

MARCOS ROBERTO CELESTINO

**Ensino-Aprendizagem da Álgebra
Linear : as pesquisas brasileiras
na década de 90**

MESTRADO: EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PUC-SP
2000

MARCOS ROBERTO CELESTINO

Ensino-Aprendizagem da Álgebra
Linear : as pesquisas brasileiras
na década de 90

Dissertação apresentada como exigência parcial para obtenção do título de **MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA** à Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, sob orientação da **Professora Doutora Silvia Dias Alcântara Machado**.

PUC-SP
2000

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Ana Paula Jahn

Prof. Dr. João Bosco Pitombeira F. de Carvalho

Profa. Dra. Silvia Dias A . Machado (orientadora)

AGRADECIMENTOS

A Deus, pelas oportunidades que me deu, as quais permitiram-me chegar até aqui.

À professora Silvia Dias Alcântara Machado, minha orientadora, pelas palavras de incentivo durante todo o tempo da realização deste trabalho. Pelas críticas construtivas e que contribuíram para o meu crescimento como pesquisador.

À minha família que sempre esteve presente, incentivando-me a seguir minhas metas.

À minha mãe Leonilde Caetano Celestino (*in memoriam*) a quem dedico este trabalho, pois sempre quis compartilhar esta vitória, à semelhança de todas as outras que celebrou comigo.

À professora “Ziza” (Cesarina Natali), da qual tenho boas recordações, foi quem me ajudou a dar os primeiros passos na aprendizagem Matemática.

RESUMO

As pesquisas sobre ensino-aprendizagem da Álgebra Linear vêm obtendo “mundialmente” uma maior atenção dos investigadores em Educação Matemática.

Este trabalho objetivou coletar e apresentar as pesquisas de autores brasileiros sobre o ensino-aprendizagem da Álgebra Linear, realizadas na década de 90. A contribuição brasileira foi analisada e inserida no contexto das pesquisas feitas em nível mundial na área.

Concluiu-se que, embora houvesse um pequeno número de obras brasileiras, estas apresentavam resultados coerentes com as pesquisas “mundiais”, algumas vezes contribuindo com resultados inéditos; além disso, apontavam sugestões para outras investigações na área de ensino-aprendizagem da Álgebra Linear.

Palavras-chaves: estado da arte, ensino-aprendizagem da Álgebra Linear, pesquisas brasileiras.

ABSTRACT

The researches on teaching-learning of the Linear Algebra come "globally" obtaining a larger attention of the investigators in Mathematical Education.

This work objectified to collect and to present the Brazilian authors' researches on the teaching-learning of the Linear Algebra, accomplished in the 90's decade. The Brazilian contribution was analyzed and inserted in the context of the researches done in world level in the area.

It was ended that, although there was a small number of Brazilian works, these presented coherent results with the "world" researches, sometimes contributing with unpublished results; besides, they aimed suggestions for another investigations in the area of teaching-learning of the Linear Algebra.

Word-keys: state of the art, teaching-learning of the Linear Algebra, Brazilian researches.

ÍNDICE

Introdução	08
Cap. 1. Problemática e Objetivo.....	09
Cap. 2. Procedimentos Metodológicos.....	15
Cap. 3. Síntese do Panorama das Pesquisas em Educação Matemática	17
3.1 As Pesquisas em Educação Matemática.....	17
3.1.1 As Pesquisas em Educação Matemática nos EUA.....	27
3.1.2 Pesquisas em Educação Matemática no Brasil até 1989.....	36
3.2 As Pesquisas sobre Didática da Álgebra Linear na França e nos EUA	41
Cap. 4. Produção Científica na Área de ensino-aprendizagem da Álgebra Linear	52
4.1 – Amarildo Melchiades da Silva (1997)	53
4.2 – Rute Henrique da Silva (1999)	59
4.3 – Marlene Alves Dias (1993)	63
4.4 – Marlene Alves Dias (1995)	66
4.5 – Marlene Alves Dias (1998).....	68
4.6 – Marlene Alves Dias (1998a).....	71
Cap. 5 . Análise da produção	75
Cap. 6 . Conclusão.....	89
Bibliografia.....	95
Referências Bibliográficas	98
Anexo	106

INTRODUÇÃO

O presente trabalho visa fornecer um panorama das pesquisas realizadas por autores brasileiros, escritas na década de 90, sobre o ensino-aprendizagem da Álgebra Linear.

Primeiramente, ratifico a importância de pesquisas nesta área, argumentando a respeito da relevância da Álgebra Linear; também apresento dados que evidenciam a existência de problemas no processo de ensino-aprendizagem desta disciplina e delinheio o objetivo de minha pesquisa.

Tendo em vista o fato de não ter encontrado metodologias para a elaboração deste panorama, descrevi no capítulo II os procedimentos metodológicos por mim adotados para fazer esta pesquisa.

No capítulo III apresento algumas obras do tipo “estado da arte” sobre pesquisas em Educação Matemática seguida de um panorama das pesquisas em Álgebra Linear. Estes artigos possibilitarão situar na conclusão o atual panorama no contexto mundial.

Desenvolvo no capítulo IV uma síntese dos trabalhos brasileiros seguida de uma análise dos mesmos.

No capítulo V estão as conclusões, procurei mostrar as imbricações dos trabalhos brasileiros entre si, bem como a situação destas obras no contexto mundial. Além disso, destaco questões “ em aberto” sugeridas pela leitura das pesquisas brasileiras.

Após a bibliografia e as referências bibliográficas, anexe as citações na língua original que aparecem no texto em português.

1. Problemática e Objetivo

A Álgebra Linear aparece, mesmo que implicitamente, ligada a diferentes domínios, como por exemplo os sistemas de equações lineares, a geometria, a aritmética, o estudo das quádricas, as transformações lineares, as equações diferenciais, etc.

O domínio dos sistemas lineares e o da geometria tiveram um papel privilegiado no desenvolvimento dos conceitos de Álgebra Linear .

No século XX houve uma busca por uma teoria axiomática que reagrupava todos os conceitos da Álgebra Linear, fazendo desta não mais o estudo de equações mas o estudo de estruturas.

Assim, a importância da Álgebra Linear e das pesquisas sobre seu ensino-aprendizagem repousa no fato de que ela hoje se encontra subjacente a quase todos os domínios da Matemática. Desta forma, é imprescindível que aqueles que pretendem trabalhar com as ciências que utilizam a Matemática, tanto como objeto de seu estudo quanto como instrumento para outros estudos, dominem seus principais conceitos. Por isso se implantou o ensino de Álgebra Linear nos diferentes cursos das chamadas Ciências Exatas, como Engenharia, Física, Química, Ciências da Computação e outras, além de Matemática.

As pesquisas sobre ensino-aprendizagem da Álgebra Linear, em Educação Matemática no nível superior, têm tido uma atenção crescente por parte dos pesquisadores. Segundo Dorier: *“É fato que a Álgebra Linear constitui uma parte importante no conteúdo matemático que é ensinado no início da universidade, sendo vista como uma disciplina fundamental por quase todos os matemáticos e por muitos cientistas que a utilizam como ferramenta. Além disso, as dificuldades dos*

estudantes em Álgebra Linear parecem, tão importantes e visíveis quanto em análise (cf. Robert e Robinet (1989) e Rogalski (1990))....”¹ (Dorier, 1998: p. 193).

Conforme afirma Morgens Niss: *“Tempos atrás, trinta, quarenta anos atrás, a situação era mais ou menos a seguinte (em termos simples e resumidos). Esperava-se que os estudantes universitários de tópicos matemáticos assumissem toda a responsabilidade por seus próprios estudos, como também por seus sucessos ou fracassos. Estudantes que passavam nos exames tinham pré-requisitos necessários, talento matemático e diligência, porém, aqueles que fracassavam não tinham, e além de trabalhar "duro", não havia muito o que fazer a respeito. As universidades, principalmente, deviam prestar muita atenção às categorias anteriores, exceto que elas tinham como tarefa simplesmente identificar os membros de um último tipo num estágio inicial, apontando o êxito em Matemática ausente neles. Isto implicava que os professores de Matemática podiam se concentrar em dar aulas, pois a aprendizagem individual de cada estudante sobre o que era ensinado não era problema do professor, mas inteiramente do próprio estudante”² (Niss, 1999: p.2).*

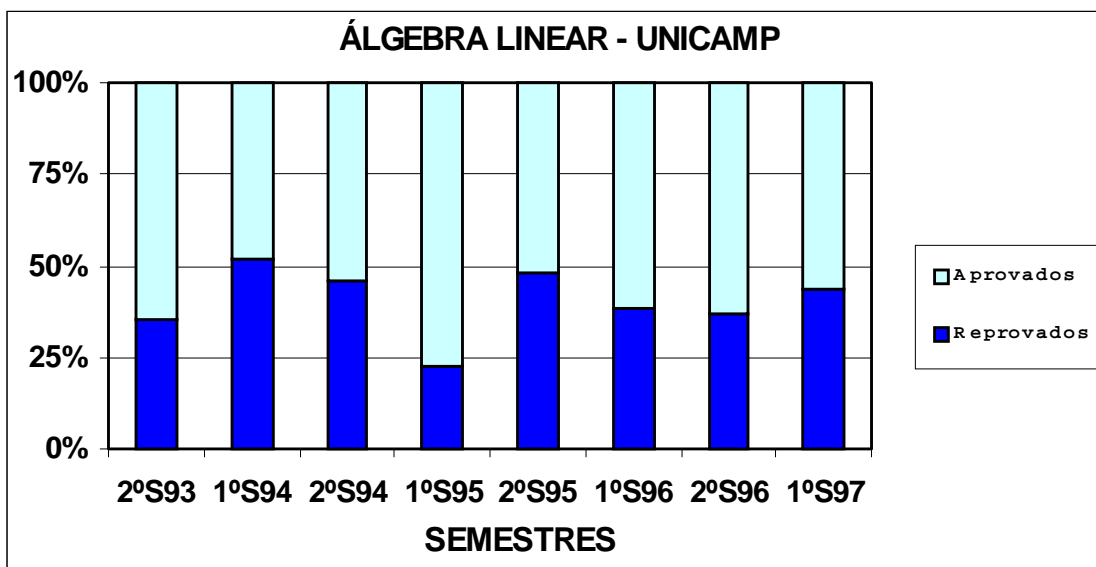
Hoje a visão que se tem é bem diferente daquela de trinta ou quarenta anos atrás (cf. Niss, 1999); existem grupos de professores universitários preocupados com o processo de ensino e aprendizagem, e até mesmo alguns professores e alunos, dividem responsabilidades pelo processo. Muitas pesquisas realizadas na área de educação, especificamente em Educação Matemática, buscam focar o processo de ensino e aprendizagem com o intuito de estudar os fenômenos didáticos inerentes a este, bem como identificar e classificar as dificuldades dos estudantes na construção do conhecimento.

¹ [Tradução do autor – original ver anexo, nota 1]

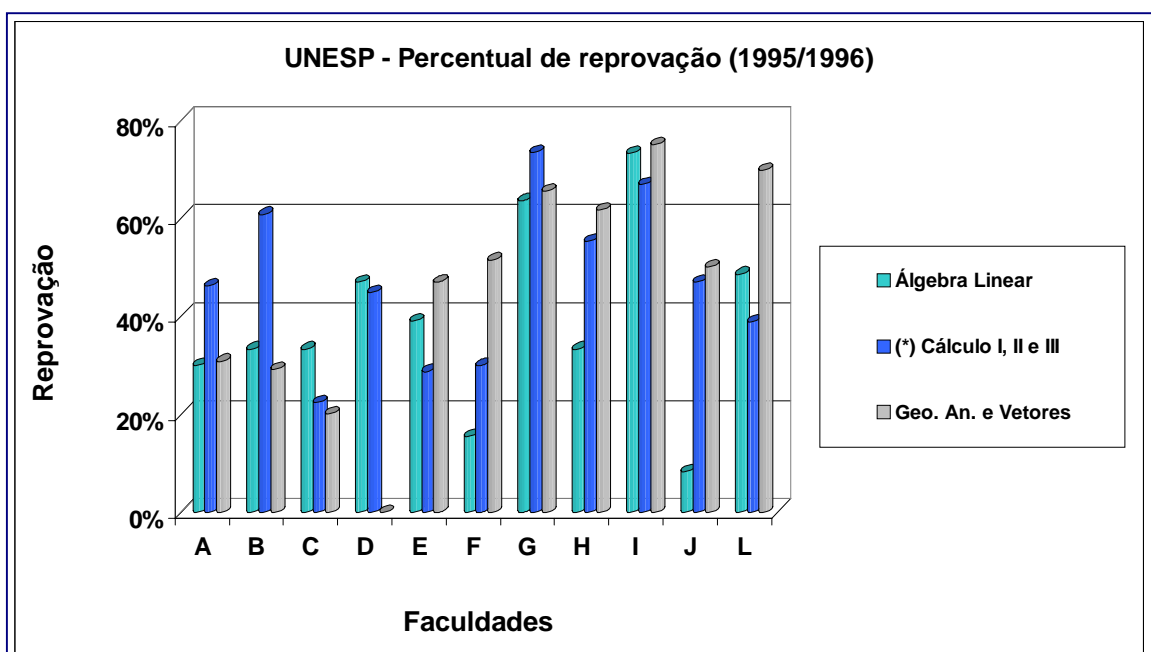
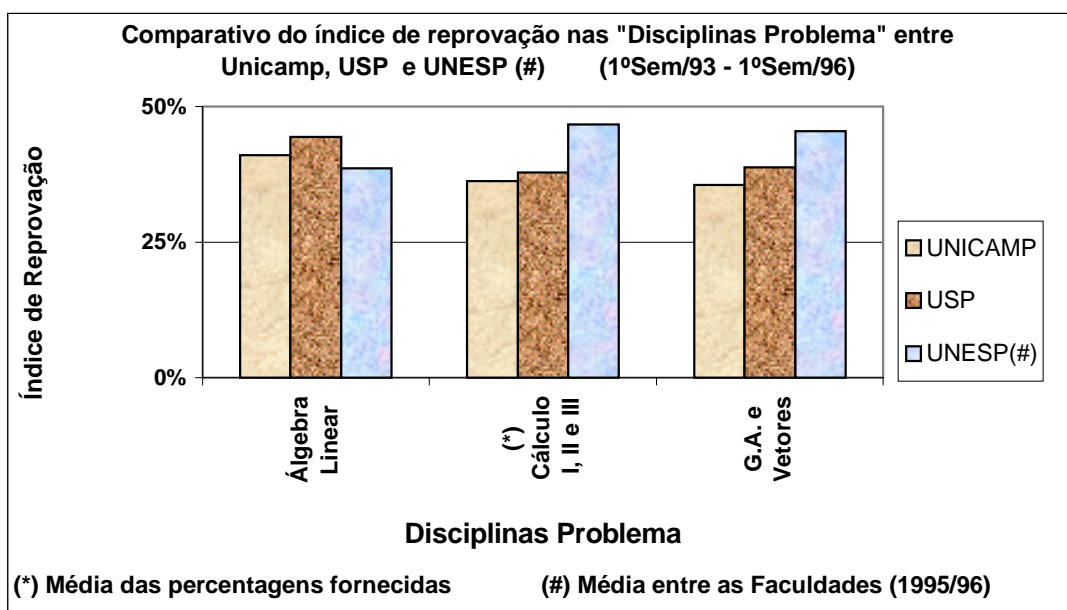
No Brasil, uma equipe da UNICAMP realizou uma pesquisa com o intuito de identificar as “disciplinas problemas” do período entre o 1º semestre/93 ao 1º semestre/97. Nesse relatório são apresentados diversos gráficos sobre o índice de aprovação e reprovação nas disciplinas consideradas problemáticas.

Foram relacionadas 15 disciplinas problemas. Dentre elas selecionei apenas três disciplinas: Cálculo, Álgebra Linear e Geometria Analítica. Escolhi Geometria Analítica e Cálculo para que o leitor possa ter meios de comparação, e Álgebra Linear por motivos óbvios.

A seguir, apresento alguns gráficos construídos a partir dos gráficos apresentados nos relatórios da pesquisa feita pela equipe da UNICAMP.



² [tradução e adaptação do autor – original ver anexo, nota 2]



A	Fac.Ciên. / Ba	G	Estatística FCT -PP
B	Eng. Civil / FET - Ba	H	Matem. FCT - PP
C	Eng. Elét. / FET - Ba	I	Física IGCE - RC
D	Eng. Mec. / FET - Ba	J	Matem. IGCE - RC
E	Eng. Civil Elét. Mec. / FE - IS	L	Matem. IBILCE - SJRP
F	Eng. Cart. FCT-PP		

Como se vê nesses gráficos, a Álgebra Linear é uma das disciplinas que apresenta alto índice de reprovação nas três universidades. Em outras palavras, a Álgebra Linear figura entre as matérias que têm um alto percentual de retenção de 25 a 50%, refletindo as dificuldades dos estudantes com sua aprendizagem. Isto não acontece somente no Brasil, pois pesquisas realizadas em outros países, por exemplo na França (cf. Dorier 1994), revelam que os alunos apresentam dificuldades na compreensão dos principais conceitos de Álgebra Linear, o que interfere em seus aproveitamentos .

Participo de um grupo da PUC-SP que pesquisa o ensino-aprendizagem da Álgebra Linear. Considerando as várias pesquisas em nível mundial na área, julguei oportuno analisar as contribuições brasileiras sobre o assunto, localizando-as no contexto das pesquisas estrangeiras sobre o ensino-aprendizagem da Álgebra Linear.

Segundo Fiorentini (1989), as pesquisas em Educação Matemática não mostram em geral uma continuidade, a não ser em raros casos, viabilizando a formação de linhas ou áreas de pesquisa em Educação Matemática. Logo, um trabalho sobre o estado da arte das pesquisas em ensino-aprendizagem da Álgebra Linear permite que pesquisadores da área, neste tipo de trabalho, se direcionem para outras pesquisas, dando continuidade a trabalhos pesquisas que já contribuíram para o progresso científico.

Assim, este trabalho tem como objetivo geral apresentar e analisar o panorama das pesquisas brasileiras, realizadas na década de 90, sobre o ensino-aprendizagem da Álgebra Linear.

Buscarei situar os trabalhos brasileiros analisados no contexto de trabalhos análogos de autores estrangeiros. Pretendo também destacar as questões “em aberto”, sugeridas pela análise das obras.

2. Procedimentos Metodológicos

Primeiramente analisei alguns estudos semelhantes, isto é, pesquisas do estado da arte do campo de Educação Matemática com a finalidade de conhecer melhor esse campo de pesquisa e decidir sobre procedimentos que mais bem se adaptassem a meu objetivo, aqueles que me auxiliariam na elaboração deste trabalho, uma vez que não encontrei nada específico sobre este tipo de pesquisa em livros de metodologia.

Ao mesmo tempo, iniciei a coleta de dados sobre publicações da última década (1989-1999), cujo assunto fosse relacionado ao ensino e à aprendizagem da Álgebra Linear. Procurei artigos em revistas científicas, como *Educational Studies in Mathematics*, RDM (*Recherches en Didactique des Mathématiques*), ZDM (*Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*), *The College Mathematics Journal*, em anais de congressos como dos ENEM's (Encontro Nacional de Educação Matemática), anais dos EPEM's (*Encontro Paulista de Educação Matemática*), anais dos PME's (*Psychology of Mathematics Education*); em publicações dos IREM's (*Institut de Recherche pour l'enseignement des Mathématiques*), CDM (*Cahier de Didactique des Mathématiques*). Além disso, as referências bibliográficas desses artigos remetiam a outros artigos, o que possibilitou ampliar bastante o número de materiais referentes ao assunto.

Por outro lado, eu ou outros integrantes do grupo de pesquisa visitamos outros centros universitários brasileiros, como a USP, em São Paulo, a Universidade Santa Úrsula, a UFRJ e a PUC no Rio de Janeiro, a UNESP (campus de Rio Claro), a UNICAMP e a PUC em Campinas, à procura de dissertações e teses sobre o assunto. Resolvemos fazer isso porque, apesar das solicitações feitas a diversas bibliotecas das Universidades, por meio de cartas ou mensagens via Internet,

obtivemos poucas respostas e tínhamos dificuldades em conseguir cópias dos trabalhos.

Enviamos correspondência a outros centros universitários, como a UFRS, UFSC, UFPR, UFMS, UFC e UFPE, solicitando a relação de teses e dissertações de suas unidades que versavam sobre o ensino-aprendizagem da Álgebra Linear.

Ao mesmo tempo em que recolhia o material, eu ia fazendo a análise dos primeiros trabalhos recebidos, elaborei uma ficha que fui preenchendo ao longo desta atividade para cada um destes trabalhos.

As fichas seguiram um padrão elaborado de forma a destacar, em cada trabalho: o objetivo, o tipo de pesquisa, a metodologia, as referências teóricas, as conclusões do(s) autor(es) e a indicação de problemas em aberto.

3 . Síntese do Panorama das Pesquisas em Educação Matemática

Com a finalidade de melhor compreender e localizar as pesquisas brasileiras sobre o ensino e aprendizagem de Álgebra Linear, analisei várias pesquisas sobre estado da arte, das quais selecionei aquelas que mais contribuíram para a compreensão do campo de minha investigação. Assim, esta síntese se apoiou nos artigos: *Aspects of the State of Research in Mathematics Education* de Morgens Niss, publicado em 1999; *Research on mathematical learning and thinking in the United States*, escrito por Jeremy Kilpatrick e publicado em 1981; *Tendências Temáticas e Metodológicas da Pesquisa em Educação Matemática no Brasil*, de Dario Fiorentini, publicado em 1989; *État de l'art de la recherche en didactique - À propos de l'enseignement de l'algèbre linéaire* de Jean Luc Dorier, publicado em 1998.

