Gisela Hernandes Gomes

UM ESTUDO DE ÁREAS COM ALUNOS DA 6ª SÉRIE DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de MESTRE em **Educação Matemática**, sob a orientação da Professora Doutora **Maria Cristina S. de A. Maranhão**

PUC/SP
São Paulo
2000

Banca examinadora

AGRADECIMENTOS

A Deus, que em sua infinita sabedoria, nos mostra que os caminhos mais difíceis são os mais férteis para nosso aprimoramento espiritual.

À Professora Doutora Maria Cristina S. de A. Maranhão, pela dedicação, competência e entusiasmo com que me orientou.

À Professora Doutora Regina Maria Pavanello e ao Professor Doutor Benedito Antônio da Silva, que aceitaram fazer parte da banca examinadora e colaboraram com importantes sugestões.

A todos os professores, funcionários e colegas do curso de Pós-graduação em Educação Matemática da PUC-SP, pelo estímulo e apoio oferecidos de diversas maneiras.

Em especial, às colegas Elizabeth Soares, Mônica Mesquita e Silvia Sentelhas, que colaboraram como observadoras durante as sessões.

A Gerson Ferracini pelo apoio durante a edição e revisão de meu trabalho.

À direção, aos professores e alunos da Escola Vivência, que muito atenciosamente nos recebeu para a realização desta pesquisa.

À CAPES, pela bolsa de estudos que me permitiu maior dedicação ao programa de Pós-graduação.

Aos meus pais, amigos e em especial ao meu marido, Altino, pela paciência, compreensão e incentivo nas horas mais complicadas dessa etapa de nossas vidas.

RESUMO

Esta pesquisa teve por objetivo estudar a evolução de conhecimentos alcançada por alunos da 6ª série do ensino fundamental a respeito do conceito de área ao se aplicar uma seqüência didática elaborada à luz do quadro teórico de Douady. Diversas pesquisas apontam dificuldades de alunos na aprendizagem desse conceito, fornecendo, além disso, explicações para essas dificuldades. Em nossa pesquisa, em vez de focarmos as dificuldades que os alunos pudessem apresentar durante a realização da seqüência, visamos analisar a evolução de seus conhecimentos por meio de uma intervenção didática concebida segundo as fases da dialética ferramenta objeto. Seguindo essas fases, procedemos a diversas verificações de aprendizagem, nas quais utilizamos certas fases da noção de interação entre domínios para a análise das produções desses alunos. Tais análises nos serviram para a seleção de discussões importantes a conduzir nas sessões seguintes, tendo em vista a progressão da seqüência. Os resultados obtidos permitiram concluir que o recurso às fases da dialética ferramenta–objeto possibilitou progresso de conhecimentos aos alunos.

ABSTRACT

The purpose of this work was to investigate whether students of the 6th grade could evolve in their knowledge of the area concept during the delivery of a didactic intervention designed in the light of the theoretical framework of Douady. Several previous investigations had already pointed out and tried to explain the difficulties students face during the acquisition of that concept. In the present work, instead of focusing on the difficulties themselves, we sought to analyze the knowledge evolution that students could attain while exposed to a teaching sequence that took into account the phases of the tool–object dialectic.

In the course of this intervention, phases of the notion of domain interaction where used to keep track of improvements in the students' outputs. Assessment of each session enabled us to select topics to be discussed in the subsequent ones, and led to adjustments to the original sequence. Results showed the phases of the tool–object dialectic to constitute an effective resource for promoting progress among students in their knowledge of the area concept.

Índice

INTRODUÇÃO

Este trabalho se originou de observações e indagações vivenciadas ao longo de nossa experiência no ensino de Matemática para alunos do nível médio, particularmente quanto à evidente dificuldade apresentada por esses alunos ao lidar com o conceito de área. Freqüentemente, a possibilidade de compreensão desse conceito — tal como ocorre com outros da Matemática, que teriam grande aplicação em situações da vida cotidiana — é limitada ou prejudicada por sua introdução através de aulas expositivas em que se apresentam fórmulas de cálculo como instrumentos para pronta aplicação.

Alguns dos elementos mais decisivos para a pesquisa relativa a esse problema foram encontrados na leitura de trabalhos realizados sobre esse tema por pesquisadores da área de Educação Matemática que voltaram sua atenção ao ensino da Geometria, como é o caso de Douady e Perrin-Glorian (1984 e 1985). Nosso trabalho também se orientou numa pesquisa de Nunes, Light e Mason (1993), num documento do Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (SARESP) e nos Parâmetros Curriculares Nacionais.

Nosso interesse se voltou para a elaboração e aplicação de uma seqüência de ensino–aprendizagem a alunos do terceiro ciclo do ensino fundamental, em especial os da 6ª série. Esse interesse foi duplo:

quisemos diagnosticar os procedimentos utilizados por esses alunos para a obtenção de retângulos de área dada antes de terem contato com o cálculo de áreas através da aplicação de fórmulas; além disso, propusemo-nos a verificar se eles poderiam progredir em conhecimentos relativos ao conceito de área — que podem ser colocados em jogo em situações de obtenção de retângulos de área dada, usando papel quadriculado — ao seguirem essa seqüência.

No primeiro capítulo, apresenta-se a problemática deste trabalho, destacando as pesquisas que nos esclareceram a direção em que deveríamos encaminhar nossa investigação, bem como os quadros teóricos didático e matemático adotados nessa dissertação e as escolhas metodológicas.

Nosso quadro teórico tem embasamento nas fases da dialética ferramenta–objeto e na interação entre domínios de Douady.

No Capítulo 2, expõe-se a elaboração da seqüência e descrevem-se as modificações nela introduzidas, tanto as decorrentes da entrevista com a equipe da escola quanto as advindas do desempenho dos alunos no decorrer da aplicação.

No Capítulo 3, são apresentas as sessões com os problemas desenvolvidos pelos alunos, seguidas das fases de *explicitação*, *institucionalização* **e** *validação*. **Paralelamente a cada sessão, analisam-**

se as produções dos alunos de acordo com o quadro teórico adotado.

No capítulo 4, apresentam-se as conclusões finais da dissertação e uma avaliação da seqüência aplicada.

1 PROBLEMÁTICA

1.1 O problema e as questões

Nosso trabalho na rede particular de São Paulo — desde 1989 como professora de Matemática no Ensino Médio numa grande escola e desde 1993 em cursinho pré-vestibular — permitiu-nos observar que os alunos freqüentemente encontravam dificuldades no estudo de Geometria, principalmente ao lidarem com questões que abordavam o *conceito de área*. Nessas ocasiões, apesar de conhecerem as fórmulas de cálculo para algumas figuras, não conseguiam alcançar soluções para muitos dos problemas propostos.

No início da década de 90, nosso trabalho no Ensino Médio passou a envolver uma grande carga horária destinada a aulas de Geometria. Nesse estabelecimento, os alunos do 2º ano do Ensino Médio recebiam apostilas que cobriam todo o conteúdo de Geometria Plana e Espacial a ser desenvolvido ao longo do ano letivo. Pudemos ali perceber que as dificuldades que esses alunos encontravam nas situações propostas nas apostilas se acumulavam, tornando-se cada vez mais freqüentes. Em particular, suas dificuldades em trabalhar com *decomposição e composição de figuras* eram evidentes.

Essa constatação despertou nosso interesse pelo estudo desse fenômeno. Tivemos contato, assim, com algumas pesquisas e alguns documentos que apontavam não apenas dificuldades muito semelhantes às que encontráramos na experiência docente, mas também caminhos para a pesquisa de meios de superação de muitas delas. Era o que buscávamos. Dentre as pesquisas, mencionamos como mais decisivas as de Douady e Perrin-Glorian (1984 e 1985) e de Nunes, Light e Mason (1993) e, dentre os documentos, o do SARESP[1] e os Parâmetros Curriculares Nacionais.

Encontramos também pesquisas nacionais sobre o mesmo tema, que igualmente tomavam como base as de Douady e Perrin-Glorian, mas que focavam aspectos diferentes dos que pretendíamos estudar. Eram voltadas ou para a formação de professores (Franchi, 1992) ou para aspectos como a superação da confusão, apontada por Douady e Perrin-Glorian, que alunos costumam fazer entre perímetro e área, ou entre termos como *superfície* e *área* (Santos, 1999).

DOUADY E PERRIN-GLORIAN

Douady e Perrin-Glorian pesquisaram a construção do conceito de área entre alunos franceses com idades correspondentes aos da 4ª série[2] e 5ª série[3] do ensino fundamental no Brasil.

Num dos estudos, Douady e Perrin-Glorian (1985) detectaram

---

[1] Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo.
[2] Chamado *Cours Moyen (CM2)* na França.
[3] Chamado *6ème* na França.

que os alunos evoluíam em seu conhecimento a respeito de área por meio de intervenções didáticas que colocassem em jogo *obtenção (desenho) de figuras de área determinada em papel quadriculado*, **num quadro teórico didático que proporcionasse a esses alunos não só a produção de figuras, mas também a discussão de suas produções com a classe e o professor (grupo-classe), com a possibilidade de refazê-las caso necessário. Entre as dificuldades experimentadas pelos alunos incluía-se aquela criada pelas denominações usuais de área.**

Para estudarem a área de uma figura de 1 cm², os alunos usaram papel quadriculado com quadrados de $\frac{1}{4}$ cm². O problema que lhes foi proposto requeria que desenhassem algumas figuras com cada uma destas áreas: 1 cm², $\frac{1}{2}$ cm², $\frac{1}{4}$ cm² e 12 cm². Foi-lhes solicitado que as respostas para cada uma das três primeiras áreas incluíssem pelo menos um triângulo.

Relatam as autoras que, na atividade em que as figuras deveriam ter 1 cm² de área, buscaram relacionar a expressão *centímetro quadrado* **a uma unidade área, e não à representação de um quadrado de 1 cm de lado. Como evidenciaram elas:**

"1 centímetro quadrado" é com freqüência entendido pelas crianças como "um quadrado de 1 centímetro de lado". **(Douady e Perrin-Glorian, 1985, p.5)**

Observando as produções desses alunos, as pesquisadoras

verificaram que alguns interpretavam “um quadrado de $\frac{1}{2}$ cm de lado” como “$\frac{1}{2}$ centímetro quadrado”.

Num outro estudo (Douady e Perrin-Glorian, 1984), essas pesquisadoras fornecem exemplos de inúmeras intervenções didáticas empregadas para fazer progredir os conhecimentos relativos ao conceito de área entre alunos de idades equivalentes às daqueles de 4ª e 5ª séries do ensino fundamental no Brasil. Das situações por elas apontadas, que envolviam a obtenção de áreas pelo uso de diversos tipos de pavimento (triangulares ou quadriculados, entre outros), foram-nos de especial interesse as que envolviam o cálculo de diferentes áreas de uma mesma figura ao se adotarem diferentes unidades de medida de área em malha quadriculada.

Com base nessas pesquisas, propusemo-nos a investigar se alunos do terceiro ciclo, 6ª série, que já houvessem trabalhado em séries anteriores com o *cálculo de área de figuras já desenhadas*, utilizando diversos pavimentos, poderiam evoluir em seu conhecimento a respeito de área ao participarem de uma intervenção didática similar às dos estudos citados, nas seguintes situações:

1) Numa situação, solicitaríamos que *produzissem* (desenhassem) retângulos de área determinada em malha quadriculada, fornecendo-lhes como unidade de área um retângulo formado por quatro quadrados congruentes, cada

um com $\frac{1}{4}$ cm² de área. Nesse caso:

a) **que procedimentos esses alunos apresentariam ao desenhar retângulos de área determinada em malhas assim quadriculadas?**

b) **considerariam como unidade de área um retângulo formado por quatro quadrados congruentes, cada um com $\frac{1}{4}$ cm² de área, ou de alguma forma revelariam que consideravam apenas o quadrado de 1 cm² de área (ou o quadrado de 1 cm de lado) como unidade de área?**

c) **eles considerariam o quadrado de $\frac{1}{4}$ cm² de área como unidade de área, em vez do retângulo de 1 cm²?**

d) **produziriam** *retângulos não-congruentes de mesma área***? Em caso positivo, viriam a usar como unidade de área tanto um retângulo de 1 cm² de área como um quadrado de 1 cm² de área?**

e) **eles apenas fariam uso de contagens ou, em vez disso, utilizariam cálculos? Quais situações favoreceriam a utilização de contagem e quais favoreceriam o uso de cálculos?**

2) **Numa outra situação, solicitaríamos que obtivessem diferentes áreas de um retângulo, já desenhado em malha**

quadriculada, ao variarmos a unidade tomada como referência. Nesse caso:

a) a constatação de que um mesmo retângulo tem áreas diferentes, conforme se considere como unidade de área $\frac{1}{4}$ cm^2 ou $\frac{1}{2}$ cm^2 ou 1 cm^2, levaria os alunos a evoluir no cálculo de área de retângulos determinada respeitando uma unidade fornecida?

NUNES, LIGHT E MASON

Da pesquisa de Nunes, Light e Mason (1993), destacamos o estudo que fizeram sobre *a compreensão do conceito de área por crianças*. **Essa pesquisa foi realizada com 60 alunos de 9 e 10 anos de idade e 40 alunos de 8 anos de idade em duas escolas de Oxford, Inglaterra. A atividade consistia em comparar áreas de retângulos, e para isso as crianças tinham a sua disposição duas réguas, uma peça formada por dez tijolinhos colados em fila e vários tijolinhos soltos, objetos esses que poderiam ser usados livremente para obter as medidas de área. Os participantes também tinham a liberdade de utilizar lápis e papel, se assim quisessem. Segundo os autores** *todos os tijolinhos tinham área de 1 cm^2*. [4]

[4] Em inglês, *All bricks had the area of 1 cm^2*. O texto não especifica o material de confecção dessas peças, nem sua espessura. A leitura evidencia, porém, que as crianças poderiam usá-las para recobrir as figuras e, assim, contá-los, o que nos leva a deduzir que nesse tijolinho uma das faces tem 1 cm^2 de área.

O primeiro problema que os participantes do estudo tinham de resolver era o seguinte: duas crianças haviam pintado algumas paredes e tinham recebido algum dinheiro pelo serviço, mas, chegado o momento de dividirem esse dinheiro, elas queriam saber se mereciam ou não a mesma quantia pelo trabalho realizado. As paredes pintadas eram representadas por retângulos. Cabe dizer que, propositadamente, as medidas dos lados dos retângulos a serem comparados eram todas diferentes. De acordo com os autores, os alunos participantes do estudo acharam difícil chegar a uma conclusão apoiando-se apenas na observação dos retângulos que representavam essas paredes. Segundo esses autores:

> *comprimento e largura eram diferentes e a comparação perceptiva direta não era suficiente para uma decisão*. **(Nunes, Light e Mason, 1993, p. 48)**

Numa segunda tarefa, foram apresentados aos alunos dois problemas envolvendo comparações de áreas de retângulos que tinham as seguintes dimensões: 5 cm por 8 cm e 10 cm por 4 cm no primeiro problema, e 4 cm por 8 cm e 3 cm por 9 cm no segundo.

Ao se analisarem os tipos de respostas, constatou-se que na primeira tentativa de resolução do primeiro problema o número de alunos que usaram régua era quase o dobro dos que usaram tijolinhos (63,04% de uso de régua contra 36% de uso de tijolinhos). Para os pesquisadores, essa tendência poderia estar relacionada à idéia de que réguas são instrumentos de medida convencionais, e que tijolinhos não são usuais para esse fim. Chamou-nos a atenção, no entanto, o fato de que apenas 10,34% dos participantes que se utilizaram da régua forneceram resposta correta a esse primeiro problema, enquanto 94,11% dos que usaram tijolinhos forneceram respostas corretas.

Em outra tentativa de resolução do mesmo problema, o número de participantes que usaram régua diminuiu significativamente, passando a 30,43%, sendo que 21,42% destes responderam corretamente, enquanto os que utilizaram tijolinhos passaram a 69,56%, dos quais 93% ofereceram resposta correta.

De acordo com os autores, o sucesso no uso de tijolinhos nesse primeiro problema influenciou os alunos no desempenho do segundo. Na primeira tentativa de resolução deste, apenas um terço dos participantes usaram régua na primeira tentativa e, dentre estes, 63,63% a trocaram por tijolinhos ao constatarem que não conseguiam chegar a uma resposta. Essa mudança de ferramenta ajudou notadamente o desempenho das crianças na obtenção da resposta definitiva: 94% das respostas se revelaram corretas.

Segundo esses autores, metade das crianças entrevistadas nesse estudo *produziram suas próprias soluções multiplicativas para calcular a área, baseadas na estratégia 'número de tijolinhos de uma fila vezes número de filas'* (Nunes, Light e Mason, p. 54).

Uma hipótese levantada pelos pesquisadores a respeito do baixo sucesso com o uso de régua foi a de que as crianças obtiveram êxito com tijolinhos porque *podiam contar* quantos deles eram usados para cobrir a figura completamente, ou então quantos cobriam *uma fila* e *quantas filas* eram recobertas, enquanto o uso de régua requereria a compreensão de *relações multiplicativas* entre os números resultantes das medidas dos lados.

Essa pesquisa nos mostrou que alunos na faixa etária correspondente à do primeiro e segundo ciclos do ensino fundamental podem usar estratégias de contagem ou fazer uso da multiplicação. Isso vem ao encontro de nossa questão *e* 1 Em particular, queremos saber:

3) Alunos do terceiro ciclo, 6ª série, usariam a multiplicação naquela situação?

O SARESP

Em 1996 foi criado o Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (SARESP), tendo como finalidade a criação de um sistema que permitisse obter dados sobre o ensino avaliando o rendimento escolar dos alunos dos ensinos fundamental e médio[5].

---

5 Fonte: *Site* da Secretaria de Estado da Educação — SARESP: http://www.educacao.sp.gov.br/resultados/saresp/saresp00.htm.

O primeiro SARESP foi aplicado no ano de sua criação e avaliou todos os alunos da 3ª e da 7ª séries do ensino fundamental de todas as escolas da rede estadual. O Relatório Final dos resultados dessa primeira aplicação nos mostra que das 30 questões de Matemática da 7ª série, oferecidas tanto a alunos do período diurno como do noturno, 15 versavam sobre Geometria. Dentre estas, duas das direcionadas aos alunos do período diurno envolviam cálculo de área (questões 26 e 29), assim como três do período noturno (questões 26, 27 e 29).

A análise da questão 29 do período diurno[6] revela que os alunos *dominavam a fórmula do cálculo, mas quase metade deles experimentava dificuldade na solução de problemas que envolviam diferentes unidades de medida* (SARESP, 1996, p. 140). Por sua vez, a análise da questão 29 do período noturno[7] revelou que 72% dos alunos não estavam preparados para solucionar problemas com o nível de complexidade que essa questão apresentava, envolvendo *cálculo de áreas, transformação dos resultados obtidos de modo a expressá-los na mesma unidade de medida* e *cálculo do número de peças necessárias para completar determinada metragem* (SARESP, 1996, p. 160).

Esses resultados nos mostram que tanto alunos do período

---

[6] Questão 29, período diurno: A área de um terreno retangular é 840 m². Se esse terreno tem 2 400 cm de largura, qual é seu comprimento?

[7] Questão 29, período noturno: Uma sala retangular tem 2,6 m de largura e 4 m de comprimento. Quantos ladrilhos quadrados de 20 cm de lado serão necessários para cobrir o piso da sala?

diurno como do noturno não apresentaram conhecimentos suficientes para a resolução de problemas que envolviam conceito de área. Isso portanto nos dá indício de que, apesar de haver uma preocupação em avaliar o rendimento dos alunos em Geometria — uma vez que metade das questões versavam sobre esse assunto —, seu ensino não se revela satisfatório naquela época.

Pavanello (1989) já apontava um gradual abandono do ensino da Geometria nas décadas anteriores a sua pesquisa. Os resultados do SARESP, por sua vez, nos indicam que essa realidade parece ainda estar presente em nossas escolas, uma vez que o rendimento dos alunos nas questões analisadas se revelou marcado por certas deficiências.

Esse documento, aliado às constatações de Pavanello (1989), situa a relevância de nossa pesquisa, visto que ela envolve conhecimentos geométricos.

OS PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS DE MATEMÁTICA

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (MEC, 1998) trazem um enfoque didático envolvendo a tríade constituída por aluno, professor e saber matemático. Segundo essa concepção, em vez de apresentar definições e técnicas de cálculo, que simplesmente levariam o aluno à memorização de conteúdos, o professor passa a lhe fornecer elementos necessários para a reflexão e conclusão mediante

discussões.

Nesse documento, os conteúdos voltados ao Ensino Fundamental abrangem o estudo dos números e das operações (nos campos da Aritmética e da Álgebra), o estudo do espaço e das formas (no campo da Geometria) e os estudos das grandezas e das medidas (interligando os três campos).

Das orientações didáticas para o terceiro ciclo, destacamos a seguinte:

> ... *o trabalho com áreas deve apoiar-se em procedimentos que favoreçam a compreensão das noções envolvidas, como obter a área pela composição e decomposição de figuras cuja área eles já sabem calcular por procedimentos de contagem (papel quadriculado, ladrilhamento), por estimativas e aproximações.* **(MEC, 1998, p. 131)**

Por situar a utilização de procedimentos didáticos que estão de acordo com nossas questões de pesquisa no 3º ciclo do ensino fundamental, esse documento reforçou nossa escolha de desenvolver a pesquisa com alunos de 6ª série.

1.2. Quadro teórico didático

O referencial teórico que adotamos para a elaboração e aplicação da seqüência didática está apoiado em certos elementos das *fases da dialética ferramenta–objeto*[8] **desenvolvida por Douady (1984). Para as análises nos apoiamos também na noção de** *interação entre domínios*[9] **dessa pesquisadora. Segundo Maranhão (1999), esses elementos teóricos de Douady são instrumentos para a concepção, realização e análise de seqüências didáticas.**

No plano cognitivo, Douady acolhe a teoria da equilibração de Piaget. Segundo essa pesquisadora:

> *... na medida em que certos erros aparecem como um fator de desequilíbrio, compreende-se que eles possam ter um papel produtivo. Isso se produz sobretudo em situação coletiva, na qual existe a necessidade da validação. De fato, para explicar e rejeitar os erros, se é levado a construir argumentos para convencer (reequilíbrio)*. **(Douady, 1984, p. 6)**

A reequilibração apontada por Douady:

> *corresponde à aquisição de novos conceitos implicados na dialética ferramenta–objeto.* **(Douady, 1984, p. 1)**

---

[8] **Em francês,** *dialectique outil–objet*.
[9] **Em francês,** *jeux de cadre.*

De acordo com Douady, a dialética ferramenta–objeto permite o desenvolvimento de uma aprendizagem significativa de Matemática por propiciar o jogo de desequilíbrio e reequilíbrio nos alunos.

