Rosana Nogueira de Lima

Resolução de equações de terceiro grau através de cônicas

Mestrado em EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PUC – SP
1999

Rosana Nogueira de Lima

Resolução de equações de terceiro grau através de cônicas

Dissertação apresentada como exigência parcial para a obtenção do título de MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA à Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, sob orientação do Professor Doutor Saddo Ag Almouloud.

PUC – SP
1999

BANCA EXAMINADORA

Dedicatória

Dedico este trabalho a todos os professores e pesquisadores em Educação Matemática que tentam procurar caminhos melhores para ensinar seus alunos.

Agradecimentos

Ao Professor Doutor Saddo Ag Almouloud, pelo trabalho de orientação, desenvolvido com dedicação e amizade.

À Professora Doutora Sônia B. C. Igliori e à Professora Doutora Circe M. S. S Dynnikov, pelas contribuições para a elaboração e o enriquecimento deste trabalho.

À Professora Doutora Sandra M. P. Magina, por participar da Banca Examinadora como suplente.

Aos professores do Programa de Pós Graduação em Educação Matemática da PUC-SP, pelo incentivo durante o curso.

À Professora Doutora Maria Cristina S. A. Maranhão, por intervir para que este trabalho pudesse ser estudado pelos alunos do Colégio Vera Cruz.

À Direção da PUC-SP e do Colégio Vera Cruz, por autorizar a aplicação da seqüência didática, e ao Professor Roberto Perides Moisés do Colégio Vera Cruz, por ceder suas aulas.

Aos monitores do laboratório de informática do Colégio Vera Cruz, que possibilitaram a realização da seqüência didática naquele local.

Aos alunos da PUC-SP e do Colégio Vera Cruz que participaram das aplicações da seqüência.

Aos alunos do Mestrado, pelo companheirismo e amizade.

À CAPES, pela bolsa de estudos que permitiu total dedicação ao curso de Pós Graduação.

Aos meus pais, pelo apoio, pela compreensão e pelas contribuições para uma melhor apresentação deste trabalho.

Resumo

Este trabalho teve por objetivo estudar métodos geométricos e algébricos de resolução de equações de terceiro grau, observando as vantagens e desvantagens de cada um.

Para isso, construímos uma seqüência didática, enfatizando o método geométrico de Omar Khayyam, matemático árabe do século XII. Foi feita uma pesquisa histórica, e este método foi escolhido por utilizar o quadro geométrico, quadro este pouco explorado em sala de aula. Utilizamos, também, na seqüência, a fórmula de Cardano e o dispositivo de Briot-Ruffini para resolver equações cúbicas.

Aplicamos nossa seqüência a dois grupos. O primeiro, formado por quatro alunos do curso de Ciência da Computação da PUC-SP. O segundo, formado por alunos da terceira série do Ensino Médio, do Colégio Vera Cruz; no início, contávamos com 32 alunos, ao final, eles eram em número de 6. A abstenção, ao final da aplicação, se deve, principalmente, à época em que a seqüência foi aplicada.

Com resultados obtidos, vemos que o quadro geométrico dificilmente é usado pelos alunos ao tentar resolver um problema. O método de Omar Khayyam foi considerado o mais prático deles, pois pode ser usado para qualquer equação cúbica. A fórmula de Cardano causa problemas aos alunos que não conhecem números complexos e o dispositivo de Briot-Ruffini só pode ser usado quando a equação que se quer resolver tem uma raiz inteira.

Os alunos perceberam, também, que podem escolher que caminho seguir, para resolver uma equação de terceiro grau, dependendo de seus coeficientes. Além disso, o quadro geométrico, agora, é levado em consideração.

ÍNDICE

CAPÍTULO IV: Problemática da Pesquisa

CAPÍTULO V: A Seqüência Didática

CAPÍTULO VI: Conclusões

Índice de Anexos

Introdução

INTRODUÇÃO

Este trabalho tem por finalidade estudar a resolução de equações de terceiro grau, utilizando a idéia do método geométrico de Omar Khayyam (1050-1130), matemático árabe, mais conhecido no Ocidente por seus poemas.

A escolha deste tema partiu da curiosidade em observar como os alunos recebem um método de resolução de equações de terceiro grau diferente dos que eles estão acostumados a encontrar em livros didáticos, principalmente sendo este um método geométrico.

Vemos, em livros didáticos usados atualmente na terceira série do Ensino Médio, que não há um estudo específico para equações cúbicas, mas sim uma generalização de resultados teóricos para equações de grau $\underline{n}$. Discordamos desta escolha pois, ao fazer um estudo histórico de alguns métodos de resolução de equações de terceiro grau, vemos que os matemáticos iniciam suas pesquisas desenvolvendo fórmulas para a resolução de equações de graus menores, como 2 e 3. Só depois disso é que tentam avançar para a procura de fórmulas para equações de graus maiores.

Outro fator importante, observado em livros didáticos, é a ausência de métodos geométricos de resolução de equações, ou mesmo de utilização do quadro gométrico, vendo a forma do gráfico de equações de graus diversos.

Após estas observações, elaboramos um questionário, envolvendo questões relacionadas, principalmente, à resolução de equações de terceiro grau. Aplicamos este questionário a alunos de cursos de graduação em Matemática, Ciência da Computação e Engenharia, que demonstram, por suas respostas, ter grandes dificuldades para encontrar as raízes desse tipo de equação. Além disso, esses alunos não conseguem utilizar os métodos de resolução presentes em livros didáticos, e não reconhecem o gráfico de uma equação cúbica.

Procurando diminuir as dificuldades apresentadas acima, desenvolvemos uma seqüência didática, cujo objetivo é apresentar métodos algébricos e geométricos de resolução de equações de terceiro grau, para serem analisados por alunos que finalizaram a terceira série do Ensino Médio ou estão em seu final. Isto porque o estudo de equações de grau n é abordado ao fim dessa série.

A análise dos métodos de resolução de equações cúbicas visa, procurando suas vantagens e desvantagens, escolher um dentre eles que possa ser usado para qualquer equação desse tipo.

Baseamos a construção de nossa seqüência didática, em aspectos teóricos como: dialética ferramenta-objeto e o jogo de quadros de Régine Douady, a transposição didática de Yves Chevallard, os registros de representação de Raymund Duval e o conceito de contrato didático de Guy Brousseau.

Este trabalho compõem-se de seis capítulos. O primeiro trata de nossa fundamentação teórica, sua importância em nosso trabalho e em que aspectos ela pode influenciar nossas decisões ou escolhas.

O Capítulo II – Estudo Histórico, faz um levantamento de métodos de resolução de equações de terceiro grau, desenvolvidos através dos tempos, enfatizando as necessidades que geraram sua descoberta.

No Capítulo III – Transposição Didática, vemos um estudo de livros didáticos, o questionário aplicado aos alunos e sua análise estatística por meio de *softwares*, que nos ajudam a tratar os dados a fim de observar o comportamento dos alunos frente a equações de terceiro grau.

A Problemática é nosso Capítulo IV, em que escolhemos alguns métodos de resolução a serem usados em nossa seqüência didática para o estudo pelos alunos. Levantamos também as questões a serem respondidas com o estudo deste trabalho.

O Capítulo V – A Seqüência Didática traz a construção das atividades a serem resolvidas pelos alunos, o relato do experimento, que tem duas fases. A primeira, com 11 atividades, desenvolvendo o método de Omar Khayyam e a fórmula de Cardano, e utilizando também o dispositivo de Briot-Ruffini para resolução de equações cúbicas. Esta primeira fase é estudada com quatro alunos de primeiro ano do curso de Ciência da Computação da PUC-SP.

Após nosso Exame de Qualificação, a seqüência sofre algumas mudanças e é novamente aplicada a alunos de terceira série do Ensino Médio do Colégio Vera Cruz. Desta vez, começamos com 16 duplas, mas apenas 3 duplas terminaram o estudo.

No Capítulo VI – Conclusões, analisamos os dados colhidos, e tentamos responder às nossas questões de pesquisa presentes na Problemática. Por fim, apresentamos a bibliografia estudada para a realização deste trabalho e os anexos.

Capítulo I: Fundamentação Teórica e Metodologia

<u>I. Fundamentação Teórica e Metodologia</u>

1. Fundamentação Teórica

1.1. Introdução

Descrevemos neste capítulo alguns conceitos da Didática da Matemática Francesa nos quais baseamos nosso trabalho.

Iniciamos com a Transposição Didática de Yves Chevallard, estudando as diversas transformações que um conceito sofre até chegar ao aluno.

Em seguida, vemos a dialética ferramenta-objeto e o jogo de quadros presentes na teoria de Régine Douady, e os registros de representação de Raymond Duval.

Por último, estudamos o conceito de contrato didático e sua importância em sala de aula.

1.2. A Transposição Didática de Yves Chevallard

O saber pesquisado pelo matemático sofre inúmeras transformações até chegar ao aluno. Ao conjunto destas transformações Chevallard dá o nome de Transposição Didática, que é dividida em diversas etapas, descritas abaixo:

- *saber sábio:* o conhecimento apresentado à sociedade científica pelo pesquisador, porém, sem expor o processo de desenvolvimento do conceito em questão nem o problema que gerou sua pesquisa;
- *objetos a ensinar:* os conhecimentos escolhidos (pelo Governo ou órgão responsável) como necessários à formação do jovem;
- *saber a ensinar:* aquele que o professor escolhe para ensinar aos alunos. Aqui, o conhecimento é adaptado para o nível em que o aluno se encontra e organizado em disciplinas;

- *saber escolar:* conjunto de conhecimentos adquiridos pelos alunos após determinado curso;
- *saber ensinado:* o professor gerencia a aquisição do saber pelo aluno, adaptando os objetos a ensinar, a forma de apresentação do conceito e o tempo de estudo;
- *saber disponível:* o conhecimento que o aluno já adquiriu e pode ser usado como ferramenta para novas aprendizagens.

O estudo da transposição didática nos permite escolher a abordagem que daremos ao nosso trabalho. Para isso, fazemos um estudo histórico, procurando os métodos desenvolvidos para resolução de equações de terceiro grau; observamos livros didáticos atuais para comparar suas abordagens com a por nós escolhida, e desenvolvemos uma seqüência didática a fim de resolver equações cúbicas geometricamente, o que nos leva à necessidade de ter como base o jogo de quadros de Régine Douady, apresentado a seguir.

1.3. A Teoria de Régine Douady

Os componentes teóricos de Régine Douady, a *dialética ferramenta-objeto* e o *jogo de quadros*, são importantes para o nosso trabalho.

Um conceito pode ter o estatuto de ferramenta ou de objeto. No primeiro caso, ele é usado para resolver um determinado problema; no segundo, ele é o conhecimento matematicamente reconhecido, definido independente de seu uso.

Uma ferramenta pode ser implícita quando o conceito em uso ainda não está completo; ou explícita, quando um objeto é tomado explicitamente para resolver o problema.

A dialética ferramenta-objeto é um processo de várias fases, pelas quais o aluno precisa passar, para resolver um determinado problema e adquirir um conhecimento. Estas fases são:

a. *Antigo, ferramentas explícitas:* os alunos usam seus conhecimentos disponíveis como ferramentas explícitas para tentar resolver o problema, mesmo que não completamente;
b. *Pesquisa, novo implícito:* sem conseguir resolver o problema totalmente, os alunos são induzidos a diferentes caminhos para complementar sua tarefa. Um deles é a mudança de quadros, fazendo uso de ferramentas novas implícitas;
c. *Explicitação e institucionalização local de elementos que têm um papel importante:* os processos de resolução utilizados são validados matematicamente para a classe;
d. *Institucionalização, estatuto de objeto:* o conceito, antes ferramenta, se transforma em objeto de estudo, sendo tratado pelo professor como um saber comum a todo o grupo;
e. *Familiarização, reinvestimento:* o saber coletivo torna-se o saber de cada indivíduo que compõe o grupo; novos exercícios são propostos aos alunos pelo professor;
f. *Complexificação da tarefa ou novo problema:* o novo objeto é usado como ferramenta explícita, isto é, torna-se um conhecimento antigo.

Um *quadro*, na teoria de Régine Douady, é constituído de objetos de um ramo da matemática, das relações existentes entre eles e das imagens mentais que se associam a tais objetos.

A *mudança de quadros* é uma maneira de modificar as ferramentas em uso no problema apresentado, mostrando novas relações entre os objetos que estão sendo utilizados na resolução.

Deixar um quadro e procurar respostas para o problema em outro, mesmo que não traduza totalmente o problema, traz formulações diferentes e envolve novos conhecimentos.

Os *jogos de quadros* são as mudanças de quadro provocadas pela iniciativa do professor, para ter uma correspondência entre quadros e avançar na resolução do problema formulado.

Em nosso trabalho, utilizamos as cônicas primeiro como objetos de estudo, para mais tarde dar a elas o estatuto de ferramentas explícitas que serão usadas na resolução de equações de terceiro grau.

Nossa seqüência tenta seguir as primeiras etapas da dialética ferramenta-objeto, criando situações em que os conhecimentos antigos dos alunos não sejam suficientes para que eles solucionem o problema proposto, o que os leva à mudança de quadro algébrico para geométrico, dando uma nova visão da situação em estudo.

1.4. Os Registros de Representação de Raymond Duval

Raymond Duval introduziu a noção de *registro de representação* para analisar a influência que a forma com que um objeto se apresenta pode exercer em seu processo de ensino/aprendizagem. Um objeto matemático é representado através de um *registro de representação*, e sua escolha comanda o tipo de desenvolvimento que se pode dar à resolução de uma tarefa requerida.

O objeto, porém, não deve ser confundido suas diferentes representações, e sim ser reconhecido independentemente delas. A distinção entre registro e objeto pode auxiliar a compreensão da matemática.

Para que um registro seja de representação em um sistema semiótico, ele deve permitir três atividades fundamentais: *formação*, *tratamento* e *conversão*.

A formação é a escolha de um registro a ser usado, de acordo com as regras e dados do problema a ser solucionado. O tratamento é a transformação dessa representação no próprio registro que ela formou. A conversão é a mudança de um registro em outro, conservando totalmente ou apenas uma parte do conteúdo inicial.

Esta noção de R. Duval é importante em nosso trabalho, ao observarmos não só qual o registro de representação predominante entre os alunos, mas também se este se confunde com o objeto matemático em estudo. Além disso, a conversão de registros é fundamental em nossa seqüência, na medida em que a mudança do quadro algébrico para o geométrico implica mudança do registro equação para o registro gráfico.

1.5. O Contrato Didático de Guy Brousseau

Contrato didático (Guy Brousseau – 1982) é um conjunto de regras que determinam o comportamento e as expectativas de alunos e professor em sala de aula. Tais regras são freqüentemente implícitas, mas podem também ocorrer explicitamente.

As resoluções tomadas pelo professor durante a aula, seu comportamento frente às respostas dos alunos quando questionados ou sua maneira de avaliar fazem parte deste conjunto, entre outras coisas.

Por outro lado, as atitudes dos alunos perante o comportamento do professor em relação ao saber ensinado, também se incluem neste contrato.

O contrato didático é importante em nosso trabalho no momento da aplicação da seqüência, onde a presença ou não do professor, a relação dos alunos com ele e com o pesquisador, o tipo de atividade proposta e o ambiente de trabalho são alguns entre diversos fatores que podem influir em seu andamento.

2. Metodologia

A meta de nosso trabalho é construir e aplicar uma seqüência didática visando o estudo de algumas formas de resolução de equações de terceiro grau, destacando a idéia do método geométrico sistematizado pelo matemático árabe Omar Khayyam. Este método consiste em transformar uma equação de terceiro grau em outra formada por duas cônicas. Ele foi escolhido porque possibilita jogo de quadros e mudança de registros, além de utilizar o quadro geométrico, a nosso ver pouco explorado atualmente em livros didáticos.

Iniciamos com uma pesquisa histórica, procurando os diferentes métodos de resolução de cúbicas descobertos por matemáticos através dos tempos; quais as necessidades de cada época para que se procurasse um processo de resolução para este tipo de equação e se teríamos interesse em trazer para a sala de aula alguns desses métodos.

Um estudo de manuais didáticos é necessário para observarmos como neles se apresentam as equações de terceiro grau, se há algum estudo específico para tal, ou se elas estão associadas ao estudo de equações de grau qualquer. Analisamos também as propostas curriculares do Estado de São Paulo, procurando comparar a maneira de ensino aconselhada ali com a apresentação do tema em livros didáticos usados nas escolas.

O próximo dado importante a ser colhido se refere às concepções dos alunos sobre os métodos de resolução de cúbicas por eles conhecidos. E neste trabalho chamamos de “concepções” o saber disponível que os alunos já carregam consigo no que se refere a equações de terceiro grau e curvas cônicas. Como o objetivo do trabalho é utilizar gráficos de parábolas e hipérboles para resolver uma equação de terceiro grau, vemos a necessidade de investigar quais conhecimentos os alunos possuem no que se refere a tais objetos, como eles os definem, e se são capazes de utilizá-los como ferramenta para a obtenção de um novo conhecimento. Procuramos também descobrir se os alunos conseguem resolver uma cúbica, quais os métodos utilizados para este fim e quais as dificuldades enfrentadas nesta resolução.

Com este propósito aplicamos um questionário inicial, a partir do qual verificamos o saber dos alunos nestes dois ramos e procuramos entender seus conhecimentos espontâneos, caso eles não tenham tido uma aprendizagem de cônicas e equações cúbicas. Este questionário é aplicado a alunos de primeiro e segundo anos de terceiro grau, cursando Matemática, Ciência da Computação e Engenharia.

Para analisar os dados colhidos, utilizamos os *softwares* estatísticos Chic e Chadoc, estudando análises multidimensionais.

O software CHIC (Classificação Hierárquica, Implicativa e Coesitiva) foi desenvolvido pelo núcleo de pesquisa em didática da matemática da Universidade de Rennes 1 - França. Ele é utilizado para fazer uma análise de hierarquia de similaridade, que permite estudar e interpretar em termos de tipologia e de semelhança (ou ausência de semelhança) decrescente, classes de variáveis construídas de acordo com o seguinte critério: duas variáveis possuem uma similaridade muito forte quando o número de ocorrências das duas ao mesmo tempo é relevante em relação ao número de ocorrências de uma e de outra variável. As similaridades são construídas em forma de árvores e representadas em repartições cada vez mais distantes. O comportamento dos indivíduos está em harmonia com o comportamento estatístico que originou a classe.

CHIC também é usado para uma análise implicativa de variáveis. Esse tipo de análise relaciona comportamentos. Por exemplo, dados os comportamentos **x** e **y**, $x \Rightarrow y$ significa que a maioria dos alunos que têm o comportamento <u>x</u> também têm o comportamento <u>y</u>. Observamos ainda implicações entre classes, construídas a partir das coesões das mesmas, da intensidade de implicação entre seus elementos e o número de elementos de cada uma.

Com o *software* Chadoc fazemos uma análise fatorial de correspondências múltiplas, que permitem a descrição, a classificação e a explicitação de dados multidimensionais. Esta análise possibilita a representação simultânea, em um plano, de dois tipos diferentes de relacionamentos.

Para fazermos uso da idéia do método de Omar Khayyam, iniciamos com o desenvolvimento e a aplicação de uma seqüência didática, para introduzir o conceito de curvas cônicas antes de apresentarmos uma abordagem para cúbicas. Como meio de resolução geométrico, usaremos o *software* Cabri-géomètre.

Esta seqüência se inicia com a construção de cada uma das cônicas através de suas respectivas propriedades geométricas em Cabri-géomètre, para que o aluno veja a definição destas curvas em termos de distâncias, seguida por um exercício algébrico, fazendo uso das mesmas propriedades.

Como seqüência didática para cúbicas, usamos Cabri-géomètre para colocar em prática o método de Omar Khayyam e utilizamos alguns métodos algébricos da história para uma comparação de resultados, tentando compreender suas diferenças, semelhanças e facilidades.

Como complemento geométrico, é nosso interesse usar o "Construtor Universal de Equações" descrito por d'Alembert na Enciclopédia de Diderot, que resolve equações quaisquer de grau n, pois este recurso nos auxiliará a apresentar o registro gráfico de uma equação de terceiro grau.

Capítulo II:
Estudo Histórico

II. Estudo Histórico

1. Introdução à História

Neste capítulo, fazemos um estudo resumido de alguns métodos de resolução de equações de terceiro grau que surgem ao longo da história, visando tomar um dentre eles para ser usado em nossa seqüência didática.

Procuramos observar os motivos que incentivam os matemáticos a desenvolver tais métodos e quais as dificuldades por eles enfrentadas nesta procura.

2. O Estudo Histórico

Por volta de 1800 a 1600 a.C., na Babilônia, começam a se esboçar tentativas de resolução de equações de terceiro grau. Os babilônios fazem tabelas de cubos e raízes cúbicas para auxiliar na procura de um número nestas condições. Fazem também tabelas de valores de $n^3 + n^2$, com n inteiro entre 1 e 30, para resolver cúbicas que tenham termos com x^3, x^2 e termo independente. Para isso, é usado o método da substituição. Equações como $ax^3 + bx^2 = c$ podem ser transformadas em equações da forma usada pelos babilônios se ela for multiplicada por $\frac{a^2}{b^3}$, obtendo, assim, a seguinte equação: $\left(\frac{ax}{b}\right)^3 + \left(\frac{ax}{b}\right)^2 = \frac{ca^2}{b^3}$.

Tomemos, por exemplo, a equação $2x^3 + 3x^2 = 540$. É provável que o método dos babilônios fosse usado da seguinte forma[(1)]:

[1] BOYER, Carl B. “História da Matemática”

- multiplicar a equação por 4, obtendo: $8x^3 + 12x^2 = 2160$. Esta equação pode ser escrita da seguinte maneira: $(2x)^3 + 3 \cdot (2x)^2 = 2160$.
- fazendo uma substituição do tipo: $y = 2x$, temos: $y^3 + 3y^2 = 2160$.
- com uma nova substituição: $y = 3z$, temos: $(3z)^3 + 3(3z)^2 = 2160$, o que nos dá: $27z^3 + 3 \cdot 9z^2 = 2160 \Rightarrow 27z^3 + 27z^2 = 2160 \Rightarrow z^3 + z^2 = 80$.

Com a equação inicial transformada desta maneira, basta procurar em suas tabelas o valor de z que torne a equação acima verdadeira.

Não há evidências de que os babilônios fossem capazes de reduzir as equações gerais de quatro termos da forma $ax^3 + bx^2 + cx = d$ para a sua forma conhecida de três termos. É admirável que eles tenham chegado a esse nível de desenvolvimento matemático, já que sua álgebra é Retórica, isto é, todos os cálculos e problemas são expressos através de palavras, o que provavelmente torna o desenvolvimento mais difícil.

Na Grécia Antiga, os problemas relacionados a volumes de sólidos levam os matemáticos ao estudo de equações de terceiro grau. Um dos problemas mais importantes para os gregos, que envolve a resolução de uma cúbica, é a *duplicação do cubo*, isto é, encontrar a medida do lado de um cubo cujo volume seja o dobro do volume de um outro cubo dado. Para solucionar este problema, Menaecmus (aproximadamente 350 a.C.) cria as *secções cônicas*.

Hipócrates de Chios (viveu por volta de 430 a.C.) mostrou que este problema pode ser resolvido, se for possível encontrar e usar curvas com a seguinte propriedade: $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$, em que <u>a</u> é a medida de um segmento qualquer. Para isto, Menaecmus toma um cone e um plano e, interceptando estas duas superfícies geométricas, que são familiares a ele, descobre um grupo de curvas que satisfazem tais propriedades.

Construindo duas parábolas de mesmo vértice, cujas equações em notação atual são $y^2 = ax$ e $x^2 = 2ay$, a abscissa do ponto de intersecção destas duas curvas é a medida do lado do cubo procurado.

Arquimedes (aproximadamente 287 a.C.), em seu tratado *Sobre a Esfera e o Cilindro*, usa o mesmo método acima para resolver o problema de como cortar uma esfera dada de modo que os volumes dos dois segmentos esféricos estejam numa certa razão. Mas Arquimedes vai além, e descobre uma condição relacionada aos coeficientes da equação, para saber o número de raízes reais que ela possui. Suas equações são do tipo: $b^2 d = x^2(c - x)$. Mas qualquer cúbica pode ser transformada nesta forma, chamada arquimediana. Assim, seu desenvolvimento é válido para qualquer equação de terceiro grau.

Um outro matemático grego usa equações cúbicas na resolução de seus problemas. Diophante (250 a.C.), em sua obra, descreve as regras de multiplicação de potências e mostra conhecer a expansão de $(x \pm y)^3$. Um de seus problemas pede para: “Encontrar dois números tal que sua soma e a soma de seus cubos seja igual a dois números dados”(2) Mas este matemático não vai além de problemas como: (1) Encontrar dois cubos cuja soma é um quadrado; (2) encontrar dois cubos cuja diferença é um quadrado; (3) encontrar dois quadrados cuja soma é um cubo e (4) encontrar dois quadrados cuja diferença é um cubo.

Transportando-nos para a Arábia, vemos um rico desenvolvimento matemático, herdado dos gregos. As obras de Ptolomeu, Euclides, Diophante, entre outros, são traduzidas e estudadas por árabes capazes de continuar seus estudos. Entre eles, está Umar ibn Ibrahim al-Khayyami (1050-1130), conhecido como Omar Khayyam, com seu estudo geométrico para a resolução de uma equação cúbica.

---

[2] Katz: “Introduction to the History of Mathematics”

Khayyam era astrônomo, matemático, filósofo e poeta. Seu trabalho mais conhecido no Ocidente é uma coleção de poemas entitulada *Rubaiyat*. De grande importância é também sua contribuição para a reforma do antigo calendário, introduzindo o ano bissexto.

Em seu tratado de álgebra, *Sobre a demonstração da álgebra e da muqabala* (*Risala fi-l-barahin ala masa' il al-gabr wa-l-muqabala*), Khayyam explica que a álgebra tem por objetivo determinar quantidades numéricas ou geométricas desconhecidas. Esta obra é predominantemente geométrica e mostra como uma equação cúbica pode ser resolvida através de intersecção de cônicas.

Omar Khayyam acredita ser impossível dar soluções aritméticas para equações cúbicas, por isso suas soluções são apenas geométricas. Sua idéia baseia-se no seguinte raciocínio:
Dada a cúbica $x^3 + ax^2 + b^2x + c^3 = 0$, substituímos x^2 por 2py, o que resulta na equação $2pxy + 2apy + b^2x + c^3 = 0$, que é uma hipérbole. Como $x^2 = 2py$ é uma parábola, traçando estas duas curvas em um mesmo plano cartesiano, teremos a intersecção delas como uma raiz real da equação cúbica dada inicialmente.

Um outro matemático árabe segue os passos de Omar Khayyam. Sharaf al-Din al-Tusi (1201-1274), cujo interesse está em encontrar condições para os coeficientes que determinem o número de soluções possíveis para a equação. Como seu predecessor, ele também classifica os tipos de cúbicas em grupos, observando, entretanto, o número de raízes positivas ou negativas de cada uma delas.

Al-Tusi vai além de Omar Khayyam pois sempre faz discussões a respeito dos motivos pelos quais as duas cônicas se interceptavam. A sua contribuição mais original está em ponderar se $x^2(b - x)$ alcançava ou não o valor de $\underline{b}$.

Depois dos tempos dos árabes, volta-se a falar em equações cúbicas na Idade Média, com Leonardo de Pisa (1180-1250), conhecido também como Leonardo Fibonacci. Desafiado pelo Imperador Frederico II a encontrar, pelos métodos euclidianos, um segmento x que satisfaça a equação $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$, ele prova que a solução não pode ser encontrada apenas com régua e compasso, o que naquela época significava que a solução não podia ser encontrada algebricamente. Fibonacci consegue dar uma solução aproximada até a nona casa decimal.

A resolução algébrica de equações de terceiro grau atinge seu ápice no Renascimento Italiano. O mundo conhece a possibilidade de uma resolução algébrica de cúbicas com a publicação da obra *Ars Magna* de Girolamo Cardano (1501-1576). Apesar de ser conhecido como matemático, não é Cardano o descobridor do método descrito em sua obra.

A afirmação de Omar Khayyam, de que uma equação de terceiro grau não pode ser resolvida por meios algébricos, incentiva os matemáticos a estudarem estas equações. É preciso demonstrar que Khayyam está certo ou encontrar uma fórmula algébrica de resolução para tais equações, mostrando, assim, que ele está errado.

Por volta de 1510 Scipione del Ferro (1465-1526), matemático italiano, descobre um método de resolução de equações do tipo $x^3 + px + q = 0$. Porém, não publica sua descoberta, pois é costume dos matemáticos da época não revelarem seus segredos para desafiar publicamente seus colegas. Ensina sua fórmula apenas a seus discípulos Antonio Maria Fior e Annibale della Nave, sendo este último também seu sucessor na cátedra em Bolonha. Após a morte de del Ferro, Maria Fior, usando o conhecimento do mestre, desafia Niccoló Fontana (1499-1557), conhecido como Tartaglia (o gago), que já é bastante conhecido por seu talento, a resolver equações. Tartaglia aceita o desafio e consegue descobrir, no dia anterior ao debate, um método de resolução de equações do tipo $x^3 + px^2 + q = 0$, ganhando, assim, a disputa.

Cardano pede que Tartaglia lhe conte o segredo da solução para equações cúbicas, ao que este acabou cedendo e revelando em versos de linguagem tão rebuscada, que foi impossível decifrar o contexto ansiado. Procurado mais uma vez por Cardano, Tartaglia concorda em lhe explicar seu método, com a condição de que ele não seja revelado.

Em 1545, quando Cardano publicou *Ars Magna*, o mundo obteve a solução de mais um problema em mãos, e Tartaglia viu-se lesado pelo autor. Em sua obra, Cardano diz que, apesar de Tartaglia conhecer esse método, todo o crédito da descoberta deve ser dado a Scipione del Ferro. Cardano consegue que della Nave lhe mostre as anotações do mestre e, assim, sente-se desobrigado da promessa feita a Tartaglia. Este ainda tenta desafiar publicamente Cardano, mas quem comparece ao debate é Ludovico Ferrari (1522-1565), um discípulo de Cardano, já ganhando fama de grande matemático. Não há vencedor, pois os dois não chegam a debater, mas sim discutir em público. Hoje conhece-se o método de resolução de cúbicas descoberto por Tartaglia como “Método de Cardano” ou “Fórmula de Cardano”.

Deve-se destacar também que, através desse método, Rafael Bombelli (1526-1572) inicia o desenvolvimento dos números complexos, resolvendo uma equação de terceiro grau. Bombelli percebe que, quando essa fórmula é aplicada, raízes estranhas aparecem, além da raiz real por ele conhecida. Assim, inicia um desenvolvimento que mais tarde gera o aparecimento dos números complexos. O feito de Bombelli é de extrema importância para a resolução de equações de terceiro grau, não só por auxiliar a encontrar as raízes da cúbica, mas também por mostrar que equações como esta possuem três raízes.

Devemos observar, porém, que é Cardano o primeiro matemático a manipular números complexos, como se eles fossem números quaisquer, resolvendo uma equação de terceiro grau pelo método descrito em *Ars Magna*. Quando, ao final da resolução, encontra números da forma $a + b\sqrt{-1}$, Cardano os classifica como “inúteis”. Bombelli, porém, não só manipula tais entes estranhos, mas também apresenta leis de multiplicação, divisão e soma para eles.

Outro matemático a estudar equações de terceiro grau foi François Viète (1540-1603). Estudou geometria, álgebra e trigonometria e, aproveitando seus conhecimentos, sugere uma solução geométrica para o caso irredutível das equações cúbicas. Dá, também, sua contribuição aos famosos problemas da Antigüidade, mostrando que a trissecção do ângulo e a duplicação do cubo dependem da resolução de uma equação de terceiro grau.

Em sua obra *"Emendatione"*, Viète ensina um novo método de resolver uma equação cúbica da seguinte forma:

Seja a equação $x^3 + 3bx = 2z$ (1), na qual b e z são quantidades conhecidas. Viète introduz uma nova incógnita y através da equação $b = y(x+y)$ (2). Substituindo (2) em (1), temos: $x^3 + 3xy(x+y) = 2z$, o que nos leva a $(x+y)^3 = 2z + y^3$ (3). De (2) temos que $(x+y) = \frac{b}{y}$. Substituindo em (3), temos uma equação de segundo grau na incógnita y^3 da seguinte maneira: $y^6 + 2zy^3 = b^3$, que nos dá $y = \sqrt[3]{\sqrt{z^2+b^3} - z}$.

Em seguida, uma nova incógnita y' é introduzida como $b = y'(y'-x)$. Da mesma forma que anteriormente, temos uma equação quadrática na incógnita y', que nos leva a $y' = \sqrt[3]{\sqrt{b^3+z^2} + z}$. Sendo $x = y' - y$, temos a solução da equação de terceiro grau pela diferença de duas raízes cúbicas, como em *"Ars Magna"* de Cardano.

Viète também dá uma solução trigonométrica para equações cúbicas, sendo $2R\cos\varphi = x$, $2R\cos 3\varphi = \pm b$, pode-se resolver equações da forma $x^3 = 3R^2x \pm R^2b$.

Vale destacar que Viète usa vogais para incógnitas e consoantes para quantidades conhecidas. Utilizamos aqui a notação atual para não haver confusão.

René Descartes (1596-1650) também estuda a resolução de equações cúbicas através da intersecção de duas cônicas. Vai, porém, além dos árabes, pois percebe que certos pontos de intersecção representam raízes negativas da equação e ainda, tomando uma circunferência e uma parábola, percebe que "se a circunferência não corta nem toca a parábola em algum ponto, isto é uma indicação de que a equação não tem raízes verdadeiras (positivas) ou falsas (negativas), mas que todas as raízes são imaginárias."[(3)]

A partir do século XVIII, os esforços dos algebristas são voltados para a procura de resolução para equações algébricas. Seu interesse é procurar uma fórmula para equações de grau maior ou igual a cinco. Este estudo gera a teoria dos grupos de Evariste Galois (1811-1832). Com tentativas de solucionar esse problema, surgem também novas resoluções para equações cúbicas.

Alexandre-Théophile Vandermonde (1735-1796) começa estudando equações quadráticas e cúbicas e desenvolve, então, princípios sobre os quais a solução de equações deve ser baseada.

Joseph Louis Lagrange (1736-1813) faz duas substituições para resolver uma equação de terceiro grau. Primeiro ele a transforma em uma equação de sexto grau e, em seguida, faz desta uma quadrática que é facilmente resolvida. Seu método usa os princípios da solução descrita na obra *Ars Magna* de Cardano, tomando $x = r + s$ e escrevendo $\underline{r}$ e $\underline{s}$ em função das três raízes da equação inicial.

Em 1770, Gianfrancesco Malfatti (1731-1807) apresenta para a Accademia delle Scienze di Siena um tratado sobre equações de quinto grau, na qual descreve um método de resolução de cúbicas. Tomando a equação $x^3 + 3ax + b = 0$, ele a escreve da forma linear $x + m\sqrt[3]{f^2} + n\sqrt[3]{f} = 0$. Para eliminar as raízes cúbicas, Malfatti substitui $\sqrt[3]{f}$ por $\alpha\sqrt[3]{f}$ e por $\alpha^2\sqrt[3]{f}$, em que α é uma raíz cúbica da unidade. Assim, obtém a equação

[3] Carl B. Boyer

$x^3 - 3mnfx + m^3f^2 + n^3f = 0$. Fazendo f=1, temos $x^3 - 3mnx + m^3 + n = 0$, que é equivalente à equação inicial, desde que $mn = -a$ e $m^3 + n^3 = b$.

Vemos, assim, que os problemas da Grécia antiga e a afirmação errônea de Omar Khayyam levam a desenvolvimentos matemáticos que geram resoluções algébricas e geométricas de equações de terceiro grau. Além disso, o estudo de equações algébricas de uma maneira geral é extremamente importante para o desenvolvimento da teoria dos grupos de Galois.

3. Observações

Analisando este contexto histórico, verificamos a dificuldade de se encontrar um método algébrico de resolução para equações de terceiro grau. Isto pode se tornar um obstáculo para os alunos ao estudarem equações cúbicas, visto que dificilmente se encontra, em livros didáticos, uma abordagem que apresente algum método específico para a resolução destas equações.

É possível que possamos tomar, como obstáculo histórico, o problema de se deparar com raízes quadradas de números negativos. Quanto aos alunos, percebemos que, de uma forma geral, ao tentar resolver algum exercício, se o desenvolvimento numérico do mesmo os levar à raiz quadrada de um número negativo, para eles significa que o problema não tem solução. Consideramos este fator como um obstáculo didático pois, dependendo da equação de terceiro grau tomada, seu desenvolvimento, a partir da fórmula de Cardano, pode levar à raiz quadrada de um número negativo e, no entanto, é possível que ela tenha raízes reais.