3.1 – As Pesquisas em Educação Matemática

O Artigo *Aspects of the Nature and State of Research in Mathematics Education*, escrito por Morgens Niss (1999), procura fazer, de forma sucinta, um esboço e uma caracterização da Didática da Matemática. O autor inicia seu artigo relatando que, nos últimos trinta anos, a Educação Matemática estabeleceu-se como uma disciplina acadêmica na cena internacional, recebendo diferentes nomes, tais como: pesquisa em Educação Matemática ou Ciência da Educação Matemática, ou ainda, Didática da Matemática (uso comum na Europa). Este *status* de disciplina pode ser constatado, observando-se a existência de vários departamentos nas

universidades e instituições de pesquisa, bolsas de pesquisa e projetos, programas e graus acadêmicos, organizações internacionais e corporações, revistas e séries de publicações, conferências, palestras, etc., tudo isso devotado à pesquisa em Educação Matemática.

Neste artigo, Niss (1999) procura caracterizar essa disciplina principalmente por meio de uma visão de sua natureza e estado, e apresentar e discutir alguns de seus maiores “achados”. Uma questão norteou o artigo: “Quais são os resultados e as questões de pesquisa da Didática da Matemática, quais são suas metodologias, e que tipo de resultados ou achados ela oferece?”

Segundo o autor, uma mudança interessante ocorrida nestes últimos anos é a forma como se vê a participação dos alunos e professores no processo de ensino e aprendizagem. Atualmente, a preocupação tem sido em como auxiliar os alunos a realmente aprender Matemática, a atenção está não apenas no número de alunos matriculados em uma disciplina, mas também na proporção de sucessos. Se algum tempo atrás a responsabilidade pelo fracasso era unicamente dos alunos, da falta de preparo deles, das suas inaptidões para com a disciplina e da falta de base, hoje a responsabilidade é dividida com a universidade, uma vez que cabe a ela, buscar entender o que é e o que leva o aluno ao aprendizado da Matemática, incluindo os processos que estão envolvidos. Por conseguinte, ao se compreender os possíveis caminhos da aprendizagem da Matemática, e os obstáculos que podem bloquear estes caminhos, ganha-se um melhor entendimento do que é ou não conhecimento matemático, perspicácia e habilidade, como esses fatores são gerados e armazenados, e se podem ser ativados e/ou bloqueados. A melhoria no processo de ensino-aprendizagem, mediante este diagnóstico e análise, se tornaria mais eficaz em qualquer nível do sistema educacional.

Niss (1999) também caracteriza o campo das pesquisas em Educação Matemática, seus componentes e objetivo. As pesquisas na área de Educação Matemática têm focado a aprendizagem de estudantes promovidos/reprovados em Matemática e a aquisição de competências Matemáticas. Um aspecto peculiar, mas essencial, dos didatas de Matemática, deve ser ressaltado: sua natureza dual. Os didatas de Matemática endereçam, não sugestionam, o que se pode chamar assuntos *descritivo/explicativo*, no qual as perguntas genéricas apontam para a descrição: *o que é (o caso)?* e para a explicação: *por que isto é assim?*; o que se busca são respostas objetivas, neutras a tal questionamento por meio de coleta de dados empírica e teórica, e uma análise sem qualquer envolvimento explícito de valores. Além da dimensão do descritivo/explicativo, os didatas de Matemática devem responder a uma dimensão normativa, na qual estão as perguntas genéricas “a que se deve o caso?” e “por que isto deveria ser assim?” – questões que, para surpresa de alguns, são consideradas parte de um discurso erudito e científico e pertencem ao âmbito da pesquisa.

O autor escreve que ambas as dimensões são componentes essenciais da ciência da Educação Matemática, ambas confiam crucialmente na análise teórica e empírica; no entanto, não se deve confundi-las, pois elas não são idênticas.

Ele prossegue dizendo que em um esboço das principais áreas de investigação estão presentes, em uma primeira instância: *o ensino de matemática* (que organiza os assuntos e busca transmitir ou provocar conhecimento, habilidades, perspicácias e competências matemáticas) e a *aprendizagem de Matemática* (que busca entender os fatores que propiciam e/ou dificultam aos estudantes adquirir tal conhecimento, habilidades, etc.; com consideração particular

para os processos e produtos de aprendizagem). Num mesmo nível, mas como áreas auxiliares à primeira instância, o autor apresenta: os aspectos da Matemática como uma disciplina, aspectos cognitivos ou aprendizado psicológico, aspectos do objetivo de currículo e sua implementação.

O autor resume as metas dos didatas de Matemática e afirma que uma delas *“é conhecer diferentes categorias de conhecimentos individuais para poder especificar e caracterizar a aprendizagem desejável ou satisfatória de Matemática”* (Niss, 1999: p.8)³. A finalidade é averiguar o desígnio e a efetiva utilidade da Matemática que se ensina (inclusive currículos, organização da sala de aula, estudo de formas e atividades, recursos e materiais, etc.), o que pode servir para induzir uma aprendizagem satisfatória/desejável, bem como construir e implementar métodos válidos e fidedignos para descobrir e avaliar, sem efeitos colaterais destrutivos, os resultados do ensino-aprendizagem da Matemática. A esta ação de indicar e especificar metas, o autor dá o nome de atividade normativa na Didática da Matemática. A procura por novos métodos de ensino e processos de aprendizagem, bem como a investigação do papel do professor e do aluno no processo de ensino e aprendizagem, além do exame das propriedades e efeitos de métodos atuais de avaliação em Educação Matemática e a busca de métodos inovadores de avaliação, são ações que apontam uma infinidade de tarefas teóricas e empíricas fundamentais à pesquisa aplicada.

Os pesquisadores na área de Educação Matemática, quando perguntados sobre a natureza do seu campo, geralmente apontam alguns aspectos particulares das pesquisas nesta área, mostrando que as “descobertas” obtidas na Didática da Matemática, sempre são situadas num contexto e no tempo, e sujeitas a uma série

³ [Tradução do autor – original ver anexo, nota 3]

de condições e circunstâncias, às vezes de natureza bastante específica, o que coloca limites à universalidade em espaço e tempo aos resultados/conclusões. Alguns pesquisadores hesitam em utilizar o termo 'descoberta' neste contexto, para evitar enganos e expectativas deslocadas do que um campo científico dessa natureza deveria oferecer. Esses pesquisadores preferem ver a Didática da Matemática como provedora de ferramentas genéricas, incluindo aparatos conceituais e modelos para análise de situações de ensino/aprendizagem ou de novas questões, novos métodos de olhar objetos e novas idéias inspiradas em outros campos, etc.

Nos últimos vinte anos, várias pesquisas em Didática da Matemática enfocaram o processo de aprendizagem dos estudantes, levando em conta vários fatores como currículos, tarefas e atividades; materiais e recursos, inclusive livros didáticos e tecnologia de informação, avaliação, relações sociais entre estudantes e entre estes e professores, etc. Por conseguinte, hoje já se sabe muito a respeito do processo de aprendizagem da Matemática por parte dos estudantes e sobre como este pode acontecer dentro de diferentes áreas da Matemática, e sob diferentes circunstâncias e condições, uma vez que vários fatores podem impedir ou dificultar uma aprendizagem desejável.

Das pesquisas realizadas na área de Didática da Matemática, muitas delas trouxeram avanços significativos para a compreensão do processo de ensino e aprendizagem da Matemática. O processo de aprendizagem é complexo, pois muitos fatores interferem nele, como: as características epistemológicas da Matemática, as concepções dos estudantes, as situações sociais e culturais as semelhanças e discrepâncias entre os diferentes registros lingüísticos. Dentre as pesquisas que abordavam essas características, Niss (1999) cita Sierpinska (1994)

que estudou os papéis da epistemologia e os obstáculos na aquisição de conhecimento matemático; Bishop (1988) que abordou o contexto social e cultural dos pesquisados; Nunes et al. (1993), Cobb e Bauersfeld (1995), Schoenfeld (1983) e Penkonen (e.g. Pehkonen e Törner, 1996), entre outros, que investigaram a concepção de alunos e professores; Fischbein (1989) e colaboradores, que estudaram a influência de modelos tácitos na atividade Matemática; Leder (1992); Niss (1993a e 1993b) (apud Niss,1999) que estudaram a influência da avaliação na aprendizagem de Matemática, assunto de vários estudos teóricos e empíricos; e finalmente Pimm (1987), Ellerton e Clarkson (1996) cujo trabalho deu enfoque ao papel da linguagem e comunicação. Niss (1999) ressalta que esses estudos ensinavam a ter cautela e a não concluir apressadamente quando se lida com a aprendizagem de estudantes de Matemática.

O autor ainda cita pesquisadores como Tall e Vinner (1981), Vinner e Dreyfus (1989), Vinner (1991); Tall (1992) e também Robert (1982), que com suas pesquisas mostraram que os conceitos-imagem dos estudantes não coincidem com os conceitos-definição que lhes são expostos . “..... *Os conceitos-imagem são gerados por noções prévias e experiências, e também pelos exemplos em relação aos quais os conceitos-definição foram testados. Foram feitas várias tentativas para construir bases teóricas gerais para elucidar essas descobertas. Um exemplo notável é a teoria de Vergnaud de 'campo conceitual' (apud Vergnaud, 1990) [...]. O risco de formar imagens muito restritas de conceitos gerais parece ser particularmente manifesto em domínios como Aritmética, Cálculo, Álgebra Linear, Estatísticas [...]. Em tais domínios, manipulações de algoritmos, procedimentos, tendem a atrair a atenção dos estudantes para criar um 'filtro' do conceito: Somente alguns aspectos de um conceito, aquilo que é digerível e pertinente no contexto do “cálculo” parecem*

ser preservados na mente do estudante. Em casos mais graves, uma 'maior ênfase' na instrução de procedimentos pode impedir o estudante de desenvolver a construção do conceito que ele só experimentou por manipulações (Hiebert e Carpenter, 1992)....." (Niss, 1999: p.15)⁴. O autor ainda cita Janvier (1985) que diz que a aprendizagem de conceitos matemáticos só pode se dar com a articulação de várias representações (numérica, verbal, simbólica, gráfica, etc.) de conceitos e fenômenos.

Lembro aqui que R. Duval publicou vários trabalhos nos quais fala sobre a importância e defende a necessidade da articulação de várias representações. Duval diz que nas atividades matemáticas podemos mobilizar duas funções cognitivas: o tratamento (*transformações no interior de um mesmo registro*) ou a conversão (*transformações pela mudança de registro*).

Uma outra noção desenvolvida com as pesquisas na Didática da Matemática é a definição de "processo-objeto", na qual em determinado momento um certo conceito matemático é objeto de estudo e em outro ele é utilizado como *pré-requisito* na construção de um novo conceito. Na literatura científica, a noção de "processo-objeto" pode ser encontrada com outros termos, como dialética ferramenta/objeto de Douady (1991) ou reificação de Sfard (1991) e Sfard & Linchevski (1994).

Outras noções como a de prova Matemática e demonstração são citadas por Niss (1999). Ele afirma que os pesquisadores em Didática têm dado pouca atenção a estas duas noções (Hanna e Jahnke, 1996; Alibert e Thomas, 1991). Os estudantes encontram dificuldades para entender o que é ou não prova Matemática e demonstração. Para eles, a prova e a demonstração matemática são apenas

⁴ [Tradução do autor – original ver anexo, nota 4]

compreensíveis a matemáticos, para os estudantes basta a evidência empírica (“eu posso ver que é verdade”). Segundo Niss (1999), nas décadas de 80 e 90, a prova Matemática e a demonstração receberam pouca ênfase no ensino de Matemática, embora elas sejam reconhecidas como um desafio para a aprendizagem da Matemática, pouco a pouco, parece que há um reconhecimento crescente da necessidade de revitalizar a prova Matemática e a demonstração como componentes centrais em Educação Matemática. Alibert e Thomas (1991) são citados como pesquisadores neste tema.

Apesar de Niss (1999) afirmar que os pesquisadores em Didática têm dado pouca atenção à prova e à demonstração Matemática, quero aqui mostrar estranheza a tal afirmação, uma vez que existem vários grupos de pesquisa, tanto na Inglaterra como na França, que se dedicam a pesquisas nesta área; poderíamos citar Balacheff entre os muitos pesquisadores preocupados com este tema. Nas referências bibliográficas encontram-se algumas obras que servem como uma pequena amostra do interesse com a prova e a demonstração Matemática.

O último achado apresentado neste artigo escrito por Niss (1999) é o papel e o impacto da tecnologia de informação (calculadoras, computadores e softwares) no ensino e aprendizagem da Matemática. Nas duas últimas décadas, estudos vêm sendo realizados com o intuito de integrar o uso de tecnologia ao ambiente de ensino e aprendizagem da Matemática. Alguns pesquisadores citados aqui: Balacheff e Kaput (1996); Ruthven (1996); Heid (1997) possuem trabalhos nesta linha. Pesquisas nesta área mostram que o próprio sistema tecnológico (hardware e software) 1as vezes torna-se um obstáculo para o aprendizado, pois a tecnologia utilizada pode distrair a atenção dos estudantes, impedindo que eles concentrem nas propriedades do sistema, em lugar da aprendizagem de Matemática.

Em sua conclusão, Niss (1999) afirma que *“não existe transferência de um conhecimento sólido da teoria Matemática para a habilidade em resolução de problemas matemáticos não rotineiros ou para a habilidade em aplicar Matemática e desenvolver modelos matemáticos em contextos complexos e extra-matemáticos”*. Há evidências de que *“para que isto aconteça, tanto a resolução de problemas quanto a modelagem devem ser objetos explícitos de ensino-aprendizagem”* (Niss, 1999: p. 21)⁵.

Outra conclusão de Niss (1999) é que *“muitos dos modos e instrumentos de avaliação de uso corrente no ensino da Matemática falham em propiciar ao estudante uma idéia que o faça conhecer, compreender e aperfeiçoar sua visão e habilidades concernentes ao assunto focado e assim atingir conhecimentos de ordem superior”* (Niss, 1999: p.21)⁶. Embora haja instrumentos de avaliação capazes de dar aos estudantes esta visão, esse tipo de avaliação não ocorre por causa do tipo de demanda que exige avaliações baratas, rápidas e fáceis de serem analisadas por meio de dados.

O autor conclui este artigo dizendo que não é possível abordar todos os principais aspectos e áreas da Didática da Matemática em um único artigo.

Embora Niss (1999) não os tenha tratado, ele lembra que há trabalhos importantes realizados na área de ensino e aprendizagem da Matemática em tópicos matemáticos específicos, como aritmética, álgebra abstrata e linear, cálculo/análise, geometria, Matemática discreta, probabilidade e estatísticas, bem como noções importantes apresentadas pelas teorias interpretativas instrumentais de Brousseau (em 'situações', e 'contrato didático' em Educação Matemática), Chevallard (com

⁵ [Tradução do autor – original ver anexo, nota 5]

⁶ [Tradução do autor – original ver anexo, nota 6]

'Transposição Didática'), Fischbein (em intuição) e Mellin-Olsen ('razões de aprendizagem').

Ressalto alguns pontos no artigo de Niss (1999), como o fato de que nos últimos trinta anos a Educação Matemática estabeleceu-se como uma disciplina acadêmica na cena internacional. Vejo que Niss (1999) norteou seu artigo procurando evidenciar os resultados e as questões de pesquisa da didática da Matemática, quais suas metodologias e que tipo de resultados ou achados ela oferece.

Niss (1999) fala sobre a atual preocupação em auxiliar os alunos a aprender Matemática, e que o sucesso deles é considerado um bom indício deste desempenho. Porém, alerta que a melhoria no processo de ensino-aprendizagem seria significativa, se as falhas no processo fossem diagnosticadas e analisadas, pois sem isso não se pode executar melhorias. Assim, é possível ver que a principal contribuição das pesquisas na área de Educação Matemática é diagnosticar e analisar o processo de ensino-aprendizagem, para obter e implementar elementos que tragam modificações pertinentes.

Há progressos significativos nos estudos na área de Educação Matemática, várias pesquisas em didática da Matemática enfocaram, nos últimos vinte anos, o processo de aprendizagem dos estudantes; como consequência, hoje já se sabe muito sobre o processo de aprendizagem Matemática dos estudantes, e como este pode ocorrer dentro de diferentes áreas da Matemática e sob diferentes circunstâncias e condições.

Este artigo (Niss, 1999) mostra o progresso na área das pesquisas em Educação Matemática. Acredito que se olharmos para outras mudanças ocorridas no mundo em relação às pesquisas nesta área, poderemos ter uma visão mais ampla deste campo científico.

Com este intuito analisarei o artigo seguinte sobre as pesquisas em Educação Matemática nos Estados Unidos.

3.1.1 – As Pesquisas em Educação Matemática nos Estados Unidos

O artigo *Research on mathematical learning and thinking in the United States*, escrito por Jeremy Kilpatrick (Universidade da Geórgia) é o relato de uma entrevista apresentada em uma rádio britânica. Ele aborda o progresso alcançado na área de pesquisas em Educação Matemática nos Estados Unidos até 1981. A seguir apresento uma síntese desse artigo.

Kilpatrick mostrou neste seu artigo que o cenário da pesquisa educacional nos Estados Unidos até 1981, particularmente em aprendizagem e pensamento matemático, era complexa e volátil, tendo sido influenciada pelos movimentos surgidos em torno de metodologias de pesquisas. Isso pode ser percebido pelas rápidas mudanças ligadas às teorias de aprendizagem usadas como bases para ensinar Matemática.

A teoria da aprendizagem de descoberta foi utilizada para contrastar as implicações no ensino da Matemática com o desenvolvimento cognitivo de Bruner, o neobehaviorismo de Gagne e a teoria cognitiva da aprendizagem verbal significativa

de Ausubel, que pouco tempo depois seria abandonada. A psicologia de informação-processo foi uma teoria que fundamentou outras pesquisas, mas em pouco tempo Bruner e Ausubel não seriam mais atuantes em pesquisas educacionais e Gagne logo repensou muitas de suas posições a respeito do neobehaviorismo.

Havia uma diversidade de sistemas teóricos que podiam ser relacionados, e a complexidade do sistema educacional nos Estados Unidos refletia esta diversidade, assim como as pesquisas em Educação Matemática, o que dificultava identificar tendências e impossibilitava qualquer generalização sobre a atividade durante um certo período, pois havia sempre numerosas exceções.

Nos anos 60 a preocupação era melhorar o currículo e o ensino de Matemática, logo, as pesquisas forneciam elementos importantes para as mudanças necessárias. Mas na década de 70 a preocupação foi suprir a necessidade de mão-de-obra. Embora a preocupação dos anos 60 ainda permanecesse em 1980, perdeu-se a confiança de que o governo satisfizesse às necessidades educacionais por meio de sua política e programa na área de educação. As verbas destinadas às pesquisas na área de educação estavam sofrendo cortes e por isso essas pesquisas vinham passando para o setor privado.

Kilpatrick (1981: p.366)⁷ afirmar que *“como toda pesquisa educacional, a pesquisa em Educação Matemática tem uma função política ...”*, pois ela responde ao mesmo tempo ao clima político e ao “estado de espírito da nação“ (*'national mood'*) que a influencia; ele expressou a dúvida de que, mesmo havendo dinheiro disponível para extensas pesquisas e estudos nos Estados Unidos, sobre ensino e aprendizagem da Matemática, se isso seria levado a efeito.

⁷ [Tradução do autor – original ver ANEXO, NOTA 7]

Abro aqui um parênteses para citar um trecho de Paiva (1999) que, acredito, faz eco à frase de Kilpatrick quanto à função política da pesquisa educacional. Paiva afirma: *“Wilcox fez um estudo das reformas de 1960 e 1970 à procura de intenções e resultados, com a finalidade de situar a reforma dos anos 80 em relação às demais. Mostra que há uma intensa discussão sobre as três diferentes orientações para a Educação Matemática: competências numéricas, compreensão de idéias matemáticas e habilidades na investigação matemática, sem desvinculá-las do interesse matemático e político de cada uma delas. Wilcox combina a discussão sobre essas orientações e suas procedências com a visão de Matemática que está subjacente a cada uma das tendências e o tipo de instrução de sala que elas acarretam, faz referência ao fato de que os interesses políticos que estão por trás dessas orientações nunca são explicitados. Diz Wilcox: 'O interesse político é encontrado em diferentes relações de poder que permeiam a sala de aula na relação entre professor-aluno sob o foco da autoridade epistemológica' (p. 51). Os interesses políticos aparecem também no sentido moral e ético que é dado aos resultados a serem alcançados pelos estudantes, no que diz respeito à competência numérica, compreensão e habilidades matemáticas”* (Paiva, 1999: p.41). Pode-se ver que o panorama político reflete-se na política educacional, os objetivos educacionais devem ser concernentes aos anseios nacionais.

Kilpatrick (1981) comentou ainda que consideradas as dificuldades econômicas da época nos Estados Unidos, não se acreditava no poder da escola pública em transformar as pessoas e a sociedade. Outra consequência disso foi a desvalorização da educação como uma instituição e a desmoralização dos professores e pesquisadores da área.

O autor ressaltou também a falta de coerência e identidade da comunidade de pesquisadores em Educação Matemática. Afirmou que um ponto positivo foi o crescimento do número de dissertações e artigos publicados no *Journal for Research in Mathematics Education*, porém, alertou que a grande maioria destas dissertações vinha de instituições que não possuíam departamentos ou programas em Educação Matemática, e eram patrocinadas freqüentemente por professores que não se identificavam como Educadores na Matemática.

Outro ponto ressaltado neste artigo foi que, com algumas exceções, até 1981, os matemáticos dos Estados Unidos viam a pesquisa em Educação Matemática com desinteresse. Havia também uma depreciação com relação aos trabalhos realizados por pesquisadores em Educação Matemática e trabalhos realizados por psicólogos na área de educação; já os pesquisadores e psicólogos que atuavam na área de Educação mantinham um certo intercâmbio entre eles, embora a tendência era que cada um deles ficasse restrito à sua área.

