Nancy Cury Andraus Haruna

TEOREMA DE THALES:
Uma abordagem do processo ensino-aprendizagem

Mestrado em EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PUC-SP
2000

Nancy Cury Andraus Haruna

TEOREMA DE THALES:
Uma abordagem do processo ensino-aprendizagem

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de MESTRE em EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, sob orientação do Professor Doutor Saddo Ag Almouloud.

PUC-SP
2000

Ficha catalográfica elaborada pela Bib. Nadir Gouvêa Kfouri - PUCSP

DM
510 Haruna, Nancy Cury Andraus
H Teorema de Thales: uma abordagem do processo
ensino-aprendizagem. - São Paulo: s.n., 2000.

Dissertação (Mestrado) - PUCSP
Programa: Matemática (Educação Matemática)
Orientador: Almouloud, Saddo Ag

1. Matemática - Estudo e ensino.

Palavra-Chave: Geometria - Registro de representação semiótica -
Cabri-géomètre I - Sequência didática - Análise cognitiva -
Ensino fundamental

BANCA EXAMINADORA

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação/tese por processos fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura:____________________________

Local e Data: _________________________

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a todos os profissionais de Educação que, apesar dos contratempos, mobilizam atitudes, propondo e conduzindo a labareda do ensino-aprendizagem por um novo caminho, crítico, democrático e, sobretudo, prazeroso.

AGRADECIMENTOS

“Louvarei ao Senhor, porquanto me tem feito muito bem”

(Salmo 13:6)

Muitos foram os que me ajudaram na construção deste trabalho, dando-me um pouco do conhecimento, do apoio, do carinho, que me foram vitais. Com apreço ...

Ao professor-doutor Saddo Ag Almouloud, pela orientação dedicada e amiga, pela paciência, pela compreensão, pelo incentivo e apoio constantes.

Aos professores-doutores da Banca Examinadora, Maria Tereza Carneiro Soares, Sandra Maria. Pinto. Magina e Anna Franchi, pela atenção, comentários e sugestões.

Ao professor-doutor Raymond Duval e a professora-doutora Ana Claudia de Oliveira que, em seus cursos, propiciaram-me conhecer um pouco de semiótica e enxergar um caminho para desenvolver este trabalho.

À coordenação e ao Corpo docente do Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática da PUC-SP, pelo convívio, apoio e compreensão.

Aos colegas do mestrado, pelo convívio e amizade, em especial, a Gloria pela aplicação do teste diagnóstico, a Marly, ao Ronaldo e ao Luiz R. Lindegger pelas viagens e acessoria na observação da seqüência didática.

Ao secretário Francisco e aos funcionários da biblioteca pela ajuda constante.

À Direção da Escola “Dr. Alfredo José Balbi”, Profª. Mércia Aparecida da Cunha Oliveira, ao Professor-Doutor Antônio Marmo de Oliveira, ao Coordenador de Informática Reginaldo pela confiança, pelo apoio, pela assistência, pela compreensão. Aos professores de Português e Inglês João Batista e Marinês pelas revisões.

Ao meu marido Luiz, a minha mãe Daisy, aos meus irmãos José Carlos, Luiz Cláudio e Adélia, aos meus cunhados Fernando e Eduardo que além de compreenderem meus momentos de ausência, sempre estiveram com paciência prontos para apoiar, incentivar, auxiliar e socorrer-me nos momentos de adversidade.

À CAPES...

... muito obrigada.

“Apólogo dos dois escudos”

“Conhecem o apólogo do escudo de ouro e de prata? Eu lho conto.

No tempo da cavalaria andante, dois cavaleiros armados de ponto em branco (=com cuidado, com esmero, completamente), tendo vindo de partes opostas, encontraram-se numa encruzilhada em cujo vértice se via erecta uma estátua da Vitória, a qual empunhava numa das mãos uma lança, enquanto a outra segurava um escudo. Como tivessem estacado, cada um de seu lado, exclamaram ao mesmo tempo:

- Que rico escudo de ouro!

- Que rico escudo de prata!

- Como de prata? Não vê que é de ouro?

- Como de ouro? Não vê que é de prata?

- O cavaleiro é cego.

- O cavaleiro é que não tem olhos.

Palavra puxa palavra, ei-los que arremetem um contra o outro, em combate singular, até caírem gravemente feridos.

Nisto passa um dervis, que depois de os pensar com toda a caridade, inquire deles o motivo da contenda.

- É que o cavaleiro afirma que aquele escudo é de ouro.

- É que o cavaleiro afirma que aquele escudo é de prata.

- Pois, meus irmãos, observou o darôes, ambos tendes razão e nenhum a tendes.

Todo esse sangue se teria poupado, se cada um de vós se tivesse dado ao incômodo de passar um momento ao lado oposto. De ora em diante nunca mais entreis em pendência sem haverdes considerado todas as faces da questão.”

José Júlio da Silva Ramos

(apud Fiorin, José Luiz, 1997, p. 15*)*

RESUMO

O objetivo desta nossa pesquisa foi analisar como se processa a apreensão do conceito do teorema de Thales por alunos da 8º série do Ensino Fundamental, levantar os obstáculos didáticos e epistemológicos, as variáveis de situação e verificar até que ponto o uso do computador favorece a superação dos obstáculos ou proporciona outros.

Para fazermos esta análise, recorremos ao estudo das variáveis de situação didática proposto por Guy Brousseau e ao trabalho do Psicólogo Raymond Duval sobre os registros de representação semiótica e a aprendizagem intelectual que associa a semiótica com os aspectos da cognição e da percepção.

Nossos estudos preliminares mostram que os problemas do ensino-aprendizagem dessa propriedade estão relacionados com sua forma de expressão e envolvem os aspectos da percepção, das significações e do contexto. Procuramos responder a seguinte questão *"Como produzir uma seqüência de ensino que proporcione ao aluno a apreensão do teorema de Thales observando todos esses aspectos?" baseando-nos nas* seguintes hipóteses:

1. propondo situações-problema em língua natural e utilizando o software Cabri evita-se a formação de imagens prototípicas e trabalha-se com as variabilidades perceptivas;
2. por meio de uma rede semântica pode-se organizar os três pontos de vista relacionados com as significações do teorema de Thales e, trabalhando-se com situações-problema de aplicações, essa noção passa a ter maior significado para os alunos possibilitando a utilização dele, do teorema, em outras situações afins.

Para validar nossas hipóteses, elaboramos e aplicamos uma seqüência didática em alunos da 8ª série e, decorridos dois meses do término dessa aplicação, realizamos um pós-teste nessa turma e numa outra turma que havia estudado o teorema de Thales sem fazer uso do computador. Para finalizar, fizemos uma análise qualitativa e quantitativa do pós-teste levantando algumas discussões. Concluímos que as hipóteses parecem pertinentes: o desenvolvimento das atividades baseadas na rede semântica proposta e em situações-problema dadas em língua natural utilizando o Cabri propiciaram abordar o teorema de Thales na sua significação global, trabalhando as variabilidades perceptivas e não formando imagens prototípicas. Um dos problemas que ainda persistiram foi quanto ao cálculo da medida do segmento formado na paralela. Suspeitamos que o ponto de vista da conservação das abscissas foi um conhecimento-obstáculo em relação ao ponto de vista da dilatação.

ABSTRACT

The aim of this research was to analyse how the understanding of Thales Theorem concept is processed by the students of the last year of the fundamental teaching, raising the didactic and epistemological obstacles, the variants of the situation and to check if the use of computer facilitates the overcoming of obstacles or it offers other ones.

We based on the study of the variants of the didactic situation suggested by Guy Brousseau and the work of the psychologist Raymond Duval about the registers of semiotic representation and the intellectual learning which associates the semiotic with the aspects of cognition and perception.

Our preliminary studies showed the teaching-learning problems are related to the form of expression and they involve the perception, meanings and context concepts. We asked the following question: *"How to elaborate a teaching sequence which could be offered the students to their understanding of Thales Theorem, observing all those aspects?"*, and we tried to answer it based on the hypothesis below:

1. we suggested problem-situation in natural language and used Cabri software, not allowing the pattern images formation, and we worked with perceptive variabilities;
2. we organized three points of view through a semantic net, which is related to Thales Theorem meanings, and when we worked with problem situations of applications, this notion gets a greater meaning to the students, and it makes possible the use of the theorem, in other similar situations.

To confirm our hypothesis, we elaborated and applied a didactic sequence to 8th grade students, and after two months at the end of this application, we did a post-evaluation at this group, and to another who had studied the theorem without using the computer. To end, we made a qualitative and quantitative post-evaluation analysis raising some discussions. We conclude the hypothesis seem to be pertinent: the development of activities based on the semantic net suggested and the problem situations given in natural language using Cabri approached Thales theorem in its global meaning, working the perceptive variabilities, not the prototypical images. One of the problems which still persist was related to the calculation of the measure formed in a parallel . And we suspected that the point of view between the conservation of the abscissas and the dilatation was a knowledge obstacle.

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

"Único bom ensino é o que adianta ao desenvolvimento."
(Vygotski)

Desde quando iniciamos o mestrado, o nosso desejo era trabalhar com geometria, e, se possível, utilizando o software Cabri. Essa vontade foi se enraizando na medida em que constatamos nos exames do SAEB e SARESP um baixo desempenho dos alunos na área de Geometria e analisamos o resultado de pesquisas relacionadas à formação de professores que mostram as dificuldades destes em trabalhar esses conteúdos. Diante disso, partimos para investir nossos estudos nessa área. Dentre esses conteúdos, um que nos chamou bastante atenção foi o teorema de Thales devido a sua vasta aplicabilidade desde o Ensino Fundamental até a Universidade e, principalmente, por ser uma ferramenta de grande utilidade em construções geométricas inclusive utilizando o software Cabri-géomètre. Em 1998, começamos a pesquisar os fenômenos relacionados ao ensino-aprendizagem dessa noção até que resolvemos abordá-la como tema na dissertação do mestrado, aprofundando esses estudos, definindo os problemas, as hipóteses e a metodologia para validá-las. O curso de semiótica discursiva ministrado pela professora Ana Claudia, e, depois, o curso de Duval sobre os registros de representação, nos ajudaram muito a enxergar os problemas e as hipóteses da pesquisa.

O objetivo desta pesquisa foi analisar como se processa a apreensão do conceito do teorema de Thales por alunos da 8ª série do Ensino Fundamental, levantar os obstáculos didáticos e epistemológicos, as variáveis de situação, observando os aspectos da percepção, das significações e do contexto, verificando até que ponto o uso do computador favorece a superação dos obstáculos ou proporciona outros. Para fazermos essa análise, recorremos ao estudo das variáveis de situação didática propostas por Guy Brousseau e ao trabalho do psicólogo Raymond Duval sobre os registros de representação semiótica e aprendizagem intelectual que associa a semiótica com os aspectos da cognição e percepção.

Para realizarmos essa pesquisa, passamos por três fases: a primeira se refere ao estudo preliminar, questionamento e problemática; na segunda fase, fizemos a experimentação e aplicamos um pós-teste, e na terceira analisamos os resultados do pós-teste confrontando-o com as hipóteses da pesquisa e escrevemos algumas discussões gerais.

A primeira parte foi desenvolvida em três capítulos.

No capítulo 1, procuramos analisar o teorema de Thales sob dois prismas: o lado da ciência matemática, estudando na história da Matemática sua origem, evolução, as demonstrações mais significativas e algumas aplicações; e o lado da didática e da psicologia cognitiva, explorando as variáveis de situação propostas por Brousseau, observando todos os conceitos implícitos e explícitos, suas formas de representação, procurando fazer uma análise deste objeto matemático em relação aos registros de representação semiótica definidos por Raymond Duval, das noções que estão relacionadas com ele e de suas aplicações, sempre visando observar os aspectos da percepção, da significação e do contexto.

No capítulo 2, fizemos um estudo de uma parte da transposição didática observando como se processa a transformação do objeto da ciência matemática ao objeto de ensino. Analisamos as propostas curriculares do Estado de São Paulo, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), as Experiências Matemáticas propostas no Estado de São Paulo, alguns livros didáticos, questões propostas em avaliações de sistemas de ensino brasileiro. Estudamos algumas pesquisas já elaboradas nessa direção, destacando as de Brousseau, Cordier e Charalambos; aplicamos um teste diagnóstico em alunos do 1º ano do Ensino Médio que estudaram essa propriedade e o analisamos de forma quantitativa e qualitativa com o intuito de verificarmos a concepção desses alunos e compreender as origens dos erros e dificuldades do ensino-aprendizagem.

Apoiando-se sobre os estudos preliminares, definimos nossa problemática e formulamos nossas hipóteses. O problema central versou sobre a questão "c*omo produzir uma seqüência de ensino que proporcione ao aluno a apreensão do teorema de Thales, observando os aspectos da percepção visual, das significações e do contexto?"* e, sintetizando as hipóteses, colocamos:

1) *propondo situações problemas em língua natural, utilizando o software Cabri evita-se a formação de imagens prototípicas e trabalha-se com as variabilidades perceptivas;*

2) *por meio de uma rede semântica pode-se organizar os três pontos de vista relacionados com as significações do teorema de Thales e trabalhando-se com situações problemas de aplicações esta propriedade passa a ter maior significado para os alunos possibilitando a utilização dele em outras situações afins.*

Definido no capítulo 3 a problemática e as hipóteses, partimos para a segunda parte da pesquisa, a experimentação, relatada no capítulo 4.

Nessa fase elaboramos uma seqüência didática abordando os conceitos de semelhança e o teorema de Thales, seguindo alguns princípios da Engenharia Didática, utilizando como material de apoio pedagógico o software Cabri-géomètre I, além dos instrumentos de desenho tradicional (régua, transferidor, compasso) e da sobreposição de figuras. Elaboramos também, uma ficha de observação cifrada, para facilitar e direcionar o trabalho de observação do desempenho e atuação dos alunos durante a aplicação dessa seqüência. Trabalhamos com duas turmas de 8ª série: na turma A, com 30 alunos, aplicamos essa seqüência de ensino e, na turma B, com 31 alunos, utilizamos o livro didático de forma tradicional. Ao todo, nessa experimentação, foram utilizadas, na 8ª série A, 25 aulas de 50 minutos cada, e, na 8ª série B, 16 aulas.

Depois de dois meses do término da seqüência, aplicamos um pós-teste nas duas turmas concomitantemente, e o analisamos de forma quantitativa e qualitativa. As questões desse pós-teste foram as mesmas do teste diagnóstico aplicado em 1998 quando fizemos o estudos preliminares. Na análise qualitativa, utilizamos o programa CHIC (Classificação Hierárquica Implicativa e Coesitiva) para construção dos gráficos e árvores de similaridade e implicação.

A última parte do trabalho foi dedicada às discussões gerais feitas no capítulo 5.

Nesse capítulo, procuramos primeiramente destacar a importância da metodologia adotada. Depois analisamos os resultados da pesquisa com relação às hipóteses confrontando-os com as pesquisas de Brousseau, Cordier e Charalambos. Serviram como fontes de dados dos desempenhos iniciais dos alunos e das mudanças ocorridas as informações fornecidas pela professora da classe sobre os alunos as anotações do observador, as fichas de atividades dos alunos, os disquetes, as gravações, depoimento de alguns alunos, entrevistas e o pós-teste. Para validação da pesquisa, utilizamos os resultados do pós-teste e o desenvolvimento dos alunos observados durante a experimentação.

Por fim, tecemos algumas considerações sobre o limite do trabalho, os prolongamentos necessários e algumas sugestões.

PARTE I

ESTUDO PRELIMINAR, QUESTIONAMENTO E PROBLEMÁTICA

> “O conhecimento não se dá à margem da prática social dos homens. Ela é antes de mais nada o fundamento do pensamento mas, para a verdadeira compreensão do real, é preciso que o pensamento (que é teórico-prático) trabalhe o observável e vá além dele, concretizando-o através da consciência que é ativa, não por dom sobrenatural, mas porque abstrai e apreende o movimento existente na totalidade”
>
> (Franco, Maria Laura P. Barbosa, Pressupostos Epistemológicos da Avaliação Educacional, in Cadernos de Pesquisa, PCC, Ago/90, n.º 74, p.67 apud Matui, Jiron. 1993, p. 59)

INTRODUÇÃO

Nesta primeira parte da pesquisa procuramos enfocar o objeto matemático "Teorema de Thales" estudando-o sob vários prismas. Primeiramente, no âmbito da ciência matemática para a qual recorremos à história da matemática com o intuito de pesquisar sua origem e desenvolvimento. Nesse sentido ainda, analisamos algumas de suas demonstrações e aplicações. Depois, passamos a ver o teorema de Thales de um ponto de vista da Didática observando as variáveis de situação (Brousseau) à luz da Semiótica e da Psicologia Cognitiva, levando em conta os registros de representação semiótica abordados por Raymond Duval. Ao fazermos essa análise, estudamos os conceitos implícitos e explícitos com o teorema de Thales, suas formas de representações observando os aspectos da percepção visual, das significações e do contexto.

Como nossa meta é o ensino-aprendizagem, fizemos um estudo de uma parte da transposição didática (capítulo 2) procurando observar como se dá a transformação de objeto da ciência matemática ao objeto de ensino. Para isso analisamos as Propostas Curriculares do Estado de São Paulo, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), propostas didáticas para o ensino como as Experiências Matemáticas e alguns livros didáticos, as questões propostas em avaliações de sistemas de ensino brasileiras como o SAEB e SARESP. A seguir, visando diagnosticar a origem dos erros e dificuldades dos alunos recorremos a resultados de pesquisas e artigos e por fim, elaboramos, aplicamos e analisamos um teste diagnóstico para avaliar a concepção de alguns alunos que já haviam estudado essa noção.

No decorrer de todo estudo, fomos levantando questionamentos, destacando problemas quanto ao ensino-aprendizagem, formulando hipóteses e definindo a metodologia para verificar, validar ou invalidar essas hipóteses. Fizemos também um levantamento de pesquisas e artigos referentes ao estudo em questão a fim de verificar o que já foi ou está sendo feito com o propósito, além do citado acima, de aproveitar alguns dados e definir melhor a problemática da pesquisa (capítulo 3).

CAPÍTULO I: ESTUDO DO OBJETO MATEMÁTICO "TEOREMA DE THALES"

Na primeira parte do estudo do objeto matemático "teorema de Thales", cujo objetivo é vê-lo no prisma da ciência matemática, utilizamos como fontes de dados além de livros sobre a História da Matemática, alguns artigos de pesquisas publicados na França por meio do *Bulletin Inter-IREM Commission Premier Cycle*. O primeiro artigo utilizado, de autoria de Henry Plane, *Une invention française du XXº siècle: le théorème de Thalès,* procura fazer uma análise do levantamento histórico desse conceito nos principais manuais franceses. O outro artigo utilizado, de autoria de Rudolf Bkouche, *Autour du Théorème de Thalès: variations sur les liens entre le géométrique et le numérique,* apresenta as demonstrações mais significativas do ponto de vista histórico como as de Euclides, Arnauld, Legendre e Lacroix.

Ao longo dos estudos preliminares, fomos percebendo as aplicações do teorema de Thales tanto na parte histórica como em artigos, na dissertação do mestrado apresentada por Maria Célia Leme da Silva (1997-PUC-SP) e em alguns livros didáticos de Matemática e de Desenho Geométrico. Neste trabalho iremos apresentar apenas algumas dessas aplicações e outras apenas citaremos. As fornecidas como exemplo são as que pretendemos trabalhar na seqüência didática e, quanto às demais, a intenção de citá-las tem o objetivo de mostrar que essa noção pode ser utilizada em vários graus de ensino bem como em outras áreas de conhecimento.

1.1. Origem, evolução e demonstrações do teorema de Thales do ponto de vista histórico e algumas aplicações.

Após várias leituras procurando precisar a origem da noção do teorema de Thales, percebemos que não é tão simples dizer exatamente quando e como surgiu. Primeiro por não termos documentos suficientes que comprovem, e, segundo, por haver várias controvérsias quanto à autoria do teorema que hoje conhecemos como teorema de Thales. O que iremos relatar são algumas conjecturas e indícios do aparecimento dessa noção, bem como resultados de pesquisas nessa direção.

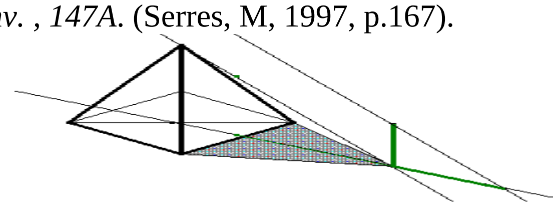
Iniciando o estudo pelos povos antigos, notamos que a matemática dos Egípcios e Babilônicos (3000 a.C.- 260 d.C.) era essencialmente empírica ou indutiva e as informações que temos a esse respeito vêm dos Papiros de Moscou (1850 a.C.), de Rhind (1650 a.C.) ou de Ahmes. O papiro de Rhind tem especial interesse por conter rudimentos de trigonometria e uma teoria de triângulos semelhantes observados nas pirâmides. Um problema dos Antigos Babilônicos diz: "*Um cateto de um triângulo retângulo é 50. Uma paralela ao outro cateto e a distância 20 dele corta o triângulo formando um trapézio retângulo de área 5,20. Determine os comprimentos das bases do trapézio*". (Eves, Howard, 1995, pág. 79). Nesse problema percebe-se implicitamente que além das relações de área, a noção da proporcionalidade devido à paralela a um dos lados de um triângulo que seria uma das estratégias de resolução, talvez já fosse conhecida nessa época por essas civilizações.

Com os Gregos houve a introdução e depois o desenvolvimento significativo da geometria dedutiva. A principal fonte de informações que temos a respeito dos primeiros passos da matemática grega é o chamado *Sumário Eudemiano* de Proclo (séc. V d.C.). Nesse sumário consta, pela tradição, que a geometria demonstrativa começou com Thales de Mileto (600 a.C.). Segundo Howard Eves (1995, p. 95), "*Thales começou sua vida como mercador, tornando-se rico o bastante para dedicar a parte final de sua vida ao estudo e a algumas viagens. Diz-se que ele viveu por algum tempo no Egito, e que despertou admiração ao calcular a altura de uma pirâmide por meio da sombra. De volta a Mileto ganhou reputação....*". Por esse trecho podemos suspeitar que devido a sua viagem e estudo pelo Egito, ele deva ter sofrido algumas influências com relação a matemática desse povo e que provavelmente levou esses conhecimentos para a Grécia.

O teorema hoje conhecido como teorema de Thales deve ter provavelmente tido sua origem nos métodos utilizados para se medir a altura das pirâmides. A versão mais simples é a de Hieronymus, um aluno de Aristóteles, citado por Diógenes Laértius.

Diógenes Laércio: "*Jerónimo diz que Thales mediu as pirâmides pela sombra, depois de observar o tempo que a nossa própria sombra demora a ficar igual à nossa altura.*" *Vida, Doutrina e Opiniões dos Filósofos Ilustres; Tales, I, 27.* (Serres, M, 1997, p.167).

Plutarco: "*...gostou da tua maneira de medir a pirâmide limitando-te a colocar o bastão no limite da sombra lançada pela pirâmide, gerando o raio de sol tangente dois triângulos, demonstraste que a relação entre a primeira sombra e a segunda era a mesma que entre a pirâmide e o bastão. Mas também te acusaram de não gostares de reis...*" *Sept. Sap. Conv. , 147A.* (Serres, M, 1997, p.167).



Nesses dois textos vimos que Jerónimo relata um caso especial com triângulo isósceles e Plutarco, o caso geral, porém, em ambos, podemos perceber a origem do teorema de Thales e uma de suas aplicações. Esse método implica a teoria geral de triângulos semelhantes ou proporções.

Thales deve ter observado que, na ocasião, quando a sombra de um objeto particular é igual a sua altura, a mesma relação é válida para todos os outros objetos que projetam uma sombra. Isso provavelmente ele deduziu depois de fazer medidas em um número considerável de casos.

De Diógenes ou de Plutarco, os esquemas apresentam coisas que mudam e outras que permanecem. Imóveis, invariáveis, seriam as pirâmides e, pelo contrário, variáveis, são o movimento aparente do sol, o comprimento e a posição da sombra.

Thales distingue, no meio da variável, a invariante estável e descobre o desconhecido.

Como foi dito, o teorema de Thales é ainda muito questionável quanto a sua autoria. Segundo *Sir Thomas Heath* (1981, p. 129 à 133) os teoremas que foram atribuídos a Thales são:

1) "*...que um círculo é bissectado por seu diâmetro*";

2) "*...a primeira afirmação do teorema (Eucl.I.5) que os ângulos na base de qualquer triângulo isósceles são iguais*";

3) "*a proposição (Eucl.I.5) de que, se duas linhas retas cortam uma a outra, os ângulos verticais e opostos são iguais foi descoberta; entretanto, não foi cientificamente provada por Thales. Eudemus é citado como o autor desse assunto*";

4) "*Eudemus, em sua História da Geometria, atribui a Thales o teorema de Eucl.I.26 que diz: se dois triângulos têm dois ângulos e um lado em cada um deles respectivamente iguais, os triângulos são iguais em todos os pontos de vista".*

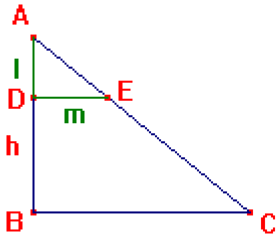
"Eudemus disse que o método pelo qual Thales mostrava como achar as distâncias da praia até o navio envolve o uso desse teorema ***(4)****".*

5) *"Pamphile diz que Thales, que aprendeu geometria com os egípcios, foi o primeiro a descobrir num círculo um triângulo com ângulo reto. Outros, porém, incluindo Apollodorus, o calculador, diz que isso era de Pythagoras".*

"*Com respeito ao teorema (4), de Eucl. I.26, será observado que Eudemus só deduziu que esse teorema era de conhecimento de Thales pelo fato de que é necessário para a determinação da distância da praia ao navio de Thales. O método usado só pode ser conjeturado*".

A seguir, citaremos algumas dessas conjecturas.

*"A suposição mais comum é aquela que Thales, observando o navio do topo de uma torre na praia, usou a equivalência prática da proporcionalidade dos lados de dois triângulos retângulos semelhantes, um pequeno e um grande. Supondo que a torre está no ponto **B** e o navio no ponto **C**, bastava um homem ficar de pé no topo da torre **D**, ter um instrumento com 2 pernas que formassem um ângulo reto, colocá-lo com uma perna $\overline{DA}$ vertical e em linha reta com **B**, e a outra perna $\overline{DE}$ na direção do navio, pegar qualquer ponto **A** na distância $\overline{DA}$ e depois marcar em $\overline{DE}$ o ponto **E**, onde a linha de visão de **A** à **C** corta a perna $\overline{DE}$. Depois DA (= l, digo) e DE (= m, digo) pode ser realmente medida, como também a altura BD (= h, digo) de **D** ao pé da torre, e pelos triângulos similares*". Ver figura 1.



$$BC = (h + l).\frac{m}{l}$$

Figura 1

*"A objeção a esta solução é que ela não depende diretamente do Eucl. I.26, como Eudemus fala. Tanery, entretanto, favorece a hipótese de uma solução nas linhas seguidas pelo agrimensor romano Marcus Junius Nipsus, em seu fluminus variatio. Para achar a distância de **A** para um ponto inacessível **B** (figura 2), meça de **A**, ao longo de uma linha reta perpendicular a $\overline{AB}$, uma distância AC, dividido ao meio em **D**. De **C**, no lado de $\overline{AC}$ vendo de **B**, trace $\overline{CE}$ perpendicular a $\overline{AC}$, e de forma que **E** esteja alinhado com **B** e **D**".*

"Depois clareada, por Eucl. 1.26, $\overline{CE}$ é igual a $\overline{AB}$ e $\overline{CE}$ pode ser medido, de forma que $\overline{AB}$ se torna conhecido (descoberto)".

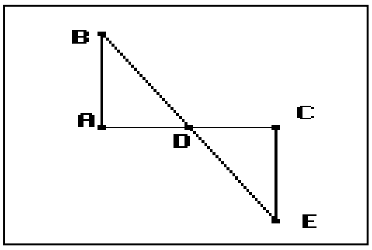


Figura 2

Interessante observar nessas conjecturas que, além de se usar a noção da semelhança de triângulos, as configurações estão implícitas. Na primeira, vemos sugeridos dois triângulos retângulos sobrepostos, e, na outra, dois triângulos retângulos congruentes e não sobrepostos, com um vértice comum, visualmente dando a idéia de uma rotação de 180º num dos triângulos fixado o vértice comum.

A última hipótese sugerida por Tanery está aberta a uma objeção diferente, isto é, que como regra, seria difícil, no caso suposto, conseguir uma quantia suficiente de espaço livre e nivelado para a construção e medições.

Heath (1981, p. 132, 133) sugeriu um método livre ainda mais simples dessa objeção e dependendo igualmente e diretamente no Eucl.1.26. "*Se o observador fosse colocado no topo de uma torre, ele só teria que usar um instrumento rudimentar feito de uma vara reta e um pedaço amarrado nele como cruz, para ser capaz de girar sobre a amarração, de forma que ele pudesse formar qualquer ângulo com a vara e, ainda assim, permaneceria onde foi posto. Depois, a atitude natural seria fixar a vara vertical (por meio de um prumo) e dirigir a cruz em direção ao navio. Em seguida, deixando a cruz no ângulo descoberto, ele giraria a vara, enquanto manter-lhe-ia na vertical, até que a cruz apontasse para algum objeto visível na praia, que seria mentalmente anotado; depois disso só seria necessário medir a distância do objeto do pé da torre cuja distância , segundo por Eucl.1.26, seria igual a distância ao navio. Parece que este método preciso é encontrado em tantas geometrias práticas do primeiro século de impressão que deve se presumir que por um longo tempo foi uma coisa comum*". Na figura 3, representamos uma simulação dessa idéia.

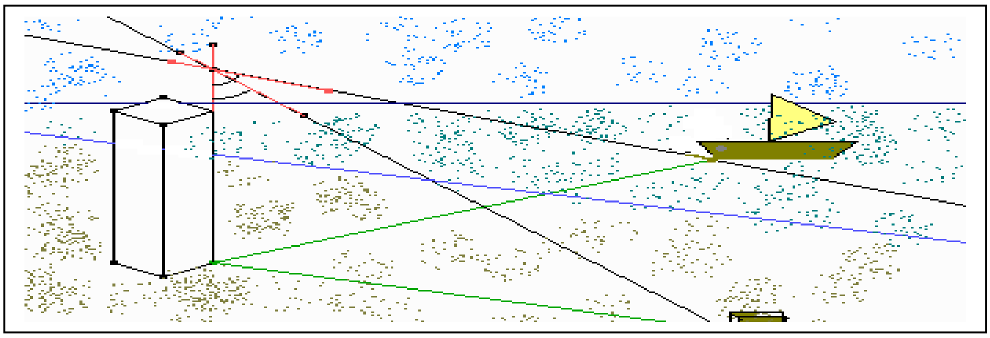


Figura 3

Segundo pesquisa realizada por Henry Plane (1995, p. 68 a 85), o aparecimento do nome "Teorema de Thales" nos manuais só surgiu na França no final do século XIX e meados do século XX, e não foi encontrado nos livros mais famosos.

Segundo sua pesquisa, a noção das linhas proporcionais é encontrada em várias obras anteriores ao século XX e nas várias aplicações em construções utilizando régua e compasso. Como exemplos de aplicações temos: Bouelle (1509) em "*Art pratique de géométrie*" que fornece um modo de dividir em **n** partes um segmento de reta. Descartes (1637), sem demonstrar, escreve como se faz geometricamente a multiplicação e divisão de segmentos dentre outros. No entanto, nenhuma dessas obras citam Thales como autor desse teorema, a ele são atribuídos outros teoremas. Na maioria dos livros, no que se refere ao plano, são as figuras semelhantes que atuam importante papel para determinar alturas e distâncias desconhecidas, em problemas práticos de construções geométricas e outras aplicações.

Enfim, a data mais antiga que encontrou, "*Cours de Géométrie élémentaire*", por E. Combette professor do Lycée Saint - Louis. Alcan editor, 1882 Théorème de Thalès: "*Estuda-se um triângulo cortado por uma paralela a um de seus lados*". (Henry Plane, p. 79).

Segundo cita Henry Plane, existe uma obra editada junto a Mame em Tours, tendo por nome de autores *J.F.* mas sem data de impressão (nos últimos anos do século XIX certas editoras não colocavam data, ao que parece, por razões de impressão fiscal...). Esta obra contém um " Theorema de Thales" (*documento 14*). (Henry Plane, p. 79).

Doc. 14 - Teorema de Thales.

221- Toda paralela a um dos lados de um triângulo determina um segundo triângulo semelhante ao primeiro:

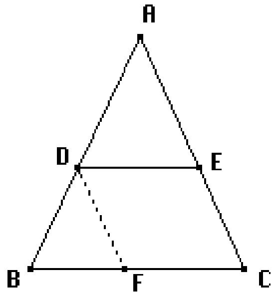


Figura 4

Seja ABC um triângulo qualquer, $\overline{DE}$ *uma paralela ao lado* $\overline{BC}$*. Deve-se provar que os dois triângulos ADE e ABC têm os ângulos respectivamente iguais e os lados homólogos proporcionais. 1º) O ângulo* ***A*** *é comum, os ângulos* ***D*** *e B são iguais e correspondentes, como E e C. 2º) Tomemos* $\overline{DF}$ *paralela a* $\overline{AC}$*. A figura DECF é um paralelogramo, e assim* ***DE*** *=* ***FC*** *(n.º 100). Devido as paralelas,* $\overline{DE}$ *e* $\overline{BC}$*, tem - se (n.º 213) :*

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

As paralelas $\overline{DF}$ *e* $\overline{AC}$ *fornecem igualmente:*

$$\frac{AD}{AB} = \frac{FC \text{ ou } DE}{BC} \quad \text{onde} \quad \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}, \ \text{logo...}$$

Documento 14 - curso de F.J.(por volta de 1895), p.96, Editora Mame (Henry Plane, p. 79)

Relata ainda que no séc. XVII e XVIII, houve uma multiplicação das obras e essas podem ser divididas em dois grupos:

1º) os fiéis a Euclides que respeitam sua ordem enfocando a relação das áreas e as figuras semelhantes com o caso do triângulo cortado por uma paralela a um dos lados. Dentre esses temos: Deschalles, Ozanam, Pardies e Legendre;

2º) os senhores de Port Royal, que procuram uma nova ordem em relação àquela proposta por Euclides. Nessa linha encontramos: Pascal, Arnauld (1667), Cavalieri, Padre Lamy, Abade La Caille (1744), Rivard (1732), Mazeas (1770), Clairaut (1743), Laplace, Bezout.

A geometria de Legendre predominou no Ensino da Matemática de 1794 à 1823 retomando a demonstração e a ordem Grego seguindo os princípios de Euclides.

Henry Plane expõem que as obras de Catalan (1º edição 1843, 2º edição 1866) e Meray (1º edição 1874 - 2º edição 1905) foram muito debatidas e discutidas. Esses autores mantinham separação entre as propriedades das paralelas e as dos triângulos semelhantes. Catalan estuda primeiramente que os segmentos "*de duas retas quaisquer determinados por três paralelas são proporcionais*", depois, os recíprocos, seguindo o caso de **n** paralelas, e, finalmente, as figuras semelhantes. Ele trata o espaço sob o título: *Quadriláteros esquerdos*. Meray estuda simultaneamente plano e espaço, fala de retas e de muros paralelos, separa as relações estudando então figuras semelhantes, invocando a noção de projeção e usando relações algébricas.

Nota-se nas obras onde figura um teorema de Thales, que este aparece de forma diferente e em capítulos diferentes e grosseiramente podem ser divididas em duas grandes famílias, que tratam de:

1º) triângulos cortados por uma paralela em um de seus lados no quadro de figuras semelhantes sendo que nem sempre retomava a demonstração pelas áreas. Nós encontramos F.J., F.G.M., Combette (1882), Vacquant na edição de 1908, Macede Lespinay na edição de 1917, Boucheny e Gardinet (1920), Beche (1920) e, mais tarde, Chenivier, que citam Thales;

2º) retas paralelas e secantes no quadro das linhas proporcionais com invocação de projeção (família de Arnauld). Contam ai Barbarin, Brachet e Dumarquet, Maillard, Lebossé e Hemery, Lespinard e Pernet, etc. Nessa família, Foulon (1937) realiza a propriedade de um teorema fundamental de Thales e introduz as relações algébricas de forma única e recíproca.

Na segunda metade do séc. **XX** foi que surgiu uma variedade de enunciados referentes ao teorema de Thales e este passa então a ser citado nos programas franceses.

No capítulo 2, faremos a análise de alguns livros didáticos do Brasil, tendo como um dos objetivos detectar algumas variações quanto à forma de se enunciar o teorema de Thales, quanto à ordem dos conteúdos e quanto à forma de abordá-lo.

1.1.1- Demonstrações do teorema de Thales

Rudolf Bkouche (1994), na obra “Autour du Théorème de Thalès” – IREM de Lille, faz um estudo histórico das diversas demonstrações das linhas proporcionais, chamado teorema de Thales. Esse estudo permite precisar como se construiu a relação entre o numérico e o geométrico. Iremos sintetizar mais abaixo as demonstrações, citadas por Bkouche, de: Euclides, Arnauld, Legendre e Lacroix.

Euclides, para responder à crise provocada pela descoberta dos irracionais, desenvolve uma teoria das proporções apoiando-se sobre a noção de ordem, eliminando todo recurso ao numérico (é a teoria de Eudoxo exposta no livro V dos elementos).

Arnauld desenvolve uma noção de aproximação ao estatuto de número mal definido, pode ser mais próximo do cálculo numérico, mesmo não identificando uma relação de comprimento para um número.

Legendre retoma a demonstração de Euclides porém tentando uma nova ordem. Ele mistura os métodos euclidianos (áreas) e as propriedades numéricas.

Lacroix marca o abandono dos tratados no ensino do método das áreas, apoia-se algumas vezes sobre a lógica de Port-Royal e sobre o empirismo dos “Lumières”, em particular de Condillac.

1) A demonstração euclidiana

A demonstração euclidiana se baseia no método das áreas e na teoria das proporções.

a) ***método das áreas*** - (exposto no livro **I** dos elementos):

O método das áreas se apóia, de um lado, no postulado das paralelas (que permite mostrar a igualdade dos ângulos alternos internos e dos ângulos correspondentes, definidos por uma reta secante cortando as duas retas paralelas) e de outro, na equivalência de triângulos (que legitima a operação de recomposição).

Da equivalência de triângulos e do postulado das paralelas enuncia e demonstra as proposição **36**, **37** e **38** do livro **I**:

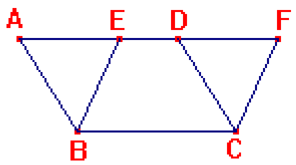


Figura 5

“Os paralelogramos, construídos sobre duas bases iguais e entre as mesmas paralelas, são iguais entre si” (proposição 36 – livro I).

"*Os triângulos, construídos sobre a mesma base e entre as mesmas paralelas são iguais*" (proposição 37 - livro I);

"*Os triângulos, construídos sobre duas bases iguais e entre as mesmas paralelas são equivalentes*" (proposição 38 – livro I).

O método das áreas permite afirmar a igualdade de duas superfícies. O problema surge ao comparar duas áreas e exprimir essa relação, isto é, combinar ao mesmo tempo cada uma dessas áreas com uma cota comum, surgindo o problema das grandezas comensuráveis e incomensuráveis. Quando as grandezas são comensuráveis a proposição **1** do livro **VI** descrita abaixo fica bem definida.

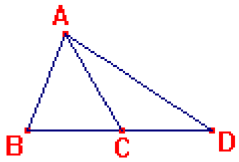


Figura 6

"*Os triângulos e os paralelogramos que têm a mesma altura, estão entre si, como suas bases*". Melhor dizendo:

$$\frac{\textit{área } ABC}{\textit{área } \mathrm{ACD}} = \frac{BC}{CD}$$

Sendo λ uma parte alíquota comum de $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$, então $BC = \mathbf{m}\,\lambda$, $CD = \mathbf{n}\,\lambda$, com **m** e **n** sendo números inteiros; pode-se, assim, considerar uma divisão de $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$ em partes de comprimento λ. A proposição **38** do livro **I**, mostra que os triângulos de vértice **A** e de base com comprimento múltiplo de **λ** têm a mesma área. Seja **σ** a área desse triângulo, então: área (***ABC***) = **mσ** e área (***ACD***) = **nσ,** o que prova a asserção.

Se $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$ são incomensuráveis isso não é mais válido (Se $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$ não têm cota **λ** comum), surgindo a necessidade de se explicitar uma teoria das proporções para essas grandezas.

b) A teoria das proporções:

A descoberta (Teorema de Pitágoras) das grandezas incomensuráveis, pôs um novo problema e tornou necessário elaborar uma teoria das proporções, levando em conta a incomensurabilidade. Essa teoria das proporções foi desenvolvida por Eudoxo, matemático contemporâneo a Platão, exposto no livro **V** do "Elementos de Euclides".

Citaremos abaixo as definições euclidianas necessárias para a compreensão da demonstração:

"*Uma razão é uma certa maneira de ser de duas grandezas homogêneas entre elas, segundo a quantidade*";

"*Uma proporção é uma identidade de razão*";

"*Duas grandezas são ditas ter uma razão entre elas quando estas grandezas sendo multiplicadas, podem superar-se mutuamente*";

"As grandezas são ditas ter a mesma razão, a primeira para a segunda e a terceira para a quarta, quando os eqüimúltiplos quaisquer da primeira e da terceira, e de outro lado os eqüimúltiplos quaisquer da segunda e da quarta, são tais que os primeiros eqüimúltiplos superam, cada um com cada um, os segundos eqüimúltiplos, ou são iguais aos primeiro, ou são menores".

Essa definição nos termos de hoje poderia ser escrita: "**a** e **b** sendo duas grandezas homogêneas, **c** e **d** duas outras grandezas homogêneas, então: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ se, **n** e **m** sendo dois números inteiros, as asserções seguintes são verificadas:

se **ma > nb**, então **mc > nd**,

se **ma = nb**, então **mc = nd**,

se **ma < nb**, então **mc < nd**".

c) A demonstração Euclidiana (método das áreas):

Veremos, a seguir, como a noção de igualdade da razão permite demonstrar a proposição **I** do livro **VI**.

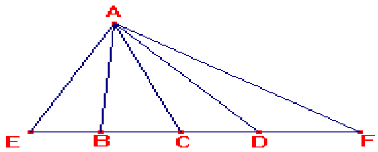


Figura 7

Sejam **m** e **n** dois números inteiros e sejam os pontos **E** e **F** sobre a reta ***CD*** tais que $CE = \mathbf{m}.CB$ ***e*** $CF = \mathbf{n}.$ A proposição **38** do livro **I** implica:

área (*ACE*) = **m**. área (*ACB*) e a área (*ACF*) = **n**. área (***ACD***).

Mostra-se facilmente que, se ***CE*** é "maior que", "igual a" ou "menor que" ***CF***, então, a área do triângulo ***ACE*** é "maior que", "igual a" ou "menor que" a área do triângulo ***ACF***, ou seja:

$\mathbf{m}CB > \mathbf{n}CD \Rightarrow$ **m** área **ACB** > **n** área **ACD;**

$\mathbf{m}CB = \mathbf{n}CD \Rightarrow$ **m** área **ACB** = **n** área **ACD;**

$\mathbf{m}CB < \mathbf{n}CD \Rightarrow$ **m** área **ACB** < **n** área A**CD;**

na qual a razão de $\overline{BC}$ para $\overline{CD}$ é a mesma que a da área do triângulo ***ABC*** pela área do triângulo ***ACD***.

Pode-se, então, mostrar o teorema de Thales (proposição **2** do livro **VI**):

"Se traçarmos uma reta paralela a um dos lados de um triângulo (figura8), *esta reta cortará proporcionalmente os lados desse triângulo, e se os lados de um*

triângulo são cortados proporcionalmente, a reta que une as secções será paralela ao outro lado do triângulo".

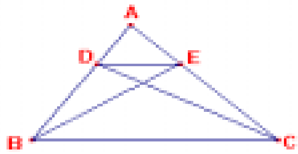


Figura 8

Pode-se mostrar a igualdade: $\frac{BD}{DA} = \frac{CE}{EA}$.

Diz-se, após a proposição precedente que:

$$\frac{BD}{DA} = \frac{\acute{a}rea\ EBD}{\acute{a}rea\ \mathrm{EDA}} \text{ ou } \frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}} = \frac{\acute{a}rea\ \mathrm{DCE}}{\acute{a}rea\ \mathrm{DAE}} \text{ e,}$$

por outro lado, os triângulos ***BED*** e ***CED***, tendo a mesma base, $\overline{DE}$, e estando compreendido entre as mesmas paralelas ($\overline{DE} // \overline{BC}$) são equivalentes, proposição **36** do livro **I**, logo: $\frac{BD}{DA} = \frac{CE}{EA}$.

2) A demonstração de Arnauld

Antoine Arnauld e os críticos de Port Royal criticam o modo como Euclides demonstrou o teorema de Thales devido ao fato de que, para mostrar que as linhas são proporcionais, utiliza-se de áreas que, segundo eles, são um dos entorses da verdadeira ordem da natureza.

O trabalho de Arnauld, publicado em 1667, se propõe a encontrar uma ordem natural na exposição da geometria.

Na época em que Arnauld escreveu sua obra, a noção de número foi ampliada, embora os números "surdos", que representam as razões de grandezas incomensuráveis, não tivessem um estatuto bem definido. Unificaram-se as operações sobre os números e as operações sobre grandezas, mesmo distinguindo números e grandezas. É baseado nessa aritmética que Arnauld funda a teoria das proporções.

a) teoria das proporções

Arnauld, após haver explicado num 1º livro as operações aritméticas sobre os números e as grandezas, estuda, no 2º livro, a teoria das proporções. Neste livro, definiu razão como: "*a maneira como uma grandeza (o antecedente) é contida em, ou contém, uma outra (o conseqüente), distingüindo-as em duas espécies de razões.*

A primeira é quando a grandeza ou qualquer uma de suas alíquotas está contida tantas vezes precisamente numa outra que ele chamou "razão exata" ou "razão de número a número".

A segunda é quando não se encontra nenhuma alíquota que seja precisamente tantas vezes contida na outra, o que ele chamou uma "*raison sourde*". Arnauld chamou de razão "*surda*", talvez, as razões inacessíveis ao pensamento daquela época, ou seja, grandezas incomensuráveis.

Uma proporção é então uma igualdade de razão que Arnauld em sua segunda definição diz:

> "*Duas razões são chamadas iguais quando todas as alíquotas semelhantes de antecedentes são cada uma igualmente contidas em cada conseqüente*".

De outro modo, sejam **a**, **b**, **c**, **d** quatro grandezas, **a** e **b** homogêneo, **c** e **d** homogêneo, diremos que a razão de **a** para **b** é igual à razão de **c** para **d** (**a** está para **b** como **c** está para **d**, que Arnauld escreve (**a.b::c.d**)) se **x** e **y** tendo duas partes de alíquotas iguais de **a** e **c** (quer dizer que **a** = **m**.**x** e **c**=**m**.**y**, sendo **m** um número inteiro) uma das asserções está verificada:

i) se **x** tem precisamente tantas vezes em **b**, então **y** tem outras tantas vezes em **d**, caso em que a razão de cada antecedente a seu conseqüente é de número a número;

ii) se **x** não tem jamais tantas vezes em **b** mas sempre tem resíduo, então **y** tem tantas vezes em **d** mais algum resíduo, caso em que a razão é "*surda*".

Nas edições ulteriores (1683, 1693), Arnauld dá uma nova formulação da teoria das proporções, propondo-se a tornar mais acessível o 2º e 3º livros (consagrados a teoria das proporções e ao cálculo das razões). Determinando que a razão é uma quantidade, Arnauld exprime que se pode comparar as razões: "*Como a razão é uma quantidade, ainda que relativa, todas as propriedades da quantidade lhe convém; isso porque uma razão é igual, ou maior, ou menor que uma outra razão*".

O autor distingue ainda razão de número a número e razão "*surda*"; se a razão de número a número é representada por uma "fração" ou "número rompido", a razão "*surda*" "não pode ser marcada por nenhum número". Enunciando então vários axiomas sobre as proporções que vão lhe permitir enunciar o seguinte teorema:

> "*Duas razões são iguais quando todas as alíquotas comuns iguais de cada antecedente estão igualmente contidas em seu conseqüente*".

Assim, Arnauld demonstra o que lhe serviu de definição de igualdade das razões na primeira edição.

O teorema é evidente no caso das razões de número a número.

No caso de razões "*surdas*", Arnauld utiliza o fato de que, as razões sendo as grandezas, podem ser comparadas. Ele mostra, utilizando a clássica dupla redução ao absurdo (o método de exaustão dos geômetras gregos) que, se as alíquotas semelhantes dos antecedentes estão igualmente contidas nos antecedentes, portanto, as razões são iguais.

Com efeito, consideremos as razões ***a/b*** e ***c/d*** (notamos que na terceira edição, Arnauld emprega a notação ***a/b*** para designar a razão entre **a** e **b**, **a** sendo chamado de numerador e **b** de denominador) tais que as alíquotas semelhantes de **a** e **c** estão igualmente contidas em **b** e **d**; isso significa que se α é uma parte alíquota de **a** e γ a parte semelhante de **c**, seja $\mathbf{a = n.\alpha}$ e $\mathbf{c = n.\gamma}$ então **b** contém um mesmo número de vezes α aumentado eventualmente de um resíduo menor que α e **d** contém o mesmo número de vezes γ aumentado eventualmente de um resíduo menor que γ, seja:

$$\mathbf{b = p.\alpha + \varepsilon \quad \varepsilon < \alpha}$$
$$\mathbf{d = p.\gamma + \eta \quad \eta < \gamma.}$$

Se ***a/b*** e ***c/d*** não são iguais, então ***a/b*** é superior ou inferior a ***c/d.***

Supondo ***a/b*** superior a ***c/d***, então aumentando o conseqüente **b**, diminui-se a razão ***a/b*** até tornar igual a ***c/d*** *(*o fato que ***a/b*** diminui quando **b** aumenta é uma conseqüência dos axiomas enunciados por Arnauld). Pode-se, então, achar **z** tal que ***a/(b+z)=c/d*** se se pegar uma parte alíquota de **a** inferior a **z**, chega-se a uma contradição. Assim, ***a/b*** não pode ser superior a ***c/d.*** Um raciocínio análogo mostra que ***a/b*** não pode ser inferior a ***c/d.*** Aí se conclui a igualdade das duas razões.

Aqui, ainda, Arnauld utilizou o raciocínio pelo impossível. Esse caráter incontornável está ligado à "a divisibilidade ao infinito" como observa Arnauld que escreve:

> "*Acontece que está claro que o que tende ao infinito não saberia ser incluído (compreendido) por um espírito finito como os do homem*."

b) teoria das paralelas

No livro **VI** de seus "*Nouveaux Elémens de Géométrie*", Arnauld enuncia duas maneiras de considerar as paralelas, uma negativa e outra positiva:

> "*A negativa é de não se encontrar jamais, embora prolongada ao infinito*";
>
> "*A positiva, de ser sempre igualmente distantes uma da outra, o que consiste em que todos os pontos são igualmente distantes do outro, isto é, que as perpendiculares de cada um dos pontos de uma linha a outra, são iguais*".

E o autor observa que a noção negativa é uma conseqüência da noção positiva.

A definição positiva permite a Arnauld enunciar que se duas retas são perpendiculares a uma reta dada, então toda perpendicular a uma delas é perpendicular à segunda (sexto lema) e daí deduzir que essas duas retas são paralelas (primeira proposição). Mas, para demonstrar a igualdade dos ângulos alternos internos, Arnauld necessitou da medida dos ângulos que ele associa à medida dos arcos do círculo e isso só está no livro **VIII** no qual enuncia a seguinte propriedade:

> "*Toda oblíqua entre duas paralelas faz ângulos alternos iguais, isto é, vale dizer que o agudo que está numa parte é igual ao agudo que está na outra parte e, por conseqüência, o obtuso é igual ao obtuso*".

Sendo dada a importância dessa propriedade, explicamos como Arnauld a demonstra, em primeiro lugar, a possibilidade de definir a medida dos arcos do círculo independentemente do raio, por isso ele enuncia (oitavo teorema do livro **VII**):

> "*Quando várias circunferências são concêntricas e do centro tiram-se linhas indefinidas, os arcos de todas essas circunferências compreendidas entre essas duas linhas estão na mesma razão à suas circunferências*."

A demonstração repousa sobre a teoria das proporções definidas anteriormente.

Nota-se, em primeiro lugar, que em um círculo ou em dois círculos iguais, a igualdade dos arcos sustentados por cordas iguais e a igualdade das cordas sustentando arcos iguais (contanto que esses arcos sejam menores que meio círculo), são colocadas em axioma (quinto axioma do livro **V**), conseqüência "*evidentemente necessária da inteira uniformidade da circunferência*".

Arnauld define, então, a "*sinus*" curva de um arco menor que o quarto da circunferência como a perpendicular levada de uma das extremidades do arco sobre o raio que passa pela outra extremidade e marca que a "*sinus*" curva não é senão a metade da corda subentendendo o dobro do arco (observa-se que a curva é uma linha), dois arcos iguais têm, assim a, mesma curva e reciprocamente. O autor pôde, então, demonstrar o oitavo teorema do livro **VII**.

Para a demonstração usa-se a idéia de que uma parte alíquota do arco da grande circunferência define uma parte alíquota do arco da pequena circunferência e que a primeira parte está contida na grande circunferência, com talvez um resíduo na mesma proporção em que a segunda parte alíquota está contida na pequena circunferência. Veja Figura 9.

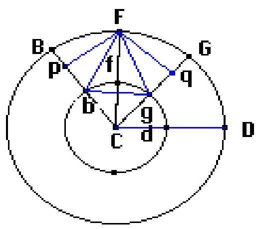


Figura 9

Demonstra-se que a razão entre o comprimento dos arcos **BD** e ***bd*** é igual a razão entre o comprimento das circunferências que os contém.

Seja **X** uma parte alíquota de **BD** e **BF** igual a esta alíquota, então ***bf*** é a mesma alíquota de ***bd***; para provar isso, Arnauld construiu o arco **FG** igual ao arco **BF** e mostra que os arcos ***bf*** e ***fg*** são iguais.

Com efeito, os arcos iguais **BF**, **FG**, têm a mesma curva, então as retas ***pb*** e ***qg*** são iguais (isso resulta que essas duas cordas iguais são eqüidistantes do centro, quarto do livro VII) e por conseqüência as retas ***Fb*** e *Fg* são iguais, a reta *Fc* é portanto a perpendicular a *bg* passando por seu meio e corta o arco *bg* em seu meio (segundo teorema do livro **VII**), assim os arcos *bf* e *fg* são iguais.

O oitavo teorema do livro **VII** permite, então, definir a medida dos arcos, a circunferência ou uma parte determinada da circunferência estando tomada como unidade.

O ângulo estando definido no começo do livro **VIII** como uma superfície compreendida entre duas linhas que se juntam em um ponto do lado onde elas se aproximam mais, esse ponto estando no vértice do ângulo, Arnauld pôde então enunciar a relação usual entre ângulo e arco de círculo, relação que permite definir a medida dos ângulos a partir da medida dos arcos. Em particular, pode-se definir a curva de um ângulo, um raio (isso é o comprimento dos lados) estando dados. Pode-se então enunciar a seguinte proposição (primeiro corolário do livro **VIII**):

"*Toda oblíqua entre duas paralelas faz ângulos alternos sobre essas paralelas iguais, isto é, o ângulo que está numa parte é igual ao ângulo que está na outra parte, e, por conseqüência, o obtuso ao obtuso*".

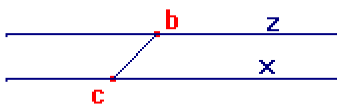


Figura 10

Para demonstrar isso, Arnauld observa que se pegar por raio a linha ***bc***, as curvas dos ângulos alternos são iguais, deduz assim dois corolários (segundo e terceiro corolário):

"As oblíquas iguais entre as mesmas paralelas fazem ângulos iguais (com as paralelas)".

"As oblíquas entre paralelas que fazem ângulos iguais são iguais".

o que implica (sétimo corolário):

"Várias paralelas, estando igualmente distantes umas das outras, isto é, a primeira da segunda, a segunda da terceira, a terceira da quarta...., se uma mesma linha cortar todas, todas as porções dessas linhas compreendidas entre duas dessas paralelas são iguais".

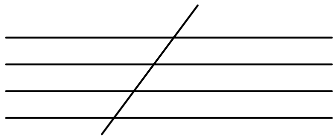


Figura 11

c) O teorema das linhas proporcionais

No início do livro **X**, consagrado ao estudo das linhas proporcionais, Arnauld introduz a noção de espaço paralelo: *"um espaço compreendido de um lado entre duas retas paralelas e indefinido de outro"*.

Após ter lembrado os resultados do livro **VIII**, Arnauld pôde então enunciar a proposição fundamental:

"Quando duas linhas são igualmente inclinadas em dois diferentes espaços paralelos, elas são entre elas como as perpendiculares desses espaços e seu alongamento da perpendicular são assim na mesma razão".

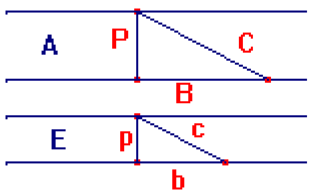


Figura 12

Sejam, conforme figura 12, os dois espaços **A** e **E**, notar-se-á **P** e **p** as perpendiculares respectivas no espaços **A** e no espaço **E**, do mesmo **C** e c as oblíquas respectivas, **B** e **b** os alongamentos respectivos. Então **P** está para **p** como **C** está para **c** e como **B** está para **b**.

Dividamos **P** em partes iguais, **x** sendo a parte alíquota de **P**, assim definido, e transportemos pelos pontos de divisão das paralelas às retas definindo o espaço **A** os quais encontram **C** que dividem em partes iguais, seja **y** a parte alíquota de **C** assim definido; pelos pontos da divisão de **C**, levam-se as paralelas a **P**, as quais encontram **B** que dividem em partes iguais e observa-se **z** a parte alíquota de **B**, assim obtido; é claro que **P** contém tantas vezes **x** que **C** contém **y** e que **B** contém **z**.

Isso feito, tomemos **x** para medir **p** do espaço **E**, **x** está contido um certo número de vezes em **p** com talvez um resíduo menor que **x**, então levando pelos pontos de divisão das paralelas às retas definindo o espaço **E**, divide-se **c** em tantas partes iguais **d** com talvez um resíduo; assim, pela definição de grandezas proporcionais, **P** está para p como **C** está para **c** e como **B** está para **b**, o que prova a proposição fundamental.

Arnauld enuncia várias conseqüências entre as quais as duas seguintes (primeiro e segundo corolários):

"Plusieurs lignes étant diversement inclinées dans le même espace parallèle, si elles sont toutes coupées par des parallèles à cet espace parallèle, si elles sont

toutes coupées par des parallèles à cet espace, elles le sont proportionnellement, c`est-à-dire que chaque toute est à chacune de ses parties, telle qu`est la première, ou la deuxième, ou la troisième... comme chaque autre toute à la même partie première, ou deuxième, ou troisième...” (Bkouche, 1994, p.16);

“ Si plusieurs lignes sont menées dùn même point sur une même ligne, elle sont coupées proportionnellement par toutes les lignes parallèles à celle Qui les termine”.

Ou seja, se várias linhas são traçadas de um mesmo ponto sobre uma mesma linha, elas são cortadas proporcionalmente por todas as linhas paralelas àquela que as limitam.

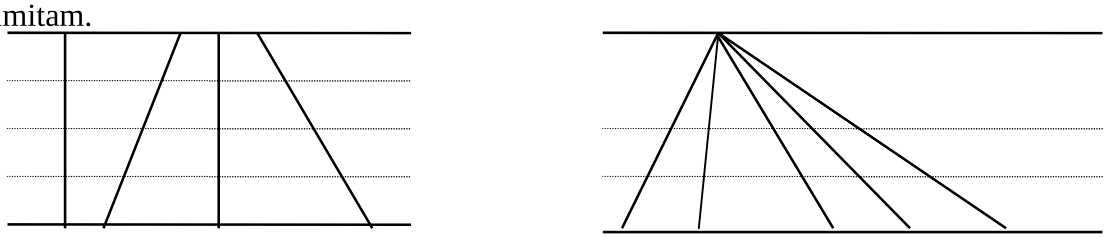


Figura 13

Comparar-se-á o enunciado do primeiro corolário do livro **X** com o do sétimo corolário do livro **VIII** citado antes.

3) Os elementos da geometria de Legendre

Em síntese, a demonstração de Legendre segue o método das áreas proposto por Euclides.

Existem várias edições de suas obras. Nas primeiras edições, no início de suas obras ele lembra toda aritmética preliminar e as noções de razão e proporção.

No começo do livro **III**, intitulado “*Les proportions des figures*”, Legendre destaca a respeito das proporções que:

*“ Se se tem a proporção **A:B::C:D** (**A** está para **B** como **C** está para **D**), diz-se que o produto dos extremos **A**x**D** é igual ao produto dos meios **B**x**C***”.

Ele explica:

“*Esta verdade é incontestável pelos números; e é também por quaisquer grandeza, contanto que elas se exprimam ou que se as imagine exprimidas em número; e é o que se pode sempre supor: por exemplo, se **A**, **B**, **C**, **D**, são linhas, pode-se imaginar que uma dessas quatro linhas, ou uma quinta, se se quiser, serve a todas de medida comum e seja tomada por unidade; então **A**, **B**, **C**, **D** representam cada uma um certo número de unidades inteiras ou rompidas, comensuráveis ou incomensuráveis, e a proporção entre as linhas **A**, **B**, **C**, **D**, deriva de uma proporção de números*”.

Fundindo, assim, como quer a tradição cartesiana, cálculo numérico e cálculo especial.

Nesse livro, o autor mostra primeiramente, à maneira de Euclides, que os paralelogramos (respectivamente os triângulos) tendo as bases e alturas iguais são equivalentes, isto é, têm a mesma área, pois enuncia a afirmação (proposição 3):

"*Dois retângulos de mesma altura são entre si como suas bases*."

ou, melhor dizendo: se dois retângulos têm a mesma altura, a razão da área do primeiro pela área do segundo é igual à razão da base do primeiro pela base do segundo.

Quando as bases são comensuráveis, a afirmação resulta de uma decomposição conveniente e quando as bases são incomensuráveis, Legendre utiliza o método da exaustão para demonstrar (isto é, a dupla redução ao absurdo).

Os ingredientes da demonstração do teorema de Thales pelo método das áreas são assim colocados, mas o teorema se prende somente à proposição 15. Antes de utilizar o método das áreas, Legendre explica, como se pode dizer, que a área de um retângulo é igual ao produto de sua base pela sua altura ao unir esta fórmula à escolha das unidades. De fato, enunciou a propriedade seguinte (proposição 4):

Dois retângulos quaisquer ***ABCD***, ***AEGF*** estão entre eles como os produtos das bases multiplicadas pelas alturas, de modo que se a

área (***ABCD***) está para a área (***AEGF***)**,** como**,** $AB \times AD$ está para AE **x** AF

Com efeito, dispostos os dois retângulos como abaixo, tem-se as proporções

área (***ABCD***) está para a área (***AEHD***) **,** como**,** AB está para AE

área (***AEHD***) está para a área (***AEGF***) **,** como**,** AD está para AF

onde se obtém a proporção procurada pela multiplicação. Veja figura 14.

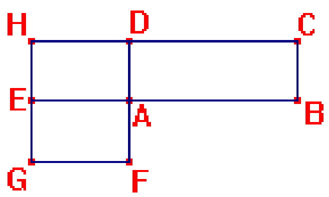


Figura 14

$$\frac{\text{área (ABCD)}}{\text{área (AEHD)}} = \frac{AB.AD}{AE.AD} = \frac{AB}{AE} \quad \text{e}$$

$$\frac{\text{área (AEHD)}}{\text{área (AEGF)}} = \frac{AD.AE}{AF.AE} = \frac{AD}{AF}$$

O autor observa, então, que podemos tomar por medida de um retângulo o produto de sua base pela sua altura, uma vez que se entende por esse produto aquele de dois números que são o número de unidades lineares contidas na base, e o número de unidades lineares contidas na altura.

Legendre explica que esta medida não é absoluta, mas que se deve tomar como unidade de superfície o quadrado no qual, o lado é a unidade de comprimento.

Dito isso, o método das áreas torna se um método de cálculo e este é portanto o que utiliza na seqüência, transformando o cálculo de raciocínio Euclidiano, misturando cálculo numérico e cálculo especial (Viete).

Desse modo, o autor demonstra vários resultados do livro **I** e **II** dos elementos de Euclides, no qual o teorema de Pitágoras, o teorema de Thales é enunciado somente na proposição 15, e o enunciado e a demonstração são aqueles de Euclides.

A seqüência do livro **III** está consagrada ao estudo das figuras semelhantes. Em como deduz a clássica relação métrica de um triângulo.

4) A demonstração de Lacroix

Lacroix num discurso preliminar se propõe a mostrar que se pode conciliar a ordem e o rigor, a ordem da natureza e não a ordem artificial da construção euclidiana e o rigor euclidiano muito esquecido nas obras do século **XVIII**.

a) as proporções

Os "*Eléments de Géométrie*" se apóiam sobre o conhecimento preliminar da Aritmética na qual levam a teoria das proporções; notamos que o "*Traité d`arithmétique*" só trata das razões inteiras ou fracionárias, o mesmo suplemento de aritmética colocado no início dos "*Eléments de Géométrie*", que trata do cálculo das proporções. Os números irracionais aparecem nos "*Eléments d`Algèbre*" como o cálculo das raízes quadradas; Lacroix mostra que a raiz quadrada de um inteiro não é, em geral, um inteiro, mas, acrescenta:

> "*Entretanto se sente que deve existir uma quantidade que, multiplicada por ela mesma, produza um número qualquer...*" o que o conduziria a distinguir duas espécies de números, os números racionais que são comensuráveis com a unidade e os números irracionais que são incomensuráveis, tendo de expor o método aritmético do cálculo aproximado das raízes quadradas.

b) as linhas proporcionais

Faremos, a princípio, algumas considerações sobre o teorema das paralelas, sendo definidas como as retas de um mesmo plano que não se encontram.

Lacroix admite o axioma que diz que "*uma reta perpendicular a uma outra é interceptada por todas aquelas que são oblíquas a essa outra*". Para ele, assim como para Legendre "*um axioma é uma propriedade evidente por ela mesma*", podendo mostrar a congruência dos ângulos correspondentes e alternos internos utilizando o caso da congruência dos triângulos retângulos.

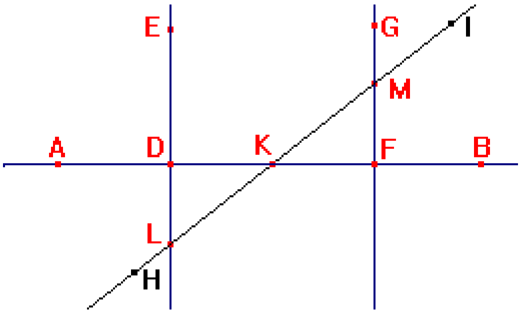


Figura 15

Seja a reta **HI** cortando as paralelas $\overline{DE}$ e $\overline{FG}$ em dois pontos **L** e **M** e seja **K** o ponto médio de $\overline{LM}$, por **K** passa-se uma perpendicular às duas paralelas dadas, então os triângulos retângulos ***DLK*** e ***FMK*** são congruentes, o que implica as igualdades: *KM=KL, MF=LD, FK=KD,* $K\hat{M}F = K\hat{L}D$, $M\hat{K}F = D\hat{K}L$, $M\hat{F}K = L\hat{D}K = 90°$

Lacroix pode, então, enunciar e demonstrar o teorema:

"*As partes* $\overline{AC}$ *e* $\overline{BD}$ *de duas retas paralelas interceptadas entre duas retas paralelas **CD** e **AB**, são iguais entre elas e reciprocamente*".

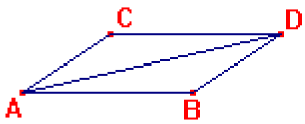


Figura 16

Basta observar na figura 16 que os triângulos ***ABD*** e ***ACD*** são congruentes para se deduzir que duas paralelas "*são em qualquer lugar igualmente distantes uma da outra*".

Lacroix pode, então, enunciar e demonstrar o teorema:

"*Se duas retas quaisquer **AF** e **GM** são cortadas por um número qualquer de paralelas **AG**, **BH**, **CI** etc. traçadas por pontos tomados a distâncias iguais sobre a primeira, as partes* $\overline{GH}$, $\overline{HI}$, $\overline{IK}$ *, etc. da segunda, serão também iguais entre elas*".

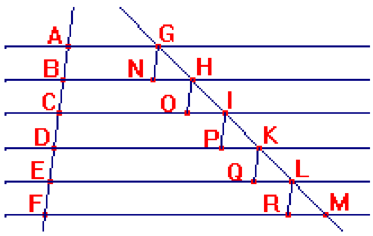


Figura 17

Basta observar, primeiramente, que os segmentos ***GN***, ***HO***, ***IP***, etc., são congruentes, pois os triângulos ***GNH***, ***IOH***, ***IPK*** etc, são congruentes.

Mostra-se então o teorema:

*"Três paralelas **AG**, **BH** e **FM** cortam duas retas quaisquer **AF** e **GM** em partes proporcionais".*

Se $\overline{AD}$, conforme a figura, é comensurável com $\overline{AF}$, é uma conseqüência do teorema precedente. Quando $\overline{AD}$ e $\overline{AF}$ são incomensuráveis, Lacroix utiliza o método da exaustão, admitindo, implicitamente, como já dissemos, a existência de uma quarta proporcional.

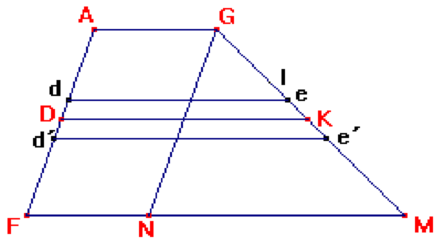


Figura 18

Seja **I** o ponto da reta *GM* tal que ***AF***: ***AD***:: ***GM*** : ***GI***

mostrar-se-á que os ponto **I** e **K** coincidem.

Suponhamos ***GI*** < ***GK*** e dividindo $\overline{AF}$ em partes iguais suficientemente pequenas de modo que existe um ponto de divisão **d** tal que a paralela transportada por **AG** encontra $\overline{GM}$ num ponto **e** situado entre **I** e **K**, então $\overline{AF}$ está para $\overline{Ad}$**,** como**,** $\overline{GM}$ está para $\overline{Ge}$ e por conseqüência $\overline{Ad}$ está para $\overline{AD}$**,** como**,** $\overline{Ge}$ está para $\overline{GI}$ ou ***Ad*** < ***AD*** e ***Ge*** > ***GI*** o que é contraditório. Desse modo se se supõem ***GI***> ***GK***, obtém-se uma contradição, por conseqüência $\overline{GI} \cong \overline{GK}$ ou seja **I** e **K** coincidem.

Notamos que esse mesmo raciocínio de exaustão é empregado em seguida no livro para mostrar a proporcionalidade entre ângulos e arcos, isso, também, nós vimos no método que emprega Legendre nos seus "*Eléments de Géométrie*".

Uma vez demonstrado o teorema das linhas proporcionais, Lacroix estuda a similitude e deduziria as relações métricas usuais nos triângulos. Como em Legendre, essas relações se apóiam sobre as medidas das grandezas consideradas.

✓ Comentários:

A análise da evolução histórica da demonstração referente o "teorema de Thales" permitiu detectar que o estatuto mal definido dos números até final do séc. XIX (até a construção da teoria dos números reais com Dedekind, Cantor, Weierstrass e Méray) e as grandezas incomensuráveis foram os *obstáculos epistemológicos*[1] na definição da

---

[1] Esse termo emprestamos da teoria de Brousseau que dentre vários tipos de obstáculos relacionados ao ensino-aprendizagem, destaca os obstáculo epistemológicos como sendo os que representaram rupturas importantes no desenvolvimento histórico dos conceitos. Eles são inerentes ao saber e identificáveis pelas dificuldades encontradas pelos matemáticos. (Saddo, 1997, p. 40 a50)

teoria das proporções. A descoberta dos segmentos incomensuráveis e que os números naturais são insuficientes para definir a razão entre duas grandezas foi uma ruptura epistemológica, pois acreditava-se na possibilidade de explicar todos os fenômenos em termos dos números e de suas razões.

Essa crise foi superada ainda no século IV a.C., por Eudoxo da Escola de Platão, que desenvolveu uma teoria das proporções, a qual permitiu superar o obstáculo da incomensurabilidade sem a necessidade dos números irracionais (eliminou os recursos numéricos).

Notamos que Euclides utilizou-se do método das áreas para não tratar da proporcionalidade sob o aspecto numérico. Arnauld (séc. XVII) desenvolveu um método de aproximação, chegando próximo ao cálculo numérico, considerando a razão como uma "quantidade", logo, pode ser comparada (igual, maior, menor). No caso das grandezas incomensuráveis, Arnauld verificou se as razões eram iguais, comparando-as, utilizando a clássica dupla redução ao absurdo (método da exaustão dos geômetras gregos). Legendre misturou o método das áreas e as propriedades numéricas. Lacroix utilizou o método da exaustão admitindo a existência de uma quarta proporcional.

Só no século **XIX**, com a construção dos números reais é que o estatuto de número se torna preciso, permitindo, assim, redefinir a relação entre o geométrico e o numérico.

A intenção de estudarmos as demonstrações do teorema de Thales, por meio da pesquisa de Rudolf Bkouche foi fazer uma análise prévia do desenvolvimento histórico, epistemológico desse conteúdo com a finalidade de identificarmos obstáculos epistemológicos nas demonstrações apresentadas. A seguir, algumas considerações didáticas são tecidas almejando, mais à frente podermos escolher e adaptar uma dessas demonstrações para abordar na seqüência didática elaborada para os alunos.

✓ **Considerações didáticas:**

Para utilizarmos a demonstração do teorema pelo método de Euclides, seria necessário que os alunos já tivessem apreendido as noções de área, de razão, de proporção, de figuras equivalentes, de figuras congruentes e os postulados das paralelas. A priori, a nosso ver, essa demonstração não parece ser a mais adequada. Um aspecto que nos incomoda bastante é o fato de comparar grandezas de natureza diferente, ou seja, razão entre as áreas e entre comprimentos. Outro fator em jogo está relacionado à necessidade de uma apreensão operatória, que exige um trabalho mental de visualização, decomposição e reconfiguração dos triângulos equivalentes, o que, talvez, não seja uma tarefa muito fácil para os alunos iniciarem um estudo com demonstração.

Para a demonstração utilizando o método de Arnauld, os alunos deverão ter adquirido as noções de razão, proporção e saber que as retas oblíquas a um feixe de paralelas faz ângulos alternos iguais, para mobilizando esses conhecimentos apreender o teorema das proporções que diz: "*quando duas linhas são igualmente inclinadas em dois diferentes espaços paralelos, a razão entre elas é equivalente a razão entre as perpendiculares desses espaços e equivalente a razão entre os segmentos de extremidades no pé da perpendicular e no início dessas linhas em cada espaço*". A linha, a perpendicular e esse segmento, formam na verdade dois triângulos retângulos semelhantes contido nos espaços paralelos distintos. Arnauld, depois de provar essa proposição fundamental, enuncia várias conseqüências, que, a nosso ver, seriam a generalização para outras configurações. Essa demonstração talvez possa ser adaptada utilizando a semelhança de triângulos.

A demonstração de Legendre nada mais é que o método de Euclides associado às propriedades numéricas, o qual, antes de utilizar o método das áreas, define a área do retângulo como sendo o produto de sua base por sua altura que, como foi dito, não nos parece apropriada, porém, o aspecto de estarmos comparando grandezas diferentes (área e comprimento) fica minimizado.

