

Glória Garrido Catto

REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO E O NÚMERO RACIONAL
Uma abordagem nos livros didáticos

Mestrado em Educação Matemática

PUC-SP
São Paulo
2000

Glória Garrido Catto

REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO E O NÚMERO RACIONAL

Uma abordagem em livros didáticos

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **MESTRE** em Educação Matemática, sob a orientação da **Profa. Dra. Sonia Barbosa Camargo Iglioni**.

**PUC-SP
São Paulo
2000**

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: _____ **Local e Data:** _____

Comissão Julgadora

Resumo

O objetivo desta pesquisa foi o de analisar livros didáticos, do ensino fundamental, à luz da teoria dos registros de representação de R. Duval. A análise se limitou ao número racional. Segundo a teoria de Duval, os registros de representação têm papel fundamental na aprendizagem matemática uma vez que, nesta teoria, os conceitos só são acessíveis ao aluno por meio dos registros semióticos de representação que são: o simbólico, o figural e a língua natural.

Duas coleções de livros didáticos foram submetidas à análise e a escolha foi sobretudo feita em função de apresentarem abordagens dos conteúdos com características distintas. Uma delas de forma "compartimentalizada" e a outra em forma de "espiral".

Procuramos avaliar em que medida os diversos registros do número racional eram apresentados. Desejamos investigar como e se eram trabalhados os "tratamentos" (transformações no interior de um mesmo registro) e as diferentes possibilidades de conversão (transformações de um registro ao outro).

Pudemos constatar que, quanto aos tratamentos, uma das coleções privilegia os realizados no registro numérico, enquanto a outra também os realiza no registro figural. No que se refere às conversões, uma das coleções as apresenta entre os registros figural e o simbólico, bem como entre os registros numéricos, fracionário e decimal, e na outra elas, aparecem de forma pouco significativa. Em geral, em ambas as coleções, é priorizado um dos sentidos de conversão entre dois registros.

Abstract

This research was meant to explore schoolbooks addressed to preliminary schooling, enlightened by the theory of registration of representation by R. Duval. The analysis was restricted to the rational number. According to Duval's theory, registrations of representation play crucial role as to the apprenticeship of mathematics, once it is assumed that concepts are only accessible to the student by means of semiotic registrations of representation, which are: symbolic, figural and native language.

Two collections of schoolbooks were submitted to analysis, basically chosen for their approaches as to contents, with different characteristics – one of them is “compartment shaped”, while the second collection adopts the “spiral structure”.

We tried to evaluate in what extent different registrations of the rational number were presented. We intended to investigate how – and if at all – “treatments” (changes within one single registration) and the many converting possibilities (changes from one registration to the other) have been worked out.

As to treatments, observation showed that while one collection prioritizes the realized in the numerical registration, the second one will do the same in the figural registration. Concerning conversions, in one collection they are enabled between figural and symbolic registrations, as well as between numerical, fractional and decimal registrations, while in the second collection they are not very significant. In general terms, both collections prioritize one of the conversion senses between two registrations.

MEUS AGRADECIMENTOS

À professora Dra. Sonia Barbosa Camargo Iglioni orientadora desta tese, paciente, amiga e dedicada. Pessoa notável e incansável, que incentivou meu desenvolvimento intelectual de forma humana e respeitosa.

Aos professores Dr. Benedito Antonio da Silva e o Dr. Luiz Carlos Pais pelas contribuições pertinentes na análise do trabalho cuja colaboração foi de grande valia.

Aos professores do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo pelo que representaram na minha formação.

Aos professores e colegas da E.T.E. "Getúlio Vargas" pelo apoio e incentivo desta pesquisa.

Um agradecimento especial, ao meu marido José Carlos, companheiro de luta e de vida, que sempre me apoiou nas empreitadas desta pesquisa e pela colaboração na montagem do trabalho.

Ao meu filho, Márcio e aos meus pais, Teresa e Andrés e minha tia Antonia que embora tenham sofrido com a minha ausência pelos momentos de concentração, souberam compreender e me apoiar nesta jornada.

E ainda meus agradecimentos, a Eloi, a Ivone, a Maria Angela e Cristina que sempre me auxiliaram na elaboração da tese.

DEDICATÓRIA

" Cada um que passa em nossa vida, passa sozinho,
pois cada pessoa é única e nenhuma substituí outra.
Cada um que passa em nossa vida, passa sozinho,
mas não vai só, nem nos deixa sós;
Leva um pouco de nós mesmos,
deixa um pouco de si mesmo.
Há os que levam muito,
mas há os que não levam nada;
Esta é a maior responsabilidade de nossa vida e
prova evidente de que duas almas não se
encontram por acaso".

Antoine de Saint-Exupéry

In memoriam de Patrícia, minha filha que
nós deixou muitas lembranças.

" ... um olhar sobre a sala de aula através do livro didático, não para propor mudanças metodológicas de conteúdo, mas para problematizar a tendência à homogeneização de tudo e de todos e, assim, abrir brechas para possíveis deslocamentos, possíveis rupturas".

Coracini

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	001-011
CAPÍTULO 1 - ESTUDO HISTÓRICO	
1.1 Panorama histórico.....	012-013
1.1.1 Planilha 2.....	014-
1.3 Principais contribuições para evolução das potências.....	015-021
1.3 Tabelas da evolução das potências.....	022-025
CAPÍTULO 2 - QUADRO TEÓRICO	
2.1 Teoria dos registros de representação.....	026-033
2.2 Quanto ao saber.....	034-041
CAPÍTULO 3 - METODOLOGIA	
3.1 Metologia das pesquisas.....	042-045
3.2 Características gerais das coleções.....	045-047
CAPÍTULO 4 - ANÁLISE DE LIVRO DIDÁTICO	
4.1 O registro fracionário na CLD-2.....	048-062
4.2 O registro decimal na CLD-2.....	063-074
4.3 O registro fracionário na CLD-3.....	074-104
4.4 O registro decimal na CLD-3.....	104-132
CAPÍTULO 5 - CONSIDERAÇÕES GERAIS	
5.1 Quanto ao registro fracionário.....	133-138
5.2 Quanto ao registro decimal.....	138-144
5.3 Conclusões.....	145-146
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	147-150
ANEXOS	
Anexo 1 Teste a priori.....	151
Anexo 2 Teste diagnóstico.....	152

Atuando no Ensino Médio de escola pública há mais de treze anos e concomitantemente, nos últimos nove anos, em uma escola técnica, temos sempre nos defrontado com as dificuldades dos alunos para aprender Matemática. Considerando como pressuposto que o ato de aprender está intimamente ligado ao de ensinar, participamos de cursos de aperfeiçoamento e simpósios sobre o ensino da Matemática sempre com o intuito de, por um lado, questionar nossa prática e, por outro, ampliar nossos conhecimentos e, assim, poder melhor ensinar.

Com esta perspectiva fomos levados a procurar caminhos científicos que possibilitassem a compreensão dos processos do ensino-aprendizagem da Matemática, propondo-nos então a desenvolver estudos de pós-graduação em Educação Matemática, campo do saber que investiga tais processos.

No momento de escolha do tema da dissertação, optamos por investigar os problemas de ensino-aprendizagem relativos ao conteúdo - função exponencial, por ser um conteúdo que desenvolvemos em nossa prática docente.

Com o intuito de diagnóstico, elaboramos um teste, anexo 1, que denominamos teste a priori, e o aplicamos em grupos de alunos de terceiro ano, de uma turma do curso de Eletrônica e em outra do curso de Edificações, da Escola Técnica Estadual Getúlio Vargas, da cidade de São Paulo.

Ao analisarmos o resultado do teste pudemos detectar em algumas das resoluções dos alunos um aparente sucesso. Havia situações em que trabalhavam com as representações de um número sem ter clareza de seu significado, é o que parece indicar a solução apresentada por Bruno para o item c) do teste, como segue:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = (1,5)^{-2} = \left(\frac{1}{1,5}\right)^2 = \frac{1}{2,25} \quad (\text{resolução de Bruno})$$

Pode-se observar que o aluno acerta a conversão do registro fracionário do número $3/2$ para o registro decimal $(1,5)$, assim como o cálculo da potência com expoente negativo. Porém, o resultado apresentado por este parece indicar que, embora realize os tratamentos e conversões de registros satisfatoriamente, este não sai do domínio das representações, pois há indicações de que teria dificuldade de estabelecer relações de ordem, por exemplo, com o número representado por $\frac{1}{2,25}$.

Outro caso semelhante foi o da resolução de Fábio, para o mesmo item do teste, como mostramos a seguir:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{4}{9}} \quad (\text{resolução de Fábio})$$

Neste caso, o aluno cometeu um erro na primeira passagem realizada, o que pode indicar ter problemas no tratamento de potências de racionais, no registro fracionário com expoente negativo.

Podemos atestar que os resultados apresentados por ambos, permitem levantar hipóteses de que esses alunos dificilmente conseguiriam estabelecer uma correspondência entre os números encontrados como solução e seus pontos correspondentes na reta real.

No item b) da questão 2, do mesmo teste, propunha-se a resolução da equação exponencial $(0,01)^{2x} = 10^{x+2}$, Ana apresentou o seguinte desenvolvimento:

$$\begin{aligned}
 (0,01)^{2x} &= 10^{x+2} \\
 (0,01)^{2x} &= (0,01)^{3(x+2)} \\
 0,01^{2x} &= 0,01^{3x+6} && \text{(resolução de Ana)} \\
 2x &= 3x + 6 \\
 -x &= 6 \\
 x &= -6
 \end{aligned}$$

Pudemos constatar que Ana tem conhecimento de que se deve inicialmente colocar as potências dos dois membros da equação numa mesma base, para depois igualar os expoentes. Nesse ato de igualar as bases, a aluna optou pelo registro decimal, o que deve tê-la conduzido a erro, diferentemente do esperado por nós, pois nos parece mais natural a conversão de $(0,01)$ em $\left(\frac{1}{10}\right)^2$. Possivelmente a escolha de representação feita pela aluna, tenha-lhe trazido dificuldade no momento da validação do resultado, transformando a resolução da equação numa atividade representacional.

Ainda na resolução da mesma equação, localizamos erros envolvendo a mudança de base decimal para a base 10, como a realizada nas resoluções abaixo:

$$\begin{aligned}
 (0,01)^{2x} &= 10^{x+2} \\
 (10^{-3})^{2x} &= 10^{x+2} \\
 10^{-6x} &= 10^{x+2} \\
 -6x &= x + 2 && \text{(resolução de Daniel)} \\
 -7x &= 2 && (-1) \\
 x &= \frac{2}{7}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(0,01)^{2x} &= 10^{x+2} \\ 10^{-2+2x} &= 10^{x+2} \\ -2 + 2x &= x + 2 \\ x &= 4\end{aligned}\quad (\text{resolução de Marcelo})$$

Em função dos resultados do teste a “priori”, decidimos redirecionar nossa investigação do conteúdo mais amplo das funções exponenciais para potenciação nos racionais.

Com esse novo objetivo de pesquisa, elaboramos outro teste diagnóstico (anexo 2), agora envolvendo operações com as potências e o aplicamos em três instituições distintas: a 67 alunos de primeiro ano do Ensino Médio da Escola Técnica Estadual Getúlio Vargas, a 77 alunos de segundo ano do Ensino Médio da Escola Estadual D. Idalina Macedo da Costa Sodré e a 31 alunos de primeiro ano do curso de Matemática das Faculdades Oswaldo Cruz. Com o teste desejávamos aferir o conhecimento dos estudantes sobre potenciação, mais especificamente, como os diferentes registros interferiam nas resoluções.

Mediante os resultados obtidos e realizada a tabulação dos acertos e erros, assim como das questões deixadas em branco, fizemos as seguintes constatações: no exercício 1, itens de a – e) verificamos que, quando o expoente era negativo (bases em ambos os registros decimal ou fracionário) havia uma variedade de soluções para a mesma questão.

Exemplificando.

No item g) pedíamos para calcular o valor de $(0,4)^{-1}$ e encontramos os seguintes

resultados: -4 ; $0,4$; $-0,4$; $\frac{1}{0,4}$; $-\frac{1}{4}$; $\frac{4}{10}$;

No item h) a solicitação era o cálculo de $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$. Obtivemos respostas como:

$$\frac{25}{1000}; -\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; -\frac{1}{2}; -\frac{2}{4}; \frac{1}{16}; 2; -7; \sqrt{\frac{1}{2}} \text{ e } -4$$

No exercício 2, foi solicitado aos alunos para preencherem o espaço em branco com o sinal de = (igual) ou $\neq$ (diferente) de modo a tornarem verdadeiras as expressões, mas também era preciso justificar a escolha. O baixo índice de acerto, sobretudo, nos de primeiro ano do curso de Matemática denota a dificuldade do uso da língua natural para descrever os conceitos matemáticos ali envolvidos.

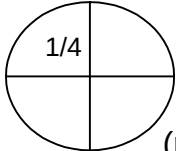
Foi na resolução do item f) para o qual era proposto colocar entre $(0,5)^2$ e $\left(\frac{1}{2}\right)^2$,

os sinais de = ou $\neq$ que encontramos fortes indícios da interferência tanto de conversão como de tratamento dos registros de representação no trabalho com as potências, pois mesmo quando o cálculo foi realizado corretamente, as duas representações eram interpretadas como números diferentes:

$$(0,5)^2 = 0,25 \neq \frac{1}{4} = 0,25 \quad (\text{resolução de Elaine})$$

$$0,5 \times 0,5 = 0,25 \neq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \quad (\text{resolução de Raquel})$$

e,

$$0,25 \neq \frac{1}{4}$$


(resolução de Rafael)

A dificuldade em cálculos de potência parece ser: lidar com os números racionais e suas representações.

Reavaliemos mais uma vez o objetivo da pesquisa e decidimos centrar nossa atenção para a questão da representação do número racional no processo do ensino.

Desse modo nos indagamos qual direção deveríamos tomar, pois o objeto (números racionais) e abordagem teórica, sob a ótica da R. Duval, já haviam sido definidos.

Citaremos a seguir algumas pesquisas sobre o ensino dos racionais que avaliamos. O estudo desenvolvido por Tavignot (1999) aponta dois objetivos a serem alcançados no processo de ensino-aprendizagem dos números racionais: um primeiro, a longo prazo, que se refere à conceituação e um segundo, este mais imediato, que diz respeito ao domínio da representação. Paralelamente, Adjage (1999) desenvolvia uma pesquisa de campo quanto à abordagem dos números racionais efetuar-se em duas fases – um longo período para tratar retoricamente de uma classe de problemas com fins de conceituação, e um tempo mais curto para assimilar as notações simbólicas a fim de comunicação e tratamentos. Discriminar as características próprias de cada sistema em que os números são expressos, notadamente, aquelas das escritas fracionárias e decimais constitui-se em tarefa bastante difícil, assim como reconhecer os objetos matemáticos e simbolicamente expressá-los na fase de conceitualização. Para suplantarmos as dificuldades concernentes à aprendizagem dos números racionais, Adjage propôs uma introdução aos racionais por meio de retas graduadas, num ambiente de informática.

Igliori e Silva, em 1998, num estudo diagnóstico efetuado com alunos de terceiro grau, apresentaram entre outros resultados as dificuldades que os estudantes tinham em admitir que entre os números decimais 3,25 e 3,26 podia existir um número. Outro resultado revelador de que os estudantes não lidam bem com números decimais está no fato de alunos considerarem ser o decimal 3,15 o sucessor de 3,14 (Igliori, 1999, p.104).

Lins relata que Brown, Hart, Kerslake e outros concluíram, depois de um estudo a respeito do ensino dos números racionais no registro decimal, que: 50% dos alunos de 15 anos têm um conhecimento razoável, porém incompleto a respeito dos decimais, enquanto que os outros 50% possuem pouco domínio no registro dos decimais. A pesquisa indica no entanto, que estes resultados não significam que os alunos não sejam capazes de trabalhar com o número no registro decimal em situações do cotidiano, tais como manipulação de moeda e ou medidas. Dizem eles que: *“Têm-se encontrado todos os níveis de compreensão em cada um dos grupos de 12, 13, 14 e 15 anos, embora em proporções diferentes de ano em ano”* (Cf. Lins, 1997, p. 48).

Podemos citar ainda a dissertação de Woerle (1999) que propõe uma sequência didática para o ensino do número racional, focalizando a questão dos registros de representação fracionária e decimal.

Resultados do SARESP - Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo, das provas aplicadas aos alunos de 4as. e 8as. séries do Ensino Fundamental, nos anos de 1997 e 1998, demonstram as dificuldades que o conteúdo de números racionais apresenta, pois os percentuais de acerto encontram-se abaixo de 45%. Há indicadores de que o tema deve ser revisto e repensado nas

unidades escolares, pois os erros persistem por todo o ensino até mesmo em nível universitário.

Após a análise de algumas pesquisas sobre o assunto como as citadas anteriormente, fomos procurar subsídios para nossos estudos também nos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN - (1998) de 5^a a 8^a série. Encontramos lá o que segue:

Embora as representações fracionárias e decimais dos números racionais sejam conteúdos desenvolvidos nos ciclos iniciais, o que se constata é que os alunos chegam ao terceiro ciclo sem compreender os diferentes significados associados a esse tipo de número e tampouco os procedimentos de cálculo, em especial, os que envolvem os racionais na forma decimal (PCN, 1998, p.100).

Localizamos também uma referência a respeito do livro didático que nos chamou atenção:

Não tendo oportunidade e condições para aprimorar sua formação e não dispondo de outros recursos para desenvolver as práticas da sala de aula, os professores apóiam-se quase exclusivamente nos livros didáticos, que, muitas vezes, são de qualidade insatisfatória (PCN, 1998, p.21 e 22) .

Nosso interesse foi, assim, direcionado para o livro didático. Algumas questões apareceram neste contexto.

Como os diversos registros dos racionais são trabalhados nos livros didáticos?

Como nos livros são introduzidos os números racionais, seja na representação fracionária ou na decimal e, especialmente, que tratamentos são

realizados? As conversões, articulações que ocorrem entre os diferentes registros, são trabalhadas?

A título introdutório incluímos a seguir algumas considerações que situam nosso estudo.

Quanto aos registros: O termo “registro” foi empregado por Descartes no livro I de sua Geometria em 1637, para distinguir a escrita algébrica das curvas e suas representações figurativas (Duval, 1998). Este enfoque é ponto crucial para a teoria dos registros no qual nosso trabalho fundamentou-se, pois segundo Duval, para que a aprendizagem na matemática se realize é necessário que o indivíduo utilize diferentes registros de representação para um mesmo objeto, mas a conceituação só será alcançada quando este consegue articular os distintos registros de representação de um determinado conceito, denominada atividade de conversão.

Quanto à abordagem dos livros didáticos: os PCNs de 1998, colocam :

O que também se observa em termos escolares é que muitas vezes os conteúdos matemáticos são tratados isoladamente e são apresentados e exauridos num único momento. Quando acontece de serem retomados (geralmente num mesmo nível de aprofundamento, apoiando-se nos mesmos recursos), é apenas com a perspectiva de utilizá-los como ferramentas para a aprendizagem de novas noções. De modo geral, parece não se levar em conta que, para o aluno consolidar e ampliar um conceito, é fundamental que ele o veja em novas extensões, representações ou conexões com outros conceitos (PCN, 1998, p.22 e 23).

Os registros exercem um papel fundamental para a aprendizagem da Matemática e esta, segundo Duval, só é acessível por meio das representações e, além disso, um

conceito matemático evolui se ancorado nas representações, pois é com o aprimoramento dos registros que se firmam os conceitos.

A incursão histórica apresentada neste trabalho teve por alvo destacar a importância dos registros no desenvolvimento das potências, razão pela qual as incluímos nesta dissertação para evidenciar a fundamentação da representação em Matemática que desde sempre esteve posta e foi pelo conhecimento da evolução dos registros que o conceito foi se estruturando.

Atualmente, utilizamos as representações para potências sem nos dar conta de que ocorreu toda uma "seleção natural"¹ dos registros até à notação atual.

Descrição prévia dos capítulos apresentados nesta dissertação

O capítulo 1 apresenta a evolução do registro das potências por meio das principais contribuições dos matemáticos, de Oresme a Descartes, enfatizando a importância do registro na evolução do conceito matemático.

No capítulo 2, apresentamos o quadro teórico desta pesquisa, dos registros de representação de Raymond Duval, e numa segunda parte, o estudo dos diferentes aspectos que o mesmo registro apresenta. Nosso objeto de estudo é o número racional e suas representações.

No capítulo 3, destacamos a metodologia da pesquisa, baseada nos procedimentos de Bardin, que se constitui de três fases:

- A escolha dos livros didáticos a serem submetidos a exame;
- A formulação das hipóteses;

¹ "seleção natural" termo empregado por Darwin na sua teoria da Seleção Natural das Espécies.

- A seleção dos objetivos e as constatações que fundamentaram as considerações finais e conclusões.

No capítulo 4, inicia-se a análise de livros didáticos realizada em duas coleções de Ensino Fundamental, de 1^a. a 8^a. séries, observando nesta análise os distintos registros de representação, quais tratamentos e conversões são realizados.

Para concluir, o capítulo 5, apresenta as considerações finais e a conclusão.

1.1. Panorama histórico

Os primeiros registros de cálculos utilizando potências são encontrados em tabelas babilônicas que remontam, aproximadamente, 1000 a. C. Tais tabelas foram empregadas para resolução de problemas específicos e continham, em geral, 10 potências sucessivas de um mesmo número.

Nas tábuas babilônicas, os problemas numéricos eram expressos de maneira inteiramente retórica, isto é, sem nenhuma notação simbólica, apenas utilizando palavras nas frases.

Os babilônios adotavam uma linguagem geométrica, a incógnita x era chamada de *intervém*, representando largura e comprimento e o produto destes a área. Mesmo assim não hesitavam subtrair um lado de uma área. No texto 13.901 do Museu Britânico, encontra-se o seguinte registro: “*Eu subtraí o lado de um quadrado da área e o resultado foi 14,30*”, algebricamente pode-se traduzir pela equação $x^2 - x = 14,30$.

O vocábulo **potência** vem do termo grego que os pitagóricos empregavam para designar um número elevado ao quadrado.

Desde a Antigüidade, encontramos problemas concretos que podem ser interpretados como resolução de equações de 1º e 2º grau.

No século III da era cristã, Diofante de Alexandria, na obra *Arithmética* apresentou a utilização de abreviações específicas para potências, bem como a aplicação de algumas regras de operações e nomes especiais às potências com expoentes negativos.

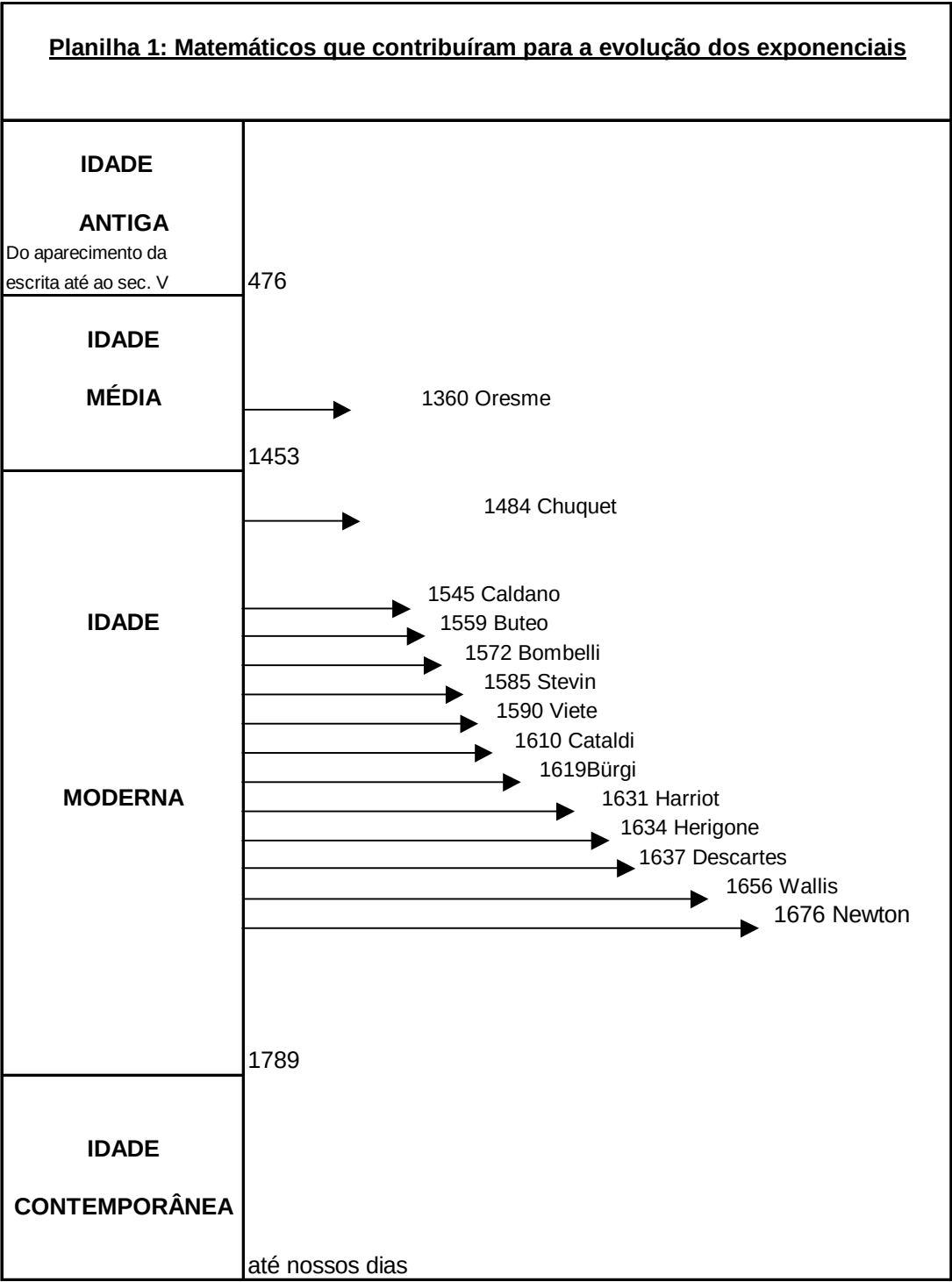
O progresso matemático árabe começou no século VII DC. Seu desenvolvimento ocorreu com base nos múltiplos problemas formulados pelo comércio, pela arquitetura, pela astronomia, pela geografia, pela ótica ... que caracterizaram uma época de profundo desenvolvimento de um trabalho teórico intenso até a resolução de problemas.

Em pleno Renascimento, a redescoberta dos textos de Euclides, pelas escolas de tradutores, possibilitou soluções para problemas com que se deparavam os construtores de catedrais e os geógrafos a serviço das expedições de navegadores. A invenção da imprensa, em 1440, foi fundamental não apenas na publicação e divulgação de obras em língua vernácula das ciências em emergentes tais como; a aritmética comercial, a álgebra, a trigonometria; como também por romper com a barreira que havia entre “tradição culta” e a “artesanal”.

No século XVII, o grande matemático, René Descartes passou a empregar os numerais indu-arábicos como expoentes para uma dada base.

"Usamos agora nossas notações simbólicas para potências e raízes sem mais pensar na lentidão com que se desenvolveram ao longo da história da matemática" (Boyer, 1974, p. 192).

A planilha 1, visa situar ao longo da história, destacando o período do Renascimento, as maiores contribuições para a notação dos exponenciais.



1.2. Principais contribuições para evolução das potências.

- Nicole Oresme, sábio parisiense, em 1360, em "*De proportionibus proportionum*", generalizou a teoria da proporção de Bradwardine, incluindo

qualquer potência de expoente racional e deu regras para combinar proporções que são equivalentes às nossas leis sobre expoentes, agora expressas como $x^m \times x^n = x^{m+n}$ e $(x^m)^n = x^{m \cdot n}$ "(Boyer, 1974, p. 192). Na última parte da obra "*Algarismus proportionum*" aparecem notações especiais para potências fracionárias, tais como $\frac{1.p.1}{4.2.2}$ para designar $\sqrt[4]{2^{1/2}}$. Oresme dotado de fértil imaginação, chegou até as possíveis *proporções irracionais*, hoje representadas por $x^{\sqrt{2}}$, "mas a falta de uma terminologia e uma notação adequadas impediu-o de desenvolver efetivamente seu conceito de potências irracionais "(idem, ibid).

- Nicolas Chuquet, médico de Lyon, escreveu por volta de 1484 "*Le Triparty en la science des nombres*, cuja última parte trata da "*Règle des premiers*", isto é, a regra da incógnita ou o que designaríamos de álgebra.

Chuquet denominava a segunda potência de "*champs*", mas em latim era "*census*", a terceira "*cubiez*" e a quarta "*champs de champ*", aos múltiplos dessas potências, ele inventou uma notação exponencial associada ao coeficiente do termo, assim aparecem na obra as potências $.5.^1$, $.6.^2$ e $.10.^3$ que na linguagem moderna corresponderiam a $5x$, $6x^2$ e $10x^3$. Também aparecem as potências inteiras positivas, os expoentes zero e negativos, como exemplo encontramos $9x^0$ como $.9.^0$ e $9x^{-2}$ como $.9.^{2.m.}$, isto é, $.9. seconds moins$. As leis relacionadas aos expoentes pareciam indicar que ele conhecia a obra de Oresme a respeito das proporções, pois Chuquet usou por exemplo, $.72.^1$ dividido por $.8.^3$ resultando em $.9.^{2.m.}$, o que em notação moderna representa $72x : 8x^3 = 9x^{-2} \cdot x^3$

- Gerônimo Cardano indicava as potências na forma 7.pos., 7.quad., 7.cub. e 7. quadr. quad. para designar $7x$, $7x^2$, $7x^3$ e $7x^4$. Ele era um verdadeiro discípulo de al-Khowarizmi e, como os árabes, pensava em suas equações com coeficientes numéricos específicos como representantes de categorias gerais, por exemplo: "Sejam o cubo e seis vezes o lado igual a 20" (ou $x^3 + 6x = 20$). A solução dessa equação apresentou uma dificuldade de se trabalhar com raízes quadradas de números negativos. Ele se referia a essas raízes como "sofísticas" e concluía que o resultado nesse campo era "tão sutil quanto inútil". Mais tarde, observou-se que tais manipulações eram de fato sutis, porém nada inúteis. "Ars Magna", sua obra de 1545, marca o início do período moderno da matemática, que apresenta a resolução algébrica das cúbicas, cuja solução ele próprio dá crédito à sugestão recebida por Niccolo Tartaglia (1500 - 1557) e à solução da quártica descoberta por Ludovico Ferrari (1522 - 1565).
- Deve-se a Rafael Bombelli (cerca de 1526 - 1573) algebrista italiano, a explicação para as raízes com números imaginários, que até então não tinham sua existência formalizada.