Kilpatrick (1981) ainda acrescentou que parecia haver um consenso de que muitos pesquisadores estudavam as coisas erradas de modo errado. Talvez desiludidos com métodos tradicionais de pesquisa educacional, esses pesquisadores buscavam utilizar novos métodos, que em alguns casos não eram adequados nem eficazes às suas pesquisas.

Ele analisou alguns artigos e pesquisas publicados no *Journal for Research in Mathematics Education*, para ter uma idéia de como os pesquisadores em Educação Matemática, nos Estados Unidos, lidavam com assuntos teóricos em pesquisa de ensino-aprendizagem da Matemática. Procurou verificar se havia nestas publicações alguma tentativa de unir a questão investigada com algum contexto teórico explícito. Na amostragem selecionada pelo autor (julho/79 a maio/81), dos 38 artigos vistos

apenas seis tratavam de interações de aptidão-tratamento, muito embora os autores raramente especificuem as bases teóricas para as suas atividades; três artigos faziam mais que um uso casual da epistemologia genética de Piaget. Esta amostragem sugeriu a Kilpatrick que a falta de atenção para com a teoria fosse característica das pesquisas nos Estados Unidos em ensino e aprendizagem de Matemática, durante período por ele analisado, até 1981.

Kilpatrick (1981) estabeleceu nesse artigo uma classificação das pesquisas em educação de dois modos diferentes que, embora não fossem opostas, mostravam uma tensão entre si: *Dimensão do Rigor*: referente aos padrões da metodologia de pesquisa. “*Um estudo deve ser projetado para realizar alguns propósitos bem definidos, usando técnicas que outros possam seguir e permitindo a validação dos resultados encontrados. O relatório de um estudo rigoroso deve conter uma indicação clara das hipóteses feitas, do princípio ao término do estudo. O pesquisador deve especificar as questões sob investigação, descrever as justificativas pertinentes à cada questão, sugerir algumas explicações alternativas plausíveis para os resultados, e se possível sugerir as alternativas prováveis e as menos prováveis. O relato do estudo deve conter o máximo de detalhes sobre os procedimentos usados e as informações que o espaço permitir, e se possível deve ser dada ao leitor interessado a oportunidade de obter detalhes adicionais em algum lugar*” (Kilpatrick, 1981: p.371)⁸. *Dimensão do Significado*: refere-se ao impacto que uma pesquisa pode trazer ao pensamento do leitor. “*Um estudo significativo dá uma nova visão sobre o que se está ensinando ou pesquisando [...] Uma pesquisa significativa está embutida em uma cadeia teórica que ressoa independentemente do*

⁸ [Tradução e adaptação do autor – original ver anexo, nota 8]

tempo e circunstância”⁹ (Kilpatrick, 1981: p.371).

Pressões para produzir resultados, “publicar ou perecer”, freqüentemente levavam os pesquisadores dos Estados Unidos a tratar problemas secundários nas suas pesquisas porque os problemas secundários eram vistos como mais manejáveis.

Quanto aos métodos utilizados em pesquisa, o autor sugere que em lugar de abandonar métodos quantitativos a favor de qualitativos, os esforços deveriam ser dirigidos para enriquecer ambos. Em particular, as novas técnicas exploratórias para analisar dados exploratórias e a apresentação deveriam ser estudadas por pesquisadores em Educação Matemática, e, além disso, deveria ser considerado o uso de técnicas para a re-análise de dados e a meta-análise de estudos.

O autor afirmou que nos anos 80 a diretriz para as pesquisas em Educação Matemática nos Estados Unidos passou a ser “Resolução de Problemas”. Nesta mesma época foram criadas associações de pesquisadores ligados a esta “nova temática”. Este tema de pesquisa tornou-se “popular” em parte porque os pesquisadores em Educação Matemática acreditavam que o ensino baseado na resolução de problemas era desafiador. *“Embora os profissionais em Educação Matemática pareçam ter se convencido de que a resolução de problemas é importante, pouco foi feito para clarear o que o termo significa em contextos diferentes. Não está claro que professores de Matemática e pesquisadores em Educação estejam se referindo à mesma coisa quando defendem uma maior ênfase em resolução de problemas na Matemática escolar. Os pesquisadores defendem mais estudos que permitam ensinar e entender como a criança resolve*

⁹ [Tradução do autor – original ver anexo, nota 9]

problemas.....” (Kilpatrick, 1981: p.375)¹⁰.

Psicólogos cognitivos, como Greeno e Resnick, estudaram os problemas do currículo escolar com enfoque nas observações de “resolução de problemas”, e, a partir daí, os pesquisadores em Educação Matemática tentaram incorporar algumas das idéias desses psicólogos às suas pesquisas. Os produtos deste intercâmbio com os psicólogos cognitivos eram incertos, mas ao menos os diálogos haviam começado.

“Nenhum teórico de Educação Matemática surgiu nos Estados Unidos (até 1981), para oferecer um suporte sobre o qual as pesquisas em 'resolução de problemas' pudessem ser baseadas. Pesquisadores, às vezes, invocam o nome de Polya em defesa de seus trabalhos; embora Polya tenha escrito muito sobre resolução de problemas, ele não reivindicou ter desenvolvido uma psicologia do tema, ele apenas esboçou uma visão teórica delineada de como poderia ser ensinado na sala de aula de Matemática” (Kilpatrick, 1981: p.375)¹¹.

O autor concluiu dizendo que o artigo concentrou-se na situação nos Estados Unidos com relação a pesquisa em aprendizagem e do pensamento matemático. Nenhuma tentativa foi feita com a finalidade de relacionar os trabalhos realizados no Estados Unidos com os realizados em outros países.

Este artigo permite ver as modificações metodológicas ocorridas nas pesquisas nos Estados Unidos até 1981, em particular as pesquisas em Educação Matemática. Não só houve mudanças na metodologia, como também nos referenciais teóricos, os quais no início, vinham da psicologia cognitiva, no entanto, a partir de 1980 eles se tornaram mais específicos na área de Educação Matemática.

¹⁰ [Tradução do autor – original ver anexo, nota 10]

¹¹ [Tradução do autor – original ver anexo, nota 11]

Acredito ser interessante destacar os motivos que trouxeram mudanças à metodologia e aos referenciais teóricos. Em 1968 Philip Jackson no livro *Life in Classrooms* apud Paiva (1999), faz um estudo sobre o pensamento do professor, em que busca “[...] descrever e entender os processos mentais que conduzem o comportamento do professor, este estudo teve um impacto, na época, devido ao fato de ir de encontro ao paradigma de pesquisa experimental então vigente. O foco de atenção dessa pesquisa é diferente do tradicional da época, paradigma processo-produto, no qual o objeto de estudo era o comportamento do professor. Nesse estudo o autor centra as atenções no pensamento e no processo de tomada de decisão do professor” (Paiva, 1999: p. 36). Dessa forma Jackson despertou a atenção dos pesquisadores nesta direção, que era observar e descrever o pensamento e planejamento dos professores visando assim entender melhor a prática da sala de aula.

O paradigma processo-produto norteou as pesquisas, na área de Ensino, com o enfoque de Jackson, até 1975, “[...] começam a ter um espaço maior para a discussão a partir da Conferência sobre estudos em Ensino, em julho de 1974, promovida pelo Instituto Nacional de Educação (EUA).[...] Esta visão a respeito sobre o professor fez com que houvesse mudança nas pesquisas sobre o pensamento do professor, no que diz respeito às questões apresentadas, métodos de pesquisa utilizados e à forma de apresentação dos resultados alcançados” (Paiva, 1999: p 37). As pesquisas sobre o processo de pensamento do professor foram incrementadas nos anos 80.

Vejo que este artigo de Kilpatrick (1981) auxilia entender o desenvolvimento das pesquisas em Educação Matemática, uma vez que mostra a cena da pesquisa internacional, em especial em aprendizagem e pensamento matemático nos Estados Unidos, evidenciando a influência que sofreu de movimentos surgidos em torno de metodologias de pesquisas, fato que pode ser visto pelas “rápidas” mudanças ligadas às teorias de aprendizagem que foram usadas como bases para ensinar matemática.

Pode-se comprovar a preocupação que havia nos anos 60 com a melhoria do currículo e do ensino de Matemática — as pesquisas forneceram elementos importantes para as mudanças necessárias. Já na década de 70 a preocupação era suprir a necessidade de mão de obra. Nos anos 80, a diretriz das pesquisas em Educação Matemática nos Estados Unidos, segundo Kilpatrick (1981), passou a ser a Resolução de Problemas.

Os pontos levantados neste artigo somados àqueles do artigo de Niss (1999), permitem esclarecer melhor o desenvolvimento na área de Educação Matemática. Uma questão pertinente é saber como e quais influências sofreram as pesquisas em Educação Matemática no Brasil.

Com o objetivo de esclarecer o desenvolvimento das pesquisas em Educação Matemática no Brasil, passo à análise do artigo de Dario Fiorentini.

3.1.2 - Pesquisas em Educação Matemática no Brasil até 1989

Apresento a síntese do artigo de Dario Fiorentini *Tendências Temáticas e Metodológicas da Pesquisa em Educação Matemática no Brasil*. A temática deste artigo é verificar as linhas ou áreas emergentes de pesquisa, bem como a relação ensino-pesquisa .

Escreve o autor que, no Brasil, até o início da década de 70, “*as experiências e os estudos relativos ao ensino da Matemática foram marcados pela preocupação dominante com 'o quê ensinar' . As questões de ordem pedagógica do 'como ensinar', 'por que ensinar' e 'para quem ensinar', ficaram ignoradas ou relegadas a segundo plano, subjugadas à 'natureza' do conteúdo enquanto conhecimento logicamente estruturado (MONTEJUNAS, 1980)*” (Fiorentini, 1989: p.186).

Este caráter de conteúdo exacerbou-se no período de implantação da chamada Matemática Moderna no Brasil (década de 60 e início da de 70). “ *Os alvos mais intensamente visados pelos responsáveis pela Educação Matemática seriam, nesta época, segundo Sangiorgi (1966) apud Fiorentini (1989): o preparo de professores secundários em conteúdos de Matemática Moderna; a reformulação do currículo de Matemática na escola secundária; a elaboração de livros-textos em um novo estilo nos assuntos de Matemática*”. (Fiorentini,1989: p.186)

Entretanto, antes deste período já existiam trabalhos com alguma preocupação psicopedagógica. Destacam-se, nas décadas de 40 e 50, os trabalhos de Melo e Souza (Malba Tahan) e de Irene Albuquerque. Acho importante salientar que estes autores escreveram, nas décadas de 30 e 40, livros didáticos, nos quais mostravam preocupação com a aprendizagem de álgebra e de geometria, bem como com a

metodologia da sala de aula. Eles se preocupavam em apresentar o conteúdo matemático de forma tal que o resultado final fosse um aprendizado significativo (Paiva, 1999).

A contribuição da psicopedagogia piagetiana começou nas décadas de 60 e início da de 70 especialmente por meio das propostas de Dienes. Esta presença foi notada nos estudos e experiências levados a cabo por alguns pesquisadores, como Luis Alberto Brasil, do Ceará; Waldecyr C. de Araújo Pereira, de Pernambuco, entre outros e, mais fortemente, por grupos ligados ao movimento da Matemática Moderna, como o GEEM, em São Paulo (fundado em 1961); o GEEMPA, em Porto Alegre e, mais tarde, o GEPEM, no Rio de Janeiro.

“A partir da década de 70, em virtude da implantação da pós-graduação no País, a pesquisa em Educação Matemática passa a realizar-se preponderantemente nas universidades, junto aos programas de pós-graduação em Educação.

As 35 dissertações e teses de mestrado ou doutorado produzidas de 1972 a 1979, em sua maioria, giravam em torno do problema do fracasso do ensino da Matemática. Se antes o problema era percebido no âmbito do conteúdo escolar que deveria ser reformulado e atualizado, nessa época o problema se concentra no professor e no modo como ensina. Por isso, o grande número de trabalhos preocupados em propor e validar novos métodos e técnicas de ensino; treinar professores nestas inovações; desenvolver recursos didáticos (módulos instrucionais, materiais concretos,...); pesquisar novas abordagens de conteúdos como frações, geometria, funções, integração de conteúdos ... O suporte teórico para tais 'inovações', quando havia, vinha das teorias psicológicas (piagetianas ou behavioristas) de aprendizagem.

Estes trabalhos da década de 70 foram marcados por algumas tendências de orientação não ortodoxas como o 'idealismo', o 'computacionismo', o 'psicologismo' e o tecnicismo “(Fiorentini, 1989: p. 187).

“A partir de 1984 surgiram as primeiras tentativas brasileiras de teorização de práticas pedagógicas e de estudos mais críticos sobre o ensino da Matemática. Isto se dá concomitantemente à ampliação da concepção de Educação Matemática, concepção esta que a situa como área interdisciplinar envolvendo, além dos conteúdos matemáticos historicamente produzidos e organizados, aspectos filosóficos, psicológicos, sociais, políticos e antropológicos.

Com isso a percepção da problemática do ensino da Matemática também se transformou. Novas formas igualmente surgem para atacar os problemas. Aos poucos a abordagem qualitativa , mais apropriada para as investigações em ciências humanas , passa a ser a maneira mais usual nas pesquisas. Esta mudança foi tida como drástica , como atestou o 'III Simpósio de Iniciação Científica em Educação Matemática' realizado em Rio Claro, o em abril de 1989 , onde a abordagem qualitativa foi hegemônica.

Se antes as pesquisas se assentavam epistemologicamente no positivismo, passa-se a perceber um ecletismo metodológico. Entretanto, algumas pesquisas já procuram articular uma abordagem que se orienta epistemologicamente na fenomenologia ou no materialismo-histórico-dialético” (Fiorentini, 1989: p.189).

O enfoque fenomenológico-hermenêutico somente viria a ocorrer a partir da dissertação de Mestrado de Medeiros (1985) apud Fiorentini (1989): *Educação Matemática: Discurso Ideológico que a sustenta*, em que ele procurou, a partir da análise de depoimentos de professores-pesquisadores em Educação Matemática de vários níveis, desvendar o significado de o que é Educação Matemática. É no

Mestrado em Ensino de Matemática da UNESP, Rio Claro, que esta abordagem começou a consolidar-se.

As dissertações sobre Educação Matemática estudadas e que se aproximam da abordagem histórico-dialética expressam um interesse transformador. A maioria destes trabalhos foi produzida no curso de pós-graduação em Metodologia do Ensino da FE-UNICAMP.

O autor afirmou ter percebido que muitas dissertações constantes de pesquisa qualitativa, dependendo das condições teórico-metodológicas do pesquisador, não ultrapassaram o nível do senso comum, reduzindo-se, muitas vezes, a meras narrações de fatos ou descrições superficiais de experiências, sem trazer, portanto, contribuições significativas para o avanço do conhecimento da área de Educação Matemática.

Fiorentini (1989) observou ainda que várias dissertações ou teses permaneciam arquivadas nas instituições em que foram produzidas, desconhecidas para a maioria dos pesquisadores em Educação Matemática. Talvez por isso as pesquisas em Educação Matemática não mostravam em geral uma continuidade, a não ser em raros casos, inviabilizando assim a formação de linhas ou áreas de pesquisa em Educação Matemática.

Fiorentini concluiu que até 1989 havia poucas pesquisas transformadas em dissertações ou teses cujo objeto era prática escolar, o que realmente acontecia na sala de aula. E estas limitavam-se a denunciar as deficiências de formação ou de atuação do professor, sem apresentar qualquer aspecto positivo, o qual poderia se constituir no núcleo transformador e superador dessa realidade. Concluiu também que apenas três dissertações, dentre as mais de 120 produzidas até outubro/1989 discutiam, e mesmo assim parcialmente, o livro didático de Matemática no Brasil.

O autor chegou também à conclusão de que o estudo da evolução histórica do ensino da Matemática no Brasil recebeu atenção especial de apenas duas dissertações. Isto parecia apontar um paradoxo : como é possível tratar e propor soluções aos problemas do ensino da Matemática no Brasil sem situá-los historicamente? Sem captar o movimento histórico do ensino da Matemática e identificar sua relação com o desenvolvimento da sociedade brasileira?

A contribuição deste artigo (Fiorentini, 1989) foi auxiliar-me a compreender a situação das pesquisas na área de Educação Matemática no Brasil e quais foram as influências externas que trouxeram mudanças nesta área.

Destaco fatos importantes como a implantação da Matemática Moderna no Brasil, da pós-graduação e a preocupação de estudar o problema do fracasso do ensino da Matemática. Para este último item é relatada a concentração de esforços na atuação do professor e no modo como ele ensina. Vários trabalhos científicos na época propuseram-se a validar novos métodos e técnicas de ensino, treinar professores nestas inovações e desenvolver recursos didáticos.

Outro ponto é o fato de que até 1989 havia poucas dissertações ou teses que tinham como objeto a prática escolar, o que realmente acontecia na sala de aula.

Pode-se concluir nitidamente, com os três artigos apresentados anteriormente, as influências e mudanças sofridas na área de Educação Matemática; e o que elas representam para as pesquisas realizadas nesta área. Como meu objetivo é ir em direção às pesquisas em Educação Matemática sobre o ensino-aprendizagem da Álgebra Linear, analisarei o artigo de Jean Luc Dorier (1998), o qual permitirá ver

nuances das pesquisas mundiais na área de ensino-aprendizagem da Álgebra Linear.

3.2 – As Pesquisas sobre Didática da Álgebra Linear na França e nos Estados Unidos

Passo a apresentar a síntese do artigo : *État de l'art de la recherche en didactique – À propos de l'enseignement de l'algèbre linéaire* de Jean Luc Dorier, publicado em 1998.

Dorier (1998) constatou que nos últimos anos a Álgebra Linear vem despertando um interesse crescente de pesquisadores em didática, tanto na França como no exterior, pesquisas que geralmente enfocam o ensino do primeiro ano das universidades científicas onde a disciplina, em geral, é ministrada.

O autor afirma que, após quinze anos de programas de pesquisas sobre o ensino de Álgebra Linear, percebe-se que o interesse por pesquisas nesta área, vem aumentando rapidamente. Isto faz com que atualmente se disponha de vários trabalhos que, graças às trocas internacionais, mostram um panorama dos diferentes problemas e da problemática de várias pesquisas complementares, levando a resultados parciais encorajadores.

Jean Luc Dorier se propôs a fornecer este panorama, sem entrar nos detalhes de todos os trabalhos, mas clareando suas grandes linhas, suas interações e suas complementaridades, na tentativa de apresentar um equilíbrio global de aquisições ao

ensino e caminhos que se abriram.

Os trabalhos mostram uma rica contribuição dada pela análise didática no contexto da Álgebra Linear e também algumas dificuldades encontradas pelos estudantes nessa área.

Os trabalhos de Guerson Harel começaram nos anos 80, em Israel. Em 1985 defendeu sua tese de doutorado e depois foi aos Estados Unidos, onde publicou muitos artigos. Em 1990 fez parte do grupo norte-americano LACSG (Linear Álgebra Curriculum Study Group) que tinha como incumbência estudar as dificuldades ligadas ao ensino e à aprendizagem da Álgebra Linear. Este grupo produziu um documento em forma de recomendação que se articulava em quatro eixos: *demonstração*: um curso deve ser um desafio intelectual, daí a importância da demonstração própria para aumentar a compreensão; *duração suficiente para o ensino de Álgebra Linear*: aconselha-se um currículo suficientemente longo para comportar um segundo curso de Álgebra Linear, centrado na teoria matricial; *novas tecnologias educativas*: outra recomendação é introduzir no ensino tecnologias como o MATLAB ou um software similar; *conteúdo*: conceitos devem limitar-se ao \mathbb{R}^n , por exemplo: um vetor, antes de tudo, é uma coleção ordenada de reais, e uma transformação linear é uma matriz, o programa deve englobar os valores e vetores próprios e a estrutura euclidiana de \mathbb{R}^n .

Harel, por meio de suas pesquisas, propôs um quadro teórico que consistia de três princípios: *concretização*: procedimento pelo qual os alunos tomam uma entidade conceitual e são capazes de aplicá-la em um contexto (geométrico) que é “concreto” para eles, o que servirá de âncora para eles construírem conceitos-imagens que servirão de apoio à abstração que deve ocorrer posteriormente; *necessidade*: leva o aluno a ter contato com outros contextos, nos

quais ele sente a necessidade de utilizar o conceito já apreendido e/ou um novo conceito para a resolução de uma determinada questão; é a busca de novas concepções que se fazem necessárias com a desestabilização; *generalidade*: o princípio que procura desenvolver no estudante a capacidade de abstrair o que ele aprendeu em um contexto particular; é um princípio necessário e difícil de alcançar, uma vez que no ensino da Álgebra Linear, muitas vezes, não se separa o objeto de suas representações, o que dificulta uma possível generalização.

Dorier (1998) comentou que o trabalho de Harel leva à construção dos \mathbb{R} , \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 , apoiando-se na noção de coordenadas e valendo-se de problemas geométricos para a introdução de conceitos como o de dependência e independência linear, combinação linear, base e dimensão, nos espaços geométricos da reta, do plano e depois do espaço. Porém, Dorier afirma que Harel se omitiu sobre a possível confusão entre vetor e sua representação analítica .

Em outra etapa, Dorier (1998) aborda as pesquisas sobre a “flexibilidade cognitiva”¹², que se dá por meio das mudanças de registros, de quadros, de níveis de descrição, de pontos de vista e de formas de raciocínio.