Capítulo III:
Estudo da
Transposição Didática

III. Estudo da Transposição Didática

1. A Proposta Curricular do Estado de São Paulo

Procuramos nas propostas curriculares do Estado de São Paulo, dos anos de 1980, 1982 e 1994 referências concernentes ao nosso estudo e constatamos que em nenhuma delas existe qualquer alusão a curvas cônicas ou equações de grau três.

Constatamos, então, que o Estado não propõe a introdução de cônicas e nem a resolução de equações de terceiro grau no Ensino Médio.

2. Estudo de Livros Didáticos

2.1. Considerações Gerais

Nosso trabalho visa uma nova abordagem na resolução de equações de terceiro grau. Para isso, é necessário conhecer as apresentações feitas aos alunos em livros didáticos. Com este objetivo, escolhemos os quatro manuais a seguir:

1. MACHADO, Antonio dos Santos. Matemática na escola do segundo grau, volume III, Atual Editora, São Paulo(SP), 1994, páginas 95 a 109 e 175 a 198.
2. GENTIL, Nelson e outros. Matemática para Segundo Grau. Volume III. Editora Ática, São Paulo (SP), 5ª edição, 1996, páginas 111 a 136 e 193 a 206.
3. GRECO, Antonio Carlos & GRECO, Sérgio Emílio. Matemática volume único, Editora Ática, 5ª edição, São Paulo-SP, 1996, páginas 111 a 136 e 193 a 206.
4. BONGIOVANNI, VISSOTO & LAUREANO. Matemática e Vida 2º grau, Volume III, 2ª edição, Editora Ática, São Paulo, 1993.

A escolha dos livros é feita levando-se em consideração os autores mais usados pelos professores de Ensino Médio. Fomos informados pela Associação Brasileira de Editores de Livros – Abrelivros – que não existem dados oficiais a respeito de quais são os livros mais vendidos em São Paulo para o Ensino Médio. Conversamos, então, com professores que indicaram os autores dos livros 1, 2 e 3, acima citados, como os mais usados. O livro 4 é por nós escolhido, pois apresenta um estudo para equações de terceiro grau, generalizado depois para grau n, e nos interessamos em observar também esta abordagem.

2.2. Equações de Terceiro Grau

Este estudo visa a procura de alguns pontos específicos, como:

- Abordagem específica para cúbicas;
- Início da apresentação por uma situação-problema;
- Comentários históricos sobre o conceito;
- Apresentação de métodos de resolução de cúbicas.

Entendemos por *situação-problema* um conjunto de questões abertas e/ou fechadas, que levem os alunos a utilizar uma ferramenta matemática implicitamente, explorando, com conhecimentos disponíveis, as possíveis respostas que tais questionamentos possam ter.

2.2.1. Abordagem para cúbicas

Com exceção do livro 4, todos os manuais da lista acima fazem um estudo de *“Equações de grau n”*, sem tomar qualquer valor para n de uma maneira específica. Não há um estudo de cúbicas, não aparece o gráfico de um polinômio de grau 3. Em exercícios, vemos algumas equações de terceiro grau, mas em nenhum momento os livros se mostram inclinados a dar ênfase ou detalhar um estudo de tal tópico.

O manual número 4, entretanto, faz um estudo de equações de terceiro grau, mostra teoremas sobre as raízes de tais equações, sendo elas inteiras, racionais ou complexas, e estuda as relações entre coeficientes e raízes de uma equação. Só mais tarde, faz-se alusão de que todas essas relações e teoremas são válidos para equações de qualquer grau.

Damos grande importância a um estudo de equações cúbicas, separadamente de equações de grau qualquer, principalmente pelas possibilidades de jogo de quadros que esse tipo de equação nos proporciona. A abordagem única, apresentada nos livros, para equações de grau maior que dois, não traz outros quadros e registros que são importantes para o desenvolvimento dos alunos.

2.2.2. Apresentando uma situação-problema

A abordagem inicial de um determinado conceito que se quer ensinar, tende a ser um fator de motivação ou não para o aluno em seu estudo. Uma simples exposição de definições e conceitos pode não incentivar tanto quanto um exercício que mostre uma necessidade de aprender.

É por este motivo, que procuramos em livros uma situação-problema que iniciasse a abordagem de equações de terceiro grau. Só encontramos, entretanto, tal incentivo no livro listado acima como número 4. Este manual mostra um problema de volume de caixas de papelão para ser resolvido a partir de uma equação cúbica.

2.2.3. Comentários Históricos

Os dados históricos mostram aos alunos os motivos pelos quais os matemáticos se empenharam em procurar fórmulas que resolvessem equações de terceiro grau, fazendo com que eles percebam suas utilidades e os desenvolvimentos teóricos que elas geraram. Estas razões nos levam a procurar comentários que esclareçam estes pontos aos alunos.

Apenas os livros número 2 e 4 citam a história de cúbicas. O livro 2, faz um breve comentário a respeito do Método Cardano-Tartaglia de resolver equações de terceiro grau. Não há, porém, referências de como ele se desenvolve, nem exercícios que peçam seu uso. O livro 4, fala sobre a história do desenvolvimento de diversos métodos de resolução de equações de grau até 4 e mostra como se usa o método de Cardano-Tartaglia. Não usa, porém, este método em exercícios.

2.2.4. Apresentação de métodos de resolução de cúbicas

Vemos, nos livros analisados, o estudo de pesquisa de raízes, divisão de polinômios através dos algoritmos de Briot-Ruffini ou das chaves, até mesmo de coeficientes a determinar. Todos falam também de relações de Girard e como utilizá-las. Nenhum deles, porém, traz os métodos de Omar Khayyam ou Cardano para serem estudados e desenvolvidos em sala de aula. O livro 4 mostra também métodos de resolução por aproximação e como usá-los.

Nenhum desses livros mostra qualquer método geométrico de resolução. Este dado volta a nos mostrar a ausência de exploração do quadro geométrico, não só no que diz respeito a esboçar gráficos de equações de grau maior ou igual que três, como foi observado anteriormente, mas também para que se encontre as raízes dessas equações. Resoluções geométricas não são levadas em conta nos livros didáticos analisados.

2.2.5. Conclusões Preliminares

A partir deste breve estudo de manuais didáticos, podemos constatar alguns possíveis obstáculos didáticos que o aluno corre o risco de enfrentar para conseguir resolver uma equação de terceiro grau:

- a ausência de estudo de métodos geométricos e algébricos para resolução da equação;
- a necessidade de encontrar uma raiz da equação por critérios diversos, para depois utilizar um dos caminhos de resolução apresentados;
- a não apresentação de equações escritas como a igualdade entre dois polinômios;
- a generalização dos resultados para equações de grau n, sem qualquer estudo de equações de graus 2, 3 ou 4, por exemplo, separadamente;
- a ênfase apenas no método de Briot-Ruffini para divisão de polinômios;
- a ausência de exercícios a respeito de problemas do cotidiano que envolvam equações de qualquer grau.

Estes fatores podem vir a causar problemas para os alunos no estudo de resolução de equações. O nosso intuito é desenvolver uma outra maneira de ensino de resolução de equações de terceiro grau, tentando superar esses obstáculos didáticos e também os obstáculos históricos de equações cúbicas. Enfatizamos o método de resolução geométrico de Omar Khayyam, a fim de possibilitar a exploração do quadro geométrico.

2.3. As Cônicas

Para utilizarmos o método geométrico de resolução de Omar Khayyam, é preciso que os alunos tenham algum conhecimento de curvas cônicas. Por esta razão, observamos, nos livros didáticos, escolhidos alguns pontos importantes para nosso trabalho.

Verificamos como elipse, hipérbole e parábola são apresentadas aos alunos e se há mudança de quadros não só para o estudo do conceito, mas também no desenvolvimento dos exercícios.

2.3.1. Introdução do conceito

O livro listado acima como número 3 não apresenta uma abordagem para curvas cônicas. Apenas fala de parábola em seu capítulo de *Funções*, como o gráfico de uma função de segundo grau.

Os livros 1, 2 e 4 abordam as cônicas da mesma forma, com poucas diferenças. Iniciam seu estudo com a definição geométrica das curvas, desenvolvendo em seguida a equação de cada uma de acordo com sua propriedade geométrica. Todos apresentam dados históricos e citam cortes de cones por planos.

O livro 1 fala de "*lugares geométricos*", enquanto os outros usam a expressão *"conjunto de pontos"* nas definições geométricas.

Esse tipo de introdução faz ligações entre os quadros geométrico e analítico, em que a conversão entre o registro gráfico e o registro escrito (equação) é feita preservando a propriedade de distância entre pontos. É possível ao aluno perceber que ambos os registros representam um mesmo objeto, na medida em que têm uma mesma característica.

2.3.2. Os exercícios

Os exercícios nos livros 1, 2 e 4 são tratados da mesma forma: dada a equação, construa o gráfico da curva; ou dada a curva, encontre sua equação. Os livros 2 e 4, entretanto, apresentam também exercícios em que a mudança de quadro é exigida, para que se consiga resolver o problema, mas não é explícita no enunciado.

É importante que o jogo de quadros se faça necessário em livros didáticos a fim de que o aluno se familiarize com os diversos registros de representação dessas curvas e seja capaz de usá-los em outro contexto.

Além das abordagens em livros didáticos, devemos procurar saber como os alunos que estudaram por estas abordagens se comportam diante de problemas que envolvam resolução de equações de terceiro grau e utilização de cônicas. Para isso, fazemos o estudo a seguir.

3. Análise das Concepções dos Alunos

3.1. Objetivos

Elaboramos um questionário envolvendo questões sobre cônicas e equações de terceiro grau com os seguintes objetivos:

- Observar o conhecimento dos alunos sobre a parábola, elipse e hipérbole;
- Descobrir o registro de representação com o qual os alunos estão familiarizados em relação às cônicas: equação ou gráfico;
- Saber quais os métodos de resolução de equações de grau maior que dois, tais alunos conhecem e em que momento de sua vida escolar estes lhes foram apresentados;
- Analisar se os alunos são capazes de utilizar e descrever os métodos que eles dizem conhecidos ou qualquer forma de resolução;
- Observar se os alunos reconhecem uma equação de terceiro grau escrita de maneira não usual;

O questionário, contendo nove questões, foi aplicado em 33 alunos de primeiro ou segundo anos do terceiro grau, cursando Computação, Matemática ou Engenharia. Escolhemos aplicá-lo a estudantes em início de cursos superiores pois tais tópicos são estudados no final do ano letivo, na terceira série do Ensino Médio.

Descrevemos, a seguir, cada uma das perguntas, nossos objetivos ao desenvolvê-las, juntamente com algumas respostas que imaginávamos possíveis de serem dadas pelos estudantes. O questionário apresentado aos alunos se encontra nos anexos deste trabalho.

3.2. O questionário e sua análise a priori

Questão 1)

Para você, o que é:

a) Elipse?

b) Hipérbole?

c) Parábola?

Usar palavras é um meio encontrado de não influenciar os alunos. Se partirmos de algum registro de representação, este pode ser reconhecido e usado como definição.

Objetivo: Descobrir se estes conceitos já estão formados no aluno, se podem ser considerados um saber disponível a ser usado como ferramenta para a resolução de equações cúbicas.

As respostas, que esperamos obter dos alunos, giram em torno de registros de representação gráficos, desenhos ou equações de cada uma destas curvas. Ou então, uma explicação, por meio de palavras, do conceito ou das propriedades, que o objeto em questão possui, o que chamamos de “noção intuitiva”. Uma definição geométrica em termos de distâncias também é cogitada.

Questão 2)

Quantas raízes reais têm as seguintes equações? Justifique.

a) $x^3 + x = 0$

b) $r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0$

c) $t^3 - 3t^2 + 3t - 1 = 0$

d) $x^3 + 1 = 0$

Modificamos a letra correspondente à incógnita em cada equação apenas para não dar a impressão que é necessário que a mesma seja sempre x. Utilizamos também equações completas (isto é, nas quais todos os coeficientes são não nulos) e incompletas para mudar o grau de dificuldade de cada equação. Estas equações foram escolhidas de modo a dar condições para que os alunos utilizem os métodos de resolução encontrados nos livros didáticos.

Objetivos: Identificar os possíveis métodos de resolução de cúbicas conhecidos pelos alunos, e quais dificuldades podem surgir durante a resolução. Ainda nesta questão, podemos tentar levantar o que eles entendem por "raízes reais".

Dentre os métodos conhecidos de resolução de equações de terceiro grau, podemos supor que os alunos usem os seguintes:

- decomposição da equação em dois fatores: um de primeiro e outro de segundo grau, através de um fator, comum a todos os termos, que pode ser colocado em evidência;
- encontrar um valor a que seja raiz da equação dada, por tentativa ou através das relações entre raízes e coeficientes, dividindo a mesma por x-a, encontrando também dois fatores.

Resolvendo as equações acima temos:

a) $x^3 + x = 0 \Rightarrow x(x^2 + 1) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1$.

Logo esta equação só possui uma raiz real 0.

b) $P(r) = r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0$

Pesquisando raízes, vemos que 1 é uma delas, pois $1^3 - 6 \cdot 1^2 + 11 \cdot 1 - 6 = 0$

Podemos, então, dividir o polinômio P(r) acima por r-1, o que nos dá:

$P(r) = r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = (r^2 - 5r + 6) \cdot (r - 1) = 0$

Temos, então, $(r^2 - 5r + 6) \cdot (r - 1) = 0 \Rightarrow r^2 - 5r + 6 = 0$ ou $r - 1 = 0$

$r^2 - 5r + 6 = 0 \Rightarrow r = \frac{5 \pm 1}{2} \Rightarrow r_1 = 3$ e $r_2 = 2$.

$r - 1 = 0 \Rightarrow r = 1$

Portanto a equação tem três raízes reais de valores 1, 2 e 3.

c) P(t)= $t^3 - 3t^2 + 3t - 1 = 0$

Tomamos 1 como raiz desta equação.

Dividindo P(t) por t-1, temos:

$t^3 - 3t^2 + 3t - 1 = (t^2 - 2t + 1)(t - 1) = 0 \Rightarrow t^2 - 2t + 1 = 0$ ou $t - 1 = 0$

$t^2 - 2t + 1 = 0 \Rightarrow t = \dfrac{2 \pm 0}{2} \Rightarrow t = 1$

$t - 1 = 0 \Rightarrow t = 1$

Logo, esta equação tem uma raiz real 1, de multiplicidade 3.

d) $x^3 + 1 = 0 \Rightarrow x^3 = -1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{-1} \Rightarrow x = -1$

Logo, esta equação tem –1 como raiz real.

Os alunos podem utilizar-se de outros meios para resolver estas equações. Não acreditamos, entretanto, que métodos geométricos sejam usados já que eles não são abordados em livros didáticos.

Questão 3)

É possível uma equação de 3º grau ter duas raízes reais? Justifique.

<u>*Objetivo:*</u> Observar o conhecimento dos alunos em relação a raízes complexas de uma equação, para que possamos prever um possível obstáculo a ser enfrentado, quando da utilização da fórmula de Cardano na seqüência didática.

Questão 4)

Qual é o grau da equação $\dfrac{x^2 - 6}{6} = \dfrac{1}{x}$? Justifique.

Usamos uma equação formada por uma parábola e uma hipérbole, para tentar mostrar que uma cúbica pode ser escrita desta forma. Estamos conscientes, porém, que esta questão não deixa claro se o aluno está ou não consciente do fato.

Objetivos: Verificar se o aluno identifica como do terceiro grau uma equação que não está escrita de maneira usual, isto é, da forma $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. É importante perceber este fato, para entendermos se o aluno pode fazer o caminho inverso, se ele consegue escrever uma equação de terceiro grau de outra forma que não a usual.

A resposta correta pode ser encontrada manipulando a equação da seguinte forma: $\frac{x^2 - 6}{6} = \frac{1}{x} \Rightarrow x(x^2 - 6) = 6 \Rightarrow x^3 - 6x = 6$, de grau 3.

Questão 5)

Se você fizesse o gráfico da função $f : \Re \to \Re$ dada por $f(x) = \frac{x^2 - 6}{6}$, que tipo de curva encontraria?

Questão 6)

Se você fizesse o gráfico da função $f : \Re * \to \Re$ dada por $f(x) = \frac{1}{x}$, que tipo de curva encontraria?

Questão 7)

Você foi capaz de responder às questões 5) e 6) sem fazer o gráfico?

Sim **Não**

Objetivo: Tomamos as mesmas equações de parábola e hipérbole da *Questão 4)*, a fim de observar qual o registro de representação necessário ao aluno, isto é, se ele reconhece essas equações ou se necessita do gráfico.

Esperamos que, dentre as questões 5), 6) e 7), apenas a *Questão 6)* nos traga respostas incorretas, já que os alunos freqüentemente estudam equações de segundo grau nas últimas séries do Ensino Fundamental.

A *Questão 7)* é complemento das anteriores *5)* e *6)*, com o objetivo de ajudar a saber se o aluno faz ou não o gráfico da função, a fim de observarmos qual o registro de representação por ele usado.

Questão 8)

Você conhece algum tipo de "método" de resolução de equações de terceiro grau?

Que método é esse?

Onde você o aprendeu?

Como se resolve uma equação por este método?

Você sabe se existem outros além do que você conhece?

Questão 9)

Você tem alguma dificuldade em resolver equações de 3º grau?

Quais são estas dificuldades?

As *Questões 8)* e *9)* servem como consulta das dificuldades que os alunos podem sentir quando são confrontados com equações deste tipo. Acostumados a fórmulas como a de Bhaskara, eles tendem a se deparar com uma série de problemas, em uma resolução para a qual não lhes foi dado um método de resolução geral.

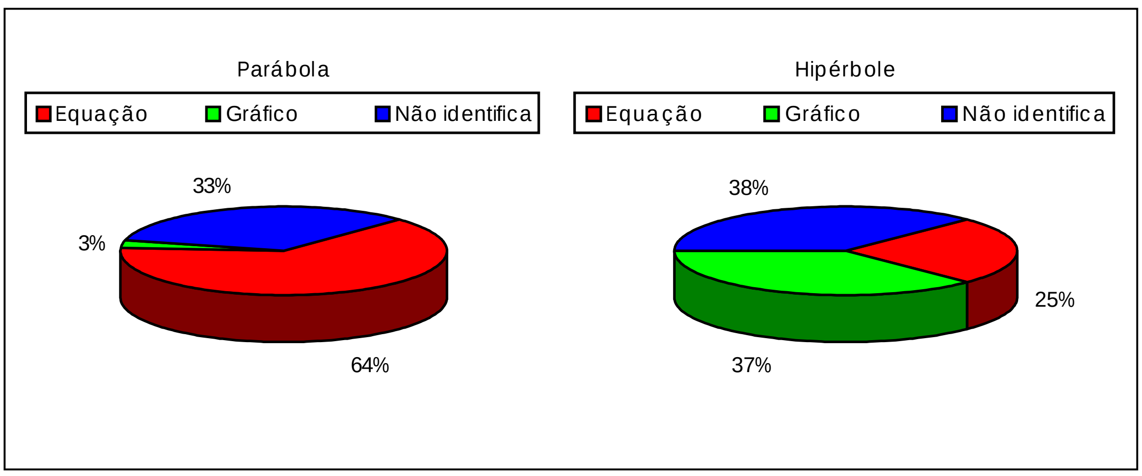
Esperamos que as respostas a estas questões reforcem ainda mais a idéia de que o estudo de resolução de equações de terceiro grau se faz necessário.

3.3. Análise a posteriori do questionário

Com os dados colhidos na aplicação do questionário, fazemos análises qualitativa e quantitativa, considerando nossos objetivos acima. Além disso, decodificamos os resultados obtidos em variáveis estatísticas, que são tratadas nos *softwares* Chic e Chadoc. Dessas análises, tiramos algumas observações importantes, que descrevemos a seguir.

As análises implicativa, hierárquica e de simetria feitas com o *software* CHIC nos levam aos mesmos resultados, da mesma forma a análise multidimensional do *software* Chadoc. Assim sendo, apresentamos aqui apenas algumas implicações feitas em CHIC. Os gráficos e planos, obtidos com estas análises encontram-se disponíveis nos anexos.

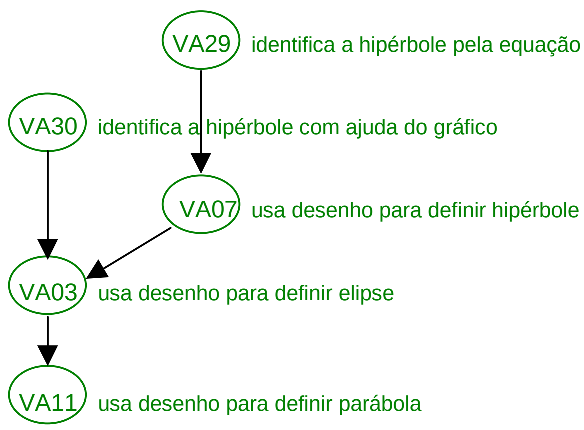
Nenhum dos alunos que respondem ao questionário dá uma definição formal para elipse, parábola ou hipérbole. Obtemos desenhos ou descrições de propriedades de cada um desses objetos. No confronto de variáveis nos programas Chic e Chadoc, percebemos classes de comportamentos de estudantes que tendem a confundir cada uma dessas curvas com seus registros de representação. Em relação à parábola, o registro mais usado é a equação; quanto à hipérbole, porém, o gráfico tem maior evidência.



Quadro 3.1. Gráficos – Confusão entre registros de representação e objeto

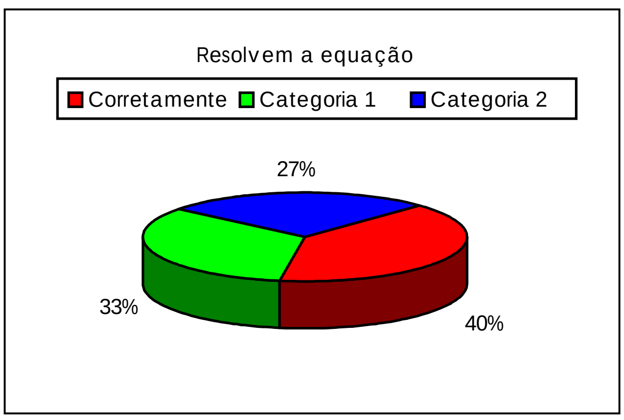
Vimos, nos livros didáticos estudados, que as definições geométricas das cônicas são postas de lado para dar lugar a equações e construção de gráficos. Existe, então, uma possibilidade de a confusão do objeto pelo registro ser uma influência da abordagem usada na aquisição do conceito.

É possível que os conhecimentos disponíveis nos alunos sejam suficientes para que eles consigam usar o método de Omar Khayyam para resolver uma equação de terceiro grau. Devemos, entretanto, observar que os alunos se deparam com dificuldades quando a hipérbole é tomada. Este fato influencia nossas decisões no momento de construção da seqüência.

	As implicações ao lado fazem parte do gráfico implicativo obtido em CHIC e definem a *Classe do Desenho*. Os níveis mais baixos de implicação são os de maior ocorrência. Podemos perceber que o registro de representação mais forte aqui é o desenho. O comportamento típico ilustrado neste gráfico é o de alunos que definem estes três objetos, parábola, hipérbole e elipse através de um desenho.

Quadro 3.2. – Classe do desenho (CHIC)

Observando as questões que envolvem equações de terceiro grau, percebemos que o único método empregado pelos alunos na resolução das equações da *Questão 2)*, é colocar fatores em evidência. Este método é empregado de maneira incorreta nos casos em que a equação é completa, isto é, do tipo $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, em que todos os coeficientes são diferentes de zero. Os erros dos alunos podem ser classificados em duas categorias:

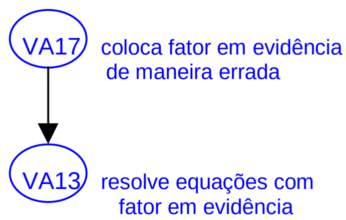


Quadro 3.3. – Categorias

- **Categoria 1**: os alunos colocam x em evidência da seguinte forma: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \Rightarrow x\left(x^2 + bx + c + \frac{d}{x}\right) = 0$, o que não soluciona o problema, pois eles não conseguem continuar a resolução.
- **Categoria 2**: os alunos levam o termo independente para o segundo membro da equação, colocam x em evidência no primeiro termo e separam a

equação em duas da seguinte forma: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow ax^3 + bx^2 + cx = d \Rightarrow x\left(ax^2 + bx + c\right) = d \Rightarrow \begin{cases} x = d \\ ax^2 + bx + c = d \end{cases} \text{ou}$$

	A implicação ao lado, parte do gráfico implicativo de CHIC, revela o problema mais comum nos questionários em relação à resolução das equações dadas. Escolhendo usar fatoração para procurar as raízes, os alunos não conseguem finalizar a tarefa de maneira favorável. A não utilização dos métodos presentes nos livros didáticos pode estar ligada à dificuldade de memorização dos mesmos.

Quadro 3.4. – Classe do sucesso parcial (CHIC)

Dos 33, 19 alunos respondem esta questão sem resolver a equação, 7 corretamente, mas 12 de maneira incorreta. Encontramos justificativas como, por exemplo: *"Três raízes, pois a equação possui todos os termos"* ou *"Três raízes pois é uma equação de terceiro grau"*, dizem dois alunos. Parece haver uma tendência a conhecer o Teorema Fundamental da Álgebra, ou a ter uma "percepção" dele como verdade. Vale a pena destacar também que resoluções corretas são, em sua maioria, encontradas para os itens **a** e **d**, cujas equações não contêm todos os termos. Entre os 33 alunos, 5 resolvem os quatro itens. Obtemos, porém, um único acerto para cada um dos itens **c** e **b**, 5 acertam **a** e 2 acertam **d**. Resolvem apenas **a** e **d** 12 alunos, sendo que 7 acertam **a** e **b**. Percebemos, então, que os alunos não refletem se as equações completas dadas têm características que os levem a usar os métodos por eles conhecidos.

Chama nossa atenção também o fato de nenhum aluno mostrar, em seu questionário, uma tentativa de resolução desses itens pelos métodos encontrados em livros didáticos. Apenas 3 alunos citam Briot-Ruffini mas não o utilizam, 7 dizem resolver por fatoração e 2 conhecem divisão da equação por uma de suas raízes. Os demais alunos não citam qualquer método.

Obtemos, então, 5 alunos (aproximadamente 15% do total) que comentam os métodos abordados nos livros didáticos. Esta discrepância pode ter origem na maneira de apresentar algoritmos.

Outro fator importante desta análise, diz respeito ao gráfico de uma função de terceiro grau. Muitos estudantes afirmam dificuldades em construí-los, em outros percebemos a falta de conhecimento do mesmo, visto que há questionários em que os alunos desenham um gráfico qualquer e afirmam ser de uma função de terceiro grau. Isto nos leva a entender que o jogo de quadros, não usado em livros didáticos, pode ser um fator determinante nessa deficiência encontrada. A mudança de quadros, a nosso ver, é de extrema importância no estudo de equações de uma forma geral, a fim de ampliar conhecimentos e dar maiores opções de raciocínio aos estudantes.

O desconhecimento de um método geral de resolução nos parece um obstáculo para os alunos, e este mesmo fato ocorre no processo histórico de resolução de equações de terceiro grau. Nenhuma das formas de se resolver uma cúbica, encontradas na história são abordadas para uso em sala de aula nos livros didáticos estudados. Encontramos apenas a fórmula de Cardano como uma curiosidade que pode ou não ser lida e estudada pelos alunos ou usada pelo professor. O método geométrico de Omar Khayyam não é citado e resoluções geométricas não são exigidas ou comentadas.

Apenas um aluno respondeu e justificou corretamente a *Questão 3)*. É provável que o conceito de números complexos não tenha sido adquirido. Pode-se supor que equações de terceiro grau, resolvidas através da fórmula de Cardano. que resultem em números complexos para encontrar suas raízes, criem obstáculos a alunos com este perfil.

Capítulo IV: Problemática da Pesquisa

IV. Problemática da Pesquisa

1. Introdução

Após os estudos feitos até o presente momento, analisamos as dificuldades com que os alunos se deparam para resolver equações de terceiro grau. Vimos que a construção de gráficos de tais curvas e a necessidade de um método algébrico eficiente são os principais problemas por eles levantados.

Com estes dados, podemos perceber que a falta de hábito em mudar de quadros tende a levar os estudantes a preferir utilizar meios algébricos de resolução nos problemas que são apresentados a eles. São raras as vezes em que vemos em livros didáticos incentivo a tentativas de utilizar recursos geométricos na solução de atividades. A nosso ver, o jogo de quadros tem o papel de abrir novos horizontes e aprimorar raciocínios matemáticos. Perder tais reforços pode vir a acarretar maiores dificuldades ou mais trabalho para o estudante.

Nosso trabalho visa propor, através do estudo de resolução de equações de terceiro grau, um meio de transportar conhecimentos algébricos para o quadro geométrico, numa tentativa de desenvolver habilidades em tal quadro.

Escolhemos utilizar equações de grau três pois elas nos dão a possibilidade de encontrar suas raízes reais por meios algébricos e geométricos, além de trazer soluções históricas aparentemente desconhecidas entre os estudantes.

2. Trabalhos encontrados sobre o tema

Encontramos uma proposta de trabalho desenvolvendo equações de terceiro grau, envolvendo um método histórico de resolução. Seu objetivo, entretanto, gira em torno do ensino/aprendizagem de números complexos.

A dissertação de Mestrado de Mário Servelli Rosa **“Números Complexos - Uma Abordagem Histórica para Aquisição do Conceito”** leva o aluno a conhecer os números complexos partindo da necessidade de resolver uma equação de terceiro grau. Nesse trabalho, uma das maneiras usadas pelo aluno para resolver uma equação cúbica é por pesquisa de raízes e por meio de gráficos, através da intersecção de curvas de primeiro e de terceiro graus.

Rosa coloca, na *“Análise a Posteriori”* de sua seqüência didática que os alunos com os quais ele trabalhou (cursando terceiro ano do Ensino Médio), nunca tinham utilizado um método gráfico para encontrar raízes reais de qualquer equação. Imaginamos que isso possa vir a acontecer em nosso trabalho, pois pretendemos fazer nosso estudo com alunos do mesmo nível. Esse dado de sua pesquisa, entretanto, reforça nossa hipótese de que o quadro geométrico é pouco explorado pelos professores ao ensinar equações.

Observamos também que Rosa, ao utilizar a fórmula de Cardano, percebe que os alunos não se lembravam das relações entre os coeficientes de uma equação de segundo grau e suas raízes. Vemos a possibilidade de isto acontecer em nosso trabalho, durante o estudo do desenvolvimento da fórmula em questão na seqüência didática.

Apesar das diferenças entre o trabalho de Rosa e o que estamos apresentando, podemos perceber suas preocupações em abordar resoluções para equações de terceiro grau, no caso para a introdução de complexos, e com o jogo de quadros, já que sua dissertação aborda também resoluções gráficas.

3. Nossa proposta

Nossa proposta é apresentar alguns métodos geométricos e algébricos de resolução de cúbicas, com o objetivo de levar os alunos a compará-los, compreendendo suas diferenças e vantagens. Além disso, gostaríamos que eles notassem a importância do jogo de quadros e do uso do registro gráfico de representação.

Utilizaremos nesta pesquisa:

a) o Construtor Universal de Equações, descrito por d'Alembert, construído utilizando-se o software Cabri-géomètre. Essa ferramenta desenha o gráfico de equações de grau n e é aqui usada para casos em que n=3 (um método geométrico);

b) a fórmula algébrica de Cardano-Tartaglia resolve equações cúbicas da forma $x^3 + px + q = 0$, na qual qualquer equação completa de terceiro grau pode ser transformada;

c) o método de Omar Khayyam, cuja resolução geométrica de uma cúbica se dá pela intersecção de duas curvas cônicas, construídas em um mesmo plano cartesiano;

d) pesquisa de raízes através dos coeficientes da equação dada, fazendo uma divisão da mesma pelo polinômio x-a, no qual a é uma raiz encontrada.

Levantamos, durante nossos primeiros estudos, as seguintes questões:

- Estes métodos são suficientes para que o aluno tenha uma visão geral de resolução de cúbicas?

  Procuramos em nossa seqüência didática respostas para esta questão, já que utilizamos em nosso trabalho tanto métodos geométricos quanto algébricos.

- O aluno terá mais facilidade com métodos geométricos ou algébricos?

  Veremos que, neste caso, os métodos geométricos sempre levam o aluno a identificar todas as raízes reais da equação, sem causar-lhe muitos problemas, o que nos faz pensar que eles escolherão este quadro como o de maior facilidade. O quadro algébrico nem sempre o ajuda, por exemplo, quando a fórmula de Cardano exige o conhecimento de números complexos ou quando a equação não tem raízes racionais e isso impede que o aluno as pesquise.

- O método de Omar Khayyam é o mais adequado para utilização do aluno por ser de simples construção geométrica, se usado sem o auxílio do computador?

  Supomos que sim, pois acreditamos que o gráfico de uma função polinomial de terceiro grau traz grandes dificuldades em sua construção.

- A fórmula de Cardano pode trazer problemas na resolução algébrica?

  É provável que a resposta a esta pergunta seja positiva pois, como já foi dito, esta fórmula exige, às vezes, que os alunos conheçam números complexos.

Pretendemos verificar a validade ou não de nossas hipóteses, com a construção de uma seqüência didática, que utiliza os métodos acima mencionados, numa tentativa de dar ao aluno condições para resolver qualquer equação de terceiro grau com a qual ele venha a se deparar no decorrer de seu aprendizado. Ele poderá, inclusive, decidir qual método utilizar dependendo da equação que tenha em mãos.

A seguir, faremos uma descrição dos métodos citados acima.

4. Os Métodos

4.1. O Construtor Universal de Equações

Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783) foi um geômetra e físico francês, editor de ciências da *Encyclopédie* de Diderot, na qual descreve a construção e o uso de uma máquina que encontra raízes de equações de qualquer grau no intervalo [0,1], o *"Construtor Universal de Equações"*, e ainda explica a teoria sob a qual ela se fundamenta.

Em seu artigo *"De d'Alembert à Cabri-géomètre: Le Constructeur Universel d'équations"*, Michel Carral e Roger Cuppens explicam que aquela máquina a priori encontra graficamente as raízes de um polinômio situadas no intervalo [0,1]. Cabri-géomètre, porém, possui a facilidade de modificar uma figura conservando as propriedades e relações com as quais ela foi construída e, além disso, permite considerar x em qualquer ponto da reta real.

4.1.1. Teoria Algébrica do Construtor

O artigo explica que a álgebra do Construtor é baseada no Esquema de Horner, que permite calcular valores de um polinômio $P(X)=\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ através da seqüência $(c_k(x))$ definida por:

1) $c_n(x)=a_n$
2) $c_k(x)=xc_{k+1}(x)+a_k$,

e verificando 3) $c_{k+1}(x)=\sum_{j=k}^{n} a_j x^{j-k}$ para k=0,...,n. Quando k=0, $c_0(x)=P(x)$.

Apesar de ser simples para cálculos algébricos, este método causa grandes dificuldades para uma construção geométrica. Para contornar este problema, ele foi modificado da seguinte maneira:

Seja $b_k=\sum_{j=0}^{k} a_j$, obtemos $a_0=b_0$ e $a_k=b_k-b_{k-1}$ (k=1,...,n). De fato:

$$b_k-b_{k-1}=\sum_{j=0}^{k} a_j-\sum_{j=0}^{k-1} a_j=a_0+a_1+...+a_{k-1}+a_k-(a_0+a_1+...+a_{k-1})=a_k .$$

Dado $P(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, temos:

$$P(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k=a_0+\sum_{k=1}^{n}(b_k-b_{k-1})x^k=b_0+\sum_{k=1}^{n} b_k x^k-\sum_{k=1}^{n} b_{k-1}x^k=$$

$$=\sum_{k=0}^{n} b_k x^k-\sum_{k=0}^{n-1} b_k x^{k+1}=b_n x^n+\sum_{k=0}^{n-1} b_k(1-x)x^k .$$

Aplicando o Esquema de Horner a esta representação, temos a seguinte seqüência $(c_k(x))$:

4) $c_n(x) = b_n$ e

5) $c_k(x) = xc_{k+1}(x) + (1-x)b_k$, para k=0,...,n-1 e tal que $c_0(x) = P(x)$.

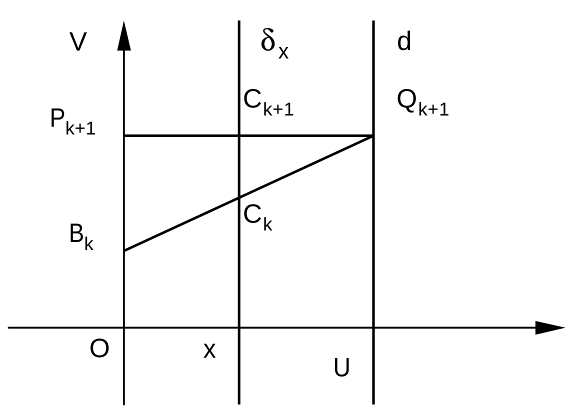
4.1.2. Teoria Geométrica do Construtor

O mesmo artigo de Michel Carral e Roger Cuppens nos dá a idéia geométrica do Construtor.

