)$,

aos números $w = |w|.(\cos\varphi + i.sen\varphi)$ tal que $\mathrm{w}^{\mathrm{n}} = z$.

Dado o número z, queremos encontrar w, e para tanto devemos achar |w| e φ.

$$w^n = z \Rightarrow |w|^n.(\cos\ n\varphi + i.\mathrm{sen}\ n\varphi) = |\mathrm{z}|.(\cos\theta + i.\mathrm{sen}\,\theta)$$

dessa igualdade temos que: $|\mathrm{w}|^n = |\mathrm{z}| \Rightarrow |w| = \sqrt[n]{|\mathrm{z}|}$

$$\left.\begin{array}{l}\cos \mathrm{n}\varphi = \cos\theta \\ \mathrm{sen}\ \mathrm{n}\varphi = \mathrm{sen}\,\theta\end{array}\right\} \Rightarrow n\varphi = \theta + k.360° \quad (\text{k é nº inteiro})$$

portanto $\varphi = \dfrac{\theta}{\mathrm{n}} + \dfrac{k.360°}{n}$

Vamos atribuir valores à k e observar os valores de φ.

$$k = 0 \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\theta}{n}$$

$$k = 1 \Rightarrow \varphi_2 = \frac{\theta}{n} + \frac{360°}{n}$$

$$k = 2 \Rightarrow \varphi_3 = \frac{\theta}{n} + \frac{2.360°}{n}$$

.

.

.

Observe que para k = n , teremos $\cos\varphi_{n+1} = \cos\varphi_1 \quad e \quad \mathrm{sen}\,\varphi_{n+1} = \mathrm{sen}\,\varphi_1$:

$$k = n \Rightarrow \varphi_{n+1} = \frac{\theta}{n} + \frac{n.360°}{n} = \frac{\theta}{n} + 360°$$

Para k = n+1 teremos:

$$\varphi_{n+2} = \frac{\theta}{n} + \frac{(n+1).360°}{n} = \frac{\theta}{n} + \frac{360°}{n} + 360° = \varphi_2 + 360° \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\varphi_{n+2} = \cos\varphi_2 \quad e \ \operatorname{sen}\varphi_{n+2} = \operatorname{sen}\varphi_2$$

Portanto teremos n valores diferentes para os argumentos de w e concluímos que o número z possui n raízes enésimas, todas com módulo igual a $\sqrt[n]{|z|}$ e cujos argumentos são

$$\varphi_1 = \frac{\theta}{n}$$

$$\varphi_2 = \frac{\theta}{n} + 1.\frac{360°}{n}$$

$$\varphi_3 = \frac{\theta}{n} + 2.\frac{360°}{n}$$

.

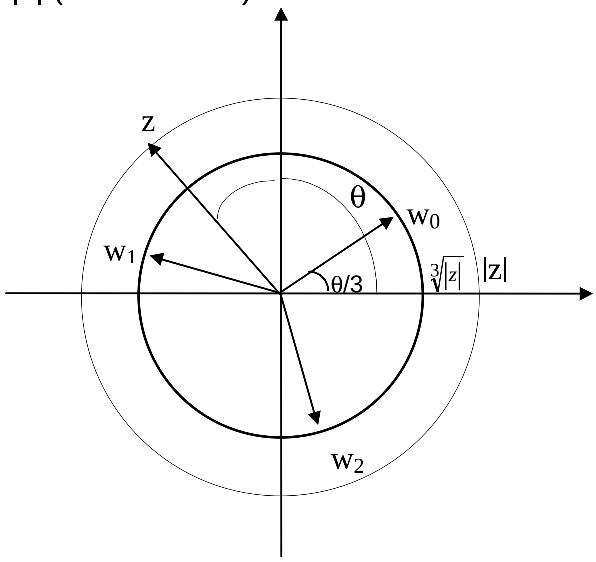
.

$$\varphi_n = \frac{\theta}{n} + (n-1)\frac{360°}{n}$$

Ou seja os argumentos formam uma P.A. de primeiro termo $\varphi_1 = \frac{\theta}{n}$ e razão $\frac{360°}{n}$.

Do resultado obtido, concluímos que as raízes enésimas de um número complexo z, se localizam numa circunferência de raio $\sqrt[n]{z}$. Se o argumento de z for θ, então a primeira dessas raízes têm argumento $\frac{\theta}{n}$, as outras obtém-se somando-se $\frac{360°}{n}$ à anterior. Para n>2, as n raízes, portanto, representam os vértices de um polígono regular de n lados inscritos na circunferência de raio $\sqrt[n]{z}$.

Vejamos como ficam representadas graficamente as raízes cúbicas, w_0, w_1 e w_2, do número $z = |z|.(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\theta)$.



Tendo neste capítulo introduzido o objeto de nosso estudo, vamos nos capítulos seguintes procurar uma maneira de apresentá-lo aos alunos.

CAPÍTULO II

PROBLEMÁTICA E METODOLOGIA DA PESQUISA

1.PROBLEMÁTICA

Os Números Complexos podem ser introduzidos aos alunos do 3º ano do segundo grau de diversas maneiras, como é possível constatar-se nos livros didáticos. Em alguns, eles são apresentados como números do tipo a + bi, com a e b sendo números reais e $i^2 = -1$, em outros, é proposta a resolução de uma equação do 2º grau, geralmente $x^2 + 1 = 0$, afirmando-se que a solução dessa equação é um número i, tal que $i^2 = -1$, em outros ainda, eles são definidos como pares ordenados (a ,b).

A professora Nilze Silveira de Almeida, na sua dissertação “Uma Experiência Didática de Formação Matemática - Epistemológica com Professores do Segundo Grau” pela PUC-SP, 1992, aborda os números complexos através da sua história, como nós, mas o objetivo do seu trabalho é a formação de professores, enquanto o do nosso, é propor atividades para que os alunos construam de maneira significativa o seu conhecimento. Ela enfatiza os números complexos como vetores e faz aplicações resolvendo problemas geométricos. O nosso trabalho dá ênfase à mudança da forma algébrica para a trigonométrica, para que seja possível a potenciação e a radiciação, pois assim pode-se resolver problemas que recaiam em equações do terceiro grau, que apresentam raízes quadradas de números negativos.

Os principais resultados obtidos pela professora Nilze, quando da aplicação do seu trabalho foram:

- Todos os professores alteraram sua postura em relação ao ensino dos números complexos passando a ver a importância de se apresentar a história de tal assunto como complemento da aprendizagem.

- Todos entenderam a importância de se estender a utilização dos números complexos a outras áreas de estudo tais como a Geometria e a Trigonometria, como instrumento na resolução de problemas.

- Todos manifestaram grande interesse em estender o uso da epistemologia a outras áreas de estudo, no segundo grau

A professora conclui dizendo-se gratificada por ter contribuído para que os professores envolvidos se empenhem em fazer uso da epistemologia na didática da Matemática.

Estes resultados vem ao encontro do que propomos, ou seja, uma abordagem dos números complexos, com atividades que façam com que os alunos se defrontem com esses números, como os matemáticos o fizeram conforme a História.

Não afirmamos que os alunos não consigam operar com os números complexos quando abordados das maneiras descritas no início desse capítulo, uma vez que as propriedades operatórias dos reais são conservadas nesse novo campo numérico. Mas cremos que não conseguirão ver sentido no que estão fazendo, ou seja essa aprendizagem não será significativa. Talvez eles fiquem se perguntando qual o motivo para alguém "inventar" um número i tal que $i^2 = -1$. Como os números complexos não representam uma quantidade, podem encontrar dificuldade em aceitar esses números como números, mas como representações matemáticas com as quais se opera, não se chegando a resultado concreto algum, e isso pode desestimular o desenvolvimento das suas atividades com os mesmos.

Uma necessidade é sempre uma manifestação de desequilíbrio. Na dinâmica de assimilação e acomodação de Piaget, a noção de desequilíbrio cognitivo é fundamental. Como fazer então, o aluno sentir a necessidade de extrair raiz quadrada de número negativo, se os problemas que levam à resolução de equações do 2º grau, não o levará à isso, pois quando nessas, surgir a raiz quadrada de um número negativo, é porque o problema realmente não tem solução ?

Como levá-lo a operar com os números complexos de tal maneira que ele necessite dessas operações, uma vez que as aplicações desses números só aparecem no terceiro grau, nos cursos de Engenharia, Matemática e Física em problemas de condução de calor, de potencial eletrostático, de escoamento de fluidos, etc.? Como justificar a passagem da representação algébrica para a representação trigonométrica, como fazer com que o aluno sinta essa necessidade ?

Dada essa problemática, desenvolvemos esse trabalho no sentido de apresentarmos uma proposta para um ensino significativo dos números complexos

Nossa **hipótese** é a seguinte: para que os alunos vejam sentido nas operações com os números complexos, é necessário colocá-los numa situação na qual se deparam com um problema que tenha soluções reais, mas para chegar a essas soluções devem trabalhar com raízes quadradas de números negativos.

As questões que pretendemos responder nesse trabalho são:

A nossa seqüência didática possibilitará que os alunos participem ativamente da aquisição do conceito de número complexo?

Acreditamos que sim, uma vez que estamos propondo situações onde eles, em duplas, procurem resolvê-las, sem que assistam uma aula expositiva antes.

Após a aplicação da seqüência, os alunos conseguirão efetuar operações com números complexos, como potenciação e radiciação?

Como as situações enfrentadas pelos alunos na nossa seqüência, dão sentido às operações com esses números, esperamos que eles encarem com mais naturalidade a existência dos mesmos, e operem com eles, assim como operam com os números reais.

A seguir vamos descrever alguns aspectos da teoria que fundamenta nossa pesquisa.

2.FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Este trabalho sobre os números complexos se baseia na linha francesa da Didática da Matemática e em algumas teorias da Psicologia Cognitiva de PIAGET.

Na teoria construtivista piagetiana, a construção do conhecimento resulta de processos de interação entre o sujeito e o seu ambiente, visando uma adaptação do sujeito ao seu ambiente. Esta adaptação se produz pelo duplo jogo de mecanismos de assimilação e de acomodação, assimilação se o sujeito pode adquirir diretamente novas estruturas, incorporando-as àquelas já existentes, acomodação se o sujeito muda as estruturas que já existem, no sentido de adicionar as novas características do objeto ou evento.

Nesta dinâmica entre assimilação e acomodação, a noção de desequilíbrio cognitivo é uma noção essencial. Uma necessidade é sempre a manifestação de desequilíbrio. As transformações que aparecem no mundo, exterior ou interior, motivam desequilíbrios e cada nova conduta vai funcionar não só para restabelecer o equilíbrio, como também para torná-lo mais estável que o do estágio anterior.

No caso dos números complexos, nos parece que uma equação do segundo grau não deverá provocar nenhum desequilíbrio cognitivo, pois se na sua resolução surgir uma raiz quadrada de número negativo é porque o problema que originou essa equação não tem solução. Daí porque questionar se existe ou não raiz quadrada de um número negativo ?

Para nós, o que vai provocar um desequilíbrio é a resolução de uma equação do terceiro grau que sabemos ter soluções reais, mas quando de sua resolução nos deparamos com a raiz quadrada de um número negativo.

Da linha francesa da Didática da Matemática, usamos alguns conceitos descritos no Caderno de Educação Matemática, Volume III, “Fundamentos da Didática da Matemática e Metodologia de Pesquisa” de Saddo Ag Almouloud - PUC-SP - 1997, que vamos comentar a seguir:

Segundo Régine Douady (1986), uma noção tem estatuto de ***ferramenta,*** quando ela intervém na resolução de problemas, e tem estatuto de ***objeto*** quando, identificada, ela é o objeto da aprendizagem.

Como pode-se constatar no capítulo III do nosso trabalho, os números complexos surgem historicamente como ferramenta de cálculo para justificar algoritmos de resolução, como num problema de Cardano (Ars Magna, 1545):

"Como dividir um bastão de comprimento 10 para que o retângulo construído sobre seus dois pedaços resultem numa área de 40?" Uma das respostas é $5 + \sqrt{-15}$, e a outra é $5 - \sqrt{-15}$. Parece entretanto arriscado dizer que essas quantidades possam ser consideradas como soluções para esse problema real. Assim o resultado justifica o algoritmo de resolução mas não é o objeto de estudo.

A distinção entre ferramenta e objeto é feita por Régine Douady (1986), da seguinte forma:

"Assim, dizemos que um conceito é ferramenta quando focalizamos nosso interesse sobre o uso que está sendo feito para resolver um problema. Uma mesma ferramenta pode ser adaptada para numerosos problemas. Por objeto, entendemos o objeto cultural tendo sua colocação num edífício mais largo que é o saber sábio[1] num dado momento reconhecido socialmente."

Régine Douady propõe considerando a dialética ferramenta - objeto, uma organização do ensino em várias etapas:

a) ***Antigo*****:** escolher um problema cujo enunciado tem um sentido para todos os alunos os quais podem mobilizar os objetos conhecidos de saber como ferramenta explícita para resolver total ou parcialmente o problema.

[1] Saber sábio é o conjunto de conhecimentos socialmente disponíveis, que foram objetos de publicações científicas, ou de comunicações reconhecidas como válidas pela comunidade científica.

b) ***Pesquisa - novo implícito*** : os alunos não podem resolver totalmente o problema proposto. O objeto de ensino é a ferramenta adequada para resolver o problema.

c) ***Explicitação - institucionalização local*** : o objetivo é dar um estatuto de objetos aos conhecimentos utilizados como ferramentas.

d) ***Institucionalização - estatuto do objeto***: o professor seleciona alguns conhecimentos explicitados na fase acima para descontextualizar e que os alunos deverão reter e poderão usar na resolução de outros problemas.

e) ***Familiarização - reutilização numa situação nova***: o professor propõe aos alunos vários exercícios pedindo como ferramenta explicita o que foi institucionalizado. O novo objeto se torna conhecimento "antigo" para ser utilizado num novo ciclo da dialética ferramenta-objeto.

f) ***Maior complexidade da tarefa ou novo problema*** : o professor apresenta situações mais complexas nas quais os alunos poderão testar ou desenvolver os novos conhecimentos adquiridos.

Os números complexos surgem como ferramentas para justificar algoritmos de cálculos, depois então são objetos de estudo. Assim, no nosso trabalho, elaboramos atividades nas quais os alunos irão se deparar com esses números como ferramentas, para depois então estudá-los como objeto, diferentemente do modo usual, no qual o professor define, demonstra teoremas, e resolve exercícios-modelos, propondo então exercícios parecidos para os alunos resolverem.

Outro conceito utilizado em nosso trabalho foi a noção de **quadro**.

Esta noção foi introduzida na Didática da Matemática por Régine Douady (1986) para diferenciar os domínios de funcionamento, ou ambiente de um mesmo saber matemático. E cada um dos quadros nos quais se situa o conceito matemático, dispõe de registros para representar esses conceitos.

Ela caracteriza um quadro do seguinte modo: *"Um quadro é constituído de ferramentas de uma parte da matemática, de relações entre os objetos, das formulações eventualmente diferentes dessas relações, e de imagens mentais associadas a essas ferramentas e relações. Dois quadros podem ter os mesmos objetos e serem diferentes por causa das imagens mentais e da problemática desenvolvida"*

Nos números complexos vamos utilizar o quadro algébrico quando estivermos utilizando a notação a + bi, e equações, incógnitas, soluções de uma equação, serão ferramentas para formulação de problemas. Já no quadro geométrico usaremos a notação trigonométrica $z = |z|(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\theta)$ e vamos utilizar distâncias entre dois pontos e ângulos, como ferramentas.

Para estudarmos a potenciação e a radiciação dos números complexos, é necessário passarmos do quadro algébrico para o geométrico. Essa passagem de um quadro para outro, é chamada de **"jogo de quadros".**

Segundo R. Douady e Marie - Jeanne Perrin - Glorian (1989) "A mudança de quadros é um meio de obter formulações diferentes de um problema, sem serem necessariamente equivalentes, permitindo um novo acesso às dificuldades encontradas e o desenvolvimento de ferramentas e técnicas que não surgem na primeira formulação." ([17], p.389)

"Os jogos de quadros são mudanças de quadros provocados pela iniciativa do professor, na ocasião de problemas convenientemente escolhidos, para fazer avançar as fases de pesquisa e evoluir as concepções dos alunos. ([17], p. 389)

Análises realizadas por Regine Douady (1986) sobre a dialética ferramenta-objeto e os jogos de quadros, mostram que em didática essas noções podem ser ferramentas poderosas, para a construção e gestão de seqüências didáticas, pois permitem uma certa leitura da evolução de noções matemáticas e são também instrumentos de análise da aprendizagem efetivamente existente.

Os números complexos surgem como ferramentas de cálculos para justificar o algoritmo da resolução de equações do terceiro grau. Raphael Bombelli (1526 - 1573), ao resolver a equação $x^3 = 15x + 4$ através do método de Cardano - Tartaglia (p. 48), se deparou com a raiz quadrada de um número negativo. Como ele percebeu que 4 era raiz da equação proposta, resolveu continuar os cálculos, supondo a existência desse tipo de raiz quadrada. Ele não conseguiu com isso chegar à solução da equação, porém a partir daí os matemáticos começaram a operar com esses novos números, sem reconhecê-los como tal, mas apenas como símbolos matemáticos, uma vez que eles não representavam quantidades. Trezentos anos depois, quando Gauss dá uma representação geométrica para esses números, equações como a que Bombelli tentou solucionar, são finalmente resolvidas, chegando-se a resultados que são números reais, apesar de as operações serem efetuadas com raízes quadradas de números negativos. A partir desse momento, eles são considerados como objetos do saber matemático e estudados por eles mesmos.

No desenvolvimento da nossa seqüência didática, utilizamos também a noção de **registro de representação**.

O **registro de representação** é uma noção introduzida por R.Duval para analisar a influência das representações dos objetos matemáticos sobre ensino/aprendizagem da Matemática.

Um registro é uma maneira típica de representar um objeto matemático ou um problema ou uma técnica. Segundo Duval não existe conhecimento que possa ser mobilizado por uma pessoa sem uma atividade de representação. As representações gráficas são representações semióticas da mesma forma que a escrita algébrica ou as línguas. As representações semióticas têm dois aspectos: a forma (ou o representante) e o conteúdo (ou o representado). A forma muda conforme o sistema semiótico usado: há assim vários registros possíveis de representação para um mesmo objeto, cada um correspondendo a um tipo diferente de tratamento cognitivo.

Para representar um número complexo (conteúdo), podemos usar a representação algébrica (forma) ou a representação trigonométrica (forma). Com a representação trigonométrica podemos desenvolver a potenciação e a radiciação dos números complexos. Sobre a dualidade forma/conteúdo das representações semióticas e a variedade dos registros de representação que se utiliza, Duval afirma: *"um objeto matemático não deve ser confundido com a representação que se faz dele, é o conteúdo representado que é importante e não a forma como é representado. As representações semióticas, que se consideram como representações "materiais", são um suporte para as representações mentais, porém não podemos nos esquecer que é a forma de representação que comanda o tipo de tratamento que se pode dar."*

No presente trabalho realizamos uma mudança de quadro e de registro de representação, quando, na impossibilidade da extração de raiz cúbica de números complexos, no quadro algébrico, com registro de representação $z = a + bi$, mudamos para o quadro geométrico para obtermos no registro das fórmulas a representação trigonométrica, que é $z = |z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$. Uma das atividades propostas era resolver uma equação do terceiro grau usando a fórmula de Cardano-Tartaglia. Para tal precisávamos extrair a raiz cúbica de um número complexo, mas quando dessa operação, recaíamos num sistema de equações do terceiro grau, impossibilitando sua resolução. Para conseguirmos extrair essa raiz cúbica, propusemos atividades nas quais os alunos descobrissem a forma trigonométrica, daí então foi possível a potenciação e a radiciação dos complexos.

Outro importante fator a ser observado na elaboração de uma seqüência didática é a noção de **obstáculos** desenvolvida por Bachelard.

Dos estudos da noção de obstáculo é importante ressaltar uma caracterização formulada por Duroux (1983) e retomada por G.Brousseau:

a) Um obstáculo é um conhecimento, uma concepção, não uma dificuldade ou uma falta de conhecimento

b) Este conhecimento produz respostas adaptadas num certo contexto, freqüentemente encontrado, mas produz respostas falsas fora desse contexto

c) Além disso, este conhecimento resiste às contradições com as quais ele é confrontado e ao estabelecimento de um conhecimento melhor. Não basta possuir um conhecimento melhor para que o precedente desapareça.

d) Depois da tomada de consciência de sua inexatidão, ele continua a manifestar-se de modo intempestivo e obstinado.

G. Brousseau desde 1976, distingue várias origens para os obstáculos identificados em didática, que correspondem a maneiras diferentes de serem tratados no plano didático.

1) **Obstáculos epistemológicos**: são inerentes ao saber e identificáveis pelas dificuldades encontradas pelos matemáticos para os superar, conforme a história.

Com os números complexos podemos perceber um obstáculo epistemológico quando os matemáticos utilizam esses números como ferramenta de cálculo por aproximadamente trezentos anos, até que com sua representação no quadro geométrico eles adquirem o estatuto de números.

Quando do surgimento dos números complexos, eles eram tidos apenas como formas algébricas, incapazes de representar alguma quantidade real e efetiva, e que serviam apenas para justificar algoritmos de cálculos. Por esse motivo, propusemos na nossa seqüência, a resolução de uma equação do terceiro grau, na qual se operando com raízes quadradas de números negativos, chegamos à soluções que são números reais.

2) **Obstáculos didáticos**: os obstáculos didáticos nascem da escolha das estratégias do ensino, deixando-se formar, no momento da aprendizagem, conhecimentos errôneos ou incompletos que se revelarão mais tarde como obstáculos ao desenvolvimento da conceituação. Reconhecer um obstáculo permite ao professor rever sua primeira apresentação do conceito em questão, para explicitar melhor a dificuldade vivida pelo aluno.

Até o 3º ano do segundo grau, os alunos na maioria das vezes, através do professor, ou dos livros didáticos são levados a crer que não existe raiz quadrada de números negativos. Quando no 3º ano, elas são estudadas, acreditamos que fica no aluno a impressão de que elas de nada valem, foi apenas uma invenção de algum matemático para justificar um algoritmo de cálculo, pois é muito forte a idéia que raiz quadrada de número negativo não existe. Assim o ensino dos números reais se constitui num obstáculo à aprendizagem dos números complexos. No nosso trabalho procuramos dar significado a essa existência a fim de superá-lo. Uma outra maneira de fazer com que os complexos fossem encarados com mais naturalidade, talvez fosse introduzir tal conceito no 1º ano do segundo grau, trabalhando com vetores, resolvendo-se problemas geométricos e deduzindo-se fórmulas da trigonometria.

Os obstáculos didáticos são inevitáveis, inerentes à necessidade da transposição didática.

Transposição didática segundo Guy Brousseau (1986) são as adaptações e transformações que o saber “sábio” deve sofrer para torná-lo ensinável .

Guy Brousseau critica a metodologia do ensino da Matemática apoiada na apresentação axiomática, e observa que “essa apresentação esconde completamente a história desses saberes, isto é, a sucessão das dificuldades e questões que provocaram a aparição dos conceitos fundamentais, seu uso na criação de novos problemas, a introdução de técnicas e questões nascidas do progresso de outros setores, a rejeição de certos pontos de vista julgados falsos ou impróprios, e as numerosas alterações que esse saber sofreu.” [10].

Para Guy Brousseau o professor deve construir situações-problema nas quais o conhecimento matemático utilizado seja recontextualizado e repersonalizado em vista de se tornar um conhecimento do aluno, quer dizer, uma resposta mais natural, às condições particulares, condições indispensáveis para que esse conhecimento tenha um sentido.

Situações-problema são questões que permitem ao aluno agir, formular, provar, construir modelos, etc.

Essa metodologia de criar situações-problema, permite o desenvolvimento de uma situação a-didática que segundo Guy Brousseau é uma situação na qual desaparece a intenção de ensinar, mas é específica do saber. Ela se caracteriza por:

- O problema matemático é escolhido de modo que possa fazer o aluno agir, falar, refletir, evoluir por iniciativa própria.

- O professor recusa intervir como aquele que propõe os conhecimentos que ele gostaria de provocar.

- O problema é escolhido para fazer adquirir pelo aluno novos conhecimentos, inteiramente justificados pela lógica interna da situação e que ele pode construir sem apelo as razões didáticas.

Nosso trabalho é constituído de situações-problema que serão propostos aos alunos numa situação a-didática. Segundo Michel Henry (1991), uma situação problema é a escolha de questões abertas numa situação mais ou menos matematizada envolvendo um campo de problemas colocando-se num ou em vários quadros.

A função principal de uma situação-problema é a utilização implícita depois explícita de novas ferramentas matemáticas, através de questões que o aluno se coloca no momento de sua pesquisa.

Os didatas definiram as condições para que uma situação-problema conduza à aquisição de novas ferramentas:

1 - Os alunos compreendem facilmente os dados e podem engajar-se na exploração desses dados com os conhecimentos disponíveis. Podem conceber claramente o que é uma resposta possível e pertinente à questão colocada.

2 - Os conhecimentos antigos dos alunos são insuficientes para a resolução imediata do problema.

3 - Os conhecimentos. objetos da aprendizagem. fornecem as ferramentas mais bem adaptadas para obter a solução.

4 - A questão pode ser formulada em vários quadros: quadro algébrico, geométrico, gráfico, numérico...

Esta maneira, diferente da usual de se introduzir um conceito, está diretamente relacionada com a noção de **contrato didático,** introduzida por Guy Brousseau (1988) que define: “contrato didático é o conjunto de regras que determinam, explicitamente, e sobretudo implicitamente, o que cada parceiro da relação didática vai ter que administrar e que será, de uma maneira ou de outra, responsável perante o outro”. Este contrato é o conjunto de comportamentos do professor esperados pelos alunos e vice-versa.

Quando no nosso trabalho, elaboramos atividades para que os alunos as realizem em duplas, sem antes termos exposto um conceito, estamos propondo uma mudança no contrato didático que os alunos tem, em geral no Brasil, com seus professores, que é o da aula expositiva: o professor expõe, efetua alguns exercícios e propõe exercícios parecidos para os alunos.

Tendo em vista a noção de transposição didática, fizemos neste trabalho, no Cap. IV, um estudo da Proposta Curricular do segundo grau e a análise de alguns livros didáticos para sabermos quais as transformações que o saber sábio sofreu para ser ensinado.

3.METODOLOGIA

O nosso objetivo com esse trabalho é fazer com que os alunos operem com os números complexos, e adquiram o seu conceito de maneira significativa, compreendendo que essas operações podem resolver problemas concretos chegando à soluções que são números reais.

Para tanto vamos elaborar uma seqüência didática que será aplicada à alunos do terceiro ano do segundo grau, e sua validade será confirmada ou não, pelo confronto entre os resultados de testes que aplicaremos a esses alunos, e a outros, que não estudaram através dessa seqüência.

Para a elaboração das atividades, será necessário um estudo histórico e epistemológico dos números complexos, para sabermos como eles surgiram e tentarmos descobrir os obstáculos epistemológicos ligados à esse conceito. Será necessário também que façamos uma análise da atual Proposta Curricular para o Ensino de Matemática do 2º grau, e de livros didáticos para sabermos quais as adaptações e transformações que o saber sábio sofreu para ser ensinado e precisamos levantar qual é a concepção dos alunos sobre o conceito dos números complexos, para descobrirmos possíveis dificuldades que eles sintam sobre o assunto.

Na análise a priori, que é uma análise que fazemos antes da aplicação da seqüência didática, procuramos prever os comportamentos dos alunos frente as atividades, quais suas dificuldades, quais as variáveis didáticas sobre as quais poderíamos atuar, como os coeficientes das equações propostas, os quais procuramos escolher de tal modo que facilitem os cálculos, pois o importante é o conceito dos números complexos e não cálculos trabalhosos que poderiam monopolizar a atenção dos mesmos.

Após a análise a priori da seqüência, passaremos à experimentação, que é a sua aplicação. Em seguida faremos uma análise que chamamos de análise a posteriori da seqüência didática.

A análise a posteriori de uma seqüência didática é o conjunto de resultados que se pode ressaltar de sua exploração, que contribuem à melhoria dos conhecimentos didáticos que se tem sobre as condições da transmissão do saber em jogo. Ela tem por objetivo relacionar as observações com os objetivos definidos a priori e estimar a reprodutividade dos fenômenos didáticos. Nessa análise a posteriori, faremos uma:

- apresentação dos fatos observados.
- análise dos fenômenos observados.
- análise dos erros e comportamentos dos alunos.

CAPÍTULO III
ESTUDO HISTÓRICO E EPISTEMOLÓGICO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

1. Estudo Histórico e Epistemológico dos Números Complexos

Neste capítulo faremos um estudo histórico, procurando levantar como surgiram os números complexos, e quais os obstáculos epistemológicos ligados a esse conceito.

Normalmente o estudante ouve falar em números complexos pela primeira vez, quando na oitava série do primeiro grau, ao resolver uma equação do segundo grau, o discriminante resulta um número negativo. Nesse caso, talvez o professor diga que esta equação não tem soluções no conjunto dos números reais, mas que existe um conjunto de números no qual as soluções existem, que é chamado de conjunto dos números complexos, ou simplesmente que não existem raízes reais para tal equação. Esse fato cria a falsa impressão que os números complexos surgiram quando da resolução de uma equação do segundo grau, e nós veremos, tendo como referências, artigos de César Polcino Milies [23] e [24] e de Michèle Artigue [6], que os números complexos surgem de equações do terceiro e não do segundo grau.

As equações do segundo grau apareceram na Matemática aproximadamente 1700 anos antes de Cristo nas tabuletas de argila da Suméria, e em alguns casos levaram a raízes quadradas de números negativos ; porém não foram elas em nenhum momento que sugeriram o uso dos números complexos.

Uma equação nunca era vista isoladamente, mas sim como a formulação matemática de um problema concreto. O fato de uma equação apresentar raiz quadrada de um número negativo, era apenas o indicativo de que o problema proposto não tinha solução.

Vejamos alguns exemplos de raízes quadradas de números negativos, antes do surgimento dos números complexos:

O primeiro exemplo de raiz quadrada de número negativo, encontramos na *Estereometria* de Heron, matemático grego do período alexandrino , publicada aproximadamente em 75 d.C. . Num cálculo sobre o desenho de uma pirâmide surge a necessidade de avaliar $\sqrt{81-144}$. Essa questão parece não ter provocado maiores problemas pois mais à frente a ordem dos números, provavelmente por um erro de cálculo, é trocada e é calculado $\sqrt{144-81}$.