A noção de espaço vetorial é central em Álgebra Linear, seus elementos, os vetores, podem representar diferentes objetos matemáticos, de naturezas diferentes: função, matriz, etc. Assim, um curso deve abordar a generalidade desse tipo de representação, entretanto, deve fazê-lo de maneira gradual, e não dar imediatamente a estrutura axiomática. Um primeiro curso deve limitar-se aos espaços \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 ou \mathbb{R}^n e até as matrizes. Nesses diferentes quadros é preciso introduzir os conceitos fundamentais de operação, espaços, subespaços, geradores, dependência linear, independência linear, base, dimensão, etc. Na França, a

¹² detalhes sobre a terminologia (Dias, 1995)

tradição impõe que se introduza a teoria axiomática desde cedo, com forte fundamento nos exemplos geométricos, enquanto na América do Norte ou no Brasil, o quadro das n -uplas e das matrizes é predominante no começo do ensino da Álgebra Linear. Entretanto, todos os estudos realizados mostraram problemas em desenvolver tanto a generalidade dos objetos quanto o caráter formal e abstrato das novas noções. A álgebra aparece para os alunos como uma nova linguagem no qual interagem os quadros e registros de representação semiótica.

O trabalho da Kallia Pavlopoulou baseou-se na coordenação dos registros de representação semiótica (teoria de R. Duval) e foi uma das pesquisas que observou a “flexibilidade cognitiva”.

Neste trabalho ao imbricar atividades cognitivas e semióticas, Pavlopoulou distingue três tipos de atividades: (1) a formação de uma representação identificável como pertencendo a um determinado registro, (2) o tratamento e a transformação de uma representação dentro do registro no qual foi criado, e (3) a conversão que é a transformação de uma representação semiótica de um registro em outro. Ela também distingue três tipos de representação semiótica: o registro gráfico, o registro da escrita simbólica e o registro de tabelas.

Dorier (1998) descreve que na análise dos livros didáticos pode-se ver que a maioria privilegia o registro simbólico por questões de economia, logo, as conversões nunca são explicitadas (cf. Pavlopoulou, 1994) apud Dorier (1998). Observando os alunos da Universidade de Estrasburgo, Pavlopoulou percebeu que os estudantes têm dificuldade em fazer a conversão de um registro a outro, sendo que a confusão entre vetor e sua representação geométrica foi a principal fonte de problemas. E salientou que “[...] a *dificuldade encontrada na conversão de registros*

não é igual em um sentido e no outro” (Dorier, 1998: p. 202)¹³; ela então sugeriu que se examinassem aspectos epistemológicos da história da Álgebra Linear baseada nos registros de representação semiótica.

Pavlopoulou verificou que o nível de competência espontânea dos alunos nas conversões é muito fraco. Ainda com base em um pré-teste com uma classe de controle, a autora propôs um ensino centrado em diferentes registros, e os resultados obtidos mostraram melhoria, porém, ainda faz-se necessário buscar a melhoria do desempenho dos alunos em conversão de registros.

Outro tipo de investigação ligada à flexibilidade cognitiva foi feito no trabalho de Joel Hillel e Anna Sierpinska sobre os níveis de descrição e o problema da representação. Dorier afirma que *“para esses autores, compreender Álgebra Linear exige que os estudantes comecem a pensar sobre os objetos e os operadores da Álgebra não em termos de relações entre matrizes, vetores ou operadores particulares, mas em termos de estruturas inteiras de objetos tais como: espaços vetoriais sobre corpos, álgebras, classes de operadores lineares, que podem ser transformados, representados de diferentes maneiras e considerados como sendo ou não isomorfos”* (Dorier, 1989: p. 203)¹⁴.

Para explicar algumas dificuldades do ensino-aprendizagem da Álgebra Linear, Hillel e Sierpinska classificam a linguagem em três tipos: *“a linguagem da teoria geral (espaço vetorial, subespaço, dimensão, operadores, núcleo, etc.) denominada linguagem abstrata; a linguagem da teoria mais específica do R^n (n -uplas, matrizes, posto, soluções de um sistema de equações, etc) denominada linguagem algébrica e a linguagem geométrica do R^2 , R^3 (vetor geométrico, pontos, retas, planos e transformações geométricas) denominada linguagem geométrica”*

¹³ [Tradução do autor – ver original no anexo, nota 13]

(Dorier, 1989: p 203)¹⁵.

Essas linguagens coexistem e às vezes são “intercambiáveis”¹⁶, mas não são equivalentes. A linguagem geométrica é utilizada de forma metafórica na teoria. Saber quando e em que contexto usar determinada linguagem é uma das dificuldades dos alunos.

A origem das confusões dos alunos está na passagem da representação figural para a representação algébrica¹⁷, quando o espaço vetorial de referência é o \mathbb{R}^n ; apesar disso, os professores não têm por hábito enfatizar as mudanças de registros que efetuam no decorrer de suas aulas.

Quando os alunos encontram os vetores pela primeira vez, estes são identificados como uma lista de números. Entretanto, quando são escritos em bases diferentes, essa identificação fica fortemente abalada. Outro problema é encontrar as coordenadas de um vetor e a representação matricial de um operador linear em relação a uma base, assim como as relações entre duas matrizes representando um mesmo operador linear. Muitos alunos são capazes de efetuar a mudança de registros em um único sentido.

Hillel e Sierspinska salientaram que as noções do \mathbb{R}^n são apreendidas porque permitem resolver problemas que estão direta ou indiretamente ligados a sistemas lineares. Mas esse nível de descrição torna-se um obstáculo à aceitação de outras categorias de objetos, tais como funções, polinômios como vetores. Os alunos ficam presos à idéia de n-upla como vetor e não abandonam essa idéia. Mudar as coordenadas de um vetor em relação a uma base é também um problema.

¹⁴ [Tradução do autor – ver original no ANEXO, NOTA 14]

¹⁵ [Tradução do autor – ver original no ANEXO, NOTA 15]

¹⁶ original - *interchangeables*

Em suas análises, Hillel e Sierspinkska mostram que, para ser bem-sucedidos, os alunos devem não somente ter adquirido capacidade de conversão, mas também ter uma atitude reflexiva sobre os instrumentos.

Outro trabalho, nesta linha da flexibilidade cognitiva, é de Anna Sierpinkska, Asrtrid Defence, Tsolaire Khatcherian e Luis Saldanha. *“Os autores distinguem três modos de raciocínio (ou de pensamento) para o trabalho conjunto em Álgebra Linear: o sintético geométrico, o analítico geométrico e o analítico estrutural. Segundo eles, a Álgebra Linear pode ser vista como o resultado da ultrapassagem de dois obstáculos ou de duas posições dogmáticas : uma recusando aos números o direito de entrar na geometria, e a outra recusando à intuição geométrica, o direito de intervir no domínio puro da aritmética”* (Dorier, 1989: p.206)¹⁸.

Os autores não consideraram os modos de pensamento como fases, mas sim como formas de raciocinar e ver o que está acontecendo. A principal diferença entre o modo sintético e os modos analíticos é que, no primeiro, os objetos são dados fornecidos diretamente para descrição, enquanto no segundo os objetos são dados indiretamente, construídos por definições e propriedades dos seus elementos. Por exemplo, no sintético a reta é um objeto preexistente. No analítico é uma relação entre pontos, ou coordenadas de um vetor. De acordo com esses autores, a Álgebra Linear pode ser vista como um pensar analiticamente sobre o espaço geométrico.

Segundo Hillel e Sierpinkska, *“cada um dos três modos de pensamento utiliza um sistema específico de representação”* (Dorier, 1989: p.207)¹⁹. O modo sintético geométrico serve-se da linguagem das figuras geométricas (linhas, planos,

¹⁷ Original – *“Le cas qui est à l'origine du maximum de confusions de la part de étudiants est celui du passage de la représentation abstraite à la représentation algébrique, quand l'espace vectoriel de référence est déjà R^n ”* (Dorier, 1998: p.204).

¹⁸ [Tradução do autor – ver original no anexo, nota 18]

¹⁹ [Tradução do autor – ver original no anexo, nota 19]

interseções) e de suas representações gráficas usuais. No modo analítico as figuras geométricas são n-uplas, satisfazendo condições escritas, por exemplo, sob a forma de sistemas de equações ou de desigualdades. *“Em princípio os argumentos sintéticos-geométricos não pertencem à Álgebra Linear, propriamente dita. Mas eles são usados a partir das ferramentas heurísticas, e, também no ensino, porque permitem uma visualização, uma grande abreviação de argumentos, ou um acesso à essência do que está acontecendo”* (Dorier, 1989: p.207)²⁰.

Cada um dos três modos de pensamento em Álgebra Linear leva a sentidos diferentes das noções que estão implícitas porque cada um deles é ligado a perspectivas teóricas diferentes. Os alunos utilizam diferentes modos de raciocínio dos quais alguns são intermediários entre os modos diferenciados por Hillel e Sierpinska; ainda segundo eles, por parecer mais conveniente e sensato é que os alunos recorrem a formas mistas de pensamento.

O último trabalho abordado por Dorier (1998) é o de Marlene Alves Dias, no qual trata das mudanças de quadros, de registros e de pontos de vista na questão de representação de subespaços. Em sua tese de doutorado, Marlene Alves Dias aborda a flexibilidade cognitiva.

Não descreverei tal trabalho neste item, uma vez que farei posteriormente uma análise mais aprofundada de cada um dos trabalhos de Marlene Alves Dias.

Observo que Dorier (1998) não faz menção a resultados de pesquisas brasileiras sobre ensino e aprendizagem da Álgebra Linear. O único pesquisador brasileiro citado por Dorier foi Marlene Alves Dias, mas vale ressaltar que sua

²⁰ [Tradução do autor – ver original no anexo, nota 20]

pesquisa foi realizada principalmente na França, como trabalho de D.E.A. e de doutorado.

Este artigo de Dorier (1998), fornece elementos para que se possa saber em que patamar encontram-se as pesquisas em nível mundial, mesmo que ele ainda tenha feito um recorte sobre ensino-aprendizagem da Álgebra Linear.

Observando estes artigos escritos por Niss (1999), Kilpatrick (1981), Fiorentini (1989) e Dorier (1998), procurei os pontos comuns e não comuns mais relevantes, meu intuito é de evidenciar os caminhos da área de Educação Matemática, e também a situação atual da Educação Matemática no Brasil.

Nos artigos de Kilpatrick (1981) e Fiorentini (1989) pode-se ver que ambos falam sobre movimentos na área educacional; observamos que, nos anos sessenta, os Estados Unidos estavam preocupados com a melhoria do currículo e do ensino de Matemática, nós aqui, no Brasil, estávamos envolvidos com modificações na forma de ensino da Matemática (Matemática Moderna). De certa forma, também passávamos por uma mudança curricular.

Já nos anos 70 a preocupação nos Estados Unidos era com o suprimento da necessidade de mão de obra, enquanto que no Brasil a produção científica passou para as universidades, nos programas de pós-graduação. As pesquisas começaram a estudar o fracasso do ensino de matemática; o professor e o modo como ensinava era objeto de estudo e havia, também, a busca por novas técnicas e recursos de ensino.

Analisando o artigo de Niss (1999), no qual ele afirma que o foco das pesquisas na área de Educação Matemática tem sido a aprendizagem e aquisição de competências matemáticas pelos estudantes, pode-se ver que houve uma

mudança significativa ao longo do tempo na diretriz das pesquisas na área de Educação Matemática. Se antes elas procuravam fornecer elementos para uma reestruturação curricular, ou observavam o professor como grande responsável pelo processo de ensino-aprendizagem da Matemática — visão que Fiorentini (1989) também mostrou ter ocorrido no Brasil — hoje as pesquisas em Didática da Matemática consideram o estudante não como elemento principal, mas como alguém que igualmente tem um lugar importante neste processo (cf. Niss, 1999). Outros fatores analisados (epistemológicos, psicológicos, etc) interferem no processo de ensino-aprendizagem. Niss lembra que hoje sabe-se muito sobre o processo de ensino aprendizagem da Matemática, justamente pelos avanços significativos nas pesquisas, em que a interferência no processo de ensino-aprendizagem, com características epistemológicas, entre outras, é estudada.

Veremos que as pesquisas brasileiras na década de 90, sobre o ensino-aprendizagem da Álgebra Linear apresentam os aspectos descritos no parágrafo anterior.

Na década de 80, nos Estados Unidos, a Resolução de Problemas passou a ser a diretriz das pesquisas em Educação Matemática (cf. Kilpatrick, 1981), e no Brasil surgem as primeiras tentativas de teorização das práticas pedagógicas (cf. Fiorentini, 1989), embora ele mesmo ressalte que muitas pesquisas não ultrapassavam o senso comum e não traziam contribuições significativas à área de Educação Matemática.

No cenário internacional, analisando o artigo de Dorier (1998), podemos ver que já havia uma teorização na área de Educação Matemática que fornecia os referenciais teóricos para as pesquisas na área.

Nesta mesma época, nos anos 80, Harel (cf. Dorier, 1998) iniciou trabalhos de pesquisa em Israel, que foram aprofundados na década seguinte, nos Estados Unidos, quando ele começou a participar do grupo de pesquisa em Álgebra Linear, estudando as dificuldades ligadas ao ensino e à aprendizagem dessa disciplina.

Acredito que com a análise dos artigos apresentados até este momento, pode-se ver em que patamar encontra-se a Educação Matemática com relação às suas fundamentações teóricas e à metodologia de pesquisa, particularmente no contexto brasileiro.

Uma vez que meu objetivo é apresentar um panorama das pesquisas brasileiras da década de 90 sobre ensino-aprendizagem da Álgebra Linear, tenho certeza de que o caminhar científico reconstituído com os artigos aqui analisados nos torna participantes do contexto mundial das pesquisas nesta área, bem como permite analisar os trabalhos de autores brasileiros nesta época, sabendo que é na década de 90 que pesquisadores brasileiros iniciam seus trabalhos sobre ensino-aprendizagem da Álgebra Linear.

No tópico seguinte iniciarei a apresentação dos trabalhos brasileiros por mim analisados e que compõem o panorama das pesquisas em ensino-aprendizagem da Álgebra Linear da década de 90. Em seguida, passarei aos meus apontamentos sobre os trabalhos, com o intuito de fornecer um panorama destas pesquisas.

4. Produção Científica na Área de ensino-aprendizagem da Álgebra Linear

Solicitei a diversos pesquisadores em Educação Matemática, ligados a diferentes universidades, que me indicassem trabalhos sobre ensino-aprendizagem da Álgebra Linear de seus centros de pesquisa. Não recebi resposta alguma, apesar de minha insistência. Deduzi, então, que esses trabalhos inexistiam.

Após análise de artigos, dissertações e teses coletados, verifiquei que apenas seis deles se caracterizavam como pesquisa em ensino-aprendizagem da Álgebra Linear.

As dificuldades encontradas durante a seleção da produção foram muitas, primeiramente porque nem sempre o título expressava o que de fato havia sido pesquisado, por exemplo, na dissertação de mestrado de Clarice Z. Sanches de Brito Silva denominada "O ensino da Álgebra Linear I: Uma experiência na Universidade do Amazonas", defendida na Universidade Santa Úrsula (1995), embora o título sugira que o assunto trata de questões relativas ao ensino e aprendizagem da Álgebra Linear, o trabalho dedica-se principalmente a problemas do ensino e aprendizagem da Geometria Analítica. Outro caso foi o resumo de comunicação científica de Andrzej Solecki, professor da UFSC, intitulado "Álgebra Linear no 2º e 3º graus – Como devolvê-la à Geometria?", apresentado no III ENEM (1990) cuja classificação como comunicação científica e título sugeriam tratar-se de resultado de pesquisa; porém, ao entrar em contato com o autor, a fim de solicitar o envio de seu artigo integral para análise, surpreendeu-me sua informação de que não se tratava de resultado de uma pesquisa, mas apenas de um "relato de experiência".

A seguir, apresento a descrição das seis produções analisadas.

4.1 - Amarildo Melchiades da Silva (1997)

Título: “Uma Análise da Produção de Significados para a Noção de Base em Álgebra Linear”

Tipo de produção: Dissertação de mestrado defendida na Universidade Santa Úrsula do Rio de Janeiro em 1997.

Objetivo: Investigar a produção de significados, pelos alunos, para a noção de base em Álgebra Linear.

Metodologia: Pesquisa diagnóstico, empírica.

Fundamentação teórica: Modelo Teórico dos Campos Semânticos²¹ de Rômulo Lins.

O autor, por meio de um estudo histórico epistemológico, descreveu como os matemáticos dos séculos XVIII e XIX operavam com a noção de base e que campos semânticos eles construíram. A seguir analisou frases que ele mesmo construiu a fim de classificar alguns dos campos semânticos nos quais os livros didáticos do assunto abordariam a noção de base; em terceiro lugar o autor realizou um estudo de caso sobre a noção de base construída por dois estudantes que finalizavam um primeiro curso de Álgebra Linear.

No estudo epistemológico, Amarildo Silva buscou elementos que permitissem “especular” sobre os significados produzidos, bem como em quais campos semânticos a noção de base foi operada. Frobenius utilizou-a em soluções de sistemas homogêneos, Hamilton, nos quatérnios; Grassmann nas grandezas deriváveis e elementares; Peano, no estudo de objetos geométricos e Euler, na

²¹ terminologia apresentada em **nota** no final deste tópico

solução de uma equação diferencial (cf. Silva, A.; 1997: p.56). Assim como os matemáticos produziram significados à noção de base operando em campos semânticos distintos, da mesma forma, os autores de livros didáticos, em suas justificativas, mostram que vêm a noção de base, por meio de campos semânticos também distintos.

Amarildo Silva analisa como é desenvolvida a noção de base em alguns livros didáticos, e elaborou frases que procuram mostrar como essa noção é apresentada por esses autores.

Dá como exemplo as seguintes definições:

– *“Base de um espaço vetorial é um conjunto ordenado de vetores que possui as propriedades de gerar o espaço e ser linearmente independente”* - Gonçalves (1978). (Silva,A.; 1997:p 64)

– *“Uma base de um espaço vetorial é um conjunto de vetores geradores de espaço tal que o número de vetores desse conjunto é igual a dimensão do espaço”* e *“Uma base é um conjunto de vetores linearmente independente de um espaço vetorial tal que o número de vetores desse conjunto é igual a dimensão do espaço”* - Birkhoff e Maclane (1980). (Silva, A.; 1997: p. 65)

– *“Uma base de um espaço vetorial V é um conjunto gerador sem vetores supérfluos ou um conjunto gerador minimal”* - Steinbruch e Winterle (1987), (Silva, A.; 1997: p. 71)

O autor, então, procura discutir como cada frase traz consigo a caracterização de campos semânticos distintos. Para tanto, apresenta uma situação ficcional em que diferentes pessoas procuram produzir significado para o texto: *“Sejam o espaço vetorial \mathfrak{R}^3 e $A = \{ u=(1, 0, 0), v= (0, -1, 1), w= (0, 0, 2)\}$, A é uma base de \mathfrak{R}^3 ?”* (Silva, A.; 1997: p.72).

Considerando algumas justificações, dentre várias possíveis, Amarildo Silva nomeia alguns campos semânticos segundo o núcleo mencionado na justificativa. Cito alguns destes campos semânticos, lembrando que Amarildo Silva deixa claro que outros podem ser gerados:

campo semântico usual – na produção de significado usam-se as noções de espaço vetorial, de vetor (como elemento de um espaço vetorial), de conjunto linearmente independente, de geração de espaço vetorial. (*“O conjunto A é linearmente independente pois nenhum dos vetores de A podem ser escritos como combinação linear dos outros vetores do conjunto. Além disso, o conjunto A é gerador do espaço vetorial \mathfrak{R}^3 . Portanto, A é uma base de \mathfrak{R}^3 .”*) (Silva, A.; 1997: p.72)

campo semântico linear-geométrico – na produção de significado usam-se as justificações geométricas [noções de espaço, vetores (como segmentos orientados), sistemas de coordenadas]. Base é associada a sistema de coordenadas. (*“O \mathfrak{R}^3 é o espaço tridimensional, os vetores de A não são coplanares, eles têm direções diferentes. Eu tenho, então, três direções diferentes. Assim, A representa um sistema de coordenadas oblíquas de \mathfrak{R}^3 determinado pelos vetores u , v e w . ”*) (Silva, A.; 1997:p. 72)

campo semântico dimensional-gerador – na produção de significado usa-se a noção de dimensão. (*“Todo vetor do \mathfrak{R}^3 pode ser escrito como combinação linear dos vetores de u , v e w , isto é, A gera o \mathfrak{R}^3 . Assim, como a dimensão de \mathfrak{R}^3 é 3 então A é base de \mathfrak{R}^3 ”*) (Silva, A.; 1997: p.72)

campo semântico dimensional-independente – na produção de significado usam-se as noções de dimensão, espaço vetorial, vetores na forma escalonada, conjunto linearmente independente. (*“O \mathfrak{R}^3 é um espaço vetorial e $\dim \mathfrak{R}^3 = 3$.*

Como os vetores do conjunto A estão na forma escalonada, o conjunto A é linearmente independente. Portanto, A é uma base de \mathfrak{R}^3 (Silva, A.; 1997:p.72).

Amarildo Silva considera que, sob a ótica do MTCS (Modelo Teórico dos Campos Semânticos), cada justificativa mostra diferentes núcleos em que a noção de base pode ser construída. *”Assim, para o pesquisador que se apóia no MTCS, os significados que podem ser produzidos a partir daquelas frases constituirão [...] núcleos distintos e que caracterizam diferentes campos semânticos. Outro ponto importante se refere ao fato de que se ao caracterizar os campos semânticos [...] a partir dos significados matemáticos, podemos estar indicando os possíveis campos semânticos preferenciais (no sentido de ser privilegiado pelo professor) de um professor e evidenciando, assim, que significados ele (professor) espera que seus alunos venham a produzir para a noção de base. Entretanto, seriam esses os significados produzidos por um aluno ao final de um curso de Álgebra Linear?”* (Silva, A.; 1997: p.75).