Para estudar a demonstração de Lacroix, o aluno deverá ter noção de proporção e de congruência de triângulos, pois por meio da congruência de triângulos, ele demonstrou a congruência dos ângulos alternos internos formados por duas paralelas interceptadas por duas transversais. Com isso, ele demonstrou que os segmentos formados por duas retas paralelas interceptadas por duas outras retas paralelas são iguais entre elas. A nosso ver, podemos adaptar essa demonstração a partir daí, considerando o paralelogramo e a propriedade dos lados opostos serem congruentes. A seguir, utilizando essas propriedades ele demonstrou o teorema, considerando as grandezas comensuráveis e para as grandezas incomensuráveis utilizou o método da exaustão. Esse método, a nosso ver, seria um bom caminho para iniciarmos o estudo da demonstração, devido ao fato de o encadeamento das demonstrações apresentar uma certa ordem utilizando em todas as etapas unidades figurais pertinentes comuns. O que não acontece na demonstração de Arnauld, quando demonstra a congruência dos ângulos alternos internos utilizando a medida dos arcos de um círculo, a não ser que partamos do princípio que essa já é uma proposição verdadeira.

1.1.2- Aplicações do teorema de Thales

Ao longo deste nosso estudo preliminar, percebemos que o teorema de Thales pode ser enfocado desde o Ensino Fundamental até a Universidade no que diz respeito a suas aplicações. Como nosso objetivo foi analisar o processo de apreensão desse conceito por alunos da 8º série do Ensino Fundamental, optamos por exemplificar algumas das aplicações que podem ser trabalhadas com esses alunos e apenas citar outras tendo o intuito de evidenciar a importância do seu estudo na formação inicial devido a sua vasta aplicabilidade em diferentes campos de estudo. Dentre esses campos de estudo os que mais observamos aplicações do teorema de Thales foram o campo da Geometria, principalmente no Desenho Geométrico, e o campo da Física.

Pelo estudo histórico, constatamos que a noção das linhas proporcionais foi muito utilizada em construções com régua e compasso (divisão e multiplicação de segmentos), na determinação de alturas e distâncias desconhecidas e em problemas práticos de construções geométricas. Todas essas aplicações são possíveis de serem trabalhadas no Ensino Fundamental.

Exemplificaremos abaixo algumas aplicações que são encontradas em livros de Desenho Geométrico e talvez em alguns de Matemática na parte de geometria.

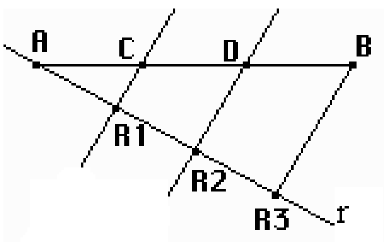
- **divisão de segmentos em partes iguais ou proporcionais**;

a) Dividir graficamente o segmento $\overline{AB}$ em 3 partes iguais (ver figura 19).

b) Dividir graficamente o segmento $\overline{CD}$ em partes proporcionais a 2, 3 e 4 (ver figura 20).

Solução:

a)

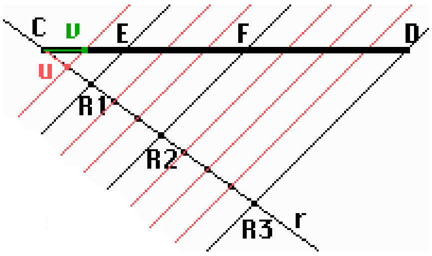


Se $\overline{AR_1} \cong \overline{R_1R_2} \cong \overline{R_2R_3}$ e $\overline{CR_1} // \overline{DR_2} // \overline{BR_3}$, então, por Thales temos :

$$AC = CD = DB = \frac{1}{3}AB$$

Figura 19

b)

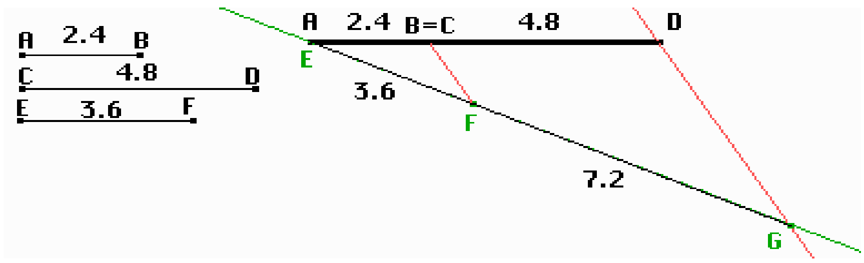


Se $\overline{CR_1} = 2u$, $\overline{R_1R_2} = 3u$, $\overline{R_2R_3} = 4u$ e $\overline{ER_1} // \overline{FR_2} // \overline{DR_3}$, então, por Thales temos : $CE = 2v$; $EF = 3v$; $FD = 4v$.

Figura 20

- **determinação geométrica da 4º proporcional**;

Determine graficamente a quarta proporcional entre os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ e $\overline{EF}$, dados abaixo (figura 21):

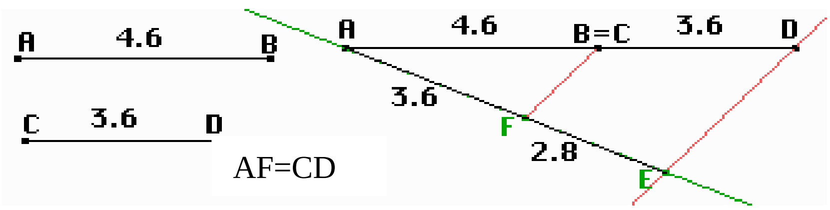


Se $\overline{CF} // \overline{DG}$, pelo teorema de Thales temos que $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{EF}{FG}$, então $\overline{FG}$ é a quarta proporcional entre os segmentos $\overline{AB}, \overline{CD}$ e $\overline{EF}$.

Figura 21

- **determinação geométrica da 3º proporcional**;

Determine graficamente a terceira proporcional entre os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ dados abaixo (figura 22):

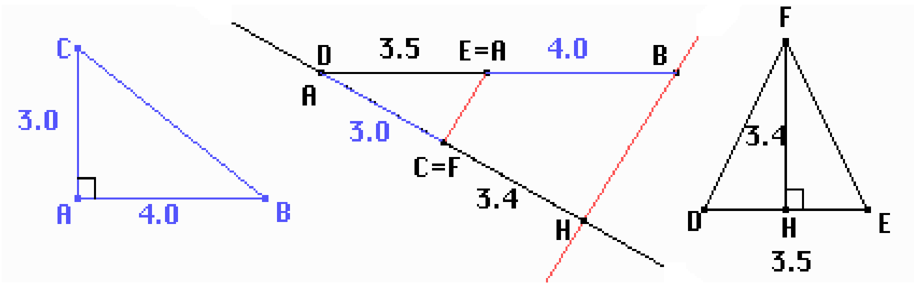


Se $\overline{BF} // \overline{DE}$, pelo teorema de Thales temos que $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{AF}{FE}$, sendo $\overline{FE}$ a 3ª proporcional entre $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.

Figura 22

♦ **determinação geométrica da altura ou base de triângulos equivalentes;**

Determine a altura de um triângulo ***DEF*** isósceles cuja base $\overline{DE}$ mede 3,5 cm, sabendo que este é equivalente a um triângulo retângulo ***ABC***, reto em **A**, de base $\overline{AB}$ medindo 4cm e altura $\overline{AC}$ medindo 3cm.



triângulo retângulo ⇔ triângulo isósceles

Na configuração acima $\overline{EC} \,//\, \overline{BH}$

Se os triângulos ABC e DEF são equivalentes, suas áreas são iguais. Então,

$\dfrac{DE\,.\,FH}{2} = \dfrac{AB\,.\,AC}{2}$, logo, $DE\,.\,FH = AB\,.\,AC$ ou $\dfrac{DE}{AB} = \dfrac{AC}{FH}$, de onde temos que $\overline{FH}$ (altura do triângulo DEF) é a quarta proporcional entre os segmentos $\overline{DE}$, $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$.

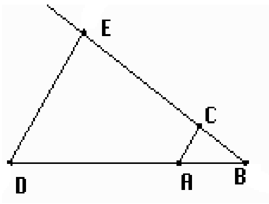
Figura 23

♦ **na multiplicação e divisão de segmentos através de construção;**

Segundo Henry Plane (1995, p. 74), Descartes, na primeira página de sua “Géométrie” (1637), escreve «*Comment se font géométriquement la multiplication et la division....Je n`ai qu`à tirer la parallèle*».

Relatamos e explicamos a seguir, como Descartes, sem demonstrar, descreve geometricamente a multiplicação e divisão de segmentos utilizando sem citar as idéias do teorema de Thales.

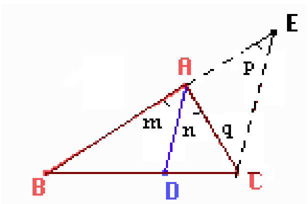
> *“Seja por exemplo $\overline{AB}$ a unidade, e que se deva multiplicar $\overline{BD}$ por $\overline{BC}$, para isso, só é necessário unir os pontos **A** e **C**, depois determinar $\overline{DE}$ paralela a $\overline{CA}$, sendo $\overline{BE}$ o produto desta multiplicação. Para dividir $\overline{BE}$ por $\overline{BD}$ deve-se unir os pontos E e D, a seguir, determinar a paralela a $\overline{DE}$ por **A** obtendo $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ que é o quociente desta divisão” (ver* figura 24).



Explicação:
Com relação à multiplicação dos segmentos $\overline{BD}$ e $\overline{BC}$ podemos dizer que se $\overline{AC}$ // $\overline{DE}$, temos por Thales ou por semelhança de triângulos que $\frac{AB}{BD} = \frac{BC}{BE}$, então ***AB.BE*= *BD.BC***, como $\overline{AB}$ = 1, teremos ***BE=BD.BC***, ou seja $\overline{BE}$ é o produto de $\overline{BD}$ por $\overline{BC}$. Com relação à divisão dos segmentos $\overline{BE}$ por $\overline{BD}$, podemos escrever a proporção acima da seguinte forma: $\frac{BE}{BD} = \frac{BC}{AB}$. Como AB =1, temos que o quociente entre ***BE*** e ***BD*** é o segmento ***BC***.

- **no teorema das bissetrizes de um triângulo**;

"A bissetriz de um ângulo interno de um triângulo divide o lado oposto em segmentos proporcionais aos lados adjacentes" (Bianchini, 1996, p. 117).



Hipótese $\{\overline{AD}$ é bissetriz de $\hat{A}$.

Tese $\left\{\frac{BD}{AD} = \frac{DC}{AC}\right.$

Demonstração:

Por C, traçamos uma reta paralela a $\overline{AD}$ até interceptar $\overline{BA}$ no ponto E.

Pelo teorema de Thales: $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AE}$ ou $\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AE}$ I

$$\left.\begin{array}{l} p = m \text{ (correspondentes)} \\ m = n \text{ (definição de bissetriz)} \\ n = q \text{ (alternos internos)} \end{array}\right\} \Rightarrow p = q \text{ (propriedade transitiva)}$$

Sendo $p = q$, Δ EAC é isósceles e, portanto, $\overline{AE} \cong \overline{AC}$, isto é, $AE = AC$.

Substituindo, em I, $\overline{AE}$ por $\overline{AC}$, vem $\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC}$.

Figura 25

- **ampliação e redução de figuras**;

Na figura 26, temos que o quadrilátero $A`B`C`D`$ é a ampliação do quadrilátero $ABCD$ na razão $\frac{A`B`}{AB}$, pois se $\overline{BC} // \overline{B`C`}$ *e* $\overline{CD} // \overline{C`D`}$ por Thales: $\frac{A`B`}{AB} = \frac{B`C`}{BC} = \frac{D`A}{DA}$.

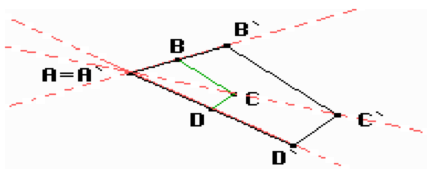
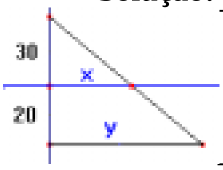


Figura 26

Além dessas que acabamos de citar e exemplificar, também podemos perceber aplicações do teorema de Thales em problemas de semelhança, como os descritos na parte histórica ou outros. Iremos resolver abaixo como exemplo o problema proposto pelos Babilônicos:

"*Um cateto de um triângulo retângulo é 50. Uma paralela ao outro cateto e a distância 20 dele corta o triângulo formando um trapézio retângulo de área 5,20. Determine os comprimentos das bases do trapézio*".

Solução:



Pela área do trapézio temos: $\frac{20.(x+y)}{2} = 5{,}2$ ou $x + y = 0{,}52$ I	Pela semelhança ou por Thales temos: $\frac{30}{50} = \frac{x}{y}$ *ou* $y = \frac{5x}{3}$ **II**

Figura 26

Substituindo II em I temos: $8x = 1{,}56 \rightarrow x = 0{,}195$ logo $y = 0{,}52 - 0{,}195 \rightarrow y = 0{,}325$

Também podemos utilizar esse teorema em:

- **construção de gráficos utilizando o Cabri-géomètre**;

Esse aspecto foi muito bem explorado na dissertação de mestrado da Maria Célia Leme da Silva (1997-PUC-SP) onde propõe uma engenharia didática utilizando o Cabri-géomètre para professores visando proporcionar aos mesmos estudar o teorema de Thales, dando significado a esta propriedade além de identificar as dificuldades decorrentes da aplicação desse teorema. Para elaboração da seqüência utilizou como suporte teórico a dialética ferramenta objeto e o jogo de quadros desenvolvidos por Regine Douady (1986).

Além da construção de gráficos, ela propõe outras aplicações como: multiplicação e divisão de segmentos; verificação das propriedades da multiplicação (elemento neutro, o inverso, e o zero); determinação das áreas do triângulo e do retângulo e a área máxima do retângulo inscrito num triângulo.

- **relações métricas na circunferência**;
- **trigonometria**;
- **determinação do coeficiente angular da reta a partir de dois pontos dados**;

Na física, percebe-se alguma aplicação do teorema de Thales na área de estática através da grafostática com relação a parte de estruturas: tesouras, mão-francesa, treliças, etc.

1.2.- Análise do “teorema de Thales” do ponto de vista didático e da psicologia cognitiva

A didática da matemática estuda os fenômenos que estão relacionados ao ensino-aprendizagem, ou seja, o estudo de situações que respondem ao projeto social e que visam a aquisição de certos conhecimentos pelo aluno. Essa distinção entre ensino e aprendizagem se faz necessária devido à diferença entre o objeto de ensino (conteúdo a ensinar), as intenções do professor que ensina e a realidade dos conhecimentos adquiridos pelos alunos (aprendizagem efetiva).

Para melhor analisar esses fenômenos recorremos às pesquisas desenvolvidas na didática, optando por nos apoiar nos trabalhos realizados por Guy Brousseau e, associando-os a psicologia cognitiva, com os registros de representação semiótica definidos por Raymond Duval que associa a semiótica com os aspectos da cognição.

Maiores detalhes ou explanações dessas teorias intencionamos fornecer ao longo da dissertação, na medida que formos precisando ou utilizando-as.

Brousseau expõe que “*uma das hipóteses fundamentais da didática consiste em afirmar que somente o estudo global das situações que presidem as manifestações de um saber, permitem escolher e articular os conhecimentos de origens diferentes, necessários para compreender as atividades cognitivas do sujeito, assim como o conhecimento que ele utiliza e a maneira o qual ele a modifica*” (1986, p.39).

Nessa perspectiva, vamos procurar analisar o objeto matemático em si, estudando as variáveis de situação didática e os registros de representação, para no próximo capítulo estudar as transformações que esse saber sofre a fim de ser ensinado levantando os possíveis obstáculos epistemológicos e/ou didáticos que estão implícitos nesse conceito.

O funcionamento do processo de aprendizagem depende de numerosas variáveis, tais como as variáveis do contexto, as variáveis didáticas e as variáveis constitutivas do saber.

As variáveis do contexto estão relacionadas tanto com o professor (quando faz suas escolhas, e em relação as suas concepções), quanto com o aluno (origem, história e vivência dos alunos) e até mesmo com o próprio saber (interdisciplinaridade, diversificação do saber, fenômeno da moda e outros).

As variáveis didáticas são aquelas que estão à disposição do professor e que determinam a situação didática. Nesse sentido temos as variáveis de situação, as variáveis de contrato e as variáveis de transposição. Primeiramente, vamos analisar as variáveis de situação referentes ao objeto de estudo em questão e a seguir refletir sobre essas variáveis à luz dos registros de representação semiótica.

1.2.1.- Teorema de Thales e as variáveis de situação segundo Guy Brousseau.

Esta parte da pesquisa foi inspirada no artigo elaborado por Guy Brousseau "*Promenade avec Thalès, entre la Maternelle et l`Université*" (1995, p. 87 a 124), no qual analisa as variáveis didáticas do teorema de Thales.

Fazendo uma investigação das formas de se apresentar o teorema de Thales nos programas franceses, Brousseau detectou que, na metade do século **XX**, houve uma diversificação na forma de se abordar essa propriedade sobressaindo-se três *pontos de vista*[2] que chamou de conservação das abscissas, conservação da relação de projeção e dilatação.

A *conservação das abscissas* (nas transversais) exprime que as relações entre os vetores levados por uma mesma transversal não dependem dessa transversal mas só das paralelas consideradas:

$\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'}$ que apresenta às vezes na forma: se $AB = \alpha.AB'$ então, $AC = \alpha.AC'$.

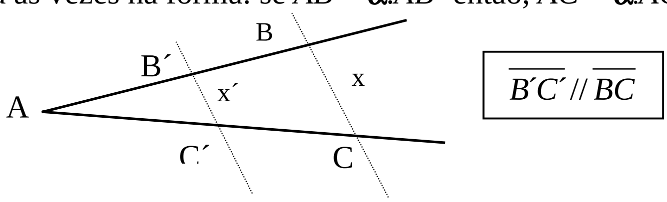


Figura 28

A c*onservação da relação de projeção* (de $\overline{AC}$ para $\overline{AB}$) exprime a igualdade de razões entre as medidas algébricas de segmentos correspondentes determinados sobre duas transversais:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AC'}{AB'} = \frac{CC'}{BB'}.$$

A dilatação (ou aumento - redução) exprime a semelhança dos vetores levados por paralelas numa homotetia tendo como centro a intersecção das transversais:

$\frac{B'C'}{BC} = \frac{AB'}{AB}$, ou ainda se $B'C' = \alpha.BC$ então $AB' = \alpha.AB$.

Dando continuidade às investigações, ele procura pesquisar as dificuldades dos alunos, analisando as taxas de acerto nos exercícios de uma enquete procurando diagnosticar as variáveis em jogo e as relações com esses pontos de vista. Para isso, observa as disposições simples, o recíproco do teorema, os cálculos, as configurações típicas (olhando as variáveis como o ângulo de duas retas, a disposição das paralelas e o número de paralelas) e as variáveis de situação didática.

[2]Pontos de vista diferentes, sobre um objeto matemático são as diferentes maneiras de o olhar, de o fazer funcionar e eventualmente de o definir.

Feita a pesquisa, Brousseau comenta que os pontos de vista parecem agir pouco em relação às variáveis de configuração, ao teorema (direto ou recíproco), à relação de homotetia (superior ou inferior a um, natural, fracionário ou decimal etc. e principalmente na forma de questão. Diz também que a porcentagem de erros foi bem maior quando se tratou de demonstrações do que em relação aos cálculos.

Prosseguindo, fala que a escolha das variáveis que diferenciam os diversos exercícios e os comentários dos autores de livros e manuais mostraram que eles consideram o reconhecimento das figuras como um fator decisivo e dentre as condições de utilização do teorema, a disposição e a complexidade das figuras surge como principal fonte de erros. E, além disso, os alunos cometem menos erro de aplicação do teorema nas figuras consideradas típicas.

Dentre as variáveis de situação didática, ele estuda as variáveis da figura, as variáveis de situação adidática[3] e as variáveis de situação didática como mostram as tabelas seguintes:

Tabela 1 – variáveis das figuras e de situação adidática

Variáveis das figuras (meio proposto)	**Valor das variáveis**	
Dimensão do espaço	R^2	R^3
N.º de paralelas (retas ou planos)	2	3
Disposição	Mesmo lado	De um lado e de outro
N.º de secantes	2	3 ou mais
Secantes todas concorrentes	Sim	Não
Diferença de tamanho imagem-objeto	Pequeno	Grande
Figura típica	Sim	Não
Meio	Figura efetiva	Figura fictícia
Complexidade	Somente figura os elementos úteis	A figura mergulhada numa configuração complexa
Variáveis de situação adidática além daquelas das figuras	**Valor das variáveis**	
Definição utilizada	"Conservação das abscissas" "Conservação da relação de projeção" "Dilatação"	
Natureza da razão	-Natural -Racional	-Decimal -Real

[3]Situação adidática: situação em que o aluno busca resolver sem procurar utilizar o conhecimento das intenções didáticas do professor(Brousseau,1995, p.92).

Tipo de questão	-Traçado -Cálculo	-Enunciado -Demonstração
Razão entre objeto dado e o objeto correspondente procurado	Do pequeno ao grande	Do grande ao pequeno
Teorema	Direto	Recíproco
Manifestação necessária e função	Conhecimento, meio de resolução Formulação Meio de demonstração: Explícito Implícito	

Tabela 2 – variáveis de situação didática

Variáveis de situação didática	**Valor das variáveis**	
Forma	Exposição	Problema
Situação didática para o aluno	Situação de institucionalização Situação de aprendizagem adidática	
Função didática	Curso, informação	Exposto Problema introdutório Efetivo Problema exposto
	Exercício	Treinamento Controle
	Problema de aplicação	

Uma vez levantadas as variáveis de situação didática, vamos procurar entender como elas podem atuar no processo de apreensão dessa propriedade pelo aluno, estudando o teorema de Thales sob um prisma da semiótica por meio de seus registros de representação pensando nos aspectos da percepção, das significações e do contexto.

1.2.2 - Teorema de Thales e os registros de representação semiótica definidos por Raymond Duval

Pensando na matemática como uma linguagem, temos um conjunto de códigos que são organizados a partir de regras e signos. Cada signo possui um significante e um significado que em nível discursivo formarão, respectivamente, o plano de expressão e o plano de conteúdo.

A semiótica pode ser vista como uma teoria das significações como mostra Greimas (1974, p. 411), estruturada por meio de uma rede de relações hierarquicamente organizada em paradigmas[4] e sintagmas[5] e provida de dois planos de articulação, ou

[4] paradigma – conjunto de elementos que podem substituir-se uns aos outros num mesmo contexto (eixo de seleção dos signos possíveis). Exemplo: guri, garoto, menino, moleque.

seja, o plano de expressão e o plano de conteúdo. Nessa perspectiva pretendemos analisar as condições de apreensão e produção de sentido com relação ao teorema de Thales.

Para manifestar no plano de expressão o objeto matemático podemos fazer uso de suas várias representações[6]. Duval faz uma classificação dessas representações segundo as funções cognitivas que elas preenchem como mostra a tabela[7] abaixo:

Tabela 3 – representação segundo Duval

	Interna	Externa
Consciente	**Mental** Função de objetivação	**Semiótica** Funções de objetivação, de expressão e de tratamento intencional
Não-consciente	**Computacional** Função de tratamento automático ou quase instantâneo	

O nosso interesse está em estudar as representações semióticas devido a desenvolver um papel fundamental nas atividades cognitivas preenchendo igualmente as funções de comunicação, do tratamento intencional e de objetivação (tomar consciência).

Alguns sistemas semióticos como a língua natural, as línguas simbólicas, os gráficos, os esquemas, as tabelas as figuras geométricas permitem realizar três atividades cognitivas inerentes a toda representação, tais como:

- constituir um traço ou uma reunião de traços perceptíveis que sejam identificáveis como uma representação de alguma coisa num sistema determinado;
- transformar as representações pelas regras do sistema podendo constituir uma parte do conhecimento;
- converter as representações produzidas num sistema em representações de um outro sistema de forma que esse outro permita explicitar outras significações relativas a isso que é representado.

Aos sistemas semióticos que preenchem essas atividades, Duval chama de registros de representação semiótica.

[5] sintagma – eixo da combinação de elementos copresente em um enunciado (frase ou discurso). No exemplo acima, guri, garoto, menino, moleque cada um se refere a uma faixa etária, ou seja, a carga semântica é mudada em cada contexto.

[6]noção de representação- forma sobre a qual uma informação pode ser descrita e levada em conta num sistema de tratamento.

[7] Maiores detalhes sobre essas representações podem ser obtidas em “Sémiosis et pensée Humaine” de Raymond Duval, 1995, capitulo 1, p. 24 a 32.

Na análise do desenvolvimento dos conhecimentos e nos obstáculos da aprendizagem, confrontam três fenômenos diretamente ligados:

1º) diversidade dos registros de representação semiótica. Cada registro expõe questões de aprendizagens específicas;

2º) diferenciação entre representante e representado ou entre forma e conteúdo de uma representação semiótica;

3º) coordenação entre os diferentes registros de representação semiótica disponíveis, para o qual precisamos ter conhecimento das regras de correspondência e dos fenômenos de congruência[8] e não-congruência.

Nesse prisma iremos procurar olhar o teorema de Thales refletindo sobre seus registros de representação aliados às variáveis de situação didática apresentadas por Brousseau.

Iniciaremos a análise observando as várias maneiras de se enunciar o teorema (paradigma e sintagma), as significações implícitas, todos os conceitos envolvidos, inclusive os que podem ser articulados com esse teorema (rede sintagmática) e como se dá a articulação no plano de expressão e no plano de conteúdo, analisando os registros de representação semiótica segundo Duval.

Primeiramente, surge a questão “O que vem a ser um teorema?”

Teorema: “proposição que precisa ser demonstrada para se tornar evidente” (Lello, 1972, Dicionário Prático Ilustrado, p.1162).

Teorema: “relação verdadeira numa teoria determinada” (Chambadal, 1978, Dicionário da Matemática Moderna, p. 183).

Considerando o teorema como uma relação verdadeira, vamos refletir sobre seus enunciados e as significações implícitas.

Todo teorema pode ser estruturado conforme a expressão ***“Se p então q ”***, sendo que para cada paradigma (p, q) obtém-se um enunciado diferente, formando os sintagmas proposicionais.

O Teorema de Thales também pode ser estruturado por meio dessa expressão. Analisaremos, a seguir, alguns enunciados que podemos obter dessa forma.

1) **p**: duas retas são transversais a um feixe de paralelas;
q: a razão entre dois segmentos quaisquer de uma delas é igual à razão entre os segmentos correspondentes da outra;

---

[8] Há congruência em uma coordenação de registros quando a conversão de um registro ao outro é explicito e automático. Esse fenômeno será melhor explicado mais a frente.

Teorema: Se duas retas são transversais a um feixe de paralelas, então a razão entre dois segmentos quaisquer de uma delas é igual à razão entre os segmentos correspondentes da outra.

2) **p**: um feixe de retas paralelas produzem sobre duas transversais quaisquer, segmentos homólogos;

q: as medidas desses segmentos são proporcionais;

Teorema: Se um feixe de retas paralelas produzem, sobre duas transversais quaisquer, segmentos homólogos, então as medidas desses segmentos são proporcionais.

3) **p**: **r** é paralela a um dos lados de um triângulo qualquer;

q: **r** divide os outros lados em partes proporcionais;

Teorema: Se **r** é paralela a um dos lados de um triângulo qualquer, então **r** divide os outros dois lados em partes proporcionais (Euclides).

4) **Recíproco do teorema de Thales.**

p: uma reta divide dois lados de um triângulo em partes proporcionais;

q: ela é paralela ao terceiro lado;

Teorema: Se uma reta divide dois lados de um triângulo em partes proporcionais, então ela é paralela ao terceiro lado. (Euclides)

5) **p**: retas paralelas determinam sobre duas secantes segmentos correspondentes;

q: esses segmentos são proporcionais;

Teorema: Se retas paralelas determinam sobre duas secantes segmentos correspondentes, então esses segmentos são proporcionais".

6) **p**: retas paralelas determinam sobre duas secantes segmentos correspondentes;

q: as razões entre esses segmentos correspondentes formam uma proporção;

Teorema: Se retas paralelas determinam sobre duas secantes segmentos correspondentes, então as razões entre esses segmentos correspondentes formam uma proporção.

Pensando em termos de plano de conteúdo e plano de expressão, observa-se que subjacentes a todos esses enunciados do teorema de Thales e o seu recíproco estão os conceitos de paralelismo e proporcionalidade que poderão ser representados e indicados de forma bem diversa articulando-se os registros figurais (configurações), discursivos (enunciados), simbólico (montagem da proporção) e numérico (expressar grandezas).

Primeiramente vamos nos ater às representações gráficas que, para facilitar a análise, iremos dividir em dois blocos. O primeiro bloco pensando nas configurações formadas por retas paralelas e transversais, em que se observa que além da quantidade de retas, as paralelas podem ser desenhadas nas posições horizontal, vertical ou inclinada; as transversais também podem ser desenhadas nessas posições, como ser representadas se interceptando ou não e quando, representamo-las se interceptando, o ponto de intersecção poderá estar acima das paralelas, entre as paralelas ou abaixo das paralelas. Vejamos alguns exemplos (figura 29 e 30):

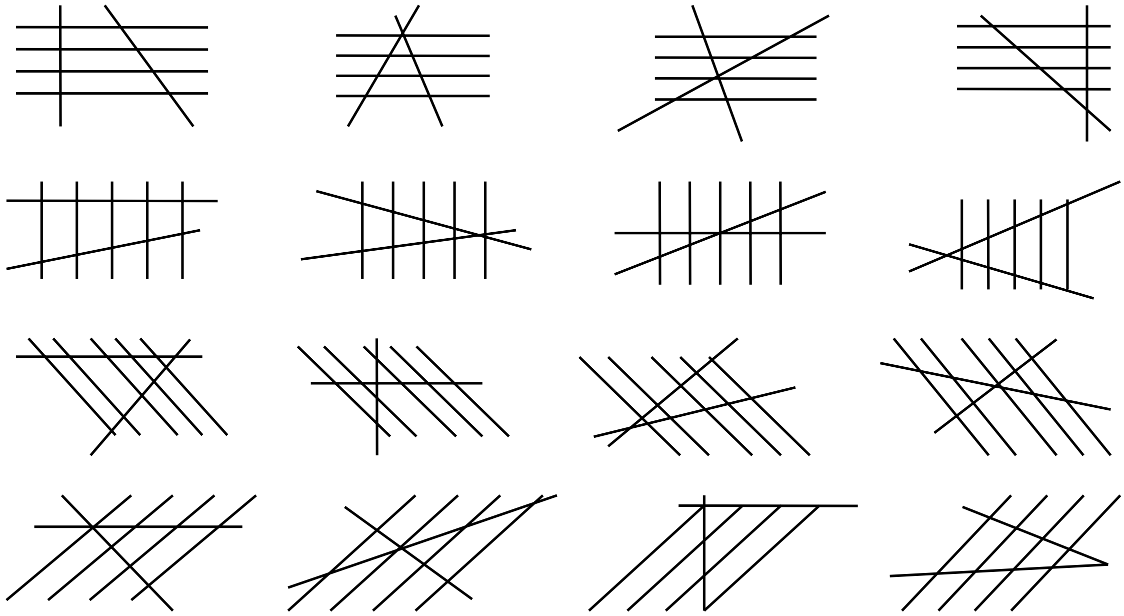


Figura 29

O segundo bloco formado pelas configurações obtidas quando as paralelas estão limitadas pelas transversais, com isso, perceptivamente numa primeira olhada, observamos figuras bidimensionais (triângulos, trapézios) sobrepostas. Vejamos:

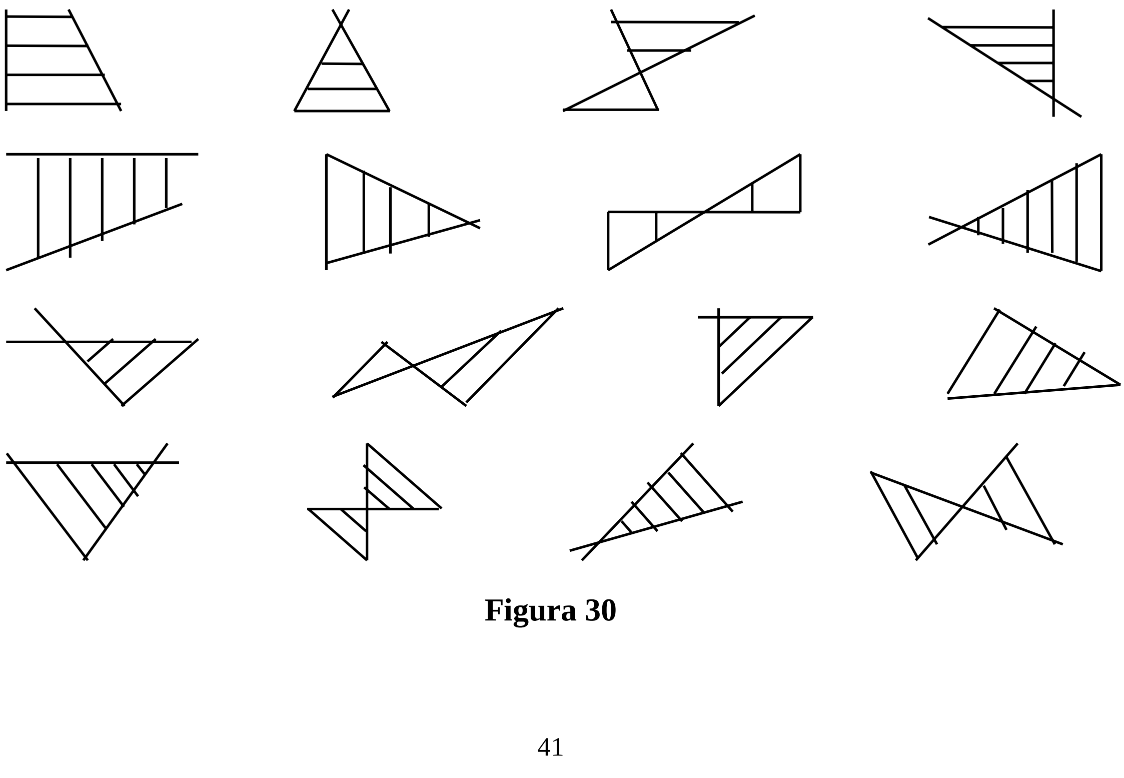


Figura 30

No processo ensino-aprendizagem um dos fenômenos importantes para se levar em conta são as formas de apreensões dos registros de representação semiótica que Duval classifica em quatro tipos de apreensão:

a) seqüencial – construção ou descrição com o objetivo de reproduzir uma figura;
b) perceptiva – relacionada a visualização, a interpretação das formas da figura em uma situação geométrica;
c) discursiva – interpretação dos elementos da figura geométrica;
d) operatória – centrada sobre as possíveis modificações de uma figura e em sua reorganização perceptiva.

Segundo Duval (1995, p. 175 a 177), as regras de produção de sentido ou de conformidade são aquelas que definem um sistema de representações possíveis num registro e se apóiam em três itens:

a) determinação de unidades elementares;
b) combinação de unidades elementares para formar as unidades de nível superior;
c) condições para que uma representação seja pertinente e completa.

Assim, essas regras preenchem a função de identificação do sentido para aquele que se encontra diante de uma representação que ele não produziu.

A implantação de um trabalho visual é susceptível de várias variações visuais que podem ser reagrupadas em dois grandes tipos:

a) as ligadas ao número de dimensão: 0 (ponto), 1 (linha), 2 (região);
b) as qualitativas: forma, tamanho, orientação, cor, etc.

As unidades figurais elementares para o registro das representações geométricas são definidas a partir da combinação e cruzamento dos valores da variável visual qualitativa (forma) com a variação de dimensão, como se vê na classificação a seguir:

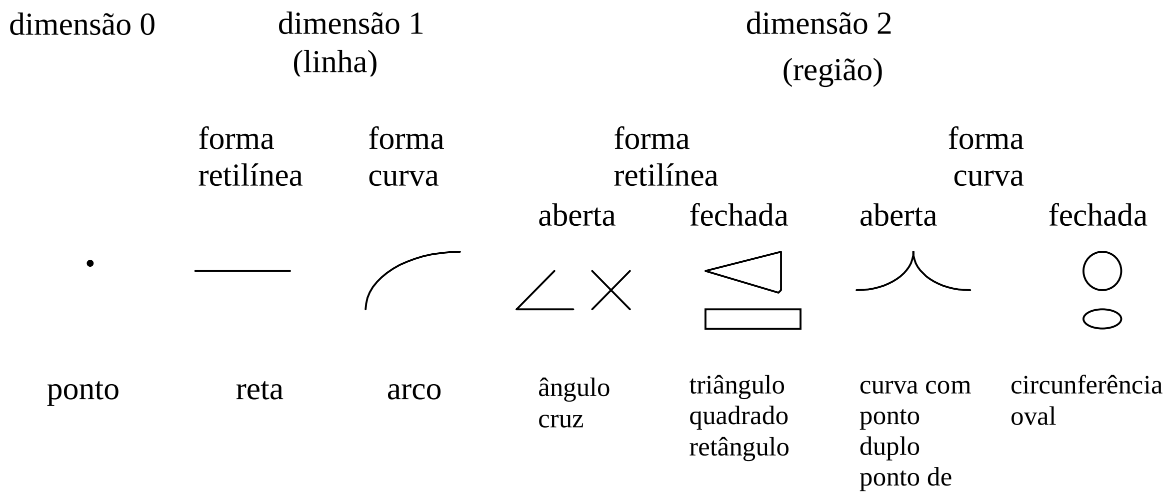


Fig.3 - Classificação das unidades figurais elementares

Figura 31

Duval (1995, capítulo IV, p. 178 a 180), coloca ainda que:

- a predominância na apreensão perceptiva das unidades de dimensão 2 sobre as unidades de dimensão inferior é explicada pela lei gestáltica de "fecho" ou de continuidade;
- uma figura geométrica é sempre uma configuração de pelo menos duas destas unidades figurais elementares;
- mesmo a figura aparentemente reduzida a uma só unidade figural de dimensão **2** (o quadrado por exemplo) só é figura em matemática à condição de ser considerada como uma configuração de unidades figurais de dimensão **1** (segmentos formados pelos lados);
- são as relações (paralelismo, simetria, tangência....) entre as unidades figurais elementares que constituem o conteúdo pertinente de uma figura geométrica;
- unidades figurais elementares de dimensão **2** são estudadas em geometria como configurações de unidades de dimensão **0** ou **1**, basta olharmos as unidades figurais e a definição do objeto matemático que ela representa para percebermos a mudança de dimensão a efetuar quando se passa da representação figural ao discurso sobre os objetos representados. Ex. paralelogramo;
- a representação figural para ilustrar uma definição pode levar a uma ambigüidade;
- fenômeno da articulação (Fig.- discurso). De um lado, a utilização de uma figura requer a mudança contínua do número de dimensão obtida pela apreensão perceptiva das unidades figurais que são distinguíveis. De outro lado, o tratamento da situação matemática representada pela figura (aplicação, definição, teorema) requer que se restrinja às unidades de dimensão **1** ou **0**, pois a percepção se é direcionada automaticamente sobre as unidades de dimensão **2**;

- um mesmo objeto matemático pode ser representado por unidades figurais diferentes;

  Exemplo: o ponto → (dim. 0) • ou (dim. 1) X ou (dim. 2)
- tarefas de descrição de figuras evidenciam estas diferenças e dificuldades dos alunos e retratam a apreensão seqüencial;
- em geral os alunos evitam ao máximo transformar uma unidade figural de dimensão **2** em uma configuração de dimensão **1** ou **0**.

Voltando à análise das possíveis configurações do teorema de Thales, vemos que no primeiro bloco (fig.29) fica nítido, num primeiro olhar, sua formação com elementos de dimensão **1** (paralelas e transversais) e, fixando mais o olhar, poderemos perceber as figuras de dimensão **2**. Entretanto, nas configurações do segundo bloco (fig. 30), por serem mais fechadas, a tendência é perceber primeiro as figuras de dimensão **2**. Nos enunciados, temos discursos salientando as unidades de dimensão **2** (enunciados **3** e **4**) e os outros a dimensão **1** (enunciados **1**, **2**, **5** e **6**). Notamos que no registro figural ou no discursivo podemos ter tratamentos nas dimensões **1** ou **2**, já para escrever a proporção, ou seja, no registro dos números tratamos na dimensão **1** (medida dos segmentos).

Quanto às proporções entre a medida dos segmentos, devemos refletir em relação aos números, à forma de representar e indicar a proporção e às propriedades das proporções.

Podemos trabalhar com os registros do número inteiro, fracionário, decimal ou irracional; com grandezas comensuráveis ou incomensuráveis, sendo que em cada um desses registros as regras de tratamentos são distintas e levam a processos de compreensão diferentes.

> *"A escrita de um número representa um número e tem uma significação operatória ligada aos tratamentos permitindo efetuar as operações. Os tratamentos não são os mesmos para a escrita decimal e para a escrita fracionária. Os números 0,25 e ¼ representam o mesmo número; porém não têm a mesma significação operatória. A significação operatória depende do sistema de escrita. Não são as mesmas regras de tratamento para calcular 0,25 + 0,25 e para calcular ¼ + ¼. A conversão de 0,25 em ¼ não é simplesmente um cálculo mas atua na diferença entre significação e referência" (Duval, 1995, p.64).*

Uma mesma proporção pode ser indicada ou relacionada de várias maneiras. Vejamos esse fato no exemplo abaixo, no qual: **a**, **b**, **c**, **d** são as medidas dos segmentos.

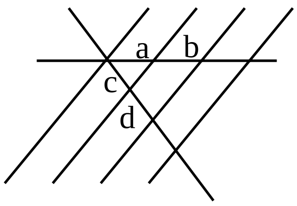


Figura 32

- igualdade entre duas razões ou entre dois quocientes
  * a : b = c : d **ou** a : c = b : d **ou** (a+b) : b = (c + d): d **ou** (a+b) : a = (c + d): c
- igualdade entre duas razões ou entre dois quocientes
  * a / b = c / d **ou** a / c = b / d **ou** (a+b) / a = (c+d) / c -
- igualdade entre duas razões ou entre dois quocientes

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \text{ ou } \frac{a}{c}=\frac{b}{d} \text{ ou } \frac{(a+b)}{a}=\frac{(c+d)}{c} \text{ ou } \frac{(a+b)}{b}=\frac{(c+d)}{d}$$

- igualdade entre dois produtos ou aplicação da propriedade fundamental das proporções:
  * a x d = c x b **ou** (a+b)x d = (c+d)x b **ou** (a+b)x c = (c+d)x ª

Com relação ao exemplo acima, vejamos a aplicação das propriedades da proporção que leva a tratamentos distintos num mesmo registro cada um implicando numa forma de compreensão:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \text{ ou } \frac{a}{c}=\frac{b}{d} \text{ ou } \frac{(a+b)}{a}=\frac{(c+d)}{c} \text{ ou } \frac{(a+b)}{b}=\frac{(c+d)}{d}.$$

1) a x d = c x b ou (a+b) x c = (c+d) x a ou (a+b) x d = (c+d) x b;

2) $\frac{(a+b)}{a}=\frac{(c+d)}{c}$ ou $\frac{(a+b)}{b}=\frac{(c+d)}{d}$ ou $\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$;

3) $\frac{(a-b)}{a}=\frac{(c-d)}{c}$ ou $\frac{(a-b)}{b}=\frac{(c-d)}{d}$ ou $\frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d}$;

4) $\frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

Analisando uma mesma configuração topológica, podemos pensar na proporção ou aplicação do teorema de Thales sob os pontos de vista ou estratégias seguintes:

a) a razão entre os segmentos formados em uma das transversais ou lado de um triângulo, quando interceptam um feixe de paralelas, é igual a razão formada pelos segmentos correspondentes de uma outra transversal ou lado do triângulo;

b) a razão entre os segmentos formados em uma das transversais ou lado de um triângulo com suas respectivas projeções em uma outra transversal ou lado do triângulo se mantém constante;

c) semelhança de triângulos ou de polígonos.

Esses pontos de vista foram os observados por Guy Brousseau (1995) e que relatamos na análise das variáveis de situação didática (pág. 38).

No transcorrer da pesquisa, utilizaremos esses mesmos termos empregados, ou seja, *conservação das abscissas*, *conservação da relação de projeção e dilatação*. *Conservação das abscissas* para exprimir a igualdade entre as razões formadas pelos segmentos em uma das transversais ou lado de um triângulo quando interceptam um feixe de paralelas e a razão formada pelos segmentos correspondentes de uma outra transversal ou lado do triângulo. *Conservação da relação de projeção* para exprimir que a razão entre os segmentos formados em uma das transversais ou lado de um triângulo com suas respectivas projeções em uma outra transversal ou lado do triângulo se mantém constante. Dilatação para exprimir a proporcionalidade entre os lados correspondentes de triângulos ou de polígonos semelhantes quando sobrepostos fazendo coincidir um dos vértices ficando os lados opostos paralelos.

Vejamos um exemplo de aplicação do teorema de Thales observando esses pontos de vista:

1) Considere na figura ao lado, as retas ***ST*** e ***IJ*** paralelas:

a) calcular **x**;

b) sendo *ST*= 3,5 é possível calcular *IJ*? Justifique.

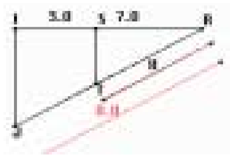


Figura 33

Objetivo: aplicar o teorema de Thales para achar o valor de **x** e de ***IJ***.

Análise matemática - soluções possíveis:

a) do ponto de vista - conservação das abscissas:

$\frac{10}{7} = \frac{8}{x}$ $\Rightarrow$ 7 . 8 = 10 . x $\Rightarrow$ x = 5,6 ou

$\frac{7}{3} = \frac{x}{(8-x)}$ $\Rightarrow$ 3.x = 7 . (8-x) $\Rightarrow$ 3.x = 56 - 7x $\Rightarrow$ x = 5,6

obs.: o valor de ***IJ*** não dá para se calcular sob este ponto de vista.

b) do ponto de vista - conservação da relação de projeção:

$\frac{7}{x} = \frac{10}{8}$ $\Rightarrow$ 10x = 56 $\Rightarrow$ x = 5,6

$\frac{7}{x} = \frac{3}{(8-x)}$ $\Rightarrow$ 3.x = 7. (8-x) $\Rightarrow$ 3.x = 56 - 7.x $\Rightarrow$ 10x = 56 $\Rightarrow$ x = 5,6

obs.: o valor de ***IJ*** não dá para se calcular sob esse ponto de vista.

c) do ponto de vista – dilatação:

$\frac{7}{10} = \frac{x}{8}$ $\Rightarrow$ 7.8 = 10.x $\Rightarrow$ x = 5,6 (mesma expressão da conservação das abscissas) **ou**

$\frac{7}{x} = \frac{10}{8}$ $\Rightarrow$ 7**.**8 = 10**.x** $\Rightarrow$ x = 5,6 (mesma expressão da conservação da relação de projeção)

para achar o lado ***IJ***

$\frac{3{,}5}{IJ} = \frac{7}{10}$ $\Rightarrow$ 7.***IJ*** = 35 $\Rightarrow$ ***IJ*** = 5, **ou** $\frac{3{,}5}{IJ} = \frac{5{,}6}{8}$ $\Rightarrow$ 5,6.***IJ*** = 28 $\Rightarrow$ ***IJ*** = 5.

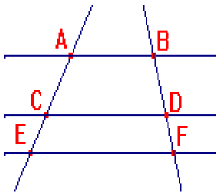
Com esse exemplo dá para se observar que:

- a medida dos segmentos formados nas paralelas só é possível ser calculado pensando sob o ponto de vista da dilatação;

- ao se montar a proporção para calcular a medida de um segmento da transversal limitado pelo feixe de paralelas sobre o ponto de vista dilatação a expressão poderá ser a mesma obtida sob os pontos de vista conservação das abscissas e conservação da relação de projeção, porém a forma de pensar não é a mesma. Aqui, estamos pensando em figuras semelhantes sendo necessário uma atividade mental de reconfiguração para se perceber e tratar os triângulos sobrepostos além da articulação de unidades figurais de dimensão **1** e **2**.

Analisaremos agora os enunciados citados anteriormente (pág.42 e 43) com relação às estratégias explícitas neles. Para melhor visualização, a cada enunciado, faremos uma representação gráfica de uma das configurações possíveis e da proporção correspondente. Embora, por não existir uma única configuração que represente esta proposição em sua globalidade perceptiva, ao representar uma delas, acabamos limitando ou estereotipando as possíveis configurações.

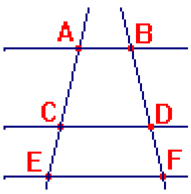
O **primeiro enunciado**: *Se duas retas são transversais a um feixe de paralelas, então a razão entre dois segmentos quaisquer de uma delas é igual à razão entre os segmentos correspondentes da outra*; induz a indicação da proporção do ponto de vista conservação das abscissas e as unidades figurais elementares de dimensão **1** embora, ao se fazer a conversão do registro da língua natural para o registro figural, se possa perceber as unidades figurais de dimensão **2** implícitas.



$$\frac{AC}{AE} = \frac{BD}{BF} \text{ ou } \frac{AC}{CE} = \frac{BD}{DF}.$$

Figura 34

O **segundo enunciado**: *Se um feixe de retas paralelas produzem sobre duas transversais quaisquer segmentos homólogos, então as medidas desses segmentos são proporcionais*; deixa em aberto a montagem da proporção e utiliza a noção de segmentos homólogos, também destaca os elementos figurais de dimensão **1**, embora, ao se fazer a conversão do registro da língua natural para o registro figural, se possa perceber as unidades figurais de dimensão **2** implícitas.

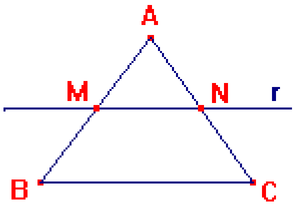


$$\frac{AC}{AE} = \frac{BD}{BF} \text{ ou } \frac{AC}{CE} = \frac{BD}{DF} \quad \text{(conservação da abscissa);}$$

$$\frac{AC}{BD} = \frac{AE}{BF} \text{ ou } \frac{AC}{BD} = \frac{CE}{DF} \quad \text{(conservação da relação de projeção).}$$

Figura 35

O **terceiro enunciado**: *Se **r** é paralela a um dos lados de um triângulo qualquer, então r divide os outros dois lados em partes proporcionais*; também deixa em aberto a montagem da proporção e implícito o conceito de feixe de paralelas. Destaca unidades figurais de dimensão **1** (reta) e dimensão **2** (triângulo) o que talvez induza a perceber a semelhança dos triângulos e, implicitamente, a proporcionalidade dos segmentos formados nas paralelas quando se fizer a conversão do registro da língua natural para o registro figural uma vez que, pela lei gestáltica de "fecho" ou de continuidade, segundo Duval, há predominância na apreensão perceptiva das unidades de dimensão **2** sobre as unidades de dimensão inferior.



$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$$ (conservação da abscissa);

$$\frac{AM}{AN} = \frac{MB}{NC} = \frac{AB}{AC}$$ (conservação da relação de projeção).

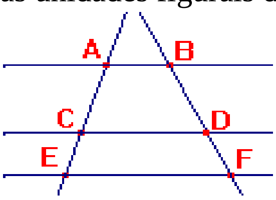
Figura 36

Na figura 36 se $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$, então **r** é paralela a $\overline{BC}$.

O **quarto enunciado**: *Se uma reta divide dois lados de um triângulo em partes proporcionais, então ela é paralela ao terceiro lado*, refere-se ao teorema recíproco do teorema de Thales com relação ao terceiro enunciado.

O **quinto enunciado**: *Se retas paralelas determinam sobre duas secantes segmentos correspondentes, então esses segmentos são proporcionail*, é similar ao segundo enunciado, deixando também em aberto a montagem da proporção e utilizando o conceito de segmentos correspondentes invés de segmentos homólogos e utilizando o termo secantes no lugar de transversais.

O **sexto enunciado**: *Se retas paralelas determinam sobre duas secantes segmentos correspondentes, então as razões entre esses segmentos correspondentes formam uma proporção*, induz à indicação da proporção do ponto de vista conservação da relação de projeção e as unidades figurais elementares de dimensão **1** embora, ao se fazer a conversão do registro da língua natural para o registro figural, se possa perceber as unidades figurais de dimensão **2** implícitas.



$$\frac{AC}{BD} = \frac{AE}{BF} \quad ou \quad \frac{AC}{BD} = \frac{CE}{DF}$$ conservação da relação de projeção.

Figura 37

Outros enunciados do teorema de Thales encontrados nos livros didáticos

(1) *"Se um conjunto de retas, duas a duas paralelas, é interceptado por duas retas **r** e **s**, então a razão entre dois segmentos quaisquer de **r** é qual à razão entre os respectivos segmentos correspondentes de **s**"* (Bongivanni, Vissoto, Laureano, 1995, p. 240);

(2) *"Um feixe de paralelas determina, sobre duas transversais quaisquer, segmentos correspondentes de medidas proporcionais"* (Scipione, 1974, p. 143);

(3) *"Um feixe de retas paralelas determina sobre duas transversais segmentos proporcionais"* (Bianchini, 1996, p. 113).

Para as três configurações representadas abaixo, observemos como os enunciados (1), (2) e (3) sugerem a escrita da proporção:

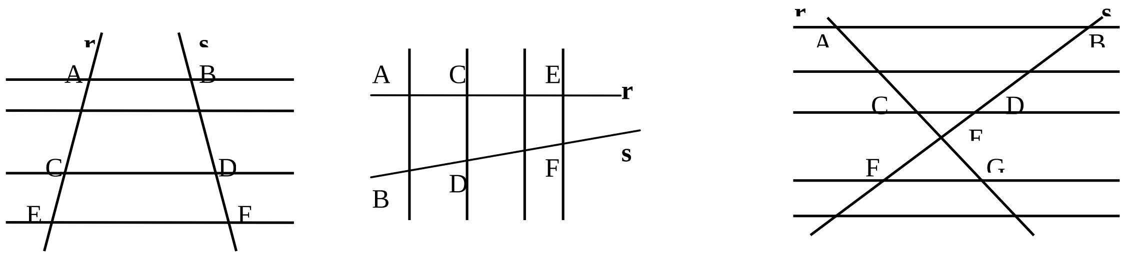
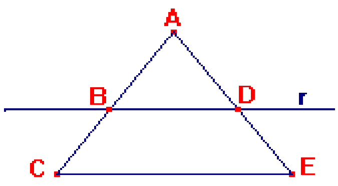


Figura 38

(1) e (3) $\frac{AC}{CE} = \frac{BD}{DF}$ (2) e (3) $\frac{AC}{BD} = \frac{CE}{DF}$ (1) e (3) $\frac{AC}{EG} = \frac{BD}{EF}$ (2) e (3) $\frac{AC}{BD} = \frac{EG}{EF}$

AC .x DF = BD x CE AC x EF = EG x BD

(4) *"Toda paralela a um dos lados de um triângulo determina sobre os outros dois lados segmentos proporcionais"* (Reis, 1996, p.130);



$$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE} = \frac{BD}{CE}$$

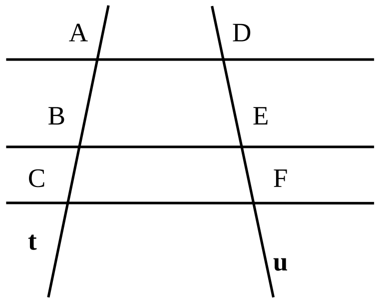
Figura 39

(5) *"Se dois triângulos são semelhantes, seus lados correspondentes são proporcionais"* (Bigode, 1994, p. 157);

(6) “*Retas paralelas determinam sobre duas secantes segmentos correspondentes proporcionais”*.

(7) “*Quando um feixe de retas paralelas é cortado por duas transversais, há proporcionalidade entre as medidas dos segmentos correspondentes que estão sobre as transversais*” (Imenes & Lellis, 1999, p. 205).

(8) Considere duas retas **t** e **u** transversais a três retas paralelas. Estas retas paralelas determinam nas transversais segmentos proporcionais.



$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF} \ ou \ \frac{AC}{BC} = \frac{DF}{EF}$$

Figura 40

(9) Sejam duas retas **d** e **d`** e três pontos **A**, **B** e **C** sobre **d**. Projeta-se **d** sobre **d`** segundo, uma direção dada. **A**, **B** e **C** se projetam em **A`**, **B`** e **C`** sobre a reta **d`.** Nessas condições tem-se :

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A`B`}{B`C`}$$

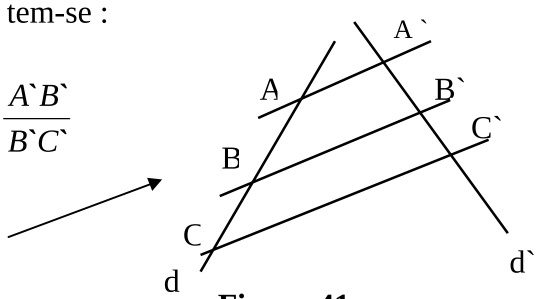


Figura 41

Analisemos, agora, esses enunciados com relação aos pontos de vista explícitos.

O primeiro sugere a conservação das abscissas.

O segundo sugere a conservação da relação de projeção.

O terceiro deixa em aberto a montagem da proporção e o número de paralelas.

O quarto e o quinto sugerem a dilatação.

O sexto e o sétimo sugerem a conservação da relação de projeção.

O oitavo deixa em aberto a montagem da proporção, porém fixa o número de paralelas e ao desenhar a configuração fixa uma imagem.

O nono, embora no enunciado fale de projeção de ponto, ao montar a proporção, fixa a idéia de conservação da abscissa.

Observamos que qualquer uma das proposições sintagmáticas acima, em nível sintático, implica os significantes serem articulados mantendo uma relação de proporcionalidade e em nível semântico implica as significações (processo de compreensão) que estão implícitas em cada proposição com relação aos pontos de vista citados anteriormente. Quando se privilegia um destes pontos de vista, por exemplo, conservação das abscissas, deixa-se de articular que no mesmo plano de expressão há outros sentidos como a conservação da relação de projeção e a dilatação. Se quisermos que o aluno apreenda o teorema na sua significação global, devemos abordá-lo sob estes três pontos de vista: conservação das abscissas, conservação da relação de projeção e dilatação.

Pensando nessas direções surgem as questões:

"Como é que o ensino do teorema de Thales e a sua aplicabilidade levam à apreensão desta globalidade sintático -semântica? ";

"Em que medida, e por quais meios, ao ensiná-lo, consegue-se organizar os três pontos de vista ?";

"Será que a posição das paralelas em qualquer uma das configurações interfere na percepção e aplicação do teorema de Thales?" E a posição da interseção das transversais interfere também na percepção e aplicação do teorema de Thales?";

"Em que medida, e por que meios, ao ensiná-lo, consegue-se trabalhar com esses aspectos perceptivos?".

Duval (1995, p. 69) salienta que quando a intuição direta de um objeto por si só não é possível, a fim de não confundir o objeto e sua representação, faz-se necessário dispormos de várias representações semióticas heterogêneas desse objeto e as coordenar. Além disso, toda representação é cognitivamente incompleta em relação ao que ela representa e que, os registros de representação semiótica não apresentam os mesmos aspectos de um mesmo conteúdo conceitual. Assim, as figuras, e, de maneira geral, toda representação analógica só podem representar os estados, as configurações, os produtos de operações, e não as ações ou as transformações. A conversão, implícita ou explicita, as representações são, então, necessárias para aceder ao conteúdo representado devido às limitações do representante, ou, ao contrário, se limitar a um único representado (ponto de vista formal) e explorar as possibilidades de transformação dadas pelas regras de tratamento do registro em questão. Vê-se, assim, que a diferenciação entre representante e representado para as representações semióticas de um registro dado é estreitamente ligada à coordenação com um outro registro de representação. Duval fala em compreensão integrativa para designar essa compreensão das representações semióticas que procede de uma coordenação de registros.

Segundo Duval (1995, capítulo I, p.72), podemos obter uma produtividade cognitiva de articulação de registros por meio de uma rede semântica (articulação entre registro de rede e registro de língua). Toda rede comporta dois tipos de unidades: os arcos e os nós. Pode-se diversificar os tipos de redes diferenciando os arcos.

Visando a uma possível solução para a questão *"Em que medida, e por quais meios, ao ensiná-lo, consegue-se organizar os três pontos de vista ?"* e refletindo sobre uma possível rede semântica, notamos que os conceitos tais como: homotetia (H); semelhança (S); razões trigonométricas (T); e o teorema de Thales (TT), de uma certa forma, tratam da proporcionalidade entre segmentos e implícita ou explicitamente de paralelas. Sendo assim, podemos combinar esses conteúdos em diversas seqüências de ensino formando uma rede sintagmática, na qual cada conceito pode ser formado a partir do conceito apreendido anteriormente.

Exemplo de seqüências:

a) H - S - TT – T;
b) S - H - TT – T;
c) T - S - TT – H;
d) TT - S - H – T;
e) TT - H - S – T;
f) S – TT – H – T.

Nesta pesquisa, iremos estudar apenas uma das seqüências, ficando para um estudo posterior analisar qual seqüência leva a uma melhor apreensão e produção dos sentidos em relação à compreensão global desses conceitos e responder a questão: *será que ao término das seqüências, a apreensão e produção de sentido se dá da mesma forma?*

Pensando no teorema de Thales como objeto de valor, de acordo com a rede, ele pode ser um Objeto de valor em si (utilizando-se dos outros conceitos para aquisição desse saber), ora pode ser um Objeto modal, quando utilizado como ferramenta para se adquirir outros conceitos ou outro Objeto de valor.

Olhando sob este prisma, procuramos organizar uma rede semântica linear baseada no modelo de Quillian (Duval, p. 73), associando aos nós os conceitos de: figuras semelhantes, figuras homotéticas, teorema de Thales (dilatação), teorema de Thales (conservação das abscissas), teorema de Thales (conservação da relação de projeção); e aos arcos as propriedades comuns a dois destes conceitos (nós). Nas redes semânticas de Quillian, os nós são diferenciados por níveis, mas os arcos teriam todos o mesmo valor. As redes de correspondência tendo então o seguinte:

- um termo conceitual correspondendo a um nó;
- as relações de hiper- e de hiponímia com os outros termos conceituais correspondem às diferenças e às posições respectivas dos diferentes níveis entre si. (Isso retorna a situar a rede em relação a um eixo orientado com referência por representar a hierarquização);
- uma proposição corresponde a um arco ou a uma sucessão de arcos (ou seja a um caminho) entre dois nós.

Como um conceito é a unidade de um feixe de propriedades, estas são adjuntas a cada nó com a regra seguinte para evitar as repetições:

- As propriedades comuns a vários conceitos são ligadas ao nó do mais alto nível de generalidade na rede.

Rede semântica analisada

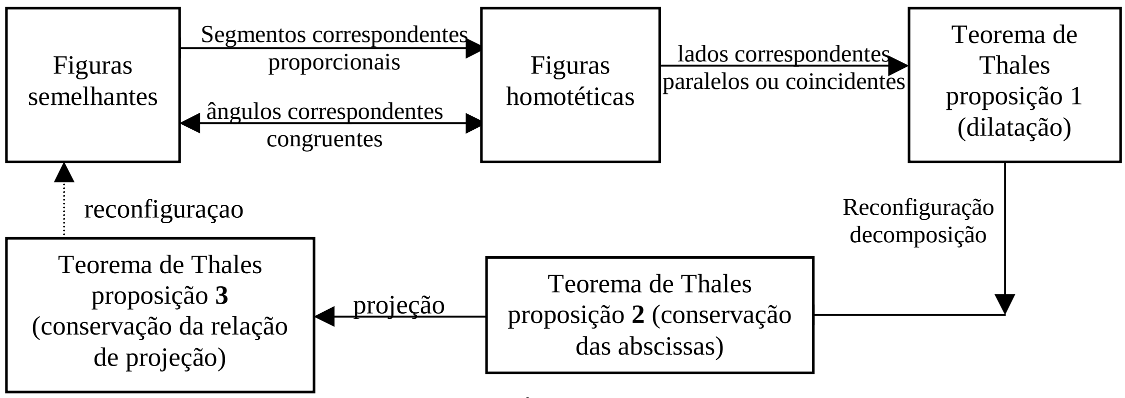


Figura 42

Analisando essa rede, podemos dizer que duas figuras são semelhantes quando possuem lados correspondentes proporcionais e ângulos correspondentes congruentes. As figuras homotéticas são figuras semelhantes que possuem os lados correspondentes paralelos ou coincidentes (contidos na mesma reta suporte).

O teorema de Thales – proposição **1** - refere-se à paralela a um dos lados de um triângulo que seria um caso particular das figuras homotéticas (com centro de homotetia num dos vértices do triângulo) e poderá ser melhor percebido por meio de uma reconfiguração devido aos triângulos estarem sobrepostos. Se fizermos uma decomposição em unidades figurais elementares de dimensão **1** e uma translação, com relação à proposição **1**, observaremos retas paralelas e transversais que conservam a proporcionalidade entre os segmentos formados nas transversais sugerindo o teorema de Thales – proposição **2** (conservação das abscissas).

Ao pesquisarmos todas as proporções possíveis com estas unidades figuras elementares, poderemos perceber que a razão entre um segmento de uma das transversais e sua projeção na outra transversal segundo a direção das paralelas se mantém constante induzindo ao teorema de Thales – proposição **3** - assim, provavelmente conseguiremos organizar os três pontos de vista. Se quisermos explorar um pouco mais, poderemos, pela reconfiguração das unidades figurais elementares de dimensão **2** (trapézios) sobrepostas, voltar ao estudo das figuras semelhantes. A seguir, podemos particularizar para o triângulo retângulo e tratar as razões trigonométricas definindo os conceitos de seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo.

Pelo estudo histórico, percebemos que o teorema de Thales provavelmente surgiu de uma necessidade prática para determinar distâncias inacessíveis (altura das pirâmides, distância do navio a praia) e heuristicamente a noção em jogo é a semelhança de triângulos. Ao longo dos anos, a relação de proporcionalidade produzida pelas paralelas foi evoluindo, passando pelos vários processos de compreensão (dilatação, conservação das abscissas e conservação da relação de projeção) e concomitantemente houve a formação de esquemas e configurações para representar as situações concretas. Nas conjecturas citadas de como Thales fez para medir a altura da pirâmide, determinar a distância do navio à praia já vemos duas configurações, uma dos triângulos sobrepostos e a outra dos triângulos opostos pelo vértice. A rede semântica escolhida para ser analisada praticamente segue esse mesmo percurso.

Uma vez feito o levantamento das variáveis didáticas, dos registros de representação relacionados com o teorema de Thales e intencionando uma aprendizagem, cabe agora pesquisar os tratamentos pertinentes no interior de um mesmo registro e o estudo do fenômeno de congruência ou não-congruência.

A fim de levantar os tratamentos pertinentes e não-pertinentes no interior de um mesmo registro, nós procuramos trabalhar com, no mínimo, dois registros de cada vez. Ao analisarmos as várias maneiras de se enunciar esse teorema e suas respectivas proporções implícitas, consideramos como cognitivamente pertinentes aqueles que induziram a montar a proporção de forma sintaticamente diferente, porém matematicamente equivalentes, o que nos levou a pesquisar as significações implícitas nesses enunciados distinguindo-se, assim, três processos de compreensão diferentes para se aplicar o teorema de Thales ao montar uma proporção considerando uma mesma configuração, ou seja, em nível semântico, esses enunciados também são diferentes

Duval expõe que "*uma análise semiótica concernente à determinação das unidades de base constitutivas de um registro, as possibilidades de suas articulações em figuras e a modificação das figuras obtidas, é a condição preliminar para uma descrição precisa dos diferentes tratamentos matematicamente pertinentes nesse registro. Esses tratamentos são importantes, porque é sua execução, em parte não consciente, que permite às figuras preencher sua função heurística. E sua descrição é igualmente importante para o ensino porque os tratamentos, na maioria, não podem ser dominados sem uma aprendizagem específica*" (1995, p. 175).

Neste estudo levando em consideração as configurações, destacamos dois blocos de configurações pertinentes: um que induz à percepção da figura em dimensão dois e o outro que induz à percepção dos elementos de dimensão um. Estudando agora as configurações pertinentes de cada bloco, confrontando-as com os pontos de vista e com suas representações simbólicas, destacamos duas como mais pertinentes em ambos os blocos: as configurações em que as transversais se interceptam acima ou abaixo das paralelas e as que se interceptam entre as paralelas. Isso se deve ao fato de que quando pensamos sob o ponto de vista da conservação da relação de projeção para se aplicar o teorema na montagem da proporção, na primeira configuração, cada razão é estruturada associando segmentos da direita para à esquerda ou da esquerda para à direita sempre no mesmo sentido. Já na segunda configuração, uma das razões se estrutura associando a medida dos segmentos da direita para a esquerda enquanto na outra razão são associados os segmentos da esquerda para a direita.

Duval (1995) distingue dois níveis de apreensão das figuras geométricas. No primeiro nível se opera o reconhecimento das diferentes unidades figurais que são discerníveis em uma figura dada, ou seja, a percepção da figura ou a apreensão "gestáltica". No segundo nível se efetuam as modificações "*mereológicas*", ópticas ou posicionais, possíveis às unidades figurais reconhecidas e à figura dada, ou seja, corresponde a uma apreensão operatória.

Como já foi explicitado, quando estudamos as unidades figurais, pela lei gestáltica do "fecho" dependendo da configuração, é mais fácil perceber as unidades de dimensão **2** do que as de dimensão **1**. Com isso, o reconhecimento das unidades figurais de dimensão **2** não levanta nenhuma dificuldade quando estão separadas, porém, quando estas são integradas numa configuração isso não ocorre tão fácil por duas razões: a primeira, é que algumas unidades figurais de dimensão **2** predominam sobre outras também de dimensão **2** e a segunda razão é que uma figura geométrica contém sempre mais unidades figurais elementares que aquelas requeridas para sua construção. Um outro fator em jogo na atividade matemática é a congruência ou não-congruência entre o enunciado (registro discursivo), a configuração e as propriedades matemáticas pertinentes na resolução do problema. Como numa configuração, muitas vezes, temos em jogo várias unidades figurais elementares integradas, nem sempre percebemos por decomposição todas as figuras possíveis, fazendo com que numa atividade não seja tão fácil o acesso às propriedades pertinentes para sua resolução. Agora, dependendo de como enunciamos as atividades, essas figuras pertinentes que irão dar subsídios para o acesso às propriedades em jogo poderão ser melhor percebidas.

> "*Não se pode ter ensino da geometria que não leve em conta as diferentes apreensões às quais uma figura dá lugar*." (Duval, 1995, p. 184).

Vejamos as configurações pertinentes com relação ao teorema de Thales:

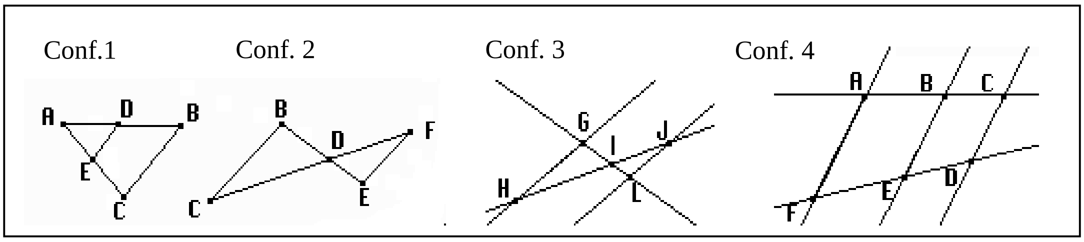


Figura 43

Na configuração **1** e na **2**, da figura 43, ficam evidentes, na apreensão perceptiva, as unidades figurais de dimensão **2**, enquanto na configuração **3** e na **4**, ora se percebem as unidades figurais de dimensão **1**, ora as de dimensão **2.**

Na configuração **1**, com relação à apreensão perceptiva, nem todas as unidades figurais de dimensão **2** são tão evidentes, pois é necessário fazermos mentalmente uma decomposição da figura para percebermos os triângulos *ABC* e *ADE*, que estão sobrepostos, e o trapézio *DBCE*. Na apreensão operatória, para aplicação do teorema de Thales no cálculo de um dos segmentos formados, percebemos que, para se determinar a medida de qualquer um dos segmentos na transversal por qualquer um dos pontos de vista adotado a apreensão perceptiva da figura favorece a aplicação do teorema, o que não acontece no cálculo do segmento formado na paralela que fica limitado ao ponto de vista da dilatação, no qual devemos perceber a semelhança entre os triângulos que estão sobrepostos.

Na configuração **2**, os triângulos *BCD* e *DEF* são evidentes o que favorece a apreensão perceptiva, mas a apreensão operatória para a aplicação do teorema de Thales já não é tão simples, pois:

a) se pensarmos sob o ponto de vista, conservação das abscissas, devemos nos ater à ordem dos triângulos, o que acreditamos não ser uma dificuldade tão grande pelo fato de esses triângulos estarem em lados opostos com relação ao vértice comum;
b) se pensarmos sob os pontos de vista, conservação da relação de projeção e dilatação, já fica mais difícil aplicar corretamente o teorema, pelo fato dos triângulos serem opostos pelo vértice, os lados correspondentes, perceptivelmente, não estão na mesma posição, sendo necessário uma maior atenção, ou uma reconfiguração, ao se aplicar as propriedades.

Na configuração **3**, a apreensão das unidades figurais de dimensão **2** não é muito favorecida, o que talvez dificulte a apreensão operatória da aplicação do teorema de Thales sob o ponto de vista da conservação das abscissas e, quanto aos outros pontos de vista, as dificuldades são semelhantes às da configuração **2**.

Na configuração **4**, a apreensão das unidades figurais de dimensão **2** não é tão evidente, primeiro pelo destaque nas unidades figurais de dimensão **1**; segundo, por termos, explicitamente, figuras de dimensão **2** sobrepostas (trapézios) e, implicitamente, por pensarmos que as transversais irão se encontrar num ponto formando os triângulos semelhantes sobrepostos. Quanto à apreensão operatória, a dificuldade maior na aplicação do teorema de Thales, acreditamos, está no cálculo das medidas dos segmentos formados nas paralelas por não ser tão evidente as figuras semelhante sobrepostas.

Toda figura pode ser modificada de várias maneiras. Pode-se dividir as unidades figurais elementares de dimensão **2** que as compõem em outras unidades homogêneas ou heterogêneas, igualmente de dimensão **2**. Estas podem ser combinadas para modificar o contorno global da figura. Pode-se ampliar a figura, ou diminuir, deslocar por translação ou por rotação. Todas estas modificações não são de mesma natureza, levam a operações específicas e constituem a produção heurística das figuras.

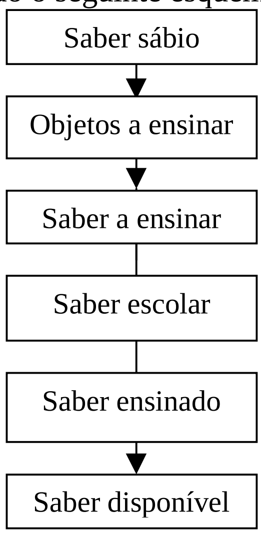
Com relação à apreensão operatória das modificações possíveis de uma figura geométrica, Duval (1995) examina dois casos:

a) *configuração* que está ligada às modificações "*mereológicas*" das unidades de dimensão **2** - reconfiguração que é a operação que consiste na reorganização de uma ou várias subfiguras diferentes de uma figura dada em uma outra figura, ou seja, a reconfiguração é um tratamento que consiste na divisão de uma figura em subfiguras, sua comparação e seu reagrupamento;
b) *colocação em perspectiva*, ligada às modificações ópticas de dimensão **2** ou **1**. É a operação que consiste a ver "em profundidade" duas unidades figurais de mesma forma e de mesma orientação, mas da qual os pedaços respectivos podem variar. Essa operação relaciona a dimensão da profundidade em visão monocular. O funcionamento dessa operação requer que uma unidade figural possa servir de referência a um centro organizado não desenhado (ponto de fuga) porque não percebe no plano. Podemos induzir esta operação de duas maneiras: colocando em perspectiva duas unidades figurais por contextualização (ex. um traço formando a linha do horizonte) ou colocando em perspectiva pela união de pontos homólogos.