Segundo essa pesquisadora, convém distinguir, em um conceito matemático, sua característica *ferramenta* **de sua característica** *objeto***. Entende-se por** *ferramenta* **o uso de um conceito matemático nos diversos problemas que ele permite resolver. Um conceito alcança significado por sua característica de** *ferramenta.* **Entretanto, de acordo com a pesquisadora:**

> *essa característica põe em jogo as relações que ele mantém com os outros conceitos implicados no mesmo problema. Em outras palavras, do ponto de vista ferramenta não se pode falar de um conceito, mas de uma rede de conceitos gravitando, eventualmente, em torno de um conceito principal. Assim, a aprendizagem deverá levar em conta tal conjunto.* **(Douady, 1984, p. 10)**

Por *objeto***, entende-se o conceito matemático considerado como objeto cultural, tomando seu lugar num edifício mais amplo, socialmente reconhecido.**

Em atividades matemáticas, ao resolvermos um problema, podemos considerá-lo resolvido se pudermos fundamentar suas explicações conforme um sistema de validação próprio dos

matemáticos. Nessa tentativa, criamos conceitos que exercem o papel de ferramentas que servirão à resolução do problema. Quando passamos esse conceito para a comunidade científica e o descontextualizamos de modo que possa ser reutilizado, tornamo-lo um objeto do saber.

1.2.1 Dialética ferramenta–objeto

Douady chama de *dialética ferramenta–objeto* **ao processo de resolução de problemas no qual se distinguem certas fases:**

- **Fase 1 —** *Antigo*

Nessa primeira fase, os alunos *mobilizam conhecimentos antigos, que funcionam como ferramentas para resolver, ao menos em parte, seu problema*.

- **Fase 2 —** *Pesquisa*

Aqui, os alunos *encontram dificuldades para resolver o problema por completo, e novas questões acabam sendo colocadas em jogo. Essas novas questões levam os alunos a procurar novos meios para a resolução do problema*.

- **Fase 3 —** *Explicitação*

Na terceira fase, os alunos *expõem os trabalhos realizados, as dificuldades e os resultados obtidos, sendo as produções discutidas coletivamente com a classe.*

Essa explicitação possibilita ao professor criar debates sobre os conhecimentos antigos, que estão sendo mobilizados, e sobre os novos, que estão sendo gerados implicitamente, sem que se crie uma situação de bloqueio. Esses debates servem para validar alguns conhecimentos produzidos nesta fase, e permitem aos alunos reconhecer procedimentos corretos ou refletir sobre procedimentos incorretos.

- **Fase 4 —** *Institucionalização*

Institucionalizam-se os novos conhecimentos no grupo-classe como objetos de saber matemático.

Aqui, o professor ressalta os conhecimentos que devem ser retidos e explicita as convenções em uso.

Trata-se de um meio de constituição de um saber da classe. Para cada aluno, constitui uma maneira de estabelecer pontos de referência para seu próprio saber e dessa forma assegurar o progresso de seus conhecimentos.

- **Fase 5 —** *Familiarização*

Os alunos *resolvem exercícios utilizando para isso noções recentemente institucionalizadas como ferramentas explícitas. Esses exercícios, simples ou complexos, colocam em jogo apenas o que é conhecido.*

Os problemas aqui propostos aos alunos destinam-se, segundo Douady, a desenvolver hábitos e práticas e a integrar o saber social com o saber do aluno, pois o aluno ainda precisa colocar à prova em novas

experiências, eventualmente sozinho, os conhecimentos que julga ter alcançado e esclarecer para si mesmo o que realmente sabe.

- **Fase 6 —** *Novo problema*

Nessa sexta fase, os alunos *são colocados à prova para utilizarem os novos conhecimentos em situações mais complexas que envolvam outros conceitos, sejam eles conhecidos, sejam visados pela aprendizagem.*

Os conhecimentos novos adquirem agora o estatuto de antigos, num novo ciclo da *dialética ferramenta–objeto*.

De acordo com Douady, para a aprendizagem de um conceito ou propriedade muitos ciclos podem ser necessários.

1.2.2 Interação entre domínios

Diferentes domínios são citados por Douady (1984): físico, geométrico, numérico, gráfico, das representações (gráficas ou algébricas), das grandezas etc. Segundo ela, é necessário que a formulação de problemas envolva pelo menos dois domínios, de forma que possibilite meios de validação pelo próprio aluno ao longo das fases da dialética ferramenta–objeto.

Quando o aluno faz uso de conhecimentos dos domínios necessários à solução correta do problema, dizemos que houve

interação entre os domínios em jogo. Quando um aluno resolve parcialmente o problema, podem-se identificar os conhecimentos requeridos nos domínios em jogo e avivá-los para que ele chegue à solução completa.

Nessa pesquisa distinguimos três fases da *interação entre domínios*:

- *Interpretação*

Os alunos são nessa fase confrontados com um problema que faz intervirem conhecimentos de pelo menos dois domínios — em nosso caso, o numérico e o geométrico, pois estudamos a aprendizagem do conceito de área. Na aprendizagem desse conceito, intervêm também certas propriedades, que em nosso caso assim se traduzem: retângulos congruentes têm áreas iguais; existem retângulos não-congruentes com a mesma área; o retângulo considerado como de área 1 cm^2 (unidade) é composto por quatro quadrados de $\frac{1}{4}$ cm^2; podem-se obter diferentes áreas de um retângulo conforme se varie a unidade de área considerada.

Um aluno pode ter conhecimentos suficientes nos domínios numérico e geométrico, mas pode não conhecer certas propriedades características do conceito de área necessárias à solução de um problema que envolva esse conceito. Nesse caso, diremos que não dispõe de conhecimentos suficientes no domínio das grandezas.

Nessa fase, diante de seus conhecimentos e suas práticas, os alunos examinam o problema e elegem um ou mais domínios para resolvê-lo, interpretando certas questões.

- *Produções incompletas*

As produções dos alunos podem se revelar incompletas. Segundo Douady (1986), temos nessa situação uma fonte de desequilíbrio para os alunos. Suas produções revelam conhecimentos de algum dos domínios em jogo, mas não de todos.

Por exemplo, ao resolverem um problema como "Desenhe um retângulo de $\frac{1}{2}$ cm^2 de área", os alunos poderão desenhar retângulos que não tenham $\frac{1}{2}$ cm^2 de área. Nesse caso, estarão revelando dispor de conhecimentos no domínio geométrico (porque desenharam retângulos, e não outras figuras quaisquer), mas não em outros dos domínios em jogo no problema (como o domínio numérico, particularmente quanto aos números fracionários).

Cabe aqui um segundo exemplo que pode elucidar uma produção incompleta. Se pedirmos aos alunos dois retângulos de 2^{2}cm de área e eles desenharem dois retângulos congruentes de 2 ^{2}cm de área, consideraremos tais produções como corretas porém incompletas, pois revelam que esses alunos podem evoluir em um dos domínios: o geométrico — por exemplo na decomposição e composição para a obtenção de retângulos não-congruentes de mesma área.

- *Progresso do conhecimento*

O desenvolvimento de conhecimentos em cada um dos domínios em jogo pode ser um fator de reequilíbrio para o aluno, tanto por possibilitar-lhe o progresso em relação a seus conhecimentos anteriores, como por permitir a interação entre domínios.

Prosseguindo com o exemplo acima, se o aluno desenhar dois retângulos não-congruentes de 2 cm^2 de área, consideraremos suas produções corretas e completas, tendo em vista os objetivos visados pela situação.

1.3 Quadro teórico matemático

Lima (1991) inicia seu capítulo 2 afirmando:

> *Trataremos agora de medir a porção do plano ocupada por uma figura plana F. Para isso, compararemos F com a unidade de área. O resultado dessa comparação será um número que deverá exprimir quantas vezes a figura F contém a unidade de área.* **(Lima, 1991, p. 11)**

Tomaremos como base essa noção de área. Ela é compatível com a de superfícies planas de Douady (1984)[10] e permite lidar diretamente

[10] **Douady abordou uma superfície plana como sendo** "*parte não-vazia do plano limitada por uma ou mais curvas fechadas de comprimento finito*"**.**

com designações de figuras (retângulo, quadrado) sem mencionar o termo *superfície*, que pode confundir os alunos (Santos, 1999).

Para adaptação ao conhecimento dos alunos do terceiro ciclo (em nosso caso, apenas a 6ª série), ao nos referirmos ao cálculo de área faremos a seguinte institucionalização:

> **Quando queremos calcular a área de uma figura, devemos verificar quantas unidades de área cabem nessa figura.**

No capítulo 3 desse mesmo trabalho, Lima afirma:

> *... mostramos que se pode associar a cada polígono P um número real não-negativo, chamado* **área de P**, *com as seguintes propriedades:*
>
> *1) Polígonos congruentes têm áreas iguais.*
>
> *2) Se P é um quadrado com lado unitário, então área de P = 1.*
>
> *3) Se P pode ser decomposto como reunião de* **n** *polígonos* $P_1, \ldots, P_n$ *tais que dois quaisquer deles têm em comum no máximo alguns lados, então a área de P é a soma das áreas dos* P_i.
>
> (Lima, 1991, p. 11)

Para adaptação ao conhecimento dos alunos da 6ª série, podemos evitar as expressões *polígonos congruentes* e *quadrado de lado* *unitário*, **bem como suas definiçõesEm lugar de** *reunião de n polígonos P_1, ..., P_n tais que dois quaisquer deles têm em comum no máximo alguns lados*, **podemos usar** *justaposição de dois retângulos (ou mais, se for o caso), desenhando-os com um lado em comum, sem sobrepor nem deixar vãos*.

1.4 Escolhas metodológicas

1.4.1 A escolha do método de pesquisa

De outubro a novembro de 1999 realizamos a pesquisa qualitativa, na forma de estudo de caso, com alunos do terceiro ciclo do ensino fundamental (apenas a 6ª série), cuja idade variava entre 11 e 12 anos. Essa metodologia de pesquisa — o estudo de caso — proporciona condições para realizar uma investigação que enfatize a compreensão de eventos particulares (casos), recorrendo a observações, entrevistas, gravações, documentos, anotações de campo e interações com os participantes do estudo.

Na pesquisa qualitativa:

> *a preocupação com o processo é muito maior do que com o produto. O interesse do pesquisador ao estudar um determinado problema é verificar como ele se manifesta nas atividades, nos procedimentos e nas interações cotidianas.* **(Lüdke e André, 1986, p. 12)**

De acordo com Lüdke e André (1986), dentre as diversas formas que uma pesquisa qualitativa pode assumir, o estudo de caso vem tendo aceitação crescente na área de educação, fundamentalmente por seu potencial para estudar as questões relacionadas à escola.

Entre as características fundamentais do estudo de caso, destacam-se as seguintes:

- **A** *descoberta*, **na qual o pesquisador, apesar de partir de alguns pressupostos que o orientam na coleta de dados, está sempre atento a elementos não estabelecidos** *a priori*. **De acordo com essas autoras,** *essa característica se fundamenta no pressuposto de que o conhecimento não é algo acabado, mas uma construção que se faz e refaz constantemente* **(Lüdke e André, 1986, p. 18). Tal característica do estudo de caso é bem adaptada a pesquisas de processos de ensino–aprendizagem, como a nossa.**
- **A** *representação dos diferentes* **— e às vezes conflitantes —** *pontos de vista* **presentes numa situação social. Nesse tipo de estudo o pesquisador se propõe a dar respostas aos conflitos surgidos numa determinada situação.** *Ele o faz, principalmente, através da explicitação dos princípios que orientam suas representações e interpretações através do relato das representações e interpretações dos informantes*. **(André, 1984, p. 52)**
- **A** *interpretação em contexto*, **que é um pressuposto básico desse tipo de estudo. Uma compreensão maior do objeto só é possível levando-**

se em conta o contexto em que está inserido.

- *Variedade de fontes de informação*, com que o pesquisador pode recorrer a uma diversidade de dados, coletados em diferentes momentos, em situações variadas e provenientes de diferentes informantes.
- A possibilidade de *generalizações naturalísticas*. O pesquisador busca descrever as experiências que vivencia no transcorrer do estudo, de modo que o leitor possa fazer suas generalizações naturalísticas. Estas se desenvolvem no âmbito do indivíduo e em função de seu conhecimento, que é decorrente de sua experiência, permitindo-lhe associar dados encontrados no estudo e relacioná-los com suas práticas pessoais. A generalização naturalística leva o leitor a questionar "O que posso (ou não posso) aplicar desse caso a minha situação?", em vez de indagar, em termos mais absolutos, "Esse caso é representativo de quê?".
- Os relatos do estudo de caso são elaborados em *linguagem e forma mais acessíveis* do que em outros tipos de pesquisa. De acordo com Lüdke e André, a concepção de estudo de caso pressupõe que os dados podem ser apresentados numa diversidade de formas, sendo que os relatos escritos apresentam, de modo geral, *um estilo informal, narrativo, ilustrado por figuras de linguagem, citações, exemplos e descrições*.

Nossa pesquisa foi desenvolvida em sete sessões de 55 minutos, com exceção da quinta sessão, que foi realizada em 110 minutos e da quarta sessão que foi realizada em menos de 55 minutos. Contou com 21 alunos, em média, por sessão.

As sessões foram gravadas e registradas por três observadoras, sendo uma delas a professora da classe. As três observadoras anotaram não só o que viam e ouviam, como também inseriram julgamentos sobre os conhecimentos dos alunos em suas anotações ou os comunicaram oralmente à pesquisadora. O grupo-classe já estava habituado a sessões de estudo de caso nesse quadro teórico com a professora no papel de observadora. Antes da primeira sessão, foram apresentadas ao grupo de alunos as pessoas que desenvolveriam a pesquisa, descrevendo-se os objetivos do trabalho. Foi-lhes informado que estávamos interessadas em saber se a seqüência de ensino que eles vivenciariam era adequada aos conhecimentos de que eles dispunham, e que as aulas seriam ministradas pela pesquisadora, sempre acompanhada pela professora e pelas observadoras. Foi também informado aos alunos o que as observadoras fariam, e que todas as questões que dirigissem a elas seriam remetidas à pesquisadora.

1.4.2 A escolha da escola

Como campo de pesquisa, foi escolhida uma escola da rede particular de ensino de São Bernardo do Campo, cidade pertencente à Grande São Paulo, que dispusesse de recursos humanos e materiais para o trabalho. Após apresentação e discussão do projeto, tanto a direção quanto a coordenação, a assessoria de Educação Matemática da escola e a professora concordaram com a aplicação da seqüência.

Tivemos o cuidado de escolher uma escola que estivesse de acordo com a metodologia de pesquisa escolhida e com o quadro teórico utilizado na aplicação da seqüência.

Antes do início da aplicação dos instrumentos de pesquisa, realizamos e gravamos entrevistas com a professora e com a assessora de Educação Matemática, visando a discussão dos problemas da seqüência didática e as possíveis adaptações sugeridas por elas.

1.4.3 A escolha do professor

Para a aplicação da seqüência de ensino, foi escolhida uma professora de Matemática que conhecia e estava de acordo com as hipóteses e bases teóricas do trabalho proposto e que lecionava em uma classe do terceiro ciclo (apenas a 6ª série). Essa classe tinha 22 alunos.

2 A PREPARAÇÃO DA SEQÜÊNCIA

O item 2.1 deste capítulo, apresenta a seqüência didática originalmente concebida, acompanhada das alterações que recebeu durante sua elaboração final e realização. Essas alterações decorreram do desempenho dos alunos ou das discussões com a equipe da escola. O item 2.2, por sua vez, expõe aspectos relevantes da entrevista com a equipe da escola, entrevista essa que tinha por objetivo adequar a seqüência ao público-alvo. As produções de alunos que provocaram mudanças na seqüência serão apresentadas no próximo capítulo.

2.1 A seqüência original e suas alterações

A seqüência originalmente elaborada era composta de seis sessões. No desenvolvimento da seqüência, entretanto, foi preciso introduzir atividades extras, devido ao desempenho apresentado pelos alunos. A seqüência final realizada totalizou, assim, sete sessões.

Para as sessões 1 a 6, foi proposto o uso de papel quadriculado (malha de $\frac{1}{2}$ cm $\times$ $\frac{1}{2}$ cm) e, para a sessão 7, de papel milimetrado. Além desse material, os alunos disporiam de lápis vermelho para resolver os problemas, de lápis verde para futuras validações e de palitos de sorvete

para servirem de apoio para o traçado das figuras pedidas. A pesquisadora cederia esse material. Os alunos teriam de se restringir ao uso dos instrumentos oferecidos. Não lhes seria permitido usar régua graduada porque não queríamos que medissem os lados das figuras. Durante a realização das sessões (que descreveremos no próximo capítulo) os alunos também poderiam desenhar suas produções em cartolinas previamente quadriculadas e afixadas na lousa, para facilitar o desenvolvimento das discussões e seu acompanhamento pela classe. Nas sessões em que promoveríamos explicitações usando essas cartolinas, os alunos disporiam de quadrados e de retângulos, feitos também de cartolina quadriculada, representando unidades de 1 cm^2 de área, para que pudessem usá-los caso necessitassem.

Descreveremos a seguir o desenrolar de cada sessão, tal como realizada, explicitando também os acréscimos e supressões efetuados.

SESSÃO 1:

O objetivo dessa sessão era verificar, por meio de problemas que apresentaremos a seguir, os conhecimentos individuais dos alunos a respeito de área. Nessa sessão os alunos resolveriam os problemas sem explicitações prévias do professor, isto é, sem comentários sobre a teoria referente aos problemas. Seriam-lhes fornecidas instruções sobre os materiais que poderiam usar. A unidade de área apresentada seria um retângulo de 1 cm^2 (Figura 2.1), já desenhado na folha de papel

quadriculado. Os alunos deveriam usar essa unidade para desenhar as figuras solicitadas nos problemas.

Figura 2.1[1]

Ao oferecer um retângulo de 1 cm^2 de área como unidade, visávamos verificar se os alunos apresentariam algum comportamento que nos revelasse que o termo *centímetro quadrado* **era por eles interpretado apenas como um quadrado de 1 centímetro de lado, tal como haviam detectado Douady e Perrin-Glorian (1985, p. 5).**

Também instruiríamos os alunos a sempre seguirem as linhas do papel quadriculado ao desenharem as figuras. Isso nos garantiria que não desenhariam outras figuras, como triângulos ou paralelogramos, o que ocorrera na investigação de Douady (1985).

Cada problema seria apresentado com um enunciado curto que não induzisse nem a um método nem à solução. Os alunos não disporiam, para ele, de um modelo de resolução previamente ensinado. Segundo Douaire *et al.*, **problemas desse tipo são chamados** *abertos*. **Constituem desafios intelectuais que necessitam de cooperação do grupo-classe para a formulação de conjecturas, para críticas e para promover evolução nas produções dos alunos.**

---

[1] **As numerações das figuras servem apenas aos propósitos do presente trabalho. Durante a aplicação da seqüência, as figuras não compareciam numeradas. Na numeração que estamos aqui empregando, o primeiro algarismo designa o capítulo.**

Era previsto que, nas sessões seguintes, desenvolveríamos as discussões visando o progresso de conhecimento — no caso do problema 1, o desenho de dois retângulos não-congruentes de mesma área.

As instruções apresentadas em todas as folhas dessa sessão seriam as seguintes:

> **Nas folhas de papel quadriculado que você está recebendo, representamos um retângulo de 1 cm^2 de área. Use essa referência para desenhar os retângulos e quadrados e responder as questões. Faça seus desenhos utilizando sempre as linhas do quadriculado.**

Figura 2.1

Enunciado do problema 1:

> **Você pode desenhar dois retângulos, cada um com 2 cm^2 de área? _______**
>
> **Se pode, desenhe-os na folha de papel quadriculado.**

Nesse primeiro problema, queríamos avaliar se os alunos usariam a unidade fornecida para desenhar um retângulo de 2 cm^2 de área. Além disso, queríamos observar se ofereceriam uma destas respostas: dois retângulos não-congruentes de mesma área; dois retângulos congruentes de mesma área mas em posições diferentes;

dois retângulos congruentes nas mesmas posições. Caso viessem a desenhar dois retângulos congruentes de 2 cm^2 em posições diferentes ou dois retângulos congruentes de 2 cm^2 nas mesmas posições, classificaríamos essas produções como incompletas, pois de acordo com nosso quadro teórico os alunos podem progredir em relação a seus conhecimentos anteriores, tornando-se aptos a produzir retângulos não-congruentes de mesma área. Queremos dizer que o fato de um aluno desenhar dois retângulos congruentes de 2 cm^2 de área nos levaria a concluir que ele ainda poderia avançar em um dos domínios em jogo — nesse caso, o domínio geométrico. Através da decomposição e composição, esse aluno conseguiria desenhar retângulos não-congruentes de mesma área.

Poderíamos obter dos alunos alguns retângulos com área 2 cm^2

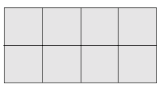


Figura 2.2

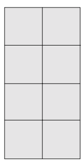


Figura 2.3

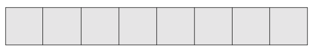


Figura 2.4

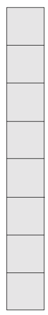


Figura 2.5

Enunciado do problema 2:

Você pode desenhar um retângulo de $\frac{1}{2}$ cm^2 de área? ________

a) Se pode, desenhe-o na folha de papel quadriculado.

b) Escreva o que pensou para responder essa questão.

Ao pedirmos o desenho de um retângulo de $\frac{1}{2}$ cm^2 de área, queríamos verificar se os alunos decomporiam a unidade, e além disso verificar se eles considerariam o quadrado de $\frac{1}{4}$ cm^2 de área como unidade de área em vez do retângulo de 1 cm^2.

Os únicos desenhos que seriam considerados corretos, dentre os que os alunos poderiam traçar para esse problema sem deixar de seguir as linhas da malha, seriam retângulos formados por dois quadrados dessa malha (Figuras 2.6 e 2.7), visto que a unidade era composta por quatro quadrados da malha.

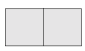


Figura 2.6

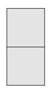


Figura 2.7

Uma das possíveis respostas incorretas que os alunos poderiam fornecer a este problema estaria relacionada com o domínio numérico: no problema anterior, o aluno teria trabalhado com números naturais, ao passo que neste ele precisaria dispor de conhecimentos sobre

números fracionários. Além disso, o aluno teria de associar que $\frac{1}{2}$ cm² de área corresponde a dois quadrados da malha.

O problema que veremos a seguir fazia parte da seqüência original, mas não foi proposto aos alunos.

Enunciado do problema removido antes do início das sessões:

Você pode desenhar um quadrado de $\frac{1}{4}$ cm² de área? ________

a) Se pode, desenhe-o na folha de papel quadriculado.

b) Escreva o que pensou para responder a questão.

Esse problema tinha por finalidade verificar se o aluno desenharia como resposta um quadrado da malha, correspondente a $\frac{1}{4}$ da unidade dada, ou seja, $\frac{1}{4}$ cm² de área. Esse seria o único desenho correto para a resposta (Figura 2.8).

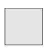


Figura 2.8

No decorrer da entrevista (que será descrita no item 2.2), a professora considerou que esse problema seria inadequado para os alunos, e por isso decidimos não aplicá-lo.

Enunciado do problema 3:

Você pode desenhar retângulos de $\frac{1}{2}$ cm^2 de área? ________

a) Se pode, desenhe-os na folha de papel quadriculado.

b) Escreva o que pensou para responder a questão.