Para obter algumas informações sobre os significados produzidos pelos alunos para a noção de base, Amarildo Silva fez um estudo preliminar em que aplicou um teste a alguns alunos, a fim de obter elementos para um posterior estudo de caso, em que observaria dois alunos que tivessem sido aprovados em Álgebra Linear a primeira vez em que cursaram a disciplina.

Neste teste preliminar, as questões escolhidas foram aquelas “padrões”, ou seja, que se encontram nos livros-textos, cujas soluções eram satisfatórias para a discussão.

Uma questão apresentada foi: *“Seja $W = \{ (x, y, z, t) \in \mathfrak{R}^4 / x = y = 0 \text{ e } z = 2t \}$ um subespaço de \mathfrak{R}^4 : (a) encontre uma base e a dimensão de W. (b) a partir da base encontrada em (a) determine, se possível, uma base de \mathfrak{R}^4 (justifique sua*

resposta)” (Silva, A.; 1997: p.77). Amarildo Silva analisa as justificativas dos alunos para ver em torno de quais núcleos eles estão construindo a noção de base, e diz ser difícil tirar qualquer conclusão apenas analisando o teste escrito, logo, decide no estudo de caso valer-se de informações registradas em videoteipe e entrevistas. As questões utilizadas no estudo de caso eram de dois tipos: (1) Dado um espaço vetorial, extrair dele uma base; (2) Dado um subconjunto de vetores de um espaço vetorial, decidir se ele é base ou não desse espaço. Os espaços vetoriais considerados eram o \mathbf{C} , \mathfrak{R}^2 e \mathfrak{R}^3 por permitirem ao estudante produzir significados geométricos.

Ao final do estudo de caso, Amarildo Silva conclui que os significados produzidos pelos alunos são diferentes dos significados matemáticos que ele (pesquisador) descreveu, baseado na forma como a noção de base é construída pelos livros didáticos. As questões apresentadas no estudo de caso foram lidas e interpretadas em relação aos núcleos que os estudantes constituíram e não em relação a um núcleo “preferencial” (aquele que pressupõe constituídas todas as noções que compõem a noção de base). Amarildo Silva diz que no estudo de caso em questão, os alunos *“não internalizaram os possíveis campos semânticos preferenciais colocados à disposição durante o curso e os significados produzidos por eles são em relação aos núcleos que eles próprios constituíram. Assim, eles nos revelam que a questão não passa, muitas vezes, por não saber, mas sim, por não falar como o professor”* (Silva, A.; 1997: p. 113)

Conclusão do autor : (1) As pessoas produzem seus significados a partir de campos semânticos por elas desenvolvidos. É por isso que, embora o professor opere em sala de aula fazendo a passagem de um campo semântico para outro, os estudantes não se atêm a essa articulação e parecem sempre operar em um mesmo campo semântico independente da tarefa proposta, apenas incorporando novos objetos ao núcleo (Silva, A.; 1997: p. 117). (2) *“É preciso que, na sala de aula, os diferentes modos de produzir significado sejam explicitados, e que se tornem objeto de atenção dos alunos”* (Silva, A.; 1997: p. 118).

Sugestão do autor : O autor deixa como questão se não seria mais efetiva uma abordagem da Álgebra Linear em diferentes contextos, como a geometria analítica, estudo das equações diferenciais, programação linear, em vez de apresentá-la dentro de uma teoria axiomático-dedutiva no primeiro ano da universidade.

(NOTA) Campo semântico: O modelo teórico dos campos semânticos, foi desenvolvido por Rômulo Lins, “é um modelo epistemológico que permite compreender alguns aspectos do processo de produção de significados em matemática”. Neste modelo, o **conhecimento é entendido como crença**, levando-se em conta o que o sujeito afirma e como justifica sua crença, logo, justificativas diferentes implicam conhecimentos também diferentes. Outra noção importante é a de **significado** (aquilo que o sujeito pode e efetivamente diz sobre o objeto numa dada atividade), pois ele é produzido pelo sujeito, quando o mesmo justifica a sua crença. Quando o sujeito faz uma afirmação, que acredita não ser necessária uma justificativa, diz-se que esta é uma *afirmação local*, e ao conjunto delas dá-se o nome de **núcleo**. Justificativas diferentes constituem conhecimentos diferentes. E o

sujeito opera no *campo semântico* sempre que produz significado em relação a um núcleo dado (Lins, 1993) apud (Silva, A.; 1997). Mais detalhes sobre o Modelo Teórico dos Campos Semânticos (MTCS) podem ser obtidos na tese de doutorado de Lins (1992), embora o MTSC não apareça explicitamente no corpo da tese.

4.2 - Rute Henrique da Silva (1999)

Título: Álgebra Linear como curso de serviço para a Computação

Tipo de produção : Tese de mestrado defendida na UNESP, Rio Claro, em 1999

Objetivo: Como projetar, executar e avaliar uma disciplina de Álgebra Linear (diferente da forma usual) que atenda às expectativas de um curso de Computação.

Metodologia: Entrevistas, análise de livros didáticos e acompanhamento de um grupo "controlado".

Fundamentação teórica: Assimilação Solidária²² - Baldino (1994, 1996, 1998) e Pensamento Matemático Avançado (Tall, 1992)

Rute Silva entrevistou o coordenador do curso de Bacharelado em Ciências da Computação da UNESP de Rio Claro, e também outros professores que trabalham nesse curso e utilizam a Álgebra Linear como ferramenta. Em seguida, com base nas expectativas levantadas nas entrevistas e na análise de livros didáticos, nos quais buscou autores que reforçassem a importância de Álgebra Linear para os alunos de Computação, a autora passou a discutir, em reuniões de um grupo formado por ela, pelo o coordenador do curso e por membros do GPA

²² Terminologia apresentada em **NOTA** no final deste tópico

(Grupo de Pesquisa - Ação em Educação Matemática) os tipos de atividades adequadas ao curso de Álgebra Linear. As atividades foram separadas de acordo com a ênfase que seria dada na disciplina, os exercícios foram classificados em *conceituais* e *calculatórios*, sendo que todos os calculatórios foram cobrados com ênfase, enquanto os exercícios conceituais foram cobrados apenas aqueles que seriam importantes ao longo da disciplina.

Aos exercícios conceituais que envolviam demonstração, esta era pedida para algum caso especificado, como o \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 . O livro-texto adotado foi o livro da Coleção Shaum (edição de 1972) e os capítulos a serem abordados foram: Equações Lineares, Matrizes, Espaços Vetoriais e Subespaços, Bases e Dimensão, Transformações Lineares, Matrizes e Operadores Lineares, Autovetores e Autovalores, Espaços com Produto Interno.

Uma das preocupações reveladas nas entrevistas foi a importância de se trabalhar com as noções de Álgebra Linear abordando, “*sempre que possível, as partes algébrica, geométrica e matricial*” (Silva, 1999: p:30).

A pesquisadora então elaborava a(s) atividade(s) que e apresentava-a(s) ao grupo que sugeria(m) a(s) modificação(ões). Depois disso, essas atividades eram aplicadas aos estudantes por meio da metodologia da Assimilação Solidária. Vale enfatizar que após a aplicação da(s) atividade(s) em aula, a autora analisava os resultados locais, os quais eram avaliados pelo grupo e indicavam o(s) caminho(s) a seguir na(s) próxima(s) atividade(s).

A distribuição dos assuntos era feita por aula, sendo uma aula semanal com 4 horas de duração, e seguiu o seguinte planejamento: 1ª aula - Atividade

manipulativa – “Bagual”²³; 2ª aula - Sistemas Lineares – Método de Gauss; 3ª aula - Sistemas Lineares – Abordagem geométrica e matricial; 4ª aula - Matriz Inversa; 5ª aula - Espaços Vetoriais e Subespaços; 6ª aula - Espaços Vetoriais e Subespaços; 7ª aula - Dimensão; 8ª aula - Avaliação – seis questões individuais e duas em grupo – prova com consulta; 9ª aula - Transformação Linear; 10ª aula - Transformação Linear; 11ª aula - Exposição de sistema linear 2x2 no contexto algébrico, matricial e vetorial e definição de Núcleo; 12ª aula - Mudança de base; 13ª aula - Ortogonalização; 14ª aula - Diagonalização de Operadores Lineares; 15ª aula - Processamento de Imagens; 16ª aula - Avaliação – seis questões individuais e duas em grupo – prova com consulta; 17ª aula - Discussão sobre as provas .

Rute Silva descartou o uso de softwares em sala de aula, já que: *“(1) não havia a infra-estrutura necessária para esse tipo de trabalho e devido às limitações, tanto nossas (autora) como do professor da turma, que não era especialista em Computação [...] (2) o uso de computador em sala de aula como instrumento para introdução de conceitos matemáticos não foi mencionado pelos professores durante as entrevistas e [...] (3) porque a diferença entre a disciplina que foi programada em relação às semelhantes, ministradas no ensino tradicional vigente, ficaria atribuída ao computador e não à pedagogia e à didática usadas. Com isso se perderia a oportunidade de mostrar um caminho ao alcance de todos os professores para uma transição entre as disciplinas tradicionais e as alternativas possíveis”* (Silva, 1999: p.9).

²³ Atividade que visa a resolução de sistemas lineares 2x2. Os alunos que quisessem, deveriam apresentar, até o final do semestre, um programa que resolvesse o “bagual” (ver Silva, 1999: pp 40 e 41).

Após esse curso de Álgebra Linear, Rute Silva registrou as opiniões dos alunos e dos professores do grupo a respeito, principalmente, da dinâmica adotada e das atividades aplicadas, e da qualidade do desempenho dos alunos atingidos por esse curso nas matérias que utilizavam a Álgebra Linear como ferramenta. As opiniões dos alunos foram obtidas por meio de depoimentos prestados à pesquisadora e também dos professores pelas respostas a um questionário elaborado pela autora.

Conclusão da autora: A autora concluiu que “*ensinar Álgebra Linear para o curso de Computação, partindo de um referencial matemático*”, é problemático porque seus alunos de computação não viam necessidade em compreender os conceitos envolvidos, eles se interessavam mais pela parte de “cálculo”, que a qual desenvolviam bem, e “*ficavam a desejar na conceituação*” (Silva, 1999: p.153).

Questão em aberto: “*É adequado, no início de um curso de Álgebra Linear, colocar a ‘definição conceitual’ logo como objeto e tentar, a partir dela, obter as ‘imagens conceituais’?*” (Silva, 1999: p.151)

(NOTA) Assimilação Solidária (AS) - “*É uma pedagogia em intervenção diferencial no sistema de ensino tradicional vigente, que visa a introdução do valor ideológico trabalho em substituição à competência, como fundamento do critério de promoção/seleção....*” (SILVA, 1999: pp. 17).

O trabalho produtivo em sala de aula é privilegiado nesta pedagogia. O contrato didático é ampla e explicitamente negociado.

Mais detalhes sobre a Assimilação Solidária podem ser obtidos em Baldino, 1997; Baldino, 1998.

4.3 - Marlene Alves Dias (1993)

Título: “Contribution à l’analyse d’un enseignement expérimental d’algèbre linéaire en DEUG A première année.” (Contribuição para a análise de um ensino experimental de Álgebra Linear no primeiro ano do DEUG A)

Tipo de produção: Mémoire de DEA (equivalente a dissertação de mestrado), Paris: Université de Paris 7 – 1993

Objetivo: ... *“avaliar por meio provas escritas dos alunos de 1992/1993, que tratam de assuntos semelhantes àqueles de 1990/1991 e 1991/1992, o desempenho construído dos alunos (do primeiro ano universitário (DEUG A) em relação às noções centrais do ensino, isto é, às noções de independência linear e de posto no R^n , e a ligação entre o implícito e o paramétrico. A autora quis ainda avaliar... ”por meio das noções centrais, qual é a utilização do método de Gauss? E também qual a articulação feita entre o método de Gauss como técnica e as noções de Álgebra Linear (em particular as noções de subespaço gerado e de sistemas de equações lineares — possíveis confusões — de dimensão de um subespaço gerado)?”*²⁴ (Dias, 1993: p.10).

Metodologia : Engenharia Didática

Fundamentação teórica : Didática da Matemática Francesa

A autora descreve o tipo de experimento (curso) em relação ao ensino-aprendizagem da Álgebra Linear que Marc Rogalski vem fazendo desde 1990. Esse curso experimental foi realizado com turmas de Álgebra Linear nas classes do 1º ano da faculdade de Lille, França, no qual Rogalski era professor. Ela

²⁴ [Tradução do autor – original ver anexo, nota 24]

descreve também que a fundamentação teórica de tal experimento foi a teoria das situações de Guy Brousseau e a de Jogo de Quadros, de Régine Douady; e a seguir ela estabelece seu objetivo.

A autora, após relatar as análises feitas nos testes aplicados às turmas de 1990/1991 e de 1991/1992, passa a descrever sua análise dos testes de 1992/1993.

O teste analisado por Marlene Dias, que se encontra entre os anexos de sua dissertação, constava de duas questões: (1) averiguar o desempenho dos estudantes em relação às noções centrais do ensino de Álgebra Linear e como o método de Gauss é utilizado nessas noções; (2) qual articulação é feita entre o método de Gauss como técnica e noções de Álgebra Linear (subespaço gerado, sistemas de equações lineares e dimensão de um subespaço gerado). A autora se limitou a analisar a segunda questão que subdividiu em quatro itens. Ela empregou alguns princípios da metodologia da Engenharia Didática, isto é, fez uma análise a priori de cada item da questão e depois descreveu os resultados. Por meio de uma análise a posteriori chegou a algumas conclusões sobre o que se dispôs a observar.

Conclusão da autora: Marlene Dias observou que alunos de um mesmo grupo usaram vários (e diferentes) procedimentos. Além disso, notou que, embora fosse especificado no enunciado do exercício que a solução deveria ser justificada sem o uso de cálculos, alguns estudantes utilizaram o método de Gauss para a sua resolução .

A autora chegou à conclusão de que os estudantes dominavam bem a técnica da determinação do posto e que para eles o conceito de posto representava claramente o maior número possível de vetores linearmente independentes; quanto ao conceito de dependência linear não ficou claro se ele foi bem compreendido, pois quando tinham de usar a noção de dependência linear como meio para “controlar”

as respostas encontradas, os estudantes não o faziam ou desenvolviam algum outro procedimento. Isto fez com que a autora concluísse que os estudantes têm uma noção de dependência linear, porém, encontram dificuldades para aplicá-la quando o problema proposto não traz este conceito explícito no enunciado.

A frase utilizada para verificar se vetores são linearmente independentes pareceu mal compreendida, pois quando se pediu para determinar x, y, z, t tendo $xa+yb+zc+td = 0$, os alunos escreveram freqüentemente que o conjunto é linearmente independente porque $x = y = z = t = 0$, sem explicitar a questão da condição necessária e suficiente.

Outra conclusão da autora foi que houve confusão dos alunos ao utilizarem alguns teoremas, devido à dificuldade em demonstrar a igualdade entre dois conjuntos. Em geral, para demonstrar a igualdade de dois conjuntos, os estudantes mostravam uma das inclusões e deduziam a igualdade dos conjuntos abusivamente.

Marlene Dias concluiu que os estudantes tiveram bom desempenho em questões que utilizavam técnicas, porém tiveram um mau desempenho quando foi necessário utilizar teoremas .

Especificamente quanto ao método de Gauss, a autora notou que embora ele seja um algoritmo muito eficaz, é também uma arma de dois gumes, pois: (1) os estudantes o utilizaram para triangularizar um sistema de equações ou para verificar a independência linear de alguns vetores, o que lhes permitiu responder facilmente às perguntas de posto (posto 3 ou 4 em \mathbb{R}^4) ; (2) os estudantes o utilizaram para triangularizar uma tabela de números (matriz), eles fizeram isso automaticamente e acabaram perdendo dados importantes com isso.

Finalmente, a autora afirmou que os estudantes consideram a Matemática como um conjunto de “receitas” que permitia resolver problemas.

4.4- Marlene Alves Dias (1995)

Título: “Articulation Problems between different systems of symbolic representations in linear algebra”

Tipo de produção: Artigo nos anais do 19th PME (Psychology of Mathematics Education) .

Objetivo: Analisar a flexibilidade entre diferentes pontos de vista: cartesiano e paramétrico em Álgebra Linear.

Metodologia : Análises Preliminares de uma Engenharia Didática.

Fundamentação teórica: Jogo de quadros de Régine Douady e Registros de representação de Raymond Duval , e flexibilidade não-hierárquica.

Esta pesquisa visou analisar os problemas de articulação entre diferentes sistemas de representação simbólica em Álgebra Linear no quadro do estudo global da flexibilidade entre dois pontos de vista paramétrico e cartesiano.

Em sua investigação, Marlene Dias considerou dois quadros: o algébrico e o geométrico. Em relação aos registros ela considerou as representações simbólicas intrínsecas, as representações por coordenadas, as representações por equações e a representação matricial. No entanto, para a sua hipótese de pesquisa necessitou também da noção de flexibilidade de pontos de vista que envolvem por exemplo, a idéia de dualidade, da qual as conversões semióticas não dão conta.

A pesquisadora partiu do fato de que a noção de posto foi um dos conceitos centrais no curso²⁵ de Marc Rogalski de Álgebra Linear; Marlene tomou-o como referência em sua dissertação de mestrado na qual estudou outros aspectos, mas

²⁵ [Ver no anexo, nota 25 citação referente à afirmativa]

neste artigo enfocou as dificuldades dos alunos com a articulação entre pontos de vista cartesiano e paramétrico, exigida na resolução de problemas de determinados sistemas vetoriais e representações espaciais de vetores.

A autora elaborou uma tabela de análise que foi uma ferramenta útil para a análise do resultado das provas de 113 estudantes de um curso experimental de Lille, na França.

Durante a análise dos dados obtidos, foram identificados 34 procedimentos diferentes. Desses, foram enfocados dois que são considerados procedimentos errôneos típicos e que correspondem a 38% das respostas. são eles:

(1º) Escrever a matriz cujas linhas são determinadas pelas coordenadas a, b, c, d ; (um outro procedimento semelhante a este usa colunas em vez de linhas);

(2º) Escrever o sistema linear associado $\{-y + z = 0, 2x + y + z = 0, 3z + t = 0, 2x - z - t = 0\}$, visto como uma representação cartesiana do subespaço, em que a aplicação do método de Gauss para resolução deste sistema conduz a uma representação paramétrica que depende de uma variável, fornecendo infinitas soluções.

Conclusão da autora: Com a análise dos resultados obtidos, Marlene Dias pôde confirmar sua convicção de que a flexibilidade entre as representações cartesiana e paramétrica tem um papel fundamental na aprendizagem de Álgebra Linear.

A autora conclui que esta flexibilidade não pode ser reduzida a habilidades meramente semióticas, pois ela tem componentes conceituais e técnicos que se entrelaçam no processo de resolução.

Marlene Dias também conclui que esta flexibilidade não é de fácil acesso e que os estudantes, na sua maioria, tendem a reduzi-la a aspectos algorítmicos e, como conseqüência, são apanhados por todos os tipos possíveis de deslize formal.

Segundo a autora, as competências de flexibilidade não podem ser atingidas pelo estudante apenas com esforço pessoal; eles têm de ser levados em conta explicitamente no processo pedagógico.

4.5 - Marlene Alves Dias e Michèle Artique (1998)

Título: "Articulação de pontos de vista em Álgebra Linear: caso da representação de subespaços vetoriais"

Tipo de produção: Artigo nos Anais do VI ENEM (Encontro Nacional de Educação Matemática)

Objetivos: Estudar o fenômeno da articulação de pontos de vista cartesiano e paramétrico no tratamento das representações de subespaços vetoriais.

Metodologia: Engenharia Didática

Fundamentação teórica: Noções de "quadro" e de "registro" desenvolvidas por R. Douady (1992) e R. Duval (1995)

Marlene Dias fez uma *“análise Matemática da articulação, considerando o seu desenvolvimento histórico, e procurou estabelecer os sistemas de conhecimentos (técnicos, tecnológicos e teóricos) nos quais esta articulação é a priori suscetível de se inscrever”* (Dias, 1998).

Mediante a análise das diferentes tarefas que intervêm num primeiro curso de Álgebra Linear, tendo em vista suas soluções em função das variáveis da tarefa, Dias observa as necessidades de articulação entre os pontos de vista cartesiano e paramétrico. A autora analisa livros didáticos para averiguar como esta articulação é

gerada institucionalmente nesses livros. Ela estudou as regularidades e diferenças entre os relatórios institucionais franceses e brasileiros.

Em outra etapa, Marlene Dias analisou questionários, entrevistas e exames de DEUG, com a finalidade de compreender como estudantes franceses e brasileiros, de diferentes níveis, construíam a articulação entre os pontos de vista cartesiano e paramétrico em relação aos “manuais didáticos”²⁶ existentes e quais dificuldades eles apresentavam.

