Irma Verri Bastian

O TEOREMA DE PITÁGORAS

Mestrado em Educação Matemática

PUC-SP

2000

Irma Verri Bastian

O TEOREMA DE PITÁGORAS

Dissertação apresentada como exigência parcial para obtenção do título de MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA à Comissão Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, sob orientação do Professor Doutor Saddo Ag Almouloud

PUC-SP

2000

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: ____ **Local e Data:** ______________

BANCA EXAMINADORA

RESUMO

O presente trabalho focaliza o ensino-aprendizagem do Teorema de Pitágoras por meio de uma abordagem que visa enfatizar, inicialmente, o caráter necessário e suficiente do Teorema, para chegar, posteriormente, à forma da igualdade pitagórica.

O estudo histórico e epistemológico levou, num segundo momento, a uma análise mais apurada do objeto matemático em questão. Após examinar como os livros didáticos lidam com uma parte da transposição didática do Teorema, fez-se o confronto dessas abordagens com as propostas curriculares, especialmente os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs).

A segunda fase do trabalho trata da elaboração e aplicação de uma seqüência didática, tendo como público-alvo alunos de 8ª série. A referida seqüência compõe-se de duas partes: a primeira voltada para a abordagem do Teorema e a segunda para aplicações do mesmo em problemas.

Com essa experimentação foi possível constatar a vantagem do enfoque adotado em relação ao usualmente encontrado nos livros didáticos.

ABSTRACT

This paper focusses on the teaching-learning of the Pythagoras's Theorem through an approach that aims to emphasize, initially, the necessary and sufficient character of the Theorem to get, subsequently, to the form of the Pythagorean equality.

The historical and epistemological study led, at a second moment, to a more refined analysis of the mathematical object in question. After examining how the textbooks deal with a part of the didactic transposition of the Theorem, these approaches were confronted with the curricular proposals, especially the National Curricular Parameters (PCNs).

The second phase of the paper consists in the elaboration and application of a didactic sequence, having eighth-grade students as a target audience. The sequence referred to is composed of two parts: the first one concerning the approach of the Theorem and the second, the applications of the latter on problems.

This experimentation made it possible to establish the advantage of the approach adopted over the one commonly found in textbooks.

AGRADECIMENTOS

Ao professor-doutor Saddo Ag Almouloud, pela orientação dedicada e amiga, pelo incentivo e apoio constantes.

Aos professores-doutores da Banca Examinadora, Benedito Antonio da Silva, Lilian Nasser e Tânia Maria Mendonça Campos, pela atenção e sugestões.

À coordenação, professores, colegas do mestrado em Educação Matemática da PUC-SP, funcionários, bem como bibliotecárias, pelo convívio, apoio e compreensão.

Ao colega Ronaldo P. Saraiva, pela disponibilidade em ajudar e aplicação do questionário em Santos.

À direção, coordenação, professores, especialmente Fussae, João e Tereza Cristina, e funcionários dos colégios Conde José Vicente de Azevedo, Afonso Pena e Antonio Alcântara Machado, pela oportunidade da experimentação, e aos alunos que dela participaram.

Ao professor-doutor Pedro A. Ruiz, jornalista, pela dedicada revisão dos textos e editoração.

À doutora Brigitte van Eyll, médica, e doutor Siegfried J. Wehr, psicólogo, pela sustentação nos momentos críticos.

Aos amigos, pelo apoio constante. À amiga Setsuko, pelo incentivo e por me convencer a ingressar no mestrado.

A meus familiares, pelo amor expresso de várias formas: meu marido, Willy, pela paciência, compreensão, cooperação e apoio irrestrito; minha filha, Andrea, e meu genro, Pedro, pela paciência e boa vontade, auxiliando na digitação do trabalho e na construção das figuras. A meu filho, Marcello, e minha futura nora, Marcia, pelo carinho e solidariedade. À minha mãe, Cassia, pela importante presença. À minha neta, Sylvia, pela esperança no futuro.

A todos que, de algum modo, contribuíram para a concretização deste trabalho.

A Deus, por permitir que eu esteja agradecendo.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO **1**

CAPÍTULO I – PROBLEMÁTICA E METODOLOGIA **3**

Problemática 3

Metodologia 11

CAPÍTULO II – ESTUDO HISTÓRICO E EPISTEMOLÓGICO **13**

CAPÍTULO III – O OBJETO MATEMÁTICO **19**

Sobre a importância do Teorema de Pitágoras 19

Análise do ponto de vista matemático e didático de algumas demonstrações do Teorema de Pitágoras 22

Algumas aplicações do Teorema de Pitágoras 60

Alguns problemas não convencionais envolvendo o Teorema de Pitágoras 63

Sobre ternas pitagóricas 68

CAPÍTULO IV – ESTUDO DO TEOREMA DE PITÁGORAS NO ENSINO **71**

Análise de livros didáticos, comparação com Propostas Curriculares e Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) 71

Questionário 84

Análise a priori do questionário 84

Aplicação do questionário 91

Análise a posteriori do questionário por meio de histogramas de barras e do Software CHIC 92

CAPÍTULO V – SEQÜÊNCIA DIDÁTICA **108**

Análise a priori das atividades, aplicação da seqüência didática, análise a posteriori e discussão dos resultados 110

Teste de avaliação 165

CAPÍTULO VI – CONCLUSÕES **179**

BIBLIOGRAFIA **184**

ANEXOS .... **I**

INTRODUÇÃO

No decorrer de muitos anos de magistério, no ensino de Matemática para o colegial, atualmente denominado nível médio, observamos a grande dificuldade dos alunos no que se refere à aplicação do Teorema de Pitágoras como *ferramenta* tanto na resolução de problemas, como na aprendizagem de outros conceitos. Qual seria a causa dessa dificuldade?

No momento da escolha do tema para nosso primeiro trabalho de Didática em pós-graduação, a questão ressurgiu em nossa mente e decidimos iniciar um estudo horizontal sobre o Teorema, isto é, averiguar as possíveis utilizações em Geometria, Geometria Analítica e Álgebra, no âmbito do nível médio. Entretanto, à medida que tomávamos conhecimento de trabalhos, livros e pesquisas sobre o assunto, estas notadamente francesas, nosso horizonte se ampliou e percebemos se tratar de um vasto campo, compreendendo múltiplos aspectos. Poderíamos focalizar a parte histórica e epistemológica, dada a importância do Teorema de Pitágoras na discussão dos "incomensuráveis"; ou o objeto matemático possuidor de quase 400 demonstrações; ou ainda um aspecto didático, da análise de erros mais freqüentes cometidos pelos alunos. Ao iniciar o estudo dos trabalhos da pesquisadora Virginia Padilla sobre Análise Cognitiva e de Raymond Duval sobre Registros de Representação, nosso interesse se voltou para a aplicação desses resultados em outras áreas do conhecimento e almejamos, por meio deste trabalho, poder chegar à resposta, pelo menos de algumas, de nossas indagações.

O objetivo é testar a seqüência didática construída em alunos que ainda não tenham conhecimento do Teorema de Pitágoras e verificar até que ponto é possível, com ela, fazer com que o ensino-aprendizagem desse tópico ganhe mais significado para o estudante.

Após um capítulo dedicado ao Estudo Histórico e Epistemológico, nossa atenção se voltou para a vasta gama de demonstrações existentes para o Teorema. Efetuamos, a seguir, um estudo abrangendo a análise de livros didáticos, de Propostas Curriculares do Estado de São Paulo e dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs). Aplicamos também um questionário diagnóstico, tendo como público-alvo alunos da 1ª série do nível médio (1º colegial), com o intuito de investigar-lhes as concepções sobre o Teorema de Pitágoras.

Com base nos princípios da didática francesa em Matemática, em pesquisas sobre o tema e em pesquisas no campo da Psicologia Cognitiva, interpretamos os resultados obtidos no teste diagnóstico, estabelecemos nossa problemática de pesquisa e construímos a seqüência didática.

A comparação entre as análises a priori e a posteriori da seqüência didática e a aplicação de um teste final avaliatório, acreditamos, permitiram decidir até que ponto nossos objetivos foram ou não atingidos.

CAPÍTULO I: PROBLEMÁTICA E METODOLOGIA

Problemática

Dentre as pesquisas francesas sobre a aplicação do Teorema de Pitágoras, destaca-se a de Annie Berté (1995), relacionando o ensino-aprendizagem do tópico e as "diferentes ordens de apresentação das primeiras noções de geometria métrica no ensino secundário". A autora faz um levantamento diagnóstico identificando os erros mais freqüentes apresentados por alunos franceses na utilização do Teorema de Pitágoras. Os erros citados são os seguintes:

1) utilização do teorema para calcular o terceiro lado de um triângulo não retângulo;

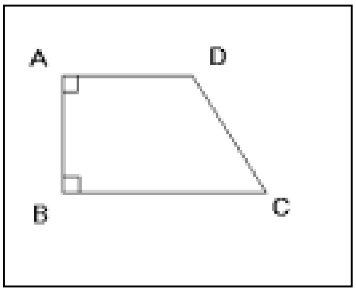
2) sendo c o comprimento da hipotenusa e a e b catetos, $c = \sqrt{a^2 + b^2} = a + b$, sem perceberem que essa conclusão contradiz a condição de existência de triângulo;

3) ao calcular um dos catetos, alguns alunos escrevem que o quadrado desse lado é igual à soma dos quadrados da hipotenusa e do outro cateto;

4) os alunos escrevem essa relação corretamente (item 3), mas justificam dizendo que aplicaram o "recíproco" do Teorema;

5) na verificação para decidir se um triângulo é ou não retângulo, muitos alunos e mesmo alguns docentes (segundo Berté) afirmam ter aplicado o recíproco quando concluem que, se a relação não é verificada, o triângulo não é retângulo;

6) em classe do *3ème* (alunos com aproximadamente 14 anos, o correspondente a nossa 8ª série do ensino fundamental), foi proposto o seguinte exercício: "Dados AD, AB e BC, calcular DC". Erro encontrado: segundo o Teorema de Pitágoras, $DC^2 = AD^2 + AB^2 + BC^2$.



Berté (1998, p. 119) questiona: "É um mau emprego da analogia? Ou o aluno não 'viu' o triângulo retângulo porque a projeção de D não figurava no desenho (...)?"

A seguir Berté acrescenta: “Mas, no fundo, se o aluno produziu isso, é porque ele não está engajado na questão (...). Não é o resultado da ausência de problematização?” Além de apontar os erros mais freqüentes observados na França relativos à aplicação do Teorema de Pitágoras, sugere alternativas para a construção de uma Engenharia Didática abrangendo o referido tema. Ela afirma que ordens de apresentação oriundas da filogênese (ordens acadêmicas resultantes da História e da cultura) não são compatíveis com a problemática dos alunos (ontogênese).

Para conjeturar a existência da relação pitagórica, a pesquisadora sugere que “os alunos deveriam escolher ternas de números satisfazendo a condição de existência de triângulo (‘inégalité triangulaire’) e tentar traçar triângulos retângulos cujos lados tenham por medidas essas ternas” (idem, p. 115). Assim, eles encontrariam vários triângulos, alguns retângulos e outros não, e “poderiam perceber facilmente a impossibilidade de uma escolha arbitrária” (ibidem). Examinar os dados mínimos, sobre lados e ângulos, para obter triângulos isométricos poderia ser outro caminho para problematizar o Teorema de Pitágoras.

Quanto à forma da relação pitagórica, Berté critica o uso de puzzles (quebra-cabeças), do modo como aparecem nos manuais franceses, e a organização de tabelas, em cujas colunas sejam solicitados os cálculos da “soma dos quadrados dos lados do ângulo reto” e do “quadrado da hipotenusa”. A pesquisadora propõe que, apesar de a duplicação do quadrado ser uma situação real para iniciar o ensino do Teorema de Pitágoras, a mesma poderia ser pensada após a institucionalização do Teorema.

Na opinião de Berté, a ordem mais compatível e esboçada pela instituição seria: mediatriz e simetria; determinação de uma circunferência por três pontos; casos de igualdade de triângulos quaisquer e retângulos; posições relativas de duas circunferências; raízes quadradas; áreas; diagonal do quadrado; Teorema de Pitágoras (direto); recíproco do Teorema de Pitágoras; e teorema geral sobre o triângulo. Pondera ainda que, nessa ordem, a consistência matemática seria insuficiente devido ao desaparecimento, nos programas franceses, dos casos de isometria de triângulos, do item sobre posições relativas de duas circunferências e das raízes quadradas. A ordem deveria incluir uma introdução à translação, rotação e simetria ortogonal.

Após comentar a “escolha atual de admitir a condição de existência de triângulo e demonstrar, a partir desta ou do Teorema de Pitágoras, que o segmento perpendicular é mais curto que o oblíquo”, Berté (apud, 1985, p. 116) cita Coquin-Viennot: “Há uma complexidade a priori que se fundamenta nas matemáticas e uma complexidade a posteriori a partir dos resultados dos alunos!”

No questionário que será oportunamente apresentado neste trabalho visando investigar as concepções dos alunos sobre o Teorema de Pitágoras, procurou-se detectar se alguns dos erros apontados por Berté seriam cometidos também por alunos brasileiros. Fato que realmente ocorreu e será comentado no Capítulo IV, referente ao Estudo do Teorema de Pitágoras no Ensino.

Como se pode inferir das ponderações apresentadas, Berté, no estudo, ressalta os entraves relativos aos encadeamentos das situações e à defasagem entre as diferentes ordens. Para explicar as possíveis causas dos erros enumerados, Berté analisa o ambiente matemático com base na transposição didática. Poder-se-ia, entretanto, pensar também numa relação entre os erros e alguns fenômenos estudados em Psicologia Cognitiva por Duval (1988 e 1995) e por Padilla (1992).

Segundo Duval (1995), as atividades cognitivas envolvidas na aprendizagem da Matemática requerem a utilização de sistemas de expressão e de representação que vão além da linguagem natural e das imagens. No caso da Geometria, destacam-se as figuras geométricas, os enunciados em linguagem corrente, as representações em perspectiva e as notações simbólicas. Na atividade matemática, é usual e freqüente a passagem de um sistema de representação para outro, como, por exemplo, de enunciado para figura, ou a mobilização simultânea de diferentes sistemas de representação durante a resolução de um problema.

A passagem de um registro para outro envolve o que se denomina *coordenação entre os diferentes registros.* Uma das dificuldades encontradas por muitos alunos nesse processo tem origem nos fenômenos de *não congruência,* pois para o pensamento é mais espontâneo seguir a *congruência semântica.*

De acordo com Duval (1995, p. 45), a conversão das representações semióticas constitui para a maioria dos alunos uma atividade cognitiva nem simples, nem espontânea. Duas representações pertencentes, respectivamente, a dois registros diferentes podem ser colocadas em correspondência associativa entre as unidades significantes elementares constitutivas de cada um dos registros. Desse modo, é possível determinar se elas são ou não congruentes. Existe congruência quando os três critérios seguintes são verificados:

a) a possibilidade de uma correspondência semântica entre os elementos significantes, isto é, a cada unidade significante simples de uma das representações pode ser associada uma unidade significante elementar;

b) a unicidade semântica terminal, isto é, a associação para cada unidade significativa da representação de partida é única;

c) a ordem de apreensão no arranjo das unidades em cada uma das representações se conserva.

Exemplo de congruência: “Um número menor que outro” converte-se em $x < y$.

Duval distingue quatro formas de apreensão, isto é, de interpretação para as figuras geométricas: perceptiva, discursiva, operatória e seqüencial. A última não oferece interesse para este trabalho, pois se refere a tarefas de construção de figuras, que têm como objetivo a reprodução de uma figura dada.

A apreensão perceptiva é imediata e automática. A figura mostra objetos que se destacam independentemente de qualquer enunciado. Ao contrário do que ocorre com as representações por meio de gráficos cartesianos, as figuras geométricas não constituem um registro de tratamento autônomo. Em outras palavras, as propriedades de uma figura dependem do que é enunciado como hipótese. “Não há figura ‘sem legenda’ ” (idem, p. 189). Acontece freqüentemente que uma mesma figura, dependendo do enunciado das hipóteses, pode representar problemas completamente diferentes. A apreensão perceptiva deve, portanto, estar subordinada à apreensão discursiva, para levar a uma resolução correta do problema.

A apreensão discursiva desempenha um papel de neutralização da apreensão perceptiva, pois a figura pode tornar-se uma armadilha, acarretando falsas conclusões. A grande dificuldade dos alunos está essencialmente na defasagem entre apreensão perceptiva e uma interpretação comandada por hipóteses.

A apreensão operatória está centrada nas possíveis modificações de uma *figura de partida*. Quando um problema é proposto, há as hipóteses dadas e a questão a resolver. Com base nos dados do problema é possível construir uma figura, com ou sem instrumento. No caso de ela ser também dada, é chamada figura de partida. A apreensão operatória vai permitir “ver” na figura o caminho de solução ou soluções do problema. Ou, dito de outra maneira, uma apreensão operatória é solicitada cada vez que se espera da figura que ela realize uma função heurística, ou seja, uma função intuitiva.

Como já foi citado anteriormente, a apreensão operatória consiste na modificação de uma figura de partida, que pode ser realizada tanto materialmente como mentalmente.

Distinguem-se três tipos de modificação:

- mereológica – decomposição da figura dada em partes, que se faz em função da relação entre parte e todo;
- ótica – consiste em aumentar, diminuir, deformar a figura inicial;
- posicional – corresponde a deslocamentos por rotação, translação etc.

A *reconfiguração* é um tipo de apreensão operatória. Consiste em repartir uma figura geométrica em várias subfiguras igualmente geométricas e agrupar, isto é, reorganizar todas ou algumas delas de modo a formar uma nova figura. Cada figura pode funcionar como suporte de várias reconfigurações. A maior parte das demonstrações do Teorema de Pitágoras corresponde a diferentes empregos da reconfiguração.

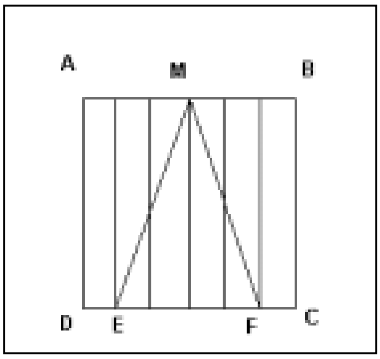
Segundo Padilla, salienta-se sempre o papel intuitivo que as figuras têm em Matemática, mas poucos estudos tratam dos procedimentos cognitivos que permitem às figuras desempenhar esse papel.

A reconfiguração pode ser espontânea e evidente ou difícil de enxergar na figura de partida, o que ocorre em função de fatores de complexidade ou visibilidade, que facilitam ou inibem essa operação na percepção de uma figura. Padilla distingue sete fatores:

- o fato de o fracionamento da figura em partes elementares ser dado no início ou necessitar ser encontrado (por meio de traçados suplementares auxiliares). Exemplo:

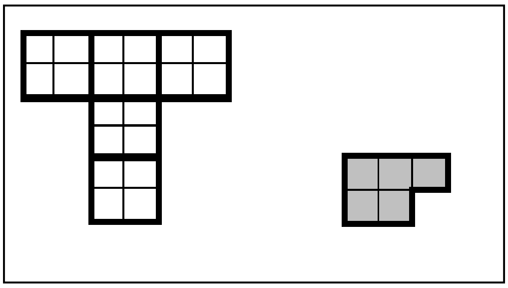
"ABCD é um quadrado dividido em seis retângulos iguais. Prove que as áreas AMED, MEF e MBCF são iguais".

Com o fracionamento não dado: "Fazer a partição de um quadrado em três partes iguais a partir do ponto médio M do lado AB". Devido à não congruência entre enunciado e figura, o caminho de resolução fica menos evidente;



- o fato de o reagrupamento das partes elementares formar uma reconfiguração convexa ou não convexa (mais difícil de ser destacada da figura). Exemplo:

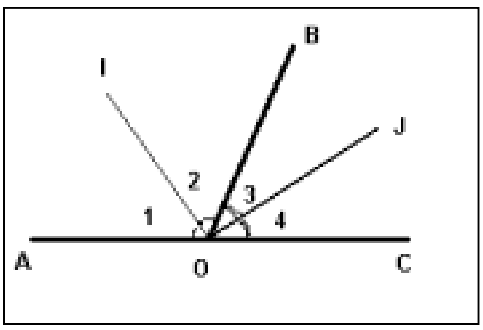
"Esta figura é formada de cinco quadrados. Pode-se decompô-la em quatro partes que se superpõem?" A não convexidade de cada peça torna menos visível a decomposição;



- o número de modificações posicionais (rotações e translações) efetuadas na subfigura;

- o fato de uma mesma parte elementar dever entrar simultaneamente em dois reagrupamentos intermediários a ser comparados, obstáculo do desdobramento dos objetos, constitui-se numa dificuldade para os alunos.

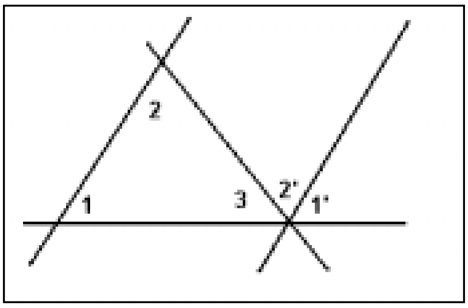
Exemplo: "Sendo IO e OJ respectivamente bissetrizes dos ângulos AÔB e BÔC, qual o valor do ângulo IÔJ? Por quê?"



O ângulo JÔB é parte comum aos ângulos BÔC e IÔJ; o ângulo IÔB é parte comum a AÔB e IÔJ. Esse desdobramento de objetos aumenta a complexidade do problema;

- o fato de o reagrupamento pertinente exigir a substituição das partes elementares. Exemplo:

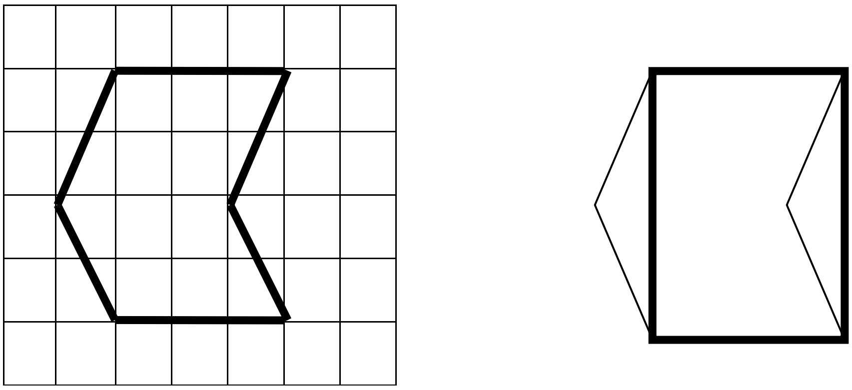
"Mostrar que a soma dos ângulos internos de um triângulo vale 180º".



Substituições necessárias:

2 = 2' e 1 = 1';

- o fato de a operação de reconfiguração levar em conta as características do contorno.

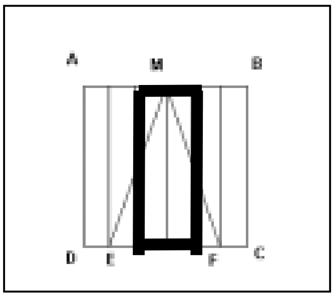


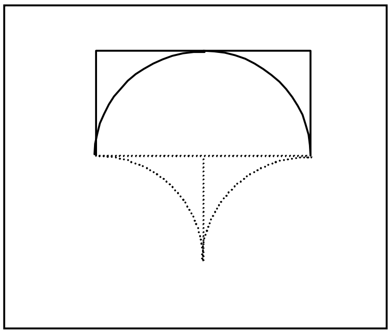
O contorno e o fundo quadriculado favorecem a visibilidade da reconfiguração;

- o fato de que todas as subfiguras devam ser removidas para o próprio interior da figura de partida ou, ao contrário, que algumas subfiguras devam sair do contorno da figura de partida. Exemplo:

Calcular a área da Figura 1 (triângulo EMF) e da Figura 2:

Fig. 1 Fig. 2





No primeiro caso, o deslocamento das subfiguras foi feito para o interior da figura de partida; no segundo, para o exterior. Em ambos, a reconfiguração resultou em retângulos, cujas áreas podem ser facilmente calculadas.

Assim, com base nas hipóteses de Berté, nas conclusões de Duval e Padilla, em pesquisas, nos resultados colhidos com o questionário e na análise de manuais didáticos, foi possível estabelecer as seguintes indagações:

- Os manuais preocupam-se em estabelecer a forma do Teorema de Pitágoras, omitindo a importância de seu caráter necessário e suficiente. Até que ponto esse tipo de abordagem interfere na compreensão do significado do Teorema pelos alunos e na sua posterior recontextualização como ferramenta na resolução de problemas?
- Os tipos de erros observados na aplicação do Teorema decorrem da abordagem e/ou se constituem numa dificuldade, de caráter mais geral, relativa à apreensão da figura?

Tendo em vistas essas questões, colocou-se como objetivo de trabalho a elaboração de uma seqüência didática em duas fases. Primeiramente, realização de atividades que permitissem ao aluno conjeturar a existência da relação pitagórica; seu caráter necessário/suficiente (se um triângulo é retângulo, então vale a igualdade pitagórica: “O quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos” – condição necessária –; e, reciprocamente, se vale a referida igualdade, o triângulo é retângulo – condição suficiente); e a forma dessa relação. Numa segunda etapa, realização de atividades de complexidade crescente fazendo-se “sucessivas aproximações” com o Teorema, com o intuito de desenvolver no aluno condições para o emprego adequado do Teorema como ferramenta.

Como ponto de partida foram assumidas as seguintes hipóteses:

- para o aluno perceber a importância do Teorema de Pitágoras é conveniente trabalhar previamente com a condição de existência de triângulo, a qual propiciará condições para o entendimento do caráter necessário e suficiente da igualdade pitagórica;

- alguns dos erros praticados pelos alunos quando da aplicação do Teorema de Pitágoras podem ser provocados por fatores próprios da interpretação de problemas geométricos concernentes à apreensão operatória, tais como: fenômeno da não congruência entre enunciado $\leftrightarrow$ figura ou figura $\leftrightarrow$ Teorema de Pitágoras; obstáculo do desdobramento de objetos; interferência da rotação do triângulo retângulo no reconhecimento das unidades elementares (catetos e hipotenusa); fundo reticulado mascarando o caminho de resolução do problema.

Metodologia

Seguindo alguns preceitos da Engenharia Didática, fundamentou-se a metodologia desta pesquisa.

> A engenharia didática, vista como metodologia de pesquisa, caracteriza-se em primeiro lugar por um esquema experimental baseado em “realizações didáticas” em classe, ou seja, sobre a concepção, a realização, a observação e a análise de seqüências de ensino (Artigue, 1988, pp. 285-286).

A metodologia da engenharia didática compreende quatro fases: análise prévia, construção e análise das situações didáticas da engenharia, experimentação, análise a posteriori e validação. A validação processa-se internamente, com base na “confrontação entre análise a priori e análise a posteriori” (idem, p. 286).

Assim, numa primeira fase de análises prévias, foi feito um estudo histórico e epistemológico do Teorema de Pitágoras, visando buscar sua gênese histórica e também identificar obstáculos epistemológicos. Investigou-se, ainda nessa etapa, o Teorema de Pitágoras como objeto matemático, o que permitiu melhor compreensão de sua importância e auxiliou na tomada de decisão no que se refere à demonstração usada na abordagem.

Efetuou-se, a seguir, a análise de livros didáticos nacionais de 7ª e 8ª série, em confronto com a proposta curricular vigente, tentando-se extrair uma eventual ligação entre as variáveis didáticas utilizadas nos mesmos e a ocorrência de obstáculos didáticos. É conveniente ressaltar que, para este trabalho, obstáculo não significa dificuldade, mas um conhecimento que produz respostas adaptadas num certo contexto e falsas fora dele. Conhecimento que resiste às contradições com as quais é confrontado e ao estabelecimento de um conhecimento novo.

Simultaneamente, realizou-se a pesquisa bibliográfica sobre o tema, a qual se constituiria na base teórica para o presente trabalho.

Para detectar as concepções dos alunos sobre o Teorema de Pitágoras, preparou-se um questionário que incluiu questões inspiradas em pesquisas francesas, publicadas pelo Instituto de Pesquisa sobre o Ensino de Matemática (Irem) de Orléans e de Poitiers.

Numa segunda fase, a partir dos resultados obtidos, definiu-se a estrutura da seqüência didática. A seguir, as atividades foram elaboradas e analisadas a priori, levando-se em conta as "variáveis didáticas" empregadas, a problemática e as hipóteses da pesquisa.

As fases seguintes compreendem a aplicação da seqüência didática, a análise a posteriori e validação. Entretanto, a descrição dessas fases, apesar de se iniciarem no próximo Capítulo, com o Estudo Histórico e Epistemológico, não pressupõe uma ordem hermética, pois, no que se refere à seqüência didática, é preciso explicitar, ocorreram "idas e vindas" com constantes retornos à fundamentação teórica e pesquisas sobre o tema.

CAPÍTULO II: ESTUDO HISTÓRICO E EPISTEMOLÓGICO

O estudo histórico e epistemológico teve como finalidade caracterizar o Teorema de Pitágoras em sua gênese histórica e identificar obstáculos. Conforme Artigue (1990, p. 244), a análise epistemológica permite evidenciar diferenças que ocorrem durante o que chama de “transposição didática”, distanciando o saber “sábio” do saber “ensinado”.

A relação pitagórica, segundo Boyer (1974), Eves (1995) e Singh (1998), havia sido testada, em determinados triângulos retângulos, por diversas culturas antigas, mas como afirmar sua veracidade para uma infinidade de triângulos retângulos? Isso só se tornou possível quando Pitágoras lançou mão de uma demonstração matemática. Essa idéia, de partir do particular/concreto e chegar ao geral/abstrato, foi utilizada neste trabalho, como será visto no capítulo referente à seqüência didática.

Pitágoras nasceu por volta de 572 a.C., na ilha egéia de Samos, na Grécia, não longe de Mileto, lugar do nascimento de Thales. Sua figura está envolta em mitos e lendas, uma vez que não existem relatos originais sobre sua vida e trabalhos. O grande mérito de Pitágoras teria sido a percepção de que os números existem independentemente do mundo concreto. Desse modo, ele poderia descobrir verdades que ficariam acima de preconceitos ou opiniões.

Parece ter viajado pelo Egito e Babilônia, possivelmente indo até a Índia. Observou que os egípcios e babilônios calculavam por meio de “receitas”, que produziam respostas corretas e eram passadas de geração a geração, sem que ninguém questionasse o porquê delas. Para ele era importante entender os números, suas relações e não meramente utilizá-los.

Durante as peregrinações, ele absorveu não só informação matemática e astronômica, como também muitas idéias religiosas. Ao retornar, encontrou Samos sob domínio persa e decidiu então emigrar para o porto marítimo de Crotona, uma colônia grega situada no sul da Itália. Lá, fundou a famosa escola pitagórica, que, além de ser um centro de estudos de filosofia, matemática e ciências naturais, era também uma irmandade estreitamente unida por rituais secretos.

A filosofia pitagórica baseava-se na suposição de que a causa última das várias características do homem e da matéria são os números inteiros. Isso levava ao estudo das propriedades dos números, juntamente com a Geometria, a Música e a Astronomia, que constituíam as artes básicas do programa pitagórico de estudos.

O lema da escola pitagórica, "Tudo é número", deixa transparecer uma forte afinidade com a Mesopotâmia. Segundo os historiadores, mesmo o Teorema, ao qual o nome de Pitágoras está tradicionalmente ligado, já era conhecido dos babilônios, havia mais de um milênio antes. Porém foram os pitagóricos os primeiros a demonstrá-lo, o que justificaria a denominação de "Teorema de Pitágoras", como ficou conhecido.

Uma tableta do período babilônio antigo, a classificada Plimpton 322, contém colunas de números inteiros relacionados com ternas pitagóricas (Boyer, 1974, p. 26).

A partir de dois inteiros p e q (com $p > q$) foram formadas ternas de números:

$$p^2 - q^2;\ 2pq;\ p^2 + q^2$$

Os três inteiros assim obtidos podem ser usados como dimensões do triângulo retângulo ABC, com:

$$a = p^2 - q^2\ ;\ b = 2pq;\ \text{ e }\ c = p^2 + q^2,\ \text{ em que } c^2 = a^2 + b^2.$$

Num texto babilônio antigo aparece um problema (Boyer, 1974, p. 29) em que uma escada ou prancha de comprimento 0,30 unidade está apoiada a uma parede. A questão é: quanto a extremidade inferior se afastará da parede se a superior escorregar para baixo uma distância de 0,06 unidade?

A resposta é encontrada corretamente usando-se o Teorema de Pitágoras.

Cerca de 1500 anos depois, problemas semelhantes ainda estavam sendo resolvidos no vale mesopotâmico: "Uma vara está apoiada a uma parede, se o topo escorrega 3 unidades quando a extremidade inferior se afasta da parede 9 unidades, qual o comprimento da vara?" A resposta é dada corretamente como sendo 15 unidades.

Atribui-se aos pitagóricos a regra para a obtenção das ternas pitagóricas, dada por: $\frac{m^2-1}{2}$; m; e $\frac{m^2+1}{2}$, em que m é um número inteiro ímpar.

Como essa regra se assemelha aos exemplos babilônicos, isso faz pensar que talvez ela não seja uma descoberta independente (Boyer, 1974, p. 42).

Para os agrimensores egípcios antigos, do tempo dos faraós, a construção de triângulos "3,4,5" com uma corda dividida em 12 partes iguais por 11 nós servia na demarcação de ângulos retos. Entretanto, não há comprovações de que eles conhecessem o Teorema de Pitágoras. Então surge para os estudiosos um problema de natureza teórica: como se pode mostrar, sem utilizar o Teorema, que o triângulo “3,4,5” é retângulo?

Em 1962, foi investigado o chamado papiro matemático Cairo (desenterrado em 1938), que data de 300 a.C. aproximadamente. Foram encontrados quarenta problemas de Matemática, nove dos quais se relacionavam exclusivamente com o Teorema de Pitágoras. Isso mostra que os egípcios dessa época não só sabiam que o triângulo “3,4,5” é retângulo, mas que também acontecia o mesmo para os triângulos “5,12,13” e “20,21,29”.

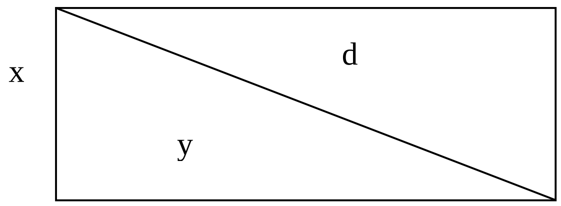
Eis três problemas encontrados no papiro matemático de Cairo (Eves, 1995, p. 87):

1. Uma escada de 10 cúbitos está com os pés a 6 cúbitos da parede. Que distância a escada alcança?

2. Um retângulo de área 60 cúbitos quadrados tem diagonal de 13 cúbitos. Determine os lados do retângulo.

3. Um retângulo de área 60 cúbitos quadrados tem diagonal de 15 cúbitos. Determine os lados do retângulos.

A seguir, o método usado pelo escriba para resolver o item 2 e o 3. Designando os lados por x e y; a diagonal por d; e a área do retângulo por A, tem-se:



$x^2 + y^2 = d^2$ e $xy = A$

que fornecem:

$x^2 + 2xy + y^2 = d^2 + 2A$ e $x^2 - 2xy + y^2 = d^2 - 2A$, isto é:

$(x + y)^2 = d^2 + 2A$ e $(x - y)^2 = d^2 - 2A$

a) No problema 2, $d^2 + 2A$ e $d^2 - 2A$ são quadrados perfeitos e se podem encontrar imediatamente valores para $(x + y)$ e $(x - y)$.

b) No problema 3, $d^2 + 2A$ e $d^2 - 2A$ não são quadrados perfeitos e o escriba usa a fórmula de aproximação:

$\sqrt{a^2+b} \approx a+\frac{b}{2a}$ chegando-se a $\sqrt{345}=\sqrt{18^2+21} \approx 18+\frac{21}{36}=18+\frac{1}{2}+\frac{1}{12}$ e

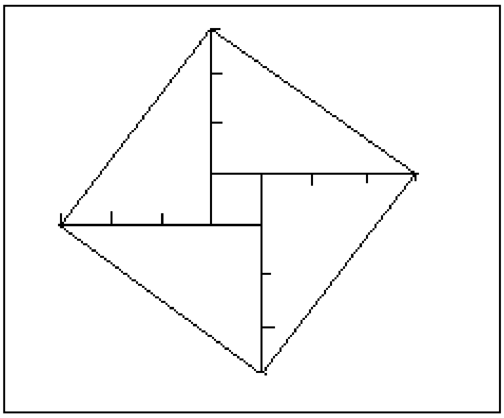
$\sqrt{105}=\sqrt{10^2+5} \approx 10+\frac{5}{20}=10+\frac{1}{4}$

Quanto aos documentos matemáticos da antiga China, não há unanimidade dos historiadores no que se refere às possíveis datas. O Chou Pei Suang Ching (1200 a.C. ou 300 a.C.) parece ser o mais antigo dos clássicos matemáticos. Esse tratado indica que na China, como também Heródoto dissera do Egito, a Geometria derivou da mensuração.

No Chou Pei há problemas sobre triângulos retângulos, alguns dos quais reaparecem mais tarde na Índia e na Europa. Um dos mais conhecidos é o do "bambu quebrado" (Boyer, 1974, p. 144):

"Há um bambu de 10 pés de altura cuja extremidade superior, ao ser quebrada, atinge o chão a 3 pés da haste. Achar a altura da quebra".

No tratado consta uma discussão do Teorema de Pitágoras, baseada na seguinte figura, porém sem nenhuma demonstração (Eves, 1995, p. 244).



A Índia antiga, como o Egito, tinha "estiradores de corda", os detentores das primitivas noções geométricas, adquiridas em conexão com o traçado dos templos e a construção de altares. Esses conhecimentos foram reunidos nos chamados Sulvasutras ou Regras de Corda ("Sulva" refere-se às cordas usadas nas medidas).

A mais conhecida das três versões da obra é de Apastamba, que data talvez da época de Pitágoras. Nela se encontram regras para a construção de ângulos retos por meio de ternas de cordas, cujos comprimentos formam tríadas pitagóricas como “3,4,5”; “5,12,13”; “8,15,17”; e “12,35,37” (Boyer, 1974, p. 151).

Não é improvável que houvesse influência mesopotâmica nos Sulvasutras. As regras, que aí aparecem, implicam no conhecimento da relação pitagórica, mas não se tem informação de que os hindus tivessem alguma idéia da natureza de sua demonstração.

Na idade Média (século XII), o matemático hindu Bhaskara publicou em seu tratado *Lilavati* o problema do “bambu quebrado”, utilizando para altura do bambu 32 côvados (ou cúbitos) e para a distância da extremidade caída até o pé da haste 16 côvados (Boyer, 1974, p. 162).

Também usando o Teorema de Pitágoras, há um outro problema: “Um pavão está sobre o topo de uma coluna em cuja base há um buraco de cobra. Vendo a cobra a uma distância da coluna igual a três vezes a altura da coluna, o pavão avançou em linha reta alcançando a cobra antes que ela chegasse a sua cova. Se o pavão e a cobra percorreram distâncias iguais, a quantos cúbitos da cova eles se encontraram?”

A demonstração de Bhaskara para o Teorema de Pitágoras é bastante conhecida e será apresentada posteriormente.

No livro I dos *Elementos* de Euclides de Alexandria (300 a.C.), a Proposição (47, I) é o teorema pitagórico, com uma demonstração atribuída universalmente ao próprio Euclides; e a Proposição final (48, I) é o recíproco desse teorema.

É possível que Pitágoras tenha dado uma demonstração do Teorema baseada na proporcionalidade das medidas dos lados de figuras semelhantes. Posteriormente, com a constatação de que nem todos os segmentos são necessariamente comensuráveis, essa prova perdeu sua validade. A descoberta da existência de números irracionais foi surpreendente e perturbadora para os pitagóricos, pois abalava sua filosofia, segundo a qual tudo dependia dos números inteiros.

A prova do Teorema dada por Euclides não utiliza as proporções, o que pode ter sido uma estratégia para evitar a questão da incomensurabilidade. As circunstâncias que desencadearam a primeira percepção desse obstáculo constituem tema bastante polêmico. Poderiam estar em conexão com a aplicação do Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo isósceles; com o cálculo da diagonal de um quadrado em função do lado ou com as diagonais de um pentágono.

No próximo capítulo, referente ao Objeto Matemático, Teorema de Pitágoras, serão apresentadas algumas demonstrações, dentre as centenas existentes, do Teorema.

CAPÍTULO III: <u>O OBJETO MATEMÁTICO</u>

Aqui se versará sobre a importância do Teorema de Pitágoras não somente sob o ponto de vista histórico, mas também como caso particular da lei dos cossenos. Além disso, será apresentada a análise do ponto de vista matemático e a análise didática de algumas demonstrações do mesmo, com o intuito de fundamentar a opção feita relativamente à demonstração utilizada na abordagem do tema.

Por outro lado, o uso do Teorema de Pitágoras, em tópicos de 7ª série, 8ª e subseqüentes, representa economia em termos de memorização de fórmulas, além de se constituir numa ferramenta eficaz para a resolução de muitos problemas envolvendo configurações e subfiguras. Em vista disso, serão apresentadas algumas aplicações do Teorema e exemplos ilustrativos de problemas não convencionais, nos quais ele pode ser utilizado.

Para finalizar, será exposto um interessante fato relativo às ternas pitagóricas, a partir do seguinte teorema: "Se m e n_são valores inteiros obedecendo às seguintes condições:

i) $m > n > 0$;

ii) m e n são primos entre si; e

iii) m e n não são ambos ímpares;

então as expressões $x = m^2 - n^2$; $y = 2mn$; e $z = m^2 + n^2$ fornecem todas as ternas pitagóricas reduzidas (os componentes não têm divisores comuns), e cada terna somente uma vez".

Sobre a importância do Teorema de Pitágoras

A relação pitagórica despertou interesse de muitos povos antigos, tais como babilônios, egípcios, gregos, hindus e chineses. Modernamente, parece ter servido de inspiração para um problema que desafiaria matemáticos durante 358 anos: o chamado Último Teorema de Fermat, segundo o qual "não existe solução inteira para a equação

$x^n + y^n = z^n$ na qual 'n' é natural maior que 2". A demonstração, de 1995, que constituiu um marco para a história da Matemática, é de autoria de Andrew Wiles (Singh, 1998).

Todavia, a importância do Teorema de Pitágoras, simples caso particular de um teorema mais geral, a lei dos cossenos, segundo Berté (1995, p.109), não se reduz a razões históricas nem à simplicidade de seu enunciado. Existe uma funcionalidade específica do Teorema, pois este caso particular pode ser demonstrado pela fórmula geral, mas é de tal forma poderoso que a partir dele é possível demonstrar sua generalização e seu recíproco.

Pela lei dos cossenos, dadas as medidas de dois lados de um triângulo qualquer e a medida do ângulo compreendido entre eles, é possível calcular a medida do terceiro lado. Isto significa que, desse modo, um triângulo qualquer fica determinado. Reciprocamente, a lei dos cossenos permite também calcular as medidas dos ângulos de um triângulo a partir das medidas dos lados, sendo suficiente que os números dados verifiquem a condição de existência de triângulo. Entretanto, dados dois lados de um triângulo qualquer e um ângulo não compreendido entre eles, isso não é suficiente para determiná-lo, a menos que o ângulo seja reto. O Teorema de Pitágoras permite, neste caso, encontrar o terceiro lado. Decorre então que um triângulo retângulo fica determinado pela hipotenusa e um dos catetos.

Berté prossegue utilizando uma "mudança de quadros" (Douady, 1984, p. 110), do quadro geométrico, das construções de triângulos com régua e compasso, para o quadro algébrico – discussão da intersecção de uma "circunferência com uma semi-reta ou com uma reta se o ângulo dado é reto".

Sejam a e b as medidas de dois lados de um triângulo, α a medida do ângulo oposto ao lado a $(0 < \alpha < 180^o)$ e x a medida do terceiro lado.

Pela lei dos cossenos, $a^2 = x^2 + b^2 - 2bx\cos\alpha$

A equação $x^2 - 2bx\cos\alpha + b^2 - a^2 = 0$ tem como discriminante:

$\Delta = 4b^2 \cos^2 \alpha - 4(b^2 - a^2)$, isto é, $\Delta = 4b^2 \cos^2 \alpha - 4b^2 + 4a^2$

como $\cos^2 \alpha = 1 - \text{sen}^2 \alpha$ então, $\Delta = 4b^2 - 4 b^2 \text{sen}^2 \alpha - 4b^2 + 4a^2$

$\Delta = 4(a^2 - b^2\text{sen}^2 \alpha)$ $\Delta = 4(a + b\text{sen}\alpha)(a - b\text{sen}\alpha)$

Sendo $0 < \alpha < 180^o$, tem-se $\text{sen}\alpha > 0$

Logo o sinal de Δ é dado pelo sinal de $a - b\text{sen}\alpha$. Desse modo:

I) $\Delta < 0 \Leftrightarrow a - b\text{sen}\alpha < 0 \Leftrightarrow b\text{sen}\alpha > a$ (não há solução)

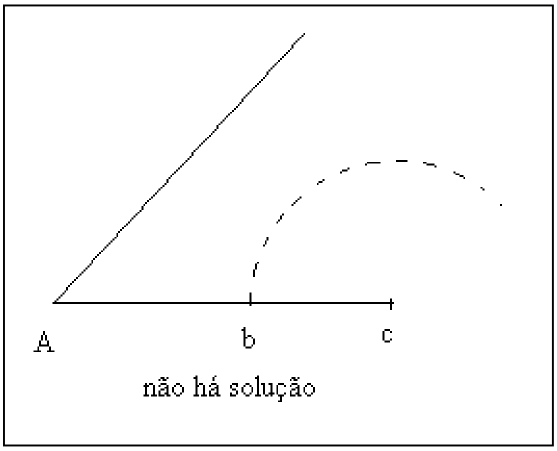
II) $\Delta > 0 \Leftrightarrow$ i) $b\text{sen}\alpha < a < b$ (duas soluções positivas, dois triângulos)

ii) $b\text{sen}\alpha < b < a$ (duas soluções de sinais contrários, triângulo AB’C)

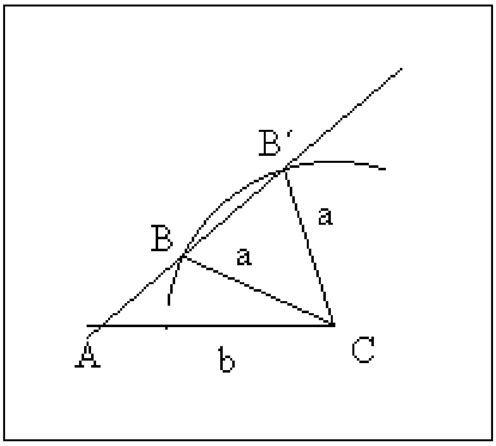
iii) $\text{sen}\alpha = 1$ (duas soluções opostas, triângulos ABC e AB’C)

III) $\Delta = 0 \Leftrightarrow b\text{sen}\alpha = a$ (uma única solução dupla)

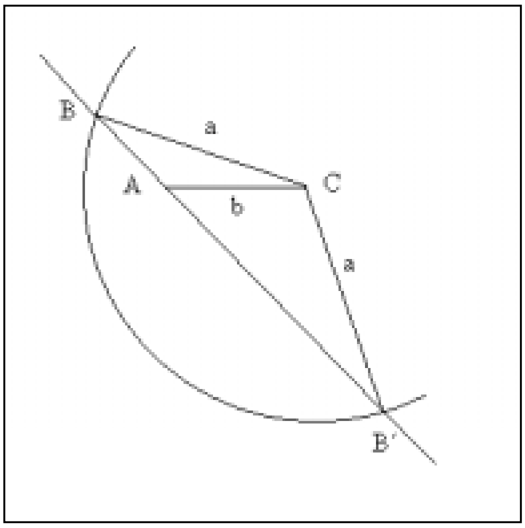
I)



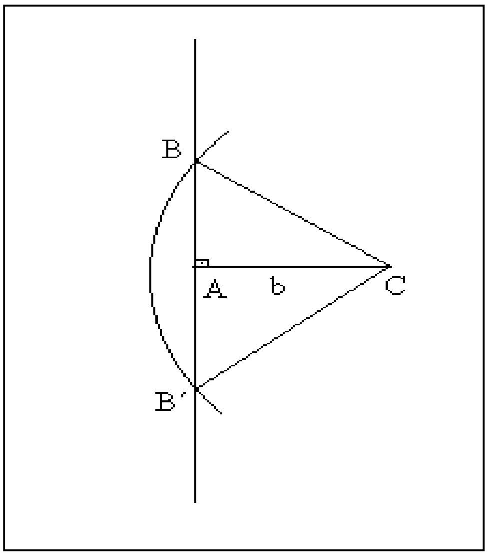
IIi)



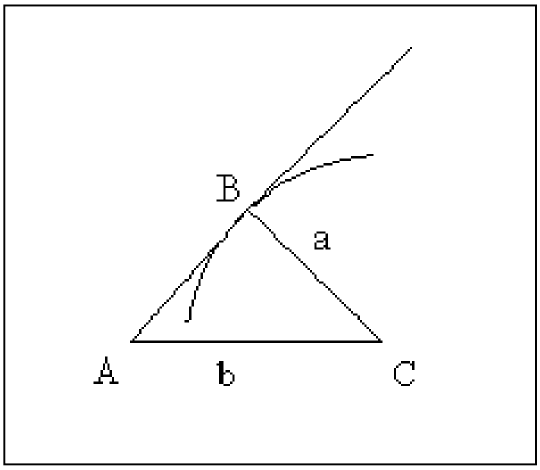
IIii)



IIiii)



III)



Como pondera Annie Berté, o Teorema de Pitágoras não é nada evidente. Portanto, a simples apresentação de sua fórmula não teria significado para o aluno; seria algo mais para "memorizar". Por outro lado, fazer a verificação utilizando somente puzzles e colocando os resultados para a classe pode dar ao professor a falsa impressão de que ele proporcionou aos alunos uma chance para "agir". Mas, na verdade, isso seria uma "institucionalização" prematura.

Essas observações foram levadas em consideração, no presente trabalho, no momento da elaboração da seqüência didática.

Análise do ponto de vista matemático e Análise do ponto de vista didático de algumas demonstrações do Teorema de Pitágoras

As demonstrações do Teorema, conhecido como a 47ª Proposição de Euclides e também como o "teorema do carpinteiro", podem ser classificadas em quatro grandes grupos:

- algébricas – baseadas nas relações métricas nos triângulos retângulos;
- geométricas – baseadas em comparações de áreas;.

- vetoriais – baseadas em operações com vetores e empregando o conceito de direção;
- dinâmicas – baseadas em massa e velocidade.

Segundo Loomis (1972, p. viii.), o número de demonstrações algébricas é ilimitado, o mesmo ocorrendo no campo geométrico, e existem apenas dez tipos de figura geométrica, dos quais uma demonstração pode ser deduzida. Qualquer que seja ela, a classificação vai depender do critério escolhido.

Para Padilla (1992, p. 12) as demonstrações podem ser reagrupadas em três tipos, segundo o tratamento matemático empregado:

- em que as áreas dos quadriláteros permanecem invariantes;
- por transposição de elementos;
- algébricas.

Na verdade, os cerca de 400 tipos de demonstração do Teorema são caracterizados por meio dos recursos matemáticos utilizados, tais como: igualdade das áreas dos quadriláteros (método de Euclides), figuras geométricas nas quais as áreas se mantêm (método geométrico), princípio da igualdade da decomposição, princípio da igualdade do completamento, operações algébricas, relações de semelhança, métodos vetoriais, métodos da Geometria Analítica etc.

Serão apresentadas a seguir algumas demonstrações, visando ilustrar o emprego desses diferentes métodos. Os critérios utilizados na seleção das mesmas foram a importância histórica e a viabilidade de uso em sala de aula.

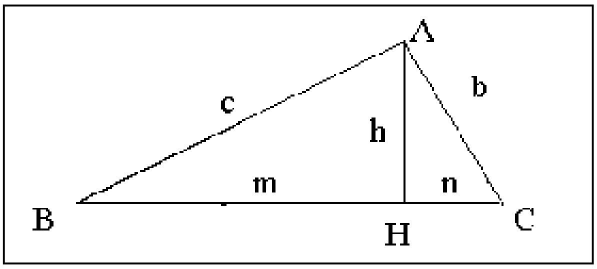
Na análise didática será incluída, sempre que se fizer interessante, uma análise cognitiva baseada e/ou inspirada em Padilla (1992), pois a maior parte das demonstrações, mesmo as consideradas algébricas, fundamenta-se na aplicação da operação de reconfiguração.

Com os comentários efetuados após algumas demonstrações não se tem a pretensão de sugerir caminhos. Eles atestam as reflexões pessoais que antecederam as escolhas feitas para a abordagem.

Demonstrações utilizando-se semelhança de triângulos, razão de projeção ortogonal ou cosseno

<u>Demonstração 1</u> (a mais conhecida; do tipo algébrico, usando-se semelhança de triângulos)

<u>Análise do ponto de vista matemático</u>



Seja ABC um triângulo retângulo em A

$\overline{AH}$ é a altura relativa à hipotenusa.

("Δ" indica triângulo e "~" indica semelhante)

I) $\Delta HBA \sim \Delta ABC \Rightarrow \dfrac{HB}{AB} = \dfrac{HA}{AC} = \dfrac{BA}{BC}$

ou $\dfrac{m}{c} = \dfrac{h}{b} = \dfrac{c}{a}$

$\therefore\ c^2 = am$ e $ah = bc$

II) $\Delta HBA \sim \Delta HAC \Rightarrow \dfrac{HB}{HA} = \dfrac{HA}{HC} = \dfrac{BA}{AC}$

ou $\dfrac{m}{h} = \dfrac{h}{n} = \dfrac{a}{b}$

$\therefore\ h^2 = mn$

III) $\Delta HAC \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{HA}{AB} = \frac{HC}{AC} = \frac{AC}{BC}$

ou $\frac{h}{c} = \frac{n}{b} = \frac{b}{a}$

$\therefore\ b^2 = an$

IV) De $c^2 = am$ e $b^2 = na$ decorre que

$b^2 + c^2 = an + am \Rightarrow$ $b^2 + c^2 = a(n + m)$

mas como $m + n = a$ então $b^2 + c^2 = a^2$

Análise do ponto de vista didático

Demonstração que aparece na totalidade dos manuais didáticos examinados e usa a semelhança de triângulos como ferramenta.

Como conhecimentos disponíveis ela pressupõe: semelhança de triângulos, propriedades das proporções, cálculo algébrico e projeção ortogonal.

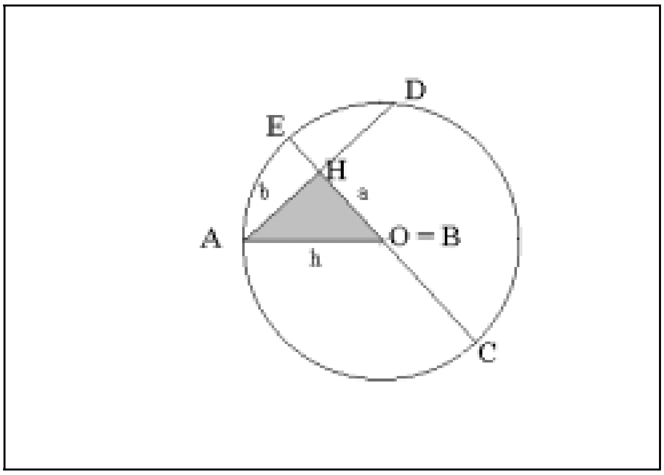
Quanto à análise cognitiva, convém observar que, apesar de essa demonstração utilizar comprimentos e não áreas, ela requer duas reconfigurações diferentes da figura base (itens I e II):

- o fracionamento da figura é dado, desde o início;
- as subfiguras são convexas (triângulos);
- cada reconfiguração exige dois desdobramentos de partes elementares, pois os triângulos HBA e HAC estão também no ABC;
- características de contorno favoráveis;
- não há substituição de partes elementares auxiliares;
- não há modificações posicionais;
- não há tratamentos auxiliares a efetuar.

A demonstração não é muito complexa, porém os itens (I) e (II) diminuem o grau de visibilidade para a aplicação da operação de reconfiguração intermediária.

<u>Demonstração 2</u> (atribuída a **W. Rupert,** 1900; do tipo algébrico, utilizando-se uma circunferência)

<u>Análise do ponto de vista matemático</u>



Seja o triângulo AHB retângulo em H.

Com centro em B e raio AB, traça-se a circunferência.