Podemos dizer que realmente o primeiro exemplo de uma atitude frente à esse tipo de raiz, surge na *Arithmética de Diophanto*. Aproximadamente no ano de 275 d.C., ele considera o seguinte problema:

> Um triângulo retângulo tem área igual a 7 e seu perímetro é de 12 unidades.
> Encontre o comprimento dos lados.

Chamando de x e y o comprimento dos catetos desse triângulo, temos, na nossa notação atual:

$$\frac{1}{2}xy = 7 \qquad ; \qquad x^2 + y^2 = (12 - x - y)^2$$

Isolando y na 1ª equação e substituindo esse valor na 2ª, teremos:

$24x^2 - 172x + 336 = 0$, cujas raízes são : $x = \dfrac{43 \pm \sqrt{-167}}{12}$

Neste ponto Diophanto observa que a equação só teria solução se $\left(\frac{172}{2}\right)^2 \geq 24 \times 336$ ($\Delta \geq 0$). Como isso não acontece, é lógico que não há necessidade alguma de se dar sentido para a expressão $\sqrt{-167}$

Na Matemática indiana encontramos novas referências à questão das raízes quadradas de números negativos.

Aproximadamente 850 anos d.C. , o matemático indiano Mahavira afirma:

> ... como na natureza das coisas um negativo não é um quadrado, ele não tem , portanto, raiz quadrada.

O famoso matemático Bhaskara II (1114 - 1185 aprox.) afirma:

> O quadrado de um afirmativo é um afirmativo; e a raiz quadrada de um afirmativo é dupla: positiva e negativa. Não há raiz quadrada de um negativo; pois ele não é um quadrado.

Na Matemática européia também aparecem observações dessa natureza quando o frade Luca Paccioli (1445 - 1514) na sua *Summa de arithmética, geométrica, proportioni et proportionalita*, publicada em 1494 escreve que a equação $x^2 + c = bx$ é solúvel se $\frac{1}{4}b^2 \geq c$, e o matemático francês Nicolas Chuquet (1445 - 1500 aprox.) faz observações semelhantes sobre "soluções impossíveis " num manuscrito não publicado de 1484.

Gerônimo Cardano (1501 - 1576) também se deparou com esse tipo de questão, e também considerava que o surgimento de raízes quadradas de números negativos na resolução de um problema, apenas indicava que o mesmo não tinha solução. Apesar disso resolveu seguir mais adiante com os cálculos, e no capítulo 37 do *Ars Magna*, ele resolve um problema que consiste em dividir um segmento de comprimento 10 em duas partes tal que o produto delas seja 40, da seguinte maneira:

x(10 - x) = 40 e daí vem a equação

$x^2 - 10x + 40 = 0$

cujas soluções são : $x = 5 \pm \sqrt{-15}$

Cardano reconhece que o problema não tem solução, mas observa que se somarmos as duas raízes, obteremos o valor 10 e se as multiplicarmos, considerando que $\left(\sqrt{-15}\right)^2 = -15$, teremos como resultado 40. Ele chama esses resultados de *raízes sofísticas* da equação e diz que elas *são tão sutís quanto inúteis.*

Cardano não usava a notação $\sqrt{-15}$. Ele utilizava "R_x.m", isto é, "radix minus" para raiz quadrada de número negativo

Os números complexos não surgem da resolução da equação do segundo grau como já foi dito, mas da resolução da equação do terceiro grau. Assim vamos fazer um histórico sobre a resolução destas equações.

RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DO TERCEIRO GRAU

Em 1545 no *Ars Magna*, Cardano publicou uma fórmula para resolver equações do terceiro grau, que ficou conhecida por " Fórmula de Cardano". Deve-se ressaltar porém que o próprio Cardano admite francamente que não foi ele o descobridor original da mesma, pois Niccolo Tartaglia (1500 - 1557 aprox.) que lhe deu a sugestão para a resolução de tais equações.

O MÉTODO QUE TARTAGLIA ENSINOU A CARDANO

Na época em que Tartaglia ensinou à Cardano, a fórmula de resolução de uma equação do terceiro grau, os matemáticos não dispunham de uma notação para tratar as equações, e não podiam expressar seus métodos resumidamente através de fórmulas como fazemos agora. Portanto não é tão estranho que Tartaglia comunicasse a Cardano o segredo de sua descoberta através de versos. Traduzidos para o Português esses versos que se encontram na página 120 da edição de 1554 dos *Quesiti*[2] são os seguintes:

1. Quando o cubo com a coisa em apreço
   Se igualam a qualquer número discreto
   Acha dois outros diferentes nisso

2. Depois terás isto por consenso
   Que seu produto seja sempre igual
   Ao cubo do terço da coisa certa

3. Depois, o resíduo geral
   Das raízes cúbicas subtraídas
   Será tua coisa principal

4. Na segunda destas operações,
   Quando o cubo estiver sozinho
   Observarás estas outras reduções

5. Do número farás dois, de tal forma
   Que um e outro produzam exatamente
   O cubo da terça parte da coisa

6. Depois, por um preceito comum
   Toma o lado dos cubos juntos
   E tal soma será teu conceito

7. Depois, a terceira destas nossas contas
   Se resolve como a segunda, se observas bem
   Que suas naturezas são quase idênticas

8. Isto eu achei, e não com passo tardo
   No mil quinhentos e trinta e quatro
   Com fundamentos bem firmes e rigorosos
   Na cidade cingida pelo mar.

Vamos analisar esses versos numa linguagem atual. Antes de tudo é bom lembrar que Tartaglia e Cardano não usam coeficientes negativos em [2]

[2] ***Quesiti et inventioni diverse***, livro escrito por Tartaglia, que teve, em 1959, na Brescia, uma publicação comemorativa do IV centenário de sua morte

suas equações e portanto em vez de uma equação do terceiro grau eles têm que analisar três casos possíveis. Tartaglia chama cada um desses casos de operações. Os casos são:

$x^3 + ax = b$ citado no primeiro verso “cubo e coisa igual a número”

$x^3 = ax + b$ citado no quarto verso “quando o cubo estiver sozinho”

$x^3 + b = ax$ citado no sétimo verso

Vamos analisar nesse trabalho somente o primeiro dos casos

O *número* a que se refere o primeiro verso é o termo independente que nós estamos chamando de b . Quando Tartaglia diz “*acha dois outros diferentes nisso*”, está sugerindo que se tome duas novas variáveis cuja diferença seja b. Assim chamando de U e V essas novas variáveis teremos:

$U - V = b$

Depois a frase “*que seu produto seja sempre igual ao cubo da terça parte da coisa certa*” quer dizer que

$$U.V = \left(\frac{a}{3}\right)^3$$

E na frase “*o resíduo geral das raízes cúbicas subtraídas será tua coisa principal*” quer dizer que a solução será do tipo

$$x = \sqrt[3]{U} - \sqrt[3]{V}$$

A JUSTIFICATIVA PARA A FÓRMULA DE TARTAGLIA

Nesta justificativa vamos usar métodos e notações modernas, o que nos dará uma exposição mais simples,

Seja a equação do terceiro grau $x^3 + ax = b$, e vamos lembrar a fórmula do cubo de um binômio:

$$(u - v)^3 = u^3 - 3u^2v + 3uv^2 - v^3$$

Pondo em evidência o produto uv teremos:

$$(u - v)^3 = -3uv(u - v) + (u^3 - v^3),$$

ou seja,

$$(u - v)^3 + 3uv(u - v) = u^3 - v^3$$

Se obtivermos u e v tais que

$$uv = a/3 \qquad \text{e} \qquad u^3 - v^3 = b$$

a expressão acima ficará :

$$(u - v)^3 + a(u - v) = b$$

e comparando-a com a expressão inicial $x^3 + ax = b$ percebemos que x = u - v será uma solução desta equação. Portanto para resolvermos a equação proposta devemos resolver o sistema

$$\begin{cases} uv = \dfrac{a}{3} \\ u^3 - v^3 = b \end{cases}$$

pois achando u e v teremos x , uma vez que x = u - v.

Para resolver o sistema, elevamos na primeira equação os dois termos ao cubo e teremos:

$$\begin{cases} u^3 v^3 = \left(\dfrac{a}{3}\right)^3 \\ u^3 - v^3 = b \end{cases}$$

fazendo $u^3 = U$ e $v^3 = V$ teremos:

$$\begin{cases} U.V = \left(\dfrac{a}{3}\right)^3 \\ U - V = b \end{cases}$$

Dessa forma U e -V são as raízes da equação

$X^2 - bX + (-a/3)^3 = 0$ que são:

$$X = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4\left(\dfrac{-a}{3}\right)^3}}{2} = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}$$

Uma dessas raízes é U e a outra é -V e como $u = \sqrt[3]{U}$, $v = \sqrt[3]{V}$ e $x = u - v$ teremos a solução enunciada por Tartaglia:

$x = \sqrt[3]{U} - \sqrt[3]{V}$

Finalmente substituindo U e V pelos seus respectivos valores chegaremos à *fórmula de Cardano* ou *de Tartaglia*

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}}$$

Esta fórmula resolve as equações do terceiro grau do tipo $x^3 + ax = b$ e para resolver as equações gerais do terceiro grau $x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$ devemos substituir x por $y - a_1/3$.

Vejamos esse caso :

Consideremos a equação: $x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$

fazendo $x = y - a_1/3$ vem:

$(y - a_1/3)^3 + a_1(y - a_1/3)^2 + a_2 (y - a_1/3) + a_3 = 0.$

$y^3 - \cancel{3y^2a_1/3} + 3y(a_1/3)^2 - (a_1/3)^3 + \cancel{a_1y^2} - 2 ya_1^2/3 + a_1^3/3^2 + a_2y - a_1a_2/3 + a_3 = 0$

$y^3 + 3((a_1/3)^2 - 2 a_1^2/3 + a_2)y = (a_1/3)^3 - a_1^3/3^2 - a_3$ e esta equação é o mesmo

que: $y^3 + ay = b$

O SURGIMENTO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Os números complexos começam a surgir com Raphael Bombelli (1526 - 1573) um admirador da *Ars Magna* de Cardano, mas que achava que seu estilo de exposição não era claro. Decidiu então escrever um livro falando sobre os mesmos assuntos mas de maneira mais clara, tal que um principiante pudesse entendê-los sem necessidade de outras referências. Publicou então *l'Algebra,* em três volumes em 1572, em Veneza. No capítulo II dessa obra, ele estuda a resolução de equações de grau não superior a quatro. Uma dessas equações é $x^3 = 15x + 4$ que ele resolve aplicando a fórmula de Cardano e encontra a raiz:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

Assim como Cardano, ele chama essa solução de *sofistica* mas percebe que x = 4 é de fato uma solução da equação proposta.

Surge então, provavelmente, pela primeira vez, uma situação na qual apesar do resultado da equação apresentar raízes quadradas de números negativos, existe verdadeiramente uma solução para ela. Esse fato faz com que Bombelli comece a tentar compreender o que está acontecendo.

Ele admite a possibilidade de que exista uma expressão da forma a + $\sqrt{-b}$ que seja raiz cúbica de 2 + $\sqrt{-121}$, ou seja (a + $\sqrt{-b}$)^3 = 2 + $\sqrt{-121}$. Para calcular essa raiz, ele supõe que a raiz cúbica de $2-\sqrt{-121}$ seja a - $\sqrt{-b}$ e pelo fato de que 4 deve ser raiz da equação, necessariamente a + $\sqrt{-b}$ + a - $\sqrt{-b}$ = 4 e daí a = 2, uma vez que os radicais se anulam. Tendo esse resultado, voltou à equação (a + $\sqrt{-b}$)^3 = 2 + $\sqrt{-121}$ e encontrou b da seguinte maneira

(2 + $\sqrt{-b}$)^3 = 2 + $\sqrt{-121}$.

8 + 12$\sqrt{-b}$ - 6b - b $\sqrt{-b}$ = 2 + $\sqrt{-121}$

8 + 12$\sqrt{b}$ $\sqrt{-1}$ - 6b - b$\sqrt{b}$ $\sqrt{-1}$ = 2 + 11$\sqrt{-1}$

$\begin{cases} 8-6b=2 \\ 12\sqrt{b}-b\sqrt{b}=11 \end{cases}$ e daí, b = 1

Dessa maneira Bombelli obtém que $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}=2+\sqrt{-1}$ e analogamente: $\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}=2-\sqrt{-1}$ e x = 2 + $\sqrt{-1}$ + 2 - $\sqrt{-1}$ = 4 é uma solução da equação dada.

Após essa descoberta Bombelli diz:

> Eu achei uma espécie de raiz cúbica muito diferente das outras, que aparece no capítulo sobre o cubo igual a uma quantidade e um número.
> ....A princípio, a coisa toda me pareceu mais baseada em sofismas que na verdade, mas eu procurei até que achei uma prova....
> Isto pode parecer muito sofisticado mas, na realidade, eu tinha essa opinião, e não pude achar a demonstração por meio de linhas [i.é. geometricamente], assim, tratarei da multiplicação dando as regras para mais e menos.

Ele utiliza a expressão *più di meno* para se referir ao que nós denotaríamos como + i e *meno di meno* para -i. Ele então enuncia sua regra do produto, que citamos junto com seu significado na nossa simbologia:

Più via più di meno fa più di meno	+.(+ i) = + i
Meno via più di meno fa meno di meno	-. (+ i) = - i
Pìu via meno di meno fa meno di meno	+.(- i) = - i
Meno via meno de meno fa più di meno	-. (- i) = + i
Più di meno via più di meno fa meno	(+ i).(+ i) = -
Meno di meno via più di meno fa più	(- i).(+ i) = +
Meno di meno via meno di meno fa meno	(- i).(- i) = -

Bombelli se deparava com uma dificuldade maior por não dispor de uma boa notação. Para o nosso sinal de + ele usava p (più), para o nosso sinal de - ele usava m (minus); R (radix) para raiz quadrada e R^3 para raiz cúbica. Não havia parênteses e sublinhava expressões para indicar quais estavam afetados por um radical.

A expressão $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}$ era escrita na forma $R^3\left|\underline{2pR\left|\underline{0-121}\right|}\right|$

Como naquela época não se escreviam diretamente números negativos, ele escreveu -121 como 0 - 121. A solução da equação $x^3 = 15x + 4$ era escrita da seguinte maneira:

$$R^3\left|\underline{2pR|\underline{0-121}|}\right|pR^3\left|\underline{2mR|\underline{0-121}|}\right|$$

Com seu engenhoso raciocínio Bombelli mostrou o papel importante que os números imaginários conjugados iriam desempenhar no futuro; mas na época a observação não ajudou na operação efetiva de resolver equações cúbicas, pois Bombelli precisava saber antecipadamente o valor de uma de suas raízes. Mas aí a equação já estaria resolvida, e não se precisaria da fórmula; sem o conhecimento de uma das raízes o método de Bombelli falha. Qualquer tentativa para achar algebricamente as raízes cúbicas dos números imaginários na regra de Cardano leva à própria equação cúbica, em cuja resolução as raízes cúbicas apareceram, de modo que se volta ao ponto de partida. Porque esse impasse surge sempre que as três raízes sejam reais, esse caso é conhecido como "caso irredutível". Aqui uma expressão para a incógnita é de fato fornecida pela fórmula, mas a forma em que aparece é inútil para quase todos os fins.

OS PROGRESSOS DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Vamos primeiramente citar os progressos obtidos na notação dos números complexos :

O símbolo $\sqrt{-1}$ foi introduzido em 1629 por Albert Girard. (1590 - 1633) em *Invention nouvelle en l'algèbre,* quando enuncia claramente as relações entre raízes e coeficientes de uma equação .

O símbolo *i* foi usado pela primeira vez para representar $\sqrt{-1}$ por Leonhard Euler em 1777, apareceu impresso pela primeira vez em 1794 e se tornou amplamente aceito após seu uso por Gauss em 1801.

Os termos *real* e *imaginário* foram empregados pela primeira vez por René Descartes em 1637.

A expressão *número complexo* foi introduzida por Carl Friederich Gauss em 1832

A partir do trabalho de Bombelli os números complexos começam a ser usados devido a sua óbvia utilidade para resolver equações do terceiro grau, mas ao mesmo tempo, duvidava-se que tais números pudessem existir. Progressivamente contudo a confiança nesses novos objetos vão aumentando à medida que sua manipulação não conduz a contradições. Essa manipulação é gerada pelo principio da permanência, enunciado por Leibniz que consiste em aplicar simplesmente a essas representações, as mesmas regras de cálculo usadas para as quantidades ordinárias. A primeira tentativa de dar um significado concreto aos números complexos através de uma "interpretação geométrica" é devida a John Wallis (1616- 1703), professor da Universidade de Oxford. Em 1673 ele publicou um tratado intitulado *Álgebra*, em cujo capítulo LXVI discute a impossibilidade da existência de quantidades imaginárias e compara essa questão com a da existência de quantidades negativas.

> Estas quantidades imaginárias (como são freqüentemente chamadas) surgem das supostas raízes de um quadrado negativo (quando

aparecem) e se considera que implicam que o caso proposto é impossível.

E assim é , de fato, no sentido estrito do que foi proposto. Pois não é possível que qualquer número (negativo ou afirmativo), multiplicado por si mesmo, possa produzir (por exemplo) -4 . Pois sinais iguais (tanto + quanto -) produzirão +; e portanto não -4.

Mas também é impossível que qualquer quantidade (embora não um suposto quadrado) possa ser negativa. Pois não é possível que qualquer magnitude possa ser menos que nada, ou qualquer número menor que nada.

Porém, não é esta suposição (das quantidades negativas) nem inútil nem absurda, quando corretamente compreendida. E, embora para a simples notação algébrica representa uma quantidade menor do que nada, quando se trata de uma aplicação física, denota uma quantidade tão real como se o sinal fosse +; mas interpretada no sentido contrário.

Para as quantidades imaginárias Wallis tenta uma interpretação que é a seguinte:

Suponhamos que num local ganhamos do mar 30 acres, mas perdemos em outro local 20 acres: se agora formos perguntados quantos acres ganhamos ao todo, a resposta é 10 acres, ou + 10 (pois 30 - 20 = 10) ...Mas se num terceiro local perdemos mais 20 acres, a resposta deve ser - 10 (pois 30 - 20 - 20 = -10) ....Mas agora, supondo que esta planície de -1600 square perches [20 acres correspondem a 1600 squares perches, uma outra medida inglesa da época] tem a forma de um quadrado, não devemos supor que este quadrado tem um lado? E assim qual será esse lado?

Não podemos dizer que é 40 nem - 40 ...Mas sim que é $\sqrt{-1600}$ (a suposta raiz de um quadrado negativo) ou 10 $\sqrt{-16}$ ou 20 $\sqrt{-4}$ ou 40 $\sqrt{-1}$.

Essa interpretação não teve uma grande acolhida entre seus contemporâneos e nenhuma repercussão posterior.

O interesse por essas quantidades imaginárias vão se afirmar também em razão dos resultados unificadores que eles permitem obter. Nesse caso, um aspecto da história rico do ponto de vista epistemológico é o encontro dos ângulos e dos logaritmos com os números complexos, que aparece com a extensão aos números negativos e imaginários da noção de logaritmo, e das relações entre ângulos e quantidades imaginárias, graças à exponencial complexa.

O logaritmo das quantidades negativas e imaginárias

Em 1702 Jean Bernoulli observa que $\frac{dz}{1+z^2} = \frac{dz}{2(1+z\sqrt{-1})} + \frac{dz}{2(1-z\sqrt{-1}}$ e conclui que existe uma relação entre uma quantidade ligada ao círculo ($\frac{dz}{1+z^2}$, cuja "soma" contém o número π) e um logaritmo (soma de quantidades ligadas à hipérbole $\frac{1}{x}$). Ele realmente não efetua a integração, se o fizesse, poderia ter obtido que:

arctgz = $\frac{1}{2\sqrt{-1}}\log\frac{\sqrt{-1}-z}{\sqrt{-1}+z}$ e para z = 1, $\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\log\sqrt{-1}$ daí

log $\sqrt{-1}$ = $\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}$ e log(-1) = log($\sqrt{-1}$)² = $\pi\sqrt{-1}$

Não tendo efetuado essa integração, Bernoulli sustenta que um número e seu oposto tem o mesmo logaritmo. Ele pretende por exemplo que o logaritmo de -1 seja nulo e entre várias argumentações a mais forte parece ser a seguinte:

Para todo número positivo a, tem-se que :

$(-a)^2 = (a)^2$, e portanto

$\ln(-a)^2 = \ln(a)^2$

$2.\ln(-a) = 2\ln(a)$

de onde $\ln(-a) = \ln(a)$, e em particular $\ln(-1) = \ln(1) = 0$

Esse fato intrigava os matemáticos no começo do século dezoito, mas em 1747 Euler escreveu a d'Alembert explicando corretamente a questão dos números negativos (pg. 63).

Roger Cotes (1682 - 1716), jovem professor do Trinity College de Cambridge, obteve em 1714 um importante resultado, relacionado com a obtenção de raízes enésimas de números complexos. Roger morreu prematuramente e dele, disse Newton: *Se Cotes tivesse vivido, teríamos aprendido alguma coisa*. O resultado a que Cotes chegou foi :

$$\log_e(\cos \phi + i.\mathrm{sen}\, \phi) = i.\phi$$

Com essa fórmula ele poderia ter chegado em

$$\cos\phi + i\,\mathrm{sen}\phi = e^{i\phi}$$

e finalmente na chamada fórmula de Moivre:

$$(\cos\phi + i\,\mathrm{sen}\phi)^n = \cos(n\phi) + i\,\mathrm{sen}(n\phi)$$

Porém o caminho foi outro . Abraham De Moivre (1667-1754) nasceu na França, mas viveu na Inglaterra a partir dos dezoito anos, ou seja a partir de 1685, quando o Edito de Nantes, que protegia os huguenotes, foi revogado. Estudou Matemática sozinho, após ler os *Principia de Newton*, chegando a se tornar membro da Royal Society e das academias de Paris e Berlim. Em 1722, utilizando fatos que já havia publicado em 1707, ele obteve um resultado que implicou a fórmula que leva seu nome, embora tenha se limitado a casos particulares e nunca tenha chegado a enunciar ou demonstrar a fórmula no caso geral.

Comentários Epistemológicos

Quando Bernoulli afirmou que o logaritmo de -1 era nulo, ele nada mais fez que aplicar algumas regras do cálculo cujo validade ninguém punha em dúvida

$a=b \quad \Rightarrow \quad \ln(a)=\ln(b)$

$\ln(x^2) = 2\ln(x)$

$2a = 2b \;\Rightarrow\; a = b$

Atualmente diríamos que Bernoulli não chegou a um resultado correto porque a função logarítmica não está definida para um número negativo. Mas justamente o que estavam procurando Bernoulli e Leibniz, era definir ln(x) para x negativo (ou mesmo imaginário). Eles aplicam portanto as regras habituais do cálculo para encontrar o valor do logaritmo que seja compatível com esses cálculos. Assim Leibniz chegou à uma conclusão diferente pela seguinte argumentação:

Se tivéssemos $\ln(-1) = \ln(1)$, então teríamos $e^{\ln(-1)} = e^{\ln(1)}$ e portanto $-1 = 1$ o que é um absurdo.

Portanto, para eles, como para todos os matemáticos após eles, as regras do cálculo algébrico são efetivamente invariáveis. Inicialmente verificadas sobre os números naturais, seu domínio de aplicação deve-se estender naturalmente à todos os novos objetos originados pelo jogo das operações.

Ângulos e quantidades imaginárias

Em 1707 Moivre publica a solução de equações de grau ímpar, por um método análogo ao de Cardano :

Para n ímpar, a equação :

$$ny + \frac{n^2-1}{2.3}ny^3 + \frac{n^2-1}{2.3}.\frac{n^2-9}{4.5}ny^5 + \ldots = a$$

tem por solução $y = \frac{1}{2}\sqrt[n]{a+\sqrt{a^2+1}} - \frac{1}{2\sqrt[n]{a+\sqrt{a^2+1}}}$

Como exemplo ele resolveu, para n = 5, a equação $5y + 20y^3 + 16y^5 = 4$ e usou uma tábua de logaritmos para estimar as raízes quintas.

Por outro lado se os termos da equação são alternativamente positivos e negativos, a solução é :

$$y = \frac{1}{2}\sqrt[n]{a+\sqrt{a^2-1}} - \frac{1}{2\sqrt[n]{a+\sqrt{a^2-1}}}$$

Como exemplo ele resolveu, para n = 5, a equação $5y - 20y^3 + 16y^5 = \frac{61}{64}$

Moivre diz que se os cálculos forem difíceis, mesmo com uma tabela de logaritmos, então pode-se usar uma tabela de senos fazendo-se o seguinte:

a = $\frac{61}{64}$ = 0,953125 é o seno de 72º 23' , portanto a sua quinta parte é 14º28' e o seno de 14º28' é 0,24982 que é aproximadamente ¼ , que é exatamente a solução da equação .
Mas ele nada esclarece sobre a enigmática troca da tabela de logaritmos pela tabela de senos, nem sobre a divisão do argumento por cinco.

Em 1722 ele revela o artifício utilizado para descobrir a forma da solução:

Se x = cos ϕ e t = cos nϕ

Nesse caso existe z verificando simultaneamente:

$$\begin{cases} 1-2tz^n+z^{2n}=0 \\ 1-2xz+z^2=0 \end{cases}$$

Resolvendo $z^2 - 2xz + 1 = 0$:

z = $\frac{2x+\sqrt{4x^2-4}}{2}=x+\sqrt{x^2-1}$ = cos ϕ + isen ϕ

(Se x = cos ϕ então sen ϕ = $\sqrt{1-x^2}$)

Resolvendo $1 - 2t\,z^n + z^{2n} = 0$ vem:

z^n = $\frac{2t+\sqrt{4t^2-4}}{2}=t+\sqrt{t^2-1}$ = cos nϕ + isen nϕ

Este resultado mostra efetivamente o que hoje nós chamamos de fórmula de Moivre

$(\cos\phi + i\,\text{sen}\,\phi)^n = \cos n\phi + i\text{sen}\, n\phi$

Em 1730 Moivre enuncia o seguinte lema :

Se t = cosA e x = cos $\frac{A}{n}$, então

$$x = \frac{1}{2}\sqrt[n]{t+\sqrt{t^2-1}} + \frac{1}{2\sqrt[n]{t+\sqrt{t^2-1}}}$$

Com efeito colocando-se $z = \sqrt[n]{t+\sqrt{t^2-1}}$ = (cos A + isen A)$^{1/n}$, tem-se

x = cos $\frac{A}{n}$ = $\frac{z+z^{-1}}{2}$ e portanto, 1 - 2xz + z^2 = 0 de onde

z = $x+\sqrt{x^2-1}$ = cos $\frac{A}{n}$ + isen $\frac{A}{n}$, do mesmo modo 1 - 2t z^n + z^{2n} = 0

implica que t = cos A = $\frac{z^n+z^{-n}}{2}$

Moivre não provou esses resultados de maneira genérica, quem realizou isto foi Leonhard Euler (1707 - 1754), considerado o mais prolífico matemático de todos os tempos. Numa carta endereçada a Jean Bernoulli, em 18 de outubro de 1740, ele afirma que y = 2 cosϕ e y = e^{ix} + e^{-ix} eram ambas soluções da mesma equação diferencial (o que reconheceu através do desenvolvimento em série das soluções) e que, portanto, deviam ser iguais. Em 1743 publicou:

$$\cos\phi = \frac{e^{i\phi}+e^{-i\phi}}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\phi = \frac{e^{i\phi}-e^{-i\phi}}{2i}$$

Em 1748 ele redescobriu a fórmula de Cotes, demonstrou a de De Moivre e estendeu sua validade para todo expoente n real. Com isso, a existência de raízes no campo complexo ficou definitivamente estabelecida. Eis o que Euler publicou em *Introduction à l'analyse infinitésimale - 1748*

A partir da decomposição em fatores complexos

$(\text{sen} z)^2 + (\cos z)^2 = (\cos z + \sqrt{-1}\,\text{sen} z)(\cos z - \sqrt{-1}\,\text{sen} z) = 1$

ele tem a idéia de desenvolver

$(\cos z + \sqrt{-1}\,\text{sen} z)(\cos y + \sqrt{-1}\,\text{sen} y)$ e obtém

$\cos z \cos y - \text{sen} z\, \text{sen} y + \sqrt{-1}(\text{sen} z \cos y + \text{sen} y \cos z)$ e daí :

$\cos(z + y) + \sqrt{-1}\,\text{sen}(z + y)$

depois faz

$(\cos z + \sqrt{-1}\,\text{sen} z)^2 = \cos 2z + \sqrt{-1}\,\text{sen}\, 2z$ e

$(\cos z + \sqrt{-1}\,\text{sen} z)^n = \cos nz + \sqrt{-1}\,\text{sen}\, nz$ faz ainda

$(\cos z - \sqrt{-1}\,\text{sen} z)^n = \cos nz - \sqrt{-1}\,\text{sen}\, nz$

Finalmente por combinação tem :

$$\cos nz = \frac{(\cos z + \sqrt{-1}\,\text{sen}\, z)^n + (\cos z - \sqrt{-1}\,\text{sen}\, z)^n}{2}$$

$$\text{sen}\, nz = \frac{(\cos z + \sqrt{-1}\,\text{sen}\, z)^n + (\cos z - \sqrt{-1}\,\text{sen}\, z)^n}{2\sqrt{-1}}$$

Para obter a maneira clássica de suas fórmulas, Euler introduziu então a exponencial por um argumento de análise infinitesimal do qual ele mantinha sigilo. Eis como ele fez:

138. Supondo agora nas fórmulas precedentes o arco z infinitamente pequeno, e n um número infinitamente grande i , afim de obter para i.z um valor finito v; nós teremos portanto

nz = v, e $z = \frac{v}{i}$ *, e por conseqüência*

senz = $\frac{v}{i}$ *e cos z = 1 substituindo-se nas fórmulas*

$$\cos nz = \frac{(\cos z + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,z)^n + (\cos z - \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,z)^n}{2}$$

$$\mathrm{sen}\, nz = \frac{(\cos z + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,z)^n + (\cos z - \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,z)^n}{2\sqrt{-1}}$$

obteremos :

$$\cos v = \frac{(1+\frac{v\sqrt{-1}}{i})^i + (1-\frac{v\sqrt{-1}}{i})^i}{2}$$

$$\mathrm{sen}\, v = \frac{(1+\frac{v\sqrt{-1}}{i})^i - (1-\frac{v\sqrt{-1}}{i})^i}{2\sqrt{-1}}$$

Nesse ponto Euler diz que do capítulo anterior é sabido que $\left(1+\frac{z}{i}\right)^i = e^z$

onde sendo *e* é a base dos logaritmos hiperbólicos; e daí

cosv = $\frac{e^{+v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}}}{2}$ e

senv = $\dfrac{e^{+v\sqrt{-1}} - e^{-v\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$

compreende-se por aí como as quantidades imaginárias se reconduzem à dos senos e à dos cossenos de arcos reais:

$$e^{+v\sqrt{-1}} = \cos v + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\, v$$

e

$$e^{-v\sqrt{-1}} = \cos v - \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\, v$$

Com a fórmula $e^{i\Phi} = \cos\Phi + i\,\mathrm{sen}\,\Phi$ (como escrevemos atualmente) Euler explicou a d'Alembert que Bernoulli estava errado quando dizia que números opostos tem o mesmo logaritmo. Ele disse que:

$e^{i\Phi} = \cos\Phi + i\,\mathrm{sen}\,\Phi$ vale para todos os ângulos medidos em radianos, e em particular para $\phi = \pi$,

$e^{i\pi} = \cos\pi + i\,\mathrm{sen}\,\pi$ ou seja, $e^{i\Phi} = -1$ e daí ln(-1) = πi

Dessa maneira Euler mostra que os logaritmos dos números negativos não são reais como supunham Bernoulli e d'Alembert , mas imaginários puros.