Com esse problema, queríamos verificar se o aluno desenharia um ou mais retângulos não-congruentes de mesma área usando composição e decomposição de retângulos. As possibilidades corretas de desenhos seriam as seguintes:

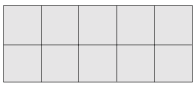


Figura 2.9

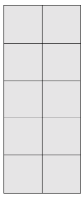


Figura 2.10

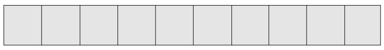


Figura 2.11

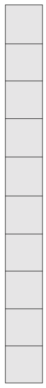


Figura 2.12

Ao resolver esse problema, o aluno poderia apresentar respostas incorretas, pois, mesmo dispondo de conhecimentos no domínio numérico para a resolução, deveria manter-se atento para que a figura desenhada fosse de fato um retângulo. Temos abaixo uma possível resposta inadequada para esse problema. Com ela, o aluno estaria tomando dois retângulos, cada um de 1 cm^2, e um retângulo de $\frac{1}{2}$ cm^2 (Figura 2.13) e compondo-os de modo a obter $2\frac{1}{2}$ cm^2 de área (Figura 2.14), sem porém formar a figura solicitada.

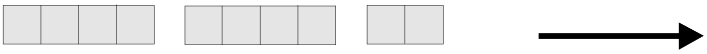


Figura 2.13

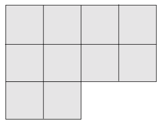


Figura 2.14

Essa resposta nos mostraria um aluno com conhecimentos insuficientes para a solução correta do problema no domínio geométrico, pois ele não estaria obtendo a figura solicitada. No entanto, a resposta revelaria que esse aluno já disporia de conhecimentos no domínio numérico: conseguir desenhar uma figura com $2\frac{1}{2}$ cm^2 de área mostra entendimento do número misto envolvido, além de conhecimentos de área (domínio das grandezas), com correta utilização da unidade e do procedimento de composição e decomposição (segundo definição de Lima).

SESSÃO 2:

Esta sessão tinha os seguintes objetivos: devolver a cada aluno sua resolução do problema 1, efetuada na sessão 1; realizar as fases de *explicitação* e *validação* relativas a esse problema; institucionalizar o

conceito de área mediante as explicitações dos alunos; verificar seus conhecimentos individuais por meio do problema 4, que funcionaria como exercício, de acordo com o quadro teórico de Douady.

Na fase de explicitação, os alunos poderiam vir à lousa para desenhar suas produções em cartolinas quadriculadas, a fim de promovermos uma discussão a respeito dos desenhos assim reproduzidos, sendo-lhes informado que a cartolina estava quadriculada numa escala maior que a do papel quadriculado que tinham em mãos, e que isso serviria apenas para que todos pudessem enxergar melhor as reproduções.

Queríamos que durante as validações os novos desenhos fossem feitos com lápis verde, para que pudéssemos diferenciá-los dos traçados feitos anteriormente com lápis vermelho.

A instrução fornecida com o problema dessa sessão seria:

Faça seus desenhos utilizando sempre as linhas do papel quadriculado.

Enunciado do problema 4:

Você pode desenhar um quadrado ou retângulo de 1 cm^2 de área? _______

a) Se pode, desenhe-o na folha de papel quadriculado.

b) Escreva o que pensou para responder a questão.

Com esse problema buscava-se avaliar os conhecimentos de que os alunos já dispunham, verificando se compreendiam que a unidade de 1 cm^2 de área poderia ser desenhada tanto como quadrado quanto como retângulo.

Como relata Douady (1985):

1 centímetro quadrado é com freqüência entendido pelas crianças como um quadrado de 1 centímetro de lado. **(Douady, 1985, p. 5)**

Numa tentativa de desvincular essa correspondência, buscávamos nesse exercício propor ao aluno uma situação que lhe permitisse perceber que 1 cm^2 não seria exclusivamente a área de um quadrado de 1 cm de lado, mas que poderia ser também a área de um retângulo de $\frac{1}{2}$ cm por 2 cm, por exemplo.

Nas sessões seguintes, essas duas figuras — quadrado ou retângulo — passariam a ser usadas como unidade de 1 cm^2 de área.

SESSÃO 3:

Essa sessão tinha como objetivos: entregar os problemas 2 e 3 aos alunos para discutirem suas produções e promoverem a validação dessas produções, refazendo-as em lápis verde, quando necessário, para confrontarmos as novas produções com as da sessão 1; verificar o conhecimento individual dos alunos por meio do problema 5.

A instrução fornecida com o problema 5 dessa sessão seria:

Faça seus desenhos utilizando sempre as linhas do papel quadriculado.

Enunciado do problema 5:

Você pode desenhar um retângulo de $3\frac{1}{2}$ cm^2 de área?

---

a) Se pode, desenhe-o na folha de papel quadriculado.

b) Escreva o que pensou para responder a questão.

O objetivo desse problema era verificar quais conhecimentos o aluno poria em uso para a resolução de um problema similar a outro já discutido em classe.

Da mesma forma que no problema 3, o aluno deveria decompor um retângulo de 1 cm^2 de área para a solução correta do problema. Dentre as possibilidades corretas de retângulos de $3\frac{1}{2}$ cm^2 de área, teríamos:

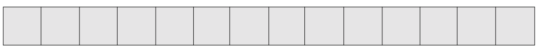


Figura 2.15

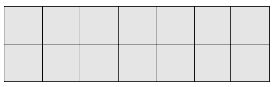


Figura 2.16

Podemos perceber que, apesar de ser este um exercício semelhante ao problema 3, o aluno enfrentará dificuldades se adotar

certas seqüências de passos para a composição da figura. Por exemplo, se iniciar a composição justapondo três retângulos de 1 cm², lhe restaria meia unidade que não se agregaria às demais de modo a formar um retângulo(Figura 2.17).

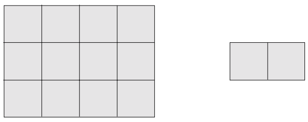


Figura 2.17

Com esse problema, portanto, poderíamos avaliar a evolução de conhecimentos dos alunos comparando seu desempenho nesse problema com o apresentado no problema 3.

SESSÃO 4:

Nessa sessão, recolocaríamos na lousa as cartolinas com os desenhos produzidos na sessão 2, para que esses desenhos servissem como exemplos para calcularmos as áreas com diferentes unidades de área.

Retomaríamos as produções dos alunos relativas aos problemas 1 e 2 para discussões sobre a obtenção de diferentes áreas de um mesmo retângulo ao se variar a unidade adotada como referência. A retomada do problema 2, que pedia um retângulo de $\frac{1}{2}$ cm² de área, serviria para usar esse retângulo como unidade no cálculo da área do retângulo de 2 cm^2 (problema 1). Também seria feito o registro das explicitações e validações dos alunos e se procederia à institucionalização da área de um retângulo ao se adotarem diferentes unidades.

SESSÃO 5:

Nesta sessão, daríamos início a um novo ciclo da dialética ferramenta–objeto, pedindo retângulos de 16 cm^2 e 20 cm^2 de área. Os problemas tinham por objetivo verificar se os alunos, ao se defrontarem com um retângulo de área maior do que os desenhados anteriormente, continuariam a fazer contagem de unidades ou se, em vez disso, utilizariam a multiplicação para desenhar figuras com as áreas pedidas.

Proporíamos os problemas 6 e 7, como verificação do conhecimento individual dos alunos, passando em seguida às explicitações e às validações de suas produções. O objetivo desses problemas era verificar se os alunos fariam uso de contagens ou se utilizariam cálculos.

Foram escolhidos números naturais que pudessem ser fatorados de diferentes maneiras. Consideramos que formar um retângulo contando 16 ou 20 unidades de 1 cm^2, cada uma composta de quatro quadrados da malha, poderia se revelar um procedimento muito trabalhoso e demorado para os alunos, e que isso os estimularia a recorrer a cálculos associados à contagem. Era o que queríamos

verificar.

A instrução presente nas folhas de ambos os problemas dessa sessão seria:

Faça seus desenhos utilizando sempre as linhas do papel quadriculado.

Enunciado do problema 6:

Você pode desenhar um quadrado ou um retângulo de 16 cm^2 de área? _______

a) Se pode, desenhe-o na folha de papel quadriculado.

b) Escreva o que pensou para responder a questão.

Enunciado do problema 7:

Você pode desenhar retângulos de 20 cm^2 de área? _______

a) Se pode, desenhe-os na folha de papel quadriculado.

b) Escreva o que pensou para responder a questão.

Dentre as possibilidades de respostas, teríamos estas:

Para o problema 6:

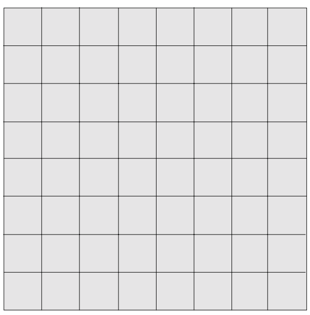


Figura 2.18

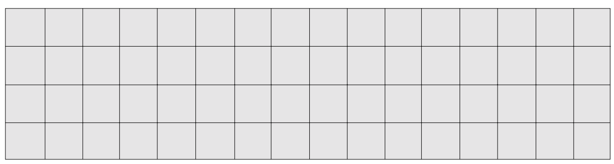


Figura 2.19

Para o problema 7:

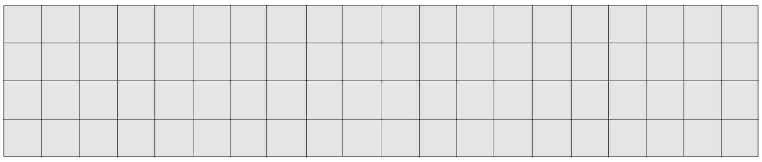


Figura 2.20

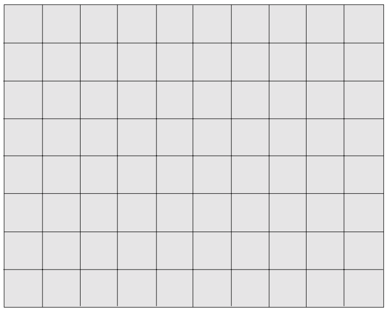


Figura 2.21

Outras possibilidades poderiam ser obtidas pela decomposição e composição desses retângulos, formando outros retângulos não-congruentes e de mesma área que esses.

SESSÃO 6:

Em decorrência do desempenho dos alunos até a sessão anterior, decidimos acrescentar esta sessão extra antes de propor a originalmente planejada. Na sessão 5 haviam sido propostos problemas que ofereceram certas dificuldades para os alunos, as quais serão descritas no próximo capítulo. Por essa razão, elaboramos para esta nova sessão problemas envolvendo números naturais menores que os

da sessão anterior, em duas situações: envolvendo o cálculo da área de um retângulo dado com diferentes unidades de área e a obtenção da área de um retângulo pela justaposição de dois retângulos, desenhando-os com um lado em comum, sem sobrepor nem deixar vãos.

A instrução constante nas folhas dos problemas desta sessão seria:

Faça seus desenhos utilizando sempre as linhas do papel quadriculado.

Enunciado do problema 8 (criado durante a realização da seqüência):

O retângulo abaixo tem 10 cm^2 de área.

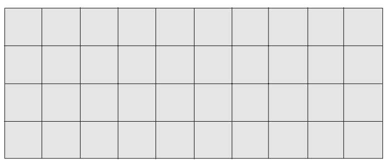


Figura 2.22

a) Qual a área do retângulo desenhado acima, considerando $\frac{1}{2}$ cm^2 como unidade de área? _______

b) Escreva o que pensou para responder a questão.

c) Qual a área do retângulo desenhado acima, considerando 2 cm^2 como unidade de área? _______

d) Escreva o que pensou para responder a questão.

Nesse problema, o retângulo apresentado tinha área menor do que os propostos nos problemas 6 e 7, a fim de verificarmos se as dificuldades dos alunos poderiam desta vez ser menores. Essa diminuição na área tinha por finalidade retomar os conhecimentos anteriores dos alunos numa situação cujo grau de complexidade não impedisse a resolução correta do problema.

Para a solução correta do problema 8a), o aluno teria de usar $\frac{1}{2}$ cm^2 como unidade de área, obtendo assim 20 dessas unidades. Para o problema 8c), teria de considerar 2 cm^2 como unidade de área, obtendo 5 dessas unidades. Uma possível maneira de o aluno obter respostas incorretas seria considerar unidades diferentes daquelas oferecidas no problema ou então usar a unidade correta mas realizar a contagem incorretamente.

Enunciado do problema 9 (criado durante a realização da seqüência):

O seguinte quadriculado, com um retângulo desenhado, é igual ao da folha que costumamos usar.

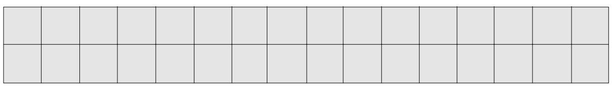


Figura 2.23

a) O retângulo acima tem 8 cm^2 de área? ________

b) Você pode desenhar outros retângulos com 4 cm^2 a mais de área? ______

c) Se pode, desenhe-os na folha de papel quadriculado.

d) Escreva o que pensou para responder a questão.

Informaríamos aos alunos que o quadriculado era o mesmo com que já estavam acostumados, pois desta vez o retângulo não estaria desenhado diretamente sobre a folha quadriculada, como nos problemas anteriores, mas sim sobre a folha de papel liso que continha as instruções.

Os alunos poderiam apresentar dois possíveis procedimentos para a resolução desse problema.

O primeiro seria desenhar um retângulo de 4 cm^2 de área (Figura 2.24 ou Figura 2.25) e justapô-lo ao retângulo de 8 cm^2 de área (Figura 2.26), obtendo assim um retângulo de 12 cm^2 de área (Figura 2.27 ou 2.28, de acordo com a composição realizada).

Compondo estes retângulos:

4 cm^2

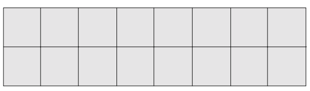


Figura 2.24

e

8 cm^2

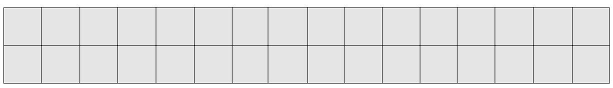


Figura 2.26

obtemos este:

12 cm^2

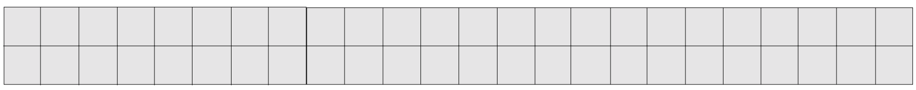
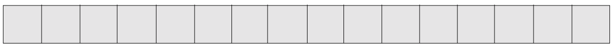


Figura 2.27

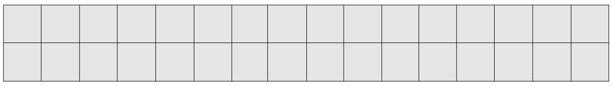
Compondo estes dois:



4 cm²

Figura 2.25

e



8 cm²

Figura 2.26

obtemos este:

12 cm²

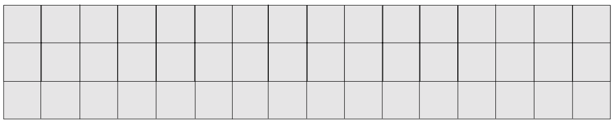


Figura 2.28

No segundo procedimento, o aluno também poderia valer-se de um recurso numérico, adicionando os números 8 e 4 (extraídos diretamente do enunciado figurado: “8 cm²”, “4 cm² a mais”) e em seguida desenhando um retângulo com o número obtido dessa adição (12 cm² de área). Esse procedimento lhe permitiria obter, além dos retângulos ilustrados acima, os das Figuras 2.29 e 2.30.

12 cm²

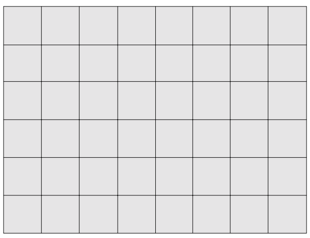


Figura 2.29

12 cm²

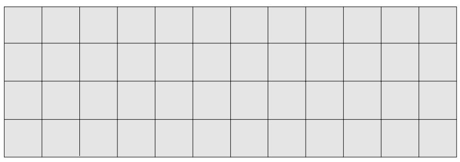


Figura 2.30

SESSÃO 7:

O objetivo dessa sessão era propor os problemas 10 e 11, como verificação do conhecimento individual dos alunos. Esta seria a primeira sessão em que se utilizaria papel milimetrado.

Os problemas propostos nesta sétima e última sessão eram os mesmos que havíamos elaborado para a sexta, mas também última, sessão da seqüência original.

Enunciado do problema 10:

Você pode desenhar um retângulo de 20 cm^2 de área? _______

a) Se pode, desenhe-o na folha de papel milimetrado.

b) Escreva o que pensou para responder a questão.

Nesse problema o número envolvido era o mesmo do problema 7, mas agora o papel utilizado era diferente (milimetrado, em vez de quadriculado). O objetivo do problema 10 era então verificar se o aluno, ao desenhar um retângulo de 20 cm^2 em um quadriculado diferente, usaria contagem ou cálculos (multiplicação), ou ainda um procedimento misto desses dois, para encontrar a área pedida.

As respostas corretas para esse problema seriam as mesmas do problema 7.

Enunciado do problema 11:

O retângulo abaixo tem 10 cm² de área:

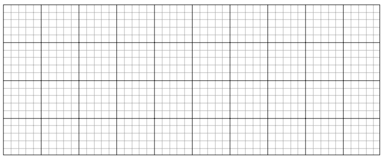


Figura 2.31

a) Considere agora $\frac{1}{2}$ cm² como unidade de área.

Quantas dessas unidades de área contém o retângulo acima?

____

b) Escreva o que pensou para responder a questão.

c) Considere agora 2 cm² como unidade de área. Quantas dessas unidades de área contém o retângulo acima? ________

d) Escreva o que pensou para responder a questão.

Com esse problema, queríamos saber se os alunos obteriam corretamente diferentes áreas de um mesmo retângulo ao se variarem as unidades de medida. Finalmente, queríamos verificar se os conhecimentos adquiridos durante as sessões que haviam desenvolvido esses temas seriam utilizados quando se oferecesse papel com malha diferente da que haviam usado naquelas sessões.

As respostas corretas para esse problema seriam as mesmas do problema 8.

2.2 Entrevista com a equipe da escola

Mostramos à professora e à assessora da escola a seqüência originalmente proposta, para que verificassem se concordavam com a programação prevista e se a seqüência estava adequada ao que sabiam a respeito do conhecimento dos alunos. Depois de uma semana, discutimos essa seqüência. Descrevem-se a seguir os pontos relevantes dessa discussão:

PESQUISADORA: *Vocês sugerem alguma modificação?*

PROFESSORA: *Não acho que os alunos façam esse* **[apontando para o problema 3 da sessão 1].**

PESQUISADORA: *Sugere que retiremos?*

PROFESSORA: *Sim.*

PESQUISADORA: *E quanto aos demais problemas?*

ASSESSORA: *Esses alunos já estudaram este assunto com problemas envolvendo cálculo de área de polígonos usando diversos pavimentos (triangulares, quadriculados). Também já trabalharam com relações entre as medidas obtidas, considerando as diferentes unidades de medida de área, desde a 3ª série* **[segundo ciclo]**

PROFESSORA: *Na 5ª série também dei um pouco de áreas seguindo esta orientação, sem uso de fórmulas e sem problemas* *envolvendo diferentes unidades.*

ASSESSORA: *Quero observar que costumamos dar problemas para os alunos resolverem individualmente apenas nas provas. Porém considero que não haverá problema em manter várias sessões com verificação de conhecimento individual dos alunos se deixarmos claro a eles, em cada sessão, quando devem resolver individualmente e quando podem discutir os problemas.*

PESQUISADORA: *Os alunos estão acostumados a desenhar retângulos com áreas dadas?*

ASSESSORA: *Não. Eles apenas calculam a área de um retângulo já desenhado.*

PESQUISADORA: *Os alunos já usaram papel quadriculado e milimetrado também no terceiro ciclo?*

PROFESSORA: *Sim, mas em Educação Artística. Não usaram em Matemática.*

ASSESSORA: *Usaram o papel quadriculado e o milimetrado, para ampliação e redução de figuras. Não usaram para obtenção ou para o cálculo de área.*

PESQUISADORA: *Fizeram decomposição e composição de figuras para obtenção de áreas?*

ASSESSORA: *Esses alunos já trabalharam em séries anteriores usando malhas trianguladas, quadriculadas e também papel* *quadriculado de* $\frac{1}{4}$ *cm²*.

PROFESSORA: *Sim, mas ainda não neste ano, com papel quadriculado. Fizeram com outros pavimentos.*

O uso do papel quadriculado e do papel milimetrado foi aceito por ser material conhecido dos alunos, por já haverem trabalhado com ele em séries anteriores. Concordamos que esses tipos de papel nos possibilitariam desenvolver os problemas sem que o aluno precisasse medir o comprimento dos lados das figuras desenhadas para calcular suas áreas. Seria um meio de garantir certa precisão na produção dos alunos. Concordou-se também sobre o uso do palito do sorvete, em substituição à régua graduada, por não trazer marcações de medida que poderiam confundir os alunos ou incitá-los a usá-las.

PESQUISADORA: *Sabem que um quadrado pode ser considerado um retângulo?*

PROFESSORA: *Sei que a maior parte sabe que um quadrado é um retângulo, mas na hora de se expressarem às vezes confundem os nomes.*

PESQUISADORA: *Usam multiplicação para calcular áreas de retângulos?*

ASSESSORA: *Na 3ª e 4ª série* **[segundo ciclo]**, *usaram.*

PROFESSORA: *Na 5ª, nem todos sabiam bem, mas usaram.*

3 REALIZAÇÃO DA SEQÜÊNCIA E ANÁLISE DOS RESULTADOS

Neste capítulo descrevemos a realização da seqüência didática e de cada uma das sessões. Nele também se analisam os resultados obtidos e se discutem algumas conclusões parciais.

Em algumas das sessões, os alunos resolveram os problemas individualmente, como uma verificação de seu conhecimento. No caso dessas sessões, a produção dos alunos é analisada em função de *certas questões da pesquisa***, das** *fases da interação entre domínios* **e das** *fases da dialética ferramenta–objeto***.**

Em outras sessões, promoveu-se, em atividade de grupo-classe, a explicitação e a validação das produções dos alunos. Algumas trazem institucionalizações. Nas sessões desse tipo, transcrevemos e analisamos os trechos relevantes, fazendo correspondência com as fases da dialética ferramenta–objeto.

Essas análises das sessões serviram também para decidirmos se poderíamos passar para a sessão seguinte e aplicá-la tal como previamente planejada.

3.1 Sessão 1

Objetivo

Com esta sessão visamos propor três problemas a fim de observar as concepções dos alunos sobre área, decomposição e composição de retângulos, bem como analisar seus conhecimentos individuais.