Pelo Teorema das Cordas: HE.HC = AH.HD

mas HE = h – a AH = b

HC = h + a HD = b

$\therefore$ (h – a) (h + a) = bb

$h^2 - a^2 = b^2$

$h^2 = a^2 + b^2$

<u>Análise do ponto de vista didático</u>

Esta demonstração poderia ser usada como exercício de aplicação do Teorema das Cordas, porém não como demonstração inicial do Teorema de Pitágoras. Seria ao mesmo tempo uma oportunidade para mudança do "ponto de vista", no que se refere ao Teorema de Pitágoras, ainda no "quadro geométrico", e também como uma escolha de variáveis, na utilização do Teorema das Cordas. Supondo o Teorema de Pitágoras já como conhecimento disponível, é interessante para o aluno perceber que se pode chegar a um mesmo resultado por métodos diferentes.

Como conhecimentos disponíveis ela exige: o Teorema das Cordas, operações com segmentos e cálculo algébrico.

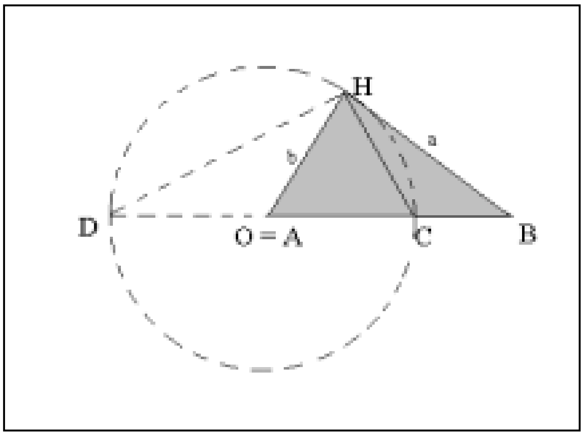
Quanto à análise cognitiva, dado o triângulo AHB, retângulo em H:

- são necessários tratamentos auxiliares, que consistem em traçar a circunferência de centro O = B e raio AB, o prolongamento de BH para obter os pontos E e C sobre a mesma e o prolongamento de AH a fim de obter o ponto D;
- há o obstáculo do desdobramento de objetos, pois o segmento AH é, simultaneamente, um lado do triângulo AHB e a corda HA; o mesmo ocorrendo com o segmento HB, o qual figura como cateto e como parte da corda HC;
- o reagrupamento pertinente das partes elementares $\overline{HE}, \overline{HO}, \overline{OC}, \overline{AH}, \overline{HD}$ forma uma subfigura convexa (dois pares de ângulos opostos pelo vértice);
- não há substituição de partes elementares;
- não há modificações posicionais.

O primeiro dos fatores mencionados e o obstáculo do desdobramento das partes elementares contribuem para o aumento do grau de complexidade para a aplicação da operação de reconfiguração, mas as características do contorno facilitam a visibilidade para o emprego do Teorema das Cordas.

<u>Demonstração 3</u> (do tipo algébrico, por meio do uso de uma circunferência)

<u>Análise do ponto de vista matemático</u>



Seja o triângulo AHB retângulo em H; AB = h. Com centro em A, traça-se a circunferência de raio AH=b. Tem-se: $\Delta BHC \sim \Delta BDH$ pois $m(B\widehat{H}C) = ½ (arcCH)$ e $m(B\widehat{D}H) = ½ (arcCH)$ então $\frac{BH}{BD} = \frac{BC}{BH} = \frac{HC}{DH}$

$$\therefore \frac{a}{h+b} = \frac{h-b}{a}$$

$$a^2 = h^2 - b^2 \quad \therefore \; h^2 = a^2 + b^2$$

Análise do ponto de vista didático

Como conhecimentos disponíveis dentre outros, pressupõe-se: ângulos na circunferência, semelhança de triângulos, cálculo algébrico e proporções.

A demonstração acima constitui uma oportunidade para reinvestir em tópicos de séries anteriores (como, por exemplo, propriedade do ângulo inscrito; propriedade do ângulo de segmento, isto é, ângulo tendo vértice na circunferência, um lado tangente e o outro secante à mesma; propriedades das proporções) e também um modo de construir o conhecimento. Segundo Piaget, o sujeito constrói o conhecimento por meio de inúmeras interações com o objeto, isto é, por meio de sucessivas aproximações com o objeto, nas suas várias atividades. "O conhecimento, na teoria de Piaget, nunca é um estado (...) é uma atividade. Pode ser visualizado como a estruturação do sujeito numa interação viva com o meio" (Furth, 1974, p. 38).

Dado o triângulo AHB, retângulo em H, por meio da análise cognitiva, observa-se:

- a demonstração exige traçados suplementares, tais como a circunferência de centro O = A e raio AH; o prolongamento de AB para determinação do ponto D sobre a mesma; e os segmentos HC e DH;

- o segmento HC é comum ao ângulo BHC e ao triângulo CHD; o segmento AB é comum ao triângulo AHB e ao ângulo BDH; o arco CH é determinado pelos ângulos inscritos BHC e BDH; o triângulo BHC é parte comum aos triângulos AHB e BHC, fatos que provocam o obstáculo do desdobramento das partes elementares;

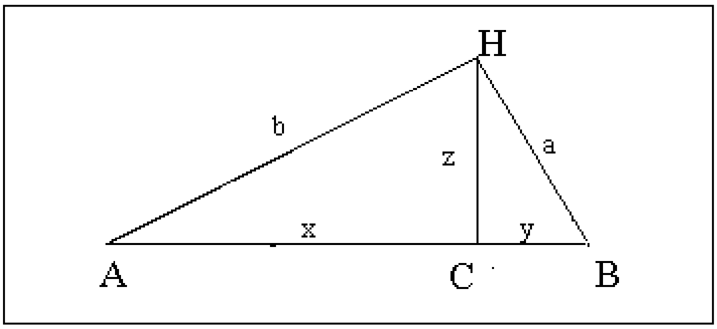
- os reagrupamentos pertinentes das partes elementares formam subfiguras convexas (segmentos, ângulos e triângulos);

- não há modificações posicionais.

Para visualizar a semelhança dos triângulos e os comprimentos dos lados BD = (h + b) e HC = (h − b) é preciso superar o obstáculo do desdobramento dos objetos, acima apontado, o que dificulta a visibilidade para a aplicação da operação de reconfiguração. O obstáculo e os tratamentos auxiliares a ser feitos aumentam o grau de complexidade da demonstração.

<u>Demonstração 4</u> (do tipo algébrico, por meio de razão entre áreas)

<u>Análise do ponto de vista matemático</u>



Seja $\overline{HC} \perp \overline{AB}$

Tem-se Δ ABH ~ ΔAHC ~ Δ HBC ⇒ $\dfrac{\frac{1}{2}(x+y)z}{h^2} = \dfrac{\frac{1}{2}(x.z)}{b^2} = \dfrac{\frac{1}{2}(yz)}{a^2}$

(pois "áreas de figuras semelhantes são proporcionais ao quadrado da razão de semelhança"), sendo:

AB = h	AC = x
HB = a	CB = y
HÁ = b	HC = z

Mas $\dfrac{\frac{1}{2}(x+y)z}{h^2} = \dfrac{\frac{1}{2}(xz)+\frac{1}{2}(yz)}{b^2+a^2}$

("A soma dos antecedentes está para a soma dos conseqüentes, assim como cada antecedente está para seu conseqüente" – propriedade das "proporções.")

Então, $\dfrac{\frac{1}{2}(x+y)z}{h^2} = \dfrac{\frac{1}{2}(x+y)z}{b^2+a^2}$

$\therefore\ h^2 = a^2 + b^2$

(do fato de os antecedentes serem iguais, conclui-se a igualdade dos conseqüentes).

Análise do ponto de vista didático

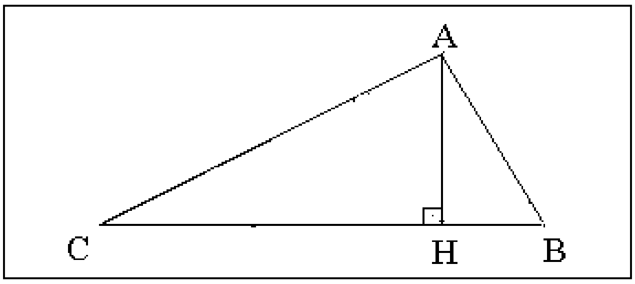
O objetivo principal, neste caso, seria reinvestir na propriedade da razão de áreas entre figuras semelhantes e também no tópico "proporções".

Sugestão: As demonstrações 2 e 3 apresentadas, caso fossem utilizadas em sala de aula, deveriam ser "transformadas" em atividades. A colocação em forma expositiva poderia ser monótona e desmotivadora para o aluno. No caso da demonstração 4, cada grupo, ou dupla de alunos, receberia a demonstração, sem os detalhes que estão entre parênteses. A atividade seria então discutir e justificar, com base nos conhecimentos disponíveis, passagem por passagem da demonstração.

Quanto à análise cognitiva, valem os comentários feitos para a demonstração 1 deste trabalho.

Demonstração 5 (do tipo algébrico, utilizando-se cosseno)

Análise do ponto de vista matemático



Usando os triângulos retângulos AHC e ABC tem-se: $\dfrac{CH}{CA} = \dfrac{CA}{CB} = \cos\hat{C}$

Nos triângulos retângulos AHB e ABC valem:

$$\frac{BH}{BA} = \frac{BA}{BC} = \cos \hat{B}$$

Então $(CA)^2 = CB.CH$ e $(BA)^2 = BC.BH$

logo $(AB)^2 + (AC)^2 = BC(BH + HC)$

$\therefore\ (AB)^2 + (AC)^2 = (BC)^2$

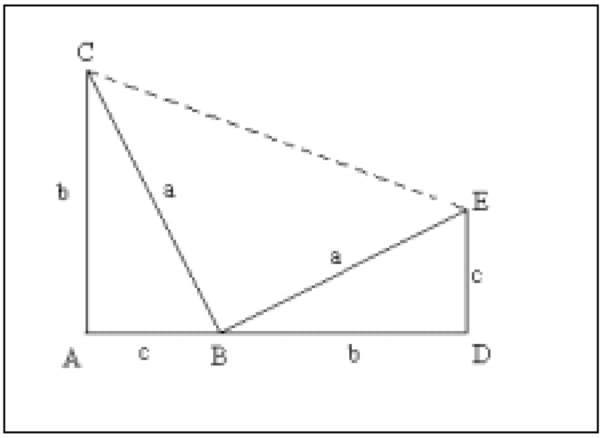
<u>Análise do ponto de vista didático</u>

Para esta demonstração, as relações trigonométricas no triângulo retângulo são, obviamente, imprescindíveis como conhecimento disponível, mas a semelhança de triângulos, no caso, não foi um conhecimento mobilizado. A análise cognitiva aponta características análogas às observadas na demonstração 1 deste trabalho.

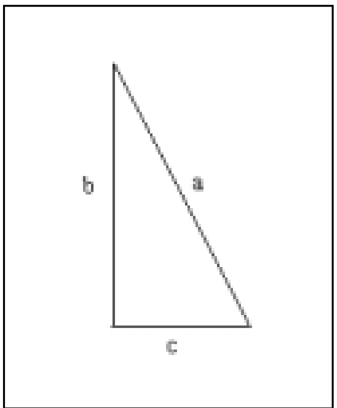
<u>Demonstração 6</u> (feita pelo presidente **Garfield** dos Estados Unidos; do tipo algébrico ou geométrico, por meio de comparação de áreas)

<u>Análise do ponto de vista matemático</u>

A área do trapézio retângulo de bases <u>b</u> e <u>c</u> e altura (b + c) é igual a $\frac{(c+b)(b+c)}{2}$



Por outro lado, a mesma área é também igual à soma das áreas de três triângulos retângulos:



$$\frac{bc}{2} + \frac{bc}{2} + \frac{a^2}{2}$$

Então $\dfrac{(b+c)^2}{2} = \dfrac{2bc}{2} + \dfrac{a^2}{2}$

i.é. $b^2 + 2bc + c^2 = 2bc + a^2$

$\therefore\ b^2 + c^2 = a^2$

Análise do ponto de vista didático

Seria importante que os alunos pensassem num modo de demonstrar que o triângulo CBE é também retângulo, o que decorre imediatamente do fato de a soma das medidas de $A\hat{B}C$, $C\hat{B}E$ e $E\hat{B}D$ ser igual a 180°.

Quanto à análise cognitiva, pode-se dizer que a demonstração é fundamentada em dois tipos de reconfiguração: um oriundo de uma apreensão “analítica”, e outro “global” (Padilla, 1992, p. 35). Este privilegia a figura total, exterior, isto é, o trapézio; enquanto no primeiro a figura é vista como uma reunião de três triângulos retângulos.

- o fracionamento da figura em partes elementares é dado no início;
- o reagrupamento pertinente dos dois triângulos retângulos forma uma subfigura não convexa, constituída pelos dois triângulos congruentes. Encontrar a reconfiguração adequada, entre todas as possíveis, não é muito evidente;
- o único tratamento auxiliar necessário, para formar a figura de Garfield, é o traçado do segmento CE;
- uma modificação posicional da subfigura chave, ou seja, do triângulo retângulo, deve ser feita – uma rotação;
- as características do contorno são favoráveis. É fácil perceber que se trata de um trapézio;
- não há desdobramento das partes elementares;
- não há substituição das partes elementares.

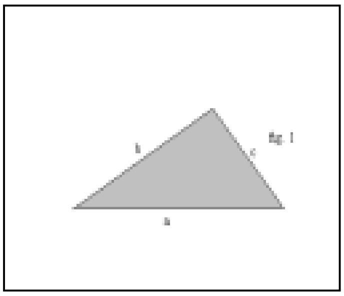
A demonstração possui uma reconfiguração bastante visível, depois de formada a figura de Garfield, com baixo grau de complexidade. Pelo fato de se apoiar em cálculo de áreas, é uma excelente oportunidade para reinvestir nesse tópico e também em cálculo algébrico.

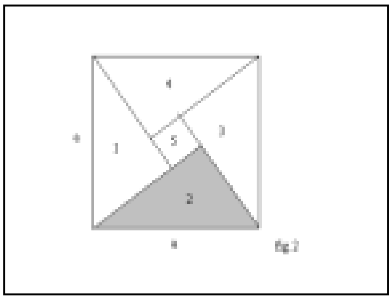
As demonstrações do tipo geométrico têm como base a comparação de áreas, por meio de superposição de figuras.

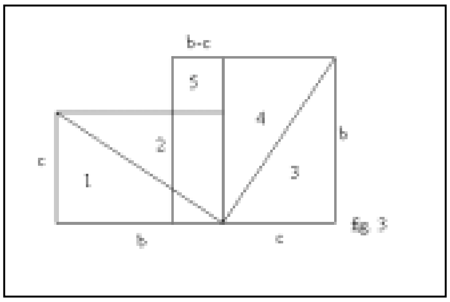
<u>Demonstração 7 – Bhaskara, séc. XII d.C.</u>

Segundo os historiadores, Bhaskara desenhou apenas a figura com o comentário "Veja!" Entretanto, não fica muito claro se "a figura" compreende o quadrado inicial (Fig. 2) e também a reconfiguração (Fig. 3). Se somente a Fig. 2 for considerada, a demonstração pode ser pensada como sendo do tipo algébrico, mas a inclusão da Fig. 3, a qual é uma reconfiguração da Fig. 2, leva a crer numa demonstração do tipo geométrico.

Para Loomis E. (1972), o lacônico comentário seria justificado pela tendência, comum naquela época, de manter em segredo a descoberta de verdades relativas a algumas proposições.







<u>Análise do ponto de vista matemático</u>

Esta demonstração pode ser considerada do tipo geométrico ou do tipo algébrico, dependendo da estratégia utilizada, conforme comentário anterior.

O quadrado sobre a hipotenusa (Fig. 2) é decomposto em quatro triângulos, cada um deles congruente ao triângulo dado, mais um quadrado cuja medida de lado é b – c.

Dispondo as partes como mostra a Fig. 3 obtém-se dois quadrados justapostos.

Mas área da Fig.2 = área da Fig.3

Como área da Fig.2 = a^2 área da Fig.3 = $b^2 + c^2$

Então: $a^2 = b^2 + c^2$

Algebricamente, para a Fig. 2:

$4\dfrac{bc}{2} + (b - c)^2 = a^2$ então: $2bc + b^2 - 2bc + c^2 = a^2$

$\therefore\ b^2 + c^2 = a^2$

Análise do ponto de vista didático

Essa verificação, em sala de aula, pode ser feita por meio de uma atividade:

- oito triângulos congruentes feitos de cartolina;
- dois quadrados de lados (b – c).

Após ser formada a figura 2, a demonstração baseia-se em dois tipos diferentes de apreensão da figura: analítica e global. A apreensão analítica privilegia as diferentes partes elementares; a figura é vista como a reunião das cinco peças. A apreensão global privilegia a figura total – a figura como um quadrado de lado “a”.

Considerando-se apenas dada a Fig. 2, observa-se que:

- o fracionamento da figura em partes elementares é dado no início;
- não há tratamento auxiliar a ser efetuado;
- para formar a Fig. 2 são necessárias quatro modificações da subfigura-chave (o triângulo): uma translação e três rotações, de modo que as hipotenusas se tornem lados do quadrado;
- o reagrupamento pertinente dos quatro triângulos forma uma subfigura não convexa;
- as características do contorno favorecem “ver” o pequeno quadrado (5; Fig.2);
- a dificuldade consiste em perceber que os lados do quadrado (5) são partes dos segmentos que formam os lados dos triângulos. Para observar esse detalhe é preciso superar o obstáculo do desdobramento dos objetos, porém, como se trata de um quadrado, o desdobramento de um dos segmentos é suficiente para fazer a demonstração.

Trata-se, portanto, de uma demonstração, cuja reconfiguração intermediária é bastante visível e pouco complexa, se efetuada algebricamente, por meio das figuras 1 e 2. Porém, se a opção for comparação de áreas, por meio da Fig. 3, surgem fatores que aumentam o grau de complexidade e comprometem a visibilidade para a aplicação da operação de reconfiguração intermediária, os quais serão analisados a seguir:

- para formar a Fig.2, como já foi visto, são necessárias uma translação e três rotações. A reconfiguração para obter a Fig. 3 requer mais cinco modificações posicionais (quatro para os triângulos e uma para o quadrado central);

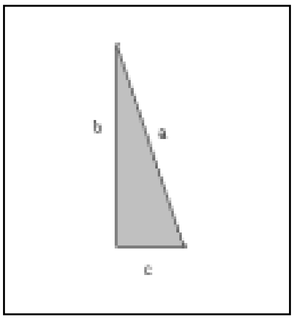
- é necessário um traçado suplementar para obter os quadrados contíguos de lados respectivamente c e b;

- a Fig.3 é formada por um reagrupamento não convexo de três figuras convexas: os dois retângulos, cada um formado por dois triângulos, e o quadrado. Não é evidente a reconfiguração conveniente, dentre todas as possíveis, o que provoca diminuição do grau de visibilidade da aplicação da operação de reconfiguração intermediária;

- o obstáculo do desdobramento é ocasionado pelo pequeno retângulo (parte do retângulo horizontal), cujo lado maior é comum aos dois quadrados contíguos, fato que pode dificultar avaliar os comprimentos dos lados dos quadrados.

O grande número de modificações posicionais, o tratamento auxiliar efetuado (traçados suplementares), o obstáculo do desdobramento dos objetos mais a dificuldade em encontrar a reconfiguração conveniente são fatores que aumentam o grau de complexidade e prejudicam a visibilidade para a operação de reconfiguração.

__Demonstração 8 - hindu__ (apresentada em alguns manuais didáticos mais recentes. Geométrica, por transposição de elementos, por meio de equivalência)



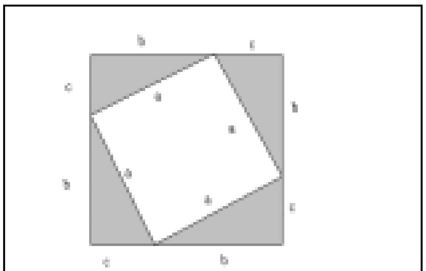


fig 1

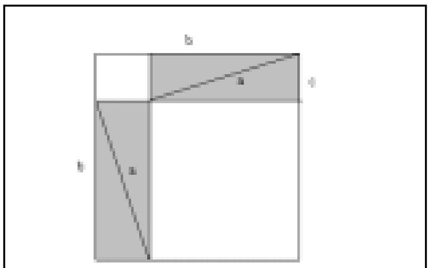


fig 2

Análise do ponto de vista matemático

Retirando-se os quatro triângulos hachurados de cada uma das figuras obtêm-se:

na Fig. 1, um quadrado de lado a e na Fig. 2, um quadrado de lado b e um quadrado de lado c.

Em outras palavras, o complementar dos quatros triângulos, na Fig. 1, é o quadrado que tem como lado a hipotenusa do triângulo retângulo. Reconfigurando-se de modo conveniente os quatro triângulos, o complementar deles, em relação ao quadrado maior, é a reunião dos quadrados cujos lados são os catetos.

Logo, a área do quadrado de lado $\underline{a}$ é a soma das áreas dos quadrados cujos lados medem $\underline{b}$ e $\underline{c}$, ou seja: $a^2 = b^2 + c^2$

Algebricamente:

para a Fig. 1: $(b+c)^2 = a^2 + 4\frac{bc}{2}$

para a Fig. 2: $(b+c)^2 = b^2 + c^2 + 4\frac{bc}{2}$

$$\therefore\ a^2 + 2bc = b^2 + c^2 + 2bc$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Rigorosamente, o que ocorre é o seguinte (Fig. 3):

a partir do triângulo ABC, retângulo em A, traça-se o quadrado APQR, tomando

PC = MQ = NR = AB e

PM = QN = BR = AC.

Quando os quatro triângulos retângulos, que têm respectivamente as mesmas medidas para os catetos, são "recortados", está sendo admitido implicitamente o fato de que as hipotenusas e os ângulos agudos têm também, respectivamente, as mesmas medidas, pois os triângulos são os mesmos.

É necessário utilizar o caso L.A.L. de congruência de triângulos para justificar que BCMN é um quadrado. Em detalhes:

$\Delta\ ABC \cong \Delta\ PCM \cong \Delta\ QMN \cong \Delta\ RNB$

Então CM = MN = NB = BC;

Resta mostrar que os ângulos do quadrilátero BCMN são retos.

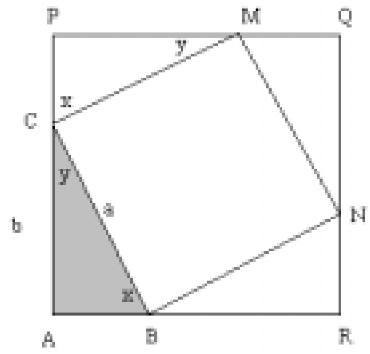


fig. 3

Das congruências do item anterior, decorrem:

$m(P\hat{C}M) = x \quad$ e $\quad m(P\hat{M}C) = y$

Mas $x + m(M\hat{C}B) + y = 180°$

(formam um ângulo raso)

Como $x + y = 90°$, segue-se que $M\hat{C}B$ é reto (analogamente para os outros triângulos).

<u>*Análise do ponto de vista didático*</u>

Pelo exposto, pode-se observar a variedade de abordagens que a demonstração propicia. Numa primeira fase pode ser explorada a reconfiguração, pois:

- o fracionamento da figura em partes elementares é dado no início;
- para formar a Fig. 1, o "triângulo-chave" sofre três rotações, e para a Fig.2 três translações;
- a Fig. 1 é formada pelo reagrupamento não convexo de quatro triângulos;
- a Fig. 2 é o reagrupamento não convexo de duas figuras convexas (os retângulos, cada um formado por dois triângulos). Reconhecer a reconfiguração conveniente, dentre todas as possíveis, não é um fato muito evidente, devido à não contigüidade das partes elementares;
- as características do contorno da subfigura contida na Fig. 2, formada pela reunião dos quatro retângulos, favorecem a visibilidade, ajudando a encontrar, no quadrado maior, os dois quadrados complementares;

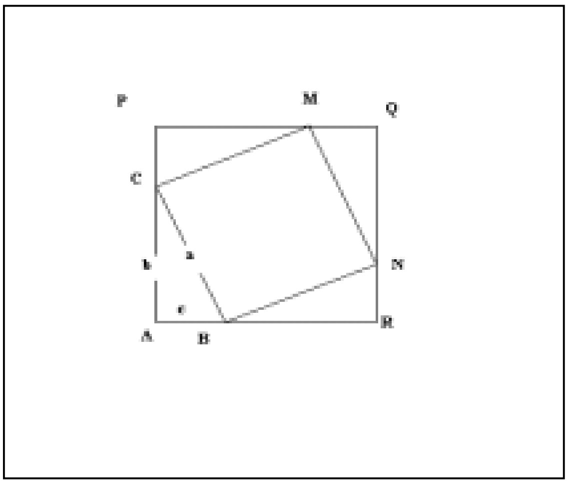
- para obter os dois quadrados (Fig.2), são necessários quatro traçados suplementares;
- não há superposição de partes elementares;
- não há substituições das partes elementares iniciais.

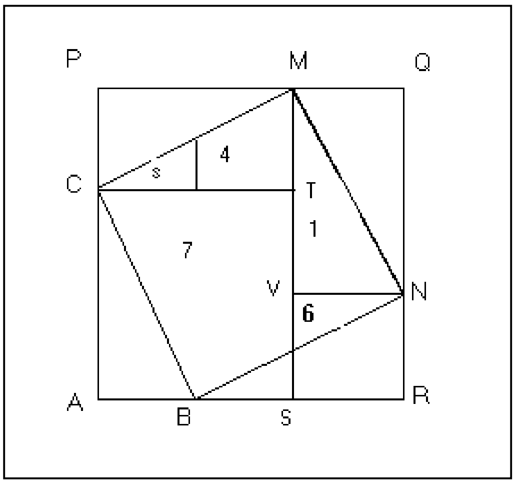
As seis modificações posicionais, os tratamentos auxiliares a ser efetuados e a não convexidade das subfiguras são fatores que dificultam a aplicação da operação da reconfiguração intermediária, porém o fato de não apresentar o obstáculo do desdobramento e o contorno favorável compensam essa desvantagem, aumentando o grau de visibilidade para a aplicação da operação.

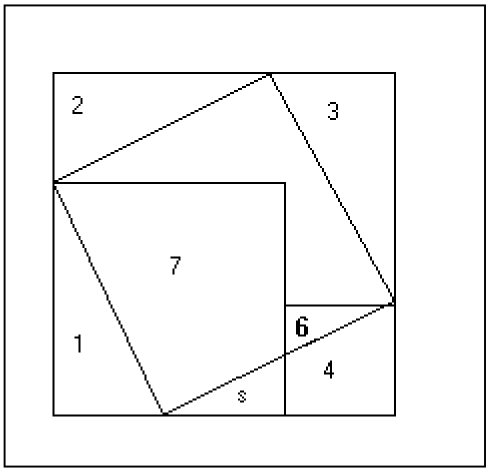
Numa segunda fase, o professor poderá aproveitar a oportunidade para reinvestir em tópicos anteriores, como congruência de triângulos e produtos notáveis, pois o aluno deve entender que é preciso, nas demonstrações rigorosas, usar definições, propriedades e teoremas já institucionalizados, sem o que há o risco de se ficar apenas no "figural".

<u>Demonstração 9 – Liu Hui, 270 d.C.</u> (geométrica por transposição de elementos)

Um quadrado é formado pelo reagrupamento de peças obtidas de dois quadrados, isto é, o quadrado da hipotenusa é reconstituído por meio dos quadrados dos catetos.







Análise do ponto de vista matemático

Forma-se, primeiramente, um quadrado com quatro exemplares de triângulo retângulo dispostos convenientemente.

Pelo ponto M, traça-se $\overline{MS} // \overline{AP}$; pelo ponto C, $\overline{CT} \perp \overline{MS}$; e por N, $\overline{NV} \perp \overline{MS}$. Rigorosamente, seria necessário adotar um procedimento análogo ao realizado na demonstração 8 para garantir que o quadrilátero BCMN é um quadrado.

Análise do ponto de vista didático

Como conhecimentos disponíveis, esta demonstração exige noção de área de polígonos e congruência de triângulos. Alguma habilidade em montagem de quebra-cabeças é desejável, pois o quadrado sobre a hipotenusa deve ser reconstituído por meio dos quadrados cujos lados são respectivamente os catetos do triângulo inicial. Em outras palavras, deve ser feita uma reconfiguração da Fig. 1, operação que será a seguir analisada.

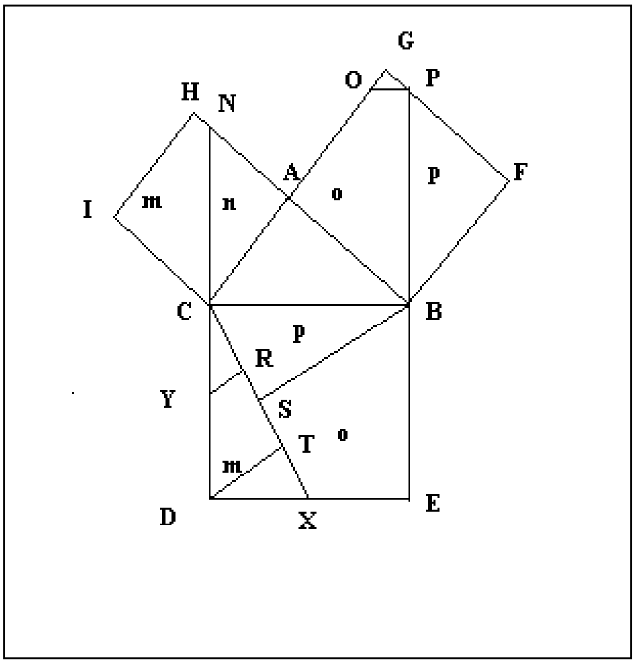
O reagrupamento pertinente dos triângulos retângulos da Fig. 1 forma uma subfigura não convexa, o que dificulta efetuar a operação de reconfiguração intermediária:

- o fracionamento da Fig. 1 em partes elementares não vem dado no início;
- a Fig. 1 exige tratamentos auxiliares (traçados de segmentos ou retas) a fim de se obter quadrados ou retângulos;

- são necessárias cinco modificações posicionais (três modificações no triângulo inicial, mais duas translações de dois triângulos retângulos para a reconfiguração);
- o contorno possui características que não favorecem a aplicação da operação de reconfiguração intermediária;
- o obstáculo do desdobramento de uma parte comum a dois reagrupamentos diferentes a ser comparados ocorre duas vezes, para o quadrilátero (7) e para o triângulo (6), que estão contidos no quadrado relativo à hipotenusa e nos quadrados relativos aos catetos;
- as subfiguras são deslocadas para o interior da figura inicial.

Os fatores acima mencionados aumentam o grau de complexidade e diminuem o grau de visibilidade para a aplicação da operação de reconfiguração intermediária.

<u>Demonstração 10 – Ozanan</u> *(geométrica, por transposição de elementos)*



Análise do ponto de vista matemático

Os tratamentos auxiliares a ser efetuados serão detalhados mais adiante, na Análise Cognitiva da demonstração. Rigorosamente, algumas congruências devem ser provadas. Assim,

Δ FBP $\cong \Delta$ ABC, pois: $C\widehat{A}B \cong P\widehat{F}B$ (retos)

$A\hat{B}C \cong P\hat{B}F$ (ângulos de lados perpendiculares)

$\overline{AB} \cong \overline{BF}$ (lados de um quadrado)

Δ NCB $\cong \Delta$ XDC, pois: $\overline{CN} \cong \overline{DX}$ (por construção)

$N\widehat{C}B \cong C\widehat{D}X$ (retos) e $\overline{BC} \cong \overline{CD}$

Então,

Δ CSB $\cong \Delta$ PFB, pois $S\widehat{C}B \cong F\widehat{P}B$

$C\widehat{B}S \cong P\widehat{B}F$ e $\overline{CB} \cong \overline{PB}$

Δ DTX $\cong \Delta$ CAN, pois: $T\widehat{D}X \cong A\widehat{C}N$, logo DT = CA e CN = DX (construção).

Daí, usando CB como eixo de simetria, tem-se:

P $\rightarrow$ E (isto é, E é o simétrico de P), pois BP = CB = BE

A $\rightarrow$ S (isto é, S é simétrico de A), pois BA = BS e $A\widehat{B}C \cong S\widehat{B}C$

O $\rightarrow$ X (isto é, X é simétrico de O), devido aos ângulos retos.

Portanto, quadrilátero AOPB $\cong$ quadrilátero SXEB.

Como CN = DY, por construção, fazendo-se uma translação do quadrilátero HNCI de modo que o lado CN coincida com o segmento DY e lembrando que:

DT = CA = CI e, também, $N\hat{C}I \cong Y\hat{D}T$

conclui-se que o quadrilátero transladado é simétrico de SYDT em relação ao eixo CD. Logo, quadrilátero SYDT $\cong$ quadrilátero HNCI.

Como conseqüência, sendo XE = DE – DX e XE = OP, tem-se:

YC = DC – DY = DE – DX = OP

pois, CN = DY = DX

$\therefore \Delta\, YRC \cong \Delta\, OGP$, pois $\overline{YC} \cong \overline{OP}$

$$Y\hat{R}C \cong O\hat{G}P \text{ (retos) e } Y\hat{C}R \cong O\hat{P}G$$

<u>*Análise do ponto de vista didático*</u>

Trata-se de uma demonstração bastante complexa do ponto de vista geométrico, exigindo como conhecimentos disponíveis congruência de polígonos e transformações (simetria, rotação e translação).

A reconstituição do quadrado da hipotenusa é feita a partir das cinco peças obtidas com os quadrados dos lados do ângulo reto do triângulo ABC:

- o fracionamento da figura em partes elementares não é dado inicialmente;
- os tratamentos auxiliares a ser efetuados são o prolongamento de $\overline{EB}$ determinando o ponto P em $\overline{GF}$, o prolongamento de $\overline{DC}$ até encontrar $\overline{AH}$ em N e o traçado de $\overline{PO} // \overline{BC}$.

Assim, obtêm-se cinco peças, m, n, o, p e q, que reagrupadas formarão o quadrado de lado a = BC. De fato, tomando-se DX = DY = CN, traçando-se $\overline{CX}$ e de Y, D e B conduzindo-se perpendiculares $\overline{YR}$, $\overline{DT}$ e $\overline{BS}$, os cinco elementos resultantes são congruentes, respectivamente, às cinco peças, m, n, o, p e q.

São necessários, portanto, sete traçados suplementares (três sobre os quadrados dos catetos e quatro sobre o quadrado da hipotenusa).

- os reagrupamentos das partes elementares formam subfiguras convexas;
- as subfiguras são deslocadas para o exterior da figura inicial;
- não há desdobramento de partes elementares auxiliares;
- não há substituição de partes elementares auxiliares;
- para reconstituir, com as cinco peças, o quadrado da hipotenusa são necessárias dez modificações posicionais:

peça m – uma translação e uma simetria (de eixo CD);

peça n – uma translação e uma simetria (de eixo DB);

peça o – uma simetria (de eixo BC);

peça p – uma rotação (de centro B) e uma simetria (de eixo BC);

peça q – uma rotação (centro G), uma translação (direção $\overline{OA}$ e uma simetria (eixo CY).

Trata-se de uma demonstração demasiadamente complicada, pelo fato de ser necessário efetuar o fracionamento da figura em partes elementares e, também, pela multiplicidade de modificações posicionais. São fatores que contribuem para o aumento do grau de complexidade e diminuem o grau de visibilidade no que se refere à reconfiguração. Talvez pudesse ser reconstruída por alunos com razoável domínio da Geometria, como curiosidade histórica ou oportunidade de reinvestir em tópicos anteriores, por meio de passos guiados pelo professor.

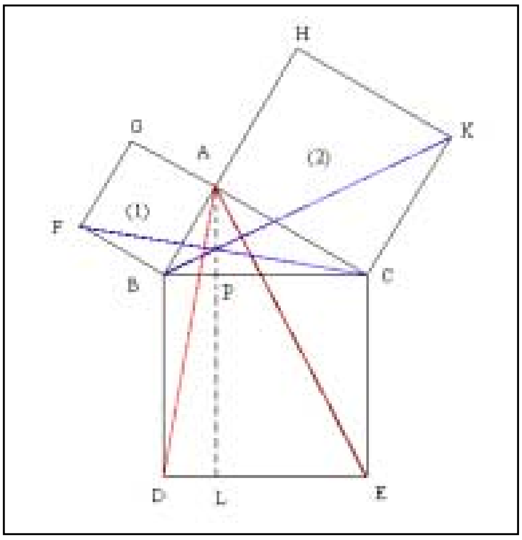
Demonstração 11 – Euclides, do livro* Elementos*, 300 a.C. , Proposição 47I

Também aparece séculos depois na obra de Tâbit Ibn Qorra (826-901). (Geométrica, por transformação, deixando a área dos quadriláteros invariante. Prova-se a equivalência de pares de partes decompostas)

A figura utilizada por Euclides para demonstrar o Teorema de Pitágoras é, às vezes, descrita como "moinho de vento", "cauda de pavão" ou "cadeira de noiva".

Análise do ponto de vista matemático

I) Seja ABC um triângulo retângulo em A.



Constrói-se, sobre o lado $\overline{BC}$, o quadrado BDEC, e sobre os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, os quadrados BAGF e CAHK, respectivamente.

Traça-se $\overline{AL} // \overline{BD}$

$\Delta ABD \cong \Delta FBC$ (caso L.A.L), pois AB = FB e BD = BC (lados de um quadrado) e m $(F\hat{B}C)$ = m $(A\hat{B}D)$

II) Chamando de A1 a área do quadrado 1 e de A2 a do quadrado 2, tem-se:

$$A1 = 2.\ \text{área (FBC) pois área (FBC)} = \frac{FB.FG}{2} = \frac{c^2}{2}$$

$\therefore$ A1 = 2área (ABD), pois os dois triângulos são congruentes.

III) Mas: $\quad$ área (ABD) = $\dfrac{\text{BD.DL}}{2} = \dfrac{\text{área(BPLD)}}{2}$

Então: $\quad$ A1 = c^2 = 2área (FBC) = área (BPLD)

Analogamente: A2 = b^2 = 2área (BCK) = área (HCEL)

IV) Portanto, a área do quadrado (BCED), formado pelos retângulos (BPLD) e (PCEL), é igual à soma das áreas $b^2 + c^2$, portanto, $a^2 = b^2 + c^2$

Na demonstração aqui apresentada, constam detalhes que normalmente não aparecem nos livros que tratam da história da Matemática. A intenção foi evidenciar os conhecimentos disponíveis que seriam necessários para viabilizar seu emprego em alguma atividade dentro da sala de aula:

- congruência de triângulos;
- cálculo de áreas de triângulos, com as variáveis didáticas (posição da figura) numa forma bem diferente da usual, como, por exemplo, triângulo ABD e triângulo FBC.

Admitindo-se essa possibilidade, a situação-problema poderia ser colocada em etapas e o objetivo seria reinvestir em tópicos anteriores.

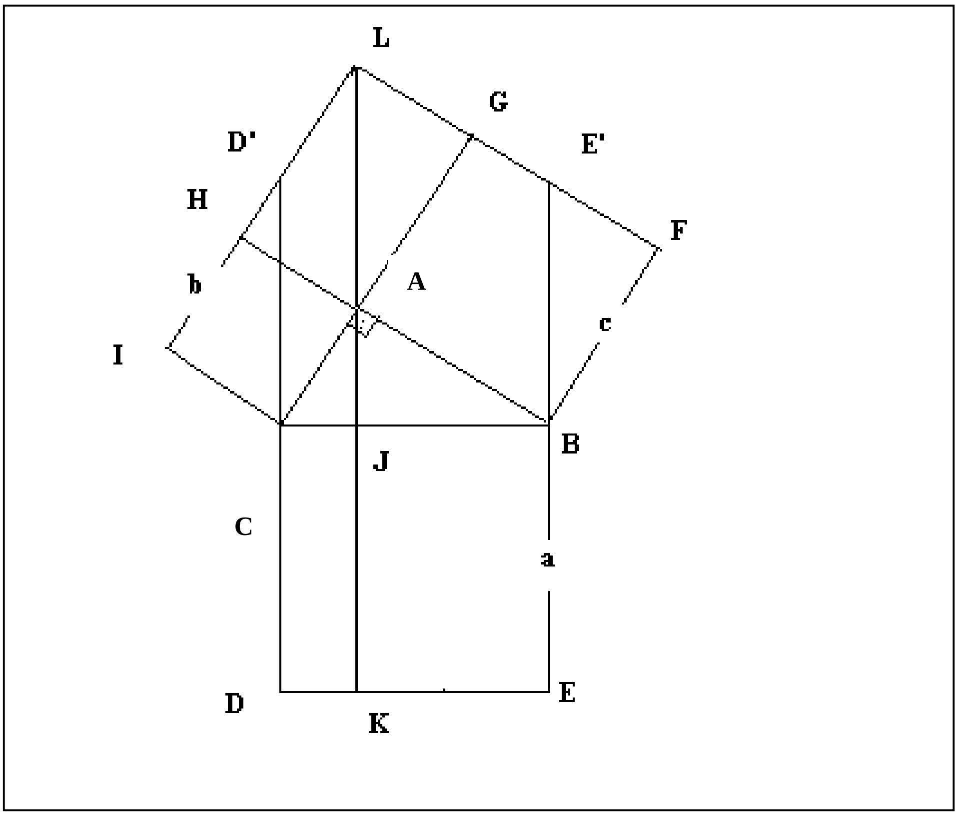
Sob o aspecto "figural" convém observar que:

- o fracionamento da figura em partes elementares não é dado no início; ele deve ser encontrado;
- a figura demanda tratamentos auxiliares, ou seja, traçado de segmentos que darão origem a triângulos e a retângulos. São necessários cinco traçados suplementares – segmentos AL, AD, FC, BK e AE.
- há um grande número de substituições das partes elementares, num total de doze, seis para passar do quadrado 1 para o retângulo BPLD e seis do quadrado 2 para o retângulo PCEL;

- as características do contorno não ajudam à aplicação da operação de reconfiguração intermediária;
- os reagrupamentos pertinentes formam subfiguras convexas;
- aparece seis vezes o obstáculo do desdobramento dos objetos, três para cada substituição – Δ FBC e Δ ABD têm uma parte comum, o mesmo ocorrendo com Δ FBC e o quadrado 1 e Δ ABD e retângulo BPLD. Analogamente, para o quadrado 2.

Os fatores acima mencionados ocasionam acentuado aumento no grau de complexidade e redução no grau de visibilidade para aplicação da operação de reconfiguração, havendo ainda a dificuldade em perceber a equivalência entre os diferentes agrupamentos.

<u>Demonstração 12 Nassir-ed-Din, séc. XIII d.C.</u> (geométrica, área dos quadriláteros, invariante)



Seja ABC um triângulo retângulo em A. São construídos sobre seus catetos e hipotenusa, respectivamente, os quadrados ACIH, ABFG e BCDE.

Seja L a intersecção de $\overline{FG}$ e $\overline{HI}$. Traça-se o segmento AL e, a seguir, $\overline{AK}$ perpendicular a $\overline{DE}$.

<u>*Análise do ponto de vista matemático*</u>

Os triângulos LGA e ABC são congruentes (têm os catetos respectivamente congruentes).

Então $\overline{LA} \cong \overline{BC}$ e $G\hat{A}L \cong A\hat{B}C \cong C\hat{A}J$,

logo L, A, J, K são colineares (pois os ângulos opostos pelo vértice são congruentes).

Prolongando-se DC até encontrar IH em D', tem-se:

- área do paralelogramo ACD'L = b^2 (base AC = b e altura LG = b);
- paralelogramo ACD'L equivalente ao retângulo CJKD

 (mesma base, LA = BC = CD, e mesma altura, CJ);

- portanto, retângulo CJKD tem área igual a b^2.

Analogamente, prolongando-se EB até encontrar FG em E', tem-se:

- área do paralelogramo ABE'L = c^2;
- paralelogramo ABE'L equivalente ao retângulo BEKJ;
- portanto, retângulo BEKJ tem área c^2.

Logo, $a^2 = b^2 + c^2$

É interessante observar que, com a demonstração, ficam ainda estabelecidas as seguintes relações:

$AC^2 = CB.CJ$ e $AB^2 = CB.JB$, pois $b^2 = CD.CJ$ e $c^2 = BE.JB$

<u>*Análise do ponto de vista didático*</u>

A demonstração exige, como conhecimentos disponíveis, cálculo de áreas de figuras planas, congruência de triângulos e conceito de equivalência de figuras planas. Quanto à análise cognitiva, observa-se que:

- a figura exige tratamentos auxiliares a efetuar. De fato, são necessários seis traçados suplementares – as retas FG, HI, AL, AK, DC e EB;

- as características do contorno não favorecem a aplicação da operação de reconfiguração intermediária;

- os reagrupamentos pertinentes das partes elementares formam subfiguras convexas (paralelogramos e retângulos);

- o reagrupmento pertinente exige que sejam feitas seis substituições de partes elementares, três para cada quadrado, para a reconstituição do quadrado de lado a, por meio dos quadrados de lados b e c;

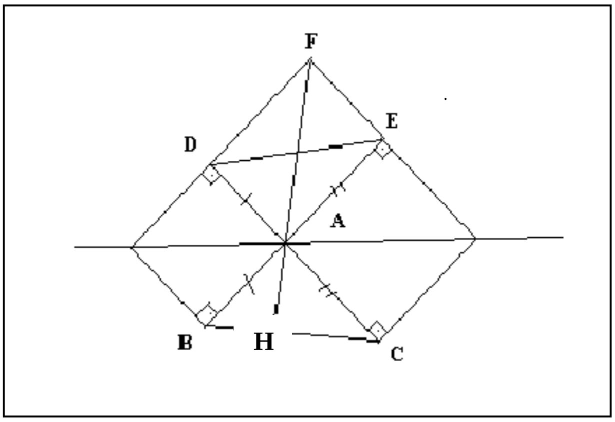
- o obstáculo do desdobramento de objetos aparece duas vezes, pois o paralelogramo ACD'L e o quadrado de lado b têm uma parte comum, o mesmo ocorrendo com o paralelogramo ABE'L e o quadrado de lado c.

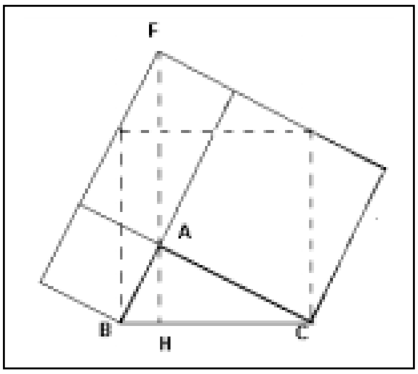
É importante ainda comentar que os paralelogramos ACD'L e ABE'L devem ser observados em duas posições diferentes, pois, quando comparados aos retângulos CJKD e BEKJ, respectivamente, a base considerada é LA para ambos e as alturas, CJ e BJ; porém, quando comparados aos quadrados, construídos sobre os catetos, as bases "favoráveis" são AC e AB e as alturas LG e FB, respectivamente.

O fato de ser necessário descobrir o fracionamento da figura em partes elementares, fazer seis traçados suplementares, de o contorno ser neutro para a operação de reconfiguração, além da multiplicidade de substituições e do obstáculo do desdobramento duas vezes presente, aumenta o grau de complexidade e diminui o grau de visibilidade para a aplicação da operação de reconfiguração intermediária.

Demonstração 13 - Irem de Strasbourg (geométrica, com área dos quadriláteros invariante)

Sua originalidade em relação às demais reside no fato de utilizar o recurso das transformações (simetria e translação).





<u>*Análise do ponto de vista matemático*</u>

1) Estudo da figura:

Os dois quadrados construídos sobre os lados do triângulo ABC têm um eixo de simetria comum, determinado pelas diagonais dos quadrados. Denominamos:

D o simétrico de B e E o simétrico de C. Assim, DE = BC e $D\hat{E}A \cong A\hat{C}B$.

Completando o retângulo DAEF, obtém-se, por simetria do retângulo,

AF = DE e $E\hat{A}F \cong D\hat{E}A$

Seja H o ponto de interseção da reta FA com o lado BC.

Assim, $B\hat{A}H \cong E\hat{A}F$ (ângulos opostos pelo vértice).

O triângulo ABH tem, portanto, os mesmos ângulos do triângulo ABC, logo ele é retângulo em H, pois o triângulo ABC é retângulo em A.

Resumindo: AF = BC e a $\overline{AF} \perp \overline{BC}$

2) Obtenção da relação pitagórica, em dois movimentos:

- cada quadrado se transforma num paralelogramo de mesma área;
- cada paralelogramo se transforma em um retângulo de mesma área;
- a figura final tem dois lados paralelos à reta AF, portanto perpendiculares a $\overline{BC}$ e com o mesmo comprimento de $\overline{AF}$, que é igual ao de $\overline{BC}$. Trata-se, portanto, de um quadrado de lado $\overline{BC}$.

Logo: $BC^2 = AB^2 + AC^2$

e ainda: $AB^2 = BC.BH$ e $AC^2 = BC.CH$

Análise do ponto de vista didático

Como conhecimentos disponíveis, surgem obviamente as transformações, o que constitui uma oportunidade de reinvestir nesse tópico. Quanto à análise cognitiva, destacam-se os seguintes fatores:

- o fracionamento da figura em partes elementares não é dado inicialmente;
- são necessários cinco tratamentos auxiliares (traçados de FE, DF, eixo de simetria, DE e FH;
- as características do contorno não favorecem a aplicação da operação de reconfiguração intermediária;
- os reagrupamentos das partes elementares formam subfiguras convexas (triângulos e retângulos).
- o reagrupamento pertinente exige que se efetuem seis substituições de partes elementares (três para cada quadrado);
- o desdobramento das partes elementares aparece cinco vezes, pois no primeiro movimento o quadrado de lado c e o paralelogramo resultante da transformação efetuada têm uma parte comum. Analogamente para o de lado b. No segundo movimento, quando cada paralelogramo se transforma em um retângulo, o obstáculo do desdobramento surge duas vezes, porque, em cada transformação, a figura resultante tem uma parte comum com a figura inicial. Finalmente, o quadrado sobre a hipotenusa (reconstituído com os quadrados dos catetos) apresenta novamente o referido obstáculo, porque contém o triângulo ABC.

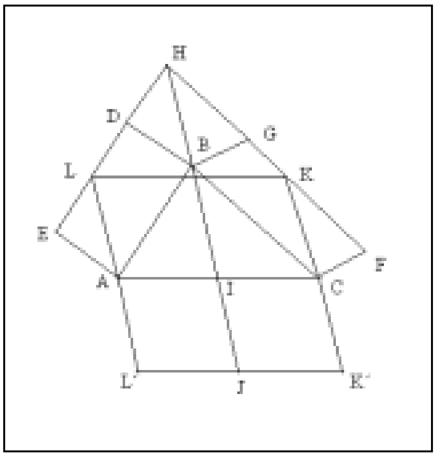
O fato de ser necessário descobrir o fracionamento da figura em partes elementares, fazer cinco traçados suplementares, haver um contorno neutro para essa operação, além da multiplicidade de substituições e do obstáculo do desdobramento cinco vezes presente, aumenta o grau de complexidade e diminue o grau de visibilidade para a aplicação da operação de reconfiguração intermediária.

__Demonstração 14 – Generalização do Teorema de Pitágoras__ **(Pappus e Friedelmeyer**, geométrica, área dos quadriláteros, invariante)

Não há entre os pesquisadores de História da Matemática unanimidade quanto à figura original relativa à demonstração de Pappus. Existem duas versões, que serão apresentadas e analisadas a seguir.

Seja um triângulo retângulo qualquer ABC; ABDE e BCFG são dois paralelogramos quaisquer construídos sobre os lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ respectivamente. Seja H o ponto de encontro de $\overleftrightarrow{ED}$ e $\overleftrightarrow{FG}$. Traçando-se por A e C as paralelas a $\overleftrightarrow{BH}$, que cortam $\overleftrightarrow{ED}$ e $\overleftrightarrow{FG}$ respectivamente em L e K, então o quadrilátero ALKC é um paralelogramo equivalente à soma dos paralelogramos ABDE e BCFG. Na figura de Pappus, o paralelogramo AL’K’C é construído exteriormente ao triângulo ABC, tomando-se sobre a reta HB, IJ = HB e $\overleftrightarrow{L'K'}$ paralela a $\overleftrightarrow{AC}$ por J.

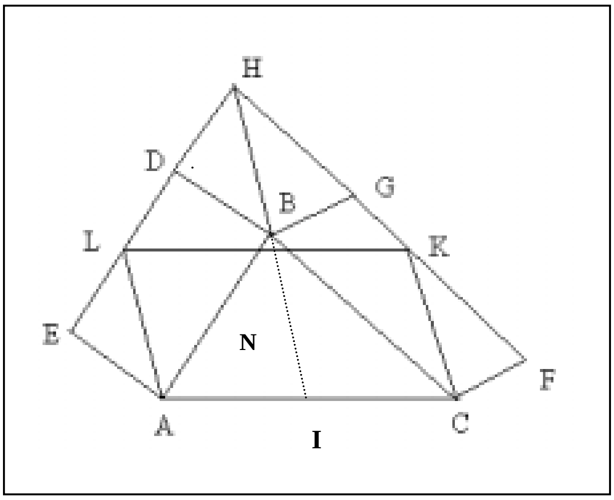
(fig. Pappus)



__*Análise do ponto de vista matemático*__

O paralelogramo BCFG é equivalente ao paralelogramo BCKH (mesma base e mesma altura), o qual por sua vez é equivalente ao paralelogramo ICK’J, pois HB = IJ por construção. Analogamente, AL’JI é equivalente a HBDE. Como a área de ACK’J é a soma das áreas de ICK’J e de AL’JI, tem-se que ALKC é equivalente à reunião de ABDE e BCFG.

Para a figura de Friedelmeyer tem-se: HB = CK e HB = AL (lados de paralelogramo). Logo, CK = HB = AL e, portanto, ACKL é um paralelogramo.



(Fig. Friedelmeyer)

Mas os paralelogramos BCFG e BCKH são equivalentes, pois têm mesma base, $\overline{BC}$, e mesma altura. Por outro lado, BCKH e ICKN são equivalentes (mesma base, $\overline{CK}$, e mesma altura). Logo BCFG e ICKN são também equivalentes.

Analogamente, ABDE é equivalente ao paralelogramo AINL.

Como ACKL = ICKN $\cup$ AINL, conclui-se que ACKL = BCFG $\cup$ ABDE.

Análise do ponto de vista didático

Para a última série do 1º grau, talvez fosse interessante tratar essa generalização como uma "curiosidade". O fato de utilizar equivalência de áreas como conhecimento disponível propicia reinvestir nesse tópico, pois as variáveis didáticas (posição dos paralelogramos) são bem diversas daquelas normalmente escolhidas para os exercícios de cálculo de áreas dessas figuras.

Quanto à análise cognitiva, convém observar que:

- o fracionamento da figura em partes elementares não é dado inicialmente, ele deve ser encontrado;

- a demonstração exige tratamentos auxiliares a efetuar; pois são necessários seis traçados suplementares para a fig. Pappus (DH, HG, HB, AL, CK, L'K') e seis para a fig. Friedelmeyer (DH, HG, HB, AL, CK, LK);
- as características do contorno não favorecem a aplicação da operação de reconfiguração intermediária, pois o mesmo não fornece indícios do que deva ser feito;
- os reagrupamentos das partes elementares formam subfiguras convexas (paralelogramos);
- o reagrupamento pertinente exige, tanto para a fig. Pappus como para a fig. Friedelmeyer, seis substituições (três para cada paralelogramo; ABDE por ABHL, este por AL'JI – respectivamente AINL – e BCFG por BCJK por ICK'J – respectivamente ICKN);
- o obstáculo do desdobramento aparece duas vezes na fig. Pappus (os paralelogramos ABDE e ABHL têm em comum o trapézio ABDL; os paralelogramos BCFG e BCKH, o trapézio BCKG). Para a figura de Friedelmeyer o desdobramento das partes elementares atinge também o paralelogramo ACKL, o que complica bastante a visualização da figura, dando a impressão de que a mesma se encontra não num mesmo plano e sim no espaço.

O fracionamento da figura em partes elementares não sendo dado, a exigência de seis traçados suplementares, o contorno neutro, além da multiplicidade de substituições e do obstáculo do desdobramento de objetos, aumentam o grau de complexidade e diminuem o grau de visibilidade para a aplicação da operação de reconfiguração intermediária.

***Demonstração 15* – Leonardo da Vinci** (1452-1519)

São dados um triângulo EFG retângulo em G e sobre seus lados os quadrados FEJH, EDCG e FGBA. A partir dessa figura são feitas as seguintes construções auxiliares: segmentos AD, GI, BC.