Marlene Dias apresentou, neste artigo, algumas considerações importantes das quais destacamos algumas: (1) uma organização complexa da articulação de pontos de vista *cartesiano* (quando o subespaço vetorial é concebido como o conjunto de vetores-soluções de uma equação, ou de um sistema de equações lineares) e *paramétrico* (quando o subespaço é concebido como subespaço gerado por um conjunto de vetores) mobiliza vários quadros e registros; (2) por meio da análise matemática da articulação, na qual foi considerado seu desenvolvimento histórico, evidencia-se a diferença entre os dois sentidos da articulação; (3) a capacidade de considerar uma equação como vetor desempenha um papel importante no desenvolvimento da articulação; (4) os diferentes níveis de expressão desta articulação e a introdução tardia do quadro teórico que lhe é associado: o quadro da dualidade. A diferença entre a solução técnica da articulação por meio do quadro dos sistemas lineares e sua solução teórica pode conduzir a hipóteses de dificuldades didáticas sérias, se não se considerar um nível tecnológico (intermediário) adequado; (5) a análise de livros didáticos permitiu verificar que parece existir uma diversidade de “manuais didáticos”²⁷; porém, em todos os casos analisados a gestão da articulação entre pontos de vista cartesiano e paramétrico é

²⁶ (Original) “rapports” institucionais

quase inexistente, mesmo quando os elementos teóricos e técnicos estão presentes. Há uma fraca utilização do espaço de tarefas necessitando desta articulação. A autora aponta, ainda, a ausência de desenvolvimento de um nível intermediário tecnológico que atenua a diferença entre os níveis técnico e teórico.

Conclusão da autora: Os resultados encontrados, segundo Marlene Dias, confirmam sua convicção de que *“a articulação entre os pontos de vista cartesiano e paramétrico desempenha um papel fundamental na aprendizagem de Álgebra Linear, e que esta articulação não pode se reduzir a conversões de tipo semiótico”* (Dias, 1998).

Marlene Dias conclui que a articulação não é facilmente acessível e que os estudantes tendem a reduzi-la aos seus aspectos algorítmicos, o que os conduz a todos os tipos de "derrapagens" formais. Isto indica que para os estudantes adquirirem as competências necessárias desta articulação é preciso que ela seja considerada de forma explícita no processo de ensino.

²⁷ No original, “rapports” institucionais

4.6 - Marlene Alves Dias (1998a)

Título: "Les problèmes d'articulation entre points de vue "cartésien" et "paramétrique" dans l'enseignement de l'algèbre linéaire."

Tipo de produção: Tese de Doutorado defendida no IREM de Paris VII da Universidade de Paris, em 1998

Objetivo: Estudar o fenômeno de articulação entre os pontos de vista cartesiano e paramétrico na representação de espaços vetoriais.

Metodologia : Engenharia Didática

Fundamentação teórica: Jogo de quadros de Régine Douady (1992) e registros de representações de Raymond Duval (1995) e articulação de Ponto de Vista de Rogalski.

Primeiramente Marlene Dias desenvolveu um estudo sobre um quadro de modelos cognitivos hierarquizados e não-hierarquizados. Neste último encontram-se as noções de jogo de quadros, de registros, de pontos de vista.

A seguir, a autora fez um estudo sobre a relação entre pontos de vista paramétrico e cartesiano sob uma visão algorítmica e, depois por meio da noção de dualidade. Em seguida ela apresentou resumidamente, como a flexibilidade na articulação do ponto de vista paramétrico e cartesiano evoluiu ao longo da história.

Marlene Dias analisou também alguns livros didáticos franceses e brasileiros, verificou os registros utilizados e as variáveis apresentadas nas tarefas propostas, além disso fez um estudo sobre o funcionamento institucional da articulação. Esta análise permitiu evidenciar algumas características importantes dos manuais

didáticos sobre a articulação, a qual sugeriu a questão sobre a existência ou não da influência de tais relatórios sobre a produção dos estudantes.

A autora elaborou um questionário com o objetivo de verificar essa articulação e aplicou-o a alunos do ensino superior francês e brasileiro. Os alunos franceses, além de responder ao questionário individualmente, passaram, conforme o caso, por entrevistas para esclarecer as suas respostas. Os alunos brasileiros responderam ao questionário, tanto em grupos quanto individualmente, e também passaram por entrevistas conforme a necessidade.

Considerando-os dados obtidos, a autora pôde observar dificuldades importantes e resistentes encontradas pelos estudantes de ambos os países em relação aos itens abordados.

Conclusão da autora: A articulação entre os pontos de vista cartesiano e paramétrico, tem um papel importante na aprendizagem de Álgebra Linear. Essa articulação é importante, porém apresenta dificuldade, pois as técnicas de passagem de um para outro não são simétricas. Além disso, há um desnível entre as técnicas algorítmicas de passagem e o quadro teórico no qual se inscreve essa articulação de pontos de vista, isto é, a dualidade.

A análise do desenvolvimento histórico mostrou claramente a diferença entre os dois sentidos da articulação. A história mostrou que técnicas como a estabelecida no quadro da teoria dos determinantes podem frear o desenvolvimento da articulação. Esse estudo levou a autora a distinguir cinco quadros em que a articulação se expressa: quadro dos sistemas lineares, quadro da geometria, quadro da Álgebra Linear, quadro das matrizes e o quadro dos determinantes, mesmo que esses últimos não tenham existência autônoma em relação à articulação.

A análise dos manuais didáticos permitiu à autora a concluir que havia *“pouca sensibilidade com as questões de articulação que apareciam freqüentemente de forma implícita e eram raramente trabalhadas como articulação”*²⁸. Além disso, a articulação, quando aparece, se *“organiza em torno de dois pólos: de um lado aquele técnico da resolução de sistemas lineares e de outro aquele teórico da dualidade. Mas a organização entre os quadros é raramente levada em conta. Segundo a obra, é um pólo ou outro que domina e a tecnologia presente é relativa a esse pólo”*²⁹ (Dias, 1998a: p. 446).

No caso em que é o pólo técnico domina, a tecnologia é essencialmente descritiva. No que concerne aos exercícios propostos, a análise mostra, com algumas exceções, que o espaço disponível é pouco explorado. Os exercícios que necessitam de articulação de pontos de vista ficam realmente marginais e se situam, majoritariamente, no sentido do cartesiano para o paramétrico e estão associados de forma privilegiada à resolução de sistemas.

Os resultados apresentados pelos estudantes brasileiros e franceses mostram as *“...dificuldades resistentes encontradas por eles na elaboração de justificativas pessoais eficazes e flexíveis aos dois pontos de vista considerados”*. Além disso, os erros mostram que, *“majoritariamente, as dificuldades se encontram nas articulações e que os estudantes se encontram bloqueados ou produzem resultados incoerentes em relação às articulações”*³⁰ (Dias, 1998a: p. 447).

Outro problema evidenciado pela análise é a falta de validação pelos estudantes, que não existe localmente nem relacionada à teoria envolvida, como teoremas, etc.

²⁸ [Tradução do autor – original ver anexo, nota 28]

²⁹ [Tradução do autor – original ver anexo, nota 29]

³⁰ [Tradução do autor – original ver anexo, nota 30]

O recurso ao quadro geométrico é pouco presente e pouco operatório³¹. O estudante que tentou utilizá-lo foi freqüentemente induzido a erro, seja por não distinguir o quadro afim e vetorial, seja porque quis generalizar os invariantes a dimensões superiores a três, sem saber como fazê-lo.

Marlene Dias afirma que se deve fazer uso da articulação (ponto de vista cartesiano e paramétrico), pois ao se trabalhar com esta dualidade o aluno pode perceber a diferença entre a solução técnica da articulação por meio do quadro dos sistemas lineares e sua solução teórica. No entanto, quando Marlene Dias analisou as tarefas apresentadas aos alunos, viu que o espaço para a introdução desta articulação é limitado e a utilização de tarefas que necessitem da articulação é muito restrita.

A autora diz ainda que, em todos os casos analisados, a gestão da articulação entre os pontos de vista cartesiano e paramétrico é quase inexistente, mesmo quando os elementos teóricos e técnicos estão presentes.

Segundo Marlene Dias, pode-se notar que a articulação não é facilmente acessível, além disso, os estudantes tendem a reduzi-la aos seus aspectos algorítmicos, tornando a conceitualização restrita a certos domínios. Para que os estudantes adquiram as competências necessárias desta articulação, é preciso que ela seja considerada de forma explícita no processo de ensino.

³¹ Nas conclusões comentarei esta afirmação de Marlene Dias

5- Análise da Produção

Minha proposta, neste trabalho é analisar as produções científicas brasileiras (artigos, dissertações e teses) na década de 90, e verificar, baseado em artigos apresentados anteriormente, como se tem dado especificamente as pesquisas em ensino-aprendizagem da Álgebra Linear nesta última década. Meu objetivo também é analisar tanto os aportes que possam contribuir para um ensino mais eficiente quanto os problemas que devem ser pesquisados para provocar uma mudança no ensino e, mais especificamente, perceber qual é a direção e o foco dessas pesquisas, assim como conhecer as bases teóricas que as têm fundamentado.

Passarei a apresentar os pontos relevantes, a meu ver, de cada uma das pesquisas brasileiras que compõem o panorama que elaborei.

Amarildo Melchiades da Silva faz um estudo histórico epistemológico que evidencia como vários matemáticos construíram a noção de base a partir de referenciais distintos (como os mencionados nos apontamentos sobre Silva, A.; 1997); os livros didáticos, estudados por Amarildo Silva, também apresentam formas distintas de direcionar os alunos à noção de base assim como diferentes definições para a noção de base, definições que de alguma maneira, explícita ou implicitamente, mostram alguns dos campos semânticos nos quais a noção de base é apresentada pelos autores.

Por meio de um estudo de caso, Amarildo Silva verificou que os alunos desenvolviam outros campos semânticos, diferente daquele campo semântico preferencial do professor, para trabalhar com a noção de base, e este campo semântico era utilizado para executar qualquer tarefa, apenas incorporando-se outros objetos ao núcleo.

É interessante ressaltar a seguinte afirmação de Amarildo Silva: *“Notamos que os textos matemáticos apresentados a nossos informantes (os alunos) foram lidos e interpretados em relação aos núcleos que eles construíram e não em relação a um núcleo 'preferencial' que pressupõe constituídas todas as noções que constituem a noção de base. Isto nos sugere que as possíveis expectativas de um professor que espera que seus alunos falem e operem de maneira efetiva a partir dos textos matemáticos, considerando, por exemplo, as noções de independência linear e de geração como 'coisas' de mesmo status, possivelmente não irão obter isto como resposta”* (Silva, A.; 1997: p. 113). Amarildo Silva, neste trecho, mostra que o aluno nem sempre dá o mesmo estatuto a objetos matemáticos que o seu professor. Além disso, em outra passagem, ele acrescenta que aquele professor de Álgebra Linear cuja expectativa é a de que seu aluno adote os mesmos procedimentos e escolhas que ele (professor) faria, ao lidar com Álgebra Linear, provavelmente ficará frustrado, pois o aluno não internaliza a maneira de abordar e interpretar problemas como o seu professor, seguindo procedimentos metodológicos apresentados no livro-texto.

A citação de Amarildo Silva me faz lembrar o obstáculo do formalismo mencionado por Sierpinska (Sierpinska, 1999), pois me pergunto se os novos campos semânticos criados pelos alunos não podem ser uma forma, encontrada por eles, também para atenuar o obstáculo que encontram com o formalismo próprio da linguagem axiomática-dedutiva?

Outro ponto que esta afirmação de Amarildo Silva permite-me levantar é sua oposição ao que Dorier escreve em *L' Enseignement de l'Algèbre Linéaire en Question*, em que diz: *“Naquilo que diz respeito às evoluções individuais dos estudantes, nossa apreciação do problema pode se esclarecer. Nos limitamos mais particularmente em alguns tipos de comportamentos, mas também é mais fácil*

prever com bastante certeza, sobre tarefas precisas, os procedimentos que têm mais chance de ser colocados em obra pelos estudantes, em função de seus conhecimentos anteriores. Este ponto permanece ainda nebuloso; no entanto, esta análise, reforçada por uma reflexão epistemológica e didática, pode permitir, em pequena escala, controlar de maneira mais eficaz os efeitos de um ensino” ³². (Dorier, 1997: p. 121).

Penso que o trabalho de Amarildo Silva contrasta com o que diz Dorier, no que se diz refere à construção, pelos alunos, da noção de base em diferentes campos semânticos, parece difícil prever quais seriam seus procedimentos e escolhas em determinada tarefa. Pergunto-me se é possível prever os procedimentos dos alunos, considerando que eles operam em campos semânticos distintos, o que corrobora para permitir a “limitação” de variedade de possibilidades a serem trabalhadas pelo aluno? Com certeza, pode ser uma questão importante na área do ensino-aprendizagem da Álgebra Linear que merece ser melhor estudada.

Rute Silva (1999) buscou apresentar elementos que diferenciasssem um curso de Álgebra Linear que procura atender às expectativas de um curso de Computação. Penso que a principal contribuição do trabalho de Rute Silva foi evidenciar o grau de liberdade do professor na escolha da metodologia e na forma de abordar o seu curso. O que vem corroborar com as conclusões apresentadas por Behaj e Arsac (Behaj, A. and Arsac, G., 1998) descritas no artigo *La conception d'un cours d'algèbre linéaire*.

Neste artigo, Behaj e Arsac fizeram um estudo com cinco professores de Álgebra Linear do primeiro ano de uma Universidade em Marrocos, o objetivo do estudo era de analisar em quê se deve apoiar um professor para preparar as aulas

³² [Tradução do autor – original ver anexo, nota 32]

de um curso de Álgebra Linear e verificar qual é o papel do professor na organização do curso de Álgebra Linear.

Behaj e Arsac entrevistaram individualmente cada professor e as questões feitas diretas e gerais, visaram conhecer as escolhas do professor ao preparar a aula. Partindo das declarações dos professores, os autores analisaram os resultados obtidos usando a teoria da transposição didática; deste modo, examinaram quais são as obrigações do sistema de ensino que leva em conta os docentes e como suas idéias pessoais sobre a Matemática e seu ensino induzem variações entre os mesmos. Behaj e Arsac observaram que os professores se sentem relativamente livres quanto à ordem de apresentação do curso sugerido pelo programa e pelos livros, geralmente eles estruturam o curso segundo suas próprias idéias sobre a aprendizagem, e estas são muito pessoais, diferem de um professor a outro e são determinantes no processo de ensino; os pesquisadores também observaram que os fatores que devem ser considerados são muito mais complexos do que os previstos pela teoria da transposição didática, pois, segundo Chevallard, a importância da ação do professor sobre o “saber ensinado” é secundária, e a margem de liberdade do professor no “saber ensinado” é pequena, pois o professor não tem o poder da escolha.

Valendo-se da conclusão do trabalho de Behaj e Arsac, que mostra que o grau de liberdade do professor é muito maior do que o previsto por Chevallard na sua teoria da transposição didática, a possibilidade de utilizar diferentes metodologias no ensino-aprendizagem de Álgebra Linear fica clara, uma vez que o professor, tendo um papel fundamental na transposição didática e possuindo liberdade para interferir nesta transposição, pode com suas escolhas direcionar a metodologia de ensino no rumo que decidir tomar.

Rute Silva falou, em seu estudo, sobre a Assimilação Solidária, metodologia empregada pelo professor Roberto Ribeiro Baldino. Porém, há outras metodologias, dentre as quais cito o *Principle of Multiple Embodiments* (Princípio de Incorporações Múltiplas) utilizada por Guershon Harel em sua investigação sobre a produção de significado para a noção de base em Álgebra Linear, descrita no seu artigo *Applying the Principle of Multiple Embodiments in Teaching Linear Algebra: Aspects of Familiarity and Mode of Representation*, publicado em 1989 (Harel, G.; 1989). Até o momento, não temos resultados de pesquisas que mostrem que alguma metodologia tenha sido eficaz no processo de ensino-aprendizagem.

Foram quatro os textos científicos de Marlene Alves Dias apresentados em minha pesquisa. Três deles abordaram a flexibilidade entre os pontos de vista cartesiano e paramétrico e o quarto texto averiguou a utilização do método de Gauss (1993).

Dentre as conclusões que Marlene Dias apresenta em seus trabalhos, evidencio:

(Dias, 1993)

- Em um mesmo grupo havia diferentes modos de resolução e procedimentos utilizados pelos alunos. Constato conclusão semelhante no trabalho de Amarildo Silva, posteriormente comentarei esta semelhança.
- A utilização de cálculos nas justificativas, mesmo quando isto não era permitido; aqui observo Marlene Dias mostrando o aspecto do obstáculo do formalismo, também apontado por Sierpinska, que diz: *“O obstáculo do formalismo faz os estudantes produzirem um discurso que tem a forma externa do discurso usado pelo professor ou pelo livro didático. Para ser eficientes como estudantes, eles*

desenvolveram comportamentos automáticos”³³ (Sierpinska, 1999: p.12), outra característica deste obstáculo é “... *confundir categorias de objetos matemáticos, por exemplo, [...] tratar transformações como vetores, relações como equações, vetores como seqüência de números*”³⁴ (Sierpinska, 1999: p.12). Os comportamentos automáticos mencionados por Sierpinska fala, referem-se a procedimentos que, independentemente da pergunta feita, o aluno adota por julgar cabíveis à atividade, ele então os executará até obter algo significativo .

Isto mostra a “mecanização” de algoritmos que são utilizados independentemente do que se coloca como questão. Esta “mecanização” pode ser vista também em outro ponto ressaltado por Marlene quanto à utilização do método de Gauss, que era bem utilizado para verificar a independência linear, mas quando era utilizado para triangularizar uma matriz os estudantes acabavam perdendo dados importantes.

- Os alunos têm domínio do conceito de posto, mas não têm clareza ao usar a noção de dependência linear. Noto aqui que a noção de dependência linear ainda se encontra presa a determinados pressupostos que não permitiram sua generalização e aplicação em outros contextos. Este fenômeno de validação local é apontado em outras pesquisas em Educação Matemática.
- Dificuldade dos alunos em mostrar a igualdade de conjuntos, em geral eles demonstram apenas uma inclusão, assumindo a outra como consequência. Neste item aponto uma das questões que os grupos de pesquisas ligados à prova e demonstração matemática procuram analisar. O aluno parece não entender a necessidade da demonstração, cabe ao professor problematizar a demonstração para o aluno, caso contrário ele fará a demonstração por efeito de

³³ [Tradução do autor – original ver anexo, nota 33]

contrato, uma vez que é “isso que o professor espera que ele faça”. O aluno não vê valor na demonstração uma vez que, para ele, a “autoridade” do professor garante que ele aceite determinada propriedade, e mesmo alguns resultados importantes passam para o lado da evidência, o que é evidente para o aluno não precisa ser demonstrado, não existe uma problemática em torno da evidência que garanta a necessidade da demonstração. A “prova”, segundo Hillel, é uma das dificuldades apontadas pelos estudantes, eles não entendem a necessidade dela, nem a necessidade de várias técnicas para a “prova” (Hillel, 1994).

- Bom desempenho no uso de técnicas, mas mau desempenho quando foi necessário utilizar teoremas. Acredito que o mau desempenho no uso de teoremas deve-se ao fato de a linguagem axiomática utilizada na Álgebra Linear, segundo Sierpinska (Sierpinska, 1999: p.38), ser um obstáculo para o aluno que toma contato com esta disciplina em um primeiro momento, o desafio parece assumir a linguagem axiomática-dedutiva como uma linguagem clara e necessária em Álgebra Linear.

Nos artigos de 1995 e 1998, Marlene Dias mostra respectivamente a flexibilidade cognitiva e o fenômeno da articulação dos pontos de vista cartesiano e paramétrico no tratamento das representações, especificamente sobre o conceito de subespaços vetoriais, como foco dessas pesquisas. Nas suas conclusões, Marlene Dias aponta a importância da flexibilidade e ratifica que a articulação entre os pontos de vista cartesiano e paramétrico desempenha um papel fundamental na aprendizagem de Álgebra Linear, e que esta articulação não pode se reduzir a aptidões do tipo semiótico.

³⁴ [Tradução do autor – original ver anexo, nota 34]

Vários trabalhos de Duval (alguns citados na bibliografia e/ou nas referências bibliográficas) apontam a necessidade desta flexibilidade (articulação) defendida no trabalho de Marlene Dias. Em um de seus artigos, Duval diz que o objeto não se distingue de sua representação; na verdade, o objeto e sua representação se confundem, mas é preciso reconhecer que diferentes representações apontam para um único objeto, e apenas ao se articular estas diferentes representações é que se pode obter uma melhor concepção do objeto em questão (Duval, 1998). Podemos então ver que a flexibilidade entre diferentes pontos de vista, ou a articulação entre diferentes representações de um mesmo objeto, é essencial para que a concepção sobre este objeto seja mais integral, uma vez que é necessário levar-se em conta que diferentes representações evidenciam diferentes aspectos de um mesmo objeto, e possivelmente em diferentes linguagens matemáticas (como a geométrica, a matricial, etc.). Os trabalhos de Marlene Dias ecoam junto aos trabalhos de Duval, salientando que um objeto será mais bem apreendido se for feito uso da conversão (mudanças de registro) e do tratamento (transformações no interior de um mesmo registro) com a finalidade de observar os diferentes aspectos evidenciados em suas diferentes representações.

Por fim, em sua tese de doutorado, Marlene Dias estuda o fenômeno de articulação entre os pontos de vista cartesiano e paramétrico na representação de espaços vetoriais. Marlene Dias desenvolveu um estudo sobre um quadro de modelos cognitivos hierarquizados e não-hierarquizados.

Como o estudo é semelhante ao analisado anteriormente, é natural que a articulação entre os pontos de vista cartesiano e paramétrico seja apontada como um fator importante na aprendizagem de Álgebra Linear, assim como é apontado o desnível entre as técnicas algorítmicas de passagem de um ponto de vista a outro e

o quadro teórico no qual se inscreve essa articulação; mesmo assim, Marlene Dias afirma que se deve fazer uso da articulação, pois ao trabalhar com esta dualidade o aluno pode perceber a diferença entre a solução técnica da articulação por meio do quadro dos sistemas lineares e sua solução teórica. Fora isto, na tese aparece o fato de as técnicas de passagem do ponto de vista cartesiano para o paramétrico não serem simétricas às utilizadas do ponto de vista paramétrico para o cartesiano.