Para Duval (1995, p.187,188) é esta operação permitindo uma percepção em profundidade de uma representação plana, que constitui a produtividade heurística do registro figural em relação ao discurso matemático para a compreensão da homotetia.

CAPÍTULO 2: TEOREMA DE THALES: DE OBJETO CIENTÍFICO A OBJETO DE ENSINO

Com a finalidade de estudar os fenômenos relacionados com o ensino-aprendizagem do teorema de Thales, vemos necessário primeiro, fazer um estudo de como se tem processado a transformação do objeto científico a objeto de ensino analisando uma parte da transposição didática. Entendemos por transposição didática, segundo Yves Chevallard[9], o conjunto de adaptações e transformações que passa um "saber sábio" a fim de ser ensinado. Para entender essa transformação propomos estudar a transposição didática observando o seguinte esquema:



O saber sábio se refere aos conceitos operatórios despersonalizados, descontextualizados e reconhecido pela comunidade científica.

Os objetos a ensinar são os conhecimentos que o sistema social de ensino designa como pertinentes na formação dos jovens. Para isso, procuramos analisar as Propostas Curriculares do Estado de São Paulo e os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN).

O saber a ensinar é o que o professor acha que deve ensinar após interpretação dos programas, das avaliações de ensino, dos manuais, dos livros.

O saber escolar é o que está proposto nos livros didáticos e nos manuais. Nesse sentido analisamos as Experiências Matemáticas propostas no Estado de São Paulo e alguns livros didáticos brasileiros, levantando, a seguir, alguns possíveis obstáculos didáticos.

---

[9] A definição da transposição didática segundo Chevallard foi baseada nas informações do caderno de Educação Matemática volume III, Saddo Ag Almouloud, 1997, PUC SP, pág.51 a 63.

O saber ensinado é aquele gerenciado pelo professor que procura adaptar o objeto a ensinar com seus próprios conhecimentos, inserindo-o no saber escolar e organizando no tempo.

O saber disponível é o que o aluno reteve após todas essas adaptações. Nesse âmbito analisamos os resultados das avaliações do sistema de ensino brasileiras como os exames do SARESP e SAEB para verificar de uma forma global o desempenho dos alunos (avaliação de massa). Avaliando mais sistematicamente a compreensão dos alunos a respeito do teorema de Thales, recorremos a resultados de pesquisas a fim de destacar os possíveis problemas relativos ao ensino-aprendizagem do teorema de Thales e melhor compreender a origem dos erros e dificuldades dos alunos. Por fim, analisamos a concepção de alguns alunos que já haviam estudado essa propriedade por meio de um teste diagnóstico.

Para darmos continuidade ao estudo dessas transformações, destacamos algumas variáveis didáticas que a nosso ver são importantes na formação deste conceito e que foram levadas em conta ao se fazer essa análise. Tais aspectos são:

- em que momento do ensino é sugerido se trabalhar estes assuntos;
- quais as competências trabalhadas antes de se ensinar esta noção;
- se é feito, ou como é feita a articulação do teorema de Thales com os conceitos de semelhança, homotetia e razões trigonométricas;
- quais os pontos de vistas (segundo Guy Brousseau) abordados;
- quais aplicações deste teorema são abordadas;
- se sugere trabalhar demonstração, qual a escolhida e como tratar;
- ao enunciar o teorema de Thales, quais os tipos de representações utilizadas;
- quais configurações são mais enfatizadas;
- quais os tipo de exercícios e atividades.

2.1.– O teorema de Thales e as Propostas Curriculares

No âmbito dos objetos a ensinar verificamos nas Propostas Curriculares do estado de São Paulo e no PCN se o conceito do teorema de Thales foi sugerido para ser abordado com os alunos, em que nível ou grau de ensino esta proposto e de que modo orienta ser trabalhado.

2.1.1.- Proposta Curricular do estado de São Paulo

Quanto as Propostas Curriculares do estado de São Paulo analisamos as de agosto/1973 e as de 1991, sendo que essa última, teoricamente, é a que estamos utilizando hoje em dia.

Guia Curricular – agosto/ 1973

"Da criatividade do mestre é que realmente
decorre a revitalização da prática escolar"

Essa proposta foi sugerida após a implantação da lei 5692/71.

Para a apresentação do programa foi feito um agrupamento dos assuntos dividindo-os em quatro temas: **I.** Relações e Funções, **II**. Campos Numéricos, **III.** Equações e Inequações, **IV**. Geometria.

O tema **IV**. Geometria tem como objetivos gerais permitir ao aluno adquirir conhecimentos que possibilitem uma compreensão do mundo físico aparente, adquirir habilidades em construções geométricas e processos de medida, desenvolver a intuição geométrica. Esse tema vem sugerido desde as primeiras séries do Ensino Fundamental, sendo destacado que:

> *"Nos quatro primeiros anos, a Geometria deve ser desenvolvida como uma exploração do espaço físico aparente, iniciando pelas noções de caráter topológico como as de interior, exterior, fronteira, etc., dadas de modo completamente intuitivo, e continuando com o reconhecimento das formas geométricas comuns nesse mesmo mundo físico. Esse conhecimento deve ser obtido através da observação e manipulação de material didático conveniente. Mesmo nos quatro anos seguintes, a abordagem deve continuar intuitiva, baseada na experiência e observação. Utilizar as noções da Teoria dos Conjuntos como um meio auxiliar. Usar outros métodos além dos geométricos, na resolução de situações específicas. Empregar os resultados obtidos intuitivamente para chegar, por meio de deduções não muito longas nem complicadas, a outras propriedades invariantes por uma transformação. Procurar introduzir o conceito de segmento orientado, visando a noção posterior de vetor. A noção de área pode ser introduzida usando-se papel quadriculado, por contagem dos quadrados contidos na figura".*

Dentro do tema Geometria, os conteúdos foram divididos em figuras geométricas, transformações geométricas e medidas. Nas figuras geométricas é sugerido trabalhar noções topológicas (tratar da 1ª a 6ª série), noções projetivas (tratar da 3ª a 6ª série), noções afins (tratar da 4ª a 8ª série), noções euclidianas (tratar da 3ª a 8ª série). Explícito no conteúdo das noções projetivas temos o estudo de retas, intersecções, convexidade e, explícitos nas noções afins os conteúdos de paralelismo e semelhança. Nas transformações geométricas está proposto que se trabalhe da 6ª a 8ª série do 1º grau, atual Ensino Fundamental.

Olhando para os conteúdos específicos vemos que o teorema de Thales vem sugerido na 8ª série. O estudo dessa propriedade é proposto após o aluno ter, supostamente, atingido os objetivos de determinar o ponto correspondente de um ponto dado por uma projeção paralela; verificar que numa projeção paralela a razão entre as medidas dos segmentos paralelos é igual à razão entre as medidas de suas projeções; determinar o homotético de um ponto dado; determinar o valor da razão na ampliação, conservação ou redução da figura; determinar os invariantes por uma homotetia. Ao se definir projeções paralelas é observado que se mostre que conservam a congruência de segmentos, a soma e o produto por um número. No estudo do teorema de Thales e o seu recíproco está sugerido que se demonstre e trabalhe aplicações além de estabelecer o conceito de grandezas proporcionais. Após esse estudo é proposta a semelhança de triângulos.

.

Proposta Curricular de 1991

Esta proposta foi a 4ª edição da proposta realizada em 1986, nela o ensino do teorema de Thales é sugerido na 8ª série do 1º grau, atual Ensino Fundamental.

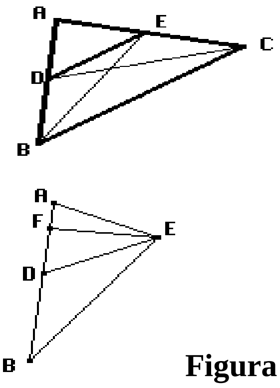
Antes de ser ensinado o teorema de Thales, a proposta sugere o ensino da semelhança de figuras planas, a verificação experimental e demonstração do Teorema Fundamental sobre Proporcionalidade.

A noção de semelhança de figuras planas é introduzida a partir da comparação entre uma fotografia e sua redução ou ampliação. Na ampliação e redução de polígonos sugere atividades por meio de uma rede quadriculada ou a partir de um ponto (o centro de homotetia).

Após essas atividades, e utilizando régua e transferidor, os alunos poderão concluir as propriedades de polígonos semelhantes.

Para a verificação experimental e demonstração do teorema fundamental sobre proporcionalidade, a proposta sugere trabalhar o seguinte teorema (figura 44):

"*Se uma reta paralela a um dos lados de um triângulo intercepta os outros dois lados em pontos distintos, então ela determina segmentos que são proporcionais a esses lados*".



Hipótese: {No triângulo **ABC**, tem-se: **D** é ponto de $\overline{AB}$ e **E** é ponto de $\overline{AC}$, tais que $\overline{DE}$ // $\overline{BC}$

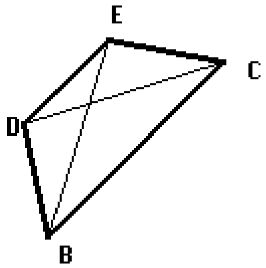
Tese : $\left\{ \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} \right.$

Figura 44

Demonstração: Nos triângulos ***ADE*** e ***BDE***, consideremos $\overline{AD}$ e $\overline{BD}$ como as bases. Como esses triângulos têm a mesma altura $\overline{EF}$ em relação a essas bases, a razão entre suas áreas é igual à razão entre as bases:

$$\frac{\text{área }(\Delta BDE)}{\text{área }(\Delta ADE)} = \frac{1/2.(BD).(EF)}{1/2.(AD).(EF)} \rightarrow \frac{\text{área }(\Delta BDE)}{\text{área }(\Delta ADE)}. = \frac{BD}{AD} \quad (1)$$

Analogamente, nos triângulos ***ADE*** e ***CDE***, considerando como bases $\overline{AE}$ e $\overline{CE}$, teremos:



$$\frac{\text{área }(\Delta CDE)}{\text{área }(\Delta ADE)} = \frac{CE}{AE} \quad (2)$$

Figura 45

mas: os triângulos ***BDE*** e ***CDE*** têm mesma base $\overline{DE}$ e mesma altura ($\overline{DE} // \overline{BC}$), portanto, têm áreas iguais: Área (Δ ***BDE***) = Área (Δ ***CDE***)

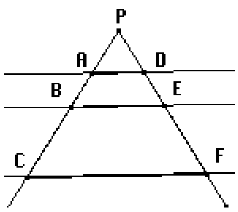
Comparando **(1)** e **(2)**, tem–se: $\frac{BD}{AD} = \frac{CE}{AE}$

Somando **1** a ambos os membros dessa igualdade, temos:

$$\frac{BD + AD}{AD} = \frac{CE + AE}{AE} \quad ou \quad \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$

Observa-se nesta demonstração a articulação entre os registros discursivo, figural e simbólico, além do fato de ser semelhante a demonstração proposta por Legendre cujo comentário está feito no capítulo **1**.

Só após todas estas atividades é que é sugerida a demonstração do teorema de Thales como conseqüência do teorema fundamental de proporcionalidade, evitando-se, assim os inconvenientes da demonstração, que é geralmente utilizado (em que fica sem explicação o caso em que os segmentos são incomensuráveis).



Em seguida, a proposta sugere a verificação experimental e demonstração dos casos de semelhança de triângulos e que se trabalhem algumas aplicações do teorema de Thales e da semelhança de triângulos, tais como:

- relações métricas no triângulo retângulo;
- divisão de segmentos em partes iguais e/ou proporcionais;

- problema da sombra e um pouco de história;
- determinação de distâncias inacessíveis;
- determinação do tamanho real de um corpo a partir do seu tamanho aparente.

2.1.2.- Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN)

No terceiro ciclo do Ensino Fundamental, vemos sugerida, além de outras, a exploração de situações de aprendizagem que permitam ao aluno resolver situações-problema que envolvam figuras geométricas planas, utilizando procedimentos de decomposição e composição, transformação, ampliação e redução. Tais procedimentos (decomposição e composição), contribuem para o desenvolvimento perceptivo do aluno com relação à visualização dos elementos de dimensão **1** e de dimensão **2** nas figuras geométricas e/ou nas configurações (segundo a teoria de Duval). As atividades que envolvem movimentação de uma figura no plano por meio de reflexão, translação e rotação são sugeridas fazendo-se explorar a identificação de medidas que permanecem invariantes nessas transformações (medidas dos lados, da superfície, do perímetro), o que favorece a observação, a argumentação, o levantamento de hipóteses, preparando para generalização e demonstração. A ampliação e redução de figuras planas segundo uma razão explorando a identificação de elementos variantes e invariantes, favorece o ensino de semelhança de figuras planas, noção esta que será utilizada para a formação da noção do teorema de Thales (vide rede semântica sugerida), além de dar significado ao conceito de razão.

No terceiro ciclo também está proposto o estudo por meio da resolução de situações-problema de construções fundamentais utilizando régua e compasso, tais como: mediatriz, bissetriz de um ângulo, retas paralelas e perpendiculares e alguns ângulos notáveis. O domínio destes conceitos são competências básicas que o aluno deve ter para a apreensão do teorema de Thales, da homotetia e para utilização do software Cabri-géomètre em construções geométricas.

Já, no 4º ciclo do Ensino Fundamental, vemos sugerido:

- No desenvolvimento do pensamento geométrico, a exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a produzir e analisar transformações e ampliação/redução de figuras geométricas planas, identificando seus elementos variantes e invariantes, desenvolvendo o conceito de congruência e semelhança; como também, desenvolver noções geométricas como incidência, paralelismo, perpendicularismo e ângulo para estabelecer relações, particularmente as métricas, em figuras bidimensionais e tridimensionais. Esta exploração das transformações (reflexão, translação, rotação) de uma figura possibilitam o desenvolvimento de uma geometria dinâmica em contraposição a uma abordagem estática.

- No desenvolvimento do raciocínio proporcional, por meio da exploração de situações que levem o aluno a resolver situações-problema que envolvam a variação de grandezas direta ou inversamente proporcionais, utilizando estratégias não-convencionais e convencionais como as regras-de-três.

O estudo dos conteúdos do bloco Espaço e Forma tem como ponto de partida a análise das figuras pela observação, manuseio e construções que permitam fazer conjecturas e identificar propriedades.

- Nesse ciclo, é possível e desejável que não se abandone as verificações empíricas de propriedades e relações e que se estimule o trabalho com algumas demonstrações simples, com o objetivo de mostrar seu significado.

  De modo geral os aspectos a serem enfatizados neste ciclo são aqueles que possibilitem ao aluno realizar investigações, resolver problemas, criar estratégias, comprová-las, justificá-las e argumentar sobre elas.

Olhando para os conteúdos explícitos, percebemos que os vários conteúdos citados acima preparam terreno para o ensino do teorema de Thales e este teorema é sugerido através da verificação experimental e suas aplicações, na qual, há um destaque para a divisão de segmentos em partes proporcionais utilizando régua e compasso.

2.2.– Algumas propostas didáticas para o ensino do teorema de Thales

2.2.1.- Experiências Matemáticas (8ª série)

Após análise das experiências matemáticas sugeridas, cabe destacar alguns pontos:

- antes de ensinar o teorema de Thales há a sugestão do ensino de semelhança de figuras planas (ampliação, redução, homotetia), semelhança de triângulos e operações com raízes quadradas;
- introduz o assunto com atividades que fazem com que o aluno, a partir de conhecimentos disponíveis, tais como, semelhança de figuras planas, homotetia, ampliação e redução de figuras, perceba proporção e feixe de retas paralelas, onde o teorema de Thales será uma ferramenta implícita. Também com as atividades, o aluno vai se familiarizando com a linguagem (paralelas, feixe de paralelas, transversais);
- faz-se a proposta de atividades nas quais o aluno forma o conceito implicitamente, da mesma forma que dizem que Thales pensou;
- o professor induz o aluno a concluir o teorema que hoje é conhecido como o teorema de Thales;

- essas experiências não sugerem ao professor trabalhar com outras formas de representar o teorema de Thales, o que pode ser futuramente um obstáculo na transposição didática;
- não trabalha nenhuma aplicação, a não ser o cálculo de medidas inacessíveis;
- coloca poucas atividades e não sugere nenhuma demonstração.

2.2.2.- Livros Didáticos

Procuramos analisar alguns livros didáticos observando as variáveis didáticas destacadas na página 62.

Selecionamos quatro livros para serem analisados. Os três primeiros são livros utilizados pela maioria das escolas atualmente, na cidade de Taubaté, e o quarto é da década de 70.

1 – Matemática – 8ª série
BIANCHINI, Edwaldo – editora Moderna – 1996

2 – Matemática Atual – 8ª série
BIGODE, Antônio José Lopes – Atual Editora – 1994

3 – Matemática – 8ª série
IMENES & LELLIS – Editora Scipione – 1999

4 – Matemática Curso Moderno – 8ª série
NETTO, Scipione Di Pierro; MUNHOZ, Ainda F. da Silva; NANO, Wanda; IKIEZAKI, Iracema; VIEIRA, Alcebiades – Edição Saraiva – 1974.

O objetivo desta análise foi verificar nesses discursos como estes autores propõem situações visando a transformação de um estado de não-saber para um estado de saber.

Em linhas gerais vamos citar os conteúdos de geometria abordados por esses autores e a ordem em que são tratados para que tenhamos uma visão da possível rede semântica pressuposta nestes livros, depois faremos a análise específica de como esses autores abordam o teorema de Thales.

Nos livros **1** e **4**, o estudo da Geometria é abordado, após ter apresentado todo conteúdo da Álgebra pertinente à 8ª série, já no livro **2** o autor faz uma revisão dos campos numéricos, trata alguns conteúdos de álgebra até equação do 2° grau depois introduz os conteúdos de Geometria, em seguida, continua os conteúdos de álgebra abordando funções e gráficos, a Matemática comercial e financeira, sendo que esses dois últimos não foram abordados nos livros **1** e **4**. No livro **3**, o estudo da geometria e da álgebra são intercalados.

Quanto à geometria, podemos observar:

- No livro **1**, este estudo se inicia com os conceitos de segmentos proporcionais, semelhança, relações métricas num triângulo retângulo, trigonometria. Em segmentos proporcionais são trabalhados os conceitos de razão de segmentos, segmentos comensuráveis e incomensuráveis, segmentos proporcionais, feixe de paralelas, teorema de Thales e as conseqüências deste Teorema.
- No livro **2**, este estudo se inicia com atividades de lógica e argumentação visando as demonstrações em geometria (são mostradas algumas importantes), depois trata de congruência e semelhança e do teorema de Pitágoras. Em congruência e semelhança são trabalhados: figuras congruentes, triângulos congruentes, figuras semelhantes, triângulos semelhantes, feixe de retas paralelas cortado por retas transversais, *Relação de Thales* **e** a semelhança de triângulos, ampliação de figuras por homotetia, ***aplicações do teorema de Thales***: cálculo de distâncias inacessíveis.
- No livro **3**, o estudo se inicia com o capítulo de semelhança no qual se estudam figuras semelhantes, razão de semelhança, método para se desenhar figuras semelhantes (homotetia), triângulos semelhantes com algumas aplicações práticas, a semelhança dos triângulos formados por duas retas paralelas quando cortadas por duas retas transversais (ao exemplificar, trata a paralela na posição inclinada e as transversais se interceptando entre as paralelas), semelhança nos triângulos retângulos, relações métricas no triângulo retângulo e teorema de Pitágoras. No capítulo 4 aborda a trigonometria e polígonos inscritos e circunscritos. O capítulo 5, medidas trabalhando área e volume. No capítulo 8, intitulado Propriedades Geométricas, são estudados: ângulos nos polígonos, ângulos no círculo e paralelismo, sendo que neste último está abordado o teorema de Thales.
- No livro **4**, o estudo da geometria se inicia com lugar geométrico e aplicações, projeção de pontos e segmentos segundo uma direção, *Relação de Thales, aplicações da Relação de Thales, Triângulos em posição de Thales*, semelhança de triângulos, áreas das figuras planas, etc.

Livro 1 (Bianchini)

Conteúdos anteriores: razão de segmentos, segmentos comensuráveis e incomensuráveis, segmentos proporcionais, feixe de paralelas.

Observamos que esse autor inicia o estudo do teorema fornecendo a definição e a demonstração do teorema para os segmentos comensuráveis, seguindo as proposições de Arnauld de forma bem direta e objetiva, depois mostra um exemplo e, a seguir, propõe exercícios para fixação e verificação da performance.

Neste discurso, embora o autor deixe em aberto o ponto de vista a adotar, para montar a proporção, ao desenhar uma configuração, intencionando visualizar e demonstrar esta proposição, ele acaba fixando o ponto de vista conservação das abscissas.

Em todos os exercícios, já é dada a configuração das paralelas com as transversais e espera-se que o aluno utilize o teorema de Thales para determinar o valor desconhecido nessas configurações (neste caso o teorema de Thales passa a ser um objeto modal).

Percebe-se, também, que, das 16 configurações fornecidas, temos uma predominância nas paralelas na posição horizontal e nas transversais não se interceptando, como mostra a tabela abaixo:

Tabela 4

	Transversais se interceptando		Transversais não se interceptando no papel	n° de casos
	acima das //	entre as //		
paralelas na horizontal	3	0	9	12
paralelas na vertical	0	0	0	0
paralelas inclinada	1	1	2	4
n° de casos	4	1	11	16

Após os exercícios propostos, ele aborda as conseqüências do teorema de Thales, trabalhando a paralela a um dos lados de um triângulo e o teorema da bissetriz interna de um triângulo. Na paralela a um dos lados de um triângulo, não considera a semelhança entre os dois triângulos sobrepostos, mostra apenas a proporcionalidade entre os segmentos consecutivos não sobrepostos de uma transversal com os da outra transversal. Ao término de cada definição das conseqüências, faz a demonstração e propõe exercícios. A seguir, propõe exercícios complementares envolvendo todos os conceitos abordados, sendo que, destes exercícios, em 6 são fornecidas a configuração e em 5 são problemas descritivos.

Observamos nesse discurso que em nenhum momento foi tratado o cálculo do segmento formado na paralela. Esse cálculo só é visto no capítulo de semelhança de triângulos. Também notamos que o teorema de Thales sob o ponto de vista da conservação da relação de projeção também não é apresentado.

Livro 2 (Bigode)

Conteúdos anteriores: demonstrações em geometria, figuras congruentes, triângulos congruentes, figuras semelhantes, triângulos semelhantes, feixe de retas paralelas cortadas por retas transversais.

Na sessão triângulos congruentes, o autor coloca como exemplo de um dos casos de congruência um problema extraído do livro *Perspectivas da Matemática* de Hans Freudenthal (educador holandês), em que descreve um método que teria sido utilizado por Thales para determinar a distância de um navio até a praia. Esse método se assemelha ao da segunda conjectura exposta no capítulo **1** (figura 2, p. 12).

Neste livro, a relação de Thales é apresentada em dois momentos. Primeiro, como uma generalização do conteúdo feixe de retas paralelas cortadas por retas transversais, e depois na sessão relação de Thales e a semelhança de triângulos. Mostrando, assim, o teorema de Thales sob dois aspectos: a conservação das abscissas e a dilatação por meio da semelhança de triângulos. No primeiro, ele escreve a proposição de Arnauld em relação ao feixe de paralelas cortadas por transversais e sugere a verificação experimentalmente. A seguir, generaliza este caso particular escrevendo a proposição que também é conhecida como relação de Thales: "*Um feixe de retas paralelas determina sobre duas transversais segmentos proporcionais*", mas não faz nenhuma demonstração formal.

Após cada conteúdo, é proposta uma série de atividades de aplicação do saber ensinado. Observa-se que nas atividades relacionadas ao conteúdo, feixe de retas paralelas, são fornecidas várias configurações para que o aluno determine o valor desconhecido. Das 12 configurações, em nove, as paralelas estão na posição horizontal; em duas, na vertical e, em uma, na posição inclinada. Quanto às transversais, em quatro, elas não se interceptam; em três, elas se interceptam entre as paralelas e, em cinco, elas se interceptam acima ou abaixo das paralelas. Em relação às paralelas, percebe-se a predominância da posição horizontal e, em relação às transversais, há quase um equilíbrio. Nas atividades da sessão, relação de Thales e a semelhança de triângulos, há 5 atividades das quais, em 3, são fornecidas as configurações com as transversais se interceptando acima das paralelas, formando dois triângulos semelhantes para se calcular o valor desconhecido, e as outras 2 são atividades para aplicar os conceitos de figuras semelhantes. Constatamos, também que não é apresentada nenhuma atividade para se determinar a medida do segmento formado nas paralelas.

Nas sessões seguintes, o saber adquirido, teorema de Thales, poderá ser utilizado como ferramenta para realização de outras "performances". Na sessão ampliação de figuras por homotetia ele propõe duas atividades (projetos), uma para ampliar e reduzir figuras e a outra tendo como objetivo a introdução da trigonometria. Em "*Aplicações do Teorema de Thales*", ele apresenta e propõe atividades para calcular distâncias inacessíveis, construção do retângulo áureo, divisão de segmentos em partes proporcionais, construção de instrumentos para se montar um laboratório de geometria, tais como pantógrafo, hipsômetro e astrolábio.

Um fato curioso, observado neste discurso, é que, embora o autor escreva um capítulo sobre demonstrações em geometria, no capítulo seguinte, com relação ao teorema de Thales, ele não faz uso disso.

Livro 3 (Imenes e Lellis)

Conteúdos anteriores: figuras semelhantes, triângulos semelhantes, semelhança no triângulo retângulo, paralelismo.

Inicia o capítulo paralelismo lembrando por meio de figuras as seguintes propriedades:

a) "Se duas retas são paralelas, os ângulos correspondentes formados por uma outra reta transversal a estas duas, são iguais";

b) "Se duas retas paralelas são cortadas por duas paralelas, forma-se um paralelogramo e seus lados opostos têm medidas iguais";

c) "A paralela a um dos lados de um triângulo divide-o em dois triângulos semelhantes, por isso, a medida de seus lados é proporcional".

Comenta que outras propriedades são decorrentes dessas e convida os leitores a comprovar experimentalmente uma, que diz, ser descoberta pelo matemático grego Thales de Mileto (século VII a C.) e que foi exemplificada por meio de enunciados e configurações (paralelas na horizontal e transversais se interceptando acima das paralelas). A seguir, convida os leitores a acompanhar a dedução para ver por que isso acontece utilizando-se das três propriedades citadas acima. Ao escrever a proporção, fixa o ponto de vista conservação das abscissas e não faz nenhum comentário com relação aos segmentos formados pelas paralelas. Após esse percurso, resume o teorema de Thales através do enunciando: "*Quando um feixe de retas paralelas é cortado por duas transversais, há proporcionalidade entre as medidas dos segmentos correspondentes, que estão sobre as transversais*".

Após cada sessão são propostas três séries de atividades de aplicação do saber ensinado. A primeira série, com o título "*Conversando sobre o texto*", expõe algumas questões para o aluno refletir e dissertar. Vejamos:

- "*Apresente uma propriedade envolvendo paralelismo e medida de ângulos*";
- "*E outra sobre paralelismo e medida de segmentos*";
- "*Apresente um exemplo da propriedade descoberta por Thales, usando números*";

- “*Escreva algumas proporções válidas na situacão dada pela figura 46 abaixo*”:

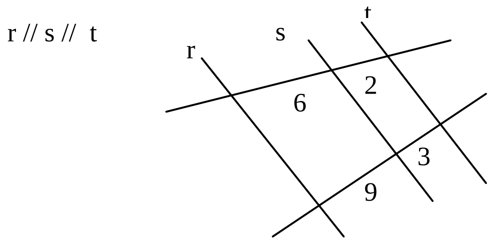


Figura 46

Na segunda série, propõe sete exercícios. Em todos eles as configurações são apresentadas e, nas cinco questões iniciais é solicitado que o leitor faça algumas reflexões e as explique. No primeiro exercício, pede para explicar por que os ângulos alternos internos, formados por duas paralelas e uma transversal, são iguais. No segundo, pede para explicar por que os ângulos opostos de um paralelogramo são iguais. O terceiro, o quarto e o quinto já estão mais relacionados com o teorema de Thales.

O sexto e o sétimo exercícios são aplicações do teorema de Thales no cálculo de valores desconhecidos nas transversais. Quanto à posição das paralelas e transversais, veja a tabela 5:

Tabela 5

	Transversais se interceptando		Transversais não se interceptando no papel	n° de casos
	acima das //	entre as //		
paralelas na horizontal	0	0	1	1
paralelas na vertical	0	0	1	1
paralelas inclinada	3	0	2	5
n° de casos	3	0	4	7

Observamos uma predominância das paralelas na posição inclinada e das transversais, explicitamente, não se interceptando ou se interceptando acima das paralelas. Notamos, também, que nessa sessão não há nenhum destaque nas transversais se interceptando entre as paralelas. Só percebemos este tipo de atividade na parte semelhança de triângulo, no qual não se faz nenhuma conexão explícita com o teorema de Thales. Quanto aos pontos de vistas citados por Guy Brousseau vemos o teorema de Thales apresentado apenas sob o aspecto da conservação das abscissas. Num dos exercícios, o aluno é solicitado a escrever três proporções diferentes com relação a uma configuração dada, nessa atividade pode-se perceber ou não os outros pontos de vista.

Na terceira série, são propostos seis exercícios, similares aos sete anteriores, para serem realizados em casa.

Livro 4 (Scipione – 1974)

Conteúdos anteriores: relação, função, projeção de pontos e segmentos segundo uma direção.

Inicia-se a sessão *Relação de Thales*, mostrando, por meio de figuras e de notações simbólicas próprias de funções, a correspondência que leva ponto a ponto e segmento a segmento vistos na sessão anterior, a seguir, demonstra algumas propriedades desta correspondência e, por fim, generaliza e enuncia a relação de Thales e de seu recíproco. Ao término desta sessão, não propõe exercício e já inicia outra sessão (aplicações de relação de Thales).

Na parte, *Aplicações da Relação de Thales*, ele propõe exercícios para se aplicar à relação de Thales na divisão de segmentos em partes iguais ou proporcionais, para determinar a terceira proporcional entre dois segmentos dados e a quarta proporcional entre três segmentos dados. Para realizar esta performance, ele fornece, no primeiro exercício, os passos para se dividir um segmento em partes iguais.

Na sessão *triângulos em posição de Thales* ele propõe exercícios para verificar a razão de proporcionalidade entre os lados correspondentes dos triângulos e para se construir triângulos em posição de Thales, dado a razão de proporcionalidade.

Na sessão *semelhança de triângulos* ele define semelhança de triângulos a partir de uma correspondência com os triângulos em posição de Thales e propõe alguns exercícios.

Ao término de todas estas sessões é que o autor propõe exercícios de aplicação do teorema de Thales para determinar medidas desconhecidas de uma figura dada, calcular terceira e quarta proporcional entre segmentos.

- ✓ **Observações gerais**

Dos quatro livros analisados, o que mais se assemelha com os demais livros didáticos encontrados no mercado é o livro **1**. O livro **2**, embora aparentemente siga a proposta curricular do Estado de São Paulo, é um livro pouco conhecido e adotado nas escolas em Taubaté, segundo entrevista feita com alguns professores. O livro **3**, devido à avaliação do MEC, está sendo adotado em várias escolas. O livro **4** não é utilizado hoje em dia e nem se encontra no mercado.

Embora, nos quatro discursos, o enunciado do teorema pareça ser o mesmo, eles se diferenciam na forma de mostrar e justificar esta relação. Eles partem de conceitos diferentes, ou seja, as redes sintagmáticas utilizadas são diferentes. O primeiro trabalho direto no feixe de paralelas; o segundo associa com a semelhança; o terceiro, com as propriedades dos paralelogramos e da transversal a um feixe de paralelas com relação aos ângulos e o quarto trabalha projeção de ponto sobre reta.

Percebe-se que, nesses livros didáticos, o conceito do teorema de Thales não é mostrado em sua "totalidade perceptiva", ou seja, tem-se uma visão parcial do Teorema e de suas significações.

✓ **Conseqüências didáticas**

Para se ter o teorema de Thales apreendido em sua globalidade, acreditamos que é preciso que se reconheça, em qualquer configuração, a sua aplicabilidade, bem como, a aplicação do teorema em situações-problema em que não sejam fornecidas as configurações, além de saber demonstrar o Teorema. Para que isso ocorra, é necessário que, no momento da produção de sentido, haja uma perfeita articulação entre o plano de conteúdo e o plano de expressão.

Nos livros didáticos, percebemos que:

- não se abordam os vários pontos de vista na montagem da proporção;
- há a fixação de algumas configurações que chamaremos de configurações prototípicas;
- pouco se trabalha demonstração;
- há poucos problemas de aplicação;
- há poucos problemas escritos sem a configuração;
- não se trabalha mudança de registro;
- não se notam atividades utilizando o recíproco do teorema de Thales, o que proporciona a não ocorrência da reversibilidade;
- não se notam atividades para se calcular o valor dos segmentos formados nas paralelas pelas transversais.

2.3 – Análise de questões propostas em avaliações de sistemas de ensino brasileiros e o teorema de Thales

Olhamos nos sistemas de avaliações nacionais e estaduais se abordam o teorema de Thales, em que tipo de questões colocam, e qual o desempenho geral dos alunos nessas questões. Feito isso teremos uma avaliação de massa com relação a esse conteúdo.

SAEB (Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica)

Esse exame foi implantado em 1990 e é realizado a cada dois anos, em uma amostra probabilística representativa dos 26 estados brasileiros e do Distrito Federal.

São pesquisados municípios, professores, diretores, alunos do ensino básico (da 4ª e da 8ª séries do Ensino Fundamental e da 3ª série do Ensino Médio) nas disciplinas Língua Portuguesa, Matemática e Ciências e, a partir de 1999, foram incluídas as disciplinas História e Geografia.

Nas Matrizes Curriculares de Referência, 2ª edição 1999, na parte dos descritores de Matemática 8ª série do Ensino Fundamental, dentre as várias competências que se espera, nessa fase, serem adquiridas pelos alunos, temos a resolução de situações-problema que possibilitem: D2 – diferenciar posições relativas de retas no plano (paralelas e perpendiculares); D9 – ampliar e reduzir figuras planas, identificando os elementos que se alteram e os que se modificam; D10 – utilizar o conceito de semelhança e congruência em triângulos. As competências relativas aos itens D2 e D9 estão destacadas como competências cognitivas de nível operacional e a do item D10 como competência cognitivas de nível global. Nas competências de nível operacional encontram-se as ações coordenadas que pressupõem o estabelecimento de relações entre objetos e, nas competência de nível global encontram-se ações e operações mais complexas, que envolvem a aplicação de conhecimentos a situações diferentes e a resolução de problemas inéditos. Nessas competências temos implícito um dos aspectos do teorema de Thales, a dilatação.

Os resultados do exame feito em 1999 não foram divulgados ainda. Olhando a tabela comparativa dos desempenhos nas avaliações de matemática de 1995 e 1997, observamos que, no Estado de São Paulo, há uma queda na média (diminuição estatisticamente significativa). Para facilitar o entendimento dos resultados, os especialistas das disciplinas avaliadas estabeleceram as relações entre os níveis de proficiência da escala SAEB/97 e os ciclos dos níveis de ensino. Assim, deseja-se que até o final do 1º ciclo do Ensino Fundamental os alunos atinjam o nível de proficiência 250 e ao final o 2º ciclo do Ensino Fundamental, o nível 325. Pela análise dos resultados, quanto ao nível 325, afirmou-se:

> *"esse nível é bastante elevado para os alunos da 4º série, praticamente não havendo alunos capazes de demonstrar o desempenho a ele associado: apenas 0,3% dos alunos do País";*
>
> *"embora a expectativa dos currículos para os alunos da 8º série esteja em torno desse nível de proficiência, são muito poucos os alunos de 8ª série que chegam a ultrapassá-lo (apenas 10% do alunado)".*

Por esses resultados podemos refletir sobre a diferença entre o currículo proposto e o efetivamente ensinado, possivelmente significando que o currículo indicado está ausente das salas de aula, e que as práticas pedagógicas da escola devem ser repensadas.

SARESP 98 (Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo)

Constatamos na avaliação de Matemática do SARESP/ 98 – primeira série do Ensino Médio Diurno – que as noções de semelhança e do teorema de Thales são abordadas nas questões número 13, 14, 15 e 16. Na questão 13, são apresentados quatro losangos, fornecendo-se a medida de um dos lados e um dos ângulos, pedindo-se para identificar aqueles que são semelhantes entre si. Na questão 14, são dados dois terrenos retangulares e a razão de semelhança entre eles. Num deles, a medida do comprimento e da largura é fornecida; no outro, pede-se para calcular as dimensões. Na questão 15, dadas as medidas da sombra de um prédio, da altura e sombra de um poste, pede-se a altura do prédio. Na questão 16, são representados três terrenos que têm frente para uma rua e fundo para outra rua: no terceiro terreno é dada a dimensão do fundo e da frente; no segundo, só a do fundo e, no primeiro, nenhuma. Sabendo que os muros laterais são perpendiculares ao muro do fundo, pede-se para determinar o comprimento do muro da frente do segundo terreno. Nas questões 13 e 14, a noção de semelhança vem explícita no enunciado; já na questão 15, o aluno deverá perceber a semelhança dos triângulos formados e, a questão 16, poderá ser resolvida aplicando o teorema de Thales ou semelhança de quadriláteros ou decompondo a figura aplicar as razões trigonométricas. Na avaliação de matemática do SARESP/ 98 – primeira série do Ensino Médio – Noturno – percebemos os mesmos tipos de questões, porém, em algumas, o aluno, para resolver, deverá aplicar as propriedades das proporções. Analisando a Descrição da Escala de Habilidades de Matemática 7^a / 8^a séries do Ensino Fundamental e primeira série do Ensino Médio do SARESP/ 96 / 97 / 98, temos que, no nível 135, os alunos são capazes de:

- compreender e utilizar o conceito de *semelhança de triângulos* para resolver situação-problema;
- utilizar as relações métricas do *triângulo retângulo* na resolução de uma situação problema;
- calcular o lado e o apótema de um polígono regular inscrito em uma circunferência de raio dado.

Constatamos, por meio da tabela de porcentagem de alunos da Rede Estadual em cada nível de habilidade, segundo a série e período, que, nesse nível, a porcentagem de sucesso foi zero para todas as séries e períodos em questão.

Esses dados nos levaram a repensar e estudar os fenômenos ligados ao ensino-aprendizagem da geometria e especificamente do teorema de Thales.

2.4.– A origem dos erros e/ou dificuldades de ensino-aprendizagem: alguns resultados de pesquisa

Quando estávamos fazendo o estudo do objeto, tentando analisar todas as formas de representá-lo, procuramos encontrar uma configuração que explicitamente representa todas as demais, no entanto, não conseguimos obter essa configuração prototípica, devido a esse teorema necessitar mais de uma forma de expressão para ser manifesta. Diante dessa nossa incapacidade e da diversidade de formas de representar graficamente o teorema de Thales, surgiram as questões:

> *"Será que a posição das paralelas, em qualquer umas das configurações, interfere na percepção e aplicação do teorema de Thales?"; "E a posição da intersecção das transversais interfere também na percepção e aplicação do teorema de Thales?";*
> *"Em que medida e por que meios, ao ensiná-lo, consegue-se trabalhar com esses aspectos perceptivos?"* (cap. 1, p. 54).

Pesquisando bibliografias a respeito, vimos que Françoise Cordier e Jean Cordier (*Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol 11, n° 1, pp. 45-64, 1991) em "*L`Application du théorème de Thalès. Um exemple du rôle des représentations typiques comme biais cognitifs*" fazem uma análise da aplicação do teorema de Thales no quadro da teoria da tipicalidade levantando as seguintes hipóteses:

a) a propriedade da tipicalidade das representações cognitivas é a fonte dos desvios cognitivos;

b) a representação cognitiva típica dessa situação não compreende somente as características essenciais do teorema, mas, igualmente, as propriedades supérfluas que se encontram ligadas no momento da aprendizagem. É nesse sentido que as representações típicas seriam a fonte de desvios cognitivos;

c) as propriedades ligadas na especificação do ângulo (agudo, obtuso) são verdadeiramente não-pertinentes (ponderação fraca) com relação ao número e posição das paralelas.

Para confirmar essas hipóteses, fizeram três experiências. A primeira, com o objetivo de evidenciar que todas as figuras geométricas para as quais se pode encontrar uma aplicação do teorema de Thales não são igualmente representativas do conceito; a segunda e a terceira, tiveram como finalidade propor uma análise sobre a maneira que o sujeito representa cognitivamente a situação e conhecer o grau de representatividade das figuras.

Na segunda experiência, confirmaram outra hipótese: as situações menos representativas são também aquelas que exigem maior tempo de resolução e apresentam maior incidência de erros.

Da primeira experiência, observaram que os sujeitos só produzem 4 ou 5 figuras geométricas diferentes, aplicando corretamente o teorema de Thales. Algumas dessas formas geométricas aparecem com uma freqüência maior que outras. O levantamento que fizeram, levou em conta a ordem em que cada aluno representou as figuras, fazendo a hipótese que a ordem é função de sua disponibilidade. Observando a primeira configuração elaborada por cada sujeito obtiveram os resultados da figura 47 abaixo.

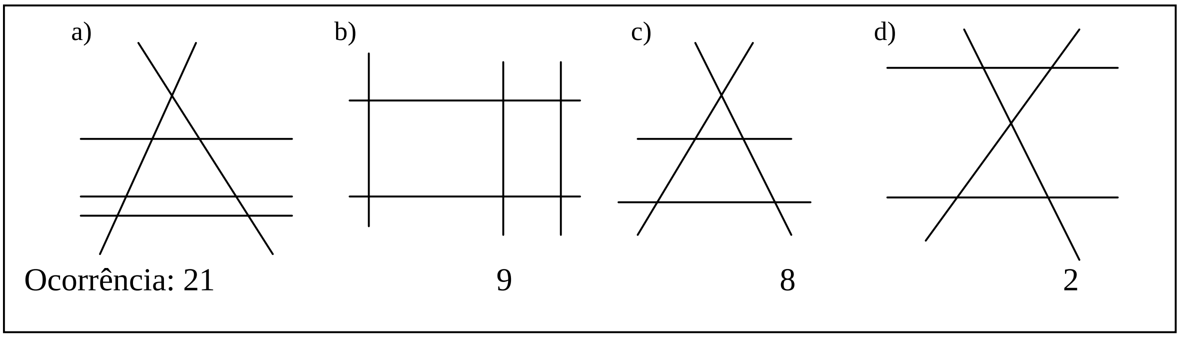


Figura 47

As situações dessa tabela foram consideradas as mais representativas e, as ausentes são, evidentemente, não-representativas. Ao analisarem os erros dos sujeitos, salientaram que alguns desses erros são devidos a uma representação errada das projeções de uma reta sobre uma outra, que é vista sempre do mesmo lado. Essa representação típica da projeção, conduziu a respostas erradas para as figuras nas quais a intersecção das transversais está entre as retas paralelas.

Na experiência 2, constataram que o maior índice de erros (50%) dos sujeitos ocorreu quando encontravam duas paralelas e as transversais se interceptavam entre elas. Em seguida, com 25% de erros, quando encontravam três paralelas e as transversais se interceptando entre duas dessas paralelas e com 12,5% de erros quando encontravam três ou duas paralelas e as transversais se interceptando acima das paralelas.

Terminadas as experiências fizeram as discussões gerais, das quais citaremos algumas:

"O conjunto desses resultados indica que uma representação típica pode ser criada num modelo pelo sujeito. Havendo problema na medida em que o aluno não trata a categoria como uma categoria conceitual, ou seja, não se mostra capaz de abstrair a(s) propriedade(s) estritamente necessárias à aplicação do teorema, mas funda seu raciocínio sobre as múltiplas propriedades figurativas

das figuras geométricas, as quais várias são evidentemente supérfluas. Esse erro se instala muito provavelmente durante a fase de aquisição, e ela se encontraria confortada pela presença da representações típicas ligadas às figuras geométricas de um lado, e ligadas às projeções de outro lado.

Pode-se perguntar em qual medida um trabalho específico no interior desses dois domínios de representação não melhoraria a situação. Entretanto, não se pode tratar de impedir as representações típicas de se instalar. Primeiramente, porque isso é um objetivo que parece largamente irrealista, porque as representações privilegiadas tomam corpo no decorrer das aprendizagens intencionais ou acidentais. Em seguida, porque as representações típicas podem constituir pontos de referência, ligações interessantes para a compreensão dos alunos.

Essa experimentação indica, entretanto, que pode ser muito importante diversificar muito cedo para os alunos as figuras geométricas. É possível que, confrontadas as situações mais variadas, o aluno leve mais tempo para dominar a situação. Entretanto, a aprendizagem abstrata reivindicada será evidentemente, mais adequada: o aluno se encontrará temeroso em dar menos ênfase às características opcionais às quais ele daria tanta importância, e em conceder a relação específica a adquirir. Há modificação das representações da situação na memória a longo tempo.

Uma outra pesquisa de interesse para nós foi a "*Analyse et Réalisation D` Une Expérience D `Enseignement De L `Homothétie*" de Lemonidis Charalambos (*Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 11, n° 23, pp. 295-324, 1991). Visando o ensino aprendizagem da homotetia, Charalambos aplicou um teste inicial para a avaliação das pré-aquisições de um grupo de alunos do 1°ano do Ensino Médio e estabeleceu duas constatações: uma delas se refere à aquisição do teorema de Thales limitada a uma única situação figurativa (triângulos sobrepostos) e a outra refere-se à existência de uma diferença considerável entre duas tarefas mobilizando os mesmos conhecimentos (uma das tarefas se situa no interior de um registro numérico e a outra demanda a articulação entre o registro numérico e o registro figurativo) o que permitiu ver que a relação entre os êxitos e os fracassos teriam uma deficiência na articulação dos registros e na apreensão da variedade das configurações homotéticas possíveis. Com isso, ele abordou como uma primeira hipótese, a necessidade, para a aquisição da noção de homotetia, de uma experiência prévia dos diferentes tipos de figuras que podemos obter referentes a esta noção, o que vai exigir uma análise figurativa. A segunda hipótese foi que, para exploração dos elos que existem entre os aspectos figurativos e numéricos, deve-se separar depois articular, esses dois aspectos nas tarefas pedidas aos alunos. É baseado nessas hipóteses que ele elabora sua experimentação.

Após a aplicação da experimentação, Charalambos constatou uma melhora no que concerne à aplicação do teorema de Thales (95% e 60% de êxitos, enquanto na avaliação inicial havia 75% e 35%); porém, detectou que subsistem, ainda, as diferenças segundo as situações figurativas para as quais a aplicação é pedida. Registrou, após quatro sessões, uma ordem decrescente de êxitos segundo a forma dos triângulos propostos (triângulos sobrepostos "*em forma de chifre*" e triângulos opostos pelo vértice "*em forma de borboleta*") e segundo os elementos concernentes (lados oblíquos ou o terceiro lado). Concluiu "*que a manutenção dessas diferenças mostra que a interpretação de formas perceptivas muito diferentes com a ajuda de uma mesma fórmula (igualdade de duas razões) não tem nada de trivial e que não é didaticamente negligenciável. Essa tarefa exige a articulação do registro figurativo com os registros simbólicos e numéricos*" (Lemonidis, 1991. p. 322).

Destacou também que não encontrou uma melhora importante para as situações abaixo:

-

- "*as construções geométricas executando os traçados geométricos";*
- *"as justificações das construções geométricas, houve pouco êxito devido à grande dificuldade que encontram em geral os alunos na 1° série do Ensino Médio para elaborar e apresentar um raciocínio";*
- *"a utilização da homotetia a um nível de generalização e sua comparação com as outras transformações. O conteúdo dos exercícios desse tipo não faz parte dos objetivos dos programas atuais, ele está mais conforme aos objetivos dos programas franceses de 1970"* (Lemonidis, 1991, p.322 e 223).

2.5.– Avaliando a compreensão dos alunos a respeito do teorema de Thales: um estudo diagnóstico

Com a finalidade de verificar a aprendizagem e as concepções dos alunos com relação ao teorema de Thales, aplicamos um teste diagnóstico (1998) em alunos de 1º ano do Ensino Médio da Escola Técnica Estadual Getúlio Vargas (E.T.E. Getúlio Vargas), localizada no bairro do Ipiranga cidade de São Paulo. Esses alunos estudaram o teorema de Thales na 8º série do Ensino Fundamental nas mais variadas escolas (tanto particulares quanto estaduais) o que impossibilita analisar e descrever a forma como foi ensinada esta propriedade, porém, temos uma amostra bem diversificada e heterogênea que reflete uma realidade do ensino-aprendizagem.

Por meio da experiência de sala de aula, da análise dos livros didáticos, do resultado de algumas pesquisas, detectamos alguns fenômenos geradores de obstáculos didáticos que pretendemos analisar nesse teste, tais como:

- configurações típicas: ângulo entre as retas transversais, disposição das paralelas, número de paralelas;
- configurações pertinentes em relação à posição da intersecção das transversais com as paralelas (entre as paralelas, acima ou abaixo dessas);
- nos livros textos analisados, a maioria dos exercícios é apresentada com esquemas, e, quando surgem problemas escritos sem ser fornecida uma figura, os alunos têm dificuldade em interpretar e representar por meio de esquemas;
- na maioria dos livros analisados, nos exercícios propostos não se observa a aplicação do recíproco do teorema de Thales, nem aplicação dessa noção para se determinar a medida dos segmentos formados nas paralelas.

Pretendemos analisar também os pontos de vista (conservação das abscissas, conservação da relação de projeção ou dilatação), estratégias pelos quais os alunos resolvem os problemas.

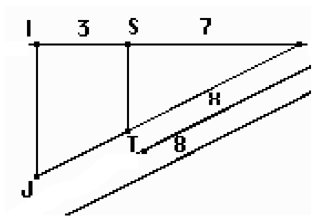
Fizemos uma análise a priori das questões e após aplicação a análise dos resultados obtidos, os quais iremos relatar a seguir.

2.5.1 – Análise a priori das questões do teste diagnóstico

De forma geral, em todas as questões abaixo, os alunos poderão encontrar algumas dificuldades que talvez levem ao não acerto destas, tais como: não visualização da aplicação do teorema de Thales, montagem da proporção, aplicação da propriedade fundamental da proporção, aplicação da propriedade distributiva; resolução da equação; simplificação de frações.

Nas questões **1** e **2**, os alunos deverão determinar os valores desconhecidos **x**, **y** e ***IJ***. O valor de **x** se refere a medida do segmento gerado pelas paralelas nas transversais e o valor de **y** e de ***IJ*** são a medida do segmento formado na paralela. Acreditamos que o cálculo do valor de **x** é mais fácil de ser determinado pelos alunos do que os de **y** e de ***IJ***, pelo fato do valor de **x** poder ser determinado por qualquer uma das estratégias de resolução (pontos de vista – conservação das abscissas, conservação da relação de projeção ou dilatação) e os valores de **y** e ***IJ*** só se pensarmos sob o ponto de vista da dilatação e na semelhança de triângulos.

Questão 1



Considere na figura ao lado, as retas ***ST*** e ***IJ*** paralelas:

a) calcular **x;**

b) sendo ***ST***= 3,5cm é possível calcular ***IJ***? Justifique.

Objetivo: aplicar o teorema de Thales para achar o valor de **x** e de ***IJ*** estando as paralelas na posição vertical.

Análise matemática - soluções possíveis:

a) do ponto de vista – conservação das abscissas –

$$\frac{10}{7} = \frac{8}{x} \Rightarrow 7.8 = 10.x \Rightarrow x = 5,6 \text{ ou}$$

$$\frac{7}{3} = \frac{x}{(8-x)} \Rightarrow 3.x = 7.(8 - x) \Rightarrow 3.x = 56 - 7.x \Rightarrow x = 5,6$$

b) do ponto de vista – conservação da relação de projeção –

$$\frac{7}{x} = \frac{10}{8} \Rightarrow 10.x = 56 \Rightarrow x = 5,6 \text{ ou}$$

$$\frac{7}{x} = \frac{3}{(8-x)} \Rightarrow 3.x = 7.(8 - x) \Rightarrow 3..x = 56 - 7x \Rightarrow 10.x = 56 \Rightarrow x = 5,6$$

c) do ponto de vista – dilatação

$$\frac{7}{10} = \frac{x}{8} \Rightarrow 10.x = 7.8 \Rightarrow x = 5,6 \text{ (mesma expressão da conservação das abcissas) ou}$$

$$\frac{7}{x} = \frac{10}{8} \Rightarrow 10.x = 7.8 \Rightarrow x = 5,6 \text{ (mesma expressão da conservação da relação de projeção)}$$

para achar o lado $\overline{IJ}$

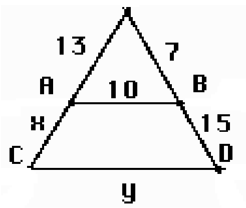
$$\frac{3,5}{\overline{IJ}} = \frac{7}{10} \Rightarrow 7.\overline{IJ} = 5 \text{ ou } \frac{3,5}{8} = \frac{5,6}{8} \Rightarrow 5,6.\overline{IJ} = 28 \Rightarrow \overline{IJ} = 28 \Rightarrow \overline{IJ} = 5$$

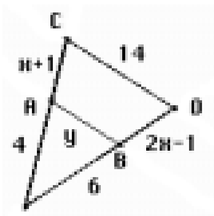
Análise didática -

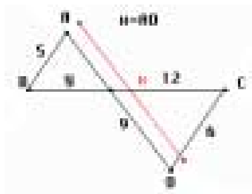
Além de todas as dificuldades já citadas acima, acreditamos que devido a configuração dos triângulos sobrepostos talvez os alunos na determinação do valor de ***IJ*** não obtenham o sucesso almejado, estando em jogo para facilitar a apreensão operatória que o aluno na apreensão perceptiva do esquema enxergue as subfiguras (triângulos ***IRJ*** e ***SRT***). O fenômeno da não-congruência entre o enunciado e as estratégias de resolução também pode ser um fator gerador de dificuldades para a apreensão operatória. O fato de no enunciado não se observar nenhuma menção aos triângulos ***IRJ*** e ***SRT*** poderá conduzir o aluno a não perceber no registro gráfico, as propriedades matemáticas pertinentes na resolução do problema. Um outro fator que poderá conduzir ao erro, dependendo da estratégia utilizada, é o aluno não perceber que a medida do segmento $\overline{JT}$ eqüivale a (8- x).

Questão 2

Sendo $\overline{AB}$ paralelo a $\overline{CD}$, determine **x** e **y** nos esquemas abaixo:

a) 

b) 

c) 

Objetivo: aplicar o teorema de Thales para encontrar o valor de **x** e de **y,** observando as várias posições das paralelas e do cruzamento das transversais. Na primeira e na segunda configuração os valores de **x** se referem a medida de segmentos nas transversais e os valores de **y** são relativos a segmentos formados nas paralelas.

Análise matemática – soluções possíveis:

Questão 2A

a - do ponto de vista – conservação das abscissas:

a1) $\frac{13}{x} = \frac{7}{15} \Rightarrow 7.x = 13.15 \Rightarrow 7.x = 195 \Rightarrow x - 27{,}85$ ou

a 2) $\frac{15}{22} = \frac{x}{(x+13)} \Rightarrow 22.\ x = 15.\ (x+13) \Rightarrow 22.x = 15.x + 195 \Rightarrow x = 27{,}85$

a 3) $\frac{(13+x)}{13} = \frac{22}{7} \Rightarrow 7.(13+x) = 22.13 \Rightarrow 7.x = 195 \Rightarrow x = 27{,}85$

b - do ponto de vista conservação da relação de projeção:

b1) $\frac{13}{7} = \frac{x}{15} \Rightarrow 7.x = 195 \Rightarrow x = 27{,}85$ ou

b2) $\frac{x}{15} = \frac{(x+13)}{22} \Rightarrow 22.x = 15.(x+13) \Rightarrow 22.x = 15.x + 195 \Rightarrow 7..x = 195 \Rightarrow x = 27{,}85$

b3) $\frac{(13+x)}{22} = \frac{13}{7} \Rightarrow 7.(13+x) = 22.13 \Rightarrow 7.x = 195 \Rightarrow x = 27{,}85$

c - do ponto de vista – dilatação:

Para calcularmos o valor de **x** sob esse ponto de vista, teremos a expressão semelhante a descrita na conservação das abscissas a_3

Para achar o lado **y**:

$$\frac{10}{y} = \frac{7}{22} \Rightarrow 7.y = 220 \Rightarrow y = 31{,}4 \; ou \; \frac{10}{\mathrm{y}} = \frac{13}{40{,}85} \Rightarrow 13.y = 408{,}5 \Rightarrow y = 31{,}42.$$

Questão 2B

a - do ponto de vista – conservação das abscissas:

$$\mathrm{a}_1)\ \frac{4}{(\mathrm{x}+1)} = \frac{6}{(2x-1)} \Rightarrow 4.(2\mathrm{x}-1) = 6.(\mathrm{x}+1) \Rightarrow 8.\mathrm{x} - 4 = 6.\mathrm{x} + 6 \Rightarrow 2.\mathrm{x} = 10 \Rightarrow \mathrm{x} = 5 \text{ ou}$$

$$\mathrm{a}_2)\ \frac{(\mathrm{x}+1)}{4} = \frac{(2.x-1)}{6} \Rightarrow 4.(2.x-1) = 6.(x=1) \Rightarrow 8.x - 4 = 6.x + 6 \Rightarrow 2.x = 10 \Rightarrow x = 5$$

$$\mathrm{a}_3)\ \frac{4}{\mathrm{x}+1} = \frac{6}{2.x+5} \Rightarrow 4.(2.x+5) = 6.(x+5) \Rightarrow 8.x + 20 = 6.x + 30 \Rightarrow x = 5$$

(obs. idêntica expressão da dilatação)

b - do ponto de vista – conservação da relação de projeção:

$$b1)\ \frac{4}{6} = \frac{(x+1)}{(2.x-1)} \Rightarrow 4.(2.x-1) = 6.(x+1) \Rightarrow 8.x - 4 = 6.x + 6 \Rightarrow 2.x = 10 \Rightarrow x = 5 \; ou$$

$$b2)\ \frac{6}{4} = \frac{(2.x+5)}{(x+5)} \Rightarrow 4.(2.x+5) = 6.(x+5) \Rightarrow 8.x + 20 = 6.x + 30 \Rightarrow 2.x = 10 \Rightarrow x = 5.$$

c - do ponto de vista – dilatação:

Para calcularmos o valor de **x** sob esse ponto de vista, teremos a expressão semelhante a descrita na conservação das abscissas a_3.

Para achar o lado **y**:

$$c1)\ \frac{y}{14} = \frac{4}{(x+5)} \Rightarrow y.(x+5) = 4.14 \Rightarrow y.10 = 56 \Rightarrow y = 5{,}6 \text{ ou}$$

$$\mathrm{c}_2)\ \frac{\mathrm{y}}{14} = \frac{6}{(2.x+5)} \Rightarrow y.(2.x+5) = 6.14 \Rightarrow 15.y = 84 \Rightarrow y = 5{,}6.$$

Questão 2C

a - do ponto de vista – conservação das abscissas:

$$a1)\ \frac{x}{9} = \frac{(y+12)}{12} \Rightarrow 12.x = 9.(y+12) \Rightarrow \text{(depende do valor de y para calcular o valor de x)}$$

$$\mathrm{a2})\ \frac{\mathrm{y}}{12} = \frac{x-9}{9} \Rightarrow 12.(x-9) = 9.\mathrm{y} \Rightarrow \text{(depende do valor de y para calcular o valor de x)}$$

b - do ponto de vista - conservação da relação de projeção:

$$b_1)\ \frac{x}{(y+12)}=\frac{9}{12}\Rightarrow 12.x=9.(y+12)\Rightarrow \text{(depende do valor de y para calcular o de x)}$$

$$b_2)\ \frac{y}{(x-9)}=\frac{12}{9}\Rightarrow 9.y=12.(x-9)\Rightarrow \text{(depende do valor de y para calcular o valor de x).}$$

c - do ponto de vista – dilatação (ou por semelhança de triângulos):

Pensando sob esse ponto de vista, conseguimos determinar o valor de **y**, a seguir, utilizando o valor de y, calculamos o valor de **x.** Vejamos:

$$\frac{5}{6}=\frac{y}{12}\Rightarrow 6.y=60\Rightarrow y=10 \text{ ou resolver}: \frac{5}{6}=\frac{x-9}{9}=\frac{y}{12}.$$

Se quisermos, achar **x**, podemos substituir o valor encontrado para **y** nas relações acima.

$$12.x=9.(10+12)\Rightarrow 12.x=9.22\Rightarrow 12.x=198\Rightarrow x=16{,}5 \text{ ou}$$

$$9.y=12.(x-9)\Rightarrow 12.x-12.9=9.10\Rightarrow 12.x=90+108\Rightarrow x=16{,}5$$

Análise Didática –

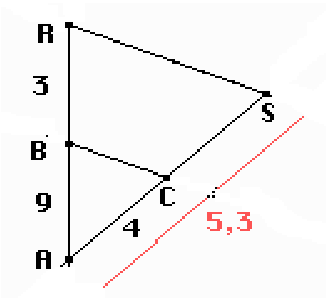
Além de todas as dificuldades que os alunos poderão encontrar citadas em linhas gerais no início dessa análise, acrescentamos as seguintes :

- determinação do valor de **y** nas configurações **a** e **b**, primeiro devido a sobreposição dos triângulos, o que dificulta a visualização desses, segundo, que esse cálculo está restrito ao ponto de vista da dilatação;
- determinação de **x** e **y** na configuração **c**, pelo fato que para calcularmos o valor de **x** dependemos do valor de **y.** Para calcularmos **y** só é possível pensando no ponto de vista da dilatação sem contar que nessa configuração a apreensão perceptiva dos dois triângulos é favorecida porém, a apreensão operatória não é tão simples, devido a não-congruência entre a ordem dos elementos para se montar corretamente a proporção e a ordem dos elementos segundo o processo visual da leitura (sempre no mesmo sentido de cima para baixo ou da esquerda para a direita).

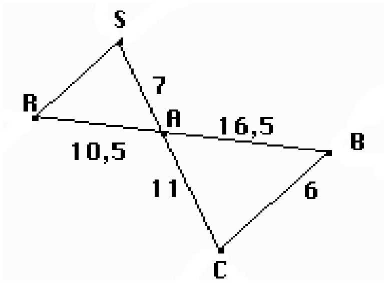
Questão 3

Nos casos seguintes as retas ***RS*** e ***BC*** são paralelas? Justifique sua resposta.

a)



b)



Objetivo: verificar se o aluno associa a condição de as retas serem paralelas com o teorema de Thales.

Análise Matemática - soluções possíveis:

Questão 3a

a) do ponto de vista – conservação das abscissas:

$$\frac{4}{5,3} = \frac{9}{12} \Rightarrow 4.12 = 9.\ 5,3;\ \text{como } 48 \neq 47,7 \Rightarrow \text{não são paralelas}$$

$$\frac{4}{1,3} = \frac{9}{3} \Rightarrow 3\ .\ 4 = 9.\ 1,3;\ \text{como } 12 \neq 11,7 \Rightarrow \text{não são paralelas}$$

b) do ponto de vista – conservação da relação de projeção:

$$\frac{4}{9} = \frac{5,3}{12} \Rightarrow 4.\ 12 = 9.\ 5,3 \text{ como } 48 \neq 47,7 \Rightarrow \text{não são paralelas ou}$$

$$\frac{4}{9} = \frac{1,3}{3} \Rightarrow 3.\ 4 = 9.\ 1,3;\ \text{como } 12 \neq 11,7 \Rightarrow \text{não são paralelas}$$

Questão 3b

a) do ponto de vista – conservação das abscissas:

$$\frac{7}{11} = \frac{10,5}{16,5} \Rightarrow 7.\ 16,5 = 11.\ 10,5;\ \text{como } 115,5 = 115,5 \Rightarrow \text{são paralelas}$$

$$\frac{7}{18} = \frac{10,5}{27} \Rightarrow 7.\ 27 = 18.\ 10,5;\ \text{como } 189 = 189 \Rightarrow \text{são paralelas}$$

b) do ponto de vista – conservação da relação de projeção:

$$\frac{7}{10,5} = \frac{11}{16,5} \Rightarrow 7.16,5 = 11.10,5;\ \text{como } 115,5 = 115,5 \Rightarrow \text{são paralelas ou podemos}$$

montar a proporcão considerando os segmentos SC e RB, obtendo :

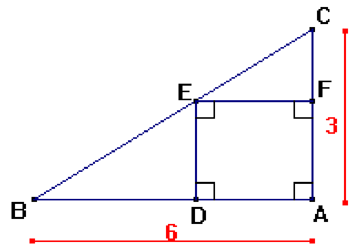
$$\frac{7}{10,5} = \frac{18}{27} \Rightarrow 7.27 = 18.10,5;\ \text{como } 189 = 189 \Rightarrow \text{são paralelas}$$

Análise Didática:

Além de todas as dificuldades já citadas inicialmente, acreditamos que o não sucesso na resolução dessa questão poderá estar relacionado a não associar as paralelas com o recíproco do teorema de Thales e também no fato do aluno se ater apenas na apreensão perceptiva para responder, não realizando a apreensão operatória. Nos livros didáticos não se observam atividades envolvendo o recíproco do teorema de Thales nem atividades que explorem a reversibilidade. Esse fato faz com que nessa questão muitos alunos nem pensem no teorema de Thales para resolvê-la.

Questão 4

O quadrilátero *ADEF* é um quadrado? Justifique.



Objetivo: verificar se o aluno sabe aplicar o teorema de Thales em problemas não tradicionais. Verificar se ele percebe que, como os lados ***AF*** e ***DE*** são paralelos e todos os lados de um quadrado são congruentes, pela aplicação do teorema de Thales ele poderá comprovar que a figura é um quadrado.

Análise Matemática - soluções possíveis:

Para *ADEF* ser um quadrado, $EF = FA = DA = DE = 2$, como $\overline{AF} // \overline{DE}$ e $\overline{DA} // \overline{EF}$ podemos aplicar o teorema de Thales para verificar a medida do lado DE,

$$\frac{DE}{3} = \frac{4}{6} \Rightarrow 6.DE = 3.4 \Rightarrow DE = 2$$

Como $DE = 2 \Rightarrow AF = 2$, sendo $AD = 2 \Rightarrow EF = 2$, logo é um quadrado.

Análise Didática – dificuldades que o aluno poderá encontrar:

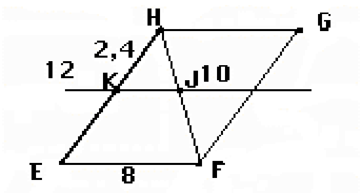
- interpretação da questão;
- deixar se iludir pela apreensão perceptiva, não percebendo a necessidade de calcular a medida do lado $\overline{DE}$ para confirmar se é um quadrado;
- não recordar as propriedades de um quadrado;
- aplicação da propriedade recíproca do teorema de Thales;
- em justificar a resposta dada;
- não-congruência entre enunciado e o tratamento próprio de resolução.

Questão 5

Traçar um paralelogramo *EFGH*, tal que ***EF*** = 8 cm, ***EH*** = 12 cm e ***FH*** = 10 cm. Seja **K** o ponto do segmento $\overline{EH}$ tal que ***HK*** = 2,4 cm e **J** o ponto de intersecção de $\overline{FH}$ e da paralela a $\overline{GH}$ passando por **K**. Calcular ***HJ*** e ***JK***.

Objetivo: verificar se o aluno sabe aplicar o teorema de Thales em problemas não tradicionais e se ele consegue montar um esquema a partir do enunciado.

Análise Matemática - soluções possíveis:



Cálculo de ***HJ***:

a) do ponto de vista – conservação das abscissas:

a1) $\dfrac{2{,}4}{12} = \dfrac{HJ}{10} \Rightarrow 12.\,\mathrm{HJ} = 24 \Rightarrow HJ = 2$ ou

a2) $\dfrac{2{,}4}{9{,}6} = \dfrac{HJ}{(10 - HJ)} \Rightarrow 9{,}6.\,\mathrm{HJ} = 2{,}4.(10 - HJ) \Rightarrow 9{,}6.HJ = 24 - 2{,}4.HJ \Rightarrow HJ = 2$

b) do ponto de vista – conservação da relação de projeção:

b1) $\dfrac{2{,}4}{\mathrm{HJ}} = \dfrac{12}{10} \Rightarrow 12.HJ = 24 \Rightarrow HJ = 2$ ou

b2) $\dfrac{2{,}4}{\mathrm{HJ}} = \dfrac{9{,}6}{(10 - HJ)} \Rightarrow 9{,}6.HJ = 2{,}4.(10 - HJ) \Rightarrow 9{,}6.HJ = 24 - 2{,}4.HJ \Rightarrow HJ = 2$

c) do ponto de vista – dilatação:

Para calcularmos a medida do segmento ***HJ*** sob esse ponto de vista iremos obter a mesma relação **“a_1”** descrita acima na conservação das abscissas.

cálculo de *KJ*:

Para calcularmos a medida do segmento ***KJ*** devemos pensar no ponto de vista da dilatação. Vejamos:

$\dfrac{JK}{8} = \dfrac{2{,}4}{12} \Rightarrow 12.JK = 8\,.\,2{,}4 \Rightarrow 12\,.\,\mathrm{JK} = 19{,}2 \Rightarrow JK = 1{,}6$ ou

$\dfrac{\mathrm{JK}}{8} = \dfrac{2}{10} \Rightarrow 10\,.\,\mathrm{JK} = 16 \Rightarrow JK = 1{,}6.$

Análise Didática – dificuldades que o aluno poderá encontrar:

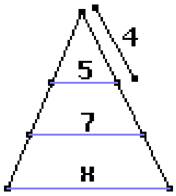
- interpretação da questão;
- não lembrar o que é um paralelogramo e suas propriedades;
- esboçar a figura com os dados do problema;
- não visualização da aplicação do teorema de Thales;
- não-congruência entre enunciado e o tratamento próprio de resolução.

Questão 6

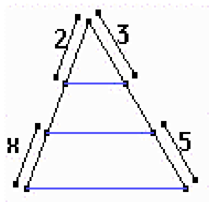
Pode-se calcular **x** com os dados geométricos propostos? Justifique.

(Considere as linhas azuis paralelas)

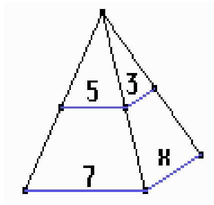
a)



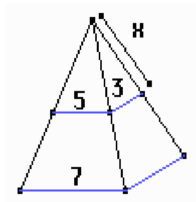
b)



c)



d)



Objetivo: aplicar o teorema de Thales para verificar se é possível calcular o valor de **x** em esquemas que envolvam mais de duas paralelas (item **a** e **b**) ou em esquemas onde o aluno deverá pensar no teorema de Thales do ponto de vista dilatação (itens **c** e **d**).

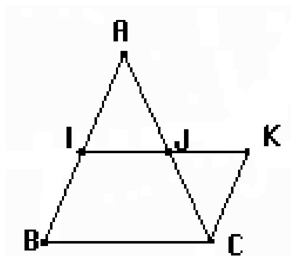
Análise Matemática – soluções possíveis:

6a) não é possível, pois, como a incógnita é a medida de um dos segmentos formados nas paralelas para determinar este valor é necessário conhecer dois valores nas transversais e só é fornecido um (4).
6b) sim, é possível montar uma proporção com os dados do problema aplicando o teorema de Thales tanto sobre o aspecto projeção quanto pela conservação das abscissas.
6c) sim, é possível montar uma proporção com os dados do problema aplicando o teorema de Thales sobre o aspecto dilatação.
6d) não é possível, porque é impossível montar uma proporção com os dados do esquema, pois, falta uma das dimensões da transversal que contém a incógnita **x**.

Análise Didática – dificuldades que o aluno poderá encontrar:
- montagem das proporções;
- não visualização da aplicação do teorema de Thales;
- não saber justificar.

Questão 7

ABC é um triângulo.
- **I** é o ponto médio de $\overline{AB}$;
- A paralela a $\overline{BC}$ passa por **I** e a paralela a $\overline{AB}$ passa por **C** e se cortam em **K**;
- A reta $\overline{IK}$ corta $\overline{AC}$ em **J**.
  O que se pode dizer de **J**? Prove a resposta.



Objetivo: verificar a concepção do aluno para resolver este problema, não tradicional, observando se ele aplica o teorema de Thales e se sabe justificar geometricamente a solução encontrada.

Análise Matemática – soluções possíveis:

a) Os triângulos ***AIJ*** e ***ABC*** são semelhantes por possuir os três ângulos congruentes, assim sendo, como $AB = 2.\ AI$, isso implica que $BC = 2\ IJ$. Sendo $\overline{IK} // \overline{BC}$ e

$\overline{CK}$ // $\overline{AB}$ a figura ***IKCB*** é um paralelogramo e $IK = BC \Rightarrow IK = 2.\ IJ \Rightarrow JK = IJ \Rightarrow$ **J** é ponto médio.

b) Aplicando Thales, temos que se $AI = IB \Rightarrow AJ = JC$ e **J** é ponto médio de $\overline{AC}$.

Análise Didática – dificuldades que o aluno poderá encontrar:

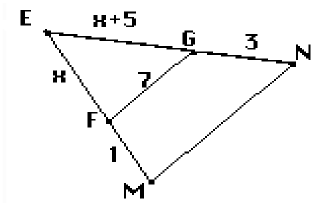
- montagem da proporção por não perceber a aplicação do teorema de Thales;
- não estar habituado com atividades que envolvam prova ou demonstrações;
- não-congruência entre enunciado e o tratamento próprio de resolução.

Questão 8

A unidade é o centímetro. No desenho abaixo, ***EFG*** é um triângulo, tal que: *FG*=7 cm e $\overline{EG}$ mede 5 cm a mais que $\overline{EF}$, considera-se *EF* = **x**.

Quando prolonga-se $\overline{EF}$ com 1cm a mais, obtém-se **M**; quando prolonga-se *EG*=3 cm a mais, obtém-se **N** e as retas *FG* e *MN* são paralelas.

O triângulo ***EFG*** é retângulo? Justifique.



Objetivo: verificar a concepção do aluno ao resolver esse problema, observando se ele aplica o teorema de Thales e se sabe justificar a solução encontrada.

Análise Matemática – soluções possíveis:

Primeiramente o aluno deverá encontrar o valor de **x** para obter os lados do triângulo ***EFG*** aplicando o teorema de Thales, em seguida, deverá verificar se o triângulo é retângulo ou não, utilizando o teorema de Pitágoras.

Para encontrar o valor de **x** poderá resolver:

a) do ponto de vista – conservação das abscissas:

a1) $\frac{x}{1} = \frac{x+5}{3} \Rightarrow 3.x = x+5 \Rightarrow 3.x - x = 5 \Rightarrow x = 2{,}5$ cm ou

a2) $\frac{x}{x+1} = \frac{x+5}{x+8} \Rightarrow x.(x+8) = (x+1).(x+5) \Rightarrow x^2 + 8.x = x^2 + 6.x + 5 \Rightarrow x = 2{,}5cm$

c) do ponto de vista – conservação da relação de projeção:

$\frac{x}{x+5} = \frac{1}{3} \Rightarrow x + 5 = 3.x \Rightarrow x = 2{,}5$ ou $\frac{x+5}{x} = \frac{3}{1} \Rightarrow x + 5 = 3.x \Rightarrow x = 2{,}5cm$

Se x = 2,5 então os lados do triângulo são 2,5; 7 e 7,5, verificando o teorema de Pitágoras temos: $(7{,}5)^2 = (2{,}5)^2 + 7^2 \Rightarrow 56{,}25 \neq 6{,}25 + 49 = 55{,}25 \Rightarrow$ o triângulo não é retângulo.

Análise didática - dificuldades que o aluno poderá encontrar:

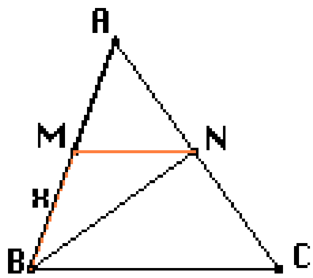
- não perceber a necessidade de calcular o valor de **x** e de aplicar o teorema de Pitágoras na verificação se o triângulo em questão é retângulo ou não, pelo fato, de se ater apenas na apreensão perceptiva;
- aplicação do teorema de Pitágoras;
- dar a resposta sem fazer nenhum, cálculo, só observando a figura;
- justificar a solução encontrada;
- não-congruência entre enunciado e o tratamento próprio de resolução.