Análise do ponto de vista matemático

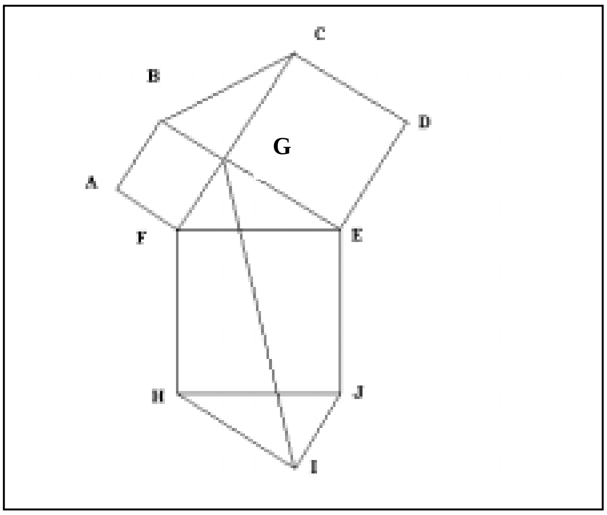
Os hexágonos ABCDEF e GEJIHF têm mesma área, pois:

área do quadrado FEJH + 2 área do triângulo FEG = área do hexágono GEJIHF

área do hexágono GEJIHF = 2. área do quadrilátero BCDA = área do hexágono ABCDEF

Mas a área do hexágono ABCDEF = área do quadrado CDEG + área do quadrado ABGF + 2 área do triângulo FEG

Portanto, o quadrado sobre FE é equivalente à soma dos quadrados sobre GE e sobre FG. Logo: $g^2 = f^2 + e^2$, em que g = FE, f = GE e e = FG



Análise do ponto de vista didático

A demonstração Da Vinci exige, como conhecimento disponível, a equivalência de áreas, proporcionando uma oportunidade para utilizar variáveis não muito habituais, como hexágonos e quadriláteros quaisquer.

No que se refere à análise cognitiva, observa-se que:

- o fracionamento da figura em partes elementares não é dado no início, deve ser encontrado;

- a figura demanda tratamentos auxiliares. São necessários cinco traçados suplementares (AD, GI, BC, HI e IJ);
- as características do contorno fazem com que os hexágonos não sejam, a priori, muito visíveis;
- os reagrupamentos pertinentes das partes elementares formam subfiguras convexas (triângulos, quadriláteros, e hexágonos);
- o reagrupamento pertinente exige que se substituam partes elementares auxiliares;
- para comparar os hexágonos é preciso superar o obstáculo do desdobramento dos objetos, pois os hexágonos apresentam uma parte comum, o triângulo EFG.

O fato de ser preciso descobrir o fracionamento da figura em partes elementares, fazer cinco traçados suplementares e de ter de haver um contorno neutro para a operação de reconfiguração, além da multiplicidade de substituições e o obstáculo do desdobramento, aumenta o grau de complexidade e diminuem o grau de visibilidade para a aplicação da operação de reconfiguração intermediária.

Demonstração 16 – Generalização do Teorema de Pitágoras (pelo matemático húngaro **George Polya,** in Rosa, 1983, pp. 16-17)

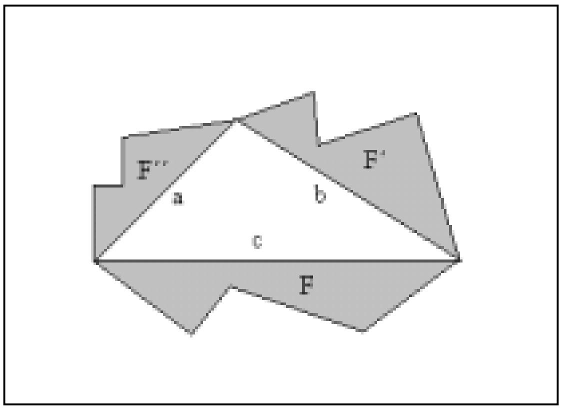
O raciocínio de Polya baseia-se na proposição: “Se duas figuras são semelhantes, a razão entre suas áreas é igual ao quadrado da razão de semelhança”.

“Se F, F´e F´´ são figuras semelhantes construídas respectivamente sobre a hipotenusa c e sobre os catetos a e b de um triângulo retângulo, então a área de F é igual à soma das áreas de F´e F´´.”

Análise do ponto de vista matemático

Para simplificar a escrita, subentende-se que:

área de F = F e área de G = G, assim sendo, $\frac{F'}{F''} = \frac{b^2}{a^2}$



Se G, G´e G´´ são outras figuras semelhantes construídas, respectivamente, sobre a hipotenusa e catetos, tem-se:

$$\frac{G'}{G''} = \frac{b^2}{a^2} = \frac{F'}{F''} \quad \text{logo:} \quad \frac{G'}{F'} = \frac{G''}{F''}$$

Analogamente, $\frac{G'}{F'} = \frac{G}{F}$, portanto: $\frac{G}{F} = \frac{G'}{F'} = \frac{G''}{F''} = k$

Assim: G = k.F G´ = k.F´ G´´ = k.F´´

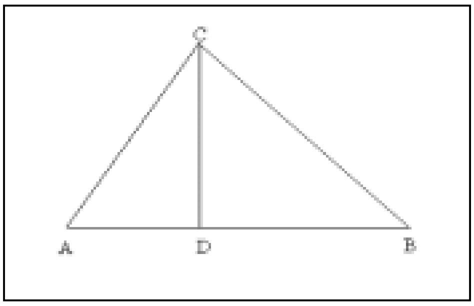
Isso significa que, se forem encontradas três figuras semelhantes especiais F, F´ e F´´, construídas respectivamente sobre a hipotenusa e os catetos do triângulo, de modo que se tenha F = F´ + F´´, então, G = G´+ G´´, quaisquer que sejam as figuras semelhantes G, G´e G´´ construídas do mesmo modo.

De fato: G = k.F G´ = k.F´ G´´ = k.F´´

Então: G´+ G´´ = k.F´ + k.F´´ = k (F´+ F´´) = k.F = G

$\therefore$ G´+ G´´ = G

Mas as figuras "especiais" provêem de um triângulo retângulo ABC: basta traçar a altura CD sobre a hipotenusa AB. A fig. F será o próprio triângulo ABC, F´ será ADC e F´´ será o triângulo BCD.



F, F´, F´´ são semelhantes e F = F´+ F´´, logo, G = G´ + G´´

Análise do ponto de vista didático

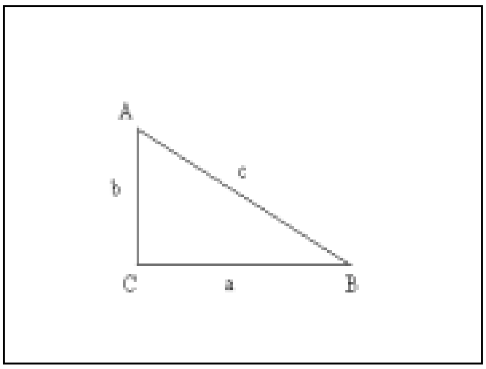
O fato de a demonstração ser baseada em "figuras semelhantes quaisquer" possivelmente vai tornar a compreensão muito complexa e abstrata para um aluno de 1º grau. Por outro lado, a Proposta Curricular da Secretaria da Educação (SP) sugere que se faça uma "primeira extensão" do Teorema de Pitágoras, utilizando semicírculos construídos respectivamente sobre a hipotenusa e catetos. Por meio de atividades, poderiam ser utilizadas extensões com triângulos equiláteros, com figuras semelhantes inscritas (em quadrados, triângulos equiláteros) ou, também, com hexágonos regulares.

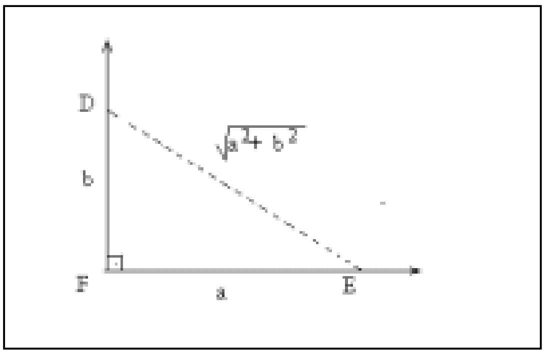
Por meio dessas situações-problema, os alunos fariam conjecturas sobre a generalização do Teorema, cabendo ao professor institucionalizar tal conhecimento, apresentando a demonstração de Polya ou apenas o enunciado, dependendo do nível de escolaridade da classe.

Demonstração 17 (o recíproco do Teorema de Pitágoras – no âmbito do 1º grau)

"Dados um triângulo cujos lados medem a, b e c, se $a^2 + b^2 = c^2$, então o triângulo é retângulo, com o ângulo reto oposto ao lado c."

Análise do ponto de vista matemático





Seja $\widehat{F}$ um ângulo reto e sejam D e E os pontos sobre os lados de $\widehat{F}$ tais que:

FE = a (conforme figura) e FD = b

Pelo Teorema de Pitágoras: $DE^2 = a^2 + b^2$

Mas, por hipótese, $a^2 + b^2 = c^2$

Então, $DE = \sqrt{a^2 + b^2} = c$

Pelo caso L.L.L. de congruência de triângulos: Δ ABC é congruente a Δ DEF

Portanto, o triângulo ABC é retângulo, com ângulo reto em C.

Análise do ponto de vista didático

Supõe-se, para a demonstração, a congruência de triângulos como conhecimento disponível. Talvez, a partir daí, fosse interessante, por meio de situações-problema, permitir ao aluno fazer conjecturas sobre o que aconteceria se fossem dadas três medidas quaisquer para a construção de um triângulo. O resultado seria um triângulo acutângulo, obtusângulo ou retângulo? Além de conjeturar sobre a natureza do triângulo, dependendo das "variáveis didáticas" escolhidas, seria a oportunidade de reinvestir na condição de existência de triângulo.

Demonstração 18 – vetorial (compõe-se de duas demonstrações, I e II)

Análise do ponto de vista matemático

I) Baseada em **Lima, E.L.** (1995, pp. 104-108)

Inicialmente serão adotadas as seguintes definições:

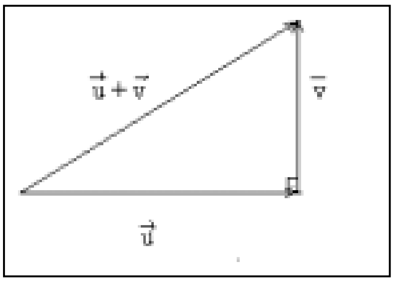
a) Produto escalar de dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é uma forma bilinear simétrica, indicada por $\vec{u}\,.\,\vec{v}$.

b) Módulo de um vetor $\vec{v}$: $|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v}.\vec{v}} = \sqrt{\vec{v}^2}$ Portanto, $|\vec{v}|^2 = \vec{v}^2$

Considerando-se R^2 munido de um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, sejam: $\vec{u} = (\alpha_1, \alpha_2)$ e $\vec{v} = (\beta_1, \beta_2)$.

Nesse caso: $|\vec{u}| = \sqrt{\alpha_1{}^2 + \alpha_2{}^2}$, $|\vec{v}| = \sqrt{\beta_1{}^2 + \beta_2{}^2}$ e $\vec{u}.\vec{v} = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2$, que equivale a $\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$, em que θ é o ângulo formado pelos vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Quando $\theta = \frac{\pi}{2}$, então $\cos\theta = 0$ e, portanto, $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

Considerando-se dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ tais que $\vec{u} \perp \vec{v}$ tem-se, aplicando a bilinearidade:



$|\vec{u}+\vec{v}|^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}\vec{v} + \vec{v}^2$. Mas se $\vec{u} \perp \vec{v}$ então $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

Logo, $|\vec{u}+\vec{v}|^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2$, o que corresponde, no quadro geométrico, ao Teorema de Pitágoras.

A demonstração fornece também o recíproco,

pois: $|\vec{u}+\vec{v}|^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$.

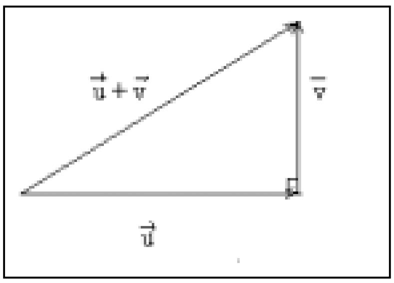
II) Baseada em **Lima, R.B.** (1974, pp. 63-68)

Serão adotadas as seguintes definições:

a) O produto escalar do vetor $\vec{u}$ pelo vetor $\vec{v}$, dados, respectivamente, pelas coordenadas no espaço $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$, num referencial ortogonal, é o número real $\vec{u}.\vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

b) O módulo do vetor $\vec{v}$ é definido por $|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v}.\vec{v}} = \sqrt{\vec{v}^2}$. Portanto, $|\vec{v}|^2 = \vec{v}^2$

c) Dois vetores são ditos ortogonais se o seu produto escalar é nulo. Portanto, $\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$.



Considerando-se dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ tais que $\vec{u} \perp \vec{v}$ tem-se:

$|\vec{u}+\vec{v}|^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}\vec{v} + \vec{v}^2$. Mas se $\vec{u} \perp \vec{v}$ então $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

Logo, $|\vec{u}+\vec{v}|^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2$, o que corresponde, no quadro geométrico, ao Teorema de Pitágoras.

A demonstração fornece também o recíproco,

pois: $|\vec{u}+\vec{v}|^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$.

<u>Análise do ponto de vista didático</u> (engloba demonstração 18I e 18II)

Sua utilização em sala de aula só seria viável, em escolas brasileiras, no âmbito do 3º grau, devido à grade curricular, e constitui uma excelente oportunidade de reapresentar o Teorema de Pitágoras, desta vez no quadro da Geometria Vetorial.

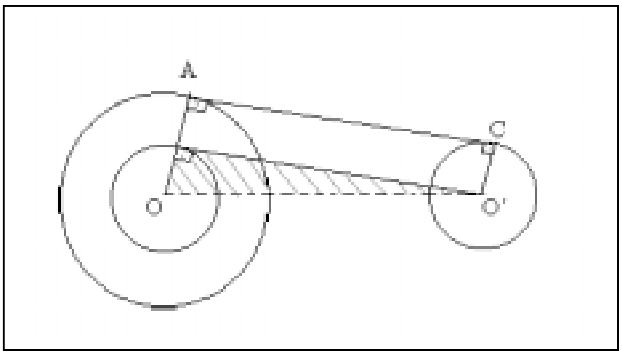
Encerra-se, assim, o bloco de demonstrações deste trabalho. Trata-se, apenas, de uma pequena amostra, mas que ilustra diferentes estratégias possíveis de serem utilizadas. Entretanto, é preciso cautela. Segundo especialistas, se por um lado o uso de demonstrações por decomposição de figuras de material concreto (como papel ou cartolina) é um recurso para tornar a participação dos alunos mais efetiva, por outro há o risco de criar confusão em três níveis: o objeto material, a figura como representante de um conceito matemático e os próprios conceitos. Quando se exigir, mais tarde, do aluno que demonstre um teorema com base nos conhecimentos já institucionalizados, haverá então ruptura no contrato didático. Caso o professor utilize material concreto, será então recomendável que deixe bem claro para o aluno a diferença entre uma simples verificação e uma demonstração dedutiva rigorosa.

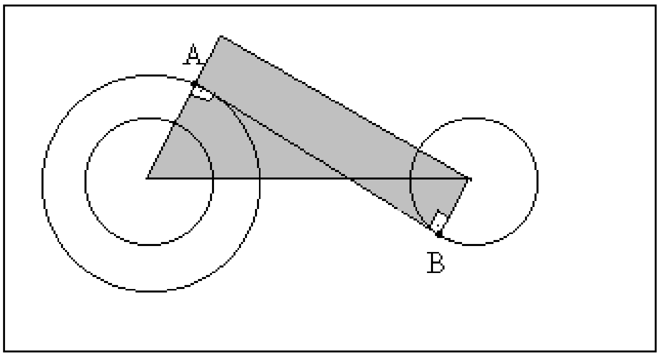
Após a institucionalização do Teorema pelo professor, isto é, quando esse conhecimento passar, oficialmente, a fazer parte do patrimônio matemático do aluno, o Teorema poderá, então, ser utilizado na resolução de uma gama extensa de problemas matemáticos, o que será, a seguir ilustrado.

Algumas aplicações do Teorema de Pitágoras

Em 7ª série e 8ª série, destacam-se:

- cálculo de diagonal – quadrado, retângulo, losango, trapézio (dependendo dos dados);
- altura de triângulo equilátero, isósceles, trapézio;
- comprimento de segmentos de tangente, cordas;
- relações entre lado, apótema e raio para polígonos inscritos e circunscritos;
- construção com régua e compasso de segmentos de medidas $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ etc.;
- distância entre dois pontos no plano cartesiano; equação de uma circunferência
- estabelecimento da relação $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$;
- problemas práticos como, por exemplo, determinação do comprimento de correia, envolvendo polias:



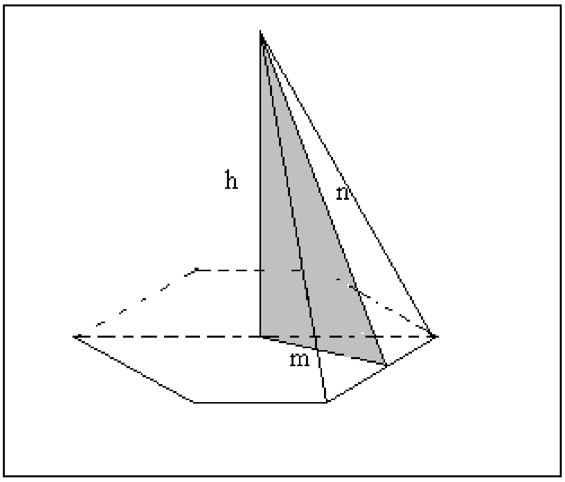


(tangente comum a duas circunferências dadas);

- elementos de circunferências tangentes.

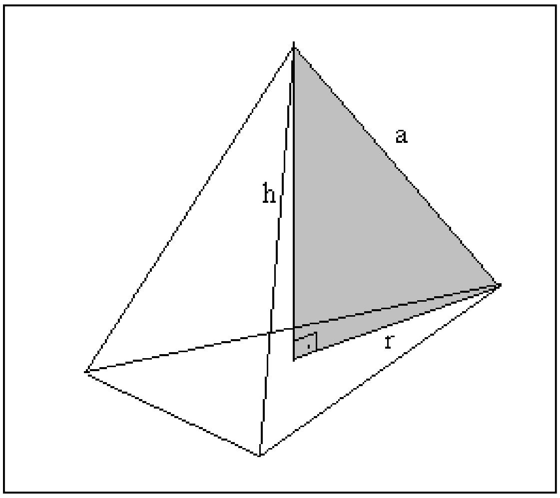
No 2º grau:

- diagonal de cubo, paralelepípedo, prismas em geral;
- relação entre altura, apótema da base e apótema de pirâmides regulares:



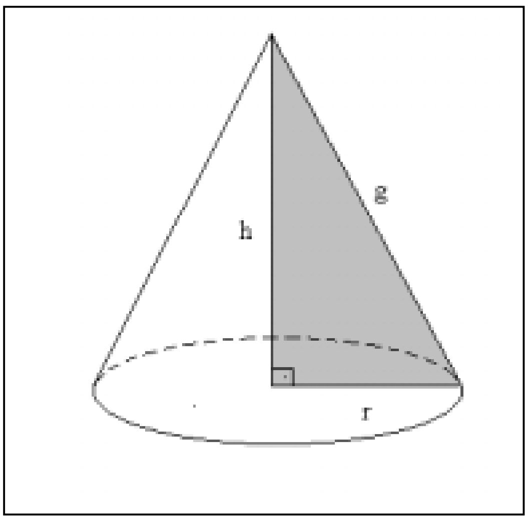
$h^2 + m^2 = n^2$

- relação entre altura, raio do círculo circunscrito à base e aresta lateral em pirâmides regulares;



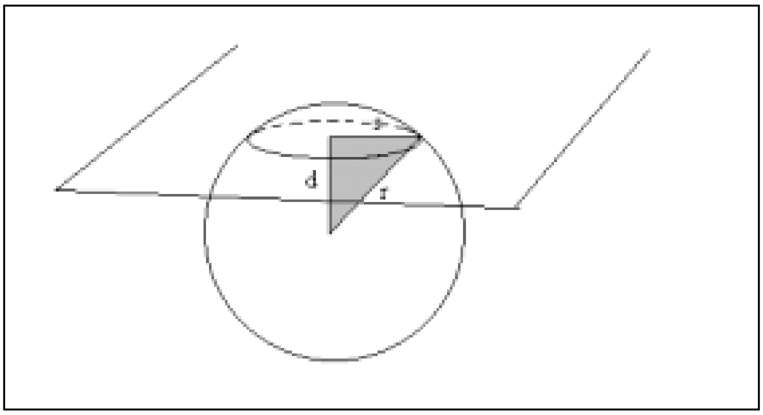
$h^2 + r^2 = a^2$

- relação entre altura, geratriz e raio da base num cone reto;



$h^2 + r^2 = g^2$

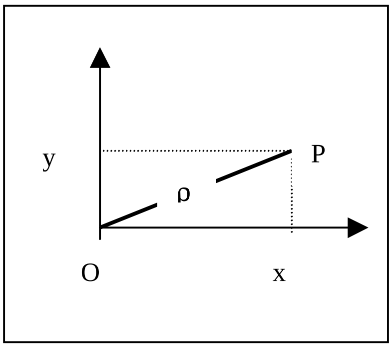
- distância de um plano secante, ao centro de uma esfera, em relação ao raio da esfera e ao raio da secção;



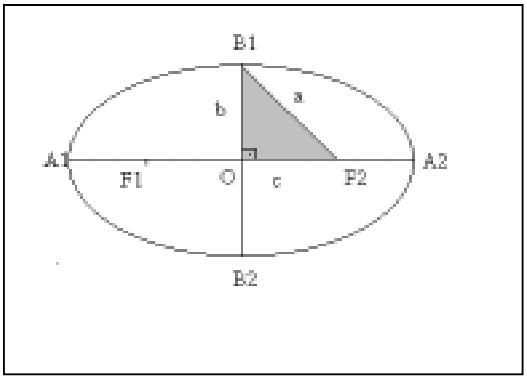
$d^2 + s^2 = r^2$

- módulo de um número complexo z = (x, y);

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$



- numa elipse de eixo maior medindo 2a, eixo menor 2b e distancia focal 2c;



$a^2 = b^2 + c^2$

- numa hipérbole, $c^2 = a^2 + b^2$ quando:

2a = medida do eixo real

2b = medida do eixo imaginário

2c = distância focal.

Alguns problemas não convencionais envolvendo o Teorema de Pitágoras

O aluno, por meio de sucessivas aproximações com o Teorema, não somente logo após seu estudo na 7ª série ou 8ª série conseguirá enfrentar melhor a complexidade de interpretação das figuras e enunciados como passará a "enxergar" sua aplicação como conseqüência.

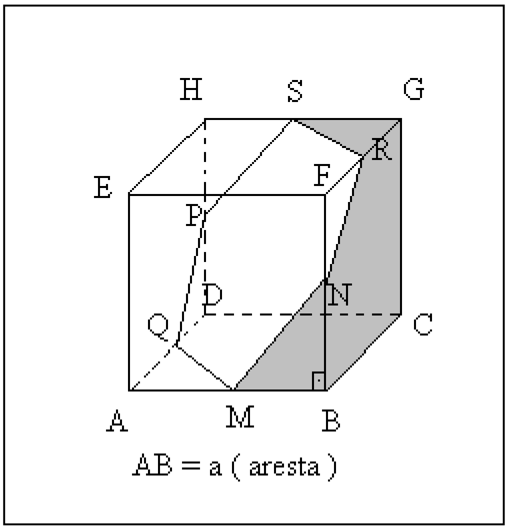
Com base nesse argumento, algumas atividades poderiam ainda ser propostas, mesmo no decorrer do 2º grau. O objetivo principal, na colocação desses problemas, seria dar oportunidade ao aluno de desenvolver, cada vez mais, a capacidade de recontextualizar o saber adquirido, aplicando-o em novas situações não típicas. De nada vale um treinamento intensivo com problemas padronizados se o aluno, diante de uma nova situação, não for capaz de usar raciocínio, criatividade e capacidade de análise e pesquisa para chegar à solução.

Exemplo 1

"É possível cortar um cubo de queijo em duas partes iguais de modo que o corte seja um hexágono regular? Justifique."

O objetivo maior para esse problema é dar oportunidade ao aluno de desenvolver a capacidade de recontextualizar o saber, aplicando-o em nova situação.

Análise do ponto de vista matemático



O problema exige que o hexágono seja regular, isto é, os lados devem ser congruentes entre si.

Considerando-se os pontos médios das arestas AB, BF, FG, GH, HD e DA como vértices do hexágono, fica resolvido o problema.

Justificação

No triângulo retângulo MBN, a medida da hipotenusa MN pode ser obtida usando-se o Teorema de Pitágoras

$$MN^2 = MB^2 + BN^2$$

$$MN^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$MN^2 = \frac{(a)^2}{4} + \frac{(a)^2}{4} \qquad MN = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Analogamente, para os demais lados do hexágono.

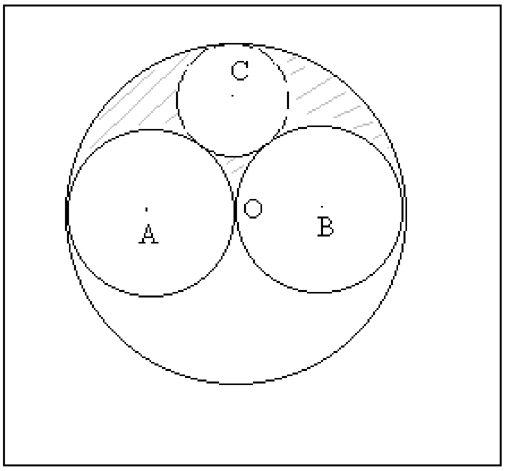
Análise do ponto de vista didático

Trata-se de um problema aberto, cujo enunciado absolutamente não induz à aplicação do Teorema de Pitágoras. O grau de autonomia é grande permitindo ao aluno fazer conjecturas e, a seguir, testá-las.

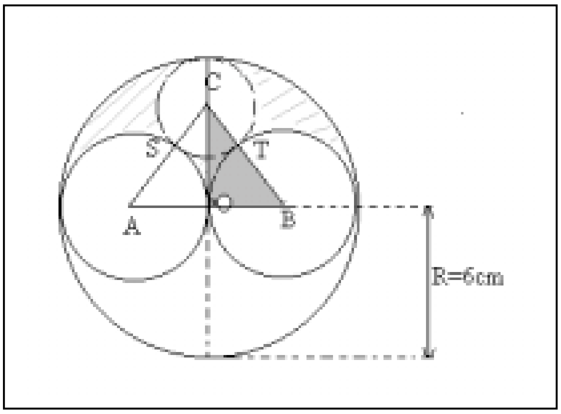
Com base em Duval e Padilla, são previstas dificuldades em vários níveis: a visualização do cubo em perspectiva; a não congruência entre enunciado e Teorema de Pitágoras; a necessidade de traçados auxiliares, isto é, segmentos unindo dois a dois os pontos médios de seis arestas; e, para justificar o procedimento, a “mudança de quadros”, de geométrico para algébrico.

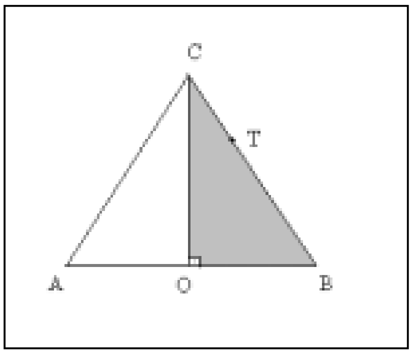
Exemplo 2

“É dado um círculo de centro O e raio R = 6 cm. Inscrevem-se três círculos conforme figura. Calcule a área da parte hachurada.” (A e B estão no diâmetro do círculo de centro O)



Análise do ponto de vista matemático





(Δ ABC é isósceles)

Designando-se o raio do círculo de centro em C por r, tem-se:

BC = CT + TB   pois os círculos são tangentes.

Mas: CT = r, TB = OB = $\frac{R}{2}$ e OC = R – r

Então: BC = r + 3 e OC = 6 – r

Aplicando-se o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo OBC, tem-se:

$$BC^2 = OB^2 + OC^2$$

$$(r + 3)^2 = 3^2 + (6-r)^2$$

$$r^2 + 6r + 9 = 9 + 36 - 12r + r^2$$

$$18\,r = 36 \qquad \text{então } r = 2$$

A área da parte hachurada é igual à área do semicírculo de raio 6 cm., subtraída da área do círculo de raio 3 cm. (pois são dois semicírculos), menos a área do círculo de raio r = 2.

$$A = \frac{\pi 6^2}{2} - \pi 3^2 - \pi 2^2$$

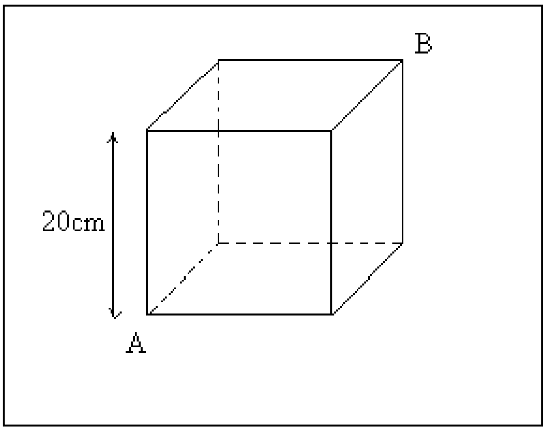
$$A = \frac{36\pi}{2} - 9\pi - 4\pi \text{ então} \qquad A = 5\pi cm^2$$

<u>Análise do ponto de vista didático</u>

O problema propicia ao aluno a oportunidade de reinvestir em vários conhecimentos adquiridos em séries anteriores, tanto no quadro geométrico como no quadro algébrico; por exemplo: propriedades de circunferências tangentes, área do círculo, propriedades do triângulo isósceles, produtos notáveis, resolução de equação do 2º grau. Apesar de se tratar de um problema fechado, o grau de autonomia é relativamente grande, pois o aluno pode fazer conjecturas, tendo assim a oportunidade de desenvolver a capacidade de perceber as subfiguras importantes para a solução do problema. Note-se que os traçados auxiliares não constam da figura inicial, o que não facilita a percepção do triângulo retângulo-chave.

Exemplo 3

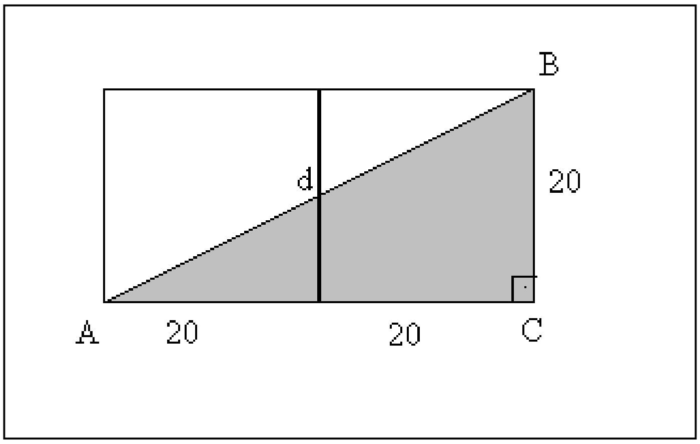
"Uma formiga encontra-se no vértice A de uma lata de forma cúbica, como mostra a figura. Ela vê um grão de açúcar no vértice B.



Quanto mede o menor percurso que ela pode utilizar para chegar em B, sobre a superfície da lata?"

Análise do ponto de vista matemático

O aluno deverá perceber que a estratégia de resolução é a planificação da superfície do cubo. Considerando-se as duas faces que interessam ao problema e denominando C a outra extremidade da aresta vertical com extremidade em B, tem-se:



No triângulo retângulo ABC, aplicando-se o Teorema de Pitágoras:

$AB^2 = AC^2 + BC^2$

Portanto $d^2 = 40^2 + 20^2$ ou $d = 20\sqrt{5}$

para $\sqrt{5} \approx 2{,}2$, $d \approx 44$ cm.

Essa é a menor distância que a formiga poderá percorrer.

Análise do ponto de vista didático

Apesar de ser um problema envolvendo cálculos numéricos, permite o estabelecimento de um resultado mais geral, se a medida 20 para a aresta for substituída por a. O enunciado, explicitamente, pede o caminho sobre a superfície da lata, o que deverá descartar, imediatamente, a idéia do cálculo da diagonal do cubo. Porém, para alunos habituados ao emprego de fórmulas, talvez a fórmula da diagonal se torne um "obstáculo" a superar.

A maior dificuldade poderá ser a não congruência entre o enunciado do problema e o Teorema de Pitágoras. A percepção da estratégia de resolução vai depender da familiaridade ou não do aluno com problemas não convencionais.

Sobre ternas pitagóricas

Arconcher (1991, pp. 10-11) apresenta uma propriedade das ternas pitagóricas construídas a partir de dois números inteiros m > n > 0: "Em qualquer terna pitagórica reduzida, isto é sem divisores comuns para os componentes, os números 3, 4, 5 estão presentes", obedecendo ainda à condição de que m e n sejam primos entre si e ambos não ímpares.

[Os detalhes acrescentados à demonstração exposta no artigo constarão entre colchetes em italic.]

Seja $(m^2 - n^2, 2mn,\ m^2 + n^2)$ uma terna nas condições acima exigidas.

O fator 4 sempre estará no elemento 2mn, pois pelo menos um dos fatores deve ser par.

Se o fator 3 não ocorrer no elemento 2mn, então ele estará em $m^2 - n^2$. De fato, dividindo m e n por 3, os restos possíveis serão 1 ou 2. Portanto m e n são da forma 3k + 1 ou 3k + 2 *[k, natural].*

[No primeiro caso, $(3k+1)^2 = 9k^2 + 6k + 1$ *pode ser pensado como* $3k(3k+2)+1$ *e, portanto, da forma 3K+1, em que* $K = k(3k+2)$*. No segundo caso,* $(3k+2)^2 = 9k^2 + 12k + 4$ *pode ser escrito como* $9k^2 + 12k + 3 + 1 = 3(k(3k+4)+1)+1$ *sendo, então, também da forma 3H+1, em que* $H = k(3k+4)+1$*. Assim, a diferença entre esses dois números* $3K + 1 - (3H+1) = 3(K - H)$ *será divisível por 3.]*

Isto significa que $m^2 - n^2$ será divisível por 3.

Se o fator 5 não ocorrer no elemento 2mn, então ele estará em $m^2 - n^2$ ou em $m^2 + n^2$. De fato, dividindo m e n por 5, os restos possíveis serão 1, 2, 3 ou 4. Nesse caso, m e n serão de uma das formas: 5k + 1, 5k + 2, 5k + 3 ou 5k + 4. O quadrado de qualquer um desses números é da forma 5k + 1 ou 5k + 4.

[Isso porque

$$(5k+1)^2 = 25k^2 + 10k + 1$$
$$(5k+1)^2 = 5k(5k+2k)+1 \qquad \text{em que } K = k(5k+2k)$$
$$(5k+1)^2 = 5K + 1$$

$$(5k+2)^2 = 25k^2 + 20k + 4$$
$$(5k+2)^2 = 5k(5k+4) + 4 \qquad \text{em que } H = k(5k+4)$$
$$(5k+2)^2 = 5H + 4$$

$$(5k+3)^2 = 25k^2 + 30k + 9$$
$$(5k+3)^2 = 25k^2 30k + 5 + 4$$
$$(5k+3)^2 = 5(k(5k+6)+1)+4 \qquad \text{em que } L = k(5k+6)+1$$
$$(5k+3)^2 = 5L + 4$$

$$(5k+4)^2 = 25k^2 + 40k + 16$$
$$(5k+4)^2 = 25k^2 + 40k + 15 + 1$$
$$(5k+4)^2 = 5(k(5k+8)+3)+1 \qquad \textit{em que } M = k(5k+8)+3\ ]$$
$$(5k+4)^2 = 5M + 1$$

Assim, se m^2 e n^2 forem do mesmo tipo (5k + 1 ou 5k + 4), $m^2 - n^2$ será múltiplo de 5. Caso contrário, o fator 5 estará em $m^2 + n^2$. *[Pois, a soma* $(5k+1)+(5k'+4)$ *pode ser escrita como* $5(k+k')+5 = 5(k+k'+1)$ *.]*

“Numa terna pitagórica, não há como escapar dos números 3, 4, 5!” (idem).

No próximo capítulo será apresentado o estudo de uma parte da Transposição Didática, mostrando de que modo o Objeto Matemático Teorema de Pitágoras chega ao aluno. Inclui-se, também, o teste aplicado com o intuito de detectar as concepções dos alunos ao utilizá-lo como ferramenta na resolução de problemas.

CAPÍTULO IV
ESTUDO DO TEOREMA DE PITÁGORAS NO ENSINO

Este estudo visa pesquisar primeiramente como o Teorema de Pitágoras foi e é abordado nos livros didáticos no decorrer das mudanças curriculares e confrontar os diferentes enfoques com as Propostas Curriculares então vigentes. Além disso, a observação das variáveis empregadas (dados numéricos, posição das figuras, tipo de enunciado) nos exercícios resolvidos e/ou propostos nos referidos livros serviu também de subsídio para uma interpretação de alguns tipos de erro cometidos pelos alunos.

O levantamento das concepções dos alunos sobre o Teorema de Pitágoras foi realizado por intermédio de um questionário, tendo como objetivo detectar dificuldades e erros, conseguindo-se, assim, elementos que norteariam a elaboração da Seqüência Didática.

Análise dos livros didáticos

A seleção dos livros didáticos, que serão agora analisados, foi feita levando-se em conta a abrangência de quatro décadas e as diferentes abordagens do Teorema e suas aplicações. A análise se torna importante uma vez que do livro didático se origina um tipo de saber, que formará uma cultura particular nos alunos de uma mesma época.

Por meio do quadro-resumo, apresentado mais adiante, pretende-se proporcionar uma visão global da análise de doze livros, cuja listagem, numerada em ordem cronológica de publicação, encontra-se no final deste trabalho, após a Bibliografia.

Propostas Curriculares da Secretaria da Educação (SP)

(I) Década de 70

Já nessa época havia a sugestão de introduzir o Teorema de Pitágoras na 7ª série do 1º grau, justificando-o por meio de reconfiguração. O objetivo era "aplicar o Teorema de Pitágoras para um triângulo retângulo qualquer".

Na 8ª série, ele estaria incluído nas relações métricas do triângulo retângulo.

(II) *Proposta de 1991*

a) para a 7ª série:

i. uma verificação experimental do Teorema de Pitágoras;

ii. uma demonstração do Teorema de Pitágoras;

iii. uma generalização do Teorema de Pitágoras;

b) para a 8ª série:

i. Relações métricas no triângulo retângulo.

ii. Demonstração do Teorema de Pitágoras."

(sugestão: por semelhança de triângulos)

No item ai., a proposta enfatiza que sejam também trabalhados triângulos acutângulos e obtusângulos, construindo-se quadrados sobre seus lados e comparando as áreas.

Para a verificação do teorema é proposta a reconfiguração, por recobrimento, do quadrado construído sobre a hipotenusa, a partir dos quadrados construídos sobre os catetos.

Sugere ainda "tecer algumas considerações de caráter histórico" incluindo problemas "antigos".

Quanto ao item aii., é sugerida como "uma primeira demonstração" a dos quadrados de lados (a + b).

No item aiii., é utilizada como primeira extensão do teorema a propriedade: "a área do semicírculo construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos semicírculos construídos sobre seus catetos".

Até a Proposta Curricular de l975, nos livros didáticos analisados, a Geometria era introduzida na 3ª série ginasial, continuando no decorrer da 4ª série, sempre bem separada da Álgebra. Nota-se uma preocupação em adotar uma ordem baseada em rigorosa axiomática, com definições, demonstrações de teoremas e das conseqüências.

Na década de 70, houve praticamente uma adaptação dos livros didáticos aos moldes da Matemática Moderna, com ênfase na Teoria dos Conjuntos, Estruturas Algébricas e Topologia, notando-se também uma mudança de postura no que se refere aos "diálogos" com o estudante, por meio de uma linguagem mais informal.

Na década de 80, os livros didáticos, seguindo os Guias Curriculares, apresentam a Geometria "intuitivamente", a partir da 5ª série do ensino fundamental (antiga 1ª série ginasial), mantendo-a porém ainda bem isolada da Aritmética e da Álgebra em tópicos geralmente situados na parte final do livro. O Teorema de Pitágoras, entretanto, somente aparece na 8ª série, introduzido de maneira expositiva, desacompanhado de qualquer problemática, como sendo a 4ª relação métrica nos triângulos retângulos e usando a semelhança de triângulos como ferramenta.

Os livros didáticos dos anos 90 deixam transparecer maior preocupação em tornar os alunos "ativos" por meio das próprias descobertas, deixando de lado a ordem acadêmica. De acordo com a Proposta Curricular da Secretaria de Educação (SP), o Teorema de Pitágoras passa a ser introduzido e "demonstrado" na 7ª série (antiga 3ª série ginasial) em alguns livros didáticos analisados, como (8) e (10), por meio de reconfiguração e/ou cálculo de áreas, surgindo novamente na 8ª série, com a demonstração por semelhança de triângulos, no tópico sobre relações métricas no triângulo retângulo. Em outros, como (6), (7) e (12), permanece, entretanto a antiga ordem de apresentação, surgindo o Teorema de Pitágoras apenas na 8ª série, por meio de uma abordagem expositiva.

Para análise mais detalhada dos livros foram utilizados os seguintes critérios:

a) Introdução histórica e abordagem

- alusão ou não à utilização do Teorema de Pitágoras por povos antigos, como os egípcios;
- informações biográficas sobre Pitágoras;
- maneira de abordar o Teorema e em que série isso ocorre.

b) Tipo de demonstração

- por reconfiguração;

- utilizando as relações métricas no triângulo retângulo demonstradas por meio de semelhança de triângulos.

c) Dedução e uso de fórmulas

- para o cálculo da diagonal do quadrado;
- para o cálculo da altura do triângulo equilátero.

d) Exercícios aplicando o Teorema

- exercícios resolvidos;
- exercícios propostos.

e) Variáveis didáticas utilizadas nos exercícios

- numéricas: números naturais, racionais (na forma fracionária ou decimal), números irracionais;
- enunciados com ou sem registro de desenho;
- posição dos triângulos;
- utilização de outras figuras geométricas, planas ou espaciais, das quais o triângulo retângulo é subfigura.

f) Peculiaridades encontradas

- quanto ao contrato didático;
- impressão do livro didático;
- currículo alternando Álgebra e Geometria.

É oportuno lembrar que, na relação professor-aluno, um dos mais importantes resultados obtidos pelos pesquisadores em Didática da Matemática é a noção de "contrato didático", que, segundo Brousseau, citado por Ag Almouloud (1997, p. 84), é o "conjunto das regras que determinam explicitamente para uma pequena parte, mas sobretudo implicitamente, o que cada parceiro da relação didática vai ter a gerenciar e que cada um, de uma maneira ou de outra, terá de computar em frente ao outro". Citando ainda Brousseau, Almouloud acrescenta (idem, p. 85): "As escolhas pedagógicas, o tipo de trabalho proposto para os alunos, os objetivos de formação, a epistemologia do professor, as condições de avaliação etc. fazem parte dos determinantes essenciais do contrato didático".

Um contrato didático mal colocado ou mal entendido pode gerar dificuldades para os alunos. Muitas vezes, o professor, com o intuito de obter melhor rendimento escolar, adota certas atitudes visando facilitar aos alunos as tarefas. Dessa postura podem advir os chamados "efeitos do contrato didático", tais como: efeito Topaze, quando o professor se encarrega do trabalho essencial, por exemplo, sugerindo de antemão caminhos de resolução dos problemas. Desse modo, os conhecimentos visados não se consolidam, pois o aluno não consegue compreender o assunto em questão; sua ação está vinculada às indicações fornecidas pelo professor. O *escorregamento metacognitivo* ocorre quando o uso de determinada técnica de resolução ocasiona o distanciamento do verdadeiro saber a ser desenvolvido.

Por meio da observação do quadro resumo é possível tecer algumas considerações.

Critério a) sobre a importância da introdução histórica, destacam-se nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) os seguintes argumentos:

> A História da Matemática pode oferecer uma importante contribuição ao processo de ensino-aprendizagem dessa área do conhecimento. Ao revelar a Matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor cria condições para que o aluno desenvolva atitudes e valores mais favoráveis diante desse conhecimento.
>
> (...) Em muitas situações, o recurso à História da Matemática pode esclarecer idéias matemáticas que estão sendo construídas pelo aluno, especialmente para dar respostas a alguns porquês e, desse modo, contribuir para a constituição de um olhar mais crítico sobre os objetos de conhecimento.
>
> Assim, a própria história dos conceitos pode sugerir caminhos de abordagem deles, bem como os objetivos que se pretendem alcançar com eles (pp. 42-43).

Os livros didáticos (1) e (2), do mesmo autor, apresentam breves comentários de natureza histórica sobre Pitágoras e sobre a terna (3, 4, 5).

No livro (7), os autores iniciam o capitulo relativo ao Teorema de Pitágoras comentando a terna (3, 4, 5) e mostrando, por meio de áreas, a validade da relação

$3^2 + 4^2 = 5^2$. A seguir, o teorema é enunciado.

O livro didático (8), após uma breve introdução histórica, enuncia o Teorema, que vai ser usado como ferramenta para comentar a existência de números irracionais, por meio da incomensurabilidade da diagonal e lado de um quadrado

No livro (10), a propriedade pitagórica é introduzida e enunciada a partir de um relato histórico sobre o "esquadro egípcio".

Os livros (9) e (11), respectivamente dos mesmos autores de (8) e (9), retomam o Teorema na 8ª série.

Os demais livros apresentam o Teorema de Pitágoras apenas na 8ª série.

Critério b) quanto ao tipo de demonstração, observa-se que os livros de 8ª série analisados situam o Teorema no tópico "Relações métricas no triângulo retângulo", as quais são demonstradas algebricamente utilizando-se semelhança de triângulos. De acordo com os PCNs:

> Embora se saiba que alguns conhecimentos precedem outros e que as formas de organização sempre indicam um certo percurso, não existem, por outro lado, amarras tão fortes como algumas que podem ser observadas comumente, tais como: apresentar a representação fracionária dos racionais, para introduzir posteriormente a decimal; desenvolver o conceito de semelhança, para depois explorar o Teorema de Pitágoras (p. 22).

Sob esse aspecto, os livros nos quais o Teorema de Pitágoras é apresentado somente na 8ª série, estão em desacordo com a reorientação curricular apontada nos PCNs.

No tópico específico para 7ª e 8ª série:

> As atividades de Geometria são muito propicias para que o professor construa junto com seus alunos um caminho que a partir de experiências concretas leve-os a compreender a importância e a necessidade da prova para legitimar as hipóteses

levantados. Para delinear esse caminho, não se deve esquecer a articulação apropriada entre os três domínios citados anteriormente: o espaço físico, as figuras geométricas e as representações gráficas.

Tome-se o caso do Teorema de Pitágoras para esclarecer um dos desvios freqüentes quando se tenta articular esses domínios. O professor propõe ao aluno, por exemplo, um quebra-cabeças constituído por peças planas que devem compor, por justaposição, de diversas maneiras diferentes, um modelo material de um quadrado (...). Utilizando o principio aditivo relativo ao conceito de área de figuras planas, observa-se que $a^2 = b^2 + c^2$. Diz-se, então, que o Teorema de Pitágoras foi "provado" (p. 126).

(...) Apesar da força de convencimento para o aluno que possam ter esses experimentos com material concreto ou com a medição de um desenho, eles não se constituem provas matemáticas. Ainda que essas experiências possam ser aceitas como "provas" no terceiro ciclo, é necessário, no quarto ciclo, que as observações do material concreto sejam elementos desencadeadores de conjecturas e processos que levem às justificativas mais formais.

No caso do Teorema de Pitágoras, essa justificativa poderá ser feita com base na congruência de figuras planas e no principio da aditividade para as áreas. Posteriormente, os alunos poderão também demonstrar esse teorema quando tiverem se apropriado do conceito de semelhança de triângulos e estabelecido as relações métricas dos triângulos retângulos (p.127).

Embora os livros didáticos analisados sejam anteriores aos PCNs, algumas considerações se fazem necessárias.

É interessante salientar que o livro (1) inclui, no tópico "Áreas de figuras planas e Equivalência", a demonstração de Euclides e, no livro (2), do mesmo autor, também uma demonstração utilizando razão entre áreas de dois triângulos semelhantes.

O livro (3), além da demonstração algébrica por semelhança, ilustra todas as relações métricas no triângulo retângulo por meio da equivalência de áreas, utilizando a operação de reconfiguração, o que, para a época, se constituía numa abordagem diferenciada em relação aos demais livros dessa década.

Os livros didáticos (7) e (8) optaram pela demonstração hindu, por reconfiguração: no primeiro, seguida do cálculo de áreas e de uma mudança para o "quadro algébrico", no segundo, surge para ilustrar o que é uma "demonstração", porém sem mudança de quadro. Essa conduta, apesar de admissível, segundo os PCNs, no âmbito da 7ª série, não deveria constar no referido livro como exemplo de "demonstração", pois na realidade permite apenas "ver" a relação pitagórica.

No livro (9), a demonstração de Garfield aparece como curiosidade e mais adiante é feita uma alusão às ternas pitagóricas.

No livro (10), o Teorema surge após produtos notáveis e áreas de figuras planas, tópicos usados como ferramenta na demonstração. Os exercícios que se seguem enfatizam o Teorema como uma relação entre áreas, usando a reconfiguração na forma de puzzles.

Ainda sobre o Teorema de Pitágoras, os PCNs reiteram:

> Nenhuma verificação experimental ou medição feita com objetos físicos poderá, por exemplo, validar matematicamente o Teorema de Pitágoras ou o teorema relativo à soma dos ângulos de um triângulo. Deve-se enfatizar, contudo, o papel heurístico que têm desempenhado os contextos materiais como fontes de conjecturas matemáticas (p. 26).
>
> Em Matemática existem recursos que funcionam como ferramentas de visualização, ou seja, imagens que por si mesmas permitem compreensão ou demonstração de uma relação, regularidade ou propriedade. Um exemplo bastante conhecido é a representação do Teorema de Pitágoras mediante figuras que permitem "ver" a relação entre o quadrado da hipotenusa e a soma dos quadrados dos catetos (p. 45).

Resumindo, pode-se dizer que os livros didáticos, nos quais o Teorema surge primeiramente na 7ª série, com a ressalva feita ao de número (7), atendem em linhas gerais às determinações dos PCNs no que se refere ao critério b).

Critério c) quanto à dedução de fórmulas, com exceção do de número 11, os livros de 8ª série apresentam o cálculo da diagonal de um quadrado e da altura de um triângulo equilátero como aplicações do Teorema de Pitágoras. As fórmulas obtidas em alguns (1, 2 e 5) são posteriormente usadas na resolução de exercícios. Entretanto, o uso abusivo de fórmulas pode gerar o "escorregamento metacognitivo", pois o aluno, preso a elas, distancia-se do Teorema que as produziu. Trata-se da valorização da "memória" em detrimento da compreensão.

Critério d) o quadro-resumo mostra grande disparidade em relação à quantidade de exercícios. Em geral, os livros didáticos apresentam uma parte teórica e, a seguir, exercícios resolvidos e exercícios propostos. Fica então implícito que, para resolvê-los, o aluno deve aplicar o saber recém-adquirido. Quando, posteriormente em outros tópicos, o Teorema deva ser aplicado, os livros didáticos colocam essa sugestão explicitamente. Aliás, isso comprova as observações expressas nos Parâmetros Curriculares Nacionais: “(...) os conteúdos matemáticos são tratados isoladamente e não apresentados e exauridos num único momento. (...) a resolução de problemas (...) ainda se resume em uma mera atividade de aplicação ao final do estudo de um conteúdo matemático”. Cabe então ao professor evitar o efeito Topaze decorrente desse procedimento, propondo problemas abertos, nos quais o Teorema apareça como ferramenta ao lado de várias outras, oriundas de diferentes tópicos, como, por exemplo, áreas, cordas, tangências etc. De acordo com os PCNs: “(...) o papel do professor ganha novas dimensões (...) precisará escolher os problemas que possibilitam a construção de conceitos e procedimentos (...)”. Além disso, sobre a resolução de problemas, os PCNs destacam:

> A resolução de problemas, como eixo organizador do processo de ensino e aprendizagem de Matemática, pode ser resumida nos seguintes princípios:
>
> - a situação-problema é o ponto de partida da atividade matemática e não a definição. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, idéias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las;
>
> - o problema certamente não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório. Só há problema se o aluno for levado a interpretar o enunciado da questão que lhe é posta e a estruturar a situação que lhe é apresentada;
>
> - aproximações sucessivas de um conceito são construídas para resolver um certo tipo de problema; num outro momento, o aluno utiliza o que aprendeu para resolver outros, o que exige transferências, retificações, rupturas, segundo um processo análogo ao que se pode observar na História da Matemática;
>
> - um conceito matemático se constrói articulado com outros conceitos, por meio de uma série de retificações e generalizações. Assim, pode-se afirmar que o aluno constrói um campo de conceitos que toma sentido num campo de problemas, e não um conceito isolado em resposta a um problema particular;
>
> - a resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se podem apreender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas.” (pp. 40-41)
>
> (...) Resolver um problema não se resume em compreender o que foi proposto e em dar respostas aplicando procedimentos adequados. Aprender a dar uma resposta correta, que tenha sentido, pode ser suficiente para que seja aceita e até seja convincente, mas não é garantia de apropriação do conhecimento envolvido.

> Além disso, é necessário desenvolver habilidades que permitam pôr à prova os resultados, testar seus efeitos, comparar diferentes caminhos para obter a solução. Nessa forma de trabalho, a importância da resposta correta cede lugar à importância do processo de resolução.
>
> O fato de o aluno ser estimulado a questionar sua própria resposta, a questionar o problema, a transformar um dado problema numa fonte de novos problemas, a formular problemas a partir de determinadas informações, a analisar problemas abertos que permitem diferentes respostas em função de certas condições, evidencia uma concepção de ensino e aprendizagem não pela mera reprodução de conhecimentos, mas pela via da ação refletida que constrói conhecimentos. (p. 42)

Essas idéias serão levadas em conta na elaboração da seqüência didática.

Critério e) em relação às variáveis didáticas, como se pode observar no quadro-resumo, a quase totalidade dos livros didáticos analisados apresenta predominância de números naturais no que se refere aos dados numéricos dos problemas. Isso provavelmente vai ocasionar um "obstáculo didático" em séries seguintes, uma vez que o aluno se habitua somente com cálculos simples, não tendo a oportunidade de "reinvestir" em números decimais, exatos ou aproximados.

Quanto ao enunciado dos problemas, na maioria dos livros analisados nota-se o predomínio do registro de desenho, acompanhado ou não do enunciado discursivo. No primeiro caso a "conversão" dos registros já vem praticamente feita. Talvez fosse mais interessante deixar esta tarefa (discurso↔figura) a cargo do aluno.

Em alguns livros didáticos, as variáveis didáticas no quadro geométrico são bastante diversificadas, apresentando triângulos em várias posições incluindo rotações com vários ângulos, livros didáticos (3), (4), (5), (6), (12), e utilizando também outras figuras geométricas, planas ou espaciais, das quais o triângulo retângulo é subfigura. Entretanto, em outros (2), (7), (8), (9), (10), (11), predominam triângulos retângulos com um dos catetos na horizontal, mesmo quando há rotação. Essa escolha de variáveis pode acarretar, em séries seguintes, um "obstáculo didático", pois o aluno conseguirá visualizar o triângulo retângulo somente quando um dos catetos estiver na horizontal. Pesquisas comprovaram que o tempo gasto para reconhecer um mesmo objeto em duas figuras planas diferentes, obtidas por rotação de uma delas, é diretamente proporcional ao angulo de rotação (Duval, 1995, p. 196).

Nos exercícios em que é necessária a decomposição em subfiguras, estas aparecem, na maioria dos livros analisados, desde o início, indicadas por meio de linhas pontilhadas ou até mesmo cheias, o que facilita demais a visibilidade, impedindo assim o aluno de refletir sobre o problema e provocando o efeito Topaze. Como exemplo desse fato, destacam-se triângulos isósceles e trapézios nos quais a altura está traçada, retângulos, losangos e paralelepípedos já apresentando diagonais, delineando desse modo o triângulo retângulo-chave.

No caso das figuras espaciais, o professor poderia utilizar em classe representações em três dimensões, para evitar a limitação da representação em perspectiva, pois esta, segundo Duval (1995), tende a privilegiar um único ponto de vista.