Tomando as retas perpendiculares OV e OU, temos um plano ortogonal. Tracemos a reta d por U perpendicular a OU, de abscissa 1; e a reta δ_x paralela a OV de abscissa x.

Sendo:

- n um número natural;
- x um número real;
- a_0,..., a_n números reais;
- $b_k = \sum_{j=0}^{k} a_j$ (k=0,..., n);
- $(c_k(x))$ a seqüência definida a partir dos b_k e das relações 4) e 5);
- B_k o ponto do eixo OV de ordenada b_k para k=0,..., n;
- C_k o ponto de abscissa x e ordenada $c_k(x)$ para k=0,..., n;
- P_k a projeção de C_k sobre OV para k=0,..., n;
- Q_k a projeção de C_k sobre d para k=0,..., n.



A relação 5) pode ser escrita da seguinte forma:

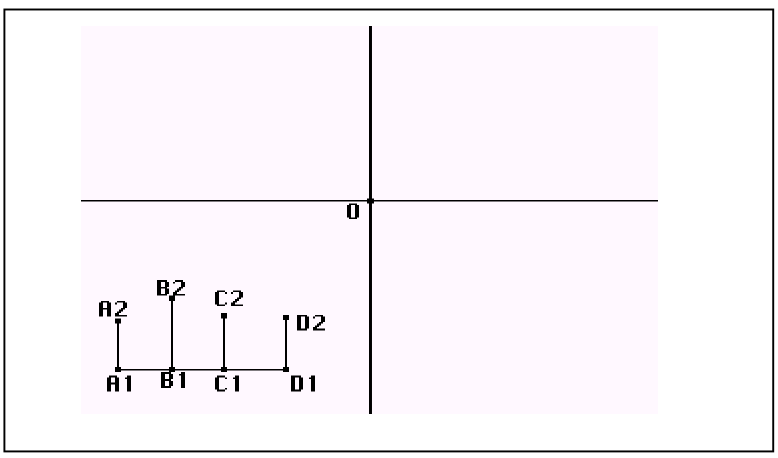
$c_k(x) - c_{k+1}(x) = (1-x)(b_k - c_{k+1}(x))$, o que, geometricamente, nos dá:

$C_{k+1}C_k = (1-x)P_{k+1}B_k$. Concluímos, então, pelo Teorema de Tales que os pontos Q_{k+1}, C_k e B_k estão alinhados e que C_k é o ponto de intersecção das retas d e B_kQ_{k+1}.

4.1.3. Construindo a Máquina

Descrevemos aqui o processo por nós usado para a construção dessa Máquina no Cabri-géomètre para n=3[4].

Construímos, inicialmente, um sistema de coordenadas ortogonais de origem O, um segmento A_1D_1 paralelo ao eixo x e dois pontos B_1 e C_1 sobre ele. Em seguida, construímos quatro segmentos de medidas arbitrárias a, b, c e d, perpendiculares a A_1D_1, cujas extremidades são, respectivamente, A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2.

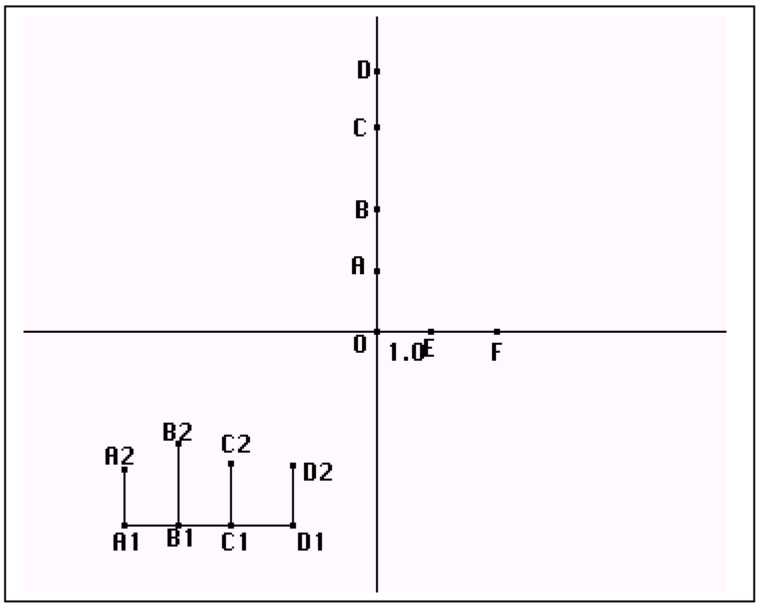


Quadro 4.1 – O sistema de coordenadas ortogonais

Sobre o eixo y, foram construídos o segmento OA de medida d, o segmento OB de medida c+d, o segmento OC de medida b+c+d e o segmento

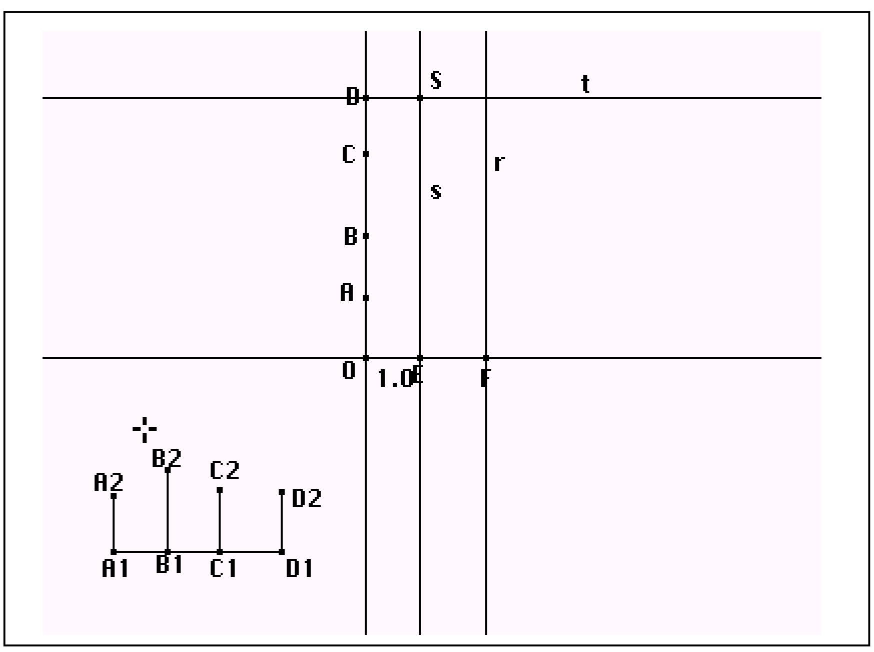
[4]Esta construção foi estudada pelos autores deste trabalho em pesquisa de Iniciação Científica na PUC-SP, patrocinada pela CNPq, e se encontra nos anais do IV EPEM para o caso em que n=2.

OD de medida a+b+c+d. Sobre o eixo x, os segmentos OF de medida arbitrária x e OE de medida 1.



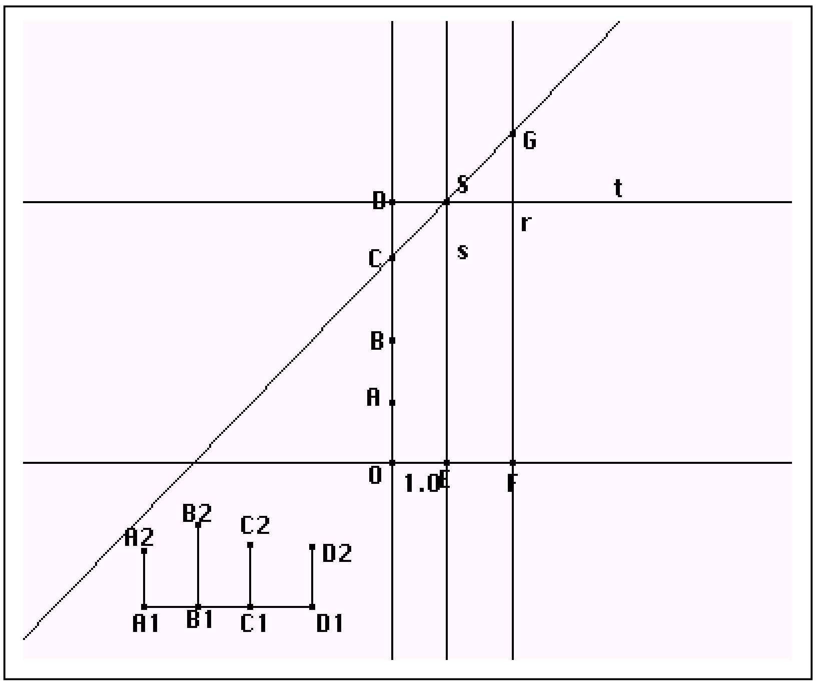
Quadro 4.2. – Os coeficientes da equação

Pelos pontos F e E construímos perpendiculares r e s (respectivamente) ao eixo x. E, pelo ponto D, a perpendicular t ao eixo y. Seja S o ponto de intersecção de s e t.



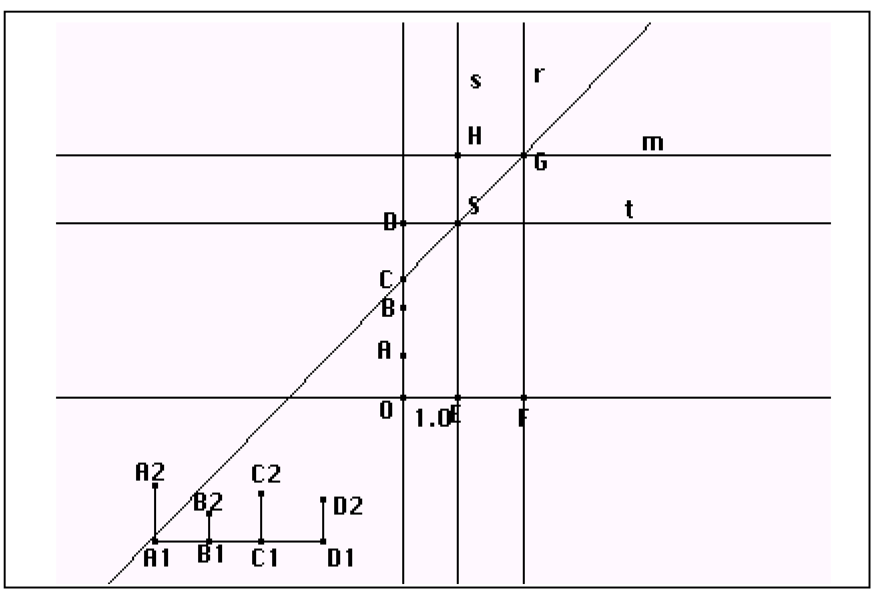
Quadro 4.3. – Ponto S

Tomamos, então, a reta SC, onde G é a intersecção dela com a reta r.



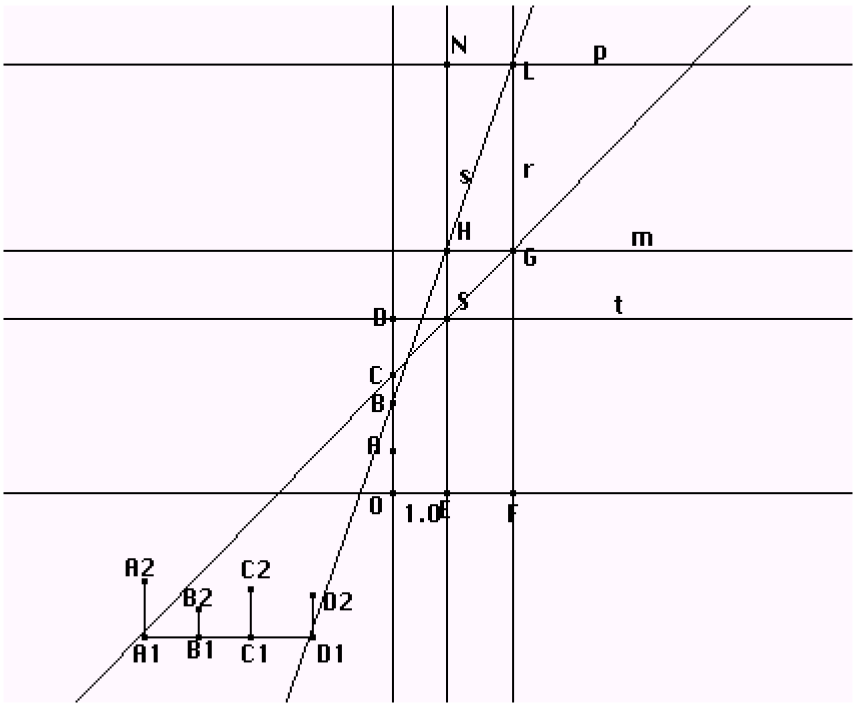
Quadro 4.4. – A reta por S e G

A reta <u>m</u> foi construída passando por G e paralela ao eixo x. H é a intersecção entre <u>m</u> e <u>s</u>.



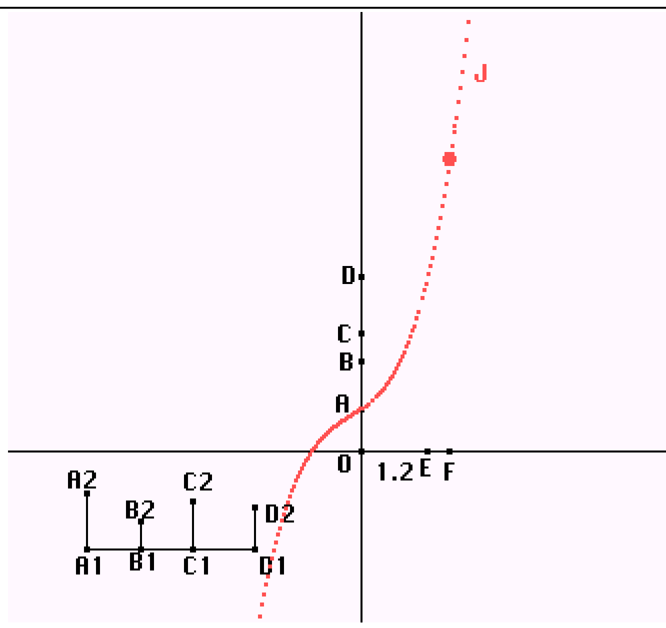
Quadro 4.5. – O ponto H

A seguir, tomamos a reta BH e sua intersecção com a reta r é o ponto L. Por ele, traçamos uma reta p paralela ao eixo x. A intersecção entre p e s é o ponto N.



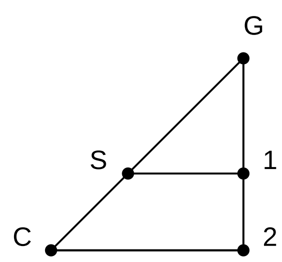
Quadro 4.6. – A reta que passa por B e H, e o ponto N

A reta AN corta a reta r no ponto J. Obtendo o lugar geométrico dos pontos J quando E é deslocado no eixo x, obtemos o gráfico de uma equação de terceiro grau cujos coeficientes são <u>a</u>, <u>b</u>, <u>c</u> e <u>d</u>.



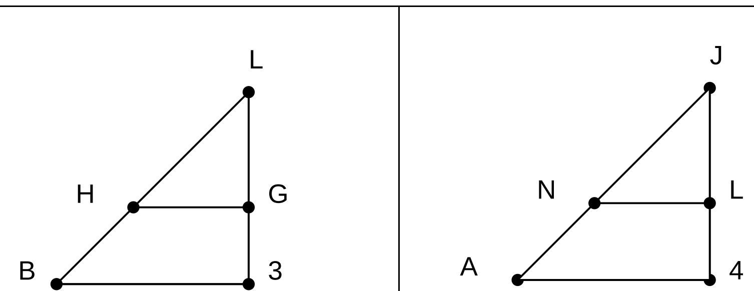
Quadro 4.7. – O lugar geométrico de J.

Sabemos que a abscissa de J é x, já que este ponto pertence à reta r. Para encontrar sua ordenada, utilizamos semelhança de triângulos. Inicialmente, calculamos a ordenada do ponto G da seguinte maneira:

	C, S e G são pontos construídos acima. 1 é a intersecção entre as retas t e r; 2 é a intersecção entre r e uma reta paralela ao eixo x passando por C. Temos os triângulos SG1 e CG2 semelhantes. Sendo C2=x, S1=x-1, G1=g e G2=g+a, encontramos g=ax-a. Assim, G tem coordenadas (x, ax+b+c+d).

Quadro 4.8. – As coordenadas do ponto G

Da mesma forma, encontramos para L as coordenadas (x, $ax^2+bx+c+d$), tomando os triângulos BL3 e HLG semelhantes na figura abaixo, onde 3 é a intersecção entre r e uma reta paralela ao eixo x passando por B.



Quadro 4.9. – Triângulos BL3 e AJ4

Finalmente, as coordenadas de J são (x, ax^3+bx^2+cx+d), o que se verifica facilmente tomando os triângulos AJ4 e NJL da figura acima, e 4 é o ponto de intersecção entre r e uma reta paralela ao eixo x, passando por A.

4.2. A Fórmula de Cardano-Tartaglia

Tentamos aqui explicar o que significam os versos que Tartaglia mandou para Cardano, descritos no Estudo Histórico.

Como Tartaglia não utiliza coeficientes negativos, ele considera três casos de maneira diferente: $x^3 + ax = b$, $x^3 = ax + b$ e $x^3 + b = ax$. No primeiro verso, ele considera equações do primeiro tipo. No quarto, passa a considerar o segundo tipo e o último começa a ser estudado no sétimo verso. Tomemos o primeiro caso:

O "número" é o termo independente b. Achar "dois outros diferentes nisso" sugere tomar duas novas variáveis (por exemplo u e v) tal que u-v=b. A frase "seu produto seja sempre igual ao cubo da terça parte da coisa" diz que u e v verificam $u \cdot v = \left(\frac{a}{3}\right)^3$ e "o resíduo geral das raízes cúbicas subtraídas será tua coisa principal" leva à solução $x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$. Os outros casos podem ser reduzidos ao primeiro.

A resolução para a equação $x^3 + mx = n$ que aparece na obra de Cardano é a seguinte:

Considerando: $x = a + b$, temos :

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab^2 + 3a^2b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a+b)^3 = +3ab(a+b) + a^3 + b^3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (a+b)^3 - 3ab(a+b) = a^3 + b^3$$

Como $x = a + b$, fazendo $m = -3ab$ e $n = a^3 + b^3$, temos:

$\left(\frac{-m}{3}\right)^3 = (ab)^3$ e $n = a^3 + b^3$, tendo assim uma equação de segundo grau cujas raízes são a^3 e b^3. A raiz x da equação cúbica inicial é, então dada por:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{n}{2} + \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\left(\frac{n}{2}\right) - \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3}}\ .$$

A equação geral de terceiro grau $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ pode ser reduzida ao caso acima, com uma mudança de variável: $x = y - \left(\frac{a}{3}\right)$, o que significa que

Tartaglia poderia resolver qualquer tipo de equação de terceiro grau. Não sabemos, entretanto, se ele percebia tal fato.

4.3. O Método de Omar Khayyam

A idéia do método de Omar Khayyam é a seguinte:
Dada a cúbica $x^3 + ax^2 + b^2x + c^3 = 0$, substituímos x^2 por 2py, o que resulta na seguinte equação: $2pxy + 2apy + b^2x + c^3 = 0$, que é a equação de uma hipérbole.

Como $x^2 = 2py$ é a equação de uma parábola, traçando estas duas curvas em um mesmo plano cartesiano, teremos as intersecções delas como raízes da equação cúbica original.

Seu estudo, porém, não é tão simples assim. Omar Khayyam não aceita a existência de raízes negativas, o que o leva a uma sistematização destas equações para que seus coeficientes fossem positivos ou nulos.

Estudando a equação $x^3 + ax^2 + b^2x + c^3 = 0$, com coeficientes a, b e c positivos ou nulos, Khayyam encontra 19 tipos de equação, dentre as quais 5 podem ser reduzidas a formas de primeiro ou segundo grau, por exemplo $x^3 = ax^2$ equivale a $x = a$ e, portanto, não é necessária a utilização de uma cônica para resolvê-la. As 14 restantes não poderiam ser resolvidas por régua e compasso: uma binomial $x^3 = d$, seis equações de três fatores $x^3 + cx = d$, $x^3 + d = cx$, $x^3 = cx + d$, $x^3 + bx^2 = d$, $x^3 + d = bx^2$ e $x^3 = bx^2 + d$; e sete equações de quatro fatores $x^3 + bx^2 + cx = d$, $x^3 + bx^2 + d = cx$, $x^3 + cx + d = bx^2$, $x^3 = bx^2 + cx + d$, $x^3 + bx^2 = cx + d$, $x^3 + cx = bx^2 + d$ e $x^3 + d = bx^2 + cx$. Cada um destes casos sendo detalhadamente estudado e as seções cônicas necessárias para a solução descritas. Omar Khayyam prova que as soluções são corretas e discute as condições sobre as quais pode não haver ou haver mais de uma solução. É necessário, entretanto, destacar que este matemático não encontra todas as soluções da equação de terceiro grau, já que não aceita raízes negativas e nem todas as intersecções como solução.

Tomemos alguns exemplos do que fazia Omar Khayyam para resolver uma equação de segundo grau.

Primeiramente, para evitar igualar números com magnitudes geométricas, Khayyam fazia uso de uma unidade de medida, tomando o número como um retângulo em que um dos lados tinha por medida a unidade por ele criada.

Equações do tipo $x^3 = d$ são resolvidas à maneira grega, como descrito anteriormente no *Capítulo II – Estudo Histórico* deste trabalho. Em seguida, considerando as equações de três termos descritas acima, tomemos a equação $x^3 + bx^2 = d$. Khayyam toma $s^3 = d$, onde b e s são segmentos. A solução pode ser encontrada interceptando a parábola $s(x+b) = y^2$ com a hipérbole de equação $xy = s^2$. Esta solução exige inicialmente que se resolva a equação $s^3 = d$ utilizando duas parábolas.

5. Cabri-géomètre

Cabri-géomètre é um caderno de rascunho interativo para a Geometria (cahier de brouillon interactif), que permite a criação e construção de figuras geométricas a partir de elementos e relações primitivas, e a manipulação desses objetos como uma forma de questionar e compreender a Geometria.

Sua utilização em sala de aula permite que o aluno visualize propriedades e relações geométricas, descobrindo sozinho, ou com a indução do professor, o que elas significam e o quanto são importantes até mesmo para sua vida diária.

Além de elementos como ponto, reta e circunferência, Cabri-géomètre também permite construções de ponto médio, retas paralela e perpendicular, intersecção de dois objetos, entre outros. Um item particular permite solicitar a visualização de um lugar geométrico.

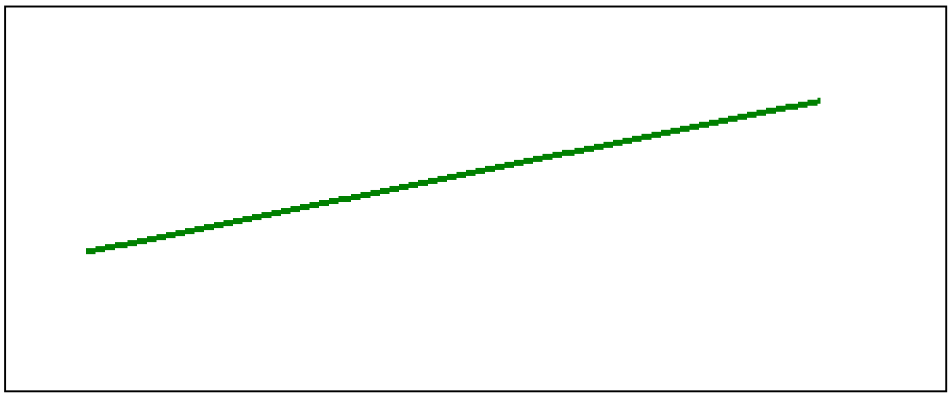
Deve-se também dar destaque à capacidade que Cabri-géomètre tem de deslocar um ponto sem modificar as relações ou dependências existentes na figura.

Esta, então é a principal qualidade de Cabri-géomètre para nosso estudo pois podemos construir com a ajuda deste *software* o Construtor de Equações, a fim de apresentar gráficos de equações cúbicas aos alunos, e podemos construir os gráficos de parábolas e hipérboles para utilizar o método de Omar Khayyam. Além disso, podemos mostrar aos alunos o que significa o conjunto de pontos com a mesma propriedade, sobre os quais as definições das cônicas os livros didáticos falam.

Alguns pontos importantes deste *software* devem também ser destacados aqui. Por exemplo, a não permanência do rastro do lugar geométrico na tela para a sua visualização na mudança de alguma propriedade ou medida da figura.

As medidas de segmentos feita pelo Cabri-géomètre são dadas com um arredondamento de até uma casa decimal. Dependendo do tipo de atividade, isto pode ser entendido como erro, caso esta aproximação não seja levada em consideração. Para as atividades que serão propostas aqui, porém, esta característica do *software* não terá influência.

Podemos também salientar a falta de uniformidade com que alguns elementos são apresentados na tela do computador. Tomando como exemplo uma reta inclinada, ela aparecerá como se fosse uma “escadinha”, como pode-se ver pela figura do quadro 4.10:

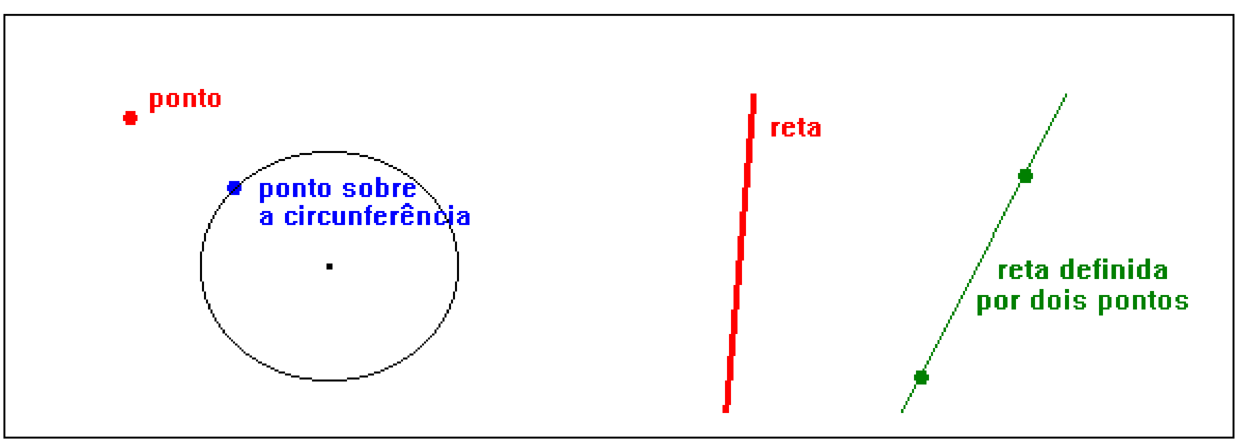


Quadro 4.10. – A reta em Cabri-géomètre

O elemento, porém, não deixa de ser uma reta, esta é apenas a representação feita pelo computador e assim visualizada pela má definição da imagem no monitor.

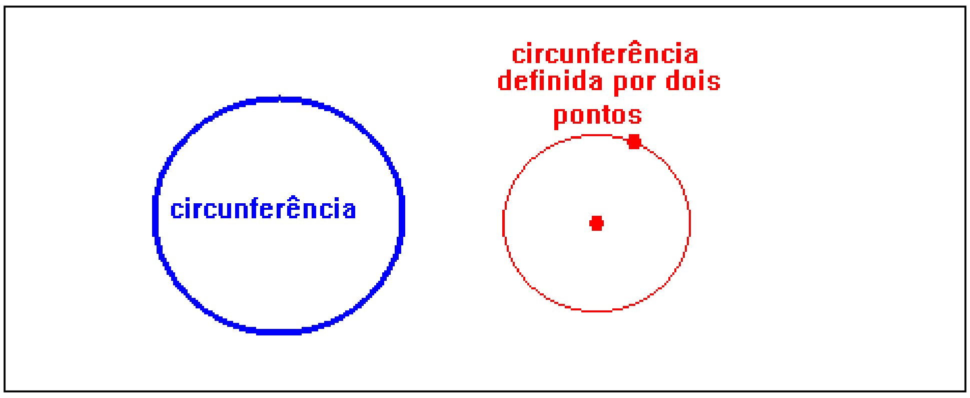
Em relação às construções, Cabri faz distinção entre *ponto* e *ponto sobre objeto*. O primeiro pode ser movimentado por toda a tela, sem restrições. O segundo é construído sobre um objeto, está em uma reta, ou circunferência e só pode ser movimentado em cima daquele objeto ao qual pertence.

Existem também *retas* e *retas definidas por dois pontos*. As primeiras possuem uma direção e só podem ser movimentadas respeitando esta direção. Uma reta que foi definida a partir de dois pontos pode se movimentar por qualquer sentido ou direção que seus pontos de origem forem levados.



Quadro 4.11. – Ponto e ponto sobre objeto; reta e reta definida por dois pontos

De maneira semelhante, temos *circunferência* e *circunferência definida por dois pontos*. A primeira se move por todo plano, tendo o raio fixo, enquanto a última, tendo um ponto qualquer pertencente a ela, pode ter a medida do seu raio alterada.



Quadro 4.12. – Circunferência e circunferência definida por dois pontos

É importante perceber estas diferenças existentes no *software* para seu melhor uso nas atividades que são aqui apresentadas.

Capítulo V:
A Seqüência Didática

V. A Seqüência Didática

1. Introdução à Seqüência Didática

Com o objetivo de desenvolver a proposta deste trabalho e de analisar nossas hipóteses, desenvolvemos uma seqüência didática, em duas partes. A primeira deve nos ajudar a preparar o aluno para utilizar curvas cônicas, como ferramenta para a resolução de equações de terceiro grau. Na segunda, tentamos levá-lo a resolver uma equação cúbica, pelo método de Omar Khayyam, além de fornecer outras formas de resolução de tais equações.

Após uma primeira aplicação e após nosso Exame de Qualificação, foram feitas algumas mudanças nas atividades a serem desenvolvidas. Descrevemos a seqüência como foi criada para o primeiro estudo e, em seguida, explicamos suas modificações.

Na primeira parte, temos quatro atividades:

Atividade Cabri-géomètre: Utilização de Cabri-géomètre para construção das cônicas através de suas propriedades geométricas. É composta de dois exercícios, o primeiro visando o reconhecimento da forma gráfica de uma parábola; o segundo fazendo o mesmo com hipérbole e elipse. É nosso interesse também que os alunos percebam que todos os pontos do “desenho” que eles encontram possuem uma mesma propriedade, que pode ser usada para definir tal objeto matemático.

Atividade Equação: Partindo das propriedades geométricas estudadas na atividade anterior, tentamos aqui encontrar uma equação para cada uma das cônicas. Esta parte é composta de três exercícios, um para cada curva.

Atividade Encontro: Dadas as equações de duas curvas cônicas, pretendemos observar quais as possíveis tentativas que os alunos fazem, para encontrar pontos que as satisfaçam ao mesmo tempo. Sua resolução pode ser algébrica ou geométrica, o que pode nos fornecer dados que digam a qual quadro os alunos estão mais habituados a recorrer - algébrico ou geométrico. O tipo de método de resolução e a utilização ou não de Cabri-géomètre ficam a cargo do aluno.

Atividade Gráficos: O último exercício desta série faz o inverso do que foi dado até agora. Se nossas atividades foram suficientes para que os alunos ao menos tivessem uma noção destas curvas e de “pontos de encontro”, eles poderão reconhecer com facilidade estes objetos.

A segunda parte desta seqüência didática é constituída por sete atividades:

Atividade Duplicação do Cubo: Este problema da Antigüidade pode ser resolvido a partir de uma equação de terceiro grau. Observamos qual artifício é usado pelos alunos, mas tentamos auxiliá-los a desenvolver seu raciocínio a partir dos conceitos vistos nas atividades da primeira fase, sendo livre o uso de Cabri-géomètre.

Atividade Construtor de Equações: Nesta atividade, encontra-se um roteiro a partir do qual este Construtor de Equações é elaborado. Mais tarde, ao manipular os segmentos <u>a</u>, <u>b</u>, <u>c</u> e <u>d</u>, temos a intenção de que o aluno perceba que tem nas mãos um instrumento capaz de traçar gráficos de polinômios de grau igual a 3 ou menor. Ele pode, assim, conferir o resultado do exercício anterior.

Atividade Método de Omar Khayyam: O método de Omar Khayyam. De posse do Construtor Universal de Equações (neste caso para grau 2), observamos se o aluno pode resolver, utilizando Cabri-géomètre, qualquer equação de terceiro grau nos moldes geométricos de Omar Khayyam.

Atividade Cardano: Esta atividade tenta fazer com que o aluno chegue à fórmula de Cardano-Tartaglia para resolver equações cúbicas. Usando quatro exercícios, pretendemos levar o aluno a fazer uma comparação entre o volume de um bloco dado e o desenvolvimento de $(a+b)^3$. A partir disso, vemos se ele se sente capaz de usar esta forma para encontrar as raízes de uma equação.

Atividade Comparação: Tentamos levar o aluno a decidir qual método de resolução ele prefere usar. Para isto, tomamos equações onde a fórmula de Cardano recai em números complexos e pedimos para que as mesmas sejam resolvidas pelos dois métodos acima. Qual é o de maior facilidade? Cabri-géomètre é usado para o método de Omar Khayyam.

Atividade Briot-Ruffini: Pesquisar raízes e um método de divisão de polinômios são requeridos aqui para uma comparação entre os já citados métodos e uma nova resolução algébrica.

Atividade Final: A última atividade proíbe o uso de Cabri-géomètre, para que o aluno decida qual método sempre garantirá que ele chegue ao final da resolução, sem problemas.

2. Construção e Análise a priori da Seqüência Didática

2.1. Primeira Parte

Ao analisar o questionário aplicado a alunos de terceiro grau, decidimos que uma introdução de cônicas deve ser feita, principalmente pela falta de conhecimento de hipérbole constatada nas análises dos questionários feita no Capítulo III do presente trabalho. Desenvolvemos uma seqüência didática com o objetivo principal de fornecer aos alunos os elementos de hipérbole, que julgamos fundamentais ao ensino/aprendizagem de resolução de equações cúbicas, através do método de Omar Khayyam.

É importante para nosso trabalho que os alunos sejam capazes de construir e identificar gráficos de parábola e hipérbole, bem como reconhecer suas equações. Além disso, é necessário que eles percebam que os pontos de intersecção entre duas curvas, construídas no mesmo plano cartesiano, satisfazem as duas ao mesmo tempo.

A seqüência didática para a introdução do conceito de cônicas, conta com exercícios que utilizam o *software* Cabri-géomètre. O conhecimento mínimo de utilização do *software* pode ser adquirido durante a aplicação da seqüência, sem atrapalhar seu andamento.

Atividade Cabri-géomètre

1) a) Crie uma reta d e um ponto F fora de d.
b) Construa um ponto H sobre o objeto d.
c) Construa a mediatriz n do segmento FH.
d) Construa a perpendicular p à reta d passando pelo ponto H. As retas p e n se cortam no ponto M.
e) Acione a opção “lugar geométrico” do menu “Construção”, clique em M e mova o ponto H. Qual é o conjunto dos pontos M?
f) Compare as medidas FM e MH.
g) Por que a reta p foi tomada perpendicular à reta d?
h) Qual a conclusão que você pode chegar a respeito do conjunto de pontos M?
2) a) Construa uma circunferência de centro F_1 e de raio r.
b) Crie um ponto F_2 que esteja fora da circunferência. Seja N um ponto sobre esta mesma circunferência.
c) Crie a reta F_1N e o segmento NF_2
d) A mediatriz do segmento NF_2 corta a reta F_1N no ponto M.
e) Justifique a igualdade $|MF_1 - MF_2| = c$, com c constante
f) Ache o conjunto dos pontos M usando o “lugar geométrico” como no exercício 1, agora movimentando N. Qual a natureza desse conjunto?
g) Desloque o ponto F_2 por todo o plano, inclusive dentro da circunferência e pertencente a ela. O que acontece com o conjunto de pontos M?
h) Existe alguma posição para este ponto F_2 para a qual a propriedade $|MF_1 + MF_2|$ = constante é válida? Onde?