Em sua obra "*L' Álgebra*" de 1572, ele escreveu a solução de um problema como se vê a seguir:

$$4. p. R. q. \left[24. m \sqrt[1]{20}, \right] \text{ Egual a } \sqrt[1]{2}$$

Comparando a equação de Bombelli com a forma usada atualmente, provavelmente "Egual a" significa "igual a", assim como **.p.**, significa "mais" e **.m.**, "menos". O símbolo **.R.q.**, representa "raiz quadrada", os dois símbolos angulares significam o mesmo que os parênteses no simbolismo moderno. Assim, **.R.q. []**, significa a raiz quadrada do polinômio escrito dentro dos símbolos. Para indicar

potências inteiras positivas de uma variável x , Bombelli escrevia o expoente em um pequeno arco circular sobre o numeral, de modo que $\overset{1}{2}$, $\overset{2}{2}$, $\overset{3}{2}$ significam o mesmo que $2x$, $2x^2$ e $2x^3$ em notação moderna.

Assim, $R.q.\left[24. m. \overset{1}{20}\right]$ significa $\sqrt{24 - 20x}$.

A notação de Bombelli teve vida curta, pois a mesma economia na notação de potências em que ele não precisava escrever a letra x , para designar a variável, fez com que se tornasse um obstáculo, pois não permitia a representação de $x^2 - y^2$, que resultava a seguinte notação $\overset{2}{1} \cdot m \cdot \overset{2}{1}$.

- Simon Stevin (1548 - 1620) era matemático de mente prática com formação de engenheiro. Em 1585 lançou em flamengo "De thiende" (O décimo) traduzido em francês no mesmo ano com o título "La Disme". O sucesso do livro foi enorme, razão pela qual se deve a ele não a criação de frações decimais, mas sua divulgação. Também conseguiu explicar de maneira elementar e completa como operar com elas, para o valor aproximado do π : $3 \overset{0}{(0)} \quad 1 \overset{1}{(1)} \quad 4 \overset{2}{(2)} \quad 1 \overset{3}{(3)} \quad 6 \overset{4}{(4)}$ ou $\overset{0}{3} \overset{1}{1} \overset{2}{4} \overset{3}{1} \overset{4}{6}$ (com os expoentes 0,1,2, 3 e 4 inscritos em círculos).

Stevin adaptou para as potências, sua notação posicional para frações decimais. Ele escrevia (2) em vez de Q (para quadrado), ou (3) em vez de C (para cubo), (4) para QQ (ou quadrado-quadrado), e assim por diante. Essa notação pode ter sido sugerida pela álgebra de Bombelli e também lembra a notação utilizada por Bürgi, 1619, que indicava as potências de uma incógnita colocando numerais romanos acima dos coeficientes. Em sua obra "*Arithmetische*", editada em Praga no

ano de 1619, escreveu $\overset{\text{VI}}{8} + \overset{\text{V}}{12} - \overset{\text{IV}}{9} + \overset{\text{III}}{10}$ para indicar o polinômio $8x^6 + 12x^5 - 9x^4 + 10x^3$.

- Por volta de 1610, Pietro Cataldi escreveu $\emptyset, 2, 3, 4$ para representar x^0, x^2, x^3 e x^4 ; e em 1593 o escritor holandês Adrianus Romanus usou $1 \begin{pmatrix} - \\ 45 \\ - \end{pmatrix}$ para x^{45} .
- Em 1631 Harriot tem seu livro póstumo lançado com o título de "*Ars Analytical praxis*", em que utiliza a repetição da variável, como por exemplo, $7aa, 7aaa$ para designar $7x^2$ e $7x^3$.
- A notação pictórica de J. Buteo $7p, 7 \text{ , } 7$ para designar $7x, 7x^2$ e $7x^3$, geralmente, é omitida por não ter efetivamente contribuído para o desenvolvimento de nosso sistema atual.

A transição da Renascença para o mundo moderno no âmbito das ciências, foi feita por um grande número de figuras intermediárias como Galileu Galilei (1564 - 1642), Bonaventura Cavalieri (1598 - 1647) que eram da Itália; outros como Henry Briggs (1561 - 1639), Thomas Harriot (1560 - 1621) e William Oughtred (1574 - 1660) que eram ingleses, Simon Stevin (1548 - 1620) e Albert Girard (1590 - 1633) que eram flamengos; John Napier (1550 - 1617) da Escócia, Jobst Bürgi (1552 - 1632) da Suíça e Johann Kepler (1571 - 1630) da Alemanha. A maior parte da Europa Ocidental participava agora do desenvolvimento da matemática, mas a figura central e mais significativa nesta transição foi o francês François Viète.

- François Viète (1540 - 1603) não era matemático formado, em sua juventude estudou e praticou direito, tornando-se membro do parlamento da Bretanha. A

matemática era feita nas horas de lazer e como teve um período de seis anos ociosos antes de servir a Henrique IV, dedicou-se ao estudo da matemática.

Na aritmética, é lembrado por favorecer o uso das frações decimais em lugar das sexagesimais. Pela primeira vez na Álgebra, é feita distinção clara entre o conceito de parâmetro e a idéia de uma quantidade desconhecida.

Viète usou vogais para representar incógnitas e uma consoante para indicar uma constante, com exceção de N, Q, C já reservadas para potências; escrevia 7N, 7Q, 7C, para referir-se a $7x$, $7x^2$, $7x^3$ respectivamente, que eram empregadas para equações polinomiais com uma incógnita com coeficientes numéricos. Uma segunda notação encontrada em edições de seu trabalho apresenta os seguintes registros, "B in A qq 7" para $7BA^4$ e "BA q cu 7" para $7BA^5$ porém, anteriormente, a essas edições ele escrevia "B in A quadratum 7" para $B \text{ in } A \text{ q} 7$ para $[7BA^2]$.

- A simbologia utilizada por René Descartes (1596 - 1650), é, entre os textos antigos, a que mais se aproxima de nossa notação, pois para $7x$, $7x^2$, $7x^3$ ele escrevia $7x$, $7xx$, $7x^3$, com exceção de uma representação mais arcaica do sinal de igualdade. Empregava letras do início do alfabeto para parâmetros e as do fim, para as incógnitas. O mais importante é a mudança de referência, enquanto pensamos em parâmetros e incógnitas como números, ele os relacionava com segmentos. Do mesmo modo ao utilizar x^2 e x^3 não pensava nestes somente como área e volume, também os considerava como segmentos.
- John Wallis (1616 - 1703) foi o mais brilhante predecessor inglês de Isaac Newton. Wallis foi membro da Royal Society, uma das mais antigas organizações científicas ainda existentes (supõe-se que a Accademia dei Lincei, fundada em 1603

em Roma seja a mais antiga). Publicou dois livros importantes: um sobre a análise infinita e o outro de geometria analítica, dois ramos em voga na época.

Seu mérito está em substituir conceitos geométricos por numéricos sempre que possível. Sua obra ilustra um fato freqüentemente visto na história da matemática: um ocasional desrespeito ao formalismo pode resultar em avanços. Deve-se a ele o uso da representação do infinito por ∞ . Como até então os números reais não tinham sido definidos, isso constituiu um obstáculo para sua teoria, mas a visão dele influenciou desenvolvimento da Matemática do século seguinte.

- Isaac Newton (1642 -1727) muito jovem, a partir de 1664, começou a oferecer suas contribuições à Matemática. Em razão da peste, a escola onde estudava fechou e ele regressou para casa a fim de viver e pensar. Foi um período extremamente produtivo, no qual ocorreram quatro de suas principais descobertas: 1) o teorema binomial, 2) o cálculo, 3) a lei de gravitação e 4) a natureza das cores.

O Teorema Binomial, descoberto em 1664 ou 1665, foi descrito em duas cartas em 1676 por Newton a Henry Oldenburg, secretário da Royal Society, publicado em *Álgebra* de Wallis, 1685, (dando crédito a Newton). A forma de expressão dada por Newton (e Wallis) parece desajeitada, mas indica que a descoberta não foi uma simples substituição de potência inteira por fracionária; foi resultado de muitas tentativas e erros por parte de Newton em relação às divisões e radicais envolvendo quantidades algébricas.

Newton descobriu que as extrações de raízes são muito abreviadas pelo

Teorema: $\sqrt[n]{P + PQ} = \sqrt[n]{P} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ + \dots$ onde $P +$

PQ representa uma quantidade cuja raiz ou potência, ou cuja raiz de uma potência

se quer achar, P sendo o primeiro termo dessa quantidade, Q sendo os termos restantes divididos por essa primeira e $\frac{m}{n}$ o índice numérico das potências de P + PQ... . Finalmente, em lugar dos termos que ocorrem durante o trabalho no Quociente, eu usarei A, B, C, D, Assim, A representa o primeiro termo $P^{\frac{m}{n}}$, B o segundo termo $\frac{m}{n}AQ$ e assim por diante (Boyer, 1974,p.288).

Como vimos na evolução da notação das potências, um conceito é formado por meio de um processo acumulativo, no qual o conhecimento de uma época é o alicerce aos avanços em uma ciência. Nas palavras de Newton a Hooke: "*Se eu enxerguei mais longe que Descartes é porque me sustentei sobre os ombros de gigantes*".

As tabelas nas páginas seguintes resumem as principais etapas da história do desenvolvimento dos expoentes, até mesmo os negativos e fracionários (Baumgart, 1994, pp. 101-103).

Desenvolvimento Histórico dos Expoentes					Quadro 1
NOTAÇÃO MODERNA	$7X$	$7X^2$	$7X^3$	COMENTÁRIOS	
1360 Oresme				Manuscritos diferentes mostram diferentes notações. Para $2^{1/2}$ ele escrevia $\frac{1^p}{2} 2$; $\frac{1.p}{2.2}$. Para $9^{1/3}$, escrevia $\frac{1^3}{3} 9$. Para $\left(2\frac{1}{2}\right)^{1/4}$, escrevia $\frac{1.p.1}{4.2.2}$. Para $4^{3/2}$, escrevia $1p\frac{1}{2} 4$; também $\frac{p.1}{1.2} 4$.	
1484 Chuquet	7^1	7^2	7^3	Para 7, Chuquet escrevia 7^0 . Para $12X^{-1}$, escrevia $12.^{1.m}$.	

Quadro 2

1545 Cardano	7.pos.	7.quad.	7.cub.	Para $7X^4$, Cardano escrevia 7 quadr. quad.
1559 Buteo	7p	7◇	7 	
1572 Bombelli	1) 7	2) 7	3) 7	
1585 Stevin	7①	7②	7③	Stevin sugeriu $x^{3/2}$ a notação $\frac{3}{2}$ quando disse " $\frac{3}{2}$ num círculo havia de ser o símbolo para a raiz quadrada de 3" [isto é, $x^{\frac{3}{2}}$]; mas ele nunca usou essa notação.

Quadro 3					
1590 Viète	7N B in A 7 para 7BA	7Q B in Aq 7 para 7BA ²	7C B in A cu 7 para 7BA ³	Viète usou vogais para representar incognitas e consoantes para constantes (exeto N, Q, C, que já tinham sido reservadas para potências). Usou o primeiro estilo para equações polinomiais em uma incognita com coeficientes numéricos. Ambos os estilos são de edições posteriores de seu trabalho; anteriormente ele escrevia "B in A quadratum 7" para "B in A q7" [7BA] ² . No segundo estilo, Viète escrevia "B in A qq7" para 7BA ⁴ e "B A q cu 7" para 7BA ⁵ .	
1610 Cataldi	7 χ	7 ϕ	7 ϕ	Para 7, Cataldi escrevia 7 ϕ	
1619 Burgi	i 7	ii 7	iii 7	Para 7 ⁴ , Burgi escrevia 7 ^{iv} .	

1631 Harriot	7a	7aa	7aaa	Quadro 4
1634 Herigone	7a	7a2	7a3	
1637 Descartes	7x	7xx	7x ³	Para 7x ⁴ , Descartes escrevia 7 ⁴ x ⁴ .
1656 Wallis	7a	7aa	7a ³	Para 7x ⁴ , Wallis escrevia 7a ⁴ . Em 1676 Wallis falava de $\frac{1}{\sqrt{1}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$, etc. como tendo índice $-\frac{1}{2}$. Todavia ele nunca usou esta notação.
1676 Newton	7x	7xx	7x ³	Para 7x ⁴ , Newton escrevia 7x ⁴ . Ele também usava as seguintes notações: $a^{\frac{1}{2}}, a^{\frac{3}{2}}, a^{\frac{5}{2}}$, etc.; a^{-1}, a^{-2}, a^{-3} , etc.; $\sqrt[n]{P+PQ} = \sqrt[n]{P} + \frac{m}{n} \frac{AQ}{\sqrt[n]{P}} + \dots$ onde $A = p^{\frac{m}{n}}; x^{\frac{m}{n}}; x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{x^{\frac{2}{3}}}$

Quadro 3					
1590 Viète	7N B in A 7 para 7BA	7Q B in Aq 7 para 7BA ²	7C B in A cu 7 para 7BA ³	Viète usou vogais para representar incognitas e consoantes para constantes (exeto N, Q, C, que já tinham sido reservadas para potências). Usou o primeiro estilo para equações polinomiais em uma incognita com coeficientes numéricos. Ambos os estilos são de edições posteriores de seu trabalho; anteriormente ele escrevia "B in A quadratum 7" para "B in A q7" [7BA] ² . No segundo estilo, Viète escrevia "B in A qq7" para 7BA ⁴ e "B A q cu 7" para 7BA ⁵ .	
1610 Cataldi	7 χ	7 ϕ	7 ϕ	Para 7, Cataldi escrevia 7 ϕ	
1619 Burgi	i 7	ii 7	iii 7	Para 7 ⁴ , Burgi escrevia 7 ^{iv} .	

1631 Harriot	7a	7aa	7aaa	Quadro 4
1634 Herigone	7a	7a2	7a3	
1637 Descartes	7x	7xx	7x ³	
1656 Wallis	7a	7aa	7a ³	
1676 Newton	7x	7xx	7x ³	

1631 Harriot	7a	7aa	7aaa	Quadro 4
1634 Herigone	7a	7a2	7a3	
1637 Descartes	7x	7xx	7x ³	
1656 Wallis	7a	7aa	7a ³	
1676 Newton	7x	7xx	7x ³	

Para 7x⁴, Descartes escrevia 7⁴x .

Para 7x⁴, Wallis escrevia 7a⁴ . Em 1676 Wallis falava de $\frac{1}{\sqrt{1}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$, etc. como tendo índice $-\frac{1}{2}$. Todavia ele nunca usou esta notação.

Para 7x⁴, Newton escrevia 7x⁴ . Ele também usava as seguintes notações:
 $a^{\frac{1}{2}}, a^{\frac{3}{2}}, a^{\frac{5}{2}}$, etc.; a^{-1}, a^{-2}, a^{-3} , etc.;
 $\sqrt[n]{P+PQ} = \sqrt[n]{P} + \frac{m}{n} \sqrt[n]{P}AQ + \dots$ onde
 $A = p^{\frac{m}{n}}; x^{\sqrt[n]{2}} + x^{\sqrt[n]{7}} \sqrt[n]{3} \sqrt[n]{\frac{2}{3}}$

2.1. Teoria dos Registros de Representação

Nosso trabalho norteia-se pela teoria dos registros de representação de Raymond Duval que trata de aspectos do funcionamento cognitivo relacionados à aquisição dos conhecimentos matemáticos.

Nesta teoria, duas aquisições funcionais devem ser levadas em consideração na formação do indivíduo: a *aquisição funcional do sistema orgânico*, que são os nossos sentidos dos quais dispomos desde o nascimento, tais como: a audição (a voz), a visão (percepção), o tato (a escrita), a memória e as *aquisições funcionais relativas aos sistemas semióticos*, que são utilizados dentro de uma mesma cultura pelo indivíduo, não apenas para se comunicar como também para tratar a informação. No caso específico da aquisição do conhecimento matemático é, sobretudo, a aquisição funcional que é acionada, o que explica talvez as dificuldades que um grande número de pessoas têm em apreender Matemática. Como, por exemplo, as dificuldades concernentes à apropriação do sistema de numeração posicional ou ainda, as dificuldades relativas à utilização das operações aritméticas mais elementares, nos problemas verbais.

Na aquisição dos conhecimentos matemáticos, podemos observar dois componentes: o *dos próprios conteúdos da Matemática*, quando o que conta são os processos, os métodos para descobrir e estabelecer resultados, a validação; e o *cognitivo* que visa a observar os processos pelos quais o indivíduo tem acesso a esses conhecimentos.

Duval aponta para o paradoxo cognitivo em relação ao pensamento humano. Se de um lado temos necessidade de apreensão dos conceitos matemáticos, por

outro lado, estes não são acessíveis senão por meio das representações semióticas. O conflito tende a persistir quando se faz da atividade matemática uma atividade conceitual e considera-se o trabalho com as representações semióticas uma tarefa secundária ou externa, e até mesmo extrínseca (Duval, IREM, 1992).

Outro ponto de vista consiste em se atribuir maior importância às representações mentais que as semióticas. As representações mentais são as imagens ou concepções que o indivíduo tem a respeito de um objeto, uma situação ou problemática. Embora comumente se pense que uma representação semiótica seja a forma pela qual o sujeito pode expressar seu pensamento, com fins de comunicação, esta não é sua única função, nem mesmo a mais importante, mas ela é essencial para o próprio desenvolvimento da atividade cognitiva do pensamento. As representações semióticas são as produções constituídas pelo emprego de símbolos pertinentes a um sistema de representação imbuído de significado e funcionamento. Exemplificando, uma figura geométrica, um enunciado na língua natural, uma fórmula algébrica, um gráfico, são representações semióticas que provêm de sistemas semióticos diferentes.

Na análise do processo de compreensão e de aprendizagem em Matemática, não podemos ignorar a importância do caráter semiótico das representações, isto é, a importância da forma frente ao conteúdo representado, assim como, a diversidade dos registros de representação. Porque a particularidade da Matemática em relação a outras disciplinas é que os objetos estudados não são acessíveis independentemente dos recursos de uma linguagem, de figuras, de esquemas e de simbologia.

Segundo Duval, o desenvolvimento das representações mentais depende de uma interiorização das representações semióticas, mas também precisa de certas funções cognitivas essenciais que podem ser preenchidas unicamente pelas representações semióticas e não pelas representações mentais.

Para que um sistema semiótico possa ser um registro de representação, deve preencher as três atividades cognitivas fundamentais, que são:

- **A formação de uma representação identificável** como representação de um registro: enunciado de uma frase (compreensível na língua dada), elaboração de um texto, desenho de uma figura, elaboração de um esquema, e escrita de uma fórmula....
- **O tratamento** de uma representação é a transformação desta no interior do mesmo registro em que foi formada. Existem regras de tratamento próprias a cada registro; sua natureza e o número de tratamentos variam consideravelmente de um registro para outro. Por exemplo: o *cálculo* é uma forma de tratamento próprio às escritas simbólicas (cálculo numérico, cálculo algébrico, cálculo proporcional...); a *paráfrase* e a *inferência* são formas de tratamento em língua natural; a *reconfiguração* é um tipo de tratamento particular para as figuras geométricas: sendo esta uma das numerosas operações que dá ao registro das figuras um papel heurístico; a *anamorfose* é uma forma de tratamento que se aplica a toda representação figural...
- **A conversão** de um registro de representação é a transformação deste em outro registro, conservando a totalidade ou uma parte do objeto matemático. A conversão requer que o sujeito tenha percebido a diferença entre, o que Frege chamava o sentido e a referência dos símbolos ou dos signos. Para a

escrita do número, é preciso distinguir a significação *operatória ligada ao significante* (ela não pode ser a mesma para 0,25, para $1/4$ e para $25 \cdot 10^{-2}$, e *não são os mesmos tratamentos para efetuar as três adições* $0,25 + 0,25 = 0,5$; $1/4 + 1/4 = 1/2$ e $25 \cdot 10^{-2} + 25 \cdot 10^{-2} = 50 \cdot 10^{-2}$) e o número representado equivale não ao significante 0,25, nem ao significante $1/4$, nem ao significante $25 \cdot 10^{-2}$, cada uma dessas três escritas tem uma significação operatória diferente, mas representa o mesmo número (Duval, IREM, 1992).

Vejamos alguns exemplos em que a atividade de conversão pode ser observada “a *ilustração* é a conversação lingüística em uma representação figural; a *tradução* é a conversão de uma representação lingüística de uma língua dada em uma representação lingüística de uma outra língua ou de um outro tipo de linguagem; a *descrição* é a conversão de uma representação não-verbal (esquema, figura, gráfico) em uma representação lingüística” (Duval, IREM 1992). Duval chamou a atenção para a distinção que deve ser feita com relação a outras duas atividades muito próximas à conversão que são: o *código* e a *interpretação*. O *código* consiste em colocar em correspondência suas unidades com as unidades de uma mensagem. Há uma grande variedade de códigos: o código Morse, o código das estradas, os códigos gráficos, as letras do alfabeto ou os sinais gráficos da palavra (ideográficos), a escrita dos algarismos. Todos eles têm algo em comum que é não poderem designar diretamente o objeto ou o conteúdo. Portanto, o código precisa ser decodificado para ser compreendido. A *interpretação* não implica sempre em uma conversão de representação, mas requer uma mudança de quadro teórico ou do campo conceitual.

Para que uma aprendizagem se efetue é necessário que se tenham duas ou mais representações do mesmo objeto matemático, de preferência em sistemas semióticos diferentes (*semiósis*). Mas a conceituação (*noésis*) só será atingida quando de fato o indivíduo consegue mobilizar e identificar as diversas representações semióticas como sendo um mesmo objeto matemático. Duval chama de “*semiósis*” a apreensão ou a produção de uma representação semiótica e, “*noésis*” a apreensão conceitual de um objeto.

E, ainda, na atividade matemática há necessidade do emprego de registros de representação semióticos, que envolvem dois aspectos: *sua forma* - representante - e *seu conteúdo* - o representado. A forma varia de acordo com o sistema semiótico utilizado. O conteúdo representado só será acessível se houver coordenação dos registros de representação.

Observações realizadas em diferentes fases da aprendizagem da Matemática têm mostrado que essa atividade de conversão por meio da mudança de registro é de fato muito difícil. Para uma grande maioria de alunos, o conteúdo fica restrito a um único registro de representação, o que acaba limitando os tratamentos possíveis. Essa falta de reconhecimento do *representado* (o número racional) e as diferentes formas de representação, *representante*, levam os alunos a um trabalho desconexo de significação, a ponto de deixarem de estabelecer ligação entre os registros na forma fracionária, $\frac{1}{4}$ e a decimal 0,25, embora os tratamentos no interior de cada registro sejam realizados corretamente.

A esse respeito, Schoenfeld chamou a atenção para “compartimentalização inadequada” que estava acontecendo no ensino da Matemática. Eis o seguinte comentário:

Estudantes podem, virtualmente não fazer as conexões que esperaríamos deles entre domínios de referências e os sistemas de símbolos, considerando-os como sendo quase idênticos... a interação ocorre mais raramente que gostaríamos.... Os estudantes não vêem conexão entre a Matemática dedutiva da prova de teoremas e a matemática indutiva de fazer construções... eles não vêem as conexões ou abandonam as provas admitindo-as irrelevantes (Schoenfeld, 1986, pp.239-244).

A atividade de conversão não é puramente conceitual, envolve o conceito de congruência e não-congruência. Duval coloca que uma conversão se processa de maneira congruente quando a passagem de um registro de representação (registro de partida) leva a outro registro de representação (registro de chegada) de uma forma natural.

Kalliopi Pavlopoulou (1993) estudou dois dos aspectos ligados à congruência ou não, na atividade de conversão. Em sua análise de quatro enquetes a respeito da aprendizagem da Álgebra Linear, ela observou dois fatores que estariam intimamente ligados a essa questão:

1^o.) *A natureza dos registros de representação*: saber fazer a passagem do registro de tabela (T) ao registro gráfico (G) não permite fazer a passagem de um registro de tabela (T) ao registro de escrita simbólica (S). O que esquematicamente podemos ter: $T \rightarrow G$

$$T \rightarrow S$$

2^o.) *O sentido da conversão*: saber fazer a passagem do registro de escrita simbólica (S) ao registro de tabelas (T) não garante realizar o caminho inverso. Isto porque, existem graus de congruência diferentes dependendo do sentido da conversão. No

entanto, é imprescindível às conversões nos dois sentidos pois, a aprendizagem requer uma coordenação dos distintos registros de representação que um domínio de conhecimento mobiliza.

Para Duval, há uma distinção que é necessária ser realizada com relação à análise das representações sob a perspectiva de registro, que se distingue daquela análise do fenômeno da congruência e não-congruência, pois seu enfoque visa a fenômenos e processos cognitivos diferentes. Este ponto de vista objetiva determinar as unidades cognitivamente pertinentes ao conteúdo de uma representação. Essa atividade funde-se com a conversão, mas possui aspectos diferenciados.

Quando uma representação de partida da variação estrutural produz uma variação na representação de chegada, há variações cognitivas.

Variações estruturais são variações de uma representação no interior de um mesmo registro de partida, e as *variações cognitivas* são as variações concomitantes num outro registro de chegada.

Como ilustração, segue o exemplo que demonstra como variações estruturais do enunciado dos problemas acarretam variações cognitivas.

VARIAÇÕES ESTRUTURAIS

♦ Uma escola aprovou $\frac{3}{5}$ de seus estudantes

num exame. Se 80 fizeram o exame, quantos foram aprovados?

VARIAÇÕES COGNITIVAS



$$\frac{3}{5} \times 80 = 48$$

- ♦ Uma escola aprovou $\frac{3}{5}$ de seus estudantes



num exame. Se foram aprovados 48, quantos

$$\frac{3}{5} = 48 \Rightarrow \frac{1}{5} = 48 \div 3 = 16$$

fizeram o exame?

$$\frac{5}{5} = 16 \times 5 = 80$$

- ♦ Uma escola aprovou 48 estudantes de 80 que



fizeram o exame. Que fração dos estudantes

$$\frac{48}{80} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

foi aprovada?

Fazer uma análise cognitiva das resoluções dos alunos, nos permite compreender as dificuldades e as razões que levam o aluno à falta de domínio nesse campo.

Observação: Os enunciados dos problemas acima foram retirados de Lins, 1997, p. 78 e as resoluções e ilustrações são de nossa competência.

2.2. Quanto ao saber

Ao examinarmos como é realizada a passagem dos números naturais para os números racionais, seja na forma fracionária ou decimal, levamos em consideração quais registros de representação são empregados no processo, e observamos os diferentes significados de cada um dos registros.

Nosso estudo tem por base que:

O Registro Simbólico admite como sub-registros o Registro Numérico e o Registro Algébrico.

Dentro do Registro Numérico, temos o registro Fracionário, Decimal Exato, Decimal não exato (dízima periódica), as Potências de 10 e Notação Científica.

A representação fracionária ao longo da história surge como uma primeira forma para trabalhar com pesos e medidas para exprimir resultados.

A utilização do registro fracionário para o número racional acarreta algumas interpretações e amplia as fontes de dificuldades na aprendizagem.

Ao serem tratadas as frações, notamos que uma mesma representação $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$, suscita diferentes significados, tais como *parte/todo*, *quociente*, *unidade*, *razão e operador*, onde o símbolo $\frac{a}{b}$ atua como elemento comum, a esses distintos aspectos, que não devem ser tratados isoladamente, mas sim, analisados em cada contexto.

A relação *parte/todo* apresenta-se quando um todo (unidade) é dividido em partes iguais. Nos livros didáticos, são os exemplos mais freqüentes, pois estes apresentam uma figura dividida em partes iguais sendo necessário identificar a fração correspondente à parte colorida da figura. A atividade trabalha o conceito de "todo", é tomado como unidade, seja essa uma grandeza contínua ou discreta. Entendemos por grandeza ou quantidade continua quando esta é divisível em partes sempre divisíveis e que portanto, não pode resultar elementos indivisíveis, por exemplo, áreas, comprimentos, etc., e por grandeza ou quantidade discreta, quando esta é constituída por um número finito de elementos.

A representação fracionária pode ser vista também como o *quociente* de um inteiro por outro. O exemplo clássico entre os livros didáticos é o de repartir 1 (ou 2) chocolate entre três crianças de modo a apresentar o resultado da divisão na forma fracionária $\frac{1}{3}$ (ou $\frac{2}{3}$), ou generalizando $a : b = \frac{a}{b}$, $b \neq 0$.

Outro aspecto a ser observado diz respeito à *unidade*. É importante entender que a unidade (1) corresponde ao todo e que na representação fracionária é equivalente a tomar todas as partes, nas quais o inteiro (todo) foi dividido, o que pode ser representado, por exemplo, por $\frac{4}{4} = 1$.

A compreensão da equivalência acima pode favorecer o domínio das operações com frações, assim como a comparação entre uma fração e a unidade, e também compreender o tratamento que envolve a decomposição nas frações decimais, como, por exemplo: $\frac{17}{10} = \frac{10}{10} + \frac{7}{10}$. E no cálculo estimativo, onde a operação é realizada mentalmente, por exemplo, no cálculo da soma das frações

$\frac{4}{5} + \frac{9}{10}$, podemos estimar o valor numérico aproximado a 2, pois o valor absoluto exige que se realize cada uma das divisões para posteriormente efetuarmos a soma. O custo cognitivo exigido é muito maior, tarefa essa que para muitos só será possível com o uso de lápis e papel.

A razão é, talvez, uma das noções mais abrangentes da Matemática, pois suas aplicações não se restringem somente a ela. Por exemplo o *índice comparativo* entre duas quantidades, ou para expressar situações como duas entre três pessoas lêem o jornal A. Ainda existem as que envolvem a *probabilidade* de se retirar uma bola azul de uma urna contendo três bolas azuis e sete vermelhas, o que é representado por $\frac{3}{10}$. Também na resolução de problemas que envolvem *porcentagem*, por exemplo, como determinar o valor do desconto de 30% ou $\frac{30}{100}$ ou 0,30 para um artigo que custa R\$ 54,00, ou ainda, em *representações* de mapas e plantas, possibilitando a correspondência por meio de uma escala, onde 1cm está para 100 m que pode ser representado por 1 : 100.