A partir dos anos 80, os livros didáticos tendem a propor problemas envolvendo situações do cotidiano.

Um aspecto importante, pela gravidade, observado em praticamente todos os livros didáticos analisados, refere-se às soluções encontradas para a equação incompleta do 2º grau, que serve de ferramenta em inúmeros problemas envolvendo o Teorema de Pitágoras. Em equações do tipo $x^2 = a$ $(a > 0)$, somente a solução positiva da equação é considerada, não havendo nenhum comentário sobre a raiz negativa. É importantíssimo para o aluno perceber que a raiz negativa existe para a equação, mas não é adequada para expressar medida de segmento. Esse fato pode provocar um "obstáculo didático", pois o aluno fica com a falsa impressão de que a equação incompleta desse tipo admite uma única solução, em analogia à equação do 1º grau. Seria preferível destacar ambas as soluções, justificando a seguir a escolha da raiz positiva.

Critério f) os livros didáticos mais antigos deixam transparecer o contrato didático implícito da época, relativamente à memorização de fórmulas e regras, aulas expositivas e, por experiência pessoal, avaliação exclusivamente somativa. A própria apresentação dos livros parece não despertar no aluno motivação para o estudo. A partir dos anos 70, alguns autores tentam um "diálogo" fictício com o estudante, utilizando linguagem mais informal.

A construção do leque $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}$ etc., com exceção do livro (11), poderia ser melhor explorada em forma de problema aberto. Em alguns livros didáticos, (4), (5) e (12), consta como exercício proposto, sendo dada a figura; em outros se encontra no bloco de exercícios resolvidos, porém sem maiores comentários, o que contraria as observações encontradas nos PCNs sobre o trabalho com espaço e forma, o qual pressupõe que o professor de Matemática deva explorar situações em que sejam necessárias algumas construções geométricas com régua e compasso, como visualização e aplicação de propriedades das figuras, além da construção de outras relações.

Convém ressaltar ainda que, sobre a condição de existência de triângulo muito pouco foi encontrado. No livro (8), aparece sob a forma de atividade para o aluno e, mais adiante, é institucionalizada. No livro (12) surge no tópico “Construção de triângulos”, o qual antecede o capítulo sobre congruência de triângulos.

Nenhuma tentativa de generalização do Teorema de Pitágoras foi encontrada e, sobre o recíproco do Teorema, o que se pode observar é que, apesar do enunciado não constar explicitamente nos livros didáticos, sua utilização implícita é feita em alguns exercícios.

Com o passar dos anos os livros didáticos tiveram a roupagem, isto é, apresentação gráfica, encadernação, ilustrações, bastante modificada, mas a essência só começa a mostrar indícios de renovação em alguns.

Critérios usados na análise dos livros didáticos

Livro	série	introdução histórica	demonstração: reconfiguração	demonstração: detalhada	dedução e uso de fórmulas	exercícios resolvidos	exercícios propostos	variáveis utilizadas	
1 (1954)	4ª Ginasial	breve comentário, como nota de "roda-pé"		relações métricas no triângulo retângulo (semelhança)	* diagonal do quadrado * altura do triângulo equilátero	5	25	números naturais, decimais, irracionais	* exercícios enunciados <u>sem</u> registro de desenho
2 (1967)	4ª Ginasial	breve alusão aos egípcios (3,4,5)		idem ao 1	* idem anterior * $sen^2x + cos^2x=1$ * cálculo de sen e cos 30º, 45º , 60º	9	29	idem ao 1	* enunciados * registro de desenho * um cateto horizontal
3 (1976)	8ª		de todas as relações métricas no triângulo retângulo	idem ao 1	não há	1	47	idem ao 1	* triângulos em várias posições * exercícios literais
4 (1982)	8ª			idem ao 1	não há		48 + 25 testes	idem ao 1	idem ao 3
5* (1984)	8ª			idem ao 1	idem ao 1		32 + 21 (reforço)	* predomínio de números naturais * irracionais	* triângulos em várias posições * outras figs. geométricas
6* (1994)	8ª			idem ao 1	idem ao 1	2	53+21	idem ao 5	idem ao 5
7 (1994)	8ª	egípcios (3,4,5)	com o cálculo das áreas	idem ao 1	idem ao 1	5+ 4 (por fórmula)	45 + 38	idem ao 5	idem ao 5
8 (1995)	7ª	egípcios (3,4,5) biografia de Pitágoras	com o cálculo de áreas			1	11+4+4	números naturais decimais, irracionais	*enunciados com registro de desenho *um dos catetos horizont.
9 (1995)	8ª		demonstração de Garfield	idem ao 1	idem ao 1, como exerc.		27	*predomínio de números naturais *irracionais	várias aplicações inclusive em figuras espaciais
10 (1997)	7ª	egípcios (3,4,5)	cálculo de áreas	áreas, mais cálculo algébrico		1	18	predomínio de númemeros naturais	quase não varia a posição dos triângulos
11 (1997)	8ª			idem ao 1		2	16+3	predomínio de números naturais	figuras em várias posições (com um cateto horizont.)
12* (1997)	8ª			idem ao 1	idem ao 1	2	74	idem ao 5	idem ao 5

QUESTIONÁRIO

No que toca especificamente ao aspecto didático, os Irem de Orléans e de Poitiers publicaram interessantes artigos relatando pesquisas referentes ao Teorema de Pitágoras e apresentando atividades propostas aos alunos, algumas das quais foram utilizadas parcialmente ou na íntegra na elaboração deste questionário. Além disso, de livros didáticos franceses consultados foram extraídos problemas e/ou idéias para compor o elenco de questões.

<u>Objetivo</u>

Identificar as dificuldades dos alunos na resolução de problemas envolvendo o Teorema de Pitágoras.

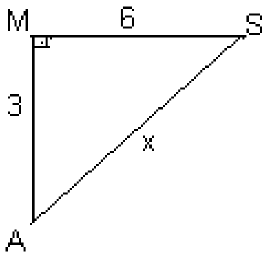
<u>Público-alvo</u>

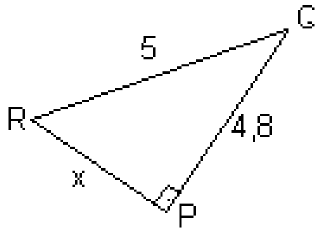
Foi aplicado em alunos de 1º colegial (ensino médio), pois atualmente o Teorema de Pitágoras consta dos programas de 7ª e/ou 8ª série do ensino fundamental, conforme se pode verificar na análise dos livros didáticos.

Análise a priori do questionário

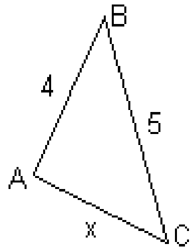
Questão 1) *Nas figuras abaixo o que se pode dizer do comprimento x do lado do triângulo, sabendo-se que as medidas estão na mesma unidade*?

a)





c)



Foram utilizados o registro discursivo e o registro de figuras. Não se pedia explicitamente para calcular o comprimento x e sim “o que se pode dizer de x”. No item a, eram dadas as medidas dos catetos e no item b a medida de um cateto e da hipotenusa. O item c tratava de um triângulo não retângulo, apesar da aparência.

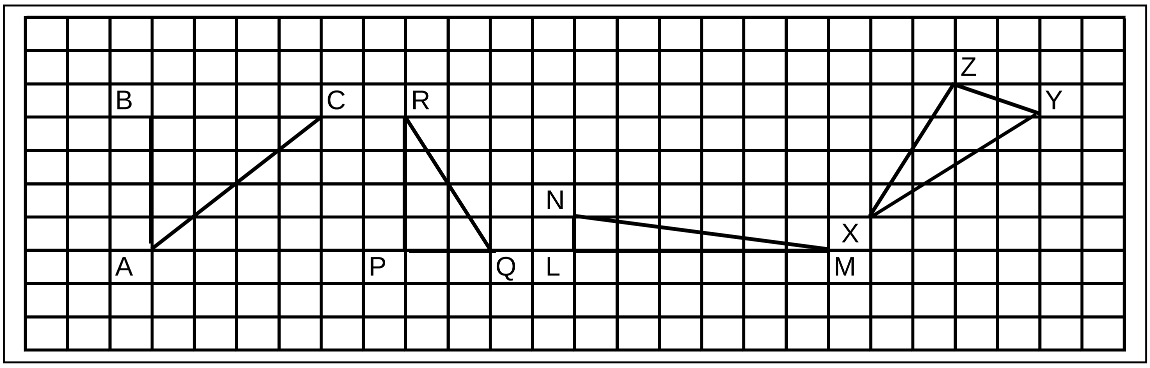
O objetivo consistia em investigar se, para o aluno, a igualdade pitagórica tem significado, o que permitiria identificar corretamente catetos e hipotenusa, no caso do triângulo retângulo, independentemente da posição do triângulo e da nomenclatura usada para os vértices, itens a e b; no item c, verificar se o triângulo é implicitamente admitido como retângulo com base apenas na apreensão perceptiva, e detectar se o aluno teria conhecimento da condição de existência de triângulo. Um objetivo secundário seria verificar se o aluno está habituado a trabalhar com radicais e decimais.

Como a maioria dos livros didáticos analisados utiliza, nos dados, variáveis que resultam em quadrados perfeitos, no item a procurou-se escolher números naturais que ocasionassem resultado irracional, representado por um radical, o qual poderia ser simplificado ou transformado em número decimal aproximado, isto é, $x = 3\sqrt{5}$ ou $x \approx 6{,}7$. No item b, os dados decimais, escolhidos convenientemente, resultavam em $x = \sqrt{1{,}96}$ (quadrado perfeito) e, portanto, $x = 1{,}4$.

Os exercícios propostos nos itens a e b são semelhantes aos encontrados em livros didáticos, exceto pela escolha das variáveis, isto é, posição e nomenclatura dos triângulos e dados numéricos ocasionando resultados não naturais. A passagem do quadro geométrico para o algébrico se realiza por meio da aplicação da igualdade pitagórica. O “custo” dependeria do método de resolução empregado para a equação incompleta; seria maior se o aluno utilizasse a fórmula de Bhaskara. A expectativa era que os dois itens não oferecessem grande dificuldade para alunos com conhecimentos de Geometria de 8ª série (ensino fundamental).

O item c, um problema aberto com bom grau de autonomia, dependia da utilização da condição de existência de triângulo como ferramenta, além de mobilizar conhecimentos do quadro algébrico, ou seja, sistemas de inequações simultâneas do 1º grau, resultando $1 < x < 9$. A previsão era que esse item apresentaria, muito provavelmente, índice baixo de acertos, por dois motivos principais: quebra do contrato didático, pois a questão estava imersa num bloco de exercícios cuja resolução dependia da utilização do Teorema de Pitágoras, e pelo fato de a maioria dos livros didáticos analisados não enfatizar a condição de existência de triângulo. Dois tipos de comportamento do aluno eram esperados em relação a essa questão: o uso indevido do Teorema Pitágoras ou uma expressão de dúvida quanto à natureza do triângulo.

Questão 2) *Para cada um dos triângulos abaixo, dê a medida dos três lados. Esses triângulos foram construídos sobre quadriculado de malhas quadradas de lado* *1.*



a) Medidas dos lados do triângulo ABC.

b) Medidas dos lados do triângulo PQR.

c) Medidas dos lados do triângulo LMN.

d) Medidas dos lados do triângulo XYZ.

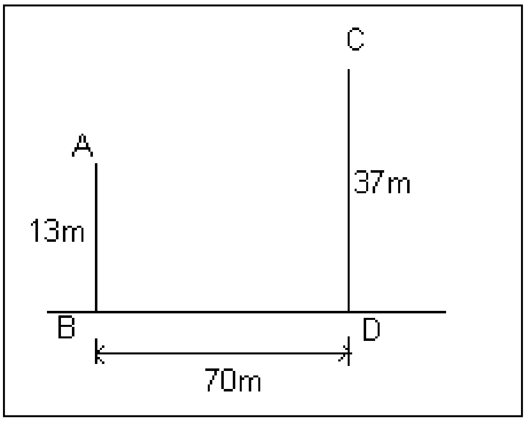
Tinha como objetivo verificar se o aluno conseguiria assegurar os requisitos para a utilização do Teorema e como ele extrairia os dados apresentados por meio da malha quadriculada.

Os dados numéricos foram escolhidos de modo a facilitar os cálculos: o item b apresentando dados úteis na resolução de parte do item d. As dificuldades previstas eram, além da interpretação dos dados contidos na malha quadriculada, o reconhecimento do triângulo não retângulo no item d e a conseqüente necessidade da construção de subfiguras, exigindo os seguintes cálculos:

$$XY^2 = 4^2 + 3^2 \qquad XY^2 = 25 \qquad XY = 5$$
$$XZ^2 = 2^2 + 4^2 \qquad XZ^2 = 4 + 16 \qquad XZ = \sqrt{20} \qquad XZ = 2\sqrt{5}$$
$$YZ^2 = 1^2 + 2^2 \qquad YZ^2 = 5 \qquad YZ = \sqrt{5}$$

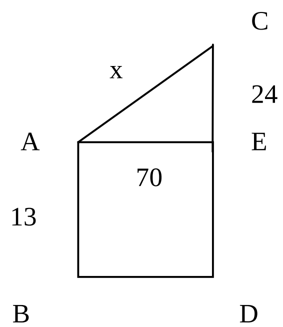
A questão foi baseada num trabalho sobre utilização do Teorema de Pitágoras do Irem de Poitiers (Suivi Scientifique, 1987-1988).

Questão 3) *AB e CD representam duas torres. A primeira tem 13 m de altura e a segunda, 37 m. A distância entre elas é de 70 m. Qual a distância entre os extremos A e C?*



Visava verificar se o aluno conseguiria decompor uma figura complexa em subfiguras para obter o triângulo retângulo, matematizando uma situação da vida cotidiana.

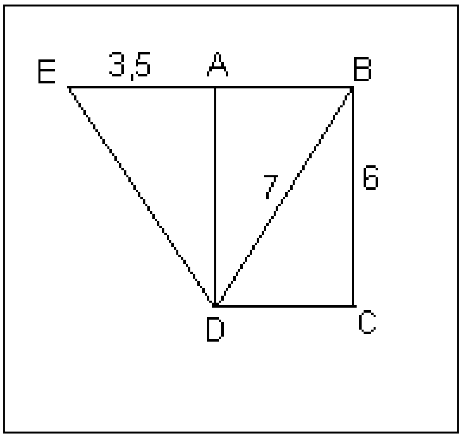
$$x^2 = 70^2 + 24^2$$
$$x^2 = 5476$$
$$x = 74 \text{ m}$$



Os dados numéricos ocasionam, após a igualdade pitagórica, um quadrado perfeito com quatro algarismos, cuja raiz quadrada poderia ser obtida por decomposição em fatores primos, pelo algoritmo ou mesmo por tentativa.

Tratando-se de uma questão comum, encontrada em alguns dos livros didáticos analisados, a previsão era de um bom índice de acertos.

Questão 4) *É verdade que o triângulo EBD é isósceles? (ABCD é um retângulo).*



Tinha por objetivo verificar se o aluno reconheceria, numa figura complexa, os triângulos retângulos convenientes para a resolução do problema, se consideraria as três possibilidades para a base do triângulo (EB, ED ou BD) e qual o efeito da apreensão perceptiva.

Dos dados numéricos resultavam valores muito próximos para os lados do triângulo escaleno, isto é, EB $\approx$ 7,1; ED $\approx$ 6,9 e BD = 7 (dado). A figura dada, parecendo representar um triângulo equilátero, poderia provocar no aluno conclusões errôneas, baseadas na apreensão perceptiva.

$$x^2 + 6^2 = 7^2$$
$$x^2 = 49 - 36$$
$$x = \sqrt{13}$$
$$x \approx 3,6$$

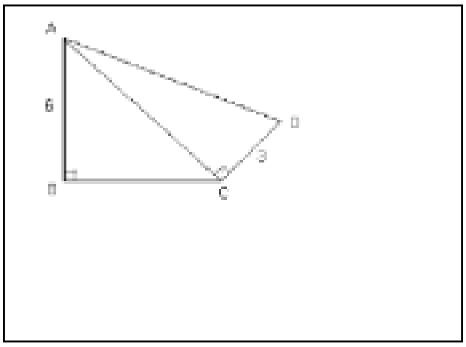
$$y^2 = (3,5)^2 + 6^2$$
$$y^2 = 12,25 + 36$$
$$y^2 = 48,25$$
$$y = \sqrt{48,25}$$
$$y \approx 6,9$$

Mesmo que o aluno não soubesse extrair raiz quadrada de números decimais, ele poderia comparar os radicandos para decidir se os lados têm ou não mesma medida.

Ex. $48{,}25 < 49$.

Questão extraída, na íntegra, de uma avaliação sobre o Teorema de Pitágoras publicada pelo Irem de Poitiers (Suivi Scientifique, 1987-1988).

Questão 5) *Na figura, AB = BC, AB = 6 e CD = 3. Para ir de A até C,_o caminho AB + BC é mais curto que o caminho AD + DC? Justifique a resposta.*



Por meio desta questão, o intuito era verificar se o aluno reconheceria a utilidade do Teorema de Pitágoras para a resolução do problema e, também, investigar se conseguiria dar a conclusão do problema.

Os dados propiciam resultado inteiro, a fim de facilitar a decisão final do aluno, como se pode observar:

sejam x = AC e y = AD

$$x^2 = 6^2 + 6^2 \qquad y^2 = 72 + 9$$
$$x^2 = 72 \qquad y^2 = 81$$
$$x = 6\sqrt{2} \qquad y = 9$$

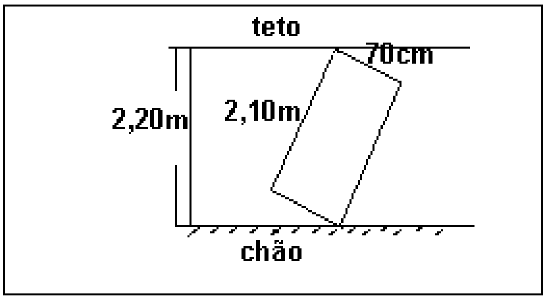
Assim: AB + BC = 12 e AD + DC = 12.

Logo, os caminhos têm o mesmo comprimento.

A simplificação de radicais não precisaria necessariamente ser efetuada, pois somente o quadrado da primeira hipotenusa é utilizado no cálculo da segunda.

Questão extraída do livro didático *Pythagore* (1992, p. 195).

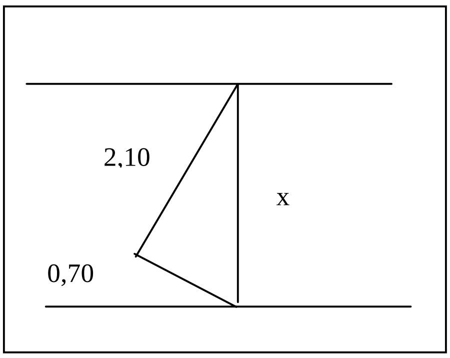
Questão 6) *Será que é possível colocar este armário em pé, isto é, na vertical? Suas dimensões são: altura = 2,10 m e profundidade = 0,70 m. Justifique a resposta.*



Última questão, tinha como objetivo detectar se o aluno reconheceria a necessidade da utilização do Teorema de Pitágoras matematizando uma situação do cotidiano e distinguindo decimal exato de aproximado.

Os dados do problema vieram representados por um registro de desenho e, também, por um enunciado, no qual aparece a conversão de unidades (profundidade = 0,70 m), para facilitar a resolução do problema. As variáveis parecem ter sido escolhidas de modo a evitar qualquer conclusão intuitiva (pé-direito = 2,20 m e hipotenusa $\approx 2{,}21$ m).

Questão extraída do livro didático francês *Mathématiques* (Delor, Terracher & Vinrich, 1995, p.171), porém o aspecto da figura (posição do armário, resultando a hipotenusa do triângulo praticamente na vertical) foi propositadamente modificado, para evitar conclusões, por parte do aluno, baseadas na figura.



$$x^2 = 210^2 + 70^2$$
$$x^2 = 44100 + 4900$$
$$x = \sqrt{49000}$$

$x \approx 221$ cm ou 2,21 m

Como 2,21 m > 2,20 m, conclui-se que o armário não poderá ser colocado em pé.

Comentário: como o teste seria aplicado em turmas de 1º colegial (ensino médio), esperava-se encontrar um público bastante heterogêneo, oriundo de escolas oficiais ou particulares com qualidade de ensino bastante diversificada. A expectativa era que as questões 4, 5 e 6, nas quais o Teorema deveria ser usado como ferramenta, pelo fato de serem bem diferentes das encontradas usualmente nos livros didáticos, apresentariam índices menores de acerto em relação às demais.

Aplicação do questionário

O teste foi aplicado, primeiramente, em uma turma constituída de 42 alunos de 1º colegial de uma escola estadual em São Paulo. Tratando-se de um colégio de 2º grau, agora nível médio, foi encontrada uma amostragem heterogênea, ou seja, cerca de 88% procediam de diversas escolas oficiais com qualidade de ensino bastante diversificada. Como conseqüência do elevado número de provas entregues totalmente em branco (50%), aplicou-se o teste em outra turma de 35 alunos de 1º colegial de uma escola particular da cidade de Santos, no Estado de São Paulo, em que havia apenas 15% de alunos oriundos de escolas públicas.

Os alunos deveriam resolver os problemas individualmente e foram instruídos a não apagar eventuais rascunhos ou cálculos. As questões foram impressas de modo a garantir espaço suficiente para a resolução, podendo ser o verso de cada folha utilizado para rascunho. Solicitou-se ao professor titular da classe a não intervir em casos de dúvidas relativas à interpretação ou resolução dos problemas. Por meio de uma nota de rodapé (vide Anexo I), o aluno ficava ciente do objetivo do questionário. O tempo estipulado para a solução das questões foi de 50 minutos.

Análise a posteriori do questionário

Devido ao alto porcentual de provas entregues em branco dos alunos do colégio estadual, somente foi considerada na análise o questionário respondido pelos alunos do colégio particular.

Por meio da correção do questionário foi possível detectar dificuldades encontradas pelos alunos na resolução dos problemas propostos e identificar as questões em que houve maior ocorrência de sucesso.

Para o tratamento dos dados obtidos foi efetuada a codificação apresentada no Anexo II, destacando-se modalidades de resposta, em média sete por item, envolvendo "acerto parcial/total", "tipo de erro", "questão em branco" e "considerações absurdas ou não pertinentes". Também como parte do método, as provas foram numeradas, cabendo a cada aluno um número de 1 a 35.

Questão 1

<u>Item a)</u> Apesar de ser a questão com maior índice de acertos (totais ou parciais) de todo o teste, os histogramas de barras mostram que esse valor ainda é menor que a soma dos não acertos (erro + resposta em branco).

Alguns dos erros encontrados:

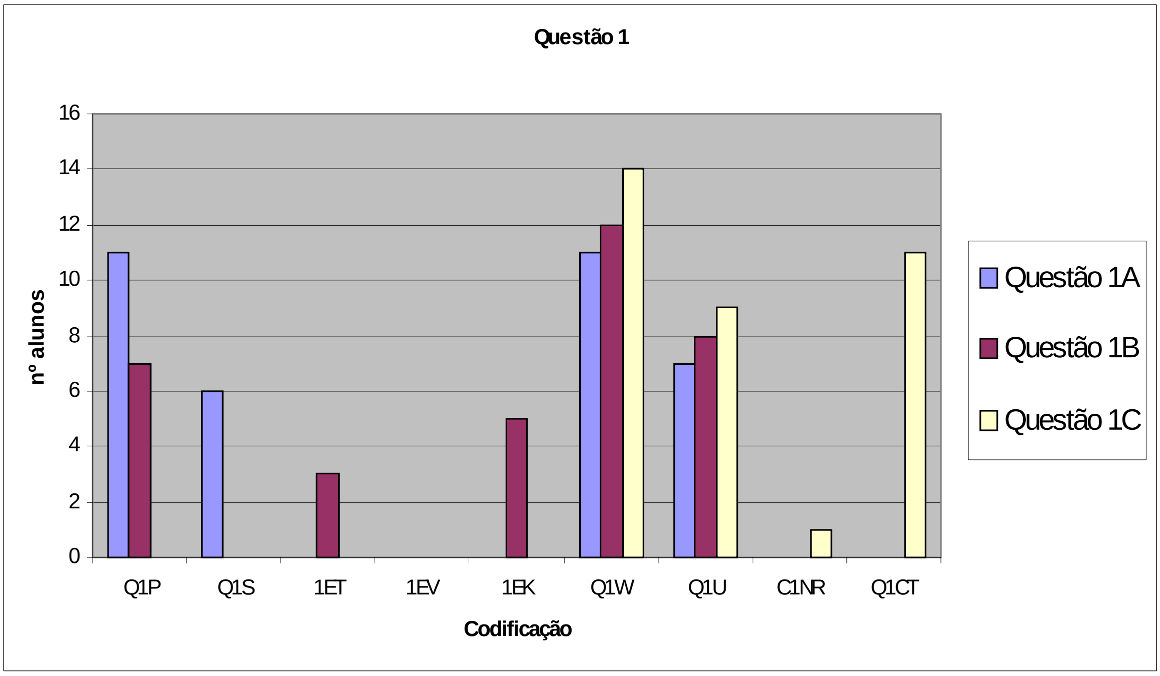
1) $x = 3 + 6 \quad x = 9$ (aluno nº 5)

2) $x = \frac{b.h}{2} \quad x = \frac{6.3}{2} = 9$ (aluno nº 21)

3) $x = \frac{3+6}{2} \quad x = 1{,}5$ (e não 4,5) (aluno nº 34)

<u>Item b)</u> Apresentou o segundo maior índice de sucesso da prova, porém muito inferior ao total de não-acertos. Os erros análogos aos apontados para 1a, ocorreram novamente em 1b.

<u>Item c)</u> Somente um aluno reconheceu que se tratava de um triângulo não retângulo, o que tornava inaplicável o Teorema de Pitágoras. Entretanto, não foi cogitada a utilização da condição de existência de triângulo como ferramenta para a resolução do problema. Onze alunos admitiram o triângulo como sendo implicitamente retângulo.



Questão 2

A dificuldade dos alunos em interpretar os dados do problema, contidos nas figuras desenhadas sobre malha quadriculada, superou as expectativas. Menos da metade da turma obteve êxito na determinação dos lados dos triângulos. Alguns alunos usaram a graduação de uma régua em centímetros para medi-los.

Item a) O aluno de nº 12 apresentou uma resolução peculiar. Calculou a diagonal de um "quadradinho", mas usou $\sqrt{2}$ = 1,4 (como valor exato). Como a hipotenusa AC é constituída de quatro dessas diagonais, ele concluiu que AC = 5,6.

Por outro lado, muitos dos alunos que conseguiram determinar os catetos por meio da malha, utilizaram o mesmo processo (contar segmentos) para a hipotenusa, e chegaram ao resultado AC = 4. Entretanto, não perceberam que AB = BC = AC = 4 resultaria num triângulo, ao mesmo tempo, retângulo e equilátero.

Item b) Quanto ao aluno nº 12, verificou-se o mesmo procedimento já citado, porém desta vez ele admitiu que a hipotenusa RQ cortaria dois lados de "quadradinhos" da malha no ponto médio. Assim, cada um dos quatro pequenos segmentos em que RQ ficou dividida foi obtido usando Pitágoras:

$$1^2 + 0{,}5^2 = x^2 \qquad \text{então} \qquad RQ = \sqrt{1{,}25}.\,(4)$$
$$x = \sqrt{1{,}25}$$

Item c) Apenas três alunos obtiveram êxito aqui. O aluno nº 12 não conseguiu desta vez usar o método empregado anteriormente; determinou somente os catetos.

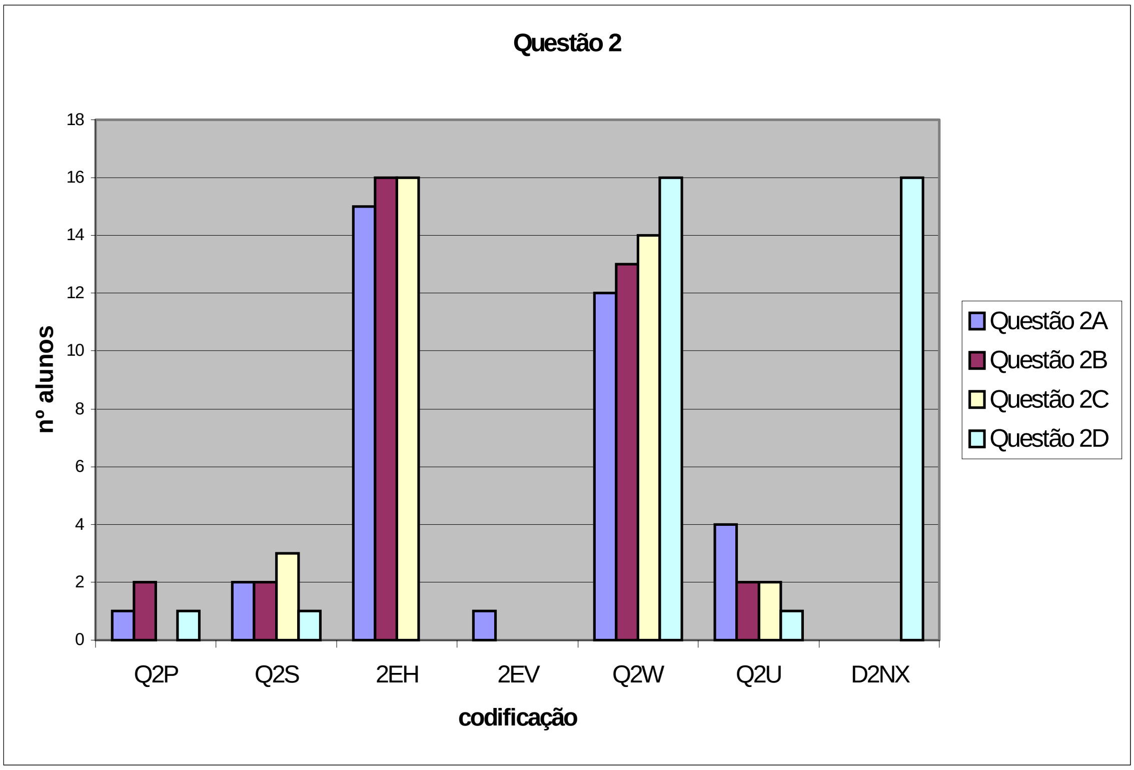
O número de incidências do item "questão em branco" foi maior do que nos itens anteriores.

Item d) Somente dois alunos resolveram a questão com sucesso (total ou parcial). Dezesseis alunos deixaram-na em branco e dezesseis não traçaram as figuras auxiliares.

O aluno de nº 19 apresentou a seguinte resposta:

$xy = 1$ $\qquad$ $xz = 2$ $\qquad$ $xy = 1$ (não satisfaz a condição de existência de triângulo e além disso o maior lado do triângulo aparece com medida igual a 1).

O triângulo não retângulo causou efetivamente grande dificuldade para os alunos, que não perceberam a necessidade de construção das figuras auxiliares indispensáveis à determinação das medidas solicitadas.



Questão 3

Apenas três alunos obtiveram sucesso aqui.

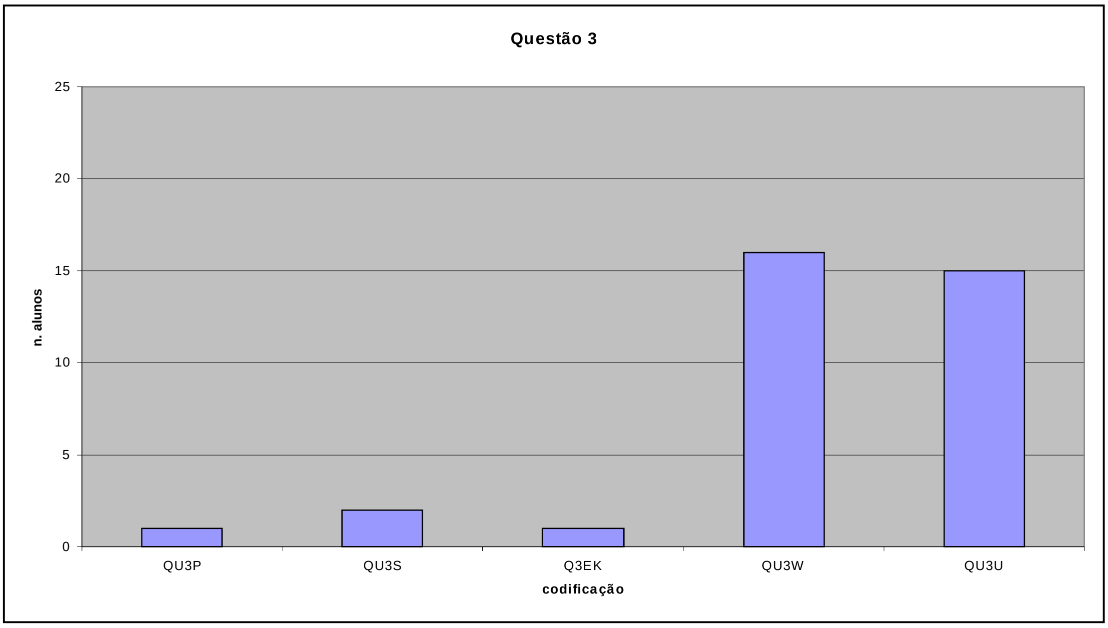
Alguns erros observados:

1) AC = 37 – 13 Resp.: 24

2) $x^2 = 13^2 + 70^2 + 37^2$

Este último foi também constatado na França, segundo Berté, conforme relato apresentado anteriormente na Problemática (no erro número 6).

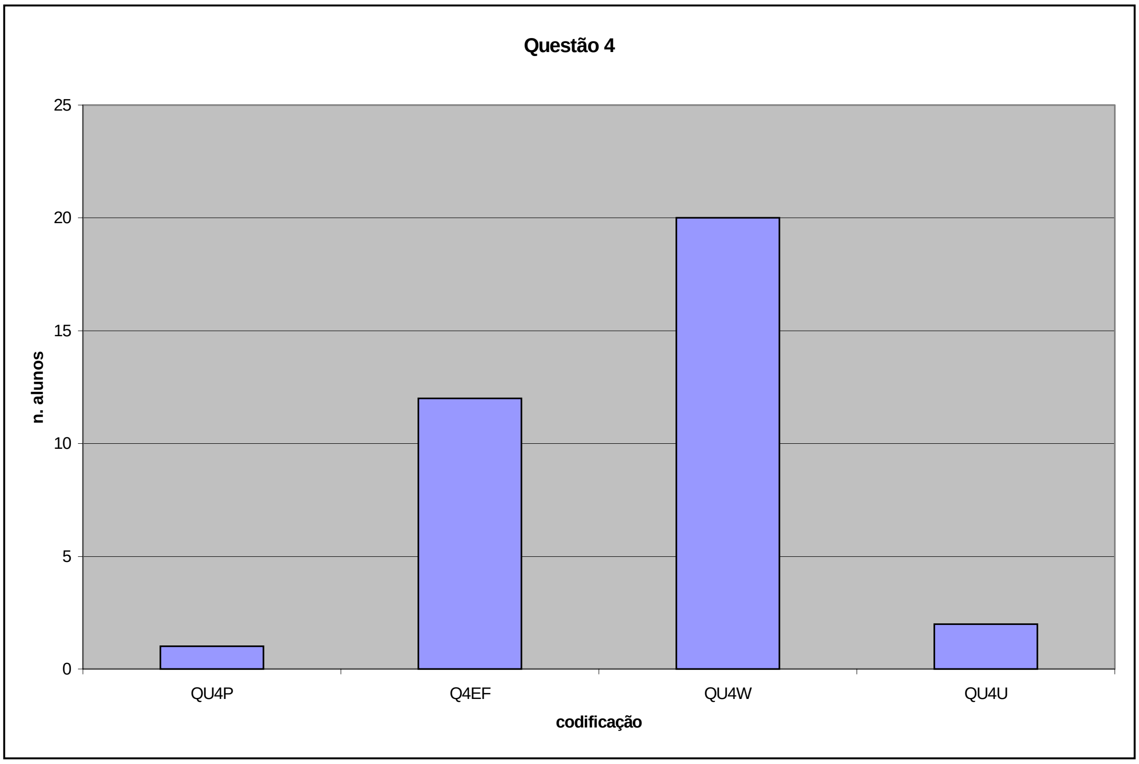
A maior dificuldade parece ter sido o fato de o próprio aluno precisar traçar por A a perpendicular a $\overline{CD}$, com a finalidade de obter a subfigura pertinente. Como já foi exposto, segundo Padilla, "o fato de o fracionamento da figura em partes elementares ser dado inicialmente ou dever ser encontrado" é fator que, respectivamente, facilita ou dificulta a operação de reconfiguração.



Questão 4

Nesta questão surgiram índices bastante altos de não-acertos (erro + resposta em branco). Somente um aluno resolveu corretamente o problema. Vinte alunos devolveram a questão em branco e doze alunos concluíram ser triângulo isósceles ou não, segundo eles "pelo fato de ser equilátero", baseando-se no aspecto figural. Esta variável (aparência de triângulo equilátero), como foi comentado na Análise a priori, foi colocada propositadamente.

O mais alto índice de respostas em branco de todo o teste pertence a esta questão.



Questão 5

Uma grande dificuldade para os alunos nesta questão, conforme havia sido previsto na análise a priori, com base em Padilla, é o fato de uma mesma parte elementar precisar entrar simultaneamente em dois agrupamentos intermediários. Isto é, o segmento $\overline{AC}$ aparece, simultaneamente, como hipotenusa para o triângulo ABC e cateto para ACD.

O fato de se tratar de um problema aberto e de envolver matematização de uma situação cotidiana (caminho mais curto) certamente contribuiu para o elevado número de não-acertos.

Alguns erros encontrados:

1) como AB = BC = 6, então AD = 6 e AD + DC = 9 (aluno nº 2)

2) AD = DC = 3 (aluno nº 4).

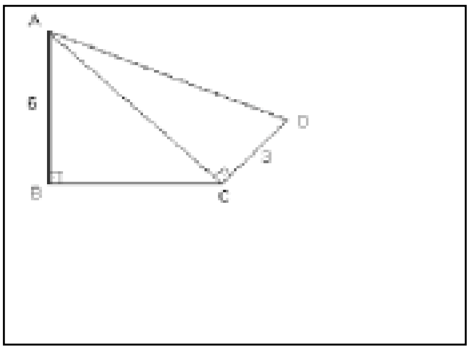
Não percebeu que assim a hipotenusa teria a mesma medida que o cateto.

3) AB + BC é o caminho mais curto, pois o ângulo de 90º é menor (aluno nº 16)

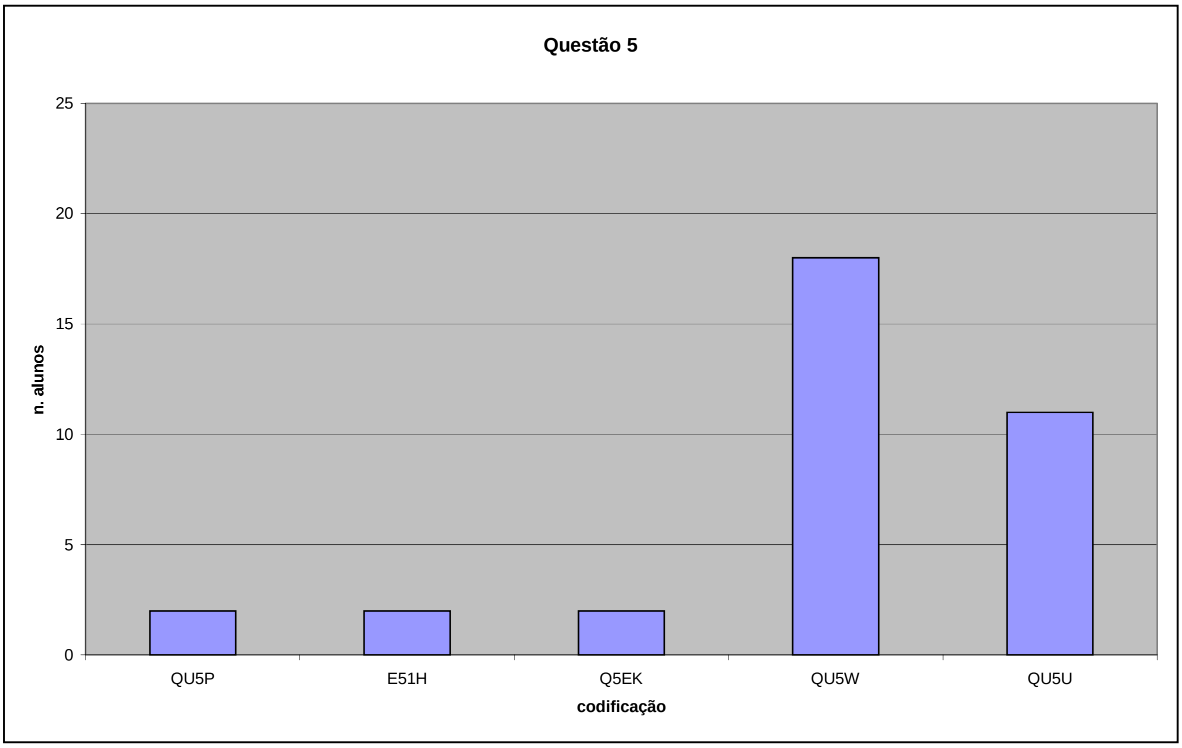
4) AD + DC é maior, pois AD é maior já que é a hipotenusa (aluno nº 31).

Talvez o aluno, usando uma generalização abusiva, tenha pensado em AD como “hipotenusa” de um quadrilátero.

5) AC é menor que o cateto AD (aluno nº 35)



O aluno indicou ângulo reto também em D. O fato de o triângulo ACD ficar com dois ângulos retos acusa o desconhecimento do Teorema: “A soma dos ângulos internos de um triângulo vale 180º”.



Questão 6

A expectativa na análise a priori era de um número pequeno de soluções corretas, porém nenhum aluno conseguiu acertar.

Algumas respostas encontradas:

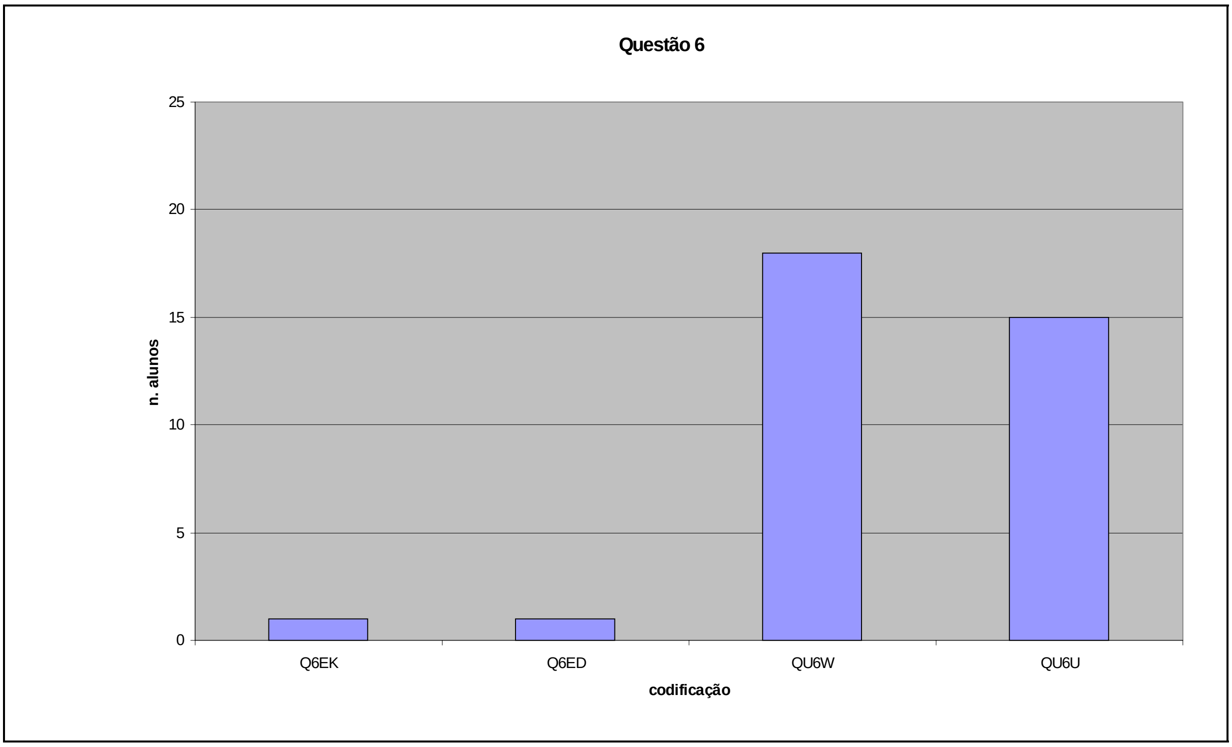
1) Não é possível colocar o armário em pé, pois a profundidade é menor que a altura e elas devem ficar mais ou menos na mesma proporção.

2) É possível, pois a altura do armário é 2,10 m e a altura da parede é de 2,20 m.

3) Sim, por 10 cm.

4) 2,10 m x 0,70 m = 16,70 m.

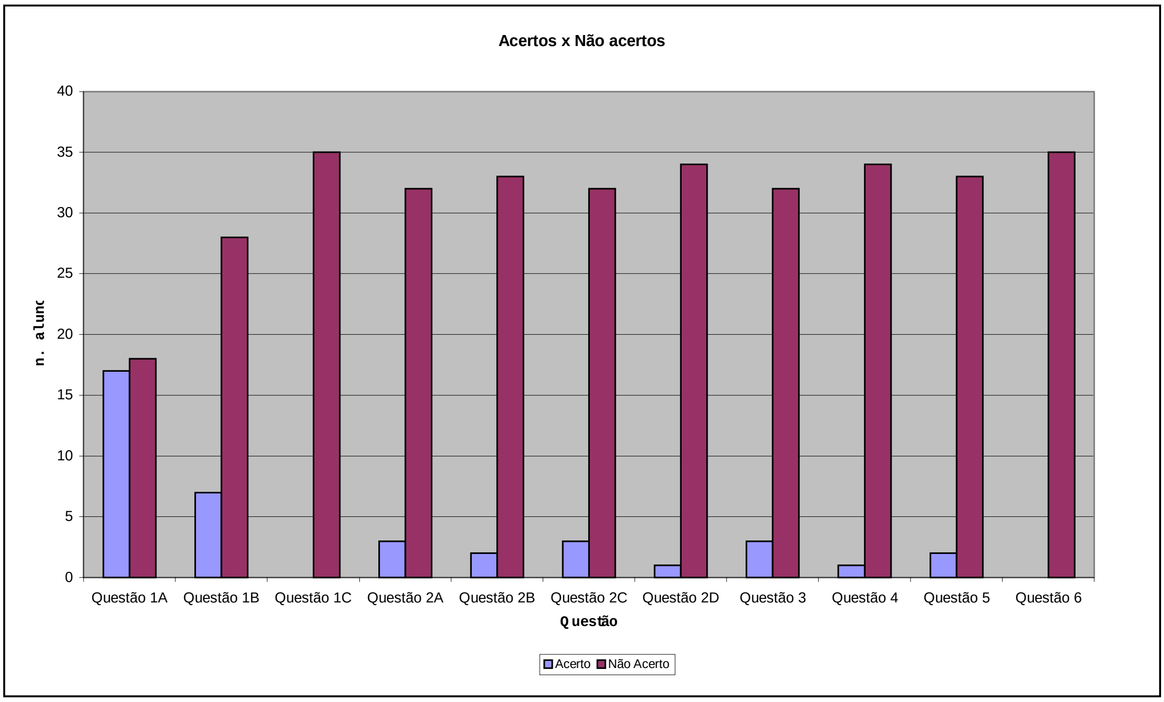
A dificuldade dos alunos poderia situar-se na identificação do uso do Teorema de Pitágoras como ferramenta ou, também, na visualização de uma realidade tridimensional representada de modo bidimensional.

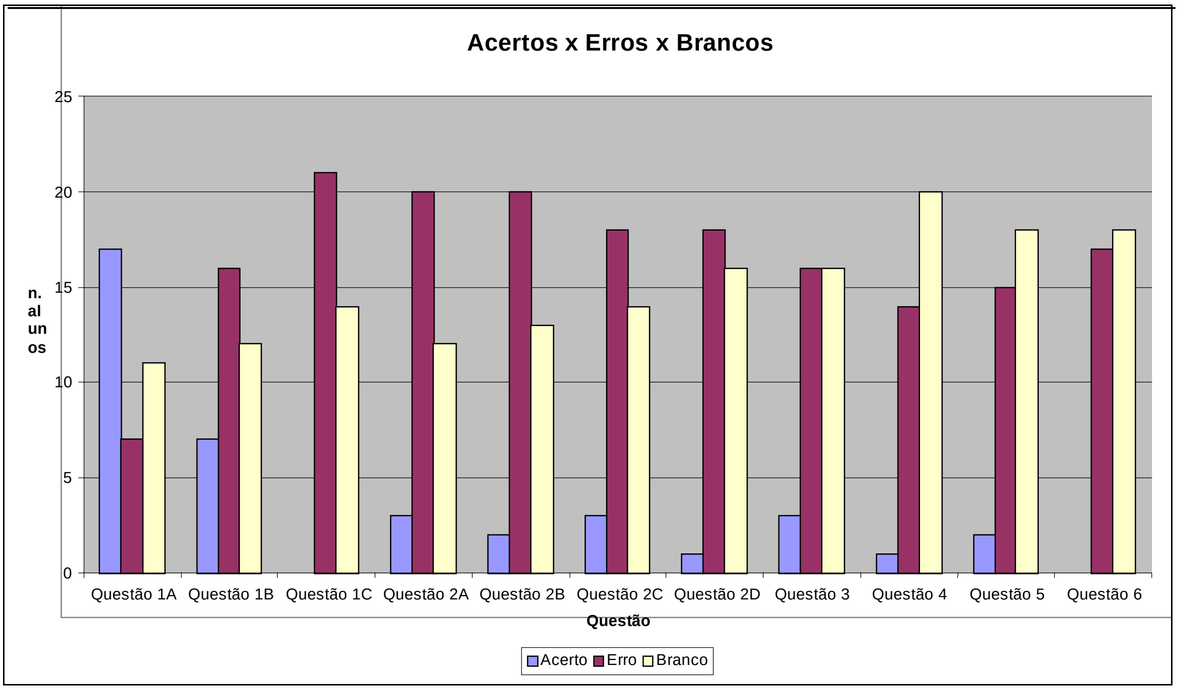


A tabela ilustra o desempenho dos alunos em termos de acertos e não acertos por questão, e os histogramas de barras atestam os baixos índices de sucesso:

	Acerto	**Erro**	**Em**	Não
Questão 1A	17	7	11	18
Questão 1B	7	16	12	28
Questão 1C	0	21	14	35
Questão 2A	3	20	12	32
Questão 2B	2	20	13	33
Questão 2C	3	18	14	32
Questão 2D	2	17	16	33
Questão 3	3	16	16	32
Questão 4	1	14	20	34
Questão 5	2	15	18	33
Questão 6	0	17	18	35

* Não Acerto é a soma das colunas Erro e Em Branco.

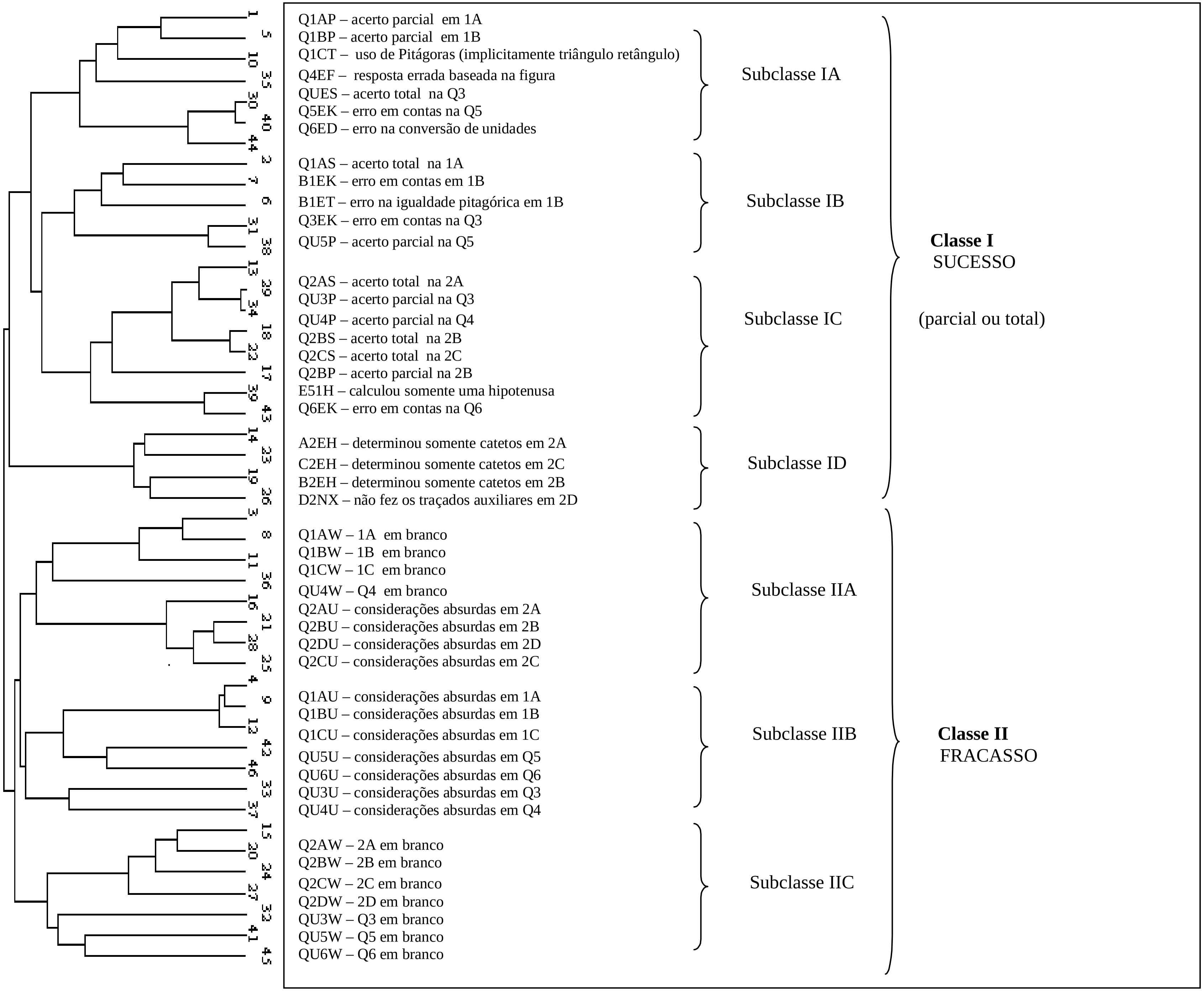




Além da análise quantitativa do teste feita por meio de histogramas de barras, foi realizada uma análise utilizando-se o software CHIC (classificação hierárquica, implicativa e coesitiva), desenvolvido pelo núcleo de pesquisa em Didática da Matemática da Universidade de Rennes 1, França.

O método apresenta vantagens, se comparado com os tradicionais, em termos de visualização, estruturação, modelização e explicação dos fenômenos, o que o torna bastante útil nas pesquisas em Didática da Matemática, pois indica as interligações entre as variáveis e suas relações com o sucesso ou fracasso dos alunos.

Primeiramente, a produção de cada aluno foi examinada e codificada, questão por questão. Elaborou-se então uma tabela de dupla entrada, com 35 linhas (correspondentes aos 35 alunos) e 79 colunas (correspondentes à codificação das questões), para a análise dos dados. Foram utilizadas variáveis binárias, 1 e 0, em que 1 indica a presença do fato e 0 a ausência. Convém esclarecer que as variáveis com número de ocorrências igual a zero foram eliminadas. A planilha foi utilizada na construção dos histogramas de barras e como entrada de dados para o software CHIC, que forneceu a árvore de similaridade, o gráfico implicativo e a árvore hierárquica, cuja análise não foi anexada a este trabalho, pois somente reforçava as interpretações anteriores.



Arbre de similarité : A:\Penna.csv

RESULTADOS OBTIDOS COM O SOFTWARE CHIC

Análise Hierárquica de Similaridade

O programa calcula todos os índices de similaridade: entre as variáveis, duas a duas, reunindo numa mesma classe as que possuem o mesmo índice de similaridade; entre uma variável e uma classe; e, finalmente, entre as classes. As semelhanças ou as diferenças entre as variáveis ou entre as classes são traduzidas graficamente sob a forma esquemática de "árvore". A interpretação dos resultados obtidos será relatada a seguir.