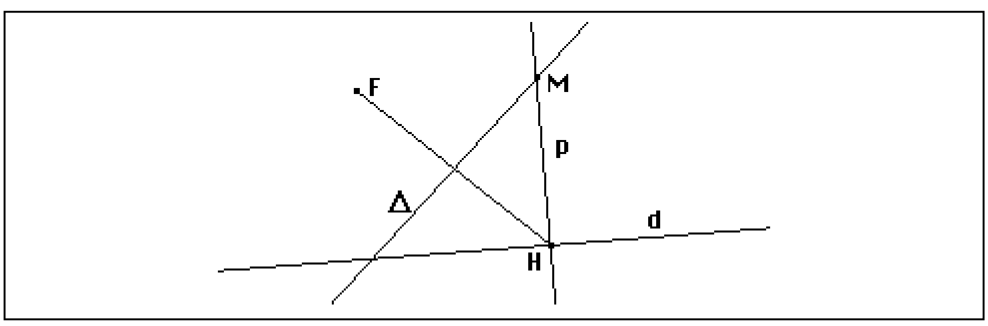
Quadro 5.1. – Atividade Cabri-géomètre

O primeiro exercício desta atividade tem por objetivo construir uma parábola, utilizando suas propriedades geométricas de distância. Com a opção “lugar geométrico” disponível em Cabri-géomètre, o aluno pode verificar que o conjunto dos pontos M, que satisfazem as propriedades com as quais a figura foi construída, formam uma parábola. Além disso, é de nosso interesse que o aluno perceba as relações de distância entre M, F e H.

Para a resolução desse exercício, é necessário que o aluno tenha os seguintes conhecimentos disponíveis:

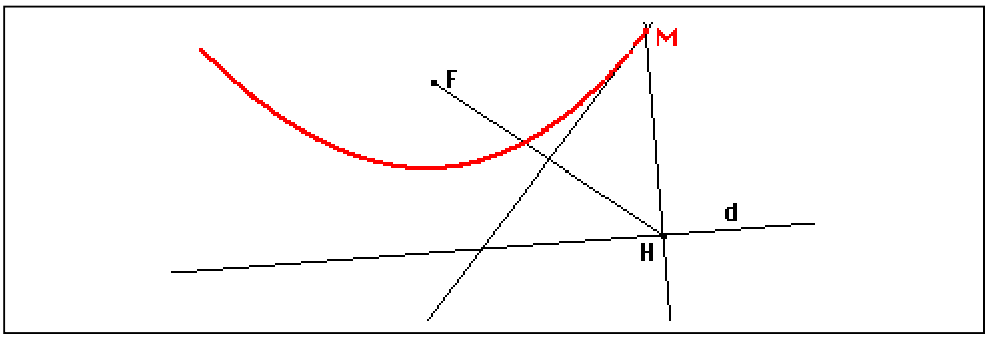
- entender a diferença entre *ponto* e *ponto sobre objeto* para o Cabri-géomètre;
- mediatriz de um segmento;
- retas perpendiculares;
- intersecção de dois objetos;
- pontos pertencentes à mediatriz de um segmento eqüidistam de seus extremos;
- para se medir a distância entre um ponto P e uma reta r deve-se tomar a distância do segmento perpendicular a reta r baixado do ponto P à r;
- circunferência;
- ponto pertencente à circunferência.

Seguindo os passos do exercício 1) da atividade, chegaremos à seguinte construção:



Quadro 5.2. – Construção da parábola

Tomando o lugar geométrico de M, temos o conjunto de pontos dado a seguir:



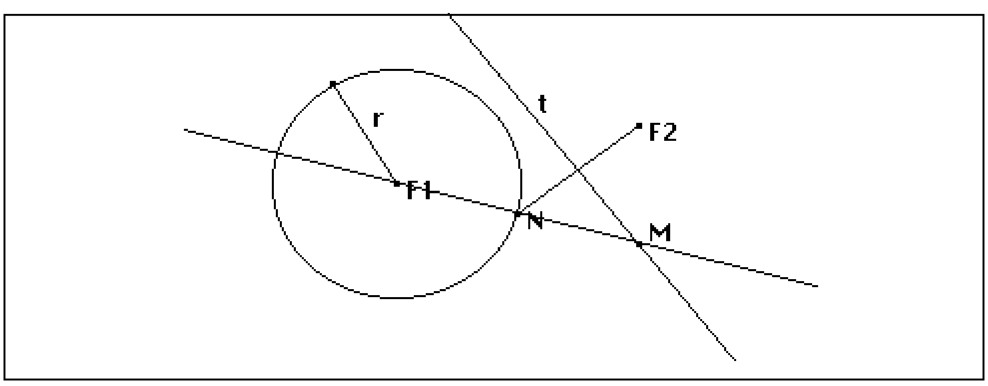
Quadro 5.3. – Lugar geométrico de M

A idéia de conjunto formado por todos os pontos, que têm uma certa propriedade em comum, é muito usada nos livros didáticos analisados para definir cônicas. É possível que esta forma de abordar o conceito se torne um obstáculo didático para o aluno, que não consegue visualizar esse conjunto apenas com lápis e papel, ou que não entende o significado da expressão "conjunto de pontos". A opção "lugar geométrico" de Cabri-géomètre auxilia na sua construção, mostrando que cada um dos pontos marcados é o mesmo ponto M quando H está em um lugar diferente, ajudando a superar tal problema.

O exercício 2) continua a situação-problema para hipérbole e elipse.

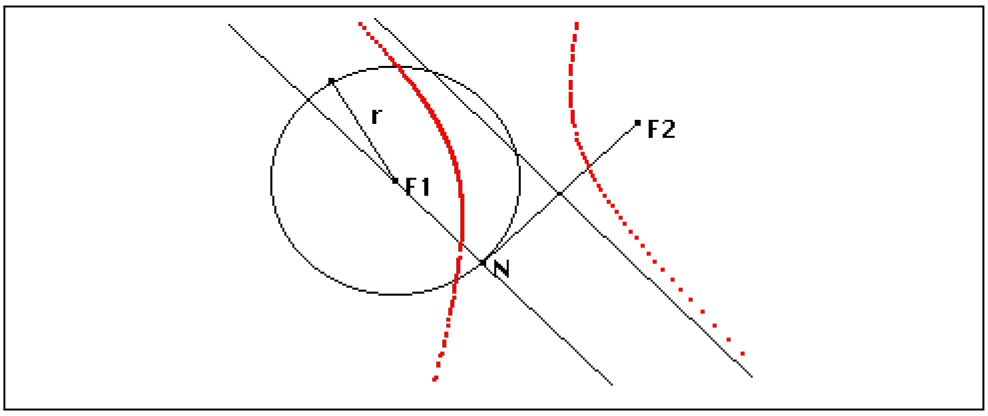
Tendo como objetivo fazer o aluno chegar ao conceito geométrico de hipérbole, esse exercício mostra a forma do conjunto de pontos M dada nas definições dos livros didáticos analisados.

Seguindo os passos do exercício até o item f, chega-se à seguinte construção:



Quadro 5.4. – Construção da hipérbole

O lugar geométrico dos pontos M é uma hipérbole:



Quadro 5.5 – Lugar geométrico de M

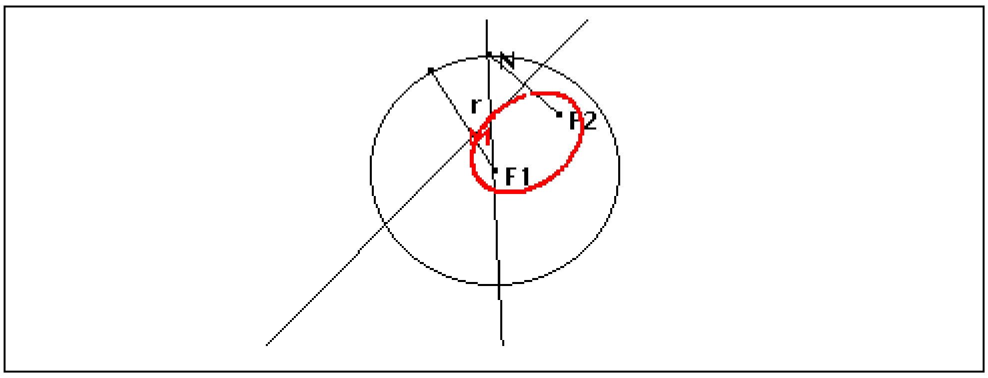
$MF_2 = MF_1 - r$ (onde r é o raio da circunferência) pois, como M está na mediatriz de NF_2, o triângulo MNF_2 é isósceles.

$|MF_1 - MF_2| = |MF_1 - (MF_1 - r)| = |MF_1 - MF_1 + r| = r = cte$

Na continuação do exercício, nos itens g e h, podemos pedir ao aluno que movimente o ponto F_2 por todo plano, e veja o que acontece com o conjunto dos pontos M e quais as possíveis causas da mudança, caso ela exista. Assim o aluno pode movimentar o ponto para dentro da circunferência e encontrar uma elipse.

Se o aluno tomar o ponto M como pertencente à circunferência, então ele encontra como lugar geométrico desse ponto a própria circunferência, e a soma $|MF_1 + MF_2|$ nunca será constante. Caso M esteja dentro da circunferência, seu lugar geométrico é uma elipse e a propriedade dada é válida.

Esses exercícios, portanto, visam a compreensão, pelo aluno, dos conceitos geométricos de cada uma das curvas cônicas, aproveitando a facilidade que o *software* Cabri-géomètre tem de encontrar o que os livros didáticos chamam de conjunto de pontos com uma mesma propriedade.



Quadro 5.6. – Lugar Geométrico de M

O problema é fechado, as mudanças de posição do ponto F_2 acima descritas são sugeridas pelo enunciado, o método de resolução é facilmente encontrado seguindo os passos pedidos pelo problema. Apesar disso, as questões elaboradas durante a seqüência didática, forçam o aluno a desenvolver um raciocínio geométrico sobre a figura por ele construída, para chegar sozinho às conclusões necessárias à aquisição do conhecimento exposto.

Escolhemos a ordem parábola, hipérbole, elipse por motivos didáticos. A construção da parábola nos parece a mais simples, e ajuda os alunos a se familiarizarem com o *software*. Além disso, ela é a curva mais conhecida pelos estudantes em seus dois registros de representação usuais: equação e gráfico, sendo de fácil reconhecimento. Como as construções de hipérbole e elipse são parecidas, escolhemos a hipérbole como a próxima curva a ser estudada, porque consideramos que sua propriedade pode ser facilmente encontrada na construção, o que auxilia a visualização da propriedade geométrica da elipse, colocada em último lugar.

Em resumo, essa primeira atividade, descrita no quadro geométrico, vem não só ajudar o aluno a efetivar a conversão entre os seguintes registros: o registro da língua natural “conjunto de pontos satisfazendo uma determinada propriedade geométrica” e o registro geométrico, isto é, o gráfico. A aplicação do questionário nos leva a acreditar que esta ligação entre gráfico e propriedades da curva (ou mesmo gráfico e equação) provavelmente não esta suficientemente estabelecida. Esperamos poder ajudar o aluno nesse ponto, não apenas com esta atividade, mas também com a próxima, tentando motivá-lo a perceber como podem se parecer as equações dessas curvas, relacionando-as com a mesma propriedade com a qual os gráficos foram construídos em Cabri-géomètre.

A *Atividade Equação*, então, tem por objetivo estudar as equações das cônicas. Na atividade anterior, são vistas as propriedades de cada curva em termos de focos e distâncias. A partir de agora, dadas as coordenadas desses pontos, queremos que os alunos utilizem o que aprendem no exercício precedente, para encontrar as equações dessas curvas. Interessa-nos que eles percebam as características de cada uma das equações, para que possam identificá-las e criá-las a partir de uma cúbica.

Atividade Equação
1) Se o gráfico da parábola que você encontrou no exercício 1) da Atividade Cabri-géomètre estivesse em um plano cartesiano, sendo, por exemplo: F(2, 3), H(x, -3) (H pertence à reta d), quais seriam as coordenadas do ponto M? Qual equação descreve o conjunto de pontos M?
2) Se o gráfico da hipérbole que você encontrou no exercício 2) da Atividade Cabri-géomètre estivesse em um plano cartesiano, sendo, por exemplo: F_1(-3, 0), F_2(3, 0) e a constante c=2, quais seriam as coordenadas do ponto M? Qual equação descreve o conjunto de pontos M?
3) Se o gráfico da elipse que você encontrou no exercício 2) da Atividade Cabri-géomètre estivesse em um plano cartesiano, sendo, por exemplo: F_1(-3, 0), F_2(3, 0) e constante c=10 quais seriam as coordenadas do ponto M? Qual equação descreve o conjunto de pontos M?

Quadro 5.7. – Atividade Equação

Utilizando a propriedade encontrada na Atividade Cabri-géomètre, o aluno deve lembrar-se de que d(M,F) = d(M,H) e, partindo disto, chegar à equação de uma parábola no primeiro exercício.

$$d(M,F)=d(M,H)\Rightarrow\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}=\sqrt{(x-x)^2+(y+3)^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\sqrt{x^2-4x+4+y^2-6y+9}\right)^2=\left(\sqrt{0+y^2+6y+9}\right)^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-4x+4+y^2-6y+9=y^2+6y+9\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-4x+4=12y\Rightarrow y=\frac{x^2-4x+4}{12}.$$

A equação encontrada acima é, então, de uma parábola.

Para encontrar as coordenadas do ponto M no exercício 2), o aluno deve fazer uso da propriedade dada na Atividade anterior:

$$\left|MF_1-MF_2\right|=c\Rightarrow\left|d(MF1)-d(MF2)\right|=c\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left|\sqrt{(x+3)^2+(y-0)^2}-\sqrt{(x-3)^2+(y-0)^2}\right|=2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\left|\sqrt{(x+3)^2+(y-0)^2}-\sqrt{(x-3)^2+(y-0)^2}\right|\right)^2=2^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(x+3)^2+y^2-2\left(\sqrt{(x+3)^2+(y-0)^2}\cdot\sqrt{(x-3)^2+(y-0)^2}\right)+(x-3)^2+y^2=4\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2+2y^2+18-2\left(\sqrt{(x^2-9)^2+2x^2y^2+18y^2+y^4}\right)=4\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(x^2+y^2+7)=2\left(\sqrt{(x^2-9)^2+2x^2y^2+18y^2+y^4}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(x^2+y^2+7)^2=\left(\sqrt{(x^2-9)^2+2x^2y^2+18y^2+y^4}\right)^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 32x^2-4y^2-32=0\Rightarrow y=\pm\sqrt{8(x^2-1)}$$

E esta é a equação da hipérbole dada, que pode ser escrita de várias formas, dentre elas:

$$x^2-\frac{y^2}{8}=1,\qquad 32x^2-4y^2-32=0,\qquad 8x^2-y^2=8,\qquad y=\pm\sqrt{8(x^2-1)}.$$

A última forma, provavelmente, é a de maior freqüência entre os alunos, pois eles estão habituados a isolar y para dar a lei de formação de uma função. É esperado, também, que eles não se lembrem dos valores negativos que y pode tomar nessa mesma equação.

Neste exercício, então, os alunos têm a oportunidade de observar as diferentes formas que a mesma equação pode tomar. Esperamos que eles percebam as diversas maneiras, com as quais podem representar uma hipérbole através de uma equação.

Usando a propriedade da elipse no exercício 3):

$$MF_1 + MF_2 = c \Rightarrow d(MF_1) + d(MF_2) = c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x+3)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-3)^2 + (y-0)^2} = 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x+3)^2 + (y-0)^2} = 10 - \sqrt{(x-3)^2 + (y-0)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{(x+3)^2 + y^2}\right)^2 = \left(10 - \sqrt{(x-3)^2 + y^2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+3)^2 + y^2 = 100 - 20\sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2} + (x-3)^2 + y^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (12x - 100)^2 = \left(-20\sqrt{(x-3)^2 + y^2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 256x^2 + 400y^2 = 6400 \Rightarrow 16x^2 + 25y^2 = 400$$

Do mesmo modo, várias formas de escrever esta equação podem ser desenvolvidas pelos alunos. Assim como na hipérbole, esperamos que a forma mais freqüente seja $y = \pm \frac{4}{5}\sqrt{50 - x^2}$.

Para resolver esta atividade, são necessários os seguintes conhecimentos:

- como calcular algebricamente a distância entre dois pontos de um plano cartesiano;
- calcular a distância de um ponto a outro dadas suas coordenadas;
- tomar as coordenadas de M como (x,y);
- produtos notáveis;
- conhecimento de plano cartesiano;
- coordenadas de pontos;

- pode-se eliminar o módulo de uma expressão algébrica elevando-a ao quadrado;
- valores positivos e negativos que podem ser atribuídos a y, dado y^2;

Essa atividade tem por objetivo mostrar as variações que as equações das cônicas podem ter, quando formadas a partir das mesmas propriedades das curvas estudadas pelos alunos na *Atividade Cabri-géomètre*. A mudança de ponto de vista da *Atividade Cabri-géomètre* para a *Atividade Equação* auxilia o aluno a entender que as propriedades geométricas da curva permanecem, numa conversão de registros e quadros: do geométrico para o algébrico, formado a partir das mesmas relações do anterior.

Por comodidade, Tomamos como variável para os exercícios de hipérbole e de elipse os focos posicionados no eixo Ox, para que os cálculos algébricos se tornassem mais fáceis e menos trabalhosos para o aluno.

Uma próxima atividade é criada, com o objetivo de levar o aluno a encontrar pontos que satisfaçam duas curvas cônicas ao mesmo tempo. Ela nos mostra como o aluno lida com o problema.

Atividade Encontro
1) Sejam f: $\Re \to \Re$ e g: $\Re^* \to \Re$ duas funções de valores reais definidas por $f(x) = \frac{x^2 - 6}{6}$ e $g(x) = \frac{1}{x}$. Existe algum valor de x para o qual as dias funções têm a mesma imagem? Se existe, dê estes valores e justifique sua resposta; se não, explique porquê.

Quadro 5.8 – Atividade Encontro

Para resolver esta atividade, os alunos devem ter os seguintes conhecimentos disponíveis:

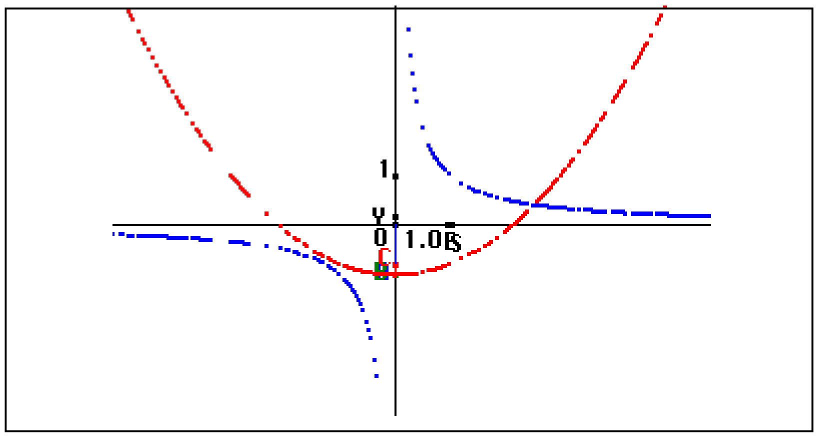
- o que significa um valor de x para o qual as duas funções têm a mesma imagem; e
- como encontrar estes valores;

O aluno pode tentar resolver a atividade acima por meios algébricos ou geométricos. No primeiro caso, ele se depara com uma equação de terceiro grau. Espera-se que ele resolva utilizando os métodos presentes nos livros didáticos analisados, principalmente aplicando o dispositivo de Briot-Ruffini, ou que tenha dificuldades para resolvê-la. Esta é, então, a ligação esperada entre cônicas e resolução de equações de terceiro grau, e une as duas partes da seqüência didática.

Resolvendo algebricamente, pode-se chegar à seguinte equação: $\frac{x^2-6}{6}=\frac{1}{x}\Rightarrow x^3-6x=6$, o que pode levar o aluno a tentativas de resolução semelhantes às categorias *1* e *2* encontradas na resolução do questionário aplicado. Aqui, então, esperamos que os alunos percebam que a solução do problema é impossível de ser encontrada somente com os conhecimentos a eles ensinados até aqui. É preciso dar-lhes condições para concluir a resolução da atividade.

Se a tentativa de resolução for geométrica, os alunos podem utilizar o *software* Cabri-géomètre e construir, em um mesmo plano cartesiano, as duas curvas. Entretanto, para que Cabri-géomètre seja usado, sem perdas excessivas de tempo com construções, podemos, verbalmente, auxiliá-los a utilizar o Teorema de Tales ou semelhança de triângulos para a construção do gráfico da hipérbole. Porém, construir $f(x)=\frac{x^2-6}{6}$, através do mesmo teorema, nos parece mais trabalhoso e complicado. Isto nos obriga, portanto, a mostrar e utilizar o Construtor, sem, entretanto, revelar ao aluno suas características, pois isto será feito mais tarde, durante a segunda parte da seqüência.

Com o gráfico construído, os alunos percebem que existe um único valor de <u>x</u> para o qual f e g têm a mesma imagem. Nesta construção vemos equações diferentes das anteriormente estudadas para hipérbole e parábola, o que nos traz novos registros de representação para tais objetos.



Quadro 5.9. – Gráfico de f(x) e g(x)

Podemos ver, nessa atividade, que o quadro algébrico torna a resolução do problema difícil ou até mesmo impossível aos alunos, dados seus conhecimentos até agora. O quadro geométrico, ao contrário, permite visualizar a existência ou não de soluções, e dá condições ao aluno de finalizá-la com seu aprendizado anterior. Vemos aqui a importância do jogo de quadros na resolução de um problema, como é explicitado na dialética ferramenta-objeto de R. Douady.

A próxima atividade vem conferir se os conhecimentos previamente apresentados foram adquiridos. Ela tem por objetivo garantir que o aluno possa reconhecer as curvas cônicas, estudadas através de gráficos, e que saiba encontrar pontos que satisfaçam as curvas dadas ao mesmo tempo.

Para resolver esta atividade, o aluno precisa dos seguintes conhecimentos disponíveis:

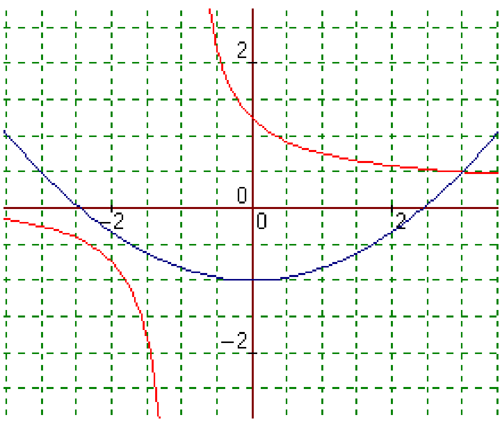
- reconhecer o gráfico das curvas hipérbole, elipse e parábola;
- saber que, onde as curvas se interceptam, são os pontos de solução da equação inicial;
- saber encontrar as coordenadas de um ponto do gráfico.

Espera-se que os alunos tenham dificuldade com o terceiro item, que mostra uma parábola com eixo de simetria em Oy, o que, provavelmente, para eles, não é conhecido. Esta variável foi acrescentada para que o aluno não seja obrigado a acreditar que o eixo de simetria da parábola é sempre Oy ou paralelo a ele. Da mesma forma, temos o item 1 com uma parábola de concavidade voltada para cima e, no item 2, voltada para baixo. As elipses, uma com eixo maior paralelo a Ox, outra com eixo maior em Oy, e hipérboles também em diferentes formas.

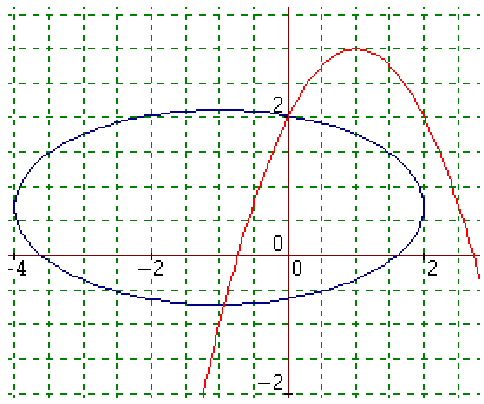
<u>Atividade Gráficos</u>

Identifique cada uma das curvas dadas nos gráficos abaixo. Existem pontos onde elas coincidem? Caso existam dê suas coordenadas (exatas ou aproximadas); se não, explique por quê.

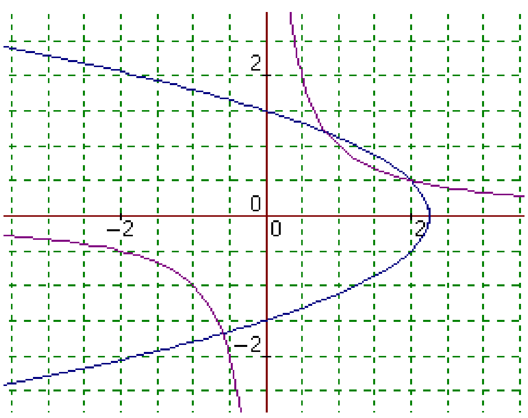
1)



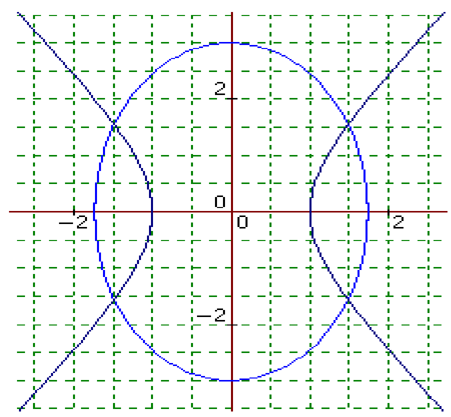
2)



3)



4)



Quadro 5.10. – Atividade Gráficos

No primeiro gráfico, temos uma hipérbole e uma parábola se interceptando em um único ponto de coordenadas (3; 0,5). O segundo gráfico é constituído por uma parábola e uma elipse, tendo duas interseções: a primeira tem coordenadas (0, 2); a segunda, a abscissa está entre -0,5 e -1 e a ordenada entre -0,5 e -1. O próximo gráfico é formado por uma parábola e uma hipérbole, com três interseções: ([0,5; 1], [0,5; 1]); (2; 0,5) e a terceira ([0,5; 1],[1,5; 2]). O último gráfico, então é constituído de uma hipérbole e uma elipse. Suas intersecções são: (1,5; 1,5), (1,5; -1,5), (-1,5; 1,5) e (-1,5; -1,5).

Inciamos, então, uma seqüência didática para o ensino/aprendizagem de resolução de equações de terceiro grau, utilizando como ferramenta as curvas cônicas.

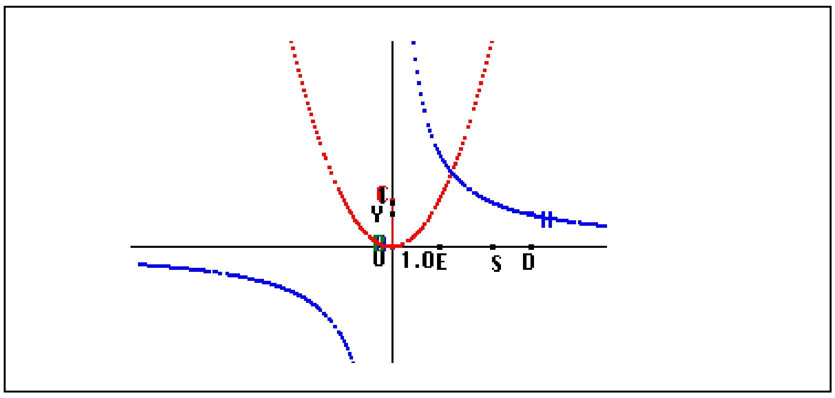
2.2. Segunda Parte

Atividade Duplicação do Cubo
No século V a.C., a Grécia foi tomada por uma peste terrível que assombrou e dizimou grande parte da população. Uma delegação foi enviada ao oráculo de Apolo em Delos para rezar e pedir àquele deus que dissesse o que o povo precisava fazer para que a peste desaparecesse. Conta a lenda que o oráculo determinou que se duplicasse o altar de Apolo, cuja forma era a de um cubo. Os atenienses, obedientemente, duplicaram as dimensões do altar, pensando terem atendido ao pedido divino. A peste, contudo, continuava a se espalhar pelo país pois, quando duplicam-se seus lados, o volume do altar é multiplicado por oito e não por dois.
Platão, ao ser consultado a respeito do problema, respondeu que o intuito dos deuses não era tê-lo resolvido, mas que os Gregos desistissem de guerras e maldades e cultivassem as Musas, para que suas paixões fossem supridas pela Filosofia e pela Matemática, vivendo uma relação de ajuda uns com os outros.[5]
1) Apesar da indagação de Platão, a peste precisava ser detida. Tendo os lados do altar medida 1, calcule seu volume. Encontre uma expressão algébrica para o lado do cubo cujo volume é igual ao dobro do volume do altar.
Observação: **O volume de um prisma é igual ao produto de sua altura pela área da base.**
2) Utilizando os conhecimentos de cônicas e interseção de gráficos adquiridos nas atividades precedentes, encontre um valor (mesmo que aproximado) para o lado do cubo procurado.

Quadro 5.11. – Atividade Duplicação do Cubo

[5] Texto extraído de Heath – A History of Greek Mathematics

O objetivo desta atividade é levar o aluno a utilizar a estratégia de intersecção de duas curvas, estratégia esta desenvolvida nas atividades anteriores, para encontrar a medida do lado do cubo procurado, que depende da resolução de uma equação de terceiro grau. Lembrando os exercícios estudados até agora, o aluno poderá resolver o problema construindo os gráficos $y = x^2$ e $\frac{2}{x} = y$, com auxílio de Cabri-géomètre, baseando suas construções no Teorema de Tales ou em semelhança de triângulos, visto que o quadro geométrico lhe deu maior liberdade de resolução em um exercício precedente.



Quadro 5.12. – Resolução geométrica da duplicação do cubo

Entretanto, para encontrar o valor de x esperado nesta atividade, o quadro algébrico não carrega dificuldades pois, sendo $x^3 = 2$, extraindo a raiz cúbica nos dois membros da equação, tem-se facilmente que $x = \sqrt[3]{2}$. Podemos então questionar o aluno quanto ao valor de tal raiz cúbica. Esse número está entre zero e 0,5? Entre 0,5 e 1? Entre 1 e 1,5? Espera-se que seja difícil para o aluno determinar, com certeza, um intervalo pequeno, em que se encontre tal valor. O quadro geométrico, entretanto, nos leva a uma boa aproximação, para este valor com mais facilidade, pois podemos observar o gráfico e estimar um intervalo que contém o valor de x.

Apresentamos em nosso trabalho as cônicas, não só como trajetórias de planetas, objetos ou átomos, mas como ferramenta para a resolução de um problema matemático novo para o aluno: as equações cúbicas.

Para desenvolver essa atividade o aluno deve:

- saber calcular a área de um retângulo;
- ter entendido as atividades precedentes;
- entender que $x^3 = 2 \Rightarrow x^2 = \frac{2}{x}$;
- $y = x^2$ é a equação de uma parábola;
- $\frac{2}{x} = y$ é a equação de uma hipérbole;
- Teorema de Tales;

O uso do quadro geométrico nessa atividade, leva à utilização das cônicas para resolver uma equação de terceiro grau. Elas passam, então, de objeto de estudo para ferramenta fundamental na aquisição de outro conceito, neste caso, a resolução de equações cúbicas. Este enfoque pode dar novo significado às cônicas, e tal fato nos leva a mais um motivo pelo qual equações de terceiro grau devem ser estudadas à parte e não incluídas no caso geral de equações de grau n, como se faz atualmente.

Escolhemos tomar, nessa atividade, a História da Matemática, na qual o aluno toma contato com a origem das cônicas e com uma utilidade prática das equações de terceiro grau. Como variável didática, temos o lado do cubo, cujo volume deve ser duplicado com medida 1 cm para facilitar a construção geométrica da curva.

Apesar de ser uma atividade dirigida, ela não pode ser resolvida apenas seguindo os passos do enunciado. É necessário um entendimento das atividades anteriores, para transformar uma equação de terceiro grau em uma equação em que o primeiro membro é a equação de uma parábola e o segundo membro é a equação de uma hipérbole.

O procedimento, descrito no exercício 1) da Atividade Construtor Universal de Equações, leva o aluno a construir a Máquina para equações de grau três.

Atividade Construtor Universal de Equações

1) Construção da Máquina

a) Construa quatro segmentos de medidas arbitrárias <u>a</u>, <u>b</u>, <u>c</u> e <u>d</u> perpendiculares a um segmento AB. A seguir, construa um sistema de coordenadas ortogonais de origem O, de modo que AB seja paralelo ao eixo x.

b) Construa sobre o eixo y o segmento OD de medida <u>d</u>, o segmento OC de medida <u>c+d</u>, o segmento OB de medida <u>b+c+d</u> e o segmento OA de medida <u>a+b+c+d</u>. A seguir, construa sobre o eixo x, um segmento OX de medida x e um segmento OE de medida 1.

c) Pelos pontos X e E construa perpendiculares <u>r</u> e <u>s</u> (respectivamente) ao eixo x.

d) Pelo ponto A, construa a perpendicular <u>t</u> ao eixo y. Seja S o ponto de interseção de <u>s</u> e <u>t</u>.

e) Construa a reta SB. Seja G a intersecção das retas SB e r.

f) Construa a reta <u>m</u> por G paralela ao eixo x. Seja H a interseção entre <u>m</u> e <u>s</u>.

g) Construa a reta CH. Seja P a interseção entre CH e r.

h) Construa a reta <u>n</u> por P paralela ao eixo x. Seja F a interseção entre <u>n</u> e <u>s</u>.

i) Construa a reta DF. Seja J a interseção entre DF e r.

j) Qual é o lugar geométrico de J quando X se move sobre o eixo x?

2) Varie a medida dos segmentos a, b, c e d. O que acontece com o gráfico?

O que acontece quando:

- **a medida do segmento a é zero?**
- **as medidas dos segmentos a e b são zero?**
- **as medidas dos segmentos a, b e c são zero?**

A partir das manipulações feitas com a mudança das medidas dos segmentos <u>a</u>, <u>b</u>, <u>c</u> e <u>d</u>, o que se pode concluir a respeito desta "máquina" que você construiu?

3) Calcule as coordenadas do ponto J em função de <u>x</u>, <u>a</u>, <u>b</u>, <u>c</u> e <u>d</u>.

4)Utilizando o Construtor, construa o gráfico da equação cúbica da atividade I: $x^3 = 2$. Quais são as raízes desta equação?

5)Compare os resultados e os procedimentos das atividades I e II. Qual dos dois métodos você achou mais fácil de utilizar? Por que? Em qual dos dois, na sua opinião, as raízes são dadas com maior precisão? Por que?

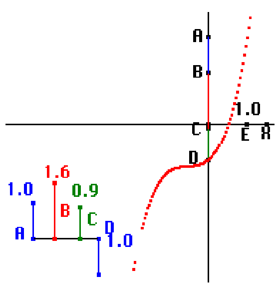
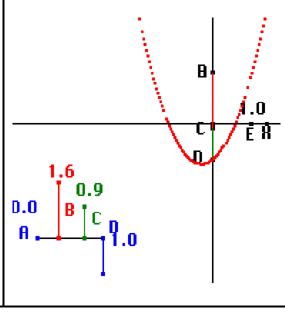
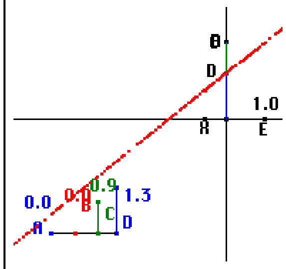
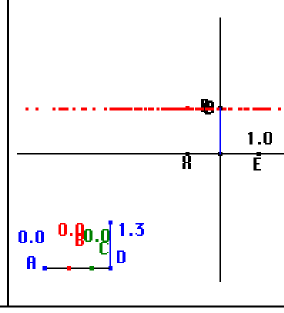
Quadro 5.13. – Atividade Construtor Universal de Equações

Esse exercício é obrigatoriamente dirigido já que a construção da Máquina não é simples o suficiente para ser deixada a cargo do aluno sem um roteiro a ser seguido. Para construi-la, o aluno deve ter os seguintes conhecimentos disponíveis:

- retas paralelas;
- retas perpendiculares;
- ponto sobre objeto em Cabri-géomètre;
- lugar geométrico em Cabri-géomètre.

Construída a Máquina, os alunos devem descobrir sua utilidade. Sendo assim, o exercício 2) os leva à manipulação dos objetos por eles criados, o que mostra os segmentos a, b, c e d como coeficientes de uma equação de grau igual a 3 ou menor, dependendo das medidas dadas para tais segmentos.

Não explicitamos anteriormente que os valores de a, b, c, e d eram os coeficientes da equação pois gostaríamos que isso fosse descoberto pelos alunos ao manipularem sua construção.