Um último aspecto do registro fracionário tratado como *operador* sobre quantidades ou grandezas: a fração pode ser ligada à divisão, em situações como obter $\frac{1}{3}$ de 150, o que induz a dividir 150 por 3 e não 1 por 3. Ou ainda, operando sobre grandezas (medida, tempo), como encontrar $\frac{1}{4}$ de hora ou $\frac{2}{5}$ do metro.

O Registro Decimal é mais recente, sua representação na forma atual existe há cerca de 500 anos. E constituiu-se ao longo da história um grande obstáculo epistemológico para a conceituação dos números racionais, conforme Igliori (1999).

No entanto, historicamente o aparecimento dos decimais acarretou um avanço nos cálculos, pois estes números possuem um sistema de numeração posicional e base 10 assim como os naturais, razão pela qual as regras para o cálculo dos naturais podem ser estendidas para estes. O que por outro lado, pode tornar-se um obstáculo em sua aprendizagem com a adaptação inadequada das regras válidas nos naturais. Um exemplo é a utilização de: “multiplicar sempre aumenta e dividir sempre diminui” ou “o quadrado de um número é sempre maior que ele”.

No registro decimal, temos dois grupos a observar: os *decimais exatos*, que apresentam um número finito de casas decimais, cuja conversão é realizada por meio das frações decimais, nas quais os denominadores são potências de 10. Os *decimais não exatos*, que são as dízimas periódicas cuja parte decimal possui infinitas casas decimais, com a característica de apresentar um período.

A adoção do registro decimal para o uso nas calculadoras, computadores, relógios digitais, etc., fez com que este se tornasse mais popular na atualidade. Contudo, não podemos relegar o estudo dos números no registro fracionário, mesmo porque em algumas situações esse se torna mais viável para operações com divisão, em que seu custo operatório é facilitado. Numa comparação entre números racionais, o registro decimal pode ser mais imediato.

Ainda no Registro Numérico, existe o registro das potências. Os primeiros registros empregando a notação de potências, apareceram nas tabelas babilônicas 1000 a C, e houve todo um processo de modificação para se chegar à notação que Descartes criou, que constitui a representação empregada atualmente.

A notação para operação de potenciação com expoente natural é empregada na resolução de problemas que envolvem um produto reiterado de fatores iguais.

Esta também pode ser percebida no Sistema de Numeração Decimal, pela decomposição do número, como segue:

$$723.456 = 700.000 + 20.000 + 3.000 + 400 + 50 + 6$$

$$723.456 = 7 \times 100.000 + 2 \times 10.000 + 3 \times 1.000 + 4 \times 100 + 5 \times 10 + 6$$

$$723.456 = 7 \times 10^5 + 2 \times 10^4 + 3 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 5 \times 10 + 6$$

Quanto às potências com expoentes zero e um, estas podem ser observadas na seqüência numérica, cujos expoentes são colocados em ordem decrescente em uma base diferente de zero, favorecendo assim o entendimento da potência de expoente 1 ser igual à base dessa potência, e a potência de expoente 0 ser igual a 1. Ampliando-se a seqüência, podemos chegar às potências de expoentes com números inteiros negativos, como vemos a seguir:

2^4	2^3	2^2	2^1	2^0	2^{-1}	2^{-2}
16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Outro aspecto importante quanto à potenciação é a notação científica, cuja aplicação é bastante útil no emprego com números, nos quais o valor numérico seja muito alto ou pequeno, tanto para efetuarmos cálculo como também para realizarmos comparações e/ou ordenação nesse registro.

O Registro Algébrico, de acordo com a teoria de Duval, é também um Registro Simbólico, que é poderoso, e por meio de sua escrita simbólica é entendida

do mesmo modo nas diferentes partes do mundo, sua forma sincopada é objetiva, e uma descrição algébrica assemelha-se à descrição numérica.

A Álgebra tornou-se uma poderosa ferramenta para que o aluno possa desenvolver sua capacidade de abstração e generalização e para resolver problemas que no raciocínio aritmético são muito mais complexos ou trabalhosos.

A Álgebra apresenta aspectos distintos: 1) *como aritmética generalizada* : pelo uso de letras como generalizações do modelo aritmético, por exemplo: $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$ com a e $b \in \mathbb{N}$; 2) *como incógnita*:- o uso das letras como o termo desconhecido, para a resolução de equações, tais como: $3x + 1 = 5$; 3) *como funcional*: com o uso das letras como variáveis para expressar relações e funções, como $y = ax + b$; 4) *como estrutural*: com o uso das letras representando símbolos abstratos, que são possíveis de serem manipulados, isto é, de realizarem-se tratamentos. Por exemplo, no desenvolvimento do produto notável $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

O segundo registro de representação semiótico é o Registro Figural ou Geométrico. Quanto aos aspectos figurativos das representações, estes não são possíveis de serem apreendidos pela leitura, mas sim, pela interpretação e percepção. Na atividade Matemática, a representação figural apresenta dois aspectos a serem observados – a apreensão perceptiva das formas (imediata e automática) e a apreensão discursiva dos elementos matemáticos da figura, privilegiando a articulação dos enunciados ou ainda a apreensão operatória centrada nas possibilidades de modificação das figuras de partida (originais) e suas reorganizações. A reconfiguração é um tipo de tratamento particular para as figuras

geométricas, esta é uma das numerosas operações que dá ao registro das figuras um papel heurístico.

No estudo dos números racionais, seja no registro fracionário ou decimal a representação do concreto pela representação figural, sobretudo nas séries iniciais, torna-se uma poderosa ferramenta para a compreensão dos registros favorecendo o entendimento do conteúdo envolvido.

A representação figural não se restringe ao aspecto da repartição de uma grandeza contínua ou discreta, pois esta pode ser uma representação unidimensional.

A reta na representação unidimensional apresenta a correspondência entre o número racional e o ponto que ele ocupa. Nessa correspondência, existe a abstração do número racional com o desligamento do concreto e o favorecimento da ordenação e comparação dos diferentes registros que um mesmo número admite.

A compreensão de que um segmento pode ser repartido em partes iguais, e o comprimento de cada uma dessas partes constitui uma fração do todo, pode favorecer o entendimento operatório (adição, subtração) das frações.

Para se chegar ao *status* de número racional é necessário que as frações estejam desvinculadas do fracionamento do concreto.

Um terceiro sistema semiótico de representação é o Registro pela Língua Natural, que é aprendida pelo indivíduo simultaneamente com a Matemática. Esse registro é constituído de um léxico próprio de uma cultura, e não cabe ao indivíduo a criação de símbolos, mas sim, seu uso adequado de modo que lhe permita comunicar e expressar-se corretamente.

Os dados do quadro a seguir, apresentam de modo sintetizado os distintos registros do número racional que norteiam esta dissertação.

A metodologia utilizada neste estudo foi baseada em uma pré-análise comparativa dos conteúdos abordados nos volumes pesquisados. Foi a fase de organização propriamente dita, tendo por objetivo operacionalizar e sistematizar os procedimentos metodológicos.

Esta primeira fase três momentos: a) a escolha dos livros didáticos a serem submetidos a exame, b) a formulação das hipóteses e c) seleção dos objetivos e as constatações que fundamentaram as considerações finais e a conclusão.

Nossa escolha dos livros didáticos, recaiu em duas coleções que abrangiam todo o Ensino Fundamental, de 1^a. a 8^a. séries e também por apresentarem características distintas na abordagem dos conteúdos sendo que a CLD-1, apresenta uma estrutura “compartimentalizada” enquanto que na coleção CLD-2, os conteúdos são estruturados em “espiral”.

As siglas mencionadas acima referem-se as coleções dos livros dos seguintes autores:

- **CLD-1:** “A Conquista da Matemática” dos autores: José Ruy Giovanni e José Ruy Giovanni Jr. da Editora FTD.
- **CLD-2:** “Novo Caminho – Matemática” para 1^a. a 4^a. séries e “Matemática” para 5^a. a 8^a. séries, dos autores Luiz Márcio Imenes e Marcelo Lellis, da Editora Scipione.

Inicialmente, foi feita uma leitura flutuante a fim de estabelecer contato com as abordagens para analisar e conhecer os registros utilizados pelos autores selecionados. Pouco a pouco esta leitura foi se tornando mais precisa para deter-se nas conversões entre os diferentes registros, assim como os tratamentos que ocorriam no interior de um mesmo registro.

Examinando o Guia de Livro Didático das séries do Ensino Fundamental, procuramos observar sua influência na escolha dos livros nas escolas, sobretudo, aquelas que possuem um programa de distribuição gratuita do livro, denominado PNLD - Plano Nacional do Livro Didático.

Nesse sistema, a escola obriga-se a utilizar o mesmo livro por três anos consecutivos, estes são cedidos aos alunos por empréstimo durante o ano letivo; no final do ano, são recolhidos para serem cedidos no ano seguinte a novas turmas.

Os documentos selecionados foram pertinentes aos nossos objetivos e adequados a nossa análise.

Inicialmente foi feita a formulação das questões como:

1. Quais registros são mobilizados na apresentação dos conteúdos?
2. Como se procedem os tratamentos dentro de um mesmo registro?
3. Como ocorrem as articulações entre os distintos registros?
4. As conversões ocorrem num único sentido?

Partindo-se do pressuposto de que o quadro teórico é consistente, verificamos se as questões eram operacionalizadas dentro do material utilizado na análise dos livros didáticos.

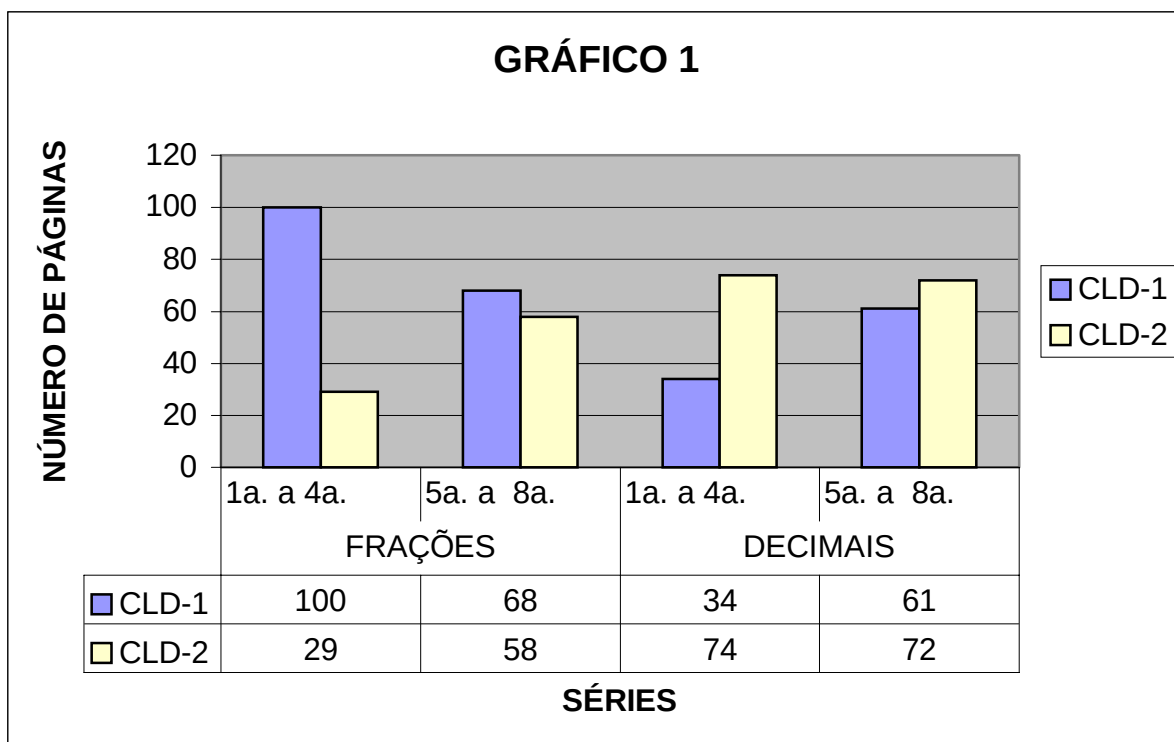
Desse modo os passos do desenvolvimento da organização da análise do livro didático foram extraídos conforme orientações de Bardin (1997).

Baseando-se ainda na autora mencionada acima, foi feita uma exploração do material com o levantamento da enumeração de páginas dos manuais didáticos destinados à análise dos conteúdos.

Em seguida, os resultados foram tabulados e organizados de modo a mostrar transparência do levantamento realizado. Os dados resultantes da Tabela 1 aparecem demonstrados no Gráfico 1:

TABELA 1

SÉRIE	FRAÇÕES	FRAÇÕES	DECIMAIS	DECIMAIS
	CLD-1	CLD-2	CLD-1	CLD-2
1 ^a . a 4 ^a .	100	29	34	74
5 ^a . a 8 ^a .	68	58	61	72
TOTAL	168	87	95	146



O material estudado na análise foi codificado a fim de que pudéssemos atingir uma representação de seu conteúdo susceptível para nos esclarecer as características do texto. A unidade de registro foi de natureza e de dimensões variáveis, como exemplo, os quatro tipos de registros envolvidos:

- registro simbólico (correspondendo ao numérico e ao algébrico),
- registro figural (descrevendo um conjunto discreto ou contínuo) e o
- registro na língua natural.

Em cada registro observado procuramos sua significação.

Em seguida, foi feita uma análise temática que constituiu em descobrir os núcleos de sentido que compunham os registros apresentados pelo livro didático cujos temas eram: frações e decimais em suas várias articulações.

Assim, foi adotada a unidade de contexto, servindo de unidade de compreensão, que colaborou para codificar a unidade de registro e correspondeu ao segmento da mensagem dos exercícios propostos. O texto *“tem uma estrutura e um sentido; a tarefa do aluno é captá-los”. Desse modo, professor e alunos são silenciados para ceder voz a um saber estável, correto, único”* (Coracini, 1999, p.13). A referência ao contexto é muito importante à análise avaliativa e à análise de contingências.

Para ilustrar a unidade de contexto foram levantadas as características gerais das coleções analisadas.

3.1. Características gerais das coleções.

A **CLD-1**, sigla que usamos para nos referir à coleção de 1^a. a 8^a. séries, “A Conquista da Matemática” dos autores José Ruy Giovanni e José Ruy Giovanni Jr.

da Editora FTD, é ainda uma das coleções adotadas nas escolas, embora sua avaliação no Guia de Livros Didáticos, para os volumes de 7^a. e 8^a. séries tenham recebido apenas uma estrela.

Esta coleção tem características comuns em todas as séries, tais como:

- O conteúdo é dividido em Unidades, e estas em capítulos, com a característica de uma abordagem compartimentalizada, cujos conteúdos nem mesmo são articulados entre si.
- As Unidades são introduzidas com algumas referências históricas pertinentes ao conteúdo a ser desenvolvido.
- Os exemplos são ponto de partida para se chegar ao conceito, regras e propriedades.
- Há preocupação em demasia com relação à notação utilizada.
- Aparece um grande número de exercícios de fixação valorizando os mecanismos (algoritmos) de resolução.

A **CLD-2**, dos autores Luiz Márcio Imenes e Marcelo Lellis, da Editora Scipione, possui dois títulos, sendo de 1^a. a 4^a. séries: “Novo Caminho – Matemática” e de 5^a. a 8^a. séries: “Matemática”, com avaliação dos órgãos competentes MEC e SEE – Secretaria de Estado e Educação como três estrelas, por atender às novas propostas curriculares no que concerne ao estudo metodológico de ensino-aprendizagem, de modo a favorecer uma aprendizagem mais significativa, com articulação dos conteúdos propiciando situações que levem em consideração a formação do indivíduo para a cidadania. No desenrolar de toda a coleção é possível notar que:

-
- Os conteúdos são abordados em espiral, isto é, o mesmo conteúdo é retomado em contextos distintos (aritmética, medidas de grandeza, geometria e álgebra), assim como nas séries seguintes, com novas abordagens.
 - A abordagem é feita por meio de situações do cotidiano na resolução de problemas.
 - As representações pictóricas e figurativas, assim como recortes de jornais e revistas são explorados para um contexto mais próximo da realidade.
 - As atividades desafiadoras e/ou jogos, na seção “Ação” são proporcionados para que o trabalho em grupo seja incentivado. Nas séries iniciais, essas atividades são trabalhadas com o material concreto que faz parte do Manual Pedagógico.
 - Os cálculos mental e estimativo apresentam estratégias a serem desenvolvidas em sala de aula, assim como momentos de reflexão na seção “Conversando sobre o texto”.

Na análise do livro didático, o objetivo foi observar como os números racionais aparecem nos diversos registros, de que forma os tratamentos são realizados dentro de um mesmo registro, assim como observar quando acontecem as conversões entre os diferentes registros.

Ao longo da análise, sentimos necessidade de colocar alguns termos ou expressões utilizados pelos autores dos livros, a fim de esclarecer que são expressões utilizadas pelo livro didático que foram destacadas no texto entre aspas e em itálico.

4.1. O registro fracionário na CLD-1

A análise foi iniciada pela CLD-1.

Na 2^a. série, aparece uma primeira situação introdutória da noção de fração por meio do registro na língua natural *"metade"*. Torna-se importante destacar que na Unidade 2, na página 27, aparece com o título *"Operações com números naturais"*. O tópico *"Metade de uma quantidade"* surge só na página 111, após o estudo das divisões nos naturais, cujos divisores são representados por apenas um algarismo.

No primeiro exemplo, há duas representações figurais: uma figura A composta de 10 quadrados, dispostos em 2 barras com 5 colunas, e uma figura B, formada por 5 quadrados, configurados em 1 barra com 5 colunas. A comparação é estabelecida em relação ao número de quadrados. Como a figura B possui 5 quadrados e 5 quadrados são iguais a $10 : 2$, então, a palavra *metade* é relacionada à operação dividir por 2. Não foi explorado, por exemplo, que a figura A tenha o

dobro de quadrados da figura B, pode-se destacar que o objetivo foi demonstrar que a metade de uma quantidade pode ser obtida pela operação de divisão por 2.

O segundo exemplo também relaciona a metade com a operação dividir por 2. Trata-se de um problema cujo enunciado está no registro da língua natural. A resolução implica na aplicação do algoritmo euclidiano da divisão e o livro refere-se como *"usando a chave"*. O quociente obtido pela divisão representa a metade da distância referida no problema.

De modo análogo é tratada *"A terça parte de uma quantidade"*.

Continuando a análise, verificamos que quatro páginas adiante os autores introduzem: *"Uma nova noção de metade: **um meio**"*, por meio de representações no registro geométrico (figuras como: retângulos, círculos). *Dobrando as figuras ao meio, dividindo-as em **duas partes iguais**, cada uma dessas partes representa **um meio** que é representado em matemática por $\frac{1}{2}$* , (as expressões em língua natural são destacadas em negrito pelo autor).

Os exercícios, da página 117 na 2ª. série, envolvem duas funções com dificuldades distintas: percepção visual e cognição. Não é considerado que, nesta fase da aprendizagem, muitas crianças ainda estão em período de transição no desenvolvimento de conservação de quantidades. Trabalhar com quantidades discretas, como pequenas coleções de objetos, poderia ser mais adequado (Piaget, 1981). Nestes exercícios, são introduzidas as representações fracionárias $\left(\frac{1}{2} \text{ e } \frac{1}{3}\right)$, parecendo ser apenas com o intuito de familiarização com este registro.



1. Quais são as figuras nas quais a parte colorida representa **um meio** ($\frac{1}{2}$) da figura?



fig. 1



fig. 2



fig. 3



fig. 4



fig. 5

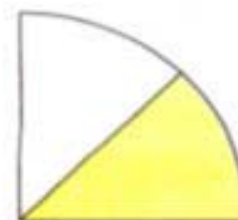


fig. 6

2. Quais são as figuras nas quais a parte colorida representa **um terço** ($\frac{1}{3}$) da figura?



fig. 1

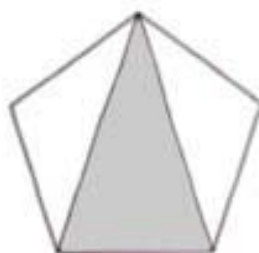


fig. 2



fig. 3

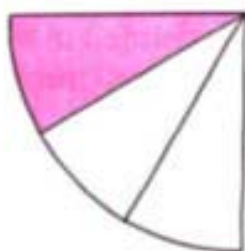


fig. 4



fig. 5

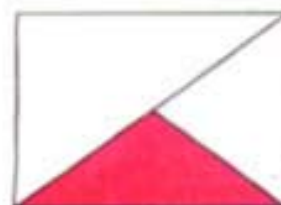
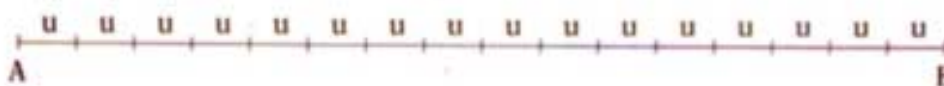


fig. 6

Ainda, nesta Unidade encontramos o seguinte exercício: (p.114 - 2ª série)

■ 4. Observe a figura, onde $\overline{u}$ representa uma unidade de comprimento.



Se você tivesse que percorrer a metade da distância do ponto A ao ponto B, quantas unidades de comprimento você percorreria?

O segmento AB vem apresentado como uma sequência de segmentos consecutivos de medida u . Não se trata de fracionamento de uma grandeza contínua, mas sim, de uma grandeza discreta constituída por um número apropriado de peças iguais à unidade de comprimento preestabelecida que permite realizar a operação de repartir em duas metades.

Assim, como este exemplo, os demais exercícios que aparecem ao longo da coleção tomam segmentos cujos comprimentos são um número par de vezes a unidade (a questão da comensurabilidade¹ é omitida).

Na 3ª. série, como nos volumes da 4a. e 5a. séries, encontramos uma Unidade específica “*Números racionais e sua representação fracionária*”.

Se não fosse o título anunciando números racionais e sua representação fracionária, isso poderia passar despercebido, pois os tratamentos efetuados no registro figural e sua conversão na língua natural são como os realizados na 2ª. série no estudo dos números naturais. Até os exemplos são os mesmos, porém,

¹ Dois segmentos de reta são comensuráveis quando há um segmento que “mede” cada um deles, isto é, que está contido exatamente um número de vezes em cada um dos segmentos (Gundlach, 1992, p. 54).

agora é citado que cada uma das partes representa **uma fração**. Então, pode-se deduzir que a palavra fração seja própria para este novo conjunto dos números racionais, assim como sua representação numérica $\frac{1}{2}$, para "um meio" ou "a metade", no registro da língua natural.

Nesta série são demonstrados no registro figural, fracionamentos e cada uma das partes em que a unidade foi repartida, corresponde a *uma fração da figura*. Desse modo, "os símbolos $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$ representam quantidades e são chamados frações" (p.92 - 3ª série).

Tanto a definição acima quanto a descrição das frações citadas aparecem no registro da língua natural. Porém, nenhuma menção é feita para associar estes registros fracionários ao número (p.96 – 3ª. série).

Vimos, então, nas situações apresentadas que:

Quando dividimos **uma unidade** (representada pela avenida, ou pela pizza, ou pelo tablete de chocolate, ou pelo pacote de açúcar) em partes iguais, uma ou mais dessas partes representam **uma fração** da unidade tomada.

Neste momento, a **fração** é o significante, representada pelo registro fracionário $\frac{1}{2}$, ou em língua natural, por **metade** ou **um meio**.

As representações figurais são de grandezas contínuas, tais como, segmentos, pizzas, tabletes de chocolate e cada uma das partes representa "uma fração da figura". A fração no registro fracionário é sempre acompanhada de um complemento do todo.

Nos exercícios de fixação, a determinação da parte colorida da figura é solicitada e a denominação das frações é dada de acordo com o denominador.

Existe uma coordenação entre o registro numérico na forma fracionária e em língua natural. Os exercícios de fixação 1 e 2, da página 101, investem nessa coordenação do registro fracionário para a língua natural e vice-versa.

As primeiras comparações de ordem surgem entre frações e a unidade. Cada figura representa uma unidade, dividida em partes iguais, sendo coloridas uma ou mais partes da figura. A comparação é realizada no registro numérico na forma fracionária e na unidade. A atividade de comparação implica na escolha dos símbolos $<$, $>$ ou $=$.

Em seguida, outras comparações ocorrem no registro fracionário e a unidade não é mais considerada como parâmetro, tais comparações são realizadas entre frações de um mesmo denominador.

Notamos que a atividade de comparação entre frações de mesmo denominador é feita por meio de registro figural (um segmento AB indicando uma avenida). Neste segmento, as frações são dispostas ordenadamente, de modo a manter a distância correspondente a $\frac{1}{8}$ entre uma fração e outra. Também nas comparações é necessário escolher os símbolos $<$, $>$ ou $=$.

Posteriormente às comparações entre frações, as operações de adição e subtração são introduzidas. Neste mesmo enfoque do registro figural, representar uma avenida como o segmento AB, é inserida a operação de adição de frações. O segmento AB é subdividido em 8 partes. A compreensão do comprimento de cada uma das partes corresponder a $\frac{1}{8}$ é que pode favorecer a adição neste registro. Entretanto quando é feita a conversão do registro figural (a gravura) para o registro figural (segmento AB) a rua não é levada em consideração.

O segundo exemplo também no registro figural representa uma pizza dividida em 6 partes, o registro fracionário $\frac{1}{6}$ é colocado no interior de cada uma das partes nas quais a figura foi dividida. A operação agora realizada utiliza o registro fracionário.

Os exercícios de fixação das páginas 111 a 113 exploram as representações figurais apresentando divisões em partes iguais, algumas aparecem em diferentes cores. Torna-se necessário identificar a fração correspondente a uma determinada cor, o que envolve a conversão do registro figural para o fracionário, que possibilitará a realização do tratamento aritmético da operação de adição. As conversões necessárias são admitidas como se ocorressem naturalmente o que não é evidente.

Na sequência de exercícios, percebemos que os exercícios 11, 12 e 13, da página 113, não tratam só da conversão entre dois registros, o figural e o fracionário, mas detectamos tratamentos implícitos em cada um, seja ele numérico ou figural, conforme destacamos :

■ 11. Qual a fração que você deve colocar no lugar do símbolo $\boxtimes$ para que a adição fique correta?

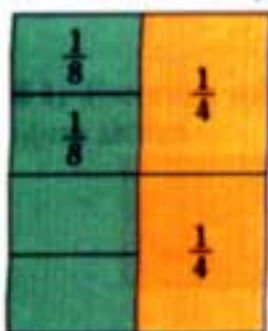
a) $\frac{5}{9} + \boxtimes = \frac{6}{9}$

b) $\frac{5}{11} + \boxtimes = \frac{9}{11}$

c) $\boxtimes + \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$

d) $\boxtimes + \frac{3}{5} = \frac{5}{5}$

■ 12. Pense um pouco e, observando a figura, calcule:



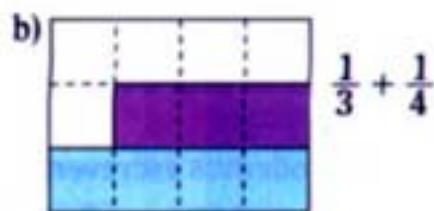
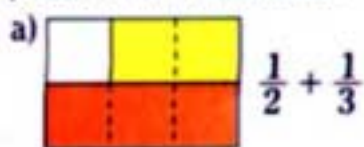
a) $\frac{1}{4} + \frac{1}{8}$

b) $\frac{1}{4} + \frac{3}{8}$

c) $\frac{1}{8} + \frac{2}{4}$

d) $\frac{2}{4} + \frac{4}{8}$

■ 13. Cada uma das figuras nos dá a idéia de adição de duas frações. Pense um pouco e dê o resultado:



No exercício 11, é preciso substituir o $\boxed{x}$, por uma fração de modo que a igualdade seja verificada. O quadrado aparece como um termo desconhecido, o que envolve um aspecto do registro algébrico. Notamos que os graus de dificuldades para os itens c) e d) são maiores que as dificuldades impostas aos itens a) e b), visto que para estes itens a adição é direta.

No exercício 12, é necessário efetuar um tratamento na representação figural de modo a reconhecer visualmente a equivalência entre a porção correspondente à fração $\frac{1}{4}$ e as duas frações de $\frac{1}{8}$. A operação de adição no registro fracionário implica na conversão do registro figural para o fracionário. Portanto, neste exercício, há duas atividades envolvidas, a de conversão e a de tratamento; desse modo são realizados dois tratamentos, um no registro figural e o outro no fracionário, o que possibilita o resultado da operação no registro fracionário.

No enunciado da questão 13, cada uma das figuras dá a idéia de adição de duas frações, e o resultado da operação poderá ser encontrado pela conversão do registro figural para o fracionário. Mesmo que o aluno não identifique corretamente cada uma das frações correspondentes à parte colorida, o resultado poderá ser obtido interpretando a figura como parte/todo.

A subtração de frações ocorre de maneira análoga, os tratamentos no registro fracionário envolvem frações de mesmo denominador.

Ainda no volume da 3^a. série, a partir da página 117, encontramos novamente as abordagens: *Um meio - Um terço - Um quarto*. Nesse momento, o enfoque está na operação dividir a unidade 1 por 2, isto é, $1 : 2$ é equivalente ao registro fracionário $\frac{1}{2}$ correspondente a um meio ou metade, ou como é concluído: "*Dividir uma quantidade por 2 significa determinar a **metade** ou **um meio** dessa quantidade*".

Da mesma forma são tratados um terço e um quarto; identificamos nessa abordagem que o registro fracionário resulta de uma divisão cujo resultado é o quociente na forma fracionária.

A fração na forma $\frac{a}{b}$ é explorada na resolução de problemas como em situações do cotidiano que envolvem medidas de tempo: mês, hora, ano. Assim, há distintos aspectos envolvidos nessas resoluções de problemas como operador, parte/todo e quociente.

Na 4^a. série, percebemos uma contradição entre a representação figural e sua representação na forma fracionária: na página 86, vê-se:

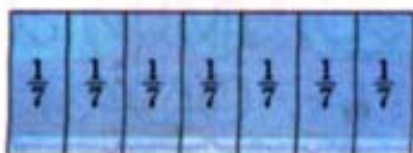
Os meios, os terços e os quartos são as frações mais comuns.
Vejam outras frações:



Dividimos a figura em 5 partes iguais.
Cada parte representa $\frac{1}{5}$ (um quinto) da figura.