Material

Nessa primeira sessão os alunos resolveram os problemas 1 , 2 e 3, descritos no capítulo anterior[1]. Para tanto, foi-lhes entregue o seguinte material:

- **três folhas de papel sulfite, cada uma contendo um problema com estas instruções:**

  Na folha de papel quadriculado que você está recebendo, representamos um retângulo de 1 cm^2 de área[2]. Use essa referência para desenhar os retângulos ou quadrados e responder as questões. Faça seus desenhos utilizando sempre as linhas do quadriculado.

- **uma folha de papel quadriculado acompanhando cada folha de problema, contendo a unidade de área de 1 cm^2 desenhada**
- **lápis vermelho**

---

[1] **Para comodidade de leitura, os enunciados dos problemas serão repetidos ao longo deste capítulo.**
[2] **Trata-se do retângulo mostrado na Figura 2.1.**

- **palito de sorvete**

Problema 1 - Enunciado

Você pode desenhar dois retângulos, cada um com 2 cm^2 de área? _______

Se pode, desenhe-os na folha de papel quadriculado.

O que quisemos observar:

- **os procedimentos de obtenção de retângulos de 2 cm^2 de área.**
- **se os alunos considerariam como unidade um retângulo formado por quatro quadrados congruentes, cada um com $\frac{1}{4}$ cm^2 de área, ou se de alguma forma revelariam que consideravam apenas o quadrado de 1 cm^2 de área (ou o quadrado de 1 cm de lado) como unidade de área.**
- **se em suas produções os alunos desenhariam dois retângulos não-congruentes de 2 cm^2 de área, isto é, se eles tinham noção de que dois retângulos não-congruentes podem ter a mesma área.**

Resultados

A Tabela 1 apresenta os percentuais referentes à obtenção de retângulos de 2 cm^2 de área. Em seguida, discutem-se os procedimentos adotados para essas obtenções.

Tabela 1: Resultados da obtenção de dois retângulos de 2 cm^2 de área.

Produção	Percentual		
	Área correta	Área incorreta	Total
Desenho de dois retângulos não-congruentes.	9,09%	9,09%	18,18%
Desenho de dois retângulos congruentes.	36,36%	13,64%	50%
Desenho de um retângulo.	9,09%	22,73%	31,82%
Total	54,54%	45,46%	100%

Análise dos resultados do problema 1

Para análise do problema, dividimos os alunos incluídos na Tabela 1 em três grupos:grupo 1, dos alunos que desenharam dois retângulos não-congruentes; grupo 2, dos que desenharam dois retângulos congruentes;grupo 3, dos que desenharam apenas um retângulo.

GRUPO 1

Esse grupo contém os 4 alunos que desenharam dois retângulos não-congruentes. Desses alunos:

2 desenharam os dois retângulos de área correta →

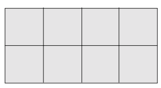


Figura 3.1

e

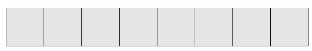


Figura 3.2

Os dois alunos que apresentaram desenhos de retângulos não-congruentes de mesma área de 2 cm^2 (Figuras 3.1 e 3.2) perfizeram

9,09% da classe. De acordo com nosso quadro teórico, suas produções são classificadas como completas, o que significa que esses alunos usaram corretamente dois dos domínios em jogo, o numérico e o geométrico. Consideramos que este foi um problema de *familiarização* para tais alunos, já que não envolvia qualquer conhecimento que lhes fosse novo.

Quanto aos outros dois alunos, temos duas situações a serem analisadas:

1 aluno desenhou um retângulo de área correta e outro de área incorreta →

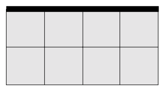


Figura 3.3

e

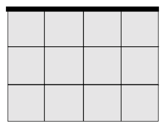
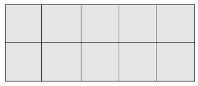


Figura 3.4

Este aluno apresentou um retângulo de área correta (Figura 3.3) e outro de área incorreta (Figura 3.4). A produção desse aluno nos conduziu à seguinte hipótese: uma das medidas (por nós assinalada com traço mais espesso nas Figuras 3.3 e 3.4) dos lados de ambos os retângulos pode ter levado o aluno a conjecturar que as áreas eram as mesmas. Isso sugere que ele possa ter cogitado alguma correspondência entre as medidas dos lados e área de um retângulo. Não dispomos, porém, de elementos suficientes para manter tal hipótese. Outra hipótese também levantada é a de que ao pedirmos dois retângulos de 2 cm^2 de área, o aluno, empenhado em produzi-los, tenha tentado desenhar um segundo, mesmo que de área incorreta.

1 desenhou os dois retângulos com área incorreta



e

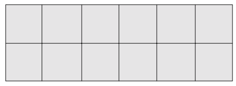


Figura 3.5 **Figura 3.6**

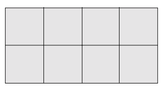
Este outro aluno, como o anterior, demonstrou ter conhecimentos no domínio geométrico, pois desenhou dois retângulos (Figuras 3.5 e 3.6), em vez de outra figura qualquer. Entretanto, não mostrou possuir conhecimentos suficientes no domínio das grandezas (conceito de área e propriedades características) para solucionar o problema.

De acordo com nosso quadro teórico, as produções desses dois alunos são classificadas como incompletas, pois eles podem ainda avançar em seu conhecimento de área durante as fases de explicitação e de institucionalização.

GRUPO 2

Entre os 11 alunos que desenharam dois retângulos congruentes, tivemos as seguintes situações:

8 desenharam os dois retângulos com área correta



e

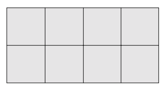
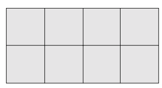


Figura 3.7 **Figura 3.8**

ou



e

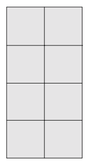


Figura 3.9 **Figura 3.10**

No caso dos 36,36% de alunos que apresentaram dois retângulos congruentes e nas mesmas posições (Figuras 3.7 e 3.8), ou ainda dois retângulos congruentes em posições diferentes (Figuras 3.9 e 3.10), consideramos suas produções como corretas, já que estão de acordo com o enunciado da questão. Como não apresentaram retângulos não-congruentes de mesma área, podem ainda avançar no conhecimento a respeito de área. Em nosso quadro teórico, dizemos que apresentaram produções incompletas. Além disso, consideramos que, para esses alunos, este é um problema da fase *antigo*.

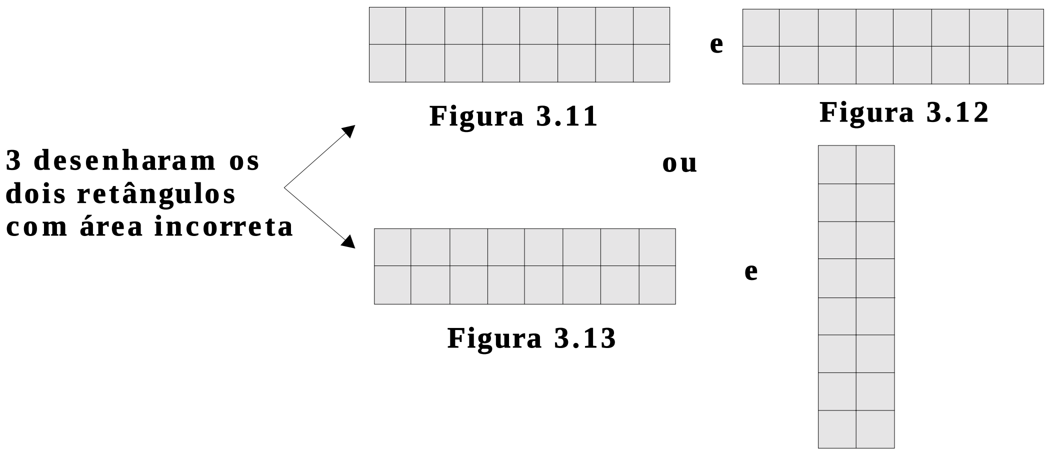


Figura 3.11

Figura 3.12

Figura 3.13

Figura 3.14

Três alunos desenharam dois retângulos de área incorreta (4 cm^2; Figuras 3.11 a 3.14). Para estes, temos a hipótese de que, ao utilizarem a unidade de 1 cm^2 de área (Figura 3.15) dada como referência para desenharem um retângulo de 2 cm^2 de área, acabaram tomando-a como unidade de comprimento (1 cm), o que os teria levado a multiplicar as medidas dos lados do retângulo dado como unidade por dois, obtendo assim um retângulo de 4 cm^2 de área (Figura 3.16). Isso, a nosso ver, aparenta ser uma confusão entre e as medidas dos lados e a área, como já havia mencionado Santos (1999) em sua pesquisa.

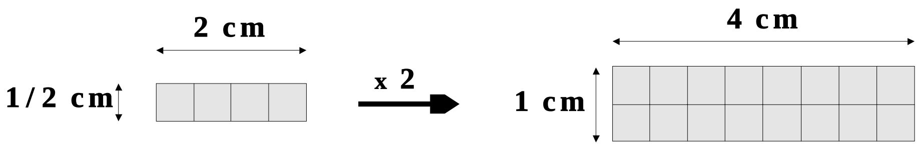


Figura 3.15 Figura 3.16

Estes alunos teriam a oportunidade de discutir suas produções na sessão seguinte e, então, validá-las (confirmando-as ou refutando-as).

Pelas anotações das observadoras, verificamos também que alguns alunos, como por exemplo Caio e Lucas, cancelaram certas produções e desenharam outros retângulos (Figura 3.17), o que nos mostra que estavam em atividade de pesquisa, validando por meio de desenho.

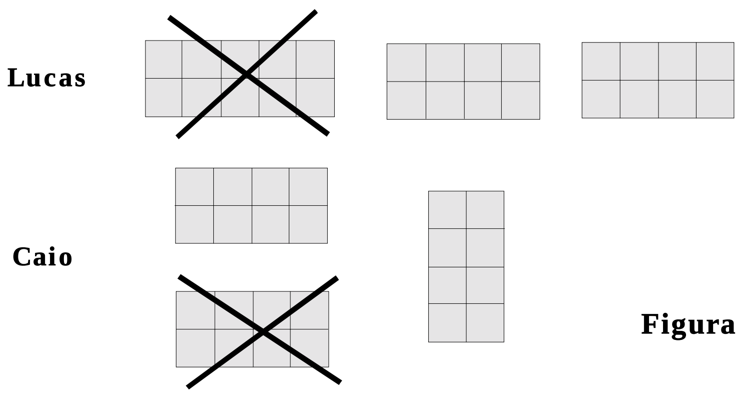


Figura 3.17

GRUPO 3

Dos 7 alunos desse grupo que desenharam apenas um retângulo, temos:

2 desenharam um retângulo de área correta →

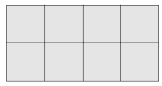


Figura 3.18

Consideramos que os 9,09% que desenharam um só retângulo, porém de área correta, apresentaram produção incompleta, já que não obedeceram completamente o enunciado do problema. Também consideramos que esses alunos podem avançar no conhecimento de área durante as fases de explicitação e de institucionalização.

5 desenharam um retângulo de área incorreta →

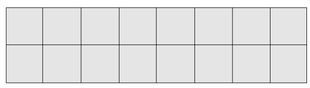


Figura 3.19

Esses cinco alunos, que perfizeram 22,73% da classe, também parecem ter feito alguma confusão entre as medidas dos lados e a área do retângulos, como alguns alunos do grupo 2.

Em resumo, consideramos que os 9,09% que desenharam dois retângulos não-congruentes de 2 cm^2 de área (produção correta e completa) tinham boas condições para debater suas produções e poderiam contribuir nas discussões que promoveríamos na sessão 2.

Quanto aos 45,45% que apresentaram produção correta porém incompleta, consideramos que poderiam avançar no conhecimento de área nas fases de explicitação e de institucionalização da sessão seguinte.

A Tabela 1 mostra que 45,46% dos alunos desenharam retângulos com área incorreta. Mesmo que os retângulos produzidos não tenham apresentado 2 cm^2 de área, nosso quadro teórico de análise permite diagnosticar, nessas produções incompletas, quais os conhecimentos mobilizados por esses alunos. Assim, se estes desenharam retângulos, podemos dizer que apresentaram algum conhecimento no domínio geométrico, ainda que insuficiente para a solução correta do problema.

Os alunos, nesse problema, não apresentaram dificuldades em desenhar retângulos em malha quadriculada ao considerarem como unidade de área um retângulo formado por quatro quadrados congruentes.

Tampouco tivemos evidências de que consideraram como unidade de área apenas o quadrado de 1 cm de lado e de que usaram o retângulo de 1 cm^2 como unidade de área sem objeção.

Depois da sessão 2, em que promoveríamos explicitações e institucionalização, poderíamos observar se teria havido progresso no conhecimento dos alunos.

Problema 2 - Enunciado

Você pode desenhar um retângulo de $\frac{1}{2}$ cm² de área? ________

a) Se pode, desenhe-o na folha de papel quadriculado.

b) Escreva o que pensou para responder essa questão.

O que quisemos observar:

- **os procedimentos adotados pelos alunos para a obtenção de um retângulo de $\frac{1}{2}$ cm² de área.**
- **se eles considerariam como unidade de área um retângulo de 1²cm ou um quadrado de $\frac{1}{4}$ cm² de área.**

Resultados

Tabela 2: Resultados na obtenção de um retângulo de $\frac{1}{2}$ cm² de área.

Procedimentos	Percentual		
	Área correta	Área incorreta	Total
Seguiram as linhas do papel quadriculado.	54,55%	27,27%	81,82%
Seguiram parcialmente as linhas do papel quadriculado.	4,54%	13,64%	18,18%
Total	59,09%	40,91%	100%

Para uma melhor compreensão da análise, são apresentados na Tabela 3 os procedimentos adotados pelos alunos quanto aos seguintes

aspectos: obtenção de um retângulo de $\frac{1}{2}$ cm² de área (na coluna *Procedimentos*); **exemplos de desenhos produzidos em cada procedimento (3.20, 3.21, 3.22, 3.23, 3.24 e 3.25, na coluna** *Figuras*, **tal como numerados após a tabela); exemplos de relatos pertinentes aos procedimentos[3] (na coluna** *Relatos*); **e percentual de alunos que realizaram tais procedimentos (na coluna** *Percentual*).

Os exemplos de desenhos, com suas respectivas designações, figuram abaixo da tabela.

[3] **Na transcrição desses relatos, reproduzimos a grafia utilizada pelos alunos.**

Tabela 3: Procedimentos adotados na obtenção de um retângulo de ½ cm^2 de área.

Procedimentos	Figuras	Relatos*	%
1. Justaposição de dois quadrados de ¼ cm^2, pintando o retângulo obtido.	**3.20**	**Bruno:** *Para responder essa questão fiz a metade do retângulo que tem do lado* **[referindo-se à unidade desenhada na folha de papel quadriculado].**	**54,54%**
2. Justaposição de quatro quadrados de ¼ cm^2, pintando metade do retângulo obtido.	**3.21**	**Guilherme:** *Pensei em dividir um retângulo* **[referindo-se ao retângulo de 1 cm^2]** *para dar a medida ½ cm^2.*	**4,55%**
3. Justaposição de dois quadrados de ¼ cm^2, pintando apenas ¼ cm^2.	**3.22**	**Fernando Tadeu:** *Eu pensei em fazer dois quadradinhos e só pintar 1, com isso eu vou ter ½, então ficou um quadradinho e o outro sem pintar.*	**9,09%**
4. Justaposição de um retângulo de 1 cm^2 a um retângulo de ½ cm^2, pintando o retângulo obtido.	**3.23**	**Larissa:** *É só acrescentar meio quadrado em um lado.*	**4,55%**
5. Justaposição de 2 retângulos de 1 cm^2 seguida de divisão em dois retângulos, pintando um desses retângulos.	**3.24**	**Paula:** *Eu dobrei depois dividi.*	**9,09%**
6. Justaposição de 2 retângulos de 1 cm^2.	**3.25**	**Robson:** *Eu conservei um dos lados e multipliquei a área.*	**18,18%**

*** Mantiveram-se as grafias originais.**

Figuras

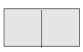


Figura 3.20

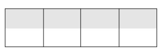


Figura 3.21

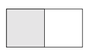


Figura 3.22

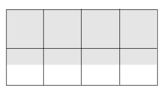


Figura 3.23

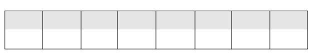


Figura 3.24

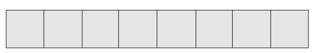


Figura 3.25

Análise dos resultados do problema 2

De acordo com as Tabelas 2 e 3, concluímos que mais da metade da classe (54,55%) acertou o problema. Podemos dizer que esses alunos resolveram um problema que para eles não apresentava nada de novo. Em nosso referencial teórico, tais produções são classificadas como completas, e para esses alunos este seria um problema de *familiarização*.

Apesar de corretas, não podemos considerar como completas as produções de 4,54% da classe, pois não atenderam as instruções do problema, que pediam que se desenhasse um retângulo de $\frac{1}{2}$ cm^2 de área seguindo as linhas do papel quadriculado (Figura 3.22). Um dos motivos que conduziram os alunos a suas respostas pode ter sido a não-compreensão das instruções escritas e faladas.

Os demais alunos (40,91%) apresentaram outros retângulos de área incorreta. Podemos concluir que nessas produções incompletas foi mobilizado algum conhecimento no domínio geométrico para a solução do problema, pois todos desenharam retângulos. Seu conhecimento era, porém, insuficiente para que chegassem à solução correta.

Notamos que 9,09% da classe utilizou como unidade dois quadrados de $\frac{1}{4}$ cm^2 de área, e não quatro quadrados de $\frac{1}{4}$ cm^2 de área, pois em uma das justificativas, o aluno Fernando Tadeu tomou um quadrado de um total de dois e não dois de um total de quatro.

Devemos aqui notar que as discussões com a professora já nos indicavam que os alunos não saberiam trabalhar com frações com desenvoltura. De fato, ela nos sugeriu que retirássemos o problema que pedia o desenho de um quadrado de $\frac{1}{4}$ cm^2. Durante a entrevista, poderíamos ter aprofundado as discussões visando a adequação desse problema à programação da professora.

O domínio numérico pareceu afetar a resolução de tal problema.

Problema 3 - Enunciado

Você pode desenhar retângulos de $\frac{1}{2}$ cm^2 de área? ________

a) Se pode, desenhe-os no papel quadriculado.

b) Escreva o que pensou para responder a questão.

O que quisemos observar:

Os procedimentos de obtenção de retângulos de $\frac{1}{2}$ cm^2 de área utilizando decomposição e composição da unidade de 1 cm^2 de área por meio de desenhos.

Tabela 4: Resultados na obtenção de retângulos de $2\frac{1}{2}$ cm²

Área correta	Área incorreta
40,91%	59,09%

Na Tabela 5 apresentamos: os procedimentos de obtenção de retângulos de $2\frac{1}{2}$ cm² de área (na coluna *Procedimentos*); exemplos de desenhos produzidos em cada procedimento (3.26, 3.27 e 3.28, na coluna *Figuras*, tal como numerados após a tabela); exemplos de relatos pertinentes aos procedimentos (na coluna *Relatos*); percentuais de alunos que realizaram tais procedimentos (na coluna *Percentual*).

Os desenhos, com suas respectivas designações, figuram após a tabela.

Tabela 5: Procedimentos adotados na obtenção de retângulos de $2\frac{1}{2}$ cm² de área.

Procedimentos	Figuras	Relatos*	%
1. Justaposição de 2 retângulos de 1 cm² de área a um retângulo de ½ cm² de área. Produção de dois retângulos não-congruentes.	**3.26 e 3.27**	**Gustavo:** *Eu desenhei um retângulo de ½ cm² de área mais dois de 1 cm² de área.*	**4,55%**
2. Justaposição de 8 quadrados de ¼ cm² a dois quadrados de ¼ cm². Produção de apenas um retângulo.	**3.26 ou 3.27**	**Eduardo:** *Eu devo fazer 2 cm², que é 8 quadradinhos + ½ cm², que são 2 quadradinhos.* **Guilherme:** *Pensei em desenhar 8 quadrados (2 cm²) e mais 2 quadrados (½ cm²)*.	**36,36%**
3. Justaposição de 8 quadrados de ¼ cm² a um quadrado de ¼ cm².	**3.28**	**Thomaz:** *Eu pensei em desenhar dois retângulos de 1 cm².*	**59,09%**

*** Mantiveram-se as grafias originais.**

Figuras

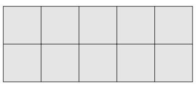


Figura 3.26

Figura 3.27

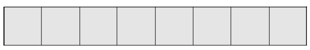


Figura 3.28

Análise dos resultados do problema 3

Na Tabela 5 podemos observar que 4,55% da classe desenhou dois retângulos não-congruentes de área correta. Consideramos que para esses alunos o problema não trazia qualquer conhecimento novo. Em nosso referencial teórico, esse problema se caracteriza, para tais alunos, como de *familiarização*. **Por outro lado, 36,36% dos alunos desenharam um retângulo de $2\frac{1}{2}$ cm^2 de área (Figura 3.26 ou Figura 3.27), podendo evoluir em seus conhecimentos de área de modo a apresentar dois retângulos não-congruentes de mesma área.**

Ao analisarmos os relatos desses 40,91% que acertaram a área pedida no problema, verificamos que foram utilizados dois procedimentos: um deles foi a decomposição do retângulo de 1 cm^2 de área para obterem um retângulo de $\frac{1}{2}$ cm^2 de área, seguida de uma justaposição com um retângulo de 2 cm^2 de área; no outro procedimento os alunos, ao realizarem a decomposição do retângulo de 1 cm^2 de área, tomaram quadrados de $\frac{1}{4}$ cm^2 de área e os justapuseram de modo a compor um retângulo de $2\frac{1}{2}$ cm^2.

Quanto aos alunos que não responderam corretamente o

problema (59,09%), consideramos suas produções como incompletas, pois todos desenharam retângulos, mobilizando portanto um dos domínios em jogo no problema, o geométrico. As dificuldades que esses alunos apresentaram poderiam provir de falha na compreensão do conceito de área (domínio das grandezas) ou de falta de conhecimento do domínio numérico.

Depois das sessões em que promoveríamos a explicitação e a institucionalização, poderíamos observar se tais alunos teriam avançado em seu conhecimento.

Conclusões quanto à evolução da seqüência

Esta primeira sessão nos levou a concluir que na sessão seguinte seria necessário reintroduzir (institucionalizando) o significado de área e o de retângulos não-congruentes, para dar a todos os alunos condições de conferirem seus resultados e produzirem novas figuras, já para o problema 1.

De acordo com a assessora da escola: "*Bons alunos erraram. Parecem ter esquecido o conceito de área***."**

Na segunda sessão, introduziríamos a noção de área, de acordo com nosso quadro teórico. Usaríamos apenas números inteiros e após a fase de validação e institucionalização proporíamos pelo menos um problema de familiarização para avaliar o conhecimento individual dos

alunos, antes de reutilizarmos frações da unidade centímetro quadrado.

3.2 Sessão 2

Objetivo

Nesta sessão, visamos: devolver o problema 1 para realizar as fases de explicitação, validação e institucionalização referentes ao conceito de área requerido nos problemas da sessão 1; levar o aluno a validar os conhecimentos utilizados no problema 1, refazendo-o agora na cor verde, quando necessário, para que a produção pudesse ser distinguida da original, feita com lápis vermelho; propor um problema para verificação do conhecimento individual dos alunos, fase de familiarização.