Euler chama a atenção para outro fato que resulta da sua fórmula . Qualquer número, positivo ou negativo, não tem apenas um único logaritmo, mas uma infinidade. Para mostrar isso faz:

Da relação $e^{i(\phi\pm 2k\pi)} = \cos\phi + i\,\mathrm{sen}\,\phi$ vê-se que se lna = c então

ln a = c $\pm$ 2kπi pois e $^{c \pm 2k\pi i}$ = $e^{c}.e^{\pm 2k\pi i} = e^{c}(\cos 0 + i\,\mathrm{sen}\, 0) = e^{c}$ = a

Euler compreendia e utilizava muito bem os números complexos, mas tinha também grandes dúvidas sobre a sua legitimidade. Em *Vollständige Anleitung zur Algebra*, publicada primeiro em Russo, em 1768-69, e depois em alemão, em 1770, ele escreve:

> Uma vez que todos os números concebíveis são maiores do que 0, ou menores do que 0 ou iguais a 0, é claro que a raiz quadrada de um numero negativo não pode ser incluída entre os números possíveis. Consequentemente, devemos dizer que estes são números impossíveis. E esta circunstância nos conduz a tais números, que por sua natureza são impossíveis, e que são chamados costumeiramente imaginários, pois eles só existem na imaginação.

Como conseqüência, ao fim do século dezoito as quantidades imaginárias são desprovidas de sentido, tanto que De la Chapelle escreveu no seu *Tratado das seções cônicas* publicada em 1765 :

> Veja bem que há uma grande diferença entre uma grandeza imaginária e uma grandeza igual a nada ou a zero; parece que uma grandeza igual a nada não é um absurdo; ela é possível quando uma quantidade é cancelada por uma outra, enquanto que uma quantidade imaginária é uma quantidade absurda, ou que implica contradição. Você não poderá dizer que uma quantidade imaginária possa ser considerada como zero, isto é algo pior.

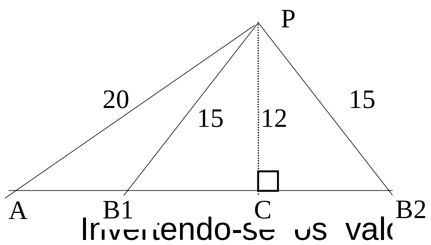
A REPRESENTAÇÃO GRÁFICA

O início do século XIX vai se constituir um momento importante da história dos números complexos, uma vez que com os trabalhos independentes de Wessel (1797), l'Abbé Buée (1805), Argand (1806), Mourey (1828), Warren (1828) e Gauss (1831), as quantidades imaginárias vão enfim ganhar um sentido e encontrar uma outra forma de legitimação, que não a simples utilidade matemática. Esta tomada de sentido vai se efetuar no quadro geométrico, e será agora descrita.

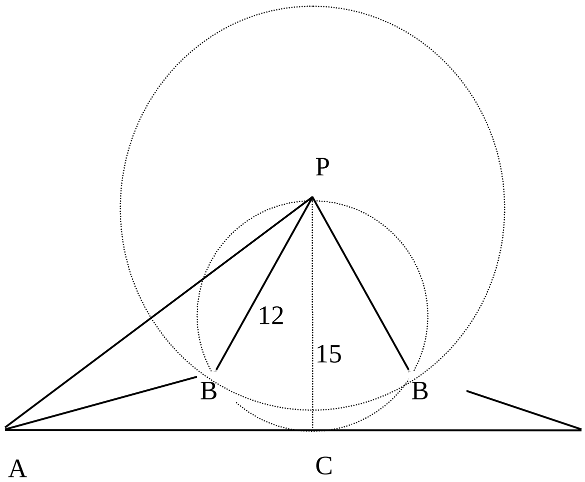
J.Wallis (1616-1703), propõe uma construção geométrica das raízes imaginárias de uma equação do segundo grau, através da situação na qual se deseja determinar a base AB de um triângulo APB, conhecendo-se os comprimentos de AP e PB e a altura PC. Se por exemplo tem-se PA = 20, PB = 15 e PC = 12, o tamanho AB é obtido como solução de uma equação do segundo grau e daí B terá duas posições, B_1 e B_2, correspondentes às duas raízes reais desta equação.

$BC^2 = PB^2 - PC^2$

$BC^2 = 225 - 144 = 81$ portanto $BC = \pm 9$



Invertendo-se os valores de PB e PC, a equação não mais terá soluções reais, e isto Wallis interpreta dizendo que o ponto B não pode mais pertencer à reta AC. Admitindo-se sair dessa reta, pode-se encontrar duas posições para B, conforme o desenho abaixo (no qual o ângulo reto situa-se em B e não em C.)

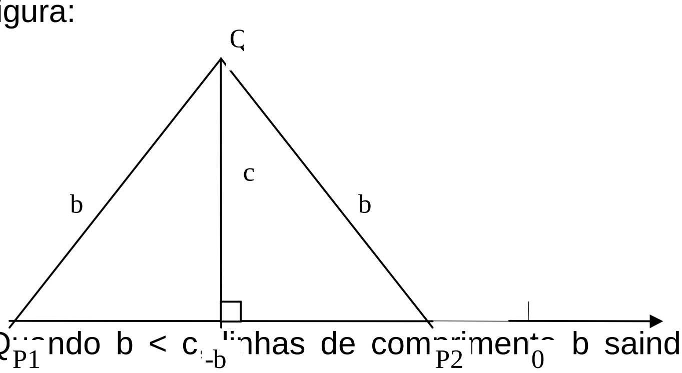


Ele generaliza em seguida a construção para uma equação do segundo grau qualquer

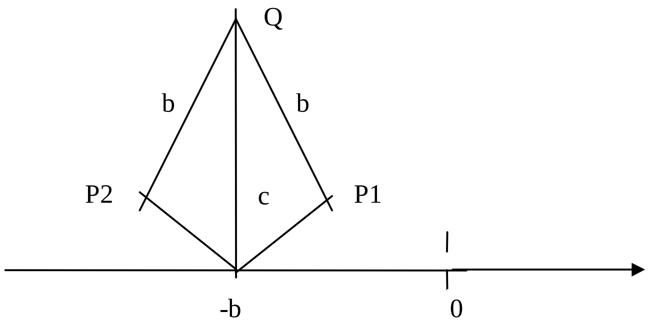
$x^2 + bx + c^2 = 0$,   b , $c \geq 0$

cujas raízes são $x = -b \pm \sqrt{b^2 - c^2}$ que são reais quando $b^2 \geq c^2$.

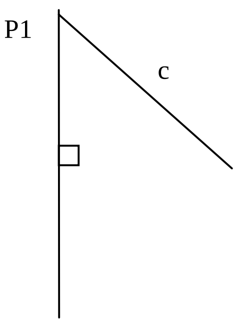
Nesse caso as raízes podem ser representadas por pontos P1 e P2 na reta dos números reais que são determinadas pela construção geométrica da figura:

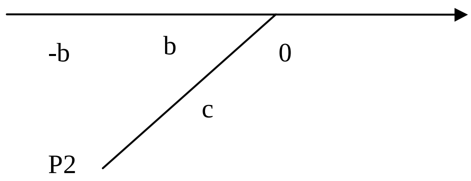


Quando b < c, linhas de comprimento b saindo de Q não alcançam a reta numerada, assim os pontos P_1 e P_2 não podem estar na reta e Wallis procurou-os então “fora da reta...(no mesmo plano).” Dessa maneira a representação de P1 = -b + i$\sqrt{c^2 - b^2}$ e de P2 = -b - i$\sqrt{c^2 - b^2}$ seria conforme a figura abaixo:



Vejamos atualmente, para compararmos, como representamos P1 e P2





Em 1798 Caspar Wessel (1745 - 1818), um agrimensor norueguês, autodidata, publica um artigo intitulado *Sobre a representação analítica da direção: uma tentativa*, e dá sua contribuição para o entendimento dos números complexos através de representações gráficas quando publica o seguinte:

> Designemos por +1 a unidade positiva retilínea e + ε uma certa outra unidade perpendicular à unidade positiva e tendo a mesma origem; então o ângulo de direção de +1 será igual a 0º , o de -1 a 180º, o de + ε a 90º e o de - ε a -90º ou 270º . Pela regra de que o ângulo de direção do produto é igual à soma dos ângulos dos fatores, temos:
>
> (+1).(+1) = (+1)
> (+1).(-1) = (-1)
> (-1).(-1) = (+1)
> (+1).(+ ε) = (+ε)
> (+1).(- ε) = (-ε)
> (+ε).(+ ε) = (-1)
> (-1).(- ε) = (+ε)
> (+ε).(- ε) = (+1)
> (-ε).(- ε) = (-1)
>
> A partir disso vê-se que ε = $\sqrt{-1}$

Do mesmo modo como fazemos hoje em dia, Wessel representa o complexo a + bi pelo vetor do plano com origem O - a origem do sistema de eixos coordenados - e com ponto extremo no ponto P de coordenadas (a,b). Depois dá uma representação geométrica da soma de dois complexos a + bi e c + di, representando-os pelos vetores OP e OQ, respectivamente, e observando que a soma estará representada pela diagonal do paralelogramo construído sobre OP e OQ.

De forma análoga o produto desses complexos estará representado por um vetor OR tal que o comprimento de OR é o produto dos comprimentos de OP e OQ, e o ângulo que OR forma com o eixo Ox é igual à soma dos ângulos formados por OP e OQ com esse eixo.

Em 1806, um bibliotecário suíço, Jean Robert Argand (1768 - 1822) autodidata, dá também uma contribuição significativa para a compreensão geométrica dos números complexos através de representações gráficas, quando publica um pequeno livro intitulado *Ensaio sobre a maneira de representar as quantidades imaginárias nas construções geométricas*. Ele observa que se multiplicamos +1 por i obtemos i e se multiplicarmos esse resultado por i obtemos -1. Ele pensa então em representar i por uma rotação de 90º no sentido anti-horário

Esses trabalhos quase não tiveram efeito sobre os matemáticos da época; a memória de Wessel só foi notada quando publicada em tradução francesa em 1897, e o livro de Argand, embora causasse uma certa controvérsia, teve pouco impacto, talvez por ter sido a única contribuição dele à Matemática. Quem verdadeiramente tornou a interpretação geométrica amplamente aceita foi Carl Friderich Gauss (1777-1855).

Tendo em vista suas demonstrações do teorema fundamental da álgebra, ele já conhecia a interpretação gráfica dos números complexos em torno de 1815. E em 1831 ele escreveu um artigo muito explicito sobre a questão. Diz na introdução :

> O autor tem considerado há vários anos esta parte importante da matemática sob um ponto de vista diferente, que permite conferir às quantidades imaginárias, como as negativas, uma existência objetiva.

> O significado intuitivo dos números complexos fica completamente estabelecido e não se precisa mais para admitir estas quantidades no domínio da aritmética.

Ele observa também que se as unidades 1, -1, $\sqrt{-1}$ não fossem chamadas de positiva, negativa e imaginária, mas direta, inversa e lateral, as pessoas não teriam tido a impressão de que há algo de misterioso nesses números.

A observação de Gauss a respeito da existência objetiva dos números complexos ilustra a visão da Matemática na época. Parece que o fato de esses números poderem ser representados geometricamente lhes dá essa existência. Assim parece que para os matemáticos daquele período, os entes geométricos tinham um tipo de realidade que faltava aos objetos da aritmética.

Finalmente a formalização completa dos números complexos como pares ordenados de números reais será desenvolvida por William Rowan Hamilton (1805-1865) em1833, e ainda Augustin Cauchy (1789-1857) daria outro tipo de formalização em 1847.

2.COMENTÁRIO EPISTEMOLÓGICO

Michèle Artigue no seu artigo “Quatre etapes dans l’histoire des nombres complexes: quelques commentaires epistemologiques et didatiques”, faz comentários didáticos e epistemológicos sobre o surgimento dos números complexos. A seguir, até a página 73, transcreveremos seus comentários epistemológicos.

Quando se começa a falar em números complexos pensa-se que vão aparecer novos números, mas pode-se ver pela história, que não são novos números que surgem, mas sim novos operadores.

O fenômeno é, para efeito de cálculos, análogo ao que vai se passar com os números negativos: ou seja, os sinais + e - designam as operações (a adição e a subtração) e os números a + b e a - b são quantidades bem definidas quando a é maior que b. Calcula-se portanto tranqüilamente, por exemplo:

(4 + 1) + (4 - 1) = 8 (somou-se 1 ao 4 e tirou-se 1 do 4, a soma das duas parcelas será igual a 4 + 4.

Entretanto quando se depara com (4 + 6) + (4 - 6) (somou-se 6 ao 4 e tirou-se 6 do 4, a soma das duas parcelas será igual a 4 + 4), confirmando-se a permanência do algoritmo das operações obter-se-á ainda o resultado 8

Mas em nenhum momento alguém teve a necessidade de ver o número (4-6), isto é, para nós, o número negativo -2. Este desejo de não se introduzir o objeto isolado (não se pode escrever o símbolo -6, sem que o símbolo +6 esteja também presente noutra parte, afim de assegurar o significado do resultado) vai perdurar por muito tempo, tendo em vista o que diz Carnot (em La geometrie de position-1803):

Eu concluí que:

1º) Toda quantidade negativa isolada é um ser da razão, e aquelas que se encontram no cálculo não são mais que simples formas algébricas, incapazes de representar qualquer quantidade real e efetiva.

2º) Cada uma dessas formas algébricas são consideradas, com exceção do seu sinal, como a diferença de duas quantidades absolutas, que é obtida fazendo-se a maior menos a menor.

No estudo da resolução das equações do terceiro grau, depara-se com uma situação parecida com a dos números negativos uma vez que chega-se à:

$(4 + \sqrt{-1}\ ) + (\ 4 - \sqrt{-1})$

e as regras de cálculo vão assegurar a eliminação de $+\sqrt{-1}$ e $-\sqrt{-1}$.

Ao fim do século XVI, portanto, enquanto as quantidades imaginárias não eram ainda, nada mais do que símbolos para se efetuar cálculos, nenhum objeto novo apareceu, a equação problema a resolver está inteiramente no campo real e a solução encontrada é também real. A novidade consiste precisamente em fazer funcionar um método conhecido, forçando as condições de sua aplicação à circunstâncias não habituais. Por exemplo:

Poderia se interpretar diferentemente uma passagem como essa, na qual Cardano (Ars Magna,1545) coloca o seguinte problema : "Como dividir um bastão de comprimento 10 para que o retângulo construído sobre seus dois pedaços resultem numa área de 40?" Uma resposta é $5 + \sqrt{-15}$ e a outra é $5 - \sqrt{-15}$. Parece entretanto arriscado dizer que essas quantidades possam ser consideradas como soluções para esse problema real. O contexto desta passagem que explicita o paralelismo dos cálculos com o caso real, incita de preferência a se considerar esse resultado como uma justificativa do algoritmo das operações.

Constata-se no caso dos números complexos a presença da operação sobre os objetos, da função sobre a ação, da transformação sobre os elementos transformados. Dentro de uma perspectiva histórica, no jogo da dialética ferramenta/objeto, é a ferramenta que funciona quase sempre primeiro; ela parece mesmo ser a origem da criação do objeto, o qual se construirá pedaço à pedaço pela soma das ações que a utilizam.

3.COMENTÁRIO DIDÁTICO

Transcrevemos a seguir, até a página 76, os comentários didáticos que Michele Artigue (1992) tece, no seu artigo, sobre o surgimento dos números complexos.

Para a didática, esta primeira fase da história dos números complexos é de certa maneira tranquilizadora, em particular porque ela coloca em evidência a pertinência epistemológica de certas ferramentas ou apoios didáticos.

Nesta análise didática dois pontos serão destacados:

- o papel motor dos desequilíbrios cognitivos
- a distinção entre os pólos ferramenta e objeto de um conceito matemático

O PAPEL MOTOR DOS DESEQUILÍBRIOS COGNITIVOS

No quadro da resolução de equações, não é o grau 2 que vai motivar o surgimento das quantidades imaginárias, mas sim o grau 3. A resolução das equações do segundo grau não levantam nenhum problema cognitivo nem criam qualquer desequilíbrio.

O desequilíbrio nasce com a equação do terceiro grau, ele surge quando tentando-se resolver uma equação desse tipo, com a fórmula de Cardano e sabendo-se que ela tem solução real, depara-se com uma raiz quadrada de número negativo. A certeza da existência da solução real (que não ocorria nas equações do 2º grau) é que encoraja alguns matemáticos a extraírem raízes quadradas de números negativos

De mais, a solução desse desequilíbrio, não passa pela construção dos números complexos, mas por ações mais modestas: a introdução de uma nova representação e a adaptação conveniente à esta representação das regras de cálculo usuais, obedecendo o principio de permanência do cálculo.

A DIFERENÇA ENTRE OS PÓLOS FERRAMENTA E OBJETO DE UM CONCEITO MATEMÁTICO.

O que aparece no cenário matemático com os trabalhos dos algebristas italianos não é um objeto matemático constituído, claramente definido e legitimo. É uma representação, e a adaptação de uma técnica existente para essa representação. As quantidades imaginárias vão se constituir em torno da notação $\sqrt{-1}$ e funcionar de início, essencialmente como as ferramentas da atividade matemática

Eles terão assim, durante muito tempo, a finalidade de resolver problemas reais sem contudo chegar a um resultado definitivo.

Este fenômeno não é privilégio apenas dos números complexos. Ele origina numerosos conceitos matemáticos, que são usados como ferramentas da atividade matemática num certo número de problemas, antes de serem identificados como objetos do saber matemático e como tal estudados por eles mesmos.

Na teoria das situações didáticas elaboradas por G.Brousseau (1986), cada conhecimento nasce da adaptação à uma situação especifica e, em sentido inverso, "cada conhecimento pode se caracterizar por uma situação a-didática na qual preservam-se os sentidos". Ainda assim o conhecimento visado é de inicio chamado à funcionar como ferramenta de resolução de problema dentro da adaptação.

Depois então, progressivamente, através de um processo de institucionalização ele vai se tornar um objeto legitimo e reconhecido. R. Douady centra agora de maneira mais fundamental a teoria que ela desenvolveu sobre certas distinções entre os pólos objeto e ferramenta dos conceitos matemáticos por meio da noção da “dialética ferramenta-objeto”

CAPÍTULO IV

ESTUDO DA TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Neste capítulo faremos um estudo da transposição didática do conceito de números complexos, visando verificar o conjunto de adaptações e transformações que o saber sábio sofre para ser ensinado, bem como os obstáculos que estas transformações provocam nos alunos. Para tanto vamos analisar a Proposta Curricular para o Ensino da Matemática do Estado de São Paulo, livros didáticos, e vamos também levantar as concepções dos alunos sobre o conceito dos números complexos, através de um questionário.

1.ANÁLISE DA PROPOSTA CURRICULAR PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA DO 2º GRAU.

Segundo a Proposta Curricular para o ensino da Matemática -2º grau - publicada pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo em 1994, a participação do aluno na elaboração de seu conhecimento é um dos pontos fundamentais da concepção atual de aprendizagem. Esta participação deve porém ser orientada tendo em vista os conceitos a serem construídos, bem como as tarefas a serem realizadas para que esta construção se efetive .

Para tanto, a função do professor deve ser a de orientador de aprendizagem, isto é, a de instigador de idéias, de orientador de rumos, num trabalho com erros e acertos. Assim a proposta de desenvolvimento de um tema, com os alunos, pode ter como ponto de partida a colocação de um problema, a partir do qual se iniciará a discussão das idéias centrais do tema em questão, levando em conta os objetivos que se quer atingir.

Por problema, entende-se uma situação que desafie o aluno a refletir, a levantar hipóteses, a procurar caminhos para solucioná-la, a buscar novas aplicações de conceitos e a aprofundar a compreensão dos mesmos, a exercitar a criatividade, a generalizar propriedades, a descobrir outras soluções e a discuti-las, verificando as condições para que elas sejam válidas.

É importante um trabalho construtivo com os erros, encarando-os como parte integrante da elaboração do saber matemático, o qual necessita passar por fases de ensaios e erros, por confrontações e por justificações que levam à reformulação do raciocínio e do processo de resolução feitos.

Deve-se procurar propor ao aluno, problemas abertos que dependendo da interpretação ou da imposição de determinadas condições, poderão apresentar diferentes soluções. Os problemas que não têm solução, e os que têm mais de uma, contribuem para que não se instale no estudante a crença de que todo problema tem uma e uma só solução.

A discussão do porquê desta ou daquela solução, da possibilidade ou não de soluções, leva à reflexão sobre os dados e as condições impostas pelo problema, necessários à escolha dos procedimentos que levam a solucioná-lo, bem como à compreensão da linguagem em que estão expressos e a uma certa desenvoltura na utilização da mesma.

Ainda segundo a Proposta Curricular é conveniente que a introdução dos números complexos seja feita a partir de problemas significativos para o aluno do ponto de vista tanto da Matemática quanto do seu dia-a-dia. Contar um pouco da história dos números complexos também pode ser bastante motivador. Relacionar a radiciação de números complexos com elementos dos polígonos regulares é um trabalho de aplicação desse conteúdo, bastante interessante para o aluno, que, a esta altura, tem a oportunidade de tratar números e geometria entrosadamente.

Tendo em vista essas considerações da Proposta Curricular e entendendo que realmente o ensino deva se processar dessa maneira, cremos que deveríamos fazer com que o ensino da Matemática se aproximasse cada vez mais da sua história, pois os alunos poderiam saber quais as necessidades que fizeram surgir determinados conceitos, como logaritmos, números complexos etc., levando-os a não achar a Matemática uma disciplina na qual os conceitos são “inventados”.

Apesar de a Proposta Curricular sugerir situações-problema para se introduzir vários conceitos matemáticos, não sugere nenhuma para se introduzir o conceito de número complexo.

Mas como é introduzido o conceito de Números Complexos em nossas escolas?

2.ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS

Analisando alguns livros didáticos, que citaremos em seguida, pudemos constatar que atualmente nenhum deles aborda os números complexos através de uma equação do terceiro grau.

Alguns os abordam a partir de pares ordenados de números reais, para os quais se definem a adição e a multiplicação de modos determinados. São os livros:

Dante/Giovanni - Editora - FTD -1995, Paulo Boulos/Renate Watanabe - Editora Nacional - 1979.

Outros simplesmente apresentam os números complexos como números da forma a+bi, com a e b pertencentes a R e $i^2 = -1$ e em seguida começam a operar com eles. São os seguintes :

Vitor Setani - Editora Ática - 1984, Bezerra - Editora Scipione - 1994, Nilton Lapa/Sidney Luiz Cavalcante - 1984, Bianchini/Paccola - Editora Moderna - 1990

Outros ainda introduzem os números complexos como sendo as soluções de equações do segundo grau que não admitem soluções reais, como $x^2 + 1 = 0$. Esses são dos seguintes :

Signorelli- Editora Ática - 1992, Bongiovanni /Visoto/Laureano - Editora Ática -1993, José Ruy Giovanni / José Roberto Bonjorno / José Ruy Giovanni Jr.- Editora FTD-1988, Roku/ Carlo/ Kazuhito - Editora Saraiva - 1991, Antonio dos Santos Machado - Editora Atual 1995, Gentil / Marcondes / Grecco / Sérgio - Editora Ática - 1989, Paulo Bucchi - Editora Moderna - 1995.

Dois desses livros citam a fórmula de Cardano-Tartaglia: o de Bongiovanni/Visoto/Laureano no qual ele conta um pouco da história do surgimento dos números complexos e o de Bianchini/Paccola.

Somente em dois livros analisados, encontra-se uma abordagem dos números complexos de acordo com a história. Neles o leitor vai acompanhando as principais motivações e dúvidas através das quais esses números foram desenvolvidos. Um desses livros é chamado Matemática Aplicada, dos autores Trotta, Imenes e Jakubovic publicado pela Editora Moderna em 1979. Na época um livro bastante inovador, mas que pelo fracasso de vendas, logo deixou de ser publicado. O outro livro é de Lisboa e chama-se Conceitos Fundamentais da Matemática, foi escrito em 1941 pelo professor Bento de Jesus Caraça.

Com relação à seqüência didática, quase todos os livros analisados apresentam os números complexos e em seguida as equações polinomiais. Apenas o “Matemática Aplicada” apresenta em primeiro lugar as equações polinomiais, faz pesquisas de raízes inteiras, racionais e reais, introduz e desenvolve o conceito de números complexos e volta às equações polinomiais trabalhando agora com as raízes complexas.

Pode-se concluir que os livros didáticos analisados, não dão importância à história do surgimento dos números complexos.

Os autores que abordam o conceito de números complexos propondo a resolução de uma equação do 2º grau : $x^2 + 1 = 0$, prosseguem dizendo que essa equação não tem solução no conjunto dos números reais, mas que existe um conjunto numérico mais amplo chamado de conjunto dos números complexos simbolizados com a letra C, no qual há números cujos quadrados são negativos. Basta para tanto considerar uma unidade imaginária i com a propriedade $i^2 = -1$.

Em seguida eles dizem que um número complexo pode ser escrito na forma a + bi e que o conjunto C pode ser representado num sistema de coordenadas cartesianas, no qual coloca-se o *a* no eixo horizontal, e o *b* no eixo vertical. Daí definem igualdade de números complexos e as operações adição, subtração, multiplicação e divisão.

Esses autores não seguem a história do surgimento dos números complexos, pois esses se originam numa equação do terceiro e não do segundo grau. Eles não introduzem esse novo conceito como uma ferramenta, mas sim como objeto de estudo.

As concepções que essa abordagem pode desenvolver nos alunos:

Esse tipo de abordagem faz parecer que a Matemática é mágica, e que nunca haverá obstáculos para a mesma, pois qualquer que seja a dificuldade pode-se inventar algum conceito, ou alguma operação ou alguma definição que supere essa dificuldade. Parece que as coisas caem do céu, ou seja alguém decidiu que era momento de "inventar os números complexos" e simplesmente diz que $i^2 = -1$, e que um número complexo é da forma a + bi. A partir desse momento estamos prontos para definir as operações e fazer milhares de exercícios. O aluno consegue fazer os exercícios mas não sabe qual a necessidade desse novo conjunto de números. Será que é só para fazer exercícios de Matemática ? Quanto à seqüência podemos observar que historicamente os números complexos surgem quando da resolução de equações polinomiais do terceiro grau (e não do segundo grau) e os autores invertem tudo, quando colocam os números complexos antes das equações polinomiais

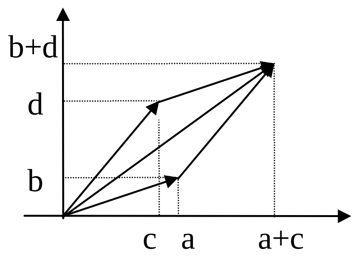
Uma amostra de exercícios:

Em todos os livros analisados os exercícios são do mesmo tipo, são feitos para o aluno treinar as operações definidas com números complexos. Por exemplo:

1) Dados $z_1 = 3 + 6i$, $z_2 = 2 + 5i$ calcule $z_1 + z_2$.

Pode-se resolver algébrica ou graficamente. Algebricamente o aluno só precisa do conceito de soma de números reais e graficamente ele necessita entender o número complexo como um par ordenado, este como um vetor e saber soma de vetores. Não há ferramentas implícitas.

Existe uma possibilidade de mudança de quadro, do algébrico para o geométrico, mas essa mudança não é sugerida pelo texto do problema e provavelmente não será efetuada por iniciativa do aluno.



A resposta é sugerida, e também o método de resolução.

2) Calcular as raízes quadradas de $z = 1 + i\sqrt{3}$

Pode-se resolver esse exercício descobrindo-se o número complexo a + bi tal que $(a + bi)^2 = 1 + i\sqrt{3}$ ou então aplicando-se a fórmula de Moivre. No primeiro caso basta saber elevar um número complexo ao quadrado e no segundo caso deve-se ter um conhecimento das funções trigonométricas seno e cosseno.

- Não dá para estabelecer um resultado geral.

- Não há necessidade de mudança de quadro.

- A resposta e o método são sugeridos pelo enunciado.

Acreditamos que esse tipo de abordagem provoca nos alunos a idéia que a Matemática é uma disciplina desinteressante, difícil, repleta de regras a serem decoradas. Essa abordagem os obriga a fazerem exercícios parecidos com os que o professor fez, e daí a Matemática se torna uma disciplina apenas voltada para ela mesma, com o objetivo de se resolverem exercícios, que não se sabe para que servem.

3. CONCEPÇÕES INICIAIS DOS ALUNOS SOBRE O CONCEITO DE NÚMEROS COMPLEXOS

Quando estudamos o desenvolvimento histórico dos números complexos percebemos que a princípio estes números não eram aceitos como tal, mas apenas como um símbolo matemático, pois eles não indicavam quantidades. Pelo mesmo motivo, suspeitamos que os alunos também não devam aceitá-los como números, e isso poderá ser um obstáculo epistemológico. Por outro lado a representação geométrica dos números complexos, que demorou segundo a história, trezentos anos para surgir, não acreditamos que possa se constituir num obstáculo epistemológico, pois os alunos, no terceiro ano do 2º grau, já trabalham há bastante tempo com o sistema de coordenadas ortogonais.