Um ponto que destaco nas conclusões de Marlene Dias é a dificuldade dos alunos para elaborar as justificativas para dois pontos de vistas utilizados, há dificuldades na articulação na sua maioria; há também dificuldade na utilização do quadro geométrico, que se torna pouco operatório. Quero aqui recordar o paradoxo mencionado no artigo *Evaluation of a teaching design in linear algebra: The case of linear transformations* (Sierpinska et al., 1999); neste artigo os autores falam sobre as “ajudas visuais” e escrevem: *“Este é o famoso paradoxo do uso das chamadas ‘ajudas visuais’ no ensino de matemática: a interpretação do modo pelo qual as ajudas visuais representam objetos matemáticos requer o mesmo conhecimento que se supõe, ajudam os estudantes a construir. Se os estudantes não possuem este conhecimento, as representações visuais são matematicamente sem sentido para eles e conseqüentemente elas não podem ser considerados como ‘ajudas’, e se os estudantes já possuem este conhecimento, eles não precisam das ‘ajudas’. Em ambos os casos, as ‘ajudas’ assumidas não auxiliam e podem ser dispensadas”*³⁵ (Sierpinska, 1999: p.19).

Levando em consideração a afirmação de Marlene Dias de que o recurso ao quadro geométrico é pouco presente e pouco operatório, e considerando o paradoxo acima citado, acredito que isto se deve ao fato de os estudantes não

³⁵ [Tradução do autor – original ver anexo, nota 35]

trabalharem bem com o registro geométrico. E se não operam bem neste tipo de registro, então valer-se dele como “instrumento facilitador”, em que as noções de Álgebra Linear podem ser vistas “concretamente”, parece ser, se não infrutífero, pouco eficaz o seu uso como “ajuda visual”. Quando o quadro geométrico é utilizado como “ajuda visual” pressupõe-se que os alunos disponham de conhecimentos que estariam sendo construídos com seu auxílio.

Ainda analisando os textos científicos pertencentes ao panorama que fiz das pesquisas brasileiras sobre ensino-aprendizagem da Álgebra Linear, pude observar imbricações entre os trabalhos, que passo a apresentar.

Marlene Dias e Amarildo Silva apresentam o fato de os estudantes de uma mesma turma apresentarem diferentes modos de resolução e procedimentos na resolução de suas atividades. Esta diversidade de resoluções apuradas por Marlene Dias corrobora com a conclusão de Amarildo Silva sobre o fato de os alunos, ao final do curso de Álgebra Linear, operarem em campos semânticos por eles mesmos constituídos.

O obstáculo do formalismo é outro ponto que vemos tanto no trabalho de Marlene Dias como no de Amarildo Silva, cada um deles apresenta um aspecto diferente deste obstáculo no decorrer de suas pesquisas. Marlene Dias, como vimos, mostra o aspecto da mecanização, enquanto Silva apresenta o fato de que o aluno poderá perder-se na resolução de sua atividade se procurar reproduzir o campo semântico preferencial do professor, ou seja, quando o aluno se vê obrigado a reproduzir a mesma forma de abordagem que seu professor costuma fazer, isto acaba levando-o ao erro.

Temos também a validação parcial de conceitos apontados por Marlene Dias e Amarildo Silva. Marlene Dias apontou a falta de clareza no uso da noção de dependência linear, o que mostra, segundo Amarildo Silva, a validação local de uma noção, ou seja, a noção de dependência linear ainda se encontra presa a determinados pressupostos que não permitem sua generalização e aplicação em outros contextos. Várias pesquisas em Educação Matemática mostram esta validação parcial que os alunos costumam fazer com os conceitos que estão sendo apreendidos, não podemos deixar de lembrar que vários didatas apontam a necessidade de apresentar um conceito em diferentes contextos para que o aluno possa construir uma boa imagem conceitual do mesmo.

Marlene Dias e Rute Silva evidenciam o bom desempenho no uso de técnicas mas um mau desempenho quando foi necessário utilizar teoremas. Rute Silva diz que, como consequência disto, a matemática é vista como um conjunto de “receitas” que permite resolver problemas. Se considerarmos que Rute Silva trabalha com alunos de um curso de computação e Marlene Dias, não, podemos ver indícios de que há uma tendência de que os estudantes valorizem a algoritmização inerente à matemática.

Passo a apresentar algumas sugestões para o ensino-aprendizagem de Álgebra Linear, advindas dos trabalhos que analisei de diferentes pesquisadores da área.

Amarildo Silva sugere uma abordagem de Álgebra Linear em diferentes contextos, como a da geometria analítica, em vez de apresentá-la com uma teoria

axiomático-dedutiva no primeiro ano da universidade; acredito que temos aqui uma boa questão para um estudo posterior uma vez que, segundo Sierpinska, uma das dificuldades dos estudantes com os conceitos da Álgebra Linear é de origem epistemológica que está relacionada ao uso de definições axiomáticas (Sierpinska, 1999: p.38). É ser interessante observarmos que há possibilidade de amenizar, se não evitar, o obstáculo do formalismo se como professores, tivermos o cuidado de não esperarmos que nossos alunos reproduzam os mesmos procedimentos e escolhas que nós, em determinada atividade.

Rute Silva mostrou, em seu trabalho, a possibilidade de adequar o programa de Álgebra Linear a outros que a utilizem como ferramenta, por meio de uma mudança na didática e na busca por aplicações de Álgebra Linear. Sierpiskna, em seu artigo *Evaluation of a teaching design in Linear Algebra: The case of linear transformations* (Sierpinska, 1999) diz que “na América do Norte há, pelo menos, duas tendências que vêm reformando os cursos de Álgebra Linear e são evidenciadas nos livros didáticos. Em uma delas, a idéia principal é ilustrar as idéias matemáticas abstratas por meio de aplicações (e.g. Lay, 1994) . Na outra, a geometria vetorial é considerada uma fonte de significado intuitivo para os conceitos básicos de Álgebra Linear (e.g. Ouelley, 1994). A maioria das propostas de reforma faz uso da tecnologia de informática, especialmente de Sistemas Algébricos Computacionais. O software é usado principalmente como uma ferramenta para fazer matemática e não tanto como uma ajuda pedagógica”(Sierpinska, 1999: p. 9)³⁶. Acredito que a busca por novas metodologias de ensino e por aplicações possa ser uma maneira, mas não a única, de adequar o curso de Álgebra Linear a um público que a utilizará como ferramenta.

³⁶ [Tradução do autor – original ver anexo, nota 36]

Em seu trabalho sobre a importância da flexibilidade, Marlene Alves Dias deixa claro que a articulação entre os pontos de vista cartesiano e paramétrico desempenha um papel fundamental na aprendizagem de Álgebra Linear. Já citamos que Duval (Duval, 1998) é arauto na defesa do tratamento e da conversão dos registros utilizados nas atividades matemáticas, uma vez que, segundo o próprio Duval, uma melhor concepção de um objeto é obtida na articulação dessas representações.

Temos aqui a sugestão, resultado da análise dos trabalhos de Duval e de Marlene Dias, para valer-se da articulação entre as diferentes formas de registro durante o processo do ensino-aprendizagem de Álgebra Linear.

Finalmente, aponto algumas diretrizes para futuros trabalhos, embora esteja certo de que não esgotarei, nem é este meu objetivo, tais diretrizes.

Da análise do trabalho de Amarildo Silva, mediante as semelhanças com trabalhos de Sierpinska, levanto duas questões: (1ª) o obstáculo do formalismo não se dá pelo fato de os alunos procurarem transpor suas dificuldades no uso da linguagem axiomática-dedutiva? (2ª) em relação à construção de novos campos semânticos pelos alunos, seria a tentativa de fugir do formalismo um fator que colabora com a busca de novos campos semânticos?

A preocupação de Rute Silva em “adequar” o curso de Álgebra Linear a um público que a utilizará como ferramenta teve como norte a busca por aplicações. Rute Silva mostrou a possibilidade de usar uma metodologia diferenciada e não faz, como ela afirma no início de seu trabalho, uso da informática. A preocupação em buscar alternativas para atender às expectativas de outros "cursos como de serviços" (estou empregando a mesma terminologia de Rute Silva) parece ser uma

preocupação de outros pesquisadores estrangeiros, como é o caso da Sierpinska. Acredito ser interessante pensarmos neste outro aspecto, que é o uso de informática; Sierpinska (Sierpinska, 1999) apontou o uso de computador como uma das tendências que estão reformulando o curso de Álgebra Linear, valeria a pena abordar este aspecto para se verificar qual seria a contribuição da informática no ensino-aprendizagem da Álgebra Linear.

O fato de alunos operarem em campos semânticos distintos dos campos semânticos “preferenciais”, resultado que pôde ser visto no trabalho de Amarildo Silva e que também aparece implicitamente em um dos trabalhos de Marlene Dias, deve e pode ser mais explorado em outras pesquisas. Acredito ser interessante analisar o por quê deste “fenômeno” e como usar isto como ponto favorável no processo do ensino-aprendizagem de Álgebra Linear.

6- CONCLUSÃO

A análise feita no capítulo anterior trazia em seu bojo implicitamente as conclusões que ora passo a apresentar .

Algumas pesquisas desta área procuram levantar os obstáculos epistemológicos e/ou sugerem uma abordagem alternativa, visando facilitar a construção e apreensão de conceitos pelo estudante de Álgebra Linear. A maioria das obras relacionadas, têm estas propostas.

O problema relativo às dificuldades dos alunos em Álgebra Linear vem sendo detectado há tempos por meio dos resultados obtidos pelos estudantes em suas avaliações. No entanto, as pesquisas em ensino-aprendizagem de disciplinas de cursos superiores, no mundo todo, são relativamente recentes e no início se concentravam na área de cálculo diferencial e integral. Nos Estados Unidos, por exemplo, as investigações sobre o ensino-aprendizagem de Álgebra Linear tomaram fôlego a partir da criação do *Linear Algebra Curriculum Study Group (LACSG)* em 1990. Na França, as pesquisas sobre didática da Álgebra Linear começaram a aparecer também a partir de 1990, a tese de Jean Luc Dorier sobre o assunto é do início da década de 1990. No Brasil, a pesquisa sobre as disciplinas-problemas, efetuadas pela equipe de Campinas, conforme consta da problemática, foi divulgada em 1997. Assim, pelo exposto, constata-se que a preocupação com a pesquisa sobre o ensino-aprendizagem da Álgebra Linear, no Brasil, é muito recente.

Com o levantamento das pesquisas brasileiras em ensino-aprendizagem da Álgebra Linear, a relação de autores se restringe a três que, de fato, realizaram suas pesquisas com esta temática. Dos artigos analisados, quatro deles pertencem a uma

mesma autora (Marlene Alves Dias) que os escreve em um contexto francês (a maior parte de sua pesquisa é realizada na França).

O início das produções científicas de Marlene Dias, sobre ensino-aprendizagem da Álgebra Linear, ocorreu no ano de 1993, enquanto as pesquisas realizadas no Brasil têm início em 1997. Se observarmos o artigo de Dorier, vemos que G. Harel já possui trabalhos com este tema datados de 1980.

Portanto, pode-se ver que as pesquisas brasileiras na área de ensino-aprendizagem da Álgebra Linear é bem recente e apresenta um caminhar tímido, devido à pequena quantidade de pesquisas na área; porém, há contribuições de pesquisas brasileiras nesta área que corroboram a melhoria e o entendimento do processo de ensino-aprendizagem.

Para facilitar o acompanhamento das conclusões, apresento um quadro comparativo entre os principais resultados das obras de autores brasileiros e os resultados de autores estrangeiros sobre temas análogos.

Amarildo Melchiades da Silva (1997)	
Pontos importantes:	Trabalhos estrangeiros mostram:
Verificou que os alunos desenvolviam outros campos semânticos, diferentes daquele campo semântico preferencial do professor, para trabalhar com a noção de base. E este campo semântico constituído era utilizado para executar qualquer tarefa, apenas incorporando-se outros objetos ao núcleo.	<ul style="list-style-type: none">• Obstáculo do formalismo (Sierpinska, 1999)• Previsão em pequena escala dos procedimentos e escolhas que os estudantes farão [Dorier: <i>L'Enseignement de l'Algèbre Linéaire en Question</i>]

Rute Silva (1999)

Pontos importantes:

- Buscou apresentar elementos que diferenciasssem um curso de Álgebra Linear que procura atender às expectativas de um curso de computação.
- A principal contribuição do trabalho de Rute Silva foi evidenciar o grau de liberdade do professor na escolha da metodologia e na forma de abordar o seu curso.

Trabalhos estrangeiros mostram:

- O grau de liberdade do professor é muito maior do que o previsto por Chevallard na sua teoria da transposição didática.
- Há possibilidade de utilizar diferentes metodologias no ensino-aprendizagem de Álgebra Linear. O professor pode, com suas escolhas, direcionar a metodologia de ensino no rumo que decidir tomar (Behaj, A. and Arsac, G., 1998).

Marlene Alves Dias (1993)

Pontos importantes:

- Em um mesmo grupo havia diferentes modos de resolução e procedimentos utilizados pelos alunos. Vejo conclusão semelhante no trabalho de Amarildo Silva, posteriormente comentarei esta semelhança.
- A utilização de cálculos nas justificativas, mesmo quando isto não era permitido.
- Dificuldade dos alunos com demonstração
- Boa utilização do método de Gauss, o método era bem utilizado para

Trabalhos estrangeiros mostram:

- Um aspecto do obstáculo do formalismo é o desenvolvimento de comportamentos automáticos (Sierpinska, 1999). Isto mostra a “mecanização” de algoritmos que são utilizados independentemente do que se coloca como questão.
- A “prova”, segundo Hillel, é uma das dificuldades apontadas pelos estudantes, eles não entendem a necessidade dela, nem a

<p>verificar independência linear, mas quando era utilizado para triangularizar uma matriz os estudantes acabavam perdendo dados importantes.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Bom desempenho no uso de técnicas, mas mau desempenho na utilização de teoremas. 	<p>necessidade de várias técnicas para a “prova” .</p> <ul style="list-style-type: none"> • A linguagem axiomática utilizada na Álgebra Linear, segundo Sierpinska (Sierpinska, 1999), é um obstáculo para o aluno que toma contato com esta disciplina em um primeiro momento, o desafio parece ser assumir a linguagem axiomática-dedutiva como uma linguagem clara e necessária na Álgebra Linear.
--	--

Marlene Alves Dias (1995 / 1998)	
<p>Pontos importantes:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Importância da flexibilidade na articulação entre os pontos de vista cartesiano e paramétrico, pois desempenha um papel fundamental na aprendizagem de Álgebra Linear • Dificuldade dos alunos com a articulação e na elaboração de justificativas para os dois pontos de vistas utilizados. • Dificuldade na utilização do quadro geométrico que se torna pouco operatório. 	<p>Trabalhos estrangeiros mostram:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Vários trabalhos de Duval apontam a necessidade desta flexibilidade na articulação. Os trabalhos de Duval salientam que um objeto será mais bem apreendido se for feito uso da conversão e do tratamento com a finalidade de observar os diferentes aspectos evidenciados em suas diferentes representações. • Recordo o paradoxo sobre as "ajudas visuais" (Sierpinska,1999).

Com a análise das obras dos autores brasileiros que compõem este trabalho, pude notar muitos pontos comuns e também alguns contrapontos entre as obras de autores brasileiros e autores estrangeiros. O quadro comparativo apresentado anteriormente permite verificar as imbricações entre as obras dos autores nacionais e dos autores estrangeiros.

Logo, pode-se notar que as pesquisas brasileiras inserem-se no quadro mundial das pesquisas sobre ensino-aprendizagem de Álgebra Linear, e que reforçam ou apresentam conclusões relevantes nesta área de pesquisa.

Finalizo meu trabalho, acreditando que este estado da arte permitiu situar as pesquisas de autores brasileiros na área de Educação Matemática e mais especificamente, no contexto das pesquisas sobre ensino-aprendizagem de Álgebra Linear.

Este trabalho ainda permite observar, nas obras dos autores analisados, suas sugestões explícitas ou implícitas para melhor o processo de ensino-aprendizagem de Álgebra Linear. Além disso, aponta linhas ou áreas de pesquisas no ensino-aprendizagem da Álgebra Linear, e possibilita que outros pesquisadores, com base nos resultados aqui apontados, possam implementar novos estudos que dêem continuidade e/ou aprofundamento a resultados já obtidos em outros trabalhos.

Concluo observando um caminhar tímido, uma vez que cataloguei apenas seis trabalhos sobre ensino-aprendizagem da Álgebra Linear de autores brasileiros, na década de 90. Porém, este caminhar leva a apontamentos importantes e elucidatórios sobre o ensino-aprendizagem de Álgebra Linear. Pode-se somar a isto as questões em aberto e as sugestões para outros trabalhos deixados por esses pesquisadores e em minha conclusão final, o que sem dúvida alguma, virão a

acrescentar mais elementos ao campo do conhecimento em Educação Matemática, mais especificamente ao ensino-aprendizagem da Álgebra Linear.

BIBLIOGRAFIA

ARTIGUE, M. ; DIAS, M. A. – *Articulação de pontos de vista em Álgebra Linear: Caso da representação de subespaços Vetoriais* - Artigo - Anais do VI ENEM - CO 268 , 1998.

BEHAJ, A. and ARSAC, G. – *La conception d'un cours d'algèbre linéaire* – Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 18, nº 3, pp. 333- 370, 1998.

DIAS, M. A. – *Contribution à analyse d'un enseignement expérimental d'algèbre linéaire en DEUG A première année.* Mémoire de DEA. Paris: Université de Paris 7, 1993.

_____. *Articulation Problems between different systems of symbolic representations in linear algebra* - In Proceedings of de 19th annual meeting of the international for the Psychology of Mathematics Education – vol. 2, pp. 34-41, Universidade Federal de Pernambuco – Brasil, 1995.

_____. *Les problèmes d'articulation entre points de vue "cartésien" et "paramétrique" dans l'enseignement de l'algèbre linéaire.* Thèse de Doctorat, Paris: Université de Paris 7, p. 504, 1998a.

DORIER, J. L. – *Contribution à l'étude de l'enseignement à l'université des premiers concepts d'algèbre linéaire – Approches historique et didactique.* Thèse de doctorat, Grenoble: Université Joseph Fourier, pp. 571, 1990.

_____. *État de l'art de la recherche en didactique - À propos de l'enseignement de l'algèbre linéaire* - Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 18, nº2, pp. 191 - 230, 1998.

- DORIER, J. L. et al.** – *L'enseignement de l'algèbre linéaire en DEUG première année, essai d'évaluation d'une ingénierie longue et questions.* In Artigue M. et al. (eds.) *Vingt ans de Didactique des Mathématiques en France*, pp. 328-342, Grenoble: La Pensée Sauvage, 1994.
- DORIER, J. L. et al.** – *L'Enseignement de L'algèbre Linéaire en Question* - Ed. La Pensée Sauvage, Grenoble, 1997.
- DUVAL, R.** – *Graphiques et Équations - l'articulation des registres* - IREM-Strasbourg, pp.125-139, 1988.
- _____. *Signe et objet, I, II* – *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* 6, IREM, Strasbourg, pp. 139 – 163, pp.165 - 196, 1998.
- FIorentini, D.** – *Tendências Temáticas e Metodológicas da Pesquisa em Educação Matemática no Brasil* - Artigo publicado nos Anais do I Encontro Paulista de Educação Matemática, 1989.
- HAREL, G.** – *Applying the Principle of Multiple Embodiments in Teaching Linear Algebra: Aspects of Familiarity and Mode of Representation.* *School Science and Mathematics* – Vol. 89 (1), 1989.
- HILLEL, J. e SIERPINSKA, A .** – *On one persistent mistake in linear algebra.* In *Proceedings of the 18th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, July 1994, Lisbon, Portugal, vol. III, pp. 65-72, 1994.
- KILPATRICK, J.** – *Research on mathematical learning and thinking in the United States.* *Recherches des de Didactique Mathématiques*, vol. 2, n° 3, pp. 363-379, 1981.

- NISS, M.** – *Aspects of the nature and state of research in Mathematics Education.* Educational Studies in Mathematics, nº 40, pp. 1-24, 1999.
- PAIVA, M. A. V.** – *Concepções do ensino de Geometria: Um estudo a partir da prática docente* – tese de doutorado, 1999.
- ROBERT, A.** – *Contribution à l'étude de l'enseignement à l'université des premiers concepts d'algèbre linéaire. Approches historique et didactique* - Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 10, pp. 368 - 373, 1990.
- ROGALSKI, M.** – *Un enseignement de l'algèbre linéaire en DEUG A première année.* Cahier de Didactique des Mathématiques nº 53, IREM de Paris VII, 1991.
- SIERPINSKA, A. et al.** – *Evaluation of a teaching design in Linear Algebra: The case of linear transformations* – Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 19, nº1, pp. 7 - 40, 1999.
- SILVA, A. MELCHIADES da** – *Uma Análise da Produção de Significados para a Noção de Base em Álgebra Linear*. USU-RJ, dissertação de mestrado, 1997.
- SILVA, RUTE H. da** – *Álgebra Linear - Procurando Atender as Expectativas de um Curso de Computação*. Artigo publicado nos Anais do VI ENEM - CO 267, 1998.
- _____. *Álgebra Linear como curso de serviço para a Computação*. Tese de Mestrado - UNESP - Rio Claro, 1999.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALIBERT, D. e THOMAS, M. – *Research on Mathematical proof*, in D. Tall (ed.) chapter 13, pp. 215-230, 1991.

ALMOULOUD, S. Ag - *L'ordinateur, Outil d'aide à l'apport de la démonstration et de traitement de données didactiques*. Thèse de l'Université de Rennes I, IRMAR, 1992.

_____. *Aide logicielle à la résolution de problèmes avec preuve: des séquences didactiques pour l'enseignement de la démonstration*. RDM, Vol 12, n° 23, 1992.