Nas fases de explicitação e de validação os alunos puderam descrever as produções que haviam realizado, bem como suas conjecturas e os resultados que haviam obtido no problema 1, e tiveram a oportunidade de validá-los Com base na análise da sessão 1, fizemos as seguintes institucionalizações:

a) **concepção de área:** *Quando queremos calcular a área de uma figura, devemos verificar quantas unidades de área cabem nessa figura.*

b) **retângulos não-congruentes:** *Em todos os problemas, quando pedirmos dois retângulos, queremos dizer retângulos diferentes, isto é, que não estejam apenas em posições diferentes.*

Material

Foram utilizados: cartolina quadriculada, afixada na lousa para que nela os alunos pudessem reproduzir seus desenhos; giz de cera, para desenharem na cartolina; folhas em que haviam resolvido o problema 1; lápis verde para refazerem suas produções nessas folhas; palito de sorvete.

Realização e análise da sessão 2

No início da sessão, explicamos aos alunos que receberiam novamente a folha em que haviam resolvido o primeiro problema e que, durante as discussões, poderiam ir refazendo suas produções em lápis verde para diferenciá-las da realizada na sessão anterior. Se percebessem que sua produção anterior estava incorreta, deveriam riscá-la (em vez de apagá-la) e fazer um novo desenho. Quando considerassem sua produção incompleta, bastaria completá-la. Caso considerassem sua produção correta e completa, não deveriam alterá-la. Este seria o modo de nos mostrarem a validação de suas produções. Após essa fase, recolheríamos a folha de respostas.

Devolvemos a eles a folha contendo o primeiro problema, relembramos seu enunciado, a questão proposta e a unidade considerada (Figura 3.29). Nesse primeiro problema, os alunos deveriam desenhar dois retângulos de 2 cm^2 de área, traçando-os exclusivamente sobre as linhas do papel quadriculado.

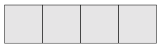


Figura 3.29

Descrevem-se a seguir partes relevantes dessa sessão que elucidam as fases da dialética ferramenta–objeto. Nessa descrição são feitas algumas análises pontuais durante as falas de alguns alunos.

Iniciamos a discussão perguntando a eles quem gostaria de desenhar suas respostas na cartolina.

Jonathan foi o primeiro a se oferecer. Enquanto ele desenhava seu retângulo (Figura 3.30) na cartolina quadriculada, outros alunos faziam comentários. Descrevemo-los a seguir.

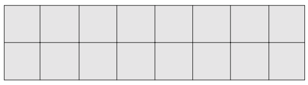


Figura 3.30

Explicitações	**Giancarlo:** *Se o dele está certo, o meu está errado.* **Caio:** *Está errado, isso.* **Robson:** *Claro que está!* **Rafael:** *Será que tá certo esse negócio?*
Ao perceber a dúvida de alguns alunos, a pesquisadora interveio, questionando a classe.	**Pesquisadora:** *Qual a área desse retângulo que o Jonathan fez?*
Explicitações	**Luiz:** *Oito.* **Eduardo, Gustavo, Henrique, Fernando** *Quatro.*

A pesquisadora nesse momento questionou Jonathan para que explicasse sua produção.	**Pesquisadora:** *Qual a área? Jonathan, o que você pensou para fazer esse retângulo?*
Erro na concepção de área e validação.	**Jonathan:** *Quatro. É que se era para fazer 2 cm^2 de área, eu pensei que era para multiplicar os lados por dois.*

Jonathan justificou sua produção alegando ter multiplicado por dois os lados do retângulo dado como unidade, o que nos confirma que esse aluno fez confusão entre área e comprimento dos lados. Pudemos porém observar que nesse momento ele fez a validação de sua produção, pois ao responder que a área do retângulo desenhado era de 4 cm^2, e não de 2 cm^2, verificou que o procedimento que usara não estava correto. A continuação desse diálogo esclarece essa observação:

Questionamento da pesquisadora, querendo saber como ele e seus colegas verificariam se o retângulo tinha de fato essa área.	**Pesquisadora:** *Dessa forma, temos 4 cm^2 de área. Por quê?*
Acerto na concepção de área.	**Gustavo:** *Porque temos quatro unidades de 1 cm^2 de área*.

Validação da classe e do próprio aluno Jonathan.

A classe concordou com a resposta de Gustavo, inclusive o próprio Jonathan, que então redesenhou corretamente um retângulo de 2 cm² (Figura 3.31) em sua folha, riscando o desenho incorreto.

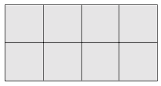


Figura 3.31

Nesse momento resolvemos fazer a institucionalização do conceito de área, como discutido no Capítulo 1, seguida de algumas explicitações dos alunos, que transcrevemos a seguir:

Institucionalização.

Pesquisadora: *Certo, isso quer dizer que* ***quando queremos calcular a área de uma figura devemos verificar quantas unidades de área cabem nessa figura*** **.**

Explicitação.

Rafael: *Eu fiz quatro em cima e quatro embaixo*.

Pedimos que viesse à lousa e desenhasse sua solução na cartolina quadriculada (Figura 3.32):

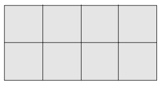


Figura 3.32

Embora esse aluno, ao mencionar a unidade, se referisse a "*quatro*** [quadrados da malha]** *em cima* **...", demonstrava ter usado a unidade de 1 cm² representada. Refletindo com a classe sobre o que**

Rafael havia feito, concluímos que se tratava de uma justaposição de duas unidades de 1 cm² de área.

Não houve qualquer explicitação por parte dos alunos que nos mostrasse que consideravam apenas o quadrado de 1 cm de lado como centímetro quadrado. Ao contrário, usaram o retângulo representado como centímetro quadrado, como vemos no próximo diálogo.

Perguntamos à classe se havia mais retângulos com 2 cm² de área que não o desenhado na cartolina. Transcrevemos, a seguir, trechos relevantes dessa discussão.

Explicitação.	**Gustavo revelou que havia feito outro, colocando** *uma unidade ao lado da outra* **(Figura 3.33).**

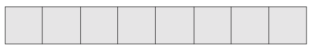


Figura 3.33

Questionamento da pesquisadora.	**Pesquisadora: Mais alguém fez outro retângulo?**
Explicitação.	**Guilherme:** *Fiz o mesmo do Rafael, só que na vertical* **[Figura 3.34].** **Outros alunos sugeriram que se desenhasse o mesmo que Gustavo, também verticalmente [Figura 3.35].**

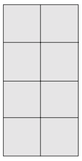


Figura 3.34

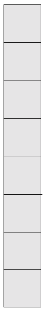


Figura 3.35

Questionamento da pesquisadora, buscando a existência de retângulos não-congruentes de mesma área	**Pesquisadora:** *Tirando o retângulo que o Jonathan tinha desenhado e riscado, o que os outros quatro retângulos desenhados têm em comum?*
Explicitações.	**Jonathan:** *Oito quadradinhos.* **Eduardo:** *A forma de retângulo.* **Caio:** *2* cm^2 *de área.*
Questionamento da pesquisadora, buscando a existência de retângulos não-congruentes de mesma área	**Pesquisadora:** *Muito bem, isso que vocês falaram são as características em comum. E o que vocês percebem que eles têm de diferente***?**
Explicitações.	**Jonathan:** *A forma.* **Caio:** *Dois iguais.*

Apesar de o termo *forma* **não ser utilizado no quadro teórico matemático, acolhemos a fala de Jonathan e o conduzimos à análise sobre a congruência de alguns retângulos, usando o linguajar de Caio.**	**Pesquisadora:** *Ah, a forma. Existem dois retângulos iguais?*
Reconhecimento de retângulos congruentes.	**Eduardo:** *Depende. Se inverter, temos dois iguais.* **Jonathan:** *Temos duas duplas.*
Questionamento quanto à congruência de retângulos.	**Pesquisadora:** *Então vamos verificar. Esses dois retângulos* **[apontando para os retângulos de 1 cm por 2 cm]** *estão em posições diferentes, mas podemos considerar que são retângulos iguais?*
Explicitação.	**Classe:** *Podemos.*
Questionamento quanto à congruência de retângulos.	**Pesquisadora:** *Temos os outros dois retângulos* **[apontando para os de $\frac{1}{2}$ cm por 4 cm]** *que também estão em posições diferentes, mas esses outros dois também são iguais?*
Explicitação.	**Classe:** *São*.
Institucionalização da existência de retângulos não-congruentes de mesma área.	**Convencionamos que:** *Em todos os problemas, quando pedirmos dois retângulos, queremos dizer retângulos diferentes, isto é, que não estejam apenas em posições diferentes.*

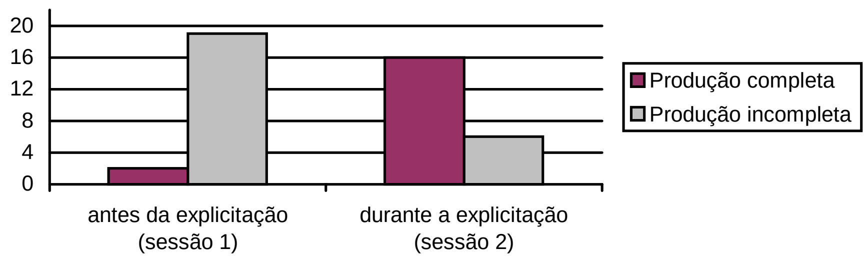
Durante as discussões, os alunos foram refazendo suas produções. Após essa fase, recolhemos as folhas de respostas.

Análise das produções feitas durante as sessões 1 e 2

Analisamos as novas produções dos alunos feitas nesta segunda sessão, comparando-as com aquelas feitas na sessão 1. Pudemos fazer algumas constatações confrontando os dados analisados no problema 1 com a produção dos alunos durante esta segunda sessão.

O seguinte gráfico nos mostra o número de alunos que evoluíram de produções incompletas para produções completas, antes e durante a fase de explicitação ocorrida na sessão 2.

Gráfico 1 - Produções completas/ incompletas



Os dois únicos alunos que haviam desenhado dois retângulos não-congruentes de 2 cm^2 de área antes da fase de explicitação, mantiveram suas produções, sem alterá-las.

Antes da sessão 2, oito alunos haviam feito dois retângulos congruentes de 2 cm^2 de área, que constituem produções corretas e

incompletas; durante esta sessão, quatro alunos riscaram um dos retângulos e desenharam um não-congruente, tornando suas produções corretas e completas.

Os dois alunos que haviam desenhado apenas um retângulo de 2 cm^2 de área completaram a resolução do problema com um retângulo não-congruente, tornando suas produções completas.

O aluno que havia desenhado um retângulo de 2 cm^2 e outro de área incorreta riscou sua produção incorreta e desenhou um novo retângulo de 2 cm^2 de área, com as medidas dos lados diferindo das do que já estava correto.

Antes da sessão 2, nove alunos haviam produzido retângulos de área incorreta; durante a sessão 2, sete alunos corrigiram suas produções desenhando dois retângulos não-congruentes de 2 cm^2 de área.

Podemos concluir que seis alunos, apesar de chegarem a desenhar os dois retângulos de 2 cm^2 de área durante a explicitação, pesquisa e institucionalização, mostraram não perceber que ambos não deveriam diferir apenas nas posições. Isso revela que o que convencionamos ou discutimos a esse respeito não foi suficiente para melhorar o desempenho de todos os alunos.

Após as fases de explicitação, pesquisa e institucionalização, propusemos outro problema, de familiarização, com os conceitos e procedimentos discutidos anteriormente. Embora nós o consideremos

como um problema de familiarização, apresentou um termo que não fora trabalhado por nós até aquele momento: quadrado. Além disso, o enunciado traz a expressão *desenhar um quadrado ou retângulo*, **que pode não ser habitual para os alunos.**

Problema 4 - Enunciado

Você pode desenhar um quadrado ou retângulo de 1 cm^2 de área? ________

a) Se pode, desenhe-o na folha de papel quadriculado.

b) Escreva o que pensou para responder a questão.

O que quisemos observar

Nosso propósito foi observar os procedimentos utilizados pelos alunos para a obtenção de um quadrado ou de um retângulo de 1 cm^2 de área após a discussão realizada em sala e verificar se desenhariam a unidade de 1 cm^2 de área como um quadrado ou um retângulo.

Resultados

Tabela 6: Resultados no desenho do quadrado ou do retângulo de 1 cm^2 de área.

Produção	Percentual
Área correta de um quadrado e de um retângulo de 1 cm^2 de área.	80%
Área correta de apenas uma das duas figuras de 1 cm^2 de área.	5%
Área incorreta, qualquer que tenha sido a figura desenhada.	15%

Na Tabela 7 apresentamos: os procedimentos de obtenção de

retângulos de 1 cm^2 de área (na coluna ***Procedimentos*****); exemplos de desenhos produzidos em cada procedimento (3.36, 3.37, 3.38, na coluna** ***Figuras*****, tal como numerados após a tabela); exemplos de relatos pertinentes aos procedimentos (na coluna** ***Relatos*****); percentuais de alunos que realizaram tais procedimentos (na coluna** ***Percentual*****).**

Os desenhos, com suas respectivas designações, figuram logo após a tabela.

Tabela 7: Procedimentos adotados na obtenção de retângulos de 1 cm^2 de área.

Procedimentos	Figuras	Relatos*	%
1. Justaposição de quatro quadrados de ¼ cm^2 para formar um quadrado e um retângulo.	**3.36 e 3.37**	**Eduardo:** *Se o retângulo de 1 cm^2 de área tem 4 quadrados pequenos, o quadrado de 1 cm^2 de área também deve ter 4 quadrados pequenos.* **Guilherme:** *Eu pensei em desenhar 4 quadradinhos na forma de um retângulo e o outro na forma de quadrado.* **Thomaz:** *Eu pensei que eu podia juntar os 4 quadradinhos e formar um quadrado de 1 cm^2.*	**70%**
2. Decomposição do retângulo seguida de composição formando um quadrado.	**3.36 e 3.37**	**Gustavo:** *Para responder eu pensei que bastava colocar o quadrado com a mesma área do retângulo, mas com um formato diferente.*	**10%**
3. Justaposição de quatro quadrados de ¼ cm^2 para formar um retângulo.	**3.37**	**Henrique:** *Eu pensei assim: 4 quadradinhos eqüivale a 1 cm^2 então desenhei os 4 quadradinhos*.	**5%**
4. Outros (incorretos).	**3.38**	**Priscila:** *Eu deixei um quadrado só. Eu mexi um lado só, e o outro lado fiz 2 quadrados.*	**15%**

*** Mantiveram-se as grafias originais.**

Figuras

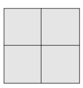


Figura 3.36

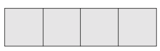


Figura 3.37

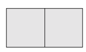


Figura 3.38

Análise dos resultados do problema 4

Analisando as respostas dos alunos, verificamos que eles colocaram em jogo conhecimentos antigos.

Verificamos que, apesar de pedirmos no enunciado do problema 4 que os alunos desenhassem um quadrado ou retângulo de 1 cm^2 de área, 80% deles desenharam tanto um como outro. Isso nos revelou que esses alunos consideraram ambos como unidade de 1 cm^2 de área, e não apenas o quadrado de 1 cm de lado. Além disso, não tiveram dificuldades relativas ao enunciado, pois acertaram o problema.

Como descrito na Observando a Tabela 7, Gustavo, por exemplo, ao justificar seu procedimento, usou um argumento em que predominava o domínio geométrico para a solução correta do problema, pois, de acordo com sua explicação, podemos verificar que decompôs o retângulo para compor o quadrado de mesma área. Outros usaram argumentos que envolviam os domínios geométrico e numérico para justificar suas produções. Para Eduardo, por exemplo, o retângulo e o quadrado deveriam ter a mesma quantidade de quadradinhos.

No entanto, porém 5% dos alunos desenharam apenas um retângulo de 1 cm^2 de área, produção correta e incompleta que nos revela que podem evoluir nas sessões seguintes a respeito da unidade ou ainda com a produção de retângulos não-congruentes de mesma área.

Os demais alunos (15%), que erraram tanto na obtenção de um quadrado como na de um retângulo, podem também evoluir nos conhecimentos relativos ao conceito de área.

Conclusões quanto à evolução da seqüência

No trabalho com áreas envolvendo números inteiros e menores do que 3, a maioria dos alunos mostrou desenvoltura.

Resolvemos então prosseguir com a realização da seqüência prevista, abordando os números fracionários.

3.3 Sessão 3

Objetivo

Nesta sessão, visamos: devolver os problemas 2 e 3 aos alunos, para discutir suas produções; levá-los a validar essas produções, refazendo-as, quando necessário, com lápis verde, de modo a diferenciá-las daquelas da sessão 1; propor um problema de familiarização.

Algumas convenções foram institucionalizadas quanto às instruções a serem seguidas.

Material

Cartolina quadriculada, colocada na lousa para que os alunos pudessem reproduzir suas produções; giz de cera, para desenharem na cartolina; folha dos problemas 2 e 3 resolvidos; lápis verde para refazerem suas produções nas folhas; palito de sorvete.

Realização da fase de explicitação do problema 2

Iniciamos a aula pedindo aos alunos que dissessem o que o segundo problema pedia. Responderam que era pedido o desenho de um retângulo de $\frac{1}{2}$ cm² de área. Perguntamos se alguém gostaria de desenhá-lo na cartolina quadriculada. Transcrevemos a seguir as explicitações relevantes ocorridas em classe.

Explicitação.

Thomaz foi o primeiro a se oferecer, porém Fernando Tadeu foi à lousa e desenhou um retângulo com dois quadradinhos (Figura 3.39).

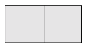


Figura 3.39

Explicitação.

Henrique foi à frente e desenhou o mesmo retângulo que Fernando Tadeu, embora em outra posição (Figura 3.40).

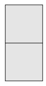


Figura 3.40

Explicitação: os alunos contestaram, argumentando que era o mesmo retângulo, apoiando-se para isso na discussão realizada no problema 1.

Larissa: *É o mesmo retângulo.*

Gustavo: *Nós já vimos que são iguais.*

Questionamento.

Pesquisadora: *Como vocês sabem que esses retângulos tem* $\frac{1}{2}$ *cm² de área***?**

Explicitação e validação.

Rafael e outros alunos responderam: *Se a unidade tem 4 quadradinhos, a metade tem 2 quadradinhos.*

Gustavo: *Se o retângulo de 1 cm² tem 4 quadradinhos o de* $\frac{1}{2}$ *cm² terá a metade, ou seja 2 quadradinhos.*

Jonathan respondeu, sugerindo outro retângulo: *Divide a unidade na metade, mas não como o de Fernando* **[apresentando um retângulo de** $\frac{1}{2}$ **cm² de área, Figura 3.41, sem seguir as linhas do papel**

	quadriculado].

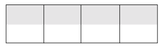


Figura 3.41

Explicitações.	**Thomaz disse:** *Está certo o do Jonathan.* **Caio comentou:** *Você gosta de complicar, hein?*
Questionamento.	**Pesquisadora:** *Como poderíamos conferir que a figura sugerida por Jonathan tem* $\frac{1}{2}$ *cm*^{2} *de área***?**
Explicitação.	**Alguns alunos responderam** *Dobra a unidade ao meio***.**
Confirmação do procedimento seguida de retomada do enunciado e institucionalização das instruções a serem seguidas.	**Pesquisadora:** *Isso mesmo. Esse é um modo de conferir, mas lembram da orientação escrita e falada no início de cada problema? Era pedido que vocês* ***desenhassem os retângulos seguindo sempre as linhas do papel quadriculado*** **.** **Classe:** *Sim***.** **Jonathan:** *É, você tinha falado, mas eu tinha esquecido.* **Pesquisadora:** *Convencionaremos que todos os desenhos feitos a partir deste momento devem ser feitos sempre seguindo as linhas do papel quadriculado***.**

Eles então perceberam que, apesar de haverem raciocinado corretamente, o retângulo obtido por Jonathan não obedecia a todo o enunciado e às convenções feitas.

Em continuação à discussão, temos:

Explicitação.	**Giancarlo disse:** *Se a unidade de 1 cm^2 de área tem 4 quadradinhos, a área de um dos quadradinhos é de $\frac{1}{4}$ cm^2.*

Paramos para discutir a afirmação de Giancarlo:

Questionamento.	**Pesquisadora:** *Como podemos verificar que o quadradinho tem $\frac{1}{4}$ cm^2 ?*
Explicitação.	**Classe:** *Divide ao meio e depois ao meio de novo.* **Gustavo:** *Como $\frac{1}{4}$ equivale a uma parte de um inteiro dividido por quatro, baseado no retângulo de 1 cm^2 com quatro quadradinhos um quadradinho tem $\frac{1}{4}$ cm^2 de área.*
Questionamento.	**Pesquisadora:** *E se pensarmos no quadrado de 1 cm^2, vale o mesmo raciocínio?*
Explicitação.	**Classe:** *Vale, claro.* **Gustavo:** *Vale também porque tem quatro quadradinhos.* **Caio:** *Se dividirmos o retângulo de $\frac{1}{2}$ cm^2 de área em dois, obtemos $\frac{1}{4}$ cm^2 de área.*

Após o término da discussão demos mais um tempo para os alunos terminarem suas novas produções. Depois disso, recolhemos a folha do problema 2.

Análise das produções feitas nas sessões 1 e 3 referentes ao problema 2

Confrontando as produções da sessão 1 e sessão 3 referentes ao problema 2, podemos fazer o seguinte gráfico:

Gráfico 2 - Produções completas/ incompletas

Nesse gráfico verificamos que todos os 12 alunos que desenharam corretamente um retângulo de $\frac{1}{2}$ cm^2 de área mantiveram suas produções.

Além disso, dos 10 alunos que haviam feito produções incompletas antes da fase de *explicitação*, 9 conseguiram tornar suas produções corretas e completas, o que significou um avanço para eles.

O aluno que havia desenhado um retângulo de área incorreta na

sessão 1 produziu um novo retângulo de área correta, porém sem seguir as linhas do papel quadriculado, o que a torna uma produção correta mas incompleta. Esse aluno teria a oportunidade de rever seus conhecimentos nas sessões seguintes.