Para a≠0	Para a=0 e b≠0	Para a=b=0 e c≠0	Para a=b=c=0 e d≠0
			

Quadro 5.14. – Modificações dos coeficientes da equação

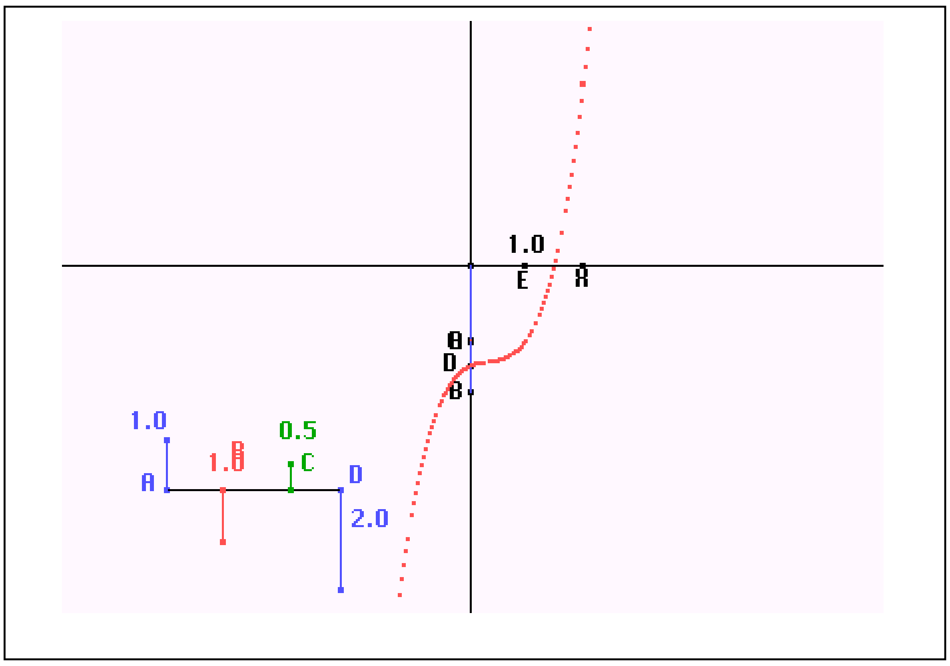
O exercício 3) tem por objetivo não só verificar se o aluno entendeu a função dessa máquina, isto é, qual sua utilidade, mas também trazer à tona o quadro algébrico que a envolve.

Para desenvolver o exercício 4), basta que o aluno saiba utilizar o Construtor e que entenda quais são os coeficientes de cada um dos termos da equação $x^3 = 2$, onde os termos de x^2 e x são nulos.

A equação $x^3 = 2$ tem como gráfico curva do quadro 5.15.

Utilizamos a mesma equação da *Atividade Duplicação do Cubo* para dar ao aluno a possibilidade de comparar os dois métodos de resolução.

É provável, que o método escolhido pela maioria dos alunos como o mais fácil, seja o Construtor de Equações, pois não são necessários grandes esforços em seu uso. Basta entendimento da máquina e dos coeficientes da equação. Além disso, a aproximação que ele consegue da raiz da cúbica é a mesma nas duas atividades.



Quadro 5.15. – Exercício 4) da Atividade Construtor

Essa atividade tem como objetivo apresentar o Construtor, mostrando ao aluno não só um novo método geométrico de resolução, mas também como pode ser o gráfico de uma função de terceiro grau. Ela é apresentada antes de uma formalização do método de Omar Khayyam, para auxiliar o aluno na construção do gráfico de parábolas, que serão necessárias adiante.

<u>Atividade Método de Omar Khayyam</u>
Seja a equação $x^3 + 5x^2 + 3x = 1$. É possível transformar esta equação numa igualdade entre duas curvas da mesma família, como na atividade I? Justifique. Encontre as raízes desta equação.

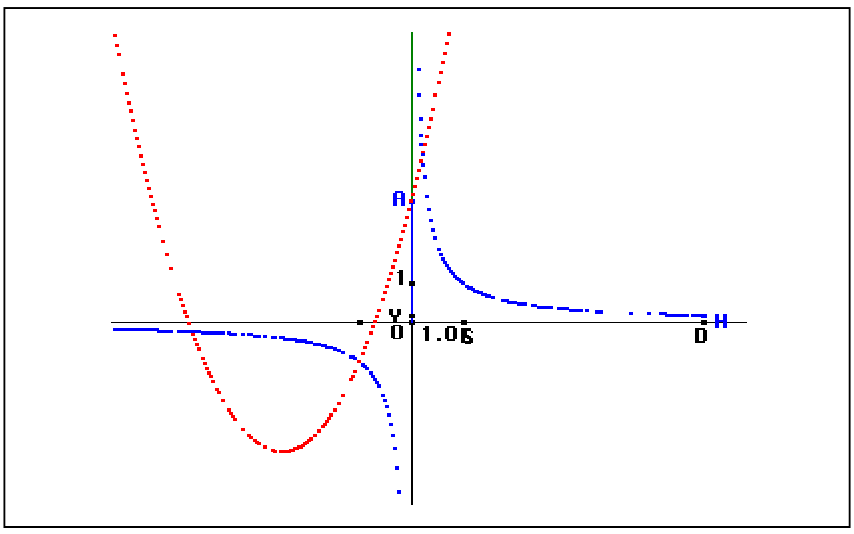
Quadro 5.16. – Atividade Método de Omar Khayyam

O objetivo desta atividade é mostrar que existem outras equações de terceiro grau, que podem ser escritas como uma equação formada por uma parábola e por uma hipérbole, e, eventualmente, levar o aluno a questionar se qualquer equação cúbica pode ser descrita desta forma.

Manipulando algebricamente a equação, o aluno, utilizando as atividades anteriores, pode transformá-la em outra, formada por uma parábola e uma hipérbole da seguinte forma:

$$x^3 + 5x^2 + 3x = 1 \Rightarrow x\left(x^2 + 5x + 3\right) = 1 \Rightarrow x^2 + 5x + 3 = \frac{1}{x}.$$

Tendo em suas mãos o *software* Cabri-géomètre para resolvê-la, o aluno pode usar o Construtor para construir o gráfico da equação $x^2 + 5x + 3 = y$ e o Teorema de Tales para $\frac{1}{x} = y$, como já foi visto. Feito isto, ele tem em mãos o seguinte gráfico:



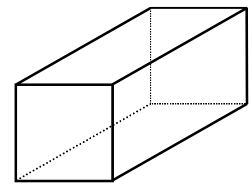
Quadro 5.17. – Gráfico da Atividade Método de Omar Khayyam

Este gráfico mostra que a cúbica inicial tem três raízes reais: uma positiva, entre zero e 1, e duas negativas, que ele provavelmente não terá problemas para aproximar seus valores se encontrar, através de circunferências (para manter uma unidade como raio e transferir esta medida), os pontos -1, -2, -3, etc. Uma destas raízes é -1 (o que ele pode comprovar substituindo -1 na equação de terceiro grau) e a outra está entre -4 e -5.

Fazemos agora uma mudança de quadro geométrico para algébrico, apresentando a fórmula de Cardano-Tartaglia, o que dá ao aluno possibilidade de resolver equações algébricas.

Atividade Cardano

1) O volume do bloco ao lado é igual a n unidades de volume. Os lados da base têm medidas $a+b$ e $a+b+\frac{m}{a+b}$. Sua altura tem medida $a+b$. Encontre uma expressão algébrica para este volume.



2) Compare a expressão que você encontrou acima com o desenvolvimento de $(a+b)^3$ e escreva m e n em função de a e b.

3) Sendo a^3 e b^3 raízes de uma equação de segundo grau, escreva os valores destas raízes em função de m e n.

4) Dada a equação $x^3-3x=2$, encontre $x=a+b$ utilizando os exercícios precedentes.

Quadro 5.18. – Atividade Cardano

Sendo o volume do bloco dado pelo produto entre a área da base e sua altura, temos que $V_{bloco}=A_{base}\cdot h=\left[(a+b)\left(a+b+\frac{m}{a+b}\right)\right](a+b)=n$.

Desenvolvendo a expressão acima, temos:

$$(a+b)^2\left(a+b+\frac{m}{a+b}\right)=(a^2+2ab+b^2)\left(a+b+\frac{m}{a+b}\right)=$$

$$=a^3+a^2b+a^2\cdot\frac{m}{a+b}+2a^2b+2ab^2+2ab\cdot\frac{m}{a+b}+ab^2+b^3+b^2\cdot\frac{m}{a+b}=$$

$$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+(a^2+2ab+b^2)\cdot\frac{m}{a+b}=(a+b)^3+\frac{m}{a+b}(a+b)^2.$$

O que nos dá $(a+b)^3+m(a+b)=n$.

Desenvolvendo $(a+b)^3$, temos: $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$. Comparando com o volume do bloco acima, é necessário que o aluno procure escrever esta expressão de maneira a encontrar valores para m e n relacionados com a e b da seguinte maneira:

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\Rightarrow(a+b)^3=3ab(a+b)+a^3+b^3\Rightarrow$$

$\Rightarrow(a+b)^3-3ab(a+b)=a^3+b^3$, expressão que o leva a ver: $\begin{cases}m=-3ab\\ n=a^3+b^3\end{cases}$.

Para chegar ao resultado esperado, o aluno deve apenas ver que é possível colocar o fator 3ab em evidência, para conseguir comparar as duas expressões e encontrar m e n em função de a e b.

Esperamos aqui uma certa dificuldade por parte dos alunos, em escrever a equação de segundo grau, cujas raízes são a^3 e b^3, pois é necessário que eles tenham, como conhecimento disponível, as relações entre as raízes e os coeficientes de uma equação de segundo grau, estudadas na 8ª série do Ensino Fundamental[(6)] e retomadas na 3ª série do Ensino Médio[(7)], num estudo de polinômios em geral. Esta dificuldade foi também constatada em Rosa[(8)].

Sendo dados a^3 e b^3 raízes de uma equação de segundo grau, fazemos $-3ab = m \Rightarrow (ab)^3 = \left(-\frac{m}{3}\right)^3$. Assim, a^3 e b^3 são as raízes da equação $X^2 - nX + \left(-\frac{m}{3}\right)^3 = 0$. Resolvendo esta equação, temos $a^3 = \frac{n}{2} + \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3}$ e $b^3 = \frac{n}{2} - \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3}$.

Nos exercícios dessa atividade, encontramos $a^3 = \frac{n}{2} + \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3}$ e $b^3 = \frac{n}{2} - \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3}$. Esperamos que os alunos relacionem estes resultados, vendo que m = -3 e n = 2. Substituindo nas relações acima, temos:

$$a^3 = \frac{n}{2} + \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3} \Rightarrow a^3 = \frac{2}{2} + \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 + \left(\frac{-3}{3}\right)^3} \Rightarrow a^3 = 1 + \sqrt{1-1} = 1 \text{ e}$$

$$b^3 = \frac{n}{2} - \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3} \Rightarrow b^3 = \frac{2}{2} - \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 + \left(\frac{-3}{3}\right)^3} \Rightarrow b^3 = 1 - \sqrt{1-1} = 1.$$

Sendo x = a + b:

---

[6]Castrucci.
[7]Gelson Iezzi.
[8]Mário Servelli Rosa.

$x = \sqrt[3]{a^3} + \sqrt[3]{b^3} = 1 + 1 = 2$, e uma das raízes da equação cúbica é 2.

Para realizar este trabalho, o aluno deve entender que os exercícios anteriores o levam a uma fórmula para resolver equações do tipo $x^3 + mx = n$ no quadro algébrico e substituir os valores de m e n nesta fórmula.

A equação $x^3 - 3x = 2$ foi escolhida, tendo uma raiz real e inteira, para que o aluno não se depare com qualquer dificuldade quando utilizar o método de Cardano.

Para encontrar a expressão esperada, o aluno deve conhecer:

- produtos notáveis;
- propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição;
- simplificação de frações.
- como encontrar os coeficientes de uma equação de segundo grau dados a soma e o produto de suas raízes;
- como resolver uma equação de segundo grau.

Atividade Comparação
1) Use o método de Cardano para resolver as equações a) $x^3 - 6x = 40$ e b) $x^3 - 5x = 4$.
2) Use o método de Omar Khayyam para resolver estas equações. Compare os resultados obtidos. O que você pode concluir?

Quadro 5.19. – Atividade Comparação

A fórmula para a equação **a)** nos dá

$$x = \sqrt[3]{\frac{40}{2} + \sqrt{\left(\frac{40}{2}\right)^2 + \left(\frac{-6}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{40}{2} - \sqrt{\left(\frac{40}{2}\right)^2 + \left(\frac{-6}{3}\right)^3}} \Rightarrow$$

$$x = \sqrt[3]{20 + \sqrt{400 - 8}} + \sqrt[3]{20 - \sqrt{400 - 8}} \Rightarrow x = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}\,.$$

Neste ponto, é provável que o aluno não consiga estimar o valor da expressão numérica, o que lhe causa certa dificuldade para usar esse método. Já para a equação **b)**, a fórmula traz o seguinte problema:

$$x = \sqrt[3]{\frac{4}{2} + \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 + \left(\frac{-5}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{4}{2} - \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 + \left(\frac{-5}{3}\right)^3}} \Rightarrow$$

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{4 - \frac{125}{27}}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{4 - \frac{125}{27}}} \Rightarrow x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{\frac{108 - 125}{27}}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{\frac{108 - 125}{27}}} \Rightarrow$$

$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-\frac{17}{27}}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-\frac{17}{27}}}$, que contém a raiz quadrada de um número negativo, e esta expressão só lhe dá alguma raiz da equação se ele tiver o conjunto dos números complexos como conhecimento disponível.

Utilizando números complexos, o aluno chega à seguinte expressão:

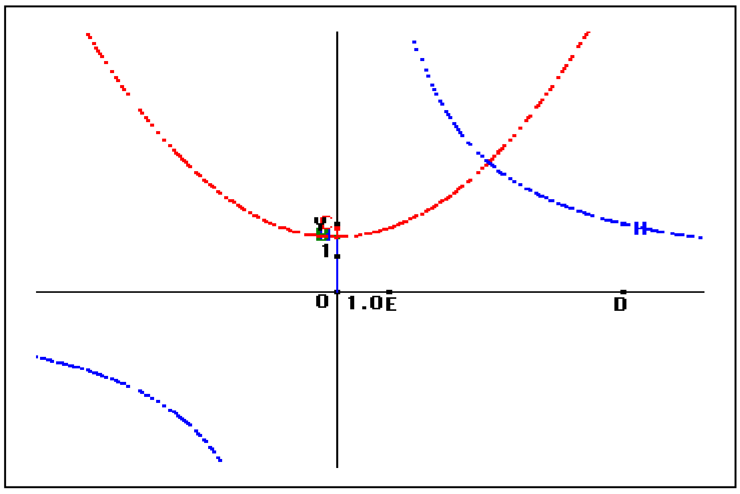
$x = \sqrt[3]{2 + i\sqrt{\frac{17}{27}}} + \sqrt[3]{2 - i\sqrt{\frac{17}{27}}}$. Neste ponto, o aluno pode elevar os dois membros ao cubo e tentar encontrar uma expressão sem números complexos da seguinte forma:

$x^3 = 2 + i\sqrt{\frac{17}{27}} + 2\sqrt[3]{\left(2 + i\sqrt{\frac{17}{27}}\right)\left(2 - i\sqrt{\frac{17}{27}}\right)} + 2 - i\sqrt{\frac{17}{27}}$. Este desenvolvimento lhe traz: $x^3 = 4 + 2\sqrt[3]{4 + \frac{17}{27}} = 4 + 2\sqrt[3]{\frac{125}{27}} = 4 + 2 \cdot \frac{5}{3} = \frac{22}{3} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{22}{3}}$.

Ao resolver algumas equações com a fórmula de Cardano, o aluno percebe que tem uma nova ferramenta em mãos. Porém, a partir do momento em que ele se depara com alguma equação que o leva a números complexos, percebe que este método nem sempre o ajuda, enquanto o Construtor de Equações e Omar Khayyam sempre resolvem a equação.

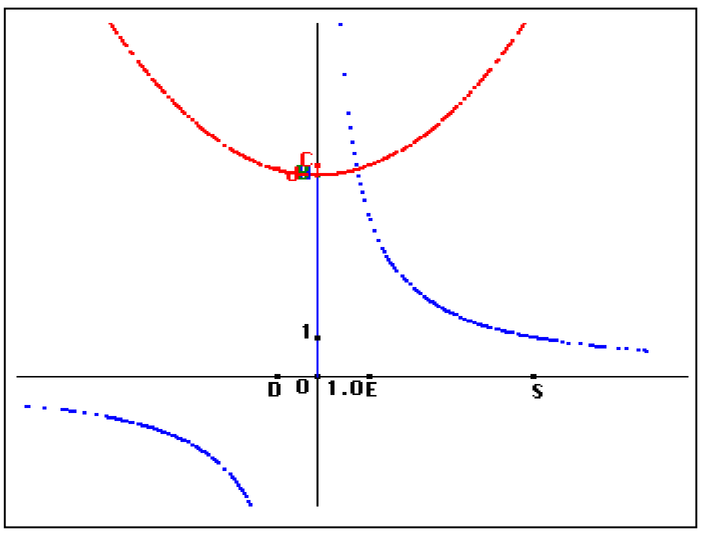
Utilizando o método de Omar Khayyam para estas duas curvas temos:

a) $x^3 - 6x = 40 \Rightarrow x\left(x^2 - 6\right) = 40 \Rightarrow x^2 - 6 = \frac{40}{x}$



Quadro 5.20. – Resolução geométrica do item a)

b) $x^3 - 5x = 4 \Rightarrow x\left(x^2 - 5\right) = 4 \Rightarrow x^2 - 5 = \frac{4}{x}$



Quadro 5.21. – Resolução geométrica do item b)

Atividade Briot-Ruffini

1) Seja a equação $x^3 - 5x = 4$. Encontre uma raiz desta equação através do critério de pesquisa de raízes e, utilizando o Teorema de d'Alembert, encontre outras raízes, caso existam.

2) Compare este método de resolução com os que você estudou até agora (Cardano e Omar Khayyam). Qual deles é o mais prático, na sua opinião?

Quadro 5.22. – Atividade Briot-Ruffini

Nesta atividade, os alunos devem ter como conhecimentos disponíveis:

- Critério para pesquisa de raízes racionais: "Se o número racional $\frac{p}{q}$ (p e q primos entre si) é raiz da equação $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ com coeficientes inteiros, então p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n."
- Teorema de d'Alembert: "Um polinômio P(x) é divisível por x-a se, e somente se, P(a)=0."
- Algoritmo de Briot-Ruffini ou qualquer algoritmo de divisão de polinômios.

No caso da equação $x^3 - 5x = 4$, a_n =1 e a_0 =-4. Assim, p=±1 e q=±1, ±2, ±4, o que nos dá 1, -1, $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}$ como possíveis raízes da cúbica dada. Utilizando o Teorema de d'Alembert, temos que P(-1)=0 e então $x^3 - 5x = 4$ é divisível por x+1. Utilizando o Algoritmo de Briot-Ruffini, temos:

-1	1	0	-5	-4
	1	-1	-4	0

Esta divisão nos dá $x^3 - 5x - 4 = (x+1)(x^2 - x - 4)$, o que resulta em $(x+1)(x^2 - x - 4) = 0 \Rightarrow x + 1 = 0$ ou $x^2 - x - 4 = 0$. Encontramos, assim as raízes $\frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$ para a equação de segundo grau, obtendo, assim, para a equação de terceiro grau cnsiderada, estas raízes e –1.

A equação $x^3 - 5x = 4$ foi escolhida por ter tanto raízes e quanto coeficientes inteiros, o que facilita os cálculos e o uso deste método.

Levantamos a possibilidade de que, aqui, o aluno seja tentado a dizer que a pesquisa de raízes e a divisão da cúbica por um polinômio de grau 1 seja um dos métodos mais fáceis para resolver uma equação de terceiro grau, pois a equação escolhida tem variáveis didáticas, que o induzem a tal pensamento. A próxima atividade, porém, faz uso de uma equação que não é boa para ser resolvida, nem pelo método de Cardano, nem por pesquisa de raízes.

Atividade Final
Agora você está sem o auxílio do computador para resolver equações. Dê as raízes da equação $x^3 - 15x = 4$. Utilize os três métodos que você estudou e compare suas facilidades ou dificuldades.

Quadro 5.23. – Atividade Final

Nesta última atividade, o aluno lida com a falta do computador, e tem de encontrar o melhor método para determinar as raízes da equação cúbica. Pretendemos mostrar a ele, que o método de Omar Khayyam não apresenta os problemas dos outros métodos, apesar da imprecisão das raízes.

A deficiência do método de Cardano já foi explorada. Como a equação não possui raízes racionais, a pesquisa delas se torna impossível. Basta, agora, que o aluno perceba a dificuldade de se construir o gráfico de uma equação de terceiro grau sem o auxílio de qualquer instrumento. Esperamos que seja percebida a facilidade de utilização do método de Omar Khayyam e que ele seja escolhido pelos alunos como o melhor dentre os apresentados.

3. Aplicação da Seqüência

Aplicamos a seqüência em duas fases. Inicialmente a quatro alunos cursando primeiro ano de Ciência da Computação, na PUC-SP. Fizemos o estudo em 4 seções de 1h30min e em uma seção de 2h30min de duração, entre os dias 17 e 21 de agosto de 1998. Após esta fase, e passado também nosso Exame de Qualificação, decidimos fazer algumas mudanças na seqüência, e reaplicamos a alunos cursando terceiro ano do Ensino Médio, no Colégio Vera Cruz. Iniciamos o estudo com 15 duplas e, ao final, estávamos apenas com 3 duplas, sendo que apenas dois alunos resolvem a última atividade, devido a problemas fora de nosso alcance. Esta aplicação ocorreu nos dias 9, 17, 24 e 26 de novembro de 1998.

Em ambas as aplicações os alunos estão sob nossa orientação, para resolver as atividades, de modo que possamos esclarecer suas dúvidas e coordenar o desenvolvimento do trabalho. Temos também o auxílio de uma observadora, cuja função é verificar quais as estratégias de resolução usadas e as dificuldades que possam ser enfrentadas pelos alunos.

Fazemos aqui um relato de nossas aplicações. Uma análise mais detalhada é tomada no *Capítulo VI – Conclusões* deste trabalho.

3.1. A primeira aplicação

Terminada a construção da seqüência, ela é aplicada a quatro alunos (duas duplas: Simone e Marilisa, Heloisa e André). Procuramos observar as reações destes alunos, frente a cada um dos exercícios, e suas dúvidas para a resolução de cada atividade. Além disso, damos total atenção aos métodos por eles utilizados para a resolução dos problemas.

Inicialmente, introduzimos aos alunos o **"Questionário de Matemática"** apresentado no *Capítulo III* (página 28) deste trabalho, com o objetivo de verificar suas concepções a respeito de cônicas e resolução de equações de terceiro grau, tendo em vista principalmente os métodos usados por eles para resolver uma cúbica. Obtivemos resultados semelhantes aos anteriores.

Em relação ao conceito de cônicas, nenhum aluno dá uma definição formal para qualquer destes objetos matemáticos, como havia acontecido com os alunos que responderam aos questionários anteriores. Ela é substituída pela representação gráfica, apesar de as equações da parábola e hipérbole também serem bem conhecidas por esses alunos. Heloisa e André são os únicos a tentar explicar tais objetos com palavras, além de dar o desenho. Por exemplo, para elipse, Heloisa dá a seguinte definição: *"seria uma circunferência 'achatada'"*. Para parábola, André diz ser *"uma curva com um ponto máximo ou mínimo"*; e hipérbole, ambos a chamam de *"curvas abertas"*.

Quanto à resolução das equações da *Questão 2)*, Simone consegue resolver os quatro itens, com o método de Briot-Ruffini. Marilisa tem a ajuda da colega para relembrar o mesmo algoritmo e encontrar as raízes das quatro equações. Já André e Heloisa resolvem apenas os itens <u>a</u> e <u>d</u>, equações incompletas, utilizando procedimentos como colocar <u>x</u> em evidência, para transformar uma equação em outra com dois fatores de grau menor, com resolução conhecida. Nenhum deles recorreu a qualquer artifício geométrico em suas resoluções.

Com a introdução do questionário, podemos observar que os conhecimentos de André, Heloisa, Simone e Marilisa parecem estar de acordo com as abordagens dadas por livros didáticos, tanto para cônicas quanto para resolução de equações cúbicas. Ambas as duplas expressam suas dificuldades em construir o gráfico de uma equação de terceiro grau, além de não conhecerem seu gráfico. É possível que o quadro geométrico tenha sido pouco explorado ou deixado de lado em sua atividade escolar.

Para a execução das atividades da seqüência, são dadas algumas instruções para os alunos: eles têm livre escolha na forma de resolver os exercícios, a não ser que se determine o uso de algum método. O *software* Cabri-géomètre está à disposição, caso eles desejem usá-lo. Para que os alunos tomem conhecimento do *software*, fizemos uma breve apresentação de seus menus, das diferenças básicas de cada item e de como utilizá-los.

A *Atividade "Cabri-géomètre"* exige o uso deste *software* para a construção de parábola, hipérbole e elipse. Os alunos tiveram algumas dificuldades em sua construção devido, à falta de familiaridade com o *software*. Percebemos, aqui, a dificuldade desses estudantes em identificar as propriedades geométricas existentes na figura por eles construída, como por exemplo, não usar o fato de que um ponto, pertencendo à mediatriz de um segmento, eqüidista de seus extremos. Dois fatores podem ter causado o problema: uma possível ausência de estudos de geometria plana nos últimos anos escolares ou, por se tratarem de alunos vindos de um curso de computação, entende-se que eles podem ter perdido o contato com tais conhecimentos e não se lembram mais deles.

É interessante notar como Marilisa e Simone resolvem o item **h) Existe alguma posição para o ponto F_2, para a qual a propriedade $|MF_1+MF_2|$ = = constante é válida? Onde?**. Esta dupla procura medir os segmentos MF_1 e MF_2 quando F_2 está fora, dentro e sobre a circunferência, observando o que acontece aos valores das medidas dos segmentos em cada uma dessa posições. Percebem, assim, que quando F_2 está dentro e sobre a circunferência, tal propriedade é válida, e o lugar geométrico dos pontos M é uma elipse. Não havíamos previsto tal saída para a confirmação da propriedade. A nosso ver, recorrer ao quadro numérico é a maneira por eles encontrada para solucionar o problema e suprir sua deficiência em relação às propriedades de geometria plana. Vale a pena destacar que André põe F_1 sobre F_2 e encontra uma circunferência como lugar geométrico dos pontos M. Após discussão das conclusões dos alunos sobre esse item, é recordada a propriedade da mediatriz usada na construção, para que eles percebam o que está por trás da figura criada.

Um ponto interessante, nesse exercício, se dá quando perguntamos aos alunos como eles definiriam parábola depois de feita a construção em Cabri-géomètre. Todos ficam muito ligados à construção, na hora de definir, e descrevem seus passos, ao invés de usar a propriedade que encontram para dar uma definição de parábola. É necessária nossa intervenção, pedindo que a propriedade recém descoberta seja usada.

A *Atividade "Equação"* se torna cansativa e sem sentido para os alunos, devido aos desenvolvimentos algébricos trabalhosos que ela envolve. Ao questioná-los, percebemos que eles conhecem diferentes equações de elipse, parábola e hipérbole. Um dado interessante nessa atividade se dá quando Heloisa sugere como abscissa do ponto M a mesma abscissa de H e justifica sua escolha dizendo que *"M e H pertencem à mesma reta."*

Os alunos, inicialmente, tentam resolver a *Atividade “Encontro”* utilizando o método de Briot-Ruffini, sem sucesso, já que a equação encontrada, não possui nenhuma raiz inteira, o que os impede de usar tal saída. Pensando, pela primeira vez, em mudar do quadro algébrico para o geométrico, os alunos tentam utilizar um *software* por eles conhecido, de nome IMAGICIEL, que possibilita a construção do gráfico de qualquer função. Vendo sua vontade de mudar de estratégia, sugerimos que eles construíssem o gráfico das duas funções, utilizando o “lugar geométrico” de Cabri-géomètre. Já que eles não conhecem o *software* o suficiente para criarem sozinhos as duas curvas que aparecem no exercício, damos a eles um arquivo pronto, capaz de construir o gráfico das funções f e g, dadas em um mesmo plano cartesiano. Todos resolvem a questão com rapidez, embora percebam que a resolução, a partir do gráfico, lhes dá apenas um intervalo que contém a raiz.

Passando para a segunda parte da seqüência, os alunos iniciam a *Atividade “Duplicação do Cubo”*. A rápida e simples resolução do primeiro exercício desta atividade (relacionar o lado do cubo com seu volume), causa espanto aos alunos. *“Mas é só isso?”* indagam André e Heloisa. Percebemos, por seu discurso, uma possibilidade de estar implícito, no contrato didático vigente em sua vida escolar, que a resposta não pode ser simples para que esteja correta. Com o desenvolvimento e a utilização do método de Omar Khayyam, o exercício é facilmente finalizado pelos alunos.

Neste ponto da aplicação, André pergunta *“A gente vai aprender a resolver equações de terceiro grau?”* Mais uma vez, sentimos a interferência de um contrato didático, já estabelecido, anteriormente, com este aluno. Ele já havia, por duas vezes (nas atividades *Encontro* e *Duplicação do Cubo*), resolvido uma equação de terceiro grau, sem, porém, que disséssemos isto a ele explicitamente, fato que o impede de acreditar que esteja construindo um novo conhecimento.

A elaboração do Construtor Universal de Equações se dá com alguns problemas de construção, devido à falta de familiaridade com o *software*

Cabri-géomètre, como, por exemplo, esquecer de marcar o ponto de intersecção de duas retas antes de querer passar uma nova reta por este ponto. Tais dificuldades, porém, são resolvidas pelos próprios alunos e não interferem no desenvolvimento da atividade.

O Construtor é recebido com grande entusiasmo. Todos gostam muito da máquina e percebem, rapidamente, que os segmentos $\underline{a}$, $\underline{b}$ e $\underline{c}$ são respectivamente os coeficientes de $\underline{x^3}$, $\underline{x^2}$ e $\underline{x}$; e $\underline{d}$, o termo independente da equação. Observam como a mudança dos coeficientes pode influir na forma do gráfico, e as variações do mesmo quando $\underline{a}$, $\underline{b}$ ou $\underline{c}$ têm medida zero.

Após essa atividade, fazemos uma breve institucionalização do método de Omar Khayyam, de acordo com a dialética ferramenta-objeto de Régine Douady. Mostramos aos alunos que as raízes reais de qualquer equação de terceiro grau podem ser encontradas, pelo método geométrico recém introduzido e que podemos saber quantas são essas raízes, além de conseguir um intervalo que as contenha.

A *Atividade "Cardano"* ocorre com algumas dificuldades, como havíamos previsto, a respeito das relações existentes entre os coeficientes de uma equação de segundo grau e a soma e o produto de suas raízes. Os alunos dizem que a fórmula de Cardano não é boa pois, além de trabalhosa, não resolve equações em que o coeficiente de $\underline{x^2}$ é diferente de zero, e envolve cálculos que eles julgam difíceis sem a ajuda de uma calculadora. É possível ainda, que esta fórmula leve à raiz quadrada de um número negativo, o que os alunos dizem não existir. Frente a esta afirmação, perguntamos a eles, então, se já haviam estudado números complexos, o que foi respondido negativamente.

Para a *Atividade "Comparação"*, a dificuldade está em construir o gráfico da função dada por $f(x) = x^3 - 6x - 40$ em Cabri-géomètre. Não conseguimos obter um segmento de 40 unidades de medida na tela. É necessário dividir a equação por 10 e, depois, multiplicar a raiz encontrada com o programa por este mesmo número. Podemos, também, modificar a unidade de medida, usada para construir a máquina, determinando-a igual a 1 mm; porém, esta estratégia não é utilizada pelos alunos. Nesta atividade, o método geométrico de resolução é considerado o mais indicado, de acordo com os alunos, pois a fórmula de Cardano traz obstáculos diferentes para sua resolução.

Na *Atividade "Briot-Ruffini"*, os alunos concordam que nem sempre o dispositivo com este nome é bom na resolução de equações, pois elas precisam ter uma raiz inteira para que esse método possa ser usado.

Por último, na *Atividade "Final"*, os alunos se deparam com uma equação de terceiro grau, em que é possível usar a fórmula de Cardano, pois o coeficiente de x^2 é nulo. Porém, ela leva à raiz quadrada de números negativos, ente desconhecido por André, Heloisa, Marilisa e Simone. Por isso, eles não conseguem encontrar o valor da raiz procurada. Como não é permitido usar o método de Briot-Ruffini, por determinação da atividade, decidem que o meio geométrico é o mais eficaz de resolver tal equação, pois construir o gráfico de uma parábola e uma hipérbole é mais fácil que tentar construir o gráfico da função de terceiro grau, sem a ajuda do computador.

Em entrevista feita com os quatro alunos, ao final da aplicação da seqüência, indagamos qual método de resolução por eles usado, neste trabalho, seria o mais indicado para ser usado de uma maneira geral. A resposta unânime é que o método de Omar Khayyam é o preferido pois, com ele, pode-se resolver qualquer equação de terceiro grau, o que não acontece com a fórmula de Cardano e o dispositivo de Briot-Ruffini. Mesmo que só se possa determinar um intervalo para as raízes de uma equação de terceiro grau ao usar o método geométrico, é possível descobrir quantas são as raízes reais e dar a elas um valor aproximado.

O construtor de equações é o preferido, caso o computador e o *software* Cabri-géomètre possam ser utilizados. Os alunos se interessam especialmente por esta máquina, pela possibilidade de manipular coeficientes e observar que cada um deles tem uma relação diferente com o do gráfico.

Os alunos chegam, também, à conclusão de que a possibilidade de mudança de quadros é extremamente importante para o sucesso na resolução de problemas. Mesmo que nem todos os dados existentes em um quadro se façam perceber no outro, este jogo é imprescindível para ampliar as possibilidades de raciocínio matemático. O estudo de equações de terceiro grau possibilita que André, Heloisa, Marilisa e Simone tenham esta visão.

3.2. As mudanças

Após a primeira aplicação de nossa seqüência didática, e após o Exame de Qualificação a 30 de outubro de 1998, decidimos fazer alguns cortes e modificações em sua estrutura, a fim de centralizar nosso trabalho apenas no método geométrico baseado na idéia de Omar Khayyam.

Fazemos uso, agora, apenas das atividades *Cabri-géomètre*, *Equação*, *Encontro*, *Gráficos*, *Método de Omar Khayyam* e *Construtor Universal de Equações*. A *Atividade Equação* não mais conta com três exercícios, por ter-se tornado sem sentido para os alunos, na primeira aplicação. Agora, apenas o primeiro é usado, por ser o de resolução mais simples. Como este tipo de desenvolvimento algébrico de equações de parábola, de elipse e de hipérbole pode ser encontrado em qualquer livro didático, julgamos que esta atitude que tomamos não prejudicará o desenvolvimento do aluno, nem impedirá que ele resolva os próximos exercícios da seqüência.

Concentramos nosso estudo, principalmente, na *Atividade "Encontro"*. Justificamos esta atitude por ser, nesta atividade, a primeira vez, durante a seqüência, que os alunos têm à mão uma equação de terceiro grau para resolver. Aqui, vemos quais os métodos por eles usados para esta resolução, se tais métodos são eficazes e, se não, qual "artifício" pode ser usado para modificar a situação.

Aplicamos esta seqüência com alunos da terceira série do Ensino Médio do Colégio Vera Cruz. Dois fatores influenciaram a escolha daquele local. Primeiramente, diretores e o professor da turma em questão se mostraram abertos a nos receber, e interessados em desenvolver nossa seqüência didática com seus alunos, visto que os conteúdos do estudo poderiam auxiliá-los no vestibular. Além disso, o local possui um laboratório equipado com 20 computadores e Cabri-géomètre II instalado em todos eles, o que satisfaz nossas necessidades de uso do *software*. Observamos, aqui, que utilizamos, para a segunda aplicação da seqüência apenas os recursos de Cabri-géomètre II, que também estão disponíveis na primeira versão deste *software*, para que as atividades não se modificassem e para que o ambiente usado não fosse diferente daquele da primeira aplicação.

O Vera Cruz é uma escola de classe média alta, onde os alunos têm livre acesso à sala de computadores e biblioteca. Nesta escola, o ensino é diferenciado, pois os professores se empenham em trazer para a sala de aula métodos de ensino em que os alunos constroem seus conhecimentos. Ele é considerado um dos melhores colégios da cidade de São Paulo.

Antes de escolher as atividades que fazem parte da seqüência, conversamos com o professor da turma, a fim de obter maiores informações a respeito do desenvolvimento de seus alunos. Constatamos que seu aprendizado inclui o dispositivo de Briot-Ruffini para divisão de polinômios, o Teorema de d'Alembert, sobre raízes racionais de uma equação, e a fórmula de Cardano-Tartaglia para resolução de equações de terceiro grau.