_____. *DEFI: outil informatique de révélation du rôle de la figure et d'apprentissage de la démonstration au collège*. REPERES – IREM n. 9, pp. 35-60, 1992.

ARSAC, G. - *L'origine de la démonstration: essai d'Épistémologie didactique*. Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol 8, n. 3, p. 267-312, La Pensée Sauvage Grenoble, 1987.

_____. *Les recherches actuelles sur l'apprentissage de la démonstration et les phénomènes de validation en France*. Recherches en didactique des Mathématiques, Vol.9, n°3, p.247-280, La Pensée Sauvage Grenoble, 1988.

BACHELARD, G. - *La formation de l'esprit scientifique*. 12^{ème} édition, Vrin, Paris, 1983.

BALLACHEFF, N. - *Preuve et démonstration en mathématiques au collège*. Recherches en didactique des Mathématiques. Vol 3, n°3, p.261-304, La Pensée Sauvage Grenoble, 1982.

_____. *Processus de preuve et situations de validation*. Educational Studies in Mathematics, vol.18, n.2, Mai 1977, p.147-176, 1987.

_____. *Une étude des processus de preuve en mathématiques chez des élèves de collège*. Thèse d'état, Grenoble: Université Joseph Fourier, 1988.

BALACHEFF, N. e KAPUT, J. – *Computer-based learning environments in mathematics*, in A. Bishop et al. (eds.), Chapter 13, pp. 469-501, 1996.

BALDINO, R. R. – *Assimilação Solidária Onze Anos Depois* – Rio Claro: Grupo de Pesquisa-Ação em Educação Matemática – GPA, 1994.

_____. *Como integrar Disciplinas sob o Ponto de Vista Epistemológico* – Anais do Encontro Setorial dos Cursos de Graduação da UNESP, Rio Claro – Águas de Lindóia, 1995.

_____. *Assimilação Solidária: escola, mais-valia e consciência cínica* – Educação em Foco, Universidade Federal de Juiz de Fora, MG. Vo. 3, nº1, Mar-Ago, pp. 39-65, 1998.

BARBIN, E. - *La démonstration mathématique: significations épistémologiques et questions didactiques*. Bulletin de l'APMEP, n.366, 1988.

BIRKHOFF, G. e MACLANE, S. - *A survey of modern algebra*. Ed. rev. New York: Macmilan Company, 1953.

BISHOP, A. – *Mathematical Enculturation. A Cultural Perspective on Mathematics Education*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 1998.

BROUSSEAU, G. – *Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques*. *Researches en Didactiques des Mathématiques*, v.7, nº2, pp. 33-115, Grenoble, 1986.

CAVEING, M. - *La constitution du type mathématique de l'idéalité dans la pensée grecque*. Thèse, Université Paris 10, Atelier national de reproduction des thèses, Université Lille 3, 1977.

COBB, P. and BAUERSFELD, H. – *The Emergence of Mathematical Meaning: Interaction in Classroom Cultures*, Lawrence Erlbaum, Hillsdale, NJ, 1995.

DORIER, J. L. - *Première approches pour l'étude de l'enseignement de l'algèbre linéaire à l'Université* – *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, IREM de Strasbourg, pp. 95 - 123, 1993a.

_____. *Emergence du concept de rang dans l'étude des systèmes d'équations linéaires*. *Cahier du Séminaire d'Histoire des Mathématiques*, 2ème série, vol. 3, pp. 159-190, 1993b.

DOUADY, R. – *Jeux des cadres et dialectique outil-objet*. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, VII, V. 72, pp. 5-31, Grenoble, 1984.

_____. *Toll, object, setting, window* . In A. Bishop et al. (eds.), 1991, pp. 109-130, 1991.

_____. *Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement* – *Repères* – IREM n°6, Topiques Editions, Janvier, 1992.

_____. *L'ingénierie didactique: un moyen pour l'enseignant d'organiser les rapports entre l'enseignement et l'apprentissage*. *Cahier de DIDIREM*. Paris, Université Paris VII, p. 191, 1993.

DUBINSKY, E. – *Reflective abstraction in Advanced Mathematical Thinking*. In D.O Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer: Dordrecht, pp. 95-123, 1991.

DUVAL, R. – *Registres de représentation sémiotique et fonctionnements cognitifs de la pensée*. *Annales de didactique et Sciences Cognitives*, vol. 5, IREM-ULP, Strasbourg, pp. 37-65, 1993.

_____. *Sémiosis et pensée humaine – Registres sémiotiques et apprentissage intellectuel*. Bern: Peter Lang, p. 395, 1995.

DUVAL, R. & EGRET, M. - *Comment une classe de quatrième a pris conscience de ce qu'est une démarche de démonstration.* Annales de Didactique et de Sciences Cognitives., Vol.2, p. 41-64, IREM de Strasbourg, 1989.

_____. *L'organisation deductive du discours. Interaction entre Structure de surface dans l'accès à la démonstration.* Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. Vol.2, IREM de Strasbourg., 1989.

ELLERTON, N. e CLARKSON, P. – *Language factors in mathematics teaching and learning.* In A. Bishop et al. (eds), 1996, Chapter 26, pp. 987-1033, 1996.

FISCHBEIN, E. – *Tacit models and mathematics reasoning,* For the learning of Mathematics 9(2), pp. 9-14, 1989.

GONÇALVES, A. - *Introdução à Álgebra Linear.* São Paulo: Edgard Blücher, 1977.

GOUVÊA, F. - *Aprendendo e ensinando geometria com a demonstração: uma contribuição para a pratica pedagógica do professor de matemática do ensino fundamental.* Dissertação de Mestrado, PUC-SP, 1998.

HANNA, G. e JAHNKE, H. N. – *Proof and proving.* In A. Bishop et al. (eds.), Chapter 23, pp. 887-908, 1996.

HAREL, G. – *Using geometric models and vector arithmetic to teach high-school students basic motions in linear algebra.* International Journal Mathematics Education, Science and Technology , vol. 21, nº 3, pp. 387- 392, 1990.

HEID, K. – *The technological revolution and the reform of school mathematics.* American Journal of Education 106(1), pp. 5-61, 1997.

HIEBERT, J. e CARPENTER, T. – *Learning and teaching with understanding*. In D. Grouws (ed.), pp. 65-97, 1992.

HOUDEBINE, J. - *Démontrer ou ne démontrer, voilà la question*. Repères - IREM, n. 1 ,p.5-27, Topiques Editions, 1990.

JACKSON, P. W. – *Live in Classrooms*. Holt Rinehart e Winston, New York, 1968.

JANVIER, C. (ed.) – *Problems of Representations in the Teaching and Learning of Mathematics*. Lawrence Erlbaum, Hillsdale, NJ, 1985.

LAY, D. C. – *Introduction to linear algebra and its applications*. Reading, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Massachusetts, 1994.

LEDER, G. (ed.) – *Assessment and Learning of Mathematics*. Australian Council for Educational Research, Hawthorn, VIC, 1992.

LEHMAN, E. – *Mathématiques pour l'étudiant de première année 1 et 2*. Belin, Paris, 1984.

LINS, R. C. – *A framework for understanding what algebraic thinking is* – Nottingham, PHD thesis University of Nottingham (Doctorate in Mathematics Education), 1992.

_____. *Epistemologia, história e Educação Matemática: tornando sólida as bases da pesquisa*. Revista da SBEM-SP, Campinas, pp. 75-91, setembro, 1993.

LIPSCHUTZ, S. – *Álgebra Linear* – Trad. R. R. Baldino – Rio de Janeiro: Editora McGraw-Hill do Brasil, LTDA, 1971.

MONTEJUNAS, P. R. – *A evolução do ensino da Matemática no Brasil*. In: Inovação Educacional no Brasil. São Paulo: Cortez, 1980.

- MULLER, Jean-Pierre** - *La démonstration en géométrie: en quatrième et en troisième.* REPERES-IREM n.15,avril,Topique Editions, 1994.
- NISS, M.** – *Investigations into Assessment in Mathematics Education – An ICMI Study*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 1993a.
- _____. *Cases of Assessment in Mathematics Education – An ICMI Study*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 1993b.
- _____. *Goals of mathematics teaching.* In A. Bishop et al. (eds), Chapter 1, pp. 11-47, 1996.
- NUNES, T., SCHLIEMANN, A.D., e CARRAHER, D.W.** – *Street Mathematics and School Mathematics.* Cambridge University Press, New York, NY, 1993.
- OULLET, G.** – *Algèbre linéaire, vecteurs et géométrie.* Éditions Le Griffon d'Argile, Sainte-Foy, Québec, 1994.
- PEHKONEN, E. e TÖRNER, G.** – *Mathematical beliefs and different aspects of their meaning.* Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 28(4), pp. 101-108, 1996.
- PIMM, D.** – *Speaking Mathematically: Communication in Mathematics Classrooms* Routledge and Paul Kegan. London, 1987.
- PAVLOPOULOU, K.** – *Propédeutique de l'algèbre linéaire: la coordination des registres de représentation sémiotique.* Thèse de Doctorat, Strasbourg: Université Louis Pasteur, p. 241, 1994.
- PIAGET, J.; GARCIA, R.** – *Psychogenesis and the history of science.* New York: Columbia University Press, 1989.

- ROBERT, A.** – *L'Acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'Enseignement Supérieur*. Recherches en Didactiques des Mathématiques 3(3), pp. 307-341, 1982.
- ROBERT, A. e ROBINET J.** – *Quelques résultats sur l'apprentissage de l'algèbre linéaire em première année de DEUG* . Cahier de Didactique des Mathématiques n°53, Paris: IREM de Paris VII, 1989.
- ROGALSKI, M.** – *Pourquoi un tel échec de l'enseignement de l'algèbre linéaire?*. In Commission inter-IREM université (ed.), Enseigner autrement les mathématiques en DEUG Première Année, 279-291, Lyon: IREM, 1990.
- RUTHVEN, K.** – *Calculators in the mathematics curriculum: the scope of personal computational technology*. In A. Bishop et al. (eds.), 1996, Chapter 12, pp. 435-468, 1996.
- SCHOENFELD, A.** – *Beyond the purely cognitive: belief systems, social cognitions, and metacognitions as driving forces in intellectual performance*. Cognitive Science 7(4), pp. 329-363, 1983.
- SFARD, A.** – *On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin*. Educational Studies in Mathematics 22(1), pp. 1-36, 1991.
- SFARD, A. e LINCHEVSKI, L.** – *The gains and pitfalls of reitification – the case of algebra*. Educational Studies in Mathematics 26(3), pp.191-228, 1994.
- SIERPINSKA, A.** – *Understanding in Mathematics*. The Falmer Press, London, 1994.
- STEINBRUCH, A. E WINTERLE, P.** – *Álgebra Linear*. 2ed. São Paulo: Mcgraw-Hill, 1987.

- TALL, D. e VINNER, S.** – *Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity.* Educational Studies in Mathematics 12(2), pp. 151-169, 1981.
- TALL, D.** – *The transition to advanced mathematical thinking: functions, limits, infinity, and proof.* In D. Grouws (ed.), pp. 495-511, 1992.
- VERGNAUD, G.** – *La théorie des champs conceptuels.* Recherches en Didactiques des Mathématiques 10(2/3), pp.133-170, 1990.
- VINNER, S. e DREYFUS, T.** – *Images and definitions for the concepts of functions.* Journal for Research in Mathematics Educations 20(4), pp. 356-366, 1989.
- VINNER, S.** – *The role of definitions in teaching and learning.* In D. Tall (ed.), Chapter 5, pp. 65-81, 1991.
- WILCOX, S. K.** – *Condictions of a Curriculum Reform: the limits of Instrumental ideology on Mathematics Education in an urban destrict.* Dissertation for the degree of Doctor of Philosophy . Michigan State University, Departament of Teacher Education, Michigan. USA, 1989.
- WITTMANN, E.** – *Mathematics education as a “Design Science”* Educational Studies in Mathematics 29(4), p. 355, 1995.

ANEXO

Citações no idioma original

[**NOTA 1** - *“Il est vrai que ce dernier cours représente une part généralement plus importante de l’enseignement de mathématiques en début d’université scientifique, mais l’algèbre lineaire est reconnue comme tout à fait fondamentale par la quasi totalité des mathématiciens ainsi que par la plupart des autres scientifiques qui utilisent des mathématiques. Par ailleurs, les difficultés des étudiants en algèbre linéaire semblent tout aussi importantes et visibles qu’est en analyse”.*]

[**NOTA 2** – *“In former times, say thirty-forty years ago, the situation was more or less the following (in condensed and simplistic terms). University students of mathematical topics were expected to assume all responsibility for their own studies and for their success or failure. Students who passed the exams had ‘it’ (i.e. necessary prerequisites, mathematical talent, and diligence), and those who failed lacked ‘it’, and apart from working hard there wasn’t much one could do about that. Universities mainly had to pay attention to the former category, except that they also had a task in identifying members of the latter at an early stage and in pointing the exit from mathematics out to them. This implied that lecturers of mathematics could concentrate on the delivery of their teaching, whereas the individual student’s learning of what was taught was not the business of the lecturers but entirely of the student him/herself ”.*]

[NOTA 3 – “[...] to be specify and characterise desirable or satisfactory learning of mathematics, including the mathematical competencies we should like to see different categories of individuals possessing”.]

[NOTA 4 – “The concept images are generated by previous notions and experiences as well as by the examples against which the concept definitions have been tested. Several attempts have been made to construct general theoretical frameworks to elucidate these findings. One notable example is Vergnaud’s notion of ‘conceptual field’ (Vergnaud, 1990) [...] The danger of forming too restricted images of general concepts seems to be particularly manifest in domains – such as arithmetic, calculus, linear algebra, statistics [...] In such domains, algorithmic manipulations – procedures – tend to attract the main part of students’ attention so as to create a ‘concept filter’: Only those instances (and aspects) of a general concept that are digestible by and relevant in the context of the ‘calculus’ are preserved in students’ minds. In severe cases an over-emphasis in instruction on procedures may even prevent students from developing further understanding of the concepts they experience through manipulations only (Hiebert and Carpenter, 1992).”]

[NOTA 5 – “There is no automatic transfer from a solid knowledge of mathematical theory to the ability to solve non-routine mathematical problems, or the ability to apply mathematics and perform mathematical modeling in complex, extra-mathematical contexts [...] For this to happen both problem solving and modeling have to be made object of explicit teaching and learning ...”]

[**NOTA 6** – *“Many of the assessment modes and instruments in current use in mathematics education fail to provide valid insight into what students know, understand, and can achieve, in particular as far as higher order knowledge, insight and ability are concerned.”*]

[**NOTA 7** – *“... like all educational research, research in mathematics education has a political function...”*]

[**NOTA 8** – *“A study ought to be designed to accomplish some well-defined purpose, using techniques that others might follow and allowing for the cross-validation of findings. The report of a rigorous study should contain a clear indication of the assumptions made, both at the beginning and at the end of the study. The researcher should specify the questions under investigation, lay out the evidence pertaining to each question, suggest some plausible alternative explanations for the findings, and suggest, if possible, which alternatives are most likely and which are least likely. The report of the study should contain as much detail about the procedures used and the information gathered as space will permit, and, if possible, the interested reader should be given the opportunity to obtain additional details elsewhere.”*]

[**NOTA 9** – *“A significant study gives us new insight into what we are about, whether that is teaching or research [...] a significant research study is embedded in a network of theoretical constructs, it resonates beyond the specifics of times and circumstance.”*]

[**NOTA 10** – *“Although the profession of mathematics education seems to have convinced itself that problem solving is important, little has been done to clarify what the term means in different contexts,. It is not clear that the public, mathematics*

teachers, and researchers in mathematics educations are referring to the same thing when they applaud a greater emphasis on problem solving in school mathematics. Researchers argue that more studies are needed to understand how children solve mathematical problems...”]

[NOTA 11- *“No theorist has arisen within US mathematics education to offer a framework within which research on mathematical problem solving might be conducted. Researchers sometimes invoke the name of Polya in support of their work, but although Polya has written many worthy pages about problem solving, he does not claim to have developed a psychology of the topic, and he has outlined only a sketchy theoretical view of how it might be taught in the mathematics classroom.”]*

[NOTA 13 – *“[...] la difficulté de conversion n’est pas identique dans un sens et dans l’autre.”]*

[NOTA 14 – *“Pour ces auteurs, comprendre l’algèbre linéaire demande que les étudiants commencent à penser sur les objets et les opérateurs de l’algèbre non pas en termes de relations entre des matrices, des vecteurs ou des opérateurs particuliers, mais en termes de structures entières d’objets tels que: des espaces vectoriels sur des corps, des algèbres, et des classes d’opérateurs linéaires, qui peuvent être transformés, représentés de différentes manières, et considérés comme étant ou non isomorphes”.]*

[NOTA 15 – *“...le langage de la théorie générale (espace vectoriel, sous-espace, dimension, opérateurs, noyau, etc.) dénommé langage abstrait ; le langage de la théorie plus spécifique de \mathfrak{R}^n (n-uplet, matrice, rang, solutions d’un système*

d'équations, etc.) dénommé langage algébrique; le langage géométrique de l'espace à deux ou trois dimensions (vecteur géométrique, points, droites, plans, et transformations géométriques) dénommé langage géométrique.”]

[NOTA 18 – *“Ces distinguent trois modes de raisonnement (ou pensée) l'ouvre conjointement en algèbre linéaire: ils les qualifient de synthétique-géométrique, analytique-arithmétique et analytique-structurel. Selon eux, l'algèbre linéaire peut être vue comme le résultat d'un dépassement de deux obstacles ou de deux positions dogmatiques: l'une refusant aux nombres le droit d'entrer dans la géométrie, et autre refusant à l'intuition géométrique le droit d'intervenir dans le domaine pur de l'arithmétique”.*]

[NOTA 19 – *“...chacun des trois modes de pensée en algèbre linéaire utilise un système spécifique de représentations.”]*

[NOTA 20 – *“En principe, les arguments synthétiques-géométriques n'appartiennent pas à l'algèbre linéaire proprement dite. Mais ils sont utilisés comme des outils heuristiques, et, dans l'enseignement, parce qu'ils permettent une visualisation, une plus grande brièveté de l'argument, ou un accès à “l'essence” d'un énoncé.”]*

[NOTA 24 – *“.... travers l'interrogation écrite de l'année 1992/93, Qui porte sur un sujet semblable à celles de 1990/91 et 1991/92, les performances construites par les étudiants par rapport aux notions centrales de l'enseignement, c'est à dire les notions d'indépendance linéaire et de rang dans R^n et le lien entre implicite et paramétrique. [...] travers ces notions centrales quelle utilisation de la méthode de Gauss est faite?*

Et encore quelle articulation est faire entre la méthode de Gauus comme techniqe et notions d'algèbre linéaire (en particulier les notions de sous-espace engendré, de système d'équations linéaires (confusions possibles), de dimension d'un sous-espace engendré)?”]

[NOTA 25 - *“Our evaluation was focused on the central notion of the experimental teaching: the rank notion” (Dias, 1995: p.37)]*

[NOTA 28 – *“...faible sensibilité aux questions d'articulation Qui apparaissent souvent de façon implicite et sint très rarement travaillées en tant que tells.”]*

[NOTA 29 – *“...s'organise autour de deux pôles: d'une part celui technique de la résolution des systèmes linéaires, d'autre part celui théorique de la dualité. Mais l'organisation entre cadres est rarement prise en charge. Suivant les ouvrages, c'est un pôle ou l'autre Qui domine et la technologie présente est relative à ce pôle.”]*

[NOTA 30 – *“... difficultés résistantes rencontrées par les étudiants dans l'elaborations d'un rapport personnel efficace et flexible aux deux points de vue considérés.[...] majoritairement des difficultés qui mettent ... l'articulation [...] que les étudiants se trouvent en situation de blocage ou qu'ils produisent des résultats incohérents avec ceux liés à l'articulation. “[*

[NOTA 32– *“Pour ce qui touche aux évolutions individuelles de étudiants notre appréciation du problème a pu s'éclaircir . Nous cernons mieux en particulier certains types de comportements, mais aussi il nous est plus facile de “prevoir” avec assez de certitude, sur des tâches précises, les procédures qui ont le plus de chance d'être*

mises en oeuvre par les étudiants, en fonction de leurs connaissances antérieures. Ce point reste bien sûr encore flou, cependant cette analyse, doublée d'une réflexion épistémologique et didactique, peut permettre, à petite échelle, d'espérer mieux contrôler les effets d'un enseignement.”]

[NOTA 33 – *“The obstacle of formalism makes students produce a discourse that has the external form of the discourse used by the teacher or the textbook. In order to be efficient as students, they developed automatic behaviors.”]*

[NOTA 34 – *“... confusion between categories of mathematical objects, for example, [...] transformations as vectors, relations as equations, vectors as numbers.”]*

[NOTA 35 – *“Here is the well-known paradox of the use of so-called “visual aids” in the teaching of mathematics: The interpretation of the way in which visual aids represent mathematical objects requires the very knowledge that they are, in fact, supposed to help the students construct. If the students do not possess this knowledge, the visual representations are mathematically meaningless for them and hence they cannot be regarded as “aids”, and if the students already possess this knowledge, they do not need the “aids”. In either case, the assumed “aids” are not aids and can be disposed of”.*]

[NOTA 36 – *“In North America at least two trends in the reforming of linear algebra courses are apparent in the textbooks and materials. In one of them, the main idea is to illustrate the abstract mathematical ideas by applications (e.g. Lay, 1994). In the*

other, vector geometry is regarded as a source of intuitive meaning for the basic linear concepts (e.g. Oullet, 1994). Most of the reform proposals make use of computer technology, especially of Computer Algebra Systems. The software is used mainly as a tool to do mathematics and not so much as a pedagogical aid.”]