Dividimos a figura em 6 partes iguais.
Cada parte representa $\frac{1}{6}$ (um sexto) da figura.



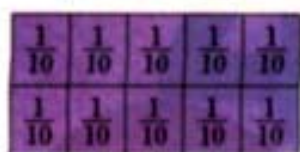
Dividimos a figura em 7 partes iguais.
Cada parte representa $\frac{1}{7}$ (um sétimo) da figura.



Dividimos a figura em 8 partes iguais.
Cada parte representa $\frac{1}{8}$ (um oitavo) da figura.



Dividimos a figura em 9 partes iguais.
Cada parte representa $\frac{1}{9}$ (um nono) da figura.



Dividimos a figura em 10 partes iguais.
Cada parte representa $\frac{1}{10}$ (um décimo) da figura.

O número racional $\frac{1}{5}$ é maior que $\frac{1}{7}$, mas as representações geométricas não se referem a essa questão, portanto, a área correspondente a $\frac{1}{5}$ é igual à área de $\frac{1}{7}$, isso se pode constituir em um obstáculo didático², no sentido de não

² Obstáculo didático é aquele que depende somente das escolhas realizadas para um sistema educativo (Brousseau)

favorecer a conceituação de número racional.

Um obstáculo didático pode ser causado pela introdução da terminologia *par ordenado* para explicar a formação de uma fração na 4^a. série, com o agravante de um texto demasiadamente longo e, por isso, pouco adequado à faixa etária a que se destina (p.91).

As representações $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{7}$ são, também, chamadas **frações**.

Pelas situações apresentadas, observamos que, quando dividimos **uma unidade** (um pedaço de barbante, uma vasilha, uma folha de cartolina, uma barra de chocolate) em partes iguais e queremos representar numericamente uma ou algumas dessas partes, usamos **um par ordenado** de números naturais, da seguinte maneira:

- É feito um traço horizontal:
- Embaixo do traço escrevemos o número total de partes iguais em que se dividiu a unidade:

$\overline{2 \quad 3 \quad 4 \quad 3 \quad 5 \quad 7}$

- Em cima do traço escrevemos o número de partes iguais que foram consideradas:

$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{4}{7}$

Os conceitos ou regras são introduzidos, geralmente, por meio da coordenação entre o registro figural e as representações numéricas (fracionária) e, em muitos casos, também em língua natural. Nos exercícios de fixação, as representações figurais são em menor número se comparadas com os problemas que em sua maioria estão na língua natural.

As frações equivalentes são trabalhadas no registro figural e em sua representação numérica, assim, podemos vislumbrar um caminho para o *status* de número, porque são exploradas diversas representações para o mesmo número.

A comparação entre frações no registro figural sempre é possível ocorrer, porém existe a questão de "custo". Porém, a questão pode ter seu "custo" reduzido,

se for feito um tratamento matemático no registro numérico, por meio do uso de frações equivalentes.

Os autores do livro estudado talvez tenham desejado levar a uma abstração da fração na representação numérica, sem a necessidade de recorrer à representação geométrica (concreto), para que as comparações e operações entre frações sejam realizadas. Mas excedem-se em terminologia desnecessária, como frações aparentes, impróprias,..., mínimo múltiplo comum e menor denominador comum que pouco esclarecem e muito complicam, tratando-se da faixa etária a que se destina o texto.

Nessa 4^a. série, nas páginas 101 até 115, são trabalhadas as frações equivalentes no registro figural e na representação fracionária. As articulações entre os registros figural e o fracionário mostram diferentes representações de uma mesma parte da unidade e podem facilitar a compreensão dessa equivalência, assim como, o reconhecimento dos distintos registros fracionários, para designar o mesmo número.

A equivalência entre frações é obtida por meio de um tratamento numérico de multiplicação ou divisão dos termos da fração por um mesmo número natural, diferente de zero. A regra que exprime esse tratamento numérico é dada no registro da língua natural, como segue: *"Para obtermos frações equivalentes a uma fração dada, devemos multiplicar ou dividir o numerador e o denominador da fração por um mesmo número, diferente de zero"* (p.104 – 4^a série).

A redução de frações ao mesmo denominador que aparece ainda na 4^a. série, envolve o conceito de frações equivalentes, o que se constitui em um passo para

comparação entre frações que, nesse momento, já apresentam denominadores diferentes.

O algoritmo da obtenção de frações equivalentes é retomado na 5ª. série, mas como classe de equivalência de uma fração dada. Nesse momento, a representação $\frac{a}{b}$ passa a ser de fato, considerada a representação de um número.

Constatamos essa distinção, analisando a definição colocada nesta série na página 140.

Quando um par ordenado (a, b) de números naturais está escrito na forma $\frac{a}{b}$, com $b \neq 0$, dizemos que $\frac{a}{b}$ é um numeral de uma nova categoria de números denominada **números racionais absolutos**.
O conjunto desses números é representado por Q_+ .

Reportamo-nos à definição de fração apresentada na mesma série na página 121.

Dois números naturais **a** e **b**, com $b \neq 0$, quando escritos na forma $\frac{a}{b}$ representam **uma fração** onde:

- o número **b** indica em quantas partes iguais uma unidade foi dividida e é chamado **denominador**.
- o número **a** indica quantas dessas partes foram consideradas e é chamado **numerador**.

O numerador e o denominador são os **termos** da fração.

Na 5ª. série, observamos haver uma iniciação em Álgebra com a generalização na forma $\frac{a}{b}$ para representação de uma fração.

As operações de adição e subtração nas 3^a. e 4^a. séries eram descritas como Adições e Subtrações de Frações, mas na 5^a. série o título que as anuncia, refere-se a elas como Adição e Subtração de números racionais. A denominação de operação entre racionais também é utilizada para as demais operações.

O trabalho com a reta numérica só se concretiza na 6^a. série, quando uma nova definição de frações é apresentada. O registro na forma $\frac{a}{b}$, a e b naturais $b \neq 0$ representa um número, chamado número racional absoluto (p.62 - 6^a série).

Um par ordenado de números naturais (a, b) escrito na forma $\frac{a}{b}$, com $b \neq 0$ representa um número chamado **número racional absoluto**.

Os exemplos na página 67, visam localizar esses "novos números", os racionais.

Uma correspondência entre o número e o ponto na reta numérica é estabelecida pelo lugar que o número ocupa na reta. De acordo com o manual, o ponto A é a imagem geométrica do número $+\frac{1}{3}$, portanto, o número $+\frac{1}{3}$ é a abscissa do ponto A.

Notamos agora que o número $\frac{1}{3}$ ocupa uma posição entre dois números naturais que não precisa mais de um complemento concreto para ser entendido como $\frac{1}{3}$ da figura anteriormente exemplificada.

Os exercícios que exploram esse aspecto de localização dos números racionais na reta são raros. Os autores usam poucos exemplos e exercícios abordando essa complexa questão. Desse modo, torna-se difícil para os alunos

trabalharem com os racionais, uma vez que, um mesmo número possui uma multiplicidade de representações.

A multiplicidade de representações que um número racional possibilita, não se restringe apenas ao registro fracionário. Pois um mesmo número racional permite ser representado numericamente no registro fracionário e no decimal e pelo domínio dos registros fracionário e decimal, em especial, pela atividade de conversão de um registro para outro, a conceituação de número racional pode ser concretizada.

Pela análise, percebemos que são poucos os exercícios que promovem a conversão entre o registro fracionário e o decimal, e até mesmo os exemplos são exíguos.

Um dos raros exemplos que favorecem essa conversão é o da 6ª. série na página 69, como podemos verificar a seguir:

3º exemplo: Calcular $-\frac{5}{6} + 1,4$.

Resolução:

Vamos, inicialmente, passar 1,4 para a forma fracionária: $+1,4 = +\frac{14}{10}$.

$$-\frac{5}{6} + 1,4 = -\frac{5}{6} + \frac{14}{10} = -\frac{25}{30} + \frac{42}{30} = \frac{-25 + 42}{30} = +\frac{17}{30}$$

Exemplos como o acima são raros e, nessa coleção, na abordagem dos números racionais no registro fracionário, eram mais trabalhados os tratamentos dentro de um único registro. Em geral, o registro fracionário e as conversões têm ficado por conta das efetuadas no registro figural ao fracionário, nessa ordem, e em muitos casos conversões do registro fracionário ao da língua natural.

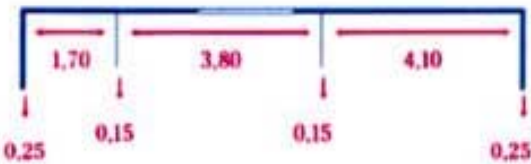
4.2. O registro decimal – CLD-1

Visamos agora analisar as questões relativas à representação do número racional no registro decimal.

O estudo dos números racionais no registro decimal acontece na 4^a. série, após um ano da introdução do registro na forma fracionária.

Assim, no estudo dos números racionais e sua representação fracionária da coleção, os números racionais e sua representação decimal são introduzidos com alguma referência histórica a respeito do aparecimento no registro decimal e as razões que justificam seu estudo nos dias atuais. A primeira denominação de números com vírgula, aparece abaixo na introdução dada na 5^a. serie. Porém, ao longo da coleção esta denominação não se mantém.

Examinando-se a planta, pode surgir uma pergunta:
Qual é, em metros, o comprimento real do apartamento indicado?
Para responder a essa pergunta, fica claro que devemos adicionar os números que aparecem na figura seguinte:



Como fazer para efetuar $0,25 + 1,70 + 0,15 + 3,80 + 0,15 + 4,10 + 0,25$, que são números com vírgulas?
O objetivo desta Unidade é justamente estudar o cálculo com números que têm vírgulas e que são denominados **números decimais**.

170

Na parte introdutória da 4^a. serie, constam as seguintes informações “os números decimais são escritos com a utilização de uma vírgula. Eles representam

frações que têm 10 ou 100 ou 1000... no denominador, e essa maneira especial de escrever essas frações foi desenvolvida a partir do século XVI” (p.140, 4ª.série).

Os exercícios 1-2 trabalham exatamente as conversões do registro fracionário ao registro na língua natural e vive-versa.

No registro decimal, aparecem as articulações mostradas na página 142.

O DÉCIMO

A figura seguinte representa uma (1) unidade.



Você observa que:

- a) a figura foi dividida em **10** partes iguais.
- b) cada parte pode ser representada pela fração $\frac{1}{10}$.

Existe uma outra maneira de escrever a fração $\frac{1}{10}$, que é **0,1**.

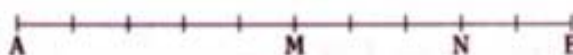
Então: **0,1** é o mesmo que $\frac{1}{10}$ (lemos **um décimo**).

Há, portanto, a articulação entre os registros figural (F) e a fração decimal (FD) e desta para o registro numérico na forma decimal (D) e, ainda, na língua natural (LN). Estas articulações entre os registros ocorrem para os décimos, centésimos e milésimos.

É importante destacar a ordem em que as conversões ocorrem, identificadas esquematicamente no sentido das conversões: $F \rightarrow FD \rightarrow D \rightarrow LN$.

Logo nos primeiros exercícios aparece o exercício 2, propondo que a coordenação do registro figural seja diretamente ligada ao registro numérico na forma decimal. Dá a impressão que se parte do pressuposto de que a forma fracionária já esteja interiorizada, porém não existe no exercício qualquer referência a respeito das subunidades correspondentes a $\frac{1}{10}$ ou 0,1.

■ 2. Suponha que a figura seguinte representa uma avenida:



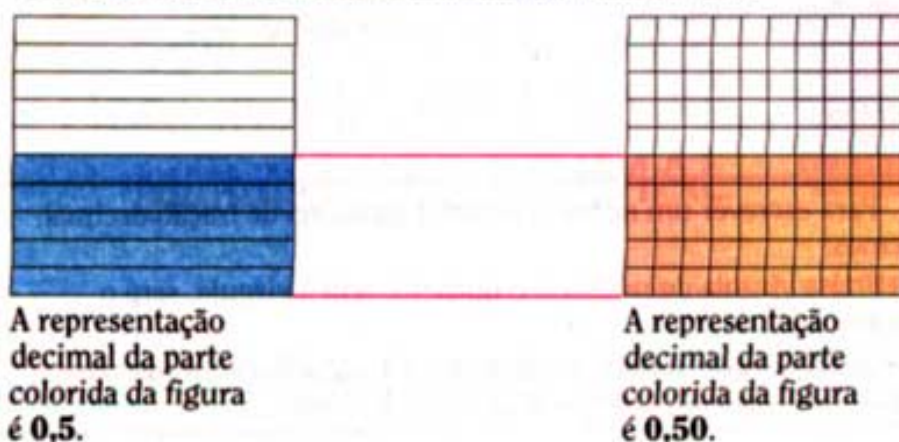
Nessas condições, escreva a representação decimal:

- a) da distância do ponto A ao ponto M. 0,5
- b) da distância do ponto A ao ponto N. 0,8
- c) da distância do ponto N ao ponto B. 0,2

Na França, Brousseau realizou um levantamento histórico do ensino dos números racionais na forma decimal, relatando o procedimento efetuado no trabalho do abade Bossut, em 1784, no qual o registro decimal é apresentado como um número inteiro com vírgula, e o aspecto da fração decimal é relegado a um apêndice. Brousseau alerta que foram necessários dois séculos para se sanear as dificuldades geradas por práticas didáticas como ele se refere à “vulgarização” dos números na forma decimal pelo ensino (Cf. Igliori, 1999, p.104).

Novamente, encontramos o mesmo procedimento de conversão entre o registro figural e o numérico na forma decimal na página 154.

Considerando que cada figura é uma unidade, observe:



Muito embora a equivalência possa ser visualizada pela representação figural, essa conversão direta entre os registros figural e o decimal pode ser um obstáculo à compreensão do número na forma decimal, pois sua conversão é imediata ao registro da fração decimal, mas não é necessariamente à representação decimal. O custo que envolve a tarefa de conversão entre o registro figural e o decimal, é muito maior do que a conversão realizada entre os registros da fração decimal para o decimal.

Ao se examinar o livro da 4^a. série, o estudo dos números racionais na sua representação decimal foi iniciado há poucas páginas (p.140), nota-se que as articulações ocorrem como se o aluno fosse capaz de realizar as mudanças de registro de maneira natural.

Não foram propiciadas situações em que as articulações entre os distintos registros ocorressem em sentidos diferentes. Comumente, encontramos a articulação entre os registro figural e o numérico na forma decimal, mas não no sentido contrário, o que, segundo a teoria dos registros de Duval, na atividade de

conversão há aspectos como os de congruência e não-congruência que devem ser levados em consideração.

Ao se fazer uma analogia com o experimento de Pavlopoulou (1998), que examina a questão da congruência e não-congruência, considerando-se "*a natureza dos registros*", podemos intuir que as dificuldades de conversão entre os registros figural (F) e decimal (D) sejam distintas à conversão dos registros figural (F) à fração decimal (FD). Resumindo: $F \rightarrow D$ e $F \rightarrow FD$. tem custo e dificuldades distintos.

Mais adiante, página 161, constatamos novamente o mesmo procedimento de articulação direta entre a representação figural (F) e o registro decimal (D), para a operação de subtração, como demonstra o exemplo abaixo.

Vamos estudar a subtração de números decimais considerando os seguintes exemplos:

1º exemplo: Calcular $1 - 0,3$.

Resolução:

Considerando que a figura a seguir representa uma unidade, temos:



- A parte colorida representa **0,3** da figura.
- A parte não colorida representa **0,7** da figura.

Percebemos que as frações decimais não são mais usadas como intermediárias entre a representação figural e a decimal, elas, simplesmente não aparecem mais.

Contudo, na página 148, 4ª série, os números decimais maiores que 1, são articulados ao registro misto (parte inteira mais parte fracionária) e também em língua natural.

2) $1 \frac{29}{100}$ é o mesmo que $1,29$

Como $1 \frac{29}{100}$ lê-se **um inteiro e vinte e nove centésimos**, então:

A justaposição dos termos encontrada nas frações mistas é também verificada nas frações decimais, estas apresentam o numerador maior que o denominador. Por exemplo: (p. 150)

1º exemplo: Escrever a representação decimal da fração $\frac{17}{10}$.

Considerando que $17 = 10 + 7$, podemos escrever:

$$\frac{17}{10} = \frac{10 + 7}{10} = \frac{10}{10} + \frac{7}{10} = 1 + \frac{7}{10}$$

Colocando no quadro de ordens, temos:

C	D	U	d	c	m
		1	7		

,

Temos, então, que:

$$\frac{17}{10} = 1,7$$

Este quadro pode induzir o aluno a associar número com medida.

Verificamos que na conversão do registro de fração decimal para o decimal, o quadro de ordens é mobilizado no exemplo acima, identificando as partes inteira e

decimal. Essa conversão é feita, após o tratamento numérico pela decomposição do numerador.

As articulações dos registros de fração decimal e o decimal ocorrem nos dois sentidos, tanto nos exemplos ilustrativos como nos exercícios propostos.

Na introdução de "*Adição de Números Decimais*", é interessante destacar o tratamento realizado. É dada uma situação problema cuja resolução implica na adição de dois números no registro decimal.

Para efetuar a operação, é estabelecida a convenção com o uso de fichas coloridas de modo que a ficha rosa corresponda a **1 unidade**, a ficha azul a **1 décimo** e a ficha amarela a **1 centésimo**, como descrito na página 158.

Para realizar esta adição, observe os quadros:

	Unidades	Décimos	Centésimos
3,75			
1,48			
$3,75 + 1,48$			
10 centésimos se transformam em 1 décimo			
10 décimos se transformam em 1 unidade			
	5	2	3

Pelo quadro, podemos dizer que você comprou 5,23 metros de fio.

Vejamos, então, como fazer a adição dos números decimais 3,75 e 1,48:

<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td style="padding: 2px 5px;">U</td> <td style="border-left: 2px solid red; padding: 2px 5px;">d</td> <td style="padding: 2px 5px;">c</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 5px;">① 3</td> <td style="border-left: 2px solid red; padding: 2px 5px;">① 7</td> <td style="padding: 2px 5px;">5</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 5px;">+</td> <td style="border-left: 2px solid red; padding: 2px 5px;">1</td> <td style="padding: 2px 5px;">4</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 5px;">5</td> <td style="border-left: 2px solid red; padding: 2px 5px;">2</td> <td style="padding: 2px 5px;">3</td> </tr> </table>	U	d	c	① 3	① 7	5	+	1	4	5	2	3	ou	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 2px 5px;">①</td> <td style="padding: 2px 5px;">①</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 5px;">3</td> <td style="padding: 2px 5px;">7</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 5px;">5</td> <td style="padding: 2px 5px;">5</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 5px;">+</td> <td style="padding: 2px 5px;">1</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 5px;">4</td> <td style="padding: 2px 5px;">8</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 5px;">5</td> <td style="padding: 2px 5px;">2</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 5px;">3</td> <td></td> </tr> </table>	①	①	3	7	5	5	+	1	4	8	5	2	3			$5c + 8c = 13c = 1d + 3c$ $1d + 7d + 4d = 12d = 1U + 2d$ $1U + 3U + 1U = 5U$
U	d	c																												
① 3	① 7	5																												
+	1	4																												
5	2	3																												
①	①																													
3	7																													
5	5																													
+	1																													
4	8																													
5	2																													
3																														

158

Essa técnica metodológica pode facilitar a percepção, mas os procedimentos da operação (adição) podem reforçar a idéia de que um número decimal é um natural com vírgulas. Além disso só serão plenamente dominados quando a criança conseguir *enxergar e coordenar* tais procedimentos no tratamento aritmético.

Ainda na 4ª. série, os decimais serão aplicados na resolução de problemas no contexto do cotidiano com abordagem no sistema monetário.

Na 5ª. série, há duas distinções no enfoque dado:

- 1º) a fração decimal é apresentada na forma de escrita fracionária, cujo denominador é uma potência de 10 (p.171)

Consideremos as seguintes frações:

$\frac{9}{10}$	·	$\frac{29}{100}$	·	$\frac{63}{1\,000}$	·	$\frac{427}{10\,000}$
10^1		10^2		10^3		10^4

Em todas essas frações, o denominador é uma **potência de 10**.

Toda fração cujo denominador é uma potência de 10 chama-se **fração decimal**.

Ainda nesta mesma página, aparece definida a Unidade decimal.

UNIDADE DECIMAL

Toda fração decimal de numerador 1 é denominada **unidade decimal**.

Assim:

$\frac{1}{10}$ chama-se unidade decimal de 1ª ordem e representa-se por 0,1.

$$\frac{1}{10} = 0,1 \text{ (lê-se: um décimo).}$$

$\frac{1}{100}$ chama-se unidade decimal de 2ª ordem e representa-se por 0,01.

$$\frac{1}{100} = 0,01 \text{ (lê-se: um centésimo).}$$

$\frac{1}{1000}$ chama-se unidade decimal de 3ª ordem e representa-se por 0,001.

$$\frac{1}{1000} = 0,001 \text{ (lê-se: um milésimo).}$$

171

- 2º) não é mais explorado a coordenação entre os registros figural e o numérico. As conversões a partir de agora, ficam restritas aos dois registros numéricos, o decimal e o fracionário e em língua natural.

Uma única exceção do uso do registro figural, nessa série, é apresentada na equivalência dos registros decimais, 0,7; 0,70, em que o figural é articulado com os dois outros registros: o da fração decimal e o decimal. Além dessas conversões entre os três registros acima, é feito um tratamento na fração decimal mostrando a equivalência, quando as frações decimais são multiplicadas por 10 no numerador e denominador.

Quando se acrescenta ou se suprime um ou mais zeros à direita da parte decimal de um número decimal, esse número não se altera.

Esta regra em língua natural, agora colocada, pode ser mais significativa nesse momento e não como ocorreu na série anterior, pois foram feitas apenas duas equivalências no registro decimal, $0,5 = 0,50$, sendo consideradas como suficiente para introduzir a regra em língua natural.

Pela primeira vez, os registros decimais não exatos são tratados como dízimas periódicas, mas a conversão ocorre em um único sentido, do registro fracionário ao decimal, procedimento similar é observado na 7ª. série. Contudo na 8ª. série, é apresentada a articulação do registro decimal (dízima periódica) e o registro fracionário (fração geratriz).

O procedimento para obtenção da fração geratriz de uma dízima periódica ocorre, efetuando-se tratamentos no registro algébrico, indicando por x a fração geratriz.

Na 8ª. série, os decimais são associados a pontos da reta numérica.

O conjunto dos racionais desde a 6ª. série já estava abrangendo os racionais relativos e percebemos que, dentre os exemplos apresentados, encontra-se um decimal negativo.

Há uma preocupação com a localização geométrica da representação decimal mostrada a seguir nos três exemplos (p.7 – 8ª. série).

- 1º. exemplo: Representar $-\frac{3}{2}$ na reta numérica racional

$$-\frac{3}{2} = -1,5 \text{ na reta numérica ambos os registros aparecem.}$$

- 2º. exemplo: Representar $\frac{1}{3}$ na reta numérica racional.

$\frac{1}{3} = 0,333....$, como o registro decimal é uma dízima periódica,

sua localização na reta numérica será realizada pelo registro fracionário $\frac{1}{3}$ que corresponde a terça parte da unidade e será o único registro presente nessa localização do racional.

- 3º. exemplo: Representar geometricamente o número racional 1,666...

Para representar o número 1,666... na reta, é feita a conversão do registro decimal para o fracionário, realizando um procedimento algébrico, obtendo a fração geratriz $\frac{5}{3}$. Ou também, através do tratamento no registro

fracionário obtendo: $\frac{5}{3} = \frac{3}{3} + \frac{2}{3} = 1 + \frac{2}{3}$ onde 1 é um inteiro e $\frac{2}{3}$ dois terços da unidade. E, a representação geométrica é feita apenas através dos registros fracionários: $\frac{5}{3}$ e $1 + \frac{2}{3}$.

Procuramos observar nos livros outros aspectos que poderiam envolver o registro decimal e verificamos que estes estão ligados ao cálculo de porcentagem. Reconhece-se a importância desta aplicação nos dias atuais, razão pela qual a abordagem dos livros procura realizá-la num contexto do cotidiano. Na presente análise, procuramos nos deter na observação dos registros envolvidos e percebemos diferenças nessas articulações de acordo com a série.

Na 4ª. série, foi o primeiro momento da abordagem do cálculo das porcentagens, e os registros envolvidos foram o registro numérico acompanhado do símbolo % e o da fração decimal; já na 5ª. série são articuladas as três representações, o registro numérico com o símbolo %, a fração decimal e o decimal.

O registro decimal também aparece no estudo das medidas, em uma Unidade do livro específica referente à “*Medida e Unidade de Medida*”.

4.3. O registro fracionário na CLD-2

Para a análise da CLD-2 procuramos separar os conteúdos Frações e Decimais. Talvez isso nem sempre seja permitido, pela própria dinâmica do livro, cuja abordagem em espiral retoma um mesmo conteúdo em contextos diferentes.

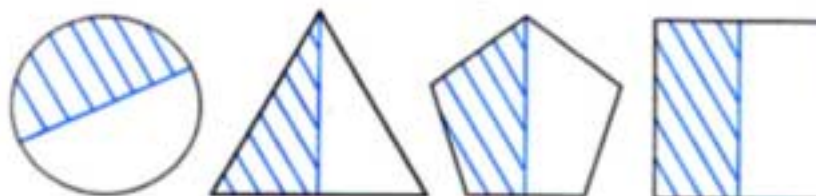
Ao iniciar a análise, procuramos identificar o momento em que ocorreu o primeiro passo em direção à noção de fração e, logo na 1^a. série, deparamo-nos com uma situação introdutória da noção de metade.

A noção de metade, nessa coleção, está ligada à ação de repartir, dividir ao meio, seja cortar um bolo ao meio ou colorir a metade das figuras, ou dividir em duas partes iguais um número dado de objetos, representado por um conjunto discreto de elementos. Como podemos constatar abaixo, nas páginas 195 - 196, dessa 1^a. série.

1. Leia:



- Pinte só uma das metades destas figuras:



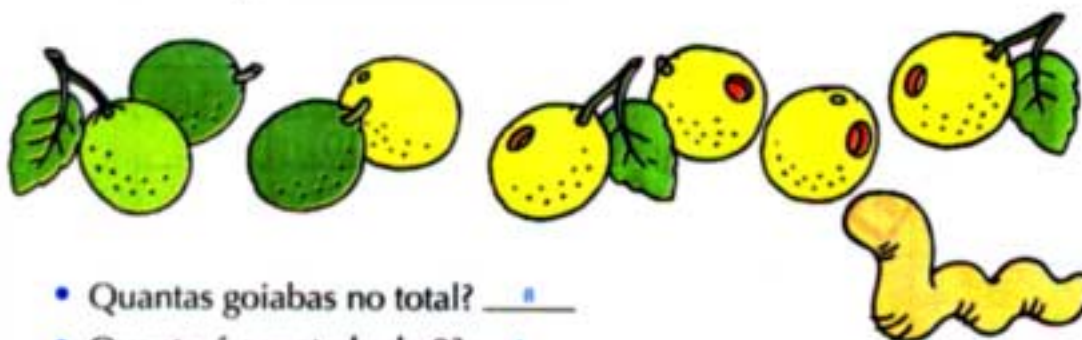
2. Divida o quadrado pela metade. Faça isso de quatro jeitos diferentes:



Existem outras soluções. Por exemplo:

Atenção: o ponto O é o centro do quadrado.

3. Metade das goiabas estão bichadas.



- Quantas goiabas no total? 8
- Quanto é a metade de 8? 4
- Quantas goiabas bichadas? 4

196

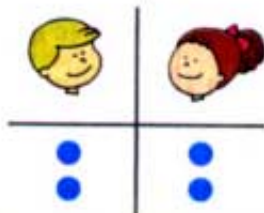
METADE

1. Vamos distribuir igualmente as 10 bolas entre Pedro e Márcia:



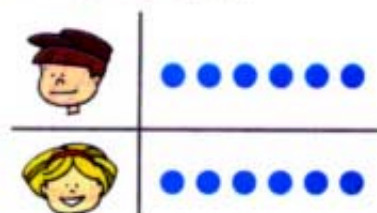
- Quanto é a metade de 10? 5

2. Distribua igualmente 4 bolas entre as crianças:



• Quanto é a metade de 4? 2

3. Divida igualmente 12 bolas entre Paulo e Maria:



• Quanto é a metade de 12? 6

4. Cerque metade das figurinhas:



• Quanto é a metade de 16? 8

5. Complete a tabela:

Número	Sua metade
2	1
4	2
6	3
8	4
10	5
12	6
14	7
16	8
18	9
20	10

A questão 2 indica a possibilidade de obter várias representações figurais para a mesma situação, dividir ao meio, pois o ícone lateral à direita, alerta sobre essas soluções e até exemplifica.

No exercício 3 (p.195 1ª. série) e exercícios 1 - 4 (p.196 1ª. série), encontramos o registro figural (concreto) representando a situação de obter a metade de um determinado número de objetos. Porém, a pergunta que relaciona o número de objetos, ignora o elemento que está em jogo e a questão é voltada ao número, e não à metade da quantidade de objetos. Mais ainda, o 5º exercício pode trazer dificuldade ao aluno, pois a fazer corresponder um conjunto discreto de

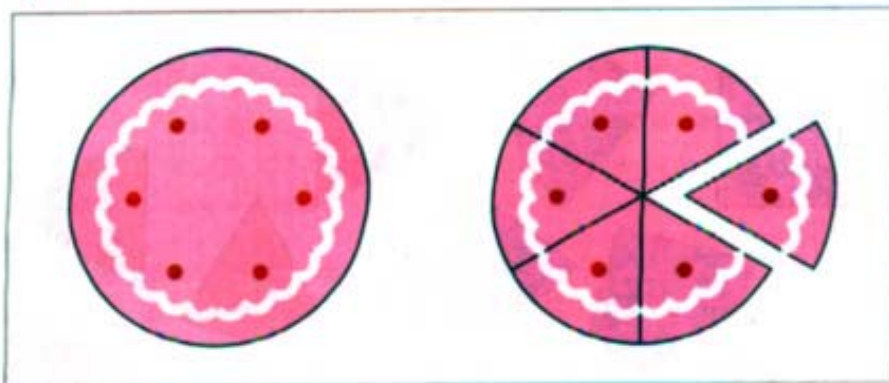
elementos para a abstração da representação do número foi tratada de maneira natural, como se a passagem da contagem no concreto para a abstração do número ocorresse de maneira congruente.