Relativamente ao questionário aplicado, a classificação hierárquica, conforme a árvore de similaridade, mostra dois grandes grupos de variáveis:

Classe I – Sucesso (total ou parcial)

Classe II – Fracasso

A análise permite estudar e interpretar, em termos de tipologia e de semelhança decrescente, classes de variáveis que se configuram nos diversos níveis da árvore (variáveis muito semelhantes se situam nos níveis mais baixos da árvore).

Classe I - Sucesso

As similaridades observadas aqui parecem indicar, nos alunos que apresentaram essas variáveis, alguma competência na utilização do teorema como ferramenta em problemas mais complexos, apesar dos erros verificados em contas ou na conversão de unidades.

Há uma ligação entre resposta baseada na figura da Questão 4 (Q4) e uso inadequado do Teorema de Pitágoras num triângulo não retângulo, evidenciando a influência da apreensão perceptiva no comportamento dos alunos.

Por outro lado, em relação às questões 1A e 1B, constata-se maior dificuldade do aluno quando são dadas as medidas de um cateto e da hipotenusa e maior facilidade quando são dadas as medidas dos catetos, fato este já observado por Berté. A forte similaridade entre Q3 e Q4 evidenciaria o fato de ambas as questões exigirem do aluno a capacidade de decompor uma figura complexa e identificar as configurações pertinentes.

Outra forte semelhança ocorre relativamente à Q2, ressaltando uma tendência, segundo a qual, o aluno que acertou Q2A também conseguiu sucesso em Q2B e Q2C. Isso pode significar que alunos nessas condições têm bom conhecimento do estatuto do teorema e também capacidade de interpretar os dados a partir de um ponto de vista não muito usual (desenho na malha quadriculada).

Classe II - Fracasso

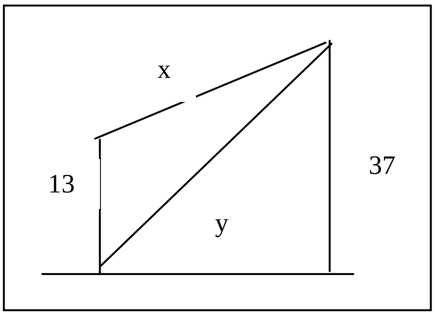
A variável “Considerações absurdas” foi utilizada, pois era de esperar que alunos com conhecimento bastante deficiente de Geometria apresentassem resoluções completamente absurdas, por emprego inadequado de outras ferramentas. De fato, isso ocorreu na tentativa de cálculo não solicitado da área do triângulo, uso indevido do Teorema de Tales e em respostas das seguintes questões:

i. Questão 6

“O armário pode ser colocado em pé, pois está em altura mais baixa em relação à parede, teto e chão.” (aluno nº 9).

“Sim, porque o armário mede 0,70 m menos do que a altura” (aluno nº 10).

ii. Questão 3



$y = \sqrt{6269} \quad \therefore \quad y = 79$

$79^2 = 13^2 + x^2$

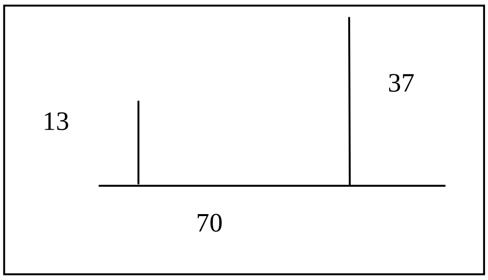
(uso do Teorema num triângulo não retângulo)

iii. Questão 1

a) “Tomar os três lados para saber sua medida cúbica” (aluno nº 32)

b) $x = 5 + 4{,}8$
$x = 9{,}8$ (aluno nº 5)

iv. **Questão 3** A.L.D 13.37.70 (textualmente, como apresentado na prova)



25870 m (aluno nº 26)

v. **Questão 5**

AB + BC = 6 + 3 → 9 (aluno nº 4)

AD + DC = 3 + 3 → 6

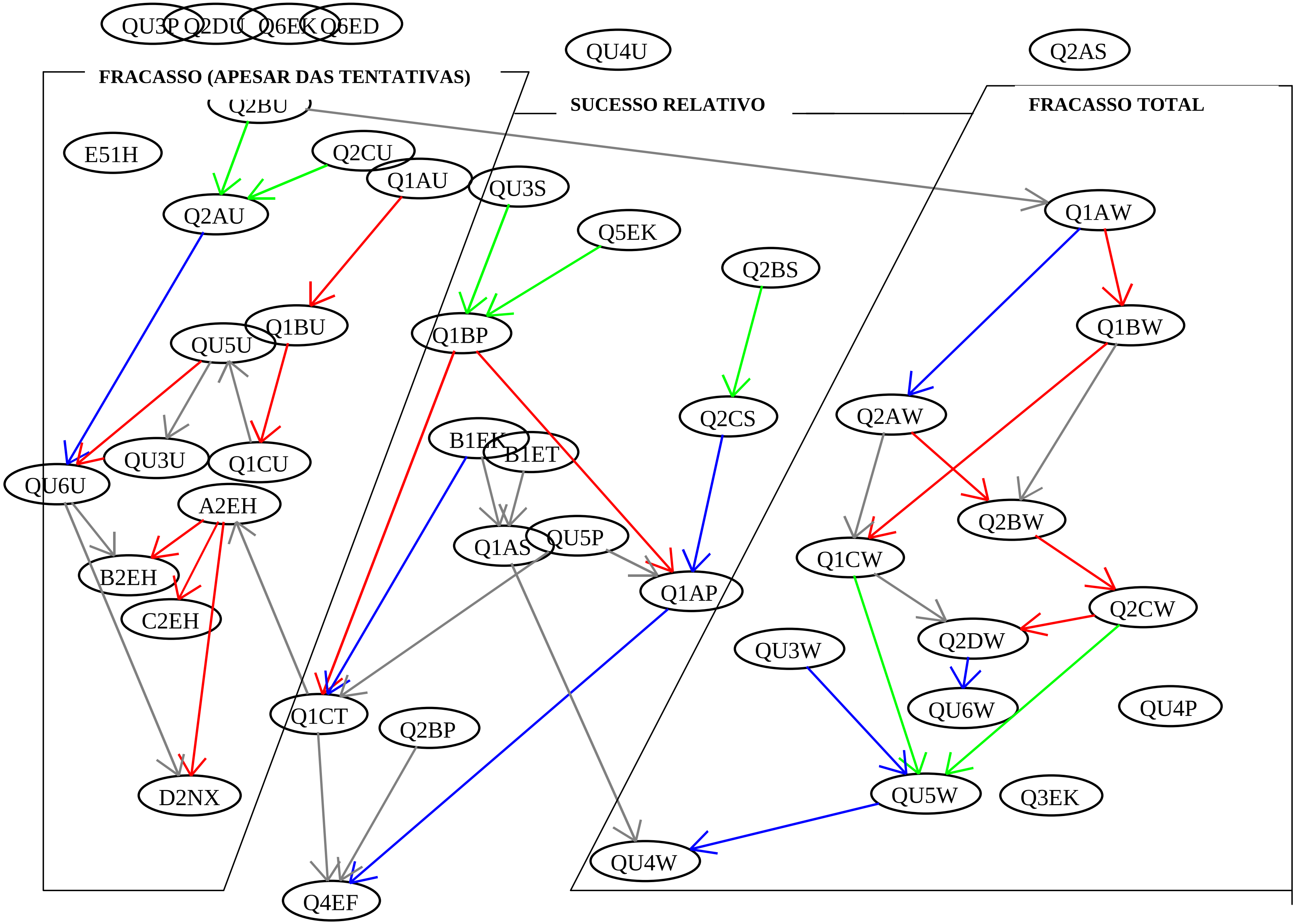
Resp.: O caminho AD + DC é mais curto

vi. **Questão 3**

AB = 13	37 – 13 = 24
CD = 37	70 – 24 = 46
BD = 70	Resp.: 46 m (aluno nº 11)

Em especial, na Q2, parece ter havido por parte de alguns alunos uma tentativa de dar uma resposta a qualquer custo. Seria o caso, por exemplo, de respostas obtidas por meio de medições com régua. Os mesmos alunos teriam deixado em branco as questões Q1 e Q4.

A subclasse IIc caracterizou-se pelo comportamento "deixar a questão em branco", apresentando, num mesmo bloco, Q2, Q3, Q5 e Q6.



Graphe implicatif : A:\Penna.csv

95 85 80 70

Análise estatística implicativa

Aqui se procura determinar se um "comportamento 'a' está acompanhado, de modo conseqüente ou não, de um comportamento 'b' ", isto é, se vale a implicação a$\Rightarrow$ b.

Nota-se no gráfico implicativo que existem variáveis de onde partem setas que atuam como fonte, funcionando como condição suficiente em relação a outras variáveis. As variáveis que "recebem" setas representam, então, condições necessárias para a ocorrência dos fatos. A cor das setas indica valores relativos à intensidade das implicações no intervalo [0, 1]; quanto mais próxima de 1, mais forte será a implicação.

O gráfico fornecido pelo software CHIC permite obter as implicações entre as diversas variáveis, que foram interpretadas entre duplas, ou cadeias. Podem ser observados três grandes grupos de variáveis:

1º grupo (esquerda) – que traduz Fracasso, apesar das tentativas;

2º grupo (centro) – Sucesso Relativo, incluindo acertos totais ou parciais e erros em contas;

3º grupo (direita) – Fracasso Total, ou seja, todas as questões foram deixadas em branco.

A seguir serão apresentadas as conclusões mais relevantes.

1º Grupo

A variável Q1AU, situada acima das demais, comprova ser a questão 1A a menos complexa do grupo, ocasionando menor número de "considerações absurdas".

Certamente o aluno que conseguiu determinar somente os catetos na Questão 2 A, também não conseguirá determinar a hipotenusa na 2B e, na 2C, pois provavelmente, não tem o Teorema de Pitágoras, como conhecimento disponível.

2º Grupo

É interessante observar que mesmo alunos com bom conhecimento de Geometria que obtiveram relativo sucesso no teste se deixaram levar pelo "figural" na

1C ou não entenderam a quebra do contrato didático, isto é, no caso um problema cujo dado era um triângulo não retângulo.

Aqui, as implicações comprovam a afirmação feita anteriormente, colocando a Q1A como a mais simples do teste.

3º Grupo

Neste, as implicações são bastante lógicas e provavelmente correspondem a comportamento de alunos com pouco ou nenhum conhecimento de Geometria. Observa-se que o fato de a Q1A estar em branco desencadeia o mesmo procedimento em dois grandes agrupamentos liderados respectivamente pela Q1B e Q2A, as quais correspondem à utilização do Teorema de um modo mais imediato. É fácil então perceber que alunos nessas condições dificilmente teriam sucesso nas questões restantes, mais elaboradas e com nível de exigência maior.

A Q3 é basicamente uma questão-padrão na maioria dos livros didáticos analisados. Se é deixada em branco, provavelmente, o mesmo ocorrerá com a Q5, menos habitual nos livros devido à formulação utilizada como problema aberto, e com maior razão com a Q4.

A inclusão da Q4 nas cadeias de implicações parece confirmar a conjetura inicial (comportamento de alunos que nunca estudaram Geometria), pois o fato do triângulo "parecer" equilátero não levou a nenhuma tentativa, mesmo errada, de resposta.

As variáveis que aparecem na parte inferior dos blocos apresentaram maior ocorrência: Q4, Q5, Q6, Q3 e Q2D, todas em branco, e Q2D sem o traçado das figuras auxiliares em 2D.

Embora se tenha dado tratamento mais apurado dos dados obtidos por meio do questionário, as minúcias, apesar de importantes, não são aqui apresentadas, para que não se desvie demasiadamente do rumo principal do trabalho.

A partir dos resultados e sem perder de vista o embasamento teórico, foi elaborada a sequência didática, que será apresentada no próximo capítulo, juntamente com a fase de experimentação e avaliação da mesma.

CAPÍTULO V: SEQÜÊNCIA DIDÁTICA

Levando-se em consideração as pesquisas analisadas, a análise do Teorema de Pitágoras no ensino e os resultados obtidos com o questionário, elaborou-se uma seqüência didática composta de situações-problema visando proporcionar aos alunos condições para melhor compreensão do significado do Teorema. Almeja-se com isso que eles o entendam não como uma simples fórmula a memorizar, mas sim como ferramenta utilizável na resolução de inúmeros problemas de Geometria.

Numa primeira fase de atividades, o Teorema é tratado como objeto de estudo. Partindo de material concreto espera-se que os alunos percebam a característica necessária e suficiente do Teorema e, a seguir, conjeturem sobre sua forma. Progressivamente, deve-se chegar a uma abstração e à institucionalização. A partir daí, ele passa a funcionar como ferramenta. A tabela resume a idéia central de cada atividade:

Atividade	
1	Condição de existência de triângulo
2	Ênfase para o caráter necessário e suficiente do Teorema de Pitágoras
3	Conjetura sobre a forma do Teorema, a partir da terna egípcia
4	Demonstração hindu por reconfiguração
5	Demonstração algébrica
6	Ênfase para o número mínimo de dados para a aplicação do Teorema
7	Relações métricas no triângulo retângulo a partir da demonstração de Euclides
8	Cálculo da medida da hipotenusa dadas as medidas dos catetos
9	Cálculo de medida de cateto dada a medida do outro cateto e da hipotenusa
10	Problema histórico (papiro do Cairo)
11	Problema da duplicação do quadrado
12	Justificação do “esquadro do pedreiro”

13	Altura de um triângulo isósceles; diagonal de um retângulo
14	Distância de dois pontos
15	Construção de segmentos $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $y = \sqrt{a^2 - b^2}$ a partir de a e b
16	Problema do cotidiano: área de telhado
17	Problema do cotidiano: altura de um caminhão x altura de um túnel
18	Problema do cotidiano: portal semicircular fechado com barras de ferro
19	Teorema de Pitágoras para resolver um "problema aberto"
20	Ternas pitagóricas

A falta ou insuficiência de conhecimentos disponíveis poderiam constituir entrave para o bom desenvolvimento da experimentação. Isso porque, como foi visto na análise dos livros didáticos, a ordem de apresentação dos tópicos de Álgebra e Geometria é bastante diversificada. Por outro lado, conforme se constatou na aplicação do questionário em uma escola oficial, muitos alunos de 7^a ou 8^a série podem ter tido pouco ou nenhum contato com Geometria.

Uma vez que as variáveis de contexto relativas aos alunos, tais como origem, história e estado psico-sociológico e vivência das aprendizagens fundamentais, ficam fora de controle, procurou-se atuar na escolha das variáveis didáticas, visando minimizar os obstáculos detectados.

Na concepção das atividades, foram utilizados a dialética "ferramenta-objeto" e o "jogo de quadros" (Douady, 1986). Segundo a autora, uma noção tem o estatuto de ferramenta quando ela intervém na resolução de um problema, e de objeto quando, estando identificada, ela é o objeto da aprendizagem.

A noção de "quadro" foi introduzida por Douady para diferenciar os domínios de funcionamento de um mesmo saber matemático. Distinguem-se, assim, os quadros geométrico, algébrico, gráfico, numérico, de funções etc.

A partir dessas idéias foram propostas situações que permitissem aos alunos, por meio da utilização de seus conhecimentos disponíveis, da discussão e da formulação de conjeturas, chegar à construção de novos resultados, aplicando-os mais tarde na resolução de problemas. Por outro lado, a mudança de quadros, no caso do Teorema de

Pitágoras, é um recurso fundamental para auxiliar principalmente a compreensão das demonstrações.

Análise a priori das atividades, aplicação da seqüência, análise a posteriori e discussão dos resultados

Objetiva-se, no presente capítulo, apresentar as atividades elaboradas, a análise a priori das mesmas, informações sobre público-alvo, um relato sobre a fase de experimentação e a análise a posteriori de cada atividade a partir dos resultados. Tentou-se evidenciar, para cada sessão, os entraves encontrados, dificuldades dos alunos, diálogos que se fizeram necessários e resultados parciais.

Optou-se pela aplicação da seqüência didática em classe de 8ª série de escola estadual a fim de conseguir indicadores que permitissem avaliar os efeitos da experimentação e os resultados obtidos num contexto que retratasse a realidade do ensino atual na escola pública. A direção e a coordenação da Escola Estadual Antônio Alcântara Machado, juntamente com o corpo docente, proporcionaram condições para que isso ocorresse.

A referida escola situa-se num bairro de classe média, na Zona Sul da cidade de São Paulo, entretanto, devido à localização em via favorecida por várias linhas de ônibus, matricula alunos também da periferia. Em conseqüência disso, numa mesma classe (8ª B, período da manhã) foi possível distinguir um público bastante heterogêneo, tanto intelectual como socialmente. Não se pretende, entretanto, neste trabalho analisar a influência dos aspectos sociais sobre o desempenho dos alunos.

Primeiramente, foi aplicado um teste piloto, compreendendo as vinte atividades da seqüência, para um grupo de quatro alunas voluntárias pertencentes à 8ª E e 8ª F, as quais se prontificaram a comparecer em período extraclasse. A opção por alunas do período da tarde visava garantir a não comunicação com a 8ª B. Por meio da experimentação, foram feitas as seguintes constatações: 1) necessidade da elaboração de uma atividade (denominada Atividade 0, a qual figura integralmente, no Anexo III com o objetivo de reinvestir em tópicos que se constituíssem em pré-requisitos para a seqüência didática; 2) necessidade de providenciar compassos e calculadoras para os alunos; 3) necessidade de reformulação de dois itens da Atividade 2 e anexação de mais um item, conforme será posteriormente relatado.

Pareceu, ainda, possível nessa ocasião estabelecer uma previsão para o número de aulas e um cronograma, referentes à aplicação da seqüência definitiva. Percebeu-se, entretanto, quando da aplicação da mesma, logo nas primeiras sessões, que o número de aulas previsto (12, no máximo 15) seria insuficiente, em decorrência das circunstâncias da experimentação, o que será detalhado oportunamente. Como conseqüência, o cronograma foi totalmente alterado. De fato, foram utilizadas três aulas para a Atividade 0 e dezenove para as seguintes. O quadro indica o número de aulas da 8ª B, por semana, e sua distribuição:

2ª feira	*3ª feira*	*4ª feira*	*5ª feira*
2ª aula	2ª aula	4ª aula	2ª aula
3ª aula	4ª aula		

Realizaram-se as aplicações da seqüência e do teste avaliatório final. O professor titular da classe cooperou na função de observador.

Estabeleceu-se que a resolução das atividades seria efetuada em dupla e cada uma entregaria um único trabalho. A organização dos grupos foi feita pelos próprios alunos, segundo as afinidades com seus colegas. Para facilitar a identificação desses grupos, a cada um foi atribuída uma letra do alfabeto A, B, C.., segundo o critério de localização na sala de aula, isto é, da esquerda para a direita e da frente para o fundo. Solicitou-se aos alunos que mantivessem uma plaqueta feita de papel com a respectiva denominação do grupo. Este procedimento mostrou-se de grande valia durante as discussões com a classe, pois facilitava a comunicação da pesquisadora com os alunos. Segundo a listagem no diário de classe, dos 41 alunos matriculados, apenas 39 freqüentariam as aulas (2 transferências).

A avaliação do desempenho dos alunos foi feita a partir do trabalho dos grupos e, ao final, individualmente por meio do teste. A pedido da Escola, tabelas correspondentes a essas avaliações forem entregues à direção e ao professor titular da turma.

A primeira sessão realizou-se no dia 13 de setembro de 1999 com a participação de 36 alunos, originando 18 duplas. No primeiro dia, o professor titular da classe não se encontrava presente. Primeiramente, após a apresentação inicial, foi dito aos alunos que as atividades que lhes seriam propostas faziam parte de uma pesquisa e tinham como objetivo “testar” um jeito diferente de ensinar e aprender Matemática. A seguir, foram colocadas as cláusulas explícitas do contrato didático. Cada aluno discutiria e resolveria as atividades com o colega de dupla, mas as duplas não deveriam se comunicar entre si. A avaliação seria de dois tipos: por atividade realizada pela dupla e, ao final da aplicação da seqüência, por meio de um teste a ser resolvido individualmente, ficando a critério do professor titular incorporar ou não esses resultados à média bimestral. Os alunos teriam ampla liberdade para solicitar esclarecimentos sobre suas dúvidas e, auxílio quando necessário.

Atividade 0

Cada dupla recebeu as duas primeiras folhas impressas. Recomendou-se que não apagassem cálculos e eventuais rascunhos. A princípio, a classe apresentava alguma agitação e indícios de resistência ao novo contrato didático. Mas aos poucos os alunos foram se envolvendo na tarefa, que abrangia os seguintes tópicos:

- cálculo de potências;
- comparação de expressões numéricas simples;
- produtos notáveis e fatoração;
- noção de radiciação;
- equações incompletas da forma $x^2 = a$, $a \geq 0$;
- classificação de triângulos quanto à natureza dos ângulos;
- perímetro e área de retângulo e triângulo;
- noção de raio e diâmetro de circunferência;
- construção de triângulos, com régua e compasso, dadas as medidas dos lados;

Constatou-se que o tópico produtos notáveis não se constituía em conhecimento disponível para muitos alunos. Sugeriu-se, então, como alternativa, a utilização da propriedade distributiva. O item classificação de triângulos quanto à natureza dos ângulos também provocou muitas dúvidas, sendo necessário apresentar vários exemplos de triângulos acutângulos, retângulos e obtusângulos.

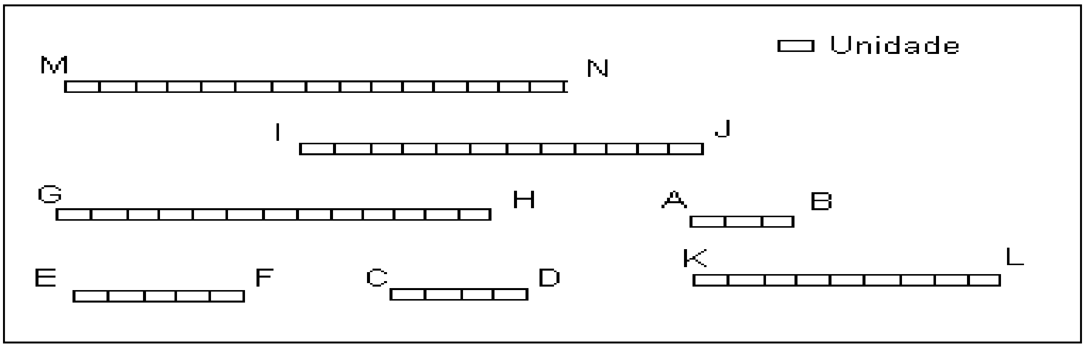
No dia seguinte, 14 de setembro, foi concluída a Atividade 0 (folhas 3 e 4). Compareceram 38 alunos, resultando 19 duplas. O problema da “grade na janela retangular”, item 8, ocasionou muito questionamento, e a primeira tentativa dos alunos foi utilizar a noção de perímetro, que constava do item 6. Argumentou-se que, dessa maneira, a janela ficaria desprotegida, pois a grade funcionaria apenas como uma moldura, sem as barras verticais. A observação parece ter contribuído para a compreensão do problema.

Apesar do diálogo constante com a classe e da necessidade de intervenções freqüentes visando esclarecer as dúvidas, optou-se por distribuir posteriormente aos alunos um gabarito resolvido da Atividade 0, quando da devolução do trabalho corrigido e comentado de cada dupla. O horário de aplicação dos exercícios na terça-feira (com uma “janela” de mais de 60 minutos entre a 2ª e 4ª aula, devido ao recreio) permitiu que se fizesse uma verificação do desempenho dos alunos antes da aplicação da atividade seguinte. Entretanto, a janela também se constituía num entrave, prejudicando por outro lado a continuidade da aplicação.

Atividade 1 (composta de três etapas)

<u>Objetivo:</u> estabelecer a condição de existência de triângulo.

(I) São dadas as varetas:



a) Usando três delas de cada vez, tente construir triângulos.

b) Descreva, por meio de uma terna, as medidas dos lados dos triângulos que você conseguiu formar. Assim: (..., ..., ...)

c) Sempre que você pegou 3 varetas foi possível construir um triângulo? Explique o que aconteceu.

<u>*Objetivo neste item:*</u> fazer com que o aluno perceba que, dadas três medidas, nem sempre é possível construir um triângulo cujos lados tenham essas medidas.

<u>*Análise do ponto de vista didático*</u>

Com sete varetas existem 35 combinações possíveis (de 7 objetos 3 a 3), de que resultarão 3 triângulos retângulos, 10 obtusângulos e 3 acutângulos; 19 não formarão triângulo.

Não se espera que o aluno tente todas as combinações, mas sim que, da experimentação, resultem elementos para obtenção das respostas solicitadas.

<u>*Material didático empregado*</u> (fotos no anexo IV)

- Conjuntos de varetas confeccionadas a partir de palitos de madeira (usados para algodão-doce), graduados com unidade de aproximadamente 2 cm.
- Conjunto de varetas com dimensões ampliadas para uso eventual na aplicação da seqüência, se necessário, a fim de esclarecer possíveis dúvidas.

(II) a) Escreva as ternas com as quais você não conseguiu formar triângulo.

b) Você é capaz de escrever, com suas palavras, o que precisa acontecer para que exista triângulo? Que relação deve haver entre essas três medidas?

<u>*Objetivo neste item:*</u> chegar à forma da condição de existência de triângulo.

Análise do ponto de vista didático

O aluno poderá apresentar algumas das 19 possibilidades para as quais não existe triângulo e, a partir disso, perceber a condição de existência de triângulo.

(III) Agora, são dadas as ternas, sem as varetas:

(8, 10, 8), (5, 5,5), (0,8; 1,5; 2,3), (2,5; 4,5; 3,5) e (4,3; 5,2; 9,8)

a) Com quais dessas ternas é possível construir triângulos?

b) Agora é sua vez! Invente três ternas com as quais você pode construir triângulos e três ternas "que não vão dar certo".

<u>*Objetivo neste item:*</u> descontextualização da condição de existência de triângulo.

Análise do ponto de vista didático

Algumas das ternas dadas apresentam números decimais, para permitir ao aluno entender que a condição de existência de triângulo vale também para medidas expressas por esse tipo de número. Neste estágio será feita a institucionalização da condição de existência de triângulo.

Aplicação e análise dos resultados relativos à Atividade 1

Para a Atividade 1-I, cada dupla recebeu a folha de questões e um jogo de sete varetas graduadas, acondicionadas em canudo de PVC rígido. Os alunos deveriam formar triângulos e, a seguir, escrever as ternas correspondentes. A primeira dúvida referia-se ao significado de "terna"; após o esclarecimento da mesma, os alunos iniciaram o trabalho. Observou-se inicialmente a seguinte estratégia das duplas: a utilização de três varetas maiores e, depois, de três menores, resultando em apenas dois triângulos. Um aluno observou que, usando uma mesma vareta poderiam ser formados "muitos" triângulos e um outro indagou sobre o número total de triângulos. Para não comprometer o resultado da atividade a resposta dada foi a seguinte: "Existem 35 maneiras diferentes de combinar essas varetas". As duplas empenharam-se, a partir daí, em conseguir algumas dessas combinações.

Levando-se em conta que, das 35 combinações, 16 resultariam em triângulo, elaborou-se o seguinte quadro, para ilustrar o desempenho dos alunos (Nt representa o número de ternas obtidas, formando triângulos):

	$0 \leq Nt < 5$	$5 \leq Nt < 10$	$10 \leq Nt < 16$
Nº de duplas	2	10	7

Quanto à possibilidade de sempre existir triângulo, quinze duplas concluíram que nem sempre isso é possível, três duplas responderam que "sim, sempre é possível" e apenas uma dupla deixou o item em branco.

Para agilizar a realização da atividade, quando se verificou que a maioria das duplas já havia terminado, distribuiu-se a segunda folha, contendo os itens II e III. Os alunos completaram então o item IIa, e as três duplas que haviam respondido "sim" perceberam o erro e tentaram novas combinações.

Quanto às ternas que não permitiam a formação de triângulos, solicitadas no item IIa, o resultado foi o seguinte (Nnt indica o número de ternas para este caso):

	$0 \leq Nnt < 5$	$5 \leq Nnt < 10$	$10 \leq Nnt < 19$
Nº de duplas	8	7	4

A partir da análise é possível concluir que o objetivo da Atividade 1-I foi satisfatoriamente atingido, isto é, os alunos perceberam que, com três medidas dadas, nem sempre é possível construir um triângulo cujos lados tenham essas medidas.

Na sessão realizada em 15 de setembro de 1999, 4^a feira, deu-se prosseguimento à Atividade 1-II, com a presença de 39 alunos. Formaram-se 18 duplas e um trio.

Houve muita dificuldade na redação das respostas para o item IIb. Construiu-se uma tabela no quadro-negro com duas colunas, com os dizeres: “triângulo” e “não triângulo”. Solicitou-se aos grupos que descrevessem as ternas encontradas para cada caso; desse modo, a tabela foi preenchida com várias ternas. A atenção dos alunos voltou-se, então, para as ternas (3, 12, 15) e (4, 5, 9). Perceberam que o maior número é a soma dos outros dois. Pediu-se que observassem as outras ternas do tipo não triângulo para decidir se, também para elas, a mesma relação permanecia verdadeira. A seguir, discutiram-se os resultados. Alguns alunos chegaram à conclusão que, “se o maior lado for igual ou maior à soma dos outros dois, não haverá triângulo”. Contra-argumentou-se dizendo aos alunos: “No caso de uma terna do tipo (5, 5, 5) não existe maior lado”. Os alunos reformularam a resposta, substituindo “maior lado” por “base”. Replicou-se, fazendo uma rotação do triângulo, de modo que outro lado se tornasse base. A partir daí não houve mais intervenção; os alunos prosseguiram discutindo em grupo e passaram ao item III. Analisando-se sua produção, obteve-se o seguinte:

a) Oito grupos apresentaram respostas satisfatórias, demonstrando compreender a condição. Exemplos de respostas:

Grupo F: “Para existir triângulo a soma das medidas de dois dos três lados deve ser maior que a medida do outro lado”.

Grupo G: “Quando houver triângulo, o maior lado será menor do que os outros dois somados e quando não houver triângulo o maior lado será igual ou maior do que os outros dois somados”.

b) Quatro grupos redigiram de modo menos rigoroso. Exemplos:

Grupo C: “Quando somadas, as duas partes menores devem resultar em um número maior que a 3^a parte”.

Grupo L: “Porque sempre tem de ficar 2 varetas somadas maior que uma, como (15, 10, 7), se a soma de duas fica menor ou igual, não dá para formar triângulo.”

c) Sete grupos não conseguiram expressar-se adequadamente. Exemplos:

Grupo B: “Para criar triângulo tem de dar a soma”.

Grupo K: “Quando o número maior é menor que os outros números”.

Grupo P: “Para cada triângulo tem que haver medidas certas. Como se as ternas ‘for menor’ em seus números serão sempre triângulos supondo (3, 4, 5) 5 < 3 + 4 o número tem de ser menor que 3 + 4 e assim por adiante / se os números iguais ou maiores nunca”.

Grupo Q: “Para existir triângulo tem de usar a soma, porque cada lado é menor do que o outro”.

No item IIIa, a escolha de números decimais em algumas ternas provocou erros no resultado da soma, o que criou uma oportunidade para reinvestir nesse tipo de cálculo. Como foi comentado anteriormente, a utilização freqüente de números inteiros pode provocar “obstáculo didático”, pois o aluno se habitua a trabalhar somente com esse tipo de número.

Embora a redação da condição de existência de triângulo tenha ocasionado dificuldade para os alunos no item IIIb, em que é solicitada a criação de ternas, apenas a dupla B apresentou a questão em branco. Doze grupos exemplificaram corretamente os dois casos. Seis duplas exemplificaram corretamente o caso da existência de triângulo, mas não conseguiram exibir ternas não correspondentes a triângulos.

Em resumo, apesar de a maioria ter conjeturado a condição de existência de triângulo, apenas oito duplas conseguiram redigi-la satisfatoriamente, resultado que parece estar mais relacionado à conversão para o registro discursivo e não ao raciocínio efetuado. A institucionalização ocorreu na sessão seguinte, conforme relato na página 120.

Atividade 2 (composta de duas etapas, I e II)

<u>Objetivo:</u> preparação para evidenciar o caráter necessário e suficiente do Teorema de Pitágoras.

(I) Considerando as varetas da Atividade 1:

a) Você construiu que tipo de triângulo? Acutângulo, retângulo, obtusângulo?

b) Quais as ternas correspondentes aos triângulos retângulos que você construiu?

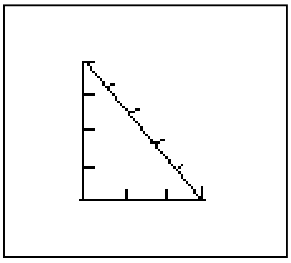
c) Com quais varetas se pode fazer um triângulo retângulo de hipotenusa GH?

d) Com quais varetas se pode fazer um triângulo retângulo de catetos AB e CD?

e) Usando a condição de existência de triângulo, *você consegue "prever" se o triângulo será retângulo ou não?*

Objetivo neste item: Fazer o aluno perceber que a condição de existência de triângulo é insuficiente para garantir a possibilidade de construção de um triângulo retângulo.

(II) Os antigos egípcios, para construir ângulos retos, utilizavam cordas com nós, da seguinte maneira:



É o chamado "esquadro egípcio". Eles já sabiam que o triângulo de lados medindo 3, 4 e 5 é retângulo.

a) Será que o ângulo reto surge do fato de a terna ser formada por números naturais consecutivos? Para verificar isso, desenhe, utilizando régua e compasso, triângulos cujos lados tenham como medidas números consecutivos. Por exemplo: (2 ,3, 4), (4 ,5 ,6), (6, 7, 8), (1, 2, 3).

b) A que conclusão você chegou?

c) Desenhe, agora, triângulos a partir das terna (6, 8, 10), (5, 12, 13), (9, 12, 15). Esses triângulos são retângulos?

d) Resuma as conclusões a que você chegou em b) e c).

Objetivo neste item: Salientar a necessidade de uma relação "mais forte" que a condição de existência de triângulo.

Análise do ponto de vista didático

Aqui se utiliza a história da Matemática como contribuição ao processo ensino-aprendizagem.

O item Ia pressupõe como conhecimento disponível a "classificação de triângulos quanto aos ângulos", e o item IIc, a construção de triângulos com régua e compasso, dadas as medidas dos três lados.

No item IIa, a inclusão da terna (1, 2, 3) deverá reforçar a importância da condição de existência de triângulo.

Aplicação e análise dos resultados relativos à Atividade 2

No dia 16 de setembro de1999, quinta-feira, pensava-se iniciar a aplicação da Atividade 2, entretanto a escola havia programado para a data uma atividade optativa extraclasse. Em vista disso, catorze alunos faltaram às aulas (cerca de 35%), apesar da previsão fornecida pela secretaria de somente três ausências. Inicialmente, os alunos receberam as atividades anteriores comentadas, argüíram sobre dúvidas quanto à correção efetuada no trabalho e, a seguir, foi feita a institucionalização da condição de existência de triângulo. Esta seria reapresentada na aula seguinte, para que nenhum aluno ficasse prejudicado.

Na segunda-feira 20 de setembro, após a retomada da institucionalização, os 33 alunos presentes receberam a folha correspondente à Atividade 2 (item I). A dupla do Grupo I estava ausente e os Grupos B, G, H e L contavam apenas com um dos elementos, os quais discutiram as questões em duplas mas entregaram as conclusões em nome dos grupos originais. Desse modo, os 18 grupos iniciais permaneciam representados, uma vez que estava sendo feita uma avaliação por grupo, a qual poderia servir de referencial para a nota bimestral dos alunos.

Alguns alunos apresentaram dificuldade em decidir sobre a classificação dos triângulos em acutângulos, retângulos ou obtusângulos, apesar de esse tópico constar da Atividade 0. Percebeu-se que o ponto fraco era a classificação dos ângulos, retos, agudos ou obtusos. Após uma analogia, não rigorosa, com ângulos formados pelos ponteiros de um relógio, respectivamente às 9h, 8h50 e 9h05, as dúvidas aparentemente se dissiparam.

Como já comentado anteriormente, o item Ic: "*Com quais varetas se pode fazer um triângulo retângulo de hipotenusa GH?*" foi alterado para "*Com quais varetas se pode fazer um triângulo retângulo de hipotenusa GH e um cateto IJ?*". Foi ainda inserido outro item "*E se for: hipotenusa MN e um cateto IJ?*" Essas modificações foram feitas com o objetivo de enfatizar que, no triângulo retângulo, dadas duas medidas, a do terceiro lado fica univocamente determinada.

As folhas relativas a essa primeira parte foram recolhidas, pois se desejava examinar as respostas dadas anteriormente à interferência docente. Utilizando-se as varetas, foi feita a discussão e, diante de exemplos (ternas obedecendo à condição de existência de triângulos e resultando em triângulos retângulos) e contra-exemplos (ternas obedecendo à referida condição, porém resultando em triângulos acutângulos ou obtusângulos), os alunos concluíram que somente com a condição de existência de triângulo não é possível prever se o mesmo será retângulo.

Solicitava-se, no item II, a construção de triângulos com régua e compasso. Detectou-se que a dificuldade de alguns alunos para resolver as questões não se situava na construção propriamente dita e, sim, no uso da régua para medir segmentos. Foi necessário explicar detalhadamente o manuseio da mesma. A direção da escola colocou à disposição dos alunos vinte compassos, pois somente uma minoria possuía o instrumento. Os resultados obtidos serão relatados a seguir:

No item Ia, oito grupos apresentaram três exemplos, um de triângulo retângulo, um de acutângulo e um de obtusângulo; os outros dez grupos exibiram corretamente exemplos de ternas correspondentes a triângulos acutângulos, porém, destes, sete não apresentaram exemplos corretos para triângulo obtusângulo. Talvez a dificuldade no reconhecimento desse tipo de triângulo se deva ao fato de, na maioria das vezes, o objeto triângulo vir representado por um triângulo acutângulo. Essa é apenas uma hipótese, que precisaria ser apurada com rigor. Quanto à questão Ib, 17 grupos apresentaram exemplos de ternas relativas a triângulos retângulos, sendo que em 11 grupos figurou a terna (3, 4, 5).

O quadro resume os resultados para as demais questões desse item:

Atividade 2	Acertos	Erros	Em branco
Questão Ic	10	8	–
Questão Id	16	1	1
Questão Ie	15	2	1
Questão If	8 (resposta Não)	7 (resposta Sim)	3

Como se pode observar, apenas oito grupos concluíram que a condição de existência de triângulo seria insuficiente para garantir o triângulo retângulo. A causa para isso pode ter sido a falta de significado para o aluno da classificação de triângulos ou o desconhecimento do sentido da palavra “prever”.

Exemplos de respostas incorretas:

Grupo J: “Sim (consegue prever) porque (9, 13, 15) 15 < 9 + 13. Em todo triângulo, a medida de cada lado é menor que a soma das outras duas”.

Grupo R: “Sim, porque dada as medidas você já perceberá. Porque a medida maior tem de ser menor do que as outras duas medidas somadas juntas”.

Somente durante posterior discussão os alunos conseguiram chegar à conclusão correta.

No que se refere às questões do item II, sobre a relação entre ternas de números consecutivos e triângulo retângulo, a distribuição de respostas dos alunos foi a seguinte:

	Respostas corretas	Respostas incorretas	Em branco
Nº de duplas	13	2	3

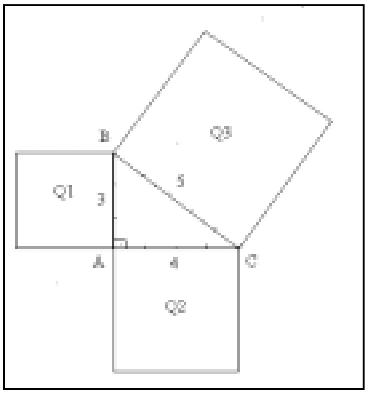
Sete duplas observaram que a terna (1, 2, 3) não obedece à condição de existência de triângulo.Analisando o quadro acima, é possível concluir que este item não ofereceu dificuldade para os alunos.

Atividade 3

Objetivo: chegar à forma do Teorema de Pitágoras.

Não sendo a condição de existência de triângulo suficiente para garantir que o triângulo seja retângulo, então qual relação deve existir entre as medidas dos lados para que isso aconteça?

Voltando à terna egípcia (3, 4, 5), construa quadrados sobre os catetos e sobre a hipotenusa do triângulo, como mostra a figura:



a) Calcule a área de cada quadrado.

b) Faça o mesmo para as ternas do item c) da Atividade 2, isto é, (6 8,10), (5, 12, 13) e (9, 12, 15).

c) Preencha a tabela seguinte:

			Área dos quadrados		
Cateto b	**Cateto c**	**Hipot. a**	**Q1**	**Q2**	**Q3**
3	4	5	9	16	25
6	8	10	36	64	100
5	12	13	25	144	169
9	12	15	81	144	225

(A tabela encontra-se, neste trabalho, preenchida para melhor ilustrar a escolha das variáveis didáticas.)

d) Compare as áreas de Q1 e Q2 com a de Q3. O que você observou? Tente escrever uma relação entre elas. Deduza uma relação entre os lados do triângulo.

e) Será que essa relação vale para qualquer triângulo? Experimente usá-la para ternas correspondentes a triângulos acutângulos ou obtusângulos.

Análise do ponto de vista didático

Evitou-se solicitar o cálculo da soma das áreas de Q1 e Q2, pois neste caso seria subtraída do aluno a oportunidade de exercitar a capacidade de observação e reflexão.

Aplicação e análise dos resultados relativos à Atividade 3

No dia 21 de setembro de 1999, contou-se com 38 alunos, formando 19 duplas. Foi feita, primeiramente, a discussão de algumas respostas apresentadas pelos alunos na Atividade 2 e uma síntese da mesma. Iniciou-se, então, a aplicação da Atividade 3. Foi preciso fazer uma revisão do cálculo de área de quadrado, pois muitos alunos não mais se lembravam como efetuá-lo, apesar de esse tópico constar da Atividade 0.

Surgiram muitas perguntas a respeito do preenchimento da tabela. Esclareceu-se que, na primeira coluna, Q1, deveria ser colocado o valor da área do quadrado de lado 3; abaixo, a área do quadrado de lado 6 e assim por diante. Analogamente para as colunas Q2 e Q3. Observando-se as duplas, foi possível perceber que chegavam com relativa facilidade à seguinte conclusão: "Área de Q1 somada com a de Q2 resulta em Q3", isto é, à forma do Teorema de Pitágoras no quadro geométrico. O horário da classe na terça-feira, 2ª e 4ª aulas, possibilitou efetuar a análise das respostas apresentadas pelos alunos (no horário da 3ª aula) antes da aplicação da Atividade 4. Verificou-se que, apesar de a conclusão sobre as áreas dos quadrados estar correta, os alunos não obtiveram êxito quando solicitados a deduzir uma relação entre os lados do triângulo. O quadro ilustra a constatação:

	Resp. correta	Resp. incorreta	Em branco
Atividade 3d	18	1	–
Q1 + Q2 = Q3	14	4	1
$\text{Hipot.}^2 = \text{cat.}^2 + \text{cat.}^2$	4	–	15

A partir do quadro numérico (tabela), os alunos concluíram, com êxito, a forma do Teorema de Pitágoras no quadro geométrico. Entretanto, na passagem para o quadro algébrico o índice de sucesso foi bastante baixo. Tudo indica que, a partir da área, é mais difícil para o estudante chegar ao valor do lado do quadrado, fato que se observou também na Atividade 11, como será visto mais adiante.

Julgou-se conveniente não efetuar a síntese dos principais resultados da Atividade 3 para os alunos antes da aplicação da Atividade 4. Desejava-se investigar se eles conseguiriam chegar à forma algébrica após a operação de reconfiguração. A segunda parte da sessão realizou-se, após a janela, na 4ª aula.

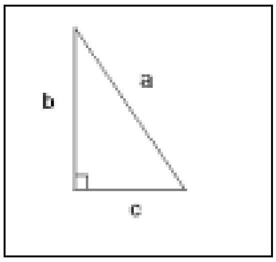
Atividade 4

<u>Objetivo:</u> descontextualização do Teorema de Pitágoras.

Verificamos para alguns triângulos cujos lados tinham como medidas números inteiros que, para dar origem a um triângulo retângulo, uma relação deveria ocorrer entre essas medidas. Mas, no caso de medidas quaisquer dadas por números não inteiros, será que ela vai continuar valendo?

a) Desenhe e recorte um triângulo retângulo <u>qualquer</u>. A seguir, recorte mais 7 triângulos "idênticos" a esse. Não se preocupe em medir os lados.

b) Desenhe e recorte agora:



- *um quadrado de lado a (pinte de amarelo);*
- *um quadrado de lado b (pinte de verde);*
- *um quadrado de lado c (pinte de azul)*

c) Como se fosse um quebra-cabeças, monte:

- *um "quadradão" usando 4 triângulos e o quadrado amarelo, isto é, o quadrado de lado a.*
- *outro "quadradão" usando 4 triângulos e os quadrados verde e azul, respectivamente de lados b e c.*

d) Se retirarmos de cada "quadradão" os 4 triângulos, qual a área da figura que sobra?

e) Que se pode dizer, então, das áreas das figuras restantes em cada "quadradão"? Isto é, que relação existe entre elas? Que relação existe entre os lados do triângulo?

<u>Análise do ponto de vista didático</u>

A opção pela demonstração hindu (de nº 8 neste trabalho) se deve à análise cognitiva das demonstrações, previamente efetuada. Trata-se de uma demonstração com visibilidade favorável para a aplicação da operação de reconfiguração. Além disso, ela permite, posteriormente, justificativas mais rigorosas, por meio da mudança para o quadro algébrico e da utilização da congruência de triângulos.

<u>Material didático</u> (fotos no anexo IV)

- Cartolina e tesoura para o recorte das figuras, na realização da atividade.

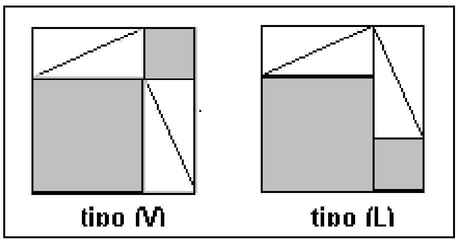
- Para a institucionalização do Teorema, as figuras coloridas foram feitas de plástico, com ímã no verso, o que as permitiria aderir a uma placa metálica de fácil transporte. A idéia foi inspirada nos antigos flanelógrafos.

<u>Aplicação e análise dos resultados relativos à Atividade 4</u>

Ao ser criada a Atividade 4, a intenção era deixar a cargo dos alunos o desenho e recorte das figuras a partir de cartolinas coloridas, que seriam distribuídas em sala. Porém, a escassez de tesouras seria um impedimento para o êxito da atividade. A solução encontrada para contornar essa realidade foi confeccionar 20 kits (não idênticos), cada um contendo oito triângulos retângulos congruentes, de cartolina branca, um quadrado de cartolina amarela, um verde e um azul, obedecendo aos requisitos estipulados nos itens 4a e 4b.

Entretanto, apresentando para o aluno os kits prontos, corria-se o risco de que ele não percebesse os detalhes de construção das referidas figuras. Uma solução intermediária foi encontrada. Pediu-se aos alunos que lessem atentamente 4a e 4b. A seguir, em sala de aula foi recortado um triângulo retângulo de cartolina branca e foram confeccionados os quadrados de cores respectivamente amarela, verde e azul. A classe participava respondendo a perguntas do tipo: “Como deve ser o tamanho do lado do quadrado amarelo?... do verde?... do azul?”

Foram distribuídos os kits, e as duplas passaram a realizar as reconfigurações. Observou-se que algumas duplas efetuavam as reconfigurações com bastante rapidez e, o mais interessante, apareceram reconfigurações de dois tipos, para a fig.2 da demonstração.



Para facilitar a leitura dos resultados, será adotada a seguinte convenção: tipo V – os quadrados apresentam um vértice comum; e tipo L – os quadrados apresentam lados contíguos.

A reconfiguração tipo L, lembrando Padilla, apresenta o obstáculo do desdobramento de objetos no que se refere aos lados dos quadrados, portanto, mais difícil de ser percebida.

Percorreu-se a sala de aula assinalando no canto superior de cada folha impressa o tipo de reconfiguração (V ou L) usado pela dupla, sugerindo-se que, a seguir, os alunos *desmanchassem* a reconfiguração. Desse modo, o reagrupamento de uma dupla não interferiria nas decisões das duplas vizinhas.

Para comentar o item 4c foram utilizadas as figuras com ímãs, que aderiam ao quadro metálico, conforme descrição feita na análise a priori da atividade no item Material didático. O material se mostrou bastante útil e prático, facilitando uma visualização mais dinâmica da operação de reconfiguração.

A questão 4d gerou muitas dúvidas. Foi necessário intervir perguntando aos alunos: "O que se pode dizer das áreas dos 'quadradões'?" (resposta dos alunos: "As áreas são iguais"). Reiterou-se: "Observem que os quatro triângulos, retirados de cada 'quadradão', são idênticos. Então, estamos retirando áreas iguais de áreas iguais."

A partir disso, as duplas concluíram que: "A área do quadrado amarelo é igual à soma da área do quadrado verde com a do quadrado azul". Chamou-se a atenção dos alunos que, por se tratar de triângulo retângulo, apesar de os kits não serem idênticos quanto às medidas dos catetos e da hipotenusa, a relação entre as medidas continua válida, independentemente de serem números inteiros ou não.

Entretanto, persistiu a dificuldade detectada por ocasião da Atividade 3: o estabelecimento da relação entre os lados do triângulo. As tabelas traduzem os resultados obtidos:

Tipo L	Tipo V	Não efetuaram
5	10	4

	Resposta corretas	Respostas incorretas	Em branco
Atividade 4d	16	3	–
Atividade 4e	7	7	5

Comparando-se os resultados obtidos na Atividade 3 e na 4, relativamente ao estabelecimento da igualdade pitagórica, observa-se um aumento no número de acertos (de 4 para 7) e uma diminuição considerável de questões em branco (de 15 para 5), o que atesta alguma motivação em tentar uma resposta.

O erro mais freqüente encontrado no item 4e foi: a = b + c (cinco duplas). Poderia ter sido decorrente da necessidade de “conversão” do registro discursivo para o registro algébrico? Ou o desconhecimento do conceito de área? Segundo Duval (1995), o ensino tradicional da Matemática privilegia a aprendizagem dos algoritmos, porém dá pouca ou nenhuma importância à conversão das representações de um registro para outro.

Algumas respostas encontradas parecem confirmar essas interpretações:

Grupo G: “a = b + c = a área do quadrado amarelo é igual à soma de b e c.”

Grupo L: “Se tirarmos a área de a, b e c e somarmos b e c, que são menores, vai ficar igual ao a.”

A previsão expressa na análise a priori, quanto à visibilidade para a operação de reconfiguração, confirmou-se. Os alunos perceberam que, para formar os “cantos” do *quadradão*, deveriam usar o ângulo reto de cada triângulo. Desse modo, apesar de a figura 1 ser um reagrupamento não convexo dos quatro triângulos, o contorno favorável compensou a modificação posicional (rotação), facilitando “ver” a localização adequada do quadrado.

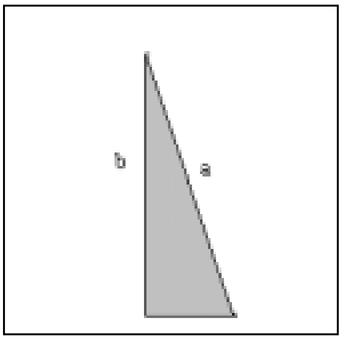
Atividade 5

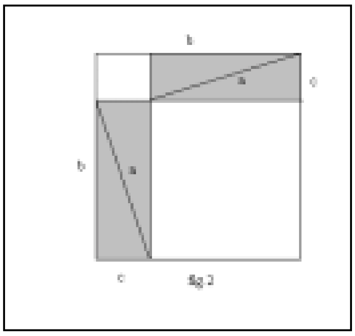
<u>Objetivo:</u> comprovar o resultado anterior, algebricamente, com mais rigor.

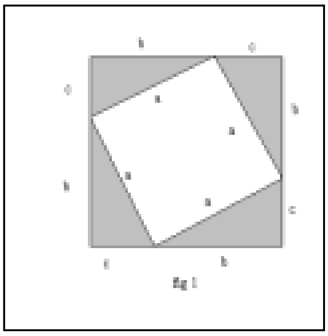
a) Escreva a área do “quadradão” da Fig. 1 em função das áreas do quadrado nele contido e dos 4 triângulos.

b) Faça o mesmo para a Fig. 2.

c) Que relação matemática existe entre as áreas dos “quadradões” das figuras 1 e 2? Deduza uma relação entre a, b e c.







Análise do ponto de vista didático

Como enfatizam os PCNs, é necessário que as observações do material concreto sejam elementos desencadeadores de conjeturas e processos que levem às justificativas mais formais. Com esta atividade torna-se possível reinvestir em tópicos que deveriam fazer parte dos conhecimentos disponíveis do aluno e, ao mesmo tempo, evidenciar a importância de um tratamento mais rigoroso.

Aplicação e análise dos resultados relativos à Atividade 5

Compareceram, no dia 22 de setembro de 1999, quarta-feira, 35 alunos. O mesmo procedimento usado em sessões anteriores foi mantido: quatro alunos, cujos parceiros haviam faltado, discutiram em dupla, porém efetuaram as conclusões representando os grupos originais.

Em primeiro lugar, foram feitas discussão e síntese das Atividades 3 e 4. Por meio de intenso diálogo, os alunos foram paulatinamente percebendo os erros na resolução das referidas atividades. Observou-se, então, que a maior dificuldade localizava-se no cálculo das áreas dos quadrados, a partir dos dados literais a, b e c. Os alunos respondiam prontamente, por exemplo, que a área de um quadrado de lado medindo 5 vale 25, mas não conseguiam concluir que a área de um quadrado de lado, a, é a^2. Esse fato deixa transparecer que os alunos não percebem a potenciação como multiplicação de fatores iguais entre si, pelo menos quando um número está representado literalmente, isto é, na passagem da Aritmética para a Álgebra.

Iniciou-se, após essas preliminares, a aplicação da Atividade 5. Notou-se grande dificuldade da turma relativamente à compreensão do enunciado. Normalmente, o ensino não favorece a interpretação e a compreensão de enunciados matemáticos, possivelmente em conseqüência de os problemas oferecerem os dados, freqüentemente, apenas no registro de figuras. Foi preciso fazer com que os alunos percebessem que o primeiro "quadradão" é formado de quatro triângulos mais o quadrado de lado a. Argüidos sobre a área de cada triângulo, a princípio, muitos não mais se lembravam da fórmula. Após ser retomado o mesmo exercício da Atividade 0, responderam prontamente $\frac{bc}{2}$. Mas, como representar algebricamente as áreas dos quatro triângulos? A idéia inicial dos alunos foi escrever uma soma de quatro parcelas iguais a $\frac{bc}{2}$. Utilizando-se exemplos numéricos, os alunos chegaram à conclusão de que seria mais fácil transformar a adição em multiplicação por meio de $\frac{4bc}{2}$. Evitou-se interferir na resolução do item b, que foi deixado inteiramente a cargo dos alunos. Em contrapartida, o item c provocou muitas dúvidas quanto à interpretação do enunciado. Lembrou-se a eles que seria preciso utilizar os itens a e b para estabelecer a relação matemática solicitada. Em decorrência do contrato usualmente utilizado, o aluno não parece estar habituado a trabalhar com itens concatenados entre si.

Como mostra a tabela, dez grupos chegaram à igualdade: $2bc + a^2 = 2bc + b^2 + c^2$ (*). Destes, apenas cinco perceberam a possibilidade de simplificação dos termos semelhantes, o que evidencia a dificuldade em efetuarem tratamentos algébricos. Três grupos expressaram a igualdade acima discursivamente.

Grupos A e L: "As áreas são iguais".

Grupo T: "O item a é matematicamente igual ao b".

(Pode parecer estranho que tenha existido um grupo com a denominação T, vigésima letra, uma vez que o número de grupos era dezenove; é que os alunos do grupo M solicitaram mudança de letra.)

	Acertos	Erros	Em branco
Atividade 5b	15	4	–
Igualdade (*)	10	3	3

No dia 23 de setembro de 1999, quinta-feira, com a presença de 36 alunos, após os comentários sobre os resultados observados na Atividade 5, foi feita a síntese da mesma. Aproveitou-se o ensejo para introduzir o recíproco do Teorema de Pitágoras, embora a demonstração do mesmo não tenha sido feita.

Para utilizar o tempo restante da aula e complementar os comentários anteriores, foi distribuída a folha correspondente à Atividade 6, para que os alunos iniciassem imediatamente a discussão da mesma.

A partir da Atividade 6 e subseqüentes, por meio de variáveis didáticas adequadamente escolhidas, esperava-se testar as hipóteses desta pesquisa e, também, tentar suprir as falhas detectadas no questionário.