Para nos certificarmos que realmente os alunos não consideram os números complexos como números com os quais pode-se operar, e chegar à soluções reais de problemas, que eles julgam a Matemática uma disciplina na qual os conceitos surgem do nada, simplesmente da invenção de algumas pessoas, e que a representação geométrica não se constitui num obstáculo epistemológico para eles, aplicamos os testes abaixo, em 31 alunos do 1º ano de Engenharia Mecânica da Universidade de Mogí da Cruzes, que haviam estudado, no 2º grau, os números complexos (os outros 29 alunos dessa classe nunca haviam visto tal assunto). Os resultados obtidos seguem após cada teste.

Questionário e análise dos resultados.

1- Assinale as alternativas que mais se aproximam da sua idéia a respeito da Matemática.

a) A Matemática é uma disciplina difícil, pois os conceitos são inventados por pessoas em momento de inspiração, de maneira teórica, nada tendo a ver com fatos concretos da nossa vida, como números complexos, logaritmos, etc. Grande parte dos conceitos matemáticos são dados na escola somente para o aluno fazer exercícios que nada têm a ver com a realidade e depois fazer uma prova.

b) Os conceitos matemáticos nasceram de situações concretas do dia a dia.

Esta questão resultou em 24 respostas b) e 7 respostas a) dando a entender que esses alunos que responderam b) devam ter aprendido os conceitos matemáticos através de problemas concretos, mas pelas outras respostas pode-se concluir que eles apenas acreditam nessa opção, mas não aprenderam dessa maneira.

2) Números complexos, são aqueles do tipo a + bi onde a e b são números reais e $\sqrt{-1} = i$ ou $i^2 = -1$. Você já estudou esse tipo de números?

a) sim b) não

De 60 alunos na classe, 31 haviam estudado os números complexos, e 29 não, apesar de constar nos programas dos vestibulares das nossas principais Universidades. Colocamos essa pergunta para distribuir o questionário para todos, sem ficar perguntando quem já havia estudado, depois só consideramos quem já havia visto os números complexos.

3) Como você acha que os números complexos foram descobertos?

a) Quando um matemático ao resolver uma equação do segundo grau se deparou com um discriminante negativo($\Delta = b^2 - 4ac$), e para continuar a resolução ele resolveu criar um número i tal que $i^2 = -1$

b) Os números complexos foram descobertos quando um matemático tentava resolver uma equação do terceiro grau.

Todos os alunos colocaram opção a) nessa pergunta, evidenciando que eles não se depararam com o conceito de números complexos através de um problema, como na história, resolvendo uma equação do terceiro grau, que provoca a necessidade da extração da raiz quadrada de um número negativo, mas sim através de uma equação do 2º grau onde simplesmente os autores dos livros criam um número i tal que $i^2 = -1$.

4) Você já resolveu algum problema concreto, do dia-a-dia, que apesar de na sua resolução aparecer raiz quadrada de um número negativo, o resultado final foi um número real, como R$2,00, 5metros, enfim números que representavam uma quantidade?

a) sim b) não

Se você respondeu sim, como era esse problema?

Todos os alunos responderam não à essa pergunta, reforçando a análise feita no teste anterior.

5) Um dos itens abaixo é verdadeiro e o outro é falso. Baseado no seu conhecimento de números complexos, coloque V no verdadeiro e F no falso.

☐ Os números complexos, como por exemplo 2+ 3i, na realidade não são números, são apenas representações matemáticas, pois não representam uma quantidade, uma vez que ninguém diz: "ganho (2 + 3i) reais de salário".

☐ Os números complexos são números sim, pois com eles podemos resolver problemas do dia-a-dia e chegar a respostas que representam quantidades.

21 alunos responderam (V) na 2ª alternativa, mostrando que eles não julgam que os conceitos matemáticos são estudados sem finalidade e sim que devem ser conceitos úteis e talvez estejam esperando que mais tarde saberão para que serve, como alguns professores respondem quando questionados sobre a aplicação dos conceitos matemáticos. O restante dos alunos julgam que os números complexos são apenas símbolos matemáticos distantes da realidade.

6) Um número real nós podemos representar geometricamente na reta real. E um número complexo, é possível ser representado geometricamente?

a) sim b) não

Se você respondeu sim, tente no espaço abaixo, representar geometricamente o número 2 + 3i.

Apenas três alunos responderam corretamente esta questão, contrariando a nossa previsão de que eles não encontrariam dificuldades para representar geometricamente um número complexo.

O número 3 + 2i (forma algébrica) também pode ser representado pelo par ordenado (3, 2), tente realizar as operações abaixo com números complexos.

7) $(2 + 3i) + (5 + 2i) =$

19 alunos acertaram e 12 erraram, sendo que desses 12 , 7 deixaram a questão em branco.

8) $(4 , 5) + (2 , 6) =$

17 acertos e 14 erros, sendo que desses 14, 8 deixaram em branco.

9) $(2 + 3i) . (5 + 2i) =$

7 acertos e 24 erros sendo que a maior parte dos que erraram encontraram $10 + 6i$

10) $(4 , 5) . (2 , 6) =$

Nesta questão todos erraram, sendo que 15 alunos encontraram (8,30) como resposta

11) $(2+3i)^2 =$

Apenas um aluno acertou sendo que 17 alunos colocaram como resposta $4 + 9i^2$, ou seja, eles não sabiam como elevar $(a + b)^2$, fazendo $(a + b)^2 = a^2 + b^2$

12) $(2+2i)^5 =$

Todos erraram e os mesmos alunos que cometeram o erro na questão anterior, fizeram o mesmo aqui, dando como resposta $32 + 32i^5$

13) Raiz quadrada de $5 - 12i$

Todos erraram, sendo que 16 deixaram em branco. Dos que tentaram resolver esta questão, a resposta mais encontrada foi $\sqrt{5-12(-1)} = \sqrt{17}$

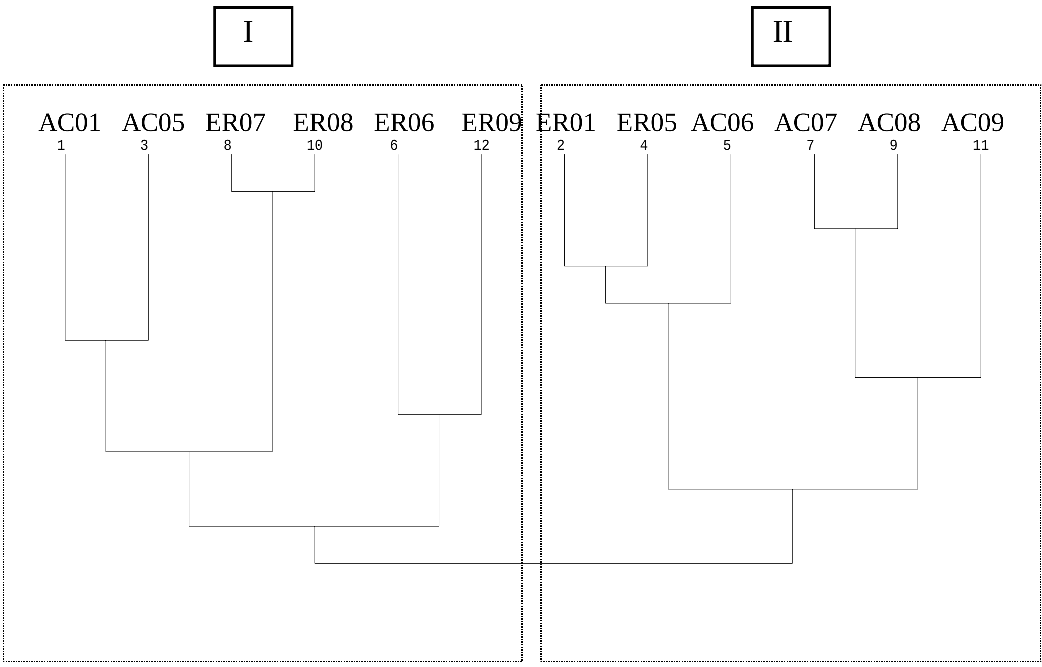
Feitos esses comentários sobre o questionário aplicado, passemos a análise dos dados através dos softwares CHIC (**C**lassificação **H**ierárquica, **I**mplicativa e **C**oesitiva) (Ag. Almouloud S. 1992) e CHADOC (Ag. Almouloud S. 1992).

Essa análise é feita através de gráficos que o computador constrói, quando fornecemos os dados. Neste trabalho nos interessam os resultados obtidos através desses programas, dos quais a teoria completa, encontra-se no Caderno de Educação Matemática - Volume III - PUC - SP 1997, de autoria do Prof. Dr. Saddo Ag. Almouloud

a) ANÁLISE DE SIMILARIDADE

Colocados os dados da pesquisa no programa CHIC (Classificação Hierarquica, Implicativa e Coesitiva) (Ag. Almouloud S. 1992), obtivemos o gráfico de similaridades abaixo. Este gráfico enumera as questões, não imprimindo seus códigos, por esse motivo colocamos a seguir os números impressos no gráfico com um resumo das respectivas questões às quais eles estão relacionados.

AC01 - 1 - Os conceitos matemáticos nascem de situações concretas.
ER01 - 2 - Os conceitos matemáticos são inventados.
AC05 - 3 - Os n^{os} complexos são números sim
ER05 - 4 - Os nº^{s} complexos são apenas representações matemáticas
AC06 - 5 - Um nº complexo pode ser representado geométricamente
ER06 - 6 - Um nº complexo não pode ser representado geométricamente
AC07 - 7 - Acertou (2 + 3i) + (5 + 2i)
ER07 - 8 - Errou (2 + 3i) + (5 + 2i)
AC08 - 9 - Acertou (4,5) + (2,6)
ER08 -10 -Errou (4,5) + (2,6)
AC09 -11 -Acertou (2 + 3i)(5+2i)
ER09 -12 -Errou (2 + 3i)(5 + 2i)



Quando da construção da tabela de variáveis para aplicação no programa CHIC, verificamos que algumas questões poderiam ser descartadas.

Somente um aluno acertou $(2 + 3i)^2$, nenhum aluno acertou os cálculos de $(2 + 3i)^5$, da raiz quadrada de $5 - 12i$ e do produto (4 , 5) . (2 , 6). Todos responderam que os números complexos surgiram quando um matemático ao tentar resolver uma equação do segundo grau se deparou com a raiz quadrada de um número negativo. Isso parece mostrar que os alunos não conseguem efetuar potenciação e radiciação de números complexos e é justamente através dessas operações que poderemos dar um significado para os mesmos.

A similaridade mais forte é a que existe entre as variáveis 8 e 10, erro na soma (2 + 3i) + (5 + 2i) e erro na soma (4 , 5) + (2 , 6) indicando que o número de alunos comuns à estas duas variáveis é o maior dentre todas as interseções de duas variáveis. Isto significa que muitos alunos, parece que tiveram um comportamento semelhante quando abordaram a questão (2 + 3i) + (5 + 2i), e a questão (4 , 5) + (2 , 6) . Talvez esses alunos por só operarem com números reais não compreendam que pode-se somar pares ordenados e inclusive alguns deles somaram 4,5 com 2,6 apesar da questão esclarecer que se tratava de pares ordenados.

As variáveis 1 e 3, apresentam um nível de similaridade que parece mostrar que muitos alunos tem um comportamento semelhante em relação a crer que os conceitos matemáticos nascem de situações concretas e que os números complexos são números sim e não apenas símbolos matemáticos. As variáveis 1 e 3 estão ligadas às variáveis 8 e 10, erro na soma (2 + 3i) + (5 + 2i) e erro na soma (4 , 5) + (2 , 6), por um índice de similaridade parecendo indicar que o fato dos alunos conhecerem que os conceitos matemáticos surgem de situações concretas e que os números complexos são realmente números, não significa que eles saibam operar com esses números. É muito comum nos dias de hoje os livros didáticos contarem a história da matemática, dizerem que os conceitos matemáticos surgem de situações concretas, mas quando introduzem um conceito matemático o fazem na maioria das vezes sem seguir a História.

A seguir vem a similaridade entre a questão 2 e a 4 ou seja, muitos alunos apresentam um comportamento semelhante quanto a ter a concepção que os números complexos foram simplesmente inventados num dia de inspiração de um matemático, sem um motivo aparente, e a concepção de que os números complexos são apenas símbolos matemáticos, na realidade não são números, pois não expressam uma quantidade. A similaridade entre as questões 2, 4 e 5 (um número complexo pode ser representado geometricamente), parece mostrar que muitos dos alunos acima, responderam que os números complexos podem ser representados geometricamente, permitindo-nos deduzir que apesar deles não reconhecerem um número complexo como um número propriamente dito, mas apenas como uma representação simbólica, e acharem também que os conceitos matemáticos são simplesmente inventados, isso não impede que eles possam ser representado geometricamente.

O gráfico nos mostra um alto índice de similaridade entre a questão 7 e a 9 o que parece indicar que muitos alunos acertaram simultaneamente a soma (2 + 3i) + (5 + 2i) e a soma (4 , 5) + (2 , 6). Essas duas variáveis estão ligadas por um nível de similaridade mais fraco à variável 11 que é o produto (2 + 3i).(5 + 2i), parecendo indicar um comportamento diferente dos alunos em relação as operações de adição e de multiplicação. Isto talvez deva-se ao fato de que a multiplicação é uma operação mais complexa que a adição.

Existe um nível de similaridade muito fraco entre as variáveis 6 e 12 que parece nos dizer que a maioria dos alunos apresenta um comportamento diferente em relação a ter a concepção de que um número complexo não pode ser representado geometricamente, e errar a multiplicação (2 + 3i).(5 + 2i).

O grupo de comportamentos indicados por (I) no gráfico de similaridades reúne as variáveis que indicam erros nas questões de soma e produto de números complexos, "que um número complexo não pode ser representado geometricamente" que os conceitos matemáticos surgem de problemas concretos e que os números complexos não são apenas representações simbólicas.

O grupo de comportamentos (II), reúne as variáveis que indicam acertos nas questões de soma e produto de números complexos, que um número complexo pode ser representado geometricamente, que os números complexos são apenas representações simbólicas e que os conceitos matemáticos são inventados e não surgem de situações reais.

Podemos perceber por essa análise, que o fato de os alunos não conhecerem a história da matemática, e pensarem que um número complexo é apenas um símbolo matemático, não o impede de realizar operações e representá-los geometricamente. Acreditamos em vista disso que os alunos operem com os complexos, sem perceber o significado desses números, julgando que eles sirvam apenas para fazer exercícios sem maiores conseqüências.

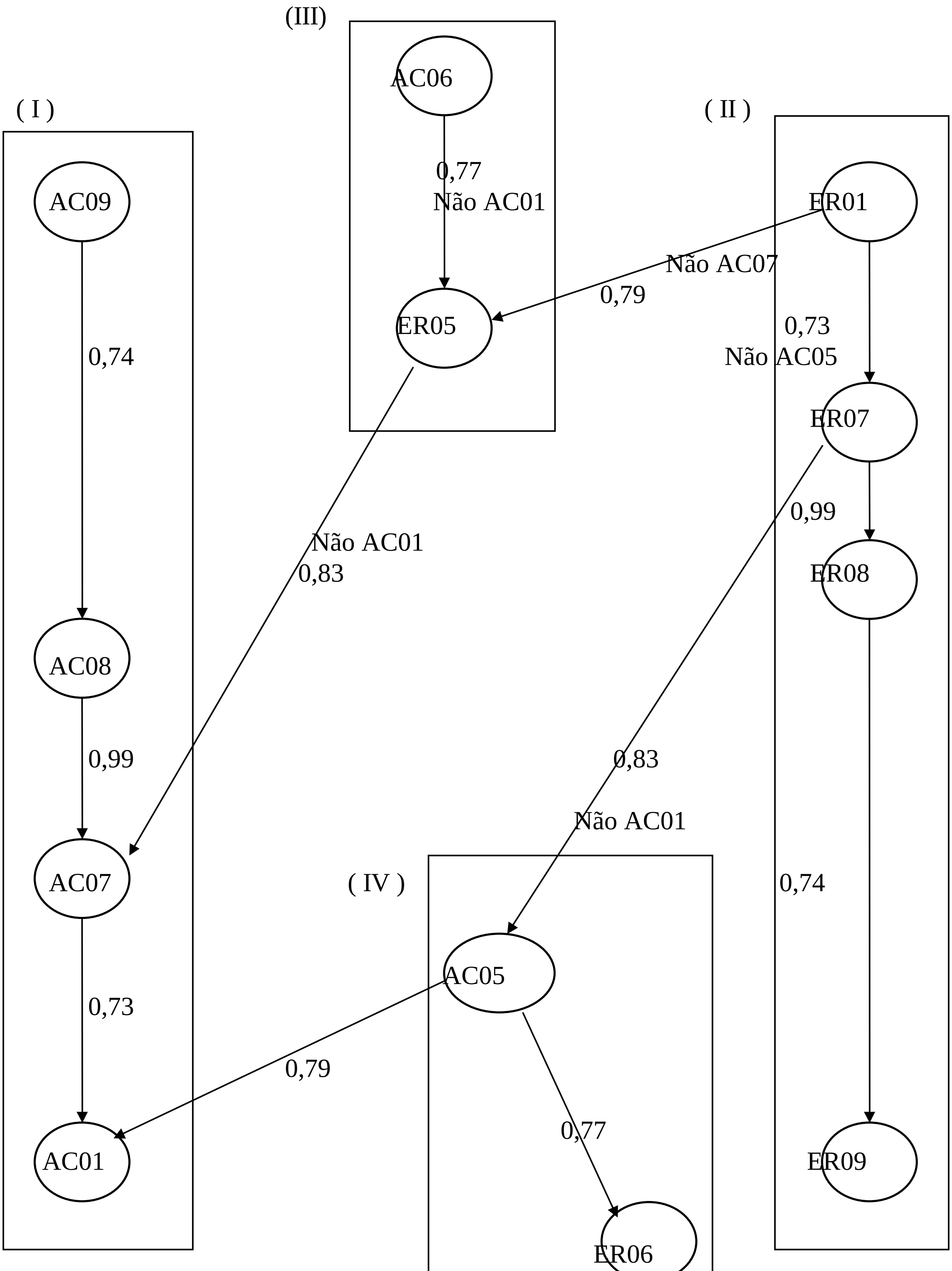
Por outro lado, o fato deles saberem que a matemática surge de situações reais e que um número complexo é um número sim, não faz com que eles acertem as operações com os complexos. Provavelmente esses alunos devam achar que tudo deve ter um significado que não se ensinaria números complexos se não tivesse utilidade futura, mas acreditamos que o ensino que eles tiveram, não os levou a ver esse significado. Afirmamos isso baseados também numa pergunta, explicitada à seguir, que foi descartada da análise no CHIC, pois todos os alunos responderam igualmente.

Os alunos foram questionados se os números complexos surgiram quando da resolução de uma equação do segundo ou do terceiro grau. Todos responderam que foi a equação do 2º grau que originou os complexos e isso parece indicar que nenhum deles teve contato com esses números da maneira como surgiram na história, quando da resolução de uma equação do terceiro grau. Esse fato talvez seja a explicação para que eles operem sem ver significado nas operações.

Esse trabalho tem por objetivo dar um significado às operações com os números complexos, chegando-se a respostas reais de uma equação, mesmo trabalhando-se com raízes quadradas de números negativos.

b)ANÁLISE IMPLICATIVA

O programa CHIC nos dá um gráfico de implicação entre cada dupla de variáveis com uma medida que é o grau de implicação entre elas. Abaixo temos o gráfico e vamos fazer uma análise sobre ele.



Obs: Quando na implicação entre AC06 e ER05 escrevemos “Não AC01”, queremos dizer que AC06 implica em ER05, implica em AC07, mas não implica em AC01. Entre ER05 e AC07 o “não AC01” quer dizer que ER05 implica em AC07 mas não implica em AC01. Assim, ER01 não implica em AC07, ER07 não implica em AC01 e ER01 não implica em AC05.

Dividimos o gráfico implicativo em quatro grupos de variáveis:

O grupo I é o grupo dos acertos, que parece indicar que os alunos que acertaram o produto (2 + 3i).(5 + 2i) acertaram as somas de números complexos tanto na forma algébrica, como na de pares ordenados e afirmaram que os conceitos matemáticos surgem de problemas concretos e não foram simplesmente inventados. Esse grupo talvez tenha uma justificativa no fato de que a operação de multiplicar seja mais complexa que a de somar e por sua vez a soma na forma algébrica teve um maior número de acertadores que a soma na forma de pares ordenados, provavelmente por ser a primeira, mais familiar ao aluno.

O grupo (II) é o grupo dos erros, que parece nos indicar que a maioria dos alunos que julgam que os números complexos foram inventados, erraram as somas de números complexos representados na forma cartesiana e na forma de pares ordenados e também erraram a multiplicação de números complexos. Isto parece indicar que os alunos que julgam que os conceitos matemáticos são simplesmente inventados tem grande dificuldade para aprenderem Matemática.

O grupo (III) parece nos mostrar que muitos dos alunos que afirmaram que os números complexos podem ser representados geometricamente, e realmente os representaram, também afirmaram que os números complexos são apenas representações matemáticas sem significado. Este fato parece evidenciar que o tipo de ensino recebido por esses alunos os fazem representar corretamente um número complexo no plano cartesiano, porém não dá significado à esses números fazendo com que o aluno acredite que eles sejam apenas símbolos matemáticos.

Finalmente o grupo (IV) parece indicar que a maioria do alunos que afirmaram que os números complexos são números realmente e não apenas representações matemáticas sem significado, afirmaram que um número complexo não pode ser representado geometricamente. Isto parece nos dizer que o fato de um aluno julgar que os números complexos não sejam apenas símbolos matemáticos, não é suficiente para que ele tenha conhecimento sobre as operações com esses números.

Vamos analisar agora as implicações entre as variáveis duas a duas:

AC09 $\longrightarrow$ AC08

O gráfico nos revela que provavelmente a maioria dos alunos que acertou AC09, (2 + 3i) . (5 + 2i) também acertou AC08, (4 , 5) + (2 , 6).
De fato a primeira operação sendo uma multiplicação oferece mais dificuldades que a segunda que é uma soma, e é de se esperar que quem acerte a primeira também acerte a segunda. Além disso na primeira operação o aluno deverá trabalhar com i o que pode complicar um pouco mais a operação por ser esse um elemento novo nos seus estudos.

AC09 $\longrightarrow$ AC07

Esta implicação revela que a maioria dos alunos que acertou AC09, (2 + 3i).(5 + 2i) também acertou AC07, (2 + 3i) + (5 + 2i) .
Normalmente uma multiplicação é uma operação mais complexa que uma soma e neste caso isso acontece, além disso o aluno terá que substituit i^2 por -1 o que talvez seja uma dificuldade maior. Dessa maneira é de se esperar que quem acerte o produto também acerte a soma que e uma operação menos complexa.

AC09 $\longrightarrow$ AC01

Provavelmente a maioria dos alunos que acertaram o produto dos números complexos afirmaram que os conceitos matemáticos surgem de situações reais

AC08 $\longrightarrow$ AC07

Talvez a maioria dos alunos que acertou (4 ,5) + (2 , 6), também acertou (2 + 3i) + (5 + 2i) uma vez que na segunda operação devem ter feito o mesmo que fizeram na primeira, ou seja, somaram os primeiros elementos de cada número e depois somaram os segundos elementos de cada número. A soma como pares ordenados apresentou um grau de dificuldade maior talvez pelo fato dos alunos não estarem acostumados a operar com esses valores. A outra notação deve ser mais familiar ao aluno por parecer -se com (2 + 3x) + (5 + 2x).

AC08 $\longrightarrow$ AC01

Os alunos que acertaram (4 , 5) + (2 , 6) provavelmente afirmaram que os conceitos matemáticos surgiram de situações concretas.

AC07 $\longrightarrow$ AC01

Esta implicação nos revela que muito provavelmente a maior parte dos alunos que acertaram a soma (2 + 3i) + (5 + 2i) afirmaram que os conceitos matemáticos surgiram de situações concretas.

AC06 $\longrightarrow$ ER05

Os alunos que conseguem representar geometricamente um número complexo provavelmente também afirmaram que os números complexos são apenas símbolos matemáticos sem significado. Isto parece mostrar que o fato de os alunos julgarem que os complexos são apenas símbolos sem significado não impede que eles sejam representados geometricamente.

AC06 $\longrightarrow$ AC07

Os alunos que sabem representar geometricamente um número complexo provavelmente acertaram a soma (2 + 3i) + (5 + 2i) O que parece nos mostrar que é mais complexo representar um número complexo geometricamente do que somar esse números na forma cartesiana.

ER05 $\longrightarrow$ AC07

Esta parte da análise nos indica que provavelmente os alunos que afirmaram que os números complexos são apenas símbolos acertaram a soma (2 + 3i) + (5 + 2i) mostrando que o fato deles acharem que os números complexos não tem significado não impede que eles saibam operar com eles.

ER01 $\longrightarrow$ ER05

Os alunos que afirmaram que os números complexos são invenções de matemáticos, e que nada tem a ver com a realidade, também afirmaram que os números complexos são apenas símbolos matemáticos sem significado. Esse é um resultado esperado e coerente, pois uma vez que algo é inventado sem necessidade, ele não deve ter significado, sendo apenas símbolos com os quais se opera.

ER01 $\longrightarrow$ ER07

A maior parte dos alunos que afirmaram que os conceitos matemáticos são inventados por algum matemático em dia de inspiração Provavelmente erraram a soma na forma cartesiana, indicando que quem tem esse conceito da matemática tem maior dificuldade nas operações.

ER01 $\longrightarrow$ ER08

É possível que a maior parte dos alunos que julgam que os conceitos matemáticos foram inventados, erraram a soma de números complexos como pares ordenados evidenciando a análise do ítem anterior

ER01 $\longrightarrow$ ER09

Muito provavelmente grande parte dos alunos que afirmaram que os números complexos são inventados erraram o produto de números complexos na forma cartesiana, o que vai de encontro a análise anterior.

ER07 $\longrightarrow$ ER08

A maioria dos alunos que erraram a soma na forma cartesiana, também erraram na forma de par ordenado, talvez devido ao fato de operações com par ordenado não ser muito comum para eles.

ER07 $\longrightarrow$ ER09

Muitos dos alunos que erraram a soma (2 + 3i) + (5 + 2i) provavelmente também erraram o produto (2 + 3i).(5 + 2i). De fato o produto apresenta um nível de complexidade maior que a soma.

ER07 $\longrightarrow$ AC05

Muitos dos alunos que erraram (2 + 3i) + (5 + 2i) afirmaram que os números complexos são realmente números e não apenas símbolos. O que parece mostrar que apesar dos alunos não saberem operar com números complexos eles tem consciência que eles devam ter significado.

ER07 $\longrightarrow$ ER06

O erro da soma (2 + 3i) + (5 + 2i) implicou no erro de se afirmar que um número complexo não pode ser representado geometricamente O que parece mostrar que o aluno que não consegue efetuar essa operação tem poucos conhecimentos sobre número complexo

ER08 $\longrightarrow$ ER09

Grande parte dos alunos que erraram a operação (4 , 5) + (2 , 6) provavelmente também erraram (2 + 3i). (5 + 2i) . De fato a multiplicação sempre apresenta um grau de complexidade maior que a soma

C) HIERARQUIA IMPLICATIVA

AC01 - 1 - Os conceitos matemáticos nascem de situações concretas.

ER01 - 2 - Os conceitos matemáticos são inventados.

AC05 - 3 - Os n^{os} complexos são números sim

ER05 - 4 - Os nº ^{s} complexos são apenas representações matemáticas

AC06 - 5 - Um nº complexo pode ser representado geométricamente

ER06 - 6 - Um nº complexo não pode ser representado geométricamente

AC07 - 7 - Acertou (2 + 3i) + (5 + 2i)

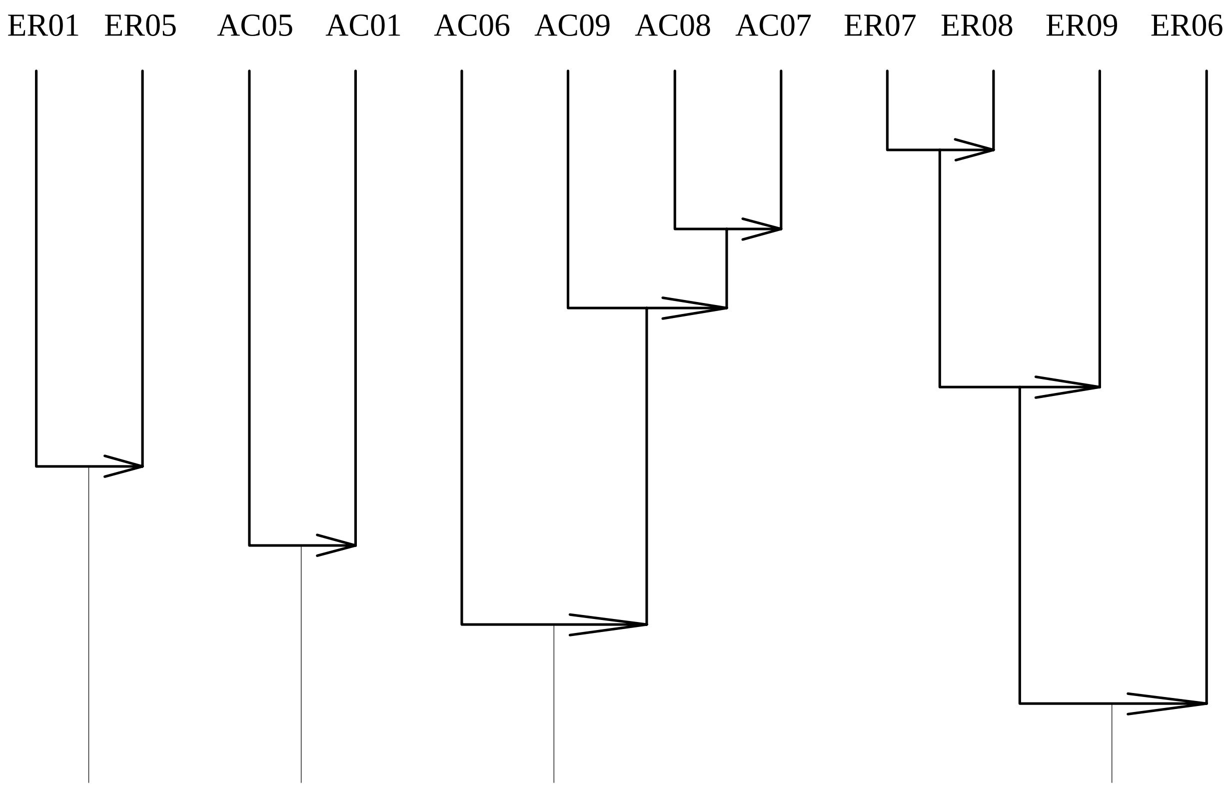
ER07 - 8 - Errou (2 + 3i) + (5 + 2i)

AC08 - 9 - Acertou (4,5) + (2,6)

ER08 -10 -Errou (4,5) + (2,6)

AC09 -11 -Acertou (2 + 3i)(5+2i)

ER09 -12 -Errou (2 + 3i)(5 + 2i)



Este gráfico nos permite descobrir que a variável 2 implica na variável 4, ou seja quem afirma que os conceitos matemáticos são inventados afirma também que os números complexos são apenas representações simbólicas sem significado.