Na 2^a. série, são trabalhadas as operações elementares com os números naturais e não constatamos nenhuma situação que pudesse identificá-la como voltada à questão do registro fracionário, nem mesmo à noção de metade como foi tratada na 1^a. série.

Ainda trabalhando a noção de metade, esta é reinvestida na 3^a. série, página 174, mas agora com enfoque no registro decimal. É interessante observar que são apresentadas as três representações numéricas, o registro decimal (0,5), o fracionário $\frac{1}{2}$ e ainda a fração decimal $\frac{5}{10}$ como o mesmo número. Os exercícios que aparecem, não investem nessa articulação entre os distintos registros de representação, e o que encontramos é uma utilização da representação decimal 0,5 tratada como operador nas diferentes unidades de medida tais como: 0,5 kg e sua linguagem verbal ou situações que implicam numa conversão (transformação) de unidade, por exemplo: Quantos gramas são 0,5 kg? Ou quantos centímetros há em 0,5 m?

Também são propostos problemas e cálculos para resolução mental.

4. O preço do bolo inteiro é R\$ 42,00. Para ser vendido, ele foi dividido em 6 partes iguais.



- a) Que fração cada parte é do bolo? $\frac{1}{6}$ do bolo
b) Quanto custa $\frac{1}{6}$ do bolo? R\$ 7,00

A questão acima (p.143) aparece na 3ª. série, referindo-se à fração e sua representação no registro numérico, sem que tal abordagem tenha ocorrido anteriormente, pois nem a representação fracionária ou a palavra fração haviam sido mencionadas até aquele momento. A primeira referência ao termo fração aparece na atividade "Ação - Reconhecendo frações de um círculo", páginas 144 e 145, cujo material (concreto) faz parte do manual pedagógico a fim de que possa ser desenvolvida a atividade em sala de aula.

A primeira atividade realizada com o material do próprio manual visa determinar o número de peças necessárias de cada um dos modelos para cobrir a superfície do círculo. O número ainda é natural, como se pode verificar abaixo.

144

AÇÃO

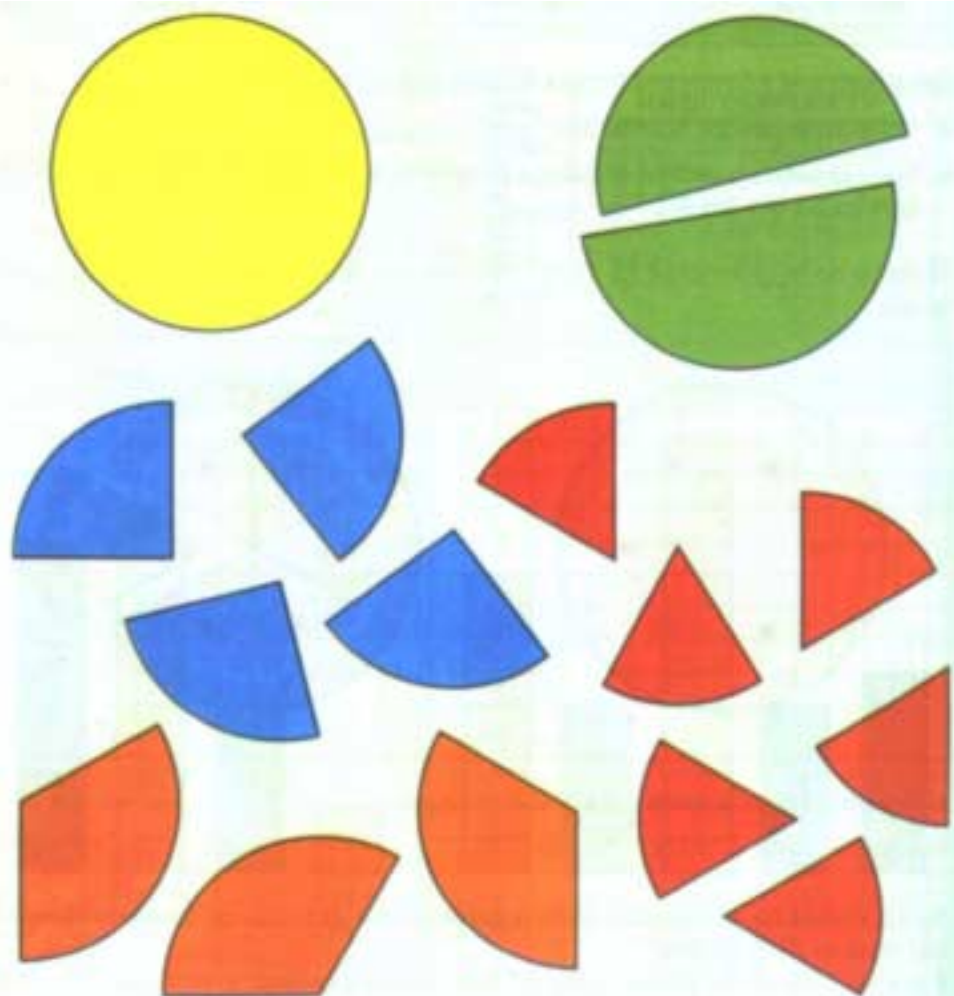


Reconhecendo frações de um círculo



A professora vai distribuir folhas com figuras como as que estão abaixo. Só que as figuras serão maiores e não terão cor.

- Cole as folhas recebidas em cartolina.
- Pinte-as de acordo com as cores das figuras desta página.
- Finalmente, recorte as figuras que você pintou. Com elas realize as atividades propostas na página seguinte.

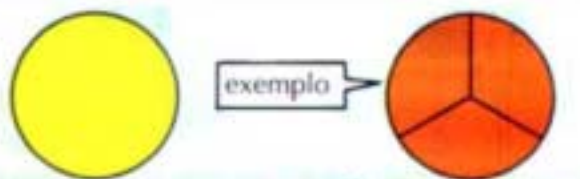




Reconhecendo frações de um círculo



1. Com as peças forme círculos como o amarelo. Cada círculo deve ter só uma cor:



3 peças de mesma cor

- Agora, forme outros círculos, mas use 2 cores em cada círculo:



- A seguir, forme mais dois círculos, mas use 3 cores em cada um.

2. Responda:

- | | |
|--|--|
| a) Quantas desta  formam este  ? | e) Quantas desta  formam este  ? |
| b) Quantas desta  formam este  ? | f) Quantas desta  formam este  ? |
| c) Quantas desta  formam este  ? | g) Quantas desta  formam este  ? |
| d) Quantas desta  formam este  ? | |

3. Copie e responda escrevendo **sim** ou **não**:

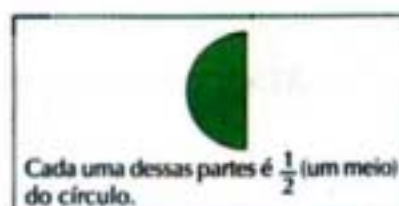
- 1 peça laranja é maior que 1 peça azul?
- 1 peça azul é maior que 1 peça verde?
- 1 peça azul é maior que 1 peça vermelha?
- 1 peça laranja é maior que 1 peça verde?
- Juntas, 2 peças azuis são maiores que 1 peça verde?
- Juntas, 2 peças azuis são maiores que 1 peça laranja?
- 1 peça verde é maior que 2 peças laranja juntas?
- Juntas, 2 peças vermelhas são maiores que 1 peça laranja?

Nas páginas seguintes, encontramos exercícios que também se referem à “Frações do círculo”. Este é o primeiro momento em que aparece o registro fracionário. Nestes exercícios, notamos a articulação entre o registro figural, a forma fracionária e a denominação deste registro na língua natural.

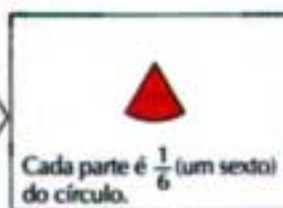
146

FRAÇÕES DO CÍRCULO

1. Veja:



Veja mais:



Você acabou de conhecer as frações $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$ e $\frac{5}{6}$.

- Agora, copie os desenhos. Pode ser à mão livre. Depois, em cada um, pinte a fração indicada. Use a cor que quiser:



$\frac{1}{3}$ (um terço)



$\frac{1}{4}$ (um quarto)



$\frac{3}{4}$ (três quartos)

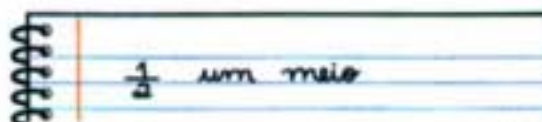


$\frac{2}{3}$ (dois terços)



$\frac{4}{6}$ (quatro sextos)

2. Veja o exemplo:



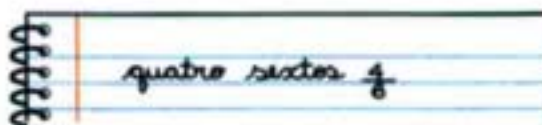
- Escreva por extenso:

$\frac{1}{3}$ um terço

$\frac{3}{4}$ três quartos

$\frac{5}{6}$ cinco sextos

3. Veja o exemplo:



• Escreva com números:

dois terços $\frac{2}{3}$

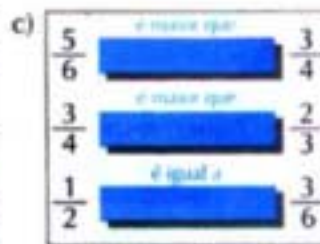
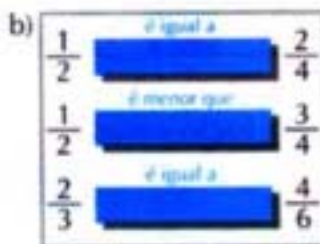
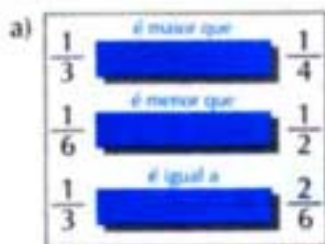
um quarto $\frac{1}{4}$

um sexto $\frac{1}{6}$

FRAÇÕES DE FIGURAS

147

1. Copie e complete trocando [] por é maior que ou é menor que ou é igual a. Para comparar as frações, use as frações do círculo que você recortou:



2. Veja o retângulo:



a) Use a régua e copie o retângulo. Depois, divida-o em 3 partes iguais e pinte $\frac{2}{3}$.



b) Copie novamente o retângulo, divida-o em 6 partes iguais e pinte $\frac{4}{6}$.



c) Copie-o outra vez, divida-o em 4 partes iguais e pinte $\frac{3}{4}$.



d) $\frac{2}{3}$ é maior, menor ou igual a $\frac{3}{4}$? $\frac{2}{3}$ é menor que $\frac{3}{4}$

e) $\frac{2}{3}$ é maior, menor ou igual a $\frac{4}{6}$? $\frac{2}{3}$ é igual a $\frac{4}{6}$

3. Veja as figuras:



• Agora responda:

- a) Que fração do triângulo foi pintada de vermelho? $\frac{1}{3}$
- b) Que fração do polígono de 6 lados foi pintada de azul? $\frac{5}{6}$

As comparações ocorrem entre frações com denominadores diferentes, o que, neste momento da aprendizagem, exige um trabalho no concreto, pois é o recurso que permite verificar as diferenças e até mesmo as equivalências, empregando os termos "é maior que", "é menor que" ou "é igual a", na língua natural.

Ainda nessa série, a resolução de problemas contextualizados com ilustrações pictóricas ou registro figural (figuras geométricas) trata as frações como operadores, sendo que neste caso a operação a ser realizada é a divisão.

Na 4^a. série, páginas 88-89, na atividade "Frações das figuras", o aluno identifica a fração correspondente à parte colorida da figura e ora completa o espaço em branco para o registro numérico, ora o espaço é preenchido na língua natural, portanto, é efetuada a coordenação entre o registro figural (F), o numérico na forma de fração (N) e em língua natural (LN).

Na atividade "Frações de um retângulo", o aluno passa a atuar sobre a figura, efetuando as divisões no retângulo e colorindo a fração indicada na folha. Nessa

atividade de repartir o retângulo em partes iguais, não fica implícita a questão da comensurabilidade, tomando-se frações adequadas à operação de dividir (p.89 4ª série).

A professora vai lhe dar uma folha com vários retângulos iguais. Você deve pintar em cada um a fração indicada:



- Usando régua, cada retângulo será dividido em partes iguais. Em três partes para pintar $\frac{1}{3}$, em seis partes para pintar $\frac{5}{6}$, etc.
- Examinando e comparando as frações pintadas, responda às questões:
 - a) Duas das frações pintadas correspondem à metade. Quais são?
 $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{6}$
 - b) Quais são as frações maiores que $\frac{1}{2}$? $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{6}$ e $\frac{5}{6}$
 - c) Qual fração é menor que $\frac{1}{4}$? $\frac{1}{6}$
 - d) Qual é a maior dentre as frações pintadas? $\frac{5}{6}$
 - e) Qual é a menor? $\frac{1}{6}$

Com base nas representações no registro figural, são propostas as comparações entre as frações que serão realizadas no registro numérico, empregando os símbolos $>$ (*maior que*), $<$ (*menor que*) e $=$ (*igual a*), cuja significação sucede aos símbolos.

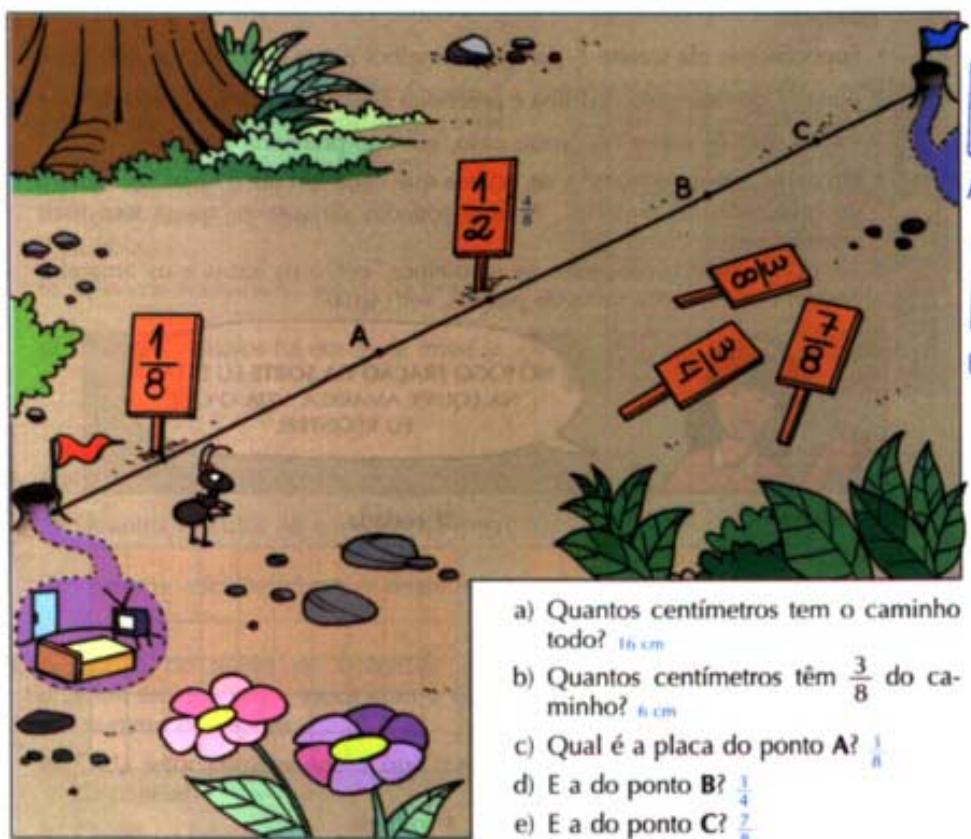
Nesta 4ª. série, aparece a primeira atividade envolvendo ordenação de frações com denominadores diferentes (p. 92 - 4ª série)

92

FRAÇÕES

NESTA PÁGINA, VOCÊ PRECISARÁ DE UMA RÉGUA.

1. A formiga está colocando placas no caminho que vai de sua casa até a casa do namorado. Ainda serão colocadas placas nos pontos A, B e C.



- a) Quantos centímetros tem o caminho todo? 16 cm
b) Quantos centímetros têm $\frac{3}{8}$ do caminho? 6 cm
c) Qual é a placa do ponto A? $\frac{1}{2}$
d) E a do ponto B? $\frac{3}{4}$
e) E a do ponto C? $\frac{7}{8}$

Embora a atividade seja colocar nos pontos A, B e C as placas correspondentes às frações, esta correspondência entre a fração e o ponto na reta (representação do caminho que vai da casa da formiga até a casa do seu

namorado), só será possível depois do aluno medir o comprimento total do caminho e identificar o comprimento correspondente a cada uma das frações. Nesse caso, a fração atua como um operador.

O segundo exercício apresenta o enunciado na língua natural e solicita que o aluno construa um segmento AB de medida 12 cm e entre essas extremidades coloque três placas. Aqui as instruções oferecidas pelo exercício para colocação das placas são repetidas: *"Uma delas marcando $\frac{1}{4}$ do caminho, outra marcando $\frac{2}{4}$ e a última marcando $\frac{3}{4}$ ".*

Novamente encontramos um segmento adaptado à unidade do fracionamento. A ordem das frações na reta está induzida pela instrução, então, a primeira posição para $\frac{1}{4}$, a segunda posição para $\frac{2}{4}$ e a última ou a terceira posição para $\frac{3}{4}$ assim cabe ao aluno trabalhar a fração como operador, isto é, efetuando os cálculos, $\frac{1}{4}$ de 12 = 3, $\frac{2}{4}$ de 12 = 6 e $\frac{3}{4}$ de 12 = 9 e determinar os pontos na reta. Não é abordada a questão de $\frac{1}{4}$ ser a distância entre duas posições consecutivas, razão pela qual o numerador aumenta uma unidade.

Mais adiante (p.172) as frações são retomadas, visando a leitura das mesmas de acordo com o denominador. Os registros fracionários e na língua natural (como se escreve e lê) são articulados com o registro figural. Problemas para resolução mental são apresentados, cujas representações pictóricas ilustram uma situação problema em que o aspecto envolvido é o da parte/todo.

Em seguida, as operações de adição e subtração de frações são introduzidas; percebe-se a existência de coordenação entre o registro figural e o fracionário é, neste último, que o tratamento ocorre envolvendo a adição.

175

ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE FRAÇÕES

1. Leia a história:

O nome dessa história é $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3}$

Manual
Pedagógico
Página
35e36

Também podemos chamá-la assim: $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$.

- Copie e complete:
Lendo a história ao contrário, ela teria outro nome: $\frac{3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. Também podemos chamá-la assim: $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

A história em quadrinhos (p. 175) abordando a adição de frações visa à equivalência de registros numéricos $\frac{3}{3} = 1$ e, ao mesmo tempo, engaja a operação

inversa, $\frac{3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ ou $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Observamos que o enfoque procura dar ênfase à operação, não pensando em subtração de fração com denominadores iguais $\frac{3}{3}$ e $\frac{1}{3}$, mas sim, pensá-las como o todo (unidade) e deste subtrair uma fração.

Nesta série, as equivalências são introduzidas no registro figural, articulando-o com os diferentes registros fracionários (p.176)

Ainda nessa 4^a. série, as comparações entre frações de denominadores diferentes ocorrem tal como na série anterior. Assim, o exercício 2 da página 177, envolve a escolha dos símbolos de "> (maior que), < (menor que) e = (igual a)" e toma como parâmetro o círculo do exercício anterior que foi dividido em seis partes iguais.

176

PARTES IGUAIS COM DIFERENTES REPRESENTAÇÕES

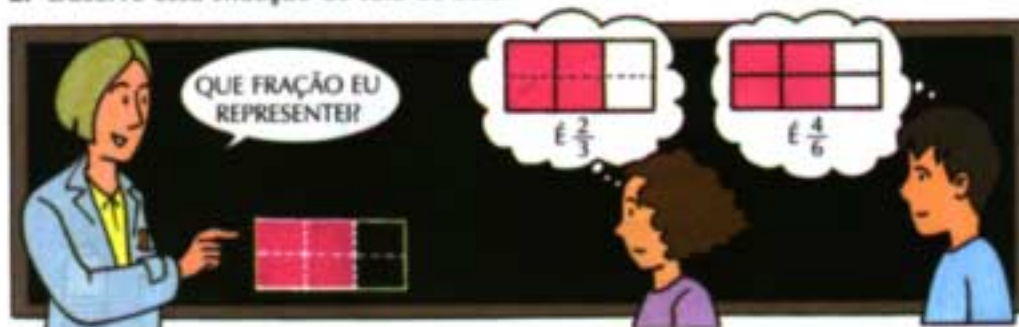
1. Pinte $\frac{1}{3}$ de dois modos diferentes:



• Desenhando a mesma figura, pinte $\frac{1}{3}$ de outras duas maneiras.

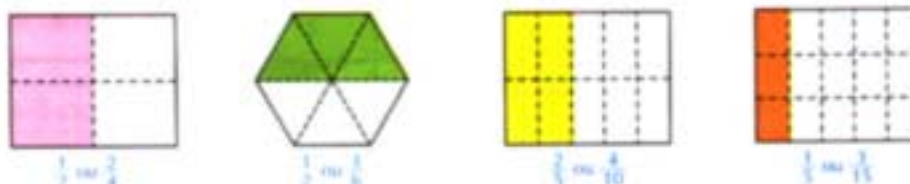
Por exemplo: =

2. Observe essa situação de sala de aula:



Carolina e Diogo acertaram. Eles viram a figura de maneiras diferentes: Carolina pensou nos **terços** e Diogo nos **sextos**.

• Agora, é com você. Indique de dois modos a fração representada:



3. Veja a discussão:



- a) Efetue os cálculos que a menina pediu. Os resultados são iguais? *Sim, $\frac{2}{3}$ de 36 é 24, $\frac{4}{6}$ de 36 é 24 também.*
- b) O que você acha: $\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{6}$ indicam quantidades iguais? *Sim, indicam quantidades iguais.*

ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE FRAÇÕES

177

1. Observe o círculo:



• Agora, responda:

- Que fração do círculo é a parte amarela? Responda de dois modos. $\frac{2}{6}$ ou $\frac{1}{3}$
- Agora pense em duas partes azuis e uma amarela. As três correspondem a que fração do círculo? Responda de dois modos. $\frac{3}{6}$ ou $\frac{1}{2}$
- Quantos sextos do círculo cabem em um terço dele? $\frac{2}{6}$
- Quantos sextos cabem em dois terços? $\frac{4}{6}$
- Quantos sextos cabem em $\frac{1}{2}$ círculo? $\frac{3}{6}$

2. Copie e complete com $>$ ou $<$ ou $=$:
maior que menor que igual a



- | | |
|--------------------------------|--------------------------------|
| a) $\frac{3}{6}$ $\frac{1}{2}$ | d) $\frac{3}{3}$ $\frac{6}{6}$ |
| b) $\frac{2}{3}$ $\frac{4}{6}$ | e) $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{6}$ |
| c) $\frac{2}{3}$ $\frac{5}{6}$ | f) $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ |

3. Continue examinando o círculo do exercício 1. Copie e complete:

a)

$$\frac{1}{6} + \text{■} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} - \text{■} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \text{■}$$

b)

$$\frac{2}{3} - \text{■} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \text{■} = 1$$

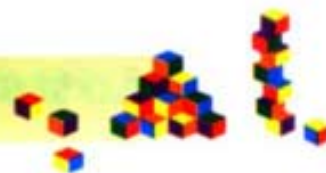
$$1 - \frac{1}{3} = \text{■}$$

O exercício 3 apresenta operações de adição e subtração de frações com denominadores diferentes. Não se trata de adição ou subtração direta, pois na fração a ser adicionada ou subtraída deverá ser identificada inicialmente a porção do círculo, o que envolve a conversão do registro figural (círculo dividido em 6 partes iguais do exercício 1) para o registro numérico.

A atividade "Ação" (p.178) possibilita efetuar operações com frações. Como o próprio título sugere - ação - o aluno torna-se agente construtor do material que irá manipular para realização das operações matemáticas.

178

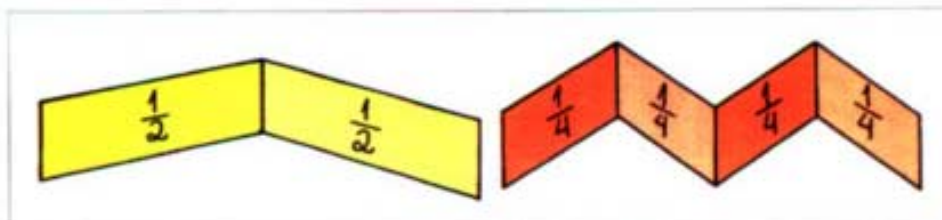
AÇÃO



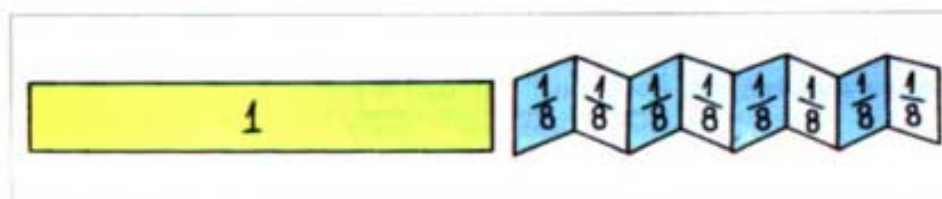
Frações e papel dobrado

1. Vamos fabricar o material.

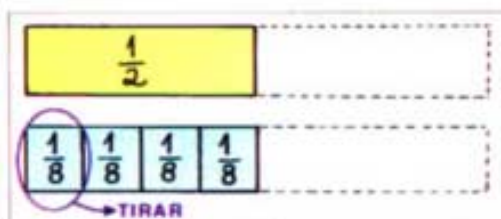
- Corte 4 tiras retangulares de papel com o mesmo tamanho.
- Dobre uma das tiras ao meio e marque $\frac{1}{2}$ em cada parte.
- Dobre outra tira para que fique dividida em 4 partes iguais e marque $\frac{1}{4}$ em cada parte:



- Faça o mesmo com a terceira tira, de modo que cada parte seja $\frac{1}{8}$ da tira. Finalmente, a tira que não foi dobrada será a unidade. Marque 1 nela:



2. Comparando as tiras, podemos efetuar adições e subtrações. Veja:



Se eu tirasse $\frac{1}{8}$ de $\frac{1}{2}$, restariam $\frac{3}{8}$.

Por isso, escrevo: $\frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$.

- Agora, coloque as 4 tiras na sua frente e observe-as para efetuar os cálculos. Copie e complete:

a) $\frac{1}{2} - \frac{3}{8}$ $\frac{1}{4}$
 $\frac{1}{2} + \frac{1}{8}$ $\frac{5}{8}$

b) $1 - \frac{1}{4}$ $\frac{3}{4}$
 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ $\frac{3}{4}$

c) $\frac{1}{4} - \frac{1}{8}$ $\frac{1}{8}$
 $\frac{3}{4} + \frac{1}{8}$ $\frac{7}{8}$

Na atividade seguinte (p.179), "*Frações em seqüência*" o material a ser manipulado são figuras geométricas, um triângulo pequeno (vermelho), um trapézio (verde) equivalente a três triângulos vermelhos e um triângulo grande (amarelo) igual a três trapézios verdes.

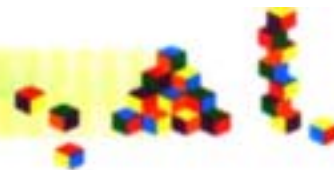
Esta equivalência entre as figuras é envolvida por três dos quatro exercícios da atividade.

No 4º exercício, parte-se do menor triângulo, registro figural (triângulo vermelho) correspondente ao registro fracionário $\frac{1}{9}$ e deve-se ir acrescentando um triângulo vermelho em cada uma das passagens, até chegar à fração $\frac{9}{9} = 1$. Conforme seja possível obter-se uma equivalência, por exemplo, três triângulos vermelhos equivalem a um trapézio verde, é realizada a substituição das figuras. Há, portanto, uma atividade que demonstra a equivalência no registro figural e no fracionário.

Os exercícios da página 180 exploram essas conversões trabalhadas na atividade "*ação*" com problemas descritos em língua natural com situações do cotidiano, além de utilizar as figuras da atividade para efetuar comparações no registro fracionário, e também efetuar as operações de adição e subtração no registro fracionário.

Os problemas que aparecem na página 182, estão no registro da língua natural e percebemos que a fração é trabalhada como operador, seja dentro de um conjunto discreto de elementos ou em relação a um número. Portanto, os exercícios sempre estão articulando os registros figural e o numérico na forma fracionária.

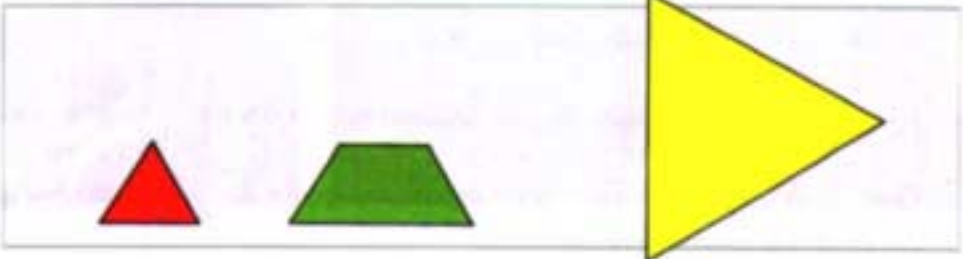
AÇÃO



179

Frações em seqüência

1. Recorte os triângulos e trapézios da folha que a professora vai lhe dar. Cole em cartolina e pinte como na figura:



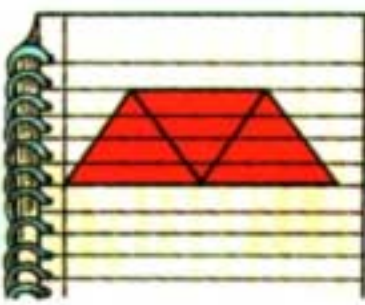
2. Com 3 triângulos vermelhos você monta um trapézio igual ao verde. Veja o desenho:



a) Com 3 trapézios verdes dá para montar um triângulo igual ao amarelo. Desenhe para mostrar como se faz.



b) Com os triângulos vermelhos dá para montar um triângulo igual ao amarelo. Desenhe para mostrar como se faz.