Atividade 6

Objetivo: levar o aluno a perceber que dados relativos a dois lados de um triângulo retângulo são suficientes para obter o terceiro.

Agora você já sabe que, em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos. Esse teorema já era conhecido pelos babilônios e egípcios, mas foram os pitagóricos os primeiros a demonstrá-lo rigorosamente. Daí o nome Teorema de Pitágoras.

a) Explique, com suas palavras, qual a vantagem de saber o Teorema de Pitágoras no que se refere à resolução de problemas envolvendo triângulos retângulos. Em outras palavras, o que ele permite calcular e o que deve ser dado, para isso, no problema.

b) Invente quatro exemplos de problemas em cujas resoluções você utiliza o Teorema de Pitágoras.

Análise do ponto de vista didático

Nesta etapa, o Teorema é institucionalizado e se almeja que passe a fazer parte das ferramentas explícitas disponíveis para a resolução de problemas, visando uma recontextualização do saber.

Aplicação e análise dos resultados relativos à Atividade 6

Prosseguindo com a Atividade 6 em 27 de setembro de 1999, contou-se com a presença de 36 alunos. As duplas trabalharam sem interferência, pois se desejava averiguar em que nível os objetivos seriam ou não atingidos.

Examinando as respostas, foi possível constatar que sete duplas conseguiram perceber alguma vantagem em saber o Teorema de Pitágoras; destas, quatro se referiram na verdade ao recíproco. Sete grupos deixaram a questão em branco e três apenas enunciaram o Teorema. Algumas respostas a essa pergunta:

Grupo E: "Permite calcular se um triângulo é retângulo ou não, sua vantagem é saber qual o valor do lado desconhecido de um triângulo retângulo. Para isso devemos saber o valor de dois lados do triângulo".

Grupo G: "Serve para determinar se o triângulo é retângulo e achar o valor de x quando só se tem uma incógnita".

Grupo O: “Permite determinar se o triângulo é retângulo ou não. Com o teorema apenas dois dados são suficientes para formar triângulos.”

Grupo R: “Ele prevê claramente quando vai dar triângulo retângulo. Devem ser dadas as medidas da hipotenusa e dos catetos”.

Outras duplas ainda tentaram se expressar, sem muito êxito. Exemplo:

Grupo L: “Podemos calcular os números corretos para saber o valor da hipotenusa”.

A fim de facilitar a análise dos resultados obtidos no item b, estabeleceu-se a seguinte convenção: H – problemas criados pelos alunos, nos quais eram dadas as medidas dos catetos e solicitada a medida da hipotenusa; C – problemas pedindo a medida de um cateto dadas as medidas da hipotenusa e do outro cateto.

	Enunciados	Resoluções		
		Corretas	Incorretas	Em branco
Tipo H	41 problemas	34	4	3
Tipo C	22 problemas	11	7	4
Recíproco	2 problemas	1	–	1

Do total de 65 problemas criados pelos alunos, 63% correspondem ao tipo H, 22% ao tipo C e apenas 2% utilizam o recíproco. Exemplos:

Grupo G: “Quanto vale a hipotenusa, sendo que os catetos medem 15 e 10”.

Grupo N: “Descubra o valor de x” (na figura dada, x aparece como hipotenusa e as medidas dos catetos são respectivamente 23 e 24).

Grupo K: (usando somente o registro de figuras) Medida da hipotenusa = 16 e de um cateto = 10.

Grupo F: “Ache o valor desconhecido do cateto” (no registro de figuras: medida da hipotenusa = 11 e medida de um cateto = 10).

Grupo H: “Dadas as medidas 9, 12 e 15, descubra se é triângulo retângulo”.

O Grupo I apresentou quatro exemplos de resolução nos quais a incógnita se situa no primeiro membro da equação, mas sem os enunciados correspondentes.

O desempenho dos alunos por meio dos problemas criados permite supor boa compreensão no que se refere ao número mínimo de dados para a aplicação do Teorema, entretanto, novamente se evidenciou a dificuldade em redigir uma conclusão.

Atividade 7

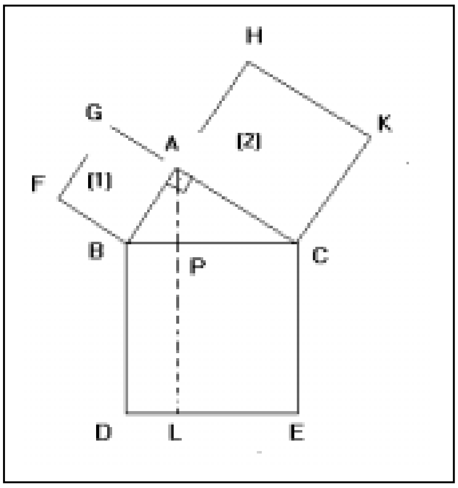
Objetivo: utilizar a demonstração de Euclides para chegar, no quadro geométrico, a duas relações métricas no triângulo retângulo.

Em sua obra Elementos, *considerada por muitos historiadores a mais importante da Geometria de toda a história da Matemática, Euclides (300 a.C.) demonstrou o Teorema de Pitágoras de modo muito diferente. Ele provou que:*

I. O quadrado (1), ABFG, tem a mesma área do retângulo BPLD.

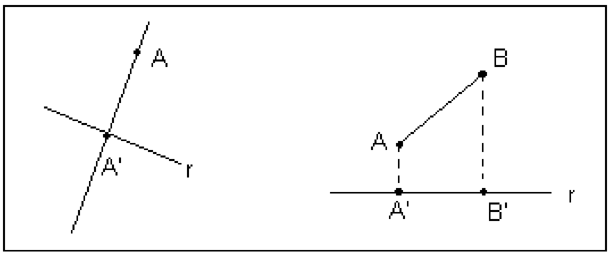
II. O quadrado (2), AHKC, tem a mesma área do retângulo PCEL.

Como a área do quadrado BCED é a soma das áreas desses retângulos, ele concluiu que a área de BCED é igual à soma das áreas dos quadrados (1) e (2).



a) Chamando: AB = c, BC = a, AC = b, BP = m, CP = n, você consegue "traduzir" matematicamente os resultados (I) e (II) acima?

b) "Quando, de um ponto A, se traça a perpendicular a uma reta r, o ponto A', intersecção dessa perpendicular com r, é denominado projeção ortogonal de A sobre r; para obter a projeção ortogonal de um segmento sobre uma reta basta



projetar sobre ela os extremos do segmento."

c) Usando essa nomenclatura, o que se pode dizer dos segmentos BP e CP em relação à reta BC?

c) Como ficam, levando em conta o item c), os resultados (I) e (II)?

Análise do ponto de vista didático

Como já foi analisado no capítulo referente às demonstrações, a de Euclides pertence à categoria daquelas pouco visíveis e muito complexas. Apesar disso, esta atividade, além de colocar o aluno em contato com a história da Matemática, serve para introduzir uma proposição importante: "A medida de cada cateto ao quadrado é igual ao produto da medida da hipotenusa, pela medida da projeção do cateto sobre a reta suporte da hipotenusa".

Assim, parte dessa demonstração do Teorema de Pitágoras seria utilizada ou como primeira abordagem das referidas propriedades (7ª série) ou para reinvestir em tópico já estudado por meio de semelhança de triângulos (8ª série).

Aplicação e análise dos resultados relativos à Atividade 7

Em 27 de setembro de 1999, segunda-feira, foram efetuadas discussão e síntese da Atividade 6, com 33 alunos presentes. Os componentes da dupla C não compareceram; desse modo 18 duplas se encontravam representadas.

Iniciou-se a Atividade 7, que, na íntegra, provocou dúvidas e discussões. Foi necessário, em primeiro lugar, ler pausadamente o enunciado. Instigou-se, a seguir, os alunos a identificar as subfiguras citadas em I e II. Alguns não mais se lembravam como calcular a área de um retângulo; tornou-se então necessário reinvestir nesse tópico, evocando a Atividade 0. Sugeriu-se, então, que tentassem colocar, na figura, os dados c, a, m, n.

Percorreu-se a classe para verificar quantas duplas haviam tido sucesso no item a. Foram dez. Retomou-se a discussão até que os alunos conseguissem efetuar a "tradução" correta de I e II. Sugeriu-se que lessem com atenção o enunciado de b. A princípio, era possível observar que pareciam intimidados com a nomenclatura utilizada. Explicou-se, no quadro-negro, cada detalhe do enunciado: "Perpendicular a uma reta dada", " ponto de interseção de duas retas", "projeção ortogonal de um ponto sobre uma reta", "projeção ortogonal de um segmento", por meio de exemplos variados, modificando-se a posição de cada figura envolvida. A analogia feita de projeção com sombra parece ter auxiliado um pouco na compreensão do significado da mesma.

Foi concedido, a partir dessas considerações, tempo para que as duplas finalizassem a atividade, respondendo aos itens c e d. Na segunda aula desse dia, retomou-se o trabalho, agora, para síntese dos resultados. Aproveitou-se a oportunidade para enfatizar que a mesma propriedade poderia ser demonstrada por outro "caminho", por meio de semelhança de triângulos, assunto que os alunos ainda desconheciam.

Resumindo-se a análise dos resultados obtidos, tem-se:

	Respostas corretas	Respostas incorretas	Incompletas	Em branco
Atividade 7a	10	4	1	3
Atividade 7c	5	1	11	1
Atividade 7d	5	10	2	1

Exemplos de respostas consideradas incompletas ou parcialmente corretas para o item c:

Grupo O: "BP e CP são a projeção ortogonal sobre a hipotenusa a".

Grupo S: "BP é a projeção do cateto c sobre a hipotenusa".

Exemplos de respostas incorretas ou não pertinentes para o item d:

Grupo F: "m é a projeção de c sobre a hipotenusa e n a de b sobre a hipotenusa".

Grupo I: "A medida do cateto ao quadrado é igual a hipotenusa x cateto".

Grupo J: "A projeção do cateto sobre a hipotenusa".

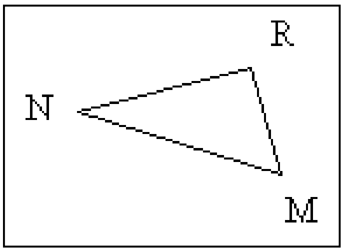
Como se pode observar, apesar de todos os esforços empreendidos no sentido de minimizar as dificuldades por meio de questionamentos com a classe, a taxa de insucesso, principalmente nos itens c e d, foi muito alta. Evidenciou-se, com freqüência, a confusão entre segmento e medida de segmento. Além disso, muitos alunos não conseguiram, devido à complexidade da reconfiguração, conforme comentário na análise a priori, destacar as subfiguras pertinentes. Uma interpretação para o alto índice de insucesso poderia ser a quebra de contrato, ocasionada pelo tipo de problema não habitual, causando nos alunos algum bloqueio e o fato de a questão ser muito abstrata para o nível dos alunos, envolvendo ainda o conceito de projeção

.

Atividade 8

<u>Objetivo:</u> verificar se o aluno sabe utilizar o Teorema de Pitágoras dadas as medidas dos catetos. (utilização da congruência enunciado ↔ Teorema de Pitágoras).

Calcule MN, no triângulo retângulo em R, dados: MR = 2,4cm e NR = 3,2 cm



Análise do ponto de vista matemático

Apesar dos dados do problema serem números decimais, o resultado é inteiro.

$MN = \sqrt{16}$, assim $MN = 4cm$

<u>Análise do ponto de vista didático</u>

As variáveis didáticas escolhidas, ou seja, denominação dos vértices com letras não muito usuais, rotação no triângulo e dados em decimais, poderão eventualmente trazer dificuldade aos alunos. A congruência entre dados do problema e enunciado do Teorema de Pitágoras deverá se constituir num fator favorável para a correta solução do problema.

<u>Aplicação e Análise dos resultados relativos à Atividade 8</u>

A atividade foi aplicada ainda no dia 27 de setembro. Sugeriu-se aos alunos que *traduzissem* para a figura os dados contidos no enunciado do problema. Observou-se uma dupla com a seguinte resolução: $x^2 = 3{,}2^2 + 2{,}4^2$ então $x^2 = 5{,}6^2$. Após a indagação: "Será que a soma dos quadrados de dois números é igual ao quadrado de sua soma? Recordando a Atividade 0, comparem 5^2 com $2^2 + 3^2$", os alunos constataram o erro e refizeram a atividade.

	Respostas corretas	Respostas incorretas
Atividade 8	16 grupos	2 grupos

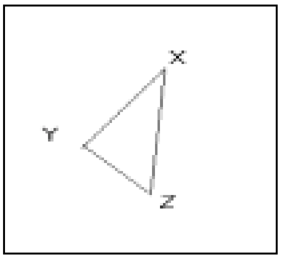
Já se previa um alto índice de acertos para esta atividade, decorrente da congruência entre enunciado e relação pitagórica.

Atividade 9

<u>Objetivos:</u>

- proporcionar ao aluno exercício envolvendo o fenômeno da não congruência entre o enunciado do problema e o enunciado do Teorema de Pitágoras;
- até que ponto a escolha dos valores inteiros 3 e 4 pode levar a uma conclusão falsa, influenciada pela terna egípcia (3, 4, 5).

Dados YZ = 3 cm e ZX = 4 cm, calcule XY, sendo o triângulo XYZ retângulo em Y.



<u>Análise do ponto de vista matemático</u>

Denominando XY = z, tem-se $XY = \sqrt{7}$.

<u>Análise do ponto de vista didático</u>

Os valores 3 e 4 foram escolhidos em função do objetivo visado.

<u>Aplicação e análise dos resultados relativos à Atividade 9</u>

Fez parte da sessão realizada em 27 de setembro. Para a atividade o resultado obtido foi o seguinte:

	Respostas corretas	Resposta = 5	$x^2 = 7$
Atividade 9	6	10	2

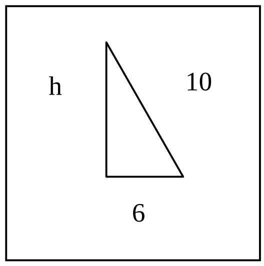
O efeito da não congruência e a influência da terna egípcia fizeram-se notar, comprovando as considerações feitas na análise a priori.

Atividade 10

<u>Objetivo:</u> colocar o aluno numa situação que exija descontextualizar o Teorema de Pitágoras, aplicando-o num problema prático.

No Papiro do Cairo, que data de 300 a.C., foram encontrados 40 problemas de Matemática. Um deles é o seguinte: "Uma escada de 10 cúbitos está com seus pés a 6 cúbitos da parede. Que altura a escada alcança?" (cúbito é uma medida antiga de comprimento; hoje há o metro, o centímetro etc.)

<u>*Análise do ponto de vista matemático*</u>



$$h^2 + 6^2 = 10^2$$
$$h = 8cm$$

<u>*Análise do ponto de vista didático*</u>

Foi utilizada a história da Matemática por meio de um problema com dados numéricos simples, 6 e 10, mas cuja resolução depende da interpretação do enunciado, a fim de identificar o Teorema de Pitágoras como ferramenta de resolução.

<u>*Aplicação e análise dos resultados relativos à Atividade 10*</u>

Em 28 de setembro de 1999, terça-feira, compareceram 33 alunos; a dupla D ficou sem representante na sessão. Desse modo, 18 grupos entregaram as resoluções, mantendo-se o esquema usado nas outras vezes. Após os comentários sobre os erros detectados durante a correção da Atividades 8 e da 9, passou-se à Atividade 10. A primeira reação dos alunos foi relativa à compreensão do enunciado; não conseguiam converter o registro discursivo para o registro de figura.

Por ocasião do teste piloto, essa dificuldade havia sido observada. Como conseqüência, algumas providências foram tomadas. Com auxílio de uma escada em miniatura, parte de um brinquedo infantil e de dois semiplanos perpendiculares entre si, formados pelas capas de um caderno, foi possível fazer com que os alunos visualizassem a situação, percebendo o triângulo retângulo-chave. A unidade “cúbito” parece não ter causado estranheza à maioria dos estudantes. Apenas uma aluna fez perguntas a esse respeito.

Os resultados relativos às Atividades 10, 11 e 12 serão apresentados em uma mesma tabela para facilitar eventuais comparações.

Caixa de Ferramentas (trata-se de um resumo impresso entregue aos alunos antes do início da Atividade 11)

Quando um mecânico precisa consertar uma máquina ou um marceneiro quer construir um móvel, eles necessitam de algumas ferramentas. Algo semelhante ocorre quando resolvemos um problema. Mas, às vezes, nem lembramos de algumas ferramentas que estão sem uso há muito tempo.

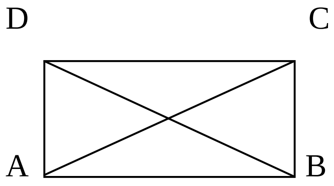
Vamos abrir esta “caixa de ferramentas” e verificar o que existe dentro dela. Talvez seja útil para a resolução de nossos problemas.

Observação

A idéia da caixa de ferramentas (“boîte à outils”) foi extraída do manual francês *Pythagore* (1992). A caixa tem por objetivo reinvestir em tópicos anteriores, que se constituam em pré-requisitos para determinado assunto. No referido manual, elas antecedem geralmente um bloco de exercícios, desacompanhadas de qualquer redação explicando seu aparecimento.

Uma sugestão explícita em cada atividade poderia provocar no aluno certa dependência de uma constante ajuda, ocasionando o “efeito Topaze”. Ao contrário disso, o procedimento da caixa de ferramentas poderia ser justificado por meio do conceito de “zona de desenvolvimento proximal” (Vygotsky, 1994).

F1) As diagonais de um retângulo têm mesmo comprimento:



AC = DB

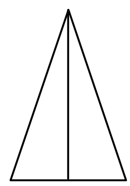
Triângulo equilátero: os três lados têm mesma medida.

Triângulo isósceles: dois lados têm mesma medida.

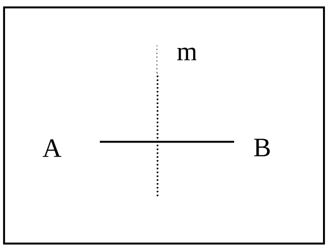
Triângulo escaleno: dois lados quaisquer não têm mesma medida.

F3) Área de retângulo: $base \times altura$ Área de triângulo: $\dfrac{base \times altura}{2}$

F4) Num triângulo isósceles, mediana, altura e bissetriz relativas à base coincidem.



F5) Mediatriz de um segmento é a perpendicular ao segmento, passando pelo ponto médio.



Se um ponto pertence a m, então ele é equidistante dos extremos do segmento e, reciprocamente, se é equidistante dos extremos, então está na mediatriz.

Atividade 11

a) *Um quadrado tem 1 cm de lado. Sua diagonal pode ter como medida um número inteiro? Justifique sua resposta.*

Objetivo neste item: colocar o aluno diante do problema da incomensurabilidade da diagonal em relação ao lado do quadrado.

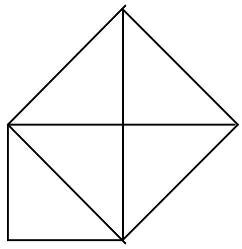
b) *Determine a área do quadrado citado no item a).*

c) *Qual deve ser a medida do lado de um outro quadrado para que sua área seja o dobro da área que você calculou no item b)?*

Objetivo nos itens b e c: fazer o aluno perceber a relação que existe entre o Teorema de Pitágoras e o problema da duplicação do quadrado.

Análise do ponto de vista matemático

$d = \sqrt{2}\text{cm}$ No quadro geométrico:



Análise do ponto de vista didático

É pouco provável que o aluno mude para o quadro geométrico, pois de acordo com a análise cognitiva, apesar de a diagonal fazer parte da figura de partida, são necessários cinco traçados suplementares para formar o quadrado sobre a hipotenusa do triângulo retângulo, que funciona como subfigura.

Aplicação e análise dos resultados relativos à Atividade 11

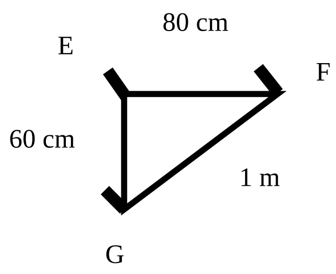
Usando a caixa de ferramentas, os alunos desenharam uma das diagonais do quadrado. Entretanto foi preciso intervir, alertando-os de que as repostas à questão (o fato de a medida da diagonal ser ou não número inteiro) deveriam ser fundamentadas matematicamente. Alguns grupos se mostraram inseguros quanto à possibilidade de aplicação do Teorema de Pitágoras na subfigura (triângulo retângulo). Foi lhes dito que "estavam no caminho certo".

Durante a resolução do item b, alguns alunos se surpreenderam com o fato de a "área de um quadrado de lado 1 ser também igual a 1". Pediu-se que pensassem no significado da área e na respectiva unidade de medida. Deste modo perceberam a diferença entre 1 cm e $1\,\text{cm}^2$. O item c provocou muitas dúvidas e agitação na classe. Os alunos não tiveram dificuldade em concluir que a nova área deveria ser 2. Porém, com raras exceções, não conseguiam prosseguir. Optou-se pela não interferência, com o intuito de melhor avaliar-lhes o desempenho.

Atividade 12

<u>Objetivo:</u> fazer com que o aluno tome conhecimento de uma aplicação muito difundida do Teorema de Pitágoras.

Um pedreiro, quando precisa de um ângulo reto, na demarcação de um terreno, utiliza barbante e estacas da seguinte maneira:



a) Como se pode garantir que o triângulo assim construído é retângulo? Justifique sua resposta matematicamente.

b) Se o pedreiro modificar as medidas dos barbantes para: EF = 90cm e EG = 1,20m, qual deve ser a distância entre as estacas F e G para que ele tenha a certeza de haver construído um ângulo reto?

<u>Análise do ponto de vista matemático</u>

a) 1 m = 100 cm e $100^2 = 60^2 + 80^2$ logo, o triângulo é retângulo.

b) $FG^2 = 90^2 + 120^2$ então FG = 150 cm ou 1,5 m

<u>Análise do ponto de vista didático</u>

As variáveis didáticas relativas aos dados numéricos e posição do triângulo não deverão oferecer grande dificuldade ao aluno, nem de cálculo, nem de apreensão.

Para o aluno é interessante saber justificar matematicamente o Teorema em ação citado, uma vez que o mesmo é bastante utilizado na prática. Assim, talvez, o Teorema ganhe maior significado para ele.

<u>Aplicação e análise dos resultados relativos à Atividade 12</u>

As dúvidas restringiram-se à conversão de metro para centímetro. Durante a resolução do item b, algumas duplas pediram auxílio e constatou-se que, ao colocar os dados na calculadora, esses alunos ou omitiam ou acrescentavam zeros. Pediu-se que refizessem os cálculos.

Dois dos quatro erros detectados na 12 b, ocorreram em cálculo de potências e dois situaram-se na conversão de unidades de comprimento. A dupla K não completou a resolução deste item: $x^2 = 22500$.

A tabela ilustra os resultados obtidos nas Atividades 10, 11 e 12:

	Acertos	Erros	Em branco	Incompletas
Atividade 10	13	4	1	–
Atividade 11a	17	1	–	–
Atividade 11b	16	1	1	–
Atividade 11c	7	5	6	–
Atividade 12a	15	2	1	–
Atividade 12b	8	4	5	1

Como se pode observar, a 11 c foi a questão que provocou maior dificuldade. Uma possível interpretação para o fato, baseada em Duval, seria a não congruência entre enunciado do problema e fórmula para cálculo da área de quadrado. Para o aluno, conforme atesta o índice de sucesso no item b, é mais fácil calcular o valor da área dada a medida do lado do que o problema inverso.

Atividade 13

<u>Objetivo:</u> verificar a iniciativa do aluno e desenvolver sua capacidade de reconhecer a aplicabilidade do Teorema de Pitágoras como ferramenta para resolver o problema.

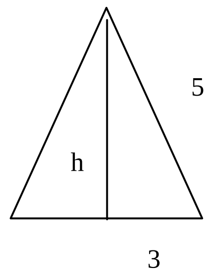
a) Num triângulo isósceles, a base mede 6 cm e cada um dos lados, "iguais", mede 5 cm. Calcule a área desse triângulo.

<u>*Análise do ponto de vista matemático*</u>

$h = 4cm$

$$\text{área} = \frac{4.6}{2}$$

$$\text{área} = 12cm^2$$

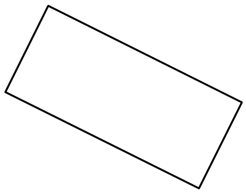


<u>Análise do ponto de vista didático</u>

O problema pode apresentar para o aluno dificuldades quanto à conversão do enunciado para a figura, isto é, do registro discursivo para o registro das figuras, devido à não congruência, e quanto à apreensão operatória, uma vez que ele próprio deverá traçar a altura relativa à base do triângulo.

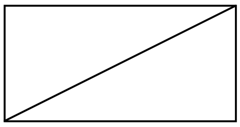
Os dados numéricos foram escolhidos em função do objetivo colocado, de modo a facilitar o cálculo. A fórmula da área também não deverá ser um empecilho para a boa resolução do problema, pois consta da caixa de ferramentas.

b) O retângulo abaixo tem largura igual a 80 cm e diagonal 100 cm. Quanto mede o seu perímetro?



<u>Objetivo neste item</u>: Idem ao anterior.

<u>Análise do ponto de vista matemático</u>



Comprimento = 60 cm; perímetro = 280 cm.

<u>Análise do ponto de vista didático</u>

Valem as considerações feitas para o item anterior. Talvez a rotação do retângulo seja um fator interferindo na visibilidade da apreensão operatória.

<u>Aplicação e análise dos resultados relativos à Atividade 13</u>

No dia 29 de setembro, quarta-feira, compareceram 35 alunos. A dupla C ficou sem nenhum representante. Alunos de duas duplas, cujos parceiros estavam ausentes, formaram nova dupla mas entregaram os trabalhos individualmente, pois nem sempre as soluções coincidiam. Assim, o procedimento estabelecido nas sessões anteriores foi mantido.

No decorrer da síntese da Atividade 11, julgou-se conveniente mostrar, no quadro geométrico, o problema da duplicação do quadrado. Os alunos interessaram-se bastante durante a discussão.

Os comentários sobre a Atividade 12, referentes à conversão de unidades, foram feitos por escrito para cada grupo que apresentou essa dúvida.

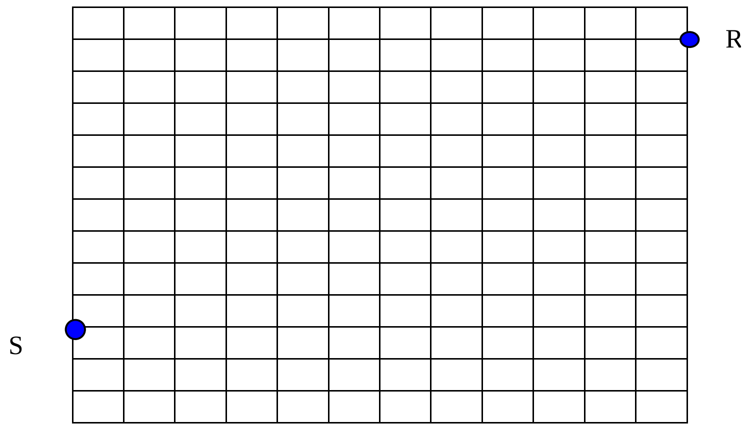
Iniciou-se a aplicação da Atividade 13, item a, que provocou muita indagação em classe. A fórmula para o cálculo da área de triângulo constava da caixa de ferramentas, e a utilização da mesma fazia parte da Atividade 0. Entretanto, alguns alunos, ao notar que a medida da altura não era dada, ou a substituíam pela medida do lado, ou a traçavam e comentavam que "faltavam medidas" no enunciado. Quando solicitados a observar as ferramentas da caixa, encontraram em F4 a propriedade do triângulo isósceles, adequada para solucionar o problema. Perceberam que a altura "cai bem no meio da base" e, a partir disso, conseguiram visualizar o triângulo retângulo, aplicando, a seguir, o Teorema de Pitágoras.

Embora o cálculo de "perímetro" aparecesse na Atividade 0, foi ele a causa de insucesso para algumas duplas na questão 13b. Apenas um grupo apresentou erro na resolução da equação incompleta do 2º grau. Como houvesse ainda tempo suficiente, os alunos solicitaram a Atividade 14.

Atividade 14

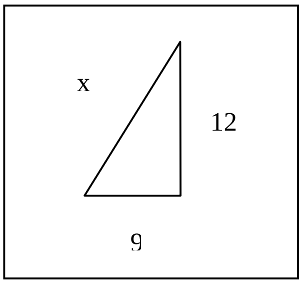
Objetivo: criar condições para que o aluno perceba aplicação do Teorema de Pitágoras no cálculo da distância entre dois pontos dados.

A figura representa o chão do pátio de uma escola recoberto por placas quadradas de 1 m de lado. Renata e Sylvia estão nos pontos R e S, respectivamente. Quanto mede a "menor" distância entre as duas colegas?



Análise do ponto de vista matemático

Resp.: a distância é 15 m



Análise do ponto de vista didático

Conforme constatação feita por meio do questionário aplicado anteriormente, a malha reticulada pode se constituir numa grande dificuldade para o aluno no que se refere à interpretação dos dados do problema. Com esta atividade será possível reforçar/confirmar, ou não, a hipótese.

Aplicação e análise dos resultados relativos à Atividade 14

A primeira providência tomada pela maioria das duplas foi ligar os pontos R e S. Entretanto, após a construção, não houve progresso. Pediu-se aos alunos que lessem novamente o enunciado, pois ali se encontravam as informações indispensáveis à solução do problema. Perceberam que, "contando quadradinhos na vertical e na horizontal", teriam as medidas dos catetos. Oito duplas não conseguiram terminar a atividade. Permitiu-se que o fizessem na sessão seguinte.

A tabela mostra o alto índice de sucesso nas questões, apesar da dificuldade inicial em identificar a subfigura pertinente. Para melhor compreensão, serão adotadas as seguintes convenções:

Para a Atividade 13a: T.C. – resoluções totalmente corretas; A.C. – corretas, até a medida da altura.

Atividade 13a	T.C.	A.C.	Incorretas	Em branco
Nº de duplas	15	1	1	1

Para a 13b: E.P. – erro no cálculo do perímetro; E.E. – erro na resolução da equação.

Atividade 13b	T.C.	E.P.	E.E.	Em branco
Nº de duplas	14	3	1	1

Para a Atividade 14: C.T.R. – construção do triângulo retângulo; M.C. – determinação das medidas dos catetos; M.H. – determinação da medida da hipotenusa.

Atividade 14	C.T.R.	M.C.	M.H.	Incorretas	Em branco
Nº de duplas	17	12	10	–	1

O sucesso dos alunos na resolução da Atividade 13 parece mostrar uma evolução em termos de agilidade para aplicar o Teorema adequadamente, superando o fator desfavorável da não congruência entre enunciado e relação pitagórica. Na Atividade 14, de fato, a leitura dos dados do problema com a utilização da malha reticulada constituiu dificuldade para os alunos.

Atividade 15

Objetivo: provocar ruptura do contrato didático.

a) Dados os segmentos de medidas a e b, descreva um modo de determinar geometricamente um segmento <u>*x*</u>*, tal que:* $x = \sqrt{a^2 + b^2}$

b) Construa agora, usando os segmentos a e b do item anterior, um segmento y tal que $y = \sqrt{a^2 - b^2}$

Isto é sempre possível? Justifique a resposta.

<u>*Análise do ponto de vista matemático*</u>

a) Os segmentos dados constituirão os catetos de um triângulo retângulo, cuja hipotenusa é a solução do problema, pois, pelo Teorema de Pitágoras: $x^2 = a^2 + b^2$

Sempre existirá solução, isto é, para $a \geq b$ ou para $a < b$;

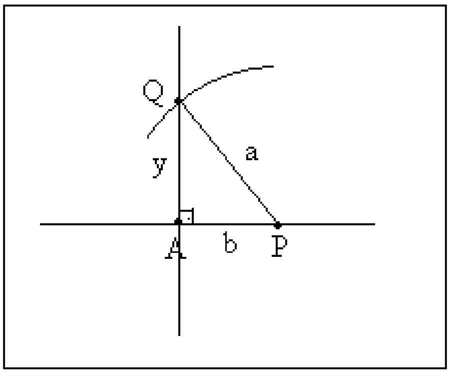
b) a hipotenusa deve ser um segmento de medida a e um dos catetos terá medida b. A solução será o outro cateto.

Discussão: o problema só admitirá solução se b < a. Esse fato pode ser interpretado em dois quadros:

No algébrico, se b > a então $y = \sqrt{a^2 - b^2}$ não será número real. Se b = a então y = 0, o que não é possível, pois y representa a medida de um segmento.

- No geométrico, se b > a, o arco de centro em P e raio a não interceptará a semi-reta $\overrightarrow{AQ}$ de origem em A. Se b = a, não haverá triângulo, pois A e Q coincidirão.

Análise do ponto de vista didático



A mudança de quadros ocorre em sentido inverso, ou seja, do algébrico para o geométrico. No item b, além da ruptura do contrato, há a possibilidade da inexistência de solução.

Como se trata praticamente de um problema de Desenho Geométrico, é dada ao aluno a oportunidade de refletir, conjeturar e descobrir mais uma aplicação do Teorema de Pitágoras, desta vez no "registro de desenho".

Aplicação e análise dos resultados relativos à Atividade 15

Da sessão do dia 30 de setembro de 1999, quinta-feira, participaram 37 alunos. Os dezenove grupos achavam-se, portanto, devidamente representados. Diante do alto índice de acertos relativos à Atividade 13, as correções necessárias foram feitas por escrito para algumas duplas no próprio trabalho dos alunos. Aliás, é importante esclarecer, esse procedimento foi adotado em todas as atividades. Cada grupo possuía uma pasta improvisada de cartolina identificada com a letra correspondente. Todas as atividades incorretas foram corrigidas e comentadas, pois às vezes alguns grupos apresentavam peculiaridades tais como erros nos cálculos, não compreensão do significado de “perímetro”, dificuldades na conversão de unidades etc., que demandavam tratamento mais personalizado. Além disso, todos os alunos receberam folhas impressas com resumo e resolução das atividades já realizadas.

Das oito duplas que não haviam ainda concluído a resolução da Atividade 14 e o fizeram nesta sessão, sete obtiveram sucesso total e um grupo apresentou a atividade apenas com o triângulo retângulo desenhado. Esses resultados não foram computados na elaboração da tabela correspondente, pois, caso os alunos tivessem obtido auxílio de colegas, os índices não retratariam o que realmente ocorreu.

Ao tomar conhecimento da Atividade 15, alguns alunos manifestaram surpresa pelo fato de não haver “números” no enunciado. Pediu-se que imaginassem dois segmentos, um de medida a e outro de medida b, sem a preocupação com o valor numérico das medidas.

Observou-se que algumas duplas tentavam simplificar o expoente 2 das parcelas do radicando com o índice do radical. Foi-lhes apresentado, para contestar esse procedimento incorreto, o seguinte argumento: “Será que, por exemplo, $\sqrt{3^2 + 4^2} = 3 + 4$? Os alunos verificaram que se tratava de uma igualdade falsa. Na verdade, estavam realizando uma generalização indevida.

Os grupos discutiam, mas os alunos pareciam bloqueados, sem saber como prosseguir. Foi necessário reinvestir no significado da radiciação como operação inversa da potenciação. Assim, chegaram à igualdade: $x^2 = a^2 + b^2$. Daí em diante, conseguiram converter para o triângulo retângulo e identificar o Teorema de Pitágoras como ferramenta de resolução. A dificuldade, quanto ao item b, localizou-se no sinal de subtração. Voltou-se a uma atividade anterior (nº 13), a fim de que entendessem como esse sinal algébrico havia aparecido, no caso do cálculo da medida de um dos catetos, dadas as medidas da hipotenusa e do outro cateto. Perceberam, então, que bastava transpor o termo b^2 para o outro membro da igualdade e aplicar o Teorema de Pitágoras.

O quadro resume os resultados obtidos:

	Fig. correta	Fig. incorreta	Em branco
Atividade 15a	16	1	2
Atividade 15b	15	2	2

Relativamente ao item b, apesar de quinze grupos terem apresentado a figura correta, apenas dez chegaram a alguma conclusão sobre a possibilidade de haver sempre solução. A maioria apresentou respostas do tipo: "A hipotenusa tem de ser o maior lado, já que não se sabe o valor de a e b", ou "Não é sempre possível porque o maior lado será sempre a hipotenusa". Entretanto, quatro grupos afirmaram a possibilidade: "Sim (sempre é possível). A hipotenusa tem de ser o maior lado".

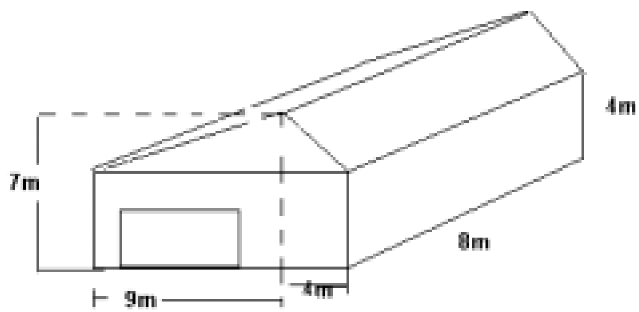
Tais respostas levam a crer que os alunos perceberam qual a condição para que o problema admita solução, porém não conseguiram separar os diversos casos, isto é, não conseguiram discutir as três possibilidades: $b < a$; $b > a$; e $b = a$.

Deve-se ressaltar que as figuras foram construídas a mão livre ou, na melhor das hipóteses, com auxílio de régua; não foi utilizado compasso, já que a maioria não possuía o instrumento.

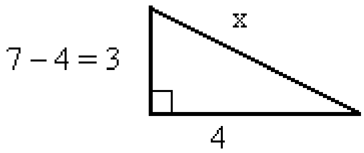
Atividade 16

Objetivo: proporcionar ao aluno oportunidade de exercitar a "apreensão operatória" em um problema que exige a aplicação do Teorema de Pitágoras numa situação da vida cotidiana. Verificar se ele consegue concluir o problema.

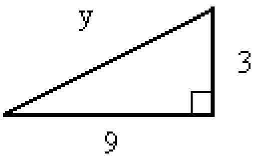
Qual a área do telhado desse galpão?



Análise do ponto de vista matemático



Para o triângulo situado à direita no plano frontal: x = 5m área(1) = $40m^2$



Para o triângulo situado à esquerda:

$y = 3\sqrt{10}m$ área(2) = $24\sqrt{10}m^2$

Área total = $(40 + 24\sqrt{10})m^2$ ou $8(5 + 3\sqrt{10})m^2$ para $\sqrt{10} \approx 3{,}16$ tem-se

Área total $\approx 115{,}84m^2$

Análise do ponto de vista didático

Podem ocorrer dificuldades de dois tipos:

- quanto à perspectiva da figura espacial. Segundo Duval, uma representação em perspectiva, ao contrário de uma maquete, não é uma representação heurística, pois privilegia um único ponto de vista (visão frontal, lateral etc.), podendo provocar leitura ambígua;
- quanto às modificações mereológicas (relação todo-parte) necessárias para a resolução do problema. As subfiguras pertinentes, dois triângulos retângulos, possuem um cateto comum, cuja medida é a diferença 7 – 4 = 3.

Aplicação e análise dos resultados relativos à Atividade 16

Na segunda-feira 4 de outubro de 1999, compareceram 34 alunos. Todos os grupos estavam representados. Depois de rápida síntese da Atividade 15, pois a mesma havia sido exaustivamente discutida na sessão anterior, iniciou-se a Atividade 16. No fim de semana anterior a esta atividade, foi confeccionada uma correspondente maquete rudimentar, de papel-cartão, em escala aproximada. A intenção era mostrá-la caso fosse estritamente necessário, o que realmente aconteceu.

A princípio, os alunos não conseguiam identificar quais as figuras geométricas componentes do telhado. Após a apresentação da maquete, com telhado removível, perceberam tratar-se da reunião de dois retângulos. Sabiam como calcular a área de um retângulo, mas observaram que "faltavam" medidas. Sugeriu-se que examinassem com atenção os dados do problema, tentando visualizá-los na maquete. Os grupos pareciam motivados, e alguns alunos aproximaram-se da maquete para "ver melhor". Uma vez interpretada a perspectiva, com a ajuda do modelo de papel-cartão, o reconhecimento do Teorema da Pitágoras como ferramenta a ser usada ocorreu naturalmente.

Para a tabela a seguir, valem as convenções:

T.C. – resoluções totalmente corretas; H(5) – cálculo correto até a hipotenusa de medida 5; H($\sqrt{90}$) – cálculo correto até a hipotenusa com esta medida; A1 – cálculo correto até a área do retângulo de dimensões 5 m e 8 m; A2 – cálculo correto até a área do retângulo de dimensões 8 m e $\sqrt{90}$ m.

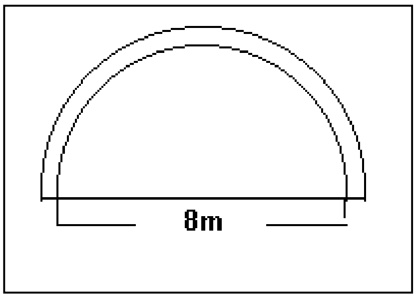
Atividade16	T.C.	Em branco	Incompletas			
			H(5)	H($\sqrt{90}$)	A1	A2
Nº de grupos	13	–	19	15	17	13

A apreensão operatória, quanto às modificações mereológicas (relação todo-parte), conforme previsto, constituiu-se de fato numa dificuldade para os alunos, minimizada com a utilização da maquete. Observa-se, também, que o índice de sucesso caiu nos cálculos envolvendo números irracionais, apesar de ser permitido o uso da calculadora para a obtenção dos valores aproximados.

Atividade 17

Objetivo: verificar se o aluno, numa situação mais complexa, consegue perceber as subfiguras pertinentes para a aplicação do Teorema de Pitágoras.

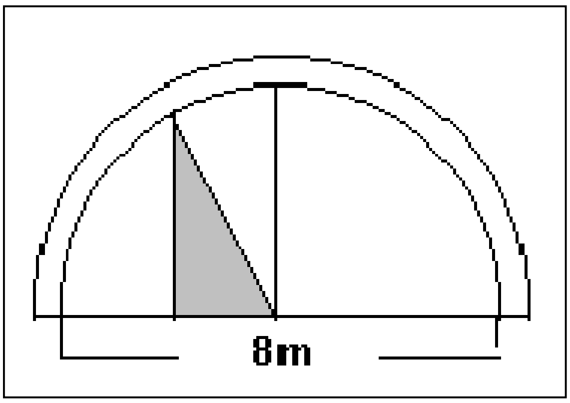
A figura representa a entrada de um túnel, com mão única. A semicircunferência interior tem diâmetro de 8 m. Um caminhão de 2,40 m de largura precisa passar por esse túnel. Qual é, "em teoria", a altura máxima do caminhão para que isto seja possível?

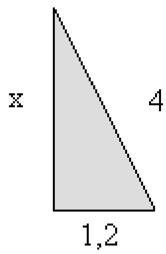


Análise do ponto de vista matemático

$$x^2 + (1{,}2)^2 = 16$$
$$x^2 = 14{,}56$$
$$x \approx 3{,}8$$

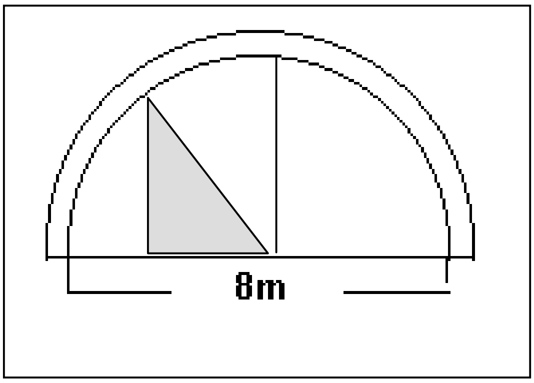
O cateto horizontal mede 1,2 m (metade da largura do caminhão) e a hipotenusa 4 m (metade da medida do diâmetro).

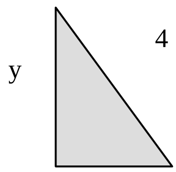




Se o aluno pensar em outra configuração, isto é, situando o "corte" do caminhão num só quadrante, então:

$$y^2 = 16 - 5{,}76$$
$$y^2 = 10{,}24$$
$$y = 3{,}2$$





Neste caso, a altura encontrada não será máxima.

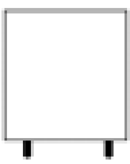
Análise do ponto de vista didático

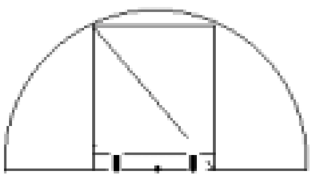
A não congruência entre o enunciado do problema e o Teorema de Pitágoras poderá acarretar alguma dificuldade para o aluno, no que se refere à identificação do caminho de resolução do problema.

O fato dos traçados auxiliares não serem dados na figura de partida, segundo Padilla, constitui-se num fator que deverá prejudicar a visibilidade da subfigura pertinente.

Aplicação e análise dos resultados relativos à Atividade 17

Inicialmente, foi necessário rever as noções de diâmetro e raio de circunferência. Solicitou-se, a seguir, que os alunos identificassem quais os dados e qual a questão. A primeira dúvida, foi referente à conversão do registro discursivo para o registro de figura. “Como representar o caminhão no túnel?”

(fig. 1) 

 (fig. 2)

Fez-se uma representação estilizada, em corte, do caminhão fora do túnel (fig.1), solicitando-se a colocação dessa figura, no semicírculo representativo do túnel.

Percorrendo-se a classe, foi possível observar que os grupos efetuavam a inscrição corretamente (fig.2). Entretanto, ao colocar os dados, alguns usavam a largura do caminhão como cateto. Perguntou-se aos alunos: “Quanto vale a medida da hipotenusa do triângulo que vocês construíram?” Resposta: “Não é o raio?” Réplica: “Será que esse segmento liga o centro a um ponto da circunferência?”

A partir daí, perceberam a falha e não houve dificuldade na mudança para o quadro algébrico, por meio da igualdade pitagórica.

A tabela mostra os resultados obtidos:

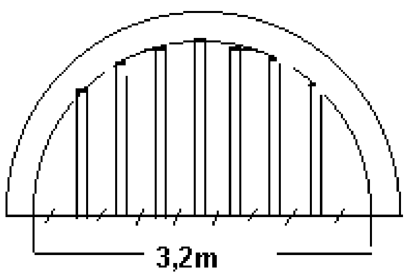
	Acertos	Erros	Em branco
Atividade 17	18	1	–

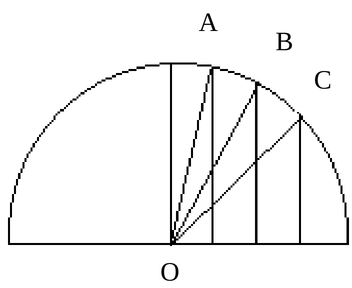
O aparente sucesso na resolução não deve ser levado em consideração, pois foi necessária constante intervenção, sem o que, provavelmente, muitas duplas não chegariam a perceber o caminho de resolução. Os dois fatores apontados na análise a priori, a não congruência entre o enunciado do problema ↔ Teorema de Pitágoras e o fato de os traçados auxiliares não constarem da figura de partida parecem ter sido os responsáveis pelas dificuldades dos alunos.

Atividade 18

<u>Objetivo:</u> o mesmo da anterior, havendo um acréscimo da complexidade da resolução.

Sete barras eqüidistantes fecham este portal em semicírculo. Calcule o comprimento total das barras utilizando as indicações da figura. (Não considere a





espessura das barras).

<u>*Análise do ponto de vista matemático*</u>

Formam-se três triângulos retângulos, conforme figura da direita, cujas hipotenusas, respectivamente $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ e $\overline{OC}$, têm como medida metade do diâmetro, ou seja 1,6 cm. Os catetos horizontais medem respectivamente 0,4 m; 0,8 m; e 1,2 m, pois as barras distam entre si, igualmente, de 3,2 ÷ 8 = 0,4 cm.

$$x^2 = (1{,}6)^2 - (0{,}4)^2$$
$$y^2 = (1{,}6)^2 - (0{,}8)^2$$
$$z^2 = (1{,}6)^2 - (1{,}2)^2$$
$$\text{comprimento} = 1{,}6 + 2x + 2y + 2z$$

com aproximação a menos de 0,01, tem-se:

$$x \approx 1{,}54 \quad y \approx 1{,}38 \quad z \approx 1{,}05$$

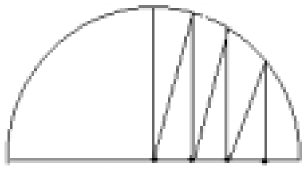
$$\text{comprimento} \approx 1{,}6 + 2.(3{,}97)$$
$$\text{comprimento} \approx 9{,}54 \text{ m}$$

<u>*Análise do ponto de vista didático*</u>

O uso de dados numéricos, ocasionando como resultado um número irracional, visa evitar o obstáculo didático dos números inteiros. É interessante para o aluno perceber que os problemas práticos normalmente não chegam a produzir, como resposta, quadrados perfeitos. Na aplicação da seqüência, seria permitido o uso da calculadora.

<u>*Aplicação e análise dos resultados relativos à Atividade 18*</u>

Pelo fato de apresentar alguma analogia com a anterior, notou-se maior desembaraço dos alunos no que se refere à percepção da primeira subfigura a ser considerada (triângulo retângulo de hipotenusa $\overline{OA}$. Os alunos argumentaram que a hipotenusa seria o raio, mas "faltavam" dois catetos. Explicou-se, então, o significado do termo "equidistante". A seguir, concluíram com facilidade que a distância entre duas barras vizinhas vale 0,4 m. O Teorema de Pitágoras foi utilizado corretamente, porém para o cálculo do comprimento da barra seguinte, alguns grupos apresentavam a seguinte configuração:



Quando se questionou que a hipotenusa, não seria o raio, conseguiram identificar o triângulo retângulo pertinente, o mesmo ocorrendo para a barra menor.

Analisando-se, posteriormente, as resoluções, constatou-se que duas duplas, ao multiplicar 0,4 por 3, obtiveram o resultado 0,12. Três grupos não conseguiram concluir a resolução, apresentando como resposta o quadrado do comprimento da barra, isto é, $k^2 = 1{,}12$. Talvez o zero depois da vírgula, no resultado aproximado 1,05, tenha causado, para esses alunos, alguma insegurança quanto ao resultado.

Serão adotadas as convenções: T.C. – resolução totalmente correta; C.B1. – resultado correto para a primeira barra citada; C.B2. – resultado correto para a segunda barra citada; C.B3. – resultado correto para a terceira barra citada).

Atividade 18	T.C.	C.B.1	C.B.2	C.B.3	Incorretas	Em branco
Resoluções	2	17	17	12	1	–

Apesar de haver tempo suficiente, apenas duas duplas concluíram corretamente o problema. Duas duplas somaram os comprimentos de três barras, correspondendo aos três valores calculados. Os demais alunos parecem ter se concentrado nos cálculos, esquecendo-se de retornar à pergunta inicial, colocada no enunciado da questão.

Atividade 19 (problema extraído do boletim do Irem de Orléans)

Objetivos:

- interpretação e conversão do registro discursivo para o registro de figura;
- identificação do Teorema de Pitágoras como caminho para a solução do problema.

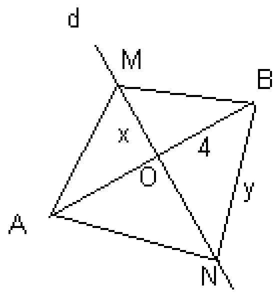
$\overline{AB}$ é um segmento de comprimento 8cm e de ponto médio O. A reta d $\perp$ $\overline{AB}$ em O. Sobre d, toma-se um ponto M a 5cm de B. Seja N um ponto tal que:

- *N pertence à reta d.*

- *N não esteja na semi-reta* $\overrightarrow{OM}$
- *NO = 3cm*

O que se pode afirmar sobre o quadrilátero ANBM?

Análise do ponto de vista matemático



$$x^2 + 4^2 = 5^2$$
$$x = 3$$
$$y = 5$$

Uma estratégia de resolução seria, observar que OM = ON = 3, então, as diagonais de ANBM se cortam perpendicularmente no ponto médio. Portanto, ANBM é um losango. Ou ainda, utilizando o triângulo BON, retângulo em O, resulta y = 5. Mas d é mediatriz de $\overline{AB}$, logo: MA = MB = 5 e NA = NB = 5. Portanto o quadrilátero ANBM é um losango.

Análise do ponto de vista didático

Apesar de muito óbvios, foram conservados os dados numéricos do enunciado original. Corre-se o risco de o aluno medir a figura e concluir a resposta. Talvez fosse preferível utilizar respectivamente 80 cm, 50 cm e 30 cm.

Provavelmente a maior dificuldade para o aluno será a interpretação do enunciado e sua posterior conversão. Definição e propriedade da mediatriz constam na caixa de ferramentas.

Aplicação e análise dos resultados relativos à Atividade 19

A conversão enunciado→figura constituiu-se, como era esperado, no fator de maior dificuldade para os alunos. Após dez minutos, a contar da distribuição das folhas, constatou-se que apenas uma dupla conseguira construir a configuração correta. Sentiu-se um bloqueio, um desânimo, apoderando-se dos alunos, motivado pela não compreensão do enunciado, conforme declararam. Havia duas alternativas: interferir ou não, na medida do necessário, correndo-se o risco de ficar sem parâmetros para analisar a atividade. Optou-se pela segunda, acreditando-se que seria mais proveitoso, para o aluno, ter a oportunidade de aprender noções básicas e importantes de Geometria, tais como semi-reta, retas perpendiculares entre si e classificação de quadriláteros.

A figura foi construída no quadro-negro a partir de um diálogo com a classe: as sugestões pertinentes eram aceitas e as demais corrigidas por meio de argumentação. Os dados do problema, no que se refere a medidas, foram colocados na figura. Imediatamente os alunos reconheceram a terna egípcia (3, 4, 5) e foram concluindo os valores dos lados do quadrilátero. Classificaram-no como sendo um quadrado, quando perceberam que todos os lados mediam 5 cm. Desenhou-se um losango, ilustrando assim o fato de que um quadrilátero pode ter os lados congruentes sem ser um quadrado. Perguntou-se qual sua denominação; alguns alunos responderam corretamente. Aproveitou-se a situação para questionar: “Todo quadrado é losango? Todo losango é quadrado?” O passo seguinte referiu-se à propriedade das diagonais. Traçando-se diagonais de paralelogramo, retângulo e losango, permitiu-se aos alunos observar que as diagonais do losango são perpendiculares entre si, cortando-se no ponto médio. Teria sido preferível colocar essas propriedades na caixa de ferramentas, em lugar da propriedade de mediatriz de segmento.

Pediu-se aos grupos que escrevessem as próprias resoluções. Os resultados obtidos não devem ser levados em conta, pois, como já se imaginava, foi necessário intervir durante todo o tempo de resolução. Entretanto, examinando-se os trabalhos dos alunos, foi elaborada, a título de curiosidade, a seguinte tabela:

Atividade 19	Lados = 5 cm	“É losango”	Em branco	“Não é quadrado”
Nº de grupos	5	8	5	1

Qual seria a interpretação para o número de respostas em branco? Escassez de tempo? Contrato didático? “A professora explicou a resolução, logo não vai examinar o que os alunos fizeram?” Apesar das explicações, não conseguiram entender o problema?

Uma entrevista provavelmente poderia ter esclarecido essas questões, mas não foi possível realizá-la em virtude da exigüidade do tempo disponível. As atividades deveriam encerrar-se o mais breve possível para que se pudesse aplicar o questionário avaliatório, já que a escola havia reservado a semana seguinte para comemorações do Dia da Criança.

Em resumo, as suposições feitas na análise a priori, sobre as prováveis causas de dificuldade, foram aqui confirmadas.

Atividade 20

(baseada em uma atividade elaborada pelo professor-doutor Saddo Ag Almouloud para o curso de Didática do Programa de Estudos Pós-Graduados no Ensino da Matemática – PUC-SP, 1997)

Objetivo: evocando a História da Matemática, fazer um retorno ao quadro numérico para fechar o ciclo das atividades, utilizando o recíproco do Teorema de Pitágoras. Relacionar as ternas pitagóricas a triângulos retângulos, e as ternas proporcionais a triângulos retângulos semelhantes.