Quem afirmou que os números complexos são realmente números, afirmou também que os conceitos matemáticos nascem de situações concretas.

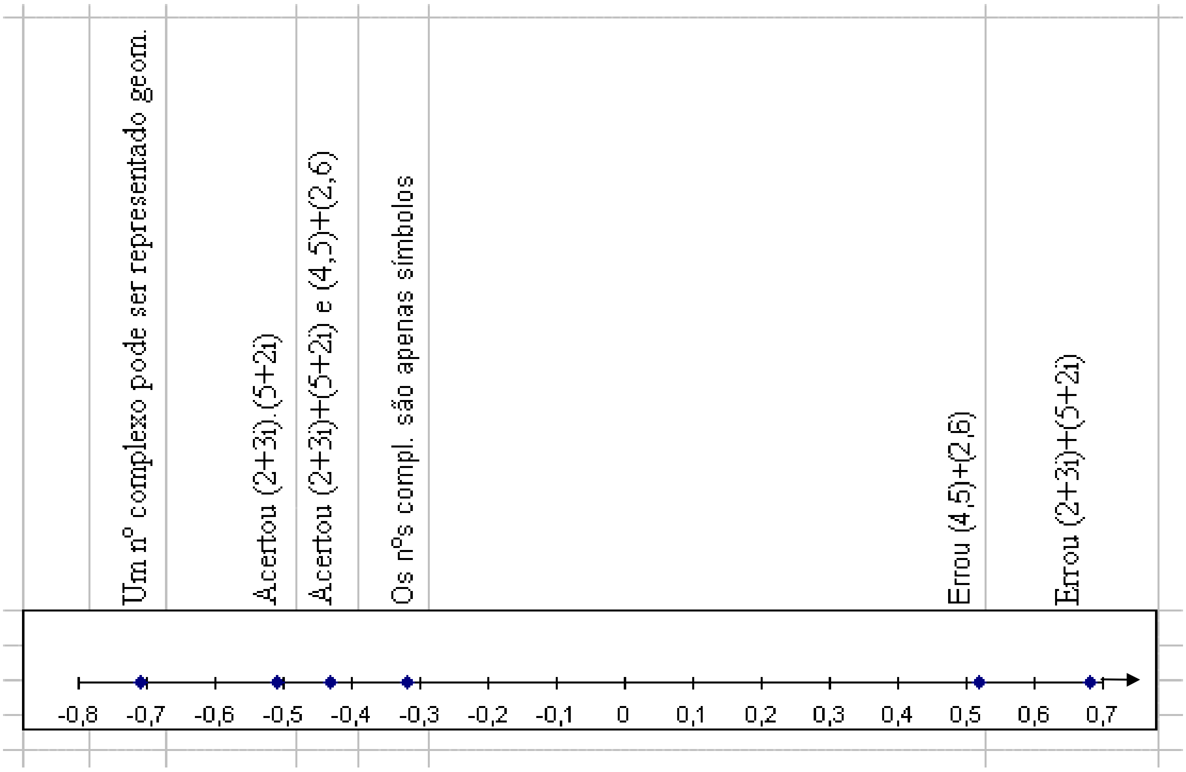
Os alunos que sabiam representar geometricamente um número complexo , acertaram (2 + 3i) .(5 + 2i), (4, 5) + (2 , 6) e (2 + 3i) + (5 + 2i) mostrando ao que parece que quem conhece a representação geométrica dos números complexos, tem maior conhecimento sobre as operações com números complexos.

No último grupo do gráfico, podemos perceber que quem errou (2 + 3i) + (5 + 2i), também errou (4, 5) + (2 , 6) e muitos dos que erraram as duas operações também erraram (2 + 3i).(5 + 2i). Por sua vez esses três erros implicaram no erro de que os números complexos não podem ser representados geometricamente.

d) ANÁLISE FATORIAL DE CORRESPONDÊNCIAS MÚLTIPLAS

Colocados os dados da pesquisa no programa CHADOC conseguimos os valores das contribuições em cada eixo. Abaixo temos os dados no eixo 1. Em negrito estão as variáveis cuja soma das contribuições chegou à 92,59 %, com as quais fizemos o gráfico :

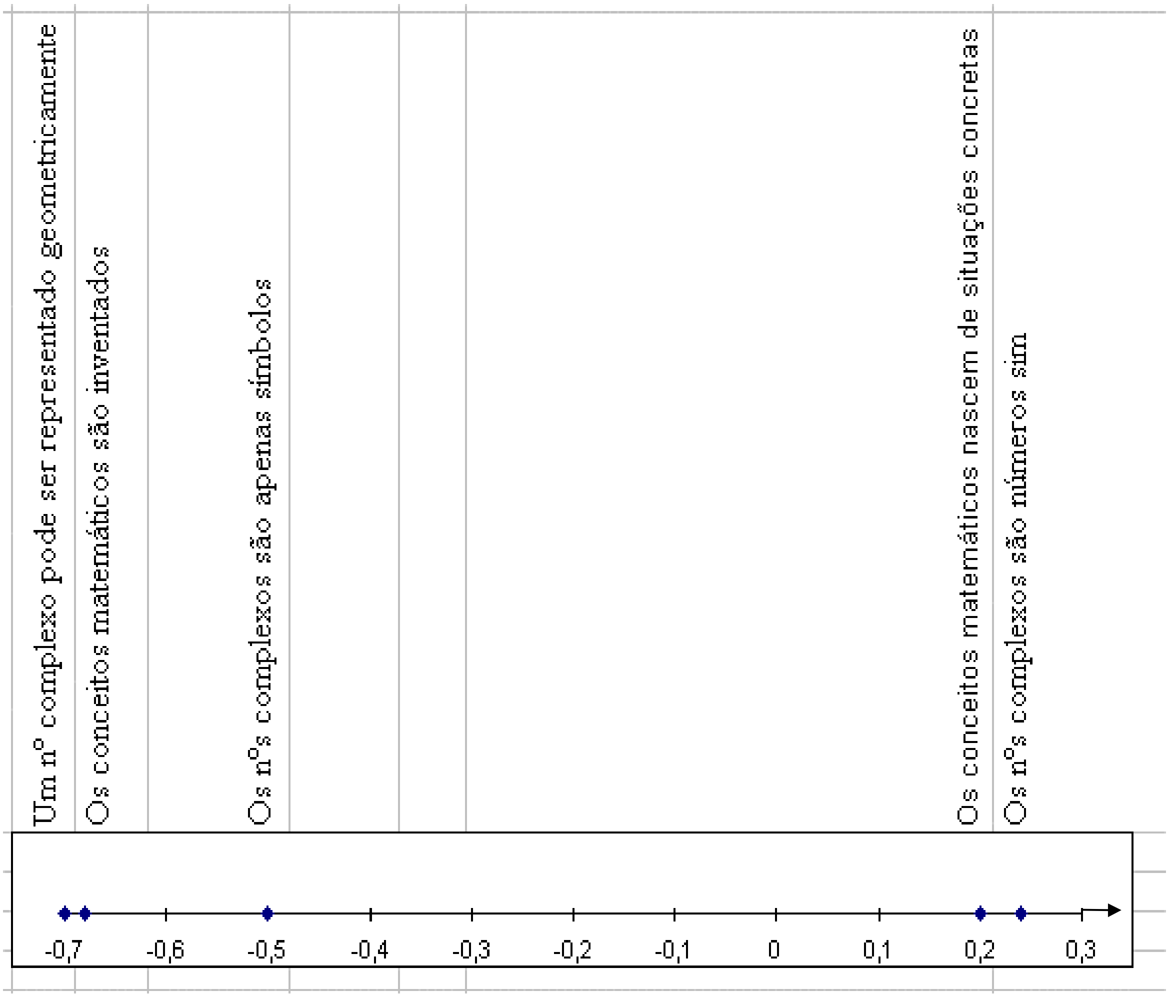
	EIXO1	CTR1
AC01	-0,06	0,40
ER01	0,21	1,37
AC05	0,15	2,25
ER05	**-0,32**	**4,73**
AC06	**-0,71**	**6,87**
ER06	0,08	0,74
AC07	**-0,43**	**15,90**
ER07	**0,68**	**25,18**
AC08	**-0,43**	**14,28**
ER08	**0,52**	**17,35**
AC09	**-0,51**	**8,28**
ER09	0,15	2,42



O eixo 1 nos dá o conjunto de acertos e erros. Assim acertos nas operações de soma e produto de nºs complexos se opõe à erros dessas operações, pois no gráfico eles se encontram distantes. Por outro lado os erros da soma e do produto estão relativamente próximos, como também estão próximos os acertos dessas operações. Próximos aos acertos, estão as variáveis : “os números complexos são apenas símbolos” e “os complexos podem ser representados geometricamente.” Isto tende a provar que os acertos nas operações de soma e multiplicação, se dão independentemente do conceito que se tenha dos números complexos, reforçando a nossa hipótese de que o fato de se julgar os números complexos sem significado, não é impedimento para se efetuar operações corretas entre eles.

EIXO 2: A seguir estão as contribuições das variáveis com relação ao eixo 2, e o respectivo gráfico, formado pelas variáveis cuja soma das contribuições chegou a 93,26%.

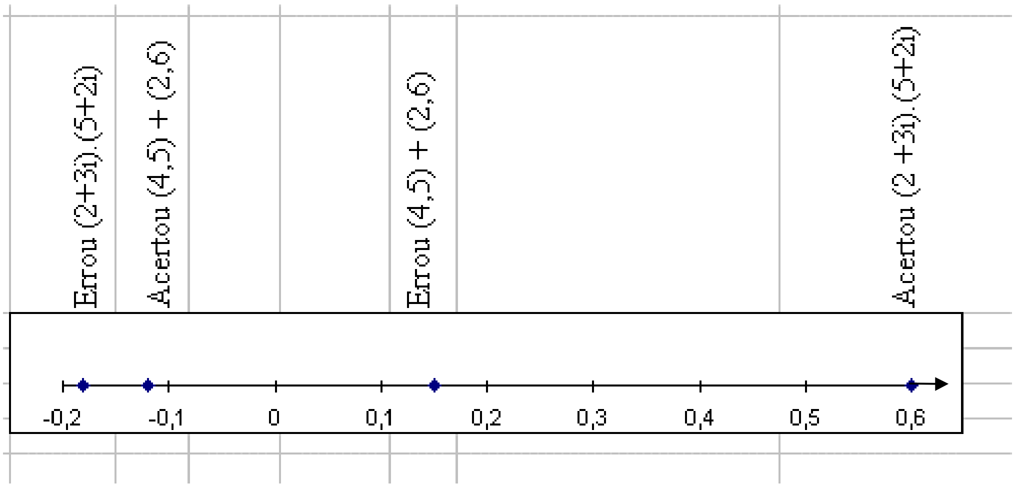
	EIXO 2	CTR2
AC01	**0,20**	**9,49**
ER01	**-0,68**	**32,55**
AC05	**0,24**	**11,84**
ER05	**-0,50**	**24,87**
AC06	**-0,70**	**14,51**
ER06	0,07	1,55
AC07	0,04	0,27
ER07	-0,06	0,42
AC08	0,11	1,87
ER08	-0,13	2,27
AC09	0,05	0,21
ER09	-0,02	0,06



As variáveis "Os conceitos matemáticos são inventados", "os nºs complexos são apenas símbolos matemáticos" e "um nº complexo pode ser representado geometricamente", estão próximos, e se opõem à "Os n^{os} complexos são números sim" e "os n^{os} complexos nascem de situações concretas" que por sua vez estão próximos. Este fato era esperado, pois quem julga que os conceitos são inventados deve julgar que os números complexos sejam apenas símbolos sem nada ter a ver com a realidade.

EIXO 3: O Gráfico foi construído com as variáveis cuja contribuição somaram 94,16%.

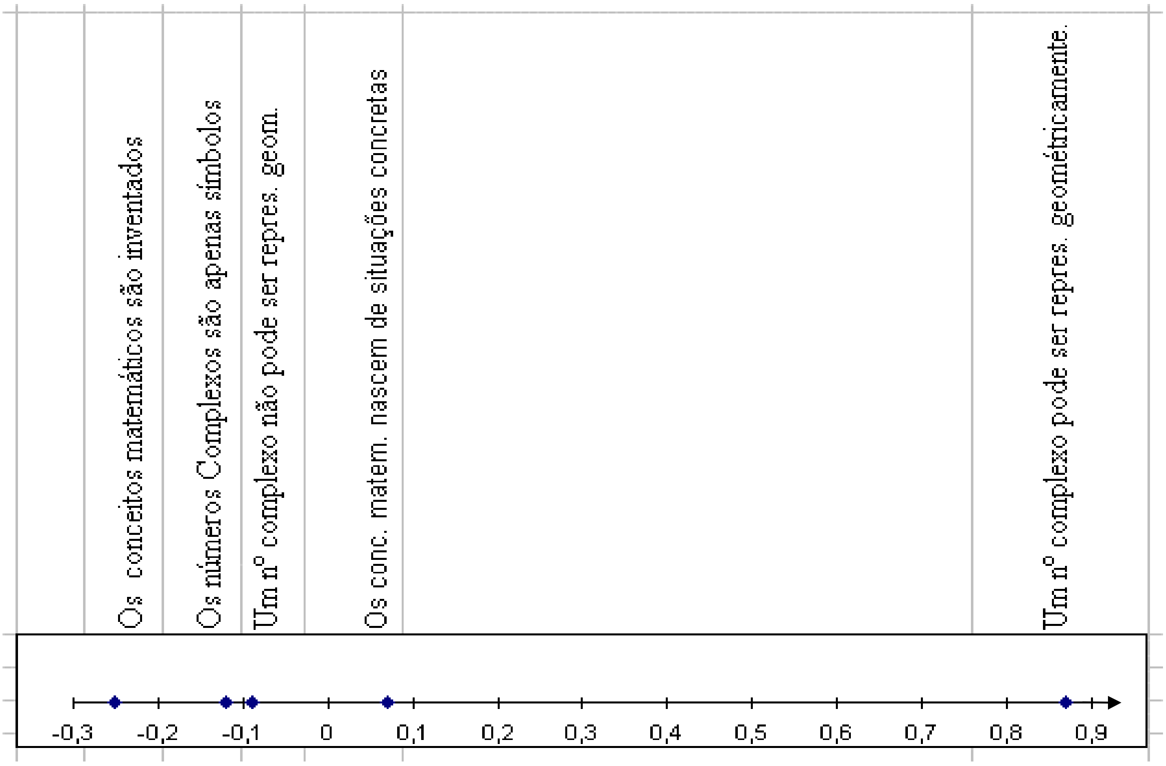
	EIXO 3	CTR3
AC01	0,03	0,57
ER01	-0,11	1,96
AC05	-0,02	0,14
ER05	0,03	0,29
AC06	0,05	0,15
ER06	0,00	0,02
AC07	-0,06	1,57
ER07	0,09	2,48
AC08	**-0,12**	**6,47**
ER08	**0,15**	**7,86**
AC09	**0,60**	**61,80**
ER09	**-0,18**	**18,03**



O gráfico nos mostra que as variáveis "erro em (2+3i).(5+2i)"é oposta à variável erro em (4,5) + (2,6) parecendo evidenciar o fato dessas operações terem um grau de dificuldade diferente, com a multiplicação sendo mais complexa. Dessa forma é de se esperar que os acertos também sejam opostos e é o que acontece no gráfico.

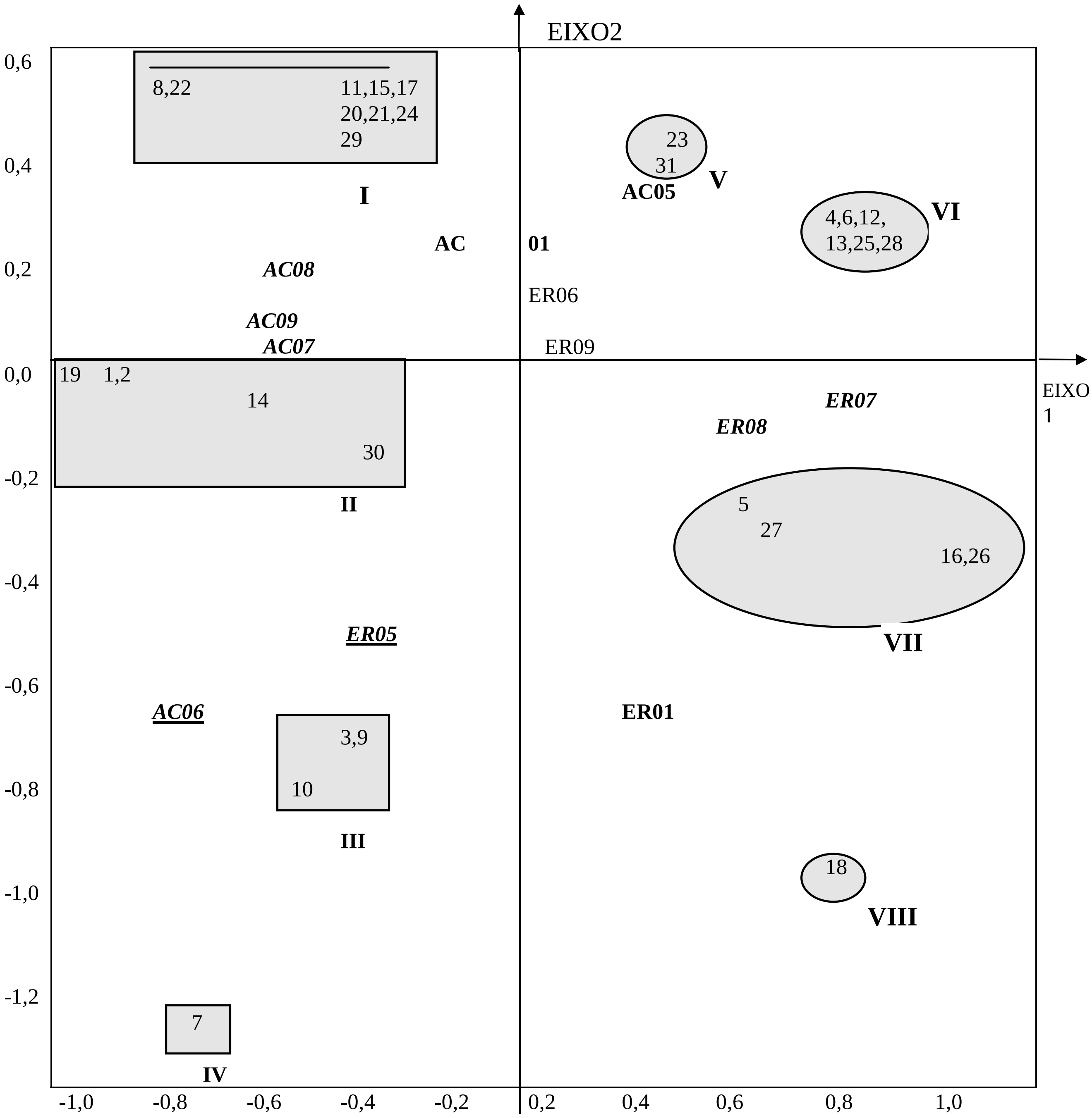
EIXO 4 : O gráfico foi construído com as variáveis cujas contribuições somaram 89,7%.

	EIXO 4	CTR4
AC01	**0,07**	**3,55**
ER01	**-0,25**	**12,16**
AC05	0,05	1,75
ER05	**-0,12**	**3,67**
AC06	**0,87**	**63,51**
ER06	**-0,09**	**6,81**
AC07	-0,01	0,05
ER07	0,01	0,07
AC08	-0,07	2,58
ER08	0,09	3,13
AC09	-0,13	3,14
ER09	0,04	0,91



As variáveis “os conceitos matemáticos são inventados”, “os números complexos são apenas símbolos” e “um número complexo não pode ser representado geometricamente”, se opõe às variáveis “os conceitos matemáticos nascem de situações concretas” e “os números complexos podem ser representados geometricamente”. Na História os números complexos só foram realmente aceitos após sua representação geométrica. Aqui isto parece se repetir quando ficam próximas estas duas últimas variáveis.

GRÁFICO DE VARIÁVEIS X VARIÁVEIS (EIXO 1 X EIXO 2) CHADOC



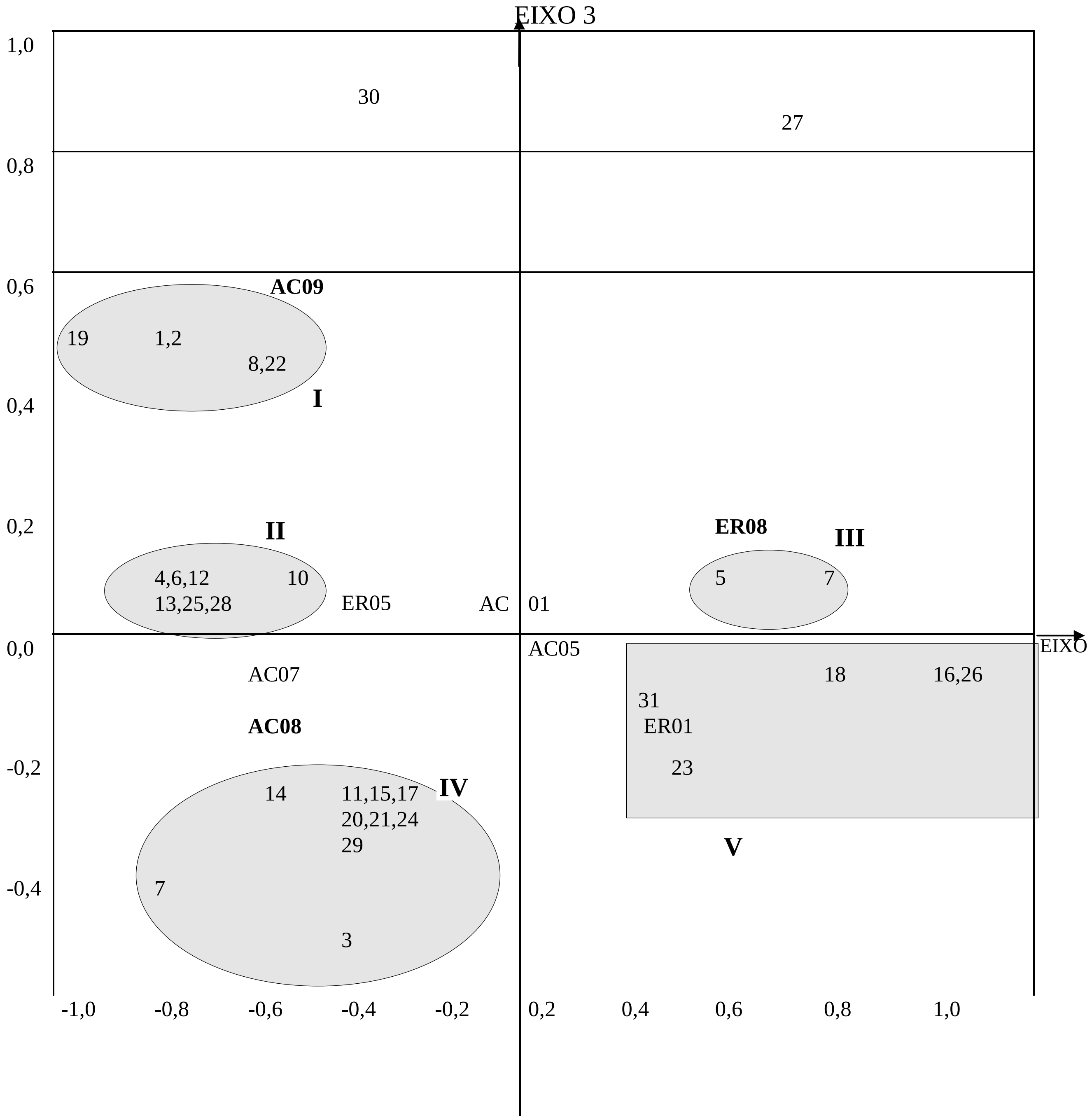
Na análise desse gráfico podemos observar que os alunos dos grupos I, II, III e IV se encontram próximos às variáveis AC07, (acerto na soma com os números complexos dados na forma algébrica), AC08 (acerto na soma com pares ordenados), AC09 (acerto na multiplicação com os números dados na formas algébrica), AC06 (um número complexo pode ser representado geométricamente) e ER05 (os números complexos são apenas símbolos sem significado) . Isto parece mostrar que esses alunos provavelmente operaram com os números complexos como se opera com os números reais, na soma e no produto. Na multiplicação além da distributiva fizeram $i^2 = -1$. Eles muito provavelmente acertaram essas operações mas não vêem sentido para isso, pois ao mesmo tempo estão próximo à variável que diz que os números complexos são apenas símbolos matemáticos, sem significado.

Por outro lado, os alunos dos grupos V, VI, VII e VIII estão próximos às variáveis que são ER07 (erro nas soma de números complexos, dados na forma algébrica) e ER08 (erro na soma de números complexos dados na forma de pares ordenados). Como essas são operações bastante elementares esse resultado parece mostrar que o fato dos números complexos terem sido vistos sem um significado, pode ter levado esses alunos a não reterem suas operações.

Com relação ao eixo 2 podemos perceber que os alunos dos grupos III, VII e VIII estão próximos às variáveis ER01 (os conceitos matemáticos são inventados), ER05 (os números complexos são apenas representações matemáticas, e AC06 (um número complexo pode ser representado geometricamente), o que parece mostrar que esses alunos conseguem representar geometricamente um número complexo, mas talvez julguem que isso não tem aplicação nem significado, pois esses números são apenas símbolos inventados por matemáticos.

Em oposição a esse grupo de alunos e variáveis temos os alunos dos grupos I, V, e VI que estão próximos às variáveis AC01 (os conceitos matemáticos nasceram de situações concretas) e AC05 (os números complexos são números sim). Talvez possa-se concluir que esses alunos tenham ouvido esses argumentos em suas aulas de Matemática, pois existe uma tendência a se valorizar a História da Matemática, e geralmente os livros didáticos contam histórias sobre algum conceito matemático, mas no momento da aprendizagem propriamente dita, esta se dá de forma tradicional. No caso dos números complexos todos se depararam com os números complexos através de uma equação do segundo grau e não através de uma equação do terceiro grau como aconteceu na história.

GRÁFICO DE VARIÁVEIS X VARIÁVEIS (EIXO 1 X EIXO 3) CHADOC

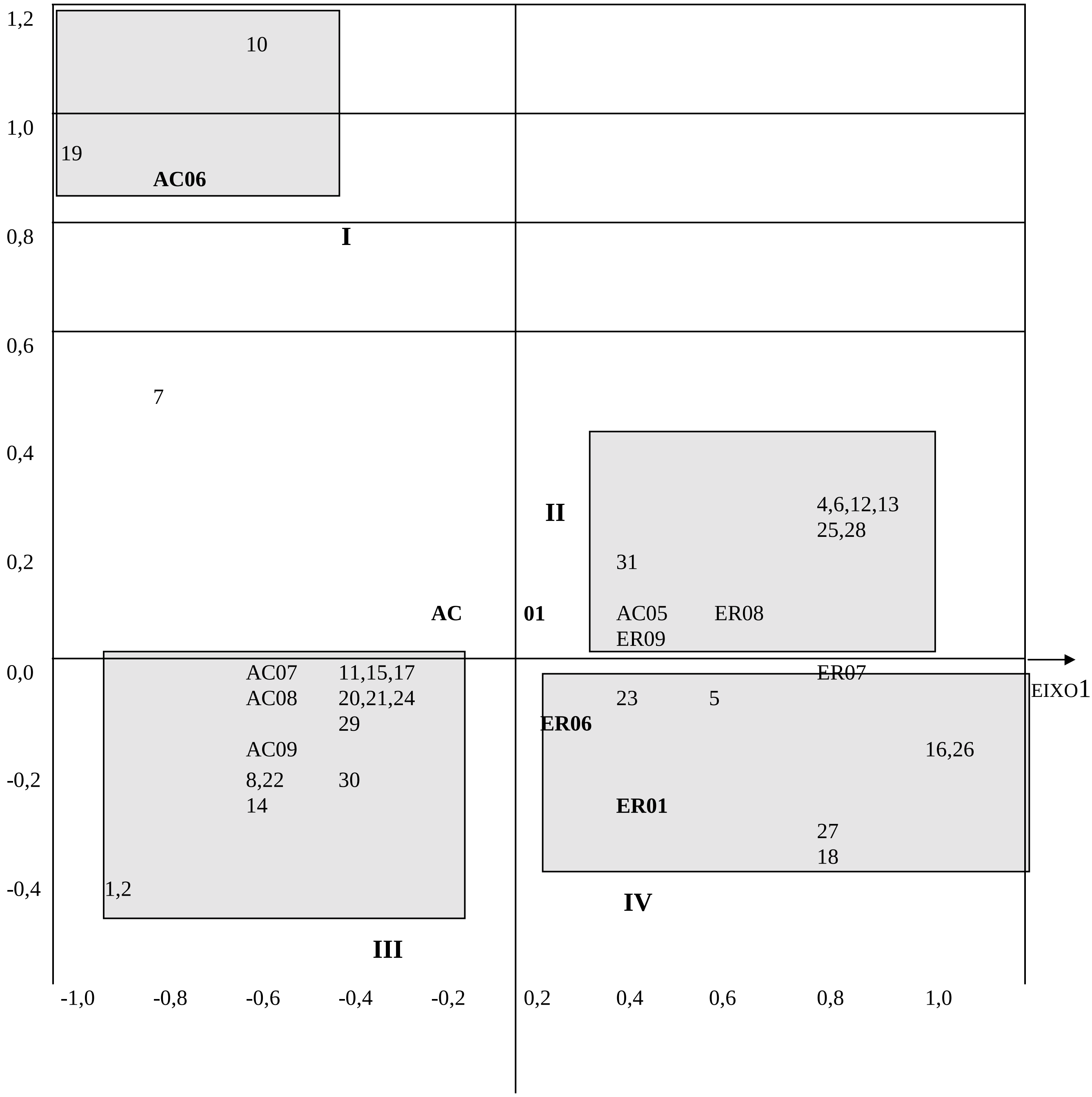


No eixo 3 os alunos do grupo I, II e III encontram-se próximos da variável AC09, que é acertar o produto (2 +3i).(5 +2i) e da variável ER08 que é errar a soma (4,5) + (2,6) o que parece evidenciar que esses alunos não vêem pares ordenados como números complexos, mas como algo desconhecido sendo que inclusive alguns alunos somaram 4,5 com 2,6.

Por outro lado os alunos dos grupos IV e V estão próximos às variáveis AC08 que é acertar (4,5) + (2,6) e ER09 que é errar (2 + 3i).(5 + 2i). Mais uma vez esse fato parece reforçar que esses alunos não vêem os números complexos como pares ordenados.

GRÁFICO DE VARIÁVEIS x VARIÁVEIS (EIXO1 x EIXO4) CHADOC

EIXO 4



No eixo 4 os alunos dos grupos I e II estão próximos da variável que diz que um número complexo pode ser representado geometricamente e que os números complexos nascem de situações concretas. Já os alunos do grupo III e IV, tiveram o mesmo tipo de comportamento em relação a crer que os conceitos matemáticos são inventados, que os números complexos são apenas símbolos sem significado, e que um número complexo não pode ser representado geometricamente.

Conclusão:

Analisando as respostas dos alunos pudemos constatar que nenhum deles teve contato com os números complexos da maneira como estamos sugerindo nesse trabalho, ou seja através de uma equação do 3º grau. Nenhum deles conseguiu extrair raízes de números complexos nem efetuar potenciação e uma pequena minoria conseguiu efetuar o produto de números complexos. A maioria dos alunos acha que os conceitos Matemáticos surgem de situações reais, mas eles não se depararam com esses conceitos através de situações concretas, e este é um bom motivo para introduzir-se os conceitos como eles surgiram na história. Os alunos que julgam que os conceitos matemáticos são inventados erraram as operações mais simples com números complexos, o que parece evidenciar que se um conceito é simplesmente inventado, não deve ter aplicação nem importância, o que faz com que os alunos não se interessem por ele.

Com o objetivo de dar significado aos números complexos e fazer com que os alunos retenham mais as operações com esses números, elaboramos uma seqüência didática através de atividades.

CAPÍTULO V
A SEQÜÊNCIA DIDÁTICA

Introdução

Baseados nos capítulos II, III e IV deste trabalho, elaboramos uma seqüência didática composta por atividades, e baseada na História da Matemática para que os alunos pudessem dar significado às operações com esses números, e para que pudessem entender como surgem os conceitos matemáticos.

Historicamente os números complexos surgiram quando Bombelli, ao tentar resolver uma equação do terceiro grau usando a fórmula de Cardano - Tartaglia, depara-se com a raiz quadrada de um número negativo. Como ele sabia a priori que esta equação tinha solução, é levado a pensar que existe a raiz quadrada de um número negativo e começa a operar com essas raízes, não considerando-as como números, mas sim como uma representação, uma ferramenta, para dar soluções às equações, soluções que ele mesmo classifica de “tão sutis quanto inúteis”.

Para responder às questões propostas no capítulo que se refere à problemática, neste trabalho, acreditamos que uma seqüência didática que tenha forte conotação histórica, onde o aluno acompanhe as motivações e dúvidas que acompanharam o desenvolvimento dos números complexos seja bastante oportuna. A idéia é propor aos alunos que resolvam uma equação do terceiro grau, pelo método de Cardano-Tartaglia. Ao resolvê-la eles poderão se deparar com a raiz quadrada de um número negativo, mas analisando a equação analítica ou geometricamente, talvez percebam que ela tem solução, e nesse momento, cabe a pergunta: será que existe raiz quadrada de número negativo? Segundo a História da Matemática, o fato da equação ter solução real, motivou os matemáticos a extraírem raiz quadrada de um número negativo sem saber ao certo o que seriam esses novos números. Ou seja, os números complexos surgem como ferramentas de cálculos algébricos e não como objetos de estudo (Régine Douady, 1986) .

Tendo o aluno sentido a necessidade da extração da raiz quadrada de números negativos, será sugerido que ele efetue essa operação, supondo $\sqrt{-1} = i$, e tente encontrar as soluções da equação proposta. Nesse momento ele vai se deparar com números do tipo a + bi .

Atividades nas quais seja necessário operar com esses números, serão propostas aos alunos, até que extraiam raízes quadradas de números do tipo a + bi. Mas para resolver a equação proposta eles deverão extrair raízes cúbicas de números complexos, e aí está uma grande dificuldade, pois para extrair raiz cúbica desses números, depara-se com um sistema de equações do terceiro grau, que mesmo sem ser impossível é muito trabalhosa. Segundo a História da Matemática demorou aproximadamente 300 anos para que esse impasse fosse superado.

Nesse ponto será necessário que se faça uma mudança de quadro (Régine Douady 1986) passando-se do quadro algébrico para o geométrico para mudar-se do registro de representação (R. Duval 1988) das fórmulas no quadro algébrico (a + bi), para o registro de representação das fórmulas no quadro trigonométrico de um número complexo ($|z| (\cos\theta + i\text{sen}\theta)$), para que se consiga finalmente desenvolver a potenciação e a radiciação nesse novo campo. Os alunos poderão finalmente resolver a equação proposta e chegar, não a uma solução, mas graças a existência dos números complexos, a três raízes reais, e poderão concluir que apesar de um número complexo não representar uma quantidade, operando-se com ele pode-se chegar a soluções reais de problemas reais.

É bom ressaltar a importância da mudança de quadro e do registro de representação nesse trabalho, pois no quadro algébrico não é possível desenvolver a radiciação. Somente quando mudamos para o quadro geométrico e obtivemos o registro de representação de um número complexo nesse quadro, é que conseguimos desenvolver a potenciação e a radiciação.

Cremos que esta maneira de apresentar os números complexos leve os alunos a encararem com mais naturalidade a existência da raiz quadrada de um número negativo, ao contrário das outras maneiras em que acreditamos que ele encare com descrédito essa existência.

Essas atividades, em número de 14, estão previstas para acontecer em três sessões de 2 horas cada uma, aos alunos do terceiro ano do segundo grau do Colégio São Marcos de Mogi das Cruzes. Pretendemos mostrar que esses alunos terão um aproveitamento superior àqueles aos quais aplicamos os testes.

A seguir descreveremos cada atividade, da seqüência, com as devidas análises, as quais constam de uma análise matemática e de uma análise didática, tendo por objetivo prever o possível comportamento dos alunos durante sua execução, para depois podermos comparar com o comportamento que realmente eles tiveram. Com essa análise, poderemos atuar sobre as variáveis didáticas como os coeficientes das equações propostas visando que os cálculos se tornem mais simples.

Atividade 0. Considere três cubos: um de aresta u, um de aresta v e um de aresta u + v. Considere também um retângulo de lados u e v.

a) Tente expressar o volume do cubo de aresta u + v, em função do volume dos outros dois cubos, da área e do semi-perímetro do retângulo.

b) Tente encontrar u e v tal que o semi-perímetro do retângulo seja 7 e a sua área seja 12.

c) Tente encontrar valores de u e v tal que o volume do cubo de aresta u + v seja igual a três vezes o semi - perímetro do retângulo mais dois.

Objetivo: O objetivo desta atividade, é que os alunos tenham menores dificuldades ao resolverem uma equação do terceiro grau pelo método de Cardano - Tartaglia, na qual substituirão x por u + v.

Análise matemática e didática

Variáveis didáticas:

Os valores no item b e c foram escolhidos de tal maneira que os cálculos se tornassem simples pois o objetivo é que o aluno se familiarize com o procedimento e não com os cálculos, pelo menos nessa atividade.

No item a), esperamos que os alunos façam: $(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$. Depois, para que apareça a área uv e o semi-perímetro (u + v) do retângulo, esperamos que eles coloquem 3uv em evidência, obtendo: $(u + v)^3 = u^3 + 3uv(u + v) + v^3$

Para o item b pretendemos que façam:

$$\begin{cases} u + v = 7 \\ u.v = 12 \end{cases}$$

Provavelmente os alunos resolverão este sistema, por substituição, e se assim o fizerem, deverão ser alertados para o fato de que as soluções procuradas, são as da equação $x^2 - 7x + 12 = 0$. Esse alerta é necessário uma vez que durante o desenvolvimento das atividades, eles precisarão resolver sistemas idênticos a esse, por várias vezes.

Para o item c), o desenvolvimento por nós esperado, é:

$(u + v)^3 = 3(u + v) + 2$

$u^3 + 3uv(u + v) + v^3 = 3(u+v) + 2$

Para que esta igualdade se verifique devemos ter u e v tais que:

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = 2 \\ 3uv = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^3 + v^3 = 2 \\ u^3.v^3 = 1 \end{cases}$$

Nesse sistema, os alunos terão a oportunidade de construírem diretamente a equação que dá suas soluções, que são u^3 e v^3, sem que precisem resolvê-lo por substituição. A equação será $X^2 - 2X + 1 = 0$.

Assim $u^3 = 1$ e $v^3 = 1$, e daí $u = 1$ e $v = 1$

Uma vez que esta seqüência será apresentada logo após o capítulo de equações polinomiais, para introduzir-se o conceito de números complexos, é oportuno propor aos alunos que resolvam uma equação polinomial e analisem o número de soluções da mesma.

Atividade 1. Seja a equação $x^3 - 6x - 9 = 0$

a) Resolva a equação por pesquisa de raízes inteiras. Se você encontrar uma raiz, use o Teorema de D'Alembert para achar as outras . Quantas soluções tem a equação? Explique.

b) Escrevendo a equação como uma igualdade entre duas funções, uma do terceiro grau, e uma do 1º, resolvê-la graficamente.

c) Identifique sobre o gráfico a(s) solução(ões) da equação dada. Será que a equação tem mais de uma solução? Explique.

d) Supondo $x = u + v$, resolvê-la. Quantos valores de x achou com essa estratégia?

Objetivo: O objetivo é que os alunos encontrem uma solução dessa equação por processos que eles já conhecem e verifiquem que a maneira de resolver, agindo como Cardano e Tartaglia, que é a efetuada no item d), também leva à mesma solução, dando credibilidade à esta última.

Análise matemática e didática:

Variáveis didáticas: Os coeficientes são escolhidos com o objetivo de os alunos resolverem a equação por pesquisa de raízes inteiras, e que não haja maiores dificuldades com os cálculos durante a resolução com o método de Cardano-Tartaglia, para que eles possam constatar que este método leva à mesma solução.

Lembrando que esta seqüência deva ser aplicada após o capítulo de equações polinomiais, onde os alunos muito provavelmente, estudaram pesquisa de raízes inteiras, racionais e reais, eles poderão resolver a equação dada, pesquisando as possíveis raízes inteiras, que se existirem, serão divisores de 9: ±1, ±3 e ±9. Descobrindo que 3 é solução, pelo teorema de D'Alembert, o polinômio $P(x) = x^3 - 6x - 9$ será divisível por $x - 3$. Fazendo essa divisão por Briot-Ruffini, por exemplo, encontrarão:

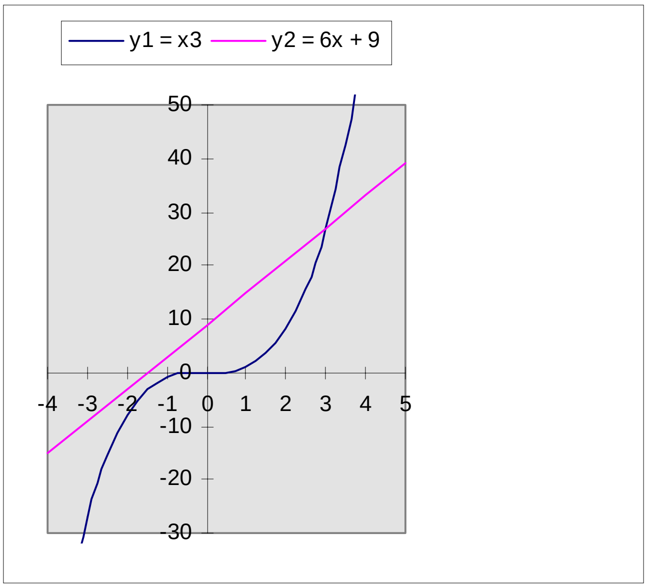
3	1	0	-6	-9
	1	3	3	0

$x^3 - 6x - 9 = (x - 3).(x^2 + 3x + 3) = 0$

$x^2 + 3x + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta = -3$

Como $\Delta < 0$ a equação tem apenas uma raiz real: $x = 3$.

Os alunos deverão também, fazer os gráficos de $y_1 = x^3$ e de $y_2 = 6x + 9$ no mesmo sistema de coordenadas cartesianas e verificar que eles se interceptam em um único ponto, portanto a equação tem um único valor de x que faz com que $y_1 = y_2$. Se eles construírem estes gráficos com medidas corretas, poderão descobrir que a solução da equação é x = 3. O professor pode também propor que eles construam os gráficos no computador, no aplicativo Excel, como o que foi feito abaixo.



É de se esperar que num primeiro momento, os alunos sintam dificuldades para desenvolver esse algoritmo descoberto por Cardano-Tartaglia, por ser algo completamente novo para eles. Porém após essa primeira equação, deverão estar mais à vontade para resolverem outras.

$x^3 - 6x - 9 = 0$

$x = u + v$

$(u + v)^3 - 6(u + v) - 9 = 0$

$u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 - 6 (u + v) - 9 = 0$

Acreditamos que este será um momento de dificuldade, pois os alunos não estando acostumados a resolver esse tipo de problema, talvez não percebam que devem colocar 3uv em evidência, para que surja outra vez u + v.

$u^3 + 3uv\ (u + v) + v^3 - 6\ (u + v) - 9 = 0$

Como no passo acima foi feita uma fatoração, talvez eles percebam que podem fatorar novamente, mesmo sem saber ao certo onde isso poderá levar.

$u^3 + (3uv - 6)\ (u + v) + v^3 - 9 = 0$

Outro ponto de dificuldade pode estar aqui, pela falta de prática nesta situação, na qual, eles precisarão pensar: “para que u e v esta equação é verdadeira?”

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = 9 \\ 3uv - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^3 + v^3 = 9 \\ uv = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^3 + v^3 = 9 \\ u^3v^3 = 8 \end{cases}$$

Os alunos trabalharam com as propriedades de soma e produto das raízes de uma equação do segundo grau na 8ª série e no primeiro colegial, mas normalmente não utilizam essas propriedades fora desse contexto, por isso acreditamos que aqui terão alguma dificuldade. No entanto, será importante eles perceberem que as mesmas podem ser bastante usadas nesta seqüência facilitando a resolução das nossas atividades. O fato de os alunos não utilizarem as relações entre a soma e o produto das raízes de uma equação do segundo grau e os seus coeficientes, fora do capítulo que as estudam especificamente, poderá provocar um obstáculo didático, quando eles forem utilizá-las, na presente atividade.

Outro aspecto a considerar é que normalmente fica implícito um contrato didático entre os alunos e o professor de tal maneira que este último só exige nas avaliações, o assunto dado no bimestre em sala de aula. Se o assunto não mais aparecer nas aulas de outro bimestre, ele será então esquecido.

u^3 e v^3 são soluções da equação $X^2 - 9X + 8 = 0$, ou seja

$u^3 = 8 \Rightarrow u = 2$ e
$v^3 = 1 \Rightarrow v = 1$

e finalmente $x = 2 + 1 = 3$

Neste momento os alunos poderão comparar este resultado com aquele que já possuem e confiarem que este método leva à resolução de equações do terceiro grau, ou seja que eles conheceram uma nova maneira de resolver essas equações. Por esse método os alunos poderão concluir que eles encontram apenas uma solução da equação do terceiro grau.

Obs: Uma maneira que encontramos para amenizar as dificuldades descritas na atividade 1, foi elaborar a atividade 0.

Atividade 2: Seja a equação $x^3 - 6x + 4 = 0$

a) Escrevendo a equação como uma igualdade entre duas funções, uma do terceiro grau, e uma do 1º, resolvê-la graficamente.

b) Identifique sobre o gráfico a(s) solução(ões) da equação dada. Será que a equação tem mais de uma solução? Explique.

c) Resolva a equação por pesquisa de raízes inteiras. Se você encontrar uma raiz, use Briot-Ruffini para encontrar outras, se houver. Quantas soluções tem a equação? Explique.

e) Supondo $x = u + v$ resolvê-la. Quantos valores de x você achou com essa estratégia? Você aprendeu a extrair raiz quadrada de um número positivo, e que não faz sentido tentar no conjunto dos números reais, extrair raiz quadrada de um número negativo. Mesmo sabendo disso vamos supor que

$\sqrt{-1}$ = i ou seja $i^2 = -1$. Com essa suposição tente calcular u^3, v^3, u, v, $x = u + v$, $u^3 + v^3$ e $u^3.v^3$

Objetivo: O objetivo desta equação é provocar um desequilíbrio, pois ao resolverem por pesquisa de raízes inteiras, os alunos deverão encontrar as três raízes da equação, analisando graficamente, também poderão encontrar as três raízes, porém quando tentarem resolver por Cardano-Tartaglia deverão se deparar com a raiz quadrada de um número negativo tornando inviável sua resolução por esse método. Será que o método falhou, apesar de ter funcionado tão bem na primeira equação, ou será que existe raiz quadrada de número negativo e pelo fato de só conhecermos os números reais e sabermos que nenhum número real ao quadrado resulta negativo, desconhecemos essa existência? A idéia é então trabalhar com as raízes de números negativos como se elas existissem, operar com os novos números descobertos, como ferramenta, mesmo que seja para justificar o algoritmo de resolução da equação proposta, e tentar após operar com esses novos números, resolvê-la finalmente.

Análise matemática e didática:

Variáveis didáticas: Os coeficientes foram escolhidos de tal modo que a equação tenha uma raiz inteira, para que os alunos possam resolvê-la por pesquisa de raízes, e quando da sua resolução pelo método de Cardano-Tartaglia, para se extrair uma das raízes cúbicas de um número complexo, deva-se calcular o seno e o cosseno de um angulo de 45º. Para os outro ângulos será necessário o uso das fórmulas de cos (a+b) e sen(a+b).

Resolução da equação $x^3 - 6x + 4 = 0$ por pesquisa de raízes.

Os alunos poderão encontrar a solução $x = 2$ pesquisando as raízes inteiras, e aplicando Briot-Ruffini ou o método das chaves efetuar a divisão de $x^3 - 6x + 4$ por $x - 2$.

2	1	0	-6	4
	1	2	-2	0

$x^3 - 6x + 4 = (x - 2).(x^2 + 2x -2) = 0$

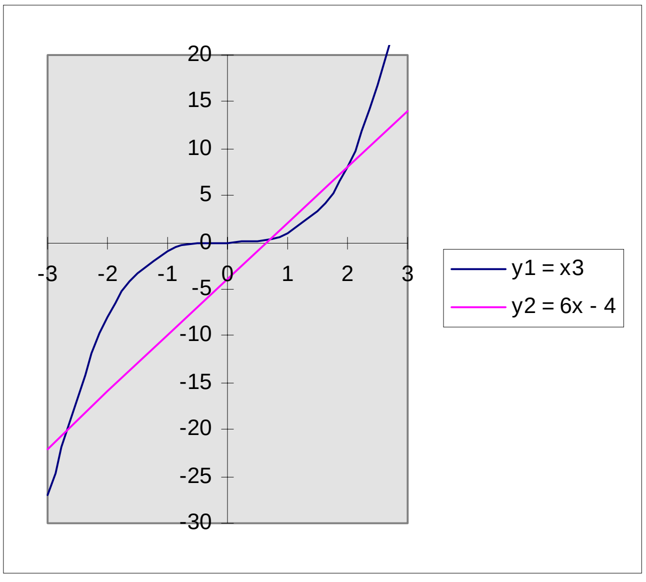
$x^2 + 2x - 2 = 0$

$\Delta = 12$

$x_1 = -1 + \sqrt{3} \cong 0{,}73$

$x_2 = -1 - \sqrt{3} \cong -1{,}73$

Eles poderão fazer os gráficos de $y_1 = x^3$ e $y_2 = 6x + 4$ e encontrar:



daí poderão concluir a existência de três raízes reais.

Os alunos operando como Cardano-Tartaglia vão obter a seguinte solução:

$x = u + v$

$(u + v)^3 - 6(u + v) + 4 = 0$

$u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 - 6(u + v) + 4 = 0$

$u^3 + 3uv(u + v) + v^3 - 6(u + v) + 4 = 0$

$u^3 + (3uv - 6)(u + v) + v^3 + 4 = 0$

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -4 \\ 3uv - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^3 + v^3 = -4 \\ uv = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^3 + v^3 = -4 \\ u^3v^3 = 8 \end{cases}$$

u^3 e v^3 são soluções da equação $X^2 + 4X + 8 = 0$.

Na resolução dessa equação deveremos ter $\Delta = -16$

É de se esperar que os alunos respondam que a equação não tem solução, mas daí estarão diante de um impasse, eles sabem que a equação tem soluções, inclusive já as encontraram por outros métodos, mas para encontra-las pelo método de Cardano - Tartaglia estão se deparando com a raiz quadrada de um número negativo. O fato de os alunos saberem que a equação tem soluções é motivo para que eles tentem considerar a existência de raízes quadradas de números negativos e a questão que eles estão respondendo, sugere os próximos passos. Assim eles poderão se deparar com números do tipo a + bi e operar com eles, e provavelmente o farão como se operassem com números reais.

Os alunos continuando os cálculos como se a raiz de um número negativo existisse deverão chegar à:

$u^3 = \dfrac{-4 + \sqrt{-16}}{2}$ que por sugestão da questão proposta deve ficar

u^3 = $\frac{-4+\sqrt{16.(-1)}}{2}$ depois u^3 = $\frac{-4+4\sqrt{-1}}{2}$ = $\frac{-4+4i}{2}$

Provavelmente neste ponto os alunos devam simplificar esse valor e com isso intuitivamente já estarão operando com esse novos números, pois estão fazendo a divisão por um número real. Finalmente, deverão chegar em

$u^3 = -2 + 2i$ e

$v^3 = -2 - 2i$

Daí $x = \sqrt[3]{-2+2i} + \sqrt[3]{-2-2i}$

Talvez aqui eles concluam que de nada adiantou prosseguir com a resolução, mas o professor deve intervir dizendo a eles que realmente a equação não foi resolvida, mas que um novo tipo de número foi descoberto e que não se consegue resolvê-la, porque não se conhecem ainda esses números, portanto deve-se estudá-los melhor, para então voltar à referida equação.

Prosseguindo na resolução eles poderão fazer:

$u^3 + v^3 = (-2 + 2i) + (-2 - 2i) = -2 \cancel{+2i} - 2 \cancel{-2i} = -4$

$u^3.v^3 = (-2 + 2i).(-2 - 2i) = (-2)^2 - (2i)^2 = 4 - (4i^2) = 4 - [4(-1)] = 4 - (-4) = 8$

Acreditamos que não haverá dificuldades para essas operações uma vez que elas conservam as propriedades das operações com números reais, apenas devendo-se considerar que $i^2 = 1$.

Institucionalização da definição dos números complexos:

Nesse momento o professor institucionaliza a definição de número complexo, como sendo um número do tipo a + bi com a e b sendo números reais, tal que $i^2 = -1$ e que esses números geralmente são nomeados na Matemática com a letra z, assim z = a + bi. O número **a** chama-se parte real de z e o número **b** chama-se parte imaginária de z. Se a parte imaginária de um número complexo é diferente de zero chamamos o número complexo de imaginário. Se o número tiver a parte real igual a zero ele será chamado de número imaginário puro.

As operações entre os números complexos.

A adição será definida como:

(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i   e a multiplicação por

(a + bi). (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc) i

A igualdade: a + bi = c + di $\Leftrightarrow$ a = c e b = d

O conjugado de a + bi = a - bi

a divisão $\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi).(c-di)}{(c+di).(c-di)} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$

Atividade 3:

a) Chama-se conjugado do número complexo a + bi ao número a - bi. Efetue o produto de a + bi pelo seu conjugado. De que tipo de número é o resultado?

b) Efetue (2 + 3i).(2 - 3i)

c) Efetue $\dfrac{4+8i}{2}$

d) Efetue $\dfrac{8-i}{1-2i}$

e) Determine os números reais a e b tais que (a + bi)(1 - 2i) = 8 - i . O que essa operação tem em comum com a operação do item d) ?

f) Como já foi dito, $i^2 = -1$. Nesse caso calcule i^0, i^1, i^2, i^3, i^4, i^5, i^6, i^7, i^8, i^{23},i^{132}

Objetivo: Esta atividade foi introduzida após aplicarmos a seqüência para uma dupla de alunos, e verificarmos que havia necessidade de que eles adquirissem mais habilidades com as operações com números complexos, principalmente na parte de igualdade e potências de i. O objetivo é que nas próximas atividades eles não encontrassem maiores dificuldades nos cálculos, e desviassem a atenção daquilo que era realmente importante na questão formulada.

Análise matemática e didática:

Procuramos no item e) mostrar que podíamos fazer uma divisão usando apenas a multiplicação, porém acreditamos que os alunos realizem os cálculos dos itens d) e e) sem notarem que se trata da mesma operação, uma vez que é muito comum eles realizarem os cálculos e não analisarem o que foi feito, ficando satisfeitos por terem obtido a solução final.

a) $(a + bi).(a - bi) = (a^2 - (bi)^2) = a^2 + b^2$ O resultado é um número real.

b) $(2 + 3i).(2 - 3i) = 4 + 9 = 13$

c) $\dfrac{4+8i}{2} = 2+4i$

d) $\dfrac{8-i}{1-2i} = \dfrac{(8-i).(1+2i)}{(1-2i).(1+2i)} = \dfrac{8-i+16i-2i^2}{1+4} = \dfrac{10+15i}{5} = 2+3i$

e) (a+bi).(1-2i)=8-i $\Rightarrow$ a-2ai+bi-2bi²=8-i $\Rightarrow$ $\begin{cases} a+2b=8 \\ -2a+b=-1 \end{cases}$ e daí a= 2 e b=3

f)

$i^0 = 1$

$i^1 = i$	$i^5 = i^4.i = i$	$i^{23} = (i^4)^5.i^3 = i^3 = -i$
$i^2 = -1$	$i^6 = i^4.i^2 = -1$	$i^{132} = i^0 = 1$
$i^3 = i^2.i = -i$	$i^7 = i^4.i^3 = -i$	
$i^4 = i^2.i^2 = 1$	$i^8 = i^4.i^4 = 1$	

Atividade 4: Existe um número do tipo a + bi tal que $(a + bi)^2 = 3 + 4i$?

Objetivos: Um dos objetivos desta atividade é que os alunos desenvolvam um algoritmo para extrair raízes quadradas de um número complexo, e que mais à frente eles tentem fazer o mesmo com uma raiz cúbica, deparando-se então com a impossibilidade desta última operação. Esta impossibilidade será a motivação para que mudemos o nosso estudo, do quadro algébrico para o geométrico. Outro objetivo é que eles trabalhem com esses novos números para que adquiram habilidades nas operações.

Análise matemática e didática:

variáveis didáticas: Tendo em vista que para se desenvolver esta atividade, os alunos deverão resolver uma equação bi-quadrada, é importante escolher-se um número complexo de tal modo que a equação do segundo grau que resulta da bi-quadrada, tenha uma raiz que seja um quadrado perfeito para simplificar os cálculos.

$(a + bi)^2 = 3 + 4i$

$a^2 + 2abi - b^2 = 3 + 4i$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = 4 \end{cases}$$

$$b = \frac{2}{a}$$

$$a^2 - \frac{4}{a^2} = 3$$

$a^4 - 3a^2 - 4 = 0$

$a^2 = k$ O número escolhido (3 + 4i) faz resultar um valor de k que seja um quadrado perfeito

$k^2 - 3k - 4 = 0$

$k_1 = 4 \quad \Rightarrow \quad a = \pm 2$

$k_2 = -1$ não convém, pois a deve ser real

Se a = 2 então b = 1 e uma raiz quadrada de 3 + 4i será 2 + i

Se a = -2 então b = -1 e a outra raiz de 3 + 4i será - 2 - i

Assim os números que elevados ao quadrado resultam em 3 + 4i são ± (2 + i).

Portanto as raízes quadradas de 3 + 4i serão ± (2 + i).

Atividade 5 : Existe um número do tipo a + bi tal que $(a+bi)^3 = -2 + 2i$? Qual?

Objetivo: O objetivo desta atividade é que o aluno ao tentar encontrar a raiz cúbica de um número complexo, como ele já fizera com a raiz quadrada, se depare com uma impossibilidade, pois para consegui-lo precisará resolver uma equação do terceiro grau. Em vista disso, haverá a necessidade de uma mudança de quadro, e do registro de representação de um número complexo.

Análise matemática e didática:

Para extrair a raiz cúbica de -2 +2i, os alunos baseados na raiz quadrada, talvez façam:

$$(a+bi)^3 = -2+2i$$

Eles devem encontrar o número a + bi tal que $(a+bi)^3 = -2+2i$

$$a^3 + 3a^2bi + 3ab^2i^2 + b^3i^3 = -2+2i$$

$$a^3 + 3a^2bi - 3ab^2 - b^3i = -2+2i \Rightarrow \begin{cases} a^3 - 3ab^2 = -2 \\ 3a^2b - b^3 = 2 \end{cases}$$

Os alunos poderão perceber que para extraírem a raiz cúbica de um número complexo, deverão resolver um sistema de equações do terceiro grau, que sem ser impossível, é no entanto muito trabalhoso e por conseqüência impróprio para o cálculo da raiz. Além disso como fazer para extrair uma raiz de índice maior? Na impossibilidade desse cálculo com os conhecimentos obtidos até este momento, surge um impasse. O professor proporá então novas atividades para que os alunos adquiram os conhecimentos necessários para finalmente resolverem a equação pedida.

Atividade 6:

a) Represente o número complexo z = a + bi, a > 0 e b >0 através de um ponto, num sistema de coordenadas cartesianas, tomando o eixo horizontal para situar o valor de a (parte real do número complexo) e o eixo vertical para situar o valor de b (parte imaginária do número complexo).

b) Calcule o comprimento do vetor que vai de (0,0) até (a,b). Chame esse comprimento de | z |. (é o módulo do número complexo dado)

c) Seja θ o ângulo formado, supondo-se o eixo x girando no sentido anti-horário, até se sobrepor ao vetor citado no item anterior. (Esse ângulo é chamado de argumento do número complexo). Escreva em função de θ e de | z | o número complexo z = a + bi.

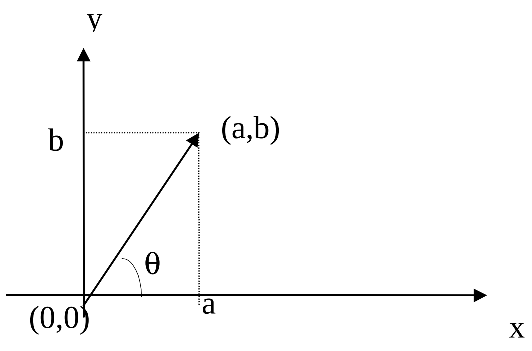
Objetivo: O objetivo é que os alunos mudem do quadro algébrico para o geométrico, para mudar da representação cartesiana para a trigonométrica para que consiga efetuar potenciação e radiciação de números complexos.

Análise matemática e didática: Apesar de na História passarem-se 300 anos desde o surgimento dos números complexos até sua representação geométrica, atualmente, como os alunos trabalham com o sistema de coordenadas desde a 8ª série do 1º grau, eles poderão desenvolver essa tarefa sem dificuldades.

Variáveis didáticas: a e b foram escolhidos positivos para sua fácil representação no sistema de coordenadas, podendo-se depois generalizar.

Eis o que os alunos poderão fazer:

a)



b) $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

c) $\text{sen}\theta = \dfrac{b}{|z|}$ e $\cos\theta = \dfrac{a}{|z|}$

d) $a = |z|.\cos\theta$ e $b = |z|.\text{sen}\theta$ portanto:

$z = a + bi = |z|.\cos\theta + (|z|.\ \text{sen}\theta)\ .i = |z|.(\cos\theta + i.\text{sen}\theta\ )$

Atividade 7: Sejam os números complexos $1 + \sqrt{3}i$ e $2\sqrt{3} + 2i$:

a) Encontre seus módulos e seus argumentos.

b) Represente-os como vetores em dois sistemas de coordenadas cartesianas.

c) Efetue o produto desses números e represente o resultado como um vetor no sistema de coordenadas cartesianas.

d) Existe uma relação entre o módulo do produto e o módulo dos fatores? Qual? E entre os argumentos? Qual?

e) Tendo em vista os resultados acima, qual seria o resultado do produto 2(cos 40º + isen40º).5(cos 20º + isen20º)?

f) Sabendo que cos(a + b)=cosa.cosb - sena.senb e que sen(a+b) = sena.cosb+senb.cosa prove as relações obtidas no item d efetuando o produto $z_1.z_2$ sendo:

$$z_1 = |z_1|(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1) \quad \text{e} \quad z_2 = |z_2|(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2)$$

g) Explique como você poderia efetuar mais facilmente $(1 + \sqrt{3}i)^5$. Efetue.

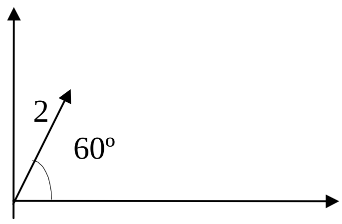
Objetivo: O objetivo desta atividade é que o aluno descubra que o módulo do produto de dois números complexos é igual ao produto dos módulos desses números, o argumento do produto é a soma dos argumentos e daí que eles percebam que a potenciação fica bem mais simples quando é usada a representação trigonométrica.

Análise matemática e didática.

Variáveis didáticas: Os números acima foram escolhidos de tal forma que seus argumentos tenham seno e cosseno conhecidos e no item g, a forma trigonométrica já tenha sido estabelecida no item a. Foram dadas as fórmulas de cos(a+b) e sen(a+b) pois os alunos normalmente operam poucas vezes com elas no curso secundário.

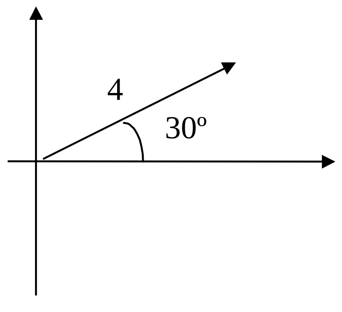
a)

$$|z_1| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$$



$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen}\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos\theta = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = 60^\circ$$

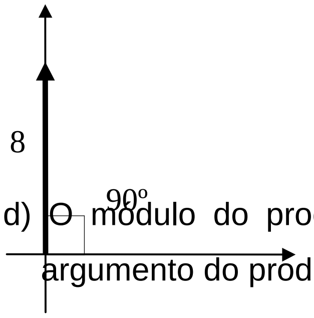
b)



$$|z_2| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = 4$$

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen}\theta = \dfrac{1}{2} \\ \cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = 30^\circ$$

c) $(1+\sqrt{3}i).(2\sqrt{3}+2i) = 2\sqrt{3}+2i+6i-2\sqrt{3} = 0+8i$



d) O módulo do produto é igual ao produto dos módulos dos fatores e o argumento do produto é igual à soma dos argumentos dos fatores.

e) 2(cos40º + i sen40º).5(cos20º + isen20º) = 10(cos 60º + i sen 60º)

f) $z_1.z_2 = |z_1|(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1)\,.|z_2|(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2)=$

$$= |z_1|.|z_2|(\cos\theta_1.\cos\theta_2 - \text{sen}\,\theta_1.\text{sen}\,\theta_2) + i(\text{sen}\,\theta_1.\cos\theta_2 + \text{sen}\,\theta_2.\cos\theta_1) =$$

$$= |z_1|.|z_2|.((\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1 + \theta_2))$$

g)

$$(1+\sqrt{3}i)^5 = 2^5(\cos 5.60° + i\,\text{sen}\,5.60°) =$$

$$= 32(\cos 300° + i\,\text{sen}\,300°) = 32(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) = 16 - 16\sqrt{3}i$$

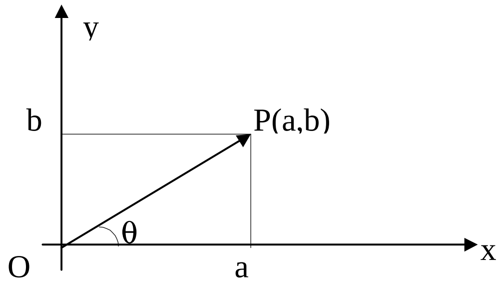
Desde que os alunos percebam que para multiplicar dois números complexos basta multiplicar seus módulos e somar seus argumentos eles deverão estar prontos para efetuar a potenciação.

Institucionalização da representação gráfica, da forma trigonométrica, do produto e da potência de números complexos.

Vamos representar um número complexo, num sistema de coordenadas cartesianas. Representaremos cada número complexo z = a + bi pelo ponto do plano de coordenadas (a,b). Dessa forma o número complexo z = 3 + 2i será representado pelo ponto P(3,2)

Forma trigonométrica de um número complexo.

Vamos localizar um número complexo na sua representação geométrica por:



a) A distância OP deste ponto até a origem do sistema cartesiano ortogonal é chamada módulo de z e representada por $|z|$.

b) O ângulo θ , $0 \leq \theta < 2\pi$, que se obtém, supondo-se o eixo x girando no sentido anti- horário em torno de O até se superpor ao segmento OP. Esse ângulo θ é chamado argumento de z e é representado por Arg(z).

Cálculo do módulo de z onde z = a + bi

Pelo Teorema de Pitágoras temos $|z|^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow |z| = = \sqrt{a^2 + b^2}$

O ângulo θ é tal que $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{|z|} \Rightarrow a = |z|.\cos\theta \\ \text{sen}\,\theta = \dfrac{b}{|z|} \Rightarrow b = |z|.\text{sen}\,\theta \end{cases}$

Assim o número z = a + bi pode ser representado por

$z = |z|.\cos\theta + i|z|\text{sen}\,\theta$ ou $z = |z|.(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$

que é sua forma trigonométrica.

Potenciação na forma trigonométrica

Sejam $z_1 = |z_1|.(\cos\theta_1 + i.sen\theta_1)$ e $z_2 = |z_2|.(\cos\theta_2 + isen\theta_2)$

Vamos efetuar o produto $z_1.z_2$

$$z_1.z_2 = |z_1|.|z_2|.(\cos\theta_1.\cos\theta_2 + i.sen\theta_2.\cos\theta_1 + i.sen\theta_1.\cos\theta_2 - sen\theta_1.sen\theta_2)$$

$$z_1.z_2 = |z_1|.|z_2|.(\cos\theta_1.\cos\theta_2 - sen\theta_1.sen\theta_2) + i(sen\theta_1.\cos\theta_2 + sen\theta_2.\cos\theta_1)$$

Da trigonometria temos que:

$\cos(\theta_1 + \theta_2) = (\cos\theta_1.\cos\theta_2 - \text{sen}\,\theta_1.\text{sen}\,\theta_2)$ e

$\text{sen}(\theta_1 + \theta_2) = (\text{sen}\,\theta_1.\cos\theta_2 + \text{sen}\,\theta_2.\cos\theta_1)$

Portanto $z_1.z_2 = |z_1|.|z_2|\left[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i.\text{sen}(\theta_1 + \theta_2)\right]$

$$z_1.z_2.z_3 = (z_1.z_2).z_3 = |z_1|.|z_2|.|z_3|\left[\cos[(\theta_1 + \theta_2) + \theta_3] + i.\text{sen}[(\theta_1 + \theta_2) + \theta_3]\right] =$$

$$= |z_1|.|z_2|.|z_3|\left[\cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) + i.\text{sen}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)\right]$$

Como a potência z^n é um produto de n fatores iguais a z, vem:

$$z^n = |z|.|z|.|z|..........|z|.\left[\cos(\theta+\theta+\theta+........+\theta)+i.\text{sen}(\theta+\theta+\theta+...........+\theta)\right]$$

log*o*

$$z^n = |z|^n.\left[\cos(n.\theta)+i.\text{sen}(n.\theta)\right]$$

Assim se quisermos calcular ($\sqrt{3}$ + i)^9 podemos usar o Binômio de Newton, ou escrever esse número na forma trigonométrica que é $2(\cos\frac{\pi}{6}+i.sen\frac{\pi}{6})$ e efetuar a potência.

Assim se z = $2(\cos\frac{\pi}{6}+i.sen\frac{\pi}{6})$ então

$$z^9 = 2^9(\cos 9.\frac{\pi}{6}+i.sen 9.\frac{\pi}{6}) = 512(\cos\frac{3\pi}{2}+i.sen\frac{3\pi}{2}) = 512(0-i) = -512i$$

Atividade 8: Efetuar

a)$(\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i)^8$

b)$(1 + i)^{10}$

c)$(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)^{12}$

Objetivo: Esta atividade também foi introduzida após a aplicação da seqüência, inicialmente para apenas uma dupla de alunos. Percebemos que os alunos precisavam de maior habilidade com os cálculos e este é o objetivo dessa atividade.

Análise matemática e didática.

Variáveis didáticas:

Procuramos elaborar exercícios de tal modo que o seno e o cosseno dos argumentos permitissem o cálculo dos mesmos sem o uso de calculadoras. Não esperamos que os alunos encontrem dificuldades nessa atividade pois se tratam apenas de exercícios de fixação da teoria.

Atividade 9:

a) Represente os números abaixo pela sua forma algébrica e graficamente. Existe uma relação entre eles? qual ? Explique.

8(cos90º + i sen90º)

8(cos450º + isen450º)

8(cos810º + isen810º)

8cos(1170º+isen1170º)

b) Encontre os números complexos que elevados ao cubo sejam iguais a cada um dos números acima. Com esses resultados e a conclusão do item anterior, quais são as raízes cúbicas de 8.(cos90º + isen90º)? Qual a diferença entre seus argumentos? E a relação entre seus módulos?

c) Represente-os geometricamente num mesmo sistema de coordenadas. Que figura eles formam?

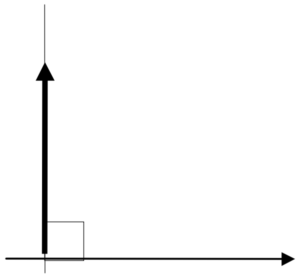
Objetivo: O objetivo é que os alunos extraiam a raiz cúbica de um número complexo, fazendo as operações inversas da potenciação, que eles percebam que um número complexo tem três raízes cúbicas, que todas têm o mesmo módulo e os argumentos estão em uma Progressão Aritmética de razão 120º.

Análise matemática e didática.

Variáveis didáticas: Os números foram escolhidos de tal forma que seus argumentos fossem múltiplos de 3, que o módulo tivesse uma raiz cúbica exata e que sua representação geométrica fosse simples de ser encontrada.

a) Todos os números são iguais a 8i, portanto são iguais entre si.

8



b)O número ao cubo igual a 8(cos90º + isen90º) é 2(cos 30º + isen30º).

O número que elevado ao cubo é igual a 8(cos450º + isen450º) é 2(cos 150º + i sen 150º), o número ao cubo igual a 8(cos 810º + i sen 810º) é 2(cos 270º + isen270º) e o número ao cubo igual a 8(cos1170º + isen1170º) é 2(cos 390º + isen390º) que por sua vez é igual a 2(cos 30º + i sen30º).

Tendo no item a) concluído que os números dados, são todos iguais entre si, os alunos poderão perceber que os três valores encontrados são as raízes de 8(cos 90º + i sen90º), que a diferença entre seus argumentos é de $\frac{360^o}{3}$ e que todos tem o mesmo módulo.

c) Como as raízes tem o mesmo módulo e seus argumentos formam uma P.A. elas se localizam sobre uma circunferência de raio 2, sendo vértices de um triângulo equilátero.

Atividade 10:

a) Encontre as raízes quartas de -8 - 8$\sqrt{3}$i e represente-as geometricamente num mesmo sistema de coordenadas cartesianas.

b) Determine as raízes cúbicas de 1 e represente-as geometricamente no mesmo sistema de coordenadas cartesianas.

c***)*** Calcule as raízes quadradas de i e represente-as geometricamente num mesmo sistema de coordenadas cartesianas.

Objetivo: Também introduzida após o teste inicial da seqüência para uma dupla de alunos, esta atividade tem por objetivo que os alunos adquiram habilidade na radiciação de números complexos e que eles consigam representar graficamente as raízes.

Análise matemática e didática:

Variáveis didáticas: Os números foram escolhidos de tal maneira que os argumentos fossem ângulos de seno e cosseno conhecidos e também pedimos a raiz cúbica de um número real para que os alunos o tratasse como um número complexo obtendo três raízes cúbicas. acreditamos que os alunos respondam à essa atividade sem dificuldades.

Atividade 11:

a) Represente o número 1 + $\sqrt{3}$i geometricamente e escreva sua forma trigonométrica

b) Represente geometricamente e escreva a forma trigonométrica de 1 - $\sqrt{3}$i, conjugado de 1 + $\sqrt{3}$i , em função do argumento deste último número.

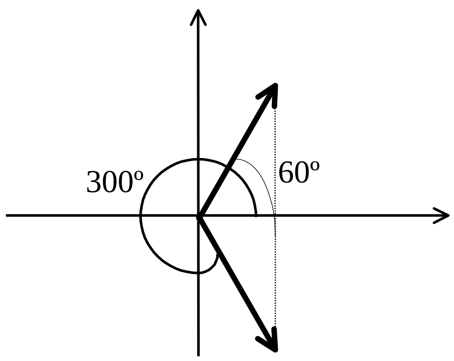
c) Se a forma trigonométrica de z = a + bi é z = $|z|$.(cosθ + i senθ), qual é a forma trigonométrica de $\bar{z}$ = a - bi em função do ângulo θ.

Objetivo: O objetivo desta atividade é que os alunos descubram que sendo a forma trigonométrica de um número complexo, z = $|z|(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$ então a forma trigonométrica do seu conjugado será $\bar{z} = |z|(\cos\theta - i\,\mathrm{sen}\,\theta)$, de tal modo que isso seja utilizado na atividade seguinte, onde vão extrair raízes cúbicas de um número, e de seu conjugado.

Análise matemática e didática

Variáveis didáticas: Os números foram escolhidos de tal forma que os alunos já o representaram antes facilitando esta parte da atividade.

Uma das dificuldades ao desenvolvimento dessa tarefa talvez seja o aluno descobrir o ângulo de 300º uma vez que normalmente os alunos sentem dificuldades de transferir os conhecimentos e eles estão acostumados a trabalharem com esses valores somente quando estão estudando trigonometria e fazem a redução ao primeiro quadrante. Para que eles descubram esse ângulo e percebam as relações entre as funções trigonométricas de 60º e de 300º será importante que façam a representação gráfica de 1 - $\sqrt{3}i$ tendo em vista a representação gráfica de 1 + $\sqrt{3}i$.



1 + $\sqrt{3}$ i = 2(cos60º + isen60º)

1- $\sqrt{3}$ i = 2(cos300º + isen300º) = 2(cos60º - isen60º)

a - bi = $|z|$.(cosθ - i senθ)

Atividade 12 : Agora que você já sabe extrair raízes cúbicas de um número complexo resolva a equação $x^3 - 6x + 4 = 0$ do ponto onde havíamos parado.

Objetivo: Finalmente os alunos operando com raízes quadradas de números negativos, poderão resolver a equação o que a princípio eles não conseguiram, por não conhecerem os números complexos.

Análise matemática e didática

Variáveis didáticas: Como já foi dito anteriormente a equação foi escolhida de tal forma que neste momento sua representação geométrica fosse simples e que os ângulos resultassem em valores cujos senos e cossenos fossem conhecidos podendo-se calculá-los sem o uso de uma calculadora.

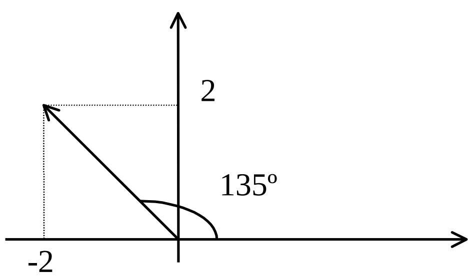
x = $\sqrt[3]{-2+2i} + \sqrt[3]{-2-2i}$

Os alunos deverão extrair as raízes cúbicas de -2 + 2i e de -2 - 2i Para isso deverão escrever esses números nas suas formas trigonométricas e para tanto achar seus módulos e argumentos. Eles poderão trabalhar com -2 + 2i e depois baseados na atividade anterior transferir os resultados para o conjugado desse número

z_1 = -2 + 2i

$|z_1| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$

Eles poderão representar o número geometricamente para determinar o argumento ou então calculá-lo através do seno e do cosseno.



z_1 = $\sqrt{8}$ (cos135º + isen135º) e as raízes cúbicas de z_1 são:

u_1 = $\sqrt[6]{2^3}$.(cos45º + isen45º) = $\sqrt{2}$ (cos45º + isen45º)

u_2 = $\sqrt{2}$ (cos165º + isen165º)

$u_3 = \sqrt{2}$ (cos285º + isen285º)

Tendo escrito o número na forma trigonométrica e achado suas raízes eles deverão operar com o conjugado.

$z_2 = \sqrt{8}$ (cos135º - isen135º)

$v_1 = \sqrt{2}$.(cos45º - isen45º)

$v_2 = \sqrt{2}$ (cos165º - isen165º)

$v_3 = \sqrt{2}$ (cos285º - isen285º)

como x = u + v

$x_1 = u_1 + v_1 = 2\sqrt{2}\cos 45º = 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2$

$x_2 = u_2 + v_2 = 2\sqrt{2}\cos 165º \cong -2{,}73$ $\quad$ (cos165º = cos(45º + 120º))

$x_3 = u_3 + v_3 = 2\sqrt{2}\cos 285º \cong 0{,}732$ $\quad$ (cos 285º = cos(45º + 240º))

Nesta última passagem os alunos talvez questionem se não deveríamos ter 9 soluções uma vez que temos três raízes cúbicas de cada número complexo. Porque somar somente as conjugadas? A resposta é que o produto de u.v deve ser 2 e somente as raízes conjugadas, neste caso, quando multiplicadas resultam em 2.

E finalmente a equação foi resolvida chegando-se à soluções reais, embora trabalhando-se com raízes quadradas de números negativos. Com essa resolução espera-se que os alunos vejam significado no uso dos números complexos que apesar de não representarem quantidades, operando-se com eles podemos chegar a resultados que são números reais, negando-se a idéia de que sempre que um problema apresenta raiz quadrada de um número negativo na sua resolução, é porque ele não tem solução.

Institucionalização da radiciação de números complexos

Define-se raiz enésima do número complexo

$z = |z|.(\cos\theta + i.sen\theta)$,

aos números $w = |w|.(\cos\varphi + i.sen\varphi)$ tal que $\mathrm{w}^{\mathrm{n}} = z$.

$$w^n = z \Rightarrow |w|^n.(\cos\ n\varphi + i.\mathrm{sen}\ n\varphi) = |z|.(\cos\theta + i.\mathrm{sen}\,\theta)$$

dessa igualdade temos que: $|\mathrm{w}|^n = |z| \Rightarrow |w| = \sqrt[n]{|z|}$

$$\left.\begin{matrix}\cos \mathrm{n}\varphi = \cos\theta \\ \mathrm{sen}\ \mathrm{n}\varphi = \mathrm{sen}\,\theta\end{matrix}\right\} \Rightarrow n\varphi = \theta + k.360° \quad \text{(k é nº inteiro)}$$

portanto $\varphi = \dfrac{\theta}{\mathrm{n}} + \dfrac{k.360°}{n}$

Vamos atribuir valores à k e observar os valores de φ.

$$k = 0 \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\theta}{n}$$

$$k = 1 \Rightarrow \varphi_2 = \frac{\theta}{n} + \frac{360°}{n}$$

$$k = 2 \Rightarrow \varphi_3 = \frac{\theta}{n} + \frac{2.360°}{n}$$

.

.

.

Observe que para k = n , teremos $\cos\varphi_{n+1} = \cos\varphi_1 \quad e \quad \mathrm{sen}\,\varphi_{n+1} = \mathrm{sen}\,\varphi_1$:

$$k = n \Rightarrow \varphi_{n+1} = \frac{\theta}{n} + \frac{n.360°}{n} = \frac{\theta}{n} + 360°$$

Para k = n+1 teremos:

$$\varphi_{n+2} = \frac{\theta}{n} + \frac{(n+1).360°}{n} = \frac{\theta}{n} + \frac{360°}{n} + 360° = \varphi_2 + 360° \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\varphi_{n+2} = \cos\varphi_2 \quad e \ \operatorname{sen}\varphi_{n+2} = \operatorname{sen}\varphi_2$$

Portanto teremos n valores diferentes para os argumentos de w e concluímos que o número z possui n raízes enésimas, todas com módulo igual a $\sqrt[n]{|z|}$ e cujos argumentos são

$$\varphi_1 = \frac{\theta}{n}$$

$$\varphi_2 = \frac{\theta}{n} + 1.\frac{360°}{n}$$

$$\varphi_3 = \frac{\theta}{n} + 2.\frac{.360°}{n}$$

.

.

$$\varphi_n = \frac{\theta}{n} + (n-1)\frac{360°}{n}$$

Ou seja os argumentos formam uma P.A. de primeiro termo $\varphi_1 = \frac{\theta}{n}$ e razão $\frac{360°}{n}$.

Atividade 13: Qual é o número que elevado ao cubo é igual ao seu triplo mais 1? Dados: cos20º $\cong$ 0,94 cos140º $\cong$ -0,77 cos260º $\cong$ -0,17

Objetivo: O objetivo desta atividade é que os alunos apliquem os conhecimentos adquiridos durante as atividades anteriores, analisem por pesquisa de raízes e graficamente o número de soluções de uma equação do terceiro grau, que é $x^3 = 3x + 1$ e a resolvam pelo método de Cardano-Tartaglia.

Análise matemática e didática.

Variáveis didáticas: Os coeficientes foram escolhidos de tal maneira que o argumento do número complexo do qual vai-se extrair raiz cúbica, seja um ângulo conhecido, no caso 60º. Porém eles precisarão do cosseno de 20º , de 140º e de 260º que serão fornecidos.

Após escreverem a equação do problema proposto, $x^3 - 3x - 1 = 0$, e efetuarem a pesquisa de raízes inteiras, os alunos deverão descobrir que ela não possui esse tipo de raízes. Analisando graficamente poderão constatar que ela possui três raízes reais, as quais tentarão encontrar pelo método de Cardano-Tartaglia.

$(u + v)^3 = 3(u + v) + 1$

$u^3 + 3uv(u + v) + v^3 = 3(u + v) + 1$

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = 1 \\ u.v = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^3 + v^3 = 1 \\ u^3.v^3 = 1 \end{cases}$$

u^3 e v^3 são as raízes da equação $X^2 - X + 1 = 0$

$$u = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}\ , \qquad v = \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i} \qquad e\ x = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i = 1.(\cos 60^o + i\,\text{sen}\,60^o)$$

As raízes cúbicas desse números são:

$u_1 = 1(\cos 20^o + i\text{sen}20^o)$	$v_1 = 1(\cos 20^o - i\text{sen}20^o)$
$u_2 = 1(\cos 140^o + i\text{sen}140^o)$	$v_2 = 1(\cos 140^o - i\text{sen}140^o)$
$u_3 = 1(\cos 260^o + i\text{sen}260^o)$	$v_3 = 1(\cos 260^o - i\text{sen}260^o)$

e daí:

$x_1 = u_1 + v_1 = 2\cos 20^o \cong 2x0,94 = 1,88$

$x_2 = u_2 + v_2 = 2\cos 140^o \cong 2x(-0,77) = -1,54$

$x_3 = u_3 + v_3 = 2\cos 260^o \cong 2x\ (-0,17) = -0,34$

Capítulo VI

REALIZAÇÃO DA SEQÜÊNCIA E ANÁLISE A POSTERIORI

Para testar a seqüência, nós a aplicamos, nos dias 26, 27 e 28 de julho de 1997 das 14:00 às 16:00 horas, a uma dupla de alunos do terceiro ano do segundo grau do Colégio São Marcos, em Mogi das Cruzes, com objetivo de verificar possíveis falhas das atividades, e o tempo necessário para o seu desenvolvimento.

Desta aplicação surgiram mudanças em algumas atividades, como a colocação de um quadriculado para a construção de gráficos, quando da análise das soluções de uma equação pelo método gráfico, e o fornecimento de alguns valores de seno e cosseno pois a obtenção dos mesmos através das fórmulas da trigonometria estavam dificultando muito a realização das atividades e desviando a atenção dos alunos para trabalhosos cálculos que poderiam ser evitados. Estimamos o tempo em três sessões de duas horas cada, e com as modificações realizadas, concluímos que esse tempo seria suficiente.

Após o teste feito com a referida dupla e efetuadas as modificações necessárias, marcamos com 18 alunos do terceiro colegial do São Marcos, a primeira sessão, que ocorreu no dia 11/09/97 às 14:00 horas, fora do horário das aulas.

Primeira Sessão

Os 18 alunos compareceram, e após as explicações de que essas atividades faziam parte de uma dissertação de Mestrado, que deveriam ser realizadas em duplas, e que não seriam dadas aulas expositivas, mas apresentadas situações para que eles resolvessem, com o objetivo que adquirissem o conceito de números complexos, foram iniciados os trabalhos.

Nesta sessão foram realizadas as quatro primeiras atividades (0, 1, 2,e 3). As intervenções por nós realizadas foram por dupla, não na lousa, mesmo porque os alunos durante o desenvolvimento das atividades, não se encontram todos no mesmo ponto.

Vamos passar à análise do que foi efetuado:

Atividade 0. Considere três cubos: um de aresta u, um de aresta v e um de aresta u + v. Considere também um retângulo de lados u e v.

a) Tente expressar o volume do cubo de aresta u + v, em função do volume dos outros dois cubos, da área e do semi-perímetro do retângulo.

b) Tente encontrar u e v tal que o semi-perímetro do retângulo seja 7 e a sua área seja 12.

c) Tente encontrar valores de u e v para os quais o volume do cubo de aresta u + v, seja igual a três vezes o semi - perímetro do retângulo mais dois.

De início alguns alunos disseram que não saberiam resolver as situações propostas, que eram muito difíceis, que eles não se lembravam do conteúdo daquilo que estava sendo pedido.

Daí a nossa primeira intervenção, comentando que isso já era esperado, pois eles estavam acostumados a assistirem à exposição do professor, para então trabalharem, realizando o que o professor fez, apenas utilizando outros números. Que a nossa proposta era diferente, criamos situações para que eles participassem ativamente do conhecimento que fossem construir, que eram capazes de fazer, era apenas uma questão de iniciar, e estaríamos ali para orientá-los.

Convencidos de que poderiam realizar as atividades eles as iniciaram ainda um pouco inseguros.

O que nós fizemos foi romper o **contrato didático** tradicional existente entre os professores e alunos nas escolas brasileiras, no qual o professor expõe e faz alguns exercícios sobre um assunto, propondo outros semelhantes para os alunos.

O objetivo do item a) nesta atividade, era que os alunos percebessem que a expressão $u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$ poderia ser escrita na forma $u^3 + 3uv (u + v) + v^3$. Para surpresa deles mesmos, todos conseguiram essa igualdade e ficaram satisfeitos por estarem realizando algo não efetuado anteriormente pelo professor. Tivemos o cuidado de dizer que cada atividade tinha como objetivo chegar a um número chamado complexo, através de uma caminhada natural.

No item b) as 9 duplas resolveram o sistema por substituição, como havíamos previsto, chegando aos resultados corretos. Tivemos que intervir para mostrar que a equação que fornece as soluções, poderia ser obtida diretamente, usando as relações entre soma e produto das raízes de uma equação do segundo grau. Esta intervenção, havia sido prevista, pois como já dissemos, existe um **contrato didático** entre os professores e alunos da maioria das escolas brasileiras, no qual só se exige do aluno, aquilo que está sendo estudado no momento, e dentro do contexto abordado.

No item c) duas duplas conseguiram chegar ao sistema de equações, mas não conseguiram encontrar os valores de u e v. Nossa intervenção foi perguntar: "quanto deve valer $u^3 + v^3$ e 3uv, para que $u^3 + 3uv(u + v) + v^3$ seja igual a $3(u + v) + 2$?" Com isso os alunos construíram o sistema de equações. Tivemos que intervir novamente para que elevassem $uv = 1$ ao cubo, para poderem perceber que estavam procurando u^3 e v^3, conhecendo sua soma e seu produto. Alertados novamente que as atividades eram passos, e que cada item procurava facilitar a realização do seguinte, voltando ao item b), todos conseguiram encontrar os valores de u^3 e de v^3 e depois os de u e v.

Esta atividade se desenvolveu de acordo com o esperado, primeiro pela reação do aluno esperando uma aula expositiva, depois por não estarem usando algo específico que eles acabaram de ver, mas tendo que se reportar a fatos com os quais não estavam trabalhando no momento, como encontrar dois números, conhecidos a sua soma e o seu produto, escrevendo diretamente a equação que possibilita encontrá-los. É notório que esse novo **contrato didático** é de difícil assimilação pelos alunos, que sempre assistiram a aula expositiva e jamais participaram ativamente da construção dos seus conhecimentos.

Atividade1: Seja a equação $x^3 - 6x - 9 = 0$

a) Resolva a equação por pesquisa de raízes inteiras. Se você encontrar uma raiz, use o Teorema de D'Alembert para achar as outras. Quantas soluções tem a equação? Explique.

b) Escrevendo a equação como uma igualdade entre duas funções, uma do terceiro grau, e uma do 1º, resolvê-la graficamente.

c) Identifique no o gráfico a(s) solução(ões) da equação dada. Será que a equação tem mais de uma solução? Explique.

d) Supondo $x = u + v$, resolvê-la. Quantos valores de x achou com essa estratégia?

Apesar de já terem estudado resolução de equações polinomiais os alunos não entenderam a expressão "pesquisa de raízes inteiras", o que parece comprovar que, fora do contexto em que estudam certo assunto, sentem enormes dificuldades. Se esta pergunta fosse feita durante uma aula de equações polinomiais, provavelmente seria respondida, o que parece mostrar que as aulas expositivas fazem com que o aluno apenas reproduza o que está sendo estudado no momento. Tivemos que lembrá-los também, do teorema de D'Alembert para encontrar as outras raízes da equação, daí então conseguiram resolvê-la.

Quanto `a resolução gráfica, nenhuma dupla havia alguma vez utilizado esse processo para identificar soluções de uma equação, o que parece evidenciar quão pouco se trabalha graficamente com os alunos no primeiro e segundo graus, e isto quer dizer que provavelmente os professores não fazem **mudança de quadro** e de **registro de representação**, durante suas aulas. Tivemos que orientá-los no sentido de encarar uma equação como uma igualdade entre duas funções, o que foi conseguido por quatro duplas, que construíram os gráficos e chegaram ao número de soluções da equação proposta. Para as outras duplas tivemos de mostrar quais eram as duas funções. Após essa intervenção, construíram os gráficos, mas tiveram que ser orientados a perceberem que a interseção entre os mesmos, fornecia os valores de x que eram raízes da equação proposta. O comportamento dos alunos nesta atividade parece nos mostrar a importância de se trabalhar em quadros diferentes, em se usar registros de representação diferentes para um mesmo conteúdo, sempre que possível.

Estes dois itens exigiram muita orientação do professor, o que já era esperado, uma vez que as atividades propostas exigem vários conceitos de uma vez, o que normalmente não ocorre quando o professor define um conceito e passa à realização de exercícios de fixação. Como todas as duplas apresentaram dúvidas, acreditamos que seja necessário, desde o ensino no primeiro grau, se trabalhar com gráficos. Por exemplo, quando da resolução de sistemas lineares na sétima série, o professor deve propor que ela seja feitas tanto no **quadro algébrico**, cujos **registros de representação** são as equações, quanto no **quadro geométrico**, cujos **registros de representação** são os gráficos.

No item c) dessa atividade, os alunos deveriam resolver uma equação do terceiro grau, usando o método de Cardano-Tartaglia, substituindo x por u + v. Com a experiência obtida na atividade zero, todas as duplas conseguiram chegar ao resultado final, e alguns alunos comentaram que era uma resolução interessante. A atividade zero fora colocada, para que nesse instante a equação fosse resolvida de maneira rápida, para não ficar a impressão que esse método fosse muito complicado. O objetivo foi alcançado!

Atividade 2: Seja a equação $x^3 - 6x + 4 = 0$

a) Escrevendo a equação como uma igualdade entre duas funções, uma do terceiro grau, e uma do 1º, resolvê-la graficamente.

b) Identifique sobre o gráfico a(s) solução(ões) da equação dada. Será que a equação tem mais de uma solução? Explique.

c) Resolva a equação por pesquisa de raízes inteiras. Se você encontrar uma raiz, use Briot-Ruffini para encontrar outras, se houver. Quantas soluções tem a equação? Explique.

e) Supondo $x = u + v$ resolvê-la. Quantos valores de x você achou com essa estratégia? Você aprendeu a extrair raiz quadrada de um número positivo, e que não faz sentido tentar no conjunto dos números reais, extrair raiz quadrada de um número negativo. Mesmo sabendo disso vamos supor que $\sqrt{-1} = i$ ou seja $i^2 = -1$. Com essa suposição tente calcular u^3, v^3, u, v, $x = u + v$, $u^3 + v^3$ e $u^3.v^3$

Como esta atividade era semelhante à anterior, todos efetuaram os itens a) e b), descobrindo que a equação proposta tinha três soluções reais. No item c) surgiram pela primeira vez, os números do tipo a + bi, e pela forma como a atividade foi enunciada, os alunos conseguiram chegar a uma solução real e a uma soma de duas raízes cúbicas de números complexos. Nesse momento dissemos que um novo tipo de número havia surgido, e que operando-se com eles, chegaríamos às três soluções reais da equação proposta, mas para tanto precisaríamos extrair raízes cúbicas dos mesmos.

Terminadas as atividades, fizemos a institucionalização do conceito de números complexos, ressaltando que as operações obedecem as propriedades das operações com números reais, considerando-se que $i^2 = -1$. Definimos também o conjugado de um número complexo.

Atividade 3:

a) Chama-se conjugado do número complexo a + bi ao número a - bi. Efetue o produto de a + bi pelo seu conjugado. De que tipo de número é o resultado?

b) Efetue (2 + 3i).(2 - 3i)

c) Efetue $\frac{4+8i}{2}$

d) Efetue $\frac{8-i}{1-2i}$

e) Determine os números reais a e b tais que (a + bi)(1 - 2i) = 8 - i . O que essa operação tem em comum com a operação do item d) ?

f) Como já foi dito, $i^2 = -1$. Nesse caso calcule i^0, i^1, i^2, i^3, i^4, i^5, i^6, i^7, i^8, i^{23},i^{132}

Para encerrar essa sessão os alunos realizaram a atividade 3, cujo objetivo era a familiarização com as operações de adição, multiplicação, divisão e potências de i. Mais uma vez nos pareceu que a seqüência em que as atividades foram propostas, propiciou que todos realizassem corretamente os cálculos pedidos, sendo que três duplas não conseguiram descobrir que para elevar i a 23 deveriam dividir 23 por 4 e tomar o resto. O que fizeram foi escrever o número 23, como o produto de 11 fatores iguais a i^2 e o outro fator igual a i. Houve nossa intervenção no sentido de mostrar que se $i^4 = 1$ era mais fácil se pensar nessa potência.

Segunda Sessão

Realizada no dia 12/09/97, das 14:30 até as 16:30 horas, a segunda sessão contou com a participação de todos os alunos do dia anterior. Foram feitas as atividades 4, 5, 6, 7 e 8.

Atividade 4: Existe um número do tipo a + bi tal que $(a + bi)^2 = 3 + 4i$?

Nenhuma dupla conseguiu realizar totalmente a atividade 4, pois quando da obtenção dos valores de a e b, do número a + bi, os alunos tentaram resolver a equação $b^2 = -1$, não levando em consideração que b deveria ser um número real. Depois de perguntarmos: “De que tipo é o número b?”, a atividade foi concluída por todos.

Acreditamos que o comportamento dos alunos foi natural, uma vez que eles sabiam da existência da raiz quadrada de número negativo, por isso é necessário, quando da definição de um conceito, que se dê bastante ênfase a que conjunto pertencem os números envolvidos.

Atividade 5:

Existe um número do tipo a + bi tal que $(a+bi)^3 = -2 + 2i$? Qual?

Todas as duplas conseguiram chegar ao sistema com o qual deveriam encontrar a e b e aí pararam, pois não sabiam resolvê-lo. Nossa intervenção foi no sentido de mostrar que eles haviam chegado à um sistema de equações do terceiro grau que mesmo sem ser impossível, teria uma resolução muito trabalhosa e que eles pensassem se quiséssemos uma raiz quarta ou quinta, como seria. Nesse momento, colocamos que a impossibilidade de extração de raízes cúbicas, impediu o desenvolvimento dos números complexos por aproximadamente 300 anos, quando então os matemáticos conseguiram efetuar essa operação. Dissemos ainda que o nosso objetivo a partir da próxima atividade seria descobrir uma maneira de extrairmos raiz cúbica, ou qualquer raiz desses números.

Atividade 6:

a) Represente o número complexo $z = a + bi$, $a > 0$ e $b > 0$ através de um ponto, num sistema de coordenadas cartesianas, tomando o eixo horizontal para situar o valor de a (parte real do número complexo) e o eixo vertical para situar o valor de b (parte imaginária do número complexo).

b) Calcule o comprimento do vetor que vai de (0,0) até (a,b). Chame esse comprimento de $| z |$. (é o módulo do número complexo dado)

c) Seja θ o ângulo formado, quando o eixo x gira no sentido anti-horário, até se sobrepor ao vetor citado no ítem anterior. (Esse ângulo é chamado de argumento do número complexo). Escreva em função de θ e de $| z |$, o número complexo $z = a + bi$.

Pudemos notar uma grande dificuldade por parte de todos os alunos para iniciar essa atividade. Eles diziam não saber fazer o que estava sendo pedido. Quando desenhamos os eixos x e y eles entenderam do que se tratava, do que pudemos, talvez, concluir que os alunos não estão familiarizados com o termo coordenadas cartesianas. Feita a intervenção todos conseguiram escrever a forma trigonométrica de um número complexo. Explicamos que essa nova maneira de escrever esses números, é que possibilitaria a extração de raízes cúbicas.

Outra vez, nos parece que faz falta aos alunos o **jogo de quadros**, eles sentem dificuldades com o quadro geométrico talvez por não estarem acostumados a sair do quadro algébrico.

Atividade 7. Sejam os números complexos $1 + \sqrt{3}i$ e $2\sqrt{3} + 2i$:

a) Encontre seus módulos e seus argumentos.

b) Represente-os como vetores em dois sistemas de coordenadas cartesianas

c) Efetue o produto desses números e represente o resultado como um vetor no sistema de coordenadas cartesianas.

d) Existe uma relação entre o módulo do produto e o módulo dos fatores? Qual? E entre os argumentos? Qual?

e) Tendo em vista os resultados acima, qual seria o resultado do produto $2(\cos 40^\circ + i\text{sen}40^\circ).5(\cos 20^\circ + i\text{sen}20^\circ)$?

f) Sabendo que cos(a + b)=cosa.cosb - sena.senb e que sen(a+b) = sena.cosb+senb.cosa prove as relações obtidas no ítem d efetuando o produto $z_1.z_2$ sendo:

$$z_1 = |z_1|(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1) \quad \text{e} \quad z_2 = |z_2|(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2)$$

g) Explique como você poderia efetuar mais facilmente $(1 + \sqrt{3}i)^5$. Efetue.

Quatro duplas chegaram à conclusão que o módulo do produto de números complexos era igual ao produto dos módulos dos fatores e que o argumento da soma era igual à soma dos argumentos dos fatores, mas no momento de efetuar o produto de dois números dados na forma trigonométrica, aplicaram a propriedade distributiva e não conseguiram efetuar o cálculo. Foram então novamente alertados que as atividades obedeciam uma ordem e que cada passo levava ao passo seguinte. Aí então usaram as conclusões dos itens anteriores, chegando finalmente ao resultado correto e alguns comentaram que assim era muito fácil fazer a multiplicação. Desse ponto em diante as atividades foram concluídas corretamente por todos.

Atividade 8: Efetuar

a)$(\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i)^{8}$

b)$(1 + i)^{10}$

c) $(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)^{12}$

Essa atividade foi introduzida depois que a seqüência foi aplicada na primeira dupla de alunos em julho, pois percebemos que havia necessidade de alguns exercícios para desenvolver a habilidade nos cálculos de potenciação. Todas as duplas conseguiram efetuar esses cálculos, quando demonstraram um bom conhecimento da trigonometria necessária. Pedimos para que pensassem como seria complicado efetuar esses cálculos, se não tivéssemos escrito o número complexo na forma trigonométrica, ou seja **se** não tivéssemos feito uma **mudança de quadro** e de **registro de representação.**

Terceira Sessão:

Realizada no dia 19/09/97 das 14:30 às 16:30 horas, com as atividades 9,10, 11,12 e 13. Todos os alunos compareceram.

Atividade 9:

a) Represente os números abaixo pela sua forma algébrica e graficamente. Existe uma relação entre eles? qual ? Explique.

8(cos90º + i sen90º)

8(cos450º + isen450º)

8(cos810º + isen810º)

8cos(1170º+isen1170º)

b) Encontre os números complexos que elevados ao cubo sejam iguais a cada um dos números acima. Com esses resultados e a conclusão do ítem anterior, quais são as raízes cúbicas de 8.(cos90º + isen90º)? Qual a diferença entre seus argumentos? E a relação entre seus módulos?

c) Represente-os geometricamente num mesmo sistema de coordenadas. Que figura eles formam?

Todas as duplas responderam corretamente o item a)**,** porém sozinhas não conseguiram concluir quais eram as raízes cúbicas do número pedido, havendo nesse momento nossa intervenção, para que percebessem quais eram as raízes e como era calculada a diferença entre os argumentos dessas raízes. O item b) dessa atividade foi a que mais necessitou nossa ajuda e o item c) foi realizado por todos os alunos sem dificuldades.

Acreditamos que mais uma vez o contrato didático, no qual o professor deduz e o aluno faz exercícios, se tornou um motivo de dificuldade para a realização desta atividade, pois nos pareceu que os alunos não sentem confiança no que estão fazendo, quando a dificuldade aumenta.

Atividade10:

a) Encontre as raízes quartas de -8 - $8\sqrt{3}$i e represente-as geometricamente num mesmo sistema de coordenadas cartesianas.

b) Determine as raízes cúbicas de 1 e represente-as geometricamente no mesmo sistema de coordenadas cartesianas.

c***)*** Calcule as raízes quadradas de i e represente-as geometricamente num mesmo sistema de coordenadas cartesianas.

Esta atividade foi introduzida após a aplicação da seqüência para a primeira dupla em julho, pois vimos a necessidade de uma fixação dessas operações por parte dos alunos. Todos conseguiram resolver os exercícios propostos, sem maiores dificuldades.

Parece que o bom desempenho dos alunos nessa atividade, demonstra o sucesso da nossa seqüência didática, uma vez que um dos objetivos da mesma é que eles operassem corretamente com os números complexos.

Atividade11:

a) Represente o número $1 + \sqrt{3}i$ geometricamente e escreva sua forma trigonométrica

b) Represente geometricamente e escreva a forma trigonométrica de $1 - \sqrt{3}i$, conjugado de $1 + \sqrt{3}i$, em função do argumento deste último número.

c) Se a forma trigonométrica de $z = a + bi$ é $z = |z|.(\cos\theta + i\ \text{sen}\theta)$, qual é a forma trigonométrica de $\bar{z} = a - bi$ em função do ângulo θ.

Duas duplas conseguiram desenvolver esta atividade sem ajuda, as outras, chegaram a seno e cosseno de 300º mas não perceberam que cos300º = cos (-60º) = cos 60º e sen 300º = sen(-60º) =- sen60º. Após nossa orientação para esse esclarecimento, todos resolveram corretamente as questões propostas.

Neste momento fizemos a institucionalização da potenciação e da radiciação dos números complexos.

Atividade 12 : Agora que você já sabe extrair raízes cúbicas de um número complexo, resolva a equação $x^3 - 6x + 4 = 0$ do ponto onde havíamos parado.

Todos os alunos desenvolveram completamente esta atividade, que era uma aplicação de tudo que já fora visto anteriormente

A realização desta atividade, mostrou que os alunos assimilaram bem os conceitos nela envolvidos, uma vez que extraíram sem dificuldades as raízes cúbicas pedidas.

Atividade 13:

Qual é o número que elevado ao cubo é igual ao seu triplo mais 1? Dados:
$\cos 20^\circ \cong 0{,}94$ $\cos 140^\circ \cong -0{,}77$ $\cos 260^\circ \cong -0{,}17$

A última atividade, exigia que os alunos passassem por todas as atividades anteriores, verificando o número de soluções da equação pelo método gráfico, e a obtenção das soluções pelo método de Cardano-Tartaglia. Todos a realizaram com rapidez e eficiência.

Após a realização dessa atividade, sentimos que nosso objetivo fora alcançado; os alunos trabalhavam corretamente com os complexos, representando-os geometricamente, mudando da forma algébrica para a trigonométrica, extraindo raízes cúbicas, dando-nos a impressão que fixaram de maneira bem fundamentada os conceitos por eles construídos.

CAPÍTULO VII

CONCLUSÕES

Durante o primeiro, e quase todo o segundo grau, os alunos ficam sabendo que não existe raiz quadrada de números negativos, que equações do segundo grau que tenham discriminante negativo não têm soluções reais, e que os problemas que recaem nessas equações, são problemas que não apresentam soluções. Acreditamos que no fim do 3º ano do segundo grau, para que eles passem a extrair raízes quadradas de números negativos, precisam ter algum motivo.

Fazendo um estudo histórico e epistemológico dos números complexos, descobrimos que para a resolução de algumas equações do terceiro grau, era preciso extrair a raiz quadrada de um número negativo, e analisando algumas dessas equações descobrimos que elas possuíam pelo menos uma raiz real. Este foi o motivo que levou os matemáticos a suporem a existência dessas raízes quadradas.

Pelas análises preliminares efetuadas na nossa pesquisa, pudemos constatar que os alunos em geral, não tiveram contato com os números complexos através de uma equação do terceiro grau, mas através de uma equação do segundo grau. Os livros didáticos analisados, na sua grande maioria introduzem o conceito desses números, através de uma equação do segundo grau, o que deve induzir o professor a fazer o mesmo. Portanto os alunos não tem um motivo para extrair raiz quadrada de número negativo pois esse tipo de equação não lhes provoca nenhum desequilíbrio. Sem um motivo para trabalhar com essas raízes, e considerando que elas não representam uma quantidade, era de se esperar que os alunos não fixassem as operações com esses novos números, que para eles não teriam significado. Pudemos constatar através de testes aplicados a alunos que já haviam estudado os números complexos, que nenhum deles conseguiu escreve-los na sua forma trigonométrica, portanto não conseguiram efetuar potenciação e radiciação.

Pensando nessa problemática, resolvemos construir uma seqüência didática, na qual os alunos tivessem motivo para extrair raízes quadradas de números negativos, e operassem com essas raízes, chegando a respostas que são números reais de problemas reais. Com isso esperávamos que eles percebessem que era importante e útil saber operar com esses números. Para que eles participassem ativamente da aquisição do conceito de número complexo, os colocamos numa situação a-didática, rompendo um tradicional **contrato didático** no qual o professor expõe e o aluno assiste. Procuramos justificar a necessidade de mudança da **representação algébrica** para a **trigonométrica**, propondo uma situação insolúvel, quando trabalhada na primeira, mas com solução quando trabalhada na segunda.

Parece que conseguimos obter alguns aspectos positivos, com a maior parte dos alunos, quando da aplicação da seqüência didática:

- Ao trabalharem em duplas, eles participaram ativamente da formação do conceito de número complexo quando discutiam a realização de cada atividade proposta.

- Tiveram a oportunidade de descobrir qual foi o motivo que levou os matemáticos a extraírem as raízes quadradas de um número negativo, percebendo que os conceitos matemáticos não são simplesmente inventados, mas surgem, quando da resolução de problemas.

- Sentiram a necessidade de mudar do **registro de representação das fórmulas no quadro algébrico**, para o **geométrico**, e efetuaram essa mudança.

- Chegaram à soluções reais de equações, operando com raízes quadradas de números negativos. Com isso puderam tomar conhecimento de que apesar de um número complexo não representar uma quantidade, operando-se com ele chega-se à resultados que são números reais.

- À medida em que as atividades iam se realizando, pudemos notar que os alunos se adaptavam cada vez mais à situação a-didática na qual estavam, recorrendo cada vez menos ao professor.

Como efeitos negativos surgidos com a mudança do contrato didático, podemos citar que é muito difícil fazer com que os alunos abandonem a postura de esperar o professor fazer, para depois eles copiarem. Surgida a primeira dificuldade, eles já recorrem ao professor, talvez não por incompetência, mas pela falta de iniciativa e de acreditar que eles possam realizar as atividades propostas, isso atrapalhou um pouco o início dos trabalhos, mas como dissemos acima, com o tempo eles começaram a se adaptar à essa nova situação.

Para constatarmos que após a aplicação da seqüência, os alunos começaram a considerar os números complexos como números mesmo, não como representações matemáticos sem significado, e em conseqüência fixaram as operações realizadas, dois meses depois da seqüência, aplicamos um teste, ao qual compareceram 15 dos alunos aos quais foi aplicada a seqüência. O teste com os respectivos resultados vem a seguir:

1- Assinale as alternativas que mais se aproximam da sua idéia a respeito da Matemática.

a) A Matemática é uma disciplina difícil, pois os conceitos são inventados por pessoas em momento de inspiração, de maneira teórica, nada tendo a ver com fatos concretos da nossa vida, como números complexos, logaritmos, etc. Grande parte dos conceitos matemáticos são dados na escola somente para o aluno fazer exercícios que nada têm a ver com a realidade e depois fazer uma prova.

b) Os conceitos matemáticos nasceram de situações concretas do dia a dia.

Como na seqüência por nós elaborada, os alunos tiveram oportunidade de ver o surgimento dos números complexos quando da resolução de uma equação do terceiro grau, todos responderam b

3) Como você acha que os números complexos foram descobertos?

a) Quando um matemático ao resolver uma equação do segundo grau se deparou com delta negativo ($\Delta = b^2 - 4ac$), e para continuar a resolução ele resolveu criar um número i tal que $i^2 = -1$

b)Os números complexos foram descobertos quando um matemático tentava resolver uma equação do terceiro grau.

Novamente todos responderam b), uma vez que nossa seqüência mostrava esse fato.

4) Você já resolveu algum problema, que apesar de na sua resolução aparecer raiz quadrada de um número negativo, o resultado final foi um número real ?

a) sim b) não

Todos responderam sim, uma vez que era esse o objetivo da nossa seqüência.

5) Um dos itens abaixo é verdadeiro e o outro é falso. Baseado no seu conhecimento de números complexos, coloque V no verdadeiro e F no falso.

☐ Os n^{os} complexos, como por exemplo 2 + 3i, na realidade não são números, são apenas representações matemáticas, pois não representam uma quantidade, uma vez que ninguém diz: “ganho (2 + 3i) reais de salário”.

☐ Os números complexos são números sim, pois com eles podemos resolver problemas do dia-a-dia e chegar a respostas que representam quantidades.

Mais uma vez o estudo dos números complexos tal como foi feito propiciou que todos os alunos respondessem a alternativa b).

Acreditamos poder concluir, após as respostas das cinco primeiras questões, que o **obstáculo epistemológico**, de considerar os números complexos como simples representações matemáticas sem significado de número, tenha sido superado com a aplicação da nossa seqüência

6) Um número real nós podemos representar geometricamente na reta real. E um número complexo, é possível ser representado geometricamente?

a) sim b) não

Se você respondeu sim, tente no espaço ao lado, representar geometricamente o número 2 + 3i.

Todos os alunos representaram corretamente esse número no sistema de coordenadas cartesianas, o que parece evidenciar que o fato destacado na seqüência, que a potenciação e radiciação só puderam ser realizadas após a representação geométrica dos números complexos, fez com que eles percebessem a enorme importância dessa representação para um número complexo.

O número 3 + 2i (forma algébrica) também pode ser representado pelo par ordenado (3, 2), tente realizar as operações abaixo com números complexos.

7) $(2 + 3i) + (5 + 2i) =$

8) $(4 , 5) + (2 , 6) =$

9) $(2 + 3i) . (5 + 2i) =$

10) $(4 , 5) . (2 , 6) =$

11)Determine os números reais x e y de modo que $(x + 2i) + (3 - yi) = 5 + i$

Da questão 7 até a 11 todos os alunos responderam corretamente, com exceção de um aluno que errou a questão 11, pois ao invés de somar os dois números complexos do primeiro membro da equação, ele os multiplicou

12)Calcule i^{67}

Apenas um aluno errou essa questão pois respondeu que $i^{67} = 33i^2. i = -33i$. Parece que ele confundiu $(i^2)^{32}$, com $33i^2$

13) Efetue a divisão: $\frac{4+19i}{5+2i}$

Esse cálculo foi realizado corretamente por todos os alunos.

14) Encontre dois números que somados resultem 4, e multiplicados, resultem 13. Após encontrá-los, some-os e multiplique-os para verificar se realmente resultam nos valores dados.

Apenas um aluno errou esta questão, quando da resolução do sistema linear. Dois utilizaram a soma e o produto das raízes como havíamos feito na seqüência, os outros resolveram o sistema por substituição.

15)Sendo $z = 1 + \sqrt{3}\,i$, calcule z^{10}. Dê a resposta na forma algébrica

Apenas dois alunos não conseguiram efetuar esta potência, mesmo assim chegaram ao resultado, um deles fazendo $(1 + \sqrt{3}i)^2$, depois $(1 + \sqrt{3}i)^3$ e como $(1 + \sqrt{3}i)^3 = -8$, fez $(1 + \sqrt{3}i)^{10} = (1 + \sqrt{3}i)^9 \cdot (1 + \sqrt{3}i) = -512 \cdot (1 + \sqrt{3}i)$. O outro aluno fez algo semelhante, chegando à resposta correta. De qualquer maneira pudemos constatar que esses alunos parece que não entenderam que a potenciação se torna mais simples, quando efetuada na forma trigonométrica.

16) Calcule as raízes quartas de $-8 + 8\sqrt{3}i$ e represente-as geometricamente. Dê as respostas na forma algébrica

Os dois alunos que não usaram a forma trigonométrica na questão 15, não fizeram essa questão, os demais a efetuaram de maneira correta, o que parece nos indicar que a seqüência aplicada, tendo dado significado aos números complexos, fez com que os alunos fixassem mais as operações com esses números.

Comparando esses resultados, com os obtidos com os alunos do 1º ano do curso de Engenharia Mecânica da Universidade de Mogi das Cruzes, que não estudaram os números complexos como estamos propondo, consideramos que a nossa proposta teve pleno êxito.

BIBLIOGRAFIA

[1] AG ALMOULOUD, Saddo. "Fundamentos da Didática da Matemática e Metodologia da Pesquisa". Caderno de Educação Matemática, vol 3, PUC-SP, 1997.

[2] ALMEIDA, Nilze Silveira de, "Uma Experiência Didática de Formação Matemática-Epistemológica com Professores do Segundo Grau", Dissertação de Mestrado em Ensino da Matemática, PUC-SP, 1992.

[3] ARTIGUE, Michèle. "Ingénierie Didactique", RDM, vol.9, nº 3, 1988.

[4] ARTIGUE, Michèle. "Ingeniería Didáctica", Ingeniería Didáctica em Educación Matemática, Grupo Editorial Iberoamérica, Bogotá, 1995, p. 33 - 59.

[5] ARTIGUE, Michèle. "Epistémologie et Didactique", RDM, vol. 10, nº 2.

[6] ARTIGUE M. & DELEDICQ A. - Quatre étapes dans l'histoire des nombres complexes: "quelques commentaires épistemologiques et didactiques" - Institut de Recherche Pour L'enseignement Des Mathematiques, Paris VII - 1992

[8] BOYER,C.B. "História da Matemática", Editora Edgard Blucher Ltda, São Paulo, 1974.

[9] BROUSSEAU, Guy. "Le contrat didactique: le milieu", RDM, Vol. 9, nº 3, 1988, p.309 a 336.

[10] BROUSSEAU, Guy. "Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques", RDM, vol. 7, nº 2 - Ed. La Pensée Sauvage, Grenoble - 1986.

[11] BROUSSEAU, Guy. "Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques", RDM, vol. 4, nº 2, 1983.

[12] CARAÇA, Bento de Jesus. "Conceitos Fundamentais da Matemática", Lisboa, 1963

[13] CHEVALLARD, Yves / JOHSUA, Marie-Alberte. "La transposition didactique", éditions la Pensée Sauvage, ed. 1991.

[14] CHEVALLARD, Yves. "Sur l'ingénierie didactique", IREM d'Aix-Marseille, 1982.

[15] DOUADY, Régine. "Un exemple d'ingenierie didactique oú sont à loeuvre jeux dex cadres e dialectique outil-objet", Seminaires de didacticque des mathématiques, Anné 1986-1987, IRMAR de Rennes1.

[16] DOUADY, Régine. "L'ingénierie didactique: un moyen pour l'enseignant d'organiser les rapports entre l'enseignement et l'apprentissage". Cahier DIDIREM 19, IREM, Paris VII, 1993.

[17] DOUADY, Regine et GLORIAN Marie-Jeanne Perrin. "Un processus d'aprendissage du concept d'aire de surface plane", Educational studies in Mathemmatics. 20: P. 387-424, Kluwer Academic Publishers. Printed in Netherlands,1989.

[18] DUVAL, Raymond. "Graphiques et équations: lárticulation de deux registres", Annales de Didactique et de Sciences Cognitives 1, IREM de Strasbourg, p.235 a 253, 1988.

[19] DUVAL, Raymond. "Semiosis et pensée humaine - Registres sémiotiques et appprentissages intellectuels", Peter Lang S.ª, Suisse,1995.

[20] HENRY, Michel. "Didactique des Mathématiques: une préseentation de la didactique en vue de la formation des enseignants", IREM de Besançon, octobre, 1991.

[21] HELLMICH, Eugene W. "Números complexos (A história de $\sqrt{-1}$)", Tópicos da história da matemática para uso em sala de aula; v.4 - Atual Editora Ltda. - São Paulo, 1992.

[22] HOOD, Rodney. "Solução da equação polinomial de grau três a graus maiores", Tópicos da história da matemática para uso em sala de aula; v.4 - Atual Editora Ltda. - São Paulo, 1992.

[23] MILIES, César Polcino. "A emergência dos números complexos", RPM Nº 24 - 1994.

[24] MILIES, César Polcino. "A solução de Tartaglia para a equação do terceiro grau", RPM - Nº 25 - 1994

[25] SÃO PAULO (ESTADO), Secretaria de Estado da Educação, Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. "Proposta Curricular para o Ensino de Matemática, 2º Grau", 3ª Edição, São Paulo, 1994.

[25] STILLWELL, John. "Mathematics and its History" Springer - Verlag - New York - 1989

[26] STRUICK, Dirk J. "História concisa das matemáticas - Gradiva Publicações Ltda. - Lisboa , 1992.

[27] TROTTA, Imenes e Jakubovic, "Matemática Aplicada" - Editora Moderna - São Paulo, 1980