3. Vamos combinar que o triângulo amarelo vale 1 inteiro. Nele, cabem 3 trapézios verdes. Por isso, cada trapézio verde vale $\frac{1}{3}$ do triângulo. Quanto vale cada triângulo vermelho? $\frac{1}{9}$

4. Vamos formar uma seqüência:


 $\frac{1}{9}$


 $\frac{2}{9}$


 $\frac{3}{9}$ ou $\frac{1}{3}$


 $\frac{4}{9}$

?

Cada figura tem $\frac{1}{9}$ a mais que a anterior e 3 triângulos vermelhos sempre devem ser trocados por 1 trapézio verde. Agora, prossiga até chegar a 1 inteiro. Faça os desenhos escrevendo em cada um a fração correspondente.



Resolva
Problemas
de
Frações

Este livro
pode ser usado
em grupos.
Dividindo-o em
4 grupos ou
classe, você
pode trabalhar
em grupo e
avaliar os
resultados.
Este livro
pode ser usado
em grupo e
avaliar os
resultados.

180

FRAÇÕES: QUESTÕES SOBRE AS AÇÕES

1. Dê uma olhada na página 178. Relembre as frações com que você trabalhou naquela página. Agora, responda:

a) Dona Lídia preparava um bolo. Primeiro ela usou $\frac{1}{2}$ litro de leite. Depois, usou $\frac{1}{4}$ de litro de leite. Quanto leite ela usou? $\frac{3}{4}$

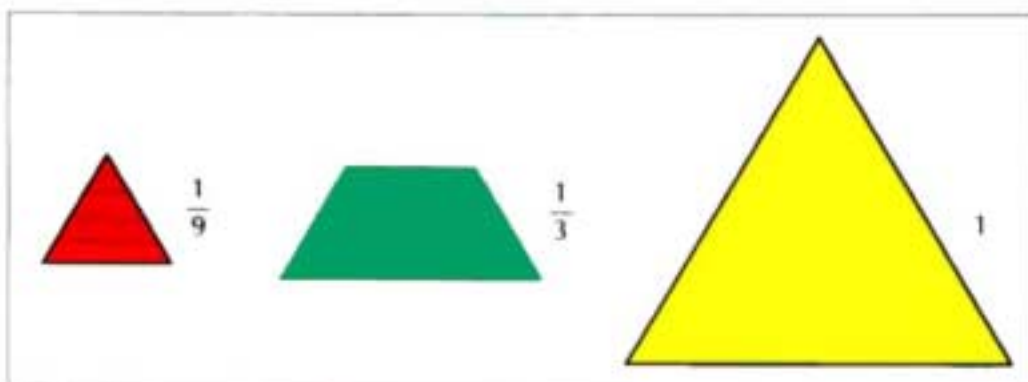
b) Um pacote de manteiga, com $\frac{1}{4}$ de quilo, custa 600 pratas.

Quanto vai custar $\frac{1}{2}$ quilo dessa manteiga? 1 200 pratas

c) Foram consumidos $\frac{5}{8}$ de um bolo. Sobrou mais ou menos que $\frac{1}{2}$ bolo? Menos que $\frac{1}{2}$ bolo.

d) Quem andou $\frac{1}{4}$ de um caminho e depois avançou mais $\frac{1}{8}$ do caminho, que fração do caminho percorreu? $\frac{3}{8}$

2. Agora relembre as frações com que você trabalhou na página 179.



Copie e complete com as expressões , ou :

a) $\frac{3}{9}$ $\frac{1}{3}$

c) $\frac{5}{9}$ $\frac{2}{3}$

e) $\frac{7}{9}$ $\frac{2}{3}$

b) $\frac{3}{3}$ $\frac{9}{9}$

d) $\frac{3}{3}$ 1

f) $\frac{4}{9}$ 1

3. Agora, efetue:

a) $\begin{array}{|l} 1 - \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{9} \end{array}$

b) $\begin{array}{|l} \frac{2}{3} + \frac{2}{9} \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{9} \end{array}$

c) $\begin{array}{|l} \frac{8}{9} + \frac{1}{9} \\ \frac{5}{9} + \frac{1}{9} \end{array}$

A maior parte dos exercícios apresenta grandezas contínuas (retângulos, polígonos) com as repartições já realizadas, cabendo ao aluno identificar qual fração corresponde à parte colorida da figura. Assim, também são introduzidas as operações de Adição e Subtração de frações inicialmente envolvendo frações de mesmo denominador, chegando à *unidade* pela fração correspondente ao inteiro 1.

As frações equivalentes são trabalhadas com base na representação figural cuja identificação correspondente à parte colorida, que pode ser representada numericamente por uma multiplicidade de frações podendo ser de grande valia ao aluno quando operar no registro fracionário, no qual as frações envolvidas não tenham o mesmo denominador.

A retomada das frações na 5^a. série, apresenta uma receita culinária, mostrando a aplicação das frações no dia-a-dia. Como é demonstrado, este capítulo 5 (p. 110) tratará do significado das frações e, no capítulo seguinte, dos "*números com vírgula*".

Notamos neste enfoque que as frações, embora não tenham sido definidas e, por enquanto não o serão, são tratadas como um registro numérico que para a maior parte dos exemplos e exercícios essa representação precisa de um complemento da figura. Por exemplo: "*Dividindo o retângulo em três partes iguais e pintando 1 parte, essa parte é $\frac{1}{3}$ do retângulo*".

Desta abordagem, são apresentadas as seguintes conclusões: (p.111)

- *Frações indicam partes de figuras ou de quantidades.*
- *Às vezes, uma fração pode indicar a figura (ou quantidade) toda.*

Outra questão é quanto aos números que serão estudados no capítulo 6, "*números com vírgula*" que mesmo não tendo sido devidamente apresentados, pois tal tratamento possui um aspecto de popularização ou até mesmo de "vulgarização" a que Brousseau atribui como um obstáculo para a conceituação do próprio número decimal, estes são concebidos com *status* de número.

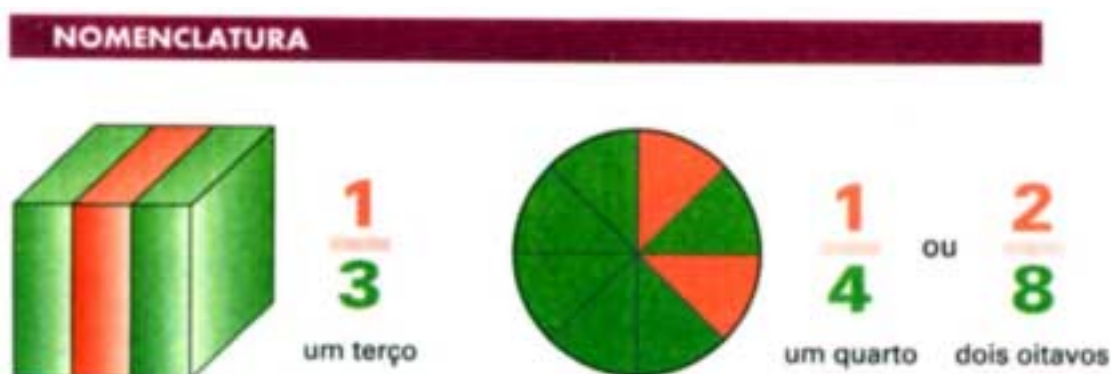
Observamos que o intuito da expressão "*números com vírgula*" é evidenciar a presença da vírgula no registro do número decimal, que os alunos poderão reconhecê-lo em diversas situações e locais, razão pela qual na atividade "*Conversando sobre o texto*" só encontramos referência aos "*números com vírgula*" (p. 112).

Quanto aos exercícios relacionados às frações, consiste em identificar a parte colorida ou o número correspondente a um registro figural que apresenta uma ou mais partes coloridas ou uma quantidade de elementos.

As comparações que ocorrem entre frações de denominadores diferentes, são realizadas com parâmetro no registro figural (um mesmo retângulo e são determinadas diferentes frações) e os símbolos $>$ (maior) ou $<$ (menor).

Mesmo quanto aos exercícios propostos para casa, na tarefa de comparar frações, cabe ao aluno a construção do registro figural e pintar as frações correspondentes de modo que possa realizar as comparações entre as frações de denominadores diferentes. Portanto, as comparações entre as frações ocorrem no concreto.

Na página 116, temos uma abordagem sobre "*nomenclatura*".



Na representação da fração, há dois números separados por uma barra horizontal. O número abaixo da barra é o **DENOMINADOR**. Ele indica em quantas partes iguais algo foi dividido. O número em cima da barra é o **NUMERADOR**. Ele indica quantas das partes iguais foram consideradas.

116

Embora sejam mencionados a representação de fração e o uso da barra horizontal para separar esses dois números que têm designação e funções próprias, não há uma definição do que seja uma fração nem mesmo qualquer referência de que a fração represente um número.

Mas no dicionário ilustrativo da 7^a. série (p.297), aparece "números fracionários" com a seguinte explicação:

Números fracionários são frações como $\frac{2}{7}$ e ainda decimais como -3,5 ou 1,355..

Percebemos, desse modo, uma confusão entre o significado de representante/representado. O registro fracionário acima não corresponde a nenhum dos dois registros decimais. Os números nos registros decimais poderiam ter sido transformados em fração por meio da atividade de conversão do registro decimal ao fracionário, o que evidenciaria que um número admite representações distintas.

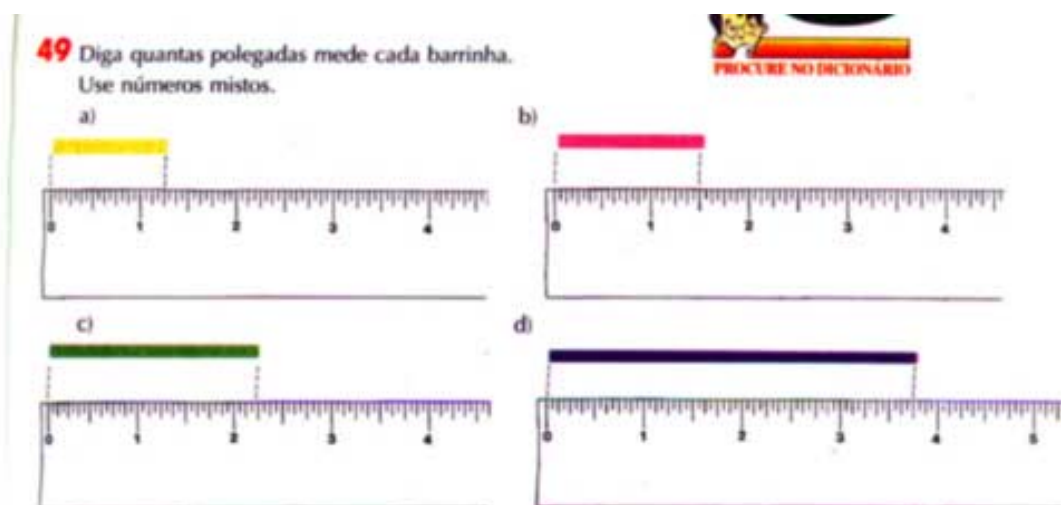
Voltando à análise do livro da 5ª. série, verificamos que há uma pequena referência histórica do aparecimento das frações no Egito há mais de 3.000 anos, no tempo dos faraós e da construção das pirâmides, mostrando que o fracionamento de uma unidade surgiu da impossibilidade dos números inteiros para realizar medida. Quando se efetua uma medição, empregando uma unidade ou medida padrão dificilmente essa unidade caberá em um número inteiro de vezes na grandeza a medir, o mais freqüente é que sempre reste uma parte menor que a unidade.

Países como Inglaterra e Estados Unidos, ainda nos dias atuais, empregam a unidade de medida "*polegada*", unidade essa que é subdividida em meios, quartos e oitavos. No Brasil, o uso da unidade polegada é aplicada na construção civil, por exemplo, os canos de ferro galvanizados usados em encanamentos são medidos em polegada, e os canos de PVC atualmente adotam o sistema métrico decimal, suas dimensões estão gravadas no corpo do tubo, contrariamente ao mencionado no manual.

Na página 127, é apresentada uma régua graduada utilizada para determinar o comprimento de objetos (alfinete, caixinha) cuja graduação está em polegada. O registro misto é adotado para descrever o comprimento do alfinete e da caixinha.

A atividade "*Conversando sobre o texto*" (p.128) é sobre os "*números mistos*", de frações e até mesmo das polegadas.

No exercício 49, é solicitado que o aluno indique em polegadas, usando "*números mistos*", quanto mede cada "*barrinha*".



Neste momento, a graduação da régua é diferente da unidade padrão de polegada e também não se refere à unidade padrão do sistema de medida decimal. Do modo como a questão é apresentada, podemos entender que a régua graduada é a real medida de polegada. Caberia um esclarecimento na questão quanto à figura ser uma representação de uma régua graduada em polegadas, pois segundo R. Duval uma representação figural não é o próprio objeto matemático, mas guarda propriedades deste.

Em situações anteriores, já havia sido tratada a noção de frações equivalentes, mas estas sempre foram ligadas ao registro figural, mostrando que uma mesma parte do todo podia apresentar distintos registros fracionários. Nesta 5ª. série, pelo fato de diferentes registros numéricos representarem uma mesma porção do todo, são denominadas frações equivalentes. A palavra equivalente é explicada pela fala de um personagem:

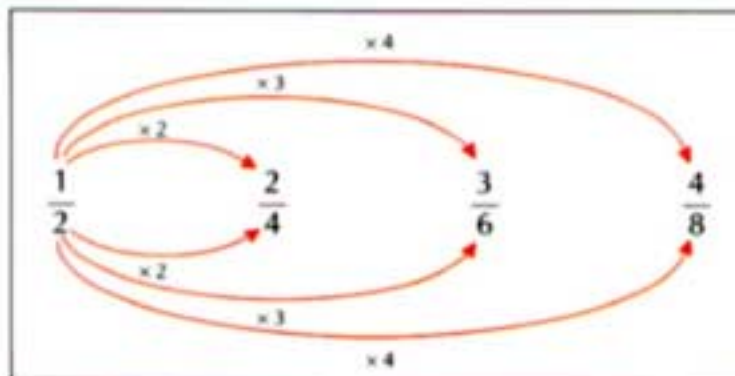
Equivalente
quer dizer de
igual valor

O tratamento matemático que se realiza no registro fracionário é introduzido de modo a encontrar outras frações equivalentes a uma fração dada.

No final, é colocada a questão: Percebeu a propriedade?

Esta propriedade vem logo em seguida, descrita em língua natural.

Você pode descobrir quando duas frações são iguais, sem precisar de figuras. Observe este esquema:



Percebeu a propriedade?

Multiplicando o numerador e o denominador de uma fração por um mesmo número, obtém-se uma fração igual à primeira.

132

As frações equivalentes serão mobilizadas nas operações de Adição e Subtração de frações e não mais se vinculará ao registro figural para obter a equivalência, e sim, realizar o tratamento no registro fracionário de modo a encontrar frações que tenham o mesmo denominador para que o cálculo possa ser executado.

No capítulo 3 - "*Operações com frações*" (p. 39- 7ª série) e o subtítulo "*Revendo frações*", há uma retomada das frações articulando o registro figural ao fracionário. Nos exercícios de revisão, existe uma mesma representação fracionária colocada em duas situações distintas, como pode ser observado nos exercícios 5 e 6 da página 40.

- 5** O garçom dividiu igualmente uma *pizza* entre três comensais: cada pessoa comeu $\frac{1}{3}$ da *pizza*.

$$1 : 3 = \frac{1}{3}$$

Na mesa ao lado, quatro pessoas pediram 3 pizzas para dividirem igualmente. Que fração de *pizza* cada pessoa receberá? Faça o desenho e indique a operação matemática efetuada.



- 6** Qual das três é maior: $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$ ou $\frac{2}{7}$?

$1 : 3 = \frac{1}{3}$, representa a parte que cada pessoa comeu de pizza e $\frac{1}{3} = 1 : 3 = 0,333...$ a sugestão de obtenção da escrita na forma decimal é indicada para realizar as comparações entre os três números no registro fracionário. O termo dízima periódica não é mencionado, apenas que o 3 *irá se repetir, sempre, sempre*.

As operações de adição e subtração efetuadas no registro fracionário envolvem um tratamento no registro figural. As equivalências observadas entre os registros figural e fracionário permitirão a atividade de conversão, pois trata-se de operações entre frações de denominadores diferentes.

Nos exercícios para casa (p. 41-43) que revisam os diferentes aspectos do registro fracionário, encontramos a coordenação entre o registro fracionário e o de porcentagem expresso por um número inteiro e o símbolo %.

Assim, o exercício 13 envolve uma coordenação entre três registros: o fracionário, o misto e a forma decimal para uma mesma operação de divisão.

Nesta mesma série de exercícios, o de número 16 apresenta duas retas graduadas, a primeira começando no 0 (zero), estão ordenados os pontos 1, 2 e 3 e, no espaço entre duas unidades consecutivas, existe uma subdivisão em quatro partes iguais; a segunda reta apresenta as posições -2, -1, 0 e 1, e as subdivisões em três partes iguais. Caberá ao aluno indicar a fração correspondente aos pontos colocados sobre as retas, dando os registros fracionário e misto.

As primeiras operações de adição e subtração no registro fracionário são realizadas com a coordenação dos registros figural e fracionário, mas nesse momento é mostrado o método prático que permite o cálculo dessas frações por meio do menor múltiplo comum (m.m.c.) a fim de se obter o denominador comum. O trabalho com o m.m.c. foi iniciado na 5ª. série, envolvendo o cálculo entre dois números e, nesta 7ª. série, foi retomado o exercício e incrementado para operar com três números.

Percebemos que o exercício 35 (p.47) apresenta uma tabela com cinco colunas onde estão registrados alguns números na forma mista; é a primeira vez que o livro usa a referência "*Forma Mista*". Na linha inferior, devem ser colocadas as formas fracionárias correspondentes às representações na forma mista, portanto, essa atividade envolve a conversão de registros.

35 Copie e complete a tabela. Tente fazer os cálculos mentalmente.

FORMA MISTA	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{3}$	$1\frac{1}{4}$	$1\frac{1}{5}$	$1\frac{1}{6}$
FORMA DE FRAÇÃO	$\frac{\quad}{\quad}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{\quad}{\quad}$	$\frac{\quad}{\quad}$	$\frac{\quad}{\quad}$

Nessa mesma página, a fração como operador passa a ser tratada como multiplicação.

Os exercícios da página 49 apresentam multiplicações com frações e até mesmo o cálculo das potências, no registro fracionário.

O cálculo de potências envolve algumas frações negativas, e a regra de sinais é dada ao lado do exercício como uma revisão.

É o primeiro momento em que aparece o título "*Divisão*" envolvendo frações. O enfoque dessa operação é distinto ao relacionado até esse momento, pois fracionar sempre esteve ligado a repartir, dividir em partes iguais. Assim, o enfoque é outro como propõe o texto da "tira pictórica" : "*Não pense em repartir 1 por $\frac{1}{3}$ e, sim, quantas vezes $\frac{1}{3}$ cabe em 1*". O registro figural que acompanha o relato mostra que $\frac{1}{3}$ cabe 3 vezes em 1.

Nos exercícios propostos, aparecem divisões entre frações e o cálculo de expressões numéricas, envolvendo as operações de adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação.

Nesta série de exercícios, há o de número 60 que envolve uma divisão entre números escritos na forma decimal, e sugere a mudança para o registro fracionário para facilitar o cálculo com lápis e papel, pois se este fosse feito na calculadora, o registro decimal seria mais viável.

As conversões entre registro decimal e fracionário são observadas nos exercícios 65 e 66. No primeiro deles, são dadas algumas frações que, na mudança para o registro decimal, resultam em dízimas periódicas. No seguinte, os cálculos

envolvendo as operações de divisão e multiplicação apresentam os registros de decimais exatos e dízimas periódicas. O livro sugere que as conversões para o registro fracionário sejam realizadas, aproveitando os resultados na forma decimal do exercício anterior. Até esse momento, a denominação de "dízimas periódicas" não é usada no manual e esta é tratada como número no registro decimal, com a característica de possuir alguns termos que se repetem.

A representação fracionária do número racional terá o *status* de número a partir da página 162, na 8ª. série, quando os conjuntos numéricos são abordados. Nesse momento, o termo "dízima periódica" é aplicado aos decimais não exatos e também há possibilidade da conversão destes na forma fracionária.

A reta numérica e a localização dos números racionais são abordadas por meio dos exercícios 37 ao 39, (p. 172 - 8ª série) e os de número 44 e 45 da página seguinte.

4.4. O registro decimal na CLD-2

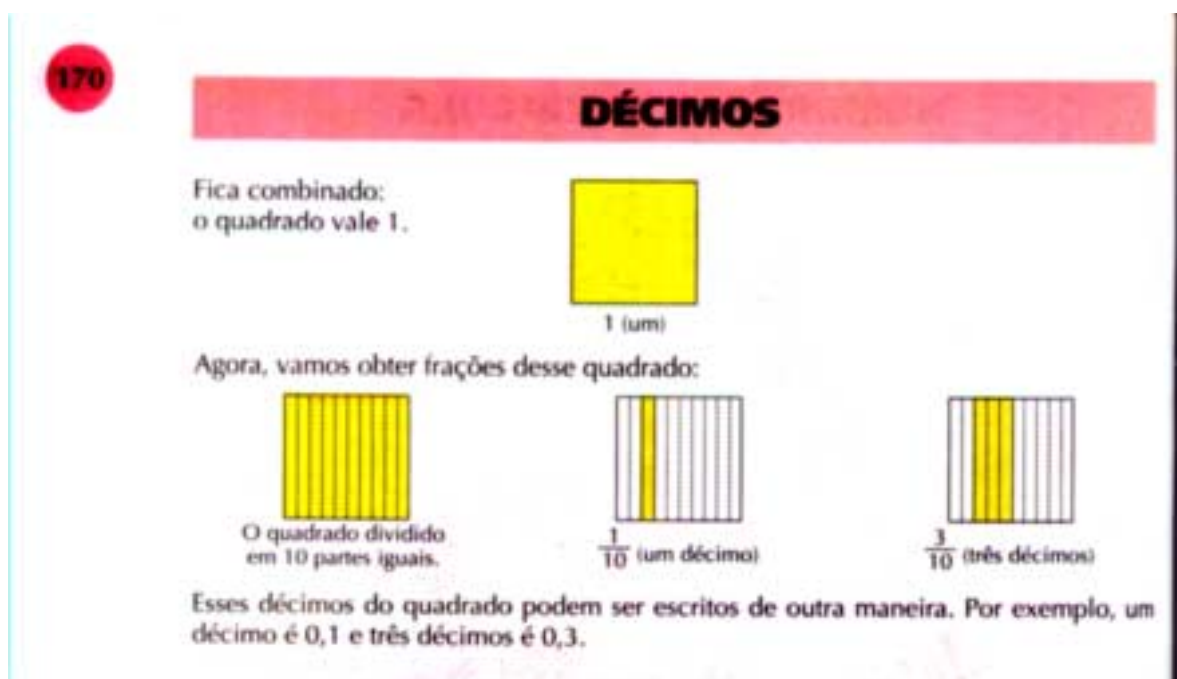
Passamos a examinar os decimais, que nesta coleção CLD-2, são freqüentemente, denominados como "*números com vírgula*".

Na terceira série, com o título "*Números com vírgula*" são apresentados alguns exemplos pictóricos ilustrando situações do cotidiano em que o número racional no registro decimal aparece.

Os exemplos pictóricos apresentados nas páginas 168 e 169, na 3ª. série, trazem informações tais como: altura máxima do túnel 4,2 m, o preço do "*nhac-burger*" R\$ 2,40 e a temperatura indicada no termômetro 36,5º C. É por meio

dessas informações que a atividade “*Conversando se aprende*” introduz o registro decimal.

O estudo dos números racionais no registro decimal propriamente ocorre a partir da página 170, com a introdução dos décimos que são articulados com o material dourado.



Verificamos que é estabelecida a correspondência: um quadrado vale 1 (todo). As frações desse quadrado são obtidas, dividindo-o em 10 partes iguais, sendo cada uma das partes correspondentes a $\frac{1}{10}$ (um décimo), que pode ser escrito de outra maneira, 0,1.

Desse modo observamos a coordenação entre os registros figural (F), a fração decimal (FD), o da língua natural (LN) e ainda o registro decimal (D) são apresentados todos juntos.

Nos primeiros exemplos da página 171, encontramos a conversão entre o registro figural (F) e o decimal (D) em ambos os sentidos. Segundo a teoria dos registros de representação de Duval, a atividade de conversão suscita dificuldades próprias por razões de congruência ou não, entre registros diferentes. A proposta do exercício envolve duas questões, uma que diz respeito à conversão, pouco natural, que é a passagem do registro figural realizado diretamente ao registro decimal, e a outra é a representação decimal estar envolvendo uma adição.

2. Agora, o retângulo é que vale 1:

171

DÉCIMOS

1. Agora, o círculo é que vale 1:



1 (um)



O círculo dividido em 10 partes iguais.



1,2 (um e dois décimos)

• Escreva o número com vírgula correspondente:

3. a)



0,8

b)



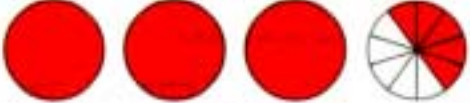
1,7

c)



1,4

d)



3,3

e)



0,8

A representação posicional é apresentada na língua natural, explicitando que: *“antes da vírgula, as unidades. Logo após a vírgula, os décimos”*.

Nos exercícios da página 172, são propostas articulações do registro figural (F) e o decimal (D), e no exercício 2, abaixo é explorada a conversão entre os registros decimal (D) e em língua natural (LN)

2. Copie e escreva por extenso:

1,1

0,7

2,3

5,4

A partir da página 175, aparecem as operações com decimais com base em problemas utilizando desde a quantia a pagar por um produto cujo valor por quilo é dado, até situações para se obter o número de pacotes de 0,5 kg. Atividades essas que associam o número decimal à medida.

Nesta 3ª. série são apresentados os "*décimos e medidas de comprimento*".

A régua graduada em centímetros traz subdivisões correspondentes a $\frac{1}{10}$ cm ou 0,1 cm. Nesse momento, os diversos registros tais como: o figural (F), a fração decimal (FD), o decimal (D), a língua natural (LN) são utilizados. Nesta abordagem, o décimo atua como operador, como pode ser observado pelo registro figural, cujo comprimento de $\frac{1}{10}$ cm, corresponde ao milímetro, embora neste momento isso não seja mencionado.

Os problemas da página 179 empregam seqüências de números no registro decimal em que a razão também é indicada neste mesmo registro. Nesses exercícios, os registros figural, simbólico e da língua natural são utilizados, mas as

SEQUÊNCIAS E PROBLEMAS

179

1. A pulga treina saltos na régua. Ela saiu da marca 2,1 cm e dá saltos de 1,3 cm.



- Nos seis primeiros saltos, a partir de 2,1, em que marcas da régua a pulga vai cair? 3,4; 4,7; 6,0; 7,3; 8,6 e 9,9.

2. Copie e complete cada sequência. Os aumentos são sempre de 2 décimos.

a)	0,1	0,3	0,5	?	?	?	?	?
b)	2,5	2,7	?	?	?	?	?	?
c)	4,6	?	?	?	?	?	?	?
d)	9,4	?	?	?	?	?	?	?

conversões não são observadas, pois a tarefa restringe-se ao tratamento no registro decimal pela adição. Situação semelhante é notada na página 180 no exercício 2.

Na página 180, o exercício 3 é o primeiro momento de uma proposta de ordenação de decimais de modo a ficarem na ordem crescente.

3. Escreva em ordem crescente:

3 1,7 4,0 3,1 1,5 2,3 3,8

Na 4ª. série, a noção de décimos também é trabalhada com o uso do material dourado. Por meio do exercício 1 da página 94, é abordada a questão das

possibilidades de representação para o número: “podemos representar uma quantidade de décimos de duas maneiras: $\frac{3}{10}$ escrita de fração ou 0,3 escrita com vírgula”. Observa-se que também nesta série os decimais são apresentados “como números com vírgula”.

O milímetro é introduzido a partir do décimo de centímetro, equivalendo a **1 mm = 0,1 cm** e sua representação figural ilustra o comprimento do milímetro. Os exercícios exploram as medidas de comprimento e articulam as transformações de unidades, centímetros para milímetros.

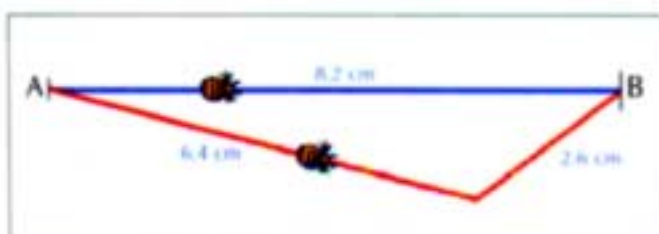
Destacamos os exercícios 1 e 4, da página 95, cujas resoluções implicam em operações de adição, subtração e divisão com os números na forma decimal. É preciso fazer a conversão dos registros da língua natural ao figural, o que nesse caso não é uma tarefa congruente, pois há tratamentos numéricos implícitos.

1. Desenhe três retângulos de acordo com a tabela; mas, antes, responda: Quais são as medidas relativas às letras A, B e C?

Retângulo	Comprimento (em cm)	Largura (em cm)	Perímetro (em cm)
vermelho	4,0	3,5	A 11,0
azul	3,0	B 2,0	10,0
preto	C 2,8	1,5	8,6

Exercício 1 – A construção do retângulo vermelho é realizada a partir das

4. Meça os dois caminhos que ligam A com B.



- a) Qual deles é o mais comprido? *Vermelho*
 b) Quantos centímetros ele tem a mais que o outro? *11,8 cm*

medidas indicadas na tabela (4,0 cm de comprimento e 3,5 cm de largura), e a medida do perímetro envolve a soma dos quatro lados – tratamento no registro decimal. No entanto, a largura do retângulo azul é desconhecida, mas sabendo-se que seu perímetro é 10 cm, conclui-se que o semiperímetro é 5 cm, operação essa efetuada por meio de um tratamento (dividir por 2). Conhecendo-se que o comprimento é 3,0 cm, então, a largura será obtida por outro tratamento numérico, isto é, $5,0 - 3,0 = 2,0$ que corresponde à medida da largura. De maneira análoga, é preciso encontrar o comprimento do retângulo preto.

Segue abaixo o exercício 4 (p.95 – 4^a.série).

No exercício 4, deve-se medir o comprimento dos segmentos, azul e vermelho para poder efetuar sua comparação, cuja diferença entre os comprimentos precisa ser indicada pelo registro numérico na forma decimal.