Questão 9

ABC é um triângulo tal que $AB = 4$, $AC = 7$ e $BC = 6$. **M** é um ponto do segmento $\overline{AB}$, ele se projeta em **N** sobre $\overline{AC}$ paralelamente á $\overline{BC}$.

1°) Põem-se ***BM***= **x**. Onde deve-se colocar **M** para que o triângulo *BMN* seja um triângulo isósceles em **M**?

2º) Nesse caso o que representa a reta *BN* no triângulo *ABC*? Justifique.



Objetivo: aplicar o teorema de Thales para calcular o valor de **x** em esquemas em que o aluno deverá pensar sob o ponto de vista da dilatação.

Análise matemática – soluções possíveis:

Primeiro deve-se calcular **x** aplicando o teorema de Thales sob o aspecto da dilatação, assim:

$$\frac{4-x}{4} = \frac{x}{6} \Rightarrow 6.(4-x) = 4.x \Rightarrow 24 - 6.x = 4.x \Rightarrow x = 2{,}4cm$$

Logo, **M** deverá estar a 2,4 cm de **B** , ou a 1,6 cm de **A**.

Análise didática

Além de todas as dificuldades já citadas no início, acreditamos que outros fatores em jogo nessa questão estão relacionados com a interpretação do problema e também no fato do aluno não perceber que $\overline{BM}$ e $\overline{MN}$ são congruentes, por *BMN*, ser um triângulo isósceles em **M**. Outro fator é a não-congruência entre enunciado e o tratamento próprio de resolução.

2.5.2 – Análise a posteriori do teste

Após aplicação do teste diagnóstico com os alunos da E.T.E. Getúlio Vargas citado na análise anterior fizemos a análise dos resultados desse teste em relação às primeiras 5 questões. Esse teste foi aplicado em 31 alunos, com idades entre 14 e 17 anos, sendo que 23% com 14 anos, 71% com 15 anos e 3% com 16 ou 17 anos, oriundos de escolas particulares (58%), estaduais (23%) e municipais (19%).

Através do auxílio da estatística descritiva, fizemos essa análise procurando utilizar a interpretação de tabelas e gráficos.

Em todas as tabelas e gráficos desta análise as questões foram subdivididas conforme a tabela 6 abaixo para facilitar a interpretação e análise.

Tabela 6

Questão	**Objetivo**
1A	Cálculo de x - questão 1A- paralelas verticais -
1B	Cálculo de IJ - questão 1B- paralelas verticais -
X2A	Cálculo de x - questão 2A- paralelas horizontais -
Y2A	Cálculo de y - questão 2A- paralelas horizontais -
X2B	Cálculo de x - questão 2B- paralelas inclinadas -
Y2B	Cálculo de y - questão 2B- paralelas inclinadas -
X2C	Cálculo de x - questão 2C- transversais interceptam entre as paralelas
Y2C	Cálculo de y - questão 2C- transversais interceptam entre as paralelas
3A	Verificar se as retas são paralelas – triângulos sobrepostos-
3B	Verificar se as retas são paralelas – triângulos opostos pelo vértice -
4	Verificar se o quadrilátero é um quadrado
5	Problema escrito - sem esquema -

A tabela 7, indica o número de acertos por questão (freqüência absoluta) e a razão entre o número de acertos e o total de alunos (freqüência relativa e freqüência relativa em porcentagem).

Tabela 7: freqüência de acerto por questão

	ACERTOS		
Questões	Freqüência Absoluta	Freqüência Relativa	Freqüência Relativa %
1A	18	0,58	58
1B	12	0,39	39
X2A	24	0,77	77
Y2A	10	0,32	32
X2B	16	0,51	51
Y2B	9	0,29	29
X2C	4	0,13	13
Y2C	7	0,22	22
3A	12	0,39	39
3B	9	0,29	29
4	6	0,19	19
5	0	0	0

Histograma de Acertos

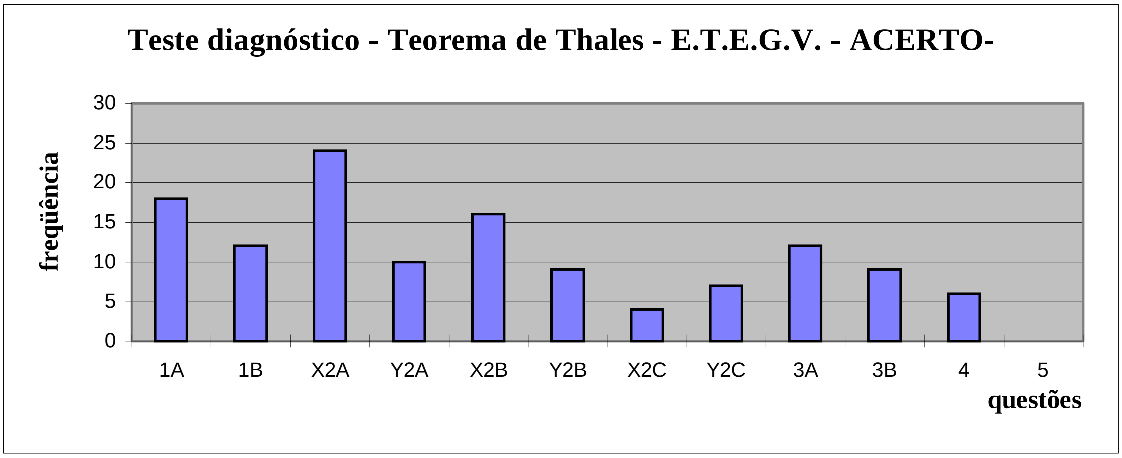


Gráfico 1: histograma de acerto - teste diagnóstico

Podemos observar, pelos resultados, que a maioria das questões teve menos de 50% de acerto. Dos 12 itens analisados apenas 3 tiveram um número de acertos superior a 50 %.

A questão que teve maior número de acerto foi o cálculo de **x** na questão **2A** (77%, 24 acertos), em que as paralelas estão na posição horizontal, as medidas dos segmentos dados são correspondentes e pode ser resolvida por qualquer uma das estratégias citadas na análise a priori (pontos de vista abordados por Guy Brousseau). Com 18 acertos (58%) tem-se a questão **1A**, em que as paralelas estão na posição vertical, as medidas dos segmentos dados não são correspondentes (o que gerou alguns erros) e pode ser resolvida por qualquer uma das estratégias citadas. Depois com 16 acertos (51%) vem o cálculo de **x** na questão **2B** em que as paralelas estão na posição inclinada, as medidas dos segmentos dados são correspondentes e pode ser resolvida por qualquer uma das estratégias citadas.

Podemos observar, nos resultados, que o menor número de acertos (zero) aparece na questão **5**, na qual notamos a dificuldade dos alunos em interpretar e montar um esquema para resolver problemas em que não é fornecido o desenho.

Na questão **2C**, percebemos a dificuldade do aluno em calcular o termo desconhecido quando as transversais se interceptam entre as paralelas. Nesta questão o número de acertos foi bem reduzido (13% para o cálculo de **x** eqüivalendo a 4 acertos e 22% para o cálculo de **y** equivalendo a 7 acertos).

Na questão **4**, com apenas 6 acertos (19%), percebemos que a maioria dos alunos parece ter dificuldade em perceber a aplicação do teorema de Thales em situações diferentes das apresentadas nos livros didáticos.

Em síntese, os três itens de maior acerto referem-se a questões em que as configurações são fornecidas. Nessas configurações os triângulos estão sobrepostos e as paralelas nas posições horizontal, vertical e inclinada nessa ordem (ordem decrescente quanto ao número de acertos). Esses itens referem-se ao cálculo da medida do segmento formado nas transversais.

A tabela abaixo, indica o número de erros por questão (freqüência absoluta) e a razão entre o número de erros e o total de alunos (freqüência relativa e freqüência relativa em porcentagem).

Tabela 8: freqüência de erro por questão

	ERROS		
Questões	Freqüência Absoluta	Freqüência Relativa	Freqüência Relativa %
1A	8	0,26	26
1B	10	0,32	32
X2A	3	0,1	10
Y2A	10	0,32	32
X2B	8	0,26	26
Y2B	6	0,19	19
X2C	7	0,22	22
Y2C	4	0,13	13
3A	10	0,32	32
3B	9	0,29	29
4	17	0,55	55
5	4	0,13	13

Histograma dos Erros

Analisando o histograma dos erros, percebemos que só na questão **4** o número de erros é superior a 50%. Nesta questão percebe-se que a dificuldade do aluno foi justificar corretamente a resposta, a maioria não percebeu a aplicação do teorema de Thales nem da semelhança de triângulos para justificar a resposta.

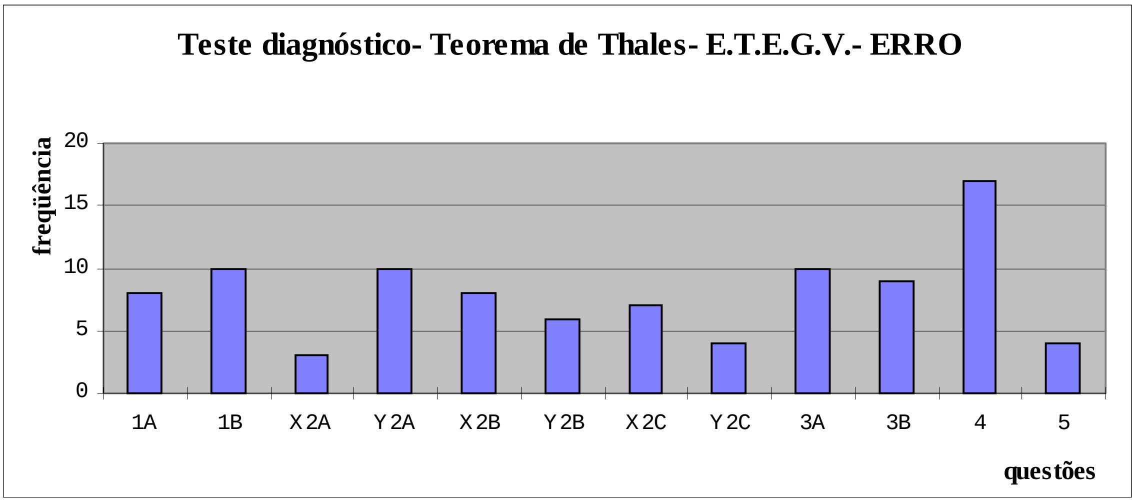


Gráfico 2: histograma dos erros - teste diagnóstico

Na questão **3A** e **3B** com 32% e 29% de erros a dificuldade foi perceber a aplicação do teorema de Thales para verificar se as retas são paralelas. Este tipo de questão quase não é abordado nos livros didáticos e nem trabalhado pelo professor em sala de aula, o que faz com que a concepção do teorema de Thales seja um pouco limitada.

Nos itens **1B** e **Y2A** com 32% de erro, nota-se a dificuldade do aluno em montar a proporção sob o ponto de vista dilatação. A mesma dificuldade é encontrada na questão **Y2B** com 19% de erro. Nesses itens o aluno deveria ter calculado a medida do segmento formado na paralela.

Na questão **1A** embora o número de erros (26%) tivesse sido pequeno em relação as outras questões, percebemos um fato comum entre a maioria dos alunos que foi a aplicação do teorema de Pitágoras indevidamente. Erro esse ocasionado pela má interpretação da figura em considerar a reta transversal ***IR*** perpendicular às retas paralelas ***IJ*** e ***ST*** iludidos pela evidência perceptiva (aparência da figura).

A tabela abaixo, indica o número de questões em branco (freqüência absoluta) e a razão entre o número de questões em branco e o total de alunos (freqüência relativa e freqüência relativa em porcentagem).

Tabela 9 freqüência de questões em branco

	NÃO FEZ		
Questões	Freqüência Absoluta	Freqüência Relativa	Freqüência Relativa °/°
1A	5	0,16	16
1B	9	0,29	29
X2A	4	0,13	13
Y2A	11	0,36	36
X2B	7	0,23	23

Y2B	16	0,52	52
X2C	20	0,65	65
Y2C	20	0,65	65
3A	9	0,29	29
3B	13	0,42	42
4	8	0,26	26
5	27	0,87	87

Histograma das Questões em Branco

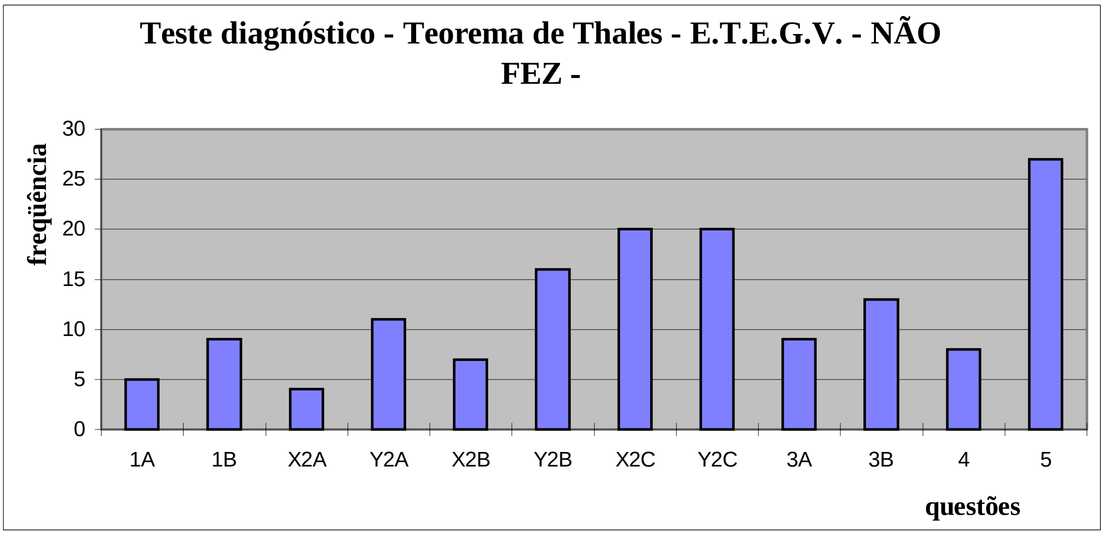


Gráfico 3: histograma de questões em branco - teste diagnóstico

Quanto às questões em branco percebe-se que em quatro itens a porcentagem de não ter feito está superior a 50%.

A maioria dos alunos deixou sem fazer a questão de número **5** (87%), a qual envolvia interpretação e representação, além da aplicação do teorema de Thales. Nesta questão os poucos alunos que tentaram fazer, apresentaram muita dificuldade para montar o esquema das paralelas.

Com 65% de questões em branco vem os itens **X2C** e **Y2C**; neste itens percebe-se as retas transversais se interceptando entre as paralelas, que é um dos obstáculos didáticos levantados na análise a priori e na análise dos livros didáticos.

Com 52% de questões em branco temos o item **Y2B**, que envolve o cálculo do segmento formado nas paralelas em posição inclinada e o valor desconhecido está no meio de uma expressão.

Depois com 36% em branco vemos o item **Y2A** que também envolve o cálculo das paralelas, porém, na posição horizontal.

As questões que a minoria dos alunos deixaram em branco foram as questões **1A** com 16% e a **X2A** com 13% apenas sem fazer. Estas duas questões foram as que mais acerto tiveram pelos alunos.

Tabela10: Sumário das porcentagens de acerto, erro e itens não feitos

	ACERTO		ERRO		NÃO FEZ	
Questões	Freqüência Absoluta	Freqüência. Relativa °/°	Freqüência Absoluta	Freqüência Relativa °/°	Freqüência Absoluta	Freqüência Relativa °/°
1A	18	58	8	26	5	16
1B	12	39	10	32	9	29
X2A	24	77	3	10	4	13
Y2A	10	32	10	32	11	36
X2B	16	51	8	26	7	23
Y2B	9	29	6	19	16	52
X2C	4	13	7	22	20	65
Y2C	7	22	4	13	20	65
3A	12	39	10	32	9	29
3B	9	29	9	29	13	42
4	6	19	17	55	8	26
5	0	0	4	13	27	87

Comparando as questões notamos que:

a) em relação à posição das paralelas, o maior número de acertos foi na questão em que as paralelas estavam na posição horizontal, depois na vertical e por último na inclinada, isto em relação ao cálculo de **x** . Na análise dos livros didáticos, constatamos que a maioria dos exercícios, tanto dados como exemplo quanto para serem resolvidos pelos alunos, também estão na posição horizontal;

b) em relação aos valores de **x** e de **y**, na maioria das questões os alunos acertaram mais os itens para calcular o valor de **x** (nos quais poderiam ter resolvido por qualquer uma das estratégias citadas na análise a priori - pontos de vista abordados por Guy Brousseau) do que o cálculo de **y** que envolvia o recíproco do teorema de Thales e o aspecto dilatação (semelhança e homotetia), assuntos que não são muito explorados nos livros didáticos segundo análise anterior. O cálculo de **x** refere-se na determinação da medida do segmento formado nas transversais e o cálculo de **y** a medida dos segmentos formados nas paralelas;

c) com relação à intersecção das retas transversais entre as paralelas percebe-se bem a dificuldade relacionada ao fenômeno da tipicalidade na questão **2C**, em que a maioria dos alunos não fez ou errou;

d) quanto aos problemas de aplicação, nota-se que no problema **4** em que foi fornecido o esquema a maioria errou e não aplicou Thales para resolver ou justificar, já na questão

5 em que não foi dado o esquema a maioria não fez, ninguém acertou e a minoria montou o esquema.

Nossa hipótese é que todas essas dificuldades levantadas podem ter sido provocadas pela pouca ênfase apresentada nos livros didáticos: a variação da posição das paralelas, ao cálculo do segmento formado na paralela, a configuração dos triângulos opostos pelo vértice, a problemas de aplicação sem fornecer o esquema.

Quanto às estratégias utilizadas pelos alunos na resolução das questões observou-se que 71% dos alunos resolveram sob o ponto de vista conservação das abscissas, 35% sob o ponto de vista conservação de projeção e 51% sob o aspecto da dilatação (embora alguns dentre esses tenham errado a montagem da proporção).

Histograma Comparativo

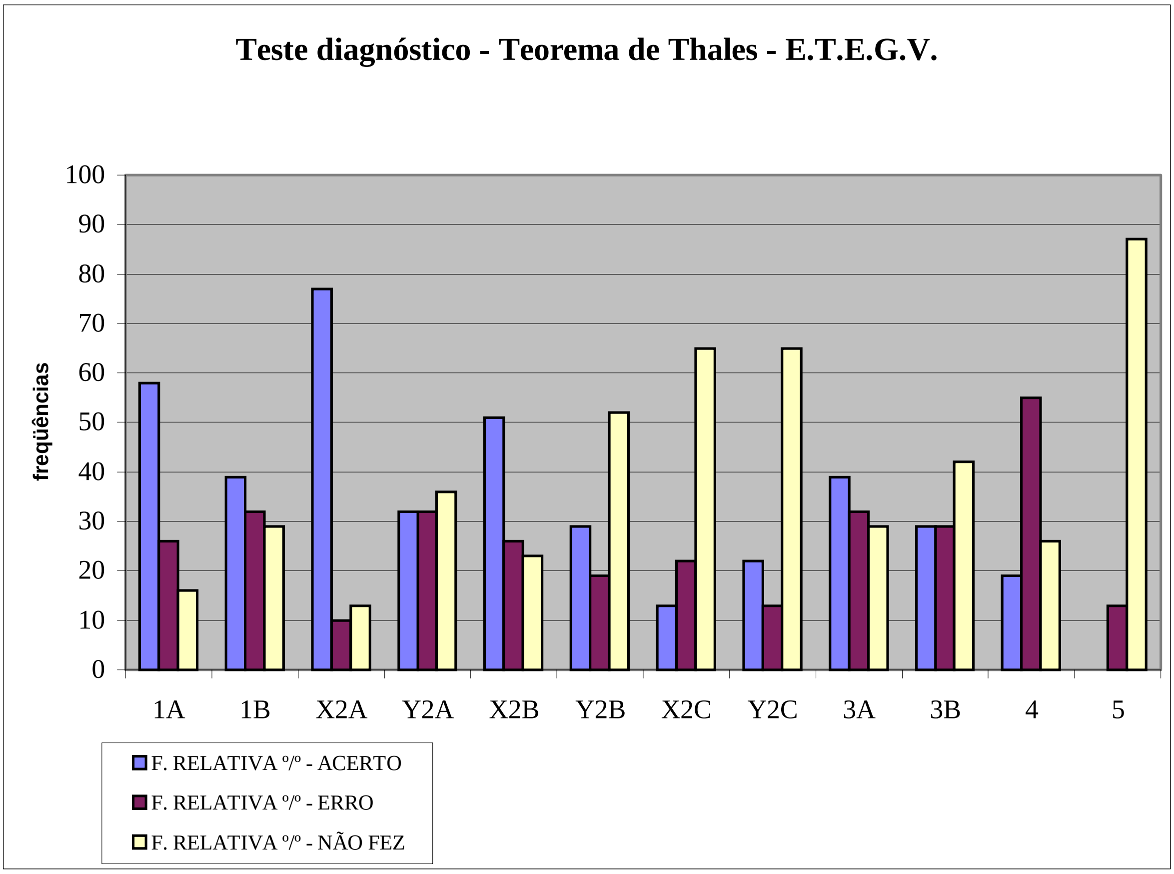


Gráfico 4: histograma comparativo por questão

Tabela de Dados - Análise Hierárquica de Similaridade e Implicação

A **Tabela 11**, apresentada no anexo 5 representa a matriz de dados binários (1 ou 0) relativa a codificação do teste aplicado na E.T.E. Getúlio Vargas, incluindo as variáveis e os 31 alunos.

A análise de dados multidimensionais é feita sobre variáveis binárias (1 ou 0). O valor **1** está sendo utilizado para indicar a presença do atributo em questão e o valor **0** indica a ausência do atributo.

Os dados da pesquisa serão analisados utilizando o software CHIC (Classificação Hierárquica, Implicativa e Coesitiva), desenvolvido pelo núcleo de pesquisa em didática da matemática da Universidade de Rennes 1- França (Saddo,1997, p.176 a 209). Faremos uma análise de similaridade, de implicação entre variáveis e de implicação por grupo. Apresentaremos abaixo as variáveis estatísticas e seus respectivos códigos que serão utilizados em todas as análises.

CÓDIGO / VARIÁVEL:

1 AT1A (acertou cálculo de x na questão 1A - paralelas verticais)
2 EM1A (errou montagem para o cálculo de x na questão 1A- paralela vertical)
3 ET1A (errou absurdamente o cálculo de x na questão 1A- paralela vertical)
4 NF1A (não fez o cálculo de x na questão 1A- paralela vertical)
5 AT1B (acertou cálculo de y na questão 1B- paralelas verticais)
6 EM1B (errou montagem para o cálculo de y na questão 1B- paralelas verticais)
7 ET1B (errou cálculo de y na questão 1B- paralelas verticais)
8 NF1B (não fez o cálculo de y na questão 1B- paralelas verticais)
9 AX2A (acertou cálculo de x na questão 2A- paralelas horizontais)
10 EX2A (errou cálculo de x na questão 2A- paralelas horizontais.)
11 NX2A (não fez cálculo de x na questão 2A- paralelas horizontais)
12 AY2A (acertou cálculo de y na questão 2A- paralelas horizontais)
13 EY2A (errou cálculo de y na questão 2A- paralelas horizontais)
14 NY2A (não fez cálculo de y na questão 2A- paralelas horizontais)
15 AX2B (acertou cálculo de x na questão 2B- paralelas inclinadas)
16 EX2B (errou cálculo de x na questão 2B- paralelas inclinadas)
17 EC2B (errou conta no cálculo de x na questão 2B- paralelas inclinadas)
18 NX2B (não fez cálculo de x na questão 2B- paralelas inclinadas)
19 AY2B (acertou cálculo de y na questão 2B- paralelas inclinadas)
20 EY2B (errou cálculo de y na questão 2B- paralelas inclinadas)
21 NY2B (não fez cálculo de y na questão 2B- paralelas inclinadas)
22 AX2C (acertou cálculo de x na questão 2C- transversais se interceptam)
23 EX2C (errou cálculo de x na questão 2C- transversais se interceptam)
24 MX2C (errou montagem para o cálculo de x na questão 2C- t. i.)
25 NX2C (não fez cálculo de x na questão 2C- transversais se interceptam)
26 AY2C (acertou cálculo de y na questão 2C- transversais se interceptam)
27 EY2C (errou cálculo de y na questão 2C- transversais se interceptam)
28 MY2C (errou montagem para o cálculo de y na questão 2C - t. i.)

29 NY2C (não fez cálculo de y na questão 2C - transversais se interceptam)
30 AT3A (aplicou Thales e acertou a questão 3A- verificação retas paralelas)
31 ET3A (aplicou Thales e errou a questão 3A - verificação retas paralelas)
32 EQ3A (errou absurdamente a questão 3A - verificação retas paralelas)
33 NF3A (não fez a questão 3A - verificação retas paralelas)
34 AT3B (aplicou Thales e acertou a questão 3B - verificação retas paralelas)
35 ET3B (aplicou Thales e errou a questão 3B - verificação retas paralelas)
36 EQ3B (errou questão 3B verificação retas paralelas)
37 NF3B (não fez a questão 3B - verificação retas paralelas)
38 ATQ4 (aplicou Thales e acertou a questão 4 - V. figura é um quadrado?)
39 ETQ4 (errou a questão 4 - quadrado)
40 NFQ4 (não fez a questão 4 - quadrado)
41 NJC4 (não justificou corretamente a questão 4 - quadrado)
42 ATQ5 (acertou a questão 5 - situação-problema)
43 MCD5 (montou corretamente a figura - mas errou a questão 5)
44 ETQ5 (errou a questão 5)
45 NFQ5 (não fez a questão 5)

Análise Hierárquica de Similaridade

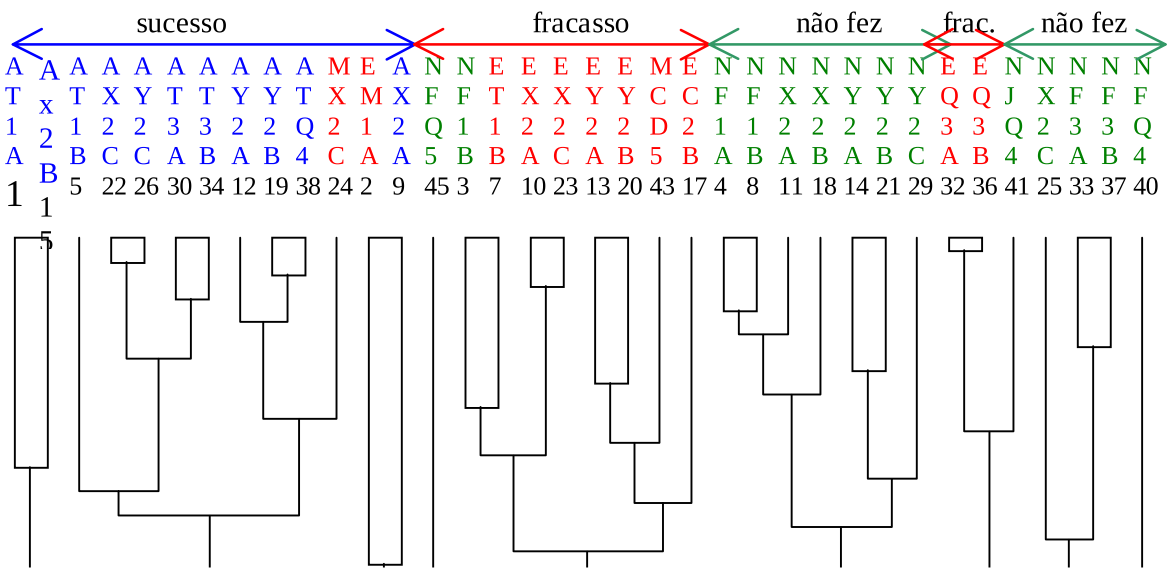


Figura 48 – Árvore de Similaridade

Por meio da análise hierárquica de similaridade, podemos estudar e depois interpretar em termos de tipologia e de semelhança (dessemelhança) decrescente, classes de variáveis, constituídas significativamente em certos níveis da árvore.

A classificação hierárquica (árvore de similaridade) mostra 35 níveis de semelhança. Nos níveis **35** e **34**, a semelhança é muito fraca mostrando a oposição entre as variáveis de sucesso com as do não sucesso e a dessemelhança entre fazer-errar e não-fazer. Observando esses níveis resolvemos agrupá-los em três classes: a classe **1** agrupa os procedimentos ou modalidades conduzindo ao sucesso total; a classe **2** agrupa as modalidades ou procedimentos que conduziram ao fracasso total e a classe **3** agrupa os procedimentos ou modalidades que não foram feitos.

Começaremos a análise pelas variáveis 1, 5, 9, 12, 15, 19, 22, 26, 30, 34 que formam a classe **1**, a qual podemos relacionar com o *sucesso total*.

Nesse grupo a semelhança mais forte encontra-se entre as variáveis **22** e **26** (nível **2**) que estão relacionadas ao acerto do valor de **x** e **y** na questão **2C** em que as retas transversais estão se interceptando entre as paralelas, o que significa que os alunos que possuem essas 2 variáveis apresentaram comportamento semelhante quando resolveram estas duas questões, pois para se determinar o valor de **x** dependemos do valor de **y** (que foi a minoria dos alunos como se pode observar na análise estatística descritiva).

No nível **3** e **7** estão as variáveis 19, 38 e 12 que estão relacionadas ao acerto de **y** na questão **2B**, acerto da questão 4 e acerto de **y** na questão **2A**, o que significa que os alunos que possuem essas 3 variáveis apresentaram provavelmente comportamento semelhante pois, tanto no cálculo de **y** na questão **2B** e **2A** como para verificar e justificar se a figura é um quadrado na questão **4**, o aluno poderia pensar em semelhança de triângulos ou aplicar o recíproco do teorema de Thales que segundo os aspectos levantados por Guy Brousseau estariam relacionados ao ponto de vista da dilatação.

No nível **5** estão as variáveis 30 e 34 que estão relacionadas ao acerto das questões **3A** e **3B** o que significa que os alunos que possuem essas variáveis apresentaram um comportamento semelhante na resolução da questão **3A** e **3B** ou seja, aplicaram o teorema de Thales para verificar se as retas em questão são paralelas.

No nível **10** estão associados as variáveis (22, 26, 30 e 34) analisadas nos níveis **2** e **5**. Os alunos que apresentam estas variáveis provavelmente sabem aplicar o teorema de Thales e o seu recíproco na configuração das transversais se interceptando entre as paralelas.

No nível **19** estão as variáveis 1 e 15 que se referem ao acerto do cálculo de **x** na questão **1A** (paralelas verticais) e **2B** (paralelas inclinadas), o que significa que os alunos que possuem estas variáveis dominam a aplicação do teorema de Thales no cálculo do termo desconhecido tanto sob o ponto de vista conservação de abscissas, quanto pela conservação da relação de projeção independente das paralelas estarem na posição vertical ou inclinada.

No nível **23** estão associadas as variáveis do nível **21** com as do nível **15** o que significa que os alunos que possuem estas variáveis apresentam comportamento dessemelhante quanto a aplicação do teorema de Thales e seu recíproco com as paralelas na posição vertical, horizontal ou inclinada.

No nível **29** estão associados os níveis **19** e **23**.

No nível mais distante estão as variáveis 2 e 9 que se referem ao erro na montagem do cálculo de **x** na questão **1A** e acerto do cálculo de **x** na questão **2A**, estas 2 questões foram as questões que mais acerto tiveram e as que menos os alunos deixaram de fazer, o erro na questão **1A** foi a falta de observar que os valores fornecidos para as transversais não são correspondentes, devendo o aluno para montar a proporção efetuar uma subtração entre os segmentos **JR** e **RT** ou uma adição entre **RS** e **SI** para poder comparar, o que não acontece na questão **2A** em que os termos dados são correspondentes. Associado a estas 2 variáveis está a variável 45 (nível 31), que se refere a não fazer a questão **5**, os alunos que possuem estas variáveis (que foi a maioria) acertaram a questão em que foi dado o esquema e os valores dos segmentos correspondentes, erraram a questão na qual foi dado o esquema mas os valores não eram correspondentes e não fizeram a questão **5** em que não era fornecido o esquema.

Agora, analisaremos as variáveis 3, 7, 10, 23, 13, 20 , 43, 17, 32, 36, 41 que formam a classe **2**, a qual podemos associar ao fracasso total.

Nesse grupo a semelhança mais forte encontra-se entre as variáveis 32 e 36 (1 nível) que estão relacionadas ao erro da questão **3A** e **3B**, na qual, o aluno deveria verificar se as retas dadas através do esquema são paralelas (na questão **3A** as transversais se interceptam no exterior das retas analisadas e na questão **3B** as transversais se interceptam entre as retas supostas paralelas). Isto leva a pensarmos que os alunos que apresentaram estas variáveis, provavelmente, não associaram a aplicação do teorema de Thales para condicionar as retas serem ou não paralelas, independente da posição das transversais.

Associada às variáveis 32 e 36 está a variável 41 (nível 16) em que os alunos que apresentaram esta variável, não souberam justificar na questão **4** que a figura em questão é um quadrado, esta semelhança de comportamentos evidencia a dificuldade dos alunos em aplicar ou seja utilizar o teorema de Thales nestes contextos.

No nível **4**, estão as variáveis 10 e 23 que se referem ao erro do cálculo de **x** nas questões **2A** (paralelas horizontais) e **2C** (transversais se interceptando), o que significa que os alunos que apresentaram estas variáveis não souberam aplicar o teorema de Thales tanto na questão **2A**, em que os dados eram correspondentes, quanto na **2C**, na qual o valor de **x** da transversal **AD** não corresponde aos dados da transversal **BC**, o que implica um grau maior de dificuldade.

No nível **12** estão as variáveis 14 e 21 que se referem ao cálculo de **y** nas questões **2A** e **2B**. A semelhança destas variáveis é que para calcular a medida do segmento formado nas paralelas em qualquer uma das questões, faz-se necessário ter noção de semelhança ou do recíproco do teorema de Thales (aspecto dilatação).

No nível **14** estão as variáveis 3 e 7 que se referem ao erro da questão **1**, tanto para calcular o valor de **x** quanto o de **y**. O erro nesta questão foi provocado devido à posição das paralelas em relação às transversais parecerem ser perpendiculares, levando a maioria dos alunos aplicar indevidamente o Teorema de Pitágoras.

Agora, analisaremos as variáveis 4, 8, 11, 18, 14, 21 , 29, 25, 33, 37, 40 que formam a classe 3, a qual podemos associar aos procedimentos ou modalidades que não foram feitos.

Nesse grupo as variáveis com forte grau de semelhança são a 4 e 8 (nível 6), que se referem a questão **1** onde as paralelas estão na posição vertical; associados a essas temos as variáveis 11 (nível 8) e 18 (nível 13) ambas se referindo ao cálculo do segmento formado nas transversais (questão **2A** e **2B**); a semelhança entre essas variáveis está na estratégia de resolução em que o alunos poderiam ter resolvido essas questões por qualquer um dos pontos de vista independente da posição das paralelas.

No nível **11** estão as variáveis 14 e 2; associados a essas temos a variável 29 (nível 20), todas se referindo ao cálculo de y nas questões **2A**, **2B** e **2C** respectivamente, em que percebemos a semelhança entre estas questões na estratégia de resolução (aspecto dilatação) e a dessemelhança da variável 29, relacionada a dificuldade gerada pela configuração em que as transversais se interceptam entre as paralelas.

No nível 9 temos as variáveis 33 e 37 que se referem as questões **3A** e **3B** (verificação de retas paralelas), em que provavelmente os alunos devam ter deixado sem fazer por se tratar de algo não habitual.

Análise Estatística Implicativa

Buscamos pela análise implicativa as estruturas implicativas no seguinte sentido: tal comportamento **a** está acompanhado, de modo conseqüente ou não, de tal comportamento **b**, quer dizer, a maioria dos alunos que tem a modalidade **a** tem também a modalidade **b**. Esta expressão é semelhante à implicação $\mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{b}$ ou à inclusão do conjunto daquelas que têm **a** no conjunto daquelas que têm **b**.

Analisando da mesma maneira todas as duplas (a,b), tais que $n_a < n_b$ (n_a é o número de ocorrências do item **a** e n_b é o número de ocorrências do item **b**), associamos os quantificadores sobre um caminho de modalidades de respostas $a_1, a_2, ..., a_k$.

Com a análise estatística implicativa, podemos estudar a implicação em variáveis binárias (que é o que nós estamos considerando), entre variáveis não binárias (freqüências) ou entre classes de variáveis de qualquer natureza.

O gráfico 5 apresentado na página seguinte, fornecido pelo programa **CHIC** permite uma análise implicativa das variáveis, duas a duas. Neste gráfico, os valores indicam o grau de implicação entre variáveis; o símbolo **a** $\hookrightarrow$ **b** foi utilizado para designar que a variável **a** não implica na variável **b** .

Neste gráfico podemos ressaltar três grupos.

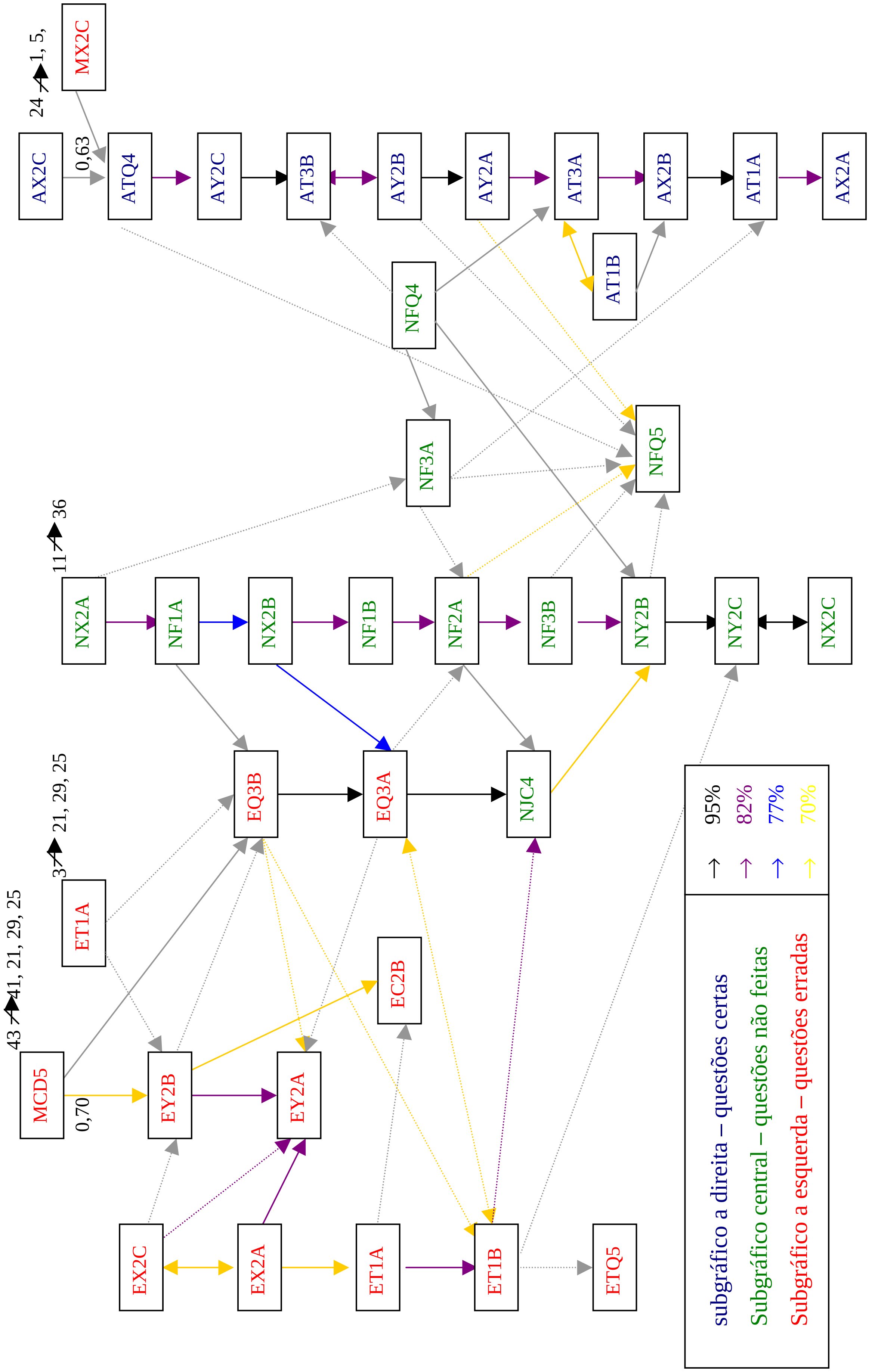
O primeiro (subgráfico à direita) é constituído de comportamentos que levaram ao acerto das questões, o qual podemos verificar pelas variáveis: 22, 38, 26, 34, 19, 12, 30, 5, 15, 1e 9.

O segundo grupo (subgráfico central) é constituído pelo procedimento dos alunos de não ter feito a questão, podendo ser observado pelas variáveis: 11, 4, 18, 8, 14, 37, 21, 29, 25, 33, 41, 45 e 40.

No terceiro grupo (subgráfico à esquerda), achamos todos os processos que conduzem ao fracasso total, ou seja, questões que os alunos não acertaram. Ela é verificada pelas variáveis: 23, 10, 3, 7, 44, 43,20, 13, 36, 32, 17 .

Analisando cada grupo percebemos nitidamente uma hierarquia de complexidade em relação ao grau de dificuldade da questão e em relação ao número de ocorrências de cada variável.

Gráfico 5 - Implicação - teste diagnóstico



Analisando as implicações entre as variáveis do primeiro grupo, percebe-se que a variável 22 (AX2C) tem implicação com todas as demais variáveis deste grupo. Esta variável se refere ao acerto do cálculo de **x** na questão **2C**, em que as transversais se interceptam entre as paralelas. Essa questão parece ser a mais difícil, foi a questão que menos alunos acertaram, pois além do obstáculo da posição das transversais as medidas dadas não são correspondentes e nem todos os alunos perceberam que o valor de **x** é a medida do segmento inteiro. Provavelmente o aluno que acertou essa questão que é a mais complexa deve ter acertado as demais cujo grau de dificuldade é menor.

O maior índice de implicação (0,95) desta variável foi com a variável 26 (**AY2C)** que se refere ao cálculo de **y** na questão **2C** em que a única diferença é em relação a estratégia de resolução. Em todas as questões analisadas para calcular o valor de **x**, o aluno poderá resolver utilizando qualquer um dos 3 aspectos citados na análise a priori e para calcular o valor de **y**, deverá trabalhar com semelhança ou sob o aspecto dilatação. No cálculo de **y** na questão **2C** os valores fornecidos para se efetuar este cálculo são correspondentes o que fez com que mais alunos acertassem o cálculo de **y** do que os de **x** nesta questão. Observando as demais questões percebe-se nitidamente, através do gráfico implicativo, que as variáveis que se referem ao cálculo de **Y** implicam nas variáveis que se referem ao cálculo de **X** , o que significa que o aluno que acertou o cálculo de **Y** provavelmente acertou o cálculo de **X** nas questões **2A** e **2B**. Quem acertou a questão **1B,** provavelmente acertou o a questão **1A**. Quem acertou a questão **3B,** provavelmente acertou a questão **3A**.

Nesse grupo temos que a variável 24 não implica nas variáveis 1, 5 e 15; as variáveis 26 e 38 não implicam na variável 9 e a variável 12 não implica na variável 1.

Após a variável 22 temos a variável 38 (**ATQ4**) que se refere a um problema de aplicação do teorema de Thales para verificar se a figura é um quadrado ou não. A dificuldade nesta questão é perceber a aplicação do teorema ou a semelhança de triângulos como uma estratégia para verificar se os lados do quadrilátero ADEF são congruentes, o que levou vários alunos a errarem a questão e muitos não justificarem. Com exceção da variável 9 todas as demais implicam nesta. A implicação maior desta variável (0,99) é com a variável 19 (**AY2B**) o que significa que quem acertou a variável 38 provavelmente acertou a variável 19, pois as estratégias de resolução são similares.

Percebe-se também neste grupo, que as variáveis 1 (**AT1A**) e 9 (**AX2A**) estão implicadas com quase todas as outras variáveis deste grupo. Em ambas as questões a aplicação do teorema de Thales pôde ser feita utilizando um dos 3 aspectos e as medidas dadas são correspondentes, o que provavelmente proporcionou a maioria dos alunos a acertarem estas questões.

Com relação a posição das paralelas, percebemos que no cálculo de **y**, quem acertou a questão **2B** (paralelas inclinadas) provavelmente acertou a questão **2A** (paralelas horizontais) que provavelmente acertou questão **1B** (paralelas verticais). No cálculo de **x**, quem acertou a questão **2B** (paralelas inclinadas) provavelmente acertou a questão **1A** (paralelas verticais) que provavelmente acertou questão **2A** (paralelas horizontais).

Analisando as implicações entre as variáveis do segundo grupo, verificamos que a variável 11 (**NX2A**) tem implicação com todas as demais variáveis deste grupo exceto com a 36 (**EQ3B**). Provavelmente, por ser esta questão a mais fácil, poucos alunos deixaram de fazê-la. Observamos neste grupo que as implicações entre as variáveis referentes às questões que não foram feitas esta em ordem inversa em relação às variáveis referentes ao acerto das questões. Notamos que a questão mais difícil (**2C**) foi a que mais alunos deixaram de fazer e as questões mais fáceis (**2A** e **1A**) foram a que menos os alunos deixaram de fazer e assim por diante.

Quem deixou de fazer o cálculo de x nas questões **2A**, **1A**, **2B** provavelmente não fez o cálculo de **y** nas questões **1B**, **2A**, **2B** e **2C**.

Analisando as implicações entre as variáveis do terceiro grupo, verificamos que provavelmente o aluno que errou o cálculo de **X** na questão **2C** (transversais se interceptando) provavelmente errou o cálculo de **X** e de **Y** na questão **2A**, errou o cálculo de **y** na **2B**, errou a questão **1B** a questão **5** (todos erraram). A variável 36 (**EQ3B**) tem forte implicação (0,99) com a variável 32 (**EQ3A**) e ambas implicam na variável 41 (**NJC4**) o que significa que o aluno que errou a questão **3B**, errou a questão **3A** e a questão **4,** pois nestas questões as estratégias de resolução são similares, ou seja, o aluno deveria ter aplicado o teorema de Thales ou para verificar se as retas são paralelas (**3A** e **3B**) ou para verificar se as medidas dos lados do quadrilátero da questão 4 são congruentes.

Árvore hierárquica de implicação

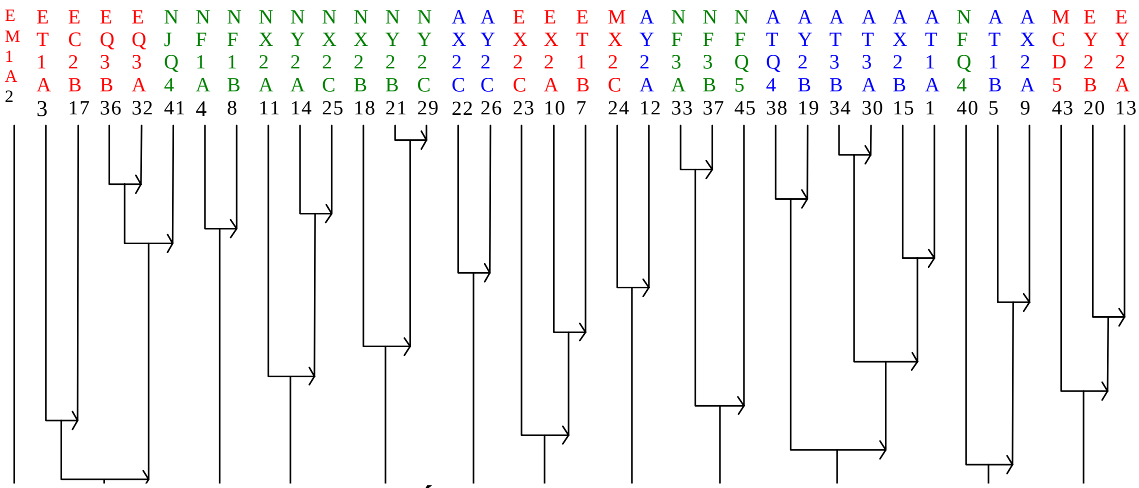


Figura 49 - Árvore Hierárquica de Implicação

Nesta árvore as variáveis em vermelho se referem ao erro das questões, as variáveis em azul ao acerto total das questões e as variáveis em preto as questões que não foram feitas. Faremos a seguir, as observações mais gerais e significativas.

Na questão 3 que tem por objetivo a aplicação do teorema de Thales para verificar se duas ou mais retas são paralelas, levando em consideração as configurações dos triângulos sobrepostos (3A) e a dos triângulos opostos pelo vértice (3 B) notamos por esse gráfico que quem acertou a 3B acertou também a 3A., quem não fez a 3A não fez a 3B e quem errou a 3B errou a 3A. Esse fato, talvez, vem a confirmar as constatações feitas por Charalambos e as de Cordier, quanto ao grau de dificuldade na aplicação do teorema de Thales para as configurações dos triângulos opostos pelo vértice ser maior que quando esses estão sobrepostos. [Vide implicações entre as variáveis (34,30), (33, 37), (36,32); nível 2, 3 e 4]

No cálculo de **y** quem não conseguiu determinar na configuração dos triângulos sobrepostos (2B), não conseguiu também na configuração dos triângulos opostos pelo vértice (2C). [Vide implicações das variáveis (21,29); nível 1]

Quem aplicou o teorema de Thales para verificar se o quadrilátero é um quadrado provavelmente acertou o cálculo de **y** na questão 2B (paralelas inclinadas) pois, em ambas, a estratégia de resolução é o uso de semelhança ou a aplicação do teorema de Thales sob o aspecto dilatação. [Vide implicações (38,19); nível 5]

O aluno que erra a questão 3 (verificação se as retas são paralelas) provavelmente erra a questão 4 (verificação se a figura é um quadrado) não justificando adequadamente sua resposta, talvez por não perceber a aplicação do teorema de Thales. [Vide implicações (36,32); nível 8]

Quem não soube calcular o valor de **Y** na questão 2A , não soube calcular o valor de **X** na questão 2C pois, na questão 2C além do aspecto da configuração dos triângulos opostos pelo vértice, o valor de **x** representa a medida do segmento inteiro (soma das medidas de dois lados opostos pelo vértice). [Vide implicação (14,25); nível 6]

Os alunos que erraram a montagem da proporção para calcular **X** na questão 2C, acertaram o cálculo de **y** na questão 2A. Se em ambas as questões o aluno resolveu sob o ponto de vista dilatação, provavelmente, acertou a questão 2A e errou a 2C devido a posição das transversais e os valores fornecidos não serem correspondentes. [Vide implicação (24,12); nível 11]

O aluno que consegue calcular o valor de X na questão 2C (transversais interceptando) provavelmente acerta o cálculo do valor de Y nesta questão, pois no cálculo de **X**, além do obstáculo da posição das transversais, temos o obstáculo dos valores fornecidos não serem correspondentes, fazendo com que o cálculo de **x** seja mais difícil que o cálculo de **Y** nestas questão. [Vide implicação (22,26); nível 10]

Provavelmente, o aluno que acerta o cálculo de **X** na situação das retas paralelas na posição inclinada acerta o cálculo de **X** com as retas na posição vertical. [Vide implicação (15,01); nível 9]

Os alunos que dominam a aplicação do teorema de Thales sob o aspecto dilatação não encontram problema para determinar o valor de **X** na questão 2A, em que as paralelas estão na horizontal, os dados fornecidos são correspondentes e pode ser resolvido por qualquer um dos aspectos citados na análise a priori. Quem errou o cálculo de **x** na questão 2A, em que praticamente não tem obstáculo nenhum para resolver, provavelmente errou a aplicação do teorema na questão 1B, em que além da posição das paralelas em relação a transversal ser um obstáculo temos o fato desta questão ser resolvida sob o aspecto dilatação. [Vide implicações (05,09), (10, 07); nível 12 e 14]

O aluno que errou o cálculo de **y** na questão 2B (paralelas inclinadas) provavelmente errou o cálculo de **y** na questão 2A (paralelas horizontais), o que significa que estes alunos não dominam a aplicação do teorema de Thales sob o aspecto dilatação. [Vide implicação (20, 13); nível 13]

Provavelmente, de modo geral, o aluno que não domina o cálculo de **X**, não domina o cálculo de **y** e ao contrário, aqueles que sabem calcular o valor de **Y**, não tem dificuldade em aplicar o teorema de Thales para o cálculo de **X** quando as paralelas estão na posição inclinada ou vertical. Quem não calculou o valor de **X** na questão 2A (a mais fácil), também não deve ter calculado o valor de **y** na questão 2A e o valor de **X** na questão 2C, na qual, envolvem o aspecto dilatação e o obstáculo da posição das transversais respectivamente. [Vide implicação: 18→(21, 29); (34, 30) →(15, 01); 11→(14, 25); níveis 15, 16 e 17]

Os alunos que não fizeram a questão 3 provavelmente não fizeram a questão 5, talvez pela dificuldade de perceber e aplicar o teorema em problemas não tradicionais. [Vide implicação (33, 37)→ 45; nível 19]

CAPÍTULO 3: PROBLEMÁTICA

Na análise feita sobre o objeto matemático “teorema de Thales”, mostramos que esta propriedade utiliza mais de uma forma de expressão para ser manifesta e que está em jogo, na produção deste saber, a articulação dos registros: figural, discursivo e numérico, além das outras noções que podem estar relacionadas a essa, como a semelhança, a homotetia e a trigonometria.

Um dos desafios para o ensino-aprendizagem deste teorema é como produzir a unidade na diversidade e é isso que intencionamos pesquisar.

Em síntese, os problemas relativos ao ensino-aprendizagem do teorema de Thales estão relacionados com sua forma de expressão envolvendo os aspectos da percepção, das significações e do contexto. Vamos procurar resumir esses problemas dividindo-os em três blocos.

3.1.- Resumo dos problemas sobre o ensino-aprendizagem

Com relação aos aspectos da percepção visual, no transcorrer desse estudo preliminar, levantamos as questões (pág.54):

a) *Será que a posição das paralelas em qualquer uma das configurações interfere na percepção e aplicação do teorema de Thales? E a posição das transversais, também interfere?*

b) *Em que medida e por quais meios, ao ensiná-lo, consegue-se trabalhar com esses aspectos perceptivos?*

Visando responder essas questões, aplicamos um teste diagnóstico, em 1998, para verificar a concepção de alguns alunos após já terem estudado o teorema de Thales. Constatamos que o índice de acertos variou segundo a posição das paralelas, a posição da intersecção das transversais com relação às paralelas, se eram fornecidas ou não as configurações nas situações-problema, se era pedido para calcular a medida dos segmentos formados nas transversais ou nas paralelas. Diante destas constatações fizemos um levantamento de algumas pesquisas já elaboradas nesta direção e destacamos a de Cordier e a de Charalambos.

Cordier, ao analisar a aplicação do teorema de Thales no quadro da tipicalidade, detectou que a fonte dos desvios cognitivos está relacionada com a propriedade da tipicalidade das representações cognitivas. Uma representação típica pode ser criada como um modelo pelo sujeito e o problema está relacionado, muitas vezes, no fato de que, diante de um modelo, os alunos se atêm mais nas múltiplas propriedades figurativas dessas configurações do que na abstração das propriedades estritamente necessárias à aplicação do teorema. Por meio das suas experimentações, *constatou que as representações típicas com relação ao teorema de Thales são instaladas durante a fase de aquisição desta propriedade* e estão ligadas, de um lado, às figuras geométricas e, de outro lado, às projeções. No âmbito das projeções, encontram sua justificativa na classificação dos erros, salientando como representação típica aquelas pelas quais as projeções se fazem sempre no mesmo sentido, da esquerda para a direita. Quanto às figuras geométricas, verificou-se que as propriedades ligadas à especificação do ângulo (agudo, obtuso) é verdadeiramente não-pertinente comparando com o número e a posição das paralelas. As configurações mais representativas observadas são, com relação à posição das paralelas, aquelas que estão na posição horizontal. Em seguida, com bem menos destaque, as de posição vertical. Com relação à intersecção das transversais e ao número de paralelas, a mais representativa é aquela em que as transversais se interceptam acima das paralelas. Nesse caso o número de paralelas não interfere. Já, quando as transversais se interceptam entre as paralelas, a representatividade é maior ao apresentar três paralelas do que duas.

Charalambos, constatou por meio do teste inicial para a avaliação das pré-aquisições de alguns alunos do 1º ano do Ensino Médio, que a aquisição do teorema de Thales era limitada a uma única situação figurativa (triângulos sobrepostos). Após uma experimentação em que se procurou trabalhar com a variedade das configurações homotéticas e com a articulação entre o registro numérico e o registro figurativo visando o ensino da homotetia, constatou-se uma melhora nos percentuais com relação à aplicação do teorema de Thales, porém ainda persistem as diferenças entre os percentuais de acertos, em ordem decrescente, com relação às situações figurativas dos triângulos sobrepostos ou não e em relação ao cálculo dos lados oblíquos ou do terceiro lado.

Diante deste panorama, colocamos os seguintes problemas:

1) A maneira como se tem ensinado o teorema de Thales e a forma como esta propriedade vem sendo apresentada nos livros didáticos tem proporcionado aos alunos a aquisição de uma concepção limitada, bem como, a formação de configurações prototípicas ocasionando a não-percepção da aplicação dessa noção em outras configurações ditas não típicas.

2) Como, então, proporcionar um ensino que leve os alunos a fazer um reconhecimento e/ou apreender que diferentes configurações topológicas articulam o mesmo significado?

Com relação aos aspectos da significação, no transcorrer desse estudo preliminar foram expostas algumas proposições sintagmáticas relativas ao teorema de Thales que, em nível sintático, implicam a articulação dos significantes mantendo uma relação de proporcionalidade e, em nível semântico, implicam as significações que estão implícitas em cada proposição com relação aos pontos de vista (conservação das abscissas, conservação da relação de projeção e dilatação). Entendendo que o objeto de estudo em questão na sua significação global é o teorema de Thales sob três pontos de vista (Guy Brosseau), levantamos outros problemas:

3) Como fazer com que o ensino do teorema de Thales e sua aplicabilidade conduzam à apreensão dessa globalidade sintático-semântica?

4) Em que medida e por que meios consegue-se organizar os três pontos de vista?

Com relação ao aspecto do contexto, estamos pensando tanto em como o teorema de Thales está relacionado com os outros conceitos afins na produção deste saber, como em relação às suas aplicações pelos alunos após a sua apreensão. Foi visto que os conceitos como a homotetia, a semelhança, o teorema de Thales e a trigonometria, implícita ou explicitamente, tratam de proporcionalidade e de paralelismo. Sendo assim, podemos formar várias seqüências de ensino por meio de várias redes sintagmáticas articulando todos esses conceitos. Nesse sentido, expomos outros problemas:

5) Observando a forma com que se tem ensinado essas noções e, mesmo, como vem sendo apresentadas nos livros didáticos, percebemos que esses conteúdos são trabalhados de forma estanque, sem nenhuma articulação explícita entre eles, fazendo com que, no contexto de determinadas situações-problema, o aluno, na busca de uma estratégia de resolução, nem sempre perceba as aplicações que sejam mais ou menos pertinentes, ou talvez, aceda a uma determinada noção não percebendo a aplicação de outras, nem a pertinência da utilização desta ou de outra noção na resolução do problema, simplesmente por ter uma concepção limitada desses conceitos.

6) A apreensão visual, muitas vezes, interfere condicionando a apreensão operatória. Constatamos, no teste diagnóstico, uma dificuldade muito grande nos alunos em perceber a aplicação do teorema de Thales em situações em que não se forneciam as configurações. O fato de se dar um destaque maior à produção desse saber com situações-problema fornecendo as configurações, talvez, seja um dos motivos desta associação e da não-percepção em outras. Como

minimizar a influência da apreensão visual relacionada à imagem prototípica da aplicação do teorema de Thales em prol da aquisição da apreensão operatória?

3.2 – Problemática

Uma vez detectado (via teste diagnóstico, pesquisas, teses de mestrado, palestras, congressos) que a maioria dos alunos hoje em dia tem uma concepção limitada do teorema de Thales, ocasionada por uma prática de ensino e reforçada pelos livros didáticos, e que talvez sejam esses os motivos que levaram muitos alunos, após o ensino dessa noção, a não perceber a aplicação dela em qualquer configuração ou em situações em que as configurações não sejam fornecidas, ou, mesmo quando percebida sua aplicação, a não montar a proporção adequadamente, os problemas se resumem em:

> *"Como produzir uma seqüência de ensino, que proporcione ao aluno a apreensão da noção do teorema de Thales, observando todos os aspectos acima descritos quanto à percepção visual, às significações e ao contexto?"*

3.3 - Hipóteses da problemática

1) Como, na maioria dos seres humanos, com relação aos órgãos do sentido, a visão é o que mais se tem desenvolvido, e, com relação às formas de expressão, a apreensão da figura é mais fácil de ser fixada em comparação a um discurso em língua natural, e em se tratando da produção de um saber plurissêmico, acreditamos que devemos iniciar propondo situações-problema em língua natural para que o aluno produza suas configurações sem que se imponha uma imagem prototípica.

2) Pensamos que diferentes configurações topológicas podem gerar o mesmo significado desde que o sujeito esteja familiarizado com estas variabilidades perceptivas. Acreditamos que, utilizando o software Cabri-géomètre I, por se tratar de um programa que proporciona trabalhar a geometria de forma dinâmica, poderemos, em uma mesma situação-problema, estar trabalhando com estas variabilidades perceptivas, bem como, pela observação e experimentação, os sujeitos poderão levantar conjecturas de fenômenos variantes e invariantes, para posterior comprovação e generalização.

3) Pelo fato de o plano de expressão, em relação ao teorema de Thales, não dar conta de apreender o plano de conteúdo e, como foi exposto na análise do objeto matemático, segundo Duval (1995, p.69), toda representação ser cognitivamente incompleta em relação ao que ela representa e os registros de representação semiótica não apresentarem os mesmos aspectos de um mesmo conteúdo conceitual, portanto, para o aluno apreender a noção do teorema de Thales em sua globalidade perceptiva ou mesmo semântica sintática faz-se necessário diversificar os registros de representação semiótica, explorando as conversões implícitas ou explícitas, além de explorar as possibilidades de transformação dadas pelas regras de tratamento de cada registro em questão.

4) Segundo Duval, podemos obter uma produtividade cognitiva de articulação de registros, utilizando uma rede semântica (articulação entre registro de rede e registro de língua). Com isso, acreditamos que por meio da rede semântica podemos organizar os três pontos de vista relacionados com essa noção, bem como, fazer a articulação com os outros conceitos implícitos e explícitos com as noções afins.

5) Trabalhando com algumas situações-problema de aplicações do teorema de Thales, acreditamos que esta propriedade passa a ter um maior significado para o aluno induzindo ou possibilitando a utilização desse como estratégia de resolução em outras situações afins.

3.4 - Metodologia para verificar, validar ou invalidar as hipóteses

Com a finalidade de tentar provar as hipóteses acima levantadas, elaboramos uma seqüência didática com atividades experimentais em que os alunos tanto iriam utilizar o software Cabri-géomètre I quanto os instrumentos de desenho (régua, transferidor, compasso) para fazer construções, levantar dados pela observação, tecer conjecturas para posterior validação e conclusão de aspectos relativos à aprendizagem das noções de semelhança e do teorema de Thales. Elaboramos também uma ficha de observação para cada atividade visando direcionar, organizar e facilitar a anotação das observações.

Trabalhamos com duas turmas de 8ª série do Ensino Fundamental: na 8ª série A, com 30 alunos, aplicamos essa seqüência didática e fizemos uma observação mais sistemática, na 8ª série B, com 31 alunos, foi utilizado o livro didático (livro 1 da análise anterior) de forma tradicional. Durante a aplicação de toda seqüência, tivemos a presença de um observador, gravamos as perguntas feitas ao aplicador e as respostas dadas aos alunos, guardamos as produções escritas dos alunos e as atividades de construções feitas no computador foram salvas em disquete.

Passados aproximadamente dois meses do término da seqüência aplicamos um pós-teste nas duas turmas concomitantemente, sem prévio aviso, para verificar as concepções desses alunos após já terem estudado essas noções. Esse pós-teste foi idêntico ao teste diagnóstico aplicado em 1998, quando fizemos os estudos preliminares. Durante a aplicação, em nenhum momento foi dito aos alunos os assuntos abordados nesse teste, os aplicadores não interferiram na resolução dos alunos, a única instrução dada foi que procurassem uma estratégia para resolver todas as questões evitando deixá-las em branco.

Assim que terminamos as correções do pós teste, fizemos entrevista individual com cada um dos alunos do grupo experimental dando um retorno de seu desempenho, mostrando seus erros, elogiando os pontos positivos, pedindo esclarecimento de algumas respostas e justificativas que não haviam ficado bem claras.

Utilizamos, como fontes de dados dos desempenhos iniciais dos alunos e das mudanças ocorridas, as informações fornecidas pela professora da classe sobre os alunos, as anotações do observador, as fichas de atividades dos alunos, os disquetes com as atividades feitas pelos alunos no computador, as gravações, os depoimento de alguns alunos, a entrevista e o pós-teste. Com essas informações, fizemos uma análise a posteriori e a validação das hipóteses da pesquisa deu-se pela confrontação dos resultados apresentados no teste das duas turmas e também pela confrontação das análises a priori e a posteriori.

3.5 - Embasamento teórico para justificar, fundamentar e apoiar a problemática

Fundamentamos nossa pesquisa nos estudos feitos sobre os registros de representação semiótica de Raymond Duval (1995).

Segundo Duval (1995, capítulo IV, p.172 a 175) as atividades matemáticas em geometria normalmente implicam os registros das figuras e os registros da língua natural. Os tratamentos normalmente são efetuados num dos dois registros (aquele que for mais econômico e melhor controlável, ou a escrita simbólica ou a representação gráfica) e para a atividade cognitiva isso não é suficiente. Os tratamentos figural e discursivo devem ser efetuados simultaneamente e de maneira interativa. A originalidade das atitudes em geometria comparada a outras atividades matemáticas deve-se ao fato da coordenação dos tratamentos específicos ao registro das figuras e o de um discurso teórico em língua natural ser necessário. Há uma falsa proximidade entre os tratamentos que são naturais para cada um desses registros e os que a atividade matemática exige, pois o tratamento figural está relacionado com as leis de organização da percepção visual e o tratamento discursivo aparenta situar-se no prolongamento direto da língua, porém com um emprego especializado e não um emprego comum. As figuras induzem a uma interpretação perceptiva quase automática que, às vezes, parece convergir com a interpretação matemática, mas também podem sempre divergir.

> "*A necessidade de uma coordenação entre os tratamentos levando a registros figurais e discursivos, a falsa proximidade entre os tratamentos matematicamente pertinentes e aqueles espontaneamente praticados em algum dos dois registros, comandam os problemas ligados a aprendizagem da geometria*" (Duval, 1995, p.174).

O ponto estratégico da aprendizagem da geometria reside em propor atividades que levem a vários tratamentos dentro de um mesmo registro, à coordenação de vários registros e à pesquisa dos tratamentos pertinentes e não-pertinentes no interior de um mesmo registro.

Com relação ao teorema de Thales, como foi exposto na análise do objeto matemático, nós podemos, nas atividades, coordenar os registros discursivo (enunciados), figural (configurações) e simbólico (montagem da proporção). No registro discursivo enfatizamos os pontos de vista abordados por Brousseau para enunciar o teorema. No registro figural, levando em consideração as configurações destacamos dois blocos de configurações mais pertinentes: um que induz à percepção da figura em dimensão dois e outra em dimensão um. Confrontando as configurações com os pontos de vista e os registros simbólicos para representar as proporções, foi mostrado que para cada um dos blocos há duas configurações mais pertinentes, ou seja, aquelas em que as transversais se interceptam acima ou abaixo das paralelas e as que se interceptam entre as paralelas.

Essas variáveis didáticas levando a tratamentos pertinentes em cada registro foram identificados também nas pesquisas de Cordier e Charalambos e confirmadas no teste diagnóstico que aplicamos em 1998.

Com relação aos tratamentos próprios ao registro das figuras geométricas, Duval (p. 181) afirma que não é sempre fácil "ver" sobre uma figura as relações ou as propriedades em relação com as hipóteses dadas e correspondendo à solução pesquisada. E também propõe que "*de um ponto de vista cognitivo e didático é essencial não confundir a possibilidade de tratamentos figurais com a legitimidade, ou a justificação matemática desses tratamentos figurais*". Além disso, a possibilidade de tratamento figural está ligada à possibilidade de modificações "*mereológicas*", ópticas ou posicionais de uma figura, modificações que podem ser efetuadas fisicamente ou mentalmente e isso independentemente de todo conhecimento matemático (Duval, 1988b, p. 62-63-1994). As representações figurais muitas vezes são o meio pelo qual podemos ver, explorar, antecipar ou limitar a classe de hipóteses ou das escolhas consideradas na resolução de um problema, mas, por trás disso, esse papel das figuras é ligado à interação entre uma questão de ordem matemática e à efetuação do tratamento figural pertinente em relação à questão, havendo no entanto, as “resistências” ou “arapucas” de uma figura, fator esse, próprio dessa representação. É em função desses fatores que se pode analisar o grau de potência heurística de uma figura e que se pode organizar uma aprendizagem centrada sobre a utilização heurística da figura.

Duval (1995, p.188), quando trata da coordenação entre figura e discurso em geometria, comenta que uma figura só representa uma situação geométrica quando a significação de algumas unidades figurais e de algumas de suas relações são explicitamente fixadas no início. Em geometria, não há desenho sem “legenda”, ou seja, um mesmo desenho pode levar a diferentes situações matemáticas servindo de suporte intuitivo para diferentes raciocínios. Logo o desenho não é suficiente para afirmarmos as propriedades desse objeto; precisamos de um enunciado para fixar as relações. O acesso a uma figura geométrica é necessariamente discursivo. A conversão do discurso em figura geométrica não acarreta o abandono dos tratamentos ligados ao registro de partida, ou seja, aos tratamentos discursivos (definições, teoremas). Deve-se ter uma interação entre os tratamentos figurais que guiam o caminho heurístico e os tratamentos discursivos que, pela dedução, constituem o caminho levando aos objetos representados na figura. Essa interação pode encontrar-se bloqueada pelos fenômenos da não-congruência para múltiplos ir e vir que a mobilização simultânea desses registros requerem.

É importante para a integração entre o registro discursivo e o registro da figura, que o aluno descubra a especificidade da organização dedutiva do discurso em relação a suas outras formas de expansão como a explicação, a argumentação ou a descrição.

A organização perceptiva de uma figura privilegia o reconhecimento de algumas unidades figurais e tende a mascarar outras. Uma forte congruência entre a entrada discursiva e a organização perceptiva da figura poderá constituir um obstáculo maior para a resolução de um problema, se as unidades figurais levadas em conta não forem diretamente visíveis sobre a figura e designadas no enunciado.

Na exploração de uma figura pela apreensão operatória, podemos ver se manifestar uma variedade de subfiguras não vistas num primeiro olhar e que tem em comum com a figura inicial as unidades figurais de dimensão 2, 1 ou 0, o que permite formar seqüências diferentes de subfiguras. A correspondência entre o registro das figuras e aquele do discurso se fixa em nível da correspondência entre as unidades figurais e as expressões referenciais. Acontece que, num mesmo raciocínio, pode-se fazer referência aos objetos que são representados pelas unidades figurais de dimensão 2, 1 ou 0. No registro do discurso, isso não introduz nenhuma heterogeneidade de tratamento. Não é mais o mesmo no registro das figuras: um vai e vem constante entre as unidades figurais de dimensões diferentes implica saltos na percepção da figura. De maneira mais geral, a não-congruência dimensional parece característica da coordenação entre figuras e argumentação. A exploração heurística das figuras tende a privilegiar as unidades de dimensão 2 sobre aquelas de dimensão inferior. Ao contrário, a aplicação de definições ou teoremas na subfigura selecionada tende a privilegiar as unidades de dimensão 1 e 0" (Duval, 1995, p.191 a 194).

A reconfiguração, a superposição, colocação em profundidade e as outras operações relativas às modificações possíveis de uma figura estão longe de ser as operações espontâneas e evidentes. Não somente seu custo temporal aumenta com a complexidade da figura, mas, sobretudo, nem todos os alunos conseguem efetuá-las. São vários os fatores em jogo na "visibilidade da modificação mereológica" de uma reconfiguração: o caráter convexo ou não-convexo da subfigura obtida, o recobrimento parcial ou o não-recobrimento das unidades figurais levadas em conta para essa reconfiguração, ou seja o seu desdobramento, a necessidade ou não de fracionar uma das unidades figurais, etc. Esses fatores tanto podem facilitar a operação de reconfiguração como podem ocultar essa possibilidade.

> "*...A apreensão operatória, sem a qual as figuras não podem preencher sua função de suporte intuitivo, deve ser treinado. Pois esta função não somente requer a neutralidade da organização perceptiva espontânea de uma figura, mas ela apresenta também um custo temporal que varia consideravelmente segundo o número, a heterogeneidade e as posições respectivas das unidades figurais elementares que a compõem*" (Duval,1995, p.197).

Duval (1995, p.198 a 206) expõe como condições para o desenvolvimento da apreensão operatória que:

- Cada uma das operações relativas à modificação das figuras deve ser explicitamente e sistematicamente solicitada por si só. Para isso, deve-se, evidentemente, propor os exercícios nos quais a resolução possa ser obtida por um tratamento figural.

- A resolução de exercícios propostos não deve implicar nenhum recurso aos passos de raciocínio, que exige a utilização da definição ou de teorema.

- A resolução de exercícios não deve implicar nenhuma mudança de dimensão na seqüência de subfiguras. Mas, geralmente, um trabalho sobre as unidades figurais de dimensão **2**, parece dever proceder um tratamento sobre as dimensões figurais de dimensão **1** ou **0**. Os exercícios para os quais a resolução pode ser obtida pela operação de reconfiguração preenchem perfeitamente a primeira e a segunda condição.

- Exercício proposto deve buscar numa série organizada em função de uma variação sistemática dos fatores de visibilidade facilitando ou retardando a apreensão operatória.

- De maneira mais geral, essas condições pressupõem que se disponha de uma classificação dos diferentes tipos de figuras susceptíveis de ilustrar não só um conceito ou uma definição, mas, de preferência, uma rede de conceitos.

PARTE II

EXPERIMENTAÇÃO

"... deve-se efetivamente, reunir duas qualidades muito incompatíveis : saber observar; ou seja, deixar a criança (aluno) falar, não desviar nada, não esgotar nada e, ao mesmo tempo, saber buscar algo de preciso, ter a cada instante uma hipótese de trabalho, uma teoria, verdadeira ou falsa para controlar".

Piaget. A Representação do mundo da criança, p.11

(*apud* Matui, Jiron. 1993 , p.71)

CAPÍTULO 4: APRESENTAÇÃO DO DISPOSITIVO EXPERIMENTAL

A fim de pesquisar como se dá a apreensão e produção de sentido com relação ao ensino-aprendizagem da geometria e mais especificamente com a noção do teorema de Thales, elaboramos uma série de atividades para serem desenvolvidas com alunos de 8ª série do Ensino Fundamental. Essas atividades foram planejadas para serem trabalhadas pelos alunos em alguns momentos individualmente e em outros em duplas ou, no máximo, trios, dependendo da situação. Em algumas dessas atividades utilizamos como material de apoio didático o software Cabri-géomètre I, em outras, régua, transferidor e o compasso ou a sobreposição de figuras. Visamos desenvolver com essas atividades primeiro a familiarização com o software Cabri-géomètre I, depois as noções de semelhança de figuras planas, semelhança de triângulos para, a seguir, trabalhar o teorema de Thales, explorando os aspectos da conservação das abscissas, da conservação da relação de projeção e da dilatação.

Para cada uma das atividades referentes especificamente ao teorema de Thales, elaboramos uma ficha de observação cifrada (anexo 4), visando além de agilizar as anotações do observador, direcioná-las para que se anotem os fatos e ocorrências que consideramos pertinentes com os objetivos da situação proposta. Numeramos os computadores e seus respectivos usuários (duplas), procurando em toda aula manter as mesmas duplas com os mesmos computadores para facilitar as anotações e posterior organização e tabulação dos dados. Caso houvesse necessidade da mudança de computador, a dupla continuaria com o mesmo número e apenas trocaríamos o número do computador. Nessa ficha de observação, para cada item a ser observado, elaboramos alguns códigos para se preencher de forma a racionalizar o trabalho, possibilitando que se observe mais de uma dupla. Reservamos, também, um espaço no final da folha para eventuais anotações que o observador achar pertinente e que não tenham sido previstas.

Após a elaboração dessa seqüência didática, aplicamos as atividades com os alunos da 8ª série A do Ensino Fundamental de uma Escola da cidade de Taubaté, Estado de São Paulo. Em todas as atividades foi permitido o uso da calculadora e propostas situações nas quais os alunos deveriam fazer algumas experimentações, tecer comentários, elaborar conjecturas e justificá-las. Após cada série de atividades, houve discussões coletivas e a institucionalização do conhecimento em jogo. Terminada a aplicação dessa seqüência, aguardamos aproximadamente uns dois meses e aplicamos um pós-teste para verificar a concepção desses alunos quanto às noções de semelhança e do teorema de Thales.

As questões desse pós-teste foram as mesmas do teste diagnóstico aplicado em 1998, quando fizemos os estudos preliminares, analisando a concepção de alguns alunos que já haviam estudado essa noção, a fim de levantar os possíveis obstáculos didáticos e dificuldades dos alunos. Intencionando fazer comparações para posterior validação da pesquisa, aplicamos esse pós-teste também numa outra turma de alunos, na 8ª série B, da mesma escola, que havia estudado essa noção de forma tradicional. O pós-teste foi aplicado nessas duas turmas no mesmo dia e na mesma hora, os alunos de ambas as turmas não sabiam que iriam fazer o pós-teste, nem tiveram informações dos conhecimentos em jogo na resolução dessas questões. Para validação da pesquisa, utilizamos os resultados do pós-teste e o desenvolvimento dos alunos observados durante a experimentação.

4.1.– Justificativas e quadro teórico

Antes de iniciarmos a descrição e análise das atividades propostas e o relato da experimentação achamos pertinente primeiro situar a experimentação com relação ao quadro teórico e fazer as justificativas das escolhas feitas, do uso do software Cabri Géomètre **I** e do dispositivo experimental em relação a problemática da pesquisa. A seguir, descrever as condições em que ocorreu a experimentação e relatar um pouco da vivência dos alunos durante as primeiras séries do Ensino Fundamental para que tenhamos uma visão do perfil desses alunos perante a escola e o ensino da geometria o que facilitará mais à frente entender seus comportamentos e atitudes.

4.1.1.- Experimentação com relação ao quadro teórico

Para elaboração da seqüência didática e, posteriormente, para a análise do pós-teste, utilizamos como referencial teórico os registros de representação semiótica propostos por Raymond Duval, os resultados da pesquisa feita por Cordier (1991) apoiada na teoria da tipicalidade e nas observações feitas por Charalambos (1991) na pesquisa sobre homotetia com relação ao teorema de Thales.

Segundo Cordier, algumas representações são mais familiares para os alunos que outras, normalmente as mais familiares conduzem ao sucesso e as menos familiares levam ao fracasso. Constatou em sua experimentação que as representações típicas do teorema de Thales estão ligadas às figuras geométricas (número e posição das paralelas) e às projeções (sendo mais típica quando as projeções se fazem no mesmo sentido).

Charalambos salienta que, explorando nas atividades a variedade de configurações homotéticas e a articulação entre o registro numérico e o registro figurativo, o índice de sucesso na aplicação do teorema de Thales aumenta; porém, ainda persistem algumas diferenças quanto às situações figurativas, maior acerto nas configurações em que se tem triângulos sobrepostos do que quando esses são opostos pelo vértice, e, com relação ao cálculo dos lados oblíquos ou dos lados paralelos, sendo maior o erro no cálculo dos lados paralelos.

Quanto aos registros de representação semiótica de Duval, apoiamo-nos:

- no fato de que uma noção não pode ser formada com base em um único registro, necessitando-se trabalhar a diversificação e integração dos registros para a formação do conceito e para não se confundir o objeto representado com sua representação;
- na conversão de registros e o posterior tratamento desse;
- nas unidades figurais elementares para o registro das representações geométricas;
- no estudo das configurações e proposições pertinentes;
- nos fenômenos relacionados `a congruência ou não-congruência;
- na conversão de registros diferentes, entre enunciado e os processos de resolução;
- nas apreensões necessárias para assimilação das noções geométricas e para sua aplicação na resolução de um problema. As apreensões exploradas foram a apreensão perceptiva e a apreensão operatória.

4.1.2.- Justificativa das escolhas feitas

Objetivando realizar a pesquisa num contexto o mais próximo possível da realidade vivida por alunos e professores, é que optamos por aplicar a seqüência didática na 8ª série do Ensino Fundamental de uma Escola da cidade de Taubaté, dentro do horário normal das aulas de matemática, trabalhando com todos os alunos sem nenhuma discriminação. A decisão de escolher essa Escola da cidade de Taubaté deveu-se a vários motivos: ser uma escola de aplicação da Universidade e tem hoje uma direção aberta a pesquisas e a novas tecnologias; ter um laboratório de informática; receber alunos de vários bairros da cidade e de cidades vizinhas, proporcionando convivência com uma clientela bem diversificada e não apenas com uma elite; proporcionar aos alunos o estudo do Desenho Geométrico desde a 5ª série do Ensino Fundamental, o que nos leva a pensar que esses alunos já adquiriram as noções geométricas e de construções facilitando, talvez, a manipulação do software Cabri-géomètre I.

Optamos por organizar atividades em grupo por vários motivos, tais como: no laboratório, devido à quantidade de computadores disponíveis e, principalmente, porque o trabalho em grupo ajuda os alunos a desenvolverem as habilidades de expressão oral e escrita, o convívio em grupo, intencionando que troquem informações uns com os outros, discutam procedimentos e estratégias para a resolução das atividades, levantem conjecturas e hipóteses, teçam comentários e conclusões comuns, visando com isso o enriquecimento de cada um dos alunos. Algumas atividades foram propostas individualmente para que os alunos não criassem dependência do grupo e para que tivessem a oportunidade de testar seus conhecimentos e habilidades refletindo sobre seus erros, acertos e dificuldades. Em algumas atividades que foram propostas para serem realizadas em casa, pedimos que fizessem sozinhos para não terem desculpas alegando a dificuldade de se encontrar. Na sala de aula, essas atividades foram discutidas em grupo. Utilizamos também a régua e o compasso por serem instrumentos que todos os alunos têm e supõe-se que saibam manipular, o que facilita a realização de algumas experimentações e construções em casa.

Como material de apoio pedagógico, optamos trabalhar com o software Cabri-géomètre I por proporcionar trabalhar uma geometria dinâmica e também devido a outras vantagens que iremos relatar a seguir na justificativa do uso desse programa.

4.1.3. – Justificativa do uso do programa Cabri-Géomètre I

O programa educacional Cabri-géomètre **I** foi desenvolvido no laboratório de Estruturas Discretas e de Didática do Instituto de Informática e de Matemática Aplicada de Grenoble (IMAG) na Universidade Joseph Fourier de Grenoble- França. "Ele é um ambiente informático aberto no qual o usuário pode explorar um domínio particular e descobrir suas propriedades, com um mínimo de ajuda do sistema. Foi desenvolvido para a exploração do universo da geometria elementar." (Saddo,1997, p.149)

Os motivos que nos levaram a escolher o software "Cabri-géomètre I" foram:

- ser um programa educacional;
- ser um programa de fácil manipulação devido à coexistência das primitivas de construção de desenho puro e das primitivas geométricas (ponto, reta, segmento, circunferência, etc.), o que permite construir todas as figuras geométricas elementares que podem ser traçadas numa folha de papel com a utilização da régua e do compasso;
- ser mais vantajoso em relação à construção com régua e compasso por possibilitar uma modificação dinâmica do desenho, ou seja, conseguir, pelo deslocamento de um dos elementos básicos do desenho (por meio do mouse), deformar a figura construída respeitando as propriedades geométricas utilizadas na construção ou decorrentes dessa. Essa característica do programa proporciona, após a construção de um desenho com algumas propriedades determinadas, o acesso rápido e contínuo a uma família de desenhos que mantêm essas propriedades associadas a uma mesma figura, constituindo-se assim numa ferramenta rica de validação experimental de fatos geométricos, sem contudo criar uma imagem prototípica;

- permite a diferenciação entre desenho e figura. A figura é em nosso estudo o objeto teórico geométrico (um conjunto de elementos geométricos ligados por relações) enquanto que o desenho é uma representação material desse objeto teórico, um traço sobre a areia, o papel, a tela do computador ou todo outro suporte físico. A um mesmo desenho podem corresponder várias figuras, segundo a leitura teórica que se fizer. Em particular, um desenho, por si só, não pode levar em conta a variabilidade dos elementos da figura aos quais ele é associado;.
- permite a interação entre o perceptivo e o geométrico de forma frutífera, quando empregado levando em conta a exploração desses dois aspectos. Interação entre o visual e o teórico;
- permite um novo contrato didático em vários sentidos: um deles com relação à construção, em que não se trata mais de produzir um desenho, mas sim uma figura que conserva suas propriedades;
- permite, por meio do menu histórico, reconstituir os passos de construções utilizados pelos alunos;
- permite a exploração das propriedades de uma figura já construída numa atividade caixa preta;
- possibilita a alteração do menu, excluindo algumas construções ou acrescentando outras através das macro construções, de acordo com os objetivos.

4.1.4.- Justificativa do dispositivo experimental com relação à problemática

Lembrando o que já foi exposto no estudo do objeto matemático e na descrição da problemática, o teorema de Thales é uma noção que utiliza mais de uma forma de expressão para ser manifestada. Desse modo procuramos elaborar uma seqüência didática explorando a integração entre os registros figural, discursivo e numérico, os tratamentos pertinentes num mesmo registro e as várias faces pelas quais podemos ver o teorema de Thales, ou seja, os pontos de vista citados por Guy Brousseau (conservação das abscissas, conservação da relação de projeção e dilatação), visando produzir a unidade no meio à diversidade. Para abordarmos esses pontos de vista relacionando-os com as noções de semelhança, homotetia e as razões trigonométricas, criamos uma rede semântica e elaboramos as atividades procurando ir formando essas noções seguindo a ordem proposta na rede semântica.

Devido ao fato de os problemas referentes ao ensino-aprendizagem do teorema de Thales estarem relacionados com os aspectos da percepção, das significações e do contexto, intencionando minimizá-los e procurando validar as hipóteses levantadas, é que tomamos algumas decisões relativas às escolhas feitas na elaboração das atividades.

A primeira decisão foi quanto ao uso do software Cabri-géomètre **I**. Acreditamos que essa utilização seja útil no sentido de propiciar explorar as variabilidades perceptivas das possíveis configurações do teorema de Thales, por se tratar de um programa que permite trabalhar com uma geometria dinâmica.

Procuramos apresentar a maioria das atividades no registro discursivo evitando fornecer um esquema ou uma configuração com o intuito de não criarmos uma imagem prototípica uma vez que não existe uma configuração única que explicitamente represente todas as demais. Assim, cada grupo terá a possibilidade de construir a sua configuração ao utilizar o computador como um meio de conversão do registro discursivo dado pelos enunciados para um registro gráfico. Ao realizarem essa representação eles deverão fazer algumas observações quanto às razões, às proporções analisando as várias posições que são permitidas pelas características do Cabri-géomètre I levantando algumas conjecturas e, a seguir, tentando justificá-las matematicamente. Procedendo assim, acreditamos que esses alunos terão a possibilidade de chegar a conclusões próximas das proposições de Thales percebendo que não existe uma única representação para cada situação, pois, além das várias representações gráficas que eles produziram manipulando o computador, terão a oportunidade de ver que nem todos os grupos construíram as mesmas configurações, porém chegaram a proposições equivalentes. Intencionamos, nas atividades iniciais específicas do teorema de Thales, abordar os três aspectos pelos quais podemos olhar essa noção. Primeiro, sob o ponto de vista da dilatação que poderá ser justificado pela semelhança de triângulos (conhecimento que acabaram de adquirir nas atividades iniciais). A seguir, a conservação das abscissas em que os alunos deverão perceber que existem outras proporções possíveis de serem construídas utilizando a medida dos segmentos formados por duas transversais a um feixe de paralelas ou utilizando a medida dos segmentos formados pelos lados não paralelos de triângulos sobrepostos ou opostos pelo vértice. Depois, elaboramos uma atividade na qual, além de adquirir a noção de projeção paralela, esses alunos terão a possibilidade de explorar e concluir pela observação das relações entre as medidas dos segmentos formados nas várias configurações possíveis utilizando retas paralelas, transversais e/ou triângulos sobrepostos, a conservação da relação de projeção. Por meio dessas atividades esperamos que os alunos consigam formar a noção do teorema de Thales associando as várias configurações e significações implícitas.

Planejamos, antes de iniciarmos o estudo da semelhança e do teorema de Thales, aplicar algumas atividades para familiarizar os alunos com o programa e tratar alguns assuntos essenciais para o entendimento do teorema como razões e proporções.

No estudo da semelhança, realizamos algumas atividades no computador outras foram pedidas para que o aluno resolvesse em casa.

4.2 - Condição da experimentação

A Escola na qual fizemos a experimentação é uma Autarquia Municipal que faz parte da Universidade de Taubaté. Ela ministra a educação básica, mantendo o Ensino Fundamental, da 1ª a 8ª série, o Ensino Médio, com três séries anuais e o Ensino Médio e a Educação Profissional com as Habilitações Profissionais Técnicas em Eletrônica, Informática, Mecânica, Patologia Clínica e Prótese Dentária. Por não se ter na região muitos cursos profissionalizantes, a escola recebe alunos dos diferentes bairros da cidade e das várias cidades vizinhas como Caçapava, Pindamonhangaba, Santo Antônio do Pinhal, Ubatuba, Campos do Jordão, Jacareí, São Luiz do Paraitinga e Tremembé, o que proporciona a formação de classes bem heterogêneas, tanto sob o aspecto social quanto cultural.

Quanto ao nível socioeconômico, a maioria dos alunos dessa escola é de classe média e baixa e o nível sociocultural reflete, assim, o poder aquisitivo das famílias que valorizam mais os hábitos de consumo que as atividades educativas e culturais. A clientela escolar em geral é composta de alunos na faixa etária de 7 a 21 anos no período diurno e de 15 a 35 anos no período noturno.

No ano de 1999, foram formadas três turmas de 8ª série do Ensino Fundamental. Dessas três turmas, optamos por fazer a experimentação em apenas uma, ou seja, na 8ª série A, pelo fato de estarmos, nesse ano, ministrando as aulas de matemática nessa classe. Na 8ª série B, o ensino da matemática ocorreu de forma tradicional, seguindo o livro didático (BIANCHINI, Edwaldo. 1996. Matemática 8ª série.4ª edição ver. e ampl. São Paulo: Moderna). O procedimento nessas aulas era: o professor explicava um assunto novo, resolvia os exemplos do livro; o aluno prestava atenção, em seguida, resolvia os exercícios propostos um pouco em sala de aula e o resto em casa; na aula seguinte, o professor dava as respostas dos exercícios e resolvia aqueles que os alunos manifestassem não ter entendido ou não ter acertado. A 8ª série B serviu como um dos parâmetros de referência para análise e validação da seqüência didática.

Na grade curricular referente ao Ensino Fundamental, estão previstas 6 aulas semanais, de 50 minutos cada, para serem ministradas com os conteúdos do componente curricular Matemática. Planejamos utilizar, dessas seis aulas semanais, de três a quatro aulas por semana para aplicar a seqüência piloto junto aos alunos da 8ª série A do Ensino Fundamental, ficando estas aulas, a princípio, divididas da seguinte forma:

terça-feira (duas aulas) no Laboratório de Informática;

quarta-feira (duas aulas) atividades de álgebra na sala de aula;

quinta-feira (duas aulas) na sala de aula, sendo, inicialmente, uma para tratar os assuntos de álgebra, e a outra os de geometria, porém, quando necessárias, foram utilizadas as duas aulas para abordar geometria, ora para dar fechamento às atividades propostas para casa, ora para institucionalizar ou dar fechamento às atividades propostas no Laboratório.

Planejamos trabalhar com 30 alunos e 15 computadores, ou seja dois alunos por computador, porém, isso não foi possível, no primeiro encontro constatamos que apenas 14 computadores estavam disponíveis, assim replanejamos para que 12 computadores fossem utilizados com dois alunos cada e os dois restantes com três alunos cada um. De modo geral, em quase todos os encontros no laboratório acabamos por ficar com dois alunos em cada computador pelo fato de sempre alguém faltar.

Ao todo, nessa experimentação foram utilizadas 25 aulas de 50 minutos cada, perfazendo um total de 14 encontros. Dessas aulas, duas foram utilizadas com atividades visando a familiarização dos alunos com o software Cabri-géomètre I além da revisão dos conceitos básicos da geometria elementar, duas para abordar e revisar os conceitos de razão e proporção, 8 para tratar os conteúdos de semelhança de figuras planas e semelhança de triângulos, 13 para abordar especificamente a noção do teorema de Thales. Iniciamos a experimentação no dia 3 de agosto de 1999 e a última atividade foi aplicada no dia 28 de setembro de 1999. Nesse período houve algumas interrupções das aulas devido a alguns feriados, à feira-cultural da escola e a outros eventos.

Na 8ª série B, para se trabalhar esses conteúdos, foram utilizadas, ao todo, 16 aulas, sendo 10 aulas para tratar de razões de segmentos e o teorema de Thales, 6 aulas para abordar a semelhança e semelhança de triângulos. Esse estudo teve início no dia 27 de julho de 1999 e terminou em 19 de agosto de 1999.

Durante a aplicação da seqüência didática referente à noção do teorema de Thales, tivemos a presença de um observador, que procurou, de uma forma geral, observar todas as duplas e, mais sistematicamente, três duplas. Para facilitar, agilizar e direcionar as anotações utilizou a ficha de observação (anexo 4) que elaboramos para cada atividade com objetivos específicos e teceu observações gerais e específicas que achou pertinente no momento. Gravamos as perguntas feitas pelos alunos e as respostas dadas a elas. Os alunos salvaram em disquete as construções feitas no computador. As atividades e produções dos alunos foram recolhidas para posterior análise.

No dia 11 de novembro de 1999, fazendo 44 dias que a turma A havia participado da experimentação e a outra turma 72 dias em relação ao estudo de semelhança, aplicamos o pós-teste nas duas turmas no mesmo horário. Ambas as turmas não tinham conhecimento de que seria aplicado um pós-teste e nem os conceitos que estariam em jogo nesse teste.

Aplicamos o pós-teste, na 8ª série A, junto com a professora de Inglês; na 8ª série B, com a presença da professora de Matemática da sala e do observador. As instruções dadas no início da aplicação do pós-teste, em ambas as turmas, foram dadas em conjunto com o observador. Quando aplicamos esse pós-teste, as duas turmas já haviam estudado as relações métricas no triângulo retângulo, razões trigonométricas o teorema de Pitágoras e as leis do seno e do cosseno.

4.3.– Panorama dos conhecimentos disponíveis dos alunos da experimentação

Iniciamos o ano letivo de 1999 com 33 alunos freqüentando a 8ª série A do Ensino Fundamental, dos quais 20 alunos eram do sexo feminino (60,6 %) e 13 alunos do sexo masculino (39,4%). No segundo semestre, quando aplicamos a seqüência didática, estávamos com 30 alunos, sendo 20 meninas e 10 meninos. A faixa etária desses alunos estava em torno de 13 anos a 15 anos (45,45% com 13anos, 51,52% com 14 anos e 3,03% com 15 anos). Desses alunos 63,64% tinham computador em casa e 36,36% não tinham. Todos esses alunos estavam freqüentando a 8ª série pela primeira vez. Desses 30 alunos, 25 já estudavam na escola desde a 5º série, um veio da escola Estadual, um da escola Municipal e três de escolas particulares. Quanto à repetência em séries anteriores, constatamos que 6 alunos haviam sido reprovados apenas uma vez e 24 alunos nunca haviam sido reprovados.

Levando em conta que o processo de conhecer comporta um ciclo, ou seja, os conceitos, procedimentos e experiências aprendidos numa série influenciam o fazer na série seguinte, achamos necessário descrever em linhas gerais como se deu o ensino-aprendizagem nas séries anteriores, iniciando os comentários pela 5ª série.

Em 1996, no período da tarde, havia duas turmas de alunos freqüentando a 5º série, todos esses alunos tiveram duas aulas semanais de Desenho Geométrico com a mesma professora, nas quais, além de adquirir os conceitos básicos e as notações utilizadas no desenho geométrico, tiveram a oportunidade de aprender manusear os instrumentos de desenho como a régua, para medir e construir segmentos, o transferidor para medir e construir ângulos, o par de esquadros para traçar paralelas e perpendiculares e o compasso para transportar medidas de segmentos e traçar circunferências.

Na disciplina de Matemática das 6 aulas semanais, quatro foram dedicadas ao ensino de álgebra e duas para o ensino de geometria. As aulas de álgebra, em ambas as turmas, foram ministradas pela mesma professora de forma tradicional fazendo-se uso do livro didático. Na parte de geometria cada turma teve aula com uma professora.

Segundo informações dos alunos a 5ª série A, durante o ano letivo não se utilizou do livro didático para o ensino da geometria, sendo trabalhado bastante a geometria utilizando-se da dobradura para a confecção de sólidos geométricos e do cubo-soma. Muitos desses alunos não perceberam a relação das atividades de dobradura com os conceitos geométricos e tiveram a sensação de que não aprenderam nada de geometria e sentiram-se prejudicados com relação a outra turma. Na turma da 5ª série B, a outra professora trabalhou com os alunos as atividades de dobradura para confecção de sólidos geométricos e do cubo-soma, porém, paralelamente, desenvolveu as atividades de geometria propostas no livro didático de forma tradicional, ensinando a área das principais figuras planas usando fórmulas.

Em 1997, tivemos, no período da tarde, três turmas de alunos freqüentando a 6ª série, todos esses alunos tiveram duas aulas semanais de Desenho Geométrico, com a mesma professora, nas quais reviram alguns conceitos básicos e desenvolveram bastante atividades de construções utilizando-se da régua e do par de esquadros nas construções de triângulos e quadriláteros e do compasso para as construções de circunferências circunscritas a triângulos, para o desenvolvimento de atividades relacionadas às posições de reta e circunferência e, entre duas circunferências no plano. Aos alunos que vieram de outras escolas e que não haviam aprendido desenho na 5ª série, foram ministradas aulas de adaptação. A disciplina de Matemática era ministrada por dois professores, um de álgebra (4 aulas) e outro de geometria (2 aulas). Nas aulas de geometria foi trabalhado razão, proporção, regra de três simples e composta e os conteúdos de geometria abordados no livro didático adotado.

Nesse ano iniciaram-se na escola aulas de Informática Educativa, nas quais, por quase um semestre, os alunos não tiveram contato com o Laboratório de Informática, o que gerou um certo descontentamento por parte dos alunos e uma descrença no processo, visto que não lhes foi proporcionado o prometido. Quando começaram a freqüentar o Laboratório, realizaram algumas atividades com o software Paint-Brush e WordPad, que, segundo informação da professora, o "*objetivo era de por meio da ação de desenhar e de escrever os alunos fossem se familiarizando com o teclado, com o mouse, abrir e fechar o programa*". A seguir, foi utilizado o software Cabri-géomètre I para a exploração de alguns conceitos tratados nas aulas de desenho e nas de geometria. "*Construíram polígonos a partir da circunferência e da divisão em partes iguais, sempre observando se o ponto pertence ou não à circunferência circunscrita ao polígono*"[10]. Essa experiência, acreditamos que não tenha sido muito produtiva para esses alunos devido a se ter mais de dois alunos por computador, às aulas não terem

[10] Informação segundo relatório das aulas de informática- 2º semestre – elaborado pela professora de Informática Educativa.

sido muito bem planejadas, às atividades serem estruturadas de forma que o aluno ficasse muito livre e à vontade para manusear os programas, pois a idéia era de que cada aluno explorasse as ferramentas disponíveis. Nesse contexto, muitas vezes esses alunos saíam desses programas mexendo em outros, o que gerou, de certa forma, uma aparente indisciplina, um descomprometimento do aluno, o que talvez proporcionou a esses alunos a conotação de que ir ao Laboratório era passar o tempo, não precisando escrever nada.

Em 1998, tivemos na escola três turmas de 7ª série do Ensino Fundamental, sendo duas no período da manhã e uma no período da tarde. Nesse ano esses alunos não tiveram mais aulas de Informática Educativa e a disciplina de Matemática não foi dividida em álgebra e geometria; sendo assim, cada turma teve um único professor lecionando essa disciplina. Como cada turma teve um professor, não houve uma padronização nos procedimentos. Tivemos professores que, para tratar os conteúdos de matemática, dividiram as aulas durante a semana em álgebra e geometria trabalhando os conteúdos paralelamente. Na turma da tarde, o professor preferiu trabalhar todos os conteúdos de álgebra para depois iniciar o estudo da geometria, acabando por não dar tempo de ver todo assunto abordado no livro didático. Nas aulas de Desenho Geométrico, o objetivo era trabalhar todas as construções fundamentais utilizando apenas a régua e o compasso, tangência, lugar geométrico e posições relativas entre duas circunferências no plano.

Sintetizando, os alunos das 8ª séries do Ensino Fundamental de 1999 que estão nessa escola desde a 5ª série, vivenciaram um ensino-aprendizagem de matemática de forma tradicional, no qual utilizavam como material de apoio pedagógico o livro didático[11] e embora estudando na mesma escola, tiveram experiências bem diversificadas. As turmas A, B, e C foram montadas mesclando os alunos das três sétimas séries do ano anterior com os alunos que vieram de outras escolas ocasionando salas bem heterogêneas. A 8ª série A e a 8ª série B freqüentavam aulas no período da manhã e a 8ª série C no período da tarde. A todos esses alunos foram dadas as noções do desenho geométrico; em cada classe havia alunos que já tinham tido uma experiência com o computador e outros que nunca tinham utilizado.

Notamos, no transcorrer do ano letivo, a necessidade de alguns alunos em se apoiar no livro didático, não confiando em si, limitando seu potencial de criatividade e iniciativa na resolução de problemas, sempre procurando uma receita ou fórmula mágica. Talvez essas atitudes sejam fruto do ensino tradicional.

---

[11] Bianchini, 1997

4.4- Apresentação das situações propostas

As situações propostas aos alunos durante a experimentação foram divididas em duas etapas. Na primeira etapa visávamos a familiarização do aluno com o software Cabri-géomètre I, a revisão de algumas noções geométricas, a formação dos grupos e a experiência de se trabalhar em grupo. Na etapa seguinte, intencionávamos a formação dos conceitos de semelhança e do teorema de Thales; para isso elaboramos uma seqüência didática composta de duas partes que nomeamos de Parte **A** e Parte **B**. Na Parte **A**, propusemos atividades visando à construção dos conceitos de semelhança de figuras planas e semelhança de triângulos; na Parte **B**, a do teorema de Thales.

Antes de aplicarmos essa seqüência didática, fizemos uma análise a priori das atividades propostas, visando a uma posterior validação das mesmas após sua aplicação para tirarmos algumas conclusões que nos possibilitassem aperfeiçoar a mesma intencionando uma posterior aplicação e/ou, mesmo, fazer a análise dos fenômenos relativos ao ensino-aprendizagem dessas noções.

4.4.1 - Análise a priori das situações propostas

Iniciamos esta análise descrevendo os objetivos gerais das situações referentes à primeira etapa e às atividades propostas, a seguir, fizemos a análise da seqüência didática Parte **A** e Parte **B**.

A primeira etapa da experimentação teve por objetivo propiciar ao aluno a familiarização com o software Cabri-géomètre I, por meio de atividades que lhe permitiria, primeiro, conhecer os principais menus e suas opções, depois a exploração e a construção das opções do menu construção com a finalidade de rever a definição de algumas noções geométricas, ao mesmo tempo em que se explora a manipulação do programa. Nessas atividades também tivemos a intenção de ir desenvolvendo a idéia do trabalho em grupo, da leitura, a capacidade de analisar, observar, tecer comentário e tirar conclusões, atitudes essas pouco trabalhadas com esses alunos na disciplina de matemática, até então. Após a realização dessas atividades fizemos um fechamento, discutindo e comentando com os alunos algumas características do programa e de suas opções, sintetizando os conceitos abordados, e justificando as escolhas feitas. No encontro seguinte, recordamos os conceitos de razão de segmentos, de segmentos proporcionais, segmentos comensuráveis e incomensuráveis, proporção e suas propriedades. Planejamos para essa etapa utilizar 4 aulas de 50 minutos, ou seja, duas no laboratório e duas em sala de aula. As atividades propostas para essa etapa estão no anexo **1**.

Atividades da seqüência didática Parte A – Semelhança

Para a segunda etapa das situações organizamos atividades para serem realizadas tanto fazendo uso do recurso informático quanto pela manipulação dos instrumentos de desenho e da sobreposição de figuras geométricas.

Na Parte **A**, iniciamos a experimentação propondo duas atividades nas quais utilizamos como recurso didático a máquina copiadora e os instrumentos de desenho régua e transferidor. Essas atividades foram realizadas pelos alunos, individualmente, em casa e foi pedido que trouxessem para serem discutidas em grupo.

A primeira teve por objetivo mostrar a redução e ampliação das figuras proporcionando aos alunos a possibilidade de analisar algumas características que permanecem invariantes (medida dos ângulos e razão entre os lados), enquanto outras variam (medida dos lados, área, perímetro). Para a agilização da atividade, fornecemos aos alunos as figuras já ampliadas e reduzidas.

A segunda objetivou verificar se o aluno percebe a relação entre as figuras semelhantes, ou seja, quando a razão de semelhança entre a medida dos lados é um número qualquer **k**, a razão entre seu perímetro também é **k** e entre a sua área é $\mathbf{k^2}$.

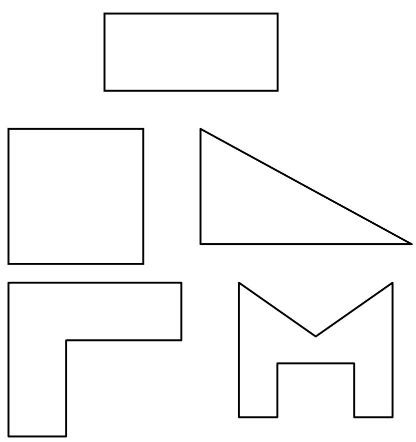
Essas atividades foram adaptadas do livro *"Proporcionalidad Geometrica y Semejanza"* Grupo Beta, editorial Sintesis, p. 149, como descrito abaixo:

1) Dado o desenho abaixo, tire um xérox ampliando e outro reduzindo as figuras. Meça os lados e os ângulos de todas as figuras e responda:

a) o que ocorreu com os ângulos quando a figura foi ampliada (houve variação)? e quando a figura foi reduzida?

b) calcule a razão entre a medida dos lados de cada figura com a medida dos lados correspondentes na ampliação e na redução.

c) ampliando ou reduzindo as figuras o que ficou invariante? o que variou?



2) Utilizando os desenhos da atividade anterior:

a) calcule as áreas das figuras da ficha, depois calcule as áreas das figuras ampliadas e reduzidas e em seguida determine a razão entre as áreas de cada figura da ficha com a área de sua respectiva ampliação ou redução;

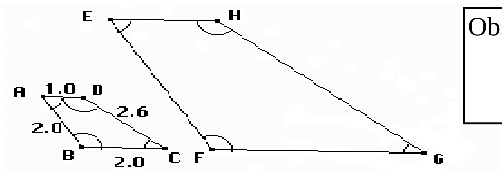
b) calcule o perímetro das figuras da ficha, depois calcule o perímetro das figuras ampliadas e reduzidas, e em seguida determine a razão entre o perímetro de cada figura da ficha com o perímetro da sua respectiva ampliação e redução;

c) observe as razões encontradas entre as medidas dos lados, das áreas e do perímetro e determine uma relação entre elas.

Após a realização das atividades descritas acima, acreditamos que os alunos começarão a ter o sentimento do que é variante e do que é invariante nas figuras semelhantes, ou seja, que a medida dos ângulos se mantêm constante, enquanto, as medidas dos lados, embora possam sofrer alteração, são proporcionais. Feito isso, construímos a seqüência didática – Parte **A**, descrita abaixo, com atividades para serem desenvolvidas com o Cabri-géomètre I visando formarmos os conceitos de semelhança de figuras planas.

Seqüência Didática - Parte A - (2º encontro no laboratório)

Atividade 1



Obs.: Quatro segmentos são proporcionais se os números que exprimem suas medidas, na mesma unidade, formam uma proporção.

Abrindo o arquivo **A: S11**, você encontra os quadriláteros ***ABCD*** e ***EFGH***. Movendo os pontos **A** e **B** você consegue ampliar ou reduzir a área dos quadriláteros e movendo o ponto **F** você pode ampliar ou reduzir a área do quadrilátero ***EFGH***, sem modificar as medidas do quadrilátero ***ABCD***. Utilizando no menu "diversos" a opção "medir" marque as medidas dos lados e ângulos destes quadriláteros, observe esses valores e responda:

a) deslocando o ponto **F** o quadrilátero ***EFGH*** mantém a mesma forma, ou seja, a mesma aparência em relação ao quadrilátero ***ABCD*** ou ele se deforma? Resp.: ____

b) escreva o que você observa com relação aos ângulos internos desses quadriláteros.____

c) deslocando os pontos **A**, **B** e **F**, o que você observou no item anterior, ele continua válido?____

d) desloque o ponto **F** até que ***EF*** fique o dobro de ***AB***. Observe e escreva que relação existe entre as outras medidas do quadrilátero ***ABCD*** com relação ao quadrilátero

EFGH, ou seja, ***AB*** =____***EF***, ***AD*** = ____ ***EH***, ***BC*** = ____ ***FG***, ***CD*** = ____ ***GH***.

____

e) desloque o ponto **F** até que ***EF*** fique o triplo de ***AB***. Observe e escreva que relação existe entre as outras medidas do quadrilátero ***ABCD*** com relação ao quadrilátero ***EFGH***, ou seja, ***AB*** = ____ ***EF*** , ***AD*** = ____ ***EH*** , ***BC*** = _____***FG***, ***CD*** = ____ ***GH***.

____

f) será que deslocando o ponto **F** em qualquer posição a razão entre as medidas dos lados correspondentes de um dos quadriláteros com relação ao outro se mantem constante, ou seja, os lados correspondentes são proporcionais? (Nesse caso, os lados correspondentes são: ***AB*** e ***EF***, ***AD*** e ***EH***, ***BC*** e ***FG***, ***CD*** e ***GH***).___________

____

Você pode fazer esta verificação: desloque o ponto **F**, fixe uma posição, preencha a tabela abaixo e faça uma análise. Repita isso para uma outra posição.

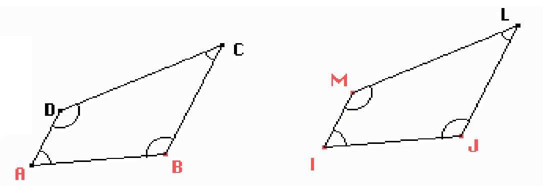
1ª posição					
AB		*EF*		*AB/EF*	
BC		*FG*		*BC/FG*	
CD		*GH*		*CD/GH*	
DA		*HE*		*DA/HE*	

2ª posição					
AB		*EF*		*AB/EF*	
BC		*FG*		*BC/FG*	
CD		*GH*		*CD/GH*	
DA		*HE*		*DA/HE*	

.

Conclusão: Os quadriláteros *ABCD* e *EFGH*_______a mesma aparência, os ângulos _______________ congruentes e a medida dos lados _______________ proporcionais.

Atividade 2



Abrindo o arquivo **A: S12**, você encontrará os quadriláteros ***ABCD*** e ***IJLM***. Utilizando no menu “diversos” a opção “medir”, marque as medidas dos lados e ângulos desses quadriláteros, observe essas medidas e responda:

a) os quadriláteros ***ABCD*** e ***IJLM*** têm a mesma forma, ou seja, a mesma aparência?

____

Deslocando os pontos **I**, **J** e **M** o quadrilátero ***IJLM*** mantem a mesma aparência em relação ao quadrilátero ***ABCD***? Escreva o que você observou. Resp. ______________

b) escreva o que você observa com relação aos ângulos internos desses quadriláteros.____

c) deslocando os pontos **I**, **J** e **M**, o que você observou no item anterior continua válido?

____

d) desloque o ponto **J** até que ***IJ*** fique o dobro de ***AB***. Observe e escreva que relação existe entre: ***AB*** = ____ ***IJ***, ***AD*** = ____***IM***, ***BC*** = ____***JL***, ***CD*** = ____ ***LM***. Resp. __
____

Desloque o ponto **M** e verifique se essa relação se mantem. Resp. ____

e) desloque o ponto **J** até que ***IJ*** fique o triplo de ***AB***. Observe e escreva que relação existe entre: ***AB***= ____***IJ***, ***AD***=____***IM***, ***BC***=____***JL***, ***CD***=____***LM***. Resp. _______
____

f) deslocando o ponto **J** em qualquer posição a razão entre as medidas dos lados : ***AB*** e ***IJ***, ***AD*** e ***IM***, ***BC*** e ***JL***, ***CD*** e ***LM***; se mantem constante, ou seja, os lados correspondentes são proporcionais?____
____

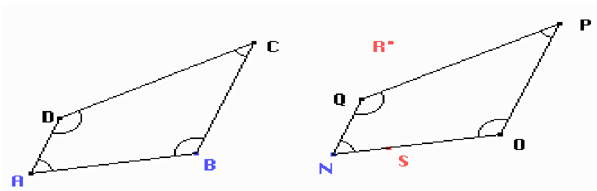
Se achar necessário, pode fazer esta verificação: desloque o ponto **J** e **M**, fixe uma posição, preencha a tabela abaixo e faça uma análise. Repita isso para uma outra posição.

1º posição					
AB		*IJ*		*AB/IJ*	
BC		*JL*		*BC/JL*	
CD		*LM*		*CD/LM*	
DA		*MI*		*DA/MI*	

2º posição					
AB		*IJ*		*AB/IJ*	
BC		*JL*		*BC/JL*	
CD		*LM*		*CD/LM*	
DA		*MI*		*DA/MI*	

Conclusão: Os quadriláteros *ABCD* e *IJLM* ____ a mesma aparência, os ângulos _______ congruentes e a medida dos lados _________________________proporcionais.

Atividade 3



Abrindo o arquivo **A: S13**, você encontrará os quadriláteros ***ABCD*** e ***NOPQ***. Movendo os pontos **A** e **B** você conseguirá ampliar ou reduzir a área do quadrilátero ***ABCD***; deslocando o ponto **S** você poderá ampliar ou reduzir a área do quadrilátero ***NOPQ*** e deslocando o ponto **R** você mudará as medidas dos ângulos internos do quadrilátero ***NOPQ*** sem modificar as medidas do quadrilátero ***ABCD***. Utilizando no menu "diversos" a opção "medir", marque as medidas dos lados e ângulos desses quadriláteros, observe esses valores e responda:

a) deslocando o ponto **R,** escreva o que você observa com relação a dimensão dos dois quadriláteros ____ o quadrilátero ***NOPQ*** mantém a mesma forma, ou seja, a mesma aparência em relação ao quadrilátero ***ABCD*** ou ele se deforma? Resp ________________________

____

Deslocando o ponto **S,** escreva o que você observa com relação a dimensão dos dois quadriláteros____

____

b) escreva o que você observa com relação aos ângulos internos desses quadriláteros. ____

c) deslocando os pontos **R** e **S**, o que você observou no item anterior continua válido? ____

d) desloque o ponto **S** até que ***NO*** fique o dobro de ***AB***. Observe e escreva que relação existe entre: ***NO*** *e* ***AB***, ***OP*** *e* ***BC***, ***PQ*** *e* ***CD***, ***NQ*** *e* ***AD*** _________________________

____

e) desloque o ponto **S** até que ***NO*** fique o triplo de ***AB.*** Observe e escreva que relação existe entre: ***NO*** *e* ***AB***, ***OP*** *e* ***BC***, ***PQ*** *e* ***CD***, ***NQ*** *e* ***AD*** _________________________

____

f) será que, deslocando o ponto **S** em qualquer posição, a razão entre as medidas dos lados: ***NO*** *e* ***AB***, ***OP*** *e* ***BC***, ***PQ*** *e* ***CD***, ***NQ*** *e* ***AD***; se mantem constante, ou seja, os lados são proporcionais?____

Você pode fazer esta verificação: desloque os pontos **R** e **S**, fixa uma posição, preencha a tabela abaixo e faça uma análise. Repita isso para uma outra posição.

1º posição					
AB		NO		AB/NO	
BC		OP		BC/OP	
CD		PQ		CD/PQ	
DA		QN		DA/QN	

2º posição					
AB		NO		AB/NO	
BC		OP		BC/OP	
CD		PQ		CD/PQ	
DA		QN		DA/QN	

Conclusão: Os quadriláteros ***ABCD*** e ***NOPQ*** ___________a mesma aparência, os ângulos ________congruentes e a medida dos lados_________________ proporcionais.

Objetivo das atividades de 1 a 4:

Por meio dessas atividades, os alunos deverão perceber que ao se ampliar ou se reduzir a área das figuras, somente quando os ângulos correspondentes são congruentes e a medida dos lados proporcionais é que as figuras permanecem com a mesma forma não sofrendo deformações, a seguir, definimos figuras semelhantes. Nas três atividades iniciais, temos situações em que, ao ampliarmos ou reduzirmos a área dos quadriláteros, seus lados são proporcionais e seus ângulos se mantêm constantes, outros que seus ângulos se mantêm constantes e seus lados não são proporcionais e uma que seus ângulos não são congruentes e seus lados são proporcionais, isso respectivamente nas atividades **1**, **2** e **3**.

Atividade 4

Observando os quadriláteros das atividades **1**, **2** e **3**, responda:

- Ao "ampliar" e "reduzir" as figuras, quais delas mantiveram a medida dos lados correspondentes proporcionais?____
- Ao "ampliar" e "reduzir" as figuras, quais delas mantiveram a medida dos ângulos correspondentes congruentes?____
- Ao "ampliar" e "reduzir" as figuras, quais delas mantiveram a medida dos lados correspondentes proporcionais e dos ângulos correspondentes congruentes? ________
____
- Em qual ou quais figuras, ao "ampliar" e "reduzir", as características foram as mesmas observadas nas figuras ampliadas e ou reduzidas pela máquina copiadora? ____

Chamamos de ***figuras semelhantes*** *aquelas que possuem todos os* ***ângulos correspondentes congruentes*** *e* ***lados correspondentes proporcionais***.

OBS. - ***Ângulos homólogos*** são ângulos cujos vértices se correspondem;

- ***Lados homólogos*** são lados cujas extremidades são vértices que se correspondem;

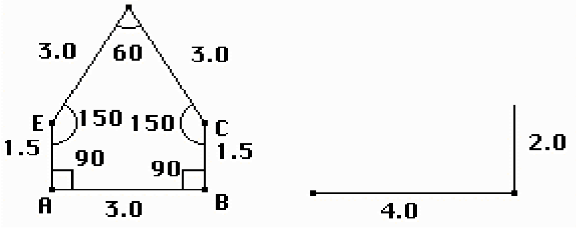
- ***Razão de semelhança*** *é a razão entre a medida dos lados homólogos de dois polígonos semelhantes*.

- Ângulos correspondentes - ____
- Lados correspondentes - ____

Diante disso podemos afirmar que os quadriláteros ***ABCD*** e ___________ são semelhantes. Quando ***EF*** é o dobro de ***AB*** a razão de semelhança entre os quadriláteros ___________e ***ABCD*** é _____; e quando ***EF*** é o triplo de ***AB*** a razão de semelhança entre os quadriláteros ___________e ***ABCD*** é ___________________.

Atividade 5 - Cabri – S3

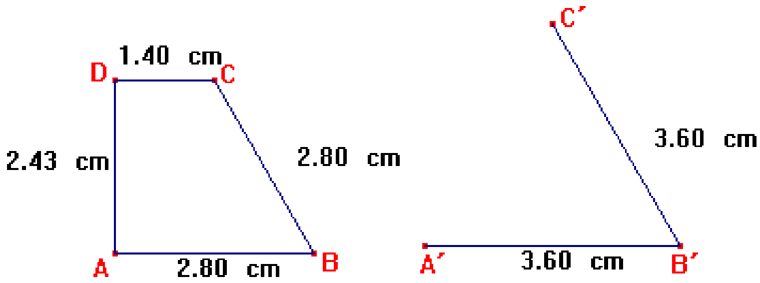
Abra o arquivo **A: S3** e você verá representada na tela a figura ***ABCDE*** e o início de uma outra. Comparando as duas, tente terminar a construção da segunda figura para que ela seja semelhante à primeira.



Observação: O objetivo dessa atividade é que o aluno aplique a definição de figuras semelhantes para terminar a construção. Se observarem na figura o retângulo ***ABCE***, poderão terminar essa atividade ou pela construção dos ângulos de 150° (90° + 60°) ou, se perceberem, pela construção do triângulo eqüilátero ***CDE***.

Atividade 6 – Cabri – S2

Abra o arquivo **A: S2** e você verá representada na tela a figura ***ABCD*** e o início de uma outra. Comparando as duas, tente terminar a construção da segunda figura para que ela seja semelhante à primeira.



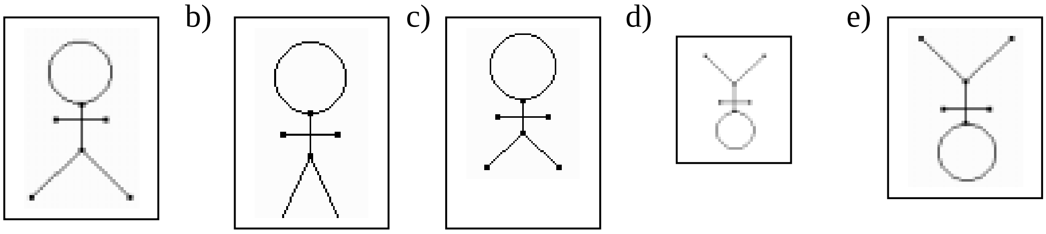
Observação: para terminar a figura, os alunos poderão construir os ângulos de vértice **A** e de vértice **C** ou o ângulo **A** e o segmento ***C'D'***. Para determinar ***C'D'***, pode-se determinar o ponto médio **M** de *A'B'* uma vez que ***AB*** é o dobro de ***CD***, construir o paralelogramo ***M'B'C'P'***, fazer uma circunferência de raio ***C'P'***, determinar o ponto **D'** intersecção dessa circunferência com o lado do ângulo.

Atividades para realizar em casa

Concluída essa seqüência didática utilizando o Cabri-géomètre I, os alunos deveriam realizar em casa as atividades **3**, **4** e **5** que também foram adaptações do livro "*Proporcionalidad Geometrica y Semejanza*" Grupo Beta, editorial Sintesis, pág 152 e 162, como segue:

3) Quais das seguintes fotografias são semelhantes à figura do item **a**? Por quê?

- Explicar em que se diferenciam as figuras semelhantes das que são só parecidas.
- a) b) c) d) e)



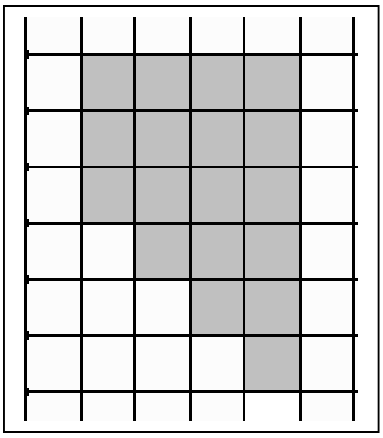
Objetivo:

Pretendemos com essa atividade diagnosticar a concepção que os alunos têm de figuras semelhantes e de figuras parecidas.

4)

Amplie a figura ao lado, dobrando suas medidas, e reduza esta figura de forma que suas medidas fiquem pela metade.
Responda:

- Qual a razão de semelhança?
- Qual o perímetro das figuras? Quanto aumentou o perímetro?
- Qual a área? Quanto aumentou a área?



Objetivo:
Aplicar a definição de figuras semelhantes na ampliação e redução de figuras.

5) Observe os triângulos retângulos anexos (anexo 2). Todos são parecidos? Parecido é o mesmo que semelhante?
- Meça seus ângulos. O que observou?
- Meça seus lados. Complete a tabela seguinte.

Triângulos	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Cateto >								
Cateto <								
Razão: $\frac{cat >}{cat <}$								
$\angle$ agudo >								
$\angle$ agudo <								

- Agrupe os triângulos que acredita serem semelhantes.
- Coloque-os sobrepostos no triângulo maior de forma a coincidir o ângulo reto.
- Escrevam o que vocês observam: ____

____

____

Objetivo:

Por meio da atividade, o aluno deverá perceber que todos os triângulos cujos ângulos são congruentes são semelhantes, e, sobrepondo-os de modo a coincidir um de seus vértices, seus lados correspondentes possivelmente são paralelos.

As atividades realizadas no laboratório e aquelas propostas para casa deverão ser discutidas e debatidas em sala de aula após as observações.

No encontro seguinte, prevemos, pela reflexão e experimentação, utilizando régua e compasso se for necessário, pesquisar as condições e critérios para termos triângulos semelhantes e posteriormente resolver alguns exercícios sobre o assunto.

Paralelamente ao estudo de semelhança, os alunos deverão na disciplina de Desenho Geométrico estudar homotetia. Finalizada essa etapa podemos, enfim, iniciar a formação do conceito do teorema de Thales.

Atividades da seqüência didática Parte B – teorema de Thales

Fizemos a opção por iniciar este estudo utilizando o software Cabri-géomètre I, por ser um ambiente dinâmico, no qual acreditamos ser possível explorar as diferentes configurações pertinentes para cada atividade e suas variabilidades perceptivas, evitando assim instaurar uma imagem prototípica. Para isso montamos a seqüência didática Parte **B**, com atividades que propiciam aos alunos o desenvolvimento de algumas habilidades e atitudes, tais como:

- trabalho em grupo;
- leitura e interpretação de texto;
- conversão do registro discursivo para o registro gráfico;
- execução de experimentações;
- observações;
- conjecturas;
- levantamento de hipóteses;
- conclusões;
- justificativas.

Planejamos, para essa seqüência didática, utilizar dez aulas de 50 minutos, distribuídas da seguinte forma: quatro para realização das atividades no laboratório de informática, duas para discussão das atividades, conclusões e justificativas, uma para institucionalizar o teorema de Thales, três para trabalharmos alguns exercícios e problemas de aplicação.

Seqüência Didática - Parte B - (3º encontro no laboratório)

Atividade 1 - adaptada (livro Cabri p. 114 e 115)

Construir um triângulo qualquer ***RTU***, em seguida, construir o ponto **S** sobre o segmento ***RU***. A paralela à *UT* passando por **S**, corta a reta ***RT*** em **K**. Crie e meça os segmentos: ***RS***, ***RU***, ***RK***, ***RT***,***SK*** *e* ***UT.***

Desloque os pontos e verifique se a figura que você construiu permanece com as características dadas no enunciado. Em caso afirmativo chame o professor. Em caso negativo refaça.

Anote as medidas: ***RU***= ______, ***RT***= ______, ***UT***= ________

Não desloque mais **R**, **U** e **T**.

Escolhendo várias posições de **S** sobre ***RU*** preencha a tabela.

Posição de S	1	2	3	4	5		1	2	3	4	5
medida de RS						RS/RU					
medida de RK						RK/RT					
medida de Sk						SK/ UT					

Exploração:
Ao traçar a paralela, quantos e quais triângulos você formou? ______________

Se o ponto **S** estiver no meio de ***UR,*** qual é o valor do quociente ***RS/RU*** ?

____

Em cada posição, as razões entre si têm o mesmo valor?

____

Esses triângulos são semelhantes? Justifique. ____________________________

____

____

Analisando a tabela que você construiu, pesquise quais proporções podemos obter com as diferentes medidas. ______________________________

____

Após observar esta atividade, tente enunciar alguma relação entre a paralela de um dos lados do triângulo e os outros lados. ____________________________

____

Salvar – A: B1

Objetivo:

Através desta atividade, o aluno deverá perceber que "*toda paralela a um dos lados de um triângulo, não passando por um de seus vértices, divide os outros dois lados em segmentos proporcionais*".

A figura abaixo representa uma das configurações que poderemos obter.

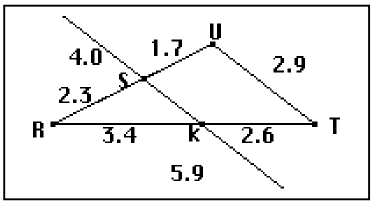


Figura 50

Como são várias as soluções possíveis de serem encontradas, fica difícil descrevê-las, porém as conclusões encontradas deverão ser equivalentes, se a construção for feita adequadamente. Nessa atividade, para não terem problema com a construção, deverão sempre: nomear os pontos para facilitar a identificação caso haja alguma ambigüidade; estar atentos na determinação do ponto **S**, usando a opção ponto sobre objeto; na paralela, fazer a construção e não simplesmente criar a reta aparentemente paralela; observar e criar os segmentos que forem medir.

Ao construir a situação proposta, cada aluno poderá representar a paralela em uma posição. Essa posição vai ser conseqüência de como foram nomeados os vértices do triângulo. Fazendo a conversão do registro discursivo para o registro gráfico, provavelmente as primeiras unidades figurais elementares que iríamos perceber seriam as de dimensão dois, pois o próprio enunciado nos remete a isso.

Atividade 2 -

Traçar 2 retas ***AC*** e ***AB*** concorrentes em **A**. Criar o segmento ***BC***. Construir um ponto **D** sobre ***AB*** e a Paralela a ***BC*** por **D**. Nomear o ponto de intersecção desta reta com ***AC*** de **E**. Deslocando o ponto **D** representar as possíveis configurações na folha de papel sulfite anexa. A seguir, chamar o professor.

Crie os segmentos **AD,** ***AE***, ***DE***, ***AB***, ***AC***, ***BC*** e para cada configuração, marque suas medidas.

Para cada configuração os triângulos formados ***ADE*** e ***ABC*** são semelhantes?

____

Verifique em cada configuração quais são os lados correspondentes e complete a tabela de forma que os lados correspondentes fiquem associados nas colunas. A seguir, calcule a razão entre a medida dos segmentos correspondentes.

lados do triâng. ABC	AB=	AC=	BC=	lados do triâng. ABC	AB=	AC=	BC=
lados do triâng. ADE				lados do triâng. ADE			
razão				razão			
lados do triâng. ABC	AB=	AC=	BC=	lados do triâng. ABC	AB=	AC=	BC=
lados do triâng. ADE				lados do triâng. ADE			
razão				razão			

Tente representar para cada uma das configurações todas as proporções possíveis com esses segmentos. Verifique se as proporções são válidas para qualquer uma das configurações.

Conclusão: ____

Troque idéia com seu parceiro e tentem escrever uma relação ou conclusão desta atividade. ____

Salvar – A:B2

Objetivo:

Por meio desta atividade o aluno deverá perceber além das diversas maneiras de se representar um par de retas concorrentes interceptadas por paralelas que, em qualquer uma das configurações podemos obter segmentos proporcionais. Por meio da experimentação e da observação dos triângulos semelhantes o aluno poderá expressar a proporcionalidade pelo aspecto da conservação das abscissas ou pela dilatação.

Análise didática e matemática:

São várias as soluções e configurações possíveis de serem encontradas, fica difícil descrevê-las; porém, as conclusões deverão ser equivalentes. Esperamos que no mínimo os grupos consigam três configurações que julgamos serem pertinentes. Essas configurações surgirão como conseqüência da posição do ponto **D**, ou seja, quando o ponto **D** está entre **A** e **B,** temos dois triângulos sobrepostos, quando **D** está oposto a **B** em relação a **A,** temos os triângulos opostos pelo vértice, e a outra é quando o ponto **B** está entre **A** e **D** na qual os triângulos ficariam sobrepostos. A diferença entre as configurações dos triângulos sobrepostos está na razão de semelhança entre os triângulos ***ADE*** e ***ABC*** formados, pois, na primeira situação ***ADE*** é uma redução do triângulo ***ABC*** e na outra o triângulo ***ADE*** é uma ampliação. Nessa atividade, os problemas que poderão surgir em relação à construção são: não se nomear os pontos dificultando a identificação dos segmentos no caso de ambigüidade e na hora de medir os segmentos; na determinação do ponto **D** se não usarem a opção ponto sobre objeto, na paralela se não for feita usando essa opção no menu construção, se não utilizarem a opção intersecção de dois objetos para encontrar o ponto **E**, na leitura e determinação das medidas dos segmentos. Nessa ação de deslocar o ponto **D** para explorar as várias configurações acreditamos que além de estarem se familiarizando com esse esquema os alunos também estão desenvolvendo a visualização das subfiguras.

Fazendo a conversão do registro discursivo para o registro gráfico, provavelmente teremos uma ambigüidade visual, pois ora podemos perceber as unidades figurais de dimensão dois, ora as de dimensão um; o enunciado inicial enfatiza as unidades figurais de dimensão um (retas concorrentes, reta paralela, segmentos) visando a construção da situação; a seguir, destaca os triângulos ***ADE*** e ***ABC***, almejando que se pesquise se são ou não semelhantes. Isso talvez seja um exercício para se trabalhar a visualização.

Veja abaixo três possíveis configurações a encontrar:

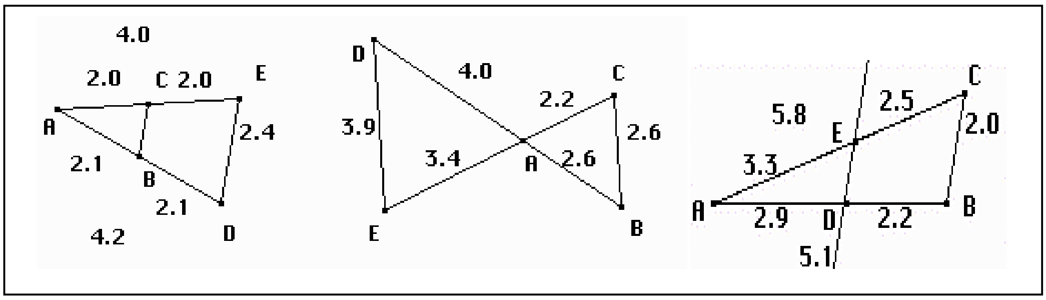
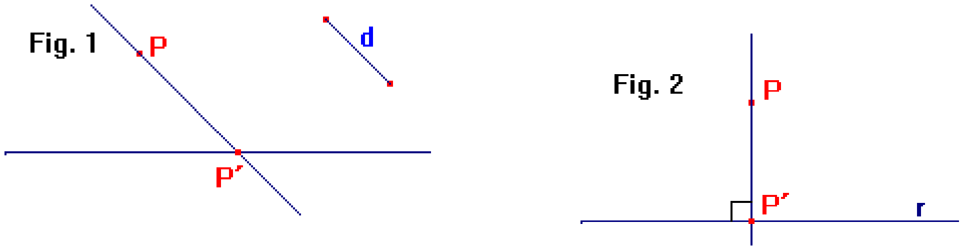


Figura 51

Atividade 3-

Observação: Projeção Paralela

Dado um ponto **P** e uma reta **r**, chamamos de projeção de **P** sobre **r**, segundo uma direção **d,** o ponto (**P'**) de intersecção da reta paralela a **d** passando por **P** com a reta **r**. Veja figura **1** abaixo:



Projeção Ortogonal:

Dado um ponto **P** e uma reta **r**, chamamos de projeção ortogonal de **P** sobre **r** ao ponto **(P')** de intersecção da reta perpendicular a **r** passando por **P**. Veja a figura **2** acima.

Traçar duas retas concorrentes **r** e **s** e uma reta **d** não paralela a **r** e **s** . Construa sobre **r** os pontos **A** e **B** e crie o segmento ***AB***. Em seguida, determine os pontos **C** e **D** projeção dos pontos **A** e **B** sobre a reta **s**, segundo a direção **d**. O segmento ***CD*** é a projeção do segmento ***AB*** sobre a reta **s**. Construa o ponto **M** médio de ***AB*** e determine sua projeção **M´.**

Responda: Em que posição; com relação ao segmento ***CD***, vocês acham que está a projeção do ponto médio de ***AB*** sobre **s**? ___________________________________

Verifique sua hipótese medindo o segmento ***CM´*** e ***M´D***, a seguir desloque as retas e verifique se esta hipótese ainda é valida.

Conclusão:____

____

Marque um ponto qualquer **P** sobre **r** e determine a projeção **P´** de **P** sobre **s** segundo a direção **d**. Verifique, em várias posições, se a razão entre os segmentos ***AP*** e sua projeção ***CP`*** se mantêm constante. Fixe uma posição, meça e anote as medidas dos segmentos : ***AB*= ____, *AP*=____, *PB*=____, *CD*=_____, *CP´*=____, *PD*=_____.** A seguir, escreva todas as razões e as proporções que você conseguir formar com esses segmentos. ____

Objetivo: Por meio desta atividade o aluno poderá perceber a proporcionalidade entre os segmentos sob o aspecto da projeção, além de apreender o conceito de projeção segundo uma direção.

Análise didática e matemática:

A figura abaixo representa uma das configurações que se pode obter.

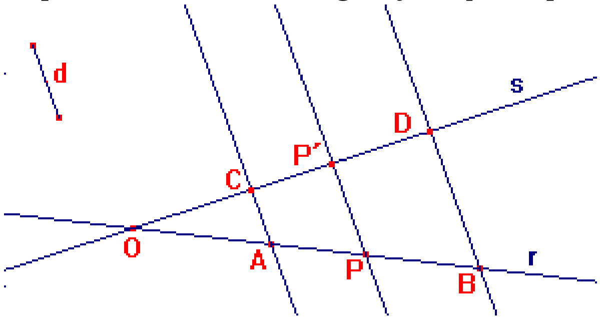


Figura 52

São várias as soluções e configurações possíveis de serem encontradas, no entanto, deverão chegar a conclusões equivalentes. Essas configurações surgirão como conseqüência da posição das retas **r**, **s** e **d** e dos pontos **A** e **B**, ou seja, se a reta **d** estiver na posição horizontal, vertical ou inclinada as paralelas também estarão nessa posição respectivamente; dependendo da localização dos pontos **A** e **B** sobre **r** iremos encontrar as configurações dos triângulos sobrepostos ou aquela dos triângulos opostos pelo vértice. Nessa atividade, poderemos ter o problema na construção da situação se as opções do menu construção (ponto sobre ponto, intersecção de dois objetos, paralelas) não forem utilizadas convenientemente, o que talvez, iria induzir tirar conclusão não pertinente. Na ação de deslocar o ponto **P** verificando nas várias posições se a razão entre os segmentos e suas projeções se mantêm constante, acreditávamos, além da fixação do conceito de projeção, estar desenvolvendo a percepção e a exploração das configurações.

Após a conversão do registro discursivo para o registro gráfico provavelmente na apreensão da figura teremos uma ambigüidade visual pois, ora poderemos perceber as unidades figurais de dimensão dois, ora as de dimensão um (retas concorrentes, reta paralela, segmentos) talvez alguns alunos não percebam as unidades de dimensão dois.

No próximo encontro, na sala de aula, esperamos institucionalizar o teorema de Thales propondo primeiramente que os alunos em duplas leiam alguns enunciados e tentem representar uma configuração e as proporções correspondentes, depois discutiremos as representações encontradas e a seguir, vamos refletir um pouco na história da matemática sobre as conjecturas de como talvez Thales descobriu a altura das pirâmides. Parte dessa atividade proposta está descrita abaixo e o resto no anexo 3.

Nas atividades **1**, **2** e **3** – Parte **B** – podemos perceber algumas relações entre retas paralelas e segmentos proporcionais. Essas relações, durante muito tempo, foram denominadas Teorema dos Segmentos Proporcionais e hoje as conhecemos por **“Teorema de Thales”.**

“O que vem a ser um teorema?”

Teorema : “*proposição que precisa ser demonstrada para se tornar evidente*” (Dicionário Prático Ilustrado, publicado sob a direção de Jaime de Séguier, edição actualizada e aumentada por José Lello e Edgar Lello- LELLO & IRMÃO- Editores – 1972).

Teorema: “*relação verdadeira numa teoria determinada*” (Dicionário da Matemática Moderna- CHAMBADAL, Lucien- tradução de ANDRADE, Ione- ED. Nacional, 1978).

A princípio vamos considerar o teorema como uma relação verdadeira e refletir sobre seus enunciados e, mais para frente, veremos alguma de suas demonstrações.

Selecionamos abaixo alguns enunciados relativos ao teorema de Thales. Leia-os com atenção e tente esboçar uma configuração que represente estes enunciados e suas respectivas proporções.

a) Nos elementos de Euclides (proposição **2** do livro ***VI***), temos:

“*Se traçarmos uma paralela a um dos lados de um triângulo, esta reta cortará proporcionalmente os lados desse triângulo, e, se os lados de um triângulo são cortados proporcionalmente, a reta que une as secções será paralela ao outro lado do triângulo*”.

b) “ *Se duas retas são transversais a um feixe de paralelas, então a razão entre dois segmentos quaisquer de uma delas é igual à razão entre os segmentos correspondentes da outra*”.

c) “*Se retas paralelas determinam sobre duas transversais segmentos correspondentes, então as razões entre esses segmentos correspondentes formam uma proporção*”.

Uma vez institucionalizada a noção do teorema de Thales, pretendemos trabalhar algumas de suas aplicações procurando além de lhe dar significado realizar atividades para fixação desse conteúdo explorando a conversão dos registros discursivo, figural e simbólico. As atividades **4**, **5** e **6** foram planejadas para serem trabalhadas com o software Cabri-géomètre I. Já nos exercícios de aplicação a utilização do Cabri será opcional, ou seja, poderão ser executadas com o recurso do computador ou utilizando-se dos instrumentos de desenho.

Atividade 4 -

Construir um pentágono *ABCDE* e um ponto **O** no interior da figura. Traçar os segmentos: ***AO***, ***OE***, ***OB***, ***OC***, ***OD***. Determinar os pontos ***A´,B´, C´, D´, E´*** tal que*:* ***AO´= 1/2OA; OB´= 1/2OB; OC´= 1/2OC........,*** *a seguir, trace os segmentos* ***A´B´, B´C´, C´D´, D´E´*** *e* ***E´A´.***

Pesquisar:

a) Quais retas ou segmentos são paralelos nessa figura? Tente justificar.______

____

b) Provar utilizando as propriedades que você conhece que ***OÂ´B´*** = ***OÂB***____

____

c) Comparar os ângulos do pentágono ***ABCDE e A´B´C´D´E´***.____________

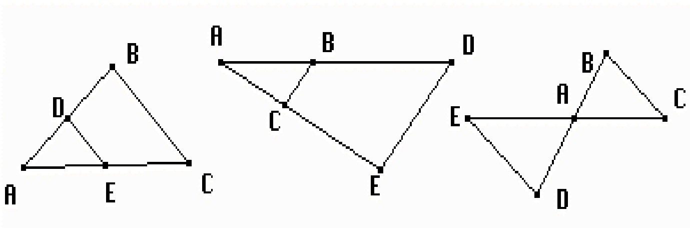
____

O pentágono ***A´B´C´D´E´*** é um(a) _________do pentágono ***ABCDE*** *na escala* _

O pentágono ***ABCDE*** é um(a) _________do pentágono ***A´B´C´D´E´*** *na escala* _

Observação: Podemos perceber nesta atividade o recíproco do teorema de Thales, veja:

Para cada uma das configurações abaixo podemos afirmar que:



Se $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ **então** ***BC // DE***

Objetivo:

O objetivo desta atividade é explorar o recíproco do teorema de Thales.

Análise didática e matemática:

A figura abaixo representa uma das possíveis configurações que podemos obter nessa situação.

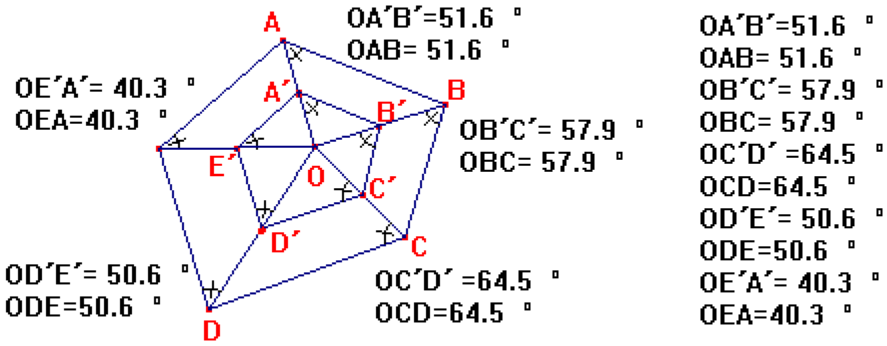


Figura 53

Nessa atividade os alunos, pesquisando e tentando justificar quais segmentos são paralelos, poderão estar formando a noção do recíproco do teorema de Thales, sob o aspecto da dilatação, ao observar a proporcionalidade entre os segmentos ***AO´*** e ***AO***, ***OB´*** e ***OB***, ***OC´*** e ***OC***, ***OD´*** e ***OD***, ***OE´*** e ***OE*** e consequentemente a semelhança dos triângulos sobrepostos, pelo caso LLL, o que implicitamente acarreta a igualdade dos ângulos e o paralelismo entre os segmentos ***AB*** e ***A´B´***, ***BC*** e ***B´C´***, ***CD*** e ***C´D´, DE*** e ***D´E´, EA*** e ***E´A´.*** Como esses alunos na disciplina de Desenho Geométrico, nesse momento, estão aprendendo a noção e construção de figuras homotéticas talvez até justifiquem por meio dessa idéia.

Observando experimentalmente que os ângulos correspondentes (*AO´B´* e *OAB*, *OB´C´* e *OBC*, *OC´D´* e *OCD*, *OD´E´* e *ODE*, *OE´A´* e *OEA*) são congruentes poderá ser um outro modo de se provar e justificar que os segmentos ***AB*** e ***A´B´***, ***BC*** e ***B´C´***, ***CD*** e ***C´D´, DE*** e ***D´E´, EA*** e ***E´A´*** são paralelos.

Como a apreensão perceptiva da figura, destaque os elementos figurais de dimensão 2, no caso os triângulos sobrepostos, talvez esse fato, facilite para o aluno na apreensão operatória perceber a semelhança entre os triângulos. Para a apreensão operatória, também uma das atividades cognitivas requerida e sugerida nessa atividade é a conversão entre os registros discursivo, figural, simbólico e discursivo, nessa ordem.

Na discussão dessa atividade pretendemos além de institucionalizar o recíproco do teorema de Thales, mostrar a relação entre os conceitos de semelhança de figuras planas, homotetia e o teorema de Thales.

Atividade 5 –

Verifique experimentalmente usando Cabri se a afirmação seguinte não é verdadeira para algum triângulo.

A ***"bissetriz de um ângulo interno de um triângulo divide o lado oposto em segmentos proporcionais aos lados adjacentes"***

Esboço *proporção*

Tente justificar esta afirmação utilizando o teorema de Thales. Trace uma paralela a bissetriz passando por um de seus vértices e determine o ponto de intersecção da paralela com a reta formada pelos outros vértices.

Objetivo:

Trabalhar as conseqüências do teorema de Thales pesquisando experimentalmente o teorema das bissetrizes dos ângulos internos de um triângulo.

Análise matemática e didática:

Nessa atividade esperamos que os alunos interpretem o enunciado fazendo a conversão do registro discursivo para o registro figural, por meio do software Cabri, obtendo uma figura que represente essa situação, e, por meio do deslocamento dos pontos, percebam que nas várias figuras obtidas sempre a razão entre os segmentos formados pela bissetriz de um ângulo interno do triângulo no lado oposto é igual a razão entre os segmentos adjacentes a este ângulo.

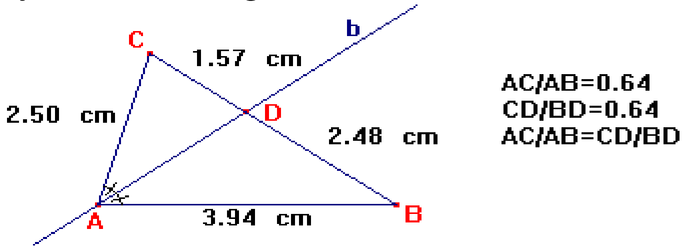


Figura 54

Depois de terem observado que essa propriedade possivelmente é verdadeira para qualquer triângulo pretendemos que os mesmos procurem justificar essa afirmação utilizando o teorema de Thales. Utilizando ainda o recurso do Cabri, poderão perceber a igualdade entre um dos lados (adjacente ao ângulo da bissetriz) do triângulo e o segmento formado pela paralela no prolongamento do outro lado adjacente ao ângulo interno do triângulo. Percebendo essa igualdade talvez fique mais fácil provar ou demonstrar essa propriedade[10]. Veja a figura 54. Depois da discussão desta atividade e institucionalização desse conhecimento, os alunos poderão consultar o livro didático adotado para observar como o autor faz a demonstração e desenvolver os exercícios propostos.

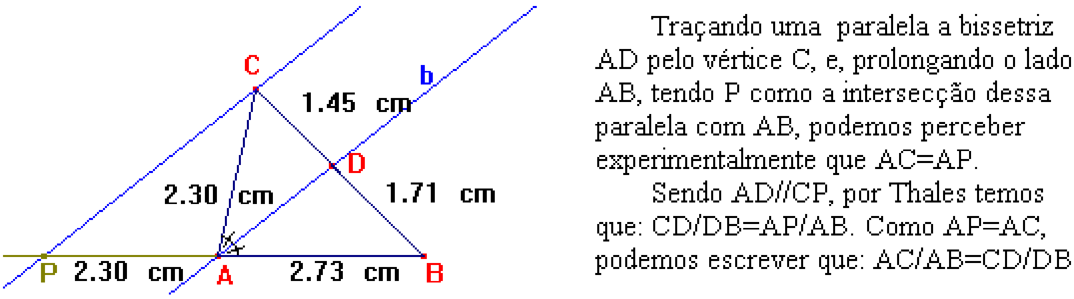


Figura 55

Atividade 6 –

Construir um trapézio ***ABCD***. Os lados não paralelos do trapézio se interceptam em **O** As diagonais se interceptam em **I**. A reta ***OI*** corta os lados paralelos do trapézio em **M** e **N**.

Qual é a posição de **M** e de **N** sobre os lados?_______________________________

Justifique sua afirmação. ____

____

[10] Essa propriedade foi citada no capítulo 1 (pág.35) quando descrevemos algumas aplicações do teorema de Thales.

Análise matemática e didática:

Por meio do recurso do Cabri os alunos poderão construir uma figura que represente essa situação procurando explorar as relações que se pode obter com as medidas dos segmentos e/ou ângulos da figura e perceber que os pontos **M** e **N** são os pontos médios dos lados ***CD*** e ***AB*** respectivamente. A figura abaixo ilustra essa situação.

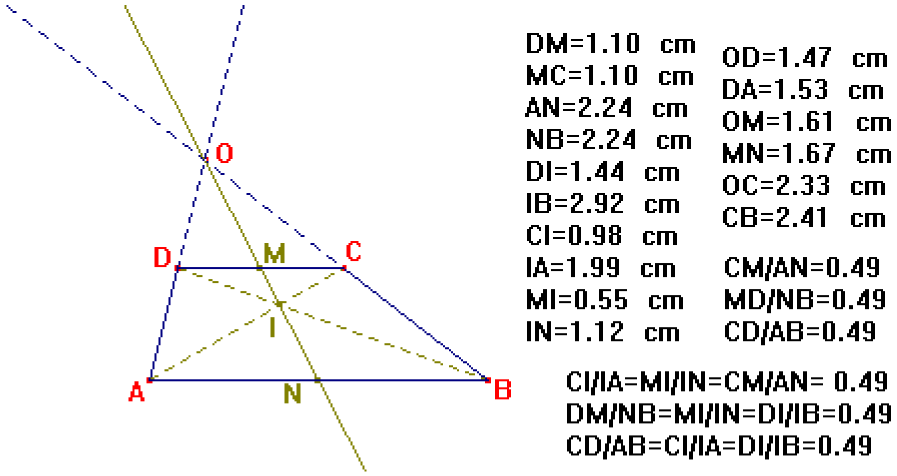


Figura 56

Uma vez observado que **M** e **N** são pontos médios, para justificar essa constatação, deverão explorar as propriedades pertinentes na figura, realizando a atividade cognitiva de decomposição e reconfiguração até encontrar a solução.

Aplicações do teorema de Thales

1) Dois triângulos ***ABC*** e ***PQR*** são semelhantes. Os lados homólogos ***AC*** e ***PQ*** medem, respectivamente, 5cm e 8cm. Qual é o perímetro do triângulo ***ABC***, sabendo que o do triângulo ***PQR*** é 22cm? (Bezerra, M. J. – pág. 142)

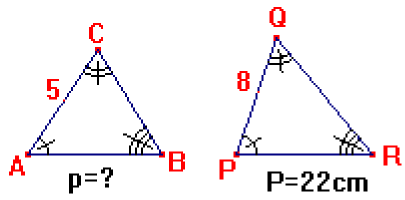
Solução:

Como os triângulos ***ABC*** e ***PQR*** são semelhantes, os lados homólogos ***AC*** e ***PQ***, ***AB*** e ***PR***, ***BC*** e ***RQ*** e os perímetros respectivos são proporcionais. Considerando **p** perímetro do triângulo ***ABC*** e **P** o perímetro do triângulo ***PQR*** podemos escrever as proporções seguintes:

$$\frac{AC}{PQ} = \frac{p}{P} \text{ ou } \frac{AC}{p} = \frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{P}}$$

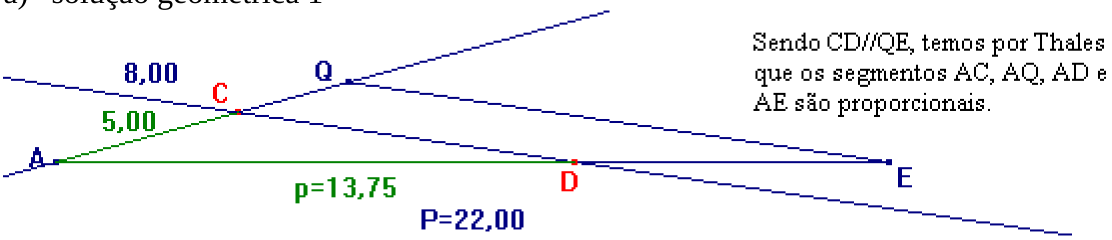
$$\frac{5}{8} = \frac{p}{22} \text{ ou } \frac{5}{\mathrm{p}} = \frac{8}{22}$$

Esboço:



Para determinar o valor desconhecido **p** nas proporções acima podemos ter uma solução geométrica, utilizando o teorema de Thales, ou uma solução algébrica, aplicando o princípio fundamental da proporcionalidade.

a) solução geométrica 1



solução geométrica 2

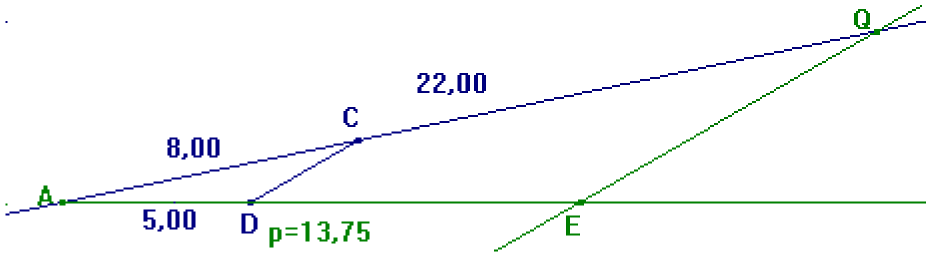


Figura 57

b) solução algébrica:

Realizando um tratamento no registro simbólico das proporções, determinamos o valor de **p** como descrito abaixo:

$\frac{5}{8} = \frac{p}{22}$ ou $\frac{5}{p} = \frac{8}{22}$, no qual pelo princípio fundamental da proporcionalidade podemos escrever $8 . p = 5 . 22 \rightarrow p = \frac{110}{8} \rightarrow p = 13{,}75$.

2) As bases de um trapézio retângulo medem 16cm e 12cm e a altura, 8cm. Calcular a altura do menor triângulo obtido pelo prolongamento dos lados não paralelos do trapézio. (Bezerra, M. J.- pág. 144)

Solução:

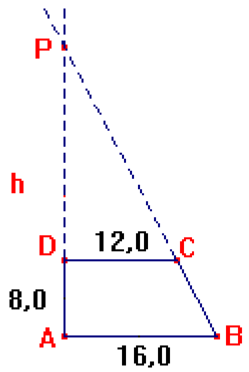


Figura 58

Como as bases ***AB*** e ***CD*** do trapézio são paralelas, temos que os triângulos sobrepostos formados com o prolongamento dos lados transversais ***CB*** e ***AD*** são semelhantes, logo seus lados são proporcionais. Pensando no teorema de Thales (*dilatação*), a paralela (*CD)* a um dos lados de um triângulo (***ABP***) determina sobre os outros dois lados segmentos proporcionais, então podemos escrever que:

$$\frac{PD}{PA} = \frac{DC}{AB} \text{ ou } \frac{h}{h+8} = \frac{12}{16} \rightarrow 16h = 12h + 96 \rightarrow h = 24\,cm$$

3) Um feixe de quatro paralelas determina, sobre uma transversal **t**, segmentos de 2, 3, 4 centímetros, e sobre uma transversal **t´,** outros segmentos cuja soma das medidas é 18cm. Calcule os três segmentos determinados sobre **t´.** (Bezerra, M. J. – pág. 150)

Solução:

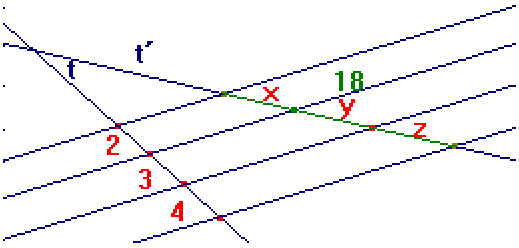
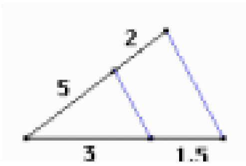


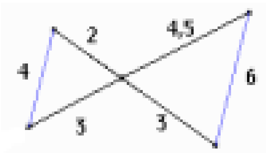
Figura 59

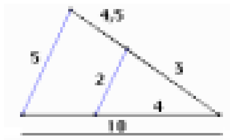
Para determinarmos os valores de **x**, **y** ou **z** , como mostra a figura ao lado, podemos estar pensando no teorema de Thales sob qualquer um dos pontos de vista citados por Guy Brousseau, pois esses valores se referem aos segmentos formados nas transversais. Pela conservação da relação de projeção temos:

$$\frac{2}{x}=\frac{3}{y}=\frac{4}{z}=\frac{2+3+4}{18}=\frac{1}{2}\rightarrow x=4,\ y=6,\ z=8$$

4) Verifique em quais configurações abaixo os segmentos azuis são paralelos.

a) 

b) 

c) 

Solução:

Para resolvermos essa questão devemos mobilizar o recíproco do teorema de Thales, ou seja para que as retas azuis sejam paralelas os segmentos formados nas transversais deverão ser proporcionais.

Para fazermos a verificação podemos montar as proporções:

- na configuração do item **a**, sob qualquer um dos pontos de vista;
- na configuração do item **b,** sobre o aspecto da dilatação que está favorecido pela posição dos triângulos em relação a apreensão perceptiva;
- na configuração do item **c**, também sob o aspecto da dilatação, porém nesse caso a apreensão perceptiva dos dois triângulos não é tão evidente podendo propiciar erros ao se montar as proporções. Veja a seguir, as proporções possíveis.

$a)\ \frac{5}{2}=\frac{3}{1,5}$ $\quad$ b) $\frac{2}{3}=\frac{3}{4,5}=\frac{4}{6}$ $\quad$ c) $\frac{3}{7,5}=\frac{2}{5}=\frac{4}{10}$

$5.(1,5)=2.(3)$ Falso $\quad$ $2(4,5)=3(3);\ 3(6)=4(4,5)$ $\quad$ $3(5)=2(7,5);\ 2(10)=4(5)$

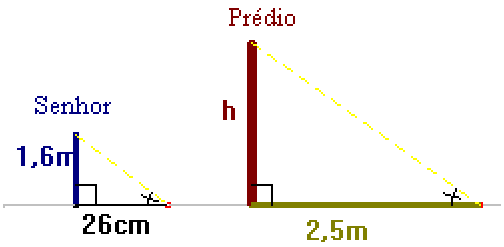
$2(6)=3(4)$ Verdadeiro $\quad$ $3(10)=4(7,5)$ Verdadeiro

Observando as relações acima que formam proporções, constatamos que só nas configurações dos itens **b** e **c** é que os segmentos azuis são paralelos.

5) Numa certa hora do dia um senhor de 1,6m observou que sua sombra era de 26cm e que a sombra do prédio onde mora era de 2,5m. Determine a altura desse prédio?

Solução:

Dependendo como se interpreta e se representa figuralmente o problema percebe-se mais facilmente a semelhança do triângulo formado pelo prédio, sua sombra, e o raio do sol com o triângulo formado pelo senhor, sua sombra e o raio do sol, ou, a aplicação do teorema de Thales observado sob o ponto de vista da dilatação na configuração dos triângulos sobrepostos. A figura (60) representa a primeira situação e a figura 61, a segunda.



$$\frac{160}{26}=\frac{h}{250}\rightarrow 26.h=40.000\rightarrow h\cong 15{,}38m$$

$$\frac{160}{h}=\frac{26}{250}\rightarrow 26.h=40000\rightarrow h\cong 1538cm$$

Figura 60

$$\frac{h}{250}=\frac{160}{26}\rightarrow 26.h=40000\rightarrow h\cong 1538cm$$

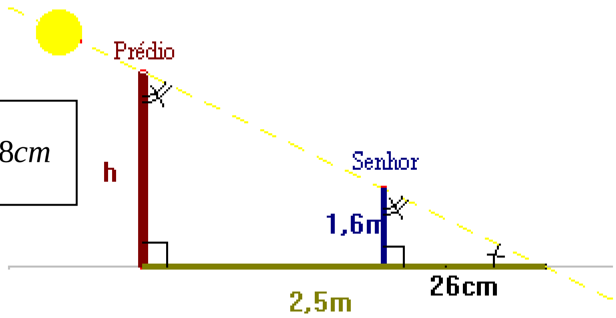
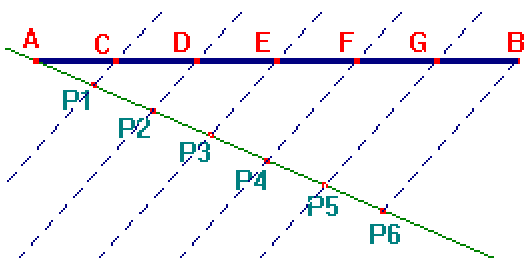


Figura 61

- ✓ Nas questões de **1** a **5**, pudemos resolver fazendo a conversão entre os registros discursivo, figural e simbólico, nessa ordem, e depois o tratamento pertinente no registro simbólico. Já nas questões seguintes, ou seja de 6 a 10, devemos fazer a conversão dos registros discursivo, simbólico e figural, nessa ordem, finalizando com o tratamento figural.

6) Criar um segmento ***AB*** e dividir em 6 partes iguais.

Solução geométrica:



Como $AP_1=P_1P_2=P_2P_3=P_3P_4=P_4P_5=P_5P_6$ e $CP_1//DP_2//EP_3//FP4//GP5//BP6$, pelo teorema de Thales temos que $AC=CD=DE=EF=FG=GB$

Figura 62

7) Criar um segmento ***BC*** e dividir em partes proporcionais a **2** e **3**.

Solução geométrica:

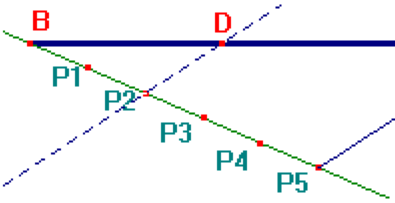


Figura 63

Considerando, $\boldsymbol{BP_1=P_1P_2=P_2P_3=P_3P_4=P_4P_5}$= uma unidade e $\boldsymbol{DP_2}$ // $\boldsymbol{CP_5}$, temos que, $\boldsymbol{BP_2}$ = duas unidades, $\boldsymbol{P_2P_5}$= três unidades e por Thales podemos dizer que $\frac{BD}{BP2} = \frac{DC}{P2P5}$. Sendo assim, ***BD*** é proporcional a duas unidades e ***DC*** a três unidades.

8) Criar um segmento ***AB*** e determinar os segmentos:

a) ***AC,*** sendo que ***AC = 2/3 AB***,

b) ***AD****, sendo que* ***AD= 5/3AB.***

Solução geométrica:

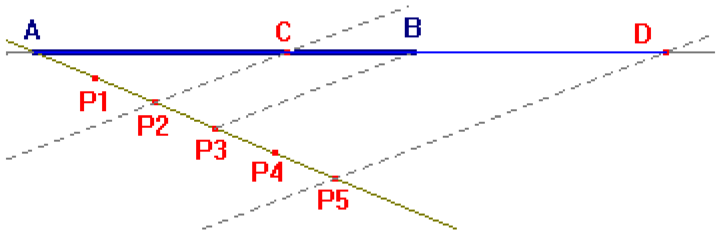


Figura 64

Para determinarmos graficamente o segmento ***AC***, dividimos o segmento ***AB*** em três partes iguais, utilizando a noção do teorema de Thales, e consideramos duas destas partes como sendo ***AC***, pois ***AC*** eqüivale a dois terços de ***AB***. O segmento ***AD*** foi obtido acrescentando-se dois terços de ***AB*** ao segmento ***AB*** Na figura acima $\boldsymbol{AP_1}$= $\boldsymbol{P_1P_2=P_2P_3=P_3P_4=P_4P_5}$= uma unidade e $\boldsymbol{CP_2//BP_3//DP_5}$ Logo, ***AC*** é proporcional a duas unidades, ***AB*** é proporcional a três unidades e AD a cinco unidades.

9) Determinar a quarta proporcional entre os segmentos **a= 2**, **b= 3** e **c=4.**

Para determinar a quarta proporcional entre os segmentos de medidas **a**, **b** e **c** podemos fazer uso de tratamentos algébrico ou gráfico utilizando o teorema de Thales. Na resolução algébrica primeiro realizamos a conversão do registro discursivo para o registro simbólica e a seguir os tratamentos pertinentes nesse registro. A resolução gráfica também necessita da conversão do registro discursivo para o registro simbólico e depois, a conversão do registro simbólico para o registro figural onde serão realizados os tratamentos necessários. Veja:

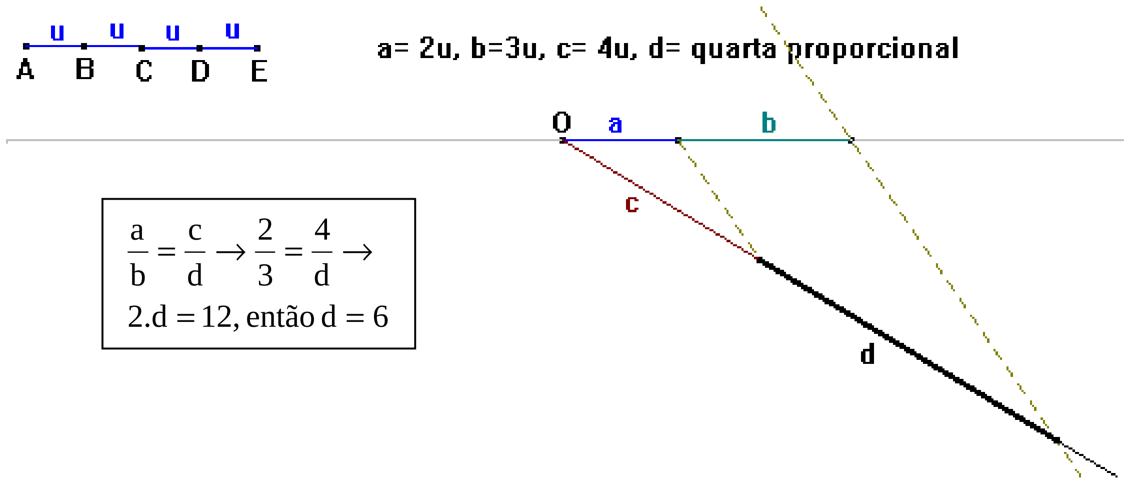


Figura 65

10) Determinar a terceira proporcional entre esses segmentos: **a= 3** e **b=4.**

Para determinar a terceira proporcional entre os segmentos de medidas **a** e **b**, também, podemos fazer uso de tratamentos algébrico ou gráfico utilizando o teorema de Thales. Na resolução algébrica primeiro realizamos a conversão do registro discursivo para o registro simbólica e a seguir os tratamentos pertinentes nesse registro. A resolução gráfica também necessita da conversão do registro discursivo para o registro simbólico e depois, a conversão do registro simbólico para o registro figural onde serão realizados os tratamentos necessários. Veja figura 66.

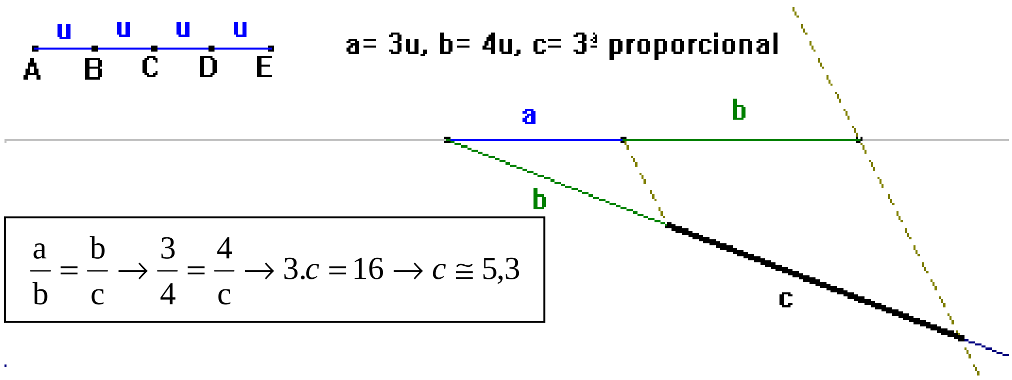


Figura 66

4.4.2 – Experimentação e relato da experimentação

Nesta seção iremos relatar por semana os procedimentos da experimentação, quais eram os objetivos, as observações feitas e algumas considerações prévias.

Como havíamos planejado, aplicamos a seqüência didática em três ou quatro aulas das seis aulas semanais que os alunos da 8º série A do Ensino Fundamental tinham de Matemática, ficando essas aulas a princípio divididas da seguinte forma:

- terça-feira (2 aulas) no laboratório de informática;
- quarta-feira (2 aulas) para as atividades de álgebra na sala de aula;
- quinta-feira (2 aulas) na sala de aula, para discussões, fechamento e institucionalização das atividades propostas em classe, e no laboratório ou para casa.

1ª semana (4 aulas)

Iniciamos a experimentação no dia 3 de agosto de 1999, com 28 dos 30 alunos da 8º série A. Nesse primeiro encontro, dada a disponibilidade de apenas 14 computadores, replanejamos para que 12 computadores fossem trabalhados com dois alunos cada e 2 com três.

A primeira atividade foi elaborada com a finalidade de familiarizar o aluno com o software Cabri-géomètre I e ao mesmo tempo, rever alguns conceitos básicos da geometria elementar por meio da exploração das opções do menu construção.

Após a realização dessa atividade, fizemos uma síntese dos conceitos principais.

Na aula seguinte, fizemos o fechamento desta atividade destacando os seguintes pontos:

a) síntese dos conceitos abordados;

b) o porquê da escolha deste programa e de se estar tentando fazer algo novo, mostrando as vantagens e desvantagens de se utilizar este programa como um auxiliar no processo ensino - aprendizagem.

- **vantagens destacadas:**

  - após a realização de uma construção podemos, por meio da movimentação dos objetos criados perceber experimentalmente algumas propriedades referentes à família das figuras construídas;
  - programa de fácil utilização;
  - elaboração de construções com mais precisão que com a régua e compasso.

- **desvantagens**:

  - aproximação da máquina ser com uma casa decimal, fazendo com que nem sempre os valores obtidos sejam muito precisos;

c) a observação de algumas possíveis propriedades em determinadas construções de manter-se invariável ao se movimentar as figuras ajuda-nos na visualização e no levantamento de uma possível hipótese, porém, nem sempre é suficiente para afirmarmos que toda figura com essas características possuem estas propriedades. Em outras palavras, a verificação de algumas propriedades por meio da experimentação não exclui a necessidade da demonstração, ou seja, não é suficiente para se fazer afirmações, mas sim para levantar hipóteses.

d) quanto aos menus e opções dos menus destacamos:

- não se constrói nada sem ter criado os objetos;
- a diferença entre os três tipos de pontos apresentados pelo programa (ponto criado, ponto sobre objeto, intersecção de dois objetos);
- a diferença entre reta e reta definida por dois pontos;
- a diferença entre circunferência e circunferência definida por dois pontos (uma fixa o raio, a outra permite uma variação do raio além do deslocamento dos pontos sobre a circunferência.

Na outra aula, recordamos com os alunos os conceitos de razão de segmentos, segmentos proporcionais, segmentos comensuráveis e incomensuráveis, proporção, as diferentes formas de se representar uma proporção, bem como, suas propriedades. A finalidade de revermos esses assuntos foi de proporcionar a todos as competências necessárias para uma melhor realização das atividades (**1** e **2**) propostas para casa.

2ª semana (4 aulas)

Na terça-feira os alunos entregaram as atividades **1** e **2** propostas para casa e iniciaram a primeira atividade da seqüência didática **– Parte A** - referente à semelhança de figuras planas.

As atividades **1** e **2** propostas para casa tinham por objetivo permitir ao aluno observar que ao se ampliar ou se reduzir uma figura na máquina copiadora algumas características das figuras permanecem invariantes (medida dos ângulos e razão entre os lados) enquanto outras variam (medida dos lados, área, perímetro). Essas atividades foram propostas para casa na semana anterior, com o intuito de que os alunos viessem ao laboratório com essas observações para que após a exploração das figuras criadas com o programa pudessem fazer comparações e perceber o que é variável e invariável quando duas figuras são parecidas ou não, quando têm a mesma forma e quando uma é ampliação ou redução da outra. A seguir, pretendíamos institucionalizar o conceito de semelhança, propor as demais atividades de casa e algumas do livro didático adotado para que tivessem a possibilidade de apreender esta noção e mobilizando-a na semana seguinte por meio da seqüência didática -**Parte B**- formassem o conceito do teorema de Thales. Porém isso não ocorreu, a maioria dos alunos só conseguiu fazer até a atividade **3** da seqüência Parte **A**. Na quinta-feira, discutimos e corrigimos as atividades **1** e **2** propostas para casa e pretendíamos devolver as anotações feitas no laboratório para que em grupo concluíssem a atividade **4** e formalizassem a noção de semelhança; no entanto, não foi possível terminar.

Com relação às atividades **1** e **2**, constatamos que:

- apenas 50 % dos alunos fizeram, ou tentaram fazer as atividades;
- destes, muitos tiveram bastante dificuldade em expressar e organizar os dados das respostas de maneira clara, ou seja, apreensível por qualquer um que lesse;
- houve bastante variação nas medidas encontradas. Houve aluno que colocou a medida exata que encontrou, outros aproximaram os valores de modo a ter medidas exatas, ou de meio em meio;
- com relação aos ângulos, todos fizeram sem nenhum problema;
- ao comparar as figuras com suas ampliações ou reduções, todos perceberam que os ângulos não variaram e que a medida dos lados mudou, porém, ninguém percebeu que as razões permaneceram constantes, ou seja, também não variaram;
- no cálculo das áreas, nas figuras simples como quadrado, retângulo e triângulo, não houve nenhum problema, porém quando foram calcular as outras (o **L** e o **M**) fizeram a decomposição das figuras em figuras conhecidas e as consideraram independentes, ou seja, separadamente como se fossem outras figuras simples, não calculando o total;
- vários alunos não calcularam a razão entre as áreas;
- ninguém concluiu as relações entre as razões das medidas dos lados, das áreas e do perímetro.

✓ **Considerações:**:

A proposta ficou muito longa, com muitas informações ao mesmo tempo. As figuras podiam até ter sido outras. Primeiro deveria ter trabalhado apenas com a razão entre a medida dos lados, para definir figuras semelhantes, ou seja, deveria ter proposto apenas a atividade número um. Depois de ter definido figuras semelhantes e trabalhado as outras atividades é que a atividade dois poderia ser aplicada, de preferência, após trabalhar uma outra atividade que tenha o mesmo objetivo, porém, com razão de semelhança sendo um número inteiro, o que facilitaria a percepção das relações, só então estenderia para uma razão qualquer.

Na terça-feira, durante a aplicação da Seqüência Didática Parte **A** não pudemos trabalhar com os 14 computadores, pois em um deles não foi possível acessar o programa. Nesse dia percebeu-se:

- muita dificuldade nos alunos em expressar a relação entre as medidas dos lados correspondentes das figuras. Na atividade **1(d)**, os alunos perceberam que a medida dos lados da 2ª figura era o dobro da medida dos lados da 1º figura, mas, ao expressar por escrito a relação entre a 1ª e a 2ª, não foi fácil perceber e concluir que a 1ª é igual a metade da 2ª;

- muitos não lêem as atividades até o fim, principalmente as observações e vão logo perguntando para o Professor "*O que é para fazer*?", "*Não entendi*.".
- dificuldade em entender o significado da razão como sendo um número decimal, principalmente quando o número é menor que um e maior que zero;
- na atividade **2** dificuldade em entender o item **f**. (*deslocando o ponto **J** em qualquer posição a razão entre as medidas dos lados: AB e IJ, AD e IM, BC e JL, CD e LM, se mantem constante, ou seja, os lados correspondentes são proporcionais?);*
- alguns alunos, ao realizar cada atividade, não associavam a conclusão de um dos itens desta com os outros e foram respondendo como se cada item fosse uma outra questão e não perceberam algumas incoerências cometidas nas análises e ou conclusões. Talvez esse fato ocorra devido aos mesmos estarem acostumados apenas com os exercícios propostos no livro didático, que, geralmente, são questões curtas e de aplicação de algum algoritmo, não se percebem questões que induzam o aluno a fazer análise e tecer conclusões;
- dos 13 grupos, 10 avançaram até a atividade **3**, faltando fazer o fechamento com a atividade **4**. Os outros três grupos conseguiram chegar até a atividade dois, faltando as atividades **3** e **4** (fechamento).

Todas as atividades feitas no laboratório foram recolhidas. Aos alunos, entregamos uma ficha-resumo para que anotassem os dados encontrados, as observações e conclusões feitas.

✓ **Considerações:**

Para uma próxima aplicação, acreditamos que na ficha que vai ficar com os alunos, os quadriláteros das atividades **2** e **3** não deverão estar congruentes. Isso porque devemos dar exemplo de uma situação geral e não particular para que se possa explorar a relação entre os elementos da figura e não só a apreensão perceptiva. Além disso, as medidas dos lados e ângulos do quadrilátero ***ABCD*** poderão ser fornecidas.

Achamos que as atividades ficaram extensas, podendo-se reduzi-las fazendo a verificação em apenas uma posição. Assim, cada dupla escolherá uma posição e, quando fizermos as discussões coletivas, provavelmente irão perceber treze situações diferentes porém com conclusões similares.

Vários grupos apresentaram muita dificuldade para abrir o arquivo do disquete, poderíamos na própria atividade ter escrito: "para abrir o arquivo vá no menu arquivo, opção abrir, apague o que está digitado e escreva **A: S11**, em seguida, clique o.k.".

Como não conseguimos fechar a atividade institucionalizando a noção de semelhança, não foi possível propor a continuação das atividades de casa, ficando isso para quinta-feira.

Na primeira aula de quinta-feira, corrigimos as atividades **1** e **2** propostas para casa, esclarecendo algumas dúvidas e destacando as observações levantadas. Na segunda aula, tentamos fechar as atividades da seqüência - Parte **A** e definir semelhança. Propusemos aos alunos que terminassem as atividades da seqüência - Parte **A** utilizando régua e compasso e as atividades **3**, **4** e **5,** da ficha de casa, para entregar na terça- feira. Por ser a última aula do dia, muitos alunos, faltando uns vinte minutos para terminar a aula, já fecharam o material, não anotaram mais nada e temos a impressão de que nem estavam ouvindo as informações dadas.

3ª semana (3 aulas)

Na terça-feira, apenas dois alunos fizeram o que havia sido proposto, os demais alegaram não ter entendido o que era para ser feito. Como não havíamos "*acomodado*" o conceito de semelhança, não fomos ao laboratório, pois, para realizar as demais atividades deveríamos mobilizar esse conceito. Pensando que iriam ao laboratório, muitos não trouxeram o material (caderno e livro didático), dificultando um pouco o andamento normal de aula.

Devolvemos aos alunos as atividades feitas no laboratório (seqüência - Parte **A**) e uma ficha-resumo dessas atividades para que, em duplas, anotassem as informações levantadas e fizéssemos o fechamento do conceito de semelhança. Feito isso, aplicamos o conceito de semelhança para resolver os exercícios propostos no livro didático adotado (p. 125, 126, 127 e 128). Para casa, havia sido proposto que os alunos fizessem as atividades **3**, **4** e **5** (ficha de casa) e as atividades **5** e **6** da seqüência didática- parte **A**- utilizando régua e compasso.

Quinta-feira foram feitas as correções dos exercícios do livro adotado e recolhidas as atividades de casa. Constatamos que apenas **56%** dos alunos entregaram as atividades, ou seja, dezessete alunos fizeram a tarefa.

Analisando as atividades feitas pelos alunos constatamos que:

Atividade 3 - (ficha de casa**) –**

Objetivo: identificar as fotografias semelhantes e explicar em que se diferenciam as figuras semelhantes das que são só parecidas.

Dos alunos que entregaram as atividades, quatro não fizeram esta, uma escreveu que figura parecida é a mesma coisa que figura semelhante, uma confundiu semelhante com congruente, os demais identificaram as figuras corretas, porém, alguns escreveram que as figuras semelhantes são as que mantêm a mesma forma mas diferem no tamanho e as parecidas têm o mesmo formato mas lados e ângulos não congruentes, três não diferenciaram figuras semelhantes e figuras parecidas e dois colocaram que figuras parecidas têm a mesma aparência com as medidas podendo ser diferentes e as semelhantes têm aparência e medidas iguais, uma chegou mais próximo com dificuldade de expressar e um aluno escreveu "*as figuras semelhantes são a* ***d*** *e a* ***e****, porque são proporcionais*". Notamos nessa atividade que o termo proporcional só apareceu uma vez, talvez por esse conceito não estar bem *sedimentado* nesses alunos ou mesmo pela figura proposta não favorecer esse tipo de pensamento pois, essa figura é aberta e todas as figuras até então que foram fornecidas para se verificar proporção eram fechadas. Ninguém escreveu a medida dos lados e ângulos das figuras, dando a impressão de que responderam levando em conta o aspecto visual.

Atividades 4

Objetivo: ampliar e reduzir a figura, determinar a razão de semelhança, a área e o perímetro, e verificar quanto aumentou ou diminuiu a área e o perímetro.

Observação: A figura dada foi desenhada numa malha quadriculada.

Dos alunos que entregaram, três não fizeram; uma não fez nem a ampliação nem a redução e demonstra pelas respostas não saber o que é razão de semelhança, perímetro e área[13] quatro só fizeram a ampliação e redução não efetuando os cálculos (razão, perímetro e área); três calcularam a área das figuras contando a quantidade de quadradinhos, não se importando com a medida dos lados do quadrado, assim concluíram que as figuras têm área igual a 18 unidades; duas erraram o cálculo do perímetro e da área, os demais fizeram certo a ampliação, a redução e os cálculos e para verificar quanto aumentou ou diminuiu a área e o perímetro calcularam a diferença; sendo que no perímetro escreveram aumentou o dobro e na área só escreveram a diferença sem pensar na razão entre as áreas.

Atividade 5

Objetivo: Comparando vários triângulos retângulos, medindo seus lados e ângulos, identificando os que são semelhantes e sobrepondo-os, os alunos poderão perceber que ser parecido não implica ser semelhante e que ao sobrepor, fazendo coincidir o ângulo reto, as hipotenusas são paralelas.

Dos alunos que entregaram, duas não fizeram; oito só mediram os lados e ângulos, escreveram que *parecido não é o mesmo que semelhante* e não identificaram os triângulos semelhantes; seis mediram os lados e ângulos, identificaram os semelhantes e perceberam que *ser semelhante não e o mesmo que ser parecido*; um apenas, além de

[13] Essa aluna falta muito nas aulas (motivo gravidez) e na aplicação do pós-teste estava em licença gestante.

tudo que os outros observaram, percebeu que ao sobrepor os triângulos semelhantes fazendo coincidir o ângulo reto os lados (hipotenusa) ficam paralelos. A maioria não recortou os triângulos e não fez a sobreposição.

Atividades 5 e 6 da seqüência didática - Parte **A**

Objetivos: desenhar figuras semelhantes ao modelo, dada a medida de um de seus lados.
Observação: A figura dada não está sobre nenhum tipo de malha.

Dos alunos que entregaram, apenas quatro não fizeram essas atividades e os demais não tiveram nenhum problema.

4ª **semana** (3 aulas)

A partir desta semana começamos a fazer as observações mais sistematicamente. O professor Luiz se prontificou a ser o observador das sessões feitas no laboratório. Organizamos fichas de observação cifradas para cada atividade, visando a agilização das anotações; utilizamos o gravador para gravar as perguntas feitas pelos alunos e as respostas dadas pelo professor; quando necessário, fizemos algumas entrevistas com algumas duplas e salvamos em disquete as construções feitas pelos alunos.

Com o propósito de racionalizar a ficha de observação, numeramos os computadores e as duplas da seguinte forma:

Grupo 1 – alunos número **2** e **3**
Grupo 2 - alunos número **10** e **7**
Grupo 3 - alunos número **4** e **14**
Grupo 4 - alunos número **32** e **20**
Grupo 5 - alunos número **29** e **19**
Grupo 6 - alunos número **11**e **1**
Grupo 7 - alunos número **5** e **21**
Grupo 8 - alunos número **24** e **31**
Grupo 9 - alunos número **30** e **18**
Grupo 10 - alunos número **12** e **27**
Grupo 11 - alunos número **8** e **15**
Grupo 12 - alunos número **23**, **17** e **13**
Grupo 13 - alunos número **33**, **25** e **22**
Grupo 14 - alunos número **16** e **6**

Observação: os alunos que faltaram no dia da aplicação do pós-teste (1, 13, 14, 18, 31) estão com seus números escritos em vermelho visando identificá-los para posterior análise dos dados.

Nesta semana iniciamos a Seqüência Didática - Parte **B** - que tem por objetivo a utilização do programa Cabri-géomètre I para realização de atividades de experimentação visando a introdução do teorema de Thales.

Havia sido previsto que os alunos realizariam as três atividades iniciais em um encontro, mas isso não ocorreu, terminaram apenas a atividade **1** ficando as demais para a outra semana.

A atividade **1** (aplicada em 24/08/99) tem por objetivo fazer o aluno perceber que "*toda paralela a um dos lados de um triângulo, não passando por um de seus vértices, divide os outros dois lados em segmentos proporcionais*".

Durante a aplicação da atividade, observamos que:

- com relação ao enunciado, percebemos que só uma das duplas teve dificuldade em entender por falta de atenção ao ler;
- todas as duplas foram fazendo a atividade direto no computador, nenhuma fez um rascunho ou esboço antes de começar a construção;
- exceto o grupo **14**, todos os demais tiveram alguma dúvida ou dificuldade ao manipular o programa, necessitando a intervenção do professor para alguns esclarecimentos.

Destacaremos abaixo os erros e dúvidas surgidas.

a) Houve dois grupos que fizeram as construções corretamente, porém, chamaram o professor achando que havia algum erro, pois, para eles as retas (inclinadas) não estavam paralelas só seriam paralelas se ambas fossem horizontais. Isto nos leva a constatar uma limitação no conceito de paralela em que, provavelmente, a apreensão perceptiva supera a apreensão operatória, fazendo com que duvidem dos dados do problema e do recurso do computador.

b) Cinco duplas não usaram adequadamente as opções do menu no que se refere a ponto. Para construir um ponto sobre um objeto, criaram o ponto. Para determinar o ponto de intersecção entre dois objetos criaram um ponto ou construíram um ponto sobre apenas um dos objetos.

c) Um grupo, ao pretender nomear o ponto **S**, acabou nomeando uma das retas.

d) Alguns grupos apresentaram dificuldade em medir os segmentos pois não os haviam criado.

No cálculo das razões, a maioria dos grupos não manifestou dificuldade. Os grupos **9** e **10** só indicaram as razões, não fizeram a divisão, o que dificultou a interpretação. Os grupos **4** e **8** manifestaram dificuldade tanto na determinação quanto na interpretação da razão.

Para verificar se os triângulos formados eram semelhantes, apenas o grupo 2 marcou e mediu os ângulos internos. Quatro dos outros grupos escreveram que os ângulos são iguais, sem precisar medir. O grupo **1** deduziu que são iguais, pois "*tá na* *cara*", se "*deslocarmos o ponto **S** até **U** conseguimos sobrepor um ângulo no outro*" ("*assim que fizemos na atividade **5**, de casa*"). Os grupos **3** e **14** afirmaram que os ângulos são iguais devido às retas ***SK*** e ***UT*** serem paralelas, e o grupo **13** apenas afirmou sem justificar. O grupo **4** não respondeu este item, e os demais não se referiram aos ângulos, sendo que destes, seis grupos, afirmaram que são semelhantes por manter a mesma forma (grupos **5**, **6**, **7**, **8**, **9**, **10**). Os grupos **11** e **12** escreveram que são semelhantes pois suas medidas são proporcionais.

- Com relação à proporção, houve três grupos que deixaram em branco este item (**4**, **9** e **11**), dois grupos que escreveram adequadamente (**1**,**2**), o grupo **10** montou três corretamente e uma errada, os demais grupos (**3, 5**, **6**, **7**, **8**, **12**, **13**, **14**) confundiram razão com proporção.
- Quanto a escrever a relação entre a paralela a um dos lados de um triângulo, observamos que cinco grupos não escreveram nada (grupos **1**, **4**, **5**, **9** e **11**) os demais citaremos abaixo.

Grupo **2** e **3** - "*Movendo **S**, muda-se a medida de **US**, **SR**, **RK**, **KT** e a medida dos ângulos continuam iguais".*

Grupo **6** - "*Alguns deram proporção outros não*".

Grupo **7** - "*Os segmentos originais que formam o triângulo maior se mantêm com a mesma medida, já as medidas dos segmentos criados pelos pontos (***S**, **K***) variaram*".

Grupo **8** - "*No primeiro triângulo as medidas se prevalecem, já no 2º triângulo que foi construído pelos pontos* **S** *e* **K** *se variam, quando deslocamos o ponto* **S**".

Grupo **10** - "*O segmento **SK** vai ser sempre igual aos segmentos **RS** e **RK***" (construiu um triângulo eqüilátero).

Grupo **12**- "*Todos os lados inclusive a paralela formam uma proporção*" (triângulo equilátero).

Grupo **13**- "*Formaram outros segmentos - após traçada a reta **SK**, formaram segmentos **SR**, **SU, RK** e **KT**".*

Grupo **14** - "*Traçando a reta paralela, formaram-se dois triângulos semelhantes, pois possuem ângulos congruentes*".

Na quinta-feira, fizemos o fechamento desta atividade, comentando as respostas dadas, esclarecendo as dificuldades e erros encontrados, bem como, concluindo a relação entre os segmentos formados pela paralela a um dos lados de um triângulo.

✓ **Considerações:**

- Três alunos entraram na 2º aula. Um faltou.

- O professor teve um pouco de dificuldade em atender os alunos, gravar e anotar algumas observações, pois eles não estavam acostumados com esse tipo de atividade e atitudes necessitando muitas vezes chamar o professor.
- Nas explicações coletivas no laboratório, vários alunos não prestavam atenção. Primeiro pela posição, segundo por que querem trabalhar no computador e só pensar no problema quando surgir.
- Faltou trabalhar mais com os alunos construções em geral utilizando o software Cabri para que os mesmos vivenciassem as três formas de construir e criar pontos, medir segmentos, nomear pontos e retas para que quando fossem realizar as atividades a manipulação do programa não fosse um entrave, possibilitando uma melhor percepção da atividade.
- Temos a impressão de que os alunos não terminam prontamente a atividade.

O uso do computador por muitos professores é sentido a priori como uma ameaça ao seu papel, alegando ser uma coisa fria, em que a relação humana fica comprometida. Vivenciando esta experiência de trabalhar com a informática na educação usando o software Cabri-géomètre I, constatamos que o papel do professor jamais será comprometido, pelo contrário, ele passa a ter outra cor. O relacionamento professor-aluno, aluno-aluno fica gradativamente mais intenso e menos superficial. Muitas vezes temos que trabalhar em duplas ou trios, pois não temos computadores para todos. O professor tem que elaborar as atividades de forma que cada grupo possa realizá-las com um certo grau de autonomia, transformando seu papel de transmissor de informações para mediador .

Elaboramos várias atividades para que o aluno fosse formando a noção de semelhança tendo o intuito de mais para frente mobilizar essa noção para formar o significado do teorema de Thales e especificar a semelhança de triângulos.

Os alunos trabalharam em duplas para que, trocando experiências e idéias, fossem realizando as atividades fazendo observações, pesquisando e tecendo comentários e conclusões.

Embora no laboratório os alunos tenham certa autonomia na realização das atividades, o papel do professor continua sendo importante no sentido tanto da elaboração das situações, quanto na orientação e institucionalização das ações. A relação professor-aluno fica mais forte, pois o professor tem a possibilidade de estar mais próximo de cada aluno percebendo-o por suas várias formas de expressão, ou seja, na forma oral quando solicita o professor e manifesta suas dificuldades ou tenta justificar suas construções e conjecturas, na forma escrita quando responde as atividades e na forma gestual quando se expressa com o professor ou com os colegas. Temos a possibilidade de, observando suas respostas e atitudes, perceber os conceitos que não foram bem elaborados pelos alunos ou outros conceitos que embora muitas vezes são utilizados e mobilizados por eles o significado não foi bem formado, apenas memorizaram um algoritmo. Nestas atividades iniciais percebe-se bem as dificuldades quanto à significação dos conceitos de razão, proporção, números decimais e retas paralelas.

Todas as dificuldades e erros apresentados pelos alunos quanto à utilização do programa já haviam sido comentadas pelo professor no fechamento da primeira semana, porém vários alunos não apreenderam, sendo necessário vivenciar a situação para compreender. Muitos alunos só percebem as coisas que foram ditas pela vivência, experimentação e erro. O conhecimento é construído gradativamente por meio das várias atividades e experimentações feitas.

5ª semana (3 aulas)

Nesta semana continuamos a Seqüência Didática - Parte **B** - aplicando a atividade **2** no dia 31/08/99.

A atividade **2** tem por objetivo fazer com que o aluno perceba que além das diversas maneiras de se representar um par de retas concorrentes interceptadas por retas paralelas, em qualquer uma das configurações podemos obter segmentos proporcionais. Por meio da experimentação e da observação dos triângulos semelhantes, o aluno poderá expressar a proporcionalidade pelo aspecto da conservação das abscissas ou pela dilatação.

Durante a aplicação da atividade, observamos que:

- só o grupo **9** teve dificuldade em entender o enunciado e marcar o ponto **E**;
- todos os grupos foram fazendo as construções direto no computador, não sentindo necessidade de um esboço;
- o grupo **6** teve algumas dificuldades em manipular com o programa (ponto sobre objeto) e medir os segmentos, nos demais não se percebeu dificuldade;
- todos os grupos iniciaram a atividade de forma que as paralelas ficassem na posição inclinada;
- alguns grupos (**3**, **4**, **9**) tiveram dificuldade em entender como representar as configurações;
- todos os grupos representaram a configuração em que as transversais se interceptam entre as paralelas e também quando não se interceptam;
- ao verificar se os triângulos formados são semelhantes, observamos que só o grupo **1** não respondeu, o grupo **9** disse que não são semelhantes, os grupos **5**, **11** e **12** apenas escreveram que são semelhantes, os grupos **2**, **3**, **4** e **10** se referiram aos ângulos para justificar, os grupos **6** e **7** justificaram que os lados eram proporcionais sendo que o grupo **6** só encontrou proporção na **1º** configuração, pois nas demais havia marcado as medidas erradas. Os grupos **13** e **14** justificaram devido aos triângulos serem formados por retas paralelas, assim:

grupo **13**- " *os triângulos ficam semelhantes, pois são formados por retas paralelas*" e grupo **14**- "*Sim, são semelhantes pois **CB** e **ED** são paralelas, sendo assim a inclinação da reta não mudou em relação a reta **r**, tornando os triângulos semelhantes*";

- percebemos que quase todos os grupos não apresentaram dificuldade em identificar os lados correspondentes das figuras exceto os grupos **4**, **5** e **10**. Os grupos **5**, **6**, **7** e **9** identificaram os lados correspondentes porém marcaram algumas medidas erradas, os grupos **3** e **9** tiveram erro na divisão. Os grupos (**1**, **2**, **11**, **12**, **13**, **14**) não tiveram problema;
- ao montar as proporções, os grupos **3**, **4** não fizeram; os grupos **5** e **6** escreveram que não existe proporção (marcaram medidas erradas). Os grupos **7**, **10**, **11** e **13** não montaram a proporção. Os grupos **9** e **14** demonstraram não saber bem o que é proporção. Os grupos **10** e **14** não associaram as razões corretamente. Apenas os grupos (**1**, **2**, **12**) mediram corretamente e escreveram a proporção adequadamente;
- quanto a concluir as relações observadas nesta atividade contatamos que os grupos **2**, **3**, **4** e **11** deixaram em branco, os demais citaremos abaixo:

Grupo **1** - "*Quando traçada uma paralela, mesmo deslocando os pontos ela nunca muda*".

Grupo **5** - "*Mesmo deslocando o ponto **D** os ângulos da figura (**ABC** e **ADE**) continuam quase com a mesma medida com diferença de 1 ou 2 graus, já os lados mudam radicalmente de medida e mesmo assim os 2 triângulos são semelhantes".*

Grupo **6** - "*Com apenas 1 par de paralelas e 2 retas concorrentes poderíamos formar várias configurações diferentes*".

Grupo **7**- "*Em qualquer posição elas vão se manter paralelas , segmentos **AB**, **BC**, **AC** não mudam de tamanho".*

Grupo **9** - "*Se você fizer alteração não terá nenhuma proporção*" (perderam a figura na hora de gravar).

Grupo **10** - "*Os triângulos formados são sempre semelhantes nas configurações*".

Grupo **12 -** "*Todos os ângulos opostos pelo vértice **A** são congruentes*".

Grupo **13 -** "*Concluímos que os triângulos são semelhantes e se houver mudança em alguma das retas as proporções serão as mesmas*".

Grupo **14** - "*Não importa o lugar da reta paralela os triângulos sempre serão semelhantes*".

✓ **Considerações:**

- Quatro alunos entraram na 2º aula. Uma aluna faltou.
- Numa outra atividade, pedir para justificar por que os triângulos são semelhantes.

- Alguns grupos tiveram dificuldade em salvar no disquete suas construções, acabando por perderem o que haviam feito.
- Alguns grupos ficaram prejudicados ao analisar as construções e levantar hipóteses de propriedades devido a não terem executado adequadamente as construções por falta de habilidade na utilização do programa.

6ª semana

Nesta semana não conseguimos trabalhar as atividades, pois terça-feira (7 de setembro) não houve aula, quarta-feira os alunos tiveram, durante a aula de matemática, atividades com o setor de orientação educacional, quinta-feira os alunos foram ao shopping para montar a feira-cultural.

7ª semana (1 aula)

Nesta semana também não foi possível dar continuidade à experimentação.

Terça-feira o laboratório ainda não estava arrumado para podermos utilizá-lo.

Na quarta-feira trabalhamos com álgebra e na quinta-feira estudamos os casos de semelhança de triângulos.

8ª semana (4 aulas)

Na terça-feira, dia 21/09/99, fomos ao laboratório para desenvolver a atividade **3** da parte **B** e posteriormente a institucionalização do teorema de Thales. Percebemos, nesta semana, que os alunos estavam menos agitados, procurando desenvolver as atividades sem solicitar muito o professor.

Uma das dificuldades apresentadas em geral foi o não-entendimento do conceito de projeção segundo uma direção. Vários grupos não haviam lido a explicação do que era projeção e foram logo iniciando a atividade, outros leram e não entenderam. Os grupos **7** e **8** primeiro fizeram a "experimentação" da definição de projeção segundo uma direção para depois iniciar a atividade. O grupo **12** manifestou não saber o que é transversal. De forma geral, os alunos entenderam o enunciado. Todos começaram a desenvolver a atividade direto no computador, nenhum grupo fez esboço. Os grupos **9** e **10** ainda apresentaram dificuldades na utilização das ferramentas do Cabri, no que diz respeito ao ponto de intersecção, os demais fizeram a atividade sem nenhum problema.

Nenhum grupo teve dificuldade em representar as configurações.

Com exceção do grupo **1** que representou as paralelas na posição vertical, todos os demais representaram as paralelas na posição inclinada.

Quanto à intersecção das transversais, observamos que os grupos **1**, **3**, **7**, **8**, **10**, **11** e **12** representaram as transversais se interceptando entre as paralelas, já os grupos **2**, **4**, **5**, **6**, **9**, **13** e **14** não.

Com exceção do grupo **9**, todos os demais concluíram que a projeção do ponto médio de um segmento está no ponto médio do segmento projetado. O grupo **4** percebeu que é ponto médio, porém não escreveu a conclusão.

Percebemos pouca dificuldade quanto a representar as razões. Os grupos **2** e **3** não escreveram as razões, os grupos **1**, **4**, **5** e **6** escreveram quase todas as razões possíveis, o grupo **7** marcou medida errada, o grupo **9** não calculou, e os grupos **8**, **11**, **12**, **13** e **14** escreveram somente as razões entre um segmento e a sua projeção. O grupo **10** apresentou algumas medidas estranhas e não foi possível conferir com o disquete (não conseguimos abrir).

Os grupos **6**, **8**, **9**,**10**, **13** e **14** não escreveram as proporções, os demais sim, e observamos que os grupos **2**, **3**, **4**, **5**, **11** e **12** registraram como conservação da relação de projeção, os grupos **1** e **5** a conservação das abscissas e os grupos **13** e **14**, embora não tenham escrito a proporção calcularam as razões entre um segmento e a sua projeção.

As conclusões escritas pelos alunos foram:

Grupo **2** - "*Todos os segmentos de **r** que têm projeção em **s**, são iguais, assim formam proporções*". Quiseram dizer provavelmente que as razões eram iguais.

Grupo **3 -** "*As medidas das projeções de seus respectivos segmentos são iguais, formando proporções*". Quiseram dizer provavelmente que as razões eram iguais.

Grupo **6** - "*Deram proporção os segmentos paralelos que possuem a mesma medida*".

Grupo **7** - "*Entre os segmentos de uma reta e suas respectivas projeções não são proporcionais*".

Grupo **8** - "*O segmento é proporcional à sua projeção*".

Grupo **9** - "*Posso enunciar várias relações, pois todos os segmentos possuem projeções.*"

Grupo **10**- "*Todos os segmentos formados na reta **r** têm a mesma medida*"

Grupo **11**- "*Os segmentos são proporcionais às suas projeções*".

Grupo **12-** "*Suas razões são congruentes, portanto as projeções com os segmentos respectivos formam proporções.*"

Grupo **13-** "*Os segmentos e suas projeções dão as mesmas razões*".

Grupo **14-** "*Todos os segmentos são proporcionais as suas projeções.*"

Terminada esta atividade, alguns grupos começaram a fazer a atividade de institucionalização do teorema de Thales lendo alguns enunciados e tentando montar uma configuração e a sua respectiva proporção, bem como ler um pouco de história.

Ao desenhar as configurações observamos:

a) com relação ao 1º enunciado (traçar uma paralela a um dos lados de um triângulo), apenas três grupos representaram na posição horizontal (**1**, **9**, **12**), os demais na posição inclinada (**2**, **3**, **4**, **5**, **6**, **7**, **8**, **10**, **11**, **14**), sendo que um dos grupos não soube representar a paralela (**13**); seis grupos não representaram a proporção (**1**, **2**, **3**, **6**, **7**, **13**), dois representaram errado (**9**, **5**) e os demais expressaram corretamente (**4**, **8**, **10**, **11**, **12**, **14**);

b) com relação ao segundo enunciado ("*Se duas retas são transversais a um feixe de paralelas, então a razão entre dois segmentos quaisquer de uma delas é igual à razão entre os segmentos correspondentes da outra*") em que se induz expressar a proporção por meio da conservação das abscissas, nove grupos representaram na posição horizontal (**5**, **6**, **7**, **8**, **9**, **10**, **11**, **13**, **14**) os demais na posição inclinada (**1**, **2**, **3**, **4**, **12**). Três grupos representaram as transversais se interceptando entre as paralelas (**1**, **4**, **11**). Sete grupos não fizeram a proporção (**1**, **2**, **3**, **4**, **5**, **6**, **7**) os demais representaram adequadamente;

c) com relação ao terceiro enunciado ("*Se retas paralelas determinam sobre duas transversais segmentos correspondentes, então as razões entre esses segmentos correspondentes formam uma proporção*"), em que se induz expressar a proporção por meio da conservação da relação de projeção, onze grupos representaram na posição horizontal (**1**, **4**, **5**, **6**, **8**, **9**, **10**, **11**, **12**, **13**, **14**) os demais na posição inclinada (**2**, **3**, **7**). Três grupos representaram as transversais se interceptando entre as paralelas (**1**, **4**, **7**). Seis grupos não fizeram a proporção (**1**, **4**, **5**, **6**, **7** e **11**) os demais representaram, sendo que dois destes montaram inadequadamente (**2**, **3**). Os grupos **9**, **10** e **12** não expressaram pela relação de projeção como se induz e sim pela conservação das abscissas.

✓ **Observações**:

- O grupo **14,** nos três enunciados, representou a proporção pela conservação da relação de projeção, não se atendo muito para o enunciado.
- Percebe-se que a maioria dos alunos, quando vai traçar qualquer reta, começa sempre desenhando na posição horizontal da esquerda para a direita como normalmente escrevemos. Notamos que nas atividades feitas com o computador isso também ocorre. Na primeira atividade, para quase todas as duplas, os alunos construíram e nomearam os vértices do triângulo, depois marcaram um ponto sobre um dos lados e traçaram a paralela. Com isso a posição das paralelas foi uma conseqüência devido a posição dos vértices já estar determinada aleatoriamente fazendo com que as paralelas ficassem na posição inclinada. Constatamos no primeiro enunciado que se assemelha com a primeira atividade que a maioria dos alunos também desenhou as paralelas na posição inclinada o que leva-nos a suspeitar que a atividade no computador induziu na formação de uma configuração diferente das sugeridas nos livros didáticos e elaboradas por

um grupo de alunos que não havia utilizado o computador, ou seja, a paralela na posição horizontal.

- Na atividade **2** - Parte **B** - todos os alunos construíram as paralelas na posição inclinada e as transversais se interceptando entre as paralelas o que também não é uma configuração muito explorada nos livros didáticos e nem uma configuração típica entre os alunos que não utilizaram o computador para aprender o teorema de Thales. Isso ocorreu talvez pela forma de se enunciar a atividade, em que as primeiras construções seriam duas retas concorrentes e a posição das paralelas seria conseqüência delas. Esta atividade visava explorar o teorema de Thales em suas várias configurações sob o aspecto da conservação das abscissas ou pela dilatação (semelhança de triângulos). O segundo enunciado também sugere expressar a proporção sob esses pontos de vista; no entanto, devido à maneira que foi enunciado, a maioria dos alunos começou a construção pelo feixe de retas paralelas traçando-as na posição horizontal e as transversais não se interceptando entre as paralelas.

- Na atividade **3** - parte **B** - todos os alunos construíram as paralelas na posição inclinada e 50% as transversais se interceptando entre as paralelas, o que também não é uma configuração muito explorada nos livros didáticos e nem uma configuração típica entre os alunos que não utilizaram o computador para aprender o teorema de Thales. Isso também deve ter ocorrido pela forma de se enunciar a atividade em que a posição das paralelas é uma conseqüência das construções anteriores. Esta atividade visava explorar o teorema de Thales sob o aspecto da conservação da relação de projeção. O terceiro enunciado também tem esse mesmo objetivo, embora, não se utilize da palavra projeção. Ao tentar representar a configuração sugerida, a maioria dos alunos construiu as paralelas na posição horizontal e as transversais não se interceptando entre as paralelas.

9ª semana –(3 aulas)

Nesta semana trabalhamos as atividades envolvendo as conseqüências do teorema de Thales e os problemas de aplicações. Iniciamos no dia 28 de setembro e concluímos no dia 30 de setembro. No primeiro dia quatro alunos faltaram e, no segundo, tivemos a ausência de oito.

No dia 28/09/99, as atividades foram desenvolvidas no laboratório de informática, onde os alunos trabalharam as atividades **4**, **5** e **6**. Já no dia 30, não foi possível utilizar o laboratório, com isso os alunos desenvolveram as atividades de aplicação do teorema de Thales utilizando régua e compasso.

O objetivo da atividade **4** era trabalhar o recíproco do teorema de Thales. Nessa atividade notamos que os alunos não tiveram muita dificuldade, quase não solicitaram o professor, percebemos uma evolução no responder e justificar as afirmações e conclusões feitas. As justificativas dadas para as retas paralelas foram bem diversificadas:

- uns utilizaram a semelhança de triângulos alegando que uma vez que os lados são proporcionais os ângulos deverão serem iguais, logo as retas são paralelas;
- outros mediram os ângulos;
- dois dos grupos justificaram pelo teorema de Thales.

Na quinta questão, a maioria dos grupos teve dificuldade em interpretar, construir e, principalmente, justificar o teorema da bissetriz dos ângulos internos de um triângulo. Apenas dois grupos chegaram próximo da resposta.

Na questão **6**, alguns alunos não lembraram o que é um trapézio. Quase todos os grupos fizeram essa atividade e chegaram à conclusão de que é ponto médio, porém não justificaram utilizando propriedades, responderam e justificaram apenas com as constatações feitas no computador que, para eles, era o suficiente (s*e estou vendo, não preciso demonstrar*).

Nos problemas de aplicação, foram feitas várias perguntas para a professora, notamos muita insegurança por parte dos alunos, principalmente porque não havia configuração em algumas das atividades.

Na primeira atividade foi pedido para calcular o perímetro de um triângulo ***PQR*** semelhante ao triângulo ***ABC*** dados o perímetro de ***ABC*** e a medida de dois lados homólogos. Como houve ausência de vários alunos, alguns grupos foram desfeitos, outros ficaram com três elementos. Dos grupos que fizeram a atividade, apenas **5** acertaram (grupo **8**, **11**, **12**, **13** e **14**); o grupo **2** atribuiu valores para os lados ***PR*** e ***QR*** de forma que o perímetro seja 22 (8+8+6); os grupos **3**, **9** e **10** erraram devido a ter invertido a razão referente ao perímetro.

Na segunda atividade dadas as bases de um trapézio, eles deveriam determinar a altura do triângulo menor formado pelo prolongamento dos lados não-paralelos. Os grupos **8**, **11** e **14** conseguiram resolver certo; o grupo **3** errou (calculou área); os grupos **9**, **10**, **12** e **13** erraram devido a não ter considerado a altura do triângulo maior como sendo *oito* mais **h.**

Na terceira atividade, foi pedido para determinar a medida dos segmentos formados por uma transversal interceptada por três retas paralelas conhecendo-se a soma dos segmentos e a medida dos segmentos correspondentes numa outra transversal. Essa questão, exceto o grupo **2,** que só fez o esboço, os demais acertaram.

Na quarta questão foram fornecidas três configurações para que verificassem se os segmentos em destaque eram ou não paralelos. Nessa questão, o grupo **2** afirmou que todas eram devido aos ângulos serem congruentes (mediram); os grupos **8** e **5** não fizeram; os demais acertaram (**3**, **9**, **10**, **11**, **12**, **13** e **14**).

A quinta questão é um problema de aplicação para se calcular a altura de um prédio conhecendo-se a sombra do prédio, a altura e a sombra de um homem. Nessa questão, vários grupos ficaram discutindo o problema das unidades metro e centímetro manifestando dificuldade em entender e converter tudo para centímetro ou tudo para metro. Essa questão só o grupo **2** acertou; os grupos **3**, **5**, **8**, **11** não fizeram (acabou a aula) e os grupos **9**, **10**, **12** e **14** montaram a proporção certa, perceberam que deveriam fazer a conversão das unidade, porém erraram.

As demais questões que envolviam a conversão dos registros discursivo, simbólico e figural, nesta ordem, só o grupo **2** fez e acertou, os demais não se interessaram em resolver alegando já saber fazer por já terem aprendido em Desenho Geométrico.

✓ Considerações gerais

No transcorrer da aplicação da Seqüência Didática, percebemos que a postura do aluno foi mudando com o passar das semanas no sentido de: maior participação nas discussões, tomada de iniciativa, sugestão de estratégias diferentes para resolver os problemas não só de geometria, mas também nas aulas de álgebra, questionamentos, críticas, principalmente quando alguma coisa parece óbvia e se pede para justificar, provar ou demonstrar. Achamos que essa mudança de postura foi devido ao tipo de atividade proposta favorecida pelo uso do software Cabri-géomètre I e pela postura do professor em sala de aula ensinando o aluno à aprender a aprender.

Notamos, durante a aplicação e discussão das atividades, que alguns alunos, que normalmente não obtinham as melhores notas, eram os primeiros a criticar, contestar e até dar sugestões. Os alunos que sempre tiravam notas altas, manifestaram muita ansiedade, insegurança, constantemente chamavam o professor durante a realização das atividades sentindo necessidade de confirmações, do apoio do livro didático na busca de fórmulas mágicas.

Alguns fatores acreditamos que dificultaram um pouco o trabalho, mas, por outro lado, são coisas que sempre podem ocorrer no sistema ensino-aprendizagem, tais como:

- não-comprometimento de alguns alunos, no sentido de faltarem às aulas por qualquer motivo perdendo a seqüência das atividades;
- por estarem no último ano do ciclo, tinham o sentimento que já passaram de ano e relaxaram bastante no segundo semestre;

- não-realização de algumas atividades propostas para casa e até em classe, pois há alunos que não são interessados ficam enrolando e acabam não participando como deviam;
- muita interrupção do trabalho;
- devido ao aluno estar muito acostumado com o livro didático e com as aulas tradicionais, no começo ficou um pouco complicado, havia muita insegurança, ansiedade por parte dos alunos que ficavam esperando que o professor desse um exemplo ou resolvesse os problemas propostos para eles sem ao menos terem lido o enunciado;
- depois que institucionalizamos o teorema de Thales, alguns alunos manifestaram um pouco de desinteresse em continuar as atividades achando que o assunto é muito fácil, já sabiam, por ter estudado no segundo bimestre nas aulas de Desenho Geométrico. Nas primeiras atividades da seqüência Parte **B** ninguém manifestou e nem percebeu nenhuma semelhança com o que já haviam aprendido. Acreditamos que talvez o fato de terem estudado antes, essa noção na outra disciplina possa ter comprometido em parte a pesquisa, mas por outro lado o grupo de referência (8ª série **B**), também teve a mesma formação, com a mesma professora;
- num próximo ano intencionamos replanejar os programas de Desenho Geométrico e Matemática procurando articular melhor os conceitos;
- não foi possível trabalhar a demonstração do teorema de Thales, pois como as aulas vão até novembro, nos meses de outubro e novembro há muitos feriados, viagem, excursão da formatura, optamos em não estudar a demonstração com detalhes, ficamos só com as provas e justificativas para poder tratar outros assuntos de geometria que também consideramos importante em sua formação como o teorema de Pitágoras, as razões métricas no triângulo retângulo e num triângulo qualquer.

Quando terminamos a aplicação da seqüência, pedimos para os alunos escreverem suas opiniões a respeito das aulas, do uso do computador como recurso didático, fazendo críticas e dando sugestões. Procuramos deixar os alunos bem à vontade para se expressarem. Não foram todos os alunos que quiseram escrever.

Citamos a seguir o que foi escrito:

- "*Gostaríamos de dizer que as aulas de geometria no laboratório de informática são muito produtivas. Pedimos desculpas por às vezes não prestarmos atenção nas aulas, falar fora de hora, bagunçar na sala, e às vezes não fazer o que a senhora pede. Agradecemos muito pela senhora se esforçar tanto, querendo fazer um trabalho tão importante para nosso futuro, embora outras pessoas na sala não acreditem nisso. Nós* *gostamos muito da senhora, e pedimos desculpas por tantos "conflitos nesses últimos dias!"*

"*Seu projeto de geometria é o melhor que eu já vi, tenho certeza que a senhora conseguirá completar seus objetivos conosco. Talvez alguns não percebam que esse projeto é para nos ajudar mais do que a própria senhora. Esse projeto me interessou muito, se a minha sala lhe magoou em alguma coisa peço perdão por todos, mesmo que eles não percebam que erraram no jeito de julgá-la, pois não podemos julgar ninguém pela aparência e sim pelo coração. Do meu ponto de vista esse projeto me ajudou muito nas tarefas, nas provas e nas aulas na minha aprendizagem. Aprendi a gostar da senhora como professora e amiga que tenho certeza que a senhora é para conosco.*"

"*Na minha opinião o seu projeto de geometria esta sendo bom não só na minha opinião como na dos outros com certeza também serão, o seu projeto serviu para mostrar uma maneira prática e fácil de aprender geometria acho que até agora para todos está tendo resultado as aulas em computador, não para aprendizagem, mas também para uma aula diferente, ou seja uma aula mais tranqüila, sem muita matéria dando disponibilidade aos alunos. Com certeza o seu projeto vai trazer boas respostas mais a frente, e que todos consigam aprender para conseguirem boas notas. Essa é minha opinião sobre o projeto."*

"*Eu Leonardo de Almeida Corrêa, fui bem recompensado com esse novo método de ensino geométrico criado pela professora Nancy, apesar de algumas falhas, tais como aprender sem saber o que está fazendo e aulas "ainda" muito devagares e desaproveitáveis, aprendi a me expressar melhor no papel devido aos incentivos dados pela professora quando pedia para os alunos justificarem as suas respostas e as aulas, para mim, foram mais dinâmicas e menos cansativas, tirando-nos da rotina estressante da sala de aula e dando-nos a liberdade de comunicarmos com nossos colegas. Este é um bom e talvez, se aperfeiçoado, revolucionário método de aprendizagem e incentivo para a Geometria*."

4.5 - Análise dos resultados do pós-teste

Após, aproximadamente, dois meses do término da aplicação da seqüência-piloto na 8º série sem que os alunos soubessem de antemão, aplicamos um teste (o mesmo aplicado aos alunos do 1º Ensino Médio em 1998) com a finalidade de verificar:

- se os alunos possuíam uma concepção limitada ou global do teorema de Thales;
- se os alunos reconheciam a aplicação do teorema nas atividades propostas;
- se a posição das paralelas interferia no reconhecimento e no sucesso da aplicação do teorema;
- se a posição das paralelas com relação ao ponto de intersecção das transversais interferia no reconhecimento e no sucesso da aplicação do teorema;
- se os alunos conseguiam resolver e justificar por meio de propriedades os problemas propostos sem se ater ao aspecto visual, bem como resolver problemas dados na língua natural, para os quais as configurações não são fornecidas;
- se houve mudanças de atitudes após esse período.

Aplicamos este teste no dia 11 de novembro de 1999, em duas 8º séries do Ensino Fundamental: uma que trabalhou os conceitos de semelhança e do teorema de Thales (por meio da seqüência didática) seguindo os princípios da engenharia didática e utilizando como uma das ferramentas e material de apoio o software Cabri–géomètre **I** (8º série **A**, a que iremos referir como grupo experimental), e a outra que estudou estes conceitos utilizando apenas o livro didático num sistema de ensino aprendizagem tradicional (8º série **B**, a que iremos nos referir como grupo de referência). Aplicamos o teste no mesmo dia e hora para as duas turmas. Na **8ª A,** junto com a professora de inglês, e na **8ª B** com o observador e a professora de Matemática da classe. Os alunos foram avisados da importância de se fazer o teste com seriedade, ou seja, procurando responder todas as questões sem se comunicarem e de forma legível mostrando o desenvolvimento para que pudéssemos entender e perceber como estão raciocinando para realizar as tarefas. Foi permitido o uso da calculadora, uma vez que o objetivo não era verificar se o aluno sabe operar com números reais e sim se consegue reconhecer e mobilizar a aplicação do teorema de Thales em várias situações, bem como o seu recíproco. Não foram ditos a nenhum aluno quais assuntos estariam por trás das questões. Na 8º série **A** tivemos a presença de 25 alunos e a ausência de 5, já na 8º série

B compareceram neste dia 27 alunos e 5 alunos faltaram. Os alunos, tanto de uma sala quanto da outra, haviam tido aulas de Desenho Geométrico com a mesma professora e estudaram geometricamente as aplicações do teorema de Thales utilizando régua e compasso. As aplicações trabalhadas foram: divisão de segmentos em partes iguais ou proporcionais e a determinação gráfica da terceira e quarta proporcional. Essas aplicações foram trabalhadas em ambas as classes antes de terem visto o teorema de Thales na disciplina de Matemática.

Após a correção deste teste, fizemos uma entrevista individual com os alunos do grupo experimental, dando um retorno do desempenho de cada um, mostrando os erros, e pedindo esclarecimentos de alguns procedimentos utilizados.

Faremos agora uma análise quantitativa e depois qualitativa dos dados, procurando cruzar alguns resultados comparando o desempenho de uma classe com relação a outra. Para isso, vamos analisar cada questão individualmente e posteriormente o conjunto em relação aos acertos, erros e questões em branco. Para a análise qualitativa, iremos utilizar o software CHIC para construção da árvore de similaridade, da árvore hierárquica de implicação e do gráfico de implicação, da mesma forma que fizemos para a análise do teste-diagnóstico.

4.5.1- Análise quantitativa do pós-teste

Para facilitar a interpretação e a posterior análise dos dados, classificamos as variáveis estatísticas dos resultados encontrados para cada questão por meio de códigos como mostra a tabela abaixo que também será utilizada para a análise qualitativa.

CODIGO		VARIÁVEL	CODIGO		VARIÁVEL
1	**AT1A**	Aplicou Thales e acertou questão 1A	36	**NF3A**	Não fez questão 3A
2	**EM1A**	Errou ao montar a proporção 1A	37	**AT3B**	Aplicou Thales/acertou questão 3B
3	**ET1A**	Errou questão 1A - absurdo	38	**EJ3B**	Errou justificativa questão 3 B
4	**NF1A**	Não fez questão 1A	39	**EM3B**	Errou ao montar a proporção - 3B
5	**AT1B**	Aplicou Thales e acertou questão 1B	40	**ET3B**	Errou questão 3B
6	**EM1B**	Errou ao montar a proporção 1B	41	**NJ3B**	Não justificou questão 3B
7	**ET1B**	Errou questão 1B - absurdo	42	**NF3B**	Não fez questão 3B
8	**NF1B**	Não fez questão 1B	43	**ATQ4**	Aplicou Thales e acertou questão 4
9	**AX2A**	Aplicou Thales e acertou questão 1A	44	**EJQ4**	Errou a justificativa da questão 4
10	**EX2A**	Errou cálculo de X questão 2A	45	**ETQ4**	Errou questão 4
11	**NX2A**	Não fez questão 2A - cálculo de X	46	**NJQ4**	Não justificou questão 4
12	**AY2A**	Aplicou Thales e acertou questão 2A	47	**NFQ4**	Não fez questão 4
13	**MY2A**	Errou ao montar a proporção- y- 2A	48	**ATQ5**	Aplicou Thales e acertou questão 5
14	**EY2A**	Errou cálculo de Y questão 2A	49	**MCD5**	Só montou corretamente o desenho
15	**NY2A**	Não fez questão 2A - cálculo de Y	50	**ETQ5**	Errou questão 5
16	**AX2B**	Acertou cálculo de x questão 2B	51	**NFQ5**	Não fez questão 5
17	**CX2B**	Errou em conta - cálculo de X – 2B	52	**ATQ6**	Aplicou Thales e acertou questão 6
18	**MX2B**	Errou ao montar a proporção- x- 2B	53	**EPQ6**	Errou parte da questão 6
19	**EX2B**	Errou cálculo de X questão 2B	54	**NJQ6**	Não justificou questão 6
20	**NX2B**	Não fez questão 2B - cálculo de X	55	**ETQ6**	Errou questão 6
21	**AY2B**	Acertou cálculo de Y questão 2B	56	**NFQ6**	Não fez questão 6
22	**MY2B**	Errou ao montar a proporção- y- 2B	57	**ATQ7**	Aplicou Thales e acertou questão 7
23	**EY2B**	Errou cálculo de Y questão 2B	58	**ETQ7**	Errou questão 7
24	**NY2B**	Não fez questão 2B - cálculo de y	59	**NJQ7**	Não justificou questão 7
25	**AX2C**	Acertou cálculo de x questão 2C	60	**NFQ7**	Não fez questão 7
26	**MX2C**	Errou ao montar a proporção – x - 2C	61	**ATQ8**	Acertou questão 8
27	**EX2C**	Errou cálculo de X questão 2C	62	**AXQ8**	Acertou cálculo de x
28	**NX2C**	Não fez questão 2C - cálculo de X	63	**CXQ8**	Errou conta para obter x na questão 8
29	**AY2C**	Aplicou Thales e acertou – y 2C-	64	**ETQ8**	Errou completamente a questão 8
30	**MY2C**	Errou ao montar a proporção- Y- 2C	65	**NJQ8**	Não justificou questão 8
31	**EY2C**	Errou cálculo de Y questão 2C	66	**NFQ8**	Não fez questão 8
32	**NY2C**	Não fez questão 2C - cálculo de Y	67	**ATQ9**	Acertou totalmente questão 9
33	**AT3A**	Aplicou Thales e acertou questão 3A	68	**EPQ9**	Errou parcialmente questão 9
34	**EA3A**	Errou- apoiando-se na aparência - 3A	69	**ETQ9**	Errou questão 9
35	**EM3A**	Aplicou Thales e errou proporção- 3A	70	**NFQ9**	Não fez questão 9

1ª QUESTÃO

O gráfico abaixo representa o percentual do desenvolvimento dos alunos das turmas **A** e **B** em relação à primeira questão.

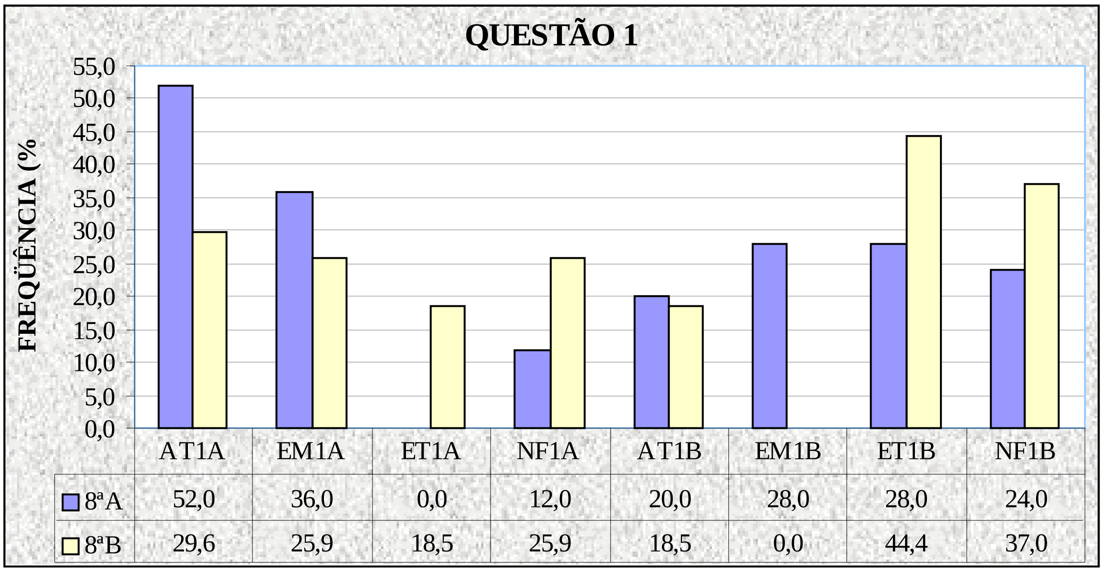


Gráfico 6 – Resultados da questão 1 (%)

Na primeira questão, as paralelas estão na posição vertical e as transversais interceptando-se depois das paralelas. O objetivo dessa questão era aplicar o teorema de Thales para determinar a medida de um segmento da transversal (**1A**) e verificar a possibilidade de se calcular um dos segmentos formados em uma das paralelas (**1B**). A configuração fornecida, de dois triângulos sobrepostos, aparentemente retângulos, provavelmente induziu vários alunos da 8ª**B** a aplicarem indevidamente o teorema de Pitágoras para determinar o valor de **x** e de ***IJ*.** Em ambas as classes o índice maior de erros e itens não feitos nesta questão, foi para determinar o valor do segmento formado na paralela, pois a maioria dos alunos tentou resolver sob o ponto de vista da conservação das abscissas errando na montagem da proporção. Na 8ª série **B,** os alunos que acertaram o cálculo de ***IJ*** fizeram uma decomposição da figura e aplicaram semelhança de triângulos.

De modo geral, notamos pelo gráfico **6** que os alunos da 8ª série **A** tiveram um desempenho um pouco melhor, tendo um índice menor de erros absurdos. Contudo, ainda persistem algumas falhas: o índice de acerto na determinação do segmento formado na paralela foi pequeno 20%; 36% dos alunos erram ao montar a proporção para o cálculo de **x**, sendo que destes, 20% não perceberam que o segmento ***JT*** equivale a 8 - x (parte e todo).

2ª QUESTÃO

Na questão **2** foi pedido para o aluno calcular os valores de **x** (segmento da transversal) e **y** (segmento da paralela) em três configurações diferentes. No item "**a**", as paralelas estão na horizontal; no item "**b**", as paralelas estão na posição inclinada, e no item "**c**" as transversais se interceptam entre as paralelas. Nesta questão, iremos analisar individualmente os itens **2A**, **2B**,e **2C**, a seguir, os três juntos com relação ao cálculo de **x**, e depois para o cálculo de **y**. Veja os gráficos 2, 3, 4, 5 e 6.

QUESTÃO 2A

O gráfico abaixo representa o percentual do desenvolvimento dos alunos das turmas **A** e **B** em relação à segunda questão, item **a**.

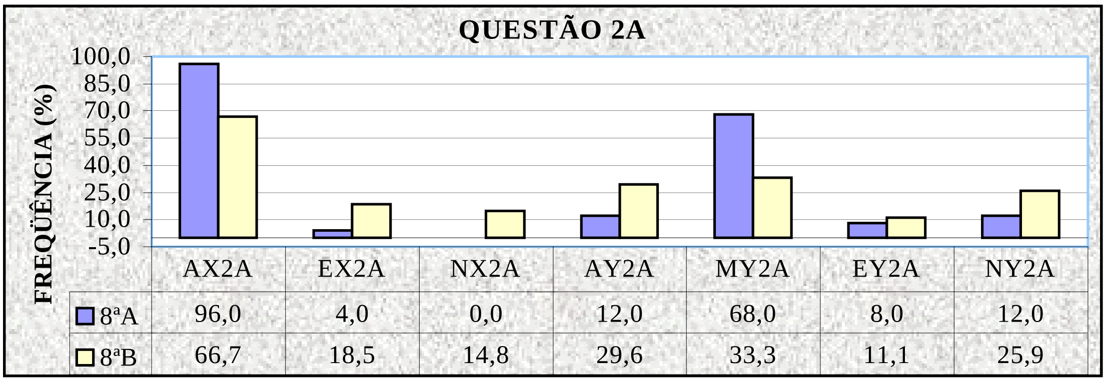


Gráfico 7 – Resultados da questão 2A (%)

Constatamos nesse item que, em ambas as turmas, o índice de acertos no cálculo de **x** foi superior a 50% e a turma **A** chegou bem próximo dos 100%; porém no cálculo de **y** o índice de acertos é inferior a 30% e a turma **B** conseguiu uma porcentagem um pouco maior que a turma **A**. Os alunos da turma **A** perceberam que se deve aplicar o teorema de Thales no entanto erraram na montagem da proporção, pois não levaram em conta o aspecto da dilatação ou a semelhança dos dois triângulos sobrepostos e montaram a proporção pensando sob o ponto de vista da conservação das abscissas. Esse fato talvez indique que deveríamos ter trabalhado um pouco mais a apreensão operatória no que diz respeito à reconfiguração e à proporção em relação ao segmento formado na paralela, propondo situações em que o aluno percebesse que a razão obtida pelos segmentos das paralelas não é igual a qualquer uma das razões encontradas utilizando-se os segmentos das transversais.

QUESTÃO 2B

Neste item, obtivemos, na turma **A**, de forma geral, um índice maior de sucesso e a constatação da dificuldade apresentada pelos alunos com relação à montagem da proporção para o cálculo da medida do segmento formado na paralela.

O gráfico **8** representa o percentual de desenvolvimento dos alunos das turmas **A** e **B** em relação à segunda questão, item **b**.

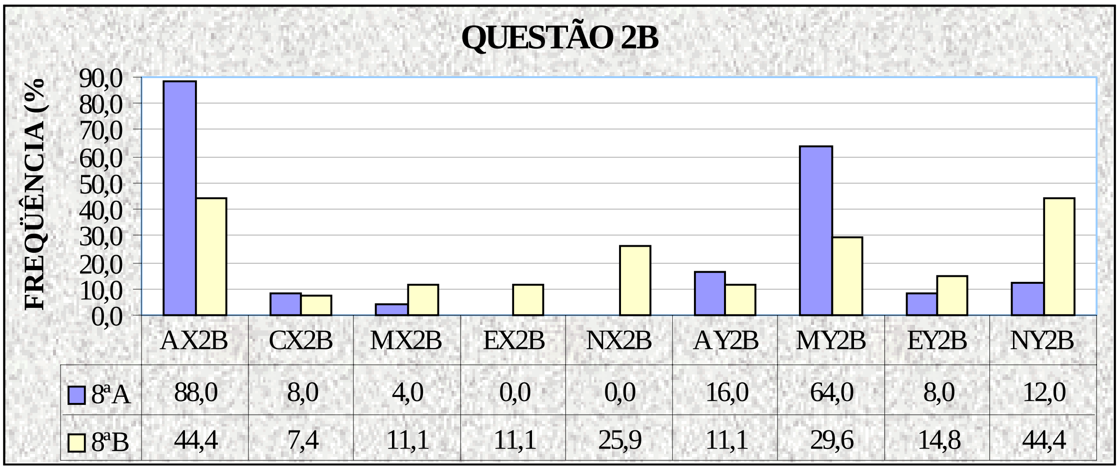


Gráfico 8 – Resultados da Questão 2B (%)

QUESTÃO 2C

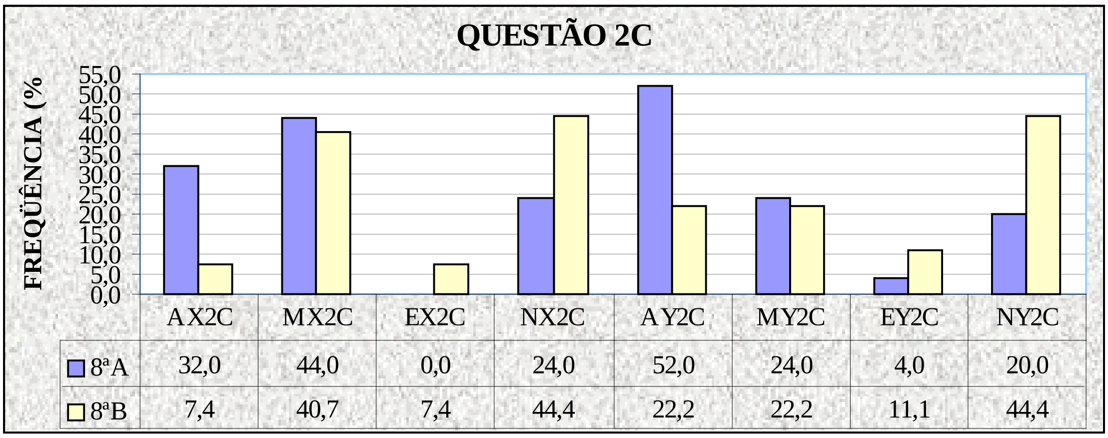
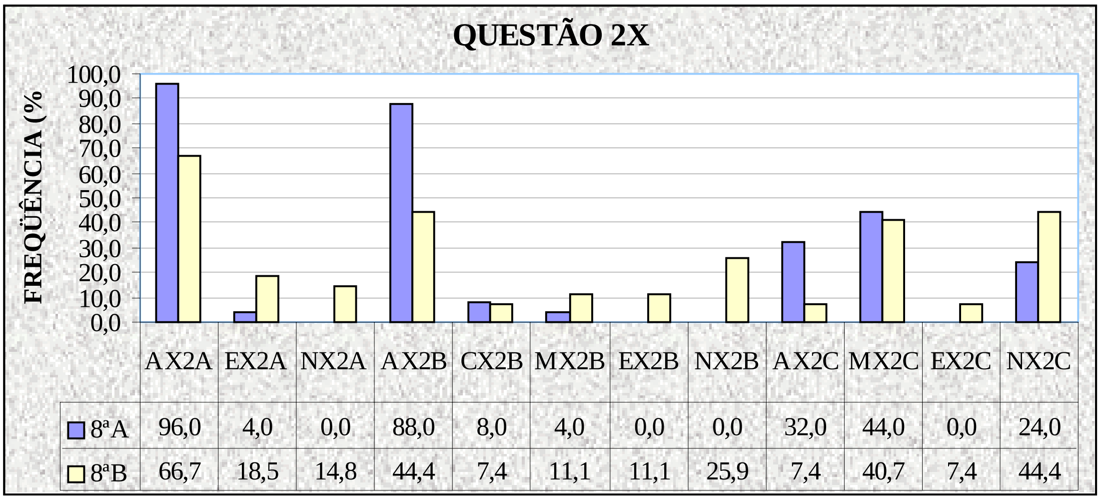


Gráfico 9 – Respostas da Questão 2C (%)

Neste item, percebemos que a turma **A** obteve um desempenho melhor, apresentando uma certa dificuldade para o cálculo do valor de **x**, que, embora representasse a medida do segmento formado na transversal no qual, pelos itens anteriores, a porcentagem de acerto foi grande, o problema aqui talvez seja o fato de **x** ser a soma das medidas dos lados dos dois triângulos opostos pelo vértice. Os alunos poderiam, nesse caso, ter considerado a medida do lado ***AO*** sendo **x** menos nove. Provavelmente essa seja a mesma dificuldade encontrada na primeira questão em que deveriam ter considerado ***JT*** igual a oito menos **x**. Um aspecto que consideramos positivo nesta questão foi o índice de acerto, 52%, para o cálculo de **y**, que, embora pudesse ter sido melhor, foi superior ao índice do teste diagnóstico e da turma **B**. Essa configuração, segundo pesquisa de Cordier, foi considerada não-típica pelos alunos e, segundo as constatações de Charalambos, o índice de acertos para essa configuração era sempre inferior à configuração dos triângulos sobrepostos. Acreditamos que esse índice de acertos se deu por dois motivos, primeiro devido às atividades da seqüência didática e ao uso do Cabri terem propiciado aos alunos a familiarização com essa configuração; o outro motivo é que a apreensão perceptiva dessa configuração favorece na apreensão operatória o aspecto da dilatação não precisando realizar nenhuma decomposição da figura.

Questão 2 com relação à incógnita X

O gráfico abaixo representa o percentual do desenvolvimento dos alunos das turmas **A** e **B** em relação aos valores de **x** para a segunda questão.



	AX2A	EX2A	NX2A	AX2B	CX2B	MX2B	EX2B	NX2B	AX2C	MX2C	EX2C	NX2C
8ªA	96,0	4,0	0,0	88,0	8,0	4,0	0,0	0,0	32,0	44,0	0,0	24,0
8ªB	66,7	18,5	14,8	44,4	7,4	11,1	11,1	25,9	7,4	40,7	7,4	44,4

Gráfico 10 – Resultados da Questão 2 em relação à incógnita x (%)

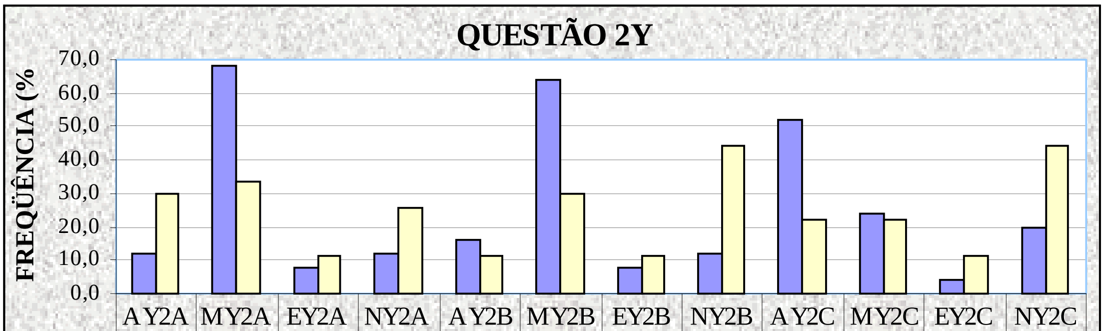
Lembrando: o valor de **x** refere-se à medida do segmento formado na transversal ou lado não-paralelo dos triângulos.

Pelo gráfico **10**, constatamos que a porcentagem de acerto da turma **A** foi superior ao da turma **B**. Com relação às posições das retas paralelas, temos, em ordem decrescente das porcentagens de acerto, as posições: horizontal (2A), inclinada (2B) e vertical (1A). No que diz respeito às configurações, os índices maiores de acertos estavam naquelas em que os triângulos estavam sobrepostos. Com índice bem menor de acertos, detectamos no teste-diagnóstico as posições horizontal, vertical e inclinada e a configuração dos triângulos sobrepostos.

Questão 2 com relação à incógnita y

A incógnita **y** nos itens **A** e **B** refere-se à medida do segmento formado nas paralelas. O gráfico **11** mostra bem como o índice de acertos em ambas as turmas foi muito baixo. Os alunos perceberam a aplicação do teorema de Thales, porém erraram ao montar a proporção, pois deveriam ter pensado no teorema sob o ponto de vista da dilatação ou na semelhança de triângulos. Observando os pontos de vista adotados para determinar os valores de **y** nesta questão, notamos que a maioria dos alunos que montaram errado estavam resolvendo pensando na conservação das abscissas. Esse fato nos leva a suspeitar que, talvez, a conservação das abscissas tenha sido um conhecimento-obstáculo em relação ao aspecto da dilatação. Quanto à configuração, nos itens **A** e **B**, os triângulos estão sobrepostos, e, no item **C,** são opostos pelo vértice, sendo que nesta última observamos 52% de acerto na turma **A** o que nos faz acreditar que essa configuração, uma vez conhecida, favorece a apreensão operatória da aplicação do teorema de Thales sob o aspecto da dilatação. Detectamos que 16% dos alunos da turma **A** que erraram a montagem da proporção no item **2C** não perceberam que **x** era a distância de **A** até **D** e que o lado ***AO*** do triângulo ***ABO*** corresponde a **x – 9**. Uma das alunas, em todos os itens, considerou o valor de **y** como sendo a metade ou o dobro da medida do segmento paralelo.

O gráfico abaixo representa o percentual do desenvolvimento dos alunos das turmas **A** e **B** em relação aos valores de **Y** para a segunda questão.



	AY2A	MY2A	EY2A	NY2A	AY2B	MY2B	EY2B	NY2B	AY2C	MY2C	EY2C	NY2C
8ªA	12,0	68,0	8,0	12,0	16,0	64,0	8,0	12,0	52,0	24,0	4,0	20,0
8ªB	29,6	33,3	11,1	25,9	11,1	29,6	11,1	44,4	22,2	22,2	11,1	44,4

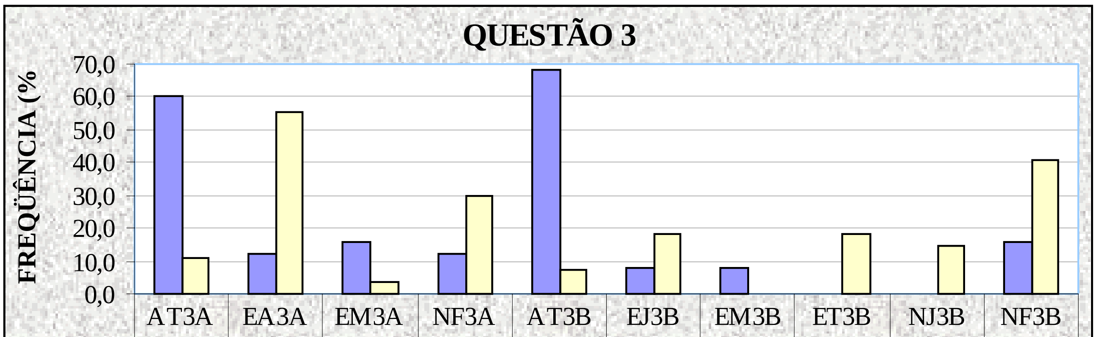
Gráfico 11 – Resultados da Questão 2 em relação à incógnita y (%)

3ª QUESTÃO

Esta questão tem por objetivo a aplicação do teorema recíproco de Thales para explicar se os segmentos ***RS*** e ***BC*** são paralelos. No item **a**, temos a configuração dos triângulos sobrepostos, e, no item **b**, dos triângulos opostos pelo vértice. Pelo gráfico

12, temos a turma **A**, com um percentual de acerto superior a 60% nas duas configurações e a turma **B** inferior a 12%. Notamos também que na turma **A** o índice de acertos na configuração dos triângulos sobrepostos é inferior à outra. Talvez esse fato valide a hipótese de o uso do computador ajudar na não-instauração de figuras prototípicas. Um outro fato que ocorreu foi que, devido aos valores utilizados, dependendo do ponto de vista adotado para se montar a proporção, os valores das razões obtidas eram tão próximos que alguns alunos aproximaram e consideraram o item **3a** com tendo os segmentos ***RS*** e ***BC*** paralelos.

O gráfico **12** representa o percentual do desenvolvimento dos alunos das turmas **A** e **B** em relação à terceira questão.



	AT3A	EA3A	EM3A	NF3A	AT3B	EJ3B	EM3B	ET3B	NJ3B	NF3B
8ªA	60,0	12,0	16,0	12,0	68,0	8,0	8,0	0,0	0,0	16,0
8ªB	11,1	55,6	3,7	29,6	7,4	18,5	0,0	18,5	14,8	40,7

Gráfico 12 – Resultados da questão 3 (%)

Percebemos que alguns alunos responderam esta questão considerando apenas o aspecto visual, não sentindo necessidade de nenhum tipo de cálculo. Isso ocorreu com 12% dos alunos do grupo experimental e com 30% do grupo de referência. Um aluno do grupo experimental respondeu "se as retas são ou não paralelas" medindo o ângulo da configuração fornecida. Não se ateve ao fato de que a figura representada era só um esboço e que poderia não estar na escala. Um outro aluno do grupo experimental alegou que só era possível responder essa questão se tivessem sido dadas as medidas dos segmentos ***BC*** e de ***RS***.

4ª QUESTÃO

Esta questão pressupõe que o aluno aplique o teorema de Thales para determinar as dimensões dos lados do quadrilátero ***ADEF*** a fim de verificar se é ou não um quadrado, uma vez que possui os quatro ângulos retos. No grupo experimental (8ªA), 16% acertaram totalmente a questão; 52% erraram ao justificar, muitos deles afirmando que era um quadrado por ter lados iguais e ângulos retos, porém sem efetuar nenhum cálculo que comprovasse a congruência dos lados. Outros, 25%, só levaram em conta o fato de os ângulos serem retos para justificar. Uma aluna pensou na medida de 2 lados generalizando os demais que não são paralelos. Uma outra aluna dividiu graficamente, aplicando Thales, o lado ***AC*** que mede 3cm em três partes iguais e verificou experimentalmente que ***AF*** compreende duas unidades. Ela, neste caso, considerou a figura não como um esboço e sim como um desenho em escala. Embora o índice de acertos e desempenho da turma **A** tenha sido melhor como podemos ver no gráfico **8**, ainda muitos alunos fundamentam suas respostas levando em conta apenas a apreensão perceptiva, não sentindo necessidade de nenhum tipo de confirmação, prova ou demonstração.

Um outro aluno do grupo experimental, que acertou a questão, resolveu bem diferente dos outros: ele supôs que, se for um quadrado, os lados terão 2cm, aplicou Pitágoras, calculou os segmento ***BE*** e ***EC*** depois aplicou Thales para ver se formava proporção.

No grupo de referência, 23 % dos alunos que responderam a questão levaram em conta apenas o aspecto visual, não efetuando nenhum cálculo complementar.

O gráfico abaixo representa o percentual do desempenho dos alunos das turmas **A** e **B** em relação à quarta questão.

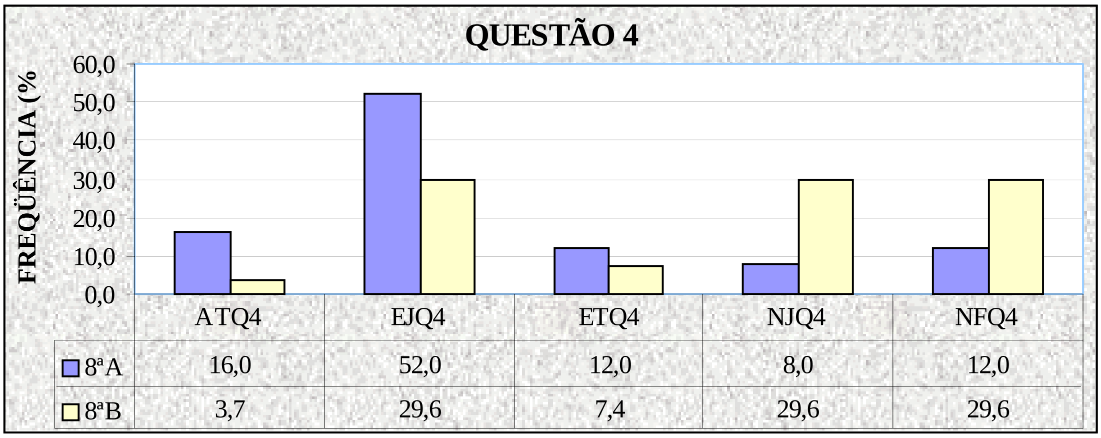


Gráfico 13– Resultados da questão 4 (%)

5ª QUESTÃO

O objetivo desta questão é que o aluno perceba a aplicação do teorema de Thales numa situação apresentada em registro discursivo sem ser fornecido nenhum tipo de configuração. Para melhor perceber essa aplicação, os alunos deveriam realizar primeiro uma conversão do registro discursivo para o registro gráfico, a seguir, para determinar os valores de ***HJ*** (segmento da transversal) e de ***JK*** (segmento da paralela), teriam que realizar a conversão do registro gráfico para o registro simbólico (proporção) e resolver a proporção. Pelo gráfico **14**, podemos verificar os desempenhos da turma **A** comparados aos da turma **B**. Notamos que a maioria dos alunos da **8ª B**, 92,6%, deixaram essa questão em branco, enquanto os da **8ª A**, 24% acertaram totalmente fazendo esboço, calculando a proporção; 48% construíram um desenho representando a situação (sendo que 32% fizeram na escala, utilizando régua e compasso) e não escreveram a medida dos segmentos; solicitados; 12% erraram, nem conseguindo montar o esboço, e 16% deixaram em branco. Um aluno fez o esboço corretamente e depois (indevidamente) aplicou Pitágoras. Outro fez o esboço certo, porém errou ao considerar que a diagonal do paralelogramo forma ângulo de 45º com o lado. Um outro desenhou um trapézio no lugar do paralelogramo.

O gráfico abaixo representa o percentual do desempenho dos alunos das turmas **A** e **B** em relação à quinta questão.

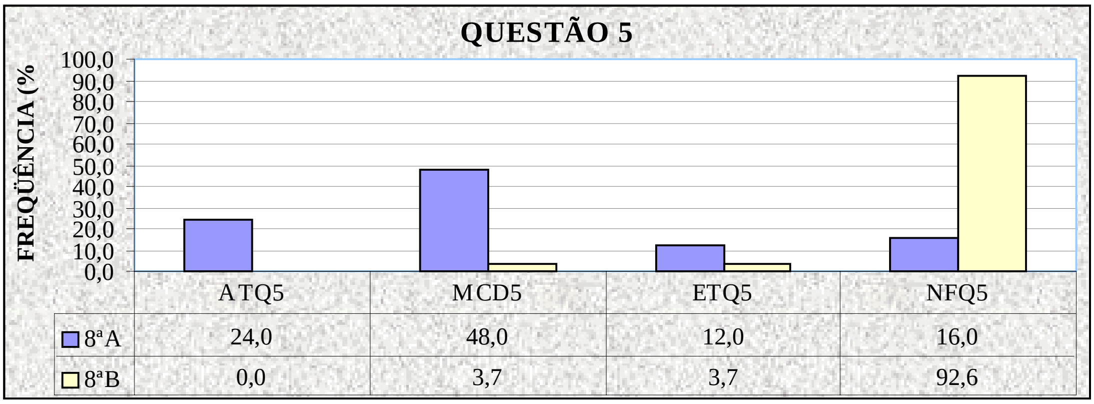


Gráfico 14 – Resultados da Questão 5 (%)

6ª QUESTÃO

O gráfico abaixo representa o percentual do desenvolvimento dos alunos das turmas **A** e **B** em relação à sexta questão.

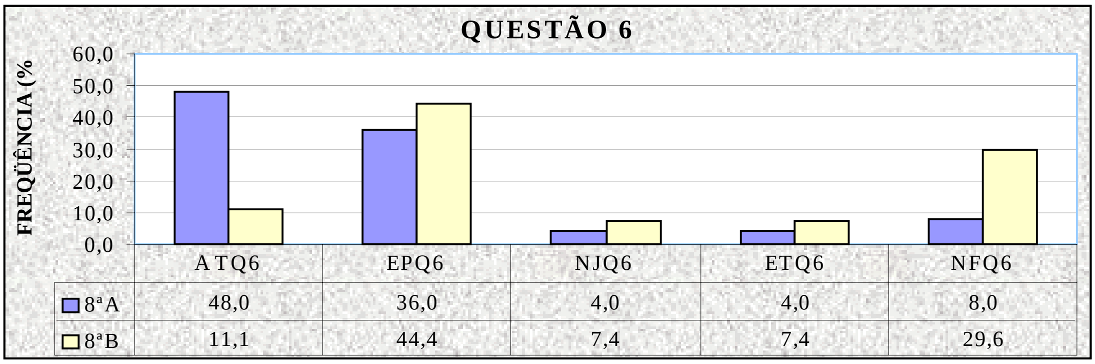


Gráfico 15 – Resultados da questão 6 (%)

O objetivo desta questão é que o aluno perceba as condições necessárias e suficientes para, aplicando o teorema de Thales, determinar valores desconhecidos em configurações que envolvam duas ou mais paralelas. Nesta questão, pelo gráfico **15**, constatamos o desempenho um pouco melhor da turma **A**, tendo 48% de acerto total, 36% de acerto parcial (acerto em dois dos itens), enquanto a turma **B** obteve 11,1% de acerto total, 44,4% de acerto parcial e 29,6 % deixaram em branco. Tanto no grupo experimental quanto no de referência o acerto parcial ocorreu nos itens **b,** utilizando a conservação das abscissas, e no item **c**, utilizando o ponto de vista da dilatação; os itens **a** e **d,** alguns responderam e não justificaram, outros deixaram branco, não se sabendo se o fato de estar em branco significa que não é possível determinar ou se não sabem responder.

7ª QUESTÃO

O gráfico abaixo representa o percentual do desenvolvimento dos alunos das turmas **A** e **B** em relação à sétima questão.

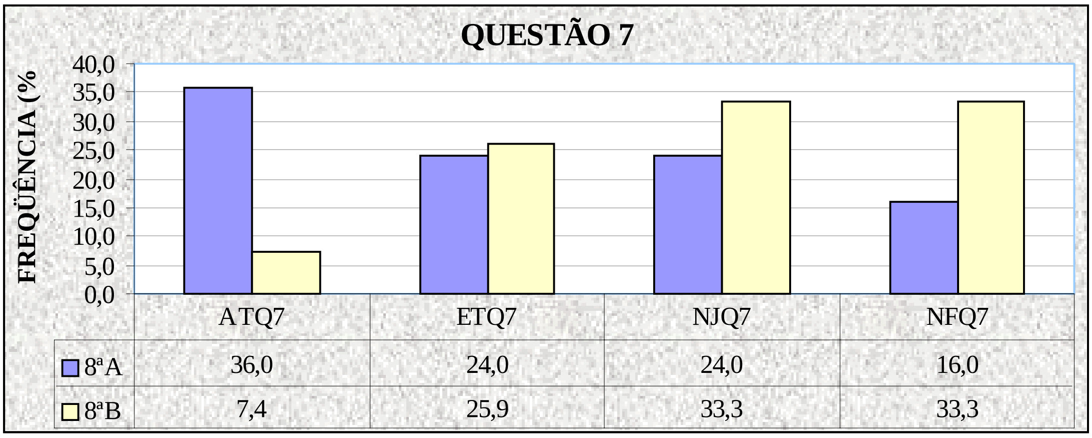


Gráfico 16 – Resultados da questão 7 (%)

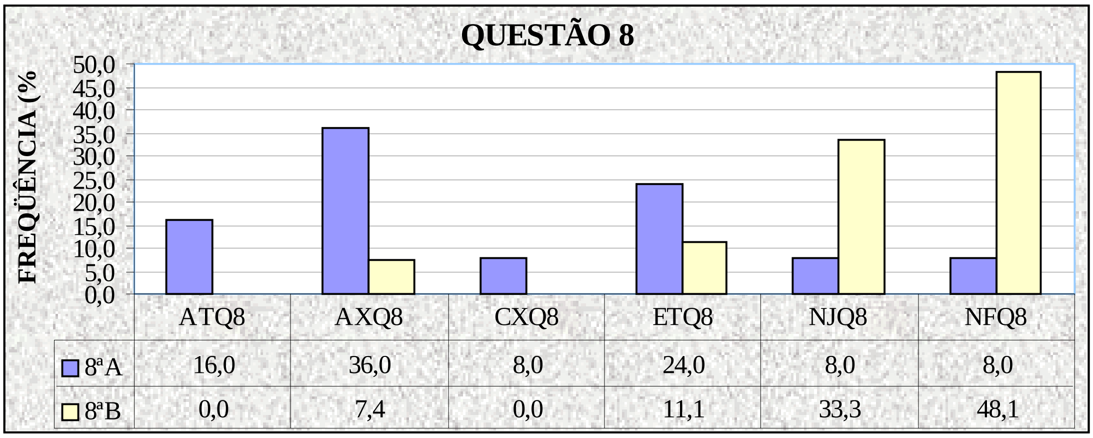
O objetivo é que o aluno aplique a noção do teorema de Thales numa situação não tradicional sendo fornecida uma configuração também não-típica. Comparando as turmas **A** e **B**, vemos um desempenho um pouco maior na **8ª A** com 36% de acerto total: 24% responderam influenciados pela apreensão perceptiva, 24% erraram, 16% não fizeram; já a **8ª B** apresentou 7,4% de acertos total, 33,3% responderam influenciados pela apreensão perceptiva não justificando a resposta dada, 25,9% erraram, 33,3% não fizeram.

Notamos, tanto numa turma quanto na outra, que os alunos que erraram apresentaram dificuldades na leitura e interpretação dessa questão pois, nos vários itens em que se estavam dando informações da situação, esses alunos interpretaram como se estivéssemos perguntando, com isso foram apenas confirmando o que havia sido dito.

A maioria dos alunos do grupo experimental que não justificaram suas respostas, quando fizemos a entrevista para dar o retorno do teste, oralmente, explicaram o raciocínio utilizado para desenvolver a questão e nesse momento souberam justificar corretamente.

8ª QUESTÃO

O gráfico abaixo representa o percentual do desenvolvimento dos alunos das turmas **A** e **B** em relação à oitava questão.



	ATQ8	AXQ8	CXQ8	ETQ8	NJQ8	NFQ8
8ªA	16,0	36,0	8,0	24,0	8,0	8,0
8ªB	0,0	7,4	0,0	11,1	33,3	48,1

Gráfico 17 – Resultados da questão 8 (%)

O objetivo é que o aluno aplique o teorema de Thales para determinar o valor desconhecido **x** e depois o teorema de Pitágoras para justificar se o triângulo em questão é ou não retângulo. Comparando as turmas **A** e **B**, vemos um desempenho um pouco melhor na **8ª A**, com 16% de acerto total e 36% de acerto parcial, ou seja, esses alunos perceberam que deveriam calcular o valor de **x** e determinaram aplicando corretamente o teorema de Thales, porém erraram ao aplicar o teorema de Pitágoras: 8% acertou a aplicação porém errou em conta, 24% erraram, 8% não fizeram e 8% não justificaram. Na 8ª B, ninguém acertou: 7,4% acertaram a aplicação do teorema e determinaram o valor de **x**; 11,1% erraram, 48,1% não fizeram e 33,3% não justificaram, apenas responderam baseados na apreensão perceptiva.

Se levarmos em consideração o fenômeno de congruência ou não-congruência entre enunciado e processo de resolução, podemos classificar esse problema como de não-congruência pois, no enunciado, explicitamente não há nenhuma informação que nos remeta a pensar no teorema de Thales a não ser o fato de ***FG*** e ***MN*** serem paralelas. A figura em si pode até lembrar, mas, quando no enunciado se destaca o triângulo ***EFG*** e se diz que o lado ***EF*** é prolongado 1cm, provavelmente neutraliza-se a idéia do teorema de Thales. Pensando nesse prisma, o aluno que acertou a questão inteira ou que pelo menos percebeu que deveria ter calculado o valor de **x** aplicando o teorema coerentemente, atingiu em relação ao conceito do teorema de Thales, a competência cognitiva de nível global, segundo definição do SAEB[12]. No que diz respeito ao grupo experimental, então podemos dizer que aproximadamente 60% dos alunos atingiram esse nível.

No que diz respeito à justificativa se o triângulo é retângulo ou não, neste grupo, percebemos que 12% responderam levando em conta só a apreensão perceptiva. Um justificou por ser paralela. Outro justificou pelo desenho, calculou **x** e depois construiu o triângulo com régua e compasso. Um afirmou que os triângulos não são retângulos porque "*quando se é um triângulo retângulo se tem as medidas, cada uma, uma unidade maior que a outra, exemplo 3, 4, 5, aí não aconteceu isso e sim x, 7, x+7.*" Um outro aplicou Pitágoras e respondeu que "*não é retângulo e sim obtusângulo pois* $7{,}5^2 > 2{,}5^2 + 7^2$". Outro, porque é um triângulo de dois lados iguais.

9ª QUESTÃO

O gráfico abaixo representa o percentual do desenvolvimento dos alunos das turmas **A** e **B** em relação à nona questão.

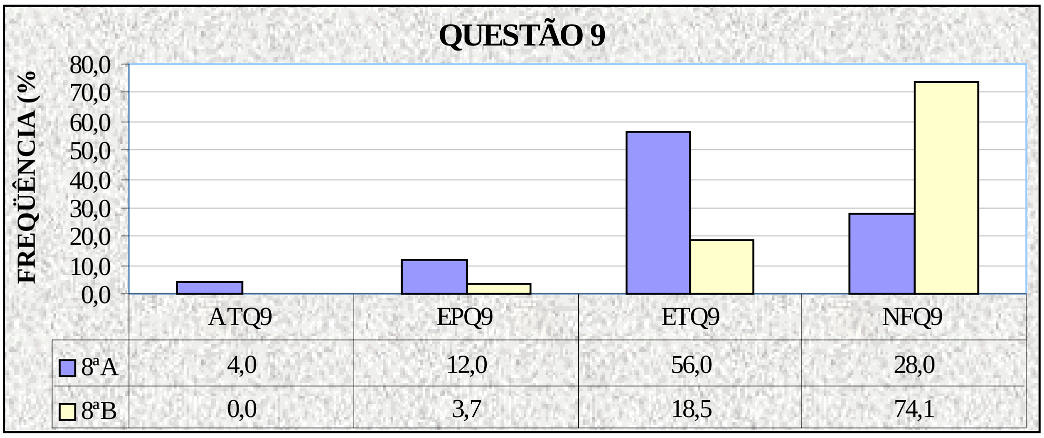


Gráfico 18 – Resultados da questão 9 (%)

O objetivo é que o aluno aplique a noção do teorema de Thales em situações não tradicionais, para determinar o valor desconhecido de **x** em esquemas nos quais deverão pensar sob o ponto de vista da dilatação. Nesta questão, pelo gráfico **18**, constatamos um baixo desempenho nas duas turmas sendo que a maioria dos alunos da **8ª A**, 56%, erraram e os da **8ª B**, 74,1%, não fizeram. Consideramos como erro parcial (EPQ9) as situações em que o aluno acertou a primeira pergunta e errou ou não fez a segunda.

A maioria dos alunos respondeu essa questão levando em conta apenas o aspecto visual. Na entrevista, alguns alegaram que não pensaram direito, pois estavam cansados.

✓ **Comentário**

Vários alunos do grupo de referência deixaram recados no pós-teste solicitando que, numa próxima vez, os avisássemos com antecedência para que possam estudar. Alguns escreveram que o teste foi muito longo e cansativo . Um aluno escreveu "*É gostoso fazer essas contas, mas tem perguntas que se pede para justificar e isso em certas perguntas é para mim impossível falar*."

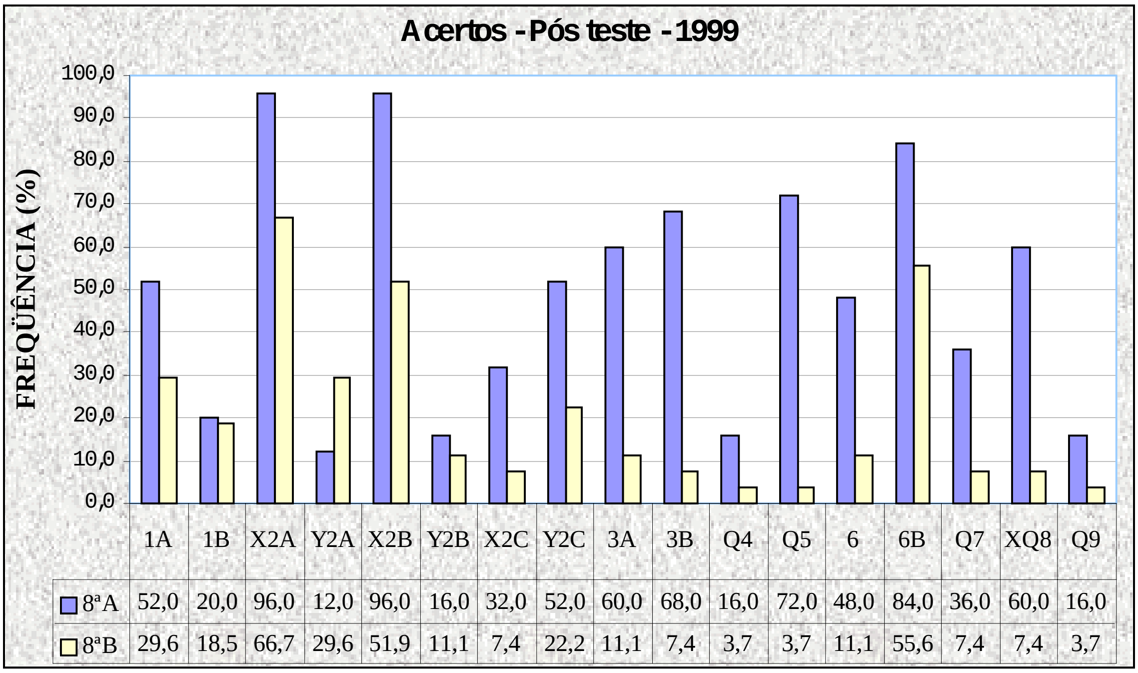
Vamos analisar todas as questões juntas, em relação a acerto, erro e questões em branco.

Para fazer a classificação dos procedimentos dos alunos, em cada questão, em acerto, erro e não fez, vamos proceder na seguinte forma:

- na questão 2B, os erros de conta por distração serão considerados como *acerto;* os erros na montagem da proporção, na resolução de equações, e erros por absurdos como *erro;*
- na questão 5, quem determinou graficamente os valores solicitados, mesmo que não tenha destacado a solução, vamos considerar como acerto;
- na questão 6 , em relação ao acerto e erro, vamos desmembrar em duas partes, 6A para os itens **a** e **d** e 6B para os itens **b** e **c;**
- na questão 8, vamos considerar quem acertou o cálculo de **x** como acerto da questão uma vez que nosso objetivo é estar verificando a apreensão do conceito do teorema de Thales;
- na questão 9, vamos considerar só a primeira pergunta que está relacionada ao teorema de Thales como uma das estratégias de resolução.

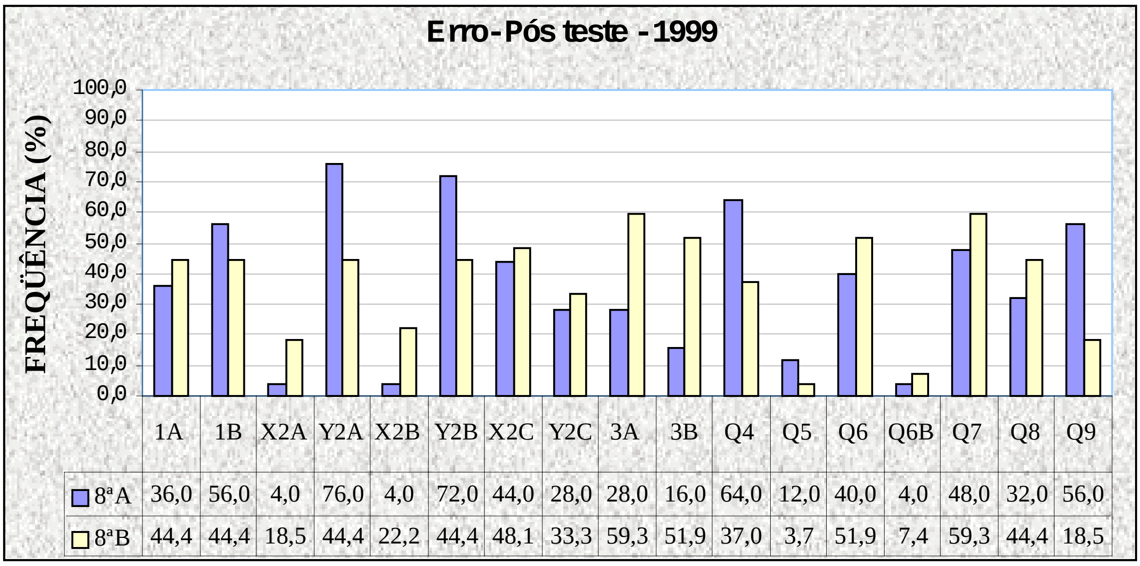
Comparando as duas turmas, vemos, pelo gráfico 19, que, exceto no cálculo de **y** da questão 2A, em todas as demais, o grupo experimental apresenta um índice maior de acerto do que o grupo de referência. O grupo de referência, praticamente em todas as questões, atingiu um percentual de acerto inferior a 50%, só atingindo índice superior na situação em que era fornecida a configuração com as paralelas na posição horizontal para calcular a medida do segmento da transversal (questão 2A, cálculo de **x**, e questão 6, itens **b** e **c**). Já o grupo experimental mostrou ter atingido um índice bom de acerto, tanto para o cálculo dos segmentos formados na transversal, independentemente da posição das paralelas, quanto na aplicação do recíproco do teorema de Thales, e em situações em que a configuração não foi fornecida. Esse grupo só não atingiu um bom índice de acerto nas situações em que se deveria determinar a medida do segmento formado nas retas paralelas (questão 2); na questão quatro, em que a apreensão perceptiva do quadrado serviu de arapuca para a apreensão operatória; e nas questões sete e nove, devido a forma como foi apresentada a questão gerando uma leitura e interpretação inadequadas.

O gráfico abaixo representa o percentual do desenvolvimento dos alunos das turmas **A** e **B** em relação ao acerto das nove questões.



	1A	1B	X2A	Y2A	X2B	Y2B	X2C	Y2C	3A	3B	Q4	Q5	6	6B	Q7	XQ8	Q9
8ªA	52,0	20,0	96,0	12,0	96,0	16,0	32,0	52,0	60,0	68,0	16,0	72,0	48,0	84,0	36,0	60,0	16,0
8ªB	29,6	18,5	66,7	29,6	51,9	11,1	7,4	22,2	11,1	7,4	3,7	3,7	11,1	55,6	7,4	7,4	3,7

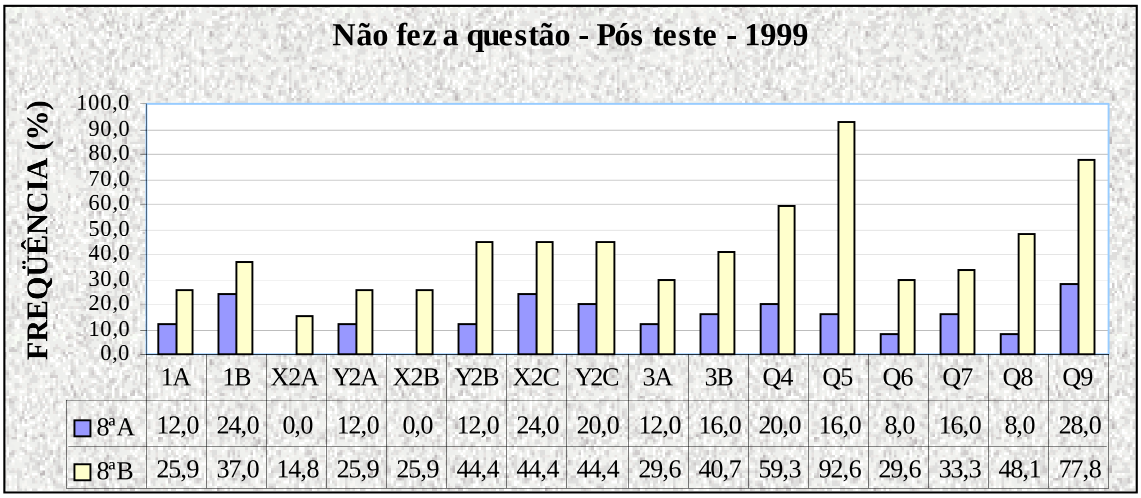
Gráfico 19 – Porcentagens de acertos nas nove questões



	1A	1B	X2A	Y2A	X2B	Y2B	X2C	Y2C	3A	3B	Q4	Q5	Q6	Q6B	Q7	Q8	Q9
8ªA	36,0	56,0	4,0	76,0	4,0	72,0	44,0	28,0	28,0	16,0	64,0	12,0	40,0	4,0	48,0	32,0	56,0
8ªB	44,4	44,4	18,5	44,4	22,2	44,4	48,1	33,3	59,3	51,9	37,0	3,7	51,9	7,4	59,3	44,4	18,5

Gráfico 20- percentual de erros nas questões do pós-teste

Observando o gráfico do percentual de erros nas questões do pós-teste, comparando as duas turmas, notamos que o grupo de referência praticamente atingiu um índice de erros inferior a 50% em quase todas as questões, apresentando índice superior na questão três que envolve o recíproco do teorema de Thales e na questão 7 que envolve uma aplicação do teorema numa situação não-tradicional. Já o grupo experimental atingiu um percentual de erros superior a 50% no cálculo do segmento formado na paralela, em que utilizaram inadequadamente o ponto de vista da conservação das abscissas; na questão quatro, devido à apreensão perceptiva; e na questão nove, porque os alunos já estavam cansados.



	1A	1B	X2A	Y2A	X2B	Y2B	X2C	Y2C	3A	3B	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9
8ªA	12,0	24,0	0,0	12,0	0,0	12,0	24,0	20,0	12,0	16,0	20,0	16,0	8,0	16,0	8,0	28,0
8ªB	25,9	37,0	14,8	25,9	25,9	44,4	44,4	44,4	29,6	40,7	59,3	92,6	29,6	33,3	48,1	77,8

Gráfico 21 – percentual de questões não feitas no pós teste

Com relação à questão deixada literalmente sem fazer, percebemos, pelo gráfico 16, que os alunos do grupo de referência deixaram mais questões sem fazer do que os alunos do grupo experimental.

Mais de 50% dos alunos do grupo de referência deixaram sem fazer as questões 5 e 9 de aplicação do teorema de Thales sendo que na questão 5 não foi fornecida a configuração. Nesse grupo ainda, constatamos que a questão que menos os alunos deixaram sem fazer foi o cálculo do valor de **x** na questão 2**A**, ou seja, o cálculo do segmento formado na transversal numa configuração em que as retas paralelas estão na posição horizontal, situação essa bastante explorada nos livros didáticos, levando-nos a suspeitar que, devido à prática de ensino ocorrida no grupo de referência, esses alunos apresentam uma concepção limitada do teorema de Thales. Uma boa parte desses alunos não percebeu a aplicação do teorema em problemas onde não foi fornecida a configuração e, quando esta foi dada, as mais abordadas nos livros é que tivemos maior índice de acerto e menor índice de questões sem fazer. As configurações mais familiares para esses alunos foram quando os triângulos estavam sobrepostos e as paralelas nas posições horizontal, depois na posição inclinada e, por último, na posição vertical. Nas situações de aplicação do recíproco do teorema de Thales, e no cálculo do segmento formado nas paralelas também houve pouco acerto e muitas questões em branco.

No grupo experimental, podemos confirmar pelo gráfico que a questão com maior índice de sem fazer (28%) foi a última questão que envolvia aplicação do teorema numa situação inédita (para eles). Nessa questão, a maioria dos que não fizeram alegou, na entrevista, que nem haviam lido direito a questão pois estavam cansados e já tinham feito bastante. Na média, o índice de questões em branco neste grupo foi de aproximadamente 13%.

Diante do alto índice de erro na questão que envolvia o cálculo do segmento formado nas paralelas, fomos rever os resultados do pós-teste nas duas turmas, procurando diagnosticar as estratégias e pontos de vista utilizados. Constatamos que:

- no grupo experimental, em 58% das questões foi utilizado para montar a proporção o ponto de vista da conservação das abscissas; em 5% a conservação da relação de projeção e em 37% a dilatação ou semelhança;
- no grupo de referência, 32% utilizou a conservação das abscissas, 5% a conservação da relação de projeção e 63% o aspecto da dilatação;
- quase todos os alunos que erraram a montagem da proporção para calcular o valor do segmento formado na paralela, em ambas as turmas, tentaram utilizar o ponto de vista da conservação das abscissas.

4.5.2- Análise qualitativa do pós-teste

Para analisarmos qualitativamente os resultados do pós-teste, faremos uso de métodos de análise multidimensionais que permitem visualizar, estruturar, modelizar e explicar os fenômenos. Para obtermos os dados multidimensionais, codificamos os procedimentos dos alunos em cada questão com relação às variáveis estatísticas de acordo com a tabela apresentada na análise quantitativa. Depois, montamos uma tabela de dados binários (1, 0), associando aluno e procedimento apresentado no pós-teste, empregando o número **1** para representar a presença do atributo e o número **0** a ausência. Essa tabela foi feita tanto para os dados obtidos no grupo experimental quanto para os do grupo de referência e podem ser vistas no anexo **6**.

Utilizando essas tabelas de dados binários junto com o software CHIC, pudemos obter as árvores de similaridade, as árvores hierárquicas de implicação e o gráfico de implicação que serão estudados individualmente nesta análise multidimensional.

Ao executar a construção dos gráficos, como eram muitas as variáveis estatísticas, optamos por desconsiderar, em ambos os grupos, as variáveis que apresentaram ocorrências inferiores a dois.

Nessas árvores e gráficos, representamos as variáveis indicando o acerto das questões em azul, as que indicam erro da questão em vermelho e em verde as que indicam que a questão não foi feita.

4.5.2.1 – Análise Hierárquica de Similaridade

Lembramos que o objetivo desta análise é observar a classificação de similaridade em termos de tipologia e semelhança, o comportamento dos alunos em relação às variáveis de situação didática levantadas nos estudos preliminares no que diz respeito aos aspectos da percepção, das significações e do contexto. Da percepção visual, no sentido de analisar os procedimentos dos alunos com relação às diferentes configurações pertinentes quanto à posição das paralelas (vertical, horizontal e inclinada) e quanto à posição da intersecção das transversais (triângulos sobrepostos ou opostos pelo vértice). Das significações, observando os pontos de vista (conservação das abscissas, conservação da relação de projeção e dilatação) adotados com relação a acerto ou erro no montar a proporção. Do contexto, olhando o desempenho dos alunos com relação às aplicações do teorema em situações em que foram dadas as configurações ou não, e quanto ao recíproco do teorema de Thales.

Nós vamos fazer esta análise tanto com o grupo experimental quanto com o grupo de referência visando posteriormente confrontá-las.

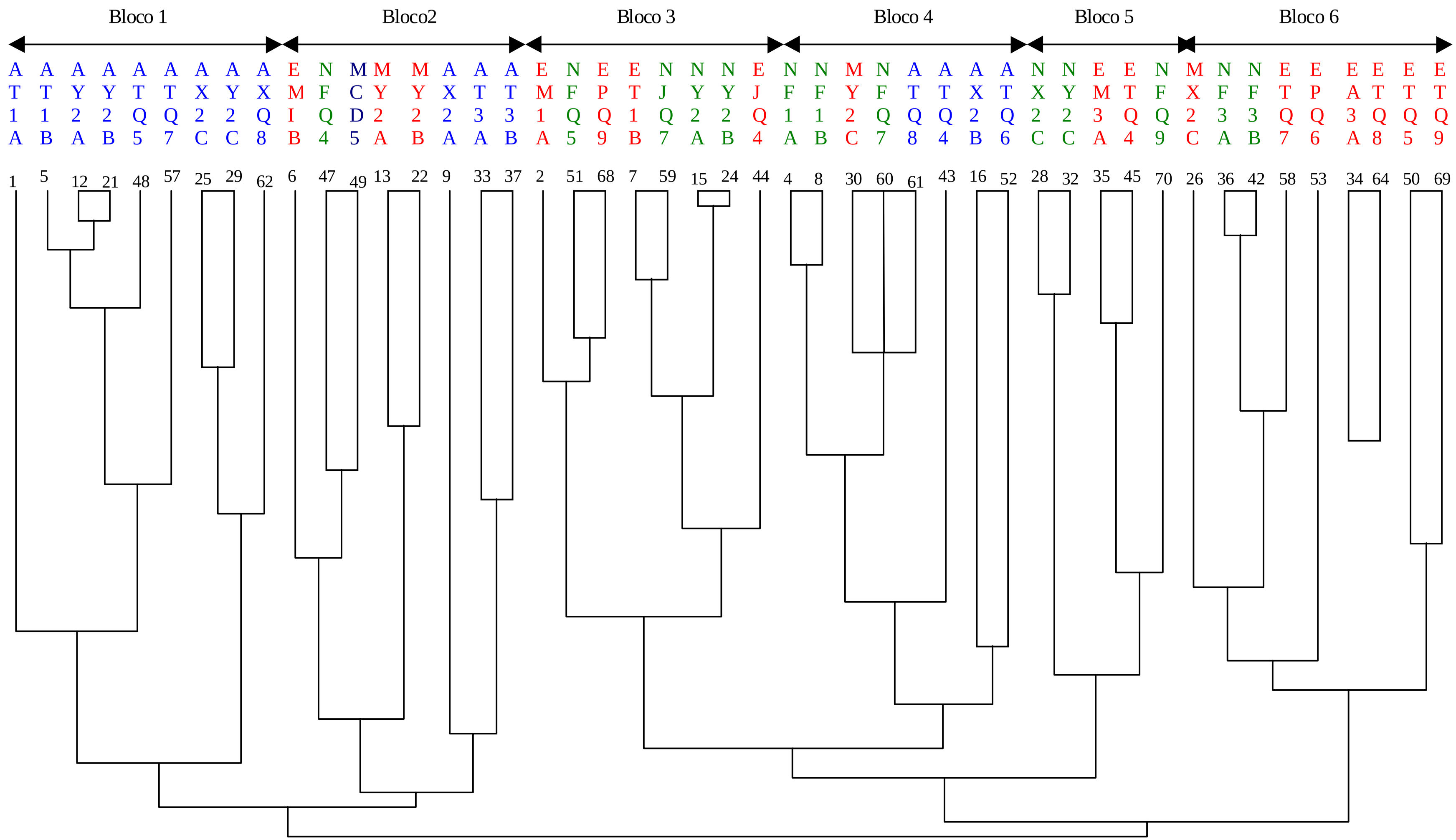


Figura 67 - Árvore de Similaridade – Grupo Experimental – 1999 - 8ª A

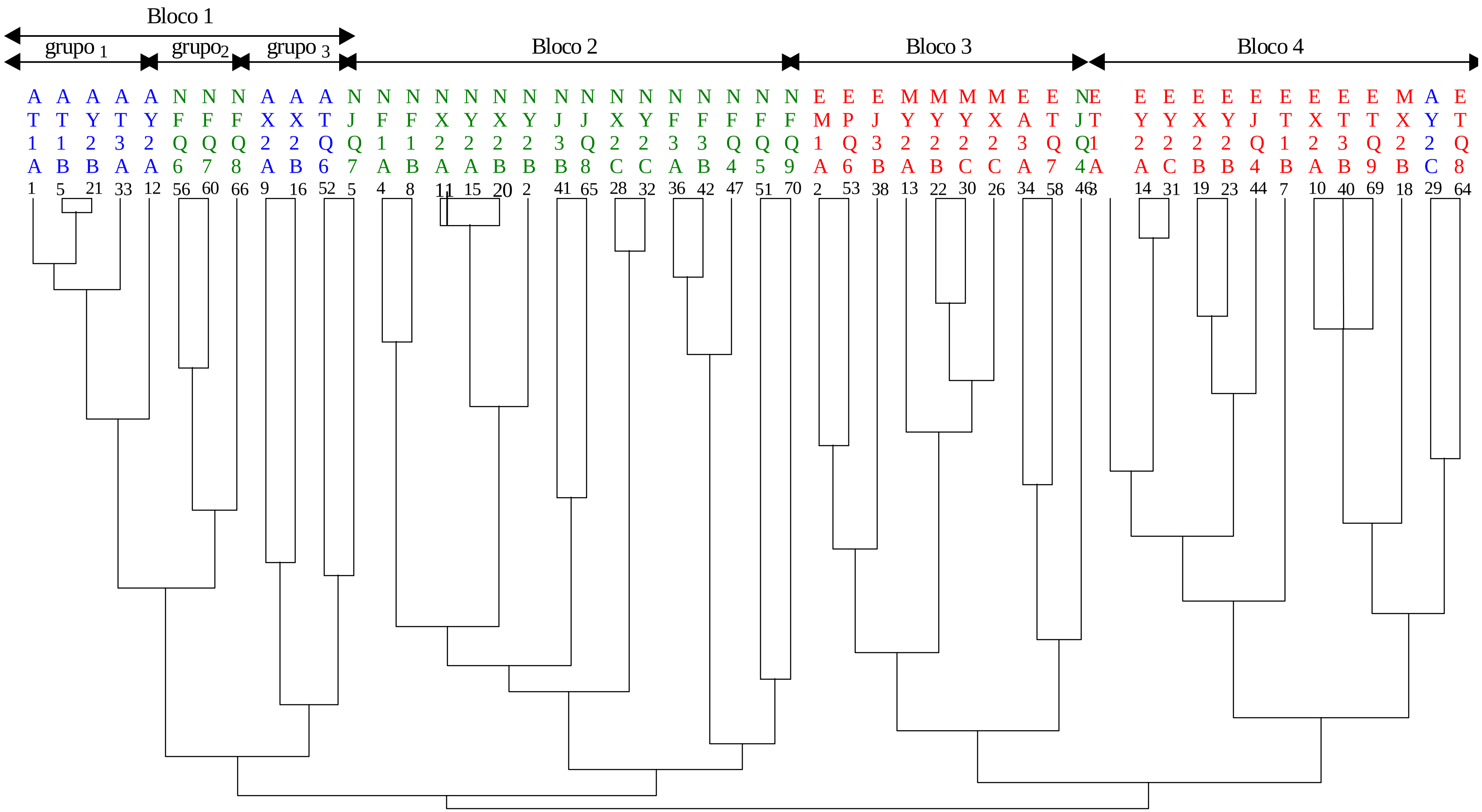


Figura 68 - Árvore de Similaridade- Grupo de Referência 1999 – 8ª B

Iniciamos o estudo dessas árvores procurando observar os blocos de comportamentos, os níveis de similaridade em geral e os níveis por bloco. Iremos descrever, a seguir, para cada grupo, as observações que consideramos mais pertinentes neste estudo.

Grupo Experimental

A árvore de similaridade referente ao grupo experimental foi dividida em seis blocos, como mostra a figura 67 No bloco **1**, fica nítido o agrupamento dos procedimentos que conduziram ao sucesso total, ou seja, ao acerto das questões 1, 2, 5, 7 e 8. Nos blocos **3**, **5** e **6**, os que geraram fracasso no sentido de ter errado as questões ou de não tê-las feito. Nos blocos **2** e **4** oposição ou dessemelhança entre sucesso e fracasso que se apresentam com nível de similaridade bem baixo.

No bloco **1**, temos, agrupado nos níveis mais fortes de similaridade, as variáveis referente a todos os procedimentos que levaram ao acerto na determinação da medida dos segmentos formados nas paralelas (variáveis 5, 12, 21, 48) e uma fraca semelhança, ou, talvez, uma dessemelhança entre estes e os procedimentos para o acerto das medidas dos segmentos formados nas transversais (variáveis 1, 25, 29, 62). Esse fato provavelmente indica que a maioria dos alunos que acertou o cálculo da medida do segmento formado na paralela numa configuração, teve um comportamento semelhante nas outras e na situação-problema em que não se fornecia a configuração; o mesmo ocorrendo com o cálculo do segmento formado nas transversais. Isso possivelmente indica que a posição das paralelas nesse grupo teve pouca influência com relação ao sucesso no cálculo dos valores desconhecidos nas paralelas e/ou nas transversais; porém entre o cálculo da medida do segmento na paralela e o cálculo da medida do segmento na transversal o índice de semelhança foi baixo.

No bloco **3**, o que observamos no bloco **1** quanto às configurações e ao cálculo do segmento da paralela se repete no sentido de que quem não determinou o valor de **y** numa configuração, provavelmente não determinou na outra, ou seja, possivelmente o obstáculo para não ter feito a questão não era a posição das paralelas, mas sim o cálculo da medida do segmento da paralela.

No bloco **6**, o nível mais alto de similaridade mostra que a maioria dos alunos que deixou sem fazer a questão que envolvia o recíproco do teorema de Thales na configuração dos triângulos sobrepostos, provavelmente também não fez quando os triângulos estavam opostos pelo vértice. O mesmo se observa com relação ao acerto, porém com índice de similaridade menor como pode ser visto no bloco **2** (variáveis 33 e 37).

Em relação à configuração dos triângulos sobrepostos ou opostos pelo vértice, notamos neste grupo que possivelmente a maioria dos alunos que acertou as questões numa configuração acertou na outra; quem não fez numa, também não fez na outra e isso pode ser observado em ordem decrescente quanto ao índice de similaridade no bloco **6** (variáveis 36, 42) e no bloco **2** (variáveis 33 e 37).

No bloco **6**, temos, nas variáveis 34 e 64, talvez, um indício de que quem respondeu se as retas eram paralelas ou não na questão 3A, levando em conta só a apreensão perceptiva, possivelmente também teve o mesmo procedimento para dizer se o triângulo era retângulo ou não na questão 8.

No bloco 2 (variáveis 13 e 22), o nível mais forte de similaridade mostra que a maioria dos alunos que errou ao montar a proporção quando as paralelas estavam na posição horizontal também errou na situação das paralelas na posição inclinada.

Grupo de Referência

A árvore de similaridade referente ao grupo de referência foi dividida em quatro blocos, como mostra a figura 68. No bloco **1**, temos provavelmente uma dessemelhança entre os procedimentos que conduziram ao sucesso total (grupos 1 e 3) nas questões 1, 2 e 3, e os de não ter respondido as questões 6, 7 e 8 que envolviam aplicação do teorema de Thales num contexto diferente do tradicional. As competências relativas às questões 1, 2 e 3 podem ser destacadas como competências cognitivas de nível operacional pois envolvem a aplicação direta do teorema de Thales em situações em que as configurações são fornecidas; já nas questões 6, 7 e 8, temos as competência cognitivas de nível global em que encontramos ações e operações mais complexas, que, embora sejam dadas as configurações, envolvem a aplicação do teorema a situações diferentes, não ficando tão evidente esse procedimento e nem sendo uma atividade já vista por esse grupo de alunos.

Nos blocos **2, 3 e 4,** temos o agrupamento dos procedimentos que geraram o fracasso, sendo que, no bloco **2**, está no sentido de não ter feito as questões 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9 e nos blocos **3** e **4** no sentido de ter errado essas questões.

No bloco **1**, o nível mais forte de similaridade está relacionado com as variáveis do grupo **1**, parecendo indicar que a maioria dos alunos que acertou o cálculo da medida do segmento formado na reta paralela na posição vertical (5) teve um comportamento semelhante na posição inclinada (21), no cálculo da medida do segmento formado nas transversais, quando a paralela estava na posição vertical (1), e no recíproco do teorema de Thales na configuração dos triângulos sobrepostos (33) que segundo análise quantitativa, a porcentagem média de acerto ficou em torno de 17,5%. Somente no nível 18 é que a similaridade dessas variáveis está relacionada com a variável 12, referente ao cálculo da medida do segmento formado na paralela, quando esta está na posição horizontal, que apresentou 29,6% de acerto. Neste mesmo bloco, podemos observar pelas variáveis 5, 21, 12, e 9, 16, 6 que, provavelmente, haja uma dessemelhança entre determinar o cálculo do segmento formado nas transversais quando as paralelas estão na posição horizontal e inclinada (porcentagem média de acerto 59,3%) com relação ao cálculo da medida do segmento formado na paralela em qualquer uma das posições (porcentagem média de acerto 19,7%). O cálculo do segmento formado na transversal, quando as paralelas estavam na posição vertical, também se apresenta como uma dessemelhança em relação a esse mesmo cálculo nas outras posições possivelmente devido a vários alunos terem aplicado indevidamente o teorema de Pitágoras na questão 1A, se deixando levar pela apreensão perceptiva do triângulo retângulo.

Diante disso observamos que podemos suspeitar da concepção limitada desse grupo quanto à aplicação do teorema de Thales e conjeturar que, além de se ter índices baixos de acerto tanto nas questões que envolviam a aplicação direta do teorema de Thales quanto nas outras, nesse grupo, os procedimentos não foram tão semelhantes dependendo da posição das paralelas: se era para determinar a medida do segmento formado na paralela ou nas retas transversais, em relação às configuração dos triângulos sobrepostos ou opostos pelo vértice, e, também não observamos nenhum índice de similaridade entre acerto em questões em que se fornece configuração e a questão **5** que não apresentava a representação de nenhuma configuração.

No Bloco **2**, vemos, nos níveis mais fortes de similaridade, que provavelmente a maioria dos alunos que não determinou o valor de **x** na configuração dos triângulos opostos pelo vértice, também não determinou o valor de **y** nessa mesma configuração. A maioria dos alunos que não aplicou o recíproco do teorema de Thales na configuração dos triângulos sobrepostos também não aplicou quando os triângulos eram opostos pelo vértice.

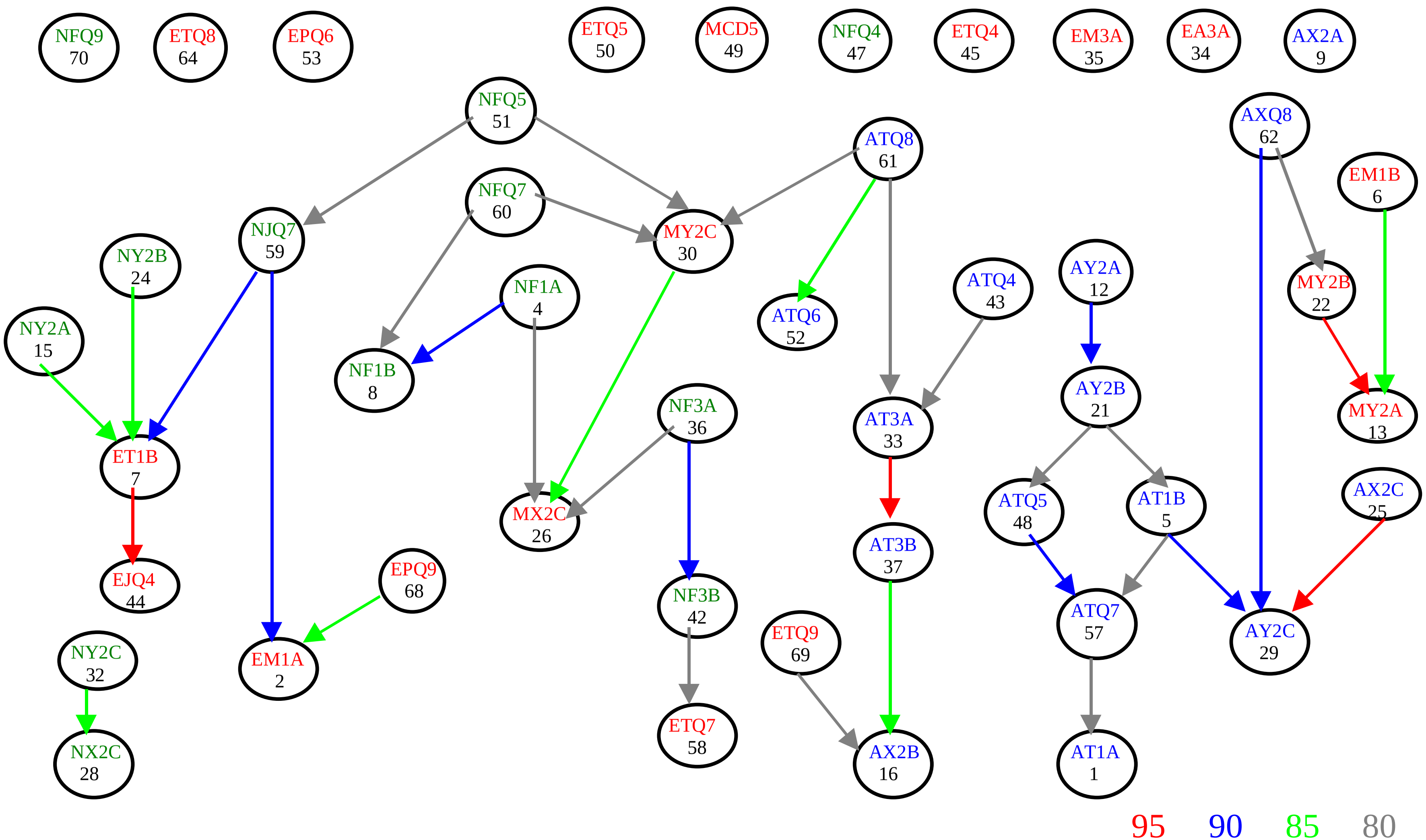


Gráfico 22 – Gráfico de Implicação - Grupo Experimental – 1999 – 8ª A

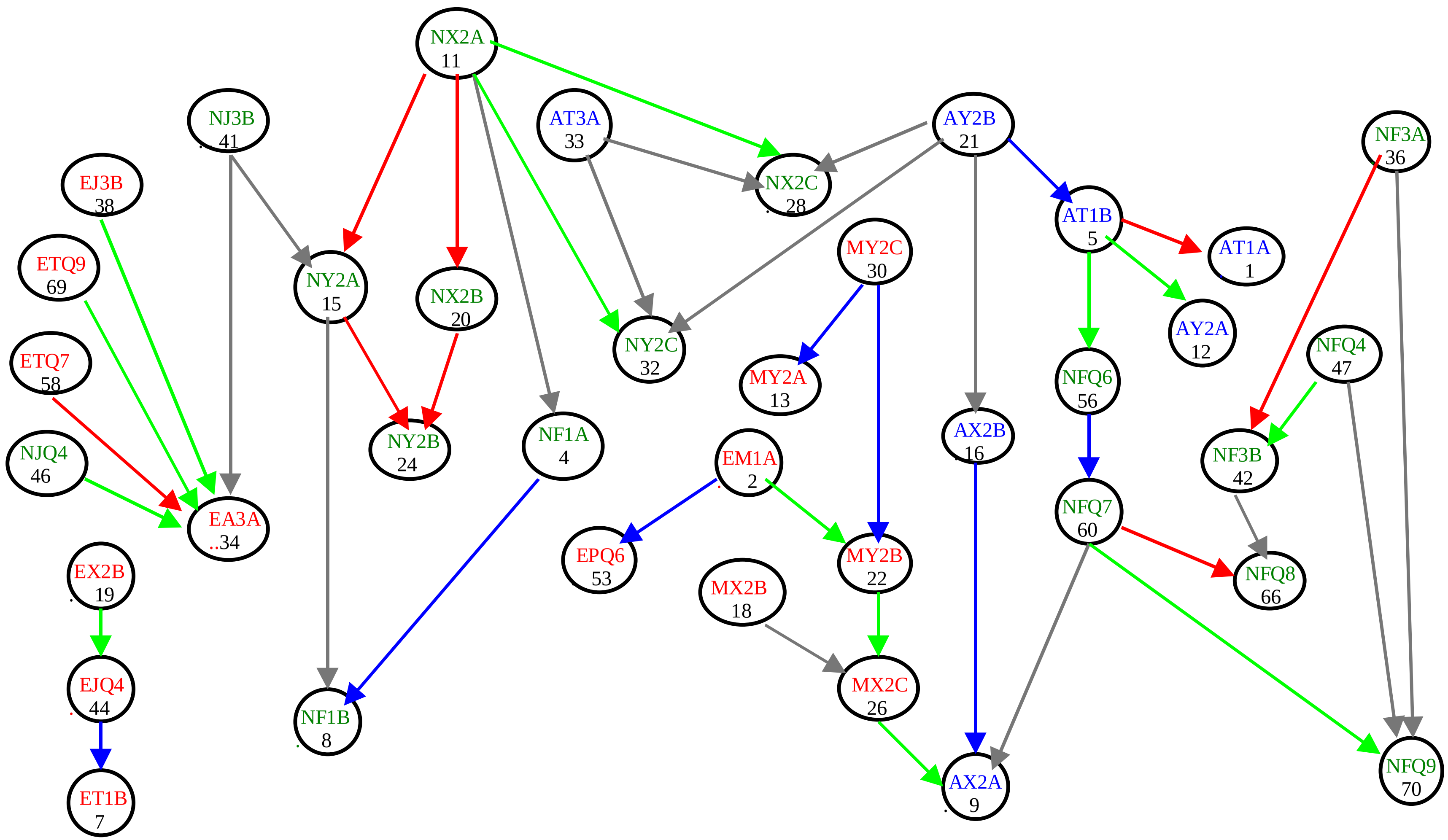


Gráfico 23 - Gráfico Implicação – Grupo de Referência – 1999 – 8ª B

4.5.2 2 – Análise Estatística Implicativa

Lembrando que com a análise estatística implicativa, podemos estudar a implicação em variáveis binárias, analisando as estruturas implicativas no sentido de que a maioria dos alunos que tem a modalidade **a** tem também a modalidade **b.**

Os gráficos 22 e 23, fornecido pelo programa **CHIC** permite uma análise implicativa das variáveis, duas a duas, como faremos a seguir, tanto para o grupo experimental, quanto para o grupo de referência. Neste gráfico, representamos as setas em vermelho para indicar a implicação de 100 a 95%, as setas em azul para indicar a implicação de 95 a 90%, as setas verdes de 90 a 85% e as setas cinzas indicando uma implicação de 85 a 80%.

Grupo experimental

Observando o gráfico 22 notamos, do lado direito, agrupamentos com as variáveis indicando procedimentos ou modalidades de sucesso, e do lado esquerdo a maioria dos procedimentos relativos ao fracasso. As variáveis de sucesso estão separadas em dois blocos. O primeiro com as variáveis 12, 21, 48, 5, 57, 1, 62, 29, 25; o segundo com as variáveis 61, 52, 33, 43, 37,16. Também temos outros dois blocos de agrupamentos para as variáveis que indicam procedimentos ou modalidades que geraram fracasso. O primeiro com as variáveis 51, 15, 24, 59, 7, 44, 2, 68, 32, 28; e o segundo com as variáveis 51, 60, 30, 8, 4, 26, 36, 42, 58, sendo que a variável 51 (NFQ5) está relacionada aos dois blocos.

Analisando cada bloco, percebemos nitidamente uma hierarquia de complexidade em relação ao grau de dificuldade da questão e em relação ao número de ocorrências de cada variável.

Analisando as implicações entre as variáveis do primeiro bloco referente ao sucesso, percebemos que todas as variáveis referentes ao cálculo da medida do segmento formado nas paralelas (**y**) estão implicando o cálculo do segmento formado nas transversais (**x**). Provavelmente o aluno que acertou as questões referentes ao cálculo de **y**, que são mais complexas pois só são possíveis serem resolvidas sob o ponto de vista da dilatação, deve ter acertado as questões relacionadas ao cálculo de **x**, cujo grau de dificuldade é menor e podem ser resolvidas por qualquer um dos pontos de vista. No cálculo do segmento formado na paralela, temos, na configuração dos triângulos sobrepostos, em ordem decrescente de complexidade, as variáveis em que as paralelas estão na posição horizontal, inclinada e vertical. No cálculo do segmento formado na transversal, temos, possivelmente, na questão 5, de aplicação do teorema

Thales sem ser dada a configuração, um grau de complexidade maior em relação às questões 7 e 1 para as quais se forneceu a configuração. Quem acertou o cálculo de **x** na questão 8 (não-congruência entre enunciado e processo de resolução), deve ter acertado a questão 2C, que envolvia a aplicação do teorema na configuração dos triângulos opostos pelo vértice.

Analisando as implicações entre as variáveis do segundo bloco de sucesso, temos que os alunos que acertaram as questões 8 e 4, de aplicação do teorema de Thales, parecem ter acertado a questão 3 relacionada ao recíproco do teorema de Thales e o cálculo de **x** na questão 2B, indicando, talvez, que, as questões 8 e 4, que envolvem competências de nível cognitivo global, são mais complexas que as de aplicação do recíproco do teorema de Thales e do que as de aplicação direta do teorema como a questão 2. Na aplicação do recíproco do teorema de Thales, temos a implicação da variável 33 (AT3A) com a variável 37 (AT3B) num índice de coesão de aproximadamente 95% o que talvez esteja indicando que, para esse grupo de alunos, foi mais fácil acertar a aplicação do teorema recíproco de Thales, na configuração dos triângulos opostos pelo vértice do que quando os triângulos estavam sobrepostos. Esse fato parece confirmar, na teoria de Duval, destacada nos estudos preliminares, que a apreensão operatória na configuração dos triângulos opostos pelo vértice é favorecida pela apreensão perceptiva e a apreensão operatória na configuração dos triângulos sobrepostos talvez seja mais complexa por necessitar de uma atividade cognitiva de reconfiguração.

A implicação das variáveis 61 (ATQ8) com a 30 (MY2C), e da variável 62 (AXQ8) com 22 (MY2B) talvez indique que muitos alunos que erram a montagem da proporção para o cálculo de **y** na questão **2**, acertam o cálculo de **x** na questão **8**, ou seja, alunos que atingiram competência cognitiva de nível global para determinação da medida do segmento formado na transversal provavelmente não atingiram competência cognitiva de nível operatório para o cálculo da medida do segmento formado na paralela.

A implicação da variável 32 (NY2C) com a variável 28 (NX2C) parece indicar que a maioria dos alunos que não calculou o valor de **y** na questão 2C, também não calculou o valor de **x** na questão 2C, pois um dos caminhos para se calcular o valores de **x** dependia do valor de **y**.

Quem errou a montagem da proporção para o cálculo de **y** quando as paralelas estavam na posição inclinada ou vertical (variáveis 22 e 6), provavelmente errou quando as paralelas estavam na horizontal (variável 13).

Sintetizando esta análise, podemos concluir que no grupo experimental houve uma hierarquia de complexidade quanto ao grau de dificuldade das questões, parecendo ficar em ordem decrescente de complexidade a determinação da medida do segmento formado nas paralelas (questões 1B, 2A, 2B), questões de aplicação do teorema de Thales envolvendo competências de nível cognitivo global sem ser dada a configuração (questão 5), e as que forneceram as configurações (questões 7, 8 e 6), aplicação do recíproco do teorema de Thales e, por último, as questões envolvendo competências de nível operatório, ou seja, de aplicação direta do teorema de Thales para determinar a medida do segmento formado na transversal (1A, X2A, X2B, XY2C). Com relação à configuração temos que aquela dos triângulos sobrepostos são mais complexas que as dos triângulos opostos pelo vértice e que, em relação às paralelas, em ordem decrescente, temos as posições horizontal, inclinada e vertical. A questão que envolvia a paralela na posição horizontal parece ser mais complexa pois nem toda medida dos segmentos estava explícita na questão. Como o índice de coesão entre estas variáveis foi alto, talvez essa complexidade em relação às configurações não seja tão pertinente, ou seja, parece que foram poucos os alunos que erraram o valor de **x** ou de **y** numa configuração que não acertaram na outra.

Grupo de Referência

Observando o gráfico 23 de implicação deste grupo, notamos mais implicações entre os procedimentos relativos ao fracasso, do que com relação ao sucesso. Em relação às variáveis de sucesso, só observamos implicações envolvendo as questões 1 e 2, relacionadas à aplicação direta do teorema de Thales, ou seja, são questões que envolvem competência de nível cognitivo operatório. Neste grupo temos, em ordem decrescente de complexidade, as variáveis relativas ao cálculo de **y** implicando no cálculo de **x**, possivelmente indicando que a maioria dos alunos que acerta a determinação da medida dos segmentos formados nas paralelas (**y**) também acertou a medida do segmento formado na transversal. Em relação à posição das paralelas, parece que a posição inclinada é mais complexa que a posição vertical, que, por sua vez, é mais complexa que a horizontal.

A implicação da variável 33 (AT3A) com as variáveis 28 (NX2C) e 32 (NY2C) possivelmente indica que quem acertou a aplicação do teorema recíproco de Thales na configuração dos triângulos sobrepostos, não reconheceu a aplicação do teorema de Thales na configuração dos triângulos opostos pelo vértice talvez por essa configuração não ser familiar a esse grupo de alunos neste contexto.

A implicação da variável 11 com as variáveis 28, 32, 15, 20, 24, 4, 8 deve indicar que a maioria dos alunos que não determinou o valor de **x** quando a paralela estava na posição horizontal provavelmente não determinou os valores de **y** e de **x** quando as paralelas estavam na posição inclinada e vertical, e na configuração dos triângulos opostos pelo vértice.

No gráfico implicativo, percebemos, também, as variáveis 58 (ETQ7), 38 (EJ3B), 69 (ETQ9), 46 (NJQ4), 41(NJ3B) implicando com a variável 34 (EA3A), parecendo indicar que os alunos que erraram as questões 9 e 7 erraram a justificativa ou não justificaram se as retas eram paralelas ou não na questão 3; não justificaram na questão 4 se a figura era um quadrado, provavelmente erraram a questão 3A deixando-se levar pela aparência, ou seja, possivelmente, esses alunos responderam as questões 3, 4, 7 e 9 baseados apenas na apreensão perceptiva.

Sintetizando, esta análise implicativa parece indicar que os alunos do grupo de referência não reconhecem a aplicação do teorema de Thales nas configurações dos triângulos opostos pelo vértice e nas questões que envolvem competências em nível cognitivo global (3, 4, 5, 6, 7, 8, 9). Estas questões possivelmente os alunos erraram deixando-se levar pela apreensão perceptiva. Nas questões de aplicação do teorema envolvendo competência de nível operatório, notamos uma hierarquia de complexidade em ordem decrescente das variáveis que envolviam a determinação da medida do segmento formado nas paralelas e depois as relacionadas ao cálculo da medida dos segmentos formados nas transversais. Em relação à posição das paralelas, percebemos em ordem decrescente de complexidade as posições inclinada, vertical e horizontal.

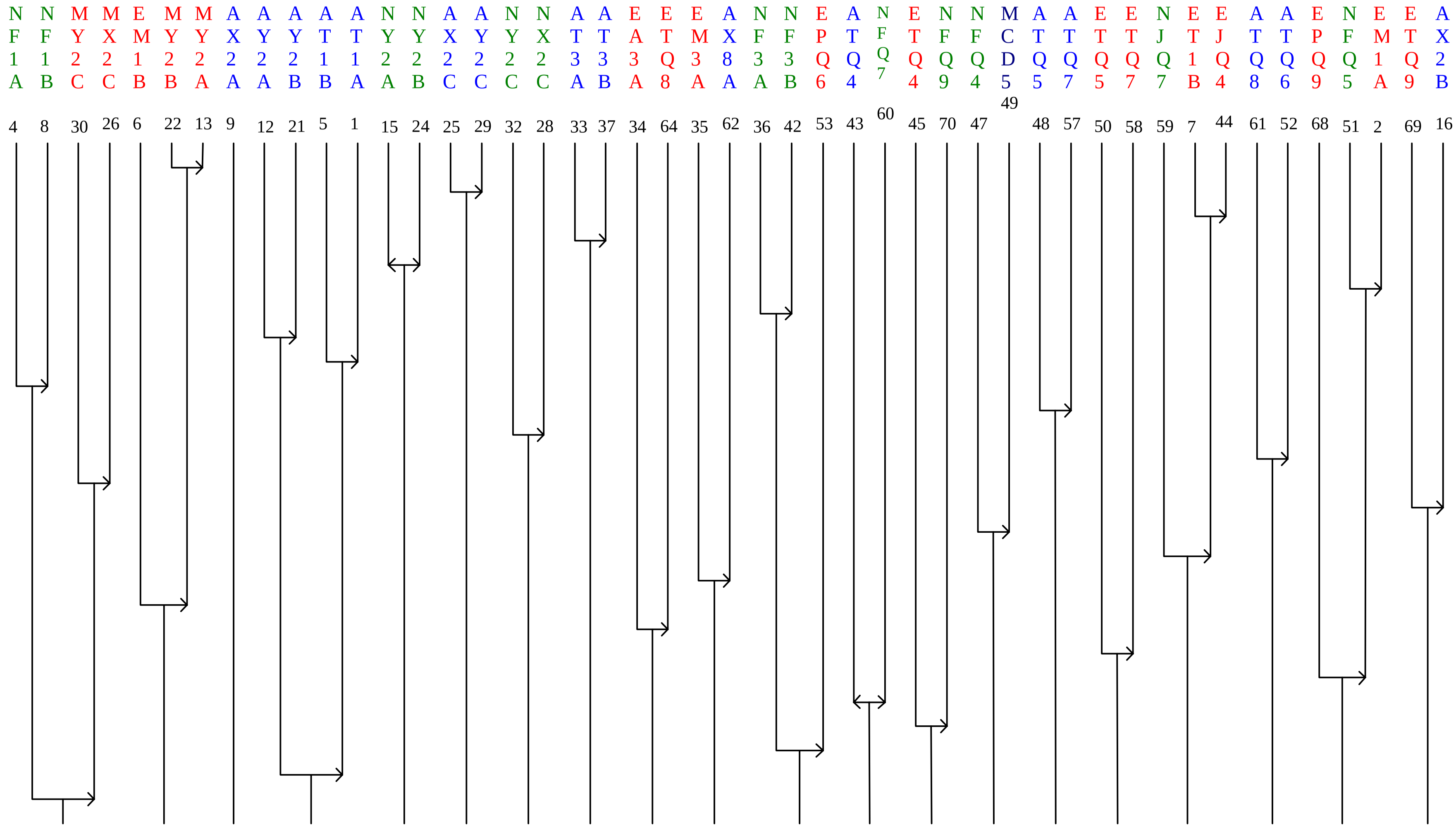


Figura 69 - Árvore Hierárquica de Implicação – Grupo Experimental – 1999 - 8ª A

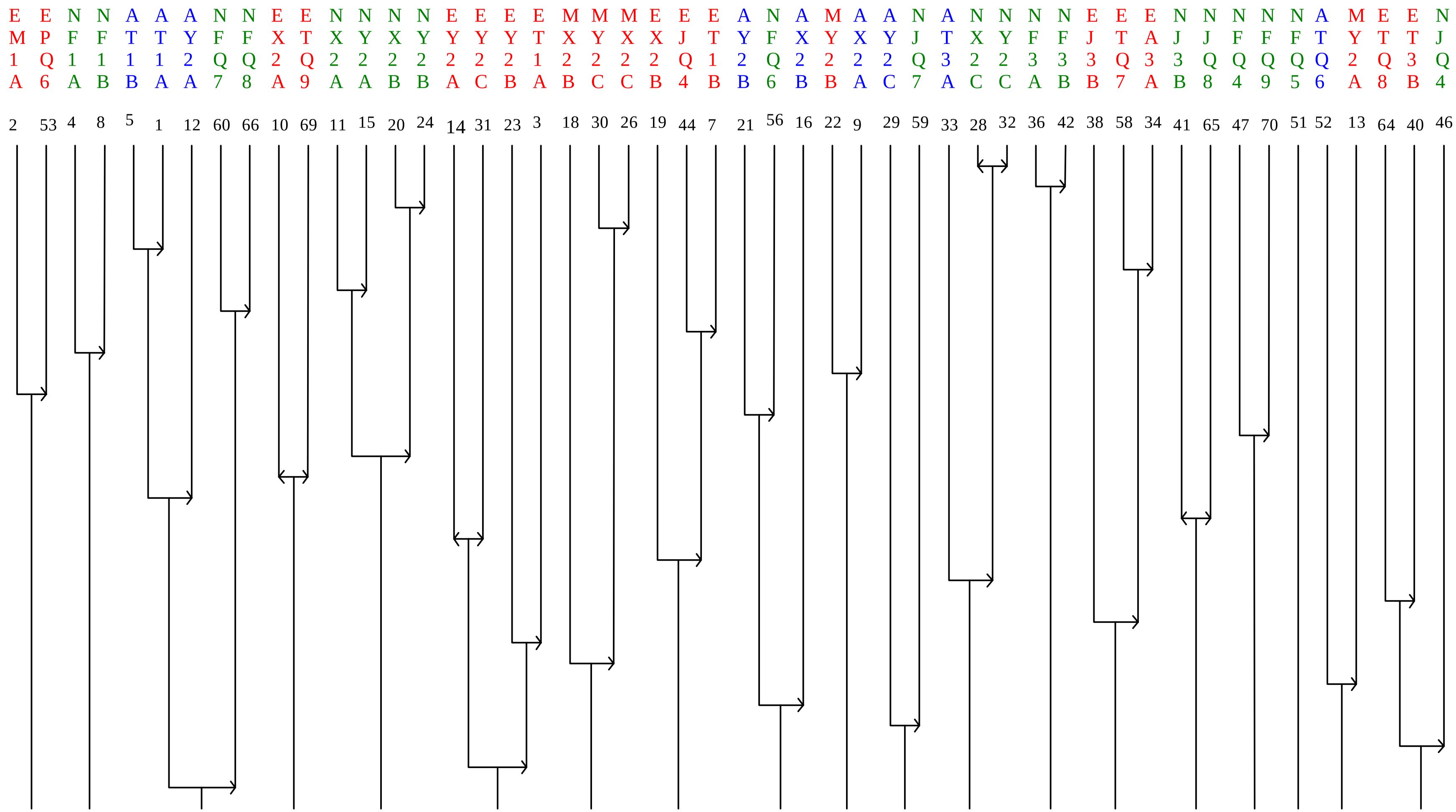


Figura 70 - Árvore Hierárquica de Implicação – Grupo de Referência – 1999 - 8ª B

4.5.2 3 – Árvore hierárquica de implicação

Na figura 69 e 70 temos as árvores hierárquicas de implicação referentes respectivamente, ao grupo experimental e ao grupo de referência. Faremos a seguir as observações mais gerais e significativas referentes a esses grupos.

Grupo Experimental

Analisando a árvore hierárquica de implicação, percebemos nas variáveis 6, 22 e 13 que, possivelmente, os alunos que erraram a montagem da proporção para se determinar a medida do segmento formado na paralela (**y**) quando a paralela estava na posição vertical, provavelmente, erraram ao montar a proporção para a posição inclinada e para a posição horizontal. Quem acertou esse cálculo na posição horizontal, possivelmente, acertou na posição inclinada. As variáveis 15 e 24 apresentam uma equivalência parecendo indicar que os mesmos alunos que não determinaram o valor de **y** quando a paralela estava na posição horizontal, não resolveram a questão para a posição inclinada.

Na configuração dos triângulos opostos pelo vértice, temos, nas variáveis 25 e 29, um indício de que, quem determinou o valor de **x** também determinou o valor de **y**; nas variáveis 30 e 26, quem errou ou não fez a montagem da proporção para se calcular o valor de **y**, errou ou não fez a proporção para calcular o valor de **x**, pois, possivelmente, para obtermos o valor de **x,** dependemos do valor de **y.**

Na questão **3,** que tem por objetivo a aplicação do teorema de Thales para verificar se duas ou mais retas são paralelas, levando em consideração as configurações dos triângulos sobrepostos (3A) e dos triângulos opostos pelo vértice (3B), notamos, por esse gráfico, que quem acertou a 3A acertou a 3B; quem não fez a questão 3A não fez a 3B. Esse fato, talvez, venha a contradizer em parte as constatações feitas no teste diagnóstico, nas pesquisas de Cordier e de Charalambos quanto ao grau de dificuldade na aplicação do teorema de Thales para a configuração dos triângulos opostos pelo vértice ser maior do que quando esses estão sobrepostos. Isso porque, segundo a pesquisa de Cordier, a configuração dos triângulos sobrepostos era mais típica que a outra. Esse fato talvez não tenha ocorrido no nosso grupo experimental devido às atividades propostas e ao uso do software Cabri ter proporcionado aos alunos a construção dessa configuração que passou a ser para esse grupo uma configuração típica e segundo análise pela teoria de Duval a apreensão perceptiva nessa configuração favorece a apreensão operatória sob o ponto de vista da dilatação.

Temos, representado no gráfico (figura 69) uma equivalência entre as variáveis 43 (ATQ4) e 60 (NFQ7) parecendo indicar que os mesmos alunos que acertaram a questão 4 para justificar se a figura representada era ou não um quadrado, não resolveu a questão 7 de aplicação do teorema. Ambas as questões envolvem a aplicação do teorema de Thales numa situação diferente da habitual e há uma não-congruência entre o enunciado e o processo de resolução; porém isso talvez deva ter ocorrido pela forma como a questão 7 foi escrita, pois na entrevista notamos que houve uma má interpretação da questão por um grupo de alunos que leu as afirmações como se fossem perguntas independentes.

Nas variáveis 48 (ATQ5) e 57 (ATQ7), percebemos que, provavelmente, quem acertou a questão 5, que envolvia aplicação do teorema de Thales numa situação em que não se deu a configuração, acertou também a questão 7 de aplicação para a qual foi dada a configuração. Isso deve ter ocorrido, possivelmente, porque quem resolveu a questão 5, além de saber o teorema de Thales, não teve dificuldade na leitura, interpretação e conversão do registro discursivo para o registro gráfico o que favoreceu a resolução desta questão. Nas variáveis 50 e 58, observamos que quem errou a questão 5 parece ter errado a questão 7.

Grupo de Referência

Nas questões 1 e 2, cujo objetivo era determinar a medida dos segmentos formados nas paralelas (1B, 2Ay e 2By) e a medida dos segmentos formados nas transversais (1A, 2Ax, 2Bx, 2Cx, 2Cy) com as paralelas nas posições vertical, horizontal e inclinada, nessa ordem, percebemos, pela árvore hierárquica de implicação, que os alunos do grupo de referência que não determinaram o valor de **x** em qualquer uma das posições das paralelas provavelmente não determinaram o valor de **y** (variáveis 11 e 15, 20 e 24, 4 e 8). Parece, pela equivalência entre as variáveis 28 e 32, que os mesmos alunos que acertaram o cálculo de **x** na questão 2C, acertaram o cálculo de **y** nessa configuração dos triângulos opostos pelo vértice e pelas variáveis 30 e 26 e que quem errou a montagem da proporção para o cálculo de **y** errou a montagem da proporção para o cálculo de **x**. Quem acertou o cálculo de **y** com a paralela na posição vertical (5) parece ter acertado o cálculo de **x** nessa configuração (1) e o cálculo de **y** com a paralela na posição horizontal (12). Nas variáveis 21, 56 e 16 percebemos que, possivelmente, quem acertou o cálculo de **y** na configuração da paralela na posição inclinada também acertou o cálculo de **x** e não fez a questão 6 de aplicação do teorema de Thales.

Quanto à questão 3 que se refere à aplicação do recíproco do teorema de Thales nas configurações dos triângulos sobrepostos (3A) e na configuração dos triângulos opostos pelo vértice (3B), notamos, pelas variáveis 36 e 42, que quem não vez a questão 3A parece não ter feito a questão 3B. Nas variáveis 38, 58 e 34, temos que quem errou a justificativa da questão 3B, errou totalmente a questão 7 e, possivelmente, tenha errado a questão 3A por levar em consideração só a apreensão perceptiva para responder essas questões.

Em linha gerais, a árvore hierárquica de implicação do grupo de referência apresenta implicações relacionadas ao acerto só nas questões 1, 2 e 3 que envolvem aplicação direta do teorema de Thales para determinar a medida de segmentos desconhecidos e a aplicação do recíproco do teorema de Thales. Nessas questões, percebemos que a hierarquia de complexidade está relacionada ao cálculo do segmento formado na paralela e o cálculo do segmento formado na transversal. A implicação nas demais questões está relacionada ou ao erro nas questões ou em não tê-las feito .

PARTE III

DISCUSSÕES

"*O ensinamento escrito no papel não é o verdadeiro ensinamento*
Ensinamentos escritos são um tipo de alimento para a mente.
Claro, é necessário buscar algum tipo de alimento para a mente.
Porém, é mais importante saber pela sua própria experiência."

Susuki, Shunryu

(apud Brotto, Fábio Otuzi. 1999.p.9)

CAPÍTULO 5: DISCUSSÕES GERAIS

5.1 - Importância da metodologia adotada

Analisando o desenvolvimento dos alunos durante a fase da aplicação da seqüência didática e os resultados apresentados no pós-teste, acreditamos que a metodologia adotada contribuiu bastante para o desenvolvimento tanto pessoal quanto intelectual desses alunos.

No início da aplicação da seqüência, percebíamos muita dificuldade nesses alunos quanto à leitura e à interpretação das atividades: não sabiam trabalhar em duplas no sentido de discutir estratégias e soluções, conversar, trocar idéias, dar sugestões, criticar, argumentar; para eles, trabalhar em equipe era apenas dividir tarefas e custos; não se sentiam muito bem em expor seu pontos de vista, em dar explicações dos procedimentos adotados, em fazer observações, escrever conclusões e justificativas. Muitas vezes ficavam à espera da aprovação do professor quanto ao procedimento a ser adotado ou aguardando uma explicação e exemplos para reproduzirem sem muito desgaste emocional e intelectual. Com o transcorrer da aplicação da seqüência notamos em vários alunos o desenvolvimento de autonomia, procurando fazer sozinho as atividades sem chamar o professor, no expor as idéias, no fazer críticas com fundamento nas soluções apresentadas, em dar outras sugestões de resolução para os problemas expostos, em não ter receio de escrever suas observações, conclusões e justificativas. O desenvolvimento dessas habilidades e atitudes parece ter sido proporcionado pelo tipo de atividade, pelo uso do programa Cabri que propiciou as discussões, o levantamento de conjecturas, a noção de que podemos ter mais de uma forma de resolver um problema, assim como, mais de uma maneira de representar uma situação, pela postura do professor em sala de aula, enfim, pelo conjunto de procedimentos adotados na aplicação da seqüência.

Observando as análises do pós-teste percebemos que o grupo experimental, de uma forma geral, procurou resolver todas as questões, visto que a porcentagem de questões sem fazer foi baixa em relação ao grupo de referência. Em todas as questões observou-se uma porcentagem de acertos alta ou baixa, satisfatória ou não, porém demonstrou ter noção e saber aplicar o teorema de Thales em várias situações e contextos, o que não ocorreu com o grupo de referência que praticamente só resolveu as questões quando foram fornecidas a configuração e a aplicação do teorema era direta e similar às atividades propostas nos livros didáticos.

5.2 – Resultados da pesquisa e análise desses resultados com relação às hipóteses da pesquisa

Retomando os estudos preliminares, constatamos que os problemas relativos ao ensino-aprendizagem do teorema de Thales estão relacionados com sua forma de expressão envolvendo os aspectos da percepção visual, das significações e do contexto. Relacionados a estes aspectos, levantamos alguns problemas e as hipóteses da pesquisa. Para começarmos as discussões dos resultados da pesquisa em relação às hipóteses sugeridas, vamos retomar esses problemas e as hipóteses segundo esses três aspectos e confrontar os resultados encontrados levando em consideração a teoria de Duval e os resultados das pesquisas de Charalambos, Cordier e Brousseau.

♦ **Retomando os problemas e as hipóteses da pesquisa**

Com relação aos aspectos da percepção visual, constatamos no teste diagnóstico aplicado em 1998 que o índice de acertos variou segundo à posição das paralelas, à posição da intersecção das transversais com relação às paralelas, se eram fornecidos ou não as configurações nas situações-problema, se era pedido para calcular a medida dos segmentos formados nas transversais ou nas paralelas. Cordier, em sua pesquisa, destaca que as fontes de desvios cognitivos para a apreensão do teorema de Thales estão relacionadas com as propriedades da tipicalidade, ou seja, quanto mais típica for a figura para o aluno, maior o índice de sucesso. Constata que as representações típicas para o teorema de Thales estão ligadas às figuras geométricas e às projeções. No âmbito das projeções, salienta que a configuração dos triângulos sobrepostos é mais típica que a dos triângulos opostos pelo vértice, e no âmbito das figuras geométricas com relação à posição das paralelas a mais típica é a posição horizontal, depois a vertical e por último a inclinada, e, quanto à intersecção das transversais, a mais familiar é quando as transversais não se interceptam entre as paralelas. Charalambos, após trabalhar numa experimentação com a variedade de configurações homotéticas e com a articulação entre o registro numérico e o registro figurativo, constatou que, embora o percentual de acerto com relação ao teorema de Thales tenha melhorado, ainda persistem as diferenças com relação às situações dos triângulos sobrepostos ou não e em relação ao cálculo da medida do segmento formado na paralela ou nas transversais, salientando que o índice de acerto nas configurações dos triângulos sobrepostos e no cálculo da medida do segmento formado na transversal foi maior que nas outras situações. Diante desses resultados, colocamos a questão:

> "A maneira como se tem ensinado o teorema de Thales e a forma como essa propriedade vem sendo apresentada nos livros didáticos tem proporcionado aos alunos a aquisição de uma concepção limitada, bem como a formação de

configurações prototípicas ocasionando a não-percepção da aplicação dessa propriedade em outras configurações ditas não-típicas. Como, então, proporcionar um ensino que leve os alunos a fazer um reconhecimento e/ou apreender que diferentes configurações topológicas articulam o mesmo significado?”

Sintetizando as hipóteses relativas ao aspecto da percepção visual temos:

1) Acreditamos que, propondo situações-problema em língua natural, evitamos instaurar uma imagem prototípica no aluno possibilitando-lhe produzir suas configurações.
2) Utilizando o software Cabri-géomètre I poderemos, em uma mesma situação-problema, estar trabalhando com essas variabilidades perceptivas, além de que, pela observação e experimentação, os sujeitos poderão levantar conjecturas de fenômenos variantes e invariantes, para posterior comprovação e generalização.

Os aspectos das significações do teorema de Thales estão relacionados com os pontos de vista tratados por Guy Brousseau por conservação das abscissas, conservação da relação de projeção e dilatação. Entendendo que o teorema na sua significação global abrange esses três pontos de vista, levantamos a questão:

“Como fazer com que o ensino do teorema de Thales e sua aplicabilidade conduzam à apreensão dessa globalidade sintático-semântica? Em que medida e por que meios se consegue organizar os três pontos de vista?”

E sugerimos as hipóteses:

3) Para o aluno apreender o teorema de Thales em sua globalidade perceptiva ou mesmo sintático-semântica, faz-se necessário diversificar os registros de representação, explorando as conversões e transformações dadas pelas regras de tratamento de cada registro em questão.

4) Por meio da rede semântica podemos organizar os três pontos de vista relacionados com essa noção, bem como fazer a articulação com os outros conceitos implícitos e explícitos com as noções afins.

Quanto ao contexto, pensamos tanto em como o teorema pode ser articulado com os outros conceitos afins como em relação a suas aplicações, e levantamos os problemas:

“Observando a forma como se tem ensinado essas noções e, mesmo, como vem sendo apresentadas nos livros didáticos, percebemos que esses conteúdos são trabalhados de forma estanque, sem nenhuma articulação explícita entre eles, fazendo com que, no contexto de determinadas situações-problema, o aluno, na busca de uma estratégia de resolução, nem sempre perceba as aplicações que sejam mais ou menos pertinentes, ou talvez, aceda a uma determinada noção não percebendo a aplicação de outras, nem a pertinência da utilização desta ou de outra noção na resolução do problema, simplesmente por ter uma concepção limitada desses conceitos."

"A apreensão visual, muitas vezes, interfere condicionando a apreensão operatória. Constatamos, no teste diagnóstico, uma dificuldade muito grande nos alunos para perceber a aplicação do teorema de Thales em situações em que não se forneciam as configurações. O fato de se dar um destaque maior à produção desse saber com situações-problema fornecendo as configurações, talvez seja um dos motivos dessa associação e da não-percepção em outras. Como minimizar a influência da apreensão visual relacionada à imagem prototípica da aplicação do teorema de Thales em prol da aquisição da apreensão operatória?"

A esses problemas, colocamos a seguinte hipótese:

5) Trabalhando com algumas situações-problema de aplicações do teorema de Thales, acreditamos que essa propriedade passa a ter um maior significado para o aluno induzindo ou possibilitando a utilização dele, teorema, como estratégia de resolução em outras situações afins.

- **Retomando o pós-teste e os resultados do pós-teste**

O pós-teste constou de 9 questões que podem ser subdivididas nos 3 níveis de problemas colocados por Duval.

Nível (1) – aquele em que há congruência operatória da figura e um tratamento matemático, neste caso uma apreensão discursiva explícita não é necessária.

Nesse nível temos as questões 1, 2, 3, 6 (itens b e c) em que fornecemos as configurações dos triângulos sobrepostos com as paralelas na posição vertical (1), horizontal (2A, 6B e 6C), inclinada (2B, 3A) e a dos triângulos opostos pelo vértice (2C, 3B) para que os alunos determinem os valores de **x** (segmento da transversal) e de **y** (segmento da paralela), aplicando o teorema de Thales, ou verifiquem se as retas são paralelas aplicando o teorema recíproco (3). Segundo classificação do SAEB, essas questões se enquadram nas que envolvem competências de nível cognitivo operatório.

Nível (2) – aquele em que a apreensão discursiva é necessária, porque não há mais congruência operatória entre figura e um tratamento matemático ou porque é explicitamente pedido como justificativa.

Nesse nível, temos as questões 3, 4, 6 e 8 em que fornecemos as configurações e pedimos aos alunos para que justifiquem as suas respostas. Essas questões não são questões habitualmente apresentadas em livros didáticos e, exceto a questão 3, não houve na seqüência didática nenhuma questão parecida, ou seja, foram questões inéditas tanto para o grupo experimental quanto para o grupo de referência. Segundo classificação do SAEB, essas questões se enquadram nas que envolvem competências de nível cognitivo global.

Nível (3) – aquele que exige mais de uma apreensão discursiva, e o recurso aos esquemas formais lógicos específicos.

Nesse nível, temos as questões 5, 7 e 9. Na questão 5, não foi fornecida a configuração, os alunos deveriam ler, interpretar, fazer a conversão para o registro figural, fazer a conversão para o registro simbólico, realizar os tratamentos necessários e responder o problema. Nas questões 7 e 9, embora houvesse sido dada a configuração, a apreensão operatória seria favorecida se, na medida que os alunos lessem e interpretassem o problema, fossem marcando as informações dadas sobre a figura, os segmentos que são congruentes e outras informações implícitas no discurso. Segundo classificação do SAEB, essas questões também se enquadram nas que envolvem competências de nível cognitivo global.

Revendo a análise do pós-teste podemos observar que o grupo de referência praticamente só resolveu os problemas que se enquadram no nível **1** e o que foi observado no teste diagnóstico na pesquisa de Cordier e na de Charalambos é válido para esse grupo, ou seja, houve uma diferença percentual significativa entre o número de acertos nas questões 1 e 2, segundo a posição das paralelas (maior acerto na posição horizontal, depois na posição inclinada e na vertical): o índice de acerto para o cálculo da medida do segmento formado na transversal foi maior que para o segmento formado na paralela; o índice de acerto na configuração dos triângulos sobrepostos foi maior que na outra, o número de acerto nas questões sem configuração explícita foi menor que nas outras; dificuldades em justificar e, na maioria das questões, respondeu baseando-se na apreensão perceptiva não sentindo necessidade de nenhum cálculo para fundamentar suas respostas.

Quanto ao grupo experimental, observamos que houve implicações de acerto em todos os níveis de problemas e as porcentagens de acerto estão relacionadas com a complexidade da questão. Na análise implicativa, detectamos nesse grupo de alunos a seguinte hierarquia de complexidade em ordem decrescente:

- cálculo da medida do segmento da paralela em qualquer contexto e configuração (problema de nível 1 e 3);
- cálculo da medida do segmento formado na paralela ou na transversal sem ser dada a configuração (questão 5, problema de nível 3);
- problemas de aplicação do teorema em contextos não-usuais (questão 7, 6 e 8, problemas de nível 2 e 3);
- aplicação do recíproco do teorema de Thales em qualquer configuração (questão 3, problema de nível 2);
- aplicações do teorema de Thales nos problemas de nível 1 para o cálculo da medida do segmento formado nas transversais (questões 1 e 2).

Por meio da análise quantitativa e qualitativa, observamos que, no grupo experimental, a posição das paralelas e da intersecção das transversais (problemas de nível 1) agiram pouco no acerto ou não das questões comparado ao cálculo do segmento da paralela ou da transversal e na resolução dos problemas de nível 2 e 3, o que talvez valide as hipóteses 1 e 2 quanto ao uso do Cabri e de se trabalhar com problemas na língua natural, os quais provavelmente, contribuíram para a não-formação de imagens prototípicas e possibilitaram a familiarização com as várias configurações.

A implicação de o acerto da questão 5 ocasionar o acerto na questão 7, ambas do nível 3, parece também contribuir para a validação da hipótese 1, possivelmente porque quem resolveu a questão 5, além de saber o teorema de Thales, não apresentou dificuldade na leitura, interpretação e conversão do registro discursivo para o registro gráfico o que favoreceu na resolução da questão 7.

Na aplicação do recíproco do teorema de Thales, questão 3 (problema de nível 2), notamos que o grupo experimental obteve, além da porcentagem de acerto maior na configuração dos triângulos opostos pelo vértice, a implicação que possivelmente quem acertou a questão para a configuração dos triângulos sobrepostos deve ter acertado a outra cujo nível de complexidade foi menor. Essa constatação difere das que foram feitas no teste diagnóstico, nas pesquisas de Cordier e de Charalambos quanto ao grau de dificuldade na aplicação do teorema de Thales para a configuração dos triângulos opostos pelo vértice ser maior do que quando esses estão sobrepostos. Isso porque segundo a pesquisa de Cordier a configuração dos triângulos sobrepostos era mais típica que a outra. Esse fato talvez não tenha ocorrido no nosso grupo experimental devido às atividades propostas e ao uso do software Cabri ter proporcionado aos alunos a construção dessa configuração que passou a ser para esse grupo uma configuração típica e, segundo análise pela teoria de Duval, a apreensão perceptiva nessa configuração favorecer a apreensão operatória sob o ponto de vista da dilatação. Essa observação parece de novo confirmar as hipóteses 1 e 2.

Quanto às significações observamos que em ambos os grupos houve procedimentos na resolução das questões envolvendo os três pontos de vista, com porcentagens diferentes é claro, levando-nos a pensar que no processo ensino-aprendizagem foi proporcionada a esses alunos a visão do teorema de Thales na sua significação global e provavelmente a rede semântica adotada cumpriu seu papel.

Um fato que marcou muito na análise do pós-teste foi o alto índice de erro na montagem da proporção, em ambas as turmas, para o cálculo da medida do segmento formado nas paralelas em qualquer uma das posições. Embora essa ocorrência seja confirmada nas pesquisas de Cordier e de Charalambos, levou-nos a rever os processos de resolução e a constatar que a maioria desses alunos estava tentando utilizar a conservação das abscissas. Diante desse panorama, começamos a acreditar que nesses grupos o ponto de vista da conservação das abscissas talvez tenha sido um conhecimento-obstáculo para a determinação da medida do segmento formado na paralela, ficando-nos para um estudo posterior rever esta questão.

Nesse prisma, e para esse grupo de alunos, a observação de Brousseau de que os pontos de vista têm menos influência quanto aos acertos comparado à configuração, às posições das paralelas e ao recíproco do teorema de Thales não se verificou. Isto nos faz acreditar que a rede semântica é necessária, porém devemos acrescentar algumas atividades na seqüência didática para tentar minimizar os erros no cálculo da medida do segmento formado na paralela.

Neste aspecto das significações, acreditamos que as hipóteses 3 e 4 foram pertinentes, porém quanto à hipótese 3, temos algumas observações a fazer. A primeira observação é que talvez na seqüência didática faltasse ser explorada mais a conversão entre os registros e atividades relacionadas à apreensão seqüencial o que, possivelmente, teria minimizado a formação desse suposto conhecimento-obstáculo referente à conservação da abscissa. A segunda observação é a de que, pelo fato de os alunos terem visto as aplicações do teorema de Thales na disciplina de Desenho Geométrico, quando propusemos algumas atividades de conversão, os alunos não se sentiram motivados a fazer, não se atendo muito às propriedades em jogo. A última observação é que na aplicação dessas atividades muitos alunos faltaram às aulas.

Quanto ao aspecto contextual, acreditamos que a hipótese 5 foi verificada uma vez que, nas questões de nível 2 e 3, que não eram nem um pouco familiares a esses alunos e envolviam competência de nível cognitivo global, houve um percentual médio de acertos e percebemos nas atividades dos alunos uma diversificação nas estratégias de resolução. Nesses problemas de aplicações percebeu-se bem as teorias de Duval quanto às apreensões, principalmente com relação à apreensão perceptiva que, para alguns alunos, serviu de armadilha para a apreensão operatória. Comparando as duas turmas, houve bem menos alunos do grupo experimental que fundamentaram suas respostas pela apreensão perceptiva, mas, mesmo assim, em ambos os grupos observamos que nas questões nas quais a configuração era dada e prevaleciam as unidades figurais de dimensão 2, foi mais fácil o aluno se deixar influenciar pela apreensão perceptiva do que nas questões em que as configurações privilegiavam as unidades figurais de dimensão 1. Nesse âmbito também entram em jogo os fenômenos de congruência e não-congruência entre enunciado e a configuração. Exemplos desses fatos temos as questões 3, 4 e 8 que na análise implicativa apresentaram-se com evidência nas correlações dos procedimentos de ter respondido a questão pela aparência nessa ordem de complexidade, ou seja, quem respondeu a questão 3 levando em conta a apreensão perceptiva, parece ter respondido a 4 e a 8 pelo mesmo procedimento. Na questão 3, embora possamos perceber as unidades figurais de dimensão 2 nos triângulos, o enunciado nos remete a enxergar as unidades figurais de dimensão 1 quando indaga se as retas são ou não paralelas; já, no enunciado 4, a apreensão da figura destaca o triângulo e o quadrilátero e o enunciado também nos remete a enxergar um quadrilátero quando questiona se a figura é ou não um quadrado; e, na questão 8, a configuração destaca os triângulos sobrepostos, e, no enunciado, essa apreensão é reforçada quando pergunta se o triângulo em questão é retângulo. Além da observação anterior sobre a figura, Duval argumenta também que os alunos acham inútil terem de demonstrar ou provar uma propriedade que "se vê" na figura, fato esse confirmado em alguns alunos na resolução da questão 5, em que uma grande porcentagem resolveu o problema construindo a figura na escala, e na questão 7, a qual os alunos responderam corretamente, porém sem justificar por escrito pois acharam que não havia necessidade uma vez que estava evidente.

Um outro problema detectado pelo erro de alguns alunos do grupo experimental nas questões 1 e 2, item C, está relacionado com atividades de reconfiguração no que diz respeito à identificação da parte de um todo. Nesses alunos, observamos que raciocinavam corretamente para aplicar o teorema de Thales nos três pontos de vista; porém, erravam a questão por não perceber a medida implícita do segmento ***JT*** na questão 1 (***JT*** = 8-x) e do segmento ***AO*** na questão 2C (***AO*** = x - 9).

No grupo de referência, o que se observou também quanto à apreensão perceptiva foi que vários alunos erraram a questão 1 por aplicarem indevidamente o teorema de Pitágoras, considerando só pelo aspecto visual que o triângulo em questão era retângulo.

♦ **Algumas variáveis importantes, porém de difícil administração**

No decorrer da aplicação da seqüência didática, trabalhamos em duplas e observamos que, se por um lado, o trabalho em dupla desenvolve a discussão e o relacionamento com o parceiro, por outro lado, há alunos que ainda não entenderam o objetivo de se trabalhar em duplas e se acomodaram às custas do parceiro , principalmente na ação de escrever as conclusões e justificativas. Constatamos no pós-teste que esses alunos apresentaram dificuldades em escrever suas justificativas preferindo não as fazer.

Uma das variáveis de difícil administração e que, acreditamos, atrapalhou bastante o desenvolvimento do trabalho foram as ausências de alguns alunos durante a aplicação da seqüência didática que, mesmo sendo no horário normal das aulas e tendo uma avaliação por trás, não houve como evitar. Essas ausências, além de prejudicar o parceiro que tinha de trabalhar individualmente ou mudar de dupla, prejudicou o próprio aluno, pois cada atividade preparava ou trazia contribuições para o desenvolvimento das subseqüentes.

Outro aspecto que também achamos importante destacar foi a falta de compromisso de alguns alunos com as atividades preparatórias pedidas para serem desenvolvidas em casa, individualmente, as quais uma boa porcentagem dos alunos deixou de fazer, como já foi dito no relato da experimentação.

♦ **Validação**

Diante de toda discussão que acabamos de fazer, consideramos que os alunos avançaram em seus conhecimentos em relação ao teorema de Thales e em suas atitudes e autonomia no sentido de observar, levantar hipóteses, tirar conclusões, justificar, dar opiniões sem medo de errar e escrever.

Quanto, especificamente, ao teorema de Thales, notamos que os alunos demonstraram compreender:

- a utilização dos registros de representação;
- a conversão do registro figural para o registro simbólico na determinação da medida dos segmentos formados nas transversais e, em porcentagem menor, na determinação da medida do segmento formado na paralela;

- a aplicação do teorema de Thales na resolução dos problemas nos três níveis de complexidade segundo Duval;
- na aplicação do recíproco do teorema de Thales tanto na configuração dos triângulos sobrepostos quanto na configuração dos triângulos opostos pelo vértice;
- na aplicação do teorema de Thales em problemas em que não tenha sido dado nenhum tipo de configuração;
- na conversão do registro discursivo para o registro figural.

Tendo em vista que no 4º ciclo um dos aspectos enfatizado no PCN é aquele que possibilita ao aluno realizar investigações, resolver problemas, criar estratégias, comprová-las, justificá-las e argumentar sobre elas, reconhecemos a necessidade do desenvolvimento de estratégias de ensino que levem os alunos a desenvolver essas habilidades ao mesmo tempo em que ampliam seus conhecimentos conceituais. Nossa pesquisa sugere que o uso do software Cabri-géomètre I e da calculadora, seguindo os princípios da Engenharia Didática, pode favorecer o desenvolvimento dessas habilidades, bem como levar o aluno a construir a propriedade do teorema de Thales e de outras noções afins. O inconveniente desse programa é trabalhar com apenas uma casa decimal ocasionando problemas de aproximação o que, talvez, não tivesse ocorrido se tivéssemos utilizado o CABRI II.

Devido a todas as considerações feitas até então, concluímos ser válida a seqüência didática adotada para esse grupo de alunos, podendo ser melhorada, conforme dissemos anteriormente, com mais atividades que envolvam a conversão de registros, a apreensão seqüencial, problemas de decomposição e reconfiguração de figuras. Outra consideração a fazer é que, se essa seqüência for ser aplicada para um grupo de alunos que nunca trabalharam com o Software Cabri, pode-se acrescentar mais atividades de construção para familiarização dos alunos com as ferramentas do programa .

5.3 – Limites do trabalho, prolongamentos necessários e sugestões

Para darmos continuidade à pesquisa dos fenômenos ligados ao processo ensino-aprendizagem do teorema de Thales, faltou-nos explorar com os alunos as demonstrações desse teorema, outras redes semânticas e fazer as confrontações, a utilização do software Cabri II, ficando essa parte para um estudo posterior ou como sugestão para outras pesquisas.

Para a escola que gentilmente nos autorizou aplicar a seqüência didática, vamos dar a sugestão da alteração na ordem de se abordar os conteúdos de Desenho Geométrico de forma a possibilitar uma integração maior entre as disciplinas de

Desenho e Matemática de maneira que, quando o aluno for estudar o teorema de Thales na disciplina de Matemática, ele ainda não tenha visto esse conteúdo no Desenho e sim estudado a equivalência de figuras planas que facilitará o trabalho de visualização e reconfiguração além de estar munindo os alunos das competências necessárias para se abordar a demonstração do teorema pelo método de Euclides, Legendre ou Lacroix. Sugerimos também que se trabalhe desde o início do Ensino Fundamental com situações problemas dadas em língua natural, com a conversão de registros, atividades em que o aluno tenha que explicar procedimentos, escrever observações, tirar conclusões, justificar por escrito, com o intuito de ir desenvolvendo essas habilidades para posteriormente se trabalhar com provas e demonstrações. Outras atividades que são convenientes trabalhar nessa fase se refere a decomposição e reconfiguração, pois esse tipo de habilidade cognitiva, deve ser adquirido de forma gradual. O uso do software Cabri II ou mesmo do Cabri I também pode ser extensivo aos alunos do 3º ciclo paralelamente com a utilização de materiais concretos.

Esse ano estamos fazendo algumas adaptações e alterações na seqüência didática aplicada em 1999 e aplicando na turma da 8ª série de 2000. A primeira alteração foi quanto às atividades de familiarização com o software Cabri. Nessa parte acrescentamos algumas atividades de construções utilizando as ferramentas dos menus "criação", "construção" e diversos e dispusemos de mais tempo para essa fase pois duas aulas não foram suficientes para o desenvolvimento de todas as atividades propostas na seqüência. Como na experimentação tivemos alguns grupos prejudicados em suas observações devido a não ter executado convenientemente as construções, achamos pertinente utilizar mais aulas para essa etapa. Na seqüência parte A, que se refere ao estudo da semelhança de figuras planas, tiramos a atividade 3 proposta para casa, adaptamos as demais mudando as figuras da 1ª questão, procurando simplificar o enunciado de todas as questões e acrescentando outras. Na parte B, específica do teorema de Thales, reduzimos um pouco os itens das atividades iniciais, após a institucionalização, falamos um pouco da história da matemática e propusemos as conjecturas de como provavelmente Thales determinou a distância do navio até a praia para que os alunos em grupo depois da leitura e interpretação fizessem um esboço para representar geometricamente essa situação e escrevessem a justificativa matemática em jogo nessa idéia. Cada grupo ficou com uma conjectura, depois que terminaram a atividade, propusemos a troca das configurações para que cada grupo escreva uma conjectura para aquela nova configuração e uma possível explicação matemática. Depois começamos as discussões coletivas. A seguir pretendemos trabalhar as aplicações e demonstração seguindo a idéia de Lacroix tanto para os segmentos comensuráveis quanto para os segmentos incomensuráveis.

Uma outra atividade que intencionamos trabalhar com os alunos é a exploração de figuras tridimensionais semelhantes. Para isso vamos propor que os alunos construam a planificação de várias pirâmides semelhantes utilizando embalagens de leite, suco, ou outras, analisem as construções fazendo a sobreposição delas. Depois pretendemos que utilizando essa planificação como molde, os alunos construam com gesso ou cera (vela) pirâmides semelhantes e explorem as propriedades. Essas pirâmides poderão ser confeccionadas em forma de vela para serem utilizadas no Natal.

Para os professores que se interessam em trabalhar com a seqüência didática, sugerimos que façam as adaptações de acordo com a sua realidade. Se na escola não houver computador, poderão desenvolver todas essas atividades utilizando régua e compasso. A atividade caixa preta (primeira atividade utilizando Cabri da seqüência - parte A) proposta poderá ser feita fornecendo aos alunos vários quadriláteros mantendo as propriedades das figuras construídas para que os alunos explorem as medidas dos lados e ângulos e façam a comparação com as figuras ampliadas e reduzidas na máquina copiadora. Se o aluno nunca teve Desenho Geométrico e não sabe manipular com os instrumentos, sugerimos que proponham atividades para desenvolver essas habilidades.

Para formação de professores acreditamos que poderá ser trabalhada a mesma seqüência didática e no término fazer as discussões do ponto de vista didático sobre a rede semântica, os pontos de vista, os enunciados, as demonstrações, as aplicações inclusive a aplicação para construção de gráficos de funções propostas pela Maria Célia (Silva, 1997, PUC-SP).

Para Educação Matemática acreditamos que este nosso trabalho será uma contribuição em vários sentidos. No aspecto didático pelo levantamento e análise das variáveis de situação referentes ao objeto matemático teorema de Thales, pela rede semântica, pela aplicação da teoria dos registros de representação propostas por Duval, pela constatação de que utilizando o software Cabri podemos contribuir para o desenvolvimento da competência métrica, para exploração de situações de investigação, resolução de problemas, criação de estratégias, comprovação, justificativa, argumentação e, porque não, da prova.

Para futuras pesquisas iremos tecer alguns comentários, idéias e questões:

- Trabalhar com outras redes semânticas e analisar qual seqüência proporciona uma melhor apreensão e produção do sentido em relação à compreensão global dos conceitos de semelhança, homotetia, teorema de Thales e responder a questão – "*Será que ao término das seqüências didáticas a apreensão e produção de sentido se dará da mesma forma?*"

- De que forma podemos abordar o teorema de Thales, destacando os três pontos de vista, sem que o aspecto da conservação da abscissa seja um obstáculo para a aplicação do aspecto da dilatação?
- O ensino da homotetia não tem sido abordado na maioria das escolas e nem percebemos este conteúdo nos livros didático. Por que não trabalhar esse assunto?
- Analisar e trabalhar as aplicações do teorema de Thales em vários níveis de ensino.
- Construir seqüências didáticas trabalhando o estudo da função enfocando o teorema de Thales como uma aplicação.
- Explorar situações de aplicação do teorema de Thales não só com figuras planas mas também com figuras não-planas.
- Trabalhar as demonstrações do teorema de Thales.
- Desenvolver pesquisa relacionada ao ensino-aprendizagem do conceito de proporção.
- Desenvolver pesquisa relacionada ao ensino-aprendizagem do conceito de número decimal.

"Um dia nunca é igual ao outro...
...a vida é uma evolução,
a cada amanhecer somos um novo ser."
Nancy

BIBLIOGRAFIA

ÁVILA, Geraldo. 1984. *Grandezas incomensuráveis e números irracionais*. Revista do Professor de Matemática, n° 5, pp. 06-11. São Paulo . Brasil.

ÁVILA, Geraldo. 1985. *Eudoxo. Dedekind, números reais e ensino de Matemática.* Revista do Professor de Matemática, n° 7, pp. 05-10. São Paulo. Brasil.

BACH, Marie José, MAROT, Madeleine. 1995. *Um thème de quatrième pour apprendre à raisonner: Milieu d`um segment*. França: IREM de Poitiers, Bulletin Inter IREM, Commission Premier Cycle.

BACH, Marie José, MAROT, Madeleine. 1995. *Énoncé de Thalès: support pour le calcul algébrique*. França: IREM de Poitiers, Bulletin Inter IREM, Commission Premier Cycle.

BARBOSA, João Lucas Marques. 1995. *Geometria Euclidiana Plana*. Coleção do Professor de Matemática, Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro: IMPA.

BARROS, Diana Luz Pessoa de. 1997. *Teoria Semiótica do Texto*. 3ª edição. São Paulo: Ática.

BIANCHINI, Edwaldo. 1996. *Matemática 8ª série*. 4ª edição. São Paulo: Moderna.

BIGODE, Antônio José Lopes. 1994. *Matemática Atual 8ª série*. São Paulo: Atual.

BKOUCHE, Rudolf. 1994. *Variations sur les liens entre le géométrique et le numérique: Autour du théorèma de Thalès*. França: IREM de Lille. Bulletin Inter IREM, Commission Premier Cycle.

BONGIOVANNI, Vincenzo, VISSOTO, Olímpio R., LAUREANO, José Luiz T. 1995. *Matemática e Vida oitava série*. 7ª edição. São Paulo: Ática

BOYER, Carl B. 1974. *História da Matemática.* Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgar Blücher.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. 1998. *Parâmetros Curriculares nacionais: Matemática.* Brasília: MEC / SEF.

BROTTO, Fábio Otuzi. 1999. *Jogos Cooperativos*. 2ª edição. Santos, SP: Re-Novada

BROUSSEAU, Guy. 1986. *Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques*. França: *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol 7, n° 2, pp. 33-115.

BROUSSEAU, Guy. 1995. *Promenade avec Thalès, de la Maternelle à l`Université. du théorèma de Thalès*. França: Bulletin Inter IREM, Commission Premier Cycle.

CHARALAMBOS, Lemonidis. 1991. Analyse et réalisation d`une expérience d`enseignement de l`homothétie. França: IREM, Université Louis Pasteur, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 11, n°23, pp.295-324.

CORDIER, Françoise, CORDIER, Jean. 1991. L`application du théorème de Thalès. Un exemple du rôle des représentations typiques comme biais cognitifs. França: *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 11, n° 1, pp. 45-64.

DELORD, Robert, TERRACHER, Pierre Henri, VINRICK, Gerard. 1993. *Mathématiques 3e, chapitre 10, Autor de Thalès pág. 154 a 174.* França: Hachette Éducation.

DERUAZ, Hélène, KOGEJ, Nicole. 1995. *Le Théorème de Thalès: comment est-il enseigné en Europe?.* Cité Scolaire internationale de Lyon. França: Bulletin Inter IREM, Commission Premier Cycle.

DOLCE, Osvaldo, POMPEO, José Nicolau. 1985. *Fundamentos de Matemática Elementar, Geometria Plana*, v. 9. 6ª edição. São Paulo: Atual

DUVAL, Raymond. 1995. *Sémiosis et Pensée Humaine: Registros sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Paris: Peter Lang S.A.

EVES, Howard. 1992. *Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula, Geometria*. Tradução: Hygino H. Domingue. São Paulo: Atual.

EVES, Howard. 1995. *Introdução à história da matemática*. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas S.P.: Unicamp.

FIORIN, José Luiz. 1997. *Elementos de Análise do Discurso*. Coleção Repensando a Língua Portuguesa. 6ª edição. São Paulo: Contexto.

GONZÁLEZ, Ricardo Luengo (coords.). 1990. *Proporcionalidad Geometrica y Semejanza.* Madrid: Sintesis S.A.

GREIMAS, Algirdas Julien , COURTÉS, Joseph. 1979. Dicionário de Semiótica. Tradução: Alceu Dias Lima, Diana Luz Pessoa de Barros, Eduardo Penuela Cañizal, Edward Lopes, Ignacio Assis da Silva, Maria José Castagnetti Sembra, Tieko Yamaguchi Miyazaki. São Paulo: Cutrix.

GREIMAS, Algirdas Julien. 1976. *Semiótica do discurso científico da modalidade*. Tradução: Cidmar Teodoro Pais. São Paulo: Difel-SBPL.

GRENOBLE, Université Joseph Fourier. Instituté d`Informatique et de Mathématiques Aplliqués de Grenoble, (IMAG). *Cabri-classe, Apprendre la géometrie avec un logiciel. Didatech*- Laboratoire de Strutures Discrètes e de didactique (LSD2). Editions Arquimede.

HEATH, Sir Thomas. 1981. *A History of Greek Mathematics: volume I from Thales to Euclid.* New York: Dover Publications, Inc.

IMENES, Luiz Márcio, LELLIS, Marcelo. 1999. *Matemática oitava série.* 1ª edição. São Paulo: Scipione.

JAFFROT, Michel. 1995. *De l`intérêt d`aborder le théorème de Thalès (de 3ème), vu sous son aspect projection, dans la continuité du programme de quatrième.*

França: IREM des Pays de la Loire, Bulletin Inter IREM, Commission Premier Cycle.

MASSOT, Annick e Christian. 1995. Agrandissement-Réduction: un chemin pour Thalès. França: IREM des Pays de la Loire, Bulletin Inter IREM, Commission Premier Cycle.

MATUI, Jiron. 1993. *Construtivismo,* Apostila. São José dos Campos-SP.

MONFROT, Anne-Marie. 1995. *A propos de l`énoncé de Thalès en 3 ème*. França: IREM des Paris VII, Bulletin Inter IREM, Commission Premier Cycle.

PIERRO NETO, Scipione Di (coords) et alii. 1974. *O Trabalho Dirigido no ensino da Matemática: curso modernno*, 8ª série, 1° grau. 5ª edição. São Paulo: Saraiva

PLANE, Henry. 1995. *Le théorèma de Thalès: Une invention Française du XX^e siècle*. França: IREM de Dijon. Bulletin Inter IREM, Commission Premier Cycle.

REIS, Ismael. 1996. *Fundamentos da Matemática* 8ª série.1ª edição. São Paulo: Moderna.

SADDO, Ag Almouloud. 1997. *Fundamentos da Didática da Matemática e Metodologia de Pesquisa*, CEMA (Caderno de Educação Matemática), volume III. São Paulo: PUC.

SAEB (Sistema de Avaliação da Educação Básica).1999. *Matrizes curriculares de Referência*. 2ª edição. Brasília: MEC / INEP. http://www.inep.gov.br.

SÃO PAULO. Secretaria de Estado da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. 1974. *Proposta Curricular para o Ensino de Matemática*, 1° grau. São Paulo: SE / CENP.

SÃO PAULO. Secretaria de Estado da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. 1991. *Proposta Curricular para o Ensino de Matemática*, 1° grau. 4ª edição. São Paulo: SE / CENP.

SÃO PAULO. Secretaria de Estado da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. 1994. *Experiências matemáticas 8ª série*. São Paulo.

SÃO PAULO. Secretaria de estado da educação. *Descrição das escalas de habilidades do SARESP 96/97/98.* Governo do estado de Sào Paulo.

SARESP 98 (Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar de São Paulo). Matemática 1ª série do Ensino Médio Noturno. Governo do Estado de São Paulo.

SARESP 98 (Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar de São Paulo). Matemática 1ª série do Ensino Médio Diurno. Governo do Estado de São Paulo.

SERRES, Michel. 1997. *As origens da Geometria*. Tradução: Ana Simões e Maria da Graça Pinhão. Portugal: Terramar.

SILVA, Maria Célia Leme. 1997. *Teorema de Tales: Uma Engenharia Didática Utilizando o CABRI-GEOMETRE*. Dissertação de Mestrado em Ensino da Matemática. São Paulo: PUC.

ANEXOS

ANEXO 1
Atividades para familiarização com o software Cabri

Atividade – Cabri – Géomètre I

(le Cahier de Brouillon Interatif = o caderno de rascunho interativo)

A – Apresentação

Menu	**Arquivo**	**Edição**	**Criação**	**Construção**	**Diversos**
	Novo	Cancelar	Ponto	Lugar Geométrico	Eliminar um objeto
	Abrir-Alt O	Apagar tudo	Reta	Ponto sobre objeto	Eliminar relações
	Salvar	Aspectos do objeto	Circunferência	Intersecção de 2 objetos	Ligar um ponto a um objeto
	Salvar como	Nomear	Segmento	Ponto médio	
Opções do Menu	Voltar	Preferências	Reta definida por dois pontos	Mediatriz	Macro construções
	Eliminar um arquivo		Triângulo	Reta paralela	
	Formato de impressão		Circunferência definida por dois pontos	Reta perpendicular	Histórico
	Imprimir			Centro de uma circunferência	Marcar um ângulo
	Sair Alt-H			Simétrico de um ponto	Medir
				Bissetriz	

Obs. - Para entrar em um menu, basta levar o cursor até ele e dar um clique.

Para entrar em uma opção do menu, leve o cursor até a opção desejada e clique uma vez.

Para iniciar um trabalho vá no menu arquivo, opção novo.

B - Conhecer os principais menus e suas opções

Para iniciar um trabalho, após ter entrado na opção novo, você deverá criar os elementos e ou objetos antes de partir para as construções.

B_1 – Verificar as opções do Menu – **Criação**

B_{11} – Ponto

Após entrar nesta opção, basta levar o cursor (lápis) até o local desejado e dar um clique. Pronto, seu ponto está criado. Se desejar, poderá nomeá-lo utilizando uma letra maiúscula, para isso vá ao menu “edição”, opção “nomear”, aparecerá o símbolo , você pode deslocá-lo pressionando a tecla esquerda do mouse como melhor lhe convier; em seguida, digite a letra pretendida. Se digitar errado, aperte delete. Para ir a outra etapa, leve o cursor fora do desenho e dê um clique.

B_{12} – Reta

Após entrar nesta opção, basta levar o cursor até o local desejado e dar um clique. Se quiser mudar a posição, basta levar o cursor até a reta e, pressionando o mouse, desloque até o lugar desejado. Se quiser nomeá-la, utilize uma letra minúscula. (menu edição, opção nomear)

B_{13} – Circunferência

Após entrar nesta opção, leve o cursor até o local onde deverá estar o centro da circunferência e pressionando a tecla do mouse arraste-a até obter o tamanho desejado. Se quiser marcar o centro de uma circunferência, vá no menu “construção” opção “centro de uma circunferência”, leve o cursor até a circunferência e clique uma vez. Poderá nomear este ponto. (menu edição, opção nomear)

B_{14} – Segmento

Como um segmento de reta é limitado em suas extremidades, após entrar nesta opção, leve o cursor em cada ponto da extremidade do segmento e clique uma vez. Se quiser, poderá nomear este segmento nomeando suas extremidades. Se quiser medi-lo, vá ao menu “diversos” opção “medir”, leve o cursor até o segmento e clique fora das opções.

Pretendendo aumentar ou diminuir este segmento, leve o cursor até uma de suas extremidades, pressione a tecla do mouse e arraste até obter a posição e tamanho pretendido.

B_{15} – Reta definida por dois pontos

Após entrar nesta opção, leve o cursor em cada ponto por onde se deseja criar a reta e clique uma vez. Se quiser, poderá nomeá-la de duas maneiras a escolher:

a) utilizando uma letra minúscula;
b) nomeando dois de seus pontos.

Se quiser mudar a posição desta reta, leve o cursor até um de seus pontos e, pressionando a tecla do mouse, arraste, deslocando até a posição pretendida.

B_{16} – Triângulo

Como um triângulo tem três lados, três vértices e três ângulos, após entrar nesta opção, leve o cursor a três pontos que pretenda para os vértices e, em cada um, clique uma vez. Poderá nomear cada vértice deste triângulo utilizando uma letra maiúscula.

Para dimensionar os lados do triângulo, vá no menu "diversos" opção "medir", leve o cursor no e arraste até o local desejado.

Para marcar os ângulos vá ao menu "diversos", opção "marcar ângulos" leve o cursor a um dos vértices e clique, vá no outro vértice consecutivo e clique, vá no terceiro vértice e clique. Observe que o ângulo marcado e o ângulo correspondente ao vértice do meio. Para medir o ângulo vá no menu diversos, opção medir, leve o cursor no ângulo marcado e clique. Poderá ocorrer ambigüidade, se ocorrer, clique no ângulo.

B_{17} – Circunferência definida por dois pontos

Após entrar nesta opção, basta levar o cursor até o local onde se queira para o centro e dar um clique; depois, até um ponto qualquer da circunferência.

B_2 – Verificar a definição das principais construções geométricas no Menu – Construção

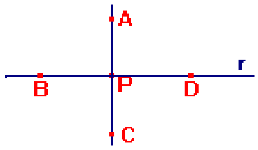
B_{21} – Retas Perpendiculares

Atividade 1

a) Criar uma reta e marcar um ponto sobre ela (entrando no menu "construção" opção "ponto sobre objeto". Depois nomear este ponto de **P** e a reta de **r.**

b) No menu "construção" – opção "reta perpendicular" – leve o cursor no ponto **P** e depois na reta, assim você traçou uma reta perpendicular a reta **r** no ponto **P**.

Análise: as duas retas se interceptam dividindo o plano em **4** regiões. Verifique as medidas dos ângulos formados. Para isso você deverá marcar um ponto em cada semi-reta (menu construção opção ponto sobre objeto) e nomeá-los. Exemplo:



Depois vá no menu "diversos", na opção "marcar um ângulo" e marque todos os ângulos (***APD***, ***APB***, ***DPC***, ***CPB***). Para medir um ângulo, vá no menu diversos, na opção "medir" e leve o cursor aos ângulos marcados. Escreva o que você observou. ___

____

Leve o cursor a uma das retas: vai aparecer uma mão. Pressione a tecla esquerda do mouse e arraste, deslocando as retas em várias posições verificando se os ângulos se alteram.

Conclusão: Duas retas são perpendiculares ______________________________

____

B_{22} – Retas Paralelas

Atividade 2

a) Criar uma reta **s** e um ponto **A** não pertencente a reta **s**.

b) Menu "construção", opção "reta paralela"; leve o cursor ao ponto **A** e clique, depois leve o cursor à reta **s** e clique.

Análise: leve o cursor até a reta **s,** pressionando a tecla esquerda do mouse desloque-a.

Observações____

____

Conclusão: Retas paralelas são retas coplanares ____________________________

____

____

Obs.: *Retas coplanares* são retas que estão contidas num mesmo plano.

Responda:

1) Quais as posições relativas entre duas retas num plano?

____

____

2) Defina:

a) retas concorrentes ____

____

b) retas coincidentes ____

____

3) Quando duas retas concorrentes são perpendiculares?

____

____

4) Duas retas concorrentes podem ser paralelas? Justifique a sua resposta.

____

B_{23} – Ponto Médio

Atividade 3:

Criar um segmento ***AB***, em seguida, vá ao menu "construção", opção "ponto médio", e leve o cursor até o segmento. Nomeie o ponto encontrado de **M**.

a) crie os segmentos ***AM*** e ***BM***.
b) medir os segmentos ***AM***, ***BM*** e ***AB*** (menu "diversos" opção "medir").

Análise: Leve o cursor a uma das extremidades do segmento ***AB*** e, pressionando a tecla esquerda do mouse, arraste em várias posições, observe as medidas encontradas e teça comentários: ____

____

____

Conclusão: ____

____

B_{24} – Mediatriz

Atividade 4:

a) aproveitando a figura criada na atividade anterior, vá no menu "construção" opção "mediatriz" e leve o cursor ao segmento ***AB***.
b) Medir os ângulos formados com a mediatriz e o segmento (primeiro marque os ângulos para depois medir).

Lembrando: 1º marque o ângulo (construa ponto sobre a mediatriz para poder marcar o ângulo no menu diversos).

2º medir o ângulo (menu diversos opção medir)

Análise: Leve o cursor a uma das extremidades do segmento e pressionando a tecla do mouse, arraste. Verifique se o ângulo se altera e se as medidas dos segmentos menores ***AM*** e ***BM*** continuam congruentes.

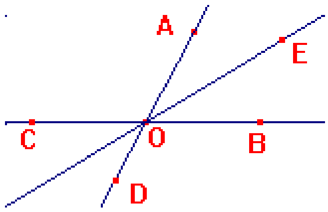
Conclusão: ____

____

B_{25} – Bissetriz

Atividade 5:

a) Trace duas retas (definidas. por dois pontos) concorrentes e marque o ângulo formado por elas. Nomeie seus pontos como no esquema abaixo:



b) Menu "construção" – opção "bissetriz": leve o cursor aos três pontos do ângulo ***AÔB***.

c) Construa um ponto **E** sobre a reta bissetriz.

d) Marque os ângulos formados ***AÔE***, ***BÔE*** e em seguida, meça-os.

Análise: leve o cursor a um dos pontos dos lados do ângulo e desloque estas retas. Observe a medida do ângulo ***AÔB*** e compare com as medidas dos ângulos formados pelas retas bissetrizes. Teça comentários: ______________________________

____

____

Conclusão: Bissetriz é ____

____

____

B_{26} – Simétrico de um ponto:

a) em relação a um ponto:

Atividade 6a:

- Crie dois pontos, **A** e **B**, a seguir construa o simétrico de **A** em relação a **B,** nomeando-o de **P**. Crie a reta ***AB***, os segmentos ***AB*** e ***BP***. Meça os segmentos. Teça comentários.____

____

b) em relação a uma reta

Atividade 6b:

- Crie uma reta **r** definida por dois pontos, a seguir crie um ponto **P** não-pertencente à reta.
- Construa o simétrico do ponto **P** em relação à reta **r** e nomeie de **B**.
- Crie uma reta pelos pontos **P** e **B**; a seguir, verifique se a reta ***PB*** é perpendicular a **r**.
- Determine o ponto **M**, intersecção entre as retas **r** e ***PB***, crie os segmentos ***PM*** e ***MB*** e verifique se são congruentes.

C - Análise das propriedades das principais construções geométricas (mediatriz, bissetriz, circunferência, par de paralelas)

C_1 – Circunferência

Atividade 1:

a) Crie uma circunferência de centro **O** e marque sobre ela os pontos **A**, **B**, **C** **D**.

c) Crie os segmentos ***AO***, ***OB***, ***OC***, ***OD*** e marque suas medidas.

Análise: Leve o cursor em um dos pontos e desloque a circunferência, observe as medidas e teça comentários:____

____

Conclusão: Todos os pontos da circunferência são _______________ do seu centro.

C_2 – Mediatriz

Atividade 2:

a) Crie um segmento ***AB*** e construa sua mediatriz.

b) Construa três pontos **C**, **D** e **E** sobre a mediatriz.

c) Crie e marque a medida dos segmentos ***CA*** e ***CB***; ***DA*** e ***DB***; ***EA*** e ***EB***,

Análise: Leve o cursor em uma das extremidades do segmento e pressionando a tecla do mouse desloque em várias posições, observe as medidas e teça comentários: ____

____

Conclusão: Qualquer ponto da mediatriz é ________________________________

____

C_3 - Bissetriz

Atividade 3:

a) Crie duas retas concorrentes **r** e **s** e trace a bissetriz dos ângulos formados.

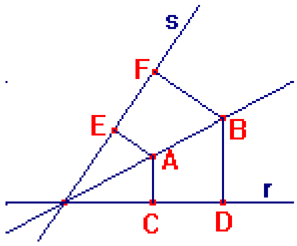
b) Construa sobre a bissetriz uns dois pontos **A** e **B**.

c) Construa retas perpendiculares a **r** passando por **A** e por **B** e retas perpendiculares a **s** passando por **A** e **B**.

d) Determine os pontos **C**, **D**, **E** e **F**, intersecção dessas retas perpendiculares com as retas **r** e **s**. (menu construção – intersecção de dois objetos)

e) Crie e meça os segmentos ***AC***, ***BD***, ***BF*** e ***AE***.

f) Apague as retas perpendiculares (menu edição, aspectos do objeto)



Análise: Leve o cursor a uma das extremidades das retas e desloque em várias posições. Observe a variação das medidas e teça comentários: ____________________
____
____

Conclusão: Qualquer ponto da bissetriz é ______________________________
____

C_4 – Par de Paralelas

Atividade 4:

a) Construa duas retas paralelas, **a** e **b,** e marque um ponto **A** sobre a reta **a**.

b) Construa uma reta **r** perpendicular a **b** por **a**.

c) Marque o ponto **P**, dado que $\mathbf{P \in b}$ e $\mathbf{P \in r}$.

d) Crie o segmento ***AP*** e meça-o.

e) Trace a mediatriz de ***AP*** e meça a distância de **a** a **s** e de **b** a **s**.

Análise: Desloque as retas paralelas e verifique as medidas.

Conclusão: Qualquer ponto pertencente ao par de paralelas é _______________
____

Sabendo que **Lugar Geométrico** é o conjunto de todos os pontos de um plano que gozam de uma propriedade comum, podemos definir as construções acima da seguinte forma:

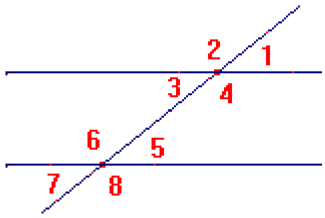
- **circunferência** é o lugar geométrico dos pontos de um plano que eqüidistam de um ponto fixo chamado centro;
- **mediatriz** é o lugar geométrico dos pontos de um plano que eqüidistam das extremidades de um segmento (ou de dois pontos fixos);
- **bissetriz** é o lugar geométrico dos pontos de um plano que eqüidistam das extremidades de duas retas concorrentes (ou lados de um ângulo);
- **par de paralelas** é o lugar geométrico dos pontos de um plano que eqüidistam de uma reta.

D - Relação entre os ângulos formados por retas paralelas e transversais.

Atividade:

a) Construa duas retas paralelas, **r** e **s**, e uma reta **t**, transversal a essas retas.

b) Marque todos os ângulos formados e escreva as suas medidas.



c) Observe a medida dos ângulos e teça comentários: ______________________

____

Análise: Leve o cursor a um dos vértices dos ângulos e, deslocando, verifique se o que foi observado anteriormente continua sendo válido.

Chamamos os ângulos:

a) 1 e 3, 2 e 4, 5 e 7, 6 e 8 de ângulos opostos pelo vértice,

b) 1 e 5, 2 e 6, 4 e 8, 3 e 7 de ângulos correspondentes,

c) 4 e 6, 3 e 5 de ângulos alternos internos,

d) 2 e 8, 1 e 7 de ângulos alternos externos,

e) 4 e 5, 3 e 6 de ângulos colaterais internos,

f) 2 e 7, 1 e 8 de ângulos colaterais externos.

Conclusão:

1) Os ângulos opostos pelos vértices são ____

2) Os ângulos correspondentes são ____

3) Os ângulos alternos internos são ____

4) Os ângulos alternos externos são ____

5) Os ângulos colaterais internos são ____

6) Os ângulos colaterais externos são ____

ANEXO 2
Atividades visando a formação do conceito de semelhança