Quando uma terna de números naturais não nulos (x, y, z) verifica a relação $x^2 + y^2 = z^2$*, ela é chamada "terna pitagórica". Vamos agora ver como podem ser "fabricadas" ternas desse tipo.*

Diophante (século III, d.C.) utilizou o seguinte método para obter ternas pitagóricas (já conhecido por Euclides):

- *Escolha dois números naturais não nulos m e n tais que m seja maior que n, isto é* $m > n$*.*
- *Calcule:*

$$x = m^2 - n^2$$
$$y = 2mn$$
$$z = m^2 + n^2$$

Segundo Diophante, a terna formada por (x, y, z) é pitagórica.

a) Escolha alguns valores para m e n, por exemplo, m = 2 e n = 1, depois m = 3 e n = 2, e verifique que esse método de fato produz ternas pitagóricas.

b) Escolha agora você um valor para m e outro para n, lembrando que m > n. O método "funcionou"?

c) Tente provar que este método, que chamaremos de método D (em homenagem a Diophante), é geral; quer dizer, ele vale para quaisquer naturais m e n, com $m > n$.

d) A terna (9, 12, 15) é pitagórica? Será que ela pode ser obtida, usando-se o método D? Tente demonstrar sua resposta.

*e) Com o método D é possível fabricar uma infinidade de ternas pitagóricas, mas não todas. Vamos ver, então, outro método para a obtenção de ternas pitagóricas por "proporcionalidade". Chamaremos este de método P. Voltando à terna (3, 4, 5), experimente multiplicar todos seus elementos por um mesmo número. Por exemplo: (3.**2**, 4.**2**, 5.**2**), (3.**3**, 4.**3**, 5.**3**). Será o resultado ainda uma terna pitagórica? Faça o "teste". O que você concluiu?*

f) Mostre que, se (x, y, z) é uma terna pitagórica e k um número natural não nulo, então a terna (kx, ky, kz) também é pitagórica.

g) Você consegue prever o que acontece, se construirmos triângulos cujos lados tenham ternas pitagóricas como medidas? Explique por quê.

h) Construa triângulo, usando a terna (3, 4, 5) e as ternas obtidas a partir desta pelo método P. O que você observa a respeito desses triângulos?

Análise do ponto de vista matemático

a) Para m = 2 e n = 1:

$$\begin{array}{lll} x = m^2 - n^2 & & z = m^2 - n^2 \\ x = 4 - 1 & y = 2mn & z = 4 + 1 \\ x = 3 & y = 4 & z = 5 \end{array}$$

como $5^2 = 3^2 + 4^2$ então (3, 4, 5) é pitagórica.

Para m = 3 e n = 2:

$$\begin{array}{lll} x = 9 - 4 & y = 2.3.2 & z = 9 + 4 \\ x = 5 & y = 12 & z = 13 \end{array}$$

como $13^2 = 5^2 + 12^2$ então (5, 12, 13) é pitagórica.

b) Será criado pelo aluno.

c) Deve-se provar que $x^2 + y^2 = z^2$. Uma estratégia poderia ser, partir do 1º membro da equação e chegar ao 2º membro:

$$x^2 + y^2 = (m^2 - n^2) + (2mn)^2$$
$$x^2 + y^2 = m^4 + 2m^2n^2 + n^4 \quad \text{mas: } m^2 + n^2 = z \text{, logo } x^2 + y^2 = z^2$$
$$x^2 + y^2 = (m^2 + n^2)^2$$

d) Supondo possível que:

$$\begin{cases} m^2 - n^2 = 9 \\ 2mn = 12 \\ m^2 + n^2 = 15 \end{cases}$$

forma-se um sistema que resolvido fornece valores não inteiros para m e n, isto é: $m = \pm 2\sqrt{3}$ e $n = \pm\sqrt{3}$. Logo, esta terna não pode ser obtida pelo método de Diophante.

e) Como $10^2 = 6^2 + 8^2$ e $15^2 = 9^2 + 12^2$ conclui-se que (6, 8, 10) e (9, 12, 15) são ternas pitagóricas.

f) O aluno deverá demonstrar que $(kx)^2 + (ky)^2 = (kz)^2$. Partindo-se do 1º membro: $\begin{array}{l}(kx)^2 + (ky)^2 = k^2x^2 + k^2y^2 \\ (kx)^2 + (ky)^2 = k^2(x^2 + y^2)\end{array}$ mas, $x^2 + y^2 = z^2$ pois se supõe (x, y, z) pitagórica, logo: $(kx)^2 + (ky)^2 = (kz)^2$ e, portanto, a terna (kx, ky, kz) é também pitagórica.

g) Espera-se que o aluno associe as ternas pitagóricas ao Teorema de Pitágoras.

Análise do ponto de vista didático

Os itens a, b, e e não deverão oferecer grande dificuldade para o aluno, pois subentendem como conhecimento disponível o cálculo de valores numéricos. O aluno precisará ainda usar o recíproco do Teorema de Pitágoras, que, aliás, consta da definição de ternas pitagóricas dada no enunciado da atividade. Entretanto, os itens c, d, e f, que dependem de tratamentos no registro algébrico, por envolver recursos mais sofisticados de cálculo algébrico e exigir maior abstração, talvez não sejam resolvidos a contento.

Supõe-se que, neste estágio, o aluno consiga sucesso na resolução do item g, porém a resolução do h dependerá do conhecimento disponível sobre semelhança de triângulos.

Desta forma, acredita-se ser possível por meio da mudança de quadros fazer com que o aluno perceba que o quadro geométrico e o numérico, também no caso do Teorema de Pitágoras, se inter-relacionam.

Aplicação e análise dos resultados relativos à Atividade 20

Na terça-feira 5 de outubro de 1999, com a presença de 30 alunos, foi realizada a última atividade da seqüência didática. A dupla D estava ausente e os demais dezoito grupos eram representados por pelo menos um aluno. Foram distribuídos, primeiramente, os resumos impressos das conclusões relativas às atividades anteriores e, a seguir, as duas folhas iniciais, relativas a esta.

Na análise a priori da atividade 20, foi conjeturado que o item a, bem como os itens b e e, não deveria oferecer grande dificuldade. Entretanto, a princípio, algumas duplas não perceberam que as questões se reduzem a simples cálculo de valor numérico. Numerosas pesquisas apontam as dificuldades encontradas pelos alunos ao depararem com a Álgebra. Segundo Nobre (1996), para que se possa influir no desempenho matemático do aluno fazendo com que a situação de fracasso atual se reverta, é necessário propiciar, desde o início, uma aprendizagem consistente da Álgebra que leve em consideração as dificuldades detectadas nas pesquisas, como, por exemplo:

- dificuldade em dar sentido a uma expressão algébrica;
- dificuldade em considerar expressões algébricas como respostas legítimas, relacionada à distinção entre adição aritmética e adição algébrica;
- falta de referencial numérico no uso das letras, pois, na maioria dos casos, o aluno não vê a letra como representando um número. Em conseqüência, as operações aritméticas feitas com elas são tarefas sem sentido;
- atribuição de significado concreto às letras;
- dificuldade de interpretação da variável como significando um número qualquer;
- passagem da linguagem natural para a algébrica;
- sentido diferente das letras na aritmética: a letra m, por exemplo, pode ser usada para representar metros e não o número de metros como na Álgebra.

Explicou-se que seria preciso trocar as letras pelos números sugeridos, para fabricar as componentes x, y, z da terna. Os alunos iniciaram o trabalho e resolveram o item b, sem apresentar mais dúvidas.

O item c mostrou-se bastante problemático. A princípio, mesmo as duplas com maior sucesso nas atividades anteriores, não conseguiam dar início à resolução. Sugeriu-se, uma vez que m e n representam números “desconhecidos”, que “testassem” a terna $(m^2 - n^2, \quad 2mn, \quad m^2 + n^2)$ usando a definição de terna pitagórica. O entrave seguinte foi o cálculo dos quadrados dos componentes da terna, apesar de o tópico produtos notáveis ter sido explorado na atividade 0. Observou-se o empenho da maioria em efetuar os cálculos algébricos. O tempo de aula esgotava-se, e algumas duplas já testavam a terna (9, 12, 15) do item d. As folhas foram recolhidas, e a atividade teve prosseguimento, na quarta aula, logo após o recreio. As folhas correspondentes foram devolvidas aos alunos, já com a correção e comentários.

A pergunta feita na segunda parte do item d sobre a possibilidade de obter a terna (9, 12, 15) usando o método de Diophante constitui-se numa dificuldade para os alunos. Se não fosse a premência do tempo, ter-se-ia permitido que, por tentativa, chegassem a alguma conclusão. Tratava-se, porém, naquele momento, de um recurso impraticável. Optou-se por sugerir que imaginassem possível obter a referida terna pelo método D, isto é, supondo a existência de m e n tais que $9 = m^2 - n^2$, $12 = 2mn$ e $15 = m^2 + n^2$. Alguns perceberam tratar-se de um sistema. Mas como resolvê-lo? Retomou-se o tópico resolução de sistemas pelo método da adição por meio de um exemplo: $a - b = 1$ e $a + b = 5$. A partir daí, os alunos passaram a trabalhar na resolução do sistema inicial.

O item e foi resolvido, aparentemente, sem dificuldade, entretanto o tratamento algébrico a ser efetuado no item f provocou, novamente, muitas dúvidas.

Pelo fato de os alunos não terem semelhança de triângulos como conhecimento disponível, a resolução do item h não teve o êxito esperado. Foi preciso exemplificar de maneira bastante intuitiva o que seriam figuras semelhantes, com comentários do tipo “um mapa do Brasil pode ser feito em vários tamanhos, uma foto 3 por 4 pode ser ampliada para fazer um poster de 30 por 40 cm sem que a forma da figura seja modificada”.

Atividade 20	Resp. correta	Resp. incorreta	Incompletas	Em branco
Atividade 20a	18	–	–	–
Atividade 20b	15	2 (erro de cálc.)	1	–
Atividade 20c	7	8 (prod. notável)	3 (até prod. not.)	–
Atividade 20d	10	–	5	3
Atividade 20e	14	–	–	4
Atividade 20f	4	8	1	5
Atividade 20g	8	2	–	8
Atividade 20h	8	–	2	8

Parece que os últimos cinco minutos de aula foram insuficientes para o término da atividade, como atestam os números referentes à ocorrência Em branco. Cada grupo, ao entregar a pasta de trabalhos, recebeu o resumo relativo à Atividade 20, com o objetivo de dirimir dúvidas remanescentes.

Comentários finais sobre a aplicação da seqüência didática

Apesar da duração de cada aula ser, teoricamente, de 50 minutos, descontando-se o tempo gasto em distribuir e recolher as pastas (com as atividades anteriores comentadas), folhas relativas às novas atividades, além das calculadoras, que foram cedidas aos alunos por empréstimo e a eles doadas após a Avaliação final, restavam em média 40 minutos. O fato de os alunos precisarem locomover-se para a sala ambiente de cada professor, embora fossem destinados para isso cinco minutos, também representou diminuição no tempo disponível para a aplicação da seqüência.

Entretanto, não se pode negar que a seqüência didática elaborada foi longa, exigindo constantes interrupções para que conhecimentos estudados em séries anteriores fossem resgatados.

O quadro resume de que maneira as aulas foram empregadas na aplicação da seqüência didática:

2ª feira	13 setembro	20 setembro	27 setembro	4 outubro	2 x 4 = 8 aulas
3ª feira	14 setembro	21 setembro	28 setembro	5 outubro	2 x 4 = 8 aulas
4ª feira	15 setembro	22 setembro	29 setembro	–	1 x 3 = 3 aulas
5ª feira	16 setembro	23 setembro	30 setembro	–	1 x 3 = 3 aulas
Total					22 aulas

Se por um lado o prazo de experimentação imaginado a priori tenha se dilatado consideravelmente, por outro foi possível observar um ganho para os alunos, em conhecimento e experiência. Constatou-se, no início da aplicação das atividades, um certo tipo de resistência, que ocasionava maior lentidão nas resoluções. Pouco a pouco, percebeu-se mais desembaraço e rapidez, exceto nas questões mais complexas.

Na 4ª feira 6 de Outubro de 1999, foi realizada a avaliação final, durante a quarta e a quinta aula, cedida pela professora de Português. Essa fase da experimentação será objeto da análise que se segue.

Teste de Avaliação: análise do questionário para a amostra de 1999

O questionário foi aplicado com o intuito de avaliar o desempenho dos alunos finda a seqüência didática e, também, comparar os resultados obtidos com os da amostra de 35 alunos já analisada anteriormente. Especificamente, desejava-se detectar se os alunos conseguiam aplicar o Teorema de Pitágoras, como ferramenta, em problemas propostos.

Seguindo o mesmo critério utilizado para a amostra de 1º colegial (35 alunos, em1998), a resolução deveria ser individual. A aplicação realizou-se no dia 6 de outubro de 1999, 4ª feira, com a participação de trinta alunos, durante a quarta aula, que seria de Matemática, e a quinta aula, cedida pela professora de Português.

As duas folhas referentes às questões 1, 2 e 3 foram distribuídas. A primeira reação de alguns alunos foi de protesto. Na verdade, muitos não se lembravam do contrato estabelecido no primeiro dia de atividades sobre a avaliação individual que ocorreria na aula seguinte, ao término da aplicação da seqüência didática. Como, propositadamente, isso não foi confirmado na véspera da avaliação, provavelmente se constituiu numa quebra do contrato didático vigente no decorrer do ano letivo. À medida que tomavam conhecimento das questões, aos poucos, conseguiram acalmar-se.

Referindo-se ao item c da Questão 1, alguns alunos indagaram se nada fora esquecido, em alusão à ausência de sinalização para o ângulo aparentemente reto. Respondeu-se que não. Ao fim desta primeira parte, as folhas foram recolhidas para que se fizesse uma pausa de cinco minutos, segundo as regras da escola. Após esse tempo, os alunos retornaram à sala de aula e teve início a segunda parte do teste, relativa às questões 4, 5 e 6. Estas provocaram dúvidas que, na medida do possível, foram esclarecidas, de um modo bem geral, sem utilizar os dados do problema: transformação centímetro $\leftrightarrow$ metro; classificação de triângulos, quanto à natureza dos lados; propriedades do retângulo (lados opostos paralelos e congruentes, todos os ângulos retos), pois uma aluna havia interpretado o dado "ABCD retângulo" como sendo "ABCD triângulo retângulo".

Para facilitar a codificação, as provas foram renumeradas. Assim, a designação constante deste trabalho não corresponde à que se encontrava no diário de classe. Os resultados serão, a seguir, explicitados e comparados com os obtidos relativamente à amostra de 35 alunos de 1º colegial, analisada no capítulo relativo ao estudo do Teorema de Pitágoras no ensino.

Questão 1

Item a) Foi a que deteve o maior índice de acertos do teste, fato já observado na amostra de 1998. A congruência entre problema e relação pitagórica certamente foi responsável pelo alto porcentual de sucesso.

Item b) O número de resoluções corretas caiu consideravelmente, como se pode observar na tabela. Alguns erros observados:

- quanto à relação pitagórica: $x^2 + 5^2 = 4,8^2$ (um aluno); $(5)^2 = (4,8)^2.(x)^2$ (um aluno); $x^2 = 5^2 + 4,8^2$ (cinco alunos). Este último foi, também, apontado por Berté e por ela designado Erro nº 3: "Ao calcular um dos catetos, certos alunos escrevem que o quadrado desse lado é a soma dos quadrados da hipotenusa e do outro cateto" (p. 88). Berté afirma que, neste caso, "o Teorema se resume a uma fórmula, $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, lida como um programa de cálculo, impossível de modificar algebricamente, e não como uma relação necessária entre os três lados, permitindo calcular um deles quando se conhecem os outros dois, quaisquer que sejam” (idem). Porém, por que, para esses alunos, o Teorema se resumiria a uma fórmula? Poder-se-ia acrescentar a tais ponderações o fato de não haver congruência entre os dados do problema e a relação pitagórica;

- na resolução da equação incompleta do 2º grau (quatro alunos).

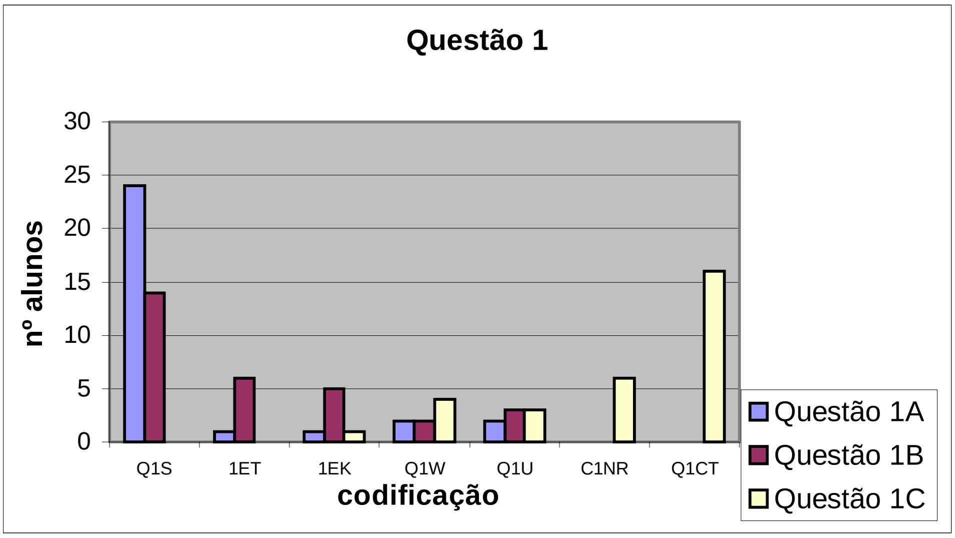
<u>Item c)</u> Dezesseis alunos assumiram implicitamente que se tratava de um triângulo retângulo; apenas seis (20%) reconheceram o triângulo qualquer e apresentaram respostas do tipo “Não se pode usar o Teorema de Pitágoras porque não sabemos se o triângulo é retângulo” (aluno nº 14). Uma aluna tentou aplicar a condição de existência de triângulo, porém de maneira incompleta, concluindo que $x < 9$. Berté designa isso como Erro nº1: “Utilizar o Teorema de Pitágoras para calcular o terceiro lado de um triângulo que não é retângulo”. Entretanto, a autora não explica a causa do erro.

Segundo Duval, a apreensão discursiva desempenha um papel de neutralização da apreensão perceptiva, pois a figura pode se tornar uma armadilha, acarretando falsas conclusões. Esta poderia ser uma explicação para a ocorrência do Erro nº 1. A interpretação da figura com aparência de triângulo retângulo, pelo fato de ser mais imediata e espontânea, fez com que aproximadamente 53% dos alunos ignorassem o enunciado e a sinalização inexistente de ângulo reto. Em resumo, seria uma generalização abusiva, baseada na apreensão perceptiva.

Os resultados serão a seguir explicitados e comparados com os referentes à amostra de 35 alunos, obtida em 1998.

Amostra		8ª série		1º Colegial	
Total		30 alunos		35 alunos	
Acertos	Questão 1A	24	80%	17	48,5%
Acertos	Questão 1B	14	46,6%	7	20%
Acertos	Questão 1C	0	0%	0	0%

Para os histogramas de barras foi adotada a mesma codificação já utilizada na análise da amostra anterior (35 alunos do 1º colegial, 1998).



Questão 2

Item a) A malha quadriculada parece não ter gerado dificuldade para os dezenove alunos, bem-sucedidos aqui. Dois alunos determinaram apenas as medidas dos catetos. A aluna nº 30 determinou corretamente os catetos, fez a conversão para a relação pitagórica, porém errou na resolução da equação incompleta do 2º grau: $4^2 + 4^2 = x^2$, $16 + 16 = x$ então $x = 32$. Aliás, examinando-se a prova da nº 30, constatou-se falha análoga também em outros itens. O aluno nº 20 chegou ao resultado irracional $x = \sqrt{32}$, mas não colocou vírgula no resultado aproximado, $x = 565$, incorrendo no mesmo erro em outros itens.

Item b) Também aqui foi bom o índice de acertos. Os erros detectados foram análogos aos encontrados no item a, citados acima.

Item c) Cinco alunos interpretaram corretamente a malha reticulada, aplicaram o Teorema de Pitágoras, mas cometeram erros durante a resolução da equação do 2º grau. Exemplos:

1. (nº 2) $x^2 = 1 + 36$, $x^2 = 36$ (foi usado o 1 como elemento neutro na adição);

2. (nº 8) $x^2 = 1^2 + 6^2$, $x^2 = 2 + 36$ (erro no cálculo da potência);

3. (nº 10) $6^2 + 1^2 = x^2$, $x^2 = 7$ (ignorou os expoentes da parte numérica);

4. (nº 20) $x = \sqrt{37}$ $x = 608$ (mesmo erro citado no item anterior);

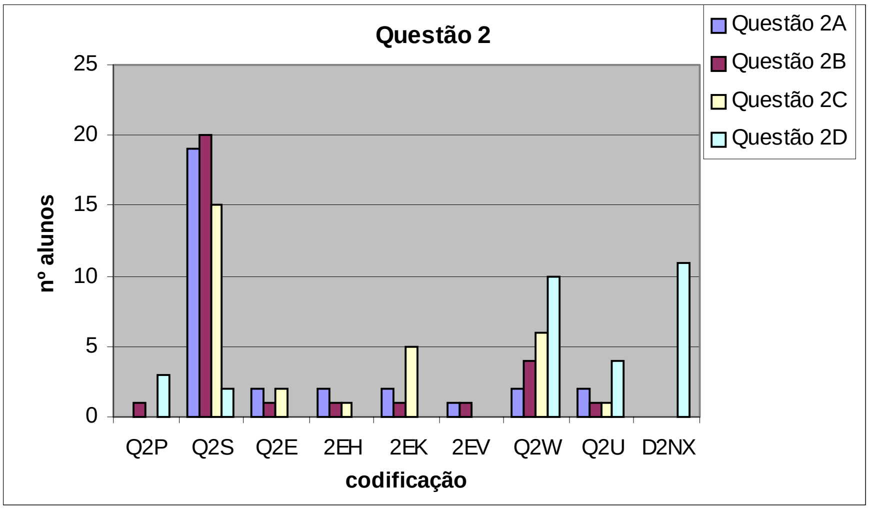
5. (nº 30) $1^2 + 6^2 = x^2$ $x = 37$ (mesmo erro citado no item anterior).

Item d) Oito alunos que haviam interpretado corretamente os dados nos itens anteriores fizeram, neste item, uma leitura errônea da malha quadriculada. Consideraram os pontos de intersecção dos lados do triângulo dado com as linhas verticais e horizontais da malha como sendo pontos de divisão dos lados. Desse modo, três alunos consideraram dois lados com medidas, respectivamente 4 e 5, e usaram o Teorema de Pitágoras para determinar a medida do terceiro lado. Quatro alunos aplicaram estratégia análoga, com as medidas 4 e 2. Um aluno usou para os lados as medidas 3 e 2.

Dos três alunos que acertaram parcialmente este item, um deles (nº 9) determinou corretamente a medida XY, construindo para isso o triângulo retângulo de hipotenusa $\overline{XY}$ e catetos de medidas, respectivamente, 3 e 4. O aluno nº 14 desenhou o triângulo retângulo de hipotenusa $\overline{XZ}$ e catetos medindo 4 e 2. O aluno nº 18, por meio de triângulos retângulos convenientemente escolhidos, calculou corretamente as medidas XY e XR, porém ao calcular ZY cometeu engano ao tomar para medidas dos catetos 1 e 3.

Este item provocou um dos maiores índices da ocorrências Em branco de todo o teste. Poder-se-ia interpretar a dificuldade dos alunos, com base em Padilla, uma vez que os traçados suplementares necessários à construção das subfiguras não constam da figura de partida; precisavam ser encontrados. Além disso, citando ainda Padilla (pág. 6), “a existência de um fundo quadriculado pode também ter um efeito perturbador, como mostra o estudo de D. Grenier... (apud), o papel quadriculado induz a tomada em conta de pontos particulares da figura...”

Amostra		8ª série		1º colegial	
Total		30		35	
Acertos	Questão 2A	19	63%	3	8,5%
	Questão 2B	21	70%	2	5,7%
	Questão 2C	15	50%	3	8,5%
	Questão 2D	5	16,6%	2	5,7%



Questão 3

Dez alunos conseguiram sucesso nesta questão. Dois alunos traçaram por A o segmento perpendicular a $\overline{CD}$, um aluno traçou por C a perpendicular ao prolongamento de $\overline{AB}$, porém nenhum destes percebeu que um dos catetos seria obtido efetuando-se 37 – 13 = 24. Três alunos determinaram corretamente a subfigura, triângulo retângulo, aplicaram o Teorema de Pitágoras, mas apresentaram erros, aparentemente, causados por distração:

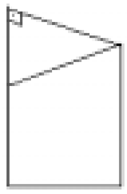
1. (nº 28) ao escrever no verso da folha, trocou a medida 37 m por 30 m, ocasionando 17 m como medida de um dos catetos, em lugar de 24 m;

2. (nº 29) a aluna chegou corretamente até este ponto da resolução: $x^2 = 4900 + 576$, entretanto, na linha seguinte, ao fazer alguma correção, apagou parte do número 4900, obtendo $x^2 = 580{,}9$ ao efetuar $576 + 4{,}9$. Sua resposta foi: $x \approx 24{,}10$;

3. (nº30) repetiu o erro assinalado em questões anteriores (esquecimento do expoente de x: $576 + 4900 = x$).

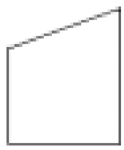
É interessante ponderar que os alunos, ao término da resolução, não têm por hábito verificar se a ordem de grandeza da resposta é compatível com os dados. No penúltimo caso acima mencionado, o valor 24,10 m não poderia ser a medida da hipotenusa, uma vez que um dos catetos mede 70 m. Em contrapartida, o valor encontrado pela aluna nº 30, $x = 5476\,\text{m}$, é muito grande em comparação com as medidas dos catetos: 24 m e70 m.

Por outro lado, alguns alunos parecem tentar, a todo custo, algum tipo de resolução, embora não haja o mínimo de sentido para a mesma. Exemplos:



$$x^2 = 13^2 + 37^2$$

Usando a figura:

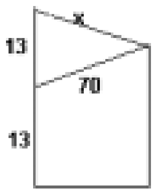


$x^2 = 13^2 + 37^2$ (aluno nº 5)

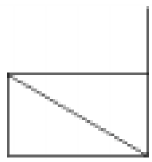
$x^2 = 35^2 + 37^2$ (aluno nº 10)

Note-se que 35 é $70 \div 2$.

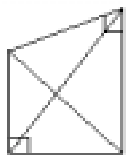
Por meio dessas resoluções, os alunos deixam transparecer a preocupação em utilizar os dados iniciais do problema, mesmo que este procedimento leve a conclusões falsas. Ainda outros exemplos podem ser apresentados:



$x^2 = 13^2 + 70^2$
(aluno nº 8)



$x^2 = 13^2 + 70^2$
(aluno nº 3)



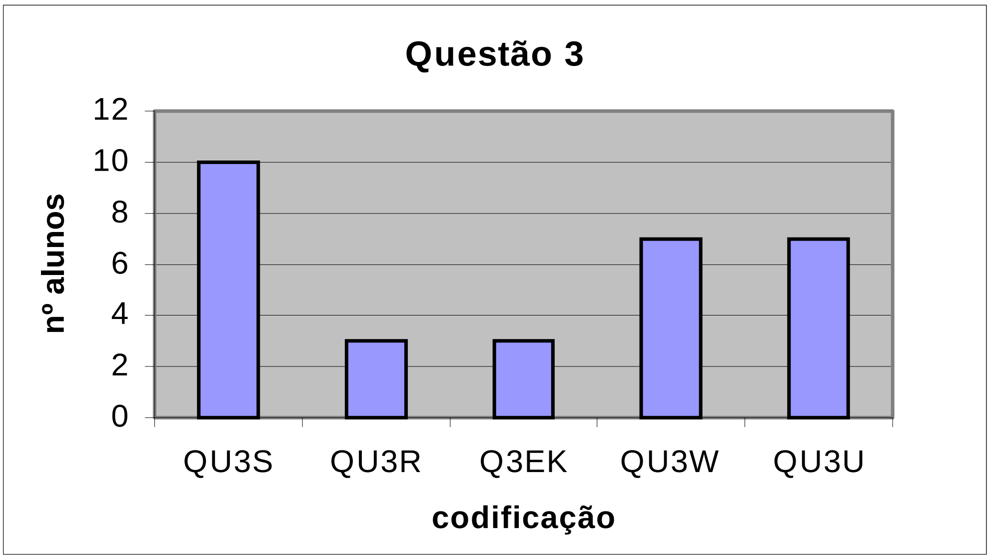
$70^2 - 13^2 + 70^2$
(aluno nº 16)

A tabela seguinte mostra os resultados, relativamente à Questão 3:

Amostra	8ª série		1º Colegial	
Total	30		35	
Acertos	10	33,3%	3	8,5%

Dois fatores, provavelmente, contribuíram para o insucesso dos alunos aqui: o fracionamento do trapézio, por meio do segmento $\overline{AE}$ perpendicular a $\overline{CD}$, indispensável para a subfigura triângulo retângulo, não constava da figura de partida. Além disso, a presença do obstáculo do desdobramento de objetos dificultava perceber a medida do cateto vertical, obtida por 37 –13 = 24.

O gráfico evidencia detalhes do desempenho dos alunos:



Ao contrário do que se verificou na primeira amostra, o índice de acertos (coluna QU3S) foi superior ao referente a questões Em branco (coluna QU3W), que por sua vez se igualou ao índice de resoluções Sem sentido (QU3U).

Questão 4

Foi possível, pela produção dos alunos, novamente observar a preocupação de muitos com a utilização indiscriminada das medidas relativas aos dados iniciais do problema. Sete alunos apresentaram uma solução a partir de $x^2 = 3{,}5^2 + 7^2$. Três alunos, a partir de $7^2 = 3{,}5^2 + x^2$. Uma aluna usou esta igualdade e ainda $6^2 + x^2 = 7^2$. Outro aluno, $x^2 = 6^2 + 3{,}5^2$ e como conseqüência $x^2 = 48{,}25 - 7$, obtendo $x \approx 6{,}4$ (note-se a subtração por 7, isto é, pela medida que não havia sido utilizada). Em todos os casos citados, não se notava nenhuma indicação na figura sobre o significado do x. Apenas três alunos responderam tratar-se de triângulo isósceles; sob influência da apreensão perceptiva, concluíram que ED = BD = 7.

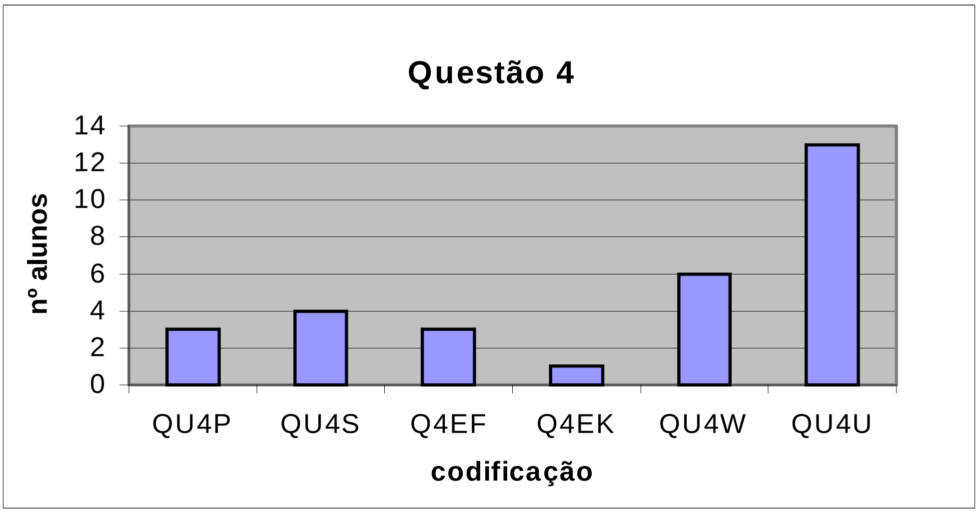
Como mostra o quadro a seguir, o número de acertos foi baixo:

Amostra	8ª série		1º colegial	
Acertos	7	23,3%	1	2,8%

Tratando-se de uma configuração composta de várias subfiguras, a dificuldade dos alunos parece ter sido relativamente à identificação dos triângulos retângulos pertinentes ABD e ADE.

A presença do obstáculo do desdobramento de objetos, ocasionada pelo fato de o triângulo ABD ser parte comum ao triângulo EBD e ao retângulo ABCD, provavelmente contribuiu para aumentar a complexidade quanto à apreensão operatória.

O gráfico evidencia o alto índice, 13 casos, da ocorrência QU4U, isto é, resoluções sem sentido, "absurdas", algumas das quais exemplificadas anteriormente



Questão 5

Os sete alunos que acertaram parcialmente a questão determinaram o valor correto da hipotenusa $\overline{AC}$, relativa ao triângulo ABC: $\sqrt{72}$ ou $\approx 8{,}48$. Entretanto, ao utilizar esse resultado como medida do cateto $\overline{AC}$ referente ao triângulo ACD, consideraram o valor aproximado 8,48. Em outras palavras, assumiram o valor aproximado como sendo valor exato. Conseqüentemente, encontraram para AD $x^2 = 8{,}48^2 + 3^2$, ou seja, em vez de 9, obtiveram o valor aproximado 8,99. Não perceberam que apenas o quadrado da medida da hipotenusa do primeiro triângulo seria importante para o cálculo da do segundo.

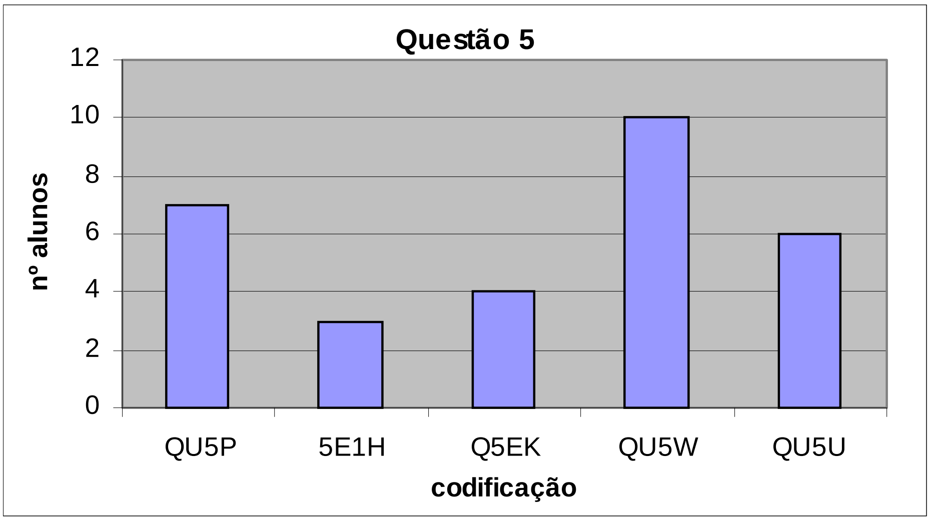
Quatro alunos, para efetuar o cálculo de AD, substituíram AC não por $\sqrt{72}$ mas, por 72, resultando $(AD)^2 = 72^2 + 3^2$. Algumas resoluções parecem confirmar as afirmações feitas nas análises de questões anteriores sobre o uso indiscriminado dos dados explícitos no problema. Exemplos: Quatro alunos utilizaram $x^2 = 6^2 + 3^2$, isto é, medidas de catetos de triângulos retângulos distintos. O aluno nº 5 iniciou com uma expressão que se transformou em equação: $x^2+3^2 \rightarrow x^2+9 \rightarrow x^2=9 \rightarrow x=3$.

Uma outra constatação refere-se à dificuldade de alguns alunos quanto à apreensão discursiva. Muitos não atentaram para o fato que AB = BC = 6, talvez ficando com a impressão errônea de que faltariam dados para o triângulo ABC.

O índice de acertos foi o mesmo encontrado para a Questão 4, relativamente à amostra atual:

Amostra	8ª série		1º colegial	
Acertos	7	23,3%	2	5,7%

Nota-se, pelo gráfico, que não houve acerto total para a questão, ou seja, nenhum aluno conseguiu concluir que os dois caminhos têm o mesmo comprimento. O índice de ocorrências Em branco também foi alto, igualando-se aos obtidos para a Questão 2d e para a Questão 6.



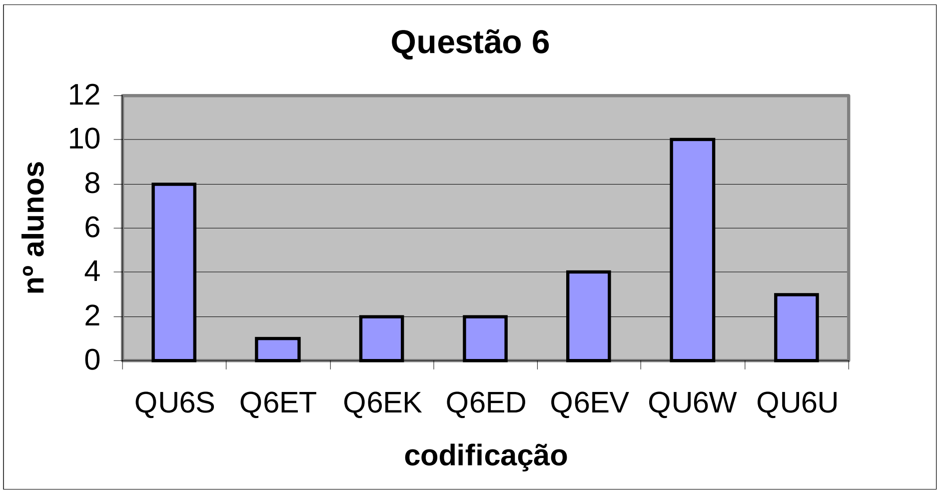
Questão 6

Oito alunos encontraram corretamente a solução, um errou a igualdade pitagórica, dois fizeram a conversão de unidades incorretamente e quatro tiveram dificuldade em comparar o número irracional obtido com a altura do pé-direito.

Como prováveis causas para o embaraço nesta questão, destacam-se a representação em corte de uma figura espacial (armário), a não congruência entre enunciado e relação pitagórica e o fato de a diagonal do retângulo não vir traçada na figura de partida.

Entretanto, em comparação com a amostra anterior, o resultado pode ser considerado bom:

Amostra	8ª série		1º colegial	
Acertos	8	26,6%	0	0%

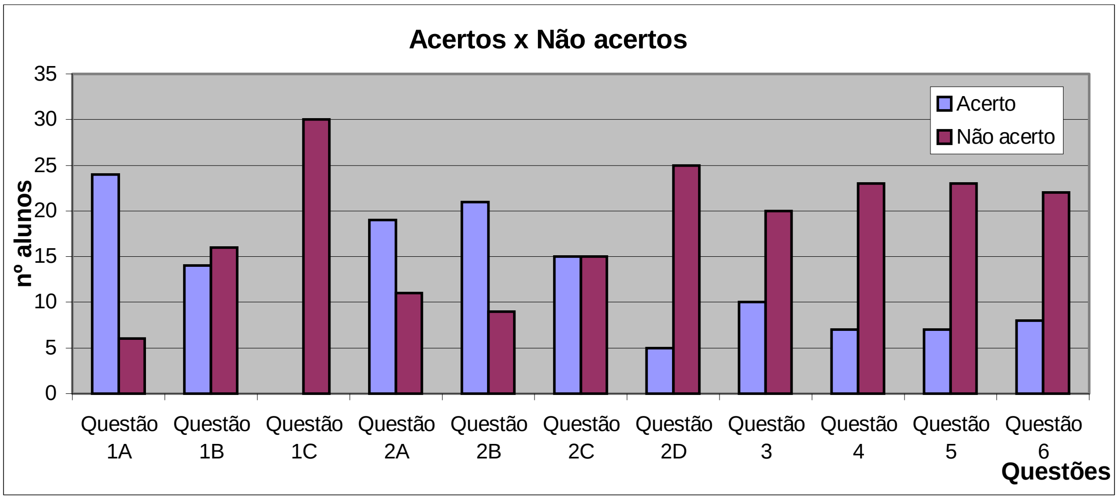


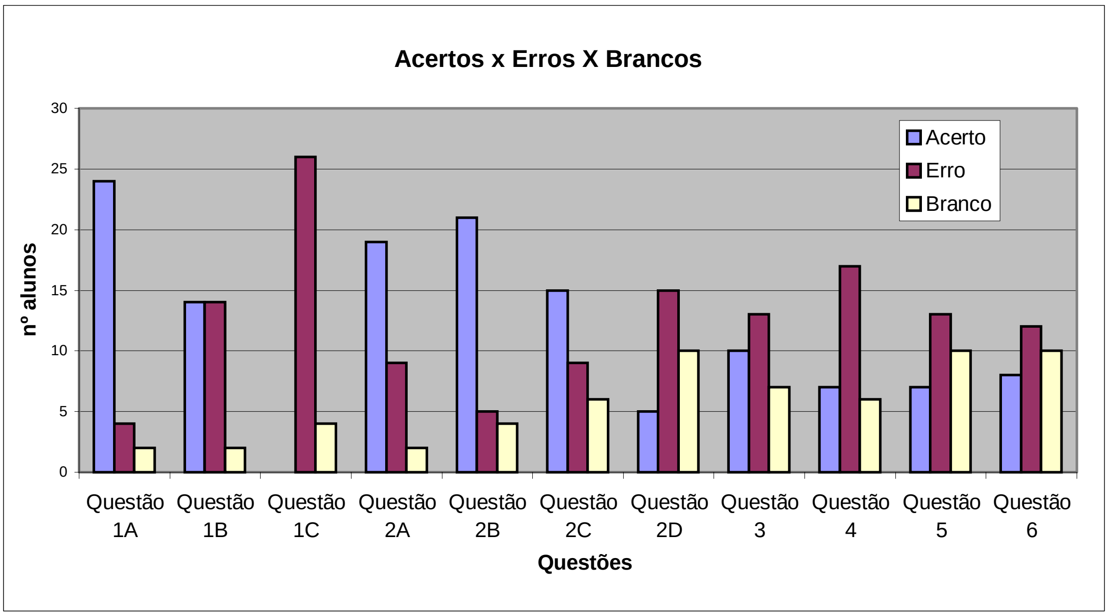
De acordo com o controle de presença efetuado, dos 39 alunos, teoricamente assíduos, apenas dez participaram de todas as atividades aplicadas. As ausências distribuíram-se da seguinte maneira: quatro alunos faltaram a somente uma aula; onze alunos a duas aulas; dois alunos a três aulas; sete alunos a quatro aulas; e cinco alunos a mais de cinco aulas. Vale notar que as ausências ocorridas no dia da atividade optativa extraclasse não foram computadas.

Tencionava-se, inicialmente, não contabilizar resultados do questionário referentes a alunos com mais de duas ausências. Entretanto, tal procedimento não retrataria o cotidiano de uma escola pública. Para ficar mais próximo da realidade, optou-se por elaborar os histogramas de barras com base no total dos 30 alunos participantes da avaliação individual.

Amostra de 30 alunos da 8ª série, 1999

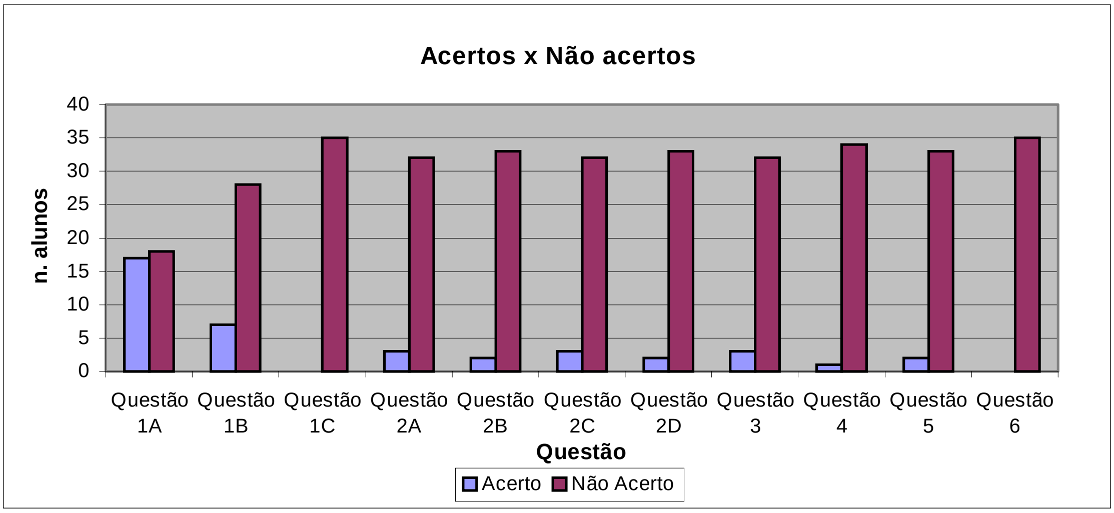
	Acerto	%	Erro	%	Branco	%	Não acerto	%
Questão 1 A	24	80	4	13	2	7	6	20
Questão 1B	14	47	14	47	2	7	16	53
Questão 1C	0	0	26	87	4	13	30	100
Questão 2 A	19	63	9	30	2	7	11	37
Questão 2B	21	70	5	17	4	13	9	30
Questão 2C	15	50	9	30	6	20	15	50
Questão 2D	5	17	15	50	10	33	25	83
Questão 3	10	33	13	43	7	23	20	67
Questão 4	7	23	17	57	6	20	23	77
Questão 5	7	23	13	43	10	33	23	77
Questão 6	8	27	12	40	10	33	22	73

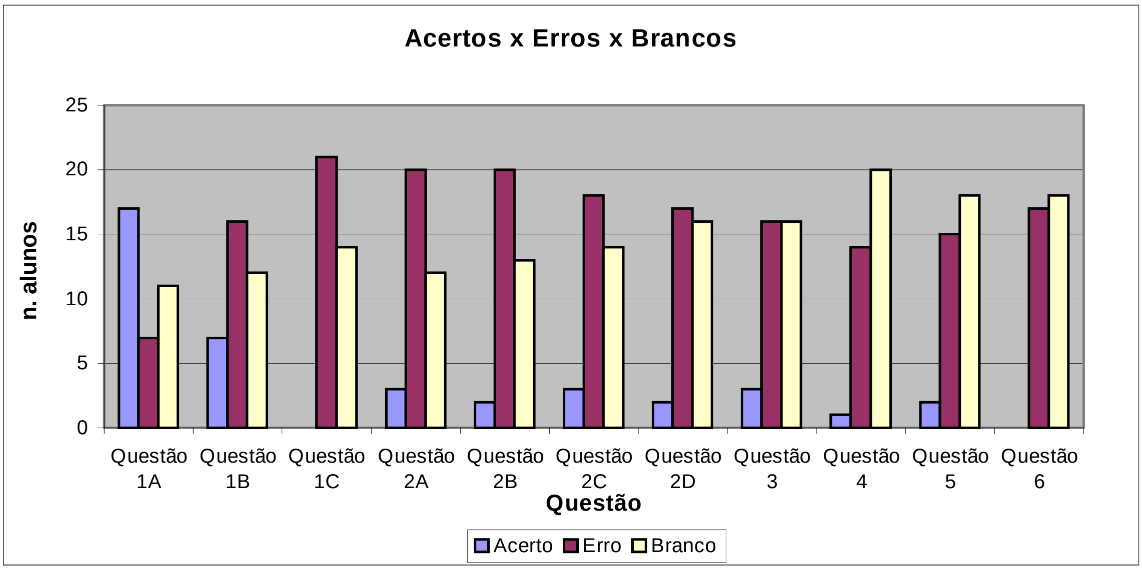




Amostra de 35 alunos 1º colegial, 1998

	Acerto	%	Erro	%	Branco	%	Não Acerto	%
Questão1A	17	49	7	20	11	31	18	51
Questão1B	7	20	16	46	12	34	28	80
Questão1C	0	0	21	60	14	40	35	100
Questão2A	3	9	20	57	12	34	32	91
Questão2B	2	6	20	57	13	37	33	94
Questão2C	3	9	18	51	14	40	32	91
Questão2D	2	6	17	49	16	46	33	94
Questão 3	3	9	16	46	16	46	32	91
Questão 4	1	3	14	40	20	57	34	97
Questão 5	2	6	15	43	18	51	33	94
Questão 6	0	0	17	49	18	51	35	100





Embora as condições de aplicação do questionário e o perfil da população examinada sejam completamente distintos, julgou-se interessante efetuar a comparação entre os resultados obtidos com as duas amostras, do 1º colegial em 1998, 35 alunos de colégio particular, e da 8ª série em 1999, 30 alunos de escola estadual. Com base na experiência da amostra descartada do 1º colegial em 1998, com 42 alunos de uma escola estadual, pôde-se concluir que os alunos do colégio particular possuíam melhores conhecimentos de Geometria. Outro dado importante, que deve ser citado, refere-se à época em que foi aplicado o questionário. No primeiro caso, foi abril de 1998, possivelmente alguns meses após o ensino-aprendizagem do Teorema de Pitágoras na série anterior. No segundo, foi efetuado imediatamente após o término da seqüência didática, em outubro de 1999 – o ideal seria fazer a experimentação em abril de 2000, a fim de garantir condições análogas para as duas amostras, o que não foi possível.

CAPÍTULO VI: CONCLUSÕES

No decorrer da análise a posteriori das atividades da seqüência didática, já foram feitas considerações sobre a aplicação desta e sobre os resultados relativos a cada uma delas. Assim, apenas se fará um complemento aos comentários anteriores.

As questões 1A, 2A, 2B e 2C apresentaram os maiores índices de acerto de todo o questionário (igual ou superior a 50%). Em todas elas está presente o fenômeno da congruência entre relação pitagórica ↔ enunciado e/ou figura inicial.

As questões 1C e 2D possuem uma característica comum: ambas tratam de triângulo não retângulo. Entretanto, o tipo de erro observado na resolução de 1C é diverso daquele constatado em 2D. No primeiro caso, dezesseis alunos (53,3% do total), levados pela apreensão perceptiva, assumiram o triângulo como triângulo retângulo e aplicaram o Teorema de Pitágoras para calcular a medida do cateto desconhecido. Dos seis alunos (20% do total) que reconheceram o triângulo não retângulo nenhum tentou a aplicação indevida da relação pitagórica. No que se refere à Questão 2D, oito alunos utilizaram o Teorema de Pitágoras num triângulo evidentemente não retângulo, incorrendo no que Berté (1995) designa como Erro nº 1, agravado pela falsa interpretação dos dados contidos na malha quadriculada.

O fato de apenas uma aluna tentar aplicar em 1C a condição de existência de triângulo leva a crer que a condição, apesar de ter sido explorada na atividade 1 da seqüência, não foi incorporada aos conhecimentos disponíveis dos estudantes. Entretanto, como já citado na análise relativa à atividade, foi possível constatar, ao final, que os alunos a haviam conjeturado corretamente. Em face disso, julgou-se que seria conveniente o acréscimo de um item à atividade, com a utilização de uma terna na qual nem todas as componentes fossem dadas numericamente. Por exemplo: "*Utilizando duas outras varetas de medidas respectivamente 5 unidades e 8 unidades, como deverá ser a medida de uma terceira vareta para que se consiga formar triângulo?*" Desse modo, mediante a condição $3 < x < 13$, poderiam ser discutidos vários tipos de resposta, restringindo-os ou não a números inteiros.

Das questões que exigiam melhor capacidade de apreensão operatória, decorrentes da necessidade de construção de traçados suplementares ou identificação das subfiguras pertinentes, a 3 e a 6 apresentaram, embora baixos, os melhores índices de acerto. Ambas possuem configurações menos complexas, respectivamente trapézio e retângulo. Neste último, o caminho de resolução tornava-se mais visível, exigindo apenas o traçado da diagonal. Na verdade, 14 alunos perceberam o triângulo retângulo-chave, porém não conseguiram chegar à resposta em virtude de incorreções na transformação de unidades de comprimento ou na comparação entre o resultado obtido e a distância entre teto e chão. As questões 4 e 5, que exibiam configurações mais complexas, apresentaram menor índice de acerto (23% para ambas).

Algumas alterações, por acréscimo ou por supressão, poderiam ser feitas na seqüência didática. Do primeiro tipo, citaria-se a caixa de ferramentas, a qual poderia conter um número maior de itens, tais como propriedades de quadriláteros (retângulos, paralelogramos, losangos) e noção de semelhança de triângulos. A inclusão desses tópicos auxiliaria alunos com pouco conhecimento de Geometria. Por outro lado, dependendo do nível de conhecimento matemático da classe e do tempo disponível, algumas atividades, apesar de interessantes, poderiam ser suprimidas. É o caso da Atividade 7 (utilização da demonstração de Euclides para chegar a uma relação métrica no triângulo retângulo) e da Atividade 20C (demonstração da generalidade do método de Diophante para a obtenção de ternas pitagóricas), da Atividade 20F (provar que se "x,y,z" é pitagórica, então, para k natural não nulo, "kx,ky,kz" também o será). Quanto ao item D da Questão 20, o enunciado poderia ser reformulado: em lugar de solicitar a demonstração de que "9,12,15" não pode ser obtida pelo método D, pediria-se ao aluno que tentasse encontrar m e n naturais não nulos para construir a referida terna pelo método D.

Diante das constatações feitas no decorrer da experimentação e, posteriormente, por meio da avaliação individual, chega-se a algumas conclusões relacionadas às indagações iniciais. O fato de o aluno trabalhar previamente com a condição de existência de triângulo o auxilia a perceber que deve existir "algo mais", isto é, alguma propriedade específica, no caso do triângulo retângulo. Assim, em vez de tomar conhecimento da igualdade pitagórica por meio de sua forma, como se observou nos livros didáticos analisados, o estudante tem a possibilidade de perceber sua utilidade e importância. Tudo leva a crer que o tipo de abordagem apresentado na seqüência didática imprime ao Teorema de Pitágoras maior significado, confirmando a primeira hipótese desta pesquisa. Além disso, as atividades constitutivas da seqüência parecem ter contribuído para desenvolver nos alunos algumas capacidades, relativamente à aplicação do mesmo como ferramenta para a resolução de problemas. A escolha intencional de determinadas variáveis didáticas tais como posição das figuras, utilização de figuras mais complexas contendo triângulos retângulos como subfiguras, enunciados no registro de discurso, figuras de partida sem os traçados auxiliares, dados ocasionando resultados decimais exatos ou aproximados, emprego de notação literal etc. provocou resoluções por parte dos alunos que confirmaram o que havia sido apontado nas análises a priori da seqüência e do questionário. Os efeitos causados pelas variáveis empregadas puderam ser previstos em parte com fundamento na análise cognitiva, segundo Duval e Padilla, mas também como provável decorrência de obstáculos didáticos criados em séries anteriores. Em outras palavras, os erros cometidos pelos alunos na aplicação do Teorema de Pitágoras podem ser explicados como conseqüência da abordagem utilizada no processo de ensino-aprendizagem, porém sem esquecer os fenômenos concernentes à apreensão operatória, reafirmando, assim, a segunda hipótese desta pesquisa. Surgiram também algumas variáveis de contexto de difícil administração, como, por exemplo, a falta ou escassez de conhecimentos disponíveis dos alunos, a dificuldade na interpretação e conversão dos enunciados, a falta de hábito em resolver questões encadeadas por vários itens e o despreparo no trato com a representação algébrica. Outro fator que, para alguns alunos, prejudicou a continuidade dos trabalhos e conseqüentemente o aproveitamento obtido residiu na irregularidade do comparecimento às aulas.

Por outro lado, verificou-se que a seqüência elaborada pode ser aplicada em alunos com parcos conhecimentos de Geometria, mas também em estudantes possuidores de melhor bagagem matemática. Em relação ao primeiro caso, foram proporcionadas oportunidades para colocar o aluno em contato com itens fundamentais da Matemática. No segundo, reinvestindo em conceitos e retomando técnicas, foi possível mostrar ao aluno por meio da mudança de quadros que os conhecimentos matemáticos não se situam em “gavetas” isoladas, mas, sim, se completam ao ser usados como ferramentas na resolução de novos problemas.

Pelo fato de a época atual representar um período de transição e adaptação dos programas, bem como dos livros didáticos de 7ª série e 8ª série em relação aos PCNs, alguns entraves institucionais poderão surgir. Para abordar o Teorema de Pitágoras na 7ª série é necessário trabalhar antes com raiz quadrada, entretanto, sem usar o rótulo de números reais. A calculadora torna-se útil para mostrar que, elevados ao quadrado, valores aproximados de raízes quadradas não “devolvem” o número inicial. Na 8ª série, se o aluno já tiver como conhecimento disponível o conceito de número real e a prática de operações com radicais, as respostas poderão ser dadas ou em forma de radical ou por valores aproximados. Caso contrário, poderá ser empregada a mesma estratégia exposta para a 7ª série.

A mudança, dentro da mesma escola ou em escolas diferentes, da 8ª série para o 1º colegial (ensino fundamental para o médio) é outro entrave significativo, pois dificilmente alunos para os quais o Teorema de Pitágoras foi introduzido por meio de determinada abordagem estudarão sob essa mesma orientação. Aliás, obviamente, isso ocorre em relação a qualquer outro tópico no ensino-aprendizagem da Matemática e provavelmente das outras disciplinas. Como conseqüência, seria interessante, nesse caso, a utilização, mesmo em 1ª série do ensino médio (1º colegial), da seqüência didática apresentada neste trabalho ou de suas idéias básicas.