Realização da fase de explicitação do problema 3

Entregamos o problema 3 para os alunos. Transcrevem-se a seguir trechos relevantes das discussões:

Questionamento.	**Pesquisadora: O que devemos desenhar nesse problema?**
Explicitação.	**Gustavo respondeu:** *Retângulos de* $2\frac{1}{2}$ *cm*^{2} *de área*.
Questionamento.	**P:** *Todos entenderam a notação '*$2\frac{1}{2}$ *cm*^{2}*'?*
Explicitações.	**Thomaz: São dois meios centímetros quadrados de área.** **Caio: Não é isso.**
Intervenção sobre a confusão da notação.	**Pesquisadora:** *Como fazemos a leitura desse número?*
Explicitação.	**Gustavo:** *São dois e meio centímetros quadrados de área.*

Questionamento	**Pesquisadora:** *Mas o que isso significa?*
Explicitações.	**Giancarlo:** *São dois retângulos de quatro quadradinhos mais dois quadradinhos, que seria a metade.* **Gustavo:** *São dois centímetros quadrados de área mais meio centímetro quadrado de área.*
Confirmação do procedimento, seguida de questionamento.	**P:** *Está certo. Alguém gostaria de desenhar na cartolina quadriculada?*
Explicitação.	**Eduardo:** *Eu quero fazer.* **[Vai à lousa e desenha o retângulo da Figura 3.42.]** **Outros desenhos foram sendo feitos pelos alunos, todos corretos.**

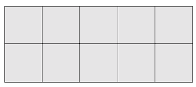


Figura 3.42

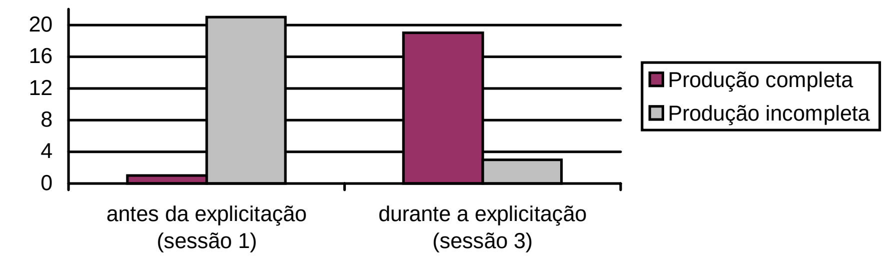
Questionamento.	**Pesquisadora:** *Eduardo, você gostaria de explicar como pensou para fazer esse retângulo?*
Explicitação.	**Eduardo:** *Eu fiz 2 cm^2, que são oito quadradinhos, mais $\frac{1}{2}$ cm^2, que são dois quadradinhos*.

Retiramos as cartolinas da lousa, deixamos os alunos terminarem suas novas produções e recolhemos as folhas do problema 3.

Análise das produções feitas nas sessões 1 e 3 referentes ao problema 3

Cotejando a validação feita na fase de pesquisa e a validação feita durante a fase de explicitação e institucionalização, pudemos fazer as constatações indicadas no Gráfico 3.

Gráfico 3 - Produções completas/ incompletas



Como mostra esse gráfico, apenas um aluno obteve produção correta e completa na sessão 1, isto é, desenhou mais de um retângulo não-congruente de $2\frac{1}{2}$ cm² de área, mantendo suas produções durante a sessão 3.

Dos oito alunos que desenharam corretamente apenas um retângulo de $2\frac{1}{2}$ cm² de área, obtendo portanto uma produção correta e incompleta, todos os oito conseguiram desenhar mais um retângulo

além do já desenhado na sessão 1, tornando assim suas produções corretas e completas.

Dos 13 alunos restantes que haviam desenhado retângulos de área incorreta, temos: dez desses alunos desenharam corretamente dois retângulos não-congruentes de $2\frac{1}{2}$ cm² de área; um desenhou apenas um retângulo de área correta e dois não fizeram novas produções nessa sessão. Esses três alunos que nessa sessão não conseguiram evoluir em suas produções teriam a oportunidade de avançar em seus conhecimentos a respeito do conceito de área nas sessões seguintes.

Após a fase de explicitação, realizamos com os alunos outra atividade, de familiarização, com os conceitos, propriedades e convenções discutidos anteriormente.

Problema 5 - Enunciado

Você pode desenhar retângulos de $3\frac{1}{2}$ cm² de área?

a) Se pode, desenhe-os na folha de papel quadriculado.

b) Escreva o que pensou para responder a questão.

O que quisemos observar

Os conhecimentos que os alunos disponibilizariam para a resolução de um problema similar a outro já discutido em classe.

Tabela 8: Resultados na obtenção de retângulos de 3 $\frac{1}{2}$ cm²

Área correta	Área incorreta
77,27%	22,73%

Na Tabela 9, apresentamos: os procedimentos de obtenção de retângulos de 3$\frac{1}{2}$ cm² de área (na coluna *Procedimentos*); exemplos de desenhos produzidos em cada procedimento (3.43, 3.44, 3.45, 3.46, na coluna *Figuras*, tal como numerados após a tabela); exemplos de relatos pertinentes aos procedimentos (na coluna *Relatos*); os percentuais de alunos que realizaram tais procedimentos (na coluna *Percentual*).

Os desenhos, com as respectivas designações, figuram logo após a tabela.

Tabela 9: Procedimentos adotados na obtenção de retângulos de $3\frac{1}{2}$ cm^2 de área.

Procedimentos	Figuras	Relatos*	%
1. **Justaposição de 3 retângulos, cada um formado por 4 quadrados, a um retângulo formado por 2 quadrados de ¼ cm^2 de área.**	**3.43 e 3.44**	**Giancarlo:** "*Para responder pensei em 3 retângulos de 4 quadradinhos e depois mais 2 quadradinhos que seria a metade.*"	**22,73%**
2. **Justaposição de 12 quadrados de ¼ cm^2 de área a 2 quadrados de ¼ cm^2 de área.**	**3.43 e 3.44**	**Henrique:** "*Para desenhar 3½ cm^2 eu juntei 12 quadradinhos com 2 quadradinhos.*"	**54,54%**
3. **Justaposição de 3 retângulos de 1 cm^2 de área**	**3.45**	**Thomaz:** "*Eu pensei em desenhar três retângulos de 1 cm^2 de área.*"	**18,18%**
4. **Justaposição de 3 quadrados de ¼ cm^2 de área a metade de 1 quadrado de ¼ cm^2 de área.**	**3.46**	**Lucas:** "*Eu pensei em desenhar 3 quadrados mais meio quadrado.*"	**4,55%**

*** Mantiveram-se as grafias originais.**

Figuras:

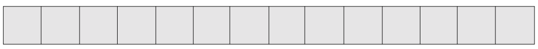


Figura 3.43

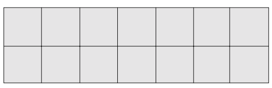


Figura 3.44

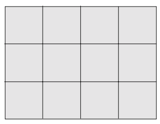


Figura 3.45

Figura 3.46

Análise do problema 5

Ao analisarmos as Tabela 8 e 9, verificamos que 77,27% dos alunos realizaram corretamente a composição de três retângulos de 1 cm² a um retângulo de $\frac{1}{2}$ cm², formando assim um retângulo de $3\frac{1}{2}$ cm² de área. Isso demonstra que esses alunos mobilizaram conhecimentos tanto no domínio numérico como no geométrico e no das grandezas. Esses alunos, além de realizarem corretamente a composição, desenharam dois retângulos não-congruentes, obtendo portanto produções corretas e completas.

Para 22,73% dos alunos, o retângulo de 1 cm² de área formado por quatro quadrados da malha não foi um fator que impedisse a resolução do problema.

Mais da metade da classe, 54,54%, fez uso de cálculos relacionados aos 4 quadradinhos, ou seja dos quatro quadrados da malha. Para esses alunos, nos parece que tampouco houve dificuldades em considerar a unidade formada por quatro quadrados congruentes.

Os demais alunos não chegaram a uma resposta correta. Verificamos que: 18,18% da classe compôs três retângulos de 1 cm². Esses alunos mobilizaram conhecimentos no domínio geométrico e numérico, porém no domínio numérico verificamos que os conhecimentos mobilizados não foram suficientes para a solução correta do problema. Entre as deficiências, podemos apontar falta de conhecimentos sobre números fracionários (domínio numérico) ou falta de compreensão do conceito de área (domínio das grandezas).

Quanto aos 4,55% restantes, verificamos que fizeram confusão entre a unidade de 1 cm^2 de área e o quadrado de $\frac{1}{4}$ cm^2, exemplificada na produção e no argumento do aluno Lucas, que se referiu à unidade como sendo o quadradinho da malha. Houve aqui falta de conhecimentos no domínio das grandezas (conceito e propriedades características).

Conclusões quanto à evolução da seqüência

Diante dos resultados obtidos nessa sessão, avaliamos que o percentual dos alunos que acertaram o problema 5 nos permitiria avançar na realização da seqüência.

Na próxima sessão discutiríamos a área de um mesmo retângulo usando diferentes unidades de área.

3.4 Sessão 4

Objetivo

Promover discussões sobre o cálculo da área de retângulos considerando diferentes unidades de área, a partir de alguns desenhos feitos na sessão 2.

Material

Para a realização desta sessão utilizamos: as cartolinas quadriculadas já usadas na sessão 2; giz de cera para possíveis produções dos alunos na cartolina; pedaços de cartolina quadriculada representando retângulos e quadrados de 1 cm^2 (em escala ampliada) para que, se necessário, os alunos pudessem sobrepô-los às figuras desenhadas, para validação.

Realização da sessão 4

Afixamos na lousa as cartolinas contendo as produções feitas pelos alunos na sessão 2, para discutirmos com a classe como poderia ser feito o cálculo da área daqueles mesmos retângulos usando outras unidades de área. Transcrevemos a seguir trechos relevantes da discussão em classe:

Questionamento.

Pesquisadora: *Quantas unidades de 1 cm² de área caberiam nesse retângulo* **[apontando para a Figura 3.47]?**

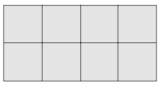


Figura 3.47

Explicitação.

Um coro de aluno respondeu imediatamente: *Duas unidades*.

Questionamento.

Pesquisadora: *Quem gostaria de justificar essa resposta*?

Explicitação.

Eduardo veio ao quadro. Sobrepôs um retângulo de cartolina representando 1 cm² sobre o retângulo desenhado, transladando a até varrê-lo por inteiro.

Questionamento.

Pesquisadora: Qual seria a área desse retângulo se a unidade tivesse $\frac{1}{2}$ **cm² de área?**

Explicitação.

Gustavo e outros alunos da classe responderam: *Quatro unidades de* $\frac{1}{2}$ *cm² de área.*

Questionamento.

Pesquisadora: *Vocês podem sugerir outra unidade para calcularmos a área*?

Explicitações.	**Giancarlo:** *Podemos usar um quadradinho*. **Gustavo:** *Podemos usar* $\frac{1}{4}$ *cm² de área*.
Questionamento.	**Pesquisadora:** *Quantas unidades de* $\frac{1}{4}$ *cm² de área cabem nesse retângulo* **[Figura 3.47]?**
Explicitação.	**Um coro de alunos disse** *Oito*.

Enquanto transcorria essa discussão, alguns alunos foram preenchendo na lousa a seguinte tabela:

Tabela 10: Mudanças de unidade de área

Unidade de área	Área
$\frac{1}{4}$ **cm²**	**8**
$\frac{1}{2}$ **cm²**	**4**
1 cm²	**2**

A seguir, reproduzimos a retomada com os alunos do que estávamos fazendo.

Institucionalização.	**Pesquisadora:** ***Estamos usando diferentes unidades de área para calcular a área do retângulo desenhado***.

Questionamento.	**Pesquisadora:** *A área muda conforme a unidade tomada como referência?*
Explicitação.	**Classe:** *Muda*.

Confirmamos a resposta da classe e lembramos a institucionalização, feita no problema 1, de o que seria calcular a área de uma figura:

Institucionalização.	**Pesquisadora: Certo.** *A área muda conforme a unidade tomada como referência* ***Quando queremos calcular a área de uma figura, devemos verificar quantas unidades de área cabem na figura.***

Faltava escrever a área do retângulo da Figura 3.48, desenhado por eles na cartolina, expressa agora nas diferentes unidades de área. Apagamos da tabela os números referentes à área do retângulo da Figura 3.47 para que os alunos pudessem preenchê-la com as áreas da Figura 3.48. Descrevemos a seguir a discussão.

Questionamento.	**Pesquisadora:** *Qual a área desse outro retângulo* **[Figura 3.48]**, *tomando como unidade 1 cm² de área?*

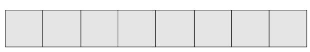


Figura 3.48

Explicitações. Esses alunos estavam tomando como unidade de área o quadradinho de ¼ cm² de área, e não o retângulo de 1 cm² de área.	**Jonathan e Thomaz:** *Oito* **[respondendo rapidamente].** **Rafael:** *Que oito, nada!*
Intervenção da pesquisadora.	**Pesquisadora:** *Prestem atenção na unidade da área que vocês estão usando!*
Questionamento.	**Pesquisadora:** *Qual a unidade sugerida como referência nessa linha da tabela* **[apontando para a linha de 1 cm²]?**
Explicitação.	**A classe respondeu:** *1 cm² de área*.
Questionamento.	**Pesquisadora:** *Qual é então a área desse retângulo* **[Figura 3.48]** *usando 1 cm² como unidade de área***?**
Explicitação.	**Vários alunos responderam:** *2 cm² de área*. **Em seguida alguns alunos disseram em voz alta:** *Se usássemos* $\frac{1}{2}$ *cm² de área, teríamos quatro vezes* $\frac{1}{2}$ *cm² de área, e se usássemos* $\frac{1}{4}$ *cm² de área teríamos oito vezes* $\frac{1}{4}$ *cm² de área.*

Fomos completando a tabela como fizéramos com o retângulo da Figura 3.47 e terminamos a discussão, pois o tempo havia se esgotado. Porém verificamos que poderíamos prosseguir com a seqüência.

3.5 Sessão 5

Objetivo

Esta sessão visou propor os problema 6 e 7, para verificação dos conhecimentos individuais dos alunos, e realizar as fases de explicitação e validação, relativas ao problema 6, além de efetuar alguma institucionalização, caso isso se mostrasse necessário.

Material

Os alunos receberam folhas de papel sulfite contendo os problemas, acompanhadas das folhas de papel quadriculado, e lápis vermelhos para efetuarem os desenhos. Para as discussões com o grupo-classe, dispuseram de cartolina quadriculada e giz de cera para o desenho de suas produções relativas ao problema 6.

Problema 6 - Enunciado

Você pode desenhar um quadrado ou um retângulo de 16 cm^2 de área? ______

Se pode, desenhe-o na folha de papel quadriculado.

O que quisemos observar

Nosso interesse era observar os procedimentos de obtenção de um quadrado ou retângulo de 16 cm^2 de área, verificando se os alunos

continuariam usando a contagem de unidades uma a uma ou se empregariam a multiplicação para o cálculo de área.

Resultados do problema 6

Tabela 11: Resultados na obtenção de um quadrado ou de um retângulo de 16 cm^2 de área.

Área correta	Área incorreta
40,91%	59,09%

Na Tabela 12, apresentamos: os procedimentos de obtenção de quadrados ou retângulos de 16 cm^2 de área (na coluna ***Procedimentos*****); exemplos de desenhos produzidos em cada procedimento (3.49, 3.50, 3.51, 3.52 e 3.53, na coluna** ***Figuras*****, tal como numerados após a tabela); exemplos de relatos pertinentes aos procedimentos (na coluna** ***Relatos*****); os percentuais de alunos que realizaram tais procedimentos (na coluna** ***Percentual*****).**

Os desenhos, com suas respectivas designações, figuram logo após a tabela, na escala 1: $\frac{1}{2}$.

Tabela 12: Procedimentos na obtenção de um quadrado ou retângulo de 16 cm^2 de área.

Procedimentos	Figuras	Relatos*	%
1. Justaposição de 16 unidades de 1 cm^2.	**3.49 e/ou 3.50**	**Gustavo:** *Para fazer o retângulo, eu percebi que o quadrado possui 16 vezes a unidade base, assim usei a mesma unidade de base 16 vezes, mas de outra forma.* **Fernando Tadeu:** *Eu entendi que era dezesseis vezes um centímetro quadrado, com 16 Quadradinhos por 4.*	**40,91%**
2. Justaposição de 16 quadrados de ¼ cm^2.	**3.51**	**Fernando:** *Eu usei os quadradinhos e contei 16 deles.*	**22,73%**
3. Desenho de um quadrado de 8 cm por 8 cm.	**3.52**	**Jonathan:** *Eu fiz 8 por 8, pois 8 e 8 dá 16.*	**31,82%**
4. Outros.	**3.53**	**Priscila:** *Eu desenhei de 1 cm^2, eu desenhei 16.*	**4,54%**

*** Mantiveram-se as grafias originais.**

Figuras

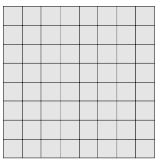


Figura 3.49

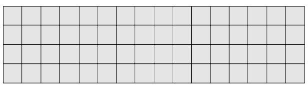


Figura 3.50

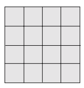


Figura 3.51

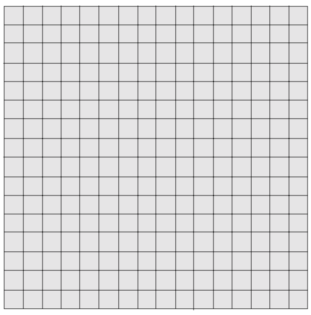


Figura 3.52

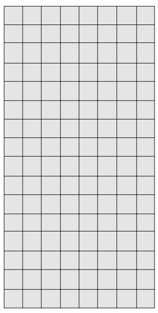


Figura 3.53

Análise do problema 6

Ao propor esse problema, deixamos de pedir aos alunos que escrevessem o que haviam pensado para resolvê-los, e por isso nem todos revelaram os procedimentos adotados. Assim, nossas análises estão baseadas apenas nos desenhos dos alunos e nas anotações das observadoras.

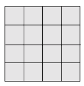
Analisando os resultados e procedimentos, verificamos que 9 alunos (40,91%) acertaram a área solicitada (Tabelas 11 e 12). Desses nove alunos, cinco desenharam tanto um quadrado como mais de um retângulo de 16 cm^2 de área; outro aluno desenhou um quadrado e um retângulo de 16 cm^2 de área; três alunos desenharam mais de um retângulo de 16 cm^2 de área, porém não desenharam um quadrado com essa mesma área. Todas essas produções foram corretas e completas, revelando que este foi um problema de familiarização para esses alunos.

As justificativas oferecidas nos revelaram que, dentre os alunos que acertaram a área, alguns, como Gustavo e Fernando Tadeu, usaram a contagem de unidades, realizando para isso alguns cálculos.

Os 22,73% que desenharam um quadrado de 4 cm^2 consideraram como unidade o quadrado de $\frac{1}{4}$ cm^2 e contaram 16 deles, como exemplificado no relato de Fernando. Observamos que todos os cinco alunos que usaram esse procedimento desenharam um quadrado e um retângulo, o que nos revela que estavam em processo de pesquisa,

mesmo que com um procedimento incorreto.

Uma das alunas, Larissa, ao desenhar o quadrado, escreveu as medidas de cada lado (Figura 3.54), nos levando à hipótese de ter pensado em multiplicação em vez do procedimento de contagem de unidades.

4 cm  Figura 3.54

4 cm

Por um lado, esse resultado pode ter sido proveniente do uso dessa unidade na sessão anterior, em que calculamos com os alunos diversas áreas de retângulos variando a unidade. Por outro, ele pode se dever à dificuldade de obter uma figura de área determinada de 16 cm².

Os relatos e as anotações da observadoras mostraram que, ao pedirmos o desenho de retângulos com área de 16 cm², bem maior do que a área envolvida no problema 1, da primeira sessão, 31,82% dos alunos usaram cálculos, provavelmente para evitar a contagem da unidade, uma a uma, por dezesseis vezes. O novo problema foi proposto precisamente para desencadear o uso do domínio numérico e para verificar se os alunos usariam a multiplicação, por economia. No entanto, esses alunos recorreram à adição. Como vemos no relato de Jonathan, esse alunos podem ter associado a expressão *8 por 8* não à multiplicação, mas sim à adição. Como conseqüência, produziram um retângulo com lados medindo 8 cm e área de 64 cm². Seja como for, esses alunos tentaram operar com números, mesmo usando fórmulas não-corretas. Pudemos observar também que todos os alunos desse grupo desenharam, além do quadrado um retângulo, cuja área, porém, não era a mesma do quadrado, o que nos revelou que esses alunos poderiam evoluir nas sessões seguintes em seu conhecimento sobre retângulos não-congruentes de mesma área ou no conhecimento de área.

O relato da aluna Priscila, que corresponde a 4,54% da classe, revela que ela parecia saber o que deveria fazer, embora não tenha produzido um retângulo de 16 cm^2 de área. Nosso quadro teórico nos permite afirmar que essas produções são incompletas, que o problema seria da fase *antigo*, e que essa aluna poderia avançar depois de explicitações e validação de suas produções.

Observamos que neste problema a porcentagem de acerto foi menor do que no problema 1 (sessão 1). Nossa hipótese é que, ao aumentarmos a área da figura, alguns alunos não conseguiram ter controle sobre a contagem e, ao tentarem a multiplicação, realizaram operações incorretas.

Recolhemos a folha com o enunciado do problema 6 e entregamos a folha com o enunciado do problema 7.

Problema 7: Enunciado

Você pode desenhar um retângulo de 20 cm^2 de área? ________

Se pode, desenhe-o na folha de papel quadriculado.

O que quisemos observar

Interessavam-nos os procedimentos de obtenção de um retângulo de 20 cm^2 de área, para verificarmos se os alunos continuariam usando a contagem de unidades uma a uma ou se usariam a multiplicação para o cálculo de área.

Análise dos resultados do problema 7

Tabela 13: Resultados na obtenção de um retângulo de 20 cm^2 de área.

Área correta	Área incorreta
40,91%	59,09%

Na Tabela 14, apresentamos: os procedimentos de obtenção de retângulos de 20 cm^2 de área (na coluna *Procedimentos*)**; exemplos de desenhos produzidos em cada procedimento (3.55, 3.56, 3.57, 3.58 e 3.59, na coluna** *Figuras*, **tal como numerados após a tabela); exemplos de relatos pertinentes aos procedimentos (na coluna** *Relatos*)**; os percentuais de alunos que realizaram tais procedimentos (na coluna** *Percentual*)**.**

Os desenhos, com suas respectivas designações, figuram logo após a tabela.

Tabela 14: Procedimentos utilizados para obter um retângulo de 20 cm ^{2} de área.