Assim, escolhemos as seis atividades descritas acima e fazemos algumas modificações em algumas delas, a fim de que o conteúdo seja o mesmo da primeira aplicação, para conseguir levantar o mesmo tipo de dados, isto é, possamos estudar a validade ou não de nossas questões.

A *Atividade "Cabri-géomètre"* permanece na seqüência por ser considerada importante para ajudar na construção do método geométrico de resolução de equações de terceiro grau que aqui é estudado.

Atividade Cabri-géomètre

1) a) Crie uma reta <u>d</u> e um ponto F fora de d.

b) Construa um ponto H sobre o objeto d.

c) Construa a mediatriz <u>n</u> do segmento FH.

d) Construa a perpendicular <u>p</u> à reta d passando pelo ponto H. As retas p e n se cortam no ponto M.

e) Acione a opção “lugar geométrico” do menu “Construção”, clique em M e mova o ponto H. Qual é o conjunto dos pontos M?

f) Compare as medidas FM e MH.

g) Por que a reta <u>p</u> foi tomada perpendicular à reta <u>d</u>?

h) Qual a conclusão que você pode chegar a respeito do conjunto de pontos M?

2) a) Construa uma circunferência de centro F_1 e de raio r.

b) Crie um ponto F_2 que esteja fora da circunferência. Seja N um ponto sobre esta mesma circunferência.

c) Crie a reta F_1N e o segmento NF_2

d) A mediatriz do segmento NF_2 corta a reta F_1N no ponto M.

e) Justifique a igualdade $|MF_1 - MF_2| = c$, com c constante

f) Ache o conjunto dos pontos M usando o “lugar geométrico” como no exercício 1, agora movimentando N. Qual a natureza desse conjunto?

g) Desloque o ponto F_2 por todo o plano, inclusive dentro da circunferência e pertencente a ela. O que acontece com o conjunto de pontos M?

h) Existe alguma posição para este ponto F_2 para a qual a propriedade $|MF_1 + MF_2| =$ constante é válida? Onde?

Quadro 5.24. – Atividade Cabri géometre

Com a *Atividade “Equação”*, podemos mostrar ao aluno que a propriedade geométrica das cônicas permanece, mesmo se fizermos uma conversão de registros de representação e mudança de quadro. Não julgamos, porém, necessário serem feitos todos os exercícios desta atividade, apenas o primeiro, por ser, entre os três dados, o de resolução mais simples. Percebemos, na primeira aplicação desta seqüência, que as manipulações algébricas dos exercícios 2) e 3) são mais trabalhosas e muito tempo é dispendido para sua resolução.

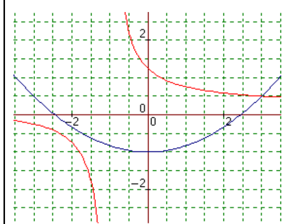
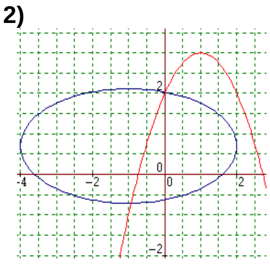
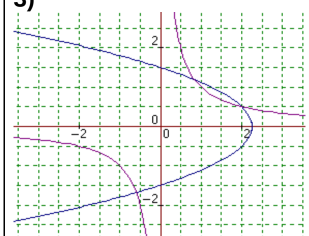
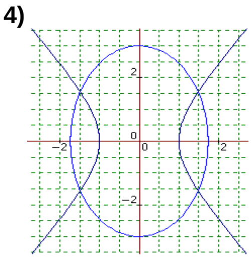
A *Atividade Gráficos* é muito importante para a continuação da seqüência, pois não só mostra se o aluno consegue distinguir entre uma e outra curva cônica, mas, também, se ele sabe quais são os pontos de intersecção entre elas, numa preparação para a próxima atividade.

<table>
<tr>
<th><u>Atividade Equação</u></th>
<th><u>Atividade Gráficos</u></th>
</tr>
<tr>
<td>
1) Se o gráfico da parábola que você encontrou no exercício 1) da Atividade Cabri-géomètre estivesse em um plano cartesiano, sendo, por exemplo: F(2, 3), H(x, -3) (H pertence à reta d), quais seriam as coordenadas do ponto M? Qual equação descreve o conjunto de pontos M?

(Não é necessário resolver os exercícios 2) e 3).

2) Se o gráfico da hipérbole que você encontrou no exercício 2) da Atividade Cabri-géomètre estivesse em um plano cartesiano, sendo, por exemplo: F_1(-3, 0), F_2(3, 0) e a constante c=2, quais seriam as coordenadas do ponto M? Qual equação descreve o conjunto de pontos M?

3) Se o gráfico da elipse que você encontrou no exercício 2) da Atividade Cabri-géomètre estivesse em um plano cartesiano, sendo, por exemplo: F_1(-3, 0), F_2(3, 0) e constante c=10 quais seriam as coordenadas do ponto M? Qual equação descreve o conjunto de pontos M?
</td>
<td>
Identifique cada uma das curvas dadas nos gráficos abaixo. Existem pontos em que elas coincidem? Caso exista dê as coordenadas desses pontos (exatos ou aproximados); se não, explique porquê.

1)

2)

3)

4)

</td>
</tr>
</table>

Quadro 5.25. – Atividades Equação e Gráficos

Iniciamos o estudo de equações de terceiro grau na *Atividade Encontro*. Vemos quais métodos são usados pelos alunos para resolver uma cúbica e fazemos uma comparação entre estes métodos e o método geométrico que usa a idéia de Omar Khayyam para resolver uma equação cúbica. Nossa intenção é saber se o aluno consegue perceber as limitações existentes nas diferentes maneiras que ele conhece de resolver uma equação de terceiro grau, e se ele é capaz de sugerir uma mudança de quadros para solucionar seu problema.

O exercício 2) é colocado nesta segunda aplicação, para que o aluno possa pensar em maneiras diferentes de resolver seu problema, assim como faziam as atividades que foram retiradas da seqüência. Esperamos que eles, no primeiro exercício, façam uso dos métodos estudados em sala de aula: dispositivo de Briot-Ruffini, teorema de d'Alembert e a fórmula de Cardano. Desta forma, os estudantes se deparam com problemas, pois esta equação não tem raízes inteiras, o que os impede de resolver usando Briot-Ruffini. A fórmula de Cardano leva a uma expressão numérica complicada, para ser resolvida sem uma calculadora.

Atividade Encontro	*Atividade Omar Khayyam*
1) Sejam f: $\Re \rightarrow \Re$ e g: $\Re^* \rightarrow \Re$ duas funções de valores reais definidas por $f(x) = \frac{x^2 - 6}{6}$ e $g(x) = \frac{1}{x}$. Existe algum valor de x para o qual as duas funções têm a mesma imagem? Se existe, dê estes valores e justifique sua resposta; se não, explique por quê. **2) Os métodos de resolução que você conhece e usou no exercício anterior foram satisfatórios? Você conseguiu encontrar os resultados pedidos? Existe alguma outra forma de encontrar estes valores? Qual? Justifique sua resposta.**	**1) Seja a equação $x^3 + 5x^2 + 3x = 1$. É possível transformar esta equação em uma outra formada por duas cônicas? Justifique. Encontre as raízes desta equação.** **2) Resolva a equação acima utilizando os métodos que você conhece. Compare seus procedimentos com o método de Omar Khayyam. O que você pode concluir?**

Quadro 5.26. – Atividades Encontro e Omar Khayyam

Nossa expectativa é de que um jogo de quadros seja utilizado para a obtenção de sucesso, de acordo com a dialética ferramenta-objeto de R. Douady.

A *Atividade Omar Khayyam* permanece para que o aluno possa utilizar o método de Omar Khayyam em uma equação completa de terceiro grau. O segundo exercício desta atividade foi incluído para a próxima aplicação como uma forma de ajudar os alunos a compararem os métodos por eles conhecidos de resolução de equações com o novo artifício geométrico. O mesmo se deu na primeira aplicação utilizando outras atividades.

Por último, temos a *Atividade Construtor Universal de Equações*, que pode mostrar ao aluno como é o gráfico de uma função polinomial de terceiro grau e confirmar que os pontos de interseção entre as duas curvas cônicas encontrados na atividade anterior, são raízes da cúbica inicial.

Atividade Construtor de Equações

1) Construção da Máquina

a) Construa quatro segmentos de medidas arbitrárias a, b, c e d perpendiculares a um segmento AB. A seguir, construa um sistema de coordenadas ortogonais de origem O, de modo que AB seja paralelo ao eixo x.

b) Construa sobre o eixo y o segmento OD de medida d, o segmento OC de medida c+d, o segmento OB de medida b+c+d e o segmento OA de medida a+b+c+d. A seguir, construa sobre o eixo x, um segmento OX de medida x e um segmento OE de medida 1.

c) Pelos pontos X e E construa perpendiculares r e s (respectivamente) ao eixo x.

d) Pelo ponto A, construa a perpendicular t ao eixo y. Seja S o ponto de intersecção de s e t.

e) Construa a reta SB. Seja G a intersecção das retas SB e r.

f) Construa a reta m por G paralela ao eixo x. Seja H a intersecção entre m e s.

g) Construa a reta CH. Seja P a intersecção entre CH e r.

h) Construa a reta n por P paralela ao eixo x. Seja F a intersecção entre n e s.

i) Construa a reta DF. Seja J a intersecção entre DF e r.

j) Qual é o lugar geométrico de J quando X se move sobre o eixo x?

2) Varie a medida dos segmentos a, b, c e d. O que acontece com o gráfico?

O que acontece quando:

- **a medida do segmento a é zero?**
- **as medidas dos segmentos a e b são zero?**
- **as medidas dos segmentos a, b e c são zero?**

A partir das manipulações feitas com a mudança das medidas dos segmentos a, b, c e d, o que se pode concluir a respeito desta "máquina" que você construiu?

3) Calcule as coordenadas do ponto J em função de x, a, b, c e d.

4)Utilizando o Construtor de Equações, construa o gráfico da equação cúbica $x^3 - 6x = 6$. Quais são as raízes desta equação?

Quadro 5.27. – Atividade Construtor de Equações

3.3. A segunda aplicação

3.3.1. Considerações gerais:

Alguns problemas, fora de nosso alcance, interferiram na quantidade de alunos que resolveram todas as atividades, na segunda aplicação da seqüência. Estes problemas serão explicados a seguir.

O estudo de equações algébricas, incluindo sua resolução, e métodos como de Briot-Ruffini devem ser estudados pelos alunos, antes da aplicação dessa seqüência didática. Infelizmente, esta matéria só é abordada no final do ano letivo, motivo pelo qual tivemos que esperar até o início de novembro para fazer nosso estudo com os alunos. Esta é a mesma época em que se dão os exames vestibulares, e por isso, os alunos não tinham disponibilidade de horários extra-classe para este trabalho. O professor da turma nos cedeu uma aula por semana, o que nos deu quatro horas de disponibilidade para trabalhar.

O último encontro, entretanto, teve lugar no último dia de aula, o que, infelizmente, diminuiu consideravelmente o número de duplas na aplicação. O professor titular da classe se ausentou nas duas últimas seções, deixando em seu lugar um professor auxiliar. Este fato parece ter contribuído com a evasão, além de nos mostrar o forte efeito que o contrato didático causa em tais alunos.

Temos 16 duplas para as atividades *Cabri-géomètre* e *Equação*, 8 para a Atividade *Gráficos*, 3 para as atividades *Encontro* e *Omar Khayyam* e apenas uma dupla na Atividade *Construtor de Equações*. Ainda assim, acreditamos poder validar nosso estudo, sendo que temos dados da primeira aplicação. As atividades feitas com os alunos do Colégio Vera Cruz também foram feitas pelos alunos da PUC, o que nos permite analisá-las como um todo. Relataremos aqui como foi o segundo experimento.

3.3.2. Relato da Aplicação

No início do primeiro encontro, fazemos uma breve apresentação do *software* Cabri-géomètre para os alunos, já que eles não o conhece. Seu contato inicial com este *software* foi na construção da Atividade Cabri-géomètre. Novamente podemos perceber alguns problemas de manipulação dos pontos e retas. Já no primeiro exercício desta atividade, vemos fatores que devem ser levados em consideração.

Uma dupla toma a iniciativa de construir a reta p não perpendicular à reta d, isto é, p se torna uma reta qualquer. Constata, então que o lugar geométrico dos pontos M não é mais uma parábola. Levado o problema a todos os alunos, eles percebem, então, que tal condição imposta na construção é um fator importante no “aparecimento” da parábola. Nenhum aluno, porém, percebe que tal reta foi tomada perpendicular, por se tratar de distância entre reta e ponto, sem nossa intervenção.

Nesta segunda aplicação, entretanto, os alunos conseguem dar uma definição de parábola, sem fazer uso da construção, mas sim, da propriedade sob a qual se baseia tal construção. A igualdade entre FM e MH foi facilmente verificada. Vale destacar também que estes alunos estavam melhor preparados que aqueles da primeira aplicação, quanto a conceitos geométricos. As propriedades da hipérbole e da elipse foram observadas com sucesso, sem qualquer problema.

Para a *Atividade "Equação"*, a maior dificuldade dos alunos é perceber que a abscissa do ponto M deve ser tomada como a mesma do ponto H, já que os dois pertencem à mesma reta. Quatro duplas esboçaram o gráfico de uma parábola, antes de resolver algebricamente este problema. Este fato pode nos indicar uma provável familiarização desses alunos com o quadro geométrico, ou até uma influência exercida em seu raciocínio pela seqüência. Como somente havíamos trabalhado neste quadro, os alunos podem ter-se preocupado em usá-lo na continuação dos exercícios propostos.

Uma dupla iniciou a resolução dos exercícios 2) e 3), mas deixou seu raciocínio pela metade, por ser muito trabalhoso.

Na *Atividade "Gráficos",* apenas uma dupla não diferencia parábola e hipérbole. Todas as outras conseguem reconhecer as curvas destes objetos, em todos os exercícios, e três duplas dão atenção à aproximação dos valores das abscissas e ordenadas dos pontos de encontro.

Observando, então, a *Atividade "Encontro"*, vemos que os alunos tomam todos os meios, por eles conhecidos, para resolver uma equação de terceiro grau, e mesmo assim não obtêm sucesso.

As três duplas, que fazem esta atividade, pensam inicialmente em procurar uma raiz inteira, para usar o dispositivo de Briot-Ruffini. Uma dupla testa as possíveis raízes que o Teorema de d'Alembert sugeria, as outras duas por tentativa e erro. Não encontrando uma solução satisfatória, que os habilite a usar o dispositivo de Briot-Ruffini, os alunos passam a usar as relações de Girard, solução esta que não considerávamos que pudesse ser usada. Nenhum deles, entretanto, vai muito além com este caminho, pois acham que não é possível resolver o sistema que têm em mãos com facilidade.

Uma dupla, neste momento, lembra-se de uma fórmula que o professor havia ensinado (a de Cardano) e todos tentam usá-la, também sem sucesso, pois chegam a uma expressão numérica, que não conseguem calcular, sem o auxílio de uma calculadora.

Os alunos chegam, então, à conclusão de que os métodos de resolução que eles conhecem, não são sempre eficazes. Existiria alguma maneira de resolver uma cúbica qualquer? Baseado na *Atividade "Gráficos"*, um aluno sugere que se construa o gráfico das funções f e g em um mesmo plano, e que se tome seus pontos de intersecção. Com ajuda do arquivo pronto, usado na primeira aplicação, tais alunos podem visualizar, em Cabri-géomètre, as tão procuradas raízes reais da equação dada.

Novamente, para resolver o segundo exercício da *Atividade "Omar Khayyam"*, os alunos fazem uso dos métodos algébricos que eles conhecem. Iniciando seu raciocínio mais uma vez com a procura de raízes inteiras para usar Briot-Ruffini. Porém sem sucesso. A fórmula de Cardano não pode ser usada, pois, para isso, o coeficiente de x^2 precisa ser nulo, o que não é o caso.

Finalmente, depois de várias tentativas, as três duplas chegam à conclusão de que o método de Omar Khayyam é o mais indicado para ser usado em qualquer caso. Pedro e Leonardo escrevem que *"Omar Khayyam inventou um método que é uma mão na roda!*"

O Construtor Universal de Equações é estudado por apenas uma dupla: Pedro e Leonardo, fora do horário de aula. Ambos percebem sua utilidade, sem qualquer dificuldade. Acham, porém, a construção da máquina extremamente complicada. Observam como a variação dos coeficientes de cada um dos termos da equação influencia a forma de seu gráfico e o número de raízes.

É interessante, porém, constatar que, mesmo tendo admitido, na seção anterior, que o método de Omar Khayyam é o mais indicado para se resolver uma equação de terceiro grau, estes alunos ainda preferem primeiro tentar usar Briot-Ruffini para resolvê-la e só se não conseguirem por este método, utilizar outro. Entendemos como válida esta atitude, pois vemos que os alunos possuem agora discernimento para escolher o que fazer com uma equação de terceiro grau. Cada caso pode ser resolvido a partir de um método diferente, dependendo da praticidade de seu uso.

Capítulo VI: Conclusões

VI. Conclusões

O presente trabalho nos possibilita chegar a várias conclusões, não só levando em consideração nossas questões de pesquisa, mas também aspectos de nossa fundamentação teórica.

1. O estudo das atividades em sala de aula

Os exercícios de nossas atividades mostram que os métodos de resolução de equações, apresentados em livros didáticos, nem sempre trazem resultados satisfatórios, isto é, nem sempre levam os alunos a encontrar as raízes reais de uma equação dada. Porém, este fato não é suficiente para garantir que nossos resultados sejam alcançados, se a seqüência for aplicada a qualquer sala de aula. A postura do professor em sala de aula influi para que os alunos tenham condições de perceber as vantagens e desvantagens de cada método de resolução usado.

Alguns tópicos devem ser observados pelo professor que se interesse em aplicar a seqüência didática deste trabalho a seus alunos:

- Os resultados deste trabalho se repetirão, se o professor apenas resolver as atividades com seus alunos?

Acreditamos que não, pois faz parte de nossa proposta a discussão entre os alunos e entre eles e o professor, com a finalidade de perceber as diferenças entre um método e outro. Só assim os alunos poderão comparar as respostas que obtiveram, em cada exercício, e discutir as estratégias utilizadas para superar seus problemas.

Além disso, é preciso deixar que alunos procurem sozinhos seus caminhos, para a solução das atividades, para que eles sintam a necessidade de jogo de quadros, e mudem sua atitude perante o problema.

- O professor pode, então, deixar a cargo dos alunos o estudo das atividades?

Não, pois a interação professor – aluno também é importante em todas as discussões requeridas. O professor deve questionar seus alunos, fazer com que eles procurem caminhos alternativos, para entenderem a proposta de nossas atividades e para verem as vantagens do método geométrico sobre os outros, apesar das suas desvantagens.

- O professor deve procurar estudar o desenvolvimento históricos desses métodos antes de aplicar a seqüência?

De preferência sim, pois, os dados históricos, colhidos neste trabalho, nos mostram as dificuldades com as quais os matemáticos se depararam, até desenvolver uma fórmula para encontrar raízes de equações de terceiro grau. Estas dificuldades, como por exemplo os números complexos, também podem ser problemas para os alunos durante o estudo.

Olhando as atividades, podemos também fazer algumas observações. Quase todas as atividades podem ser realizadas sem o programa Cabri-géomètre, caso ele não esteja disponível. Seu uso, entretanto, se mostrou bastante eficaz e auxiliou em grande parte na resolução dos problemas apresentados. A atividade *Cabri-géomètre* pode trazer alguns problemas se realizada sem esse programa, pois sua resolução com lápis e papel não mostra a movimentação dos pontos, comprovando o lugar geométrico dos objetos sobre os quais a atividade fala. Já na atividade *Encontro*, a construção de parábolas e hipérboles em um mesmo plano cartesiano é, em geral, mais simples, se feita com o *software*, o que não impede, porém, sua resolução no papel.

O Construtor Universal de Equações, apesar de considerado de grande utilidade pelos alunos, infelizmente, não pode ser construído sem o uso do *software* Cabri-géomètre. Sugerimos que o gráfico de funções polinomiais de terceiro grau seja estudado, visando, mais uma vez, o jogo de quadro algébrico para geométrico.

Os métodos de resolução de equações de terceiro grau, estudados em nossa seqüência didática, podem dar ao aluno uma visão das formas possíveis de se manipular uma equação para resolvê-la. Esta apresentação pode levá-lo a se questionar se equações de grau diferente de três também podem ser resolvidas de outras formas que não as estudadas em livros didáticos.

2. Pontos a serem aprofundados

Alguns tópicos em nosso estudo trouxeram novas indagações que ainda podem ser desenvolvidas.

A possibilidade de adaptação das atividades de nossa seqüência para uso de Cabri-géomètre II deveria ser estudada. Esta segunda versão deste *software* traz facilidades que podem diminuir os problemas de elaboração do Construtor de Equações. A nova versão conta, ainda, com a construção de cônicas, que pode ser feita sobre um plano cartesiano, e as equações dessas curvas podem ser encontradas, bem como as coordenadas de seus pontos.

Notamos, também, a forte influência que o quadro algébrico tem sobre os alunos que estudaram nossa seqüência, isto é, eles parecem presos a este quadro e tendem a resolver qualquer problema apenas por meios algébricos. Além disso, o quadro geométrico é deixado de lado, raramente usado. Os motivos pelos quais os alunos se comportam desta maneira poderiam ser estudo de pesquisas posteriores. É possível que este hábito venha de séries anteriores, de um não uso de geometria pelos próprios professores, mas seria necessária uma pesquisa para que se comprovassem nossas suspeitas.

Quanto à seqüência, ela nos mostra alguns problemas relacionados a números complexos e mesmo à resolução de equações de terceiro grau pelos métodos aprendidos com as abordagens presentes em livros didáticos. Vemos a dificuldade que os alunos têm de construir o gráfico de uma função de terceiro grau, até mesmo de reconhecer sua forma. Podemos supor que o fato se deve ao estudo, provavelmente, insuficiente ou debilitado de equações específicas de terceiro grau. Um estudo deveria ser feito, preocupando-se em verificar se teoremas, relações e fórmulas, válidas todas para equações polinomiais de grau n, são melhor compreendidas se primeiro for estudado um caso particular, para depois serem generalizados os resultados obtidos. Isso acompanharia, então, o desenvolvimento histórico de equações polinomiais.

Um estudo interessante também seria pesquisar se equações de quarto grau podem ser resolvidas por meio de cônicas, como fizemos aqui com equações cúbicas. Poderíamos, então, apresentar aos alunos, não só mais uma maneira geométrica de se resolver equações polinomiais de quarto grau, mas também dar às cônicas novamente o estatuto de ferramenta.

Como última proposta para nossos futuros estudos, temos a possibilidade de voltar a procurar os alunos que estudaram nossa seqüência, a fim de observar as possíveis mudanças ocorridas em seu modo de resolver problemas, isto é, se o quadro geométrico ainda interfere em suas estratégias de resolução. E observar também se eles ainda são capazes de resolver uma equação cúbica qualquer pelos métodos aprendidos.

3. Por que estudar equações de terceiro grau?

Este trabalho nos mostra como é importante o estudo de equações de terceiro grau. Estas equações permitem que os alunos vejam um tipo de gráfico diferente de retas e parábolas, com os quais eles estão acostumados. A possibilidade de jogo de quadros, para encontrar as raízes reais de equações cúbicas, pode ser empregada para tentar modificar, ao menos um pouco, a tendência de os alunos usarem apenas o quadro algébrico para a resolução de problemas. Esse jogo pode também auxiliá-los na resolução de equações de grau maior que três, pois é possível tentar manipulá-las para encontrar um meio geométrico de resolução. A possibilidade de ir de um quadro a outro é de grande importância, pois mostra aspectos diferentes do problema a ser resolvido. Melhora também as opções de escolha do aluno e sua capacidade de raciocinar utilizando os vários ramos da matemática.

4. As contribuições da Fundamentação Teórica

É importante, em nosso trabalho, também, verificar os diferentes efeitos do contrato didático nos alunos que participaram da aplicação da seqüência. Na primeira aplicação, com quatro alunos da PUC-SP, percebemos interferências na resolução das atividades. André, Heloisa, Marilisa e Simone estavam sempre procurando a resposta correta, a “verdade absoluta”. Para eles, parece difícil aceitar que há vários caminhos para se chegar a uma resposta, que se pode olhar um mesmo problema ou resultado sob vários pontos de vista, e chegarmos à mesma conclusão. As discussões sempre giravam em torno de aspectos diferentes de um mesmo objeto matemático, tais como gráficos de funções de terceiro grau e equações cúbicas.

Um outro dado, que esses alunos nos trazem, se refere à fala explícita do professor. Enquanto não lhes foi dito que estavam, de fato, resolvendo equações de terceiro grau, isto não foi percebido por eles.

Já os alunos do Colégio Vera Cruz têm um outro comportamento como efeito do contrato didático. A maioria deles tem mais seriedade nas seções em que o professor titular da turma está presente. É provável que a abstenção, deles nos dois últimos encontros, se deva ao fato de que seu professor deixou a sala a cargo de um outro, auxiliar, que não interveio em qualquer momento, seja para auxiliar na elucidação de possíveis dúvidas dos alunos na resolução das atividades, seja para discipliná-los. Além disso, a não obrigatoriedade do trabalho, nossa seqüência didática não valia nota; e o fim do ano letivo influenciaram esta atitude deles

.

Vemos, então, que o contrato didático é de extrema importância em nosso trabalho e deve ser levado em conta. Os problemas causados à nossa segunda aplicação, pelo número de alunos presentes até o final do trabalho, são significativos, na medida em que mostram o comportamento deles com seus professores, e a relação que eles fazem entre trabalhos e notas, isto é, sua necessidade de ter algo em troca de seu esforço. O conhecimento por si só não parece ser recompensa suficiente para eles.

Outras dificuldades, que o contrato didático pode trazer, se relacionam com a maneira pela qual a seqüência foi definida, o estilo de suas atividades, a gestão em que foi apresentada. O estudo de situações em que o aluno usa um objeto matemático, como ferramenta na resolução de um problema, para depois perceber o que ele realmente fez, é, a nosso ver, extremamente importante e, muitas vezes, contraria o modo de apresentação de um conhecimento com o qual os alunos estão acostumados. Em nossos exercícios, há mais de um meio de resolver para se obter resultados corretos. E há a escolha de um caminho que pode levar a dificuldades ou até à conhecimentos ainda não adquiridos pelos alunos. Eles podem superar estas dificuldades, ou modificar sua maneira de resolver o mesmo problema, passando de um quadro a outro.

Desta forma, temos a interferência do jogo de quadros de Régine Douady durante a seqüência. A escolha por uma mudança de quadros facilitou seu trabalho, e os levou a perceber que podemos ter um mesmo problema, sob pontos de vista diferentes. Estes pontos de vista nos trazem mais informações e podem ajudar a levantar elementos que ainda não apareceram na primeira formulação do exercício.

A mudança de quadros, no caso do nosso trabalho, nos leva também à mudança de registros de representação. A conversão usada na seqüência, de registro equação para registro gráfico, amplia os conhecimentos dos alunos, visto que este registro é raramente tomado nos livros didáticos estudados. Vemos uma forte relutância dos alunos em se aventurarem a construir gráficos de funções, com as quais eles não estejam familiarizados, como, por exemplo, de primeiro e segundo graus. Como foi visto, este é o principal fator que traz dúvidas aos alunos quanto à utilização do método de Omar Khayyam.

Não nos detivemos em cumprir todas as etapas da dialética ferramenta-objeto de Régine Douady, deixando de lado a *familiarização* com o novo conhecimento e a *complexificação da tarefa*. A familiarização foi tomada na primeira aplicação, em que as atividades *"Comparação"* e *"Final"* retomam o uso do método geométrico de resolução por cônicas. Na segunda aplicação, entretanto, preferimos nos deter nas diferenças entre os métodos estudados.

Quanto à complexificação da tarefa, entendemos que ela não era necessária naquele momento, pois a nossa proposta tinha em vista, apenas, que os alunos escolhessem um, dentre os métodos de resolução de equações cúbicas apresentados, como o mais prático a ser usado em qualquer dessas equações.

A transposição didática feita para este estudo nos ajuda a determinar quais são os métodos de resolução de equações de terceiro grau usados na seqüência, a analisar os obstáculos com quais os alunos podem se deparar ao usarem tais métodos e observar os diferentes tipos de resolução de equações cúbicas utilizados pelos alunos. Constatamos que os dados acima descritos, levantados com o estudo da transposição didática, são válidos, e se repetem durante o estudo com os alunos que resolveram os exercícios de nossa seqüência. Os problemas com os números complexos, deparados por Cardano no século XVI, também estiveram presentes ao resolvermos uma equação utilizando este método. A necessidade de resolver algebricamente as equações dadas, também faz parte desses alunos, assim como para matemáticos de outras épocas.

Percebemos a influência que as abordagens dos livros didáticos estudados exercem nos alunos, sendo que eles têm o hábito de usar o quadro algébrico para solucionar qualquer problema que lhes seja dado, usam os métodos de resolução de equações de terceiro grau abordados nesses livros e raramente se sentem à vontade com o quadro geométrico.

A ausência de estudo do quadro geométrico em livros didáticos traz dificuldades para o aluno quanto ao gráfico de uma função de terceiro grau. Não lhes foi possível nem dizer como um gráfico desta função se parece, muito menos identificar um gráfico dado como de uma função de terceiro grau.

As equações de terceiro grau são ricas em métodos de resolução, que provocam mudanças de quadro e de registros e auxiliam os alunos a se familiarizar com esse jogo. Aqui, temos quadros algébrico e geométrico, mas podemos também usar, por exemplo, a trigonometria para resolver estas equações, observando o método desenvolvido por Viéte. No quadro geométrico, podemos não só usar intersecção de cônicas, mas, dependendo da equação, procurar graficamente os zeros de funções de primeiro e segundo graus, aproveitando os conhecimentos abordados em livros didáticos, como o Teorema de d'Alembert, entre outros; ou mesmo usar intersecções de funções de primeiro e terceiro graus.

A primeira aplicação da seqüência, em que foram estudados mais detalhadamente outros métodos de resolução, para equações cúbicas, nos pareceu mais rica no sentido de apresentar aos alunos várias fases históricas, pelas quais passaram os matemáticos para encontrar as raízes dessas equações. As mudanças feitas, entretanto, ajudaram a centralizar nosso estudo em uma única direção, também extremamente importante para a formação do aluno.

Não aplicamos um pós-teste aos alunos que estudaram nossa seqüência, principalmente por ela ter sido estudada ao final do ano letivo. Fizemos, porém, uma entrevista com os alunos que terminaram a segunda aplicação da seqüência, como foi relatado no Capítulo V. Nesta entrevista, percebemos ainda a influência que o quadro algébrico exerce sobre os alunos, porém é possível, também, constatar que, agora, eles têm mais familiaridade com o quadro geométrico.

5. As questões levantadas

É importante analisarmos também se nossas questões de pesquisa podem ser respondidas após o estudo realizado em nosso trabalho.

- ***Estes métodos são suficientes para que o aluno tenha uma visão geral de resolução de cúbicas?***

Nossa primeira questão se refere aos métodos de resolução de equações de terceiro grau, usados na seqüência. Os alunos que estudaram nossas atividades se sentem capazes de resolver qualquer equação de terceiro grau, como nos foi explicado pelos próprios, e, ainda mais, podem escolher qual o melhor método para se usar em cada equação. Estas constatações nos levam a crer que os métodos utilizados nessa seqüência didática são suficientes para dar, aos alunos, uma visão geral de resolução de equações cúbicas. Eles agora são capazes de utilizar álgebra ou geometria para encontrar as raízes de uma equação de grau 3, e analisar o tipo de raiz que estes meios dão a eles.

- ***O aluno terá mais facilidade com métodos geométricos ou algébricos?***

A facilidade em usar um ou outro método vai depender da equação que o aluno tem em mãos para resolver. Vimos que os que estudaram nossa seqüência continuam muito ligados ao quadro algébrico, e este parece ser o quadro com o qual eles têm maior facilidade. Isso nos faz crer que, a primeira tentativa de resolver uma equação, será por meios algébricos. Este fato não invalida, de maneira alguma, nosso estudo, já que ele, agora, sabe que, se não conseguir bons resultados em tal quadro, tem a possibilidade de procurar sucesso de outra forma. Esta outra forma – uma resolução geométrica –

sempre lhe trará informações importantes, caso ele não tenha conseguido antes.

- ***A fórmula de Cardano pode trazer problemas na resolução algébrica?***

A fórmula de Cardano foi descartada como possibilidade de uso. Um fator determinante para isto é a dificuldade de calcular as raízes, sem o auxílio de uma calculadora, além de gerar um obstáculo didático aos alunos que não conhecem os números complexos. A difícil memorização desta fórmula também é um fator que foi discutido pelos alunos.

- ***O método de Omar Khayyam é o mais adequado para utilização pelo aluno por ser de simples construção geométrica, se usado sem o auxílio do computador?***

O método de Omar Khayyam foi unanimemente considerado o melhor desses métodos apresentados. Os fatores que levaram os alunos a esta conclusão são a possibilidade de encontrar a quantidade de raízes reais que a equação possui, ao menos um valor aproximado para cada uma delas e principalmente a possibilidade de uso para qualquer equação. A maior preocupação em se usar esse método está na dificuldade que os alunos sentem em construir, usando lápis e papel, os gráficos de parábolas e hipérboles.

Esse método, apesar de mostrar a quantidade de raízes reais que a equação possui, nos permite encontrar apenas aproximações destes valores. Porém, percebemos que o problema da aproximação se deve ao fato de a raiz ser um número irracional, pois as raízes racionais são facilmente encontradas ao aplicarmos o Teorema de d'Alembert. Assim, podemos ressaltar mais um ponto a favor do método geométrico desenvolvido neste trabalho.

É possível que métodos geométricos tenham sido os primeiros a serem utilizados para a resolução de equações e, entre eles, está o método de Omar

Khayyam. Esse é um método que nos possibilita verificar a existência de raízes reais da equação cúbica que se quer resolver, nos mostra quantas elas são, e permite que se obtenha um intervalo que as contém. É importante salientar, entretanto, que, com esse método, não podemos obter as soluções da equação de terceiro grau inicial, já que estamos trabalhando com um método geométrico, e esse tipo de método nos dá apenas aproximações para as raízes. Limitações, como a explicitada acima, fizeram com que métodos geométricos, pouco a pouco, dessem lugar a métodos algébricos de resolução de equações, pois eles resolvem totalmente o problema.

Do ponto de vista didático, os métodos geométricos são muito úteis para introduzir o estudo de resolução de equações de terceiro grau, e ampliar as possibilidades que o aluno tem de resolver uma equação cúbica. Os métodos geométricos são válidos na medida em que mostram, ao aluno, um raciocínio diferente, que pode ser usado na resolução de problemas. No nosso caso, o método de Omar Khayyam traz um fator que pode motivar o aluno: a possibilidade de visualização das raízes da equação, esboçando os gráficos de uma parábola e uma hipérbole em um mesmo plano cartesiano.

Bibliografia

Bibliografia

ANDRAUS, Sylvio e outros. **Matemática no Segundo Ciclo para o 3º Ano Colegial**. Companhia Editorial Nacional, São Paulo (SP), 1971, páginas 76 a 86.

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da Didática da Matemática e Metodologia de Pesquisa. CEMA - Caderno de Educação Matemática**. Pontifícia Universidade Católica, 1997, páginas 11 a 26, 51 a 63, 84 a 101, 164 a 258.

BEZERRA, Manoel Jairo & PUTNOKI, José Carlos "Jota"**.** **Matemática**, volume único, segundo grau. Editora Scipione, São Paulo (SP), 1994, páginas 440 a 457.

BONGIOVANNI, VISSOTO & LAUREANO. **Matemática e Vida 2º grau**, Volume 3, 2ª edição, Editora Ática, São Paulo, 1993, páginas 109 a 141, 222 a 250.

BOULOS, Paulo & OLIVEIRA, Ivan de Camargo e. **Geometria Analítica - Um Tratamento Vetorial**. Editora Mc Graw-Hill, São Paulo(SP), 1986, páginas 258 a 291.

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. Editora Edgard Blücher, São Paulo (SP), 1974, 10ª impressão - 1993, páginas 69, 70, 104 a 114.

BROUSSEAU, Guy. **"Os diferentes papéis do professor"**, In: Didática da Matemática – Reflexões Psicopedagógicas. Organizadoras: Cecília Parra e Irma Saiz, Editora Artes Médicas – Porto Alegre - RS, 1996, páginas 48 a 73.