Nas duas questões estudadas acima, são necessários efetuar tanto conversões como as que ocorrem no registro decimal (D) e o figural (F), assim como os tratamentos realizados dentro do registro decimal (operações). Mas, os alvos das atividades está nas operações (adição e subtração) e não propriamente nas conversões.

Mais adiante, página 111 o registro decimal é retomado na apresentação da noção do centésimo.

2. Veja o exemplo:



• Escreva o número correspondente a cada desenho:

a)  1,12	c)  0,22	e)  2,08
b)  1,8	d)  0,4	f)  0,08

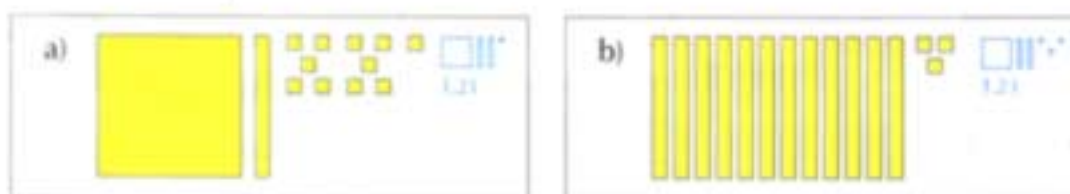
As conversões ocorrem entre os registros figural (F), em língua natural (LN) e o decimal (D). A equivalência entre 1 décimo e 10 centésimos é apresentada no registro figural. São proporcionados exercícios que envolvem as conversões do registro figural (F) para o decimal (D), assim como no sentido inverso.

O exercício 2 da página 112 possibilita um tratamento no registro figural com a “troca” (equivalência) de 10 centésimos por 1 décimo. O ícone colocado à esquerda desta página, destaca que o “*algoritmo que aparece na página 113 se baseia nessas trocas*”.

2. Leia a história:



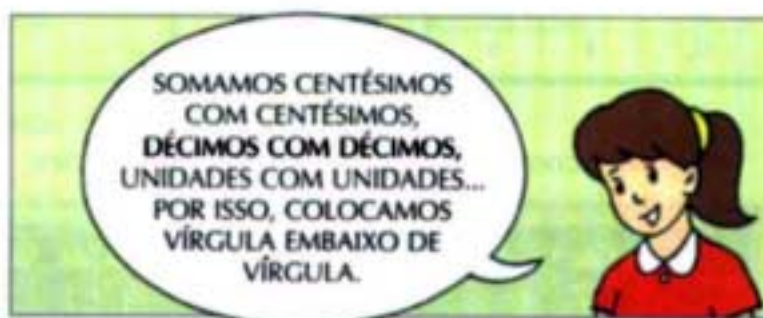
- Agora, é com você. Copie as figuras e faça a troca, desenhando e escrevendo o número correspondente:



Os dados do exercício 2 da página 113 propõem a atividade de adicionar números no registro decimal. A maneira de operar é enunciada em língua natural. Há necessidade de conversão entre os registros admitida como se fosse natural para os alunos.

**2. A adição que você fez com desenhos, pode ser feita com números.
Veja o exemplo:**

unid.	déc.	cent.
1,	2	6
+ 0,	0	5
1,	3	1



• Agora, copie e faça as contas da lousa:



Na página 115, novamente encontramos problemas num contexto do cotidiano nos quais estão envolvidos o registro fracionário e o decimal. No exercício 1, a fração atua como operador sobre a unidade de medida kg (quilograma) e o valor da mercadoria no sistema monetário expresso em reais.

1. Dona Rosa vai fazer uma pequena feijoada. Veja os preços dos ingredientes:

feijão preto (1/2 kg) R\$ 0,85
paio (1/4 kg) R\$ 2,88
um maço de couve R\$ 1,10

carne-seca (1/4 kg) R\$ 3,35
costela salgada (1/4 kg) R\$ 2,27
farinha (1/2 kg) R\$ 0,58

Quanto Dona Rosa vai gastar com esses ingredientes? **R\$ 11,01**

Outro sistema monetário de mesma estrutura que a moeda corrente no país (o real) é apresentado na página 119, cuja unidade monetária é o “samba”.

Os milésimos são apresentados pela primeira vez na página 123 e estão relacionados às unidades de peso como o quilograma e o grama. Há necessidade de se efetuar a conversão entre o registro figural (F) e o decimal (D) e também nos exercícios é preciso articular o registro na língua natural (LN) e no decimal (D).

QUILOGRAMA E GRAMA

123

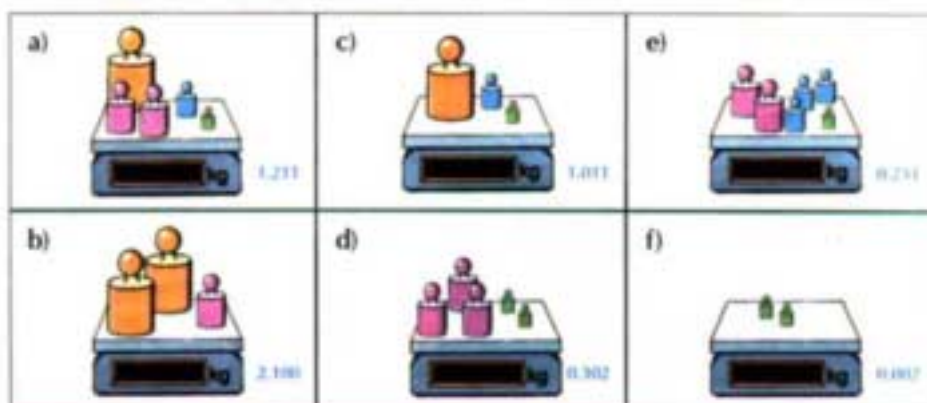
1. Observe a balança e as massas:



Veja o que a balança marca:



• Acabou a luz, e a balança não marca mais nada. O que ela deveria marcar?



2. O visor da balança marca em quilogramas. Você deve copiar e escrever em gramas. Repare que $1 \text{ kg} = 1\,000 \text{ g}$.

Exemplo: → 1205 g

• Agora é sua vez:

2.015 kg

0.350 kg

0.007 kg

Na página 125, no exercício 2 é proposta a comparação entre decimais visando destacar a equivalência entre as diferentes "escritas" $0,7 = 0,700$, conforme ícone do autor (*"perceber igualdades como $0,7=0,700$, porque a diferença entre eles é zero centésimos e zero milésimos é um passo importante na compreensão da escrita decimal com vírgula"*).

2. Observe:

$0,72$ 7 décimos 2 centésimos	$0,700$ 7 décimos 0 centésimo 0 milésimo	$0,699$ 6 décimos 9 centésimos 9 milésimos	$0,7$ 7 décimos
-------------------------------------	---	---	--------------------

- Dois desses números são iguais. Quais são? $0,700 = 0,7$
- Qual é o maior dos quatro números? $0,72$
- Qual é o menor dos quatro números? $0,699$
- Escreva outro número, menor que todos os quatro. $0,515$ (exemplo)

Nestes exercícios, notamos uma ênfase no tratamento com a terceira casa decimal, o milésimo. O exercício 2, item c) da página 126 apresenta uma seqüência, cuja razão é 5 milésimos, ou como o problema coloca, o *aumento é 5 milésimos*. Sendo o primeiro elemento desta seqüência 1,99, o segundo 1,995 o terceiro elemento assim como o quinto, sexto e sétimo caberá ao aluno descobrir o valor. O autor faz o seguinte comentário: *"Para muitos alunos é uma surpresa que, por exemplo, entre 1,99 e 2 exista um número como 1,995"*.

2. Copie e complete as seqüências:

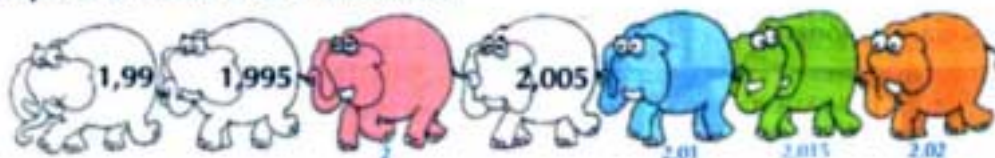
a) Esta aumenta 4 décimos de um número para o seguinte:



b) Agora o aumento é de 6 centésimos:

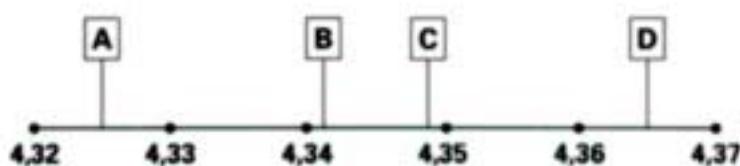


c) Aqui, o aumento é de 5 milésimos:



Uma primeira atividade de localização na reta numérica aparece na página 129. Os pontos de referência são números com duas casas decimais (centésimos), e os números que devem ser colocados no lugar das placas são decimais que

1. Observe a reta numérica:



• Copie a reta e as placas, colocando as placas no lugar das letras:

4,349 **4,341** **4,365** **4,325**

A – 4,325
B – 4,341
C – 4,349
D – 4,365

Atenção! Não pense que a primeira placa corresponde à letra A. apresentam três casas depois da vírgula (milésimos).

Ainda nesta mesma página, encontramos a comparação no registro decimal, o que envolve a escolha entre os símbolos $>$ (*maior que*), $<$ (*menor que*) e $=$ (*igual que*).

Mais adiante, na página 144 com o título “*Decimal vezes 10*” são apresentadas situações do cotidiano (representação pictórica) cujo cálculo (tratamento) a multiplicação por 10 está envolvida. Com apoio do material dourado, são estabelecidas as correspondências conforme ilustração abaixo.



Na margem esquerda da página 144, aparece um ícone recomendando que o professor incentive os alunos a trabalharem esta página sem dar explicações prévias. E, posteriormente, procurar obter dos alunos as explicações de como realizaram a atividade de modo a levá-los a concluir a regra. Na página seguinte, a regra é formalizada como podemos observar a seguir: “*Multiplicar por 10 um número com vírgula, é só mudar a posição da vírgula*”. No registro numérico, é apresentada a operação $10 \times 0,21 = 2,1$. Há reforço na representação em detrimento da

1. Leia o que a menina diz:



• Copie e complete:

Quando ela mudou a posição da vírgula os 2 décimos passaram a ser 2 e o 1 centésimo passou a ser 1 centésimos.

conceituação numérica.

O deslocamento da vírgula para a direita é mostrado no registro numérico, mas este fato poderia ser elucidado em língua natural de modo a facilitar a compreensão do algoritmo, pois na essência multiplicar por 10 corresponde a “aumentar” o valor do número em 10 vezes. Assim como o entendimento das equivalências: 20 décimos correspondem a 2 inteiros e 10 centésimos corresponde a 1 décimo.

Logo, multiplicar por 10 e depois novamente multiplicar por 10 é equivalente a multiplicar por 100.

A atividade “Ação” na página 147 trabalha o sistema monetário. É elaborado o material (cédulas e moedas). Os problemas estão expressos na língua natural e as operações envolvem a divisão (repartir) uma quantia de dinheiro entre um número dado de pessoas. Novamente, aparece o registro fracionário, que nos exercícios 5 e 6 atua como operador; por exemplo, calcular $\frac{1}{3}$ de uma quantia de dinheiro.

No algoritmo da divisão apresentado em “*Quociente decimal*”, é desenvolvido o tratamento numérico, página 148, faz a conversão do registro simbólico para a língua natural.

Ainda nessa 4^a. série, página 170, a atividade proposta explora os registros figurais, o numérico decimal e também a língua natural. O registro decimal está associado ao sistema de medidas, cujas unidades abordadas são o quilograma e a tonelada. Há uma grande diversidade de ações que o aluno deve efetivar, sempre pautadas por conversões de registros não tão evidentes.

Na 5^a. série, o número racional no registro decimal é retomado numa abordagem vinculada à medida de grandeza.

148

QUOCIENTE DECIMAL

1. Márcia e Helena são costureiras. Elas têm um tecido de 3 m e vão dividi-lo ao meio. Qual será a medida de cada parte?



Veja como fazer a conta que responde a essa pergunta:

Márcia começa:



Helena vem ajudar:





• Responda **sim** ou **não**:

- Cada uma das duas vai ficar com um metro e meio de tecido? **Sim**
- Cada uma das duas vai ficar com 1 m e 50 cm de tecido? **Sim**
- Cada uma das duas vai ficar com 1 m e 5 cm de tecido? **Não**

Há necessidade de articulações entre registros quando são realizadas atividades com a representação de uma régua (figura) e o decimal. Nesse momento, a unidade é o centímetro (cm) e o décimo da unidade: **1 mm**. Essas articulações também ocorrem para os centésimos.



O exercício 8 da página 148 envolve as transformações entre unidades, ou melhor, a observação a equivalência entre distintas unidades. A concepção implícita nessas equivalências é a razão. Por exemplo no item b) se $1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$, então, $7 \text{ m} = 700 \text{ cm}$. O item d) 1 mm é menor que o centímetro, portanto, ele representa uma fração do centímetro, pois se $1 \text{ cm} = 10 \text{ mm}$ então $\frac{1}{10} \text{ cm} = 1 \text{ mm}$.

8 Diga quantos centímetros há em:

- a) 1 dm c) 1 km
b) 7 m d) 1 mm

Cuidado com o item d).
Em 1 mm há só uma
fração de centímetro.



O exemplo da página 151 não parece deixar claro a correspondência entre as medidas expressas no interior do retângulo e o comprimento da fita métrica. Nem o retângulo tem o comprimento inscrito em seu interior, pois é menor e também não é o comprimento exato da fita métrica.



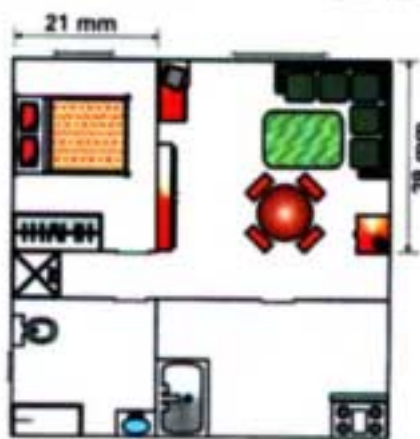
Nos exercícios 10 e 11, também é implícito o conceito de razão por meio de uma escala de 1cm : 250 km, para o mapa representado (figural) e uma planta de um apartamento cuja escala é de 7mm : 1 m.

- 10** No mapa, cada 1 cm corresponde a 250 km. Descubra quantos quilômetros há, em linha reta, de Recife a Salvador.



Escala: 1 cm: 250 km

- 11** Observe a planta de um apartamento. Ela foi feita de tal maneira que cada 7 mm correspondem a 1 m. Qual é a largura e o comprimento do quarto?



148

Os “números com vírgula” são retomados na página 149, novamente é explorado o registro figural. O quadrado que representa 1 unidade (todo) é dividido em 10 partes iguais e cada uma dessas partes corresponde a 1 décimo da unidade. O registro figural utilizado para mostrar que a unidade pode ser repartida em 10 partes iguais, apresenta uma disposição que poderá gerar confusão, pois coincidência ou não, percebemos duas barras (2 décimos) destacados e três barras

verticais ligadas por uma barra horizontal e o registro numérico em destaque é o número **2,3**.

NÚMEROS COM VÍRGULA

Você já viu um número como este: **2,3**

Nesse número, o que significam os algarismos 2 e 3? E para que serve a vírgula? Para responder, vamos dividir uma unidade em 10 partes iguais.



Vamos agora representar o número 2,3 usando figuras:



Você viu? **2,3** são 2 unidades e 3 décimos. É o mesmo que $2\frac{3}{10}$, só que escrito de outra maneira. A vírgula separa as unidades das frações da unidade.

Se a unidade usada é o centímetro, pode-se visualizar o número 2,3 na régua:

O registro figural é articulado com o registro decimal e este com a língua natural, e ainda com a representação mista do número, parte inteira e parte fracionária.

Nos exercícios, as articulações entre o registro figural (F) e o decimal (D), são proporcionadas, como também nos exercícios 12, 14, 15 e 19; assim como as conversões entre o registro em língua natural (LN) e o decimal (D) conforme o

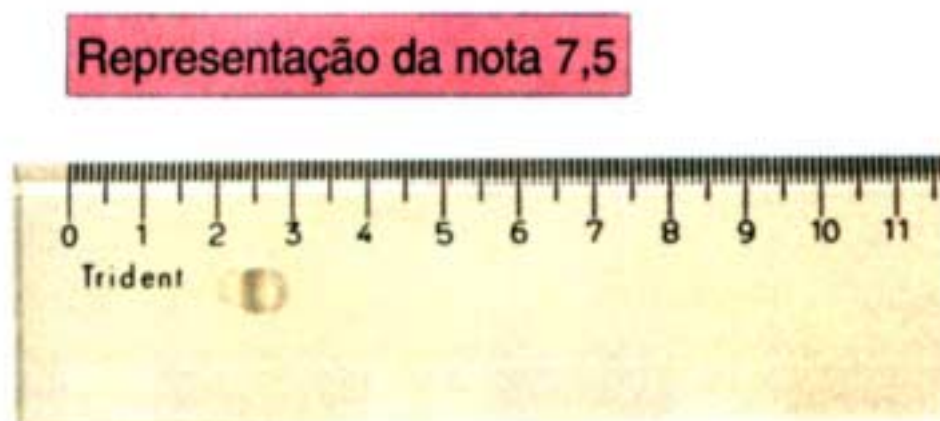
exercício 13, página 152, e no sentido contrário da conversão, tal como o exercício 18.

O registro decimal é relacionado à temperatura em graus Celsius (°C) e ao sistema monetário, especialmente, com as moedas uma vez que nesse momento o trabalho está centrado sobre os décimos, centésimos e milésimos, tanto em língua natural como no registro numérico.

Os exercícios que investem nas operações são em maior número se comparados com a série anterior (4ª. série), assim como o grau de dificuldade, pois como na 5ª. série os exercícios não se limitam ao algoritmo da adição e subtração, é preciso observar as diferentes informações e interpretar os dados apresentados para posteriormente se realizarem os tratamentos no registro decimal e, sobretudo, as conversões entre os distintos registros.

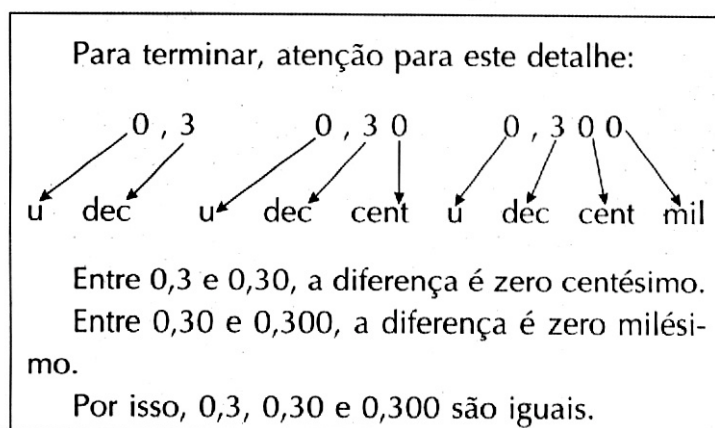
Na página 155, o exercício 23 articula o registro figural, régua graduada em centímetros, e uma faixa colorida colocada como uma representação da nota 7,5. A razão dessa articulação parece estar justificada pela questão: *“Explique por que, às vezes, dizemos sete e meio em vez de sete vírgula cinco”*. Mesmo assim, parece-nos pouco viável esta articulação entre medidas: nota (quantificador) e o comprimento em centímetros. Possivelmente a articulação teria maior significação se fosse realizada entre o registro decimal 7,5 (nota) e o figural (um retângulo – “todo”). Assim como no registro decimal poderiam ser realizados tratamentos, tais como na forma de fração decimal $\frac{75}{100}$ ou 75% ou $\frac{3}{4}$ da figura, ou ainda como uma justaposição:

$$7 + 0,5 = 7 + \frac{5}{10} = 7 + \frac{1}{2}.$$



O destaque nesse momento é para os milésimos, e são apresentadas as seguintes correspondências: **1.000 gramas = 1 kg** e **1 grama = 0,001 kg** e assim como o metro ser um milésimo do quilômetro, isto é, **1 m = 0,001 km**.

A equivalência entre os distintos registros decimais 0,3; 0,30 e 0,300 é explicada em língua natural.



Os exercícios de 30 ao 47, páginas 158 a 162, trabalham as conversões entre os distintos registros, tais como:

a) *língua natural (LN)* → *decimal (D)* (exercícios 30, 34(a-e))

b) *figural (F)* → *decimal (D)* (exercícios: 32, 33, 45 e 46)

c) *decimal (D)* → *língua natural (LN)* (exercício 35)

Nos exercícios 31, 34(f-h), 36, 37, 38, 39, 40, 42, 43, 44 e 47 são realizados tratamentos no registro decimal.

Nessa 5^a. série, é evidenciado que os números na forma decimal são números na base 10, razão destes serem escritos no sistema decimal e obedecerem às mesmas regras posicionais dos números naturais para as operações de adição e subtração entre os decimais.

A partir da página 167, as operações multiplicação e divisão por 10, 100, 1000,são trabalhadas. Ao contrário do que ocorreu na 4^a. série, em que a operação foi realizada em um único registro, o decimal, nessa 5^a. série a abordagem envolve a coordenação dos registros figural, decimal e em língua natural. Os exemplos induzem à “regra prática” do deslocamento da vírgula.

Os exercícios 60 ao 74 propiciam situações que não se restringem às conversões entre os registros figural e decimal e aos tratamentos no registro decimal, estes envolvem as transformações de unidades tais como passar de centímetros para metro ou quilômetros em metros, ou ainda, quilograma em grama assim como no sentido contrário.

Na atividade “*Conversando sobre o texto*” (p.177), é levantada a questão pela qual a divisão de 1 por 4 não era possível antes de se conhecer os “*números com vírgula*”. Queremos destacar que o registro decimal continua sendo denominado “*número com vírgula*”, nesta 5^a. série.

Os exercícios até aqui trabalham a operação de divisão cujo quociente resulta um número na forma decimal exato, o exercício 93 é a exceção.

- 93** Faça o que se pede:
- a) tente dividir 3 por 11 até obter resto zero;
 - b) agora, conte o que aconteceu;
 - c) agora, faça $4 \div 9$;
 - d) e conte, de novo, o que aconteceu.

Neste exercício ao realizar as divisões, o aluno depara-se com uma divisão não exata, cujo quociente é um decimal que apresenta uma parte que se repete. Nesse momento, espera-se apenas a constatação de que há uma parte repetitiva.

O exercício 96 pretende que o aluno perceba que para obter o resultado das diferentes divisões basta realizar a “primeira conta”, pois as demais poderão ser obtidas pelo deslocamento da vírgula, da direita para a esquerda.

96 E mais estas ainda:

- a) $5 \div 2$
- b) $5 \div 20$
- c) $5 \div 200$
- d) $5 \div 2000$



Na 6^a. série, as operações adição, subtração e multiplicação no registro decimal são retomadas a partir da página 41.

Novamente é enfatizado que o cálculo neste registro dá-se tal qual nos números naturais, pois ambos estão no mesmo sistema decimal de escrita.

É chamada a atenção para o exemplo que envolve uma multiplicação entre um número inteiro e outro na forma decimal (0,5) de modo a questionar o resultado. Como Duroux já apontou *“existe uma falsa concepção de que multiplicar sempre*

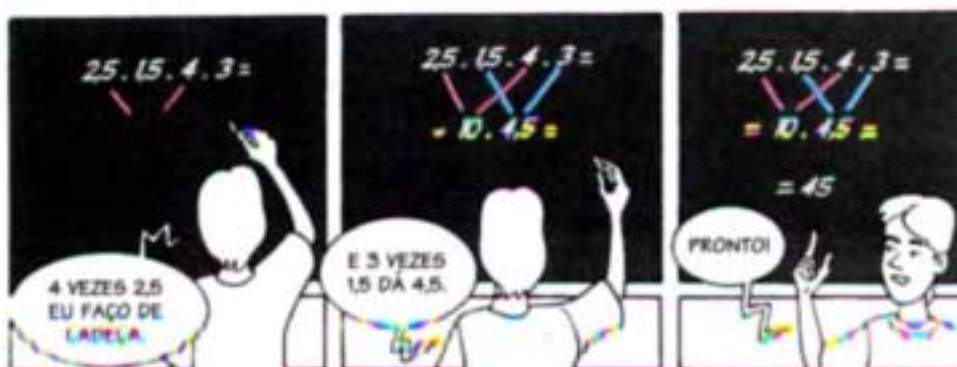
aumenta e dividir sempre diminui” (Cf. Igliori, 1999, p. 102) Ainda a respeito de concepções ou regras que são válidas dentro de um conjunto e que em outro acarretam o erro, Brousseau comenta:

... o erro não é somente o efeito da ignorância, da incerteza, do acaso, como se crê nas teorias empíricas ou behavioristas da aprendizagem mas o efeito de um conhecimento anterior, que tinha seu interesse, seus sucessos, mas que agora se revela falso, ou simplesmente mal adaptado” (Cf. Igliori, 1999, p.100).

No exercício 26, página 43, o autor coloca um ícone na lateral direita com as afirmações: “*reforçar a idéia de que a técnica para multiplicar decimais decorre daquela para multiplicação de números naturais*”. Ao mesmo tempo é preciso estar atento à questão da vírgula, pois esta será deslocada da direita à esquerda tantas casas decimais quantas forem o número de casas decimais nos dois fatores.

No exercício 28, as operações de multiplicação são estimuladas a serem realizadas mentalmente, fazendo-se os agrupamentos de modo a tornar mais rápida a operação, trata-se do que Duval refere como custo operatório.

28 Veja os truques que Luís usa para facilitar cálculos:



Faça como Luís. Associe os fatores da maneira mais conveniente para efetuar mentalmente:

a) $1,5 \cdot 4 \cdot 0,5 \cdot 2$

b) $0,5 \cdot 0,75 \cdot 2 \cdot 20$

c) $0,7 \cdot 0,3 \cdot 25 \cdot 4$

d) $0,9 \cdot 25 \cdot 0,1 \cdot 8$

Ainda estimulando o cálculo mental, temos os exercícios 36 e 49.

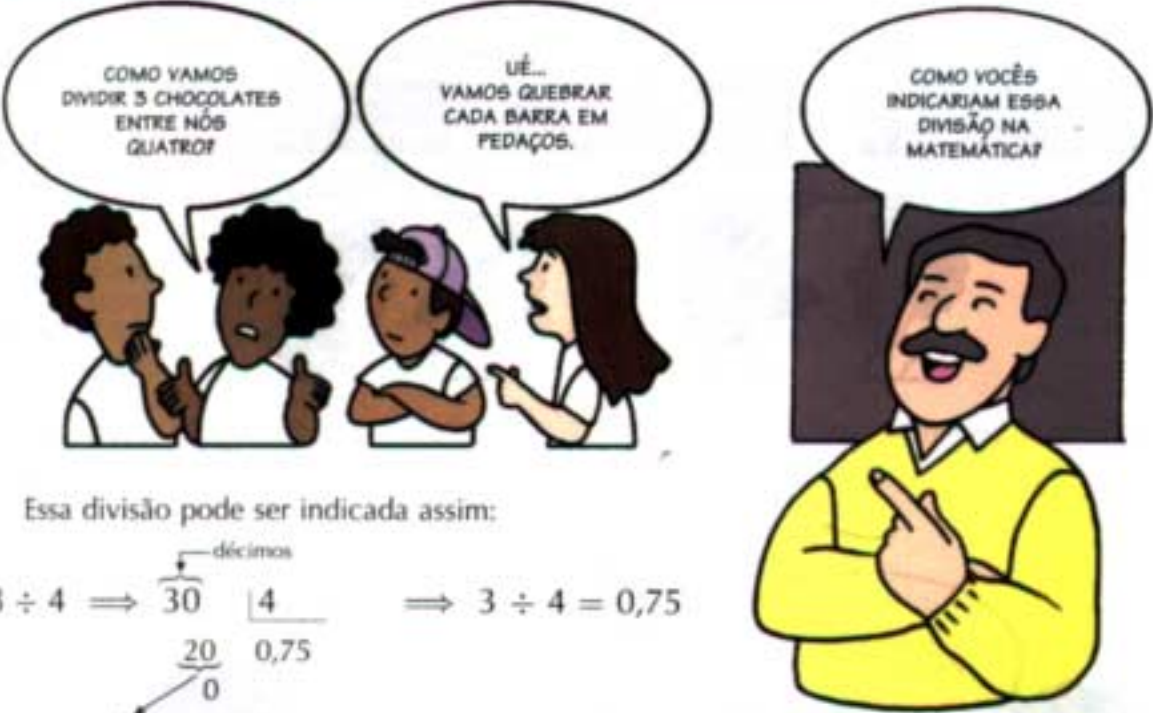
Os exercícios 39, 41, 42, 46, 47, 48, 51, 52 e 54 estão no contexto do cotidiano cuja operação envolvida é a multiplicação, isto é, tratamento numérico.

O exercício 53 envolve o cálculo de expressões numéricas com as operações de subtração, potenciação e divisão entre números inteiros e decimais.

Nessa 6ª. série, a palavra dízima periódica aparece em primeiro momento no exercício 56 da página 50. Mas, a definição ficará por conta do aluno, de acordo com o que vier a constatar na divisão $8 : 11$.

O registro fracionário volta a ser mobilizado na situação a seguir:

FRAÇÕES NO LUGAR DE DECIMAIS



COMO VAMOS DIVIDIR 3 CHOCOLATES ENTRE NÓS QUATRO?

UÉ... VAMOS QUEBRAR CADA BARRA EM PEDAÇOS.

COMO VOCÊS INDICARIAM ESSA DIVISÃO NA MATEMÁTICA?

Essa divisão pode ser indicada assim:

$$3 \div 4 \Rightarrow \begin{array}{r} \text{décimos} \\ \overline{30} \quad | 4 \\ \underline{20} \quad 0,75 \\ \text{centésimos} \quad 0 \end{array} \Rightarrow 3 \div 4 = 0,75$$



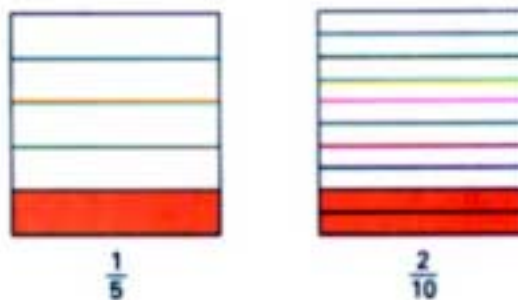
O registro fracionário para situações como a apresentada é mais viável ou como os próprios autores colocam, 0,75 de chocolate (em barra), “só vale na matemática, na prática não dá para fazer”. Temos novamente uma questão que envolve um custo operatório, razão pela qual em algumas situações trabalhar o registro decimal é mais conveniente do que o fracionário e vice-versa.