Procedimentos	Figuras	Relatos*	%
1. Justaposição de 20 retângulos de 1 cm^2 de área.	**3.55 e/ou 3.56**	**Caio:** *Se 4 quadradinhos são 1 cm^2, eu fui multiplicando até chegar a 20 cm^2.* **Gustavo:** *Para responder a questão, eu somei retângulos de 1 cm^2 de área até completar 20 retângulos.* **Eduardo:** *Eu utilizei o retângulo de 4 quadradinhos, assim fiz duas fileiras de 10 retângulos.*	**36,36%**
2. Obtenção de um retângulo de 20 cm^2 de área por princípio multiplicativo.	**3.55**	**Rafael:** *Eu fiz 5 cm no comprimento e 4 na largura, fazendo $5 \times 4 = 20$.*	**4,55%**
3. Justaposição de 20 quadrados de ¼ cm^2 de área.	**3.57**	**Thomaz:** *Eu usei como base os quatro quadradinhos e com eles fiz 20 quadradinhos formando um retângulo.* **Guilherme:** *Pensei em fazer 20 quadradinhos.*	**13,64%**
4. Outros	**3.58 ou 3.59**	**Solange:** *Como é retângulo de 20 cm^2, eu dividi 20 cm^2 e deu 8 cm^2 + 8 cm^2 por 2 cm^2 + 2 cm^2 = (20 cm^2)***.**	**45,45%**

*** Mantiveram-se as grafias originais.**

Figuras

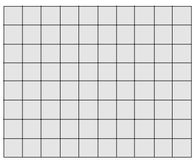


Figura 3.55

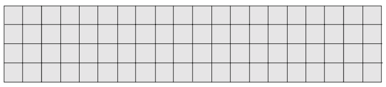


Figura 3.56

Figura 3.57

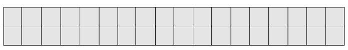


Figura 3.58

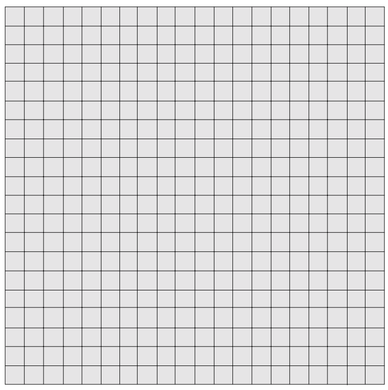


Figura 3.59

Análise do problema 7

Ao analisarmos as produções dos alunos e os procedimentos usados para realizarem esse problema, pudemos tirar algumas conclusões.

Dentre os nove alunos (40,91% da classe) que acertaram a área do retângulo dois desenharam três retângulos de 20 cm^2 de área e alunos desenharam dois retângulos de 20 cm^2 de área, ainda que o enunciado pedisse para desenharem um retângulo. Isso nos mostra que esses alunos estavam em processo de pesquisa durante a realização do problema e que mobilizaram conhecimentos sobre retângulos não-congruentes de mesma área. Além disso, dois alunos desenharam um retângulo de área correta o que nos revela que ainda podem evoluir em seus conhecimentos sobre retângulos não-congruentes de mesma área.

Ainda dentro desse grupo dos alunos que acertaram a área do retângulo, pudemos verificar que oito (36,36% da classe) usaram contagem de unidades, recorrendo para isso a algum tipo de cálculo. Apenas Rafael (que constituiu 4,55% da classe) usou um procedimento multiplicativo. Isso foi uma forma intuitiva de obter a fórmula para o cálculo da área do retângulo.

Outros alunos (13,64% da classe) mostraram que ainda consideravam como unidade o quadrado de $\frac{1}{4}$ cm^2 de área, em vez do quadrado ou do retângulo de 1 cm^2. Seus procedimentos de contagens

foram corretos, de acordo com a unidade que elegeram, porém não podemos considerá-los como produções corretas, já que não obtiveram o retângulo de 20 cm^2 de área.

Os 45,45% restantes da classe utilizaram outros procedimentos incorretos para a obtenção de um retângulo de 20 cm^2 de área. Pelos relatos de alguns desses alunos, pudemos perceber que tentaram operar os números para obterem essa área corretamente, porém não alcançaram sucesso.

Consideramos, portanto, que 59.09% dos alunos da classe poderiam nas sessões seguintes evoluir em seus conhecimentos a respeito da unidade e do conceito de área.

Fase de explicitação do problema 6

Objetivo

Promover as fases de explicitação e validação relativas ao problema 6, além de alguma institucionalização, caso necessária. Transcrevem-se a seguir os trechos mais relevantes da discussão:

Questionamento para o início da aula.	**Pesquisadora:** *Para iniciarmos a aula, algum aluno gostaria de vir à frente para desenhar um retângulo ou quadrado de 16 cm^2 de área, na cartolina quadriculada pregada na lousa*?

Explicitações.

Giancarlo se ofereceu para ir à lousa e desenhou um quadrado de 16 cm² (Figura 3.60).

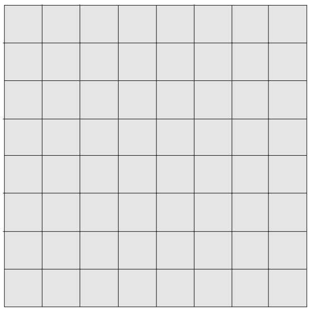


Figura 3.60

Enquanto esse aluno desenhava o quadrado, surgiram algumas discussões:

Explicitações.

Jonathan: *Está certo fazer oito centímetros por oito centímetros? Oito e oito dá 16*.

Gustavo: *O quadrado do Giancarlo está certo*.

Questionamento.

Pesquisadora: *Como poderíamos conferir se esse quadrado tem mesmo 16 cm² de área*? *Vocês têm alguma sugestão de como poderíamos realizar essa verificação*?

Explicitações.

Paula: *Conta oito por oito*.

Giancarlo: *Oito mais oito*.

Jonathan: *Se você contar 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8* **[apontando para os quadrados de $\frac{1}{4}$ cm²],** *vai dar 64, que é múltiplo de 16*.

Guilherme: *Pensei: 16 cm² tem que somar todos os lados: quatro mais quatro mais quatro mais quatro dá dezesseis.*

Intervenção da pesquisadora para discussão das respostas.	**Pesquisadora: Esperem um pouco. Vamos discutir essas respostas.** **Pesquisadora:** *Paula, o que significa 'oito por oito'***?**
Explicitações.	**Paula:** *Lado vezes lado, oito vezes oito, que vai te dar todos os quadradinhos***.** **Outros alunos responderam em voz alta:** *64***.** **Jonathan:** *O número de quadradinhos***.** **Paula novamente:** *Oito vezes oito.* **Jonathan foi à lousa conferir a área. Contou o número de quadradinhos, $8 \times 8 = 64$, e disse que isso significava que o quadrado estava certo, com 16 cm^2 de área.**
Questionamento.	**Pesquisadora:** *Que unidade de área vocês estão usando quando fazem oito vezes oito?*
Explicitação.	**Classe:** *O quadradinho.*
Questionamento quanto ao procedimento.	**Pesquisadora:** *Como devemos fazer para conseguirmos 16 cm^2 de área usando como unidade de área 1 cm^2***?**
Explicitações.	**Gustavo:** *Devemos usar a unidade inteira dezesseis vezes***.** **Jonathan:** *Se pegarmos 64 e dividirmos por 4 dá 16***.**
Questionamento.	**Pesquisadora:** *Por que dividir por 4?*
Explicitação.	**Jonathan:** *Porque a unidade tem 4 quadradinhos***.**

Larissa veio à lousa e conferiu a área do quadrado desenhado na cartolina usando a unidade de 1 cm^2 de área. Essa verificação foi feita sobrepondo essa unidade, recortada em cartolina, ao quadrado de 16 cm^2 de área.

Conclusões quanto à evolução da seqüência

Diante das produções dos alunos e das discussões ocorridas na fase de explicitação do problema 6, decidimos introduzir uma nova sessão na seqüência, para que os alunos sem sucesso na obtenção de retângulos de área dada pudessem reestruturar seus conhecimentos relativos ao conceito de área. Nela, proporíamos problemas com números menores que os da sessão 5, em duas situações: envolvendo o cálculo da área de um retângulo dado com diferentes unidades de área e a obtenção da área de um retângulo pela justaposição de dois retângulos, desenhando-os com um lado em comum, sem sobrepor nem deixar vãos.

3.6 Sessão 6

Objetivo

Nesta sessão, propomos os problemas 8 e 9 para reinvestimento dos conhecimentos relativos ao conceito de área (unidade de área; justaposição de dois retângulos, desenhando-os com um lado em comum, sem sobrepor nem deixar vãos), oferecendo assim aos alunos a oportunidade de progredirem em relação a seus conhecimentos anteriores.

Material

Os alunos receberam a folha de papel sulfite contendo o enunciado de cada problema, acompanhada de papel quadriculado para o problema 9, e lápis vermelho para os desenhos. A instrução que constava nas folhas dos problemas dessa sessão foi:

> **Faça seus desenhos utilizando sempre as linhas do papel quadriculado.**

Problema 8 - Enunciado

O retângulo abaixo tem 10 cm^2 de área.

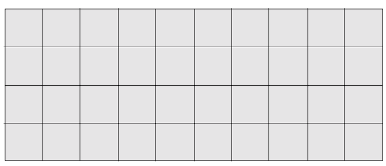


Figura 3.61

a) Qual a área do retângulo desenhado acima, considerando como unidade de área $\frac{1}{2}$ cm^2 de área? ________

b) Escreva o que pensou para responder a questão.

c) Qual a área do retângulo desenhado acima, considerando como unidade de área um retângulo de 2 cm^2 de área? ________

d) Escreva o que pensou para responder a questão.

O que quisemos observar

Interessava-nos observar quais seriam os procedimentos usados pelos alunos para o cálculo das áreas de um retângulo dado, ao se adotarem diferentes unidades de área.

Nesse problema os alunos se defrontaram com uma situação que não fora vivenciada nas demais sessões: o cálculo da área de um retângulo usando 2 cm^2 como unidade de área.

Análise dos resultados do problema 8, item *a*

Tabela 15: Resultados do cálculo da área de um retângulo dado usando $\frac{1}{2}$ cm^2 de área como unidade (item *a*).

Percentual	
Área correta	Área incorreta
80,95%	19,05%

Na Tabela 16 são apresentados: os procedimentos dos alunos

relativos ao cálculo da área do retângulo dado usando como unidade $\frac{1}{2}$ cm² de área (na coluna *Procedimentos*); o percentual de alunos que realizaram tais procedimentos (na coluna *Percentual*).

Tabela 16: Procedimentos do cálculo da área do retângulo dado usando $\frac{1}{2}$ cm² de área como unidade (item *a*).

Procedimento	Relatos*	%
1. Contagem de 20 unidades de ½ cm² de área.	**Caio:** *Eu fui vendo Quantas vezes ½ cm² cabe no quadriculado*. **Henrique:** *Eu contei de ½ em ½ no retângulo*. **Juliana:** *Eu pensei em contar com a unidade ½, ou seja de 2 em e quadradinhos*.	**33,33%**
2. Obtenção da área do retângulo dado por meio de cálculos.	**Eduardo:** *1 cm² como unidade de medida, tinha 10 cm², com metade dessa medida como unidade, a área aumenta duas vezes.* **Gustavo:** *Como a unidade de medida é menor do que 1 cm² a área será maior, portanto se o retângulo tem 10 × 1 cm², eu multipliquei 10 por 2 = 20*. **Larissa:** *Se ½ cm² é a metade de 1 cm², a área vai dobrar de 10 para 20*.	**47,62%**
3. Contagem de outras quantidades de unidades de ½ cm² de área.	**Giancarlo:** *Eu pensei que 2* ☐ **[quadradinhos]** *são meio centímetro e 4 seria um.* **Guilherme:** *Pensei em contar o retângulo com ½ cm² de área (2 quadradinhos).*	**14,29%**
4. Outros.	**Robson:** *Somei os centímetros de cima e de baixo.*	**4,76%**

*** Mantiveram-se as grafias originais.**

Análise dos resultados do problema 8, item *a*

As Tabelas 15 e 16 mostram que 80,95% dos alunos acertaram a área do retângulo dado, usando corretamente a unidade de $\frac{1}{2}$ cm^2 de área. Observamos nessas produções que alguns alunos (como Caio, Henrique e Juliana) usaram contagem das unidades uma a uma. Percebemos que os retângulos desenhados por esses alunos continham riscos marcando de dois em dois os quadrados da malha quadriculada, o que nos confirma que realizaram a contagem de unidades uma a uma. Por outro lado, quase metade da classe (47,62%) utilizou algum tipo de cálculo para obter a área do retângulo dado. Notamos uma interessante relação de proporcionalidade estabelecida pelos alunos entre a unidade de área e a área do retângulo, como relatou Larissa: “*Se ½ cm^2 é a metade de 1 cm^2, a área vai dobrar de 10 para 20*”. Essas produções, a nosso ver, são corretas e completas.

Quanto aos procedimentos considerados incorretos,14,29% da classe acertou a unidade, mas errou a contagem, e 4,76% da classe realizou outro procedimento que não o da contagem — talvez algum outro tipo de cálculo.

Análise dos resultados do problema 8, item *c*

Tabela 17: Resultados no cálculo da área de um retângulo dado usando 2 cm² de área como unidade (item *c*).

Área correta	Área incorreta
61,90%	38,10%

Na Tabela 18 são apresentados: os procedimentos dos alunos relativos ao cálculo da área do retângulo dado usando como unidade 2 cm² de área (na coluna *Procedimentos*); os percentuais de alunos que realizaram cada um dos procedimentos (na coluna *Percentual*).

Tabela 18: Procedimentos do cálculo da área do retângulo usando como unidade 2 cm² de área.

Procedimentos	Relatos*	%
1. Contagem de 5 unidades de área de 2 cm².	**Caio:** *De vez eu usar 4 quadrados que seria 1 cm², eu usei 8 quadrados que dá 2 cm² e vi quantas vezes 2 cm² cabia no retângulo.* **Henrique:** *Eu contei de 8 em 8 quadradinhos*.	**14,29%**
2. Obtenção da área do retângulo dado por meio de cálculos.	**Eduardo:** *Se diminuindo a unidade pela metade a área do retângulo é maior, aumentando a unidade a área diminui, dividi por 2.* **Larissa:** *Já que é o dobro, a área fica a metade*. *É inversamente proporcional. 10 para 5*.	**47,62%**
3. Contagem de outras quantidades de unidades de área de 2 cm².	**Thomaz:** *Eu considerei dois quadradinhos como dois cm².* **Lucas:** *Porque 2 cm² eqüivale a 1 Quadradinho.*	**9,52%**
4. Outros.	**Robson:** *Multipliquei as bases.*	**28,57%**

*** Mantiveram-se as grafias originais.**

Análise dos resultados do problema 8, item *c*

As Tabelas 17 e 18 mostram que 61,90% dos alunos acertaram a área do retângulo dado usando 2 cm^2 como unidade de área. Os procedimentos obtidos nesse item foram os mesmos que os apresentados no item *a*, porém com percentuais um pouco diferentes. Enquanto no item *a* 33,33% dos alunos usaram contagens de unidades uma a uma, no item *c* esse percentual caiu para 14,29% (menos da metade). Enquanto isso o percentual dos alunos que utilizaram algum tipo de cálculo se manteve em 47,62%. Pelos relatos desses alunos, ficou evidente que a proporcionalidade entre a área e a unidade de área os auxiliou no sucesso das respostas. Consideramos essas produções corretas e completas, pois os alunos mobilizaram conhecimentos tanto no domínio numérico, como no domínio das grandezas.

Ao analisarmos os procedimentos dos alunos que não obtiveram áreas corretas, constatamos que seus erros se relacionavam ou ao uso incorreto da unidade ou a contagem incorreta, ou ainda a outros procedimentos envolvendo cálculos incorretos.

Em relação aos problemas da sessão anterior, os alunos mostraram um significativo avanço no que se refere ao uso correto da unidade de área. Isso nos levou a levantar duas hipóteses a respeito desses resultados: os números menores usados nesse problema poderiam ser os responsáveis pela melhoria nos procedimentos de

cálculos ou as unidades escolhidas ($\frac{1}{2}$ cm^2 e 2 cm^2) poderiam ter favorecido o uso de cálculos e de proporções.

Problema 9 - Enunciado

O seguinte quadriculado, com um retângulo desenhado, é igual ao da folha que costumamos usar.

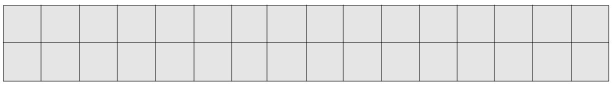


Figura 3.62

a) O retângulo acima tem 8 cm^2 de área? ________

b) Você pode desenhar outros retângulos com 4 cm^2 a mais de área? ________

c) Se possível, desenhe-os na folha de papel quadriculado.

d) Escreva o que pensou para responder essa questão.

O que quisemos observar:

Interessava-nos observar os procedimentos para a obtenção de um retângulo de 12 cm^2 — em particular, se os alunos comporiam um retângulo de 4 cm^2 a um retângulo de 8 cm^2 de área.

Nos problemas das sessões anteriores os alunos tinham de obter um ou mais retângulos de área determinada ao passo que neste propúnhamos uma nova situação em que eles poderiam justapor um retângulo de 4 cm^2 de área a outro retângulo de 8 cm^2, desenhando-os com um lado em comum, sem sobrepor nem deixar vãos.

Tabela 20: Resultados na obtenção de um retângulo de 12 cm^2 de área

Área correta	Área incorreta
71,43%	28,57%

Na Tabela 20 apresentamos: os procedimentos de obtenção de retângulos de 12 cm^2 de área (na coluna *Procedimentos***); exemplos de relatos pertinentes aos procedimentos (na coluna** *Relatos***); os percentuais de alunos que realizaram tais procedimentos (na coluna** *Percentual***).**

Tabela 20: Procedimentos na obtenção de um retângulo de 12 cm² de área.

Procedimentos	Relatos*	%
1. Justaposição de 4 retângulos de 1 cm² de área com o retângulo de 8 cm² de área.	**Juliana:** *Eu somei aos 8 cm² mais 4 cm², tendo como base a barra de 1 cm²*.	**38,09%**
2. Justaposição de 16 quadradinhos de ¼ cm² com o retângulo de 8 cm² de área.	**Caio:** *Eu apenas coloquei mais 16 quadradinhos que dá 4 cm²*.	**19,05%**
3. Desenho de um retângulo de 12 cm² por meio de multiplicação.	**Luiz:** *O que eu pensei para responder foi que fazer 4 na horizontal e 3 na vertical = 12 cm².* **Giancarlo:** *Para responder esta questão eu peguei 2 quadradinhos na vertical e 24 quadradinhos na horizontal*.	**14,29%**
4. Justaposição de 4 quadradinhos de ¼ cm² de área com o retângulo de 8 cm² de área.	**Thomaz:** *Eu acrescentei 4 quadradinhos.*	**9,53%**
5. Justaposição de outras quantidades da unidade de 1 cm² de área.	**Felipe:** *Eu pensei em fazer mais 4 cm² de área, que daria 64 quadradinhos.*	**19,05%**

* Mantiveram-se as grafias originais.

Análise dos resultados do problema 9

Em resposta ao item *a* **e** *b* **do problema 9, todos os alunos disseram que o retângulo desenhado tinha 8 cm² de área e que poderiam desenhar outros retângulos com 4 cm² a mais de área.**

Na Tabela 20 buscamos classificar as produções dos alunos de acordo com alguns procedimentos apresentados, porém em alguns

casos houve mistura de mais de um procedimento.

Pudemos observar que 38,09% dos alunos realizaram corretamente a justaposição de um retângulo de 4 cm^2 a um retângulo de 8 cm^2 usando a contagem da unidade de 1 cm^2. Isso nos foi revelado pelos desenhos apresentados, pois todos os oito alunos desse grupo fizeram marcas em seus retângulos revelando que estavam contando tais unidades. Guilherme, por exemplo, fez uma bolinha em cada grupo de quatro quadradinhos (Figura 3.63), contando portando quantas dessas unidades usaria para formar um retângulo de 12 cm^2.

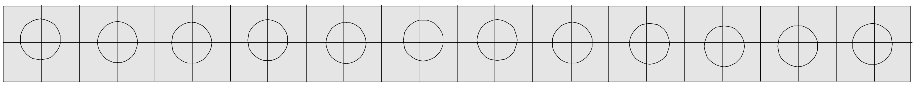


Figura 3.63

Esse procedimento também se revelou claro nos desenhos de outros alunos que de alguma maneira foram marcando os quadradinhos de quatro em quatro para contarem as unidades de 1 cm^2 de área.

Observamos que 19,05% dos alunos da classe, que também desenharam corretamente retângulos de 12 cm^2 de área, contaram os quadradinhos de $\frac{1}{4}$ cm^2 de área apondo marcas (pontinhos) em cada um com o lápis colorido.

Três alunos, que correspondem a 14,29% da classe, usaram multiplicação para encontrarem um retângulo de 12 cm^2 de área, como

revelou, Luiz em seu relato. Em seu desenho, reforçou o contorno de todos os quadrados de 1 cm^2 de área (Figura 3.64).

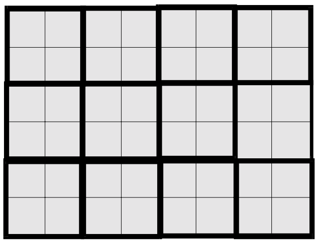


Figura 3.64

Giancarlo, usou o mesmo procedimento, mas em vez de usar o quadrado de 1 cm^2 de área usou os quadradinhos de $\frac{1}{4}$ cm^2 (Figura 3.65).

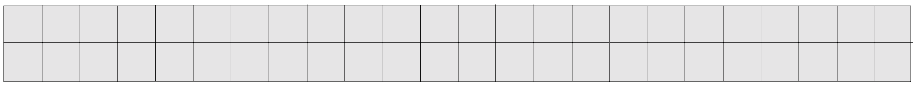


Figura 3.65

Quanto aos alunos que não acertaram o problema, temos 9,53% da classe, que são alunos que ainda confundem a unidade de 1 cm^2 de área com o quadrado de $\frac{1}{4}$ cm^2. Thomaz, por exemplo, apesar de não ter acertado a área de 12 cm^2, revelou através de seus desenhos ter feito uso da existência de dois retângulos não-congruentes de mesma área (Figuras 3.66 e 3.67). Pudemos também perceber que esse aluno reforçou com o lápis o contorno dos quatro quadradinhos que

acrescentou e também os demais grupos de quatro quadrados de $\frac{1}{4}$ cm^2 da Figura 3.67, evidenciando-nos que a figura assim desenhada também tinha a mesma quantidade de quadrados formados por quatro quadradinhos.

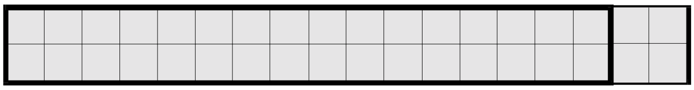


Figura 3.66

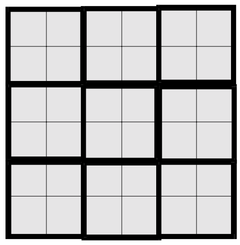


Figura 3.67

Não podemos dizer que esse aluno desconhece o conceito de área, mas apenas que não dispõe de conhecimentos suficientes sobre as unidades a serem utilizadas.

Dentre os restantes 19,05%, que tampouco acertaram o problema, temos situações que nos mostraram que os alunos cometeram erros ao contar as unidades ou mesmo ao efetuar cálculos.

Conclusões quanto à evolução da seqüência

Diante das produções e resultados obtidos, podemos dizer que a evolução dos alunos nos pareceu bastante satisfatória pelo seus desempenhos nessa sessão. Isso nos permitiu continuar com a seqüência e propor dois problemas na sessão seguinte, que envolveriam

cálculo de área de um retângulo dado, adotando-se diferentes unidades de área, e obtenção de um retângulo também de área dada, mas numa situação com que os alunos não haviam ainda se defrontado nessa pesquisa: o uso do papel milimetrado.

3.7 Sessão 7

Objetivo

Nesta sessão propomos dois problemas usando papel milimetrado a fim de verificar os conhecimentos dos alunos numa situação semelhante às enfrentadas nas sessões 5 (problema 7) e 6 (problema 8), mas com quadriculado diferente das sessões anteriores.