CAROLI, Alésio de, e outros. Matrizes, **Vetores e Geometria Analítica**. Editora Nobel, São Paulo (SP), 17ª edição - 1976, 4ª reimpressão - 1991, páginas 111 a 138.

CARRAL, Michel & CUPPENS, Roger. **De d'Alembert à Cabri-géomètre: Leconstructeur Universel d'Equations**. Reperes – IREM número 18, janeiro 1995, páginas 105 a 125.

CASTRUCCI, Benedito, e outros. **A Conquista da Matemática** – 8ª série. Editora FTD, São Paulo-SP, 1992, páginas 56 a 93.

DHOMBRES, J. & DAHAN-DALMEDICO, A .**Mathématiques au fil des âges**. IREM Group Epistémologie et Histoire. Gauther-Villars, Paris, 1987, páginas 96 a 115.

DHOMBRES, J. & DAHAN-DALMEDICO, **A .Une Histoire des Mathématiques – Routes et dédales**. Éditiosn du Seui, 1986, Paris, páginas 94, 95, 150, 151.

DOUADY, Régine. **Un procesus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane.** Educational Studies in Mathematics, vol 20, nº 4, 1989, páginas 387 a 424.

DOUADY, Régine. **Des apports de la didatique des mathematiques a l'enseignement.** In REPERES – IREM número 6, janeiro/1992, páginas 132 a 158.

DUVAL, R. **Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée**. IREM de Strasbourg, nº 5, 1993, página 37 a 65.

EFIMOV, Nikolai. **Elementos de Geometria Analítica**. Livraria Cultura Brasileira Editora, Belo Horizonte (MG), 1972 (Traduzido do original russo por David Jardim Júnior), páginas 68 a 127.

EVES, Howard. **Introduction to the History of Mathematics**. Tradução de Hygino H. Domingues. Editora da Unicamp, Campinas (SP), 1995.

FAIVEL, John & GRAY, Jeremy**. The History of Mathematics – a reader**. The Open University. 1989, Hong Kong.páginas 141 a 153.

GENTIL, Nelson e outros. **Matemática para Segundo Grau**. Volume III. Editora Ática, São Paulo (SP), 5ª edição, 1996, páginas 111 a 136 e 193 a 206.

GRECO, Antonio Carlos & GRECO, Sérgio Emílio. **Matemática** volume único, Editora Ática, 5ª edição, São Paulo-SP, 1996, páginas 111 a 136 e 193 a 206.

HEATH, Sir Thomas. **A History of Greek Matematics**. Volume I - From Tales to Euclid. Dover Publications, Inc, New York, 1981, páginas 251 a 255, 262 a 264, 438, 439.

HEATH, Sir Thomas. **A History of Greek Matematics**. Volume II - From Aristarchus to Diophantus. Dover Publications, Inc, New York, 1981, páginas 110 a 196.

IEZZI, Gelson e outros. **Matemática**, volume III, segundo grau. Atual Editora, São Paulo(SP), 8ª edição, 1990, páginas 79 a 92.

KATZ, Victor J. **History of Mathematics - An Introduction**. Harper Collins College Publishers, USA, 1993, páginas 168, 169, 242 a 247, 317 a 345.

LIMA, Elon Lages. **A equação do Terceiro Grau**. In Matemática Universitária, número 5, junho/1987, páginas 7 a 23.

MACHADO, Antonio dos Santos. **Matemática na escola do segundo grau**, volume III, Atual Editora, São Paulo(SP), 1994, páginas 95 a 109 e 175 a 198.

MILIES, César Polcino. **A solução de Tartaglia para a equação de terceiro grau**. In Revista do Professor de Matemática, IME-USP. São Paulo páginas 15 a 22.

NOBILIONI, Giuseppe. **Coleção Objetivo - Álgebra**. Centro de Recursos Educacionais, 1987, páginas 35 a 67.

OLIVEIRA, Mário de. **A Evolução do Pensamento Matemático na Grécia**. Editora Gráfica da Fundação Cultural de Belo Horizonte, 1ª edição, 1985, páginas 97 a 100.

PEIXOTO, Roberto José Fontes. **Elementos de Geometria Analítica**. Editora Minerva, Rio de Janeiro (RJ), 3ª edição 1943, páginas 165 a 179.

PERGA, Apolônio of. **Conics**. Traduzido para o Inglês por Catesby Taliaferro. Encilipaedia Britannica, Inc, 1955, páginas 595 a 680.

PERRIN-GLORIAN, Marie Jeanne. **Théorie des Situations didatiques: Naissance, développement, perspectives**, Vingt ans de didactique des mathématiques en France, RDM, La pensée Sauvage Editions, 1994, páginas 97 a 147.

SMITH, David Eugene. **History of Mathematics**. Volume I. Dover Publications, Inc, New York, 1958, páginas 103 a 125.

TRGALOVÁ, Jana. **Etude historique et épistemologique des coniques et leur implémentation informatique dans le logiciel Cabri-géomètre**. Tese de Doutorado. Université Joseph Fourier – Grenoble 1, outubro/1995, páginas 5 a 54.

WAERDEN, B. L. van. **A history of algebra – from al-Khowarizmi to Emmy Noether**. Springer Verlay, New York, Tokio, 1980, páginas 25 a 29 e 50 a 87.

Anexos

Anexo I – Questionário aplicado aos alunos

Questionário de Matemática

1) Para você, o que é:
 a) Elipse?

 b) Hipérbole?

 c) Parábola?

2) Quantas raízes reais têm as seguintes equações? Justifique.
 a) $x^3 + x = 0$ b) $r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0$

 c) $t^3 - 3t^2 + 3t - 1 = 0$ d) $x^3 + 1 = 0$

3) É possível uma equação de 3º grau ter duas raízes reais? Justifique.

4) Qual é o grau da equação $\frac{x^2 - 6}{6} = \frac{1}{x}$? Justifique.

5) Se você fizesse o gráfico da função $f: \Re \to \Re$ dada por $f(x) = \frac{x^2 - 6}{6}$, que tipo de curva encontraria?

6) Se você fizesse o gráfico da função $f: \Re \to \Re$ dada por $f(x) = \frac{1}{x}$, que tipo de curva encontraria?

7) Você foi capaz de responder às questões 5) e 6) sem fazer o gráfico?

Sim Não

8) Você conhece algum tipo de “método” de resolução de equações de terceiro grau?

Que método é esse?

Onde você aprendeu?

Como resolve-se uma equação por este método?

Você sabe se existe outros além do que você conhece?

9) Você tem alguma dificuldade em resolver equações de 3º grau?

Quais são estas dificuldades?

Anexo II – Atividades da seqüência didática:
Primeira aplicação

Atividade Cabri-géomètre

1) a) Crie uma reta d e um ponto F fora de d.
   b) Construa um ponto H sobre o objeto d.
   c) Construa a mediatriz n do segmento FH.
   d) Construa a perpendicular p à reta d passando pelo ponto H. As retas p e n se cortam no ponto M.
   e) Acione a opção "lugar geométrico" do menu "Construção", clique em M e mova o ponto H. Qual é o conjunto dos pontos M?
   f) Compare as medidas FM e MH.
   g) Por que a reta p foi tomada perpendicular à reta d?
   h) Qual a conclusão que você pode chegar a respeito do conjunto de pontos M?

2) a) Construa uma circunferência de centro F_1 e de raio r.
   b) Crie um ponto F_2 que esteja fora da circunferência. Seja N um ponto sobre esta mesma circunferência.
   c) Crie a reta F_1N e o segmento NF_2
   d) A mediatriz do segmento NF_2 corta a reta F_1N no ponto M.
   e) Justifique a igualdade $|MF_1 - MF_2| = c$, com c constante
   f) Ache o conjunto dos pontos M usando o "lugar geométrico" como no exercício 1, agora movimentando N. Qual a natureza desse conjunto?
   g) Desloque o ponto F_2 por todo o plano, inclusive dentro da circunferência e pertencente a ela. O que acontece com o conjunto de pontos M?
   h) Existe alguma posição para este ponto F_2 para a qual a propriedade $|MF_1 + MF_2|$ = constante é válida? Onde?

Atividade Equação

1) Se o gráfico da parábola que você encontrou no exercício 1) da Atividade Cabri-géomètre estivesse em um plano cartesiano, sendo, por exemplo: F(2, 3), H(x, -3) (H pertence à reta d), quais seriam as coordenadas do ponto M? Qual equação descreve o conjunto de pontos M?

2) Se o gráfico da hipérbole que você encontrou no exercício 2) da Atividade Cabri-géomètre estivesse em um plano cartesiano, sendo, por exemplo: F_1(-3, 0), F_2(3, 0) e a constante c=2, quais seriam as coordenadas do ponto M? Qual equação descreve o conjunto de pontos M?

3) Se o gráfico da elipse que você encontrou no exercício 2) da Atividade Cabri-géomètre estivesse em um plano cartesiano, sendo, por exemplo: F_1(-3, 0), F_2(3, 0) e constante c=10 quais seriam as coordenadas do ponto M? Qual equação descreve o conjunto de pontos M?

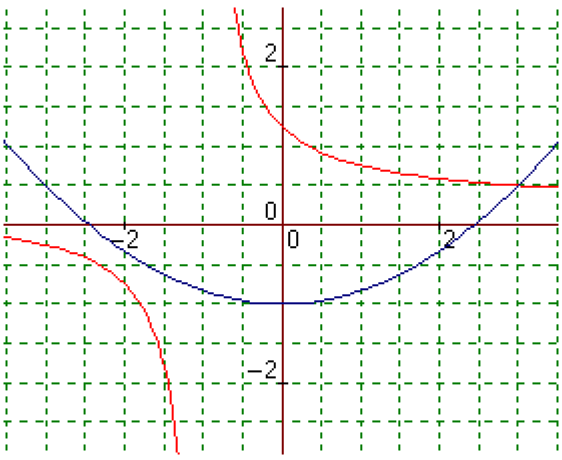
Atividade Encontro

Sejam f: $\Re \to \Re$ e g: $\Re^* \to \Re$ duas funções de valores reais definidas por $f(x) = \frac{x^2 - 6}{6}$ e $g(x) = \frac{1}{x}$. Existe algum valor de x para o qual as duas funções têm a mesma imagem? Se existe, dê estes valores e justifique sua resposta; se não, explique porquê.

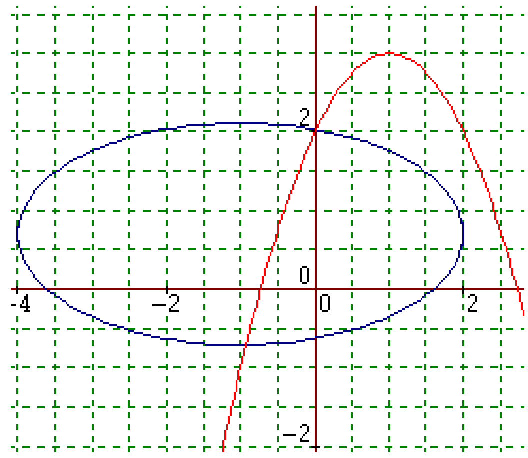
Atividade Gráficos

Identifique cada uma das curvas dadas nos gráficos abaixo. Existem pontos em que elas coincidem? Caso exista dê as coordenadas desses pontos (exatos ou aproximados); se não, explique porquê.

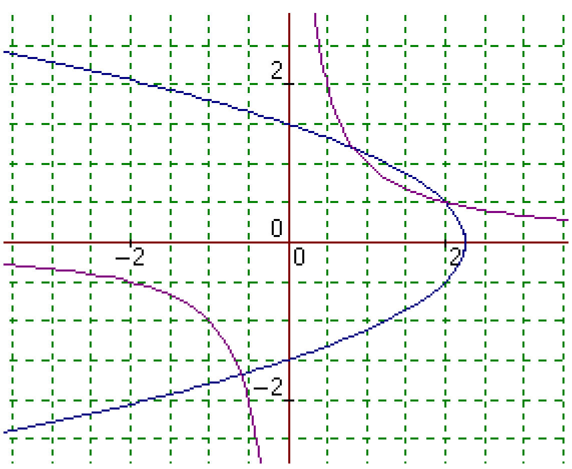
1)



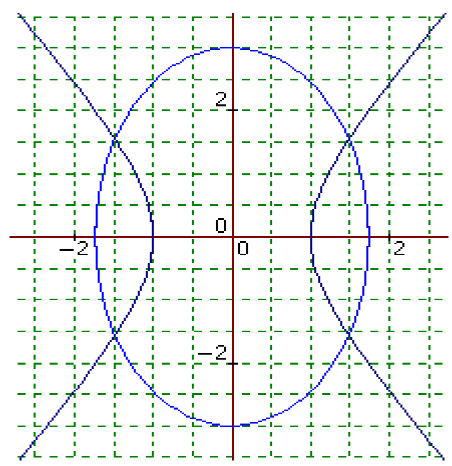
2)



3)



4)



Atividade Duplicação do Cubo

No século V a.C., a Grécia foi tomada por uma peste terrível que assombrou e dizimou grande parte da população. Uma delegação foi enviada ao oráculo de Apolo em Delos para rezar e pedir àquele deus que dissesse o que o povo precisava fazer para que a peste desaparecesse. Conta a lenda que o oráculo determinou que se duplicasse o altar de Apolo, cuja forma era a de um cubo. Os atenienses, obedientemente, duplicaram as dimensões do altar, pensando terem atendido ao pedido divino. A peste, contudo, continuava a se espalhar pelo país pois, quando duplicam-se seus lados, o volume do altar é multiplicado por oito e não por dois.

Platão, ao ser consultado a respeito do problema, respondeu que o intuito dos deuses não era tê-lo resolvido, mas que os Gregos desistissem de guerras e maldades e cultivassem as Musas, para que suas paixões fossem supridas pela Filosofia e pela Matemática, vivendo uma relação de ajuda uns com os outros.

1) Apesar da indagação de Platão, a peste precisava ser detida. Tendo os lados do altar medida 1, calcule seu volume. Encontre uma expressão algébrica para o lado do cubo cujo volume é igual ao dobro do volume do altar.

Observação: O volume de um prisma é igual ao produto de sua altura pela área da base.

2) Utilizando os conhecimentos de cônicas e intersecção de gráficos adquiridos nas atividades precedentes, encontre um valor (mesmo que aproximado) para o lado do cubo procurado.

Atividade Construtor de Equações

1) Construção da Máquina

a) Construa quatro segmentos de medidas arbitrárias a, b, c e d perpendiculares a um segmento AB. A seguir, construa um sistema de coordenadas ortogonais de origem O, de modo que AB seja paralelo ao eixo x.

b) Construa sobre o eixo y o segmento OD de medida d, o segmento OC de medida c+d, o segmento OB de medida b+c+d e o segmento OA de medida a+b+c+d. A seguir, construa sobre o eixo x, um segmento OX de medida x e um segmento OE de medida 1.

c) Pelos pontos X e E construa perpendiculares r e s (respectivamente) ao eixo x.

d) Pelo ponto A, construa a perpendicular t ao eixo y. Seja S o ponto de intersecção de s e t.

e) Construa a reta SB. Seja G a intersecção das retas SB e r.

f) Construa a reta m por G paralela ao eixo x. Seja H a intersecção entre m e s.

g) Construa a reta CH. Seja P a intersecção entre CH e r.

h) Construa a reta n por P paralela ao eixo x. Seja F a intersecção entre n e s.

i) Construa a reta DF. Seja J a intersecção entre DF e r.

j) Qual é o lugar geométrico de J quando X se move sobre o eixo x?

2) Varie a medida dos segmentos a, b, c e d. O que acontece com o gráfico?

O que acontece quando:

- a medida do segmento a é zero?
- as medidas dos segmentos a e b são zero?
- as medidas dos segmentos a, b e c são zero?

A partir das manipulações feitas com a mudança das medidas dos segmentos a, b, c e d, o que se pode concluir a respeito desta “máquina” que você construiu?

3) Calcule as coordenadas do ponto J em função de x, a, b, c e d.

4)Utilizando o Construtor de Equações, construa o gráfico da equação cúbica $x^3 - 6x = 6$. Quais são as raízes desta equação?

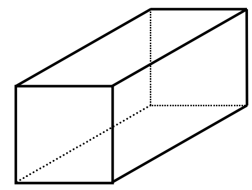
5)Compare os resultados e procedimentos das atividades I e II. Qual dos dois métodos você achou mais fácil de se utilizar? Por que? Em qual dos dois, na sua opinião, as raízes são dadas com maior precisão? Por que?

Atividade Método de Omar Khayyam

Seja a equação $x^3 + 5x^2 + 3x = 1$. É possível transformar esta equação numa igualdade entre duas curvas da mesma família, como na atividade I? Justifique. Encontre as raízes desta equação.

Atividade Cardano

1) O volume do bloco ao lado é igual a n unidades de volume. Os lados da base têm medidas $a+b$ e $a+b+\frac{m}{a+b}$. Sua altura tem medida $a+b$. Encontre uma expressão algébrica para este volume.



2) Compare a expressão que você encontrou acima com o desenvolvimento de $(a+b)^3$ e escreva m e n em função de a e b.

3) Sendo a^3 e b^3 raízes de uma equação de segundo grau, escreva os valores destas raízes em função de m e n.

4) Dada a equação $x^3-3x=2$, encontre $x=a+b$ utilizando os exercícios precedentes.

Atividade Comparação

1) Use o método de Cardano para resolver as equações a) $x^3 - 6x = 40$ e b) $x^3 - 5x = 4$.

2) Use o método de Omar Khayyam para resolver estas equações. Compare os resultados obtidos com as raízes encontradas acima. O que você pode concluir?

Atividade Briot-Ruffini

1) Seja a equação $x^3 - 5x = 4$. Encontre uma raiz desta equação através do critério de pesquisa de raízes e, utilizando o Teorema de d'Alembert, encontre outras, caso existam.

2) Compare este método de resolução com os que você estudou até agora (Cardano e Omar Khayyam). Qual deles é o mais indicado, na sua opinião?

Atividade Final

Agora você está sem o auxílio do computador para resolver equações. Dê as raízes da equação $x^3 - 15x = 4$. Utilize os três métodos que você estudou e compare suas facilidades ou dificuldades.

Anexos III – Atividades da seqüência didática:
Segunda aplicação

Atividade Cabri-géomètre

1) a) Crie uma reta d e um ponto F fora de d.
   b) Construa um ponto H sobre o objeto d.
   c) Construa a mediatriz n do segmento FH.
   d) Construa a perpendicular p à reta d passando pelo ponto H. As retas p e n se cortam no ponto M.
   e) Acione a opção “lugar geométrico” do menu “Construção”, clique em M e mova o ponto H. Qual é o conjunto dos pontos M?
   f) Compare as medidas FM e MH.
   g) Por que a reta p foi tomada perpendicular à reta d?
   h) Qual a conclusão que você pode chegar a respeito do conjunto de pontos M?

2) a) Construa uma circunferência de centro F_1 e de raio r.
   b) Crie um ponto F_2 que esteja fora da circunferência. Seja N um ponto sobre esta mesma circunferência.
   c) Crie a reta F_1N e o segmento NF_2
   d) A mediatriz do segmento NF_2 corta a reta F_1N no ponto M.
   e) Justifique a igualdade $|MF_1 - MF_2| = c$, com c constante
   f) Ache o conjunto dos pontos M usando o “lugar geométrico” como no exercício 1, agora movimentando N. Qual a natureza desse conjunto?
   g) Desloque o ponto F_2 por todo o plano, inclusive dentro da circunferência e pertencente a ela. O que acontece com o conjunto de pontos M?
   h) Existe alguma posição para este ponto F_2 para a qual a propriedade $|MF_1 + MF_2|$ = constante é válida? Onde?

Atividade Equação

1) Se o gráfico da parábola que você encontrou no exercício 1) da Atividade Cabri-géomètre estivesse em um plano cartesiano, sendo, por exemplo: F(2, 3), H(x, -3) (H pertence à reta d), quais seriam as coordenadas do ponto M? Qual equação descreve o conjunto de pontos M?

(Não é necessário resolver os exercícios 2) e 3).

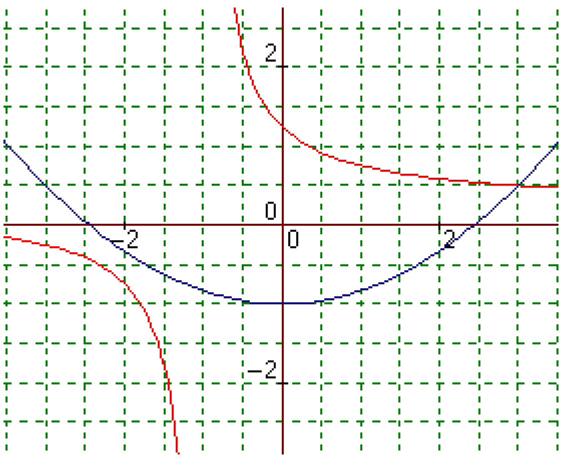
2) Se o gráfico da hipérbole que você encontrou no exercício 2) da Atividade Cabri-géomètre estivesse em um plano cartesiano, sendo, por exemplo: F_1(-3, 0), F_2(3, 0) e a constante c=2, quais seriam as coordenadas do ponto M? Qual equação descreve o conjunto de pontos M?

3) Se o gráfico da elipse que você encontrou no exercício 2) da Atividade Cabri-géomètre estivesse em um plano cartesiano, sendo, por exemplo: F_1(-3, 0), F_2(3, 0) e constante c=10 quais seriam as coordenadas do ponto M? Qual equação descreve o conjunto de pontos M?

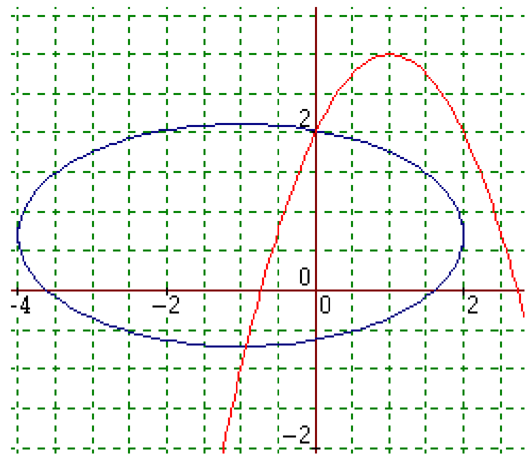
Atividade Gráficos

Identifique cada uma das curvas dadas nos gráficos abaixo. Existem pontos em que elas coincidem? Caso exista dê as coordenadas desses pontos (exatos ou aproximados); se não, explique porquê.

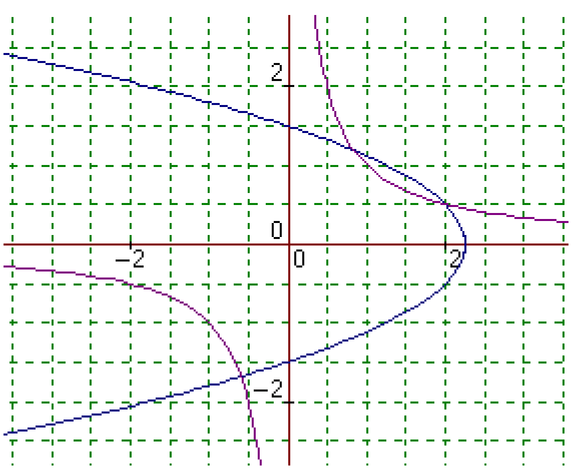
1)



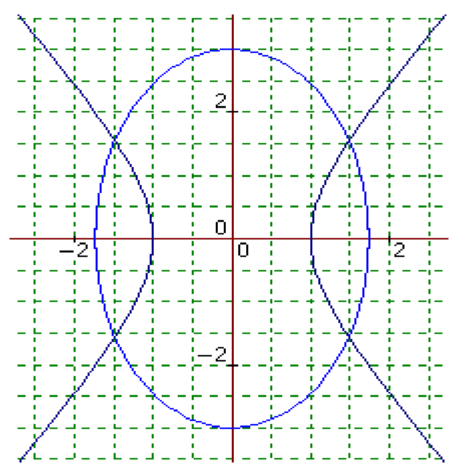
2)



3)



4)



Atividade Encontro

1) Sejam f: $\Re \rightarrow \Re$ e g: $\Re^* \rightarrow \Re$ duas funções de valores reais definidas por $f(x) = \frac{x^2 - 6}{6}$ e $g(x) = \frac{1}{x}$. Existe algum valor de x para o qual as duas funções têm a mesma imagem? Se existe, dê estes valores e justifique sua resposta; se não, explique porquê.

2) Os métodos de resolução que você conhece e usou no exercício anterior foram satisfatórios? Você conseguiu encontrar os resultados pedidos? Existe alguma outra forma de encontrar estes valores? Qual? Justifique sua resposta.

Atividade Omar Khayyam

1) Seja a equação $x^3 + 5x^2 + 3x = 1$. É possível transformar esta equação em uma outra formada por duas cônicas? Justifique. Encontre as raízes desta equação.

2) Resolva a equação acima utilizando os métodos que você conhece. Compare seus procedimentos com o método de Omar Khayyam. O que você pode concluir?

Atividade Construtor de Equações

1) Construção da Máquina

a) Construa quatro segmentos de medidas arbitrárias a, b, c e d perpendiculares a um segmento AB. A seguir, construa um sistema de coordenadas ortogonais de origem O, de modo que AB seja paralelo ao eixo x.

b) Construa sobre o eixo y o segmento OD de medida d, o segmento OC de medida c+d, o segmento OB de medida b+c+d e o segmento OA de medida a+b+c+d. A seguir, construa sobre o eixo x, um segmento OX de medida x e um segmento OE de medida 1.

c) Pelos pontos X e E construa perpendiculares r e s (respectivamente) ao eixo x.

d) Pelo ponto A, construa a perpendicular t ao eixo y. Seja S o ponto de intersecção de s e t.

e) Construa a reta SB. Seja G a intersecção das retas SB e r.

f) Construa a reta m por G paralela ao eixo x. Seja H a intersecção entre m e s.

g) Construa a reta CH. Seja P a intersecção entre CH e r.

h) Construa a reta n por P paralela ao eixo x. Seja F a intersecção entre n e s.

i) Construa a reta DF. Seja J a intersecção entre DF e r.

j) Qual é o lugar geométrico de J quando X se move sobre o eixo x?

2) Varie a medida dos segmentos a, b, c e d. O que acontece com o gráfico?

O que acontece quando:

- a medida do segmento a é zero?
- as medidas dos segmentos a e b são zero?
- as medidas dos segmentos a, b e c são zero?

A partir das manipulações feitas com a mudança das medidas dos segmentos a, b, c e d, o que se pode concluir a respeito desta “máquina” que você construiu?

3) Calcule as coordenadas do ponto J em função de x, a, b, c e d.

4)Utilizando o Construtor de Equações, construa o gráfico da equação cúbica $x^3 - 6x = 6$. Quais são as raízes desta equação?

Anexo IV – Gráficos implicativos (CHIC)

1. As variáveis

VA01: define elipse corretamente.
VA02: tem noção intuitiva de elipse.
VA03: usa desenho para definir elipse.
VA04: não tem o conceito de elipse.
VA05: define hipérbole corretamente.
VA06: tem noção intuitiva de hipérbole.
VA07: usa desenho para definir hipérbole.
VA08: não tem o conceito de hipérbole.
VA09: define parábola corretamente.
VA10: tem noção intuitiva de parábola.
VA11: usa desenho para definir parábola.
VA12: não tem o conceito de parábola.
VA13: resolve uma equação de terceiro grau colocando um fator em evidência.
VA14: resolve equações de terceiro grau por divisão.
VA15: resolve equações de terceiro grau usando fator e divisão.
VA16: não resolve as equações para responder a pergunta.
VA17: coloca fator em evidência de maneira errada.
VA18: faz a divisão de maneira errada.
VA19: dá o número de raízes da equação corretamente sem resolvê-las.
VA20: dá o número de raízes da equação incorretamente sem resolvê-las.
VA21: uma equação de terceiro grau não pode ter duas raízes reais.
VA22: uma equação de terceiro grau pode ter duas raízes reais.
VA23: não sabe se uma equação de terceiro grau pode ou não ter duas raízes reais.
VA24: consegue identificar uma equação de terceiro grau escrita de modo diferente.
VA25: não consegue identificar uma equação de terceiro grau escrita de modo diferente.

VA26: identifica a função f: $\Re \rightarrow \Re$ dada por $f(x) = \frac{x^2 - 6}{6}$ como uma parábola apenas pela equação.

VA27: identifica a função f: $\Re \rightarrow \Re$ dada por $f(x) = \frac{x^2 - 6}{6}$ como uma parábola com a ajuda do gráfico.

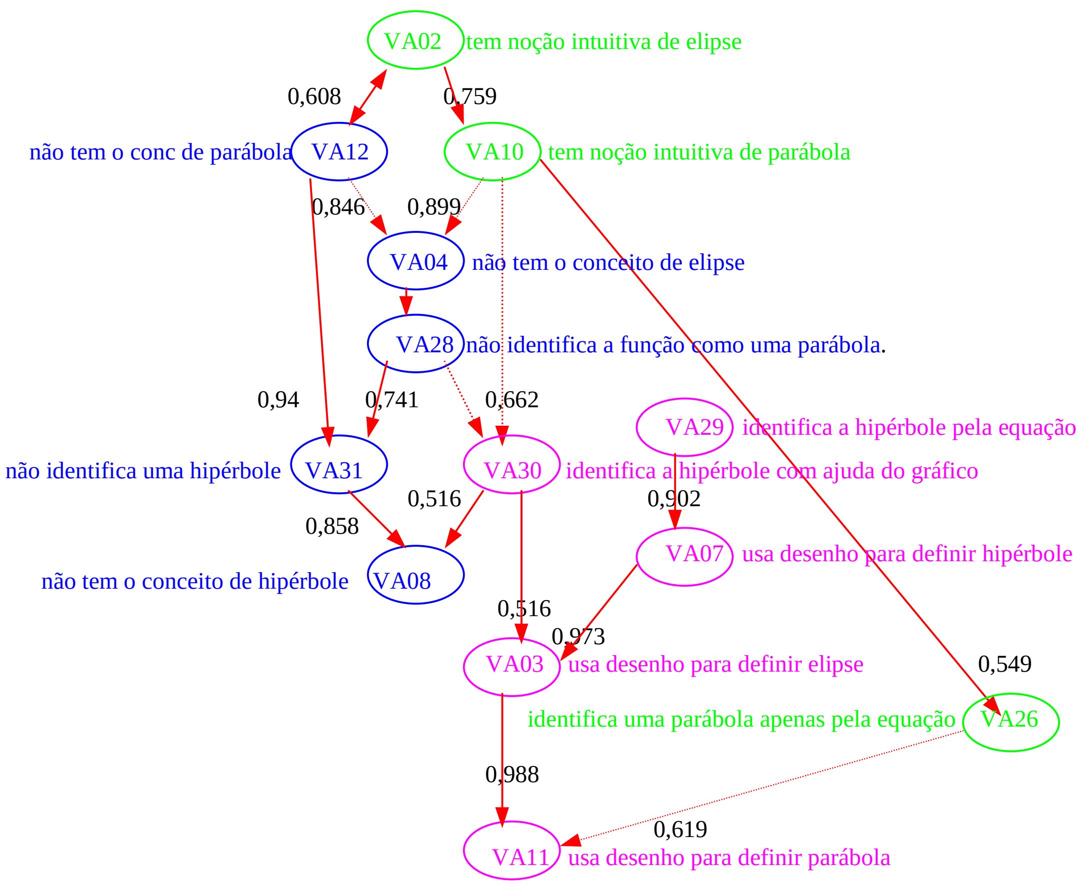
VA28: não identifica a função f: $\Re \rightarrow \Re$ dada por $f(x) = \frac{x^2 - 6}{6}$ como uma parábola.

VA29: identifica a função f: $\Re * \rightarrow \Re$ dada por $f(x) = \frac{1}{x}$ como uma hipérbole apenas pela equação.

VA30: identifica a função f: $\Re * \rightarrow \Re$ dada por $f(x) = \frac{1}{x}$ como uma hipérbole com a ajuda do gráfico.

VA31: não identifica a função f: $\Re * \rightarrow \Re$ dada por $f(x) = \frac{1}{x}$ como uma hipérbole.

2. Gráfico Implicativo de Chic para cônicas



1. A ***Classe do Insucesso***, envolvendo as variáveis VA12,VA04, VA28, VA31 e VA08.

Esta classe tende a mostrar que a falta de um conceito de parábola implica a falta do conceito de hipérbole. Observamos, então, uma probabilidade de que os alunos que não sabem parábola também não saibam hipérbole. E é também razoável dizer que não ter como conhecimento disponível parábola e elipse implique não conhecer hipérbole.

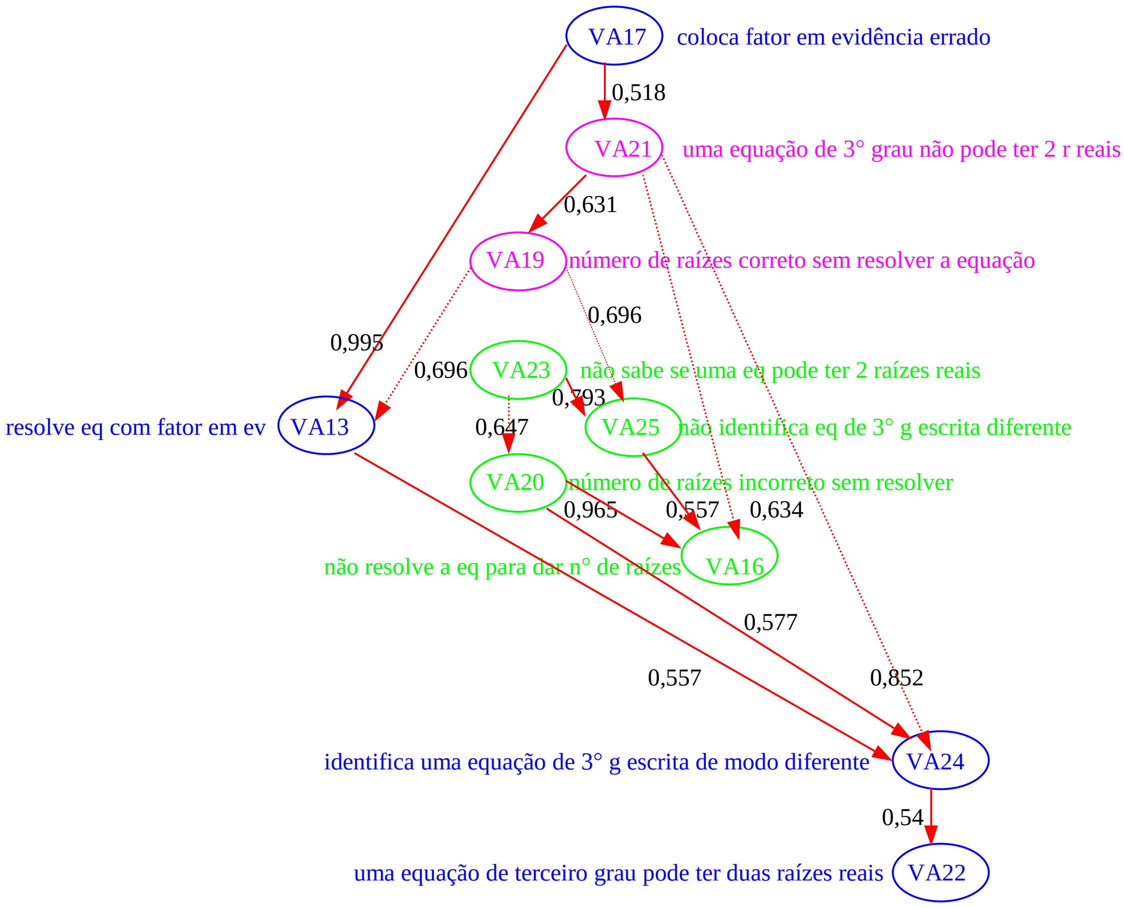
2. A ***Classe do Desenho***, envolvendo as variáveis VA29, VA07, VA30, VA03 e VA11.

Esta classe parece nos revelar uma inclinação dos alunos a definir estas três curvas a partir de um desenho. É interessante notar, porém, a implicação entre VA29 e VA07, dizendo *“identifica a hipérbole pela equação”* $\Rightarrow$ *“usa desenho para definir hipérbole”*. Ainda temos, entretanto, um conceito baseado apenas em registros de representação, sejam eles gráficos ou equações.

3. A ***Classe da Noção Intuitiva***, envolvendo as variáveis VA02, VA10 e VA26.

Os alunos que se encaixam nesta última classe parecem desligados da necessidade gráfica. A implicação entre VA10 e VA26 nos leva a pensar que uma equação é suficiente para os alunos que têm noção intuitiva de parábola reconhecerem tal curva. Observamos que esta é uma classe de relativo sucesso se comparada às outras. Vemos aqui os melhores resultados encontrados durante o estudo em relação às cônicas.