A utilização da seqüência como parte integrante de um trabalho a ser desenvolvido durante o ano letivo pelo professor titular da turma, dando prosseguimento a um curso baseado em princípios análogos aos aqui empregados, com este tipo de visão desde as séries iniciais, pode apresentar resultados mais expressivos que aqueles obtidos neste trabalho; visto que não haveria uma ruptura tão brusca do contrato didático e o conseqüente impacto sobre a classe.

Apesar de os índices apresentados indicarem que a abordagem do Teorema de Pitágoras por meio da seqüência didática exposta parece ter produzidos bons resultados em comparação com os originados por meio da abordagem convencional, admite-se que não se trata de um trabalho encerrado. A referida seqüência poderia ser aperfeiçoada à medida que fosse sendo aplicada em outras turmas com características diferentes daquelas relativas às amostras desta pesquisa. A manipulação de material concreto poderia, por exemplo, ser substituída pela utilização do software Cabri – Geometre.

Quanto a possibilidade de desenvolvimento da apreensão operatória nos alunos, vale lembrar as afirmações de Duval (1995, p.198): “...uma condição necessária é propor exercícios, cujas resoluções possam ser obtidas por um tratamento figural”. Entretanto, essa não é uma condição suficiente. “Três outras devem ser levadas em conta: a resolução do exercício proposto não deve implicar nenhum apelo a passos de raciocínio que exigiriam a utilização de definições ou teoremas; a resolução do exercício não deve implicar nenhuma mudança de dimensão na seqüência de subfiguras; o exercício proposto deve se situar em uma seqüência organizada em função de uma variação sistemática dos fatores de visibilidade facilitando ou retardando a apreensão operatória” (p. 198). Duval acrescenta ainda que “os exercícios, cujas resoluções possam ser obtidas por meio da operação de reconfiguração, satisfazem plenamente às duas primeiras condições” (idem). A criação de atividades com esse objetivo e sujeitas a essas condições seria ainda um vasto campo a explorar.

Os esforços empenhados na realização deste trabalho e a dedicação com que foi elaborado estarão plenamente recompensados se o mesmo tiver alguma utilidade, por menor que seja, para a melhor compreensão do Teorema de Pitágoras por parte de nossos estudantes.

BIBLIOGRAFIA

AG ALMOULOUD, S. 1997. *Fundamentos da didática da matemática e metodologia de pesquisa.* Cema, PUC-SP, vol.III.

ARCONCHER, C. 1991. As ternas pitagóricas. *Revista do professor de matemática,* nº 18, pp. 10-11. Sociedade Brasileira de Matemática.

ARTIGUE, M. 1988. Ingénierie didactique. *Recherches en didactique des mathématiques,* vol. 9, nº 3, pp. 281-308. La Pensée Sauvage Editions.

ARTIGUE, M. 1990. Épistemologie et didactique. *Recherches en didactique des mathématiques,* vol. 10, nº 23, pp. 241-286. La Pensée Sauvage Editions.

ÁVILA, G. 1984. Grandezas incomensuráveis e números irracionais. *Revista do professor de matemática,* nº 5, pp. 6-11. Sociedade Brasileira de Matemática.

BARBOSA, R.M. 1993. *Descobrindo padrões pitagóricos: geométricos e numéricos.* S Paulo: Atual.

BERTÉ, A. 1995. Différents ordres de présentation des premières notions de géometrie métrique dans l´enseignement secondaire. *Recherches en didactique des mathématiques,* vol. 15, nº 3, pp.83-130. La Pensée Sauvage Editions.

BOYER, C.B. 1974. *História da matemática.* São Paulo: Edgard Blücher.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto. Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), 3º e 4º ciclos do ensino fundamental, 1998.

BROUSSEAU, G. 1983. Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques,* vol. 4, nº 2, pp. 165-198. La Pensée Sauvage Editions.

CHEVALLARD, Y. 1991. *La transposition didactique.* Grenoble: La Pensée Sauvage.

DELORD, R., TERRACHER, H., VINRICH, G. 1995. *Mathématiques 4ème.* Hachette Collèges.

DOUADY, R. 1986. Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques,* vol. 7, nº 2, pp. 5-31. La Pensée Sauvage Editions.

DOUADY, R. 1990. “A universidade e a didática da matemática: os Irem na França”, conferência proferida no Impa. *Caderno da R.P..,* Sociedade Brasileira de Matemática.

DUVAL, R. 1988. Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence. *Annales de didactique et de sciences cognitives,* vol. I, pp. 57-74. Irem de Strasbourg.

DUVAL, R. 1988. Écarts sémantiques et cohérence mathématique. *Annales de didactique et de sciences cognitives,* vol. I, pp. 7-25. Irem de Strasbourg.

DUVAL, R. 1995. *Sémiosis et pensée humaine.* Berne: Peter Lang.

EVES, H. 1992. *Tópicos de história da matemática.* São Paulo: Atual.

EVES, H. 1995. *Introdução à história da matemática.* Campinas: Editora da Unicamp.

FURTH, H.G. 1974. *Piaget e o conhecimento.* Rio de Janeiro: Forense-Universitária.

GRAS, R. 1992. L’analyse des données: une méthodologie de traitement de questions de didactique. *Recherches en didactique des mathématiques,* vol. 12, nº 1, pp. 59-72. La Pensée Sauvage Editions.

GRAS, R. et alii. 1996. *L’implication statistique.* La Pensée Sauvage Editions.

HENRY, M. 1991. *Didactique des mathématiques.* Irem de Besançon.

IREM de Orléans. *Pythagore.* Suivi Scientifique, classe de 4ème. Bulletin inter Irem 1er Cycle, pp 95-110, 1987-1988.

IREM de Poitiers. *Propos sur la demonstration.* Suivi Scientifique, classe de 4ème, Bulletin inter Irem 1er Cycle, pp. 365-373, 1987-1988.

LIMA, E.L. 1995. *Álgebra linear.* Rio de Janeiro. Instituto de Matemática Pura e Aplicada.

LIMA, E.L. 1998. Mais uma vez o teorema de Pitágoras. *Revista do Professor de Matemática,* nº 13, pp. 57-58. Sociedade Brasileira de Matemática.

LIMA, R.B. 1974. *Elementos de Álgebra Vetorial.* São Paulo: Companhia Editora Nacional.

LOOMIS, E.S. 1972. *The Pythagorean Proposition.* Washington D.C.: National council of teachers of mathematics.

MACHADO, S.D.A. et alii. 1999. *Educação Matemática.* São Paulo: Educ.

MOISE, E.E. 1964. *Elementary geometry from an advanced standpoint. Massachusetts.* Addison: Wesley Publishing Company, Inc.

NOBRE, A.M.V. 1996. "Elaboração/leitura de códigos para entender o 'x' da questão". Dissertação de mestrado em ensino da matemática, PUC-SP.

NOIRFALISE, R. 1994-1995. *Une analyse de pratiques des élèves et des enseignants de Mathématiques à partir du cahier de l'élève: deux études de cas. "petit x",* nº 38, pp. 5-29. Irem de Grenoble.

PADILLA, V. 1992. *Analyse cognitive de quelques démonstrations du théorème de Pythagore.* Irem de Strasbourg.

PYTHAGORE 4ème. *Mathématiques.* Hatier: Édition 92.

ROBERT, A. 1992. Problèmes méthodologiques en didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol. 12, nº 1, pp.33-58. La Pensée Sauvage Editions.

ROSA, E. 1983. Mania de Pitágoras. *Revista do Professor de Matemática,* nº 2, pp.14-17. Sociedade Brasileira de Matemática.

SÃO PAULO. Academia de Ciências do Estado. *Exercícios de matemática; treinamento para a 2ª fase e prova final da olimpíada de matemática– 1984.*

SÃO PAULO, Secretaria de Estado da Educação 1996. Experiências matemáticas – 7ª série e 8ª série.

SÃO PAULO, Secretaria de Estado da Educação. 1975. Guias curriculares propostos para as matérias do núcleo comum do ensino do 1º grau. Centro de recursos humanos e pesquisas educacionais (Cerhupe).

SÃO PAULO, Secretaria de Estado da Educação. Proposta curricular para o ensino de matemática 1º grau – 1991.

SINGH, S. 1998. *O último teorema de Fermat.* (2ª ed.). Rio de Janeiro: Record.

STRATHERN, P. 1998. *Pitágoras e seu teorema em 90 minutos.* Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editores.

VYGOTSKY, L.S. 1994. *A formação social da mente.* (5ª ed.). São Paulo: Martins Fontes Editora.

LIVROS DIDÁTICOS ANALISADOS

(1) SANGIORGI, O. 1965. *Matemática*, 4ª série, curso ginasial (68ª ed., 1ª ed. 1954) Companhia Editora Nacional.

(2) SANGIORGI, O. 1967. *Matemática Moderna,* 4ªsérie, curso ginasial. Companhia Editora Nacional.

(3) DI PIERRO, N.S. *Matemática – Um processo de auto-instrução,* 8ª série, 1º grau. Editora Saraiva, 1976.

(4) DI PIERRO, N.S. *Matemática – conceitos e operações,* 8ª série, 1º grau. Editora Saraiva, 1982.

(5) IEZZI, G., DOLCE, O., MACHADO, A. *Matemática e Realidade,* 8ª série, 1ºgrau. Atual Editora, 1984.

(6) IEZZI, G., DOLCE, O., MACHADO, A. *Matemática e realidade*, 8ª série, 1º grau. Atual Editora, 1994.

(7) GIOVANNI, J.R., CASTRUCCI, B., GIOVANNI JUNIOR, J.R. *A conquista da matemática*, 8ª série, 1º grau. Editora F.T.D., 1994.

(8) BONGIOVANNI, V., VISSOTO, O.R.L., LAUREANO, J.L.T. *Matemática e vida,* 7ª série. Editora Ática, 1995.

(9) BONGIOVANNI, V., VISSOTO, O.R.L., LAUREANO, J.L.T. *Matemática e vida,* 8ª série. Editora Ática, 1995.

(10) IMENES, L.M., LELLIS, M. *Matemática,* 7ª série. Editora Scipione, 1997.

(11) IMENES, L.M., LELLIS, M. *Matemática,* 8ª série. Editora Scipione, 1997.

(12) IEZZI, G., DOLCE, O., MACHADO, A. *Matemática e realidade,* 8ª série, 1º grau. Atual Editora, 1997.

(3ª PARTE: ANEXOS)

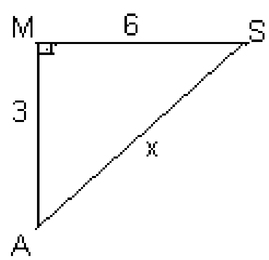
ANEXO I: **QUESTIONÁRIO**

Colégio : ________________________	**Data : __ / __ / 98.**
Nome : ________________________________ N.º : ______	**Série : ______**
Cursou a 8ª série em Escola :	**( ) Estadual** **( ) Municipal** **( ) Particular**

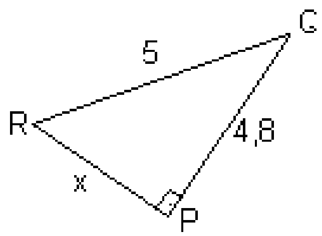
Questionário

Questão 1) Nas figuras abaixo o que se pode dizer do comprimento x do lado do triângulo, sabendo-se que as medidas estão na mesma unidade?

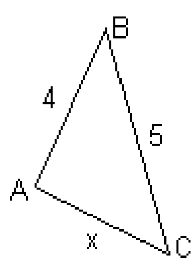
a)



b)

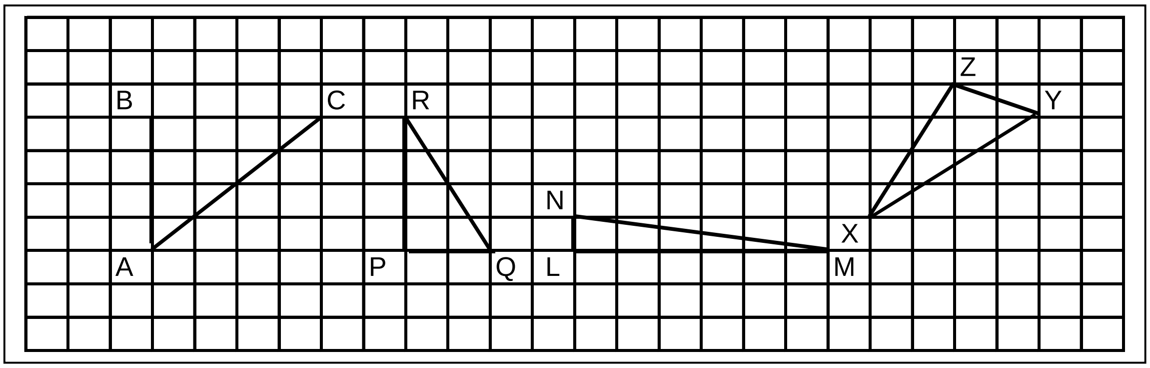


c)



Nome : ______________________________ N.º : ______ Série : ______

Questão 2) Para cada um dos triângulos abaixo, dê a medida dos três lados. Esses triângulos foram construídos sobre quadriculado de malhas quadradas de lado 1.



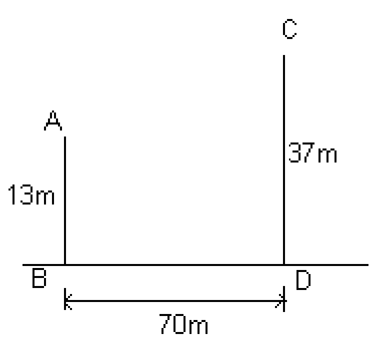
a) Medidas dos lados do triângulo ABC

b) Medidas dos lados do triângulo PQR

c) Medidas dos lados do triângulo LMN

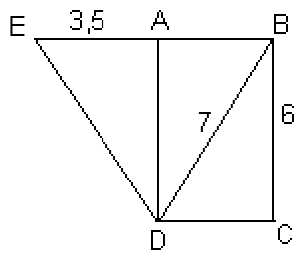
d) Medidas dos lados do triângulo XYZ

Questão 3) AB e CD representam duas torres. A primeira tem 13 m de altura e a segunda, 37m. A distância entre elas é de 70m. Qual a distância entre seus extremos A e C ?

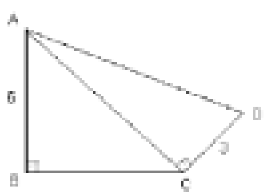


Nome : ______________________________ N.º : ______ Série : ______

Questão 4) Sendo ABCD um retângulo, é verdade que o triângulo EBD é isósceles? Justifique matematicamente.

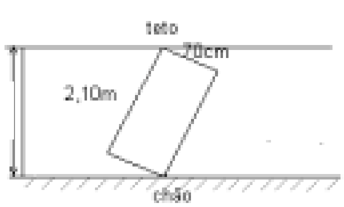


Questão 5) Na figura, AB = BC , AB = 6 e CD = 3. Para ir de A até C o caminho AB+BC é mais curto que o caminho AD + DC ? Justifique sua resposta.



Questão 6) Será que é possível colocar este armário em pé, isto é, na vertical? Suas dimensões são : altura = 2,10m e profundidade = 0,70m. Justifique sua resposta.

2,20m



<u>ANEXO II:</u> CODIFICAÇÃO RELATIVA AO QUESTIONÁRIO

Questão 1-a)

Q1AP - acerto até $\sqrt{45}$

Q1AS - acerto total (sucesso)

A1ET - errou na igualdade Pitagórica

A1EV - errou no cálculo com o radical

A1EK - errou em contas

Q1AW- em branco

Q1AU - considerações absurdas ou não pertinentes

Questão1-b)

Q1BP - acerto parcial, até $\sqrt{1{,}96}$

Q1BS - acerto total

B1ET - errou na igualdade Pitagórica

B1EV - errou no cálculo com o radical

B1EK - errou em contas

Q1BW- em branco

Q1BU - considerações absurdas

Questão1-c)

Q1CS - acertou usando a condição de existência de triângulo

Q1CI - acertou tentando desenhar intuitivamente

C1EK - errou nos cálculos

Q1CT - usou Pitágoras, admitindo implicitamente triângulo retângulo

Q1CW- em branco

Q1CU - considerações absurdas

C1NR – reconheceu que o triângulo não é retângulo, mas não soube continuar

Questão 2-a)

Q2AP - acerto parcial até $\sqrt{32}$

Q2AS - acerto total

Q2AE - errou tudo

A2EH - determinou somente os catetos

A2EK - errou nos cálculos

A2EV - errou no cálculo com o radical

Q2AW- em branco

Q2AU - considerações absurdas

Questão 2-b)

Q2BP - acerto parcial até $\sqrt{20}$

Q2BS - acerto total

Q2BE - errou tudo

B2EH - determinou somente os catetos

B2EK - errou nos cálculos

B2EV - errou no cálculo com o radical

Q2BW- em branco

Q2BU - considerações absurdas

Questão 2-c)

Q2CS - acerto total

Q2CE - errou tudo

C2EH - determinou somente os catetos

C2EK - errou em contas

Q2CW- em branco

Q2CU - considerações absurdas

Questão 2-d)

Q2DP - acerto parcial (determinou um ou dois lados)

Q2DS - acerto total

D2NX - não fez os traçados auxiliares

Q2DX - fez os traçados auxiliares, mas não conseguiu prosseguir

D2EK - aplicou o teorema ,mas errou nos cálculos

Q2DW- em branco

Q2DU - considerações absurdas

Questão 3)

QU3P - acerto parcial $\sqrt{5476}$

QU3S - acerto total x=74m

QU3R - traçou a perpendicular, mas não conseguiu prosseguir

QU3X - identificou a subfigura pertinente, determinando EC=24m

Q3EK - errou nos cálculos

QU3W - em branco

QU3U - considerações absurdas

Questão 4)

QU4P - acertou parcialmente (testou somente um ou dois lados como base)

QU4S - acerto total

Q4EF - respondeu baseando-se na figura e errou

Q4ET - identificou as subfiguras pertinentes e errou na aplicação do teorema

Q4EK - errou em contas

Q4EV - errou no cálculo (ou na comparação) dos radicais

QU4W- em branco

QU4U - considerações absurdas

Questão 5)

QU5P - acerto parcial (calculou as hipotenusas e errou na conclusão)

QU5S - acerto total

5E1H - calculou só uma hipotenusa

Q5EK - errou em contas

Q5ET - errou na aplicação do teorema

QU5W- em branco

QU5U- considerações absurdas

Questão 6)

QU6S - acerto total

Q6ET - errou a igualdade pitagórica

Q6EK - errou em contas

Q6ED - errou na conversão de unidades

Q6EV - errou no cálculo (ou na comparação) de radicais

QU6W- em branco

QU6U - considerações absurdas

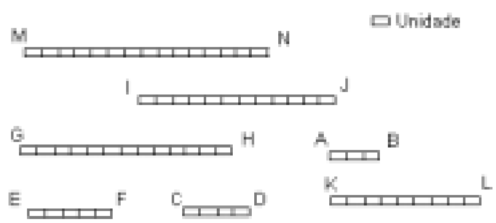
As variáveis, com número de ocorrências igual a zero, foram eliminadas nos histogramas de barras.

<u>ANEXO III:</u> SEQÜÊNCIA DIDÁTICA

Colégio : ______________________ Data : __ / __ / 99.
Nome : ______________________________ N.º : ______ Série : ______
Nome : ______________________________ N.º : ______ Série : ______
Cursou a 7ª série em Escola : ( ) Estadual
( ) Municipal
( ) Particular

<u>Atividade – 1</u> Duração: _______ minutos.

(I) "São dadas as varetas:



a) Usando três delas de cada vez, tente construir triângulos.

b) Descreva, por meio de uma terna, as medidas dos lados dos triângulos que você conseguiu formar. Assim: (..., ..., ...)

c) Sempre que você pegou 3 varetas foi possível construir um triângulo? Explique o que aconteceu.

Data : __ / __ / 99. Duração: _______minutos.

Nome : _____________________________ N.º : ______ Série : ______
Nome : _____________________________ N.º : ______ Série : ______

(II)

a) Escreva as ternas com as quais você <u>não</u> conseguiu formar triângulo.

b) Você é capaz de escrever, com suas palavras, o que precisa acontecer para que exista triângulo? Que relação deve haver entre essas três medidas?

(III) Agora, são dadas as ternas, sem as varetas:

(8, 10, 8), (5, 5,5), (0,8; 1,5; 2,3),(2,5; 4,5; 3,5), (4,3; 5,2; 9,8)

a) Com quais dessas ternas é possível construir triângulos?

b) Agora é a sua vez! Invente três ternas com as quais você pode construir triângulos e, três ternas "que não vão dar certo".

Data: __ /__ /__ Duração: _______minutos.
Nome : _____________________________ N.º : ______ Série : ______
Nome : _____________________________ N.º : ______ Série : ______

Atividade –2

(I) Considerando as varetas da Atividade – 1:

a) Você construiu que tipo de triângulo? Acutângulos, retângulos, obtusângulos?

b) Quais as ternas correspondentes aos triângulos retângulos que você construiu?

c) Com quais varetas se pode fazer um triângulo retângulo de hipotenusa GH?

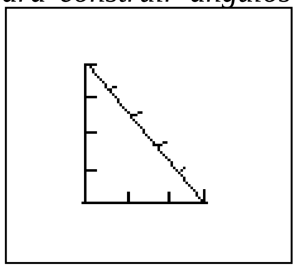
d) Com quais varetas se pode fazer um triângulo retângulo de catetos AB e CD?

e) E, se for: hipotenusa MN e um cateto IJ?

f) Usando a condição de existência de triângulo*, você consegue "prever" se o triângulo será retângulo ou não?*

Data: __ /__ /__ Duração: _______minutos.
Nome : _______________________________ N.º : ______ Série : ______
Nome : _______________________________ N.º : ______ Série : ______

(II) Os antigos egípcios, para construir ângulos retos, utilizavam cordas com nós, da seguinte maneira:



É o chamado "esquadro egípcio". Eles já sabiam que o triângulo de lados medindo (3,4,5) é retângulo.

a) Será que o ângulo reto surge do fato desta "terna" ser formada por números naturais consecutivos? Para verificar isso, desenhe, utilizando régua e compasso, triângulos cujos lados tenham como medidas números consecutivos. Por exemplo: (2, 3, 4) (4, 5, 6) (6, 7, 8) (1, 2, 3).

b) A que conclusão você chegou?

Data: __ /__ /__ Duração: _______minutos.
Nome : _______________________________ N.º : ______ Série : ______
Nome : _______________________________ N.º : ______ Série : ______

c) Desenhe, agora, triângulos a partir das ternas: (6, 8, 10), (5, 12, 13), (9, 12, 15). Esses triângulos são retângulos?

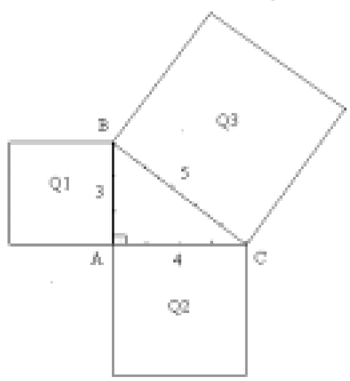
d) Resuma as conclusões a que você chegou em b) e c).

Data: __ /__ /__ Duração: _______minutos.
Nome : ______________________________ N.º : ______ Série : ______
Nome : ______________________________ N.º : ______ Série : ______

Atividade – 3

Não sendo a "Condição de Existência de Triângulo" suficiente para garantir que o triângulo seja retângulo, então qual relação deve existir entre as medidas dos lados para que isso aconteça?

Voltando à terna egípcia (3, 4, 5), construa quadrados sobre os catetos e sobre a hipotenusa do triângulo, como mostra a figura:



a) Calcule a área de cada quadrado.

b) Faça o mesmo para as ternas do item c) da Atividade – 2, isto é, (6, 8, 10), (5, 12, 13), (9, 12, 15).

c) Preencha a tabela seguinte:

			Área dos quadrados		
Cateto b	**Cateto c**	**Hipot. a**	**Q1**	**Q2**	**Q3**
3	4	5			
6	8	10			
5	12	13			
9	12	15			

Data: __ /__ /__ Duração: _______minutos.
Nome : ____________________________ N.º : ______ Série : ______
Nome : ____________________________ N.º : ______ Série : ______

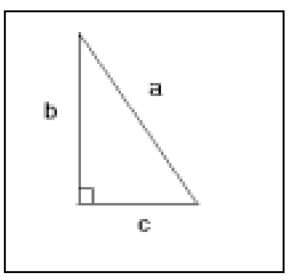
d) *Compare as áreas de Q1 e Q2 com a de Q3. O que você observou? Tente escrever uma relação entre elas. Deduza uma relação entre os lados do triângulo.*

e) *Será que essa relação vale para qualquer triângulo? Experimente usá-la para ternas correspondentes a triângulos acutângulos ou obtusângulos.*

<u>Atividade – 4</u>

Verificamos para alguns triângulos, cujos lados tinham como medidas números inteiros, que, para dar origem a um triângulo retângulo, uma relação deveria ocorrer entre essas medidas. Mas, no caso de medidas quaisquer dadas por números não inteiros, será que ela vai continuar valendo?

a) *Desenhe e recorte um triângulo retângulo <u>qualquer</u>. A seguir, recorte mais 7 triângulos "idênticos" a esse. Não se preocupe em medir os lados.*



b) *Desenhe e recorte agora:*

- *um quadrado de lado a (pinte de amarelo)*
- *um quadrado de lado b (pinte de verde)*
- *um quadrado de lado c (pinte de azul)*

Data: __ /__ /__ Duração: _______minutos.
Nome : _____________________________ N.º : ______ Série : ______
Nome : _____________________________ N.º : ______ Série : ______

c) Como se fosse um "quebra-cabeças" monte:

- *um "quadradão" usando 4 triângulos e o quadrado amarelo, isto é, o quadrado de lado a.*
- *outro "quadradão" usando 4 triângulos e os quadrados verde e azul, respectivamente de lados b e c.*

d) Se retirarmos de cada "quadradão" os 4 triângulos, qual a área da figura que sobra?

e) Que se pode dizer, então, das áreas das figuras restantes em cada "quadradão"? Isto é, que relação existe entre elas? Que relação existe entre os lados do triângulo?

<u>Atividade – 5</u>

a) Escreva a área do "quadradão" da fig.1, em função das áreas do quadrado nele contido e dos 4 triângulos.

b) Faça o mesmo para a fig.2.

c) Que relação matemática existe entre as áreas dos "quadradões" das figuras 1 e 2? Deduza uma relação entre a, b e c.

Data: __ /__ /__ Duração: _______minutos.
Nome   : _____________________________ N.º : ______ Série : ______
Nome   : _____________________________ N.º : ______ Série : ______

Atividade – 6

Agora você já sabe que, em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos. Esse teorema já era conhecido pelos babilônios e egípcios, mas foram os pitagóricos os primeiros a demonstrá-lo rigorosamente. Daí o nome Teorema de Pitágoras.

a) Explique, com suas palavras, qual a vantagem de se saber o Teorema de Pitágoras, no que se refere à resolução de problemas envolvendo triângulos retângulos. Em outras palavras, o que ele permite calcular e o que deve ser dado, para isso, no problema.

b) Invente quatro exemplos de problemas, em cujas resoluções você utiliza o teorema de Pitágoras.

1.

2.

3.

4.

Data : __ / __ / 99. Duração: _______minutos.

Nome : _______________________________ N.º : ______ Série : ______
Nome : _______________________________ N.º : ______ Série : ______

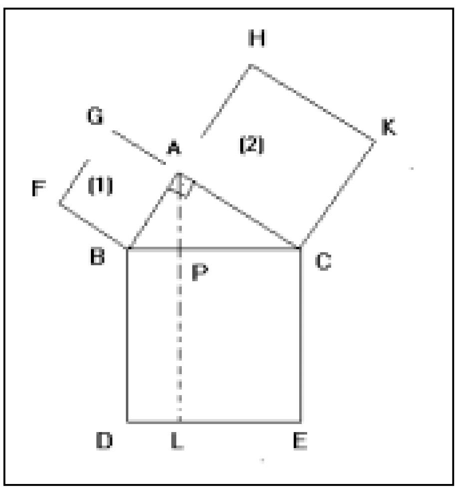
<u>Atividade – 7</u>

Em sua obra “Elementos”, considerada por muitos historiadores a mais importante da Geometria de toda a História da Matemática, Euclides, que viveu no ano 300 antes de Cristo (300 a.C.), demonstrou o Teorema de Pitágoras de um modo muito diferente. Ele provou que:

I. O quadrado (1), ABFG, tem a mesma área do retângulo BPLD.

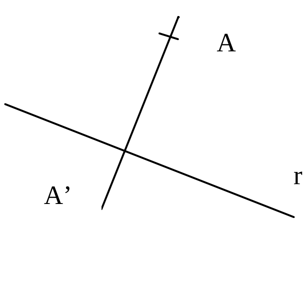
II. O quadrado (2), AHKC, tem a mesma área do retângulo PCEL.

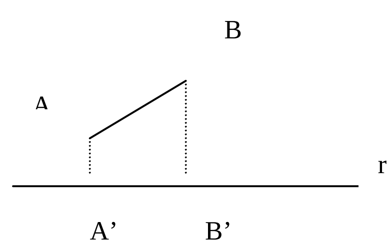
Como a área do quadrado BCED é a soma das áreas desses retângulos, ele concluiu que a área do BCED é a soma das áreas dos quadrados (1) e (2).



a) Chamando: AB = c, BC = a, AC = b, BP = m, CP = n, você consegue “traduzir” matematicamente os resultados (I) e (II) acima?

b) Quando, de um ponto A, se traça a perpendicular a uma reta r, o ponto A’, intersecção dessa perpendicular com r, é denominado projeção ortogonal de A sobre r; para obter a projeção ortogonal de um segmento, sobre uma reta, basta projetar sobre ela os extremos do segmento.





Data : __/__/__
Nome : ______________________________ **N.º** : ______ **Série** : ______
Nome : ______________________________ **N.º** : ______ **Série** : ______

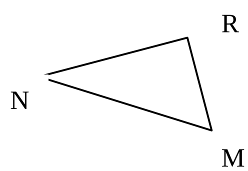
c) Usando esta nomenclatura, o que se pode dizer dos segmentos BP e CP em relação à reta BC?

d) Como ficam, levando em conta o item c), os resultados (I) e (II)?

Atividade –8 **Duração: _____ minutos.**

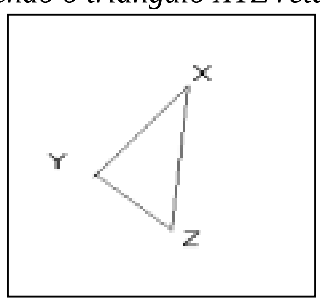
Calcule MN, no triângulo retângulo em R, dados:

MR=2,4cm e NR=3,2 cm



Atividade – 9 **Duração: _____ minutos.**

Dados YZ=3cm e ZX=4cm, calcule XY, sendo o triângulo XYZ retângulo em Y.



Atividade – 10 **Duração: _____ minutos.**

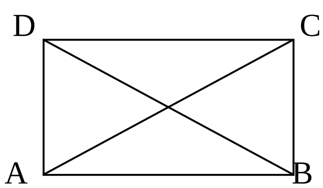
No "Papiro do Cairo", o qual data de 300 a.C., foram encontrados quarenta problemas de Matemática. Um deles é o seguinte: "Uma escada de 10 cúbitos está com seus pés a 6 cúbitos da parede. Que altura a escada alcança?" (cúbito é uma medida antiga de comprimento; hoje há o metro, o centímetro, etc.)

Data : __/__/__
Nome : _______________________________ N.º : ______ Série : ______
Nome : _______________________________ N.º : ______ Série : ______

Quando um mecânico precisa consertar uma máquina ou um marceneiro quer construir um móvel, eles necessitam de algumas ferramentas. Algo semelhante ocorre quando resolvemos um problema. Mas, às vezes, nem lembramos de algumas "ferramentas" que estão sem uso há muito tempo.

Vamos abrir esta "caixa de ferramentas" e verificar o que existe dentro dela. Talvez sejam úteis para a resolução de nossos problemas.

F1) As diagonais de um retângulo têm mesmo comprimento:

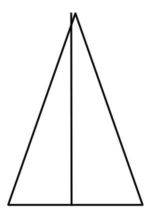


AC=DB

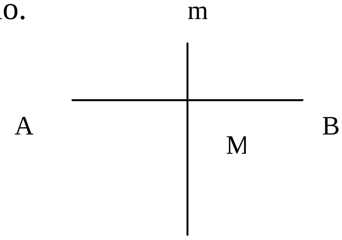
F2) Triângulo equilátero: os três lados têm mesma medida.
Triângulo isósceles: dois lados têm mesma medida.
Triângulo escaleno: dois lados quaisquer não têm mesma medida.

F3) Área de retângulo : $base \times altura$ Área de triângulo : $\dfrac{base \times altura}{2}$

F4) Num triângulo isósceles, mediana, altura e bissetriz relativas à base coincidem.



F5) Mediatriz de um segmento: é a perpendicular ao segmento, passando pelo ponto médio.



Data : __/__/__
Nome : ________________________________ N.º : ______ Série : ______
Nome : ________________________________ N.º : ______ Série : ______

<u>Atividade – 11</u> **Duração: ______minutos.**

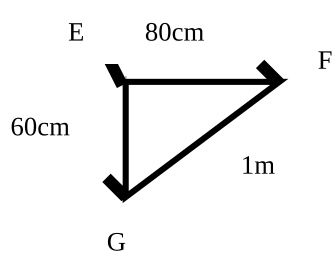
a) *Um quadrado tem 1 cm de lado. Sua diagonal pode ter como medida um número inteiro? Justifique sua resposta.*

b) *Determine a área do quadrado citado no item a).*

c) *Qual deve ser a medida do lado de um outro quadrado para que sua área seja o dobro da área que você calculou no item b)?*

<u>Atividade – 12</u> **Duração: ______minutos.**

Um pedreiro, quando precisa de um ângulo reto, na demarcação de um terreno, utiliza barbante e estacas da seguinte maneira:



a) *Como se pode garantir que o triângulo assim construído é retângulo? Justifique sua resposta matematicamente.*

Data : __ / __ / 99.

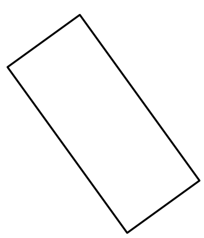
Nome : ______________________________ N.º : ______ Série : ______
Nome : ______________________________ N.º : ______ Série : ______

b) *Se o pedreiro modificar as medidas dos barbantes para : EF=90cm e EG=1,20m, qual deve ser a distância entre as estacas F e G para que ele tenha a certeza de haver construído um ângulo reto?*

Atividade –13 **Duração: _______minutos.**

a) *Num triângulo isósceles, a base mede 6cm e cada um dos lados "iguais" mede 5cm. Calcule a área desse triângulo.*

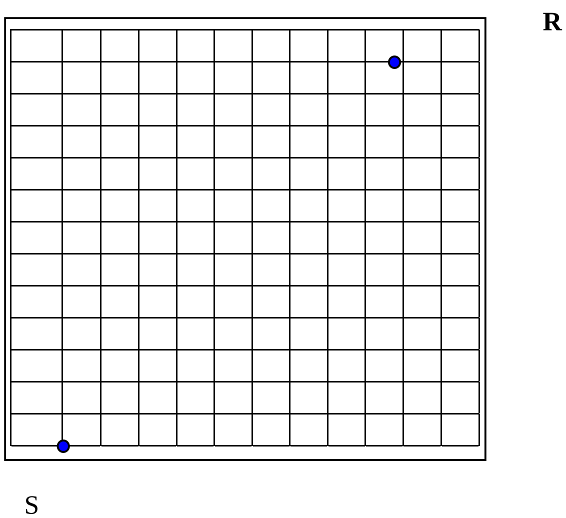
b) *O retângulo abaixo tem largura igual a 80cm e diagonal 100cm. Quanto mede o seu perímetro?*



Data : __ / __ / 99.

Nome : _____________________________ N.º : ______ Série : ______
Nome : _____________________________ N.º : ______ Série : ______

<u>Atividade –14</u> **Duração: _______minutos.**



A figura representa o chão do pátio de uma escola, recoberto por placas quadradas de 1m de lado. Renata e Sylvia estão nos pontos R e S, respectivamente. Quanto mede a menor distância entre as duas colegas?

<u>Atividade –15</u>

a) *Dados os segmentos de medidas <u>a</u> e <u>b</u>, descreva um modo de determinar geometricamente um segmento <u>x</u>, tal que:* $x = \sqrt{a^2 + b^2}$

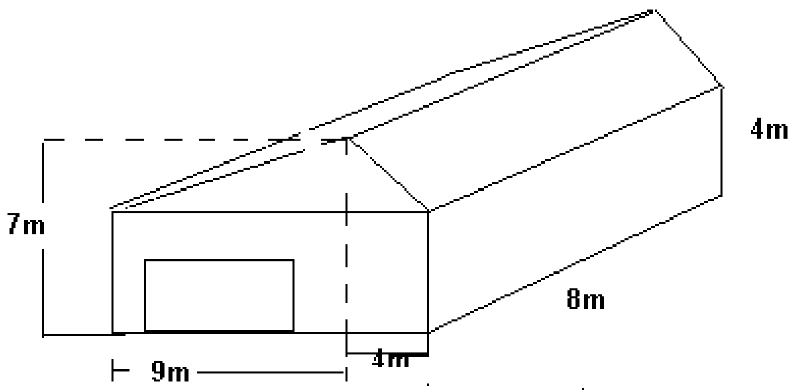
b) *Construa agora, usando os segmentos <u>a</u> e <u>b</u> do item anterior, um segmento <u>y</u>, tal que:* $y = \sqrt{a^2 - b^2}$. *Isto é sempre possível? Justifique sua resposta.*

Data : __ / __ / 99.

Nome : ______________________________ N.º : ______ Série : ______
Nome : ______________________________ N.º : ______ Série : ______

<u>Atividade –16</u> **Duração: _______minutos.**

Qual a área do telhado desse galpão?

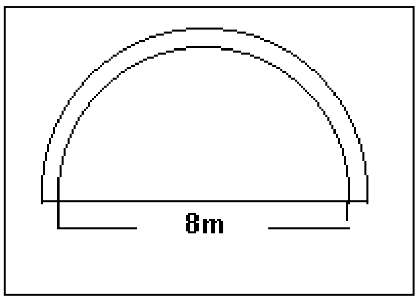


Data : __ / __ / 99.

Nome : ______________________________ N.º : ______ Série : ______
Nome : ______________________________ N.º : ______ Série : ______

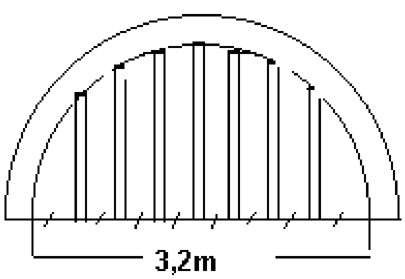
<u>Atividade –17</u> **Duração: _______minutos.**

A figura representa a entrada de um túnel, com mão única. A semi-circunferência interior tem diâmetro de 8m. Um caminhão de 2,40m de largura precisa passar por esse túnel. Qual é, "em teoria", a altura máxima do caminhão para que isto seja possível?



<u>Atividade –18</u> **Duração: _______minutos.**

Sete barras eqüidistantes fecham esse portal em semicírculo. Calcule o comprimento total das barras, utilizando as indicações da figura. (Não considere a espessura das barras).



Data : __ / __ / 99.

Nome : ______________________________ N.º : ______ Série : ______
Nome : ______________________________ N.º : ______ Série : ______

<u>Atividade –19</u> Duração: _________minutos.

$\overline{AB}$ é um segmento de comprimento 8cm e de ponto médio <u>O</u>. A reta d $\perp$ $\overline{AB}$ em <u>O</u>. Sobre d, toma-se um ponto M a 5cm de B. Seja N um ponto tal que:

- *N pertence à reta d.*
- *N não esteja na semi-reta $\overrightarrow{OM}$*
- *NO=3cm*

O que se pode afirmar sobre o quadrilátero ANBM? Justifique sua resposta.

<u>Atividade –20</u> Duração: _______ minutos.

Quando uma terna de números naturais não nulos (x, y, z) verifica a relação $x^2 + y^2 = z^2$ ela é chamada "terna pitagórica". Vamos agora ver como podem ser "fabricadas" ternas desse tipo.

Diophante (século 3, depois de Cristo) utilizou o seguinte método para obter ternas pitagóricas (método já conhecido por Euclides):

- *Escolha dois números naturais não nulos <u>m</u> e <u>n</u> tais que <u>m</u> seja maior que <u>n</u>, isto é m>n.*
- *Calcule:*

$$x = m^2 - n^2$$
$$y = 2mn$$
$$z = m^2 + n^2$$

Segundo Diophante, a terna formada por (x, y, z) é pitagórica.

Data : __ / __ / 99.

Nome : ______________________________ N.º : ______ Série : ______
Nome : ______________________________ N.º : ______ Série : ______

a) *Escolha alguns valores para* <u>*m*</u> *e* <u>*n*</u>*, por exemplo, m=2 e n=1, depois m=3 n=2, e verifique que esse método de fato produz ternas pitagóricas.*

b) *Escolha agora você um valor para* <u>*m*</u> *e outro para* <u>*n*</u>*, lembrando que m>n. o método "funcionou"?*

c) *Tente provar que este método, que chamaremos de* <u>*método D*</u> *(em homenagem a Diophante), é geral; quer dizer, ele vale para quaisquer naturais* <u>*m*</u> *e* <u>*n*</u>*, com m>n.*

d) *A terna (9, 12, 15) é pitagórica? Será que ela pode ser obtida, usando-se o método* <u>*D*</u>*? Tente demonstrar sua resposta.*

e) *Com o método D é possível "fabricar" uma infinidade de ternas pitagóricas, mas não todas. Vamos ver, então, um outro método para obtenção de ternas pitagóricas por "proporcionalidade". Chamaremos este método de* <u>*método P.*</u>

Data : __ / __ / 99.

Nome : ______________________________ N.º : ______ Série : ______
Nome : ______________________________ N.º : ______ Série : ______

*Voltando à terna (3, 4, 5), experimente multiplicar todos os seus elementos por um mesmo número. Por exemplo: (3.**2**, 4.**2**, 5.**2**), (3.**3**, 4.**3**, 5.**3**). Será o resultado ainda uma terna pitagórica? Faça o "teste". O que você concluiu?*

f) *Mostre que: se (x, y, z) é uma terna pitagórica e k um número natural não nulo, então a terna (kx, ky, kz) também é pitagórica.*

g) *Você consegue prever o que acontece, se construirmos triângulos cujos lados tenham ternas pitagóricas como medidas? Explique por que.*

h) *Construa triângulos, usando a terna (3, 4, 5) e as ternas obtidas a partir desta pelo método P. O que você observa a respeito desses triângulos?*

Data : __ / __ / 99.

Nome : ______________________________ N.º : ______ Série : ______
Nome : ______________________________ N.º : ______ Série : ______

Atividade – 0 (Objetivo: reinvestir em pré-requisitos)

1) Compare (usando sinais de < , > ou =).

$3^2 ..... 2^3$	$7 ...... 2^0 + 5^1$	$10^2 ...... 12^2 - 2^2$
$2^4 ..... 4^2$	$5^2 ..... 2^2 + 3^2$	$6^2 .... 2^2 . 3^2$

2) a) Você já sabe que:

$(a+b)^2 \neq a^2 + b^2$

$(a-b)^2 \neq a^2 - b^2$

corretamente:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Efetue, então:

$(x+5)^2 = ...$

$(2a-b)^2 = ...$

$(m^2+n^2)^2 = ...$

$(p^3-q^3)^2 = ...$

$(m+n)(m-n) = ...$

$(2x-1)(2x+1) = ...$

$(3a+b)(3a-b) = ...$

$(p^3+q^3)(p^3-q^3) = ...$

b) Pela propriedade distributiva: a.(b+c) = ab + ac. Se quisermos “desfazer” a operação, devemos fatorar a expressão. Exemplo: $2x^2 + 10x = 2x.(x+5)$. Para fatorar um trinômio quadrado perfeito, a fatoração “desfaz” a potenciação. Exemplo:

$x^2 + 10x + 25 = (x+5)^2$

$4a^2 - 4ab + b^2 = (2a-b)^2$

Agora é a sua vez! Fatore:

$b^2 + 4bc + 4c^2 = ...$

$x^2 + y^2 - 2xy = ...$

$2m^2n^2 + m^4 + n^4 = ...$

$p^2 - q^2 = ...$

$m^4 - n^4 = ...$

c) Efetue, simplificando as expressões e fatorando o resultado, quando possível

$(x+5)^2 - 20x =$

$ka(a+b) - kb(a+b) =$

$2ab + (a-b)^2 =$

3) Recordando radiciação:

$7^2 = 49 \Rightarrow \sqrt{49} = 7$ $\qquad$ $\sqrt{36} = ...$ $\qquad$ $\sqrt{81} = ...$ $\qquad$ $\sqrt{8} = ...$

$4^2 = 16 \Rightarrow \sqrt{16} = 4$ $\qquad$ complete, então: $\sqrt{9} = ...$ $\qquad$ $\sqrt{100} = ...$ $\qquad$ $\sqrt{54} = ...$

$2^3 = 8 \Rightarrow \sqrt[3]{8} = 2$ $\qquad$ $\sqrt{1} = ...$ $\qquad$ $\sqrt[3]{0} = ...$ $\qquad$ $\sqrt[4]{1} = ...$

Qual o número que elevado ao quadrado dá como resultado 25? Resposta:............

Você não esqueceu de nada? Observe: $(+5)^2 = 25$ mas, também, $(-5)^2 = 25$.

4) Determine o número real, ou os números reais, adequado(s) para cada sentença:

$a) x^2 = 81$	$x = ...$	$e) z^3 = -8$	$z = ...$
$b) a^2 = 16$	$a = ...$	$f) r^2 = 2$	$r = ...$
$c) m^2 = 0$	$m = ...$	$g) s^2 = 54$	$s = ...$
$d) n^2 = 1$	$n = ...$	$h) k^2 = 108$	$k = ...$

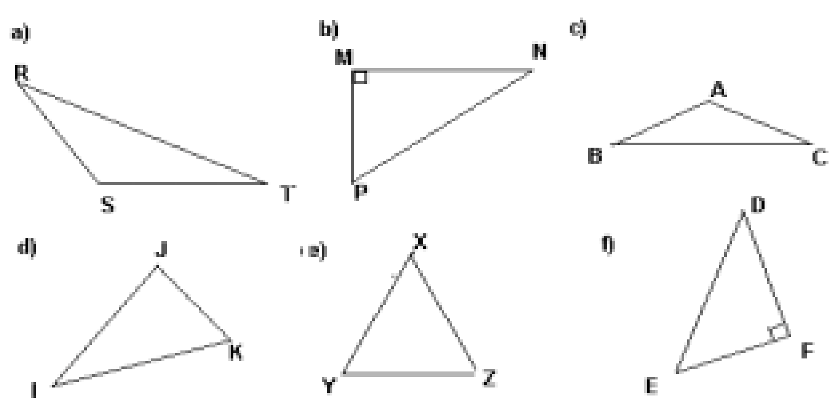
5) Você já sabe que:

Ângulo reto:	mede 90^o
Ângulo agudo:	mede menos que 90^o
Ângulo obtuso:	mede mais que 90^o

Assim, os triângulos, quanto aos ângulos, se classificam em:

Triângulo acutângulo:	quando tem os 3 ângulos agudos
Triângulo retângulo:	quando tem 1 ângulo reto
Triângulo obtusângulo:	quando tem 1 ângulo obtuso

I. Classifique, então, os triângulos:



II. Para os triângulos dos itens a), b), c): Qual o maior ângulo? Qual o maior lado?

6) Lembrando:

<u>Perímetro</u> de um polígono é a soma das medidas dos lados. Para calcular <u>áreas</u>, usamos fórmulas:

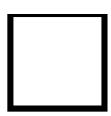
Quadrado: área = lado. lado ou $(lado)^2$

Retângulo: área = base.altura

Triângulo: área = $\dfrac{base.altura}{2}$

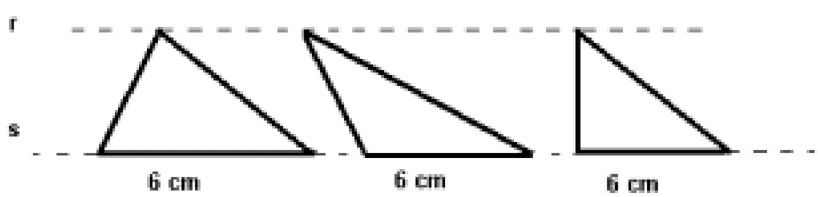
a) Calcule, você: área e perímetro, para as figuras:

Lado: 1cm



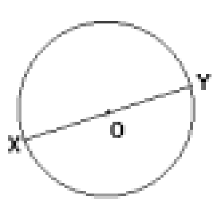
Base: 0,12 m
Altura: 8,5 cm

b) Calcule a área de cada um dos triângulos:



As retas r e s são paralelas e distam entre si 5 cm.

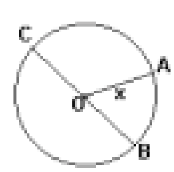
7) Recordando circunferência:



<u>Diâmetro</u> é uma corda que passa pelo centro da circunferência: $\overline{XY}$.
<u>Raio</u> é um segmento com uma extremidade no centro e a outra num ponto da circunferência: $\overline{OX} \cong \overline{OY}$.

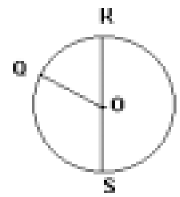
a) Se o diâmetro medir 20 cm, qual será a medida do raio? ....

.b) Determine <u>x</u>, sabendo-se que BC = 5m

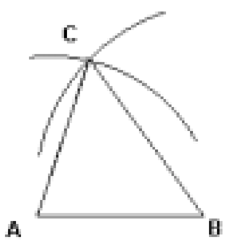


c)

Se QO = 7,3cm, quanto mede $\overline{RS}$?



8) Você se lembra como construir, com régua e compasso, um triângulo, dadas as medidas dos três lados? Ex.: são dadas as medidas 6 cm, 7 cm, 8 cm. Começamos usando qualquer um destes números como medida da base, por exemplo 7 cm. Com centro em A traçamos um arco de raio medindo 6cm e, com centro em B, um arco de raio medindo 8 cm. O ponto de intersecção dos arcos determina o ponto C.



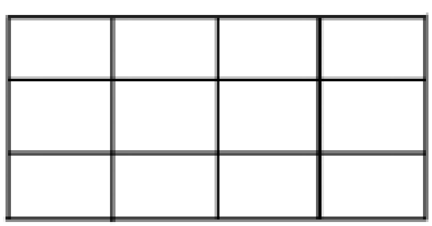
Construa triângulos, usando as medidas:

I) 5 cm, 3 cm, 6cm

II) 4 cm, 3 cm, 4cm

III) 6 cm, 10 cm, 8 cm

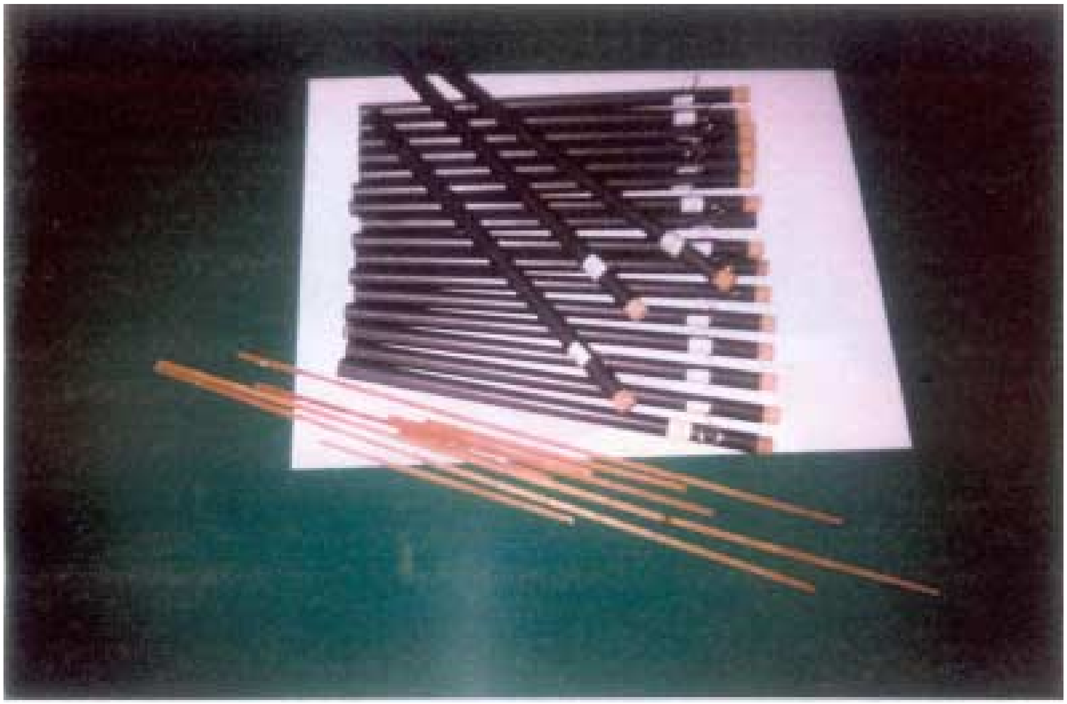
9) Uma janela retangular tem 3m de largura e 2m de altura. Deseja-se colocar grade de proteção, como mostra a figura:



a) Sem levar em conta a espessura do ferro, quantos metros de ferro serão utilizados?

b) Se quisermos colocar vidro (pelo lado de dentro), quanto gastaremos, sabendo-se que o metro quadrado do vidro custa R$25,00?

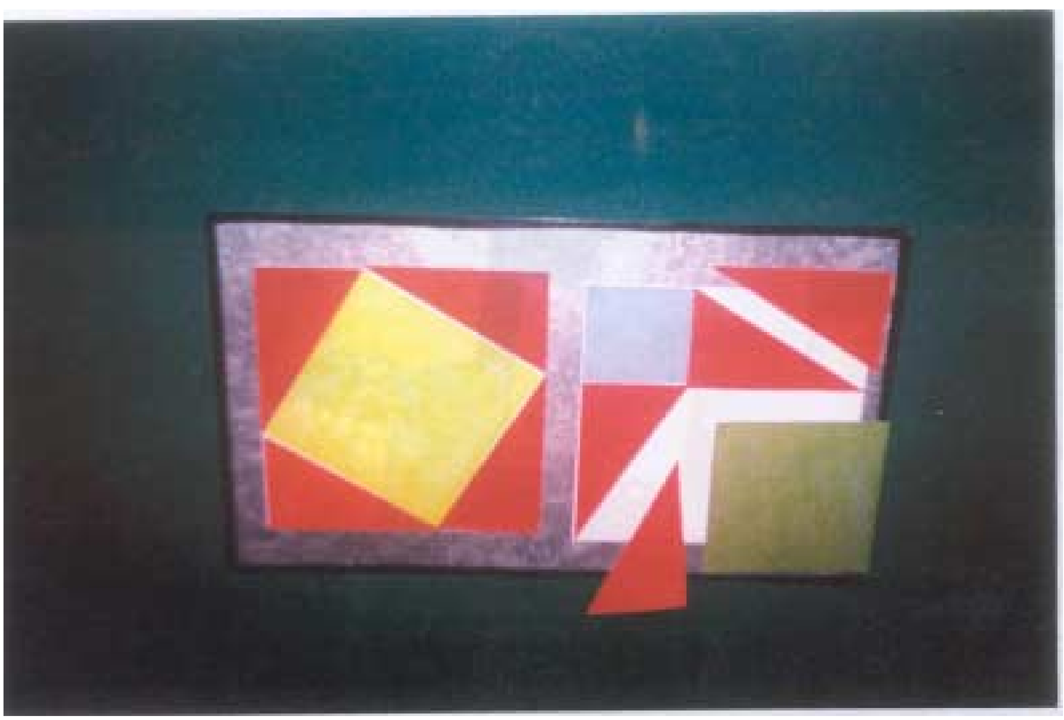
<u>ANEXO IV:</u> MATERIAL DIDÁTICO



Tubos de PVC contendo jogos de varetas (para os alunos) e jogo de varetas de dimensões maiores, utilizados nas atividades 1 (itens I, II e III) e 2 (item I)

"Kits" utilizados pelos alunos na Atividade 4

Placa metálica e figuras com imã, utilizadas na Atividade 4: reconfiguração tipo (L)



Placa metálica e figuras com imã, utilizadas na Atividade 4: reconfiguração tipo (V)