Material

Os alunos receberam duas folhas de papel sulfite, cada uma contendo o enunciado de um problema. A folha do problema 10 vinha acompanhada de uma folha de papel milimetrado, enquanto a do problema 11 trazia colado um retângulo recortado em papel milimetrado.

Problema 10: Enunciado

Você pode desenhar um retângulo de 20 cm^2 de área? ________

a) Se possível, desenhe-o na folha de papel milimetrado.

b) Escreva o que pensou para responder essa questão.

O que quisemos observar:

Interessava-nos observar os procedimentos que os alunos

usariam — nos domínios em jogo — para obter um retângulo de 20 cm^2 de área na nova malha milimetrada.

Resultados

Tabela 21: Resultados na obtenção de um retângulo de 20 cm^2 de área.

Área correta	Área incorreta
80,95%	19,05%

Na Tabela 22 são apresentados: os procedimentos dos alunos relativos à obtenção do retângulos de 20 cm^2 de área (na coluna *Procedimentos*); **exemplos de desenhos de alunos de acordo com cada procedimento; percentuais de alunos que realizaram tais procedimentos (na coluna** *Percentual*).

Tabela 22: Procedimentos utilizados para a obtenção de um retângulo de 20 cm² de área.

Procedimentos	Relatos*	%
1. Justaposição de 20 unidades de 1 cm² de área.	**Guilherme:** *Pensei em fazer um retângulo contando 1 cm² com quatro quadradinhos*. **Caio:** *Como 4 quadrados tem 1 cm², fui somando até ter 20 cm²*.	**42,86%**
2. Desenho de um retângulo de 20 cm² por meio multiplicação.	**Giancarlo:** *Eu peguei 2 cm na vertical e 10 cm na horizontal.* **Paula:** *Eu fiz 5 × 4 = 20 = cinco unidades de 1 cm² na horizontal e fiz 4 unidades de 1 cm² na vertical, depois fechei o retângulo e ficou 20 cm² de área*.	**38,09%**
3. Outros.	**Robson:** *Fiz 20 cm de área, 10 em baixo e 10 em cima.*	**19,05%**

*** Mantiveram-se as grafias originais.**

Análise dos resultados do problema 10

Ao examinarmos as produções dos alunos e verificarmos os resultados obtidos, tiramos algumas conclusões:

Pudemos constatar que 42,86% dos alunos utilizaram procedimentos de contagem da unidade de 1 cm² de área. O papel milimetrado não trouxe para esses alunos qualquer impedimento para contar as unidades, como relatou Larissa: *É "a mesma coisa do papel quadriculado, usei como base 1 cm² de área*".

O fato de usarmos um tipo de papel que não fora usado em outras sessões, mas cuja malha (Figura 3.68) trazia em destaque as mesmas linhas básicas que o papel quadriculado, pode ter de certa

maneira auxiliado essa associação.

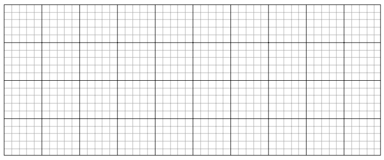


Figura 3.68

Outro caso que nos revela que o papel milimetrado não causou estranheza foi o de Eduardo, que em seu relato revelou ter precisado "descobrir" a unidade centímetro quadrado para depois usar a contagem dessas unidades. Ele escreveu: "*Peguei 10 mm (representados na folha) de um lado e 10 mm de outro, então descobri o cm², então peguei 20 cm² destes*"**. Podemos perceber que esse aluno quis nos mostrar com sua justificativa que o quadrado de 10 milímetros por 10 milímetros é equivalente a 1 cm² e que a partir disso poderia contar 20 dessas unidades.**

Quanto aos alunos que usaram multiplicação, ou seja 38,09% da classe, seus procedimentos se aproximam dos observados por Nunes, Light e Mason (1993). Pudemos também perceber que esses alunos, além desse tipo de procedimento, também fizeram uso de contagem, talvez como forma de validar suas produções. Destacamos a produção de Paula, que em seu relato justificou ter usado o número de unidades na horizontal multiplicado pelo número de unidades na vertical. Uma observadora anotou que, depois de desenhar (Figuras 3.69 e 3.70), contou unidade por unidade em seus desenhos. O mais

interessante é que em um dos retângulos essa aluna usou como unidade o retângulo de 1 cm^2 de área, mas em outro utilizou como unidade o quadrado de 1 cm^2 de lado. Isso evidencia que para essa aluna a unidade de 1 cm^2 de área não é apenas o quadrado de 1 cm de lado.

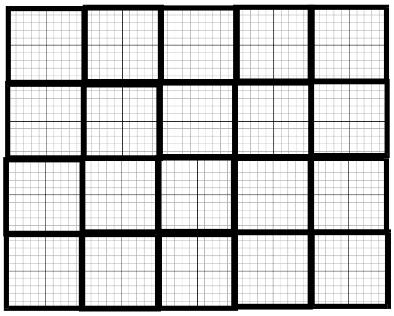


Figura 3.69

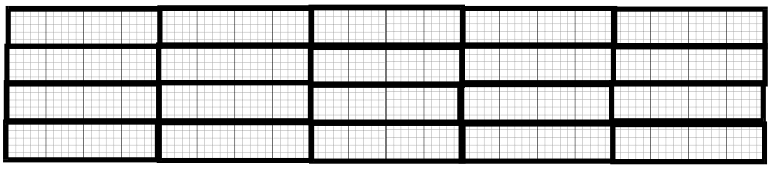


Figura 3.70

No grupo dos alunos (19,05%) que não acertaram o problema, verificamos que foram realizados outros procedimentos que não os da contagem da unidade de área, mas sim alguma confusão entre centímetro quadrado e centímetro. Quando Robson, ao fazer seu retângulo de 20 cm^2 de área, diz ter considerado "*10 em baixo e 10 em cima***", não se referia a 10 unidades de 1 cm^2 em uma fileira e outros 10 na fileira de baixo, como se poderia imaginar a princípio. Esse aluno na verdade desenhou um retângulo com um dos lados medindo 10 cm**

(Figura 3.71), o que resultou em um retângulo de 10 cm^2 de área.

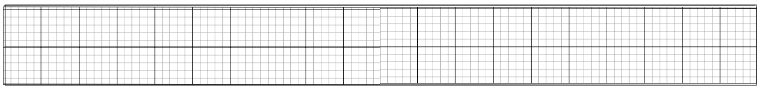


Figura 3.71

De maneira geral, os resultados apresentados nesse problema nos pareceram satisfatórios, se comparados aos que obtidos na sessão 5. Detalhamos a comparação do desempenho dos alunos no problema 7 com o desempenho neste problema, nas conclusões finais.

Problema 11 - Enunciado

O retângulo abaixo tem 10 cm^2 de área.

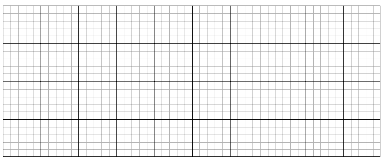


Figura 3.72

a) Consideremos agora, como unidade de área, um retângulo de $\frac{1}{2}$ cm^2.

Quantas dessas unidades de área contém o retângulo acima? ________

b) Escreva o que pensou para responder essa questão.

c) Consideremos agora, como unidade de área, um retângulo de 2 cm^2.

Quantas dessas unidades de área contém o retângulo acima? ________

d) Escreva o que pensou para responder essa questão.

O que quisemos observar

Queríamos saber se os alunos mobilizariam seus conhecimentos para calcular a área de um retângulo usando diferentes unidades de área em papel milimetrado.

Resultados

Tabela 23: Resultados do cálculo da área de um retângulo dado usando $\frac{1}{2}$ cm² de área como unidade (item *a*).

Área correta	Área incorreta
76,19%	23,81%

Na Tabela 24 são apresentados: os procedimentos dos alunos relativos ao cálculo da área do retângulo dado usando como unidade $\frac{1}{2}$ cm² de área (na coluna *Procedimentos*); percentuais de alunos que realizaram tais procedimentos (na coluna *Percentual*).

Tabela 24: Procedimentos do cálculo da área do retângulo dado usando $\frac{1}{2}$ cm² de área como unidade (item *a*).

Procedimentos	Relatos*	%
1. Contagem de 20 unidades de ½ cm² de área.	**Rafael:** ½ *cm² são 2 quadrados, assim fui contando de 2 em 2 até dar 20.* **Juliana:** *Eu contei no desenho de 2 em 2 quadradinhos.* **Paula:** ½ *cm² tem 2 quadradinhos, então eu contei de 2 em 2 quadradinhos.* **Solange:** *Eu peguei e fui somando de 2 em 2 quadradinhos que corresponde a ½ cm².* **Thomaz:** *Eu contei os quadrados como se fosse ½ cm².*	**61,90%**
2. Obtenção de 20 unidades de ½ cm² por meio de cálculos (proporcionalidade).	**Eduardo:** *Dividindo a unidade de área na metade, a área medida duplica.*	**14,29%**
3. Contagem de 40 unidades de ½ cm² de área.	**Roberta:** *Eu contei os quadradinhos, um quadrado é ½ cm².*	**14,29%**
4. Outros.	**Priscila:** *A cada 2 quadrados: 1 cm.* **Felipe:** *Se 1 cm tem quatro quadradinhos ½ teria 2 quadradinhos.*	**9,52%**

*** Mantiveram-se as grafias originais.**

Análise dos resultados do problema 11, item *a*

Analisando as produções, inclusive através dos relatos e de marcações feitas no retângulo dado, pudemos observar que a maioria dos alunos (61,90%) usou a contagem das unidades uma a uma. Tais marcações consistiam em tracinhos feitos no retângulo fornecido e revelavam que os alunos estavam contando de dois em dois os

quadrados de ¼ cm² de área, ou seja, ½ cm².

Outros alunos que também acertaram a área do retângulo dado, correspondentes a 14,29% da classe, utilizaram cálculos (como os observados no problema 8, sessão 6) que indicavam que esses alunos haviam estipulado uma relação entre a unidade de área e a área do retângulo dado (proporcionalidade).

Dos alunos que não acertaram a área do retângulo usando como unidade $\frac{1}{2}$ cm², verificamos que os erros cometidos foram relativos à contagem errada da unidade ou a algum outro procedimento incorreto.

Resultados

Tabela 25: Resultados do cálculo da área de um retângulo dado usando 2 cm² de área como unidade (item *c*).

Área correta	Área incorreta
66,67%	33,33%

Na Tabela 26 são apresentados: os procedimentos dos alunos relativos ao cálculo da área do retângulo dado, usando como unidade 2 cm² de área (na coluna *Procedimentos*); percentuais de alunos que realizaram tais procedimentos (na coluna *Percentual*).

Tabela 26: Procedimentos do cálculo da área do retângulo dado usando 2 cm² de área como unidade (item *a*).

Procedimentos	Relatos*	%
1. Contagem de 5 unidades de 2 cm² de área.	**Juliana:** *Eu somei as barras de 1 cm², juntei e fui contando de 2 em 2 barras.* **Larissa:** *Contei 8 quadradinhos que equivale a 2 cm².*	**52,38%**
2. Obtenção de 5 unidades de 2 cm² por meio de cálculos (proporcionalidade).	**Eduardo:** *Duplicando a unidade de área, a medida diminui metade.*	**14,29%**
3. Contagem de 6 unidades de 2 cm² de área.	**Caio:** *Apenas contei quantas vezes 2 cm² cabe na figura acima.*	**4,76%**
4. Contagem de 10 unidades de 1 cm² de área.	**Thomaz:** *Eu contei 1 cm² como 4 quadradinhos.*	**9,52%**
5. Outros.	**Priscila:** *A cada 4 quadrados 1 cm*.	**19,05%**

*** Mantiveram-se as grafias originais.**

Análise dos resultados do problema 8, item *c*

A Tabela 26 mostra que 52,38% dos alunos, isto é mais da metade da classe, privilegiaram a contagem da unidade uma a uma em lugar da multiplicação. O mesmo ocorrera no item *a*.

Temos como hipótese que esses alunos privilegiaram a contagem de unidades porque o problema não requeria uma quantidade grande de unidades. Para o aluno, nos parece ter sido mais fácil contar cinco unidades do que usar a multiplicação para alcançar essa resposta correta.

Quanto aos procedimentos usados no cálculo da área por meio de comparação entre a unidade usada e a área do retângulo, notamos

novamente que esses alunos, correspondentes a 14,29% da classe, usaram uma relação de proporcionalidade entre unidade de área e área do retângulo. Usaram corretamente os cálculos usando dobro ou metade, como nos relatou Eduardo: *Duplicando a unidade de área, a medida diminui metade*.

Quanto aos erros cometidos pelos alunos, 4,76% da classe cometeu algum engano na contagem da unidade, porém não na unidade. Esses alunos, em vez de responderem 5 unidades de 2 cm^2, responderam 6 unidades.

Outros alunos (9,52%) acertaram na contagem mas erraram a unidade. É o caso de Thomaz, que em vez de considerar 2 cm^2 como unidade de área considerou 1 cm^2. Consideramos que esse aluno, mesmo tendo errado esse item do problema (ele acertara o item c), avançou em seus conhecimentos relativos à unidade, pois nos outros problemas ainda fazia confusão entre a unidade de 1 cm^2 de área e o quadrado de $\frac{1}{4}$ cm^2.

Os outros 19,05% da classe que também erraram o problema adotaram procedimentos relacionados à contagem da unidade, mas não tivemos dados suficientes para interpretar tais erros.

4 CONCLUSÕES FINAIS

A análise das diversas sessões permeou-se de conclusões locais que apoiam nossas conclusões finais.

A evolução dos alunos ao longo do período da pesquisa revelou que, de maneira geral, a aplicação da seqüência didática os ajudou a desenvolver de modo apreciável seus conhecimentos a respeito do conceito de área.

Houve evidências de que no problema 1, que pedia que desenhassem dois retângulos de 2 cm² de área, os alunos consideraram como unidade de área um retângulo de 1 cm². Nesse problema não tivemos evidências de que os alunos consideraram apenas o quadrado de 1 cm de lado. Eles tampouco usaram o quadrado de $\frac{1}{4}$ cm² de área como unidade. Além disso, no quarto problema, 80% da classe considerou como unidade de 1 cm² de área tanto o retângulo como o quadrado. Em contrapartida, algum tipo de confusão foi constatado no problema 6, em que 22,73% dos alunos consideraram o quadrado de $\frac{1}{4}$ cm² de área como sendo um quadrado de 1 cm² de área. Nos problemas 8 e 9 esse percentual dos alunos que confundiram essas unidades baixou para 9,52% e 9,53% respectivamente.

No referido problema 1, obtivemos uma baixa porcentagem de obtenção de retângulos não-congruentes e de mesma área. Apenas 9,09% dos alunos realizaram produções completas. Por outro lado no problema 9 o percentual de produções completas atingiu 52,38% da classe, o que nos mostra evolução no conhecimento desses alunos quanto à existência de retângulos não-congruentes de mesma área. No problema 20, mesmo pedindo um retângulo de 20 cm^2 de área, tivemos que 61,90% dos alunos obtiveram mais de um retângulo.

Nos problemas 2, 3 e 5, em que propusemos obter as áreas de retângulos usando números fracionários e números mistos, pudemos observar que houve evolução nos conhecimentos relacionados ao conceito de área. Enquanto nos problemas 2 e 3 a porcentagem de acerto foi de 59,09% e 40,91%, respectivamente, no problema 5 esse percentual aumentou para 77,27%, o que nos mostra que as dificuldades com frações, verificadas nos problemas iniciais, foram em parte superadas.

Nos problemas 6 e 7 pudemos observar uma queda no rendimento dos alunos em relação aos problemas anteriores, pois no problema 5 tivemos 77,27% de produções completas, mas nas produções 6 e 7 obtivemos apenas 40,91% de produções completas em cada um dos problemas. Nos ocorreu que essa queda tivesse se devido ao aumento da área da figura pedida, o que nos levou a acrescentar problemas envolvendo números menores e cálculo da área de um

retângulo dado com diferentes unidades de área.

Percebemos que, ao trabalhar com problemas que utilizavam outra unidades de área para o cálculo da área de um retângulo, os alunos apresentaram uma significativa melhora em seus conhecimentos a respeito do conceito de área. No problema 8, que solicitava o cálculo da área de um retângulo de 10 cm^2 de área, desenhado em papel quadriculado, usando como unidades de área ora $\frac{1}{2}$ cm^2 ora 2 cm^2, 80,95% dos alunos responderam corretamente à primeira situação e 61,90% obtiveram respostas corretas para a segunda. Já no problema 11, em que os alunos se defrontaram com a mesma situação, mas dessa vez com papel milimetrado, 80,95% dos alunos obtiveram respostas corretas para a primeira situação e 76,19% para a segunda. As porcentagens de acerto nesses dois problemas nos revelam que os alunos evoluíram em seus conhecimentos a respeito da unidade de área em relação aos problemas 6 e 7, em que alguns alunos ainda tinham dificuldades em relação à unidade de 1 cm^2 e ao quadrado de $\frac{1}{4}$ cm^2 de área. Nos permitem afirmar que a constatação de que um mesmo retângulo tem áreas diferentes, conforme se considere como unidade de área $\frac{1}{4}$ cm^2 ou $\frac{1}{2}$ cm^2 ou 1 cm^2, levou os alunos a evoluir no cálculo de área de retângulos respeitando a unidade fornecida.

Pudemos observar também que os alunos privilegiaram a

contagem em lugar dos cálculos no problema 1, que pedia dois retângulos de 2 cm² de área. Usaram contagem de unidades 95,45% dos alunos, entre os quais Solange, que explicou: *"Se 1 cm² corresponde a quatro quadradinhos, 2 cm² corresponde a 8 quadradinhos"***. Em contrapartida, 4,55% dos alunos justificaram seu procedimento usando multiplicação nesse primeiro problema, como explicitou Caio:** *"Mesmo tendo os lados diferentes, multiplicando um lado com o outro, terá 2 cm²"***.**

No problema 6, por exemplo, que solicitava a produção (desenho) de um quadrado ou retângulo de 16 cm² de área (situação por nós criada para suscitar o uso de multiplicação), a porcentagem dos alunos que utilizaram multiplicação também foi baixa: apenas 4,55% deles demostraram ter utilizado o procedimento de multiplicação das medidas dos lados para obter a área do quadrado. Alunos que não acertaram esse problema tentaram operar com números, mas o fizeram de forma não-correta.

Em outro problema, o nono, que pedia que se desenhasse um retângulo de 12 cm² de área em papel quadriculado, pudemos perceber que 14,29% dos alunos começaram a utilizar um procedimento que nos dá indícios de ser multiplicação. No relato de Luiz ("*O que eu pensei para responder foi que fazer 4 na horizontal e 3 na vertical = 12 cm²* "**) fica evidente que o aluno multiplicou o número de retângulos usados numa fila pelo número de filas. Enquanto no problema 9 tivemos 14,29% dos alunos a usar multiplicação, no problema 10 esse**

percentual passou para 38,09% da classe Esse procedimento já havia sido observado também na pesquisa de Nunes, Light e Mason (1993).

Bibliografia

ARANHA, Maria Lúcia de Arruda. *História da educação*. **2. ed. São Paulo: Moderna, 1997.**

BALTAR, Paula Moreira. *Enseignement et apprentissage de la notion d'aire de surfaces planes: une étude de l'acquisicion des relations entre les longueurs et les aires au collège*. **Tese de doutorado, Didactique des Mathématiques de l'Université Joseph Fourier, Grenoble 1, 1996.**

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. *Parâmetros curriculares nacionais*: *matemática:* **[5ª a 8ª série]. Brasília: SEF, 1998. 148p.**

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. *Parâmetros curriculares nacionais*: *introdução aos parâmetros curriculares nacionais*. **2. ed. Rio de Janeiro: SEF, 2000a. 126p.**

______ *Parâmetros curriculares nacionais*: *matemática* **[1ª a 4ª série]. 2. ed. Rio de Janeiro: SEF, 2000b. 142p.**

CHIZZOTTI, Antonio. *Pesquisa em ciências humanas e sociais*. **3. ed. São Paulo: Cortez, 1998.**

DOUADY, Régine. Jeux de cadre et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques*, **Paris, 1986. v. 7, n. 2, p. 5-31.**

DOUADY, Régine, PERRIN-GLORIAN, Marie-Jeanne. Aires de surfaces planes. *Petit X*, **Paris, 1984. n. 6, p. 5-33.**

______ Aires de surfaces planes (2ème partie). *Petit X*, **Paris, 1985. n. 8, p. 5-30.**

______ **Un processus d'aprendissage du concept d'aire de surface plane.** *Cahier de didactique des mathématiques*, **Paris, 1987. n. 37, p. 1-43.**

DOUAIRE, Jacques, BOËT, Jeanine, BOUCULAT, Nicole, HUBERT, Christiane. 1999. Vrai? ... Faux? ... On en Débat! De l'argumentation vers la preuve en mathématiques au cycle 3. *Collection ERMEL*, **INRP, Paris, p.101.**

FIORENTINI, Dario. Alguns modos de ver e conceber o ensino da Matemática no Brasil. *Zetetiké*, **Campinas, 1995. ano 3, n. 4, p. 1-37.**

FRANCHI, Anna et al. Geometria no 1º grau: da composição e decomposição de figuras às fórmulas de área. *Coleção ensinando-aprendendo, aprendendo-ensinando*, **São Paulo: CLR Balieiro, 1992.**

LIMA, Elon Lages. *Medida e forma em geometria*. **Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1991.**

LÜDKE, Menga, ANDRÉ, Marli. *Pesquisa em educação: abordagens qualitativas*. **São Paulo: Editora Pedagógica e Universitária Ltda., 1986.**

MARANHÃO, Maria Cristina S. de A. Dialética ferramenta objeto. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara. *Educação Matemática: uma introdução*. **São Paulo: EDUC, 1999. p.115-134.**

NUNES, Terezinha, LIGHT, P., MASON, J. Tools for thought: the measurement of length and area. *Learning and Instructions*. **Pergamon Press Ltd, 1993. p.39-54.**

PAVANELLO, Regina Maria. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e conseqüências. *Zetetiké*, **Campinas, 1993. ano 1, n. 1, p. 7-17.**

PILETTI, Nelson. *História da educação no Brasil*. **7. ed. São Paulo: Ática, 1997.**

SANTOS, Marcelo Câmara. Efeitos de uma seqüência didática para a construção do conceito de perímetro no 2º ciclo do ensino fundamental. *CD-ROM da 22ª Reunião Anual da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação – ANPED*, **Caxambu, 1999.**

SÃO PAULO (ESTADO). Secretaria de Estado da Educação. Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo – SARESP. *Relatório final dos resultados da 1ª aplicação*, **vol. 1, Imprensa Oficial do Estado S.A, 1996.**

______ *Site* **da Secretaria de Estado da Educação — SARESP: http://www.educacao.sp.gov.br/resultados/saresp/saresp00.htm.**

SAVIANI, Demerval et al. *Filosofia da educação brasileira*. **6. ed. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 1998.**