3. Gráfico implicativo de Chic para cúbicas



1. A ***Classe do Sucesso Parcial***, envolvendo as variáveis VA17, VA13, VA24 e VA22.

A tendência dos alunos que se encaixam nesta classe é de resolver equações de terceiro grau colocando fator em evidência de maneira incorreta, sem poder identificar o número de raízes reais que este tipo de equação pode ter. Ainda assim, estes alunos são capazes de manipular uma equação algébrica.

2. A ***Classe do Sucesso***, com as variáveis VA21 e VA19;

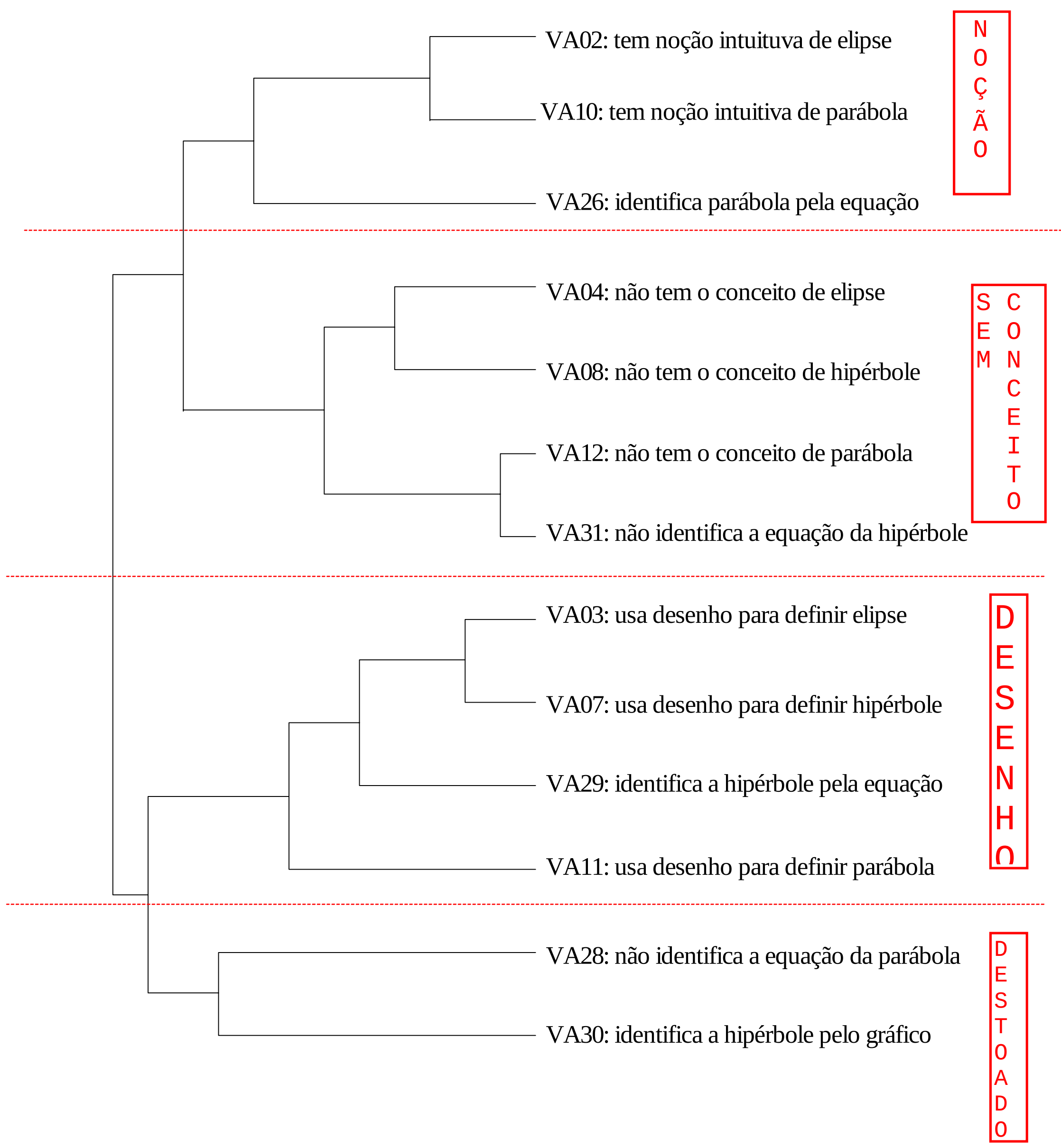
Esta classe nos diz que, se o aluno pode perceber o número de raízes de uma equação sem ser necessária sua resolução, então é possível que seu saber a respeito da quantidade de raízes existentes esteja disponível.

3. A ***Classe do Fracasso***, englobando as variáveis VA23, VA25, VA20 e VA16.

Esta classe nos leva a pensar que os alunos com estas características talvez não possam resolver uma equação de terceiro grau pois provavelmente não têm disponíveis os conceitos necessários. Eles tendem a se encaixar em um perfil da falta de visão algébrica, pois não conseguem perceber a necessidade de reescrever uma equação para identificar seu grau, não têm conceito de raízes de uma equação e, conseqüentemente não conseguem resolvê-la.

Anexo V – Gráfico de similaridades (CHIC)

1. Cônicas



O ***Grupo Noção Intuitiva*** nos mostra uma similaridade entre os conceitos de elipse e parábola presentes nos alunos que responderam ao questionário. A noção intuitiva destas duas curvas se unem em uma similaridade, ainda que pequena, com a identificação da parábola apenas pela equação. Este grupo tende a dizer que os alunos que se encaixam nesta categoria têm um conceito melhor definido de elipse e parábola, de acordo com suas definições para estas curvas e a fácil identificação de uma parábola.

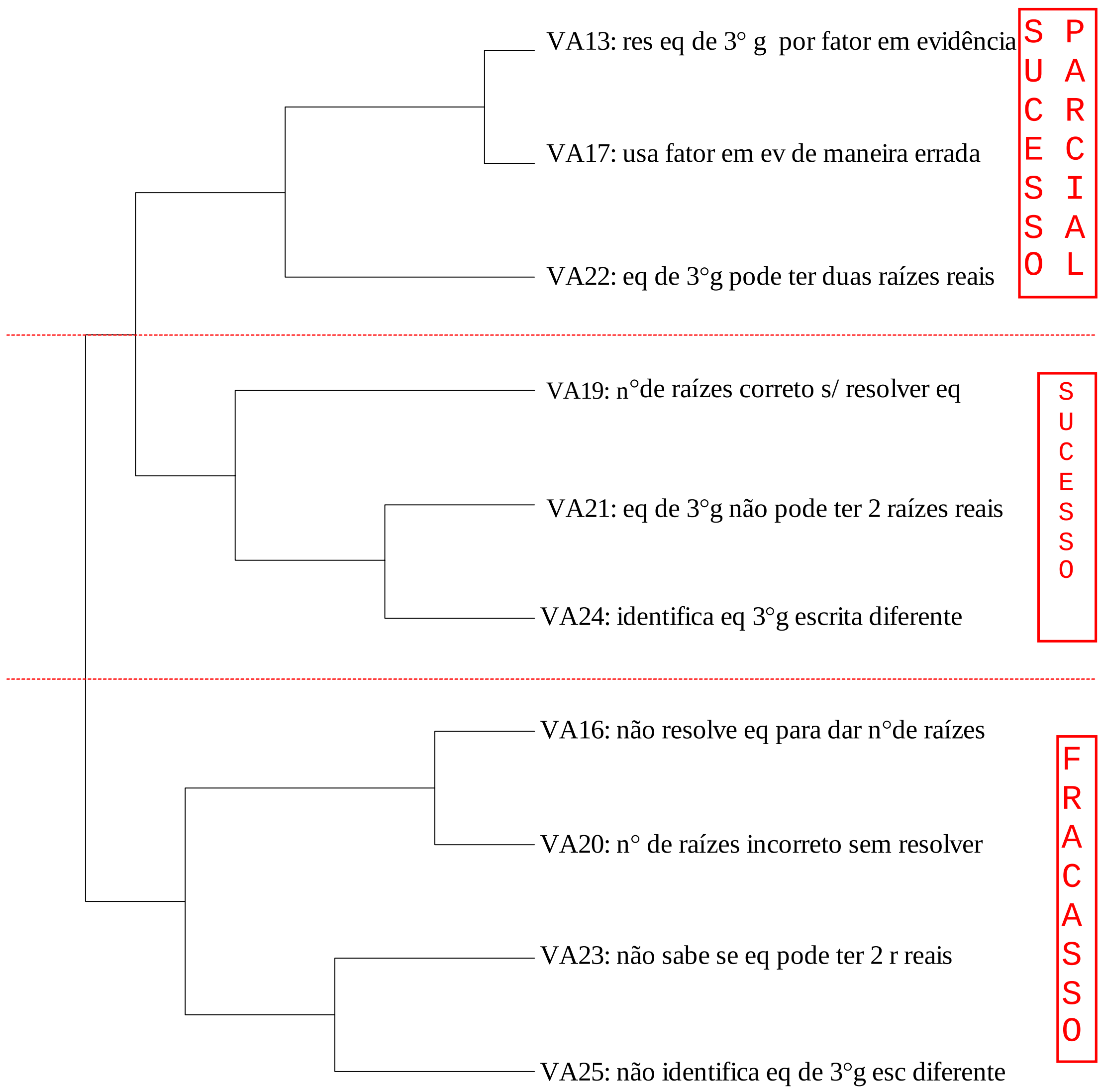
O ***Grupo do Desenho*** contém uma forte similaridade entre as variáveis VA03 e VA07 falando da relação existente entre os conceitos de elipse e hipérbole. Estas variáveis são uma grande ocorrência entre os alunos. Unindo a elas VA29, vemos que é possível a estudantes com este comportamento a identificação de uma hipérbole através de sua equação, isto é, este aluno reconhece os diversos registros de representação de tal curva.

A última variável presente neste grupo, VA11, vem apenas acrescentar o mesmo tipo de definição para a parábola dada anteriormente para as outras secções cônicas: o desenho.

O ***Grupo Destoado*** é assim chamado pois, além de estar desvinculado dos outros grupos pelo fraco grau de similaridade, apresenta também uma ausência de similaridade entre as variáveis que o compõem. Podemos dizer, portanto, que é difícil encontrar questionários onde ocorram ao mesmo tempo a identificação da hipérbole pelo gráfico e a não identificação de uma parábola. Esta constatação fortalece nossas análises anteriores.

2. Cúbicas

A similaridade mais forte encontrada no gráfico acima se refere às variáveis VA13 e VA17, nas quais percebemos a tendência dos alunos de resolver a equação colocando um fator em evidência de maneira errada. A união delas com VA22 (formando, então, o ***Grupo do Sucesso Parcial***) nos faz entender que a falta de conhecimento para resolver uma equação leva à incompreensão de quantidade de raízes reais da mesma. Este é um dos comportamentos mais freqüentes nos alunos que responderam ao questionário. Podemos relacionar esta provável ocorrência com a análise feita anteriormente, na qual víamos os alunos fazendo uso incorreto de um método de resolução não apresentado nos manuais didáticos.

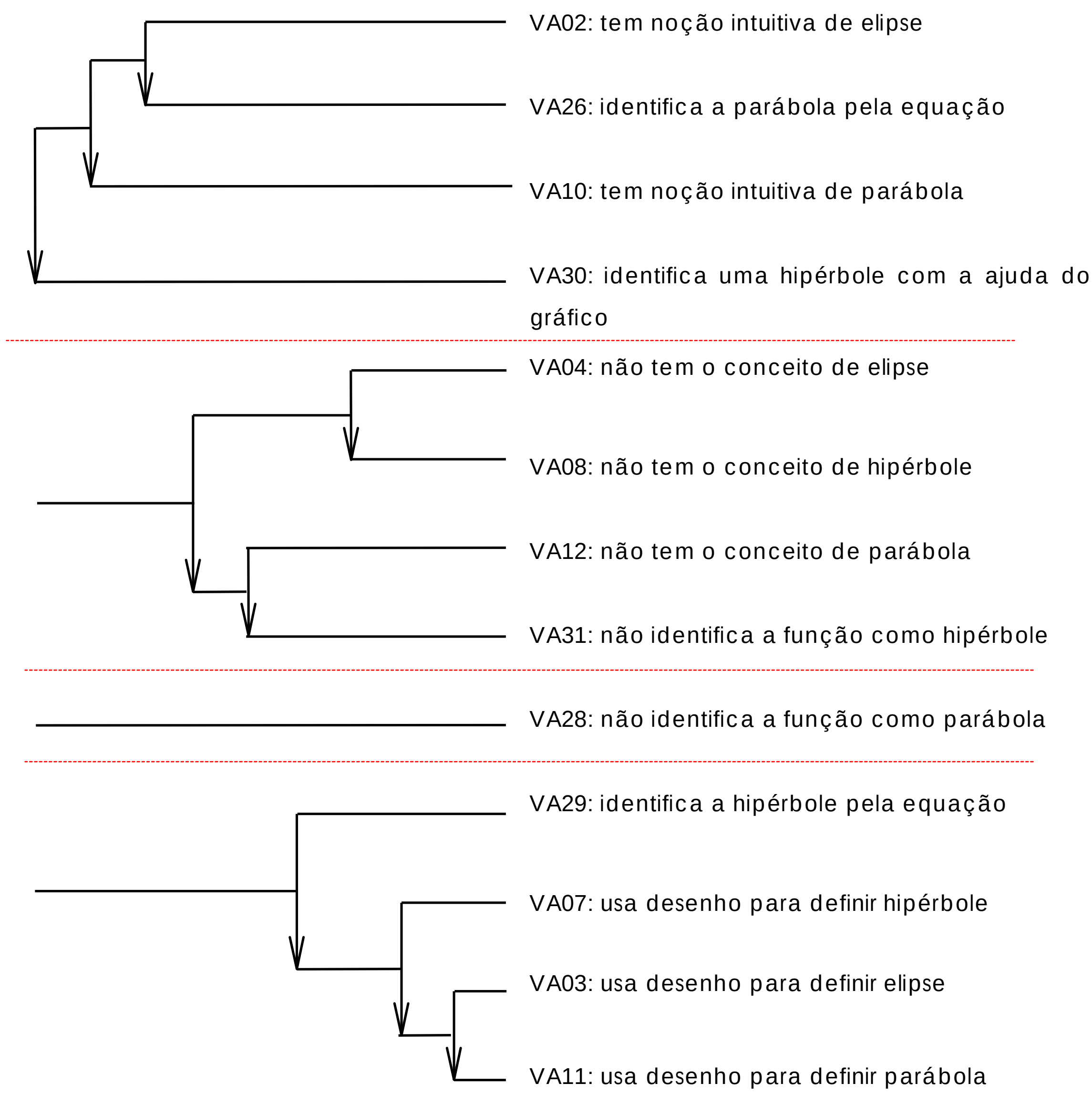


O ***Grupo Fracasso*** reune as variáveis VA16, VA20, VA23 e VA25. Observando a similaridade entre VA16 e VA20, vemos que o fato de não resolver a equação para saber quantas raízes ela tem pode levar o aluno ao erro. Vimos os métodos de resolução nos livros didáticos e nenhum deles é praticável sem que se conheça de antemão ao menos uma das raízes. O aluno, então, poderá ter dificuldade em usá-los. A similaridade entre as variáveis VA23 e VA25 não é muito forte, mas podemos perceber a falta de visão da necessidade de desenvolver uma equação para saber seu grau e não têm como saber disponível o entendimento de raízes reais de uma equação. A união destas hierarquias de similaridade nos leva a entender que o aluno que se encaixa nesta categoria não parece conseguir levar os conhecimentos adquiridos à ação.

O ***Grupo Sucesso*** engloba as variáveis VA19, VA21 e VA24. Esta similaridade não é muito forte, o que caracteriza uma pequena ocorrência destas variáveis ao mesmo tempo. O sucesso não é freqüente em nossos resultados, e é possível relacionarmos este fato à falta de abordagens específicas referentes a equações de terceiro grau nos livros didáticos.

Anexo VI – Hierarquia de Implicações (CHIC)

1. Cônicas



2. Cúbicas

O gráfico de hierarquia de implicações para equações cúbicas nos traz os mesmos dados que o gráfico implicativo.

<u>Anexo VII – Planos de Chadoc</u>

1. As variáveis

DEFE: Definição de Elipse

NOIE: Noção intuitiva de elipse

DESE: Usa desenho para definir elipse

NAOE: Não tem o conceito de elipse

DEFH: Definição de Hipérbole

DESH: Usa desenho para definir hipérbole

NAOH: Não tem o conceito de hipérbole

DEFP: Definição de Parábola

NOIP: Noção intuitiva de parábola

DESP: Usa desenho para definir parábola

NAOP: Não tem o conceito de parábola

IDEP: Identificação da Parábola

IDEQ: Identifica a parábola pela equação

NAID: Não identifica a parábola

IDEH: Identificação da Hipérbole

IDHI: Identifica a hipérbole pela equação

IDGR: Identifica a hipérbole pelo gráfico

NOHI: Não identifica a hipérbole.

REEQ: Resolve Equação de Terceiro Grau

FAEV: Colocando fator em evidência

FAME: Coloca fator em evidência de maneira errada

NARE: Não resolve a equação

NAOR: Não Resolve a Equação

NUCO: Número de raízes corretamente

NUIN: Número de raízes incorreto

RESO: Resolve a equação

RARE: Número de raízes reais

NDUA: Não pode Ter duas

DUAS: Pode Ter duas

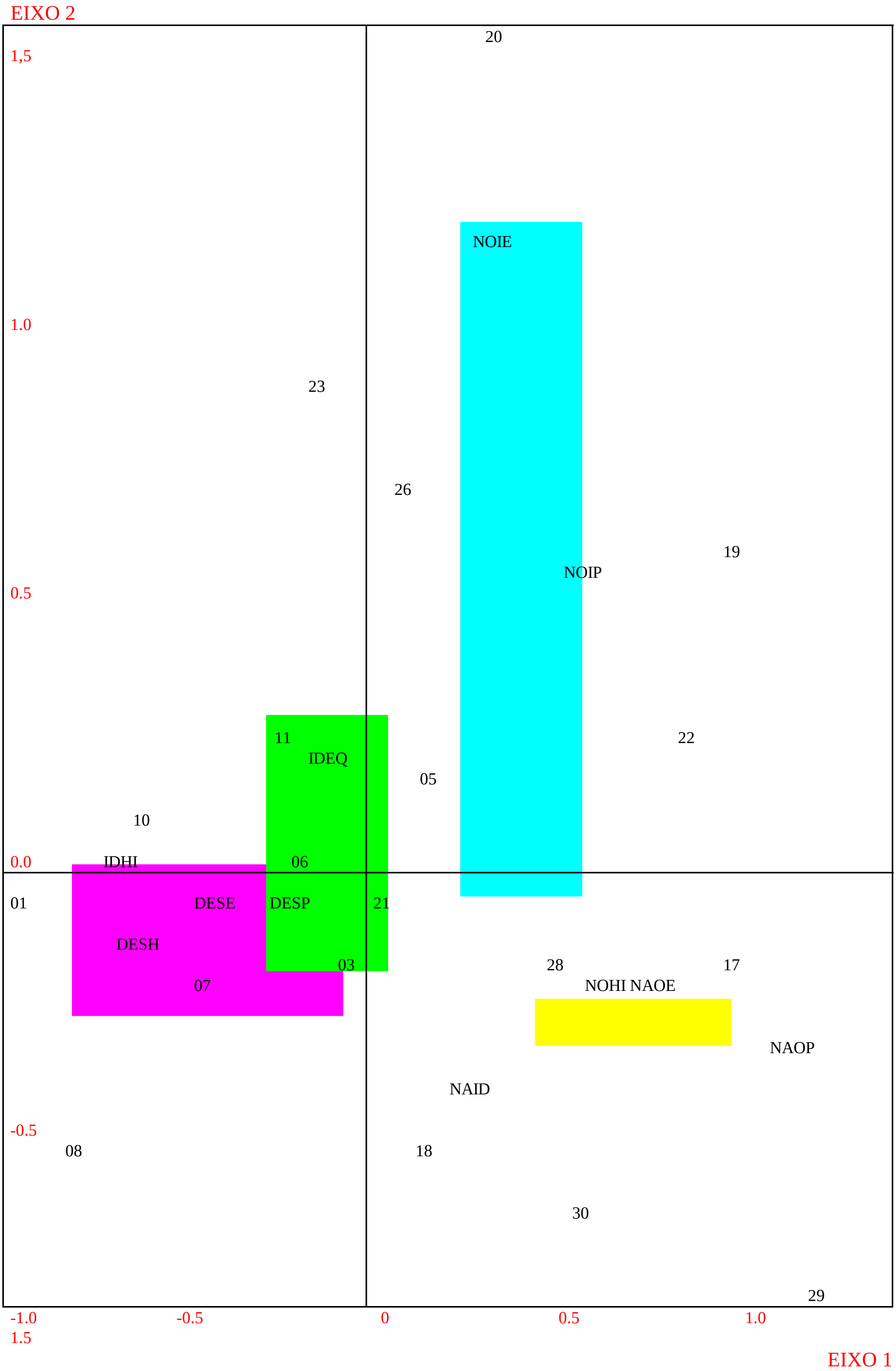
NSEI: Não sabe se pode ou não Ter duas

IDEQ: Identifica a Equação

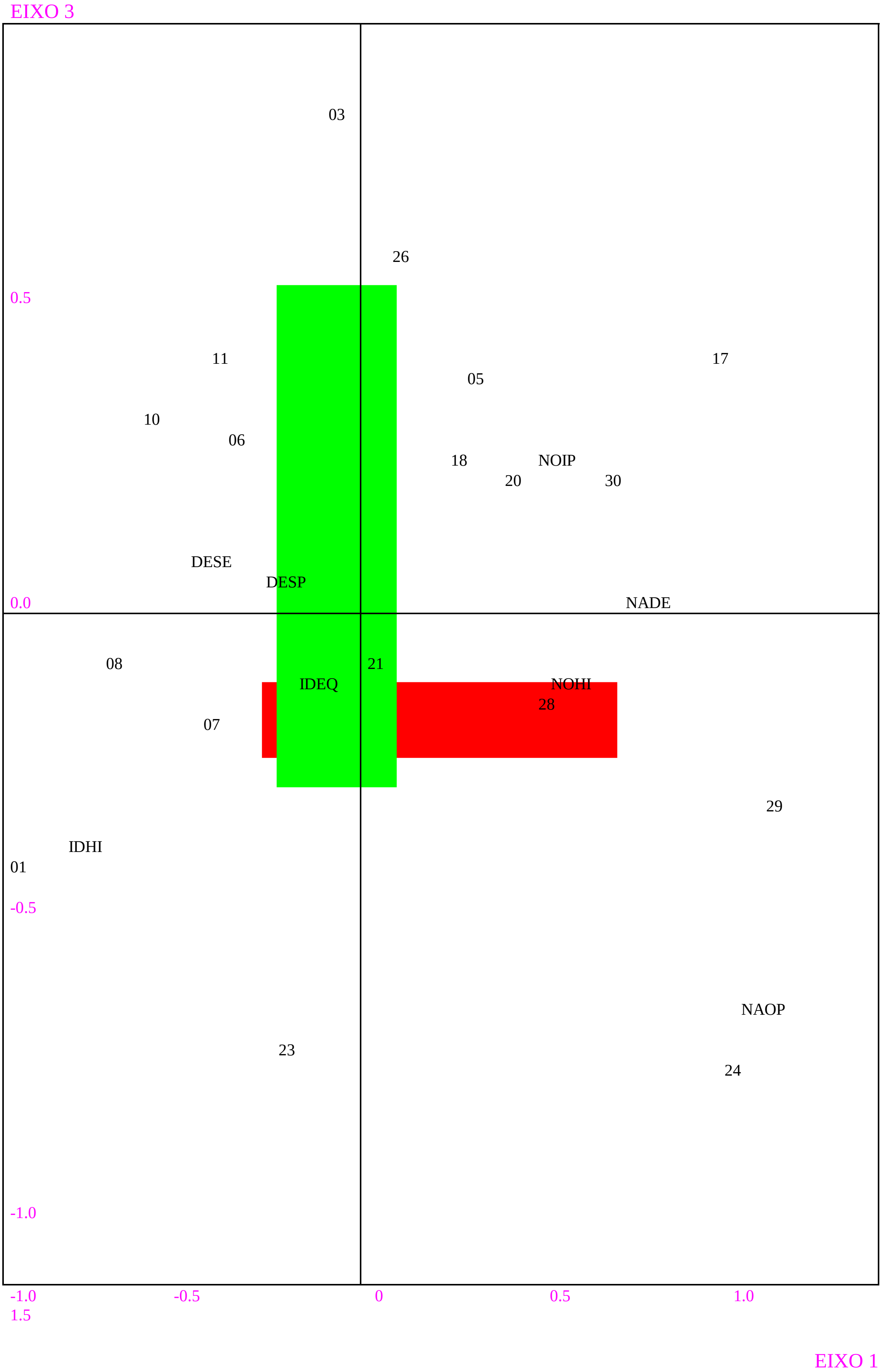
IDDI: Identifica a equação de terceiro grau escrita de maneira não usual

NIDE: Não identifica a equação de terceiro grau escrita de maneira não usual

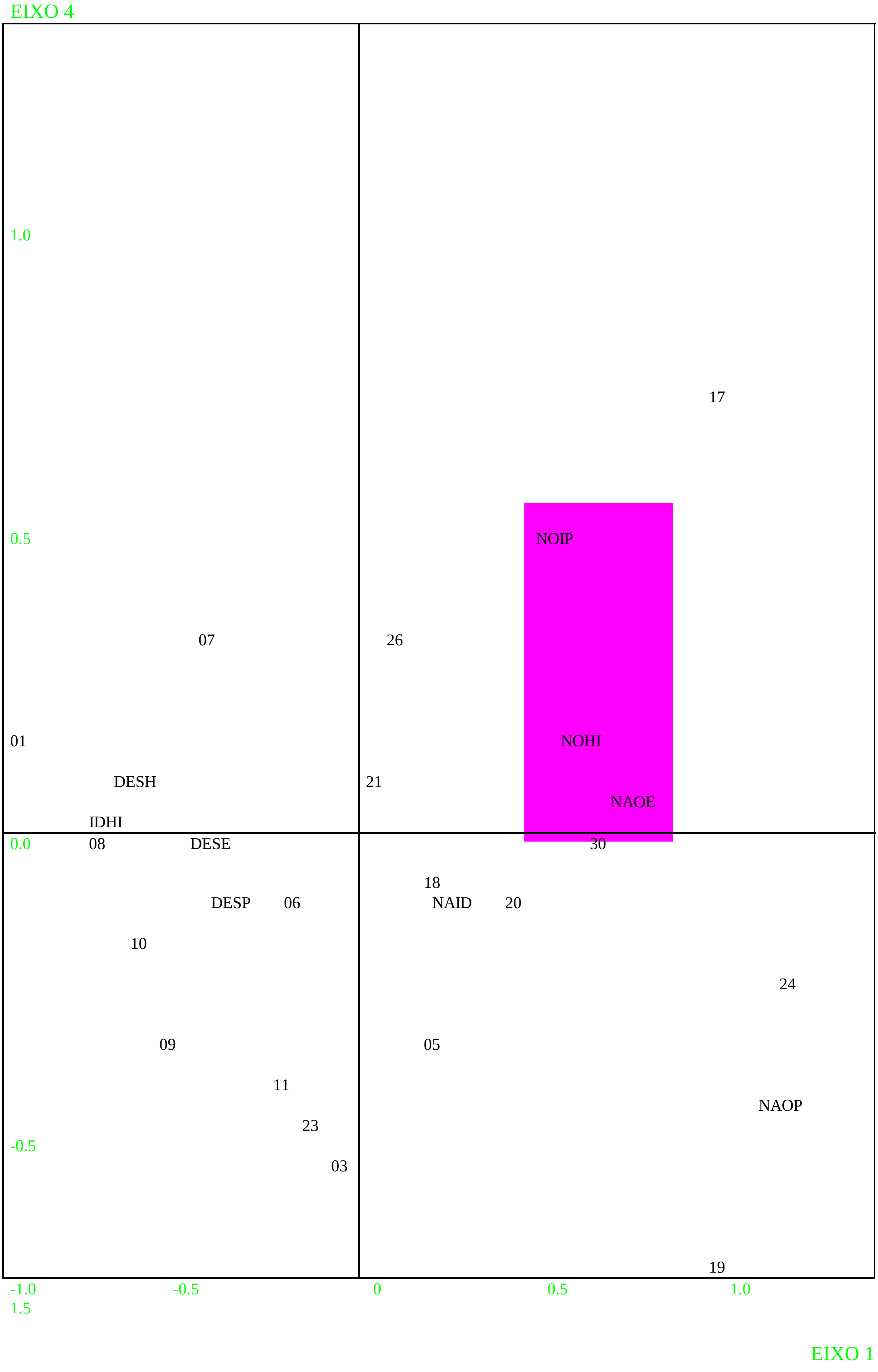
Cônicas - Eixo 1 X Eixo 2



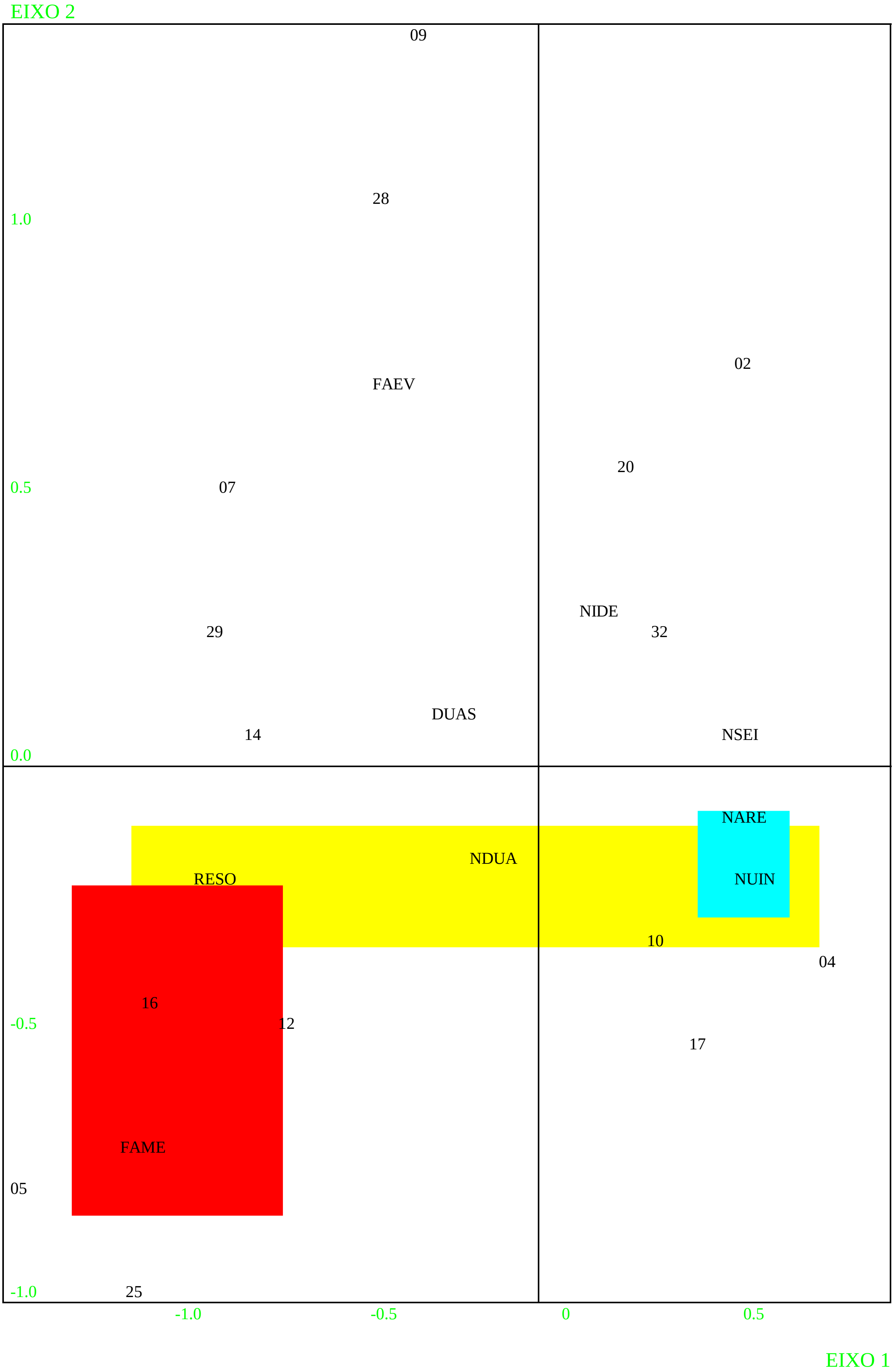
Cônicas - Eixo 1 X Eixo 3



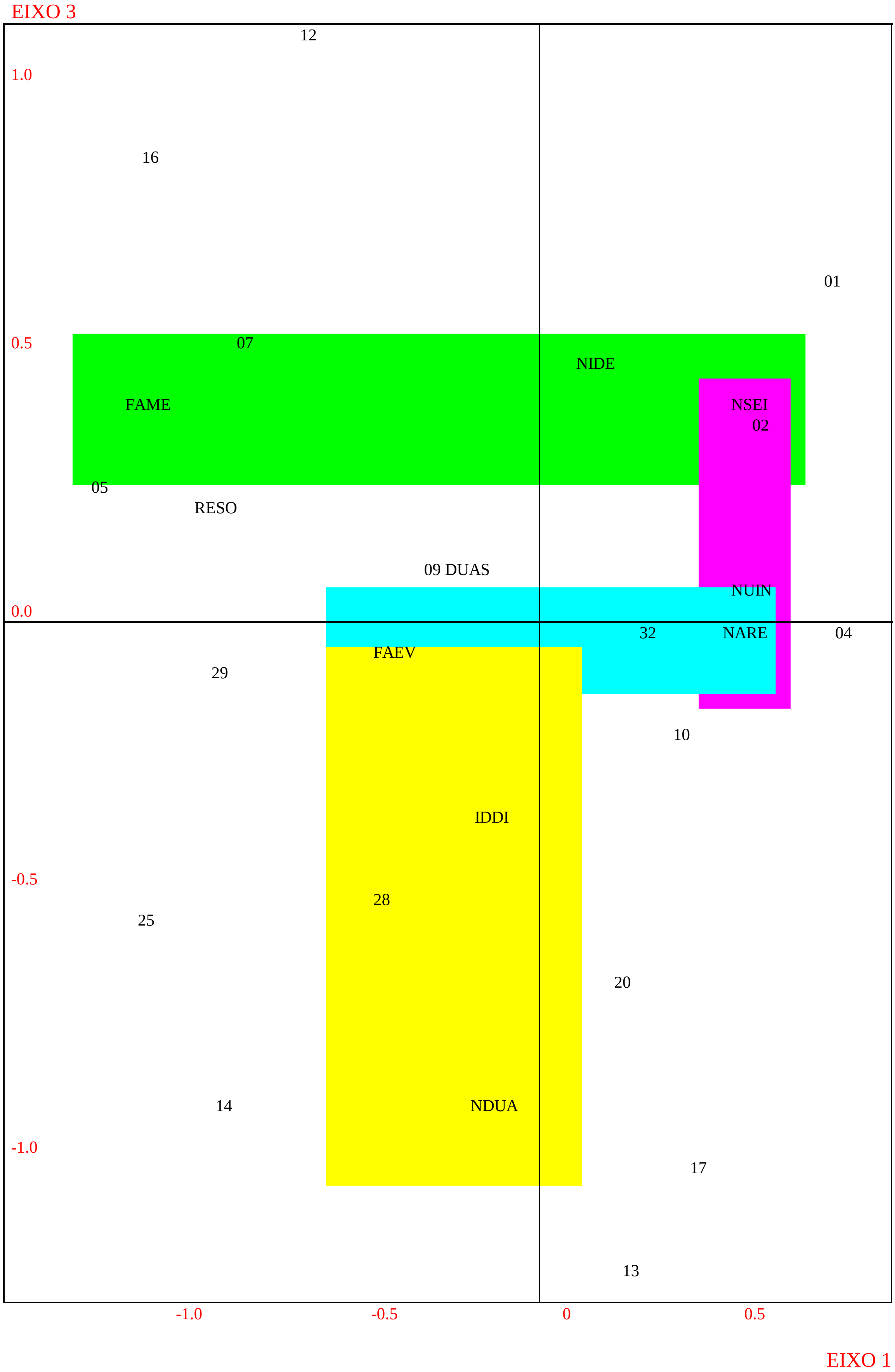
Cônicas - Eixo 1 X Eixo 4



Cúbicas - Eixo 1 X Eixo 2



Cúbicas - Eixo 1 X Eixo 3



Cúbicas - Eixo 1 X Eixo 4