Elizabeth Gervazoni Silva de Mello

DEMONSTRAÇÃO

“Uma Seqüência Didática para a Introdução de seu Aprendizado no Ensino da Geometria ”

Mestrado em EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PUC- SP

1999

Elizabeth Gervazoni Silva de Mello

DEMONSTRAÇÃO

"Uma Seqüência Didática para a Introdução de seu Aprendizado no Ensino da Geometria "

Dissertação apresentada como exigência parcial para a obtenção do título de MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA à Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, sob orientação do Professor Doutor Saddo Ag Almouloud.

PUC- SP

1999

"... melhor do que o estudo do espaço, a geometria é a investigação do 'espaço intelectual', já que, embora comece com a visão, ela caminha em direção ao pensamento, vai do que pode ser percebido para o que pode ser concebido."

D. WEELER (1981,p.352)

BANCA EXAMINADORA

____

____

____

Dedicatória

Dedico este trabalho a todos os professores e pesquisadores em Educação Matemática que esforçam-se por aperfeiçoar os caminhos do ensino-aprendizagem da matemática.

AGRADECIMENTOS

A DEUS, por estar presente em todos os momentos de minha vida.

Ao Professor Doutor Saddo Ag Almouloud, pelo trabalho de orientação, desenvolvido com muita competência, dedicação, amizade e paciência.

À professora Doutora Sílvia Dias Alcântara Machado e ao professor Doutor Méricles Thadeu Moretti , pelas sugestões, comentários e críticas que tanto contribuíram para a elaboração e evolução dessa dissertação.

Ao corpo docente do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP e aos professores visitantes, todos muito importantes para a minha formação.

À Direção do colégio *Santo Agostinho*, por autorizar a aplicação da seqüência didática; à dedicada professora de matemática, Maria do Carmo F. C. Sakai, por incentivar sua aplicação e aos alunos que participaram das atividades programadas, enriquecendo-a com seus comentários e observações.

Aos amigos do Mestrado, pelo companheirismo e amizade.

Ao secretário Francisco e aos funcionários da Biblioteca por me ajudarem neste processo.

À CAPES, pela bolsa de estudos que permitiu uma maior dedicação ao Programa de Pós-Graduação.

A Universidade de Mogi das Cruzes, pelo apoio financeiro no início do Programa de Pós-Graduação.

À professora de português Nilcéia de Campos, que colaborou na revisão deste texto.

Ao meu querido esposo Alaylton, por sempre caminhar comigo de "*mãos dadas*", aos meus filhos: Helena, Arlette e Alaylton, que com amor compreenderam minha *"presença ausente".*

Aos meus familiares e à equipe-1 de Nossa Senhora de Mogi das Cruzes, que durante todo o processo me apoiaram.

RESUMO

O objetivo deste trabalho consistiu em desenvolver uma seqüência didática como alternativa metodológica para o ensino da geometria na oitava série do Ensino Fundamental, com a finalidade de despertar no aluno novos caminhos do pensamento geométrico dedutivo.

Neste sentido, construímos uma seqüência didática para introduzir a técnica da *demonstração*, levando em consideração as teorias de BALACHEFF, DUVAL e outros pesquisadores franceses. As atividades foram adaptadas dos trabalhos de BONNEFOND, G. & DAVIAND, D. & REVRANCHE, B..

Trabalhamos com uma classe de 14 alunos da oitava série do Ensino Fundamental, analisamos as dificuldades durante a aplicação da seqüência, procuramos debater e orientar estratégias de resolução das atividades. No decorrer das sessões, bem como na última sessão aplicamos testes. Concluímos que a abordagem desenvolvida por nossa seqüência didática favoreceu o aprendizado da técnica da *demonstração* em geometria.

ABSTRAT

The objective of this work consisted in developing a didactic sequence as a metodological alternative to teach geometry for the 8th grade students, with the aim to show them new ways of the deductive geometrical thought.

With this purpose, we worked on a didactic sequence to introduce the demonstration tecnique, taking into consideration BALACHEFF, DUVAL and other french searchers theory. The activitie were adapted from BONNEFOND,D. & DAVIAND,D. & REVRANCHE,B..

We worked with a class of fourteen students from the 8th grade. We analysed all the difficulties during the sequence application, then discussed and suggested strategics to solve the activities. Tests were applied during as well as in the last session. We concluded that the way we worked our didactic sequence favoured the learning of the demonstration tecnique in geometry.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO..1

CAPÍTULO I: FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

1 – Fundamentação teórica 5
1.1 – Explicação , Prova e *Demonstração* 5
1.2 – Os trabalhos de Raymond Duval 6
1.2.1 – Registro de representação...10
1.2.2 – Os problemas em geometria...15
1.3 – Contrato didático 16
1.4 – Erros e obstáculos 18
1.4.1 – Obstáculos epistemológicos...19
1.4.2 – Obstáculos didáticos...20
1.4.2 – Obstáculos lingüísticos...21
2- Metodologia de Pesquisa 23

CAPÍTULO II: ESTUDO HISTÓRICO E EPISTEMOLÓGICO DA *DEMONSTRAÇÃO*

1 – A gênese da *demonstração* 26
2 – A evolução da *demonstração* 30
3 – A história determinando conclusões didáticas..32

CAPÍTULO III: ESTUDO PRELIMINAR DA *DEMONSTRAÇÃO* EM GEOMETRIA

1 – A Proposta Curricular 34
2 – Os Parâmetros Curriculares Nacionais 39
3 – Os Livros Didáticos 42
4 – As concepções dos alunos 44
4.1 – Dados sobre a amostra..45
4.2 – Problemas propostos e análise dos resultados..46

CAPÍTULO IV: PROBLEMÁTICA E HIPÓTESES DE PESQUISA

1 – Definindo o problema 71
2 – Problemática...75
3 – Hipóteses de pesquisa...76

CAPÍTULO V: A SEQÜÊNCIA DIDÁTICA

1 – A proposta da seqüência didática 80
2 – Os objetivos da seqüência didática 81
3 – A proposta didática da seqüência e os alunos 82
4 – Procedimentos relativos à aplicação da seqüência 83
5 – Desenho geral do experimento 83
6 – As sessões da seqüência didática 86
6.1 – Sessão 1 86
6.1.1 - Aplicação da sessão 1 86
6.1.2 – Conteúdo 87
6.1.3 - Análise *a priori* 93
6.1.4 - Relato da aplicação da sessão 1 86
6.2 – Sessão 2 98
6.2.1 – Aplicação da sessão 2 98
6.2.2 – Conteúdo 99
6.2.3 – Análise *a priori* 104
6.2.4 – Relato da aplicação da sessão 2 109
6.3 – Sessão 3 110
6.3.1 – Aplicação da sessão 3 111
6.3.2 – Conteúdo 111
6.3.3 – Análise *a priori* 115
6.3.4 – Relato da aplicação da sessão 3 120
6.4 – Sessão 4 123
6.4.1 – Aplicação da sessão 4 123
6.4.2 – Conteúdo 123
6.4.3 – Análise *a priori* 127
6.4.4 – Relato da aplicação da sessão 4 130

6.5 – Sessão 5 131
6.5.1 – Aplicação da sessão 5 132
6.5.2 – Conteúdo 132
6.5.3 – Análise *a priori* 136
6.5.4 – Relato da aplicação da sessão 5 138
6.6 – Sessão 6 140
6.6.1 – Aplicação da sessão 6 140
6.6.2 – Conteúdo 141
6.6.3 – Análise *a priori* 144
6.6.4 – Relato da aplicação da sessão 6 147
6.7 – Sessão 7 148
6.7.1 – Aplicação da sessão 7...148
6.7.2 – Conteúdo..149
6.7.3 – Análise *a priori* 150
6.7.4 – Relato da aplicação da sessão 7..152
6.8 – Sessão 8 153
6.8.1 – Aplicação da sessão 8 153
6.8.2 – Conteúdo 154
6.8.3 – Análise *a priori* 154
6.8.4 – Relato da aplicação 8 156
7 – Análise *a posteriori* 157

CAPÍTULO VI: CONCLUSÕES

Conclusões..168

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANEXOS

INTRODUÇÃO

As pesquisas feitas sobre o ensino-aprendizagem da geometria, de acordo com nosso estudo preliminar, mostraram algumas dificuldades que os alunos encontram na aquisição dos conceitos geométricos. Segundo Gouveia(1998), um dos problemas que favorecem o fraco desempenho de nossos alunos no que diz respeito aos conceitos e habilidades geométricas é devido à prática e às escolhas didáticas dos professores quando ensinam esses conceitos.

Podemos destacar entre outros problemas, aqueles gerados pela ausência do aprendizado da técnica da *demonstração*. Os alunos participantes desta pesquisa não parecem usufruir de um ensino que lhes permita: compreender a mudança do estatuto da figura, os estatutos da definição e dos teoremas geométricos; utilizar as mudanças de registros de representações; justificar, provar ou demonstrar suas decisões em problemas de geometria usando o raciocínio dedutivo.

Parece audacioso investir em uma pesquisa sobre o aprendizado da técnica *demonstração* em geometria. Já que salienta GOUVEIA (1998): existe um certo preconceito entre os professores para o ensino dessa técnica. Preconceito este reforçado pela ausência, nos livros, de uma orientação apropriada.

Porém a citação, feita por VIANNA (1988), nos anima a abraçar esta causa.

> *Ao oferecer o presente curso partimos de que a tarefa essencial do ensino da Geometria na escola consiste em ensinar ao aluno a raciocinar logicamente, argumentar suas afirmações e demonstrá-las (grifo nosso). Muito poucos dos egressos da escola serão matemáticos e muito menos geômetras. Também haverá os que não utilizem nenhuma vez em sua atividade prática o teorema de Pitágoras. Porém, dificilmente se achará um só que não deva raciocinar, analisar ou demonstrar (grifo nosso).*
>
> *POGORÉLOV (1974, p.9)*

Assim como as observações de PAVANELLO (1993) sobre o trabalho feito com a geometria:

.

> *O fato de que nem todo ensino de geometria produz o desenvolvimento de um pensamento crítico e autônomo não justifica seu abandono. Implica, isto sim, a necessidade de investimentos em pesquisas sobre metodologias mais apropriadas para a abordagem desse conteúdo (grifo nosso) e em ações destinadas a proporcionar aos professores condições para a melhoria da qualidade desse ensino (p.16).*

Observamos a existência de diversas soluções para capacitar os alunos de 5ª a 8ª séries na aprendizagem da geometria, uma delas é a construção de situações de ensino-aprendizagem baseadas nos seguintes aspectos: distinção entre desenho e figura geométrica; utilização de figuras geométricas com a função heurística; identificação, conversão e coordenação dos registros de representação; *demonstração* como parte integrante do processo ensino-aprendizagem dos conceitos/habilidades geométricos, estimulando progressivamente o raciocínio lógico-dedutivo.

Por isso, decidimos investir no estudo da *demonstração* em geometria como técnica permitindo ao aluno compreender melhor os conceitos geométricos e adquirir algumas habilidades em geometria.

Nosso trabalho será apresentado em seis capítulos. Sendo que o capítulo I, denominado FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA, contém a distinção entre explicação, prova e *demonstração* e o suporte teórico sobre o qual vamos nos apoiar com o intuito de elaborarmos nossa seqüência didática para a introdução da técnica da *demonstração*. Discorremos sobre a METODOLOGIA DE PESQUISA, fundamentada na proposta da engenharia didática, que consiste em análises preliminares, concepção e análise *a priori* da seqüência didática, experimentação através de sua aplicação, seguida de análise *a posteriori* e conclusão.

No capítulo II, intitulado ESTUDO HISTÓRICO E EPISTEMOLÓGICO, estudamos a gênese e a evolução da *demonstração* e abordamos conclusões didáticas determinadas pela história.

No capítulo III, intitulado ESTUDO PRELIMINAR DA *DEMONSTRAÇÃO* EM GEOMETRIA, procuramos investigar alguns aspectos que envolvem a "transposição didática" dos conceitos de geometria através da técnica da *demonstração*, ou seja, analisamos as transformações que ocorrem nesse processo. Por isso, é importante uma análise da Proposta Curricular Nacional, da Proposta Curricular Para o Ensino de 1º Grau (atualmente designado Ensino Fundamental) do Estado de São Paulo e de livros didáticos com relação ao ensino–aprendizagem da técnica da *demonstração*. Através de atividades prévias à seqüência didática procuramos levantar as concepções dos alunos (da 8ª série, de duas escolas: uma da rede pública de ensino outra da rede particular de ensino) sobre justificativas/provas dos conceitos geométricos constantes nas propostas curriculares para 7ª e 8ª séries.

Os estudos anteriores, além de confirmarem a problemática apontada por algumas pesquisas sobre o ensino-aprendizagem da geometria, revelam o provável abandono da técnica da *demonstração* em geometria no ensino Fundamental. A partir daí organizamos o capítulo IV, intitulado PROBLEMÁTICA E HIPÓTESES DE PESQUISA, situando o problema: *os alunos pesquisados apresentam evidências de não usufruir de um ensino que lhes permita: compreender a mudança do estatuto da figura, dos estatutos da definição e dos teoremas; saber utilizar as mudanças dos registros de representação; apropriar-se do raciocínio lógico–dedutivo.* A partir dessa PROBLEMÁTICA, pretendemos dar a nossa contribuição no sentido de apresentarmos uma proposta para a introdução do aprendizado da *demonstração* em geometria. Nossas HIPÓTESES: *construção de situações para serem desenvolvidas em sala de aula, nas quais a técnica da demonstração (mais associada a uma hierarquia de tarefas do que a uma hierarquia de conteúdos) tem um papel importante, leva os alunos de 5ª a 8ª séries a uma melhor compreensão dos conceitos geométricos e habilidades geométricas, observando a distinção das apreensões da figura e as mudanças e coordenação dos registros de representação.*

No capítulo V, apresentamos nossa SEQÜÊNCIA DIDÁTICA (baseada em nossas hipóteses de pesquisa), as atividades e procedimento adotado. A seqüência didática foi organizada em seis sessões, nas quais abordamos: conteúdo (análise descritiva das atividades), análise *a priori* (previsão dos comportamentos possíveis dos alunos), relato da aplicação das sessões e a análise *a posteriori* (baseada nos dados recolhidos ao longo da experimentação e nas produções dos alunos).

Finalmente, no capítulo VI, apresentamos as CONCLUSÕES, e algumas sugestões, que possibilitem a introdução do ensino-aprendizado da *demonstração* em geometria.

Não é nossa pretensão apresentar uma seqüência didática que complete o trabalho no ensino da *demonstração* em geometria, mas considerar alguns aspectos que, segundo a nossa compreensão, dizem respeito às dificuldades na aprendizagem da *demonstração* em geometria. Observando que no processo de apropriação dos conceitos e habilidades geométricas existem dificuldades que se repetem e resistem às mudanças.

Esperamos que nossa pesquisa contribua para a introdução do aprendizado da *demonstração* em geometria no Ensino Fundamental. Assim, favorecendo a apropriação dos conceitos e as habilidades geométricas dos alunos.

Capítulo I

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E METODOLOGIA DE PESQUISA

1- FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nosso objetivo é levantar as noções didáticas e alguns resultados de pesquisas sobre a *demonstração* no ensino–aprendizagem da geometria. Esses resultados e noções didáticas fundamentarão nossa pesquisa.

1.1– EXPLICAÇÃO, PROVA E *DEMONSTRAÇÃO*

Deve-se a BALACHEFF (1987), a distinção entre *explicação*, *prova* e *demonstração* .

Chama-se *explicação* um discurso que visa tornar inteligível o caráter de verdade adquirido pelo locutor de uma proposição ou de um resultado, os quais podem ser discutidos, recusados ou aceitos.

Chama-se *prova* uma explicação aceita por uma dada comunidade num dado momento. Essa decisão pode ser assunto de um debate cujo significado é a exigência de determinar um sistema de validação comum aos interlocutores.

Chama-se *demonstração* uma prova aceita pela comunidade matemática. A *demonstração* fundamenta-se em explicações apresentadas numa seqüência de enunciados, organizados conforme regras determinadas. Um enunciado é conhecido como verdadeiro, ou é deduzido a partir daqueles que o precederam, graças a uma regra de dedução. Assim, a *demonstração* é um resultado de processo particular de *prova* que vem validar uma afirmação.

1.2– OS TRABALHOS DE RAYMOND DUVAL

Segundo R. DUVAL, a geometria envolve três formas de processo cognitivo que preenchem as específicas funções epistemológicas:

- *Visualização* é o processo que examina o espaço representação, da ilustração de uma afirmação, para a exploração heurística de uma situação complexa, por uma breve olhada ou por uma verificação subjetiva.
- *Construção* (processo por instrumentos) é a execução de configurações, a qual pode ser trabalhada com um modelo. Nessa execução, as ações e os resultados observados associam-se aos objetos matemáticos representados.
- *Raciocínio* é, no processo do discurso, a extensão do conhecimento, para a *prova* e a *explicação*.

Esses diferentes processos podem ser formados separadamente. Assim, a *visualização* não depende da construção. E mesmo se a *construção* conduz a *visualização*, a *construção* do processo depende somente da conexão entre propriedades matemáticas e as técnicas de *construção*. Finalmente, se a *visualização* é um auxílio intuitivo, as vezes necessária para encontrar a *prova*, o *raciocínio* depende exclusivamente do corpo de proposições (definições, axiomas e teoremas). E em alguns casos a *visualização* pode levar a interpretações erradas).

Contudo, essas três espécies de processos cognitivos são entrelaçados em seus esforços simultâneos e cognitivamente necessários para a proficiência da geometria (DUVAL,1995).

Por outro lado, a heurística dos problemas de geometria refere-se a um registro espacial que dá lugar às formas de interpretações autônomas. Para essas interpretações distinguiremos as apreensões da figura, observadas por DUVAL:

- Seqüencial: é solicitada nas tarefas de construção ou nas tarefas de descrição com o objetivo de reproduzir uma figura.

- Perceptiva: é a interpretação das formas da figura em uma situação geométrica.
- Discursiva: é a interpretação dos elementos da figura geométrica, privilegiando a articulação dos enunciados, pois os mergulha numa rede semântica de propriedades do objeto.
- Operatória: é uma apreensão central sobre as modificações possíveis de uma figura de partida e suas reorganizações perceptivas que essas modificações sugerem.

A resolução de problemas de geometria e a entrada na forma de raciocínio que essa resolução exige, depende da distinção entre as formas de apreensão da figura. Outro passo para a resolução de problemas é observar que o raciocínio geométrico não funciona com a argumentação do pensamento natural.

Seja qual for a figura desenhada no contexto de uma atividade matemática, são possíveis duas atitudes:

- A apreensão perceptiva das formas (imediata e automática).
- A apreensão discursiva dos elementos matemáticos da figura (verificação e dependência da aprendizagem).

Essas atitudes às vezes se opõem, porque a figura pode mostrar objetos que os alunos não associam ao enunciado, ou seja, os objetos nomeados no enunciado pelas hipóteses não são necessariamente aqueles que os alunos apresentam espontaneamente.

DUVAL argumenta que o problema das figuras geométricas está na diferença entre a apreensão perceptiva e uma interpretação necessariamente comandada pelas hipóteses. Essa organização perceptiva de uma figura segue a "lei do fecho" (ou da continuidade), que diz, *"quando diferentes linhas formam um contorno simples e fechado, este contorno se separa como figura sobre o fundo"*. Essa "lei do fecho" tem uma grande importância nas figuras habitualmente presentes nos problemas, pois ela concede prioridade às linhas organizadas excluindo reorganizações que impedem de ver outras formas. Essa diferença entre a apreensão perceptiva e a apreensão discursiva encontra, em grande parte, sua origem nessa lei do fecho.

Os objetos que aparecem podem ser diferentes do tipo de objeto que a situação geométrica exige ver. Esse mesmo autor (DUVAL, 1998, p. 61), assinala que: os alunos *“lêem o enunciado, constróem a figura, em seguida se concentram na figura sem voltar ao enunciado”.*

Esse abandono do enunciado determina a ausência da interpretação discursiva da figura. Isto porque os problemas acessíveis a esses alunos são aqueles cujo enunciado é semanticamente congruente com a figura construída ou a construir.

A apreensão operatória das figuras depende das modificações que a figura pode sofrer, que são classificadas por DUVAL do seguinte modo:

- Modificação “mereológica”: a figura pode separar-se em partes que são subfiguras da figura dada, fracionando-se e reagrupando-se, isto é, uma relação da parte e do todo.
- Modificação ótica: a transformação de uma figura em outra chamada sua imagem.
- Modificação posicional: o deslocamento da figura em relação a um referencial.

Essas modificações são realizadas graficamente e mentalmente. O interesse de fracionar uma figura ou realizar o seu exame a partir de partes elementares esta ligado a operação de reconfiguração intermediária. A reconfiguração é a operação que consiste em organizar uma ou várias subfiguras diferentes de uma figura dada em outra figura. Com efeito, as partes elementares obtidas por fracionamento podem ser reagrupadas em muitas subfiguras, todas dentro da figura de partida. Essa operação permite, portanto, engrenar imediatamente os tratamentos (tal como as medidas de área por soma de partes elementares), ou colocar em evidência a equivalência de dois reagrupamentos intermediários.

"A apreensão operatória das figuras é uma apreensão central sobre as modificações possíveis de uma figura de partida e por conseqüência as reorganizações perceptivas que essas modificações sugerem. A produtividade heurística de uma figura, num problema geométrico, tem como fato, que existe a congruência entre uma de suas operações e um dos tratamentos matemáticos possíveis do problema dado (DUVAL,1988,p.62)."

Para DUVAL, as dificuldades encontrados pelo aluno para a utilização das transformações em geometria plana é a não congruência entre o tratamento matemático do problema e a apreensão operatória da figura. Diferentes fatores inferem, ora facilitando (ver imediatamente), ora ocultando (não ver), a apreensão operatória da figura, o que sugere um tratamento matemático que conduz a solução do problema.

DUVAL (1988,p.69) afirma que: *"A figura desvia, de algum modo, um fragmento do discurso teórico".* Portanto, uma das dificuldades que os problemas de geometria apresentam é a congruência ou não entre a operação operatória e um tratamento matemático possível.

Este mesmo autor (DUVAL) considera que examinando o problema de congruência entre a figura e o enunciado, e a congruência entre a figura e o tratamento matemático, passamos pelo problema do estatuto das figuras geométricas. Isto é, as propriedades da figura, estão subordinadas as hipóteses determinadas pelo enunciado do problema. Logo a apreensão perceptiva esta subordinada a apreensão discursiva, por esta ser uma teorização da representação figural.

Neste sentido, os elementos e as propriedades que aparecem sobre a figura, são comandados pelas definições, axiomas e teoremas já estabelecidos. A mesma figura pode representar diferentes figuras geométricas se modificamos o enunciado das hipóteses.

DUVAL conclui que a teorização das figuras geométricas, cuja apreensão perceptiva deve ser subordinada a apreensão discursiva, constitui um dos princípios do acesso à *demonstração*. Deve-se superar a resistência a não demonstrar, pois, assim, supera-se o obstáculo do estatuto específico de uma figura geométrica.

1.2.1 - REGISTRO DE REPRESENTAÇÃO

O registro de representação é uma noção introduzida pelo R. DUVAL para analisar a influência das representações dos objetos matemáticos sobre o ensino/aprendizagem da matemática.

DUVAL (1995, p. 15) observa:

"Não é possível estudar os fenômenos relativos ao conhecimento sem recorrer à noção de *representação*." Isto porque não há conhecimento que possa ser mobilizado por um sujeito, sem uma atividade de *representação*.

Na educação, mais especificamente na construção/apropriação do conhecimento, o termo *representação* está muito vinculado ao sentido de concepções prévias que o aluno tem sobre conhecimentos trabalhados na escola.

Admitindo-se que o professor tem por objetivo a socialização do conhecimento universal sistematizado "conhecimento científico", poder-se-ia, num primeiro momento, partir das representações/concepções prévias dos alunos e transformá-las para promover a apropriação do saber científico. Isto exige o conhecimento destas representações e um grande trabalho pedagógico posterior para "mudá-las". Pois, a função do professor é mostrar uma nova maneira de se perceber o mundo, "conhecimento universal sistematizado", com instrumentos *a priori* mais potentes e lógicos. Nesse sentido, a compreensão se refere ao processo de atribuição de significado às linguagens, nesse processo o objeto é interpretado através dos registros de representação.

R. DUVAL (1993) estabelece três tipos de perspectivas para o termo *representação*:

- *Representações mentais*: São representações internas (a nível do pensamento) e conscientes do sujeito. Estas representações podem ser definidas pelas crenças, convicções, idéias, explicações e concepções dos estudantes sobre fenômenos naturais e físicos.
- *Representações internas* ou *computacionais*: São representações internas e não conscientes do sujeito. O sujeito executa certas tarefas sem pensar em todos os passos necessários para sua realização.
- *Representações semióticas*: são representações ao mesmo tempo externas e conscientes. Elas permitem uma "visão do objeto", através da percepção de estímulos (pontos, retas, caracteres, sons etc.) com valor de significante. Existe uma grande variedade de representações semióticas que é constituída pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representação. Essa variedade tem sua dificuldade própria de significado e de funcionamento, dependendo do sistema semiótico a ser usado. Representações semióticas possíveis: figuras, esquemas, expressões lingüísticas etc.

DUVAL contesta a idéia de que as *representações semióticas* são simples exteriorizações das representações mentais para fins de comunicação. Para o autor, esta visão é enganosa, pois "... as *representações* (semióticas) não são somente necessárias para fins de comunicação, elas são igualmente essenciais para as atividades cognitivas do pensamento", ou seja, sem as *representações semióticas* torna-se impossível a construção do conhecimento pelo sujeito que apreende. É através das *representações semióticas*, que se torna possível efetuar certas funções cognitivas essenciais ao pensamento humano.

Neste sentido, Duval, define:

- *Semiósis* - a apreensão ou a produção de uma representação semiótica.
- *Noésis* - atos cognitivos como a apreensão conceitual de um objeto.

Para que ocorra um significativo aprendizado de matemática é necessário que a *noésis* (conceituação) ocorra através de significativas *semiósis* (representação). Sendo assim, o sujeito que aprende precisa estabelecer a coordenação de vários registros de representação semiótica, os quais possibilitam, desta forma, uma apreensão conceitual dos objetos matemáticos. Quer dizer, quanto maior mobilidade o sujeito tiver com registros diferentes do mesmo objeto matemático, maior possibilidade deste sujeito fazer a apreensão do objeto.

DUVAL coloca três atividades cognitivas fundamentais ligadas à *semiósis*, isto é, para que um sistema semiótico seja um registro de representação é necessário que ocorra:

- A formação de uma representação identificável como a representação de um registro dado: enunciado de uma frase (compreensível numa dada língua natural), composição de um texto, desenho de uma figura geométrica, elaboração de um esquema, escrita de uma fórmula etc. Essa formulação implica uma seleção de características e dados no conteúdo a ser representado.
- O tratamento de uma representação (transformação da representação no próprio registro no qual ela foi formada), ou seja, uma transformação interna a um registro. A *paráfrase* e a *inferência* são as formas de tratamento em língua natural. O *cálculo* é uma forma de tratamento próprio das estruturas simbólicas (cálculo numérico, cálculo algébrico, cálculo proposicional etc.). A *reconfiguração* é um tipo de tratamento particular para as figuras: é uma das várias operações que dá ao registro das figuras um papel heurístico.
- A conversão de uma representação, isto é, a transformação desta representação em uma representação de outro registro conservando a totalidade ou uma parte somente do conteúdo da representação inicial. Em geometria, dado o enunciado de um problema, pode-se esboçar a figura geométrica, que é âncora das hipóteses (conversão da representação lingüística/natural para a representação figural), e realizar as operações matemáticas (conversão para o registro algébrico ou aritmético) definidas pelo enunciado.

O *tratamento* se estabelece internamente ao registro, já a *conversão* se dá entre os registros. A conversão exige do sujeito o estabelecimento da diferença entre significado e significante.

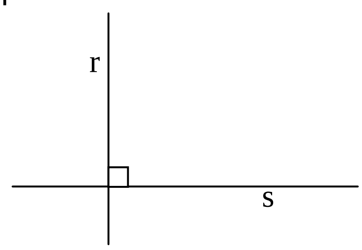
Nos problemas matemáticos especificam-se as representações semióticas que são relativas a um sistema particular de signos, de linguagem, de escritos algébricos e gráficos cartesianos que podem ser convertidos em representações equivalentes em outro sistema semiótico, mas que podem ter significação distinta para o sujeito que as utiliza. A noção de representação semiótica pressupõe então considerar os sistemas semióticos diferentes e aquela operação cognitiva de conversão das representações de um sistema semiótico a outro. Esta operação se descreve como uma mudança de forma, assim, sublinha-se a importância das representações semióticas e os seguintes pontos:

- A importância da forma em relação ao conteúdo representado, no caso dos símbolos matemáticos.
- A diversidade das formas de uma representação para um mesmo conteúdo representado.
- O interesse em uma mudança de forma de representação para raciocínios de economia de tratamento. Essa economia de tratamento pode ser uma economia de custo em memória, pode ser também uma economia de ordem heurística como, por exemplo, recorrer a uma figura para resolver um problema de geometria.

"As representações semióticas podem ser convertidas em representações equivalentes num outro sistema semiótico, mas podendo ter diferentes significados para as pessoas que a utilizam" ([31], p.140). Portanto, converter uma representação é mudar a forma pela qual um conhecimento é representado.

Para representar retas perpendiculares, podemos usar a forma simbólica ou a forma figural.

$r \perp s$ ou



Não podemos esquecer que a única mudança nestes dois registros foi a forma de sua representação e não o conteúdo representado.

Para caracterização dos objetos matemáticos (definições, propriedades [teoremas, hipóteses, conclusões]) a geometria no Ensino Fundamental faz apelo a três registros: o das figuras, o das escritas algébricas e suas inter-relações e o da língua natural.

Não se trata de uma simples mudança de registro da representação gráfica e da escrita algébrica de relações. Aqui os tratamentos são efetuados em um dos registros, aquele que é mais econômico ou mais controlável: a escrita simbólica ou a representação gráfica. Em seguida, o resultado pode ser convertido na representação do registro inicial.

A atividade cognitiva pedida em geometria exige mais, os tratamentos efetuados separada e alternativamente em cada um dos registros não são mais suficientes para um passo terminal. Ela faz com que os tratamentos figurais e discursivos sejam efetuados simultaneamente e de modo interativo.

A originalidade dos passos da *demonstração* em geometria, em relação a outras formas de atividade matemática, é a coordenação dos tratamentos específicos ao registro das figuras e ao discurso teórico na língua natural. Esses dois registros não são evidentemente próprios à atividade matemática. Os tratamentos figurais parecem revelar as leis de organização da percepção visual e a prática de um discurso teórico parece se situar no prolongamento direto de uma compreensão imediata da língua utilizada para comunicação.

A necessidade de uma coordenação entre os tratamentos de registros figurais e discursivos, a falsa proximidade entre os tratamentos matemáticos pertinentes e aqueles espontaneamente praticados em cada um desses dois registros comandam os problemas ligados à aprendizagem da geometria.

1.2.2 – OS PROBLEMAS EM GEOMETRIA

Importa não confundir na análise cognitiva de um problema de geometria, a produtividade heurística da figura e a visibilidade das operações ligadas a essa produtividade.

A produtividade heurística da figura depende da congruência entre a apreensão operatória e um tratamento matemático possível, essa visibilidade é aleatória, depende do indivíduo e das suas operações com a figura.

Para DUVAL (1988,p.57), os problemas de geometria apresentam uma grande originalidade em relação às muitas outras tarefas matemáticas que podem ser propostas aos alunos. De um lado, suas resoluções exigem uma forma de raciocínio que implica a referência à axiomática local, a qual se desenvolve no registro da língua natural. Esta forma de raciocínio conduz ao desenvolvimento de um tipo de discurso que funciona por substituição, como se tratasse de uma linguagem formalizada, no momento em que ficamos num registro sobre o qual o discurso se constrói de forma natural, por associação e por acumulação.

Segundo DUVAL (1988, p.72), favorecer o desenvolvimento das funções cognitivas, organizando problemas de geometria matematicamente próximos que solicitem os mesmos conhecimentos, determina uma categorização cognitiva indispensável ao aprendizado da *demonstração*.

Sendo assim, Duval orienta três níveis de problemas:

Nível (1) - aqueles em que há congruência operatória da figura e um tratamento matemático, neste caso uma apreensão discursiva explícita não é necessária.

Nível (2)- aqueles em que a apreensão discursiva é necessária, porque não há mais congruência ou porque é explicitamente pedido como justificativa.

Nível (3) - aqueles que exigem mais que uma apreensão discursiva, o recurso aos esquemas formais lógicos específicos.

Um exemplo de esquema formal lógico é o raciocínio disjuntivo, o qual orienta que dadas duas relações P e Q, a relação (P ou Q) ou ainda (PVQ) é verdadeira se pelo menos uma das duas relações P e Q for verdadeira.

DUVAL, em sua análise, destaca as condições facilitadoras do aprendizado:

- Prática sistemática dos problemas do nível (1).
- Distinção entre apreensão perceptiva da discursiva.
- Representação de uma rede de propriedades formando uma rede semântica de todos os conhecimentos solicitados na *demonstração*.
- Compreensão de diferença entre uma argumentação no quadro da prática natural do discurso e a articulação dedutiva.

1.3– CONTRATO DIDÁTICO

As modificações previstas para serem realizadas em sala de aula, estão relacionadas à noção de *contrato didático*, introduzida por BROUSSEAU (1979).

Para (BROUSSEAU, 1986) contrato didático é um conjunto de regras que determinam (uma pequena parte explicita, mas, sobretudo implicitamente) o que cada parceiro da relação didática deverá gerir e daquilo que, de uma maneira ou outra, ele terá de prestar conta perante o outro. Em outras palavras, chama-se *contrato didático* o conjunto de comportamentos do professor que são esperados pelos alunos e o conjunto de comportamentos do aluno que são esperados pelo professor...

A relação professor-aluno depende de um grande número de regras e convenções que funcionam como se fossem cláusulas de um contrato. Essas regras, porém, quase nunca são explícitas, mas se revelam principalmente quando se dá a transgressão das mesmas. O conjunto das cláusulas que estabelecem as bases das relações que os professores e os alunos mantêm com o saber, constitui o chamado contrato didático .

Deste modo, o contrato didático depende da estratégia de ensino adotada. As escolhas pedagógicas, o estilo de trabalho pedido aos alunos, os objetivos das atividades, a formação e as representações do professor, as condições de avaliação, entre outros, fazem parte dos determinantes essenciais do contrato didático.

Em síntese, a aquisição do saber pelos alunos é a causa fundamental do contrato didático. A cada nova etapa, o contrato didático deve ser renovado e renegociado. Na maior parte do tempo, esta negociação passa despercebida. O contrato didático se manifesta principalmente quando é transgredido por um dos parceiros da relação didática. Em muitos casos é preciso que haja a ruptura e a renegociação do mesmo para o avanço do aprendizado.

Por exemplo, no ensino da geometria (na etapa da observação), os alunos de 10 a 12 anos (5ª e 6ª séries), são solicitados a reconhecer figuras e configurações e também a saber utilizar instrumentos de desenho para desenvolver aptidões gráficas. Nessa etapa, as figuras são objetos geométricos concretos sobre os quais se pode exercer uma ação direta, sendo essas figuras representantes dos objetos matemáticos.

De 13 a 15 anos (7ª e 8ª séries) os alunos são solicitados progressivamente a dar um outro estatuto às figuras, aqueles de representação de objetos ideais e abstratos. As figuras desenhadas tomam o estatuto de significante. Grande parte dos alunos têm dificuldades para adaptar-se a essa mudança de contrato.

Afim de esclarecer o exemplo acima, recorremos às pesquisas de SANGIACOMO que distingue desenho de figura geométrica citando as definições de LABORDE (1993), nas quais o desenho é uma entidade material sobre um suporte, ou seja, um "significante" de um referencial teórico. Sendo que figura geométrica consiste na relação entre objeto geométrico (ente teórico) e suas possíveis representações (desenhos). Pode-se definir ainda como um conjunto de pares ordenados que tem como primeiro termo o referente (objeto geométrico) e como o segundo termo um dos desenhos que ele representa. As orientações de LABORDE coincidem com as de DUVAL quando fazem a distinção entre desenho e figura geométrica, argumentando que figura geométrica é a classe de todos os desenhos possíveis ligados aos objetos representados.

Para SANGIACOMO, essas definições utilizadas por LABORDE, estão ligadas diretamente às idéias de PIAGET (1974). Quando a criança trabalha sobre o desenho (traçado material), ela está utilizando apenas o aspecto figurativo do conhecimento. Por outro lado, quando a criança trabalha com a figura geométrica ela está usando o aspecto operativo desse conhecimento.

Observamos outro exemplo de ruptura do contrato didático citada por GOUVEIA (1998, p.88): A partir da sétima série, quando o aluno atinge o estágio das operações formais, mudam-se as exigências em relação a geometria. Numerosas propriedades chamadas de definições, teoremas começam a fazer parte do raciocínio. A observação da figura e as medidas não são mais instrumentos adequados para justificar uma propriedade: surge a *demonstração* como novo instrumento, uma técnica de prova a ser aprendida.

1.4 – ERROS E OBSTÁCULOS

As pesquisas da Didática Matemática, quando analisam o “erro”, apoiam-se na noção de “obstáculo” desenvolvida por BACHELARD (1965) e na teoria da equilibração de PIAGET.

BROUSSEAU (1983), apoiando-se nesses trabalhos, discute sobre o erro em matemática. Assim para ele: ”o erro não é somente o efeito da ignorância, da incerteza, do azar como acreditam as teorias behavioristas e empiristas da aprendizagem, mas efeito de um conhecimento anterior, que mobilizava seu interesse, seu sucesso, mas que agora se revela falso ou simplesmente inadaptado. Os erros desse tipo não são vagos ou imprevisíveis, mas se constituem em obstáculos”(BROUSSEAU,1983,p.171).

BROUSSEAU argumenta que o obstáculo se caracteriza por um conhecimento, uma concepção, e não uma dificuldade ou uma falta de conhecimento, que produz respostas adaptadas num certo contexto e, fora dele, produz respostas falsas. Assim, cada conhecimento é suscetível de ser um obstáculo à aquisição de novos conhecimentos. Os obstáculos se manifestam pela incompreensão de certos problemas ou pela impossibilidade de resolvê-los com eficácia, ou pelos erros que, para serem superados, deveriam conduzir ao estabelecimento de um novo conhecimento.

A noção de obstáculo pode ser utilizada tanto para analisar a gênese histórica de um conhecimento, como o ensino ou a evolução espontânea do aluno. Por isso, os obstáculos podem ser procurados a partir de uma análise histórica ou a partir da análise de dificuldades persistentes nos alunos. Em nosso trabalho, vamos analisar os obstáculos relativos a técnica da *demonstração* encontrados na história e nos livros didáticos, para tentarmos levá-los em consideração no momento da elaboração da seqüência didática.

As pesquisas observadas em *demonstração* orientaram o estudo dos fenômenos suscetíveis de provocar obstáculos epistemológicos, didáticos e lingüísticos.

1.4.1 - OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS

São aqueles que tiveram um papel importante no desenvolvimento histórico do conhecimento e cuja rejeição precisou ser integrada explicitamente no saber transmitido. São inerentes ao saber e identificáveis pelas dificuldades encontradas pelos matemáticos para os superar na história.

A análise da pesquisa de DUVAL sobre o ensino-aprendizagem de geometria, nos permite identificar prováveis fenômenos geradores dos obstáculos de natureza epistemológica:

- A *demonstração* usando o raciocínio por absurdo, que consiste em supor verdadeira a proposição contrária a demonstrar é um obstáculo na história da geometria e no ensino atual (DUVAL, 1995, p.256-259).
- A coordenação dos diferentes registros de representação (a escrita "algébrica", as figuras geométricas, o discurso na língua natural)

ligados ao tratamento dos conhecimentos não se operam espontaneamente, mesmo ao curso de um ensino que mobilize essa diversidade de registros (Duval,1995, p.75).

- As figuras formam um suporte intuitivo importante nos passos da *demonstração* em geometria, elas dão uma visão maior do que o enunciado, elas permitem explorar, antecipar. Mas, nem sempre facilitam "ver" sobre a figura as relações ou as propriedades em relação as hipóteses dadas, as quais correspondem a solução procurada (DUVAL, 1995,p.181). A figura como suporte das hipóteses num problema que envolve *demonstração* pode ser um obstáculo ao aluno, pois ele pode abandonar ou inserir hipóteses de acordo com o desenho, pode construir figuras particulares (um triângulo qualquer torna-se isósceles; duas retas secantes tornam-se perpendiculares).
- Os alunos acham inútil ou às vezes absurdo terem de demonstrar uma propriedade que se "vê" na figura (DUVAL, p.69).
- A constituição de uma rede semântica dos objetos matemáticos e dos teoremas solicitados por uma *demonstração*, associado ao registro de representação em uma rede de propriedades lógicas, determinam um obstáculo ao aprendizado da *demonstração*.