Na atividade “Conversando sobre o texto”, essa conversão entre o registro fracionário e o decimal procura “proporcionar mais um momento relacionado a construção da idéia de número racional”.

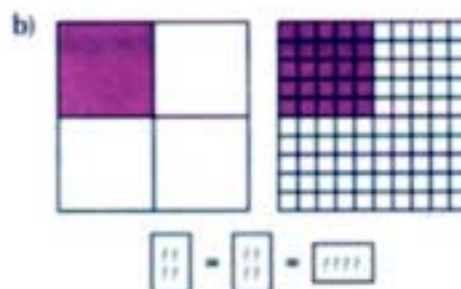
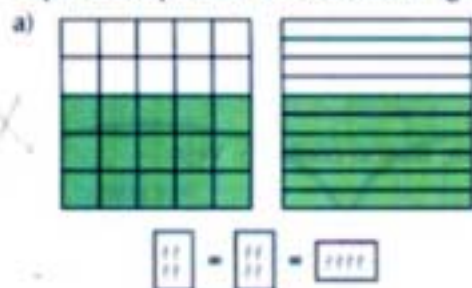
Os exercícios propiciam a conversão entre o registro fracionário e o decimal, assim como no sentido contrário. O exercício 65 articula o registro figural e o numérico, tanto na forma fracionária como na forma decimal.

65 Veja o exemplo ao lado:

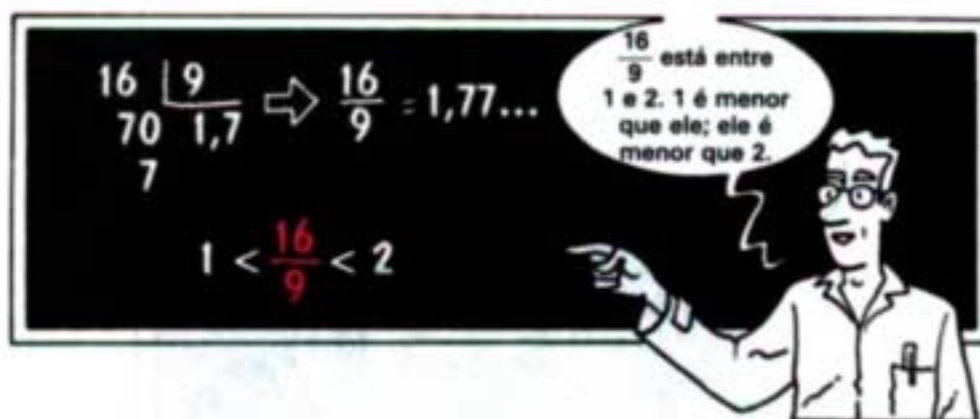
Vamos na figura que: $\frac{1}{5} = \frac{2}{10} = 0,2$



Copie e complete de acordo com a figura:



No exercício 70, página 55, o enfoque no valor estimativo da fração tem por objetivo, conforme modelo, situá-la entre dois inteiros.



Agora, diga entre quais números naturais consecutivos está cada fração, escrevendo uma sentença do tipo $A < \text{fração} < B$:

a) $\frac{34}{7}$

b) $\frac{19}{13}$

c) $\frac{276}{13}$

d) $\frac{105}{10}$

O exercício 71, item a) da página 56 aborda a conversão de frações com denominadores iguais a 9 em números na forma decimal (dízima periódica). E no item seguinte, observando o resultado do item anterior (a) propõe que o aluno estenda a regra às demais frações, isto é, à generalização.

71 Faça o que se pede:

a) Escreva na forma decimal: $\frac{1}{9}$, $\frac{2}{9}$ e $\frac{3}{9}$;

b) Agora, não faça contas. Use o que você observou na primeira parte da questão e dê a forma decimal de $\frac{4}{9}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{6}{9}$, $\frac{7}{9}$ e $\frac{8}{9}$.

Há articulação do registro decimal com o registro das porcentagens. Nessa abordagem notamos a articulação do registro numérico acompanhado do símbolo % com o fracionário ou a conversão do registro fracionário para o decimal.

Também na 7ª. série ocorre a coordenação entre as três representações: a porcentagem, a fração com denominador 100 e o registro decimal.

33 Copie e complete:

PORCENTAGEM	50%	15%	10%			125%
FRAÇÃO COM DENOMINADOR 100	$\frac{50}{100}$				$\frac{100}{100}$	
NÚMERO DECIMAL	0,5			0,05		

34 Leia a manchete do jornal.

- O que é piso salarial?
- Qual é o valor da reposição para quem recebe o piso salarial?
- Qual será o novo piso salarial se houver aumento?



35 Veja como Cleusa calcula o novo preço quando há um aumento de 15%:

O conteúdo número racional, é abordado ao longo de todo o ensino fundamental (1^a. a 8^a. séries). Inicialmente o enfoque é dado à “fração” como *representado*, sendo seu *representante* a/b , com a e b naturais e $b \neq 0$ ou a sua denominação em língua natural evolui em sua significação até atingir o *status* de número, para o qual o complemento de a/b da figura não é mais necessário e, portanto, é possível ser localizado na reta numérica. Assim, os decimais deixam de ser “*números com vírgula*” para serem admitidos como números na forma decimal.

Para maior clareza, essa exposição é realizada em dois momentos distintos, sendo inicialmente uma abordagem para o *registro fracionário* e, posteriormente, ao *registro decimal*, adotando-se a seguinte formatação:

- idéia central analisada;
- para descrever e comentar a abordagem de cada uma das coleções.

5.1. Quanto ao registro fracionário

- A noção de fração é introduzida por meio da repartição de figuras, seja de grandezas contínuas ou discretas. As grandezas contínuas são representadas por figuras geométricas (círculos, retângulos) cujas repartições, em geral, não fazem parte da tarefa do aluno, cabe a ele identificar a fração correspondente àquela situação já pronta.
- Repartir ao meio ou obter a metade de uma grandeza contínua, tais como: círculos e retângulos, é o enfoque dado pela CLD-1, 2^a. série, página 111. Atividades como estas de identificar a fração correspondente à parte colorida da figura levam o aluno a uma atitude passiva em relação à tarefa.

- Repartir ao meio um conjunto discreto de elementos tais como bolas, frutas, bolo, é o ponto de partida na CLD-2, na 1^a. série, página 95. Contudo, na atividade proporcionada por esta coleção, na página 89 da 4^a. série, a tarefa do aluno é executar as repartições no retângulo de acordo com a fração indicada, o que leva o aluno a uma postura de atuação.

Nessas atividades, encontramos a coordenação dos registros figural e o fracionário.

- Nos casos da repartição de segmentos, a questão de comensurabilidade não é abordada, pois os segmentos apresentados estão sempre adaptados a uma subunidade dada no enunciado.
- O exercício 4, página 114 da 2^a. série, na CLD-1, o segmento AB é constituído de segmentos consecutivos alinhados de medida igual a **u** (unidade) representada no enunciado. O número de peças é tal que permite a operação de repartir ao meio.
- Na CLD-2, a questão da comensurabilidade está implícita na abordagem da representação mista do número (5^a. série, p.125) demonstrando que o fracionamento de uma unidade surgiu da impossibilidade dos números inteiros frente à medida, pois quando se efetua uma medição empregando uma unidade ou medida padrão, dificilmente essa unidade cabe um número inteiro de vezes na grandeza a medir, o mais freqüente é que sempre reste uma parte menor que a unidade.

- Atividades de comparação e de equivalência.
- Na CLD-1, as comparações são realizadas com as articulações entre os registros fracionários e o figural tomando inicialmente como parâmetro a unidade, “o todo”, como a abordagem dada na 3^a. série, página 102. Estas comparações envolvem o emprego dos símbolos $<$, $>$ ou $=$. Posteriormente, as comparações são executadas entre frações de mesmo denominador, tais como na página 105 da 3^a. série.

Ao serem realizadas as operações de adição e subtração entre frações de denominadores diferentes, surge a necessidade de obtenção de frações equivalentes cuja abordagem ocorre de maneira exaustiva na 4^a. série, a partir da página 101, onde são realizadas as conversões entre os registros figural e fracionário. Os tratamentos no registro numérico são efetuados para obtenção das frações equivalentes, seja multiplicando ou dividindo-se (simplificar) por um mesmo número o numerador e denominador da fração, ou pela redução de frações ao mesmo denominador pelo menor múltiplo comum (m.m.c.). As regras correspondentes a cada um dos tratamentos acima são descritas em língua natural.

Essas atividades de comparação e equivalência dos registros fracionários são possíveis de serem efetuadas em ambos registros, o figural e o fracionário, mas envolvem uma questão de custo, que passa a ser minimizada e mais intensificada nas atividades nas quais a obtenção das frações equivalentes são realizadas no registro fracionário por meio do tratamento numérico.

- As comparações e equivalências no registro fracionário da 3^a. até a 5^a. séries são feitas tomando como parâmetro o registro figural, tal como a atividade

propiciada nos exercícios da página 147 na 3ª. série, cujo referencial são as repartições realizadas no círculo na atividade “Ação” (p. 145-146) – *Reconhecendo frações de um círculo*, ou ainda na página 177 da 4ª. série na realização das operações de adição e subtração de frações em que no exercício 1 o enfoque está dirigido a equivalência dos registros fracionários, tomando como referência à repartição do círculo e, no exercício 2, as comparações são realizadas no registro fracionário levando em conta o exercício anterior. Com o enfoque de “*Reverendo frações*” na 7ª. série (a partir da página 39) o registro fracionário é articulado ao registro decimal, pois como os autores do manual citam, atividades de comparação podem ser facilitadas com o emprego do registro decimal no lugar do fracionário, o que evidencia que estes têm claro a questão do custo operacional.

- Ao longo das coleções, são observadas poucas atividades de ordenação de número no registro fracionário na reta numérica, exercícios como estes que poderiam contribuir para a concepção do número racional no registro fracionário.
- Na CLD-1, ao ampliar o conjunto dos números racionais relativos, na 6ª. série, página 67, o número apresentado no registro fracionário vem ocupar um lugar na reta entre dois números inteiros. A forma fracionária não mais está vinculada a uma quantidade ou “parte de um todo” que para ser entendido é preciso estar acompanhado de um complemento da figura. Nesse momento, o registro $\frac{1}{3}$ representa um número que ocupa um lugar na reta numérica.

- As atividades de ordenação do número racionais na forma fracionária acontecem na 8^a. série, a partir da página 162, quando são definidos os conjuntos numéricos. A construção da idéia de número racional já estava sendo construída ao longo da coleção com atividades de articulação entre o registro decimal e o fracionário (p.53, 6^a. série - CLD-2).
- Algumas representações figurais utilizadas pelos autores, podem constituir dificuldades para a conceituação do número racional, como as encontradas nas coleções.
- Na CLD-1 (p.86 da 4^a. série), cuja representação das frações $\frac{1}{5}$ e $\frac{1}{7}$ são áreas de mesmo tamanho, ou ainda, o uso de um segmento como representação de uma avenida, páginas 102 e 105 na 3^a. série, pois o trecho da avenida é formado de dois quarteirões e uma rua que os separa, mas na representação do segmento esta rua é ignorada.
- No exercício 49 (p. 129 - 5^a série), CLD-2, estão representadas algumas retas graduadas em polegadas, cabe ao aluno indicar usando "*números mistos*" a medida de cada "*barrinha*". Mas as réguas apresentadas não estão na dimensão exata da polegada, o que pode ocasionar certo embaraço ao aluno, pois em uma página anterior, a régua graduada em polegada não apresenta as mesmas dimensões que as do exercício.
- O emprego do registro na língua natural também apresenta enfoques diferenciados pelas coleções:

- O uso abusivo de terminologia como as denominações frações aparentes, impróprias, irredutíveis,..., mínimo múltiplo comum, ou ainda, como o observado na página 91 – 4^a. série, CLD-1, no qual uma fração é definida com base no conceito de par ordenado, não parece ser uma abordagem adequada ao público a que se destina.
- Na CLD-2, são poucas as denominações utilizadas e as regras são vinculadas de forma breve com pequenas frases de maneira objetiva.

5.2. Quanto ao registro decimal

- A denominação de “*números com vírgula*” adotada para o número racional no registro decimal, parece ser um artifício usado pelos autores dos livros didáticos, de modo a aproveitarem os conhecimentos trazidos da vida cotidiana pelos alunos.
- Esta denominação foi observada desde a 3^a. série, quando o registro decimal foi introduzido pela CLD-2 até a 6^a. série.
- Na CLD-1 não é comum essa referência ao registro decimal, pudemos constatar um único momento em que este fato ocorreu, como na introdução do capítulo 1, página 170 – 5^a. série.

- O registro decimal é introduzido com base na representação figural numa articulação com a noção de fração decimal e a língua natural, com ênfase nos décimos.
- Na introdução realizada pela CLD-1, na 4^a. série, encontramos a articulação entre os registros: Figural (F), a Fração Decimal (FD), o Decimal (D) e em Língua Natural (LN), contudo os exercícios e exemplos após esse primeiro momento restringem-se ao emprego de apenas dois registros tais como (FD) → (D) ou (F) → (D).

A conversão dos registros figural (F) para o decimal (D) tem sido realizada em vários momentos da 4^a. série, que mal se iniciou no ensino do número racional no registro decimal. Destacamos os exemplos citados na análise desta coleção tais como o exercício 2 da página 146, cujo segmento AB representa uma avenida dividida em 10 partes iguais. Estão situados dois pontos M e N sobre esse segmento AB e, com base nesta figura, o aluno deve indicar as distâncias entre os dois pontos utilizando a "representação decimal". Não há nesta figura nenhum registro decimal que possa servir de referência ao aluno.

Notamos em outras situações que a conversão entre o registro figural e o decimal é direta como na página 154 – (4^a série) cujas representações figurais da parte colorida das figuras estão articuladas diretamente aos registros decimais, 0,5 e 0,50, ou ainda, na realização da diferença entre 1 e 0,3, (p. 161-4^a série), em que este mesmo procedimento repete-se.

- O registro decimal é abordado já na 3^a. série, (p. 170) pela CLD-2, por meio dos décimos com o emprego de material dourado. Também nesta coleção são mobilizados os registros descritos acima: (F) → (FD) → (D) → (LN), mas após

essa introdução, o registro decimal intensifica o trabalho entre os registros figural e o decimal em ambos os sentidos. Como constatamos nas páginas 171 e 172, da 3^a. série, as representações figurais (círculos ou quadrados) são articuladas ao registro decimal. A conversão do registro decimal para a representação figural usando o retângulo é solicitada no exercício 2 (p. 171) e o exercício 2 (p. 172) solicita a conversão do registro decimal à língua natural. O uso do material dourado faz-se presente também na 4^a. série.

- As coleções articulam de maneiras distintas a noção de "medidas", pois vejamos:
 - Na CLD-1, este tópico constitui um capítulo à parte, de certa forma desvinculado do estudo do número racional na forma decimal.
 - Na CLD-2, a articulação do registro decimal e o estudo das medidas desde a introdução destes na 3^a. série (p. 174) estão vinculados a situações do cotidiano tais como obter o valor a ser pago por 0,5 kg de uma mercadoria. As transformações de unidades de centímetros para milímetros, quilômetro para metro, quilograma para grama, quilograma para tonelada, etc., são propiciadas ao longo de toda a 4^a. série e, sobretudo, na 5^a. série. Nestas abordagens, destacamos os registros: figural e o decimal, assim como os de língua natural e o decimal.

Outro aspecto a ser salientado é quanto às atividades que propiciam o uso da moeda, seja "o real" do sistema monetário do país ou pela criação de outro sistema como "*o samba*", num contexto do cotidiano, como os problemas da

página 119, cujos enunciados estão em língua natural e as representações pictóricas ilustram o dinheiro (as cédulas e moedas) do país "*Tropicália*".

- Os autores apresentam em alguns momentos atividades que propiciam tanto a conversão de registros como a conceitualização de número, de ordenação, e de localização de um número na reta.
- *Localização* - Na CLD-1, é proposta a localização do número racional na reta numérica articulando os diferentes registros: o fracionário e o decimal exato $\left(-\frac{3}{2} = -1,5\right)$, o fracionário $\left(\frac{1}{3}\right)$ ocupa a posição correspondente à dízima periódica (0,333...) e o fracionário $\left(\frac{5}{3}\right)$ é articulado à sua representação mista $1 + \frac{2}{3}$, como mostrado na página 7 da 8ª. série.
- *Ordenação* - Uma primeira ordenação no registro decimal é constatada na página 180 da 3ª. série, na CLD-2. No exercício 3 é proposto que o aluno coloque em ordem crescente os números: 3; 1,7; 4,0; 3,1; 1,5; 2,3 e 3,8. Na quarta série, no exercício 2, itens a - c, página 126, são dadas algumas seqüências finitas de números racionais. Para cada um dos itens é explicitada a razão, cabe ao aluno preencher os espaços vazios, das seqüências.
- *Localização*: Com relação à localização dos números no registro decimal na reta numérica, na CLD-2 encontramos o exercício 1 (p. 129, na 4ª. série). O segmento de reta representado tem alguns pontos de referência no registro decimal, com duas casas decimais e os números que deverão ser localizados apresentam três casas decimais.

- Na abordagem do Sistema Decimal, verificamos que a compreensão da base 10 é essencial no domínio de conceitos de equivalência entre as diferentes unidades, tais como o entendimento da relação existente entre a unidade e o décimo, o décimo e o centésimo, o centésimo e o milésimo, etc.
- Um desses momentos é verificado na CLD-1, (p. 158 na 4^a. série), ao realizar a adição entre 3,75 e 1,48 com uso de material concreto (figural) as “trocas” são feitas de acordo com as convenções estabelecidas: ficha rosa corresponde a 1 unidade, a ficha azul a 1 décimo e a ficha amarela a 1 centésimo. Ao somar os centésimos ($5 + 8 = 13$) há uma equivalência verificada pela justaposição $13 = 10 + 3$ ou 1 décimo + 3 centésimos, ao somar os décimos ($7 + 4$) é preciso acrescentar 1 décimo resultante da equivalência anterior, obtendo assim 12 décimos como $12 = 10 + 2$ ou 1 unidade e 2 décimos, esta unidade é acrescida às unidades (3 e 1).
- Na CLD-2, há uma abordagem maior de atividades e exemplos que exploram essas equivalências, utilizando a conversão entre os registros figural e decimal, inclusive, os autores colocam um ícone à margem da página 112 da 4^a. série, destacando a importância das correspondências entre 1 décimo e 10 centésimos, pois como é descrito *"o algoritmo que aparece na página 113 se baseia nessas trocas"*. O algoritmo em questão é o de adição.

Outro enfoque é mostrado no registro decimal $0,7 = 0,700$, como é explicado no ícone na lateral da página 125 da 4^a. série, como segue: *"perceber igualdades como $0,7 = 0,700$, porque a diferença entre eles é zero centésimos"*

e zero milésimos, é um passo importante na compreensão da escrita decimal com vírgula".

- Outro aspecto importante que vem ao encontro de nossa fundamentação teórica, está relacionado aos momentos em que as conversões são realizadas. Assim, é preciso conhecer duas ou mais representações para um mesmo objeto matemático e, sobretudo, saber realizar as conversões entre elas e o sentido em que estas ocorrem. É muito comum propiciarem-se atividades de conversão num único sentido, por exemplo, a articulação dos registros figural para o decimal, e não no sentido contrário, assim como do registro decimal para a língua natural e vice-versa. A articulação entre os registros fracionário e o decimal é essencial para a formação do conceito de número racional.
- Quanto à essa questão já mencionamos anteriormente, que as articulações entre os dois registros são pouco exploradas na CLD-1, provavelmente, pela própria estrutura metodológica adotada pela coleção.
- Na CLD-2, podemos observar a preocupação em proporcionar situações que envolvam estas articulações de maneira consciente, tal como os próprios autores descrevem na 6^a. série, na atividade *“Conversando sobre o texto”*, cujo tema está centrado em frações no lugar de decimais. Lemos no ícone na lateral da página 53 – 6^a. série, o seguinte: *“mais um momento relacionado à construção da idéia de número racional. Esse conceito, no entanto, só será apresentado na 8^a. série”*. Nesta atividade da 6^a. série, são abordadas questões como: um número na forma fracionária pode expressar o resultado de uma divisão ou como indicar bem rápido o resultado de $1 : 7$, ou dar algumas

frações iguais a 0,5 e também outras para 0,3. Outro aspecto que parece ser implícito é a questão do custo operatório, enfatizando que o uso de cada um dos registros irá depender diretamente da situação envolvida.

5.3. Conclusões

Na análise das coleções, pudemos observar que foram mobilizados todos os registros na introdução dos números racionais. Cabe distinguir o modo que as coleções realizam as conversões e tratamentos.

Na CLD-1 para as séries iniciais (1^a. a 4^a. séries), são articulados os registros Figural e Simbólico, dando destaque ao sub-registro numérico na forma fracionária. Menos freqüentes são as conversões entre o registro fracionário (NF) e a língua natural (LN). A partir da 5^a. série, as regras e definições como na página 140 são descritas em língua natural articulando o sub-registro algébrico (A). Mas, nessa coleção, raramente ocorre a articulação entre os registros fracionário (NF) e o decimal (D). Encontramos na página 69 na 6^a. série, um exemplo no qual, a conversão é necessária para que o cálculo numérico da expressão $-\frac{5}{6} + 1,4$ seja realizado.

O registro figural na CLD-2 não se restringe às figuras geométricas, há exploração de figuras pictóricas e recortes de jornal que procuram retratar situações do cotidiano. As articulações realizadas são entre este e o registro fracionário. Nas séries iniciais, são propiciadas atividades com o uso de material concreto, as folhas próprias à execução da tarefa fazem parte do manual pedagógico do professor, como a folha 49 (folhas especiais) para realizar a atividade “frações de um retângulo” página 89 – 4^a. série, CLD-2. Na abordagem dos decimais destaca-se o uso do material dourado. Articulações entre o registro fracionário e o decimal são muito freqüentes nessa coleção.

Enquanto a atividade de conversão é freqüentemente empregada pela CLD-2, sobretudo entre os registros, figural (F) e o numérico (fracionário ou decimal), os tratamentos no registro numérico são menos freqüentes, sobressaindo-se nessa atividade a utilização do registro figural.

Na CLD-1 é privilegiada a atividade de tratamento (cálculo) no registro numérico, priorizando os algoritmos. Há, na 3ª. série página 113 no exercício 12 uma atividade em que está implícito o tratamento no registro figural. A conversão nesta coleção é realizada essencialmente entre os registros figural e o numérico.

Vale destacar que embora a introdução do racional no registro decimal seja realizada em ambas as coleções, com a articulação dos registros: Figural (F), Fração Decimal (FD), Decimal (D) e a Língua Natural (LN), no restante as conversões se restringem a mobilizar apenas dois registros.

O esquema abaixo apresenta as conversões mais usadas e o sentido em que ocorrem nas coleções.

- (F) → (NF) ou (F) → (D) - o sentido mais abordado
- (NF) → (F) ou (D) → (F) - menor freqüência
- (F) → (NF) → (LN) ou (F) → (FD) → (D) - único sentido
- (NF) → (LN) ou (LN) → (NF) – poucos casos

ADJIAGE, Robert. 1999. *“L’expression dès nombres rationnels et leur enseignement initial”*. Tese de Doutorado, IRMA. Strasbourg.

BARDIN, Laurence. 1977. *Análise de Conteúdo*, Tradução: Luís Antero Reto e Augusto Pinheiro. Lisboa: Edições 70, Lda.

BOYER, Carl B. 1974. *História da Matemática*, Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher: Editora da Universidade de São Paulo.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. 2000-2001. *Guia de livros didáticos 1^a. a 4^a. séries*. Brasília: SEF.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. 1999. *Guia de livros didáticos 5^a. a 8^a. séries*. Brasília: SEF.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. 1998. *Parâmetros Curriculares Nacionais - Matemática 5^a a 8^a série*. Brasília: SEF.

CHASSOT, Attico. 1994. *A Ciência através dos tempos*. São Paulo: Moderna.

COMITI, Claude. *Elementos de metodologia de pesquisa em didática da matemática*. Equipe DDM. Laboratório LEIBNIZ - IMAG.

CORACINI, Maria José R. F. 1999. *Interpretação, Autoria e Legitimação do Livro Didático - Língua Materna e Língua Estrangeira*. São Paulo: Pontes.

COXFORD, Arthur F e Alberto P. Shulte. 1997. *As idéias da álgebra*, Traduzido: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual.

DAMM, Regina Flemming. 1999. Registros de Representação. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara. *Educação Matemática: uma introdução*. São Paulo: EDUC, pp. 135 - 153.

DESSART, Donald J. 1994. Notação Exponencial. Cápsula 24. In: BAUMGART, John K. *Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula*, v. 4. Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, pp. 98 -103.

DUVAL, Raymond. 1988. "Graphiques et equations: l' Articulation de deux registres". In: *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* 1, pp. 235-253, Tradução em espanhol: Blanca M. Parra.

_____ 1999. "L' analyse cognitive du fonctionnement de la pensée et de l' activité mathématique". Cours sur les apprentissages intellectuels donné à la PUC/SP.

_____ 1996. "Quel cognitif retenir en Didactique des mathématiques?". *Recherchers en Didactique des Mathématiques*, v. 16, no. 3, pp. 349-382.

_____ 1992. "*Sémiosis et Noésis*". Conférence APMEP, IREM.

FOMIN, S. 1995. Sistemas de Numeração. In: *Matemática: Aprendendo e Ensinando*. Traduzido: Gelson Iezzi. Atual.

GUNDLACH, Bernard H. 1992. *Números e numerais*. In: Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula; v. 1. Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual.

IGLIORI, Sonia B. C. 1999. A noção de "obstáculo epistemológico" e a educação matemática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara. *Educação Matemática: uma introdução*. São Paulo: EDUC, pp.89 - 113.

LINS, Romulo Campos, Joaquim Gimenez. 1997. *Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI*. Campinas, São Paulo: Papirus.

MIORIM, Maria Ângela. 1998. *Introdução à história da matemática*. São Paulo: Atual.

PAVLOPOULOU, Kalliopi. 1998. "*Propédeutique de L'algèbre Linéaire: La coordination des registres de représentation sémiotique*". Institut de Recherche mathématique avancée. Strasbourg.

PIAGET, Jean e Szeminska, 1981. A gênese do número da criança. Traduzido: Christiano Monteiro Oiticica. São Paulo: Zahar Editoras.

SÃO PAULO (ESTADO).1996.Secretaria de Estado da Educação. Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo - SARESP. *Relatório final dos resultados da 1ª aplicação* vol. 1, Imprensa Oficial do Estado S. A.

SCHOENFELD, AH.: 1986, *On having and using Geometric Knowledge, Conceptual and Procedural Knowledge the case of mathematics* (Ed. J. Hiebert) Erlbaum, Hillsdale NJ, 225-264 Apud Duval, R. *Les Representations Graphiques: Fonctionnement et Conditions de Leur Apprentissage*, IREM Strasbourg, 1989.

TAVIGNOT, Patrícia . 1999. *"L' expression des nombre rationnels et leur enseignement initial"*. Tese de Doutorado: Universidad Rouen-França.

WOERLE, Nilce Helena. 1999. *Números Racionais no Ensino Fundamental - Múltiplas representações*. Tese de Mestrado PUC-SP.

ANEXO 1

Mestrado em Educacao Matemática – PUC/SP – 1998Teste a priori – 3º. ano do 2º. grau – E.T.E. “GETÚLIO VARGAS”

NOME _____ No. _____ Série _____ Curso _____

1. Calcular as potências que se seguem:

a) $\frac{5^2}{6}$ b) $\left(\frac{1}{3}\right)^3$ c) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}$ d) $64^{3/4}$ e) $7^{126} \times 7^{124}$

2. Calcular o valor de x :

a) $5^x = 125$ b) $(0,01)^{2x} = 10^{x+2}$

3. Na equação $2^x = 5$, podemos afirmar que:

- a) Não existe $x \in \mathbb{R}$, tal que torne a igualdade verdadeira.
- b) O valor de x é um número real, tal que $2 < x < 3$.
- c) É impossível calcular x , pois a equação não está na mesma base.

4. Um recenseamento realizado em 1980 indicou que a população de um determinado país era de 120 milhões de habitantes. Considerando, a partir de 1980, um crescimento anual de 2%, pode-se estabelecer a relação $P(t) = p \times \left(1 + \frac{2}{100}\right)^t$ ou $P(t) = p \times (1,02)^t$, que expressa a população p em função do tempo t em anos, sendo p o valor 120.000.000.

- a) Construa o gráfico de $P(t)$ para $0 < t < 20$.
- b) Estime a população desse país em 1990 e no ano 2000.
- c) Depois de quantos anos a população desse país atingiu 124.848.000 habitantes?

5. Uma financeira paga uma taxa de 15% ao mês, entre juros e correção monetária para um investimento de R\$ 10.000,00. Suponha que a partir do início da aplicação, não tenham sido feitas retiradas. Nessas condições, calcule o rendimento após:

- a) 1 mês;
- b) 2 meses;
- c) 3 meses;
- d) 12 meses;
- d) n meses (n inteiro e $n \geq 0$)

ANEXO 2

ESCOLA _____ Data ____/____/____

NOME _____ No. _____ Série _____

1. Calcule o valor das potências:

a) 3^3

b) $(-3)^4$

c) 3^0

d) -5^2

e) 4^{-2}

f) $\left(\frac{1}{3}\right)^3$

g) $(0,4)^{-1}$

h) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

i) 0^3

j) $(-1)^7$

k) 2^{-0}

l) $(0,5)^2$

2. Preencha o espaço vazio com o sinal = ou $\neq$, de modo a tornar verdadeira a expressão, justificando.

a) 5^2 _____ $(-5)^2$

b) 0^3 _____ 3^0

c) 4^3 _____ $(-4)^3$

d) -9^2 _____ $(-9)^2$

e) -5^3 _____ $(-5)^3$

f) $(0,5)^2$ _____ $\left(\frac{1}{2}\right)^2$

g) $(-1)^7$ _____ -1^6