1.4.2 - OBSTÁCULOS DIDÁTICOS

São aqueles que parecem depender apenas da escolha ou de um projeto do sistema educativo, resultado de uma transposição didática que o professor pode dificilmente renegociar no quadro restrito da classe. Eles nascem da escolha das estratégias do ensino, deixando-se formar, no momento da aprendizagem, conhecimentos errôneos ou incompletos que se revelarão mais tarde como obstáculos ao desenvolvimento da conceituação. São inevitáveis, inerentes à necessidade da transposição didática. Destacam-se alguns fatos que podem gerar obstáculos de natureza didática:

- Os tipos de problemas, observados em alguns livros didáticos brasileiros, em geral, não propõem questões envolvendo *demonstração* (GOUVEIA,1998).

- A passagem da geometria empírica para a de dedução é um obstáculo para a *demonstração* (MULLER,1994).
- Segundo VIANNA (1988), muitos professores deixaram de apresentar e incentivar os alunos a fazerem quaisquer demonstrações, justificando que não dá tempo nem de ensinar Geometria quanto mais para demonstrar teoremas.
- MULLER (1994) observa que a aprendizagem da *demonstração* tem ocorrido muitas vezes por analogia. O professor propõe um modelo submetido à observação e o aluno é levado a imitar o método de resolução, numa situação aproximada. Porém, o aluno apresenta dificuldades em mobilizar os saberes.
- Segundo GOUVEIA (1998), para começar um problema com *demonstração* não existe um método de resolução geral e é difícil a ajuda do professor nesse assunto.
- VIANNA (1988, p.22) observa que um dos motivos para a rejeição do ensino da geometria dedutiva em sala de aula é a inabilidade do professor na utilização da geometria dedutiva gerada, em parte, pela deficiência de alguns cursos de licenciatura em Matemática.

1.4.3 - OBSTÁCULOS LINGÜÍSTICOS

GOUVÊA (1998, p.189) argumenta que a aquisição de uma linguagem correta é um dos objetivos da escola. No entanto, a realidade escolar registra as sérias dificuldades, por que passam os alunos, ao precisar decompor uma frase, ao analisar o papel de cada palavra num texto. Os resultados do Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar (SARESP, 1996) fazem menção ao baixo desempenho alcançado pelos alunos do ensino fundamental em Língua Portuguesa. Em síntese, a dificuldade dos alunos em ler um texto de modo inteligente e a incapacidade de reproduzi-lo com o mínimo de vocábulos apropriados, resultam na falta de competência em compreender também os enunciados dos problemas em Matemática e em elaborar uma resposta com argumentos articulados dentro de um texto coerente.

Nesse sentido, a redação das demonstrações constitui um obstáculo lingüístico importante.

MULLER (1994) enfatiza que uma parte das dificuldades dos alunos relaciona-se à escassez de vocabulário. Sob esta perspectiva, a redação da *demonstração* constitui um obstáculo, o aluno pode raciocinar corretamente e enxergar a solução de um problema mas ter dificuldades em responder com argumentos precisos. Dentro desse contexto, a leitura incorreta de definições leva à incompreensão dos objetos matemáticos.

De fato, alguns termos da geometria pouco usados na linguagem corrente, são muitas vezes a base da confusão entre hipóteses e conclusão, teorema e teorema recíproco. Destaca-se na redação da *demonstração* o uso de palavras como: *seja, com efeito, porque, ora, se ...então, qualquer que seja, portanto*. Expressões que nem sempre são bem compreendidas pelos alunos.

Assim, introduziremos o ensino da técnica da *demonstração*, procurando minimizar os obstáculos, conduzindo os alunos à reflexão sobre os estatutos de definições e teoremas, ao aprendizado dos diferentes registros de representação e ao reconhecimento da validade de um raciocínio dedutivo.

2 - METODOLOGIA DE PESQUISA

A pesquisa em didática, segundo G. WALDEGG (1997), é um processo empírico, no sentido que se deve extrair os dados da realidade e os comparar às hipóteses; o laboratório da pesquisa em didática é tanto o escritório de trabalho, a sala de aula, a escola ou a sociedade, quanto a História. Este laboratório é o lugar onde juntamos os dados e onde colocamos à prova as hipóteses. As conclusões do estudo serão tão mais poderosas quanto as instâncias para verificar as hipóteses são variadas ([31]).

A metodologia de nossa pesquisa desenvolve-se nos princípios da engenharia didática. M. ARTIGUE (1988) determina as características da Engenharia Didática como metodologia de pesquisa. Para ela, Engenharia Didática é um esquema experimental baseado sobre "realizações didáticas" em sala de aula (sobre a concepção, a realização, a observação e a análise de seqüências de ensino) que se caracteriza pelo registro dos estudos feitos sobre o caso em questão e sua validação ([31]).

Essa validação da pesquisa é feita sobretudo internamente, pois ela se baseia na confrontação entre a análise *a priori* (baseada no quadro teórico) e a análise *a posteriori* .

O processo experimental da engenharia didática compõe-se de quatro fases:
Fase 1: análises preliminares;
Fase 2: concepção e análise *a priori* das situações didáticas;
Fase 3: experimentação;
Fase 4: análise *a posteriori* e validação.

FASE 1 – ANÁLISES PRELIMINARES

Em nossa pesquisa, as análises preliminares foram feitas através de considerações sobre o quadro teórico didático e sobre os conhecimentos didáticos adquiridos no estudo da *demonstração* em geometria, a partir de:

- Fundamentação teórica centrada nas pesquisas de R. DUVAL e apoiadas na teoria do erro, estudadas por BROUSSEAU.
- Estudo Histórico e Epistemológico da *demonstração*.
- Análise de dez livros didáticos, da Proposta Curricular Nacional, e da Proposta Curricular para o Ensino Fundamental, na 7ª série, quanto a utilização da *demonstração* em Geometria.
- Análise das concepções dos alunos e das dificuldades e obstáculos oriundos do processo ensino-aprendizagem da geometria.

FASE 2 - CONCEPÇÃO E ANÁLISE *A PRIORI*

Trabalhamos a concepção e a análise "*a priori*" da Seqüência didática através da atuação sobre certas variáveis do sistema. A análise *a priori* feita na pesquisa visa determinar o significado das escolhas feitas que permitem controlar os comportamentos de cada situação didática, bem como predizer procedimentos possíveis durante cada situação.

Para M. ARTIGUE, a análise *a priori* deve ser concebida como uma análise do controle do sentido, pois a teoria das situações didáticas que serve de referência à metodologia da pesquisa constitui-se como uma teoria de controle das relações entre sentido e situações (...) o objetivo da análise *a priori* é determinar no que as escolhas feitas permitem controlar os comportamentos dos alunos e o significado de cada um desses comportamentos. Para isso, ela vai se basear em hipóteses cuja validação estará, em princípio imediatamente em jogo, na confrontação entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori* a ser operada na quarta fase (cf. S. MACHADO,1999).

FASE 3: EXPERIMENTAÇÃO

É a fase da realização da engenharia para uma certa amostra de alunos.

Trabalhamos com um grupo de 14 alunos da 8ª série, de um colégio particular da cidade de Mogi das Cruzes (SP).

A Seqüência Didática desenvolveu-se em 8 sessões, semanais, com os seguintes procedimentos: execução das atividades em sala de aula (com a presença do pesquisador e de um professor observador) e discussão com o grupo, esclarecendo o conteúdo de cada atividade.

FASE 4: ANÁLISE *A POSTERIORI* E VALIDAÇÃO

Esta fase se apoia sobre todos os dados colhidos durante a experimentação pertencentes as observações realizadas durante cada sessão de ensino, bem como das produções dos alunos em classe ou fora dela.

É nesta fase que se dá o tratamento dos dados que consta da seleção dos dados pertinentes à analise *a posteriori* .

Analisamos a produção dos alunos tendo como base as atividades propostas na Seqüência Didática e nas discussões ocorridas em classe.

A validação das hipóteses da pesquisa resultou da confrontação das análises *a priori* e *a posteriori* .

CAPÍTULO II

ESTUDO HISTÓRICO E EPISTEMOLÓGICO DA *DEMONSTRAÇÃO*

O objetivo deste capítulo é estudar a gênese histórica da *demonstração* e a evolução de sua concepção na Matemática.

A *demonstração* ocupa em Matemática, um lugar central porque é o método de prova que caracteriza essa disciplina no meio das ciências. Embora constitua um importante objeto de estudo na didática da Matemática a sua introdução origina dificuldades para muitos alunos. Todas as pesquisas apresentam o problema de que a história da demonstração independente de um conceito matemático, pois a *demonstração* não é um conceito mas sim uma técnica.

1 – GÊNESE DA *DEMONSTRAÇÃO*

A *demonstração* aparece na Grécia no século V A.C. Os documentos da época são praticamente inexistentes, conhece-se a origem da *demonstração* através de raros textos não matemáticos desse período, relatados posteriormente por historiadores gregos. A história dificilmente responde à pergunta: Como apareceu a *demonstração* e o que determinou seu surgimento?". Para responder a essas perguntas é necessário que se faça a distinção entre *demonstração* e prova, conforme citamos em Fundamentação Teórica (cap.1).

A *demonstração* aparece na matemática pré-helenística. WAERDEN (1983,p.26) indica sua presença na matemática dos hindus e KELLER(1986) destaca a sua presença na matemática dos egípcios. Porém, N. BALACHEFF atribui aos Gregos a invenção da *demonstração*, sem negar a seus precedentes outras formas de prova. De modo geral, pode-se dizer que o século V antes de Cristo marca na Grécia, a passagem da prova para a *demonstração* em geometria.

A análise didática permite questionar se a *demonstração* surgiu como uma característica externa ou interna à Matemática.

SZABO (1977) atribui a aparição da *demonstração* na Matemática, à influência externa da sociedade Grega. A transformação da matemática em ciência hipotético-dedutiva seria a aplicação das regras dos debates argumentados que governavam a vida política da sociedade grega. SZABO especifica essa idéia atribuindo a escola de Parmênide e Zenão a origem e a transformação radical da Matemática, que simultaneamente tornou mais exatos os objetos dessa ciência, definindo-os axiomaticamente como idealidades, objetos de pensamento e as regras de sua manipulação para particularizar a *demonstração* que permite distinguir os enunciados verdadeiros.

Trata-se de uma tese externalista sobre a origem da *demonstração* no sentido em que ela procura sua origem nas influências externas e não nas necessidades internas do desenvolvimento da Matemática.

Pensando na influência interna, que tipo de problema pode ter sido tornado indispensável para a introdução da *demonstração* na Matemática?
Os historiadores ensinam que a *demonstração* surgiu contemporaneamente à resolução do problema da Irracionalidade, pois ela se tornou ferramenta precisa e indispensável para a resolução desse problema, pelos matemáticos gregos. Logo, no problema da irracionalidade estaria a origem da *demonstração*.

Quando se fala que os gregos são os introdutores da *demonstração* em Matemática, não se nega a existência de matemáticos anteriores, que utilizaram provas em diferentes níveis de rigor. Eis alguns exemplos:

No Egito, a exatidão dos cálculos efetuados pelos escribas muitas vezes era provado pela verificação do resultado (KELLER,1986). É um método particularmente bem adaptado aos problemas do tipo resoluções de equações sobretudo quando as incógnitas são inteiras ou racionais simples. Esse método é também aplicado em situações sociais (venda, remuneração, partilha).

Na Índia as afirmações geométricas são provadas fazendo o uso da figura. A exatidão do desenho é um argumento que pode ser considerado como uma verificação.

Vale lembrar que, na evolução do rigor sobretudo no domínio de Geometria, todo problema consiste em compreender como se pode, partindo das provas fundadas na evidência da figura, efetuar a *demonstração*. É preciso considerar que a figura não passa de um suporte da *demonstração* em Geometria.

Veremos que o problema da irracionalidade, na Grécia, pode ser o propulsor dessa mudança, pois está ligado a três aspectos: idealidade dos objetos da matemática, método demonstrativo e enunciados gerais.

Os objetos matemáticos passam a ser identificados, a partir do momento que se renuncia a experiência física e os dados fornecidos pelos sentidos o que leva a forma axiomática.

O método demonstrativo consiste em se apoiar sobre regras, operar por dedução, isto é, demonstrar.

Quanto aos enunciados gerais, sua aparição provém da necessidade do quadro abstrato de explicitar as hipóteses. Enquanto que, num quadro que apele para a experiência, numerosos dados podem estar implícitos.

Destacamos as diferenças entre provas pré-demonstrativas e demonstrações na medida em que o método demonstrativo é reconhecido como único meio de validade, todas as afirmações devem ser demonstradas sendo que o apelo à figura, à evidência do contexto sensível, ou a hierarquia social, são meios de validação implícitos socialmente reconhecidos.

O surgimento de provas, como no caso da Matemática hindu, não se faz de uma forma sistemática, as provas isoladas que surgem não representam premissas das demonstrações. A multiplicação progressiva das provas por uma evolução continua não chega ao estágio da matemática demonstrativa.

Na matemática chinesa, as provas aparecem em certos períodos, em certos autores, mas sem as generalizações dessas práticas (J.C. MARTZLOFF, 1988).

Aparecem simultaneamente na Grécia, no séc. VII ou VI a.C. a democracia, a filosofia e a geometria. Neste período, a *demonstração* surge como uma "aplicação" das técnicas de debate público que passa a caracterizar a organização política da sociedade grega. O "milagre grego" consiste na descoberta, pela humanidade, da razão. Essa passagem de um pensamento místico ao pensamento racional determina um caráter externo no surgimento da *demonstração*. Mas, sem o problema da irracionalidade, a *demonstração* não teria sido produzida, para transformar as relações matemáticas.

A. SZABO (1977) destaca que a *demonstração* vem de um debate filosófico, propondo:

- As propriedades contraditórias: teoria do par e do ímpar, a utilização do número racional para medir a diagonal do quadrado (o conjunto dos números racionais é insuficiente para essa medição).
- Rejeição de experiência sensível e da intuição: *demonstração* da incomensurabilidade usando raciocínio por absurdo (O raciocínio por absurdo consiste em supor verdadeira a proposição contrária a proposição a demonstrar, seu passo terminal parte da contradição entre uma conseqüência dessa suposição e uma premissa).

Para SZABO (1977), o recurso empírico usado na *demonstração* por absurdo é decorrente da filosofia eleata. A filosofia eleata passou por intermédio de Platão e seus discípulos matemáticos, que chegaram a solução do problema da irracionalidade. Portanto, este mesmo autor (SZABO, 1977) assinala que a origem da *demonstração* é externa à Matemática.

Segundo M.CAVEING (1977), o problema da incomensurabilidade esta na fonte da criação das idealidade. Assim, ele se opõe a SZABO quando diz que os matemáticos informam aos filósofos. Determinando a Matemática como ciência autônoma, ele se baseia no pensamento de Zenão, que argumentava contra o sincretismo físico-geométrico do pensamento Pitagórico, conceituando os objetos da geometria. De acordo com CAVEING a origem da *demonstração* é interna à Matemática .

2 - A EVOLUÇÃO DA *DEMONSTRAÇÃO*

Segundo G. ARSAC e E. BARBIN (1988), a história da *demonstração* se desenvolveu nas etapas:

- (1) A gênese com os gregos no séc. V a.C.: a *demonstração* é a ordem da convicção num debate contraditório.
- (2) A primeira modificação no séc. XVII: a *demonstração* tem como objetivo esclarecer antes de convencer, e os métodos de descoberta fazendo um papel central.
- (3) A segunda modificação no séc. XIX: o retorno ao rigor e a aparição do formalismo, isto é, o surgimento de uma nova concepção dos objetos matemáticos.

A segunda etapa coloca em causa, a identificação entre demonstrar e convencer a comunidade dos matemáticos, o que, de acordo com BALACHEFF, coincide com o ponto de vista dos Gregos. Esta etapa aparece como uma oposição frente ao propósito da função da *demonstração* na primeira etapa, entre convencer e esclarecer.

O exemplo típico da *demonstração* que convence sem esclarecer é a *demonstração* clássica de Euclides da Incomensurabilidade da diagonal e do lado do quadrado. Essa afirmação é colocado no absoluto, isto é, trabalha com uma propriedade intrínseca dessa *demonstração*, independente dos conhecimentos e das opiniões filosóficas.

A análise histórica conduz a algumas posições epistemológicas e didáticas que coincidem com as de HANNA (1989): existem demonstrações que provam somente e outras que explicam; são essas últimas que devem ser favorecidos na aprendizagem da *demonstração*, sobretudo se dão exemplos de aplicações e métodos que apresentam o interesse nelas mesmas.

A hostilidade dos matemáticos do séc. XVII à forma do rigor herdado dos gregos, proveniente também de sua preocupação no que diz respeito à descoberta, nem sempre é compatível com o rigor Euclidiano.

Alguns matemáticos do século XVII, conforme E. BARBIN, censuram os antigos de não seguirem a verdadeira ordem da natureza e de provarem desnecessariamente alguns resultados. Parece que, em geometria, o primeiro método de validação é o recurso da observação, isto é, a confiança na percepção visual. A construção da geometria se faria em suma sobre uma base indutivista. Nota-se que o desejo de justificação dos resultados matemáticos por uma interpretação física que, de certa forma, é a concepção idealizada pelos gregos dos objetos da Matemática, manifesta-se também na álgebra no séc. XIX, aparecendo como dificuldade na álgebra abstrata (RICHARDS,1980). Esse desejo de justificação de resultados por interpretação física vem dificultar as considerações da geometria não-euclidiana.

No séc. XIX, a nova virada, é marcada por Bolzano, trata-se de uma volta ao rigor, mas não o dos gregos. Seu formalismo evidencia que os objetos matemáticos axiomáticos não têm existência objetiva, mas satisfazem o princípio da não contradição interna às teorias matemáticas da época. A incapacidade de ultrapassar esse passo ocorre, em grande parte, por razões filosóficas que tinham bloqueado, no século XIX, os algebristas ingleses.

A história retorna ao rigor, do ponto de vista didático, segundo duas razões: a dificuldade dos problemas encontrados perante as necessidades do ensino (isso diz respeito a Cauchy e Dedekind, por exemplo); as influências filosóficas, no que diz respeito a Bolzano, e também aos autores da geometria não-euclidiana. A preocupação de não ir contra essas influências filosóficas, idéias dominantes, explica a recusa de Gauss em publicar seus resultados nesse domínio (cf. GREENBERG, 1972).

Notamos que a admissão da geometria não Euclidiana muda o caráter “esclarecedor ” da *demonstração*: o recurso a “intuição”, isto é, a verificação da concordância com o mundo físico deveria muitas vezes ser desqualificada.

BKOUCHE (1989) destaca a necessidade de um estudo epistemológico, sobre a função da *demonstração* na Matemática, para a permanência de seu ensino. Esse estudo está limitado à *demonstração* em geometria, e à metodologia de raciocínio transformando-se, à medida que novos problemas coloquem em questão sua validade.

Este mesmo autor (BKOUCHE,1989) assinala que os caracteres permanentes no processo de validação no ensino são três:

- Caráter *a priori*: a *demonstração* dá a possibilidade de fazer economia de experiência. Exemplo: a soma dos ângulos internos de um triângulo vale 180 graus.
- Caráter de necessidade: a *demonstração* determina a certeza das conclusões demonstradas, pois algumas possuem constatações empíricas contrárias. Exemplo: Em geometria uma leitura sobre um desenho particular, pode determinar uma oposição as conclusões.
- Caráter universal: a *demonstração* baseada nos caracteres precedentes fazem alusão aos objetos sobre os quais se produz o raciocínio, que estão presentes na *demonstração*, têm estatuto de abstração. Assim, leva-se em consideração a ligação entre a construção abstrata do objeto e o raciocínio que se faz dele.

3- G. ARSAC (1987): A HISTÓRIA DETERMINANDO CONCLUSÕES DIDÁTICAS.

Historicamente a prova veio antes da *demonstração* e pensamos que, em sala de aula, a aprendizagem da *demonstração* deve ser precedida da prática da prova, sempre que for necessária a validação de uma asserção, pois a *demonstração* marca uma mudança no estatuto global da matemática, para o aluno.

Do ponto de vista didático, deve-se debater se a *demonstração* é uma necessidade interna das teorias matemáticas ou uma simples exigência do professor, pois observamos que, no enfoque histórico, a *demonstração* teve uma aparição mista, externa e interna. Então, em sala de aula, recriando a gênese histórica, a *demonstração* deve surgir como uma ferramenta indispensável à resolução de um problema, observando que esta resolução pode ser facilitada pela troca de registros de representação. A reprodução da gênese histórica da *demonstração* a partir do problema da irracionalidade não é possível no nível do ensino atual.

Em geometria, o surgimento da *demonstração* esta ligado historicamente ao conceito abstrato dos objetos da geometria e sua axiomatização. Mas, para o aluno, a *demonstração* pode parecer inútil, se ele entende que a prova pela figura é suficiente. Contornando essa dificuldade, devemos mostrar ao aluno situações em que a verificação gráfica é tecnicamente difícil e os terrenos da aritmética e álgebra são mais favoráveis para a *demonstração* como instrumento de prova.

O raciocínio por absurdo, mais precisamente o princípio do terceiro excluído, não é natural, mas sua introdução é necessária para a resolução de problemas como do tipo da classificação dos números pares e ímpares que podem ser utilizados como ponto de partida para esse tipo de aprendizado de *demonstração*.

Existem as demonstrações que somente provam e aquelas que explicam, as últimas favorecem o aprendizado da *demonstração*.

CAPÍTULO III

ESTUDO PRELIMINAR DA *DEMONSTRAÇÃO* EM GEOMETRIA

Neste capítulo, pretendemos examinar diversos aspectos que compreendem a transposição didática da *demonstração* através do estudo dos conceitos geométricos. Assim, averiguamos o tratamento dado ao ensino e utilização da *demonstração* na geometria pela Proposta Curricular para o estado de São Paulo, pelos Parâmetros Curriculares Nacionais e pelos livros didáticos de Matemática. Também analisamos as "concepções dos alunos" em geometria e como eles justificam suas decisões.

O objetivo deste estudo é analisar quais os efeitos que as abordagens propostas por alguns livros e pela Proposta Curricular podem provocar nos alunos.

Segundo as Pesquisas de SANGIACOMO (1996), "O ensino é fortemente influenciado pelos livros didáticos", em geral ocorrem as seguintes situações: O professor prepara aulas usando a teoria apresentada pelos livros, utiliza um deles para indicar exercícios e o segue tanto na parte teórica quanto nos exercícios.

Portanto para estudar a forma como o conhecimento chega ao aluno, é preciso analisar as orientações da Proposta Curricular e a forma como os livros didáticos tratam a *demonstração*.

1 - A PROPOSTA CURRICULAR

A Proposta Curricular para o 1º Grau (atualmente Ensino Fundamental), para o ensino da Matemática(1991), considera que existem duas vertentes básicas a partir das quais justifica-se a inclusão da Matemática nos currículos escolares:

> *"- ela é necessária em atividades práticas que desenvolvem aspectos quantitativos da realidade, como são as que lidam com grandezas, contagens, medidas, técnicas de cálculo etc.*
> *- <u>ela desenvolve o raciocínio lógico, a capacidade de abstrair, generalizar, projetar, transcender o que é imediatamente sensível</u>"(grifo nosso),(p.9)*

A proposta Curricular destaca dois grandes temas geradores: Números e Geometria observando que a noção de Medida liga os dois grandes temas geradores.

> *"A iniciação à geometria parte da exploração sensorial dos objetos, da percepção das formas mais freqüentes. A composição e decomposição de figuras são consideradas uma preparação necessária à noção de medida."(p.19)*
> *"Na geometria, procura-se, paulatinamente, caracterizar as formas através de propriedades e classificá-las de acordo com essas propriedades (...) Surgem, também<u>, algumas generalizações substanciais, que significam uma ultrapassagem de experiência concreta</u>(grifo nosso), como no caso de alguns teoremas geométricos ou da introdução dos números irracionais."(p.20)*

No que diz respeito a introdução do ensino-aprendizagem da *demonstração* em geometria, a Proposta Curricular assinala seu início na 6ª série. O primeiro teorema que os alunos irão demonstrar é o da Soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo, essa *demonstração* deve ser precedida de uma verificação experimental e, além disso, devem-se evitar inicialmente, excessos de simbologia, levando o aluno à necessidade da *demonstração* para a generalização da propriedade, pois nesse momento já foram definidos o postulado das paralelas e a igualdade das medidas dos ângulos internos determinados por retas paralelas cortadas por uma transversal (p.107).

Observa-se a orientação em organizar a primeira *demonstração* de um teorema, mas não há uma indicação do que é teorema, do que é *demonstração*, quais as ferramentas necessárias e de como desenvolver essa técnica.

Na 7ª série, retoma-se o estudo da *demonstração*, conforme os itens:

1. Teorema de Pitágoras

"É importante que, no caso dos triângulos retângulos, se faça a verificação geral do Teorema de Pitágoras, por meio de cobrimento do quadrado construído sobre a hipotenusa a partir dos quadrados construídos sobre os catetos. (...) Aproveitar esse momento para fazer a tradução algébrica desse fato geométrico (grifo nosso). Depois é feita uma demonstração usando conceitos de área do triângulo e quadrado e estende-se outra demonstração (grifo nosso) usando conceitos de áreas de semicírculos construídos sobre os catetos e a hipotenusa (p.140).

2. Casos de congruência de triângulos

"Os casos deverão ser verificados, experimentalmente, por meio de construção dos triângulos com régua, compasso e transferidor (...) Esse é o momento para se trabalhar com situações que utilizem localmente o raciocínio hipotético-dedutivo (grifo nosso) fazendo o uso dos casos de congruência de triângulos. Demonstrando, por exemplo, propriedades como: Os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes. A diagonal de um paralelogramo o divide em dois triângulos congruentes. E outras" (p.145).

3. Definição do ponto médio e mediatriz

Verificar experimentalmente (por meio de medidas diretas) e por demonstração local, o seguinte teorema e seu recíproco (grifo nosso); "Toda ponta da mediatriz de um segmento de reta equidista dos extremos desse segmento" (p.145).

4. Propriedades sobre medianas de um triângulo(demonstrar).

"Uma mediana de um triângulo divide-o em dois outros de mesma área."
Unindo o baricentro de um triângulo a seus vértices, ficam determinados três triângulos de mesma área."(p. 146)

5. Aplicação dos casos de congruência de triângulos na *demonstração* das principais propriedades relativas a triângulos e quadriláteros (p. 148).

A partir de construções acompanhadas de demonstrações, os alunos deverão constatar a validade de propriedades (grifo nosso) como: "Em todo triângulo isósceles, a altura e mediana relativas à base coincidem com a

> *bissetriz do ângulo do vértice oposto a ela."*
> *"Em todo paralelogramo as diagonais se cruzam no ponto médio."*
> *"Em todo retângulo as diagonais são congruentes."*
> *"Em todo losango as diagonais são perpendiculares entre si."(p. 148)*

Na 8ª série, o estudo da *demonstração* desenvolve-se com os seguintes tópicos:

1.Teorema fundamental da proporcionalidade:

"Verificação experimental e <u>demonstração do teorema fundamental sobre proporcionalidade</u> (grifo nosso)."

"Se uma reta paralela, a um dos lados de um triângulo, intercepta ao outros dois lados distintos, então, ela determina segmentos que são proporcionais a esses lados (p.154).

2.Teorema de Tales:

"Pode-se, agora, <u>demonstrar o teorema de Tales</u> (grifo nosso), como conseqüência do teorema fundamental da proporcionalidade"(p.155).

3.Casos de semelhança de triângulo

"<u>As demonstrações desses teoremas podem ser realizadas pelos próprios alunos</u> (grifo nosso), com aplicações do teorema fundamental sobre proporcionalidade e dos casos de congruência de triângulos). As demonstrações devem ser precedidas por uma verificação experimental dos casos, através de construção com régua, compasso e transferidor"(p.155).

4.O teorema de Pitágoras

"Já conhecido pelos alunos, <u>poderá ser demonstrado</u> (grifo nosso), agora, por semelhança de triângulos" (p.155).

5.Proporcionalidade do baricentro.

"Neste momento, <u>pode-se fazer a demonstração</u> (grifo nosso) da propriedade. O baricentro de um triângulo divide cada mediana em dois segmentos cujas medidas estão na razão 1 para 2" (já trabalhada experimentalmente) (p.156).

6. Demonstrar que $\sqrt{2}$ não é racional.

"<u>A demonstração por absurdo</u>" (grifo nosso) (p.163).

No item 3 acima, observa-se a intenção da proposta em levar o aluno a desenvolver as demonstrações nos casos de semelhança de triângulos. Porém, não direciona os passos do professor, como facilitador desse aprendizado ao aluno.

A Proposta Curricular orienta o professor para o uso das demonstrações somente como ferramenta. Porém, a *demonstração* não é tratada como objeto de estudo. Outrossim, há o uso do teorema sem a orientação de seu estatuto, bem como o teorema recíproco.

GOUVÊA (1998) constata que os professores pesquisados não parecem construir um ensino de Geometria que permita aos alunos superar as dificuldades na aquisição dos conceitos geométricos e nas técnicas de prova e *demonstração*. E observa como uma das soluções do problema do ensino-aprendizagem da *demonstração* geométrica encontra-se na formação dos professores, tanto em nível dos conteúdos, como em nível didático.

PAVANELLO (1993,p.13) observa que a "Lei de Diretrizes de Bases do Ensino de 1º e 2º Graus, a 5692/71, permite que cada professor monte seu programa *de acordo com as necessidades da clientela.* Deste modo, a maioria dos alunos do 1º Grau (atual Ensino Fundamental) deixa de aprender geometria, pois os professores das quatro séries iniciais limitam-se em geral a trabalhar somente a aritmética e as noções de conjunto. O estudo passa a ser feito – <u>quando não eliminado</u> (grifo nosso)- apenas no 2º grau, com o agravante de que os alunos apresentam uma dificuldade ainda maior em lidar com as figuras geométricas e sua representação porque o desenho Geométrico é substituído, nos dois graus do ensino, pela Educação Artística".

Assim, conforme o mesmo autor (PAVANELLO,1993, p.15), é instituído por outro lado, uma escola de 2º Grau (oficial), geralmente no período noturno, com função profissionalizante, ditadas pela formação de um novo modelo econômico, as modificações introduzidas nas disciplinas que compõem seu curriculum impedem que ele cumpra a antiga função de preparação para o ensino superior. As escolas particulares de 2º Grau, interpretando a legislação conforme sua conveniência, continuam oferecendo um ensino basicamente preparatório para o ensino superior. Do ponto de vista da educação matemática, é necessário acrescentar que o ensino da geometria continua ocorrendo nas escolas particulares (como, também nas academias militares). Trabalhada sob orientações diversas (...) os professores de matemática não podem deixar de abordá-la, mesmo se sua formação for de tal modo deficiente que os impeça de efetuar um trabalho de melhor qualidade.

O mesmo autor (PAVANELLO,1993, p.16) repudia o abandono do ensino de geometria, pois pode ser caracterizado como uma decisão equivalente às medidas governamentais, em seus vários níveis, com relação à educação. Questionando as verdadeiras intenções e compromissos que elas revelam em relação ao oferecimento de condições que impliquem em reais oportunidades educacionais a todos os segmentos da população brasileira.

Levando em consideração as pesquisas e conclusões de PAVANELLO(1993), buscamos a nova “Lei de Diretrizes de Bases do Ensino de 1º e 2º Graus”, a 9.394/96, em relação a lei anterior houve mudança no sentido que a profissionalização deve ser obtida *a posteriori* da formação geral, de preferência fora da escola média, junto a escolas especializadas para esse fim. É exatamente o oposto do que propunha a Lei nº 5.692/71(SOUZA & SILVA ,p.63).

Focando o artigo 26 da Lei 9.394/96:

> *“Os currículos do ensino fundamental e médio devem ter uma base nacional comum, a ser complementada, em cada sistema de ensino e estabelecimento escolar, por uma parte diversificada, exigida pelas características regionais e locais da sociedade, da cultura e da clientela. Escolar.”*

Levando em consideração a Lei de 9.394/96, que oferece um referencial curricular nacional, vamos levantar como a *demonstração* no estudo da geometria é abordada nos Parâmetros Curriculares Nacionais.

2 - OS PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS (PCN)-1998

Buscamos os aspectos centrais relacionados ao emprego da *demonstração* salientados na proposta dos PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS/ MATEMÁTICA – 5ª A 8ª séries (1998).

As orientações enfatizam atividades no quarto ciclo (7ª e 8ª série) que favoreçam o raciocínio dedutivo e a introdução da *demonstração*, apresentando verificações empíricas.

> *“ (...) os problemas de geometria vão fazer com que o aluno tenha seus primeiros contatos com <u>a necessidade e as exigências estabelecidas por um raciocínio dedutivo</u> (grifo nosso). Isso não significa fazer um estudo absolutamente formal e axiomático da geometria.*
>
> *Embora <u>os conteúdos geométricos propiciem um campo fértil para a exploração dos raciocínios dedutivos</u> (grifo nosso), o desenvolvimento dessa capacidade não deve restringir-se apenas a esses conteúdos. A busca da construção de argumentos plausíveis pelos alunos vem sendo desenvolvida desde os ciclos anteriores em todos os blocos do conteúdo.*
>
> *Assim esse trabalho terá continuidade no 4º ciclo, uma vez que a prática da argumentação é fundamental para a compreensão das demonstrações. Mesmo que a argumentação e a demonstração empreguem os mesmos cognitivos lógicos, há exigências formais para uma demonstração em matemática que podem não estar presentes numa argumentação. <u>O refinamento das argumentações produzidas ocorrem gradativamente pela assimilação de princípios da lógica formal, possibilitando as demonstrações</u> (grifo nosso).*
>
> *Embora <u>no quarto ciclo se inicie um trabalho com algumas demonstrações, com o objetivo de mostrar sua força e significado</u> (grifo nosso), é desejável que não se abandonem as verificações empíricas, pois estas permitem produzir conjecturas e ampliar o grau de compreensão dos conceitos envolvidos (p. 86)”.*

Observamos a ênfase dada aos registros de representação da figura e as funções do desenho na prova, orientando que as principais funções do desenho são ajudar o aluno a: visualizar, resumir, a provar e fazer conjecturas.

> *“Quando os alunos têm de representar um objeto geométrico por meio de um desenho, <u>buscam uma relação entre a representação do objeto e suas propriedades</u> (grifo nosso) e organizam o conjunto do desenho de uma maneira compatível com a imagem global que têm do objeto (p.125)”.*

> *“As atividades de geometria são muito propícias para que o professor construa junto com seus alunos um caminho que <u>a partir de experiências concretas leve-os a compreender a importância e a</u>*

> *necessidade da prova para legitimar as hipóteses levantadas (grifo nosso)(p.126)".*

Para esclarecer um dos desvios freqüentes quando se tenta articular a "prova matemática" , há uma proposta de trabalhar o teorema de Pitágoras, utilizando o princípio aditivo relativo ao conceito de áreas de figuras planas, usando um quebra-cabeças constituído de peças planas que devem compor por justaposição, de duas maneiras diferentes, um modelo concreto de um quadrado. Posteriormente, o **PCN** enfatiza:

> *"Apesar da força de convencimento para os alunos que possam ter esses experimentos com material concreto ou com a medição de um desenho, eles não constituem provas matemáticas (grifo nosso). Ainda que essas experiências possam ser aceitas como "provas" no terceiro ciclo(5ª e 6ª séries), é necessário, no quarto ciclo, que as observações do material concreto sejam elementos desencadeadores de conjecturas e processos que levem às justificativas mais formais.*
>
> *No caso do Teorema de Pitágoras, essa justificativa poderá ser feita com base na congruência de figuras planas e no princípio da aditividade para áreas. Posteriormente, os alunos poderão também demonstrar esse teorema quando tiverem se apropriado do conceito de semelhança de triângulos e estabelecido as relações métricas dos triângulos retângulos (grifo nosso)(p.127)".*

Para contrastar com o exemplo anterior, é apresentado outro exemplo no qual as características da prova formal está distante da concretização utilizada. Nesse caso, a exemplificação num contexto pode apenas desempenhar um papel de fontes de conjecturas a serem provadas formalmente.

> *"A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo vale 180º, pode ser comprovado por meio da decomposição e composição de um modelo material de um triângulo. Porém a demonstração desse resultado, acessível a um aluno do quarto ciclo, recorre a axiomas e teoremas envolvendo um par conveniente de retas paralelas que, no entanto, não têm correspondente na concretização acima mencionada(grifo nosso). Mesmo assim a concretização é bastante útil para levantar*

conjecturas sobre esses resultados (p. 127)".

Destacamos os aspectos positivos apresentados pelo **PCN,** procurando orientar a concretização de um teorema com posterior *demonstração* formal, privilegiando as conjecturas e as relações que as vinculam com o discurso teórico, bem como, no que diz respeito aos sistemas de representação plana das figuras espaciais e as principais funções do desenho.

Por outro lado, podemos salientar que no decorrer da abordagem feita pelo **PCN**, observamos a ausência de tópicos relevantes ao aprendizado da técnica da *demonstração*, que se referem a: noção de teorema e seu estatuto hipótese-teorema-conclusão; noção de definição e seu estatuto; organização das ferramentas utilizadas na *demonstração*; as mudanças dos registros de representação; organização da redação da *demonstração*.

De acordo com o levantamento apresentado, constamos que o **PCN** registra a importância da *demonstração* em geometria no ensino fundamental, por outro lado , não enfatiza a abordagem da técnica da *demonstração* como objeto de estudo.

3 - OS LIVROS DIDÁTICOS

Embora os livros analisados, no ensino da geometria, diferenciem-se pela notação (formal ou não), a maioria apresenta um conteúdo matemático seguido de uma lista de exercícios. Em geral, os exercícios não pedem para *justificar*, *provar* ou *demonstrar* problemas de geometria, encontramos expressões do tipo: efetue, calcule, compare e identifique.

Historicamente a geometria foi o primeiro ramo da matemática a se organizar de modo lógico. Ao se organizar, a geometria utilizou a técnica da *demonstração* para deduzir as propriedades. Essa organização lógica influencia a formação do currículo da geometria.

Segundo VIANNA (1988), os anos 60 marcam o início da Matemática

Moderna no Brasil, antes desse período o dedutivo era estabelecido nos livros. Para os professores, os livros didáticos em sua maioria faziam todas as demonstrações, mas os alunos eram obrigados a decorar enunciados e demonstrar teoremas sem, às vezes, entender o seu significado.

Após o início da Matemática Moderna, observamos que os livros conservaram as demonstrações mais tradicionais, como a *demonstração* do teorema de Tales e a do teorema Pitágoras, mas na parte de exercícios mudaram drasticamente. Diminuíram ou mesmo aboliram os exercícios de caráter lógico ou demonstrativo.

Pesquisamos o ensino e a utilização da *demonstração* em geometria em dez livros didáticos atuais, da 7ª série do Ensino Fundamental (ver Bibliografia), série em que se inicia o processo de compreensão e elaboração de demonstrações. Dentre esses dez livros, observamos que 8 deles:

- não apresentam o estatuto de definição e de teorema;
- não tratam da *demonstração* e não apresentam exercícios que exijam provas ou demonstrações;
- nem mesmo, fornecem os primeiros passos para o aprendizado da *demonstração*.

Apenas dois livros, do grupo acima, suprem parcialmente as necessidades para o aprendizado da técnica da *demonstração*.

Livro 1: DI PIERRO NETTO, Scipione. *Matemática conceitos e histórias*. 7ª série. São Paulo, Editora Scipione, 1991.

Livro2: BIANCHINI, Edwaldo. *Matemática*. 7ª série, São Paulo, Editora Moderna, 1996.

Porém, esses livros não tratam dos seguintes passos: distinção entre definição e teorema, distinção entre desenho e figura geométrica, inter-relação dos registros de representação, organização de um esquema de *demonstração* e das ferramentas para completá-lo e finalmente a redação da *demonstração* .

Pela abordagem nos livros pesquisados, constata-se que a *demonstração* é pouco utilizada na apresentação dos resultados (na maioria deles), e os exercícios apresentam-se desvinculados da exigência da técnica demonstrativa.

A metodologia indicada pela proposta curricular e pelos livros didáticos pesquisados fornece poucas orientações aos professores e alunos no desenvolvimento do ensino-aprendizado das *provas* e *demonstrações*.

Se o ensinamento matemático deve contribuir, em grande parte, para a formação intelectual do aluno, colaborar com o desenvolvimento do pensamento dedutivo desse aluno e o incitar a um rigor lógico, capacita-o na construção de um encadeamento de deduções e na análise de uma falha eventual no raciocínio; desenvolvendo, assim seu espírito crítico.

É necessário se fazer sentir a diferença entre a certeza resultante do método dedutivo e a do método experimental. Essa diferença torna necessária a *demonstração* como sistema de validação. Com efeito, essa prática é associada a um contrato didático.

SANGIACOMO (1996) considera que no ensino de Geometria, na 5ª e 6ª, os alunos devem reconhecer figuras e configurações, saber usar instrumentos de desenho. As figuras são consideradas como objetos geométricos concretos nos quais se pode agir diretamente, elas são significados dos termos utilizados para designá-los. Na 7ª e 8ª séries, os alunos deverão dar outro estatuto para as figuras, de representações dos objetos de idéias abstratas. As figuras desenhadas tomam estatuto de significando. Temos, assim uma ruptura do contrato didático, conseqüentemente, muitos alunos têm dificuldades em adaptar-se a essa ruptura de contrato.

4- AS CONCEPÇÕES DOS ALUNOS

Nossa intenção é levantar as decisões de alunos na resolução de problemas de geometria, bem como as justificativas de suas decisões. As informações recolhidas nos ajudarão a definir a problemática e a construir nossa seqüência didática.

Objetivos dos problemas:

1. Verificar as competências dos alunos na exploração da figura, ao resolver problemas de geometria.
2. Observar as decisões corretas e erradas dos alunos e as concepções envolvidas.
3. Analisar as estratégias do aluno, na decomposição ordenada do problema em subproblemas que determinem a justificativa da afirmação.
4. Revelar como os alunos aplicam os conceitos adquiridos, numa situação problema.
5. Verificar as competências dos alunos em resolver problemas usando propriedades geométricas, por meio de: definições, propriedades e teoremas e não somente de modo empírico.
6. Verificar se o aluno reconhece o estatuto da articulação: hipótese-teorema-conclusão.
7. Analisar a mobilização dos conceitos: retângulo (diagonal do retângulo, área do retângulo), triângulo (condição de existência do triângulo, área do triângulo, congruência de triângulos, teorema de Pitágoras, teorema da soma dos ângulos internos do triângulo) trapézio, teorema de duas retas paralelas interceptadas por uma transversal, ponto médio de um segmento.

4.1- DADOS SOBRE A AMOSTRA

Os problemas propostos subsidiam a análise dos comportamentos de 169 alunos do Ensino Fundamental, de duas escolas, uma da rede pública e outra da rede particular de ensino, da cidade de Mogi das Cruzes, do estado de São Paulo.

A amostra da rede pública de ensino foi obtida a partir de testes aplicados a 80 alunos (adolescentes de 13-18) da 8ª série do período noturno. Não eram meus alunos. Fizemos um pedido formal à secretaria da escola para a aplicação do teste, explicando que se tratava de uma pesquisa para levantamentos de dados para um projeto de pesquisa do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, da PUC-SP. Após permissão da escola, aplicamos o teste aos alunos, nas suas respectivas salas. Os alunos resolveram individualmente o teste, utilizando uma hora-aula (50 minutos).

Segundo o professor de Matemática dessas classes, a ênfase maior do programa de Matemática era para a álgebra, mas eles tinham estudado geometria plana de acordo com o programa da escola. Os alunos não possuíam livro didático de Matemática e o professor não tinha dados informativos sobre o conteúdo ministrado nas séries anteriores.

A amostra colhida na rede particular de ensino foi composta por testes aplicados a 89 alunos (13 a 16 anos) da 8ª série (essa escola só funciona no período diurno). Os alunos realizaram o teste em uma hora-aula, individualmente, nas suas respectivas salas, utilizando uma aula de 40 minutos (nessa escola a hora-aula é de 40 minutos) para a realização do teste. Os alunos usavam livro didático de Matemática e, segundo o professor de Matemática, eles estudaram geometria plana da 5ª a 8ª séries e tinham também aulas de desenho geométrico.

4.2 – PROBLEMAS PROPOSTOS E ANÁLISE DOS RESULTADOS

Apresentamos, nesse teste, 7 problemas de geometria, referente a assuntos da 7ª e 8ª série. Com a finalidade de investigar as concepções dos alunos no que diz respeito aos conceitos e habilidades geométricas. Outra questão a ser investigada é a comparação entre as concepções dos alunos do colégio particular e estadual.

A pesquisa se apoiou nas seguintes questões:

1. Quais as concepções dos alunos sobre os conteúdos mobilizados? Como o aluno justifica/prova suas decisões?
2. Quais as dificuldades dos alunos em reconhecer as aplicações dos teoremas e as regras de dedução que eles determinam?
3. Qual a influência da figura, na identificação das hipóteses para a resolução

do problema?

Cada problema foi analisado através de duas etapas:

1. Análise *a priori*;
2. Análise dos comportamentos.

Não consideramos as justificativas, no levantamento das respostas, pois menos de 10% dos alunos tentaram justificar, e nenhum justificou corretamente.

PROBLEMA 1:

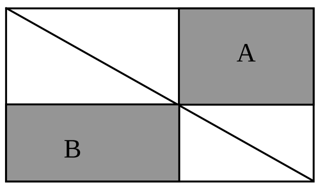
Este problema envolve os conceitos de retângulo, diagonal, congruência de triângulos e área. Apoiando-se nas questões:

1. Quais as dificuldades do aluno em decompor a figura em subfiguras e recompô-las, no processo de tomada de decisão? Abandona hipóteses? Insere hipóteses suplementares?
2. O aluno usa propriedades geométricas: postulados, definições e/ou teoremas para justificar sua decisão?
3. O aluno tem necessidade das medidas para comparar as áreas? Há força do empírico sobre o racional dedutivo?

Apresentou-se o seguinte enunciado:

“Preencha com V a afirmação verdadeira e justifique:

Dada a figura com os retângulos grifados A e B.



Alternativas:

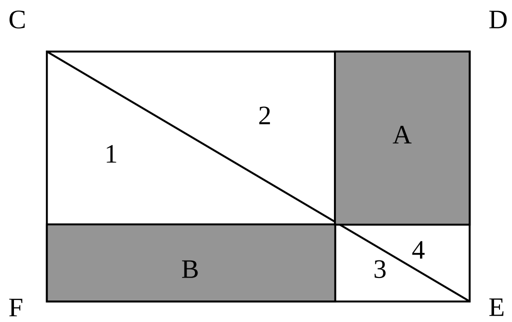
1- *( ) área A > área B*
2- *( ) área A < área B*
3- *( ) área A = área B*
4- *( ) Não foram dadas as medidas, portanto não é possível calcular as áreas e compará-las.*

Justificativa:

ANÁLISE *A PRIORI*

1. O aluno deve chegar a solução correta com a terceira alternativa, isto é, ”área A =área B”, usando a seguinte justificativa: sabendo que a diagonal do retângulo determina dois triângulos congruentes, assim, observando-se a figura, temos: “área 1=área 2”, “área 3 = área 4” e a área do triângulo CDE é igual a área do triângulo EFC.

   Portanto área A = área B.

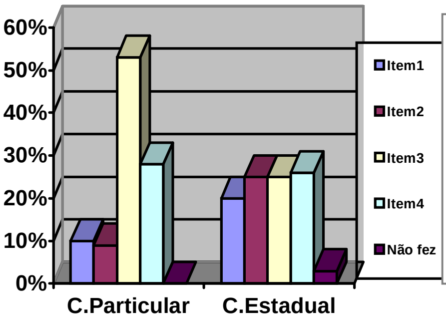


2. O aluno errará o exercício se decidir pela segunda alternativa, isto é, “área de A < área B” ou “área A< área B”. Pode ter usado a estratégia: decompõe em subfiguras a figura dada, não levando em conta a figura global em que elas estão inseridas. Deve ser influenciado pela visualização, sendo o provável determinante para a decisão o comprimento do retângulo B que é maior que o do retângulo A, ou a altura de A maior que a de B, então, conclui-se que “área A> área B” ou “área A < área B”. Nesse caso, presumi-se que área do retângulo seja calculada como o produto da base vezes altura, em vez de se aplicar a técnica do quadriculado.

3. É esperado que o aluno chegue ao erro com a quarta alternativa: “não foram dadas as medidas”, portanto não é possível mensurar as áreas e compará-las. A dificuldade em usar os conceitos e propriedades geométricas para justificar sua tomada de decisão, determina a necessidade das medidas.

ANÁLISE DOS RESULTADOS

O histograma abaixo apresenta os resultados referentes ao desempenho dos alunos no problema 1.



Respostas: Col. Particular Item (1) – 9 alunos – 10% Item (2) – 8 alunos- 9% Item (3)- 47 alunos – 53% Item (4) – 25 alunos– 28%	Respostas : Col. Público Item (1)- 16 alunos –20% Item (2) –20 alunos- 25% Item (3) – 20 alunos –25% Item (4)- 21 alunos – 26%

Apesar dos problemas destacados acima, observamos conforme o histograma acima que 53 % dos alunos do colégio da rede particular indicaram corretamente que as áreas eram iguais nesse item .

Quanto aos alunos do colégio da rede pública, basicamente cada ¼ dos alunos decidiu-se por um item diferente. Observamos a dificuldade deles em verificar as propriedades matemáticas nas subfiguras para compará-las. Três alunos (da rede pública) não fizeram o exercício.

O item 3 foi o de maior distinção nas respostas. Baseando-se nos estudos do professor DUVAL (cf. Fundamentação teórica) conclui-se que provavelmente houve dificuldades em fracionar a figura, aplicar propriedades e reagrupa-la. Presume-se que o aluno tenha utilizado o fracionamento e tomado decisões locais com o uso somente de operações visíveis, decisões apoiadas pela apreensão perceptiva. Não há a interpretação das hipóteses para determinar a conclusão.

Ao verificar as competências dos alunos na exploração da figura, observamos que diferentes barreiras dificultam a visibilidade, sendo assim, a apreensão operatória exigida no exercício fica comprometida:

1- A necessidade do fracionamento da figura, para a observação de triângulos congruentes e seu reagrupamento pertinente ao enunciado do problema.

Presume-se que houve dificuldades em compreender que a mesma área pode estar ao mesmo tempo em dois agrupamentos com formas diferentes, as quais devem ser comparadas.

2- É bem provável que, para o aluno, a passagem do *Desenho* para a *Figura Geométrica*, tenha sido difícil. Após a apreensão perceptiva deve ter ocorrido a apreensão operatória com o uso de operações visíveis, determinada por um processo discursivo natural, conseqüentemente, deve ter ocorrido a necessidade de medir para resolver o problema.

3- Segundo DUVAL, existe uma sinergia entre visualização e raciocínio. O cálculo da área pela fórmula leva a um comportamento ingênuo, induzindo-se provavelmente às operações mais visíveis: o retângulo que tem maior comprimento tem maior área; o retângulo que tem maior altura tem maior área. O que não é pertinente na resolução do problema.

Quanto as justificativas, a grande maioria copiou o item que considerou correto. Algumas justificativas dadas por alunos da escola particular:

- *Olhando a figura ela me faz perceber que ela é maior (respondeu: área A > área B).*
- *Nós não podemos comparar as áreas sem saber quais são as suas medidas.*
- *Sem as medidas não se acha o valor da área.*
- *Não é possível calcular a área sem medidas só se for no chute.*
- *As áreas são iguais, pois se as figuras em branco se eqüivalem, então, área **A** = área **B** (esse aluno riscou as partes em branco da figura).*
- *Repare que na figura os pedaços em branco são iguais nas duas metades do retângulo. (respondeu: área **A** = área **B**).*
- *Dá para saber pela diagonal que as áreas brancas são iguais. Se elas são iguais as áreas preenchidas também são iguais (respondeu: área **A** = área **B**).*
- *No retângulo foi traçado uma diagonal, então, a área de um triângulo será igual à do outro(respondeu: área **A** = área **B**).*
- *A figura toda é um retângulo e está sendo cortado por uma diagonal(respondeu: área **A** = área **B**).*

Algumas justificativas dadas pelos alunos da escola pública:

- *Com as medidas, eu obtenho certeza, sem as medidas, a meu ver, o item correto é este (respondeu: Não foram dadas as medidas e compará-las).*
- *Acho que não dá para medir sem uma régua.*
- *Não dá para saber se são iguais porque não foram dadas as medidas.*

Observamos que os estudantes em geral mostram a necessidade de medir, essa decisão caracteriza o efeito do *contrato didático*, pois os alunos são acostumados a resolver problemas que envolvem cálculos a partir de medidas dadas.

PROBLEMA 2

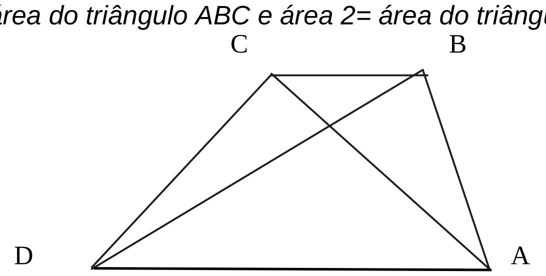
Este problema envolve conceitos de trapézio, triângulo, e área do triângulo. O objetivo é procurar respostas as seguintes questões:

1- Quais as dificuldades do aluno em decompor a figura em subfiguras e recompô-las, no processo de tomada de decisão? Abandona hipóteses? Insere hipóteses suplementares?
2- Usa propriedades geométricas para justificar sua decisão?
3- As subfiguras, tendo partes superpostas, podem dificultar a tomada de decisão?
4- O aluno usa o conceito de trapézio na tomada de decisão?
5- O aluno tem necessidade das medidas para comparar as áreas dos triângulos?

É apresentado o seguinte enunciado:

"*Preencha com V a afirmação Verdadeira e justifique:*

Seja o trapézio ABCD. Sendo área 1= área do triângulo ABC e área 2= área do triângulo BCD.



Pode-se afirmar que:

( ) *área* 1 > *área* 2

( ) área 1 < área 2

( ) área 1 = área 2

( ) *Não foram dadas as medidas, portanto não é possível calcular as áreas e compará-las."*

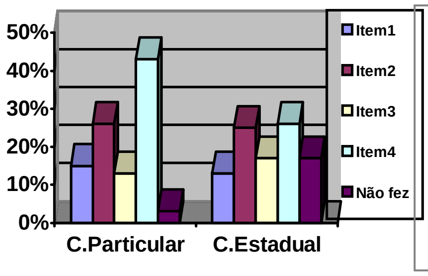
Justificativa:

ANÁLISE *A PRIORI*

1. O aluno deve acertar o exercício com a terceira alternativa, isto é, "área1=área2", usando a seguinte justificativa: O trapézio tem bases paralelas, logo, as alturas dos dois triângulos são iguais e pela figura possuem a mesma base. Portanto, esses triângulos possuem áreas iguais.
2. O aluno pode chegar ao erro com a primeira ou segunda alternativa, isto é, "área 1 > área 2" ou "área 1< área 2", sendo influenciado pela visualização, pois as subfiguras não seguem a lei do fecho (v. Fundamentação Teórica). Essa visualização provavelmente induz à não utilização de definição de trapézio (quadrilátero com dois lados paralelos), que é a determinante das alturas iguais dos triângulos. Isto é, deve abandonar hipóteses fornecidas pela figura, os dois triângulos tem alturas iguais. Provável justificativa: "O triângulo ABC tem maior área, pois é mais largo que o triângulo BCD" ou "O triângulo BCD, possui maior área pois os seus lados são mais compridos que os do triângulo ABC."
3. É esperado que o aluno se engane e decida pela quarta alternativa. "Não foram dadas as medidas portanto não é possível calcular as áreas e compará-las". Talvez, a escolha dessa alternativa deva-se à dificuldade do aluno em realizar a passagem de desenho para figura geométrica, necessitando de medidas para resolver o problema.

ANÁLISE DOS RESULTADOS

O histograma abaixo apresenta os resultados referentes ao desempenho dos alunos no problema 2.



Respostas C. Particular
Item (1)- 13 alunos – 15%
Item (2) – 23 alunos – 26%
Item (3) – 12 alunos – 13%
Item (4)- 38 alunos – 43%
Não fez- 3 alunos- 3%

Respostas C. Público
Item (1) – 11 alunos – 13%
Item (2) – 20 alunos – 25%
Item (3) – 14 alunos – 17%
Item (4)- 21 alunos – 26%
Não fez – 14 alunos – 17%

O item com maior distinção nas respostas foi o de número 4. É provável que os alunos do colégio particular (38%) tenham tomado a decisão somente com a apreensão perceptiva, assim sendo, pode ter ocorrido um abandono da interpretação discursiva de todos os elementos da figura comandadas pelas hipóteses.

A abstinência de resposta por 17% dos alunos do colégio estadual, determinam um provável desconhecimento dos conceitos envolvidos no enunciado do exercício.

Analisando o desempenho dos alunos, quanto à exploração da figura, observamos os prováveis fatores que impedem a visualização, dificultando a apreensão operatória pertinente ao exercício:

1- Uma imediata apreensão perceptiva da figura com partes superpostas provoca certa resistência à apreensão discursiva dos elementos da figura geométrica. Pois as subfiguras não seguem a "lei do fecho", isto é, elas têm um contorno fechado separando uma da outra. As partes superpostas dos dois triângulos é um fator que diminui a visibilidade da operação de reconfiguração intermediária, gerando uma resistência e ocultação da apreensão operatória.

2- A visualização na articulação do raciocínio na resolução do problema, pode levar a informações locais e não globais, pois a apreensão operatória é realizada de acordo com as operações mais visíveis, pertinentes a um processo discursivo natural. O aluno é orientado na decisão, pela modificação configural ótica, isto é, ele julga como o triângulo de maior área o triângulo BCD ou o triângulo ABC de acordo com o lado, concluindo como corretos os itens (1) ou (2).

3- A passagem do *Desenho* para a *Figura Geométrica* é um fator determinado pelo processo discursivo teórico. Porém, o aluno parece utilizar somente o processo discursivo natural, assim, necessita medir para resolver o problema e é provável que decida pelo o Item (4).

4- Embora esse exercício trabalhe com comparações de áreas das partes de uma figura dada, como no exercício 1. O desempenho no exercício 1 foi melhor que no exercício 2. Provavelmente devido a sobreposição das figuras (influência da "lei do fecho"). Uma pequena porcentagem dos alunos teve sucesso neste exercício: no colégio particular (13%) e no colégio público (17%).

5- Constatou-se que dois alunos riscaram o interior dos triângulos, no processo de tomada de decisão.

Algumas justificativas dadas pelos alunos do colégio particular:

- *Não podemos comparar as áreas sem saber quais são as suas medidas.*
- *Eu medi os lados, fiz as contas e concluí: área* **1** < *área* **2** *(O aluno mediu a figura e fez alguns cálculos).*
- *O ângulo do triângulo* **ABC** *é maior que o ângulo do triângulo* **CDB** *(decidiu por área* **1**> área **2**).

Algumas justificativas dadas pelos alunos do colégio estadual:

- *Não foram dadas as medidas, por isso não posso calcular e obter a resposta certa.*
- *Não há medidas?*
- *Se não souber as medidas, não dá para saber a área.*
- *Nunca vi isto antes.*
- *Se olharmos bem é lógico que a área* **2** *é maior que a área* **1.**
- *Medi os lados e fiz as contas e concluí: área* **1** < área **2** *(esse aluno mediu a figura e fez alguns cálculos).*

Observamos o efeito do contrato didático: o aluno necessita das medidas para efetuar os cálculos e tomar as decisões, devido aos tipos de problemas que provavelmente estão acostumados a fazer. A influência dos obstáculos epistemológicos: nem sempre a figura facilita "ver" sobre a figura as propriedades as quais correspondem a solução procurada. Outro aspecto importante a ser observado é o obstáculo didático: os livros didáticos, em geral não propõem questões do tipo justifique, prove, demonstre.

PROBLEMA 3

Este problema envolve o conceito de retângulo e tem por objetivo obter elementos de informação para as seguintes indagações.

1- O aluno considera o quadrado como um retângulo?

2- Quais as dificuldades do aluno em decompor a figura em subfiguras e recompô-las, na tomada de decisão? Abandona hipóteses? Insere hipóteses suplementares?

É proposto ao aluno que conte todos os retângulos que são subfiguras da figura dada.

É apresentado o seguinte enunciado:

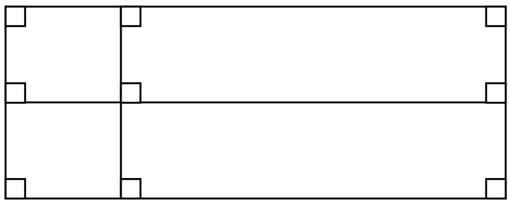
“*Quantos retângulos tem essa figura?*

( ) 9

( ) 4

( ) 5

( ) 2

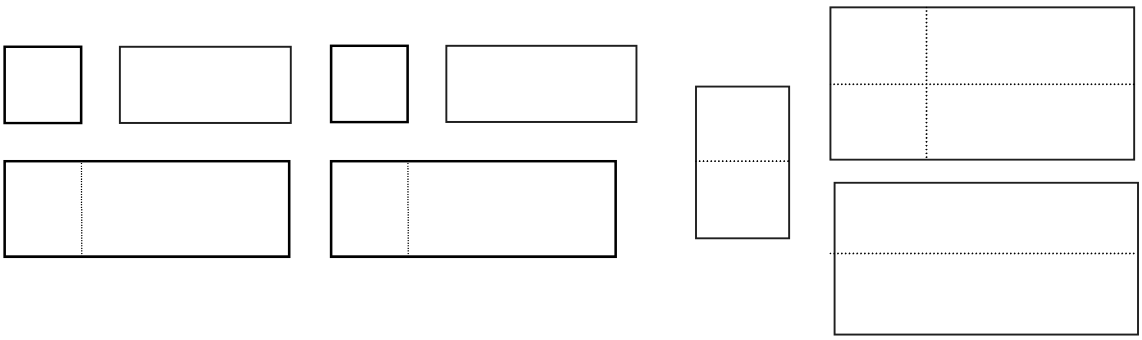


Justificativa (sugestão: desenhe os retângulos que você encontrou)

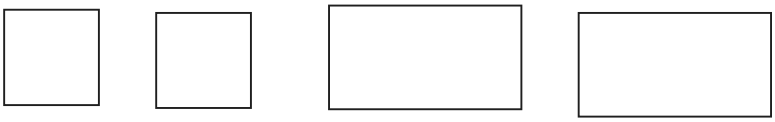
É oferecido ao aluno um quadriculado para a representação dos retângulos obtidos”

ANÁLISE *A PRIORI*

1. É esperado que o aluno chegue ao sucesso com 1ª alternativa, a partir da justificativa:

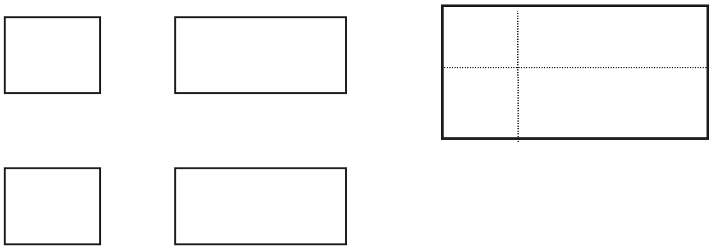


2. O aluno deve chegar ao fracasso com a 2ª alternativa, e nesse caso o aluno deve decompor a figura, através de um ladrilhamento abandonando o contorno.

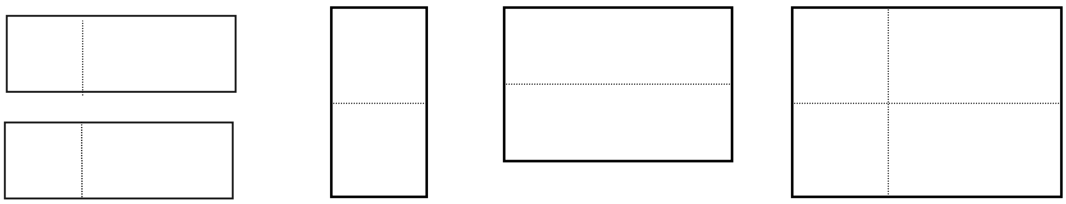


3. Existe a possibilidade do aluno chegar ao fracasso com a 3ª alternativa, nesse caso o aluno decompõe a figura e observa somente o contorno. Ou então, deve desconsiderar os quadrados na contagem, observando faixas.

Justificativa 1

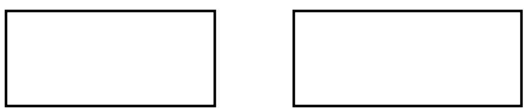


Justificativa 2



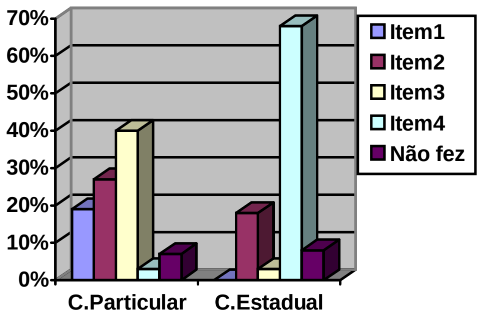
4. Talvez o aluno chegue ao fracasso com a quarta alternativa. Neste caso o aluno deve desconsiderar os retângulos com os lados de mesmo comprimento e a composição de retângulos formadores de novos retângulos. Desagrupa a figura para analisá-la e não a reagrupa, deve justificar do seguinte modo:

Justificativa



ANÁLISE DOS RESULTADOS

O histograma abaixo apresenta os resultados referentes ao desempenho dos alunos no problema 3.



Respostas: Col. Particular
Item (1)- 17 alunos- 19%
Item (2)- 24 alunos – 27%
Item (3) – 36 alunos – 40%
Item (4) – 3 alunos – 3%
9 alunos- Não concordaram com as respostas dadas

Respostas: Col. Público
Item (1)- 0 alunos – 0%
Item (2) – 15 alunos – 18%
Item (3)- 3 alunos – 3%
Item (4) – 55 alunos – 68%
Não fez- 7 alunos – 8%

A maior distinção percentual na decisão foi nos itens 3 e 4. Analisando o item 3, temos que os alunos do colégio particular devem ter ladrilhado a figura com retângulos, utilizaram somente a apreensão perceptiva, não realizando as modificações “mereológicas” necessárias para o uso de todas as hipóteses.

Analisando o item 4, temos que os alunos do Colégio Estadual, provavelmente desconhece o conceito de retângulo, pois para eles o retângulo deve ter um lado visualmente de comprimento distinto do outro lado, por isso abandona hipóteses. E não realiza a apreensão operatória para compor novos retângulos com aqueles que eles observaram.

A resolução desse problema depende das concepções dos objetos e da sua análise feita na figura. Há uma congruência entre o enunciado e a figura privilegiando a apreensão perceptiva em detrimento da apreensão operatória que é uma operação central sobre as modificações possíveis da figura.
A análise das decisões dos alunos nos permitiu identificar os seguintes fatos:

1- O aluno deve ter considerado os retângulos como elementos de um ladrilhamento. Neste caso, ele contou as subfiguras, abandonando o contorno, determinando 4 retângulos ou 2 retângulos (esta decisão indicou a probabilidade de os alunos só terem a concepção de retângulo com a base visualmente maior que a altura).

2- A formulação do problema reforça uma imediata apreensão perceptiva da figura (e abandono da apreensão discursiva) considerando um grande retângulo dividido em retângulos menores, neste caso, o aluno conta 5 retângulos.

3- Nove alunos do colégio particular discordaram de todos os itens propostos respondendo que esta figura tem 7 retângulos, neste caso ocorre a concepção de retângulo com base visualmente maior que a largura.

Constatou-se que somente 19% dos alunos do colégio particular acertaram o exercício. Provavelmente, a visualização não ajudou o raciocínio do aluno, que usou o processo discursivo natural e não o discursivo teórico. Observou-se a resistência do aluno em não fazer a figura (22 alunos do colégio público e 13 alunos do colégio particular), eles riscaram sobre a figura dada, fizeram contornos ou enumeraram os retângulos.

PROBLEMA 4

Este problema envolve o conceito de triângulo, ângulo e soma dos ângulos internos de um triângulo. Buscamos responder as seguintes questões:

1- O aluno conhece a propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo?

2- O aluno insere hipóteses suplementares no teorema da soma dos ângulos internos?

3-O aluno justifica usando propriedades geométricas, através de uma prova a solução desse problema?

É apresentado o seguinte enunciado:

Preencha com V se verdadeira a afirmação e justifique:

"A soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer:

( ) varia conforme o valor das medidas dos seus lados e conseqüentemente de seus ângulos. Portanto, a soma dos ângulos internos de um triângulo varia de acordo com a figura.

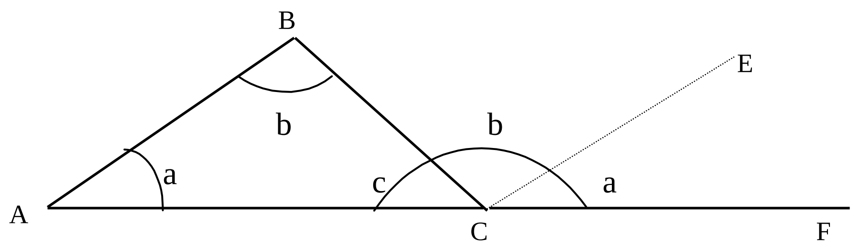
( ) vale 90° e é constante para o triângulo retângulo.

( ) vale 180° e é constante.

( ) vale 360° e é constante."

ANÁLISE *A PRIORI*

1. É esperado que o aluno chegue ao sucesso com a terceira alternativa: “ A soma dos ângulos internos do triângulo qualquer é constante e vale 180°. Possivelmente, o aluno para justificar sua resposta utiliza o teorema que enuncia; “A soma dos ângulos internos do triângulo vale 180º”. E realize a seguinte *demonstração*: Seja o triângulo ABC, por um dos vértices traçamos uma reta paralela a um dos lados, como na figura,



$\overline{CE} // \overline{AB}$, então os segmentos $\overline{CE}$ a $\overline{AB}$ determinam no segmento $\overline{AF}$ ângulos congruentes aos ângulos internos do triângulo, com vértice em C, formando um ângulo raso em C. Portanto, a soma dos ângulos é 180º.

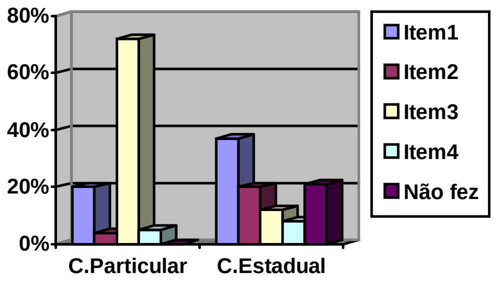
2. O aluno poderá errar com a 1ª alternativa, nesse caso o aluno parece desconhecer a propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo. Constatamos a necessidade da *demonstração* desse teorema para que o aluno veja a independência da soma dos ângulos internos em relação à medida dos lados.

3. O aluno deve chegar ao fracasso com a segunda resposta: “A soma vale 90° e é constante para o triângulo retângulo. Assim, é provável que o aluno ao fazer uma leitura incorreta do exercício, abandone o conceito da soma dos ângulos internos e tome a decisão influenciado pelo triângulo retângulo que possui um ângulo de 90º.

4. O aluno pode chegar ao fracasso com a quarta resposta: “A soma vale 360° e é constante”. Neste caso, o aluno desconhece o teorema da soma dos ângulos internos do triângulo.

ANÁLISE DOS RESULTADOS

O histograma abaixo apresenta os resultados referentes ao desempenho dos alunos no problema 4.



Respostas: Col. Particular Item (1) – 16 alunos – 20% Item (2) – 4 alunos – 4% Item (3) – 64 alunos – 72% Item (4)- 5 alunos – 5%	Respostas: Col. Público Item (1)- 30 alunos – 37% Item (2)- 16 alunos – 20% Item (3)- 10 alunos – 12% Item (4)- 7 alunos – 8% Não fez – 17 alunos – 21%

Comportamentos observados:

Exigia-se uma justificativa para o item escolhido, observou-se dentre os 64 alunos do colégio particular que acertaram o exercício, 6 alunos justificaram o exercício , da seguinte forma: “*Se o quadrilátero tem soma dos ângulos internos 360° e este sendo formado por dois triângulos, então, a soma dos ângulos internos do triângulo é 180°.”*

Justificativas dadas por alunos do colégio estadual:

- *Um triângulo tem soma de seus ângulos internos 180 graus porque tem a metade de um quadrado que tem 360 graus.*
- *Cada triângulo tem seus ângulos, eles variam em cada triângulo (o aluno respondeu que a soma varia de acordo com a figura).*
- *O triângulo pode ser assim (o aluno apresenta o desenho de vários triângulos e decide pelo item que propõe que a soma varia com o lado).*
- *A soma vale 180 graus pois é assim que acontece com o esquadro.*
- *Não podemos dar uma resposta porque não sabemos os ângulos internos do triângulo.*

Justificativas dadas por alunos do colégio particular:

- *A soma vale 180 graus porque cada ângulo interno do triângulo mede 60 graus.*
- *A soma dos ângulos internos de um quadrilátero é igual a 360 graus, assim, a soma dos ângulos internos do triângulo vale 180 graus, pois é a metade.*

- *Sendo um triângulo qualquer, seus ângulos variam com o valor das medidas dos seus lados. Portanto, a soma varia de acordo com a figura.*
- *As regras de matemática afirmam que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180 graus.*
- *Porque, se a soma fosse maior que 180 graus, não formaria um triângulo.*
- *Depende dos ângulos internos de um triângulo, que pode ser isósceles, equilátero, retângulo etc.*
- *Vale 180 graus, pois cada ângulo interno vale 60 graus, e como há três ângulos no triângulo, multiplica-se.*
- *Se colocarmos em linha reta ao ângulos obteremos 180 graus como a soma deles.*

Observou-se na proposta curricular e nos livros didáticos da 7ª série(pesquisados) apresentação do teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo com justificativas experimentais e respectivas provas. Esse teorema é usado com freqüência em muitos exercícios nos livros didáticos. Assim era esperado o sucesso de todos os alunos. Porém, constatamos a influencia dos obstáculos epistemológicos: em algumas justificativas o aluno relaciona um triângulo qualquer com um triângulo equilátero, isto é, usa, figuras particulares na tomada de decisão e dos obstáculos didáticos: a ausência da *demonstração* no ensino determina a falta de validação dos resultados(constatamos com a resposta: a soma dos ângulos internos varia com o valor dos lados).

Nenhum aluno conseguiu justificar com sucesso, de forma completa este exercício. Essa dificuldade nos leva a olhar atentamente o ensino atual da geometria, as exigências e prioridades devem ser refeitas com modificações profundas que tenham como meta facilitar o acesso ao raciocínio dedutivo do aluno. Levando o aluno a argumentar, provar, validar e demonstrar nos exercícios.

Nenhum aluno fez a figura do triângulo. Observou-se que 37% dos alunos do colégio particular utilizou o processo discursivo natural, isto é, considerou que alterando o comprimento dos lados está alterando a soma dos ângulos.

Quanto as questões propostas, observamos que o aluno do colégio particular demonstrou conhecer a propriedade dos ângulos internos do triângulo, mas não sabe justificar a sua decisão. O aluno do colégio estadual demonstra desconhecimento do teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo, optando por respostas aleatórias(alguns alunos somaram dois lados para determinar o terceiro desconhecido) ou deixando de fazer o exercício. Outro aspecto importante é o uso de hipóteses suplementares (observamos a resposta "*a soma vale 180 graus pois cada ângulo vale 60 graus* , sendo que não foi dado que os ângulos valem 60 graus).

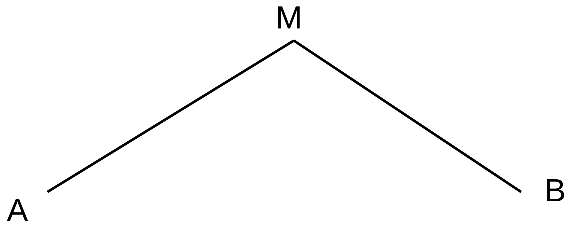
PROBLEMA 5

Este problema envolve a noção de segmento de reta e o conceito de ponto médio de um segmento de reta. Investiga-se:

1- O aluno utiliza adequadamente o conceito de segmento de reta e a definição de ponto médio de um de segmento de reta?
2- A necessidade de medida influencia na decisão do aluno?
3- A visualização influencia a decisão do aluno?

É proposto ao aluno o seguinte exercício.

Sendo AM = MB segmentos de mesma medida, de acordo com a figura. Podemos concluir que:



( ) M é ponto médio do segmento $\overline{AB}$.

( ) M não é ponto médio do segmento $\overline{AB}$.

( ) Não foram dadas os valores das medidas dos segmentos $\overline{AM}$ *e* $\overline{BM}$*, portanto, nada podemos afirmar.*

Justificativa:

ANÁLISE *A PRIORI*

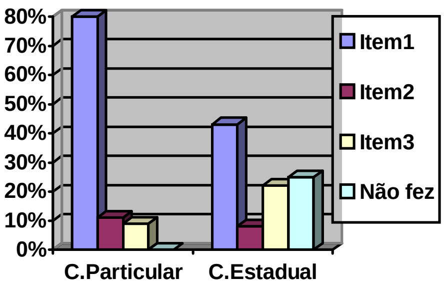
1. O aluno chegara a solução correta com a 2ª alternativa. " M não é ponto médio do segmento $\overline{AB}$", com a justificativa: os pontos A, M e B não estão alinhados, apesar de satisfazer a condição de $\overline{AM}$ e $\overline{BM}$ terem medidas iguais.

2. O aluno deve errar com a 1ª alternativa. " M é ponto médio do segmento $\overline{AB}$". É possível que o aluno não aplique a definição de ponto médio do segmento de reta, desconsidere o fato de $\overline{AB}$ ser um segmento de reta e seja influenciado pela visualização.

3. Presume-se que o aluno erre com a 3 ª alternativa. " Não foram dados os valores das medidas dos segmentos $\overline{AM}$ e $\overline{BM}$, portanto nada podemos afirmar". O aluno tem necessidade de medir na tomada de decisão, conseqüência do tipo de exercícios dos livros didáticos.

ANÁLISE DOS RESULTADOS

O histograma abaixo apresenta os resultados referentes ao desempenho dos alunos no problema 5.



Respostas: Col. Particular Item (1) – 71 alunos- 80% Item (2)- 10 alunos – 11% Item (3)- 8 alunos – 9%	Respostas: Col. Público Item (1) – 35 alunos – 43% Item (2) – 7 alunos – 8% Item (3) – 18 alunos – 22% Não fez – 20 alunos –25%

Entre os alunos do grupo do colégio estadual 25% não fizeram o exercício. Provavelmente, a definição de ponto médio não seja do conhecimento desses alunos.

A resolução depende das concepções dos objetos envolvidos, da análise feita na figura e de como a visualização articula o raciocínio. Provavelmente:

1 - A apreensão perceptiva da figura tem funções inibidoras sobre a compreensão do problema dado, neutralizando a apreensão discursiva.

2 - O aluno não levou em consideração a definição de ponto médio de um segmento de reta, desconsiderando que A, M, B devem ser alinhados, além de AM=MB.

Algumas justificativas dadas pelos alunos do colégio estadual e o item escolhido:

- *Porque não temos valores das medidas. (item 3)*
- *Porque* M *é início de* $\overline{AM}$ *e* $\overline{BM}$. *(item 1)*
- *Sim, porque* M *esta no centro de* A *e* B.*(item 1)*
- *Se forem medidas darão certo. (item 1)*
- M *não é ponto médio do segmento* $\overline{AB}$. *É um ponto de partida para* $\overline{AM}$ *e* $\overline{BM}$. *(item 2)*

Algumas justificativas dadas pelos alunos do colégio particular e o item escolhido:

- *O ponto médio do segmento só pode existir em um só segmento. (item2)*
- *Não podemos afirmar nada, pois não sabemos as medidas. (item3)*
- M *é ponto médio, pois fica no meio do segmento. (item1)*
- *O ponto* M *esta na metade do segmento* $\overline{AB}$. *(item 1)*

Observa-se pelo gráfico que os alunos das duas escolas não utilizam adequadamente o conceito de segmento de reta e a definição de ponto médio de um segmento de reta. Pelas justificativas de alguns alunos constatamos a necessidade de medida para a tomada de decisão (“não podemos afirmar nada, pois não sabemos as medidas”). Outro aspecto importante é a provável influencia da visualização (“M é ponto médio pois esta no centro de A e B”).

PROBLEMA 6

Este problema envolve o teorema de existência do triângulo, e tem por meta obter informações com as seguintes questões.

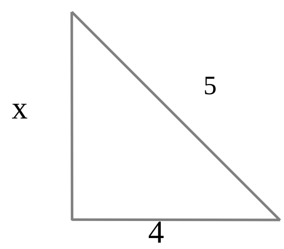
1- O aluno sabe o teorema da existência do triângulo?

2- A decisão do aluno sofre influência da figura? Ele insere hipóteses suplementares para poder usar o teorema de Pitágoras?

Destacamos que a figura nada garante que o triângulo fosse retângulo. Segundo DUVAL, a apreensão perceptiva deve ser subordinada à apreensão discursiva: "*superando-se a resistência a não demonstrar, supera-se o obstáculo específico de uma figura geométrica*". Um dos objetivos desse exercício é também a procura de informações sobre a capacidade do aluno a reconhecer: os dados pertinentes do problema e as regras que presidem a resolução de um problema de geometria.

É proposto ao aluno, o seguinte problema:

"*Calcule os valores possíveis de x na figura, dados os comprimentos na mesma unidade de medida.*"



ANÁLISE *A PRIORI*

1. A solução possível para o exercício será alcançada, observando os critérios de existência do triângulo, "A soma de dois lados deve ser sempre maior que o terceiro lado", descartando o fato de o triângulo ser retângulo. Porém é improvável essa decisão, pois neste caso haverá várias respostas para x.

$x < 5+4 \longrightarrow x < 9$ e

$4 < 5+x$ ocorre para qualquer x

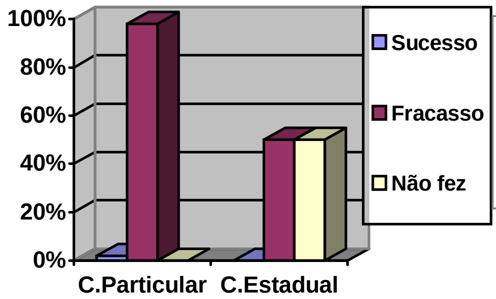
$5 < 4+x \longrightarrow x > 1$

Assim $1 < x < 9$.

2. Provavelmente o aluno chegará ao insucesso usando hipóteses suplementares na figura. Ele deve ser influenciado pela figura, considerando este triângulo retângulo.

ANÁLISE DOS RESULTADOS

O histograma abaixo apresenta os resultados referentes ao desempenho dos alunos no problema 6.



Respostas: Col. Particular Sucesso – 0 alunos- Fracasso – 89 alunos – 100%	Respostas : Col. Público Sucesso – 0 alunos –0% Fracasso –40 alunos – 50% Não fez- 40 alunos – 50%

Resposta dos alunos: Os dois grupos erraram o problema.

1. No grupo pertencente ao colégio particular, 2 alunos observaram que não é um triângulo retângulo, e 87 alunos resolveram inadequadamente o problema usando o teorema de Pitágoras.
2. No grupo de alunos da escola particular, provavelmente a apreensão perceptiva da figura teve função inibidora sobre a apreensão discursiva. O aluno inseriu hipóteses, considerou o triângulo retângulo e aplicou o teorema de Pitágoras. O aluno não seguiu o estatuto hipótese-teorema-conclusão portanto não observou a incompatibilidade da aplicação do Teorema de Pitágoras.
3. O aluno não utilizou o teorema da existência do triângulo. Metade dos alunos do colégio público não fez o exercício. Observamos o provável desconhecimento de aplicação do teorema de Pitágoras e do teorema da existência do triângulo. O restante errou, pois criou operações fictícias (somou os lados conhecidos para determinar x), sem uso de justificativas matemáticas.

Constatamos, entre os dois grupos, a distinção para a resolução do exercício: Os do colégio particular aplicaram o teorema de Pitágoras incluindo hipóteses suplementares (consideraram o triângulo retângulo) no exercício. Já entre os do colégio estadual só dois aplicaram o teorema de Pitágoras, porém erraram na escolha das hipóteses; 20 alunos resolveram somar os valores dados.

Problema 7

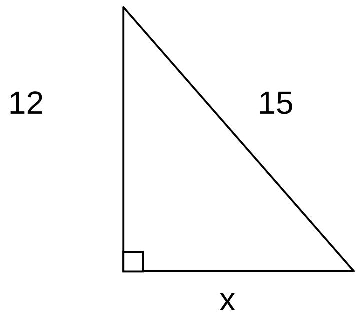
Este problema envolve o conceito do triângulo e o teorema de Pitágoras.

Objetiva ter elementos de informação a partir das questões.

1- O aluno identifica as hipóteses na figura e aplica o teorema de Pitágoras para resolver o problema?
2- Pode ocorrer de o aluno não identificar as hipóteses e não aplicar o teorema de Pitágoras para resolver o exercício?

É apresentado o seguinte problema:

"*Calcule o valor de x na figura, dados os comprimentos na mesma unidade de medida.*"



ANÁLISE *A PRIORI*

1. O aluno chegará ao sucesso se observar que se trata de um triângulo retângulo e aplicar corretamente o Teorema de Pitágoras com a seguinte resolução.

$15^2 = 12^2 + x^2$

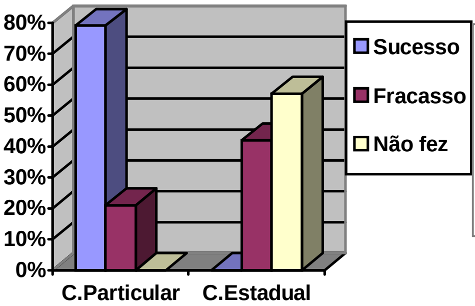
$225 = 144 + x^2$

$81 = x^2$, assim, $x = 9$

O aluno deve errar ao não identificar as hipóteses do teorema de Pitágoras e consequentemente não aplicará o teorema corretamente para a resolução do problema.

ANÁLISE DOS RESULTADOS

O histograma abaixo apresenta os resultados referentes ao desempenho dos alunos no problema 7.



Respostas: Col. Particular	Respostas: Col. Público
Sucesso- 70 alunos - 79%	Sucesso- 0 alunos -
Fracasso–19 alunos– 21%	Fracasso- 34 alunos – 42%
	Não fez – 46 alunos –57%

A congruência entre a apreensão perceptiva e a discursiva facilita o tratamento matemático do problema.

Desse fator depende a habilidade de os alunos "*verem rapidamente* " ou "*não verem*" a propriedade geométrica pertinente ao problema, esta habilidade sugere o tratamento matemático. Constatou-se que 70 alunos do colégio particular identificaram, pelos dados do problema, que o triângulo é retângulo e souberam aplicar o teorema de Pitágoras.

Observamos que:

1 – Dentre os 19 alunos do grupo pertencente ao colégio particular, que erraram o exercício:

- 8 alunos trocaram os dados na aplicação do teorema de Pitágoras.
- 8 alunos tiveram sucesso parcial: aplicaram corretamente o teorema mas os erros nos cálculos levaram ao fracasso.
- 3 alunos tiveram um sucesso parcial: aplicaram corretamente o teorema, acertaram os cálculos mas, ao concluir, responderam que o comprimento de " x" poderia ter um valor positivo e outro negativo ($x = 9$ e $x =-9$) O aluno saiu do quadro geométrico para o quadro algébrico para resolver os cálculos e não retornou ao quadro geométrico a fim de concluir o exercício.

2- Ocorreu que 57% dos alunos do colégio público não fizeram o exercício.

Os alunos que fizeram, criaram operações fictícias entre os lados sem fundamentação matemática (somaram os lados conhecidos para determinarem o valor de x). Somente 2 alunos tentaram usar o teorema de Pitágoras, mas erraram, pois trocaram os dados (cateto com a hipotenusa). Justificaram no exercício que aprenderam o teorema no curso do SENAI (profissionalizante).

Neste exercício podemos observar resoluções distintas, aplicação correta do teorema de Pitágoras pelo colégio particular e seu provável desconhecimento pelos alunos do colégio estadual.

CONCLUSÃO:

O grande número de exercícios sem respostas indicam desconhecimento pelos alunos do colégio público de alguns conceitos e habilidades geométricas.

Existe um intervalo entre o comportamento ingênuo e o comportamento matemático do aluno tanto no Colégio Particular quanto no Colégio Estadual, isto é, o aluno toma a decisão sem usar as propriedades geométricas. Para superar esta lacuna deve-se:

1 – Levá-lo a compreender a diferença entre a argumentação na prática natural do discurso e a articulação dedutiva.

2 - Ensinar o aluno o estatuto hipótese-teorema-conclusão e orientá-lo nos exercícios com *demonstração*.

3- Orientá-lo a justificar as conclusões partindo das hipóteses.

A dificuldade que certos alunos têm no aprendizado das propriedades de geometria e suas aplicações em problemas geométricos pode se originar nos métodos de trabalho inadequados. Decorar definições e teoremas sem entendê-los, constitui um obstáculo às suas utilizações nas articulações exigidas em resoluções de problemas geométricos.

A análise das concepções dos alunos, através deste teste, confirma ao problemas do ensino- aprendizado da geometria, identificados pelas pesquisas analisadas neste trabalho. A figura é um suporte intuitivo importante na resolução de problemas de geometria envolvendo *demonstração*. O maior índice de fracasso em nosso teste, como pode ser comprovado pelos resultados é, provavelmente devido, em parte, pela apreensão perceptiva (é o caso, por exemplo do problema 7) o aluno não utiliza apreensão discursiva. Parece, também, que as escolhas pedagógicas e o tipo de problemas de geometria propostos a esses alunos, em sala de aula (efeitos do contrato didático), constituíram elementos determinantes, que esses alunos encontraram, na resolução dos problemas.

Em síntese, concluímos que exercícios que levem o aluno a demonstrar determinam uma nova postura argumentativa em relação aos problemas de geometria.

CAPÍTULO IV

PROBLEMÁTICA E HIPÓTESES DE PESQUISA

O objetivo desse capítulo é detectar o problema do ensino-aprendizagem da *demonstração* através dos estudos dos conceitos geométricos e definir hipóteses que orientarão a organização de nossa seqüência didática.

1 – SITUANDO O PROBLEMA

Através de leitura (de teses, dissertações, artigos) cursos e palestras pode-se constatar que o ensino da geometria tem sido estudado por muitos pesquisadores, tanto no Brasil como no exterior.

O ensino da Geometria, no Brasil, apresenta, geralmente: as definições, os postulados, os teoremas, as provas, as demonstrações e os registros de representações, nas 7ª e 8ª séries do Ensino Fundamental, o que é, segundo as pesquisas de Gouveia (1988), condizente com o estágio de desenvolvimento mental do aluno dessas séries escolares.

F. GOUVEIA (1988), em seu trabalho de pesquisa sobre ensino/aprendizado da *demonstração* voltado à capacitação de professores de 5ª a 8ª séries, levantou as seguintes hipóteses que são pertinentes à nossa pesquisa:

> *1- "É possível, num contexto escolar, gerar situações e estratégias que minimizem as dificuldades no ensino aprendizagem da demonstração. Em vista disso, é necessário elaborar e aplicar uma seqüência didática junto a professores, no sentido de lhes oferecer um espaço de reflexão a partir de novos pontos de vista da demonstração que os levem a optar por estratégias diferentes de ensino.*
>
> *2- Os alunos podem atingir um nível mais elevado do pensamento geométrico dedutivo mediante a intervenção do professor que esteja preocupado em estimulá-los a raciocinar sobre várias representações, elaborando situações-problema adequadas. O planejamento de novas atividades pelo professor deve levar em conta que a aprendizagem da*

> *geometria dedutiva se dá através da passagem entre os diferentes registros de representação, para um mesmo objeto matemático. E se o aluno conseguir a passagem entre os diferentes registros, podemos dizer que houve a apreensão do conhecimento geométrico dedutivo.*
> *3- A construção de situações para a sala de aula, nas quais a figura tem um papel heurístico fundamental, levará o aluno a ultrapassar a apreensão perceptiva e a atingir uma apreensão operatória que se apoia sobre a identificação de reconfigurações pertinentes".*

Observamos na proposta curricular, que alguns resultados matemáticos da geometria são apresentados experimentalmente com posterior *demonstração*, mas não há a sugestão de problemas que exijam, na sua resolução, a técnica da *demonstração*. A proposta curricular sugere que o aluno saiba demonstrar as propriedades relativas a triângulos e quadriláteros, teorema de Tales e teorema de Pitágoras, contudo não explica para o professor como desenvolver esta habilidade no aluno. Observa-se que não é apresentado o teorema como objeto de estudo, sendo que, para desenvolver a técnica da *demonstração* e o estudo dos teoremas propostos, necessita-se desenvolver a noção de teorema.

Buscando os aspectos importantes na formação da noção de teorema, elaboramos um pré teste com teoremas básicos da Geometria Euclidiana (a partir de alguns livros didáticos de matemática e da proposta curricular, referentes às 7ª e 8ª séries). Aplicamos em uma classe de 32 alunos, da 8ª série do período diurno, de um colégio particular, da cidade de Mogi das Cruzes /SP.

O teste apresentava hipóteses e conclusões na linguagem matemática, misturados aleatoriamente e os enunciados de 15 teoremas. O aluno deveria relacionar corretamente as hipóteses e as conclusões com os respectivos teoremas. Entre os resultados desta pesquisa, verificamos que o aluno apresentou dificuldades no reconhecimento do estatuto de teorema (não conseguiu identificar hipóteses e conclusão) e na compreensão da conversão dos registros de representação (da linguagem natural para a linguagem matemática) em geometria.

A incompreensão do estatuto do teorema determina muitos bloqueios na resolução de problemas de geometria, o que leva o aluno à não identificação das hipóteses dadas nos enunciados, ora abandonando, ora criando hipóteses, ora trocando-as com a conclusão.

Aplicamos um teste com figuras geométricas (cf. Transposição Didática) e deduzimos que o aluno é influenciado pela figura geométrica apresentada no problema, pois, na maioria das vezes, necessita medir ou dimensionar experimentalmente para concluir, gerando o fracasso na sua decisão.

Sobre o estatuto da figura, DUVAL (1995) orienta que as propriedades da figura estão subordinadas às hipóteses determinadas pelo enunciado do problema e a mesma figura pode ser uma figura geométrica diferente se se modifica o enunciado das hipóteses.

Uma figura geométrica pode ser dividida em várias subfiguras geométricas e reagrupando algumas destas subfiguras, ou todas, pode-se formar outra figura. A reconfiguração é uma apreensão operatória da figura inicial. Toda figura pode ser também suporte de várias configurações.

A partir da figura inicial a *reconfiguração* pode ser espontânea e evidente ou difícil de "ver". Dependendo dos fatores de visibilidade que "facilitem" ou que "inibam" essa operação figural na percepção de uma figura. A *reconfiguração* não é o único tratamento figural que dá conta do poder heurístico das figuras. E sobretudo, esse tipo de tratamento figural não é perfeito para todas as situações geométricas.

Conforme DUVAL, as representações semióticas são as representações que permitem uma "visão do objeto" através da percepção de estímulo (ponto, reta, caracteres etc.) tendo valor de "significante". Assim, as representações semióticas são facilitadoras da apropriação, pelo aluno, do objeto matemático.

Este mesmo autor (DUVAL) explica a mudança de registro de representação, orientando que a atividade matemática em geometria faz apelo a três registros: o das figuras, o das escritas algébricas e o da língua natural (que designa as figuras, suas propriedades, definições, teoremas, hipóteses).

Nos problemas de geometria, os tratamentos figurais e discursivos são simultâneos e interativos, exigindo uma coordenação dos tratamentos figurais como o discurso teórico na língua natural.

DUVAL argumenta que a geometria desenvolve três formas de processo cognitivo: visualização, construção e raciocínio. E observa: “Se a visualização é um auxílio intuitivo, às vezes necessária para encontrar a prova, o raciocínio depende exclusivamente do corpo de proposições”.

Para A. Cavalca (1997), a *visualização* é a recomposição mental da imagem de um objeto, evocada tanto pelo nome dele, quanto por suas características, representação gráfica, etc. A *visualização* também será vista como a conversão de conceitos em imagens visíveis ou mentais. Ele reconhece a importância da *visualização*, em situações-problema que favorecem o desenvolvimento das capacidades de interpretar e fazer representações gráficas planas de objetos do espaço.

No teste sobre as concepções dos alunos em relação a Demonstrações/Provas que aplicamos a alunos das oitavas séries do Ensino Fundamental (cf. Transposição Didática), observamos que:

- *Os tipos de erros, entre os alunos do colégio particular e estadual, são distintos; provavelmente as concepções sejam distintas.*
- *Nenhum aluno das duas escolas conseguiu justificar corretamente o porquê de suas decisões.*
- *A figura determinou a criação de hipóteses suplementares não dadas no enunciado.*
- *Os alunos do colégio particular não deixaram exercícios sem fazer, com decisões verdadeiras ou falsas. Os alunos do colégio estadual deixaram aproximadamente 50% dos exercícios sem fazer, justificando que desconhecem o assunto.*

Concluímos: A pesquisa, com os alunos, nos revelou o provável abandono do ensino-aprendizado da técnica da *demonstração* em geometria no ensino fundamental.

A situação do ensino-aprendizagem da *técnica da demonstração* em geometria é bastante problemática, e muitos estudos tem apontado os entraves dos professores de ensinar e os alunos de aprender, gerando um gradativo abandono no ensino. O que causa no aluno inúmeras dificuldades para a resolução de problemas em geometria.

2 - PROBLEMÁTICA

As pesquisas feitas sobre o ensino-aprendizagem da geometria, de acordo com nosso estudo preliminar, mostraram as dificuldades que os alunos encontraram na aquisição dos conceitos geométricos. Um dos problemas que favorecem o fraco desempenho de alguns alunos no que diz respeito aos conceitos e habilidades geométricas, é devido a prática e às escolhas didáticas dos professores quando ensinam a geometria.

Os alunos que realizaram o teste não parecem usufruir de um ensino que lhes permitam:

- Compreender a mudança do estatuto da figura, os estatutos da definição e teoremas geométricos, das hipóteses (dados do problema) e conclusão (ou tese).
- Saber utilizar as mudanças de registros de representações.
- Apropriar-se o raciocínio lógico-dedutivo.

Uma das soluções dos problemas ligados ao ensino aprendizagem da geometria para alunos de 5ª à 8ª séries encontra-se na construção de situações de ensino-aprendizagem, considerando-se os seguintes aspectos:

- Figuras geométricas tendo um papel heurístico, levando em conta suas diferentes apreensões: perceptiva, discursiva, operatória e seqüencial.
- *Demonstração* como parte integrante do processo ensino-aprendizagem dos conceitos/habilidades geométricos e do raciocínio lógico-dedutivo.
- A importância dos registros de representação (desenho/figura geométrica, linguagem natural, linguagem matemática).

Por isso, decidimos considerar o estudo da *demonstração* em geometria, como técnica, permitindo aos alunos compreender melhor os conceitos geométricos e adquirir algumas habilidades em geometria.

3 - HIPÓTESES DE PESQUISA

Nossas Hipóteses:

1- O processo de aquisição dos conhecimentos, em particular dos conhecimentos em geometria apoia-se sobre os seguintes aspectos:
  - Observação de provas associadas a tomadas de decisão.
  - A atividade de resolução de problemas geométricos.
  - Atividade de formulação.
  - Entendimento e redação da solução de problemas.

2- A resolução de problemas de geometria e a entrada na forma de raciocínio, que essa resolução exige, está associada a distinção das apreensões da figura (cf. Fundamentação Teórica):
  - Seqüencial: é solicitada nas tarefas de construção ou de descrição com o objetivo de reproduzir uma figura.
  - Perceptiva: é a interpretação das formas da figura em uma situação geométrica.
  - Discursiva: é a interpretação dos elementos da figura, privilegiando a articulação dos enunciados, pois mergulha nas propriedades geométricas do objeto.
  - Operatória: é a operação fundamentada nas modificações possíveis de uma figura de partida e nas suas reorganizações perceptivas que essas modificações sugerem.

3- As representações semióticas não são somente necessárias para fins de comunicação, são também essenciais para as atividades cognitivas do pensamento. A atividade exigida em geometria, no Ensino Fundamental, faz apelo a três registros e sua coordenação: o registro da língua natural, o registro das figuras e o registro matemático (ou das escritas algébricas).

4- A construção de situações para a sala de aula, nas quais a iniciação à *demonstração* tem um papel importante, leva os alunos de 5ª à 8ª série a uma melhor compreensão dos conceitos geométricos e à aquisição de habilidades geométricas.

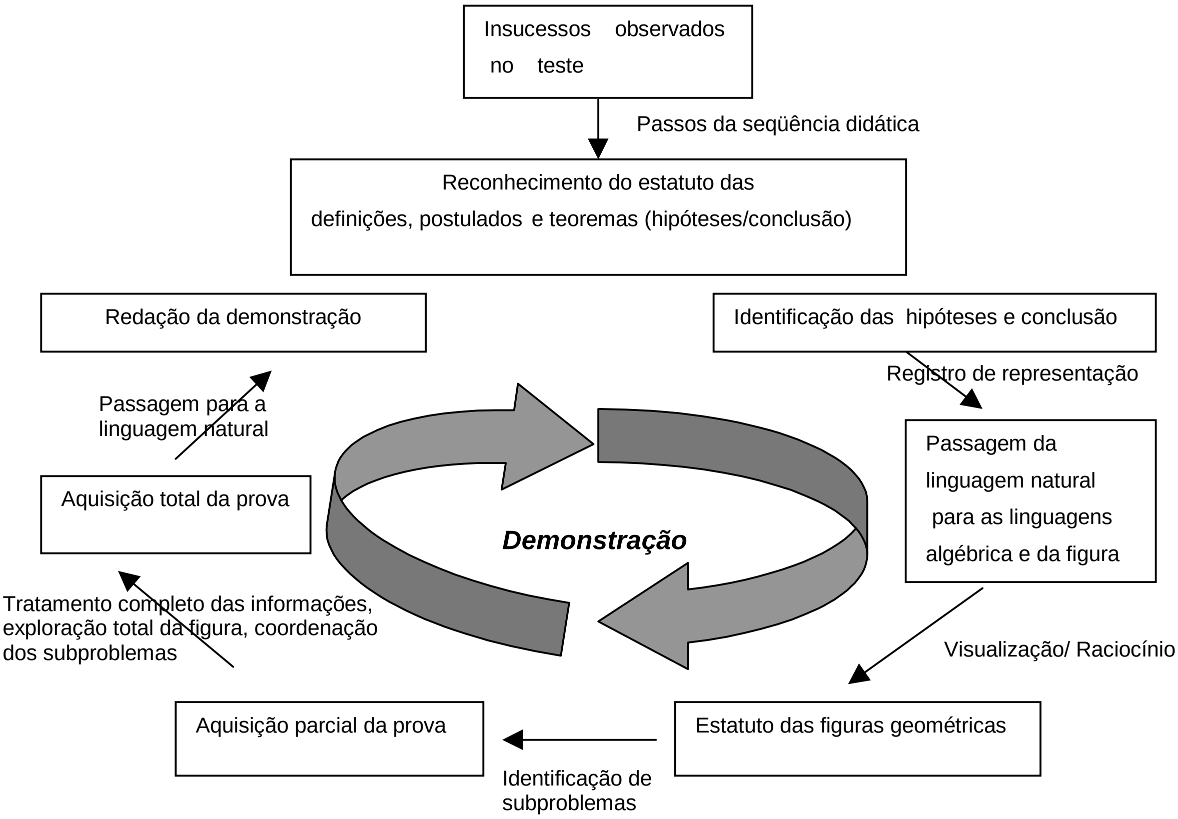
5- A técnica da *demonstração* está mais associada a uma hierarquia de tarefas do que a uma hierarquia de conteúdos (cf. Esquema da Seqüência Didática, p.78).

Considerando as dificuldades levantadas por R. DUVAL, N. BALACHEFF entre outros, bem como pelos dados obtidos em nossa pesquisa preliminar, desenvolvemos uma seqüência didática para validar nossas hipóteses, tendo em vista os aspectos teóricos e processos que favorecem a construção dos conceitos geométricos, como os registros de representação semiótica, as diferentes apreensões de uma figura, os estatutos das hipóteses (dados de um problema geométrico), das conclusões ou teses (o que se quer demonstrar) e das definições e teoremas geométricos.

As situações construídas levam em conta também a significação da *demonstração,* segundo BALACHEFF (1987,1988), que faz a distinção entre explicação, prova e *demonstração* (cf. Fundamentação Teórica, p.5).

A definição de *demonstração*, segundo BALACHEFF, determina uma atividade do raciocínio. A *demonstração* tem por objetivo explicar validando, isto é, levando à convicção, a partir de uma seqüência de enunciados organizados, numa regra de dedução que interfere nas capacidades cognitivas, metodológicas e lingüísticas (cf. Fundamentação Teórica).

Baseados na definição de BALACHEFF, organizamos nossa seqüência didática, apoiada no esquema abaixo:



Passos do esquema:

1- Conhecer o estatuto das definições, os postulados e os teoremas pois estes são as ferramentas a serem usadas na *demonstração*.
2- Efetuar as mudanças dos três registros de representação.
3- Coordenar os registros ajudará o aluno a se apropriar dos conceitos envolvidos nos problemas com *demonstração*.
4- Compreender, através da visualização/raciocínio o estatuto da figura, dominando as mudanças de linguagem: natural para a linguagem matemática e para a linguagem da figura.
5- Identificar os subproblemas e as ferramentas necessárias para resolvê-los, determinando a aquisição parcial da prova.
6- Organizar de modo lógico as provas parciais através do tratamento completo das informações, associado à exploração e à organização de um esquema da *demonstração.*
7- A redação da *demonstração* na linguagem natural completa a administração geral das provas parciais.

Nosso Objetivo é o seguinte:

Pretende-se que o aluno compreenda o estatuto de definição e teorema. Saiba utilizar as mudanças de registro de representação e se aproprie do raciocínio lógico-dedutivo da *demonstração*.

Embora a aplicação de nossa seqüência didática seja prevista para uma curta duração, espera-se que possibilite aos alunos a participação ativa na elaboração dos esquemas de *demonstração* associadas à figura geométrica e que percebam a lógica dedutiva da *demonstração* e a sua função de validação.

Quais serão os efeitos positivos que esperamos com a aplicação da seqüência didática?

- Apropriação da técnica da *demonstração*.
- Discussão (troca de idéias) entre os alunos no transcorrer das atividades.
- Compreensão de que a figura geométrica é uma âncora dos entes matemáticos dados nas hipóteses dos problemas.
- Capacitação em fazer mudanças de registro de representação da linguagem escrita do enunciado para a figura e para a álgebra.
- Habilitação no uso das proposições de acordo com seu estatuto teórico específico: postulados, definição, teorema, hipóteses etc. (determinada pelo estímulo às condições críticas que orientam a ordem da razão na *prova*, isto é cada passo deve alcançar metas em direção a conclusão).

Provavelmente, os alunos terão o primeiro contato com a *demonstração* durante a realização da seqüência didática, em situações diferentes das normalmente vistas em sala de aula.

Esperamos que a aplicação da seqüência didática produza efeitos positivos. Apesar da técnica da *demonstração* ser muito complexa e sua hierarquia de tarefas envolver ferramentas distintas em cada problema.

Capítulo V

SEQÜÊNCIA DIDÁTICA

Neste capítulo será descrito o objetivo da seqüência didática bem como sua concepção e desenvolvimento. A partir da proposta e do objetivo, será apresentado o desenho geral do experimento, as atividades e o procedimento adotado.

Destacamos que não temos a pretensão de oferecer um trabalho inusitado de como ensinar melhor ou com mais significado a introdução da demonstração em geometria. Pretendemos com as atividades propostas abordar diferenciadas alternativas metodológicas, para seu ensino na oitava série do ensino fundamental, que despertem no aluno novos caminhos do pensamento geométrico dedutivo.

As sessões da seqüência didática serão descritas em quatro etapas: aplicação da sessão, conteúdo, análise a priori e relato da aplicação da sessão.

1. A PROPOSTA DA SEQÜÊNCIA DIDÁTICA

A seqüência propõe-se a *introduzir a técnica da demonstração* a alunos da 8ª série do Ensino Fundamental. Para se realizar esta proposta, faz-se necessário:

1. Dar uma introdução histórica para motivar a apresentação dos axiomas, definições e proposições através de um texto .
2. Apresentar aos alunos as mudanças dos registros de representação.

3. Trabalhar o estatuto de definição e de teorema.
4. Mostrar a seqüência lógica da demonstração em esquemas de demonstração.
5. Expor e construir figuras associadas a enunciados e demonstrações.
6. Fornecer subsídios que levem o aluno a redigir uma demonstração.

2. O OBJETIVO DA SEQÜÊNCIA DIDÁTICA

O objetivo da seqüência didática é enfocar como demonstrar, desenvolvendo os seguintes tópicos:

1. Os postulados, as definições e os teoremas devem ser apresentados inicialmente como objetos de estudo.
2. As hipóteses de um teorema devem ser claramente identificadas e distinguidas das conclusões.
3. Deve ser esclarecido que o recíproco de um teorema não é necessariamente verdadeiro.
4. A figura geométrica é constituída por componentes básicos os quais devem ser identificados pelas hipóteses.
5. Os postulados, definições e teoremas devem ser utilizados como ferramentas na técnica da demonstração.
6. Os esquemas da demonstração devem ser associados aos enunciados, às figuras geométricas e às caixas de ferramentas.

Concluída a seqüência didática, a expectativa é que o aluno seja capaz de:

1. Associar os diferentes tipos de registros de representação.
2. Reconhecer o estatuto da definição e do teorema.
3. Desenvolver a capacidade de raciocinar logicamente em geometria
4. Compreender a técnica da demonstração.
5. Redigir uma demonstração.

3. A PROPOSTA DIDÁTICA DA SEQÜÊNCIA E OS ALUNOS

As atividades da seqüência didática foram inspiradas nos trabalhos de BALACHEFF, ARSAC, MULLER, G. BROUSSEAU, citados neste trabalho, e de C. LABORDE (1992) para a elaboração das tarefas a serem aplicadas aos alunos.

Pretendemos introduzir a **Técnica da Demonstração**, utilizando problemas, através de um tratamento que a tornasse significativa para os alunos, estimulando-os a debates sobre os conceitos envolvidos. Necessitamos para a construção/apropriação da técnica da demonstração trabalhar os registros de representação.

Para a nossa pesquisa selecionamos um grupo de alunos de uma escola da rede particular de ensino.

Sabendo do interesse do diretor da escola em estimular seus alunos no estudo da matemática, mandamos uma carta explicando o projeto de pesquisa, pedindo para que se aplicasse a pesquisa aos alunos das oitavas séries dessa escola.

Deste modo, ficou determinada a aplicação do projeto a uma classe de 14 alunos da 8ª série do Ensino Fundamental, do período vespertino, de um colégio da rede particular de ensino, da cidade de Mogi das Cruzes, os quais já estudaram geometria plana e desenho geométrico.

A pesquisadora não era conhecida dos alunos, mas foi bem recebida por eles que demonstraram interesse em participar deste projeto de pesquisa. Destacamos o comentário de quatro alunos que não gostavam de geometria, pois tinham dificuldades em resolver exercícios.

4. PROCEDIMENTOS RELATIVOS À APLICAÇÃO DA SEQÜÊNCIA

O projeto foi composto por 8 sessões consecutivas de pesquisa.

Foi estabelecido, na primeira sessão da seqüência didática, que o trabalho seria aplicado pela própria pesquisadora, na presença de um professor observador (professor de desenho geométrico dessa classe). Determinou-se que os alunos trabalhariam em duplas nas seis sessões, nas quais haveria a institucionalização das propriedades geométricas importantes, e individualmente em duas sessões para a execução de testes. Cada sessão tinha duração de uma hora-aula(40 minutos), em encontros semanais, realizados durante o período de aulas.

A pesquisadora manteve, em todas as sessões de institucionalização, os seguintes procedimentos:

- Distribuição dos textos com as atividades.
- Supervisão dos trabalhos.
- Mediação da discussão ao final de cada sessão
- Recolhimento, ao final de cada sessão, de todo o material feito pelos alunos.
- Entrega aos alunos de uma cópia das atividades com resolução e observações, ao final de cada sessão.
- Registro de aplicação das atividades em fichas padronizadas (v. Anexos).

5. DESENHO GERAL DO EXPERIMENTO

Descreveremos a seguir as oito sessões de estudo a que eles serão submetidos:

Sessão 1

- Apresentação de um texto básico com uma introdução histórica para motivar a apresentação de axiomas, definições e teoremas e registros de representações.
- Resolução de exercícios envolvendo compreensão de texto: o aluno responde a perguntas e preenche lacunas; esboça figuras geométricas.
- Institucionalização das propriedades geométricas essenciais.

Sessão 2

- Organização de uma "caixa de ferramentas".
- Determinação da figura geométrica, das hipóteses e da conclusão, a partir de um teorema.

Sessão 3

- Introdução da noção de teorema recíproco;
- Apresentação da demonstração em forma de rede (esquema da demonstração). Na montagem da rede o aluno deverá utilizar as ferramentas adequadas para completá-la o que exigirá o raciocínio-lógico-dedutivo;
- Redação da demonstração a partir do esquema dado.

Sessão 4 - Teste intermediário

- Observação dos erros e prováveis dificuldades geradoras desses erros.
- Avaliação do progresso do aluno.

Sessão 5

- Reexplicar, se necessário, de acordo com o teste da fase 4, aos alunos que não atingiram o objetivo;
- Apresentação de um texto básico sobre retas;
- Resolução de problemas com demonstrações que envolvam as ferramentas do texto lido.

Sessão 6

- Aplicação de um texto básico sobre quadriláteros.

Sessão 7

- Apresentação de problemas com demonstrações que envolvam as ferramentas dos textos básicos estudados nas sessões 5 e 6.

Sessão 8 - Pós-teste.

- Avaliação da compreensão da técnica de demonstração pelo aluno, através dessa seqüência didática.

Essas sessões foram desenvolvidas entre os meses de maio e junho no ano de 1998, com intervalos de uma semana, excetuando-se o período entre a sessão 5 e 6, que foi de 15 dias, pois não houve atividades na escola no dia previsto. A sessão 8 foi aplicada no dia subseqüente ao da sessão 7 (não houve intervalo) pois os alunos entrariam de férias, na semana posterior.

QUADRO RESUMO DA PESQUISA

	SESSÕES DE PESQUISA – APLICADA NO ANO DE 1998
SESSÃO 1 07/maio	Conceitos básicos/ O estatuto do teorema/ Mudança de registro de representação.
SESSÃO 2 14/maio	Definição/ Reconhecimento das hipóteses e da conclusão/ Introdução da técnica da demonstração.
SESSÃO 3 21/maio	Técnica de demonstração I.
SESSÃO 4 28/maio	Teste intermediário.
SESSÃO 5 04/junho	Texto básico sobre retas/ Técnica de demonstração II.
SESSÃO 6 18/junho	Texto básico sobre quadriláteros.
SESSÃO 7 25/junho	Técnica de demonstração III.
SESSÃO 8 26/junho	Pós- teste.

6. AS SESSÕES DA SEQÜÊNCIA DIDÁTICA

6.1 - *SESSÃO* 1

A sessão 1 foi desenvolvida na seguinte seqüência:

- Apresentação da pesquisadora e dos objetivos da pesquisa.
- Formação de duplas.
- Introdução histórica, com a finalidade de incorporar a demonstração, no contexto da gênese da geometria euclidiana, como fator determinante de sua organização.
- Apresentação dos conceitos primitivos da geometria plana e as suas representações, além de alguns postulados.
- Apresentação do teorema e seu estatuto, reconhecimento de hipóteses e conclusões e os registros de representações na linguagem natural, matemática e figural.

6.1.1 – APLICAÇÃO DA SESSÃO 1

A apresentação e as recomendações foram feitas durante os 15 minutos iniciais e para a resolução das atividades utilizaram 25 minutos. Três alunos estavam ausentes, por isso, um aluno trabalhou sozinho.

Houve discussão nas duplas. Porém, observou-se que em geral, o aluno que se encarregou da redação liderava as decisões.

Os alunos quando apresentavam dúvidas solicitavam imediatamente respostas prontas, adotou-se a atitude de induzi-los à elaboração dessas respostas.

6.1.2 – CONTEÚDO

Atividade 1

A técnica da demonstração em geometria, segundo nossas hipóteses, depende do processo de aquisição de conhecimentos em geometria. De acordo com nosso "esquema de demonstração"(v. p. 78) o aluno deveria conhecer o estatuto das definições, postulados e teoremas, que serão as ferramentas necessárias para o aprendizado da demonstração.

Com o objetivo de apresentar o estatuto do postulado, expusemos a noção de ponto, reta e plano e sete postulados, que fazem parte de nossas ferramentas, para o aprendizado da demonstração.

Iniciamos a primeira atividade enfatizando o contexto histórico; para isso, utilizamos o seguinte texto sobre a obra de Euclides:

> *Euclides, matemático grego, foi o principal responsável pelo avanço da geometria. Nascido por volta de 300 anos antes de Cristo, o fundador da Escola de Alexandria escreveu um tratado de matemática sob o título "Os elementos" (composto de treze volumes), que se constituiu durante mais de 20 séculos no principal texto para o estudo da geometria. No final do livro, Euclides expõe, em ordem lógica, os principais assuntos da geometria. Inicia apresentando os entes primitivos e algumas definições. A seguir, considera alguns postulados e demonstra uma série de teoremas que serviriam de base para a demonstração de outras propriedades. Historicamente, a geometria foi o primeiro ramo da matemática a estar organizado. O livro é considerado a primeira compilação formal do saber matemático ocidental. A rígida organização da obra forneceu padrão de aceitação para tudo que se fez posteriormente em matemática, daí o nome Geometria Euclidiana.*

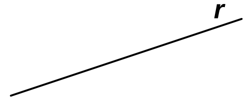
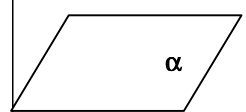
A partir dessa introdução histórica, apresentamos os conceitos primitivos, estudados por Euclides.

> ***Conceitos Primitivos***
>
> *São aqueles apresentados intuitivamente, ou seja sem definição. Nascem em nossa mente pela observação e experiência. São exemplos de conceitos*

> *primitivos (ou fundamentais) o ponto, a reta e o plano. Os demais conceitos são apresentados por uma definição que se utiliza de conceitos já conhecidos.*

A palavra registro poderá causar uma certa confusão de compreensão se aplicada nas atividades dado seus outros significados. Assim, usamos a palavra linguagem substituindo a palavra registro, acreditamos desse modo facilitar a compreensão do que segue.

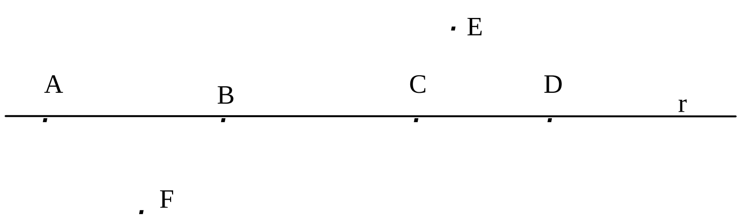
Usaremos as seguintes representações para esses conceitos primitivos:

LINGUAGEM NATURAL	*Ponto*	*Reta*	*Plano*
LINGUAGEM ALGÉBRICA	*Letras latinas maiúsculas Por exemplo: **A**, **B**, **C**.*	*Letras latinas minúsculas Por exemplo: **r**, **s**, t.*	*Letras gregas minúsculas Por exemplo: α, β, γ*
LINGUAGEM DA FIGURA	***A .***	***r*** 	 α

Postulados ou Axiomas

Os postulados ou axiomas são proposições (afirmações) aceitas como verdadeiras, sem prova ou demonstração, apenas pela experiência ou observação.

***Problema1**: Dada a figura, responda as perguntas abaixo.*



1) Quais (dentre os pontos A,B,C,D,E,F) pertencem a reta r ?...............................

2) Quais pontos não pertencem a reta r ? ....

3) Você pode marcar mais pontos sobre a reta r ?..

4) Existem pontos da reta r entre A e B ?..

5) Quantos pontos existem na reta r ? ....

6) Quantos pontos existem fora da reta r?..

7)Quantos pontos existem no plano que contem esta folha de papel?.....................

8) Quantos pontos existem fora do plano que contem esta folha de papel?.............

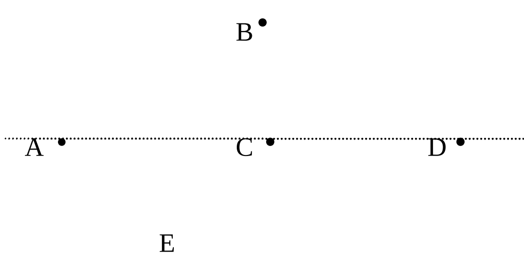
Atividade 2

O objetivo dessa atividade foi apresentar ao aluno seis postulados, que o ajudassem a conceituar reta e plano em sintonia com suas relações. Esta etapa serviria de base para introduzirmos posteriormente as definições de alguns objetos matemáticos.

Apresentamos figuras e algumas perguntas que visavam favorecer a compreensão de alguns postulados. Dessa forma, procuramos explorar a introdução dos postulados, através de questionamentos que levassem o aluno a refletir, discutir e relacionar o ponto, reta e plano.

POSTULADO DA EXISTÊNCIA
1. *Numa reta, bem como fora dela, existem infinitos pontos.* 2. *Entre dois pontos de uma reta existe pelo menos outro ponto dessa reta.* 3. *Num plano, bem como fora dele, existem infinitos pontos.*

Dada a figura



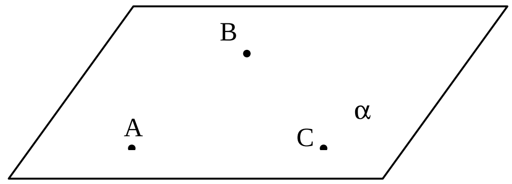
9) Represente a reta que passa por A e B?
...
10) Quantas retas distintas passam por A e C?
...
11) A,B e C pertencem a mesma reta (são colineares)?
...
12) A,C e D são colineares?..................................

13) Dois pontos são sempre colineares?...............

14) Três pontos são sempre colineares?...............

POSTULADO DA DETERMINAÇÃO
4. *Dois pontos determinam uma única reta que os contêm.* 5. *Três pontos não colineares (não da mesma reta) determinam um único plano.*

Dada a figura



Responda às seguintes questões:

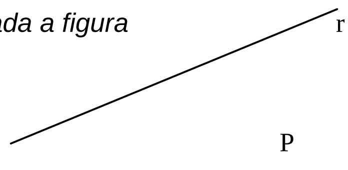
15) Os pontos A e B pertencem ao plano α?...........................

16) A reta determinada por A e B pertence ao plano α?..........

.

POSTULADO DA PERTINÊNCIA
6. A reta que passa por dois pontos distintos, pertencentes a um plano, também está contida nesse plano.

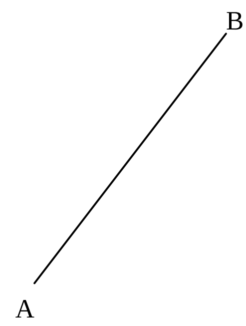
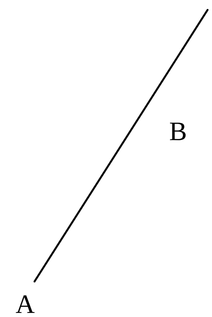
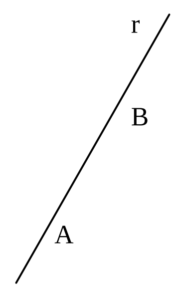
Dada a figura



17) Quantas retas passam por P?
..
18) Quantas retas que passam por P são paralelas a r?..
..

POSTULADO DE EUCLIDES
7. Por um ponto P, não pertencente a uma reta r, passa uma única reta paralela a essa reta r dada.

Embora soubéssemos que esses alunos já haviam trabalhado (nas aulas de geometria e desenho geométrico) com as notações de segmentos de reta e retas suporte, julgamos importante reforçar, para estabelecer a notação que seguiríamos no resto da seqüência.

LINGUAGEM NATURAL	*Segmento de reta de extremidades A e B*	*Semi-reta de origem A, que contem B*	*Reta r suporte do segmento* $\overline{AB}$
LINGUAGEM ALGÉBRICA	$\overline{AB}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overleftrightarrow{AB} = r$
LINGUAGEM DA FIGURA			

Usaremos a notação AB quando nos referirmos à medida do segmento de reta $\overline{AB}$.

Atividade 3

Segundo nossas hipóteses de pesquisa, devíamos apresentar aos alunos as ferramentas que seriam usadas na *demonstração.*

O objetivo desta atividade era apresentar a noção de teorema e seu estatuto. Devíamos propor aos alunos situações-problema que lhes permitisse reconhecer: as hipóteses e a conclusão do teorema e os registros de representação (nas linguagens natural, algébrica e da figura).

Apresentamos o conceito de teorema e seu estatuto, como abaixo:

Teorema:
É uma proposição só aceita mediante demonstração. Compõe-se de duas partes:

- ***Hipóteses****: dados conhecidos*
- ***Conclusão****: o que se deseja provar*

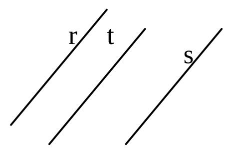
Todo teorema pode ser escrito na ***forma condicional****:*
"Se [hipóteses] então [conclusão]."

***P**odemos registrar as hipóteses e a conclusão na linguagem natural e/ou na linguagem matemática e/ ou na linguagem da figura.*

***Exemplo**:*

***Teorema**: Duas retas paralelas a uma terceira são paralelas entre si.*

Na forma condicional "Se duas retas são paralelas a uma terceira, então, elas são paralelas entre si."

	Hipóteses	*Conclusão*
LINGUAGEM NATURAL	*r é paralela a t e s é paralela a t*	*r é paralela a s*
LINGUAGEM ALGËBRICA	*r//t e s//t*	*r//s*
LINGUAGEM DA FIGURA		

***Problema 2**: Dado o teorema, determine sua forma condicional. Posteriormente, preencha a tabela identificando as hipóteses e a conclusão, usando os três registros: o da linguagem natural, o da linguagem matemática(algébrica) e o da linguagem registrada pela figura.*

***Teorema 1**: Duas retas perpendiculares a uma terceira são paralelas entre si.*

Forma condicional:..

	Hipóteses	*Conclusão*
LINGUAGEM NATURAL		
LINGUAGEM ALGËBRICA		
LINGUAGEM DA FIGURA		

6.1.3 – ANÁLISE *A PRIORi*

Atividade 1

Esperava-se que o aluno acertasse o problema 1, usando as seguintes respostas:

1) A,B,C e D
2) F e E
3) Sim
4) Infinitos
5) Infinitos
6) Sim
7) Infinitos
8) Infinitos

Era possível que o aluno optasse, de forma incorreta, pelos determinados itens nas seguintes respostas:

4) Existem na reta 4 pontos.
5) existem 2 pontos fora da reta
6) Não existe ponto entre A e B
7) Existem 6 pontos
8) Nenhum

Provavelmente o aluno tomaria essa decisão usando somente pelos pontos que são nomeados na figura, não conseguiria abstrair o infinito numa figura limitada, devido ao obstáculo epistemológico de infinito. Não se apropriando do conceito de ponto, reta e plano.

Atividade 2

O aluno deveria chegar ao sucesso com as seguintes respostas nos itens abaixo:

9)Uma única reta
10) uma única reta
11) Não são colineares
12) Sim são colineares
13) Sim são sempre colineares
14) Não são sempre colineares
15) Sim A e B pertencem ao plano α
16) Sim
17) Infinitas retas passam por P
18) Uma única reta passa por P e é paralela a r

O aluno poderia tomar decisões inadequadas, ao responder:

9) "Infinitas retas". (Provavelmente o aluno teria considerado todas as retas que passam por **A** e todas as que passam por **B**, não observando as condições exigidas na pergunta.)

10) "Infinitas". (Deve ter considerado as retas passando por A ou as retas passando por B.)

14) “Sim”. (Provavelmente generalizou a resposta a partir do item 12.)

16) “Não.” (Provavelmente o aluno não entendeu que a reta, sendo infinita, esta contida em um paralelogramo. Pois a figura geométrica representante do plano é um obstáculo didático ao entendimento do seu conceito.)

Ao término desta atividade deveríamos fazer uma avaliação oral, para estabelecer o estatuto dos postulados e minimizar os efeitos de eventuais dificuldades conceituais.

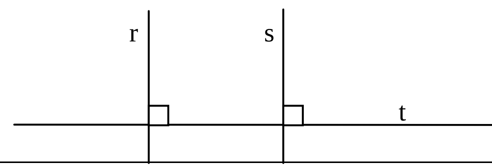
Atividade 3

Provavelmente o aluno não compreenderia, na primeira leitura, a noção de teorema e o seu estatuto. O pesquisador deveria intervir esclarecendo o estatuto de teorema, orientando sobre a forma condicional que organiza logicamente o enunciado da proposição. Evidenciando a importância da identificação das hipóteses e da conclusão, explicando a tabela que separa hipóteses da conclusão e os registros nas três linguagens (natural, algébrica e figural) .Sob nosso ponto de vista o professor deveria orientar o aluno a fazer os registros na ordem linguagem natural, figural e, por último, linguagem algébrica, pois, nomeando os entes matemáticos na figura encontraria facilidade em organizar a escrita matemática.

O aluno deveria chegar ao sucesso com a seguinte solução:

Teorema 1:

*Forma condicional: **Se** duas retas são perpendiculares a uma terceira **então** elas são paralelas entre si.*

	Hipóteses	*Conclusão*
LINGUAGEM NATURAL	*A reta r é perpendicular a t e a reta s é perpendicular a t*	*As retas r e s são paralelas entre si*
LINGUAGEM ALGËBRICA	$r \perp t$ *e* $s \perp t$	$r // s$
LINGUAGEM DA FIGURA		

Esperávamos que os alunos não respondessem adequadamente, se não compreendessem o enunciado do teorema e as mudanças de registros de representação nas várias linguagens.

Os alunos podem apresentar dificuldades em estabelecer a relação entre as informações de forma correta, devido a troca das hipóteses com a conclusão. Essa decisão pode ocorrer pela influência da palavra na qual os alunos centrassem sua atenção na leitura, por ser a última informação a ser lida no enunciado. Pode ocorrer também inversão na hierarquia estabelecida pelo estatuto de teorema, isto é, troca das hipóteses com a conclusão. Em decorrência dessa decisão os alunos errariam as mudanças do registro de representação.

Uma avaliação oral dos conhecimentos adquiridos sobre o estatuto de teorema ao final dessa atividade, colabora com a superação das dificuldades encontradas e ajuda na coordenação das informações envolvidas.

6.1.4 - RELATO DE APLICAÇÃO DA SESSÃO 1

Atividade 1

Após a leitura, em dupla, da **Introdução histórica**, os alunos questionaram sobre o não entendimento do significado das palavras *compilação*, *entes primitivos* e a dificuldade de entendimento global do texto.

Debatemos as decisões, no final da atividade 1. Houve a necessidade da intervenção da pesquisadora para o esclarecimento do texto. Relatamos aos alunos que Euclides intuiu a decomposição do espaço (do espaço ao elemento mais simples: o ponto) e chegou aos entes geométricos primitivos que não são definidos, porém são conhecidos por suas propriedades. Em síntese, Euclides elaborou sua teoria no sentido inverso, ou seja, da composição do espaço (do elemento mais simples o ponto ao mais amplo o espaço).

Os alunos não demonstraram conhecer que reta e plano são compostos por infinitos pontos. Provavelmente, por influência da figura que apresentava registro de quatro pontos sobre a reta e dois fora dela. Isto pode ter induzido o aluno a responder que na reta só existiam quatro pontos, fora dela dois e que no plano do papel só existiam 6 pontos. Para que as dificuldades fossem superadas, pedimos que os alunos observassem com atenção as orientações do postulado da existência. Aproveitamos para explicar o quadro com os registros de representação (linguagem natural, algébrica e da figura), como foi previsto.

Atividade 2

Na apresentação dos postulados, observamos as seguintes respostas

Na pergunta 10) *“Quantas retas passam pelos pontos A e C?” Três duplas responderam infinitas.* (Acreditamos que tenham respondido observando as infinitas retas que passam por A unidas as infinitas retas que passam por B).

Na pergunta 17) *“Quantas retas passam por P?” Duas duplas responderam “nenhuma”.* (Acreditamos que tenham respondido usando somente apreensão perceptiva).

Na pergunta 18) *“Quantas retas que passam por P são paralelas a r”? Uma dupla respondeu nenhuma. (* Observamos a resposta de acordo com o que o aluno “vê”, evidenciada na figura).

Fizemos um debate oral das respostas e sua correção, reforçando que as imagens visuais determinam respostas imediatas que, em muitas situações, não estão de acordo com os postulados, levando o aluno ao erro na sua decisão.

Atividade 3

Na resolução do problema 2 houve bastante debate entre as duplas para a tomada de decisão. Três duplas trocaram o registro de perpendicularismo com o de paralelismo, nas linguagens matemática e figural; uma dupla não conseguiu identificar a conclusão. Segundo DUVAL, para que ocorra um significativo aprendizado na Matemática, é necessário que a noésis (conceituação) ocorra através de significativas semiósis (representações), ou seja, quanto maior mobilidade o sujeito tiver com registros diferentes do mesmo objeto matemático, maior possibilidade desse sujeito fazer a apreensão do objeto.

Algumas perguntas feitas pelos alunos:

“O que são hipóteses e conclusão?’

“*O que são retas perpendiculares?”*

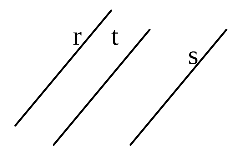
“Como representar retas perpendiculares?”

“Como representar retas paralelas?”

Fizemos a correção utilizando o quadro negro, reforçamos a noção de teorema, formado por dados conhecidos(hipóteses) e a conclusão. Observamos que duas retas são chamadas de retas perpendiculares quando se interceptam, formando ângulos de 90º (pedimos que um aluno fizesse uma figura no quadro exemplificando retas perpendiculares) e apresentamos seu registro algébrico. Também no quadro, pedimos a um aluno que fizesse o registro algébrico das retas paralelas.

Procuramos exibir as justificativas das respostas durante as correções das tarefas.

Três duplas completaram o problema 2 do seguinte modo**:**

	Hipóteses	*Conclusão*
LINGUAGEM NATURAL	*r e s perpendiculares a uma terceira*	*r é paralela a s*
LINGUAGEM ALGÉBRICA	*r//t e s//t*	*r//s*
LINGUAGEM DA FIGURA		

Não foi previsto esse tipo de dificuldade. Fizemos um debate oral sobre as respostas. Indagamos quais eram as respostas dadas pelos alunos, chamamos atenção as hipóteses e a conclusão, observamos que não podíamos abandonar os dados da hipóteses e nem incluir hipóteses suplementares.

6.2 - SESSÃO 2

A sessão 2 é desenvolvida na seguinte seqüência:

- Apresentação do estatuto da definição e seis definições (com as figuras geométricas associadas).
- Apresentação de sete propriedades geométricas com as figuras associadas).
- Apresentação de três problemas que questionam a forma condicional de uma propriedade, o reconhecimento de hipóteses e conclusão e as mudanças do registro de representação.

6.2.1 – APLICAÇÃO DA SESSÃO 2

Um aluno estava ausente, assim um deles trabalhou sozinho.

Sempre que faziam algum questionamento sobre as atividades, antes de interferir na decisão do aluno sugeríamos que relessem o texto antes de resolver o exercício.

O último problema foi resolvido em conjunto por todos os alunos, no quadro, com a orientação do professor pesquisador, pois necessitávamos de 15 minutos para as discussões e fecho da sessão.

As figuras das tarefas foram feitas no quadro por alunos voluntários.

6.2.2 – CONTEÚDO

Atividade 1

Em nossas hipóteses de pesquisa, a técnica da demonstração está associada a uma hierarquia de tarefas que se inicia com o reconhecimento do estatuto das definições postulados e teoremas. Segundo os passos que organizamos para nossa seqüência didática (v. p. 78), devemos orientar o aluno a conhecer as ferramentas que são usadas na demonstração. E essas ferramentas devem ser apresentadas nos três registros de representação.

As mudanças da linguagem natural para a linguagem algébrica e para a linguagem da figura ajudarão o aluno a compreender o estatuto da figura e sua visualização.

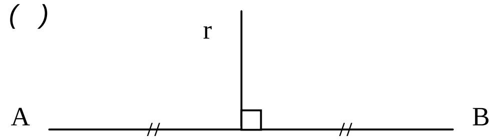
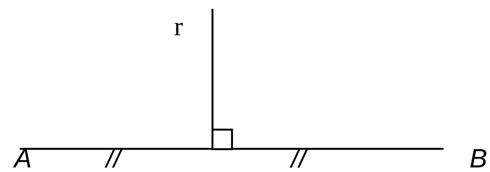
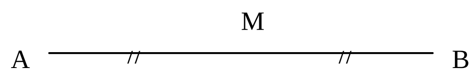
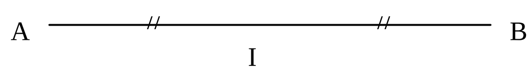
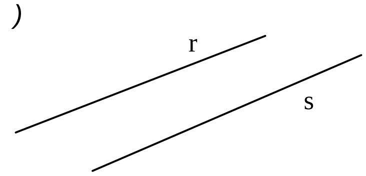
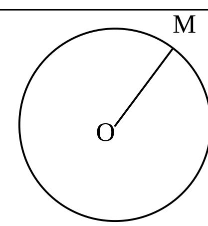
Com o objetivo de apresentar o estatuto da definição e as definições de alguns objetos matemáticos, organizamos a seguinte tarefa, pois precisamos organizar as ferramentas para as demonstrações:

Leia atentamente o texto e complete, o itens pedidos nos quadros.

Definição: Enuncia os atributos essenciais e específicos de um ente, de modo que o torne inconfundível com outro (precisamos definir cuidadosamente os conceitos utilizados em geometria para podermos toma-los como base para nosso raciocínio).

***Teoremas**: São proposições verdadeiras aceitas pela comunidade dos matemáticos, mediante uma demonstração.*

Problema 1**: Associar uma figura geométrica a cada* ***definição.

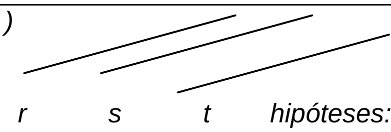
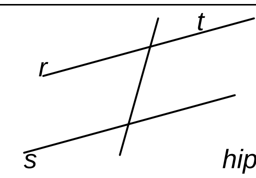
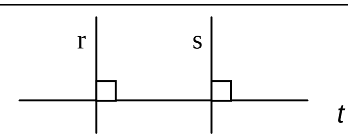
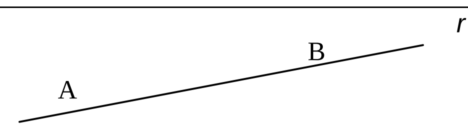
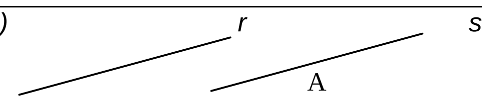
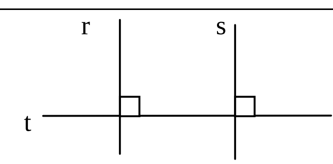
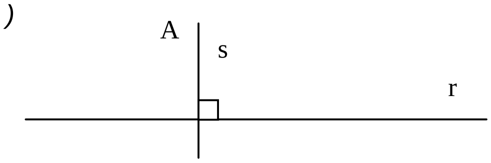
*(1) Definição de duas **retas paralelas**:* *Duas retas são paralelas se não possuem ponto comum ou se são coincidentes.*	( ) 
*(2) Definição de **ponto médio de um segmento de reta:*** *O ponto M é ponto médio de um segmento se pertencer ao segmento e se for eqüidistante às suas extremidades.*	( ) 
*(3) Definição de **mediatriz de um segmento de reta:*** *A mediatriz de um segmento é a reta perpendicular a esse segmento que passa por seu ponto médio.*	( ) 
*(4) Definição de um **círculo:*** *O círculo de centro O e raio r é o conjunto dos pontos M do plano tais que OM= r.*	( ) 
(5) Definição: *Dois pontos **A e B são simétricos em relação a um ponto I** se I for ponto médio do segmento* $\overline{AB}$.	( ) 
(6) Definição: *Dois pontos **A e B são simétricos em relação a uma reta r** se r for mediatriz do segmento* $\overline{AB}$.	( ) 

É pertinente observar que os segmentos de reta oriundos de retas suportes paralelas , também são paralelos.

No processo de aquisição dos conhecimentos que levem o aluno a técnica da demonstração está o reconhecimento do estatuto de teorema, associado a compreensão de que a figura é uma âncora para as hipóteses. Com esses objetivos organizamos o problema 2.

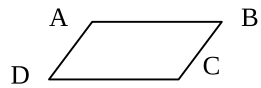
Atividade 2

- *Circule as hipóteses e sublinhe as conclusões*
- *Associe a cada propriedade a figura correspondente.*

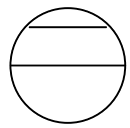
Teorema ou Postulado:	*Figura geométrica :*
(1) *Por dois pontos distintos A e B passa uma única reta.*	*( )*  *hipóteses: r//t e s//t*
(2) *Dada uma reta r e um ponto A, existe uma única reta paralela a r que passa por A.*	*( )*  *hipótese: r//s*
(3) *Duas retas paralelas a uma terceira são paralelas entre si.*	*( )*  *hipótese: r//s*
(4) *Se duas retas são paralelas, então, toda secante a uma é secante a outra.*	*( )*  *hipótese: dados dois pontos A e B*
(5) *Dada uma reta r e um ponto A , existe uma única reta s perpendicular a r passando por A.*	*( )*  *hipóteses: dados a reta r e o ponto A*
(6) *Se duas retas são paralelas, então, toda reta perpendicular a uma é perpendicular a outra.*	*( )*  *hipóteses : r ⊥ t, s ⊥ t*
(7) *Se duas retas são perpendiculares a uma terceira, então, são paralelas entre si.*	*( )*  *hipóteses: dados a reta r e o ponto A*

Leia com Atenção:

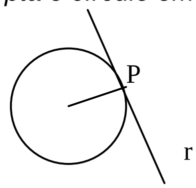
Paralelogramo *ABCD é um quadrilátero convexo cujos lados opostos são paralelos.*



Corda *é um segmento que une dois pontos do círculo e* ***diâmetro*** *é uma corda que passa pelo centro do círculo.*



Reta tangente *ao círculo é uma reta que intercepta o círculo em apenas um ponto.*



Propriedade*: A tangente ao círculo é perpendicular ao raio pelo ponto de tangência.*

Atividade 3

Segundo nossas hipóteses de pesquisa, para introduzirmos a técnica da *demonstração*, devemos orientar os alunos a reconhecerem o estatuto de teorema e os registros de representação, coordenar os registros de representação e compreender o estatuto da figura.

Esta atividade proporciona um momento adequado para o professor orientar para a distinção entre desenho e figura geométrica (cf. Fundamentação Teórica). Das pesquisas de DUVAL, temos a seguinte orientação:

- Desenho é o traçado sobre o suporte material;
- Figura geométrica é a classe de todos os desenhos possíveis do objeto matemático.

Os alunos devem observar que os desenhos feitos por eles são distintos uns dos outros, visto que não demos uma orientação prévia a respeito das medidas. Porém, as hipóteses, bem como, as propriedades geométricas devem ser respeitadas por todos os desenhos. Em conseqüência, essa classe de todos os desenhos com esses requisitos recebera a designação de figura geométrica.

Organizamos a seguinte atividade: apresentamos três propriedades, e pedimos que os alunos, os rescrevessem na forma condicional e preenchessem uma tabela para cada propriedade, com as seguintes indicações:

- Nas linhas: linguagem natural, linguagem algébrica e linguagem da figura.
- Nas colunas: hipóteses e conclusões.

Propriedade 1: *A reta que passa pelos pontos médios de dois lados opostos de um paralelogramo é paralela aos outros dois lados.*

Propriedade 2*: ABCD e CDEF são paralelogramos (suponhamos A, B, E e F não alinhados). Então ABFE é um paralelogramo.*

Propriedade 3: *Seja um círculo de diâmetro* $\overline{AB}$. *Então as retas tangentes ao círculo em A e B são paralelas.*

Tabela oferecida ao aluno para preenchimento

	Hipóteses	*Conclusão*
Linguagem natural		
Linguagem algébrica		
Linguagem da figura		

Pretende-se com essa atividade, orientar os alunos a uma compreensão da situação através da coleta de informações (identificação das hipóteses e conclusão) e sua organização (coordenação nos vários registros de representação). Estamos assim, em ressonância com DUVAL que considera a coordenação de vários registros de representação necessária para a compreensão conceitual.

6.2.3 – ANÁLISE *A PRIORI*

Atividade 1

Nossa intenção nessa atividade é favorecer a abordagem dos conceitos, através de uma leitura mais atenta das definições dos objetos associadas a sua visualização, isto é, que ele se atente para os atributos essenciais e específicos dos objetos matemáticos.

Sendo assim, espera-se que o aluno não apresente dificuldades e com brevidade organize a associação entre a definição e a figura do objeto matemático, apresentando a seguinte decisão:

" (6), (3), (2), (5), (1) e (4)."

Atividade 2

Espera-se que o aluno não apresente dificuldades em identificar as hipóteses e as conclusões e associe corretamente com as figuras geométricas de acordo com a seqüência:

"(3), (4), (6), (1), (2), (7) e (5)."

Contudo, podem ocorrer algumas dificuldades no desenvolvimento do exercício se o aluno não considerar as hipóteses que estão junto com as figuras em sua tomada de decisão. Deve ocorrer assim o erro com as inversões dos itens (7) e (6).

O item "circule as hipóteses e sublinhe as conclusões", deve levar a uma leitura mais atenta das propriedades. Os alunos devem chegar ao sucesso com as seguintes decisões.

(1) Circulando: "Por dois pontos distintos A e B" e sublinhando: "passa uma única reta".

(2) Circulando: "Dada uma reta e um ponto A" e sublinhando: "existe uma única reta paralela a r que passa por A".

(3) Circulando: "Duas retas paralelas a uma terceira" e sublinhando: "são paralelas entre si".

(4) Circulando: "Se duas retas são paralelas" e sublinhando: "então toda reta que intercepta uma, intercepta a outra".

(5) Circulando: "Dada uma reta r e um ponto A" e sublinhando: "existe uma única reta s perpendicular a r passando por A".

(6) Circulando: "Se duas retas são paralelas" e sublinhando: "então, toda reta perpendicular a uma é perpendicular a outra".

(7) Circulando: "Se duas retas são perpendiculares a uma terceira" e sublinhando: "então, são paralelas entre si".

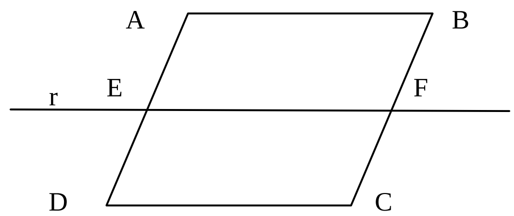
Associada a figura geométrica apresentamos as hipóteses na linguagem algébrica, no caso de figuras iguais o aluno deveria recorrer as hipóteses para identificar o item correto.

Atividade 3

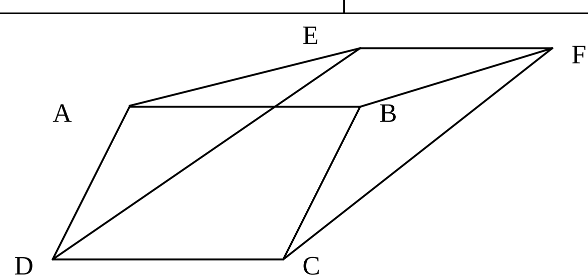
Para desenvolver habilidades no reconhecimento do estatuto do teorema e nas mudanças do registro de representação diferentes situações devem ser apresentadas. É nossa intenção, com essa atividade, contribuir no sentido do aluno estabelecer o estatuto do teorema: o aluno deve identificar hipóteses e conclusões de propriedades apresentadas nos três registros de representação (linguagem natural, algébrica e da figura).

Espera-se que os alunos cheguem ao sucesso, com as seguintes respostas:

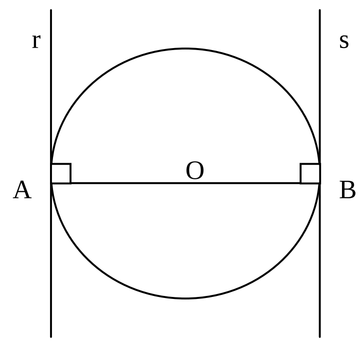
Forma condicional da <u>propriedade 1</u>: Se r é a reta que passa pelos pontos médios de dois lados opostos de um paralelogramo, então, ela é paralela aos outros dois lados.

	Hipóteses	*Conclusão*
LINGUAGEM NATURAL	*ABCD é um paralelogramo* *E, F são pontos médios de lados opostos e* $r = \overleftrightarrow{EF}$	*r é paralela aos outros dois lados opostos*
LINGUAGEM ALGÉBRICA	*ABCD é um paralelogramo* *AE=ED , BF=FC e* $r = \overleftrightarrow{EF}$	$r \,//\, \overline{AB}$ e $r \,//\, \overline{DC}$
LINGUAGEM DA FIGURA		

Forma condicional da propriedade 2: Se ABCD e CDEF são paralelogramos e A., B, E e F não estão alinhados, então, ABFE é um paralelogramo.

	Hipóteses	*Conclusão*
LINGUAGEM NATURAL	*ABCD é paralelogramo,* *CDEF é paralelogramo* *A,B,E e F não estão alinhados*	*ABFE é paralelogramo*
LINGUAGEM ALGÉBRICA	*ABCD é paralelogramo,* *CDEF é paralelogramo* *A,B,E e F não estão alinhados*	$\overline{AB} \,//\, \overline{FE}$ e $\overline{FB} \,//\, \overline{AE}$
LINGUAGEM DA FIGURA		

Forma condicional da <u>propriedade 3</u>: Se temos um círculo de diâmetro $\overline{AB}$, então, as retas tangentes a este círculo em A e em B são paralelas.

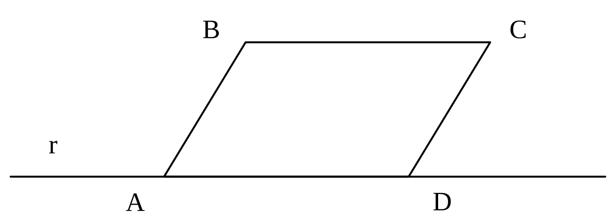
	Hipóteses	*Conclusão*
LINGUAGEM NATURAL	*Círculo de diâmetro* $\overline{AB}$ *r é tangente ao círculo em B*	*r é paralela a s*
LINGUAGEM ÁLGÉBRICA	$\overline{AB}$ *diâmetro do círculo* $r \perp \overline{AB}$ e $s \perp \overline{AB}$	$r // s$
LINGUAGEM DA FIGURA		

O aluno pode chegar a decisões erradas:

Se utilizarem parte das hipóteses, nesta situação, deve determinar a seguinte forma condicional para o teorema 1:

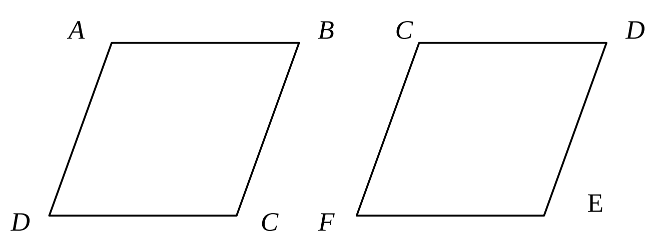
"Se a reta passa pelos lados opostos de um paralelogramo, então ela é paralela aos dois lados".

Esse erro pode determinar o seguinte quadro:

	Hipóteses	*Conclusão*
LINGUAGEM NATURAL	*Se a reta passa pelos lados opostos de um paralelogramo*	*Então ela é paralela aos dois lados*
LINGUAGEM ALGÉBRICA	$r = \overleftrightarrow{AD}$	$r // \overline{BC}$
LINGUAGEM DA FIGURA		

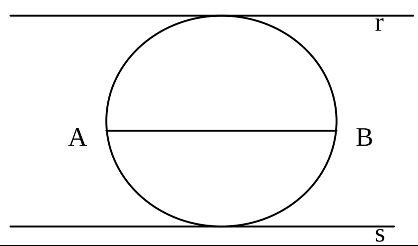
Prevemos o fracasso no preenchimento do quadro para o teorema 2, em relação ao registro na linguagem da figura, fazendo dois paralelogramos separados, devido ao obstáculo (no sentido de DUVAL) da sobreposição dos paralelogramos. Segundo DUVAL (1988), há uma certa resistência em fazer figuras sobrepostas, pois a apreensão perceptiva segue a “*lei do fecho*” que enuncia *“Quando diferentes linhas formam um contorno simples e fechado ela se separa como uma figura sobre o fundo”.*

No registro da linguagem algébrica é possível que o aluno considere o paralelogramo com somente um par de lados paralelos.

	Hipóteses	*Conclusão*
LINGUAGEM NATURAL	*ABCD é paralelogramo* *CDEF é paralelogramo*	*ABFE é paralelogramo*
LINGUAGEM ALGÉBRICA	*ABCD é paralelogramo* *CDEF é paralelogramo*	$\overline{AB} // \overline{EF}$
LINGUAGEM DA FIGURA		

É previsível que na propriedade 3, o aluno chegue ao fracasso devido a não utilização da definição de círculo e de reta tangente. Deste modo, pode acontecer que o aluno não use a propriedade: *“Se uma reta é tangente ao círculo, então, ela é perpendicular ao raio”.* Portanto, levado pela influência da palavra *“paralelas”,* o aluno pode tomar a decisão de traçar retas paralelas ao diâmetro da circunferência.

Provavelmente, Preencherá a tabela do seguinte modo

	Hipóteses	*Conclusão*
LINGUAGEM NATURAL	*Seja um círculo de diâmetro* $\overline{AB}$ *r e s tangentes ao círculo*	*r é paralela a s*
LINGUAGEM ALGÉBRICA	*Seja um círculo de diâmetro* $\overline{AB}$	*r//s*
LINGUAGEM DA FIGURA		

6.2.4 – RELATO DA APLICAÇÃO DA SESSÃO 2

No final dessa sessão fizemos um debate sobre as decisões dos alunos e a correção. Destacamos no debate a distinção entre o estatuto da definição e do teorema, vistos nas atividades 1 e 2.

Decisões referentes à atividade 3:

Constatamos que os alunos conseguiram resolver parcialmente os exercícios, pois já reconhecem as hipóteses e a conclusão na linguagem natural. Não tiveram dificuldades em escrever a propriedade na forma condicional, entretanto, houve a necessidade da interferência do professor pesquisador, no registro da linguagem figural e sua conversão para a linguagem algébrica.

Na linguagem da figura, no preenchimento do quadro referente a propriedade 2, observamos que quatro duplas decidiram por dois paralelogramos separados na linguagem da figura, conforme nossa previsão.

As dificuldades em transitar entre os registros de representação foram apontadas no registro da linguagem da figura e sua conversão à linguagem algébrica.

De modo análogo às atividades da sessão 2, não houve dificuldades em rescrever as propriedades na forma condicional. Entretanto, surgiram respostas errôneas quanto ao preenchimento dos quadros como foi previsto na análise *a priori*, observamos que somente dois alunos conseguiram desenvolver a figura corretamente. Foi necessário assisti-los no preenchimento do quadro, executando-se a resolução no quadro negro, em conjunto com todos os alunos.

Conclusão

Julgamos que os alunos compreenderam o estatuto de definição e de teorema e conseguiram reconhecer hipóteses e conclusão.

A maior dificuldade observada foi a mudança de registro da linguagem da figura para a linguagem algébrica.

Deveríamos trabalhar somente dois teoremas nessa última etapa do encontro 2, a fim de que houvesse mais tempo para debates entre as duplas.

6.3– SESSÃO 3

A sessão é desenvolvida na seguinte seqüência:

- Introdução do conceito de teorema recíproco.
- Apresentação aos alunos das ferramentas usadas para demonstrar. A caixa de ferramentas é constituída de definições e propriedades necessárias e suficientes para a composição do esquema da demonstração.
- Apresentação de um esquema de demonstração em forma de rede, com o objetivo de levar o aluno a coordenar o uso das hipóteses, da figura geométrica e das ferramentas adequadas à lógica do esquema.

- Redação da demonstração: o aluno deve completar a redação da demonstração a partir do esquema.

6.3.1 – APLICAÇÃO DA SESSÃO 3

Um aluno do grupo estava ausente, por isso um deles trabalhou sozinho.

Constatou-se que um aluno participou pela primeira vez do projeto, procurou-se dar mais atenção a este aluno.

Houve bastante discussão nas duplas para as tomadas de decisão. Os alunos requisitaram o professor pesquisador por apresentarem dificuldades em organizar as conversões de registros e esboçar as figuras geométricas das atividades propostas.

6.3.2 – CONTEÚDO

Atividade 1

Iniciamos esta atividade apresentando o teorema recíproco, através de problemas, a partir da introdução a seguir:

<u>Teoremas são afirmações que devem ser demonstradas</u>*. Um teorema tem duas partes, as hipóteses e a conclusão. A hipótese é aquilo que aceitamos ou supomos. A conclusão é aquilo que queremos provar.*

<u>Dois teoremas são recíprocos quando a hipótese e a conclusão são trocados,</u> *respectivamente, pela conclusão e a hipótese do outro.*

<u>Problema 1:</u>

Teorema: Se um triângulo é isósceles então possui dois ângulos congruentes.

Hipótese	*Conclusão*
....	....

As hipóteses e a conclusão do teorema recíproco são

Hipótese	*Conclusão*
....	....

O Teorema recíproco

é...

O recíproco de um teorema não é necessariamente verdadeiro.

Para justificarmos que o recíproco não é verdadeiro devemos dar um contra-exemplo , isto é, um exemplo que mostra que o recíproco é falso.

***Problema 2*:**

1) Circule a hipótese e sublinhe a conclusão do teorema abaixo.

Se dois ângulos são opostos pelo vértice então são congruentes.

2) O recíproco deste teorema é verdadeiro ou falso ? Justifique sua resposta.

Atividade 2

Apresentamos um texto argumentativo sobre a demonstração. Como fonte de informação para a resolução dos problemas 3 e 4.

O que é demonstrar?

É provar um enunciado matemático. Essa prova deve ser aceita por uma comunidade de matemáticos.

Por que demonstrar ?

A demonstração explica, esclarece e convence a verdade de uma proposição matemática.

Como demonstrar ?

- *Em matemática para fazermos demonstrações utilizamos as **definições** e as **propriedades** já conhecidas que são as **ferramentas** para demonstrar. Para facilitar as nossas demonstrações esses instrumentos foram reunidos numa **caixa de ferramentas**, devemos conhecê-los e saber empregá-los.*

- *Demonstramos usando uma **sequência de enunciados organizados conforme regras determinadas.***

- *Podemos demostrar um teorema usando o método direto, isto é **partindo das hipótese chegamos na conclusão.***

Problema 3: Demonstre o teorema, abaixo:

"Se dois ângulos são opostos pelo Vértice (o.p.v) então os ângulos são congruentes."

Hipóteses:...

Conclusão (ou tese):..

Palavras Chaves:

Dois ***ângulos*** *são chamados de* ***opostos pelo vértice*** *quando os lados de um são prolongamento dos lados do outro.*

Ângulos congruentes *são ângulos que possuem a mesma medida.*

Faça a figura relativa ao problema:

Caixa de Ferramentas para este problema:

Sendo que usaremos as letras ***D*** *para as definições a* ***P*** *para as propriedades.*

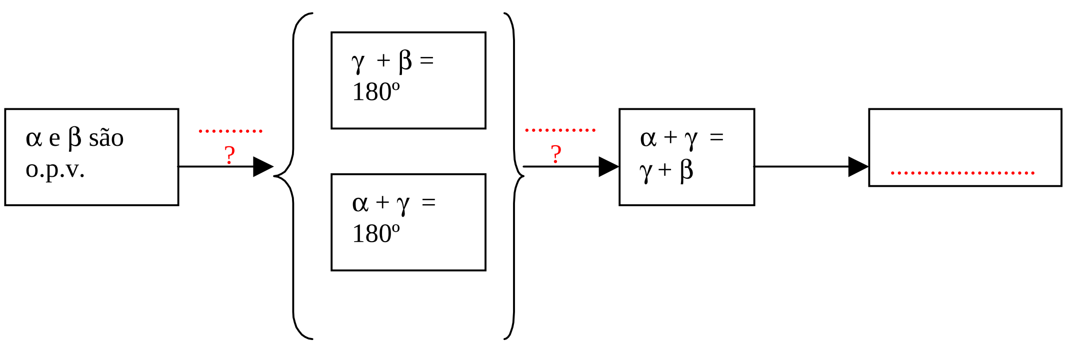
D *Dois ângulos são adjacentes e suplementares se possuírem um lado comum e se sua soma valer 180º.*

P *Propriedade transitiva da igualdade se a = b , b = c então a = c.*

Palavras chaves:

Ângulos adjacentes e suplementares *são ângulos que têm o mesmo vértice, um lado comum, não têm pontos internos comuns e somam 180º.*

Complete com D ou P, de acordo com a caixa de ferramentas, observando a figura que você fez.



Complete a redação da demonstração:

Sejam α e β, ângulos opostos pelo vértice, construídos pela interseção das retas r e s . A partir dessa interseção temos que o ângulo δ é adjacente e suplementar a α e β , portanto, $\alpha + \delta$= ....e $\beta + \delta$ = ...

Assim, pela propriedade...................................... .temos que.................... .... por isso,.. logo, α e β são ....

O problema 4,a seguir, envolve os conceitos de triângulo e suas alturas. Pretende-se levar o aluno a: identificar as hipóteses e a conclusão; reconhecer as ferramentas que devem completar o esquema de acordo com a figura e organizar a redação da demonstração de acordo com o esquema.

Problema 4: ***Demonstre que****:*

Se TIC e TAC são dois triângulos então as alturas em I e em A são paralelas.

a) ***Figura****: Desenhar os triângulos TIC e TAC (observando que os pontos T e C pertencem aos dois triângulos).*

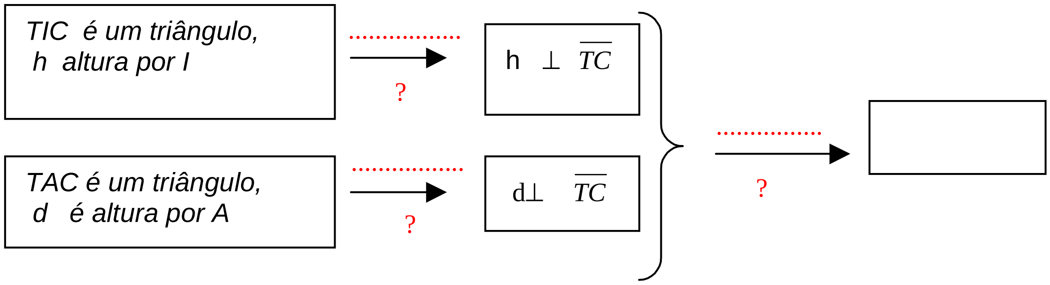
*b)****Completar***

Hipótese :	*Conclusão:*
....	....

Caixa de ferramentas para esse problema

D	*Altura de um triângulo é um segmento que está na reta perpendicular traçada de um vértice à reta suporte do lado oposto, cujas extremidades são o vértice e o ponto de interseção com essa reta.*
P	*Duas retas perpendiculares a uma terceira são paralelas entre si.*

c) Completar o esquema usando D ou P de acordo com a caixa de ferramentas o esquema da demonstração.



d) Numere de 1 a 7 de modo a obter a redação da demonstração

( ) Portanto, por definição de altura, h $\perp \overline{TC}$.
( )Por hipótese h é altura do triângulo TIC.
( ) Portanto, por definição de altura, d$\perp \overline{TC}$.
( ) Ainda por hipótese d é altura por A do triângulo TAC.
( ) Portanto, h //d.
( ) Assim, estamos nas hipóteses da propriedade: Se duas retas são perpendiculares a uma terceira então são paralelas entre si.
( ) Portanto, a altura em I do triângulo TIC é paralela a altura em A do triângulo TAC.

e) Faça a redação da demonstração

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

6.3.3 – ANÁLISE *A PRIORI*

É provável que alguns alunos cheguem ao sucesso, com as seguintes respostas:

Problema 1:

Teorema: Se um triângulo é isósceles, então, possui dois ângulos internos congruentes.

Hipótese	*Conclusão*
Um triângulo é isósceles	*Possui dois ângulos internos congruentes*

As hipóteses e a conclusão do teorema recíproco são

Hipótese	*Conclusão*
Dois ângulos internos, de um triângulo, são congruentes	*O triângulo é isósceles*

O Teorema recíproco é

"Se dois ângulos são congruentes, então, o triângulo é isósceles".

<u>Problema 2</u>:

1) Circule a hipótese e sublinhe a conclusão do teorema abaixo.

Circulando: "Se os ângulos são opostos pelo vértice" e ***sublinhando****: " então, são congruentes".*

2) O recíproco deste teorema é verdadeiro ou falso? Justifique sua resposta.

O recíproco é falso. Contra exemplo: Num triângulo isósceles dois ângulos são congruentes e não são opostos pelo vértice.

Prevemos que o aluno não terá dificuldades em resolver esse problema. Pois o aluno deve usar o exercício anterior como contra exemplo.

Iniciamos o aprendizado da técnica da demonstração com a demonstração do seguinte problema "*Se dois ângulos são opostos pelo vértice, então, são congruentes*" (**problema 3**). Esta proposição foi escolhida para iniciarmos o estudo da técnica da demonstração, pois ela esta presente em todos os livros didáticos que pesquisamos, bem como na proposta curricular e é utilizada como ferramenta em muitos exercícios nos livros didáticos.

Assim, prevemos que é um resultado conhecido pelos alunos. Porém, vamos levar em consideração outro *"cenário"*, aquele que centra sua atenção na *"validação dessa afirmação"*.

Os alunos devem esboçar a figura correspondente a proposição, para tal, o aluno deve representar retas que se interceptam, formando os lados dos ângulos. É possível que o aluno não faça de imediato a figura, pois no enunciado da proposição não são especificadas as retas. Assim, o aluno deve associar as concepções de ângulo e ângulo congruente. Provavelmente, o professor pesquisador necessitará iniciar uma discussão relacionada ao traçado da figura, levantando as concepções de ângulo (vértices e lado).

O professor pesquisador deve interferir estabelecendo o nome dos ângulos (objetos da figura) de acordo com o esquema da demonstração.

Apresentaremos uma caixa de ferramentas (com uma definição e uma propriedade) e um esquema de demonstração. O aluno deverá completar o esquema com as ferramentas adequadas.

Acredita-se que uma das dificuldades será a identificação das hipóteses da propriedade no esquema da demonstração, ou seja, se o aluno não substituir as hipóteses que são apresentadas na caixa de ferramentas por aquelas dadas no esquema, ele não efetuará a substituição na conclusão da propriedade.

É esperado que o aluno chegue ao sucesso com as seguintes decisões, no **problema 3**:

Hipóteses:...se dois ângulos são opostos pelo vértice
Conclusão (ou tese):.. então, os ângulos são congruentes

No esquema é provável que complete com D, P e $\alpha = \beta$, nos espaços indicados.

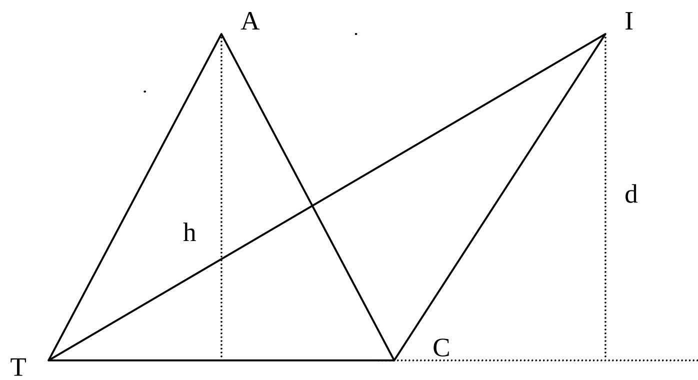
O aluno deve completar a redação da demonstração, do seguinte modo:

Sejam α e β, ângulos opostos pelo vértice, construídos pela interseção das retas r e s . A partir dessa interseção temos que o ângulo δ é adjacente e suplementar a α e β, portanto, $\alpha + \delta = 180º$ e $\beta + \delta = 180º$. Assim, pela propriedade transitiva temos que $\alpha + \delta = \beta + \delta$, por isso, $\alpha = \beta$, logo, α e β são congruentes.

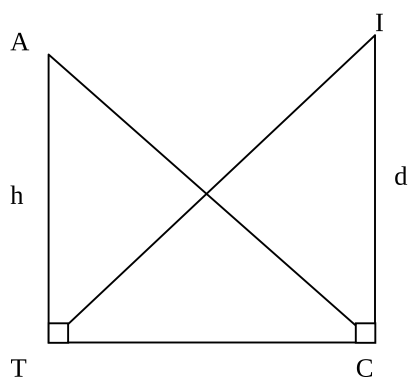
Apresentamos a seguir, a análise *a priori* do **problema 4** que envolve os conceitos de triângulo e sua altura.

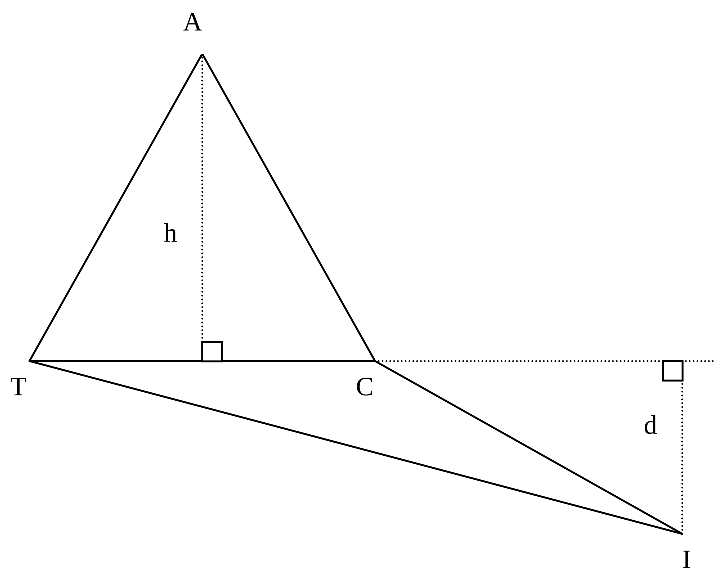
Pretendemos levar o aluno: a identificar as hipóteses e a conclusão; esboçar a figura geométrica do problema; reconhecer as ferramentas que devem completar o esquema de acordo com a figura e organizar a redação da demonstração.

É esperado que o aluno determine a figura geométrica:



Devemos observar aos alunos as várias possibilidades da figura pertinente ao problema, pois apesar de possuírem os desenhos distintos fazem parte da mesma classe das figuras geométricas pois satisfazem todas as hipóteses do problema. Outras figuras possíveis:





É pedido ao aluno que preencha o esquema da demonstração, com D ou P de acordo com a caixa de ferramentas, as hipóteses e a figura.

Investigando a figura, de acordo com a reconfiguração (operações interna ao registro da figura) e a centralização das suas atenções com meta na conclusão. O aluno deve passar dos triângulos para os segmentos de reta e observar que as hipóteses $h \perp \overline{TC}$ e $d \perp \overline{TC}$ serão as novas hipóteses da propriedade P assim, a conclusão deve estar de acordo com as hipóteses, na articulação dessa propriedade e provavelmente a decisão do aluno será h//d.

Provavelmente, o aluno fará a decisão correta ao completar o esquema da demonstração usando as ferramentas : D,D, P e concluindo que h//d.

De acordo com nossas hipóteses de pesquisas, a resolução de problemas de geometria e a forma de raciocínio exigem a distinção das apreensões da figura(perceptiva, operatória e discursiva).

Um dos objetivos do esquema da demonstração é enfatizar a distinção entre a apreensão perceptiva que é a interpretação das formas da figura e a apreensão discursiva que é a interpretação dos elementos da figura pois "mergulha" nas propriedades geométricas do objeto. A caixa de ferramentas auxilia na apreensão discursiva.

O aluno realizará sobre a figura a apreensão operatória, para a resolução do exercício, que é a operação fundamentada nas modificações possíveis da figura de partida e nas suas reorganizações perceptivas que essas modificações sugerem. O aluno deverá passar da dimensão dois dos triângulos para comparar as alturas que são segmentos de reta de dimensão um, essa mudança de dimensão necessária para a resolução do exercício nem sempre é evidente para o aluno, conforme DUVAL.

Ainda segundo nossas hipóteses de pesquisa, a administração de todas as informações, está associada à exploração total da figura. Essa associação ajudará na organização lógica do esquema da *demonstração* para chegar a conclusão .

Depois do preenchimento do esquema é pedido que o aluno organize as frases que se apresentam misturadas aleatoriamente, de modo a satisfazer esse esquema. Pois, segundo nossas hipóteses de pesquisa a redação da demonstração no registro da linguagem natural completa a administração geral das provas parciais.

Acreditamos que se o aluno entender o esquema da demonstração ele não encontrará dificuldades em ordenar as frases, do seguinte modo:

“(2), (1), (4), (3), (6), (5), (7)”

Por fim, pede-se ao aluno que organize a redação da demonstração a partir das frases que ele ordenou. O aluno deve fazer a seguinte redação da demonstração:

> *Por hipótese, seja h a altura do triângulo TIC por I, assim por definição de altura* $h \perp \overline{TC}$. *Ainda por hipótese, seja d a altura do triângulo TAC, assim por definição de altura* $d \perp \overline{TC}$.
>
> *Sendo* $h \perp \overline{TC}$ *e* $d \perp \overline{TC}$ *satisfaz-se as hipóteses do teorema que enuncia: Se duas retas são perpendiculares a uma terceira, então, são paralelas entre si. Portanto, a altura em I do triângulo TIC e a altura em A do triângulo TAC são paralelas.*

6.3.4 - RELATO DA APLICAÇÃO DA SESSÃO 3

Atividade 1

Os alunos não tiveram dificuldades em resolver os exercícios propostos. Entretanto, 3 duplas apresentaram dificuldades em compreender a noção de contra-exemplo. Justificamos que uma proposição em matemática é falsa sempre que existir um exemplo que satisfaça as hipóteses e não satisfaça a conclusão. Buscamos outros contra-exemplos. Que esboçamos o desenho no quadro:

1) No retângulo, dois ângulos internos consecutivos são congruentes (valem 90º) e não são opostos pelo vértice.
2) No triângulo isósceles, dois ângulos internos são congruentes e não são opostos pelo vértice.

Atividade 2

Problema 3

A primeira dificuldade foi: Como fazer a figura? (Porém, observamos que 3 duplas não apresentaram dificuldades).

De acordo com nossas hipóteses de pesquisa, devemos conduzir os alunos a compreenderem que a figura é uma âncora das hipóteses, e que ela ajudará a identificar os subproblemas e as ferramentas necessárias para resolvê-los, determinando a aquisição parcial da prova.

Solicitamos que um dos alunos fizesse a figura no quadro, e explicamos que para a obtenção dos ângulos opostos pelo vértice, necessitamos de duas retas concorrentes que não estavam explícitas nas hipóteses. Orientamos ainda que os ângulos poderiam ser nomeados de vários modos; mas, para poder acompanhar a seqüência do exercício, tínhamos que escolher de modo uniforme o nome dos ângulos.

Explicamos o que é “caixa de ferramentas” e as “ferramentas usadas nesse problema. Três duplas tiveram dificuldades em entender o significado do esquema da demonstração. Esclarecemos que o esquema tinha o objetivo de organizar o nosso raciocínio e a redação da demonstração seria a administração coordenada de todos os dados do problema, as definições e as propriedades geométricas envolvidas.

Duas duplas apresentaram dificuldades em compreender a utilização da propriedade transitiva, pois no esquema não se apresentavam as letras **a**, **b** e **c** de modo semelhante a caixa de ferramentas. Desse modo, eles não compreendiam a substituição da propriedade. Rescrevemos a propriedade transitiva no quadro separando hipóteses da conclusão, e procuramos levar o aluno a investigar com mais atenção a aplicação dessa ferramenta, do seguinte modo:

Essa substituição, não se apresentou tão evidente para esses alunos.

Propriedade	Hipóteses	Conclusão
Caixa de ferramentas	$a = b$, $c = b$	$a = c$
Esquema	$\gamma+\beta = 180^o$, $\alpha + \gamma = 180^o$	$\gamma+\beta = \alpha + \gamma$

Substituição

Problema 4

Observamos que quatro duplas representaram os triângulos separadamente, isto é, de forma errônea. Esse procedimento é justificado por DUVAL como uma dificuldade em se fazer figuras sobrepostas. Para propiciar a superação dessa dificuldade, esclarecemos que os objetos matemáticos propostos nas hipóteses devem ser representados uma única vez. Pedimos que um aluno fizesse no quadro a figura do problema.

Apesar de haver a definição de altura na caixa de ferramentas, os alunos questionaram esse conceito. Fizemos a figura de um triângulo com as alturas no quadro reforçando a definição de altura.

Observamos que os alunos não tiveram dificuldades em preencher o esquema. Porém, duas duplas questionaram o uso da propriedade da caixa de ferramentas no esquema da demonstração. Procuramos salientar a substituição efetuada, do seguinte modo (no quadro negro):

Propriedade	Hipóteses	Conclusão
Caixa de ferramentas	$r \perp t$, $s \perp t$	$r//s$
Esquema	$h \perp \overline{TC}$, $d \perp \overline{TC}$	$h//d$

Substituição

Quatro duplas organizaram corretamente o esquema e ordenaram as frases sem dificuldades. As outras duplas fizeram parcialmente. Somente duas duplas completaram integralmente com sucesso a redação da demonstração.

Orientamos nos dez minutos finais como fazer a redação da demonstração, para todo o grupo.

6.4 - SESSÃO 4 (teste intermediário)

O objetivo desse encontro é analisar as aquisições/habilidades dos alunos no aprendizado das teorias desenvolvidas nos encontros anteriores.

Tentamos responder as seguintes questões, sobre as decisões do aluno frente aos problemas do teste e nossas hipóteses de pesquisa:

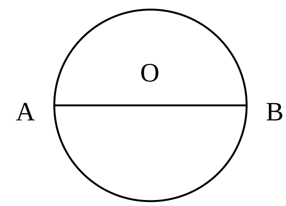
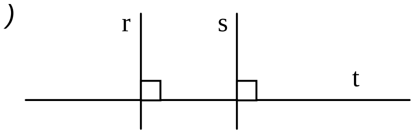
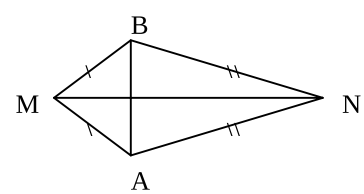
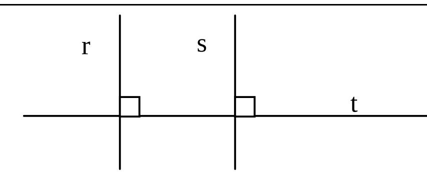
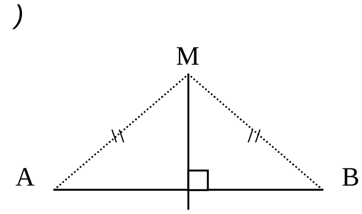
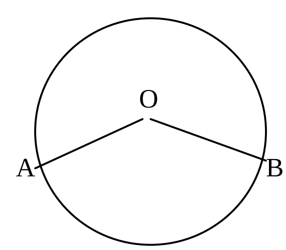
1. Compreendeu o estatuto do teorema, consegue identificar hipóteses e conclusão?
2. Sabe utilizar as mudanças de registros de representação?
3. Respeita o comando das hipóteses na construção da figura geométrica?
4. A partir da figura, o aluno distingui as apreensões perceptivas das apreensões discursivas? E relaciona as apreensões operatórias com as apreensões discursivas?
5. Desenvolve o tratamento completo das informações, utilizando a exploração total da figura com uma organização lógica?
6. Consegue fazer a redação de uma demonstração?

6.4.1 – APLICAÇÃO DA SESSÃO 4

Os alunos resolveram os problemas propostos individualmente, só doze fizeram o teste, faltaram 2 alunos.

6.4.2 – CONTEÚDO

Atividade 1

Teorema	*Figura Geométrica*
(1) Se r é paralela a s e t é perpendicular a r, então, t é perpendicular a s.	*( )*  *Hipóteses: A e B pertencem ao círculo e $\overline{AB}$ é diâmetro do círculo.*
(2) Se MA = MB, então, M pertence a mediatriz de $\overline{AB}$.	*( )*  *Hipóteses: $r \perp t$ e $s \perp t$*
(3) Se A e B pertencem a um mesmo círculo de centro O, então, AO = OB.	*( )*  *Hipóteses : MA= MB e NA = NB*
(4) Se MA=MB e NA=NB, M≠ N ,então, $\overleftrightarrow{MN}$ é a mediatriz de $\overline{AB}$.	*( )*  *Hipóteses: r // s e $t \perp r$*
(5) Duas retas perpendiculares a uma terceira são paralelas entre si.	*( )*  Hipótese : MA= MB
(6) Se AB é o diâmetro de um círculo de centro O, então, O é o ponto médio de $\overline{AB}$.	*( )*  Hipótese: A e B pertencem ao círculo de centro O.

É pedido que o aluno, observando os dados do quadro, circule as hipóteses e sublinhe a conclusão e associe as propriedades geométricas dadas na linguagem natural com as figuras dadas, observando que junto a cada figura foram apresentadas as hipóteses na linguagem algébrica.

Esse exercício foi planejado com os objetivos de verificar se o aluno compreendeu o estatuto do teorema e se ele sabe relacionar o registro da linguagem natural com o da linguagem da figura, de acordo com os dados.

Atividade 2:

Essa atividade foi organizada com os objetivos:

- Levar o aluno a esboçar a figura geométrica associada ao enunciado, sendo que as hipóteses são oferecidas na linguagem algébrica.
- Verificar se o aluno relaciona a apreensão perceptiva com a discursiva.
- Analisar como o aluno desenvolve a mudança de registro de representação da linguagem algébrica para a linguagem da figura

Problema 2. Considerando as quatro retas : r, s, t e m .

a) *Completar a tabela usando os símbolos ⊥ ou // convenientemente.*

b) *Faça a figura associada a tabela* *Figura*

	r	*s*	*t*	*m*
r			⊥	
s				⊥
t		⊥		
m				

Atividade 3:

Essa atividade tem o objetivo de verificar se o aluno:

- Distingue hipóteses e conclusão de uma propriedade.
- Consegue escrever as hipóteses e a conclusão nos três registros de representação.
- Respeita o comando das hipóteses na construção da figura geométrica.

- Distingui as apreensões perceptivas das apreensões discursivas, a partir da figura? E relaciona as apreensões operatórias com as apreensões discursivas (desenvolvendo as substituições pertinentes)?
- Desenvolve o tratamento completo das informações, utilizando a exploração total da figura com uma organização lógica?
- Consegue fazer a redação de uma demonstração?

É dado o seguinte problema.

Problema 3. Seja ABC um triângulo , $\overline{AH}$ *sua altura em A e r a mediatriz de* $\overline{AH}$ *, então r e* $\overline{BC}$ *são paralelas.*

a) Complete o quadro abaixo.

Teorema	*Hipóteses*	*Conclusão*
Linguagem natural		
Linguagem algébrica		
Linguagem da figura		

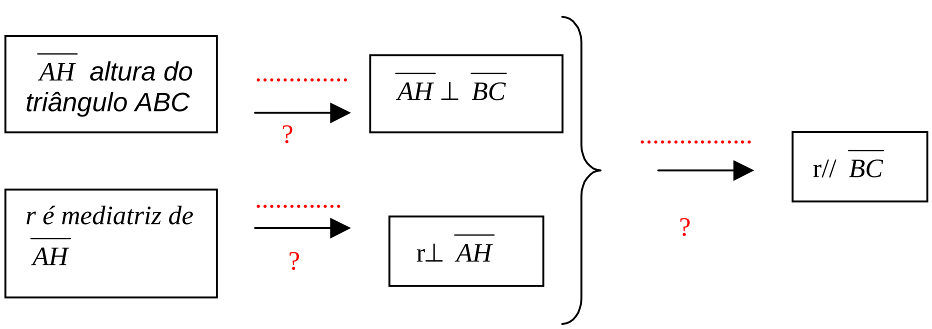
<u>Ferramentas usadas na demonstração</u>

***D1** – **Altura de um triângulo** é um segmento que está na reta perpendicular traçada de um vértice à reta suporte do lado oposto, cujas extremidades são o vértice e o ponto de interseção com essa reta.*

***D2** – **Mediatriz de um segmento** é a reta perpendicular a esse segmento que passa por seu ponto médio.*

***P** - Se r⊥ t e s ⊥t então r//s.*

b) Completar o esquema da demonstração usando D1, D2 ou P



c) Numere de 1 a 8 para obter a redação da demonstração:
( ) Portanto, por definição de altura $\overline{AH} \perp \overline{BC}$.
( ) Estamos assim, satisfazendo as hipóteses da propriedade:
Se r⊥t e s⊥t então r//s.
( ) Assim, r e $\overline{BC}$ são paralelas.
( ) Portanto, por definição de mediatriz r⊥ $\overline{AH}$.
( ) Por hipótese $\overline{AH}$ é altura do triângulo ABC em A.
( ) Portanto, concluo que r // $\overline{BC}$.
( ) Ainda por hipótese, seja r a mediatriz de $\overline{AH}$.
( ) Se BC ⊥ $\overline{AH}$ e r ⊥ $\overline{AH}$.

d) faça a redação da demonstração

6.4.3 - ANÁLISE *A PRIORI*

É esperado que alguns alunos cheguem ao sucesso com as seguintes decisões.

Atividade 1:

Numerando: (6), (5), (4), (1), (2) e (3)

(1) Circulando: ”Se r é paralela a s, e t perpendicular a r” e sublinhando “ então, t é perpendicular a s”.

(2) Circulando: “Se MA=MB” e sublinhando “ então M pertence a mediatriz de $\overline{AB}$”

(3) Circulando: “Se A e B pertencem a um mesmo círculo de centro O” e sublinhando: “então, AO= OB”.

(4) Circulando: “Se MA= MB e NA= NB , M ≠ N” e sublinhando: “ $\overleftrightarrow{MN}$ é a mediatriz de $\overline{AB}$ ”.

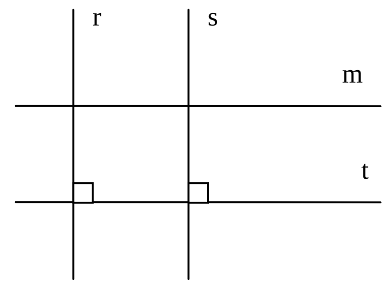
(5) Circulando: “Duas retas perpendiculares a uma terceira” e sublinhando: “são paralelas entre si”.

(6) Circulando: “Se $\overline{AB}$ é o diâmetro de um círculo de centro O” e sublinhando: “então, O é o ponto médio de $\overline{AB}$ ”.

Atividade 2:

	r	s	t	m
r	//	//	⊥	⊥
s	//	//	⊥	⊥
t	⊥	⊥	//	//
m	⊥	⊥	//	//

Figura



Provavelmente, uma das dificuldades seja esboçar a figura, pois oferecemos os dados através de uma tabela usando a linguagem algébrica, assim pode ocorrer que cada reta duas vezes.

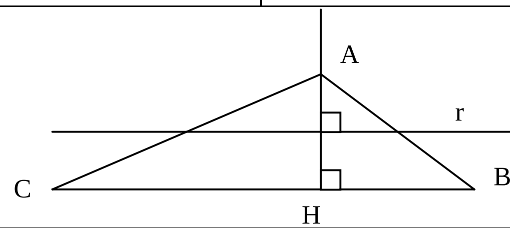
Atividade 3:

Acreditamos que uma das dificuldades seja “ver“ as hipóteses da propriedade P. Isto é, o aluno deverá substituir as hipóteses da propriedade pelas hipóteses do esquema e observar que a conclusão da propriedade deverá estar de acordo com as hipóteses do problema.

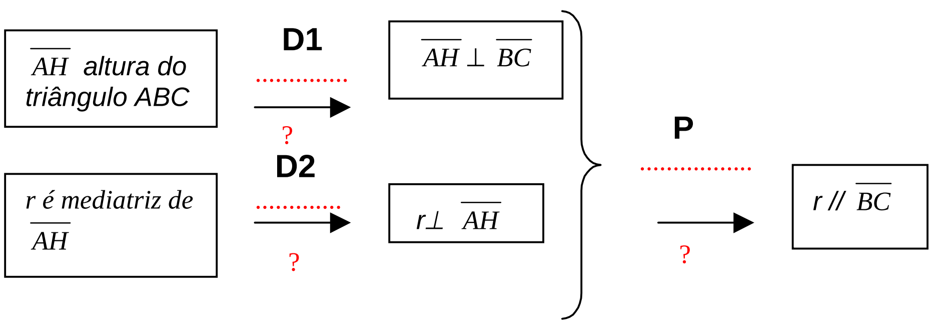
Como “economia de memória” o aluno deve relacionar a figura com o esquema da demonstração o que vai colaborar com sua apreensão discursiva.

Segundo DUVAL (1995), a visualização em geometria implica necessariamente pelo menos em uma das três mudanças sobre o que é visto: mudança dimensional, figurativa e de âncora. No nosso exercício, deverá ocorrer a mudança dimensional, a partir do triângulo no plano que possui dimensão dois, o aluno passará a comparar retas (ou segmentos de retas) de dimensão um. A formulação do exercício induz a visualização nas mudanças do que é visto usando como âncoras as hipóteses associadas a caixa de ferramentas.

Item a)

Teorema	*Hipóteses*	*Conclusão*
LINGUAGEM NATURAL	*ABC é um triângulo* $\overline{AH}$ *é a altura em A* *r é mediatriz de* $\overline{AH}$	*r e* $\overline{BC}$ *são paralelas*
LINGUAGEM ALGËBRICA	*ABC é um triângulo* $\overline{AH} \perp \overline{BC}$ $r \perp \overline{AH}$	$r /\!/ \overline{BC}$
LINGUAGEM DA FIGURA		

Item b)



Item c)

Numere de 1 a 8 para obter a redação da ***demonstração :***

(**2** *) Portanto por definição de altura* $\overline{AH} \perp \overline{BC}$ *.*

(**6** *) Estamos assim, satisfazendo as hipóteses da propriedade :*

Se $r \perp t$ *e* $s \perp t$ *então r//s.*

(**8** *) Assim, r e* $\overline{BC}$ *são paralelas*

(**4** *) Portanto, por definição de mediatriz* $r \perp \overline{AH}$ *.*

(**1** *) Por hipótese* $\overline{AH}$ *é altura do triângulo ABC em A.*

(**7** *) Portanto, concluo que* $r /\!/ \overline{BC}$ *.*

(**3** *) Ainda por hipótese, seja r a mediatriz de* $\overline{AH}$ *.*

(**5** *) Se* $\overline{BC} \perp \overline{AH}$ *e* $r \perp \overline{AH}$ *.*

Item d)

Redação da demonstração:

Por hipótese $\overline{AH}$ *é altura do triângulo ABC em A; portanto, por definição de altura* $\overline{AH} \perp \overline{BC}$*. Ainda, por hipótese, seja r a mediatriz de* $\overline{AH}$*, portanto por definição de mediatriz* $r \perp \overline{AH}$*.*

Sendo $\overline{BC} \perp \overline{AH}$ *e* $r \perp \overline{AH}$*, satisfaz-se desse modo as hipóteses da propriedade: Se* $r \perp t$ *e* $s \perp t$ *então r//s, portanto, conclui-se que* $r \,//\, \overline{BC}$*. Assim, r e* $\overline{BC}$ *são paralelas.*

6.4.4 - RELATO DA APLICAÇÃO DA SESSÃO 4

Atividade 1

Constatamos que seis alunos inverteram o item (5) com o item (1), com isso não respeitaram todas as hipóteses da propriedade dadas na linguagem matemática, que estavam associadas a figura geométrica.

Atividade 2

Três alunos acertaram parcialmente esta atividade, observamos que representaram duas vezes a reta r e a reta s na figura associada a tabela, isso determinou erros na composição da tabela com os símbolos no item a).

Atividade 3

Todos os alunos identificaram as hipóteses e a conclusão na linguagem natural. Nove alunos organizaram corretamente a linguagem da figura.

Porém a conversão para a linguagem algébrica apresentou acertos parciais: dois alunos escreveram as hipóteses incompletas, dois copiaram as hipóteses, dois deixaram de fazer e quatro alunos acertaram parcialmente. Dois alunos não fizeram a representação algébrica correta da conclusão apresentando a seguinte resposta: “Então r e $\overline{AB}$ são // “.

Todos os alunos completaram corretamente o esquema da demonstração.

Porém, três alunos trocaram alguns itens na numeração da ordem das frases para a composição da demonstração levando a uma redação incorreta. Dois trocaram apenas a ordem oferecida das hipóteses, portanto, nove alunos conseguiram organizar corretamente a redação da demonstração.

Concluímos que os alunos compreenderam o estatuto do teorema, pois conseguiram identificar as hipóteses e as conclusões. Porém, apresentaram dificuldades em relacionar as mudanças de registro de representação.

Constatamos que nove alunos respeitaram todas as hipóteses na construção da figura, e provavelmente já conseguem distinguir as apreensões perceptivas das discursivas, e relacionam as apreensões operatórias com as discursivas.

Todos acertaram a composição do esquema da demonstração, mas somente nove fizeram corretamente a numeração correta da demonstração, assim como a redação da demonstração. Assim, concluímos que provavelmente nove alunos desenvolveram as informações com uma organização lógica-dedutiva.

6.5 - SESSÃO 5

Nessa sessão abordaremos a organização das ferramentas, da caixa de ferramentas, deve-se observar quais definições e propriedades focam uma única conclusão.

É importante, também, que os alunos percebam que na demonstração de uma propriedade que possui muitas hipóteses, elas são usadas na demonstração encaixando-se aos poucos no processo dedutivo.

6.5.1 – APLICAÇÃO DA SESSÃO 5

Dois alunos estavam ausentes.

Estava ocorrendo na escola um evento extra curricular, os alunos estavam muito agitados, isto gerou menor concentração durante nossa atividade, em decorrência resolvemos mudar o contrato didático. Fazendo leitura oral (procurando revezar a leitura entre os alunos) com posterior debate e tomada de decisão.

6.5.2 - CONTEÚDO

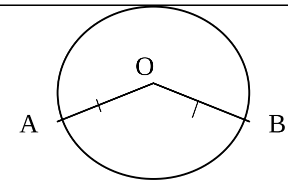
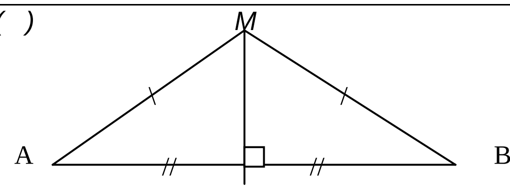
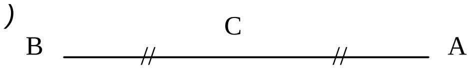
Atividade 1

Pretendemos conduzir o aluno a observar que para satisfazer uma determinada conclusão podem existir caminhos com abordagens diferenciadas, mostrando que várias propriedades podem levar a mesma conclusão, apesar de suas hipóteses distintas.

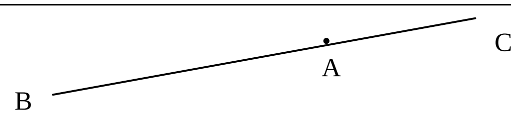
Nos encontros anteriores, organizamos caixas de ferramentas que são constituídas por definições e propriedades. Nesse encontro, a partir de uma pergunta, apresentamos várias respostas possíveis, escritas no registro da linguagem natural e no registro da linguagem da figura. Tentaremos mostrar como montar uma caixa de ferramentas.

“Como demonstrar?” Devemos inicialmente conhecer as ferramentas usadas para esse fim.

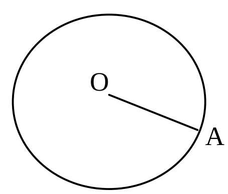
1.Como demonstrar que dois segmentos tem o mesmo comprimento?

(1)Usando a definição: *M , entre A e B, é ponto médio de $\overline{AB}$ se AM=MB.*	*( )* 
(2)Usando a propriedade: *Se A é a imagem de B pela simetria de centro C, então CA=CB .*	*( )* 
(3)Usando a propriedade: *Se M pertence a mediatriz de $\overline{AB}$, então MA=MB*	*( )* 
(4)Usando a propriedade: *Se A e B pertencem a um mesmo círculo de centro O, então AO = OB.*	*( )* 

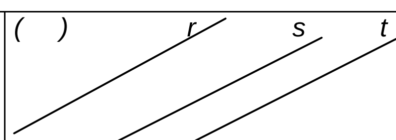
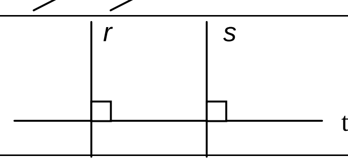
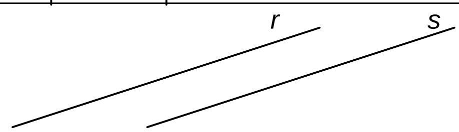
2. Como demonstrar que três pontos são alinhados ?

Usando a propriedade: *Se as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$ são paralelas, então A, B e C são alinhados*	

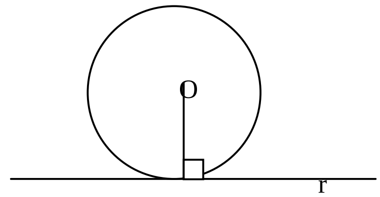
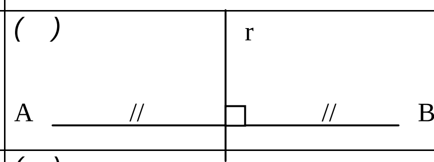
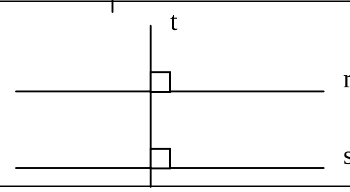
3. Como demonstrar que um ponto pertence a um círculo ?

Usando a propriedade: Se AO = d, então, A pertence ao círculo de centro O e raio d .	

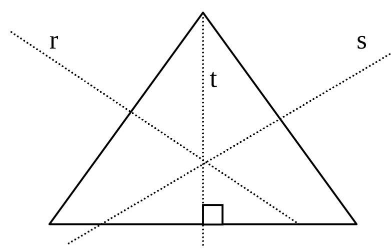
4. Como demonstrar que duas retas são paralelas ?

(1) Usando a definição: r é paralela a s se r e s não tem ponto comum ou são coincidentes.	*( )* 
(2) Usando a propriedade: *Se r e s são paralelas a uma mesma reta t, então r //s.*	*( )* 
(3) Usando a propriedade: *Se r e s são perpendiculares a uma mesma reta t, então r//s.*	*( )* 

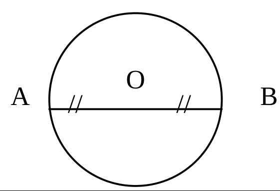
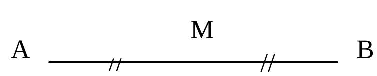
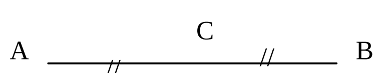
5. Como demonstrar que duas retas são perpendiculares ?

(1)Usando a propriedade: *Se r é mediatriz de* $\overline{AB}$ *, então, r* $\perp$ $\overline{AB}$ *.*	*( )* 
(2)Usando a propriedade: *Se r//s e t* $\perp$ *r , então, t* $\perp$ *s.*	*( )* 
(4) Usando a propriedade: *Se r é tangente em A, num círculo de centro O,* *então, r*$\perp$ $\overline{AO}$ *.*	*( )* 

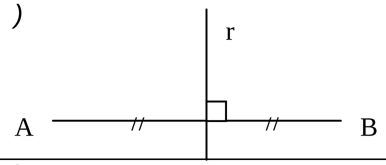
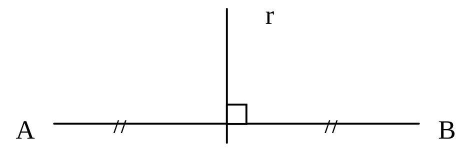
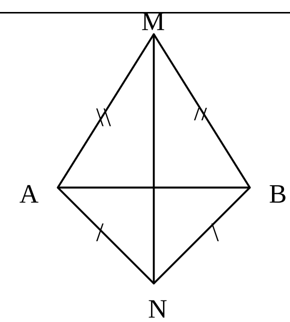
6. Como demonstrar que três retas são concorrentes ?

Usando a propriedade: *Se três retas são mediatrizes de um triângulo,* *então, elas são concorrentes.*	

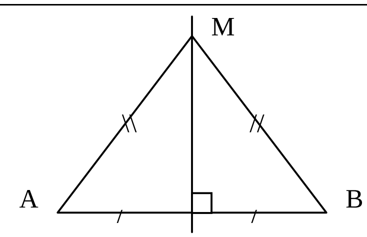
7. Como demonstrar que M é ponto médio de um segmento?

(1)Usando a definição: *M é* ***ponto médio*** *de* $\overline{AB}$ *se M está sobre* $\overline{AB}$ *e AM=MB.*	*( )* 
(2) Usando a definição: *A e B são* ***simétricos*** *em relação a C, então,* *C é o ponto médio de* $\overline{AB}$ *.*	*( )* 
(3) Usando a propriedade: *Se* $\overline{AB}$ *é o diâmetro de um círculo de centro O,* *então, O é o ponto médio de* $\overline{AB}$ *.*	*( )* 

8. Como demonstrar que uma reta é a mediatriz de um segmento?

(1)Usando a propriedade: *Se MA=MB e NA=NB, então,* $\overline{MN}$ *é a mediatriz de* $\overline{AB}$.	*( )* 
(2) Usando a propriedade: *Se A e B são simétricos em relação a r, então, r é a mediatriz de* $\overline{AB}$.	*( )* 
(3) Usando a definição de mediatriz *A **mediatriz** de um segmento é a reta perpendicular a esse segmento passando pelo seu ponto médio.*	*( )* 

9. Como demonstrar que um ponto pertence a mediatriz de um segmento?

Usando a propriedade: *Se MA = MB, então, M pertence a mediatriz de* $\overline{AB}$.	

Atividade 2

***Problema 1**: Seja ABCD um trapézio, tal que* $\overline{AB}$ // $\overline{CD}$. *Nós construímos a altura* $\overline{AH}$ *do triângulo ACD, e depois a reta d paralela a* $\overline{AH}$ *passando por C. Demonstrar que d é a reta suporte da altura do triângulo ABC passando por C.*

Palavras Chaves:
***trapézio** – quadrilátero com dois lados paralelos*
***altura do triângulo**: (ver caixa de ferramentas)*
***retas paralelas**: não se interceptam*

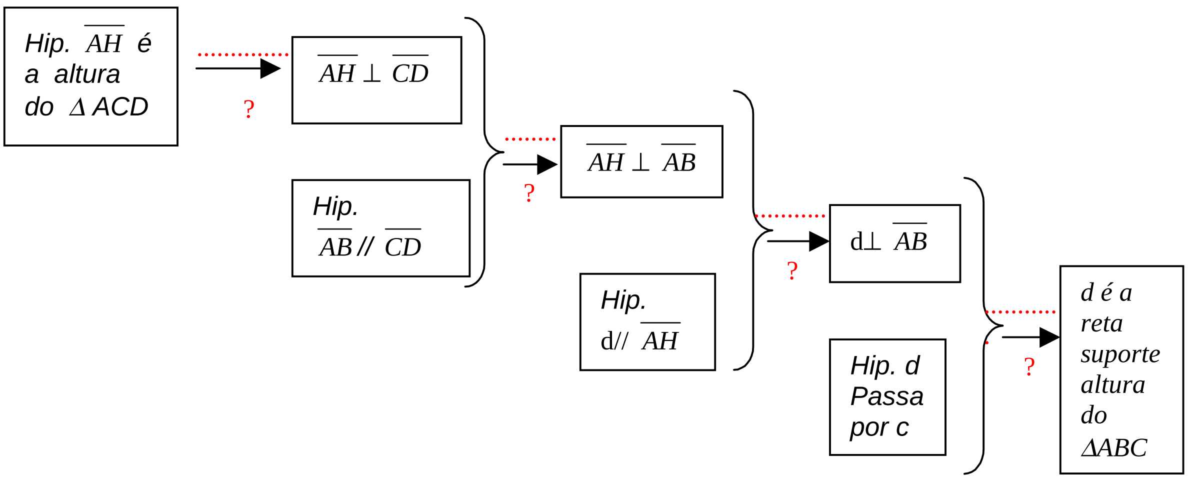
Figura:
Desenhar um trapézio ABCD tal que $\overline{AB}$ // $\overline{CD}$ *traçar em seguida a altura* $\overline{AH}$, *desenhar d.*

Hipóteses | *Conclusão*

Caixa de ferramentas:

D	*Altura de um triângulo é um segmento que está na reta perpendicular traçada de um vértice à reta suporte do lado oposto, cujas extremidades são o vértice e o ponto de interseção com essa reta.*
P	*Se duas retas são paralelas, toda perpendicular a uma é perpendicular a outra.*

Esquema de demonstração: Preencha com D ou P de acordo com a caixa de ferramentas

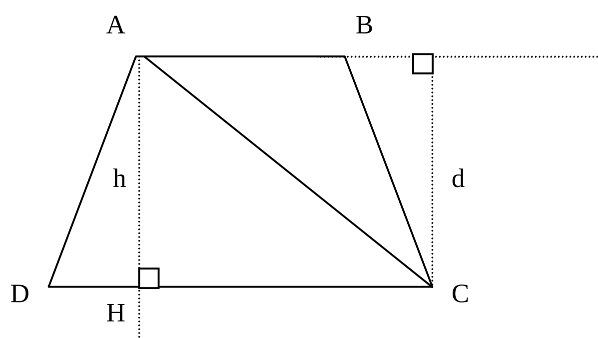


Faça a redação da demonstração

6.5.3 – ANÁLISE *A PRIORI*

É provável que o aluno chegue ao **sucesso** com as seguintes decisões:

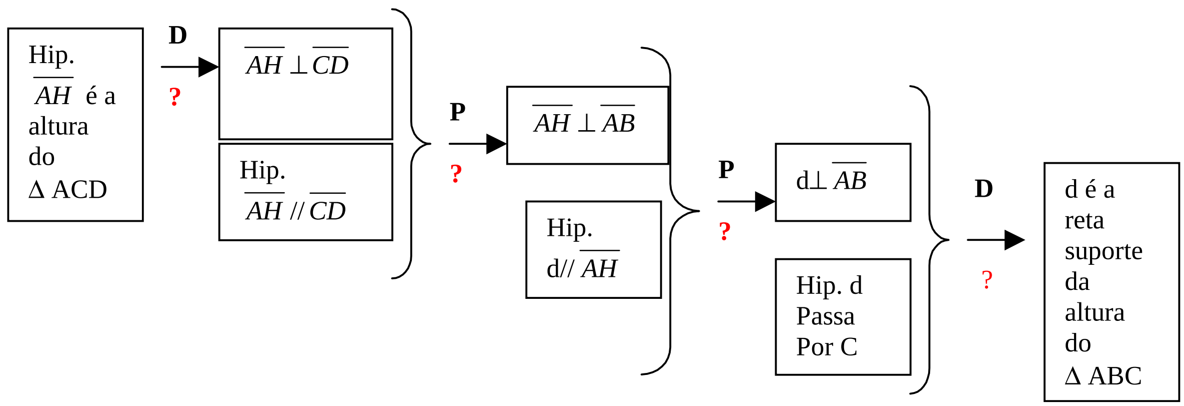
Figura:



Hipóteses	*Conclusão*
ABCD é um trapézio, assim $\overline{AB} // \overline{CD}$	*d contém a altura que passa por C,*
$\overline{AH}$ *é altura do triângulo ACD, assim* $\overline{AH} \perp \overline{CD}$	*assim d*$\perp$ $\overline{AB}$
d // $\overline{AH}$ *e d passa por C*	

A partir da figura e da caixa de ferramentas, o aluno deverá preencher o seguinte esquema usando as ferramentas D ou P.

Esquema da demonstração



Provavelmente, o aluno chegará ao **sucesso** com a seguinte redação da demonstração:

Por hipótese $\overline{AH}$ é altura do triângulo ACD, assim, por definição de altura, $\overline{AH} \perp \overline{CD}$. Ainda por hipótese $\overline{AB}$ // $\overline{CD}$, portanto, estamos satisfazendo as hipóteses da propriedade: Se duas retas são paralelas, toda perpendicular a uma é perpendicular a outra. Assim, concluí-se que $\overline{AH} \perp \overline{AB}$.

Ainda por hipótese d // $\overline{AH}$, nessas condições estamos nas hipóteses da propriedade anterior, portanto, concluímos que d$\perp$ $\overline{AB}$. De acordo com as hipóteses d passa por C e como d$\perp$ $\overline{AB}$ e d contem a altura do triângulo ABC por C conclui-se que d é a reta suporte da altura por C do triângulo ABC.

6.5.4 - RELATO DA APLICAÇÃO DA SESSÃO 5

Atividade 1

Para o desenvolvimento dessa atividade, mudou-se o contrato didático, resolveu-se fazer uma discussão, item por item, com todo o grupo. Pediu-se que cada dupla apresentasse sua decisão, levantou-se as decisões e sua justificativas, fez-se o fecho da atividade oralmente, explicando sempre que necessário as dúvidas dos alunos e os objetivos dessa atividade.

Os alunos comentaram sobre a dificuldade de esboçar a figura geométrica, por isso pedimos a um aluno que viesse fazer a figura, no quadro negro. Iniciamos a discussão relacionada ao traçado com esse aluno e constatamos que apesar de já termos explicado em sessões anteriores o traçado de figuras sobrepostas, o aluno oferecia oposição em traçar o triângulo sobre o trapézio, voltando a pensar do "jeito antigo" considerando o triângulo e o trapézio como duas figuras separadas. Confirmando a teoria de DUVAL sobre a "Lei do fecho" (cf. fundamentação teórica).

Observamos que para favorecer a superação dessa dificuldade, deveríamos trabalhar a construção passo a passo da figura observando as orientações das hipóteses. Para isso, pedimos que diferentes alunos fossem completando a figura.

À medida que os alunos reconheciam os objetos matemáticos oferecidos nas hipóteses fomos desenvolvendo o esboço da figura, o que gerou bastante discussão nas duplas.

O esquema da demonstração apresentava as hipóteses organizadas de modo hierárquico, o que gerou dificuldades nas decisões dos alunos. Apesar disso, após discussões entre as duplas e as intervenções do professor pesquisador todas as duplas preencheram com sucesso o esquema da demonstração.

A mudança de tratamento, de um registro de representação, de uma mesma propriedade (oferecida inicialmente na linguagem natural) para duas representações distintas contidas no esquema (na linguagem algébrica) constituiu-se em um ponto de dificuldade acentuada para os alunos. Pois, a substituição das hipótese da propriedade pelas hipóteses contidas no esquema determinam a substituição da conclusão da propriedade pela conclusão associada no esquema.

Procuramos ajudar o aluno a superar a dificuldade apresentada em "transitar" entre os tratamentos de um mesmo registro explicando, como no quadro abaixo. Bem como, evidenciando na figura as hipóteses da propriedade, nas duas situações, nas quais aplicaríamos a mesma propriedade.

Propriedade	*Hipótese* $r // s$, $t \perp r$	*Conclusão* $t \perp s$
Esquema (aplicação 1)	$\overline{CD} // \overline{AB}$, $\overline{AH} \perp \overline{CD}$	$\overline{AB} \perp \overline{AH}$
Esquema (aplicação 2)	$\overline{AH} // d$, $\overline{AH} \perp \overline{AB}$	$d \perp \overline{AB}$

Mudança de tratamento

Somente duas duplas completaram integralmente a redação da demonstração, duas outras completaram a redação com sucesso parcial, as demais não concluíram (essas comentaram que necessitariam de mais tempo).

Observamos que nenhum aluno apresentou as hipóteses na linguagem algébrica. Acreditamos que para contribuir com um melhor desenvolvimento das habilidades geométricas dos alunos, deveríamos propiciá-los a executar exercícios que explorassem a coordenação das linguagens associadas à exploração heurística da figura.

Concluímos que será preciso um trabalho específico com a coordenação dos registros de representação.

6.6 – SESSÃO 6

Na aplicação das sessões anteriores constatamos as dificuldades dos alunos em converter e coordenar os registros de representação, bem como, compreender o tratamento interno a um registro. Levando em consideração essas constatações, desenvolvemos a sessão 6, apresentando as definições e teoremas que envolvem os quadriláteros e a conversão do registro de representação da linguagem natural para a linguagem algébrica.

Segundo Duval (1995, p. 69), "*Toda representação é cognitivamente parcial em relação ao que ela representa e as representações de diferentes registros não apresentam os mesmos aspectos de um mesmo conteúdo conceitual."(...)* Desse modo*, "a conversão dos registros é necessária para chegar ao conteúdo representado pois supera as limitações do representante".*

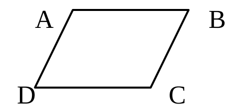
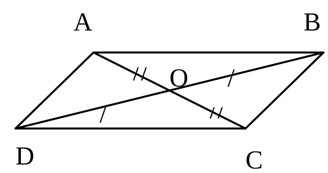
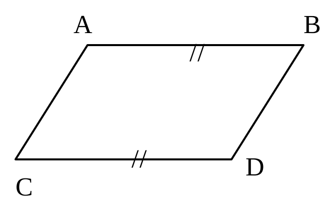
Assim sendo, as ferramentas (definições e propriedades e sua recíprocas) serão apresentadas nos três registros de representação: da linguagem natural, linguagem algébrica e linguagem da figura. De acordo com as dificuldades apresentadas, resolvemos organizar uma tabela com três colunas, uma indicando a linguagem natural , outra a linguagem algébrica e a terceira a linguagem da figura, o aluno deveria completar os espaços indicados na tabela, convenientemente, convertendo os registros nas linguagens indicadas. Outro aspecto importante que procuramos salientar foi rever a distinção entre o definição e teorema, bem como os teoremas recíprocos, observando que os teoremas recíprocos possuem as mesmas figuras geométricas, entretanto a seqüência do raciocínio associada à visualização é inversa, isto é, há a troca da hipótese com a conclusão.

6.6.1 – APLICAÇÃO DA SESSÃO 6

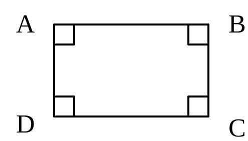
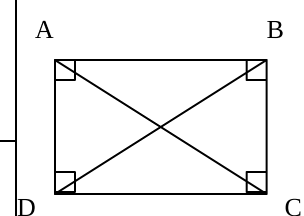
Todos os alunos estavam presentes. O professor pesquisador foi bastante requisitado pelas duplas, alguns alunos levantaram e foram fazer as figuras geométricas no quadro questionando definições e propriedades no quadro negro.

6.6.2 - CONTEÚDO

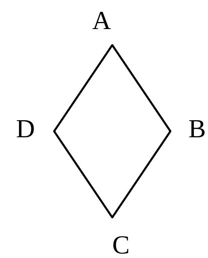
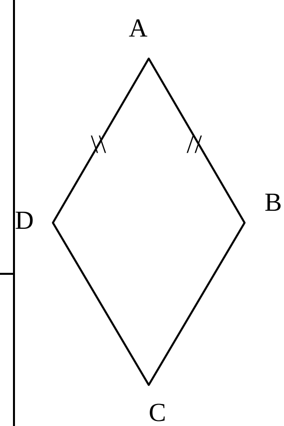
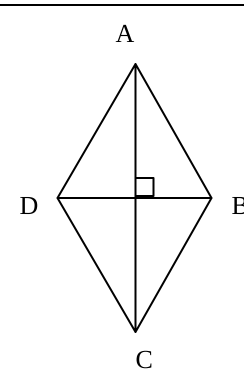
Paralelogramo

	L. Natural	*L. Algébrica*	*L. da Figura*
Definição	***Paralelogramo é um quadrilátero convexo cujos lados opostos são paralelos.***	***ABCD é um paralelogramo se***	
Propriedade 1	*Se ABCD é um paralelogramo então, as diagonais cortam-se em seu ponto médio.*	***Hipóteses:*** ***ABCD...*................... $\overline{AC}$ **e** $\overline{DB}$ **................** ***Conclusão:*** ***AO=*........................ ***DO=*........................	
Recíproca da propriedade 1	*Se ABCD é um quadrilátero convexo cujas diagonais cruzam-se em seus pontos médios então, ABCD é um paralelogramo.*	***Hipóteses:*** ***ABCD ...*................. $\overline{AC}$ **e** $\overline{DB}$ **................** ***AO =......e DO =.....*** ***Conclusão:*** ***ABCD ....***	
Propriedade 2	*Se ABCD é um paralelogramo, então, seus lados opostos possuem o mesmo comprimento.*	***Hipóteses:*** ***..............................*** ***Conclusão:*** ***AB=..... e AD=......***	
Recíproca da propriedade 2	*Se ABCD é um quadrilátero convexo cujos lados opostos possuem o mesmo comprimento, então, ABCD é um paralelogramo.*	***Hipóteses:*** ***...............................*** ***..............................*** ***Conclusão:*** ***...............................*** ***...............................***	
Propriedade 3	*Se ABCD é um quadrilátero convexo que possui dois lados opostos paralelos e de mesmo comprimento, então, ABCD é um paralelogramo.*	***Hipóteses:*** ***...............................*** ***..............................*** ***Conclusão:*** ***...............................*** ***...............................***	

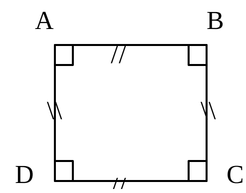
Retângulo

	L. Natural	***L. Algébrica***	***L. da Figura***
Definição	*Um **retângulo** é um quadrilátero convexo que possui os quatro ângulos retos*	*ABCD é um **retângulo** se* $\overline{AB}$ ^...... , $\overline{BC}$ ^......., $\overline{CD}$ ^...... , $\overline{DA}$ ^........	
Propriedade1	*Se ABCD é um retângulo , então, é um paralelogramo que possui um ângulo reto*	***Hipóteses:*** *ABCD ....* ***Conclusão:*** *ABCD..........................* *....................................* *...................................*	
Recíproca da Propriedade1	*Se ABCD é um paralelogramo que possui um ângulo reto, então, ABCD é um retângulo.*	***Hipóteses:*** *ABCD...........................* *....................................* *...................................* ***Conclusão:*** *ABCD ....* *...................................*	
Propriedade 2	*Se ABCD é um retângulo, então, ABCD é um paralelogramo que possui as diagonais de mesmo comprimento.*	***Hipóteses:*** *ABCD...........................* *....................................* ***Conclusão:*** *ABCD ....* *.......... e .... = BD*	
Recíproca da Propriedade 2	*Se ABCD é um paralelogramo cujas diagonais tem o mesmo comprimento, então, ABCD é um retângulo.*	***Hipóteses:*** *ABCD ....* *...................................* *AC=...........................* ***Conclusão:*** *ABCD ....* *...................................*	

Losango

	L. Natural	*L. Algébrica*	*L. da Figura*
Definição	***Losango*** *é um quadrilátero convexo que possui os quatros lados de mesmo comprimento.*	*ABCD é um losango se AB=.....=.....=.....*	
Propriedade1	*Se ABCD é um losango, então, ABCD é um paralelogramo que tem dois lados consecutivos de mesmo comprimento.*	***Hipóteses:*** *ABCD...........................* *....................................* ***Conclusão:*** *ABCD........................* *e vale* *AB=...... ou BC=...... ou CD=..... ou DA=........*	
Recíproca da Propriedade1	*Se ABCD é um Paralelogramo que possuiu dois lados consecutivos de mesmo comprimento, então, ABCD é um losango.*	***Hipóteses:*** *....................................* *....................................* *....................................* *....................................* ***Conclusão:*** *ABCD ....* *....................................*	
Propriedade2	*Se ABCD é um losango, então, suas diagonais são perpendiculares.*	***Hipótese:*** *ABCD........................* *....................................* ***Conclusão:*** $\overline{AC}$ .... $\overline{DB}$	
Recíproca da Propriedade2	*Se ABCD é um paralelogramo cujas diagonais são perpendiculares, então, ABCD é um losango*	***Hipóteses:*** *ABCD..........................* *...................................* *e* ....^ $\overline{DB}$ ***Conclusão:*** *ABCD......................*	

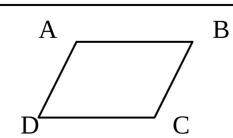
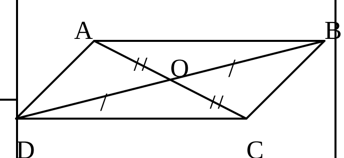
Quadrado

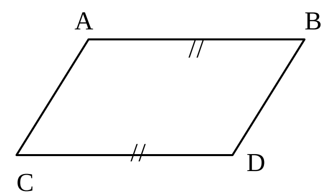
	L. Natural	*L. Algébrica*	*L. da Figura*
Definição	*Um* ***quadrado*** *é um retângulo que possui os lados de mesma medida.* *Ou* *Um quadrado é um quadrilátero que é ao mesmo tempo retângulo e losango*	*ABCD é um ....se ABCD é um retângulo e AB=.....=.....=......*	
Todas as propriedades do retângulo e do losango valem para o quadrado: *1. Os lados opostos são ....* *2. Os quatro lados tem ....* *3. Os lados consecutivos são ....* *4. As diagonais cortam-se ao meio , possuem o .... e são........................*			

6.6.3 – ANÁLISE *A PRIORI*

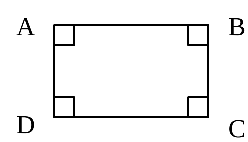
É provável que o aluno chegue ao **sucesso** com as seguintes respostas.

Paralelogramo

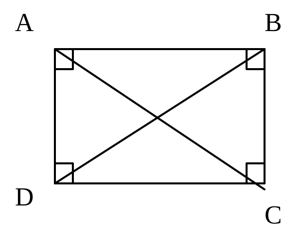
	L. Natural	*L. Algébrica*	*L. da Figura*
Definição	*Paralelogramo* ***é um quadrilátero convexo cujos lados opostos são paralelos***	*ABCD é um* ***paralelogramo*** *se* $\overline{AB}\ //\ \overline{CD}$ *e* $\overline{AD}\ //\ \overline{BC}$	
Propriedade 1	*Se ABCD é um paralelogramo então as diagonais cortam-se em seu ponto médio*	***<u>Hipóteses:</u>*** *ABCD paralelogramo* $\overline{AC}$ *e* $\overline{DB}$ *diagonais* ***<u>Conclusão:</u>*** *AO = OC* *DO = OB*	
Recíproca da ***Propriedade 1***	*Se ABCD é um paralelogramo então seus lados opostos possuem o mesmo comprimento*	***<u>Hipóteses:</u>*** *ABCD quadrilátero* *AC e DB diagonais* *AO = OC e DO = OB* ***<u>Conclusão:</u>*** ***ABCD é paralelogramo***	

Propriedade 2	*Se ABCD é um quadrilátero convexo e seus lados opostos possuem o mesmo comprimento, então, ABCD é um paralelogramo.*	***<u>Hipóteses :</u>*** *ABCD paralelogramo* ***<u>Conclusão:</u>*** *AB = CD e AD = BC*	
Recíproca da Propriedade 2	*Se ABCD é um quadrilátero convexo que possui dois lados opostos paralelos e de mesmo comprimento, então, ABCD é um paralelogramo*	***<u>Hipóteses:</u>*** *ABCD é um quadrilátero convexo* *AB= DC e AD = BC* ***<u>Conclusão:</u>*** *ABCD é um paralelogramo*	
Propriedade 3	*Se ABCD é um quadrilátero convexo que possui dois lados opostos paralelos e de mesmo comprimento, então, ABCD é um paralelogramo.*	***<u>Hipóteses:</u>*** *ABCD quadrilátero convexo* *AB =DC e* $\overline{AB} \,//\, \overline{CD}$ ***<u>Conclusão:</u>*** *ABCD é um paralelogramo*	

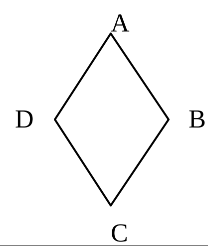
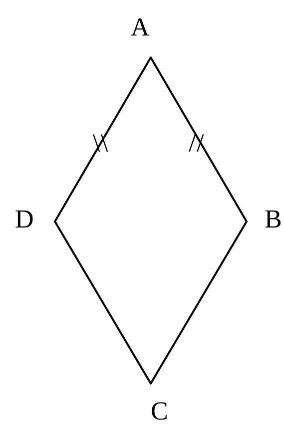
Retângulo

	L. Natural	***L. Algébrica***	***L. da Figura***
<u>Definição</u>	*Um **retângulo** é um quadrilátero convexo que possui ao quatro ângulos retos*	*ABCD é um **retângulo** se* $\overline{AB} \wedge \overline{BC}$, $\overline{BC} \wedge \overline{CD}$, $\overline{CD} \wedge \overline{DA}$, $\overline{DA} \wedge \overline{AB}$	
<u>Propriedade 1</u>	*Se ABCD é um retângulo , então, ABCD é um paralelogramo que possui um ângulo reto*	***Hipóteses:*** *ABCD é um retângulo* ***Conclusão:*** *ABCD é um paralelogramo que possui um ângulo reto*	
<u>Recíproca da propriedade 1</u>	*Se ABCD é um paralelogramo que possui um ângulo reto, então, ABCD é um retângulo.*	***Hipóteses:*** *ABCD é um paralelogramo e possui um ângulo reto.* ***Conclusão:*** *ABCD é um retângulo*	

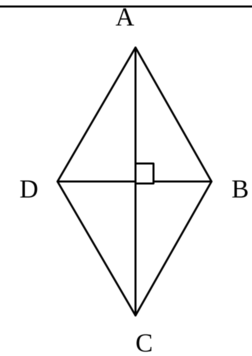
(continuação – Retângulo)

<u>Propriedade 2</u>	*Se ABCD é um retângulo, então, é um paralelogramo que possui as diagonais de mesmo comprimento*	***Hipóteses:*** *ABCD é um retângulo* ***Conclusão:*** *ABCD é um paralelogramo e AC = BD*	
<u>Recíproca da propriedade 2</u>	*Se ABCD é um paralelogramo cujas diagonais tem o mesmo comprimento, então, ABCD é um retângulo*	***Hipóteses:*** *ABCD é um paralelogramo AC=BC* ***Conclusão:*** *ABCD é um retângulo*	

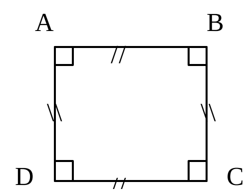
Losango

	L. Natural	***L. Algébrica***	***L. da Figura***
Definição	***Losango*** *é um quadrilátero convexo que possui ao quatros lados de mesmo comprimento.*	*ABCD é um losango se AB=BC=CD=DA*	
Propriedade 1	*Se ABCD é um losango, então, ABCD é um paralelogramo que tem dois lados consecutivos.*	***Hipóteses:*** *ABCD é um losango* ***Conclusão:*** *ABCD é um paralelogramo e vale AB=BC ou BC=CD ou CD=DA ou DA=AB*	
<u>Recíproca da propriedade 1</u>	*Se ABCD é um Paralelogramo que possui dois lados consecutivos de mesmo comprimento, então, ABCD é um losango.*	***Hipóteses:*** *ABCD é um paralelogramo AB=BC ou BC=CD ou CD=DA ou DA=AB.* ***Conclusão:*** *ABCD é um losango*	

(continuação- losango)

Propriedade 2	*Se ABCD é um losango, então, suas diagonais são perpendiculares.*	***Hipótese:*** *ABCD é um losango* ***Conclusão:*** $\overline{AC} \wedge \overline{DB}$	
Recíproca da Propriedade 2	*Se ABCD é um paralelogramo cujas diagonais são perpendiculares, então, ABCD é um losango*	***Hipóteses:*** *ABCD é um paralelogramo* $\overline{AC} \wedge \overline{DB}$ ***Conclusão:*** *ABCD é um losango*	

Quadrado

	L. Natural	***L. Algébrica***	***L. da Figura***
<u>Definição</u>	*Um **quadrado** é um retângulo que possui os lados de mesma medida.* *Ou* *Um quadrado é um quadrilátero que é ao mesmo tempo retângulo e losango*	*ABCD é um **quadrado** se ABCD é um retângulo e AB=BC=CD=DA*	
Todas as propriedades do retângulo e do losango valem para o quadrado: *1. Os lados opostos são paralelos.* *2. Os quatro lados tem o mesmo comprimento.* *3. Os lados consecutivos são perpendiculares* *4. As diagonais cortam-se ao meio , possuem o mesmo comprimento e são perpendiculares.*			

6.6.4 – RELATO DA APLICAÇÃO DA SESSÃO 6

Observamos que os alunos apresentaram dúvidas, debateram bastante para a tomada de decisão, apresentamos algumas questões:

- *" As diagonais, no paralelogramo, cortam-se sempre no meio, sempre ? Por quê?*
- *"As diagonais , no retângulo, têm o mesmo comprimento, sempre? Por quê?"*

É possível que o aluno desconfie desses resultados porque não mediu, explicamos que a *demonstração* determinava a validação desse resultado, porém nessa sessão não faríamos demonstrações, pois estávamos somente trabalhando as conversões do registro de representação. Acreditamos que começava com esses questionamentos o despertar para necessidade da *demonstração*.

Outro aspecto importante foi observar que esses objetos matemáticos (paralelogramo, retângulo, losango, quadrado) tinham uma característica visual muito forte, isto é, provavelmente, o aluno utilizava somente o registro da figura para identificar o objeto matemático não levando em consideração a definição na linguagem natural. De acordo com os seguintes questionamentos dos alunos:

- *“Um retângulo é um paralelogramo?”*
- *“Um quadrado é um retângulo?”*
- *“Um quadrado é um losango?”*

O professor pesquisador foi requisitado pelas duplas todo o período, para colaborar com a organização dos registros matemáticos. O tipo de exercício provocou bastante interesse nos alunos.

6.7 - SESSÃO 7

A sessão 7 será desenvolvida através da resolução de um problema, com *demonstração* de uma propriedade que utilizará algumas ferramentas estudadas nas sessões anteriores. Esse problema exige a quantidade maior de ferramentas para a sua *demonstração*.

6.7.1 – APLICAÇÃO DA SESSÃO 7

Todos os alunos estavam presentes. Eles trabalharam em dupla nas discussões. Porém, cada um teve que redigir o seu exercício.

Não entregou-se folhas digitadas eles tiveram que copiar do quadro todo o exercício. Finalizando a sessão fizemos o debate e entregamos a cópia das atividades com a resolução.

6.7.2 – CONTEÚDO

Atividade

Problema: *Seja um triângulo **ABC**, E ponto médio de* $\overline{AB}$ *e I ponto médio de* $\overline{BC}$. *Seja **F** simétrico de **A** em relação a **I** e **D** ponto médio de* $\overline{FC}$. *Demonstre que **BECD** é um paralelogramo.*

Complete o quadro abaixo:

LINGUAGEM NATURAL	***LÍNGUAGEM ALGÉBRICA***	***LINGUAGEM DA FIGURA***
Forma condicional do problema *Se.......................................* *...* *...* *...* *Então..................................* *...* *...*	*Hipótese* *Conclusão*	

Caixa de ferramentas

*D1- **M** pertencente a* $\overline{AB}$ *é **ponto médio** de* $\overline{AB}$ *se **AM**=**MB**= AB / 2.*

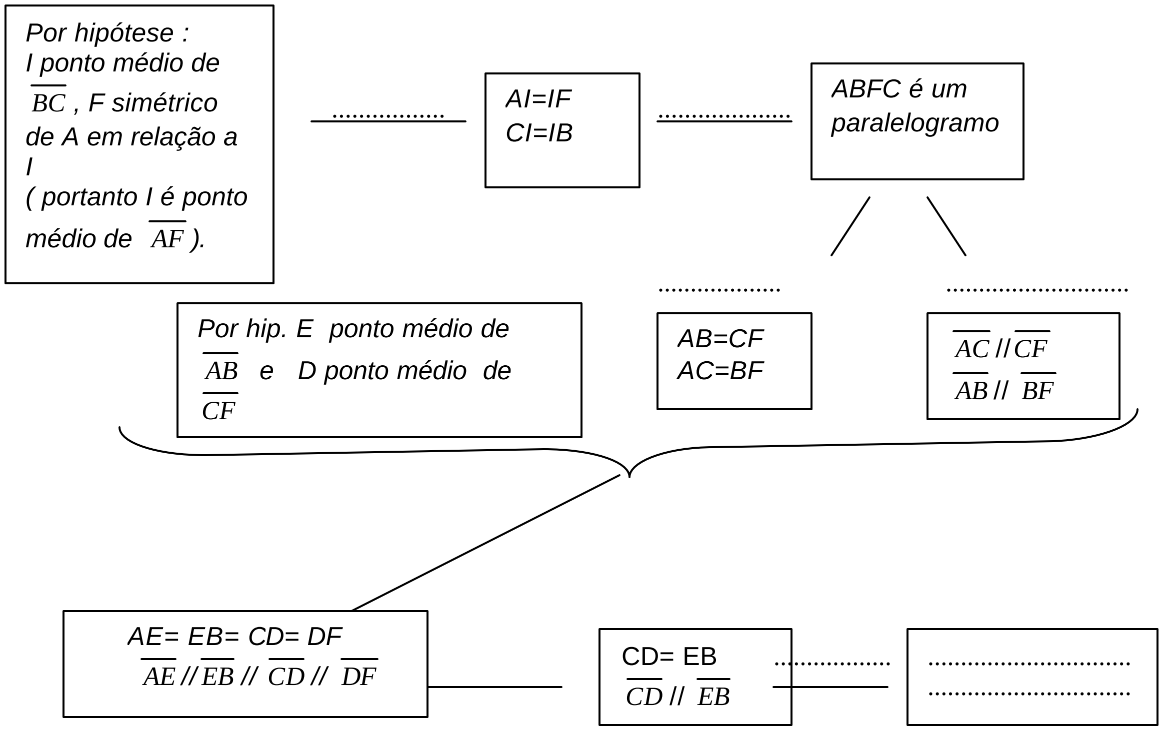
*D2- Um **paralelogramo** é um quadrilátero convexo cujos lados opostos são paralelos.*

P1 - Um quadrilátero convexo cujas diagonais cruzam-se em seus pontos médios é um paralelogramo.

P2 - Os lados opostos de um paralelogramo tem o mesmo comprimento.

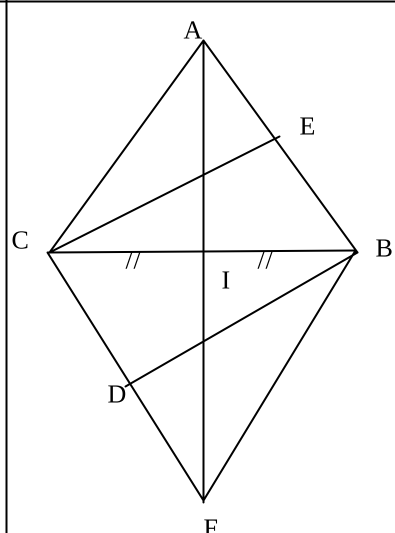
P3 – Um quadrilátero convexo que tem dois lados opostos paralelos e de mesma medida é um paralelogramo.

É pedido ao aluno que complete o esquema da demonstração

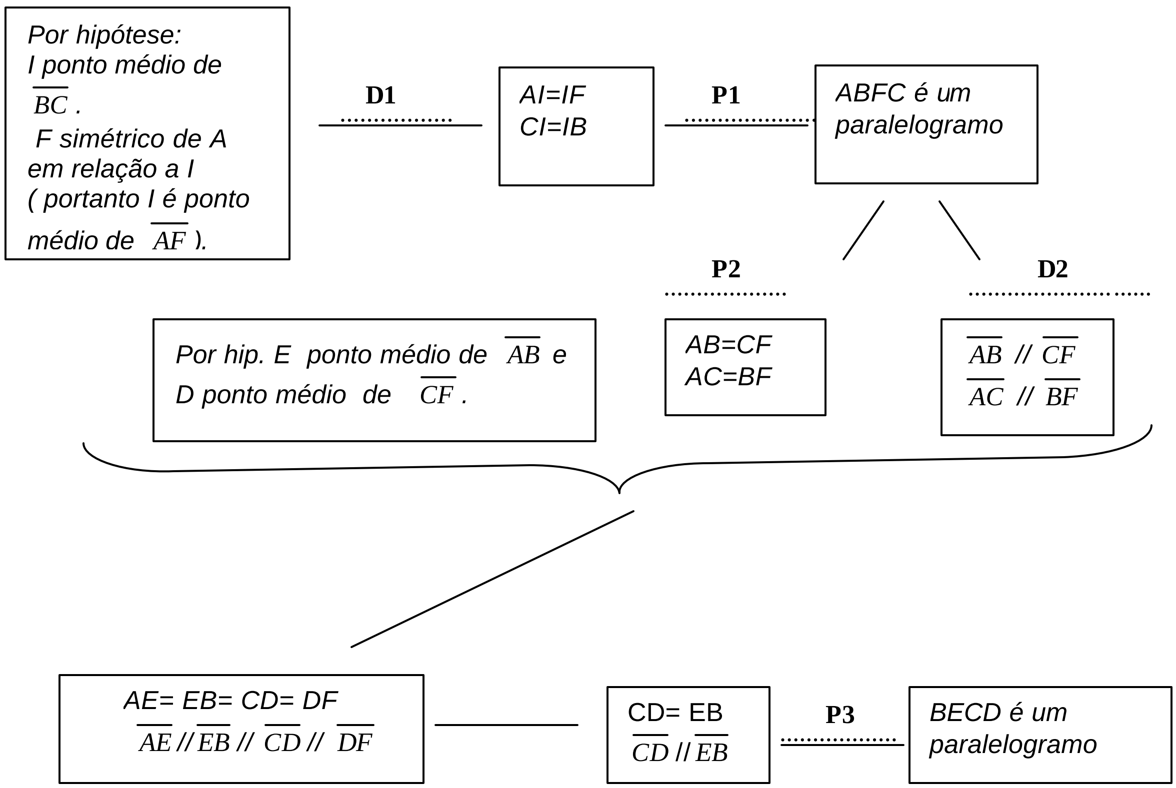


6.7.3 – ANÁLISE *A PRIORI*

Ë provável que o aluno chegue ao **sucesso** com as seguintes decisões

L. Natural	*L. Algébrica*	*L. da Figura*
Forma condicional do problema: *Se ABC é um triângulo,* *I é ponto médio de* $\overline{BC}$ *,* *F é simétrico de A em relação a I e D é ponto médio de* $\overline{FC}$ *,* *então BECD é um paralelogramo*	***Hipótese:*** *ABC é um triângulo* *BI=IC* *FI=IA* *FD=DC* *Conclusão:* *BECD é um paralelogramo*	

Esquema da demonstração



Redação da *demonstração*:

Por hipótese ABC é um triângulo, I é ponto médio de $\overline{BC}$ e F é simétrico de A em relação a I, portanto, I é ponto médio de $\overline{AF}$. Assim, por definição de ponto médio AI=IF e CI=IB.

Tem-se, ainda, que $\overline{AF}$ intercepta com $\overline{CD}$ em I, mas sabe-se pela propriedade 1, que um quadrilátero cujas diagonais cruzam-se em seus pontos médios é um paralelogramo, portanto ABFC é um paralelogramo.

Sendo ABFC um paralelogramo, tem-se por definição que seus lados opostos são paralelos, assim $\overline{AB}//\overline{CF}$ e $\overline{AC}//\overline{BF}$. Sabe-se ainda que, sendo ABFC um paralelogramo vale a propriedade que conclui que seus lados opostos tem o mesmo comprimento, portanto AB= CF e AC=BF.

Mas, por hipótese, temos que E é ponto médio de $\overline{AB}$ e d é ponto médio de $\overline{CF}$. Portanto, AE= EB= CD= DF e $\overline{AE}//\overline{EB}//\overline{CD}//\overline{DF}$ conclui-se, então, que CD=EB e $\overline{CD}//\overline{EB}$. Assim estamos satisfazendo as hipóteses da propriedade 3 , isto é, BECD é um quadrilátero que tem dois lados opostos de mesma medida. Portanto BECD é um paralelogramo.

Essa *demonstração*, exige que as apreensões estejam em sintonia com os registros de representação. Deste modo recorrer a figura "*pode ser uma economia de memória*". Visto que, a seqüência da *demonstração* processa-se simultaneamente com a mudança de forma da figura (de acordo com a utilização das hipóteses), como também a mudança de dimensão dos elementos utilizados para compor a figura.

Dentre as hipóteses do problema é dado que F é simétrico de A em relação a I, essa hipótese determina um ponto fora do triângulo que associado ao reconhecimento da questão central que é a conclusão, caracterizará na figura do paralelogramo.

A figura geométrica dessa atividade apresenta a sobreposição de figuras, isto é, os pontos médios **D** e **E**, determinam um novo paralelogramo, sobreposto ao paralelogramo inicial. A compreensão desse fato, segundo DUVAL é uma dificuldade para o estudante.

6.7.4 – RELATO DA APLICAÇÃO DA SESSÃO 7

Os alunos conseguiram estabelecer as hipóteses e conclusão da propriedade, mas precisaram de algumas orientações para compor a figura geométrica associada à linguagem matemática.

Quatro alunos foram ao quadro e cada um, a partir das hipóteses, fez parte da elaboração da figura.

Constatamos nessa sessão que os alunos já conseguem superar a dificuldade ligada às figuras sobrepostas.

Após trabalharmos a construção da figura em conjunto, observamos que os alunos conseguiram completar com sucesso o esquema da *demonstração*.

Entretanto, dois alunos observaram que abandonamos algumas hipóteses quando aplicamos a propriedade **P3**. O professor pesquisador aproveitou para novamente enfatizar que a questão central na *demonstração* é a articulação hipótese-teorema-conclusão.

A redação da *demonstração* foi feita com inúmeras intervenções do professor pesquisador. Observamos que alguns alunos recorreram a apontamentos de sessões anteriores. E outros, procuravam discutir com o seu colega de dupla.

Cinco alunos observaram que a *demonstração* estava explicando, de forma organizada, a verdade daquela afirmação.

Achamos importante que cada aluno escrevesse a resolução do seu exercício, pois o teste final seria individual.

6.8 – SESSÃO 8 (Pós teste)

O objetivo do pós-teste é avaliar a evolução das habilidades geométricas dos alunos, após as sessões da seqüência didática. Com essa finalidade, solicitamos que os alunos que fizessem a *demonstração* de uma propriedade geométrica. Os alunos devem organizar a redação da *demonstração*, portanto necessitam conhecer e selecionar as propriedades e as definições pertinentes ao problema e usar o raciocínio para articular essas ferramentas de forma lógica.

6.8.1 – APLICAÇÃO DA SESSÃO 8

Estavam presentes dez alunos os quais deveriam resolver a atividade proposta individualmente.

Oferecemos folhas em branco e eles deveriam copiar o problema do quadro. Foram escritos no quadro somente o enunciado da propriedade e a solicitação para demonstrá-lo. Não pedimos ao aluno que fizesse a figura nem Não pedimos aos alunos que fizessem a figura nem separassem as hipóteses e a conclusão, não oferecemos a caixa de ferramentas nem o esquema da *demonstração*. Deixamos que os alunos ficassem livres para suas tomadas de decisões e planejamento de suas idéias.

6.8.2 - CONTEÚDO

Problema : **ABCD** e **CDEF** são dois paralelogramos (suponhamos **A**,**B**,**E** e **F** não alinhados) demonstre que **ABFE** é um paralelogramo.

6.8.3 – ANÁLISE *A PRIORI*

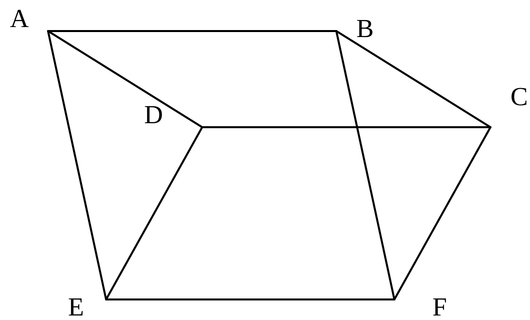
Esse exercício destina-se a averiguar a grau de habilidade do aluno ao trabalhar problemas de demonstrações com figuras sobrepostas, associadas a definição e propriedades relativas ao paralelogramo. Selecionamos esta propriedade, que foi enunciada na sessão 2, antes de apresentarmos a técnica da *demonstração* e as propriedades e definições dos quadriláteros. Escolhemos esse problema com o objetivo de que os alunos se utilizassem dos estudos feitos anteriormente sobre quadriláteros.

É provável que os alunos cheguem ao sucesso com as seguintes decisões:

Problema: *ABCD e CDEF são paralelogramos (suponhamos A, B, E e F não alinhados) demonstrar que ABFE é um paralelogramo.*

Hipóteses	*Conclusão*
ABCD é um paralelogramo	*ABFE é um paralelogramo*
CDEF é um paralelogramo	

Figura geométrica



Caixa de ferramentas que provavelmente será usada na demonstração:

D – *Um paralelogramo é um quadrilátero convexo cujos lados opostos são paralelos*
P1 - Os lados opostos de um paralelogramo tem o mesmo comprimento.
P2 – Um quadrilátero convexo que tem dois lados opostos paralelos e de mesma medida é um paralelogramo.

Provável esquema da demonstração

ABCD é um paralelogramo

....**D**......... → $\overline{AB} // \overline{CD}$, $\overline{AD} // \overline{BC}$

.....**P1**...... → *AB=CD*, *AD=BC*

CDEF é um paralelogramo

......**D**.......... → $\overline{CD} // \overline{EF}$, $\overline{DE} // \overline{CF}$

......**P1**............ → *CD=EF*, *DE=CF*

AB =EF e $\overline{AB} // \overline{EF}$

P2

ABFE é um paralelogramo

O aluno deve chegar ao sucesso com a seguinte redação da demonstração:

*Por hipótese **ABCD** é um paralelogramo, assim, por definição, $\overline{AB} // \overline{CD}$ e $\overline{AD} // \overline{BC}$, mas conhece-se a propriedade: “ Se **ABCD** um paralelogramo, então **AB**=**CD** e **AD**=**BC”**.*

Ainda por hipótese, CDEF um paralelogramo, conclui-se analogamente que $\overline{CD} // \overline{EF}$, $\overline{DE} // \overline{CF}$ e CD=EF e DE=CF. Portanto, satisfazem-se as hipóteses da seguinte propriedade: “Um quadrilátero que possui dois lados opostos paralelos e de mesma medida é um paralelogramo”.

*Assim, **AB=EF** e $\overline{AB}$ **//** $\overline{EF}$ conclui-se que **ABFE** é um paralelogramo.*

6.8.4 – RELATO DA APLICAÇÃO DA SESSÃO 8

Todos os alunos esboçaram uma tabela e organizaram as hipóteses e a conclusão, e realizaram as mudanças de registro de representação.

Observamos no decorrer das sessões as dificuldades dos alunos em visualizar figuras sobrepostas e esboçá-las. Por isso, resolvemos aplicar um problema com esse tipo de situação. Selecionamos uma propriedade que foi enunciada na sessão 2, antes de apresentarmos a técnica da *demonstração* e o estudo das propriedades dos quadriláteros Nesse exercício, constatamos o sucesso de todos os alunos na execução do esboço.

Nenhum aluno organizou a caixa de ferramentas nem o esquema da *demonstração*. É provável que a ausência da caixa de ferramentas e do esquema da *demonstração*, tenham causado dificuldades nas decisões dos alunos. Acreditamos que os alunos tenham organizado a redação da *demonstração* observando a figura geométrica , construindo as reconfigurações que achavam pertinentes para alcançar a conclusão. Somente dois alunos fizeram a redação completa da *demonstração*. Os outros 8 alunos fizeram a *demonstração* com êxito parcial; sete usaram somente a definição, um aluno usou a definição e o teorema mas não associou-os adequadamente na redação da *demonstração*.

7- ANÁLISE *A POSTERIORI*

- **Retomando as considerações da problemática**

Em nosso estudo preliminar sobre as concepções dos alunos, constatamos seus fracos desempenhos, no que diz respeito aos conceitos e habilidades geométricas. Levantamos a questão: *As escolhas didáticas dos professores, quando ensinam geometria, favorecem a apropriação dos conceitos e das habilidades geométricas?*

De acordo com nossa Fundamentação Teórica uma das soluções para os problemas ligados ao ensino-aprendizagem da geometria para alunos de 5ª a 8ª séries encontra-se na construção de situações, com os seguintes aspectos: figuras com um papel heurístico considerando-se as diferentes apreensões: perceptiva, discursiva, operatória e seqüencial; *demonstração* como parte integrante do processo ensino-aprendizagem dos conceitos/habilidades geométricos e do raciocínio lógico-dedutivo; à conversão dos registros de representação nas linguagens natural, algébrica e da figura.

Por isso, organizamos uma seqüência didática que investisse no estudo da técnica da *demonstração* contemplando os aspectos salientados no parágrafo anterior.

Elegemos como estratégia para o aprendizado da técnica da *demonstração* a resolução de problemas. As atividades se desenvolveram no decorrer da aplicação da seqüência didática, num processo de aprendizado através de discussão, distinção entre definição e propriedade, associação dos registros de representação e estabelecimento de um conceito usando uma definição ou uma propriedade.

De acordo com os resultados observados durante a aplicação da seqüência didática, constatamos uma nova postura questionativa dos alunos sobre a veracidade das propriedades geométricas e discussões entre eles frente às definições dos objetos matemáticos da geometria euclidiana.

Como já foi dito anteriormente, os alunos participantes de nossa pesquisa já tinham estudado o conteúdo de nossa seqüência didática em outro "cenário" sem as exigências do aprendizado da técnica da *demonstração*. Além disso, eles participavam de aulas de desenho Geométrico.

Mesmo assim, observamos dificuldades frente às atividades propostas, quanto ao desenvolvimento das seguintes habilidades geométricas: distinção entre definições e teorema, reconhecimento de hipóteses e conclusão de uma propriedade; entendimento da figura geométrica, associada a um teorema, como "âncora das hipóteses"; compreensão das mudanças de registro de representação; organização da prova e redação da *demonstração*.

Em face dessa situação, utilizando elementos da teoria de DUVAL e a definição de *demonstração* de BALACHEFF, procuramos realizar atividades com os alunos que os ajudassem a superar essas dificuldades.

Constatamos no decorrer da seqüência o crescimento da desenvoltura dos alunos em realizar as tarefas. Na sessão 7, os alunos já participavam voluntariamente de construções de figuras no quadro negro, ultrapassando a apreensão perceptiva, justificando todas as reconfigurações intermediárias que observavam, completando o esquema da *demonstração* com sucesso, também nessa sessão, os alunos já observavam que a *demonstração* explica a verdade da afirmação.

Os resultados do pós-teste, revelou-nos a habilidade dos estudantes em: desenvolver a figura; organizar as hipóteses; identificar a conclusão; destacar as definições e propriedades envolvidas na *demonstração* e organizar a redação da *demonstração*. Sendo que dois alunos conseguiram um acerto total e oito, um acerto parcial, pois deixaram de identificar uma das propriedades no desenvolvimento dessa *demonstração*.

- **Retomando as nossas hipóteses de pesquisa**

Em nossas hipóteses de pesquisa expomos uma alternativa metodológica para a introdução do aprendizado da técnica da *demonstração*, mais associada a uma hierarquia de tarefas do que a uma hierarquia de conteúdos.

Salientamos a hierarquia de tarefas em um esquema de atividades nas quais procuramos favorecer a exploração das várias etapas da resolução de problemas com demonstrações. Conduzimos os alunos por diferentes caminhos do pensamento geométrico. Iniciamos com o reconhecimento do estatuto dos postulados, definições e teoremas. Evidenciamos a importância da distinção das hipóteses e da conclusão em uma propriedade. Exploramos as mudanças do registro de representação(nas linguagens natural, da figura e algébrica). Na linguagem da figura, apresentamos o estatuto da figura geométrica através de exemplos, expondo as várias possibilidades de desenhos distintos (usamos os desenhos feitos nas tarefas pelos próprios alunos), dos quais façam parte da mesma classe de figuras geométricas. Procuramos associar à figura um esquema de *demonstração* estimulando a visualização e o raciocínio. Desenvolvemos a resolução dos problemas, a partir das hipóteses com metas à conclusão; para isso, utilizamos um esquema de *demonstração*, o qual estabelece a identificação de subproblemas e as ferramentas necessárias para a sua resolução, determinando a aquisição parcial da prova. Evidenciamos a importância da coordenação de todos os subproblemas, no tratamento completo das informações dadas no enunciado do problema, determinando a aquisição total da prova. Finalmente orientamos a redação da *demonstração*.

Outro aspecto importante é a identificação da propriedade ou da definição compatível com a solução de um subproblema, essa identificação nem sempre era evidente para todos os alunos. Porém, procuramos conduzir o aluno, durante a aplicação da seqüência, à compreensão da situação do problema. Para isso, usamos a figura associada ao esquema da *demonstração* com o intuito de desenvolver as várias apreensões perceptivas, discursivas e operatórias. Os alunos, gradualmente, efetuaram as mudanças de tratamento no registro de representação algébrica e da figura. Acreditamos que a mudança de tratamento (interna ao registro), dificulta a "substituição" das hipóteses da propriedade pelas hipóteses do problema e também a identificação dos atributos essenciais e específicos de um objeto matemático. Porém constatamos, a partir das decisões dos alunos e do tipo questionamento, que as dificuldades, relativas às mudanças de registro, foram diminuindo progressivamente com o decorrer das sessões.

Reconhecemos a importância da caixa de ferramentas, no decorrer da aplicação da seqüência didática, pois as suas ferramentas colaboravam com a soluções dos subproblemas. Porém, apresentamos nas caixas somente as ferramentas necessárias e suficientes para a solução dos subproblemas. Julgamos que para dar continuidade ao aprendizado da *demonstração* é necessário que o aluno não apenas manipule as ferramentas apresentadas nas caixas, mas também desenvolva a capacidade de selecionar, entre as definições e propriedades que ele estudou, as ferramentas adequadas à resolução do problema. Constatamos no pós-teste essa dificuldade de utilizar as ferramentas necessárias à resolução do problema, pois só dois alunos conseguiram, com sucesso, usar as ferramentas adequadas para a organização da *demonstração*. A respeito do desenvolvimento dessa habilidade, constatamos a importância de: identificar as ferramentas (reconhecer as hipóteses e conclusão das propriedades; estabelecer as definições dos objetos envolvidos no problema) e ter a habilidade de articular essas ferramentas adequadamente. Esse exercício de raciocínio exige bastante discussão e prática sistemática de problemas de geometria com *demonstração*.

Acreditamos que a coordenação de todos os subproblemas seja uma tarefa difícil para o aluno. Pois, se por um lado, o esquema da *demonstração* colabora com a identificação dos subproblemas, por outro, não delega ao aluno o planejamento da organização desses subproblemas. Nesse sentido, percebemos a necessidade de tarefas posteriores às atividades desenvolvidas em nossa seqüência didática que propiciassem os alunos a organizarem esquemas de *demonstração*.

- **Retomando algumas considerações de DUVAL**

Duval orienta três níveis de problemas:

Nível (1) - aqueles em que há congruência operatória da figura e um tratamento matemático, neste caso uma apreensão discursiva explícita não é necessária.

Nível (2)- aqueles em que a apreensão discursiva é necessária, porque não há mais congruência ou porque é explicitamente pedido como justificativa.

Nível (3) - aqueles que exigem mais que uma apreensão discursiva, o recurso aos esquemas formais lógicos específicos.

Em nossa seqüência didática contemplamos somente os problemas de níveis (1) e (2).

Compreendemos como problemas do tipo (1), aqueles em que a figura induz, claramente, o aluno (através de uma propriedade geométrica pertinente) à solução do problema.

Por outro lado, os problemas do tipo (2) exigem mais do aluno: análise da figura, associada à coordenação dos registros e à compreensão global do problema. Processo que deve ser feito "passo a passo", visto que, identificam a conclusão, porém o "caminho" para atingi-la durante a *demonstração* não se apresenta explícito. É preciso, assim, recorrer ao "discurso teórico" para organizar os passos da coleta e seleção de informações e a identificação dos subproblemas e suas justificativas.

DUVAL, em sua análise, destaca as condições facilitadoras do aprendizado:

- Prática sistemática dos problemas do nível (1).

- Distinção entre apreensão perceptiva da discursiva.
- Representação de uma rede de propriedades formando uma rede semântica de todos os conhecimentos solicitados na *demonstração*.
- Compreensão da diferença entre uma argumentação no quadro da prática natural do discurso e a articulação dedutiva.

Procuramos no decorrer das sessões organizar atividades que privilegiassem as condições facilitadoras de DUVAL. Porém, acreditamos que alguns alunos, terminada a seqüência ainda apresentavam dificuldades em diferenciar a articulação na prática natural do discurso e a articulação dedutiva. Já que, no Pós-teste, sete alunos utilizaram apenas a definição de paralelogramo desconsiderando as propriedades na execução da *demonstração*.

- **Retomando os obstáculos levantados em nossa Fundamentação Teórica**

DUVAL (1995), nos orienta que a coordenação dos diferentes registros de representação ligados ao tratamento dos conhecimentos não se operam espontaneamente, mesmo ao curso de um ensino que mobilize essa diversidade de registros. Levando em consideração essas orientações, procuramos, no desenvolvimento da seqüência, organizar diversas atividades em que se utilizassem as mudanças dos registros de representação. Os resultados em cada sessão confirmam a teoria de DUVAL, pois, apesar do extenso trabalho realizado, ainda observamos alguns alunos com dificuldades em coordenar os diferentes registros de representação.

Concordamos com DUVAL, quando afirma que a figura pode ser um obstáculo ao aluno, pois ele pode abandonar ou inserir hipóteses de acordo com o desenho. Observamos no teste intermediário, assim como no decorrer das sessões, que a sobreposição de figuras geométricas, para alguns alunos determinava alterações nas hipóteses.

Além da observação anterior sobre a figura, DUVAL argumenta que os alunos acham inútil terem de demonstrar uma propriedade que “se vê” na figura. Observamos, no pós-teste, que sete alunos organizaram a redação da *demonstração* a partir da figura e da definição de paralelogramo. É possível que cada um deles tenha considerado o que “viu” na figura como suficiente para a *demonstração*.

Ao estudarmos as dificuldades geradoras de obstáculos aos alunos para o aprendizado da *demonstração* em nossa fundamentação teórica, observamos que: os objetos matemáticos e os teoremas solicitados por uma *demonstração* associados ao registro de representação, em uma rede de propriedades lógicas, pode constituir um obstáculo ao aprendizado da *demonstração*. Com a finalidade de ajudar os alunos a superarem esse obstáculo, organizamos o esquema da *demonstração* e apresentamos a caixa de ferramentas em nossa seqüência didática. Ainda assim, observamos no decorrer da aplicação da seqüência a dificuldade de alguns alunos em compreender essa rede de propriedades lógicas na técnica da *demonstração*; entretanto, no pós-teste, constatamos que dois alunos conseguiram desenvolver a *demonstração* com sucesso, conseguindo assim superar essa dificuldade.

Reconhecemos a força dos obstáculos didáticos no decorrer da aplicação da seqüência, pois os alunos estavam acostumados a uma geometria de medidas e construção envolvendo aplicações de fórmulas e cálculos. Tivemos que incentivar os alunos a desenvolverem uma nova maneira de pensar, pois eles deveriam justificar o porquê de cada passagem do exercício com definições ou propriedades. Os alunos resistiram um pouco no início da seqüência didática a aceitar essa passagem da geometria empírica para a geometria dedutiva.

Procuramos nas várias atividades durante a seqüência didática, ajudar os alunos a superar o obstáculo lingüístico. Em quase todas as sessões, apresentamos textos entremeados com pequenas questões, com definições e propriedades. Observamos a leitura incorreta das definições levando à não compreensão dos objetos matemáticos. Procuramos fazer leituras com todo o grupo chamando a atenção à compreensão dos enunciados. Os termos pouco usados da geometria, no ensino da mesma, são muitas vezes base de confusão e de dificuldades para o aluno: como por exemplo mediatriz, ângulos congruentes, triângulo isósceles e outros como observamos no decorrer da seqüência didática, isto prejudica a elaboração da figura, bem como o entendimento das hipóteses e conclusão.

Os resultados das sessões confirmam que a redação da *demonstração* constitui um obstáculo, o aluno pode raciocinar corretamente, enxergar a solução; mas ter dificuldades em formalizar seus argumentos de modo preciso. Com o intuito de ajudar o aluno a superar esse obstáculo, apresentamos inicialmente frases misturadas aleatoriamente, ele deveria ordená-las de acordo com o esquema da *demonstração* e a partir delas formalizar a redação da *demonstração*. Observamos que essa estratégia inicial foi de grande valia para ajudar os alunos no desenvolvimento da redação da *demonstração*. Porém, na sessão 7 não apresentamos as frases para serem ordenadas na *demonstração* e constatamos que os alunos sentiam-se bloqueados em desenvolver a redação a partir do esquema da *demonstração*, por não encontrarem um vocabulário apropriado para redigir adequadamente as soluções dos subproblemas durante a elaboração da *demonstração*. Assim, a redação da *demonstração* foi feita com inúmeras intervenções do professor pesquisador.

- **Retomando as nossas expectativas, após aplicação da seqüência didática**

Nossa expectativa ao organizarmos a seqüência didática era que ao seu término o aluno fosse capaz de: associar os diferentes tipos de registros de representação; distinguir o estatuto da definição e do teorema; desenvolver a capacidade de raciocinar logicamente em geometria; compreender a técnica da *demonstração* e redigir uma *demonstração*. De acordo com o desempenho dos alunos no decorrer da aplicação da seqüência, constatamos que eles terminaram as atividades conseguindo associar os diferentes tipos de registros de representação, bem como conseguiram reconhecer o estatuto da definição e do teorema.

Fomos um pouco pretensiosos em admitir poder desenvolver a capacidade de raciocinar logicamente em geometria, através de uma seqüência didática, com oito sessões. Acreditamos que dois alunos demonstraram essa habilidade no pós-teste para o problema em questão; porém não podemos afirmar que desenvolveram essa capacidade de raciocínio lógico em geometria. As atividades desenvolvidas procuraram explorar a lógica na técnica da *demonstração* , assim sendo, acreditamos que contribuímos para evidenciar novos caminhos de pensar em geometria.

A partir da seqüência didática, os alunos foram conduzidos a uma compreensão da técnica da *demonstração*, pois na sessão 6 eles já evidenciavam a importância da *demonstração* para provar a verdade das propriedades apresentadas, bem como na sessão 7, em que conseguiram desenvolver, com algumas intervenções do professor pesquisador, individualmente a redação da *demonstração*. Destacamos as seguintes intervenções: auxiliamos na organização da figura (procurando estimular que fossem ao quadro e construíssem aos poucos a figura de acordo com as hipóteses); instruímos os alunos que no decorrer da resolução de alguns problemas, diferentes situações poderiam ocorrer, sendo necessária à seleção de resultados dos subproblemas, para centrar em metas na conclusão.

- **Algumas variáveis importantes, porém de difícil administração**

No decorrer da aplicação da seqüência didática, trabalhamos em duplas e observamos que se por um lado, o trabalho em dupla desenvolve a discussão com o parceiro (durante o processo de descoberta e de tomadas de decisão), por outro, o aluno da dupla que não escreve apresenta mais dificuldades em compreender as mudanças dos registros de representação. Constatamos, na 7ª sessão, as dificuldades de um dos parceiros das duplas em desenvolver o seu exercício com redação individual.

Uma variável difícil de administrar é a ausência do aluno durante a aplicação da seqüência didática. Essa ausência, além de prejudicar o parceiro que tinha de trabalhar individualmente, prejudicava o próprio aluno, pois, cada sessão trazia contribuições para a próxima sessão.

Outro aspecto importante é a falta de compromisso do aluno com as atividades desenvolvidas. Pois, não terá uma nota no final da seqüência e as atividades não compõem o planejamento de matemática da referida escola. Esse comportamento do aluno é conseqüência do contrato didático realizado em sala de aula. Por isso mesmo, o aluno não se empenha em dedicar um tempo, fora do horário de aplicação da seqüência, para estudar os conteúdos vistos nas sessões. Apesar de nossa finalidade ser a introdução da técnica da *demonstração* através de resolução de problemas, foi essencial, paralelamente, desenvolver um embasamento teórico como suporte à seleção das ferramentas necessárias à resolução desses problemas.

8 - VALIDAÇÃO

Consideramos que os alunos avançaram em seus conhecimentos em geometria pois demonstraram compreender:

- a figura como âncora dos entes matemáticos dados nas hipóteses;
- a utilização dos registros de representação;
- a ordenação lógica das informações que compõem a prova.
- o estatuto da definição e do teorema;
- a importância da *demonstração* para explicar logicamente as propriedades da geometria.
- a importância da figura geométrica como apoio ’*ha economia de memória*” durante o desenvolvimento da *demonstração*.

Devido às considerações acima, concluímos ser válida a seqüência didática adotada para esse grupo de alunos.

CAPÍTULO VI

CONCLUSÕES

Através de nosso levantamento bibliográfico, observamos que muitos pesquisadores enfatizam a importância do ensino da geometria, em especial da geometria com demonstrações. No Brasil, constata-se o "*abandono da geometria no ensino fundamental*", conforme VIANNA (1988), PAVANELLO (1993), SANGIACOMO (1996), e GOUVÊA (1998).

A partir de nossos estudos, tanto da Proposta Curricular para o ensino de matemática 1º Grau (Ensino Fundamental) do Estado de São Paulo quanto dos Parâmetros Curriculares Nacionais, observamos a orientação para o uso das demonstrações em geometria. Entretanto, nos livros didáticos, em geral, não se dá ênfase à introdução de seu aprendizado.

Em face dessa situação, fomos levados a pesquisar sobre o ensino-aprendizado da técnica da *demonstração*, organizar e aplicar uma seqüência didática para o seu aprendizado.

Nessa pesquisa, procuramos investigar se a abordagem adotada por nossa seqüência favorecia a introdução do aprendizado da técnica da *demonstração*.

As análises das diversas sessões da seqüência didática determinam conclusões locais que fundamentam nossas conclusões globais, sendo que, essas conclusões estão de acordo com nossas hipóteses de pesquisa, conforme capítulo IV, intitulado Problemática e Hipóteses de Pesquisa.

Planejamos atividades que explorassem a introdução da técnica da *demonstração* mais associada a uma hierarquia de tarefas do que a uma hierarquia de conteúdos, isto é, elaboramos um esquema com uma graduação de tarefas, ordenadas de modo que o aluno se aproprie das ferramentas que são utilizadas na *demonstração*, os registros de representação, a identificação dos subproblemas, das ferramentas necessárias para resolvê-los; compreenda a organização, de modo lógico, das provas parciais e da administração total dessas provas através da redação da *demonstração*.

Assim, nossa seqüência de tarefas, apoia-se nas representações semióticas e no reconhecimento do estatuto das definições, postulados e teoremas pelos alunos. De acordo com a teoria de DUVAL, *as representações semióticas além de serem necessárias para fins de comunicação são essenciais para as atividades cognitivas do pensamento*.

No decorrer de nossa seqüência didática, *enfatizamos o estatuto das figuras geométricas*, comparando e debatendo com os alunos sobre as figuras esboçadas por eles, durante a resolução dos problemas propostos. Parece que os alunos compreenderam que a figura é a *âncora das hipóteses, para isso,* procuramos evidenciar *as apreensões da figura seqüencial, perceptiva, discursiva e operatória.*

A partir do teste intermediário, podemos constatar a evolução dos alunos frente às dificuldades apresentadas inicialmente. Destacamos entre elas, na execução das tarefas: compreensão do estatuto do teorema (identificação das hipóteses e conclusão), construção da figura (habilidade no comando das hipóteses na sua execução), utilização de todas as informações do problema em uma organização lógica (consegue usar corretamente as ferramentas no esquema da *demonstração*), redação da *demonstração* (Nove alunos elaboraram corretamente a redação da *demonstração*).

Os resultados apresentados nas sessões evidenciam *a identificação de subproblemas, bem como, a aquisição parcial da prova* pelos alunos. Quanto ao *tratamento completo às informações e à aquisição total da prova,* constatamos que entre os dez alunos, que fizeram o teste final, dois alunos elaboraram a redação da *demonstração* com total sucesso. Sendo que, os outros conseguiram um êxito parcial.

Procuramos construir situações para a sala de aula que favorecessem a introdução à técnica da *demonstração*. É provável que os alunos ao término da seqüência didática, tenham adquirido *uma melhor compreensão dos conceitos geométricos e ampliação de suas habilidades geométricas.*

Acreditamos que a abordagem seguida pela seqüência didática cumpriu seu papel de possibilitar a introdução da técnica da *demonstração* em geometria, baseada na definição de *demonstração* de BALACHEFF.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Realizando uma avaliação crítica do nosso estudo, notamos que poderíamos aperfeiçoá-lo. Reconhecemos que, ampliando a duração da aplicação de nossa seqüência, possibilitaríamos o trabalho de certos pontos com menores intervenções do professor pesquisador. Dando oportunidades ao processo da descoberta para todos os alunos, provavelmente, levaríamos esses alunos à obtenção de melhores resultados.

Achamos válido trabalhar com os registros de representação em um número grande de atividades. Procuramos também apresentar as definições e propriedades a partir dos vários registros de representação. Assim procuramos nos orientar pela teoria de DUVAL para possibilitar a apreensão conceitual dos objetos matemáticos em geometria, pelos nossos alunos.

Apesar das variadas atividades que exploravam as mudanças do registro de representação, constatamos a evidente dificuldade que ocorreu no domínio do registro algébrico. Porém, acreditamos ser natural que os alunos não apresentassem facilidade na compreensão desse tipo de linguagem por ser pouco usual em seu cotidiano de sala de aula.

Gostaríamos de ter adaptado nossa seqüência didática às propostas atuais, no que diz respeito ao uso de "softwares" educacionais como o CABRI-GÉOMÈTRE II, o que motivaria e ajudaria mais os alunos, na visualização do objeto matemático. Entretanto, observamos que essa escola não possuía sala com computadores para o uso dos seus alunos, na época da aplicação dessa seqüência, assim, esse tipo de atividade tornou-se inexeqüível.

Outro aspecto importante, referido nos Parâmetros Curriculares Nacionais, seria construir com os alunos um caminho que a partir de experiências concretas os levassem a compreender a importância e a necessidade da prova para legitimar as hipóteses levantadas. Entretanto, buscamos priorizar os aspectos centrais apresentados na Teoria de DUVAL (conforme Fundamentação Teórica) para a introdução do aprendizado da *demonstração*.

Vale salientar que os alunos que participaram dessa seqüência, tinham aulas de geometria e desenho geométrico desde a 5ª série. Portanto, é possível que a aplicação dessa seqüência a estudantes sem esses preparos anteriores não atinja os bons resultados conquistados nesta pesquisa.

Contudo, gostaríamos de acrescentar que os resultados aqui obtidos determinam a possibilidade de desenvolver a introdução da técnica da *demonstração* a alunos da oitava série do Ensino Fundamental. Acreditamos que existem outras formas eficazes de se introduzir a técnica da *demonstração*, porém para esse grupo de alunos a nossa seqüência apresentou elementos facilitadores.

Frente a algumas dificuldades constatadas no decorrer da aplicação dessa seqüência didática, é de nosso interesse continuar os estudos sobre a introdução da técnica da *demonstração* procurando aperfeiçoar essa seqüência didática.

No que tange às finalidades, acreditamos ser preciso dar atenção a outro problema: *a necessidade de uma formação adequada do professor para trabalhar a demonstração em geometria, a fim de que os alunos possam se apropriar da técnica da demonstração em geometria, no ensino fundamental.*

REFERÊNCIAS
BIBLIOGRÁFICAS

[1] AG ALMOULOUD, Saddo. *L'ordinateur, Outil d'aide à l'apprentissage de la demonstration et de traitement de données didactiques.* Thése de l'Université de Rennes I, IRMAR,1992.

[2] ______________ *Aide logicielle à la résolution de problèmes avec preuve: des séquences didactiques pour l'enseignement de la démonstration.* RDM, Vol 12, nº 23, 1992.

[3] ______________ DEFI: *outil informatique de révélation du rôle de la figure et d'apprentissage de la demonstration au collège*. REPÈRES – IREM. n. 9, octobre 1992, pp. 35-60.

[4] _________________ *Fundamentos da didática da matemática e metodologia de pesquisa. CEMA (Caderno de Educação Matemática)*, Vol. III, PUC, São Paulo, 1997.

[5] ARSAC, Gilbert. *Les recherches actuelles sur l'apprentissage de la démonstration et les phénomènes de validation en France*. Recherches en didactique des Mathématiques, Vol.9, n.3, p.247-280, La Pensée Sauvage Grenoble ,1988.

[6] ______________ *L'origine de la démonstration: essai d'Épistémologie didactique.* Recherches en Didactique des Mathemátiques, Vol 8, n. 3, p. 267-312, La Pensée Sauvage Grenoble, 1987.

[7] BACHELARD, G. . *La formation de l'esprit scientifique*. 12ème édition, Vrin, Paris, 1983.

[8] BALLACHEFF, N.. *Preuve et demonstration en mathématiques au collège*. Recherches en didactique des Mathématiques. Vol 3.3, p.261-304, La Pensée Sauvage Grenoble ,1982.

[9] ______________ *Processus de preuve et situations de validation.* Educational Studies in Mathematics, vol.18, n.2, Mai 1977, p.147-176,1987.

[10] ______________ *Une étude des processus de preuve en mathématiques chez des éleves de collège.* Thèse d'état, Grenoble: Université Joseph Fourier,1988.

[11] BARBIN, E.. *La demonstration mathématique: significations epistemologiques et questions didactiques.* Bulletin de l'APMEP, n.366, 1988.

[12] BONNEFOND, G. & DAVIAND, D. & REVRANCHE, B.. *Pythagore Mathématiques*. 4e , Hatier, Paris, 1992.

[13] BKOUCHE, R.. *De la démonstration*. IREM de Lille.

[14] ______________ *Enseigner la géometrie, pourquoi?* IREM de Lille, Repères n.1, p. 92-102,1990.

[15] BROUSSEAU, G.. *Les obstacles épistemologiques et les problèmes en mathématiques*. Recherches en Didactique des Mathémathiques, vol.4, n.2, La Pensée Sauvage ,Grenoble ,1983.

[16] ______________ *Fondements et méthodes de la Didactique des Mathématiques.* Recherches en Didactique des Mathématiques, vol.7, n.2, Ed. La Pensée Sauvage, Grenoble, 1986.

[17] ______________ *Le contrat didactique: le milieu*. Recherches en Didactique des Mathématiques, vol.9, n.3, p. 309-336, La Pensée Sauvage, Grenoble, 1988.

[18] CAVEING M.. *La constitution du type mathématique de l'idéalité dans la pensée grecque*. Thèse, Université Paris 10, Atelier national de reproduction des thèses, Université Lille 3, 1977.

[19] ______________ *Revue d'histoire des sciences. A propos des débuts des mathématiques grecques. Reflexions sur l'ouvrage de A. Szabo.* XXXII/2, p. 163-168, 1979.

[20] CHEVALLARD,Y. & JOHSUA, M.. *La transposition didactique*. Édition de la Pensée Sauvage, Grenoble, 1991.

[21] CHAUÍ, M.. *Introdução à História da Filosofia: Dos pré-socráticos a Aristóteles*. Vol 1, 1994.

[22] CAVALCA, A.. *Espaço e representação gráfica: visualização e interpretação*. Dissertação de Mestrado. PUC-SP,1997.

[23] DOUADY, R.. *Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement*. Repères, IREM, n.6, Topiques Editins, Janvier, 1992.

[24] DUVAL, Raymond. *Régistres de répresentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée.* Annales de Didactique et des Sciences Cognitives, vol.V, p.37-65, IREM de Strasbourg, 1993.

[25] _____________ *Approche cognitive des problemes de geometrie en termes de congruence*. Annales de Didactique et de sciences cognitives. IREM de Strasbourg, Vol.1,p.57-74.,1988.

[26] _____________ *Geometry from a cognitive point of view*. Artigo 1995.

[27] _____________ *Semiosis et pensée humaine*. Peter Lang, 1995.

[28] _____________ *Pour une approche cognitive de l'argumentation*. Annales de didactique et de sciences cognitives, Vol.3, p. 195-221, IREM de Strarsbourg, 1990.

[29] DUVAL, R. & EGRET, M.. *Comment une classe de quatrième a pris conscience*

de ce qu'est une demarche de demonstration. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives., Vol.2, p. 41-64, IREM de Strasbourg ,1989.

[30] _____________ *L'organisation deductive du discours. Interaction entre Struture de surface dans láccès à la demonstration*. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. Vol.2, IREM de Strasbourg, 1989.

[31] FRANCHI, A., MACHADO, S. & outros. *Educação Matemática: uma introdução.* EDUC, São Paulo,1999.

[32]GOUVÊA, F.. *Aprendendo e ensinando geometria com a demonstração: uma contribuição para a prática pedagógica do professor de matemática do ensino fundamental*. Dissertação de Mestrado, PUC-SP, 1998.

[33] HENRY, M.. *Didactique des Mathématiques: une présentation de la didactique*

en vue de la formation des enseignants. Besançon, IREM, 1991.

[34] HOUDEBINE, J.. *Démontrer ou ne démontrer, voilà la question*. Repères - IREM, n.1,p.5-27,Topiques Editions, 1990.

[35] KELLER O. *Essai sur le calcul et l',álgèbre en Egypte antique*. IREM de Lyon, doc. N. 57,(IREM,43, bvd du 11 nov. 1918, 69622 Villeurbanne CEDEX), 1986.

[36] LABORDE, Colette. *Enseigner la Géométrie: permanences et révolutions*. Bulletin APMEP, nº 396, Décembre 1994.

[37] MARTZLOFFJ.C.. *Histoire des mathématiques chinoises.* Masson, Paris, 1988.

[38] MULLER, Jean-Pierre. La démonstration en géométrie: en quatrième et en troisième.REPERES-IREM.N.15,avril,Topique Editions,1994.

[39] PAVANELLO, R. M.. *O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e conseqüências.* Revista Zetetiké, ano 1, n. 1, p. 7-17, UNICAMP, 1993.

[40] POGORÉLOV A. V.. *Geometria Elemental*. Trad. De Carlos Veja. Moscú, Mir, 1974.

[41] SANGIACOMO, Lígia. *O processo da mudança de estatuto: de desenho para a figura geométrica. Uma engenharia didática com o auxílio do Cabri-*

Géomètre. Dissertação de Mestrado. PUC-SP. São Paulo, 1996.

[42] SOUZA, Paulo N.P. & SILVA, Euripides. B.. *Como entender e aplicar A Nova LDB – Lei nº9.394/96.* Ed. Pioneira, São Paulo,1997.

[43] SZABO A.. *Les débuts des mathématiques grecques.* Vrin, Paris, 1977.

[44] VIANNA, CLAUDIA. C. SEGADAS. *O papel do raciocínio dedutivo no ensino da matemática*. Dissertação de Mestrado. Univ. Paulista "Campus" de Rio Claro. Rio Claro, São Paulo, 1988.

[45] VAN DER WAERDEN B.L.. *Geometry and algebra in ancient civilizations*. Springer, Berlin,1983.

LIVROS ANALISADOS NO ESTUDO DA TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA (cap. III)

[46] *LEI Nº 9.394/96 DIRETRIZES E BASES DA EDUCAÇÃO NACIONAL*, de 20 de Dezembro de 1996. Decretada pelo Congresso Nacional e Sancionada pelo Presidente da República.

[47] *PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS: 3º E 4º CICLOS DO ENSINO FUNDAMENTAL- MATEMÁTICA.* Brasília, MEC, 1998.

[48] SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO - SÃO PAULO COORDENADORIA DE ESTUDO E NORMAS PEDAGÓGICAS (1988): *Proposta curricular para ensino de Matemática 1º Grau*. 1988.

[49] AVERBUCH A. & GOTTLIEB, F. & SANCHES I. & Liberman, M.. *Matemática saber e fazer*. 7ª série, Editora Saraiva, São Paulo, 1985.

[50] BIANCHINI, E.. *Matemática*. 7ª série, Editora Moderna, 1996.

[51] BONGIOVANNI & VISSOTO & LAUREANO. *Matemática Vida*, 7ª série, Editora Ática, São Paulo, 1992.

[52] IEZZI & DOLCE & MACHADO. *Matemática e Realidade*. 7ª série, Editora Atual, São Paulo, 1992.

[53] IMENES & LELLIS. *Matemática*, 7ª série, Editora Scipionne, São Paulo, 1997.

[54] NAME,M.. *Tempo de matemática*. 7ª série, Editora do Brasil, São Paulo,1996.

[55] PIERRO, S.. *Matemática conceitos e história*. 7ª série, Editora Scipione, São Paulo,1995.

[56] SILVEIRA & MARQUES. *Matemática*. 7ª série, Editora Moderna, São Paulo, 1995.

[57] LINDQUIST M. & SHULTE A.. *Aprendendo e ensinando Geometria*. 7ª série, Editora Atual, 1994.

[58] MORI, I. E ONAGA, S.. *Para aprender matemática*. 7ª série, Editora Saraiva, 1991.

ANEXOS

PUC – SP / Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática

Projeto: *Demonstração* em Geometria [1] - Sessão .... - Data .../.../1998

<u>Observações:</u>

- Quais os questionamentos dos alunos?

....

....

....

- Quais as dificuldades encontradas ao resolver os problemas?

....

....

....

- Quais as reações dos alunos frente as situações?

....

....

....

- Quanto as interações sociais entre os alunos: Será que somente um está resolvendo?

....

....

....

- Dos 14 alunos previstos no projeto, existem ausentes? Quantos?

....

....

....

[1] Pesquisadora : Prof. Elizabeth Gervazoni Silva de Mello
Orientador : Prof Dr. Saddo Ag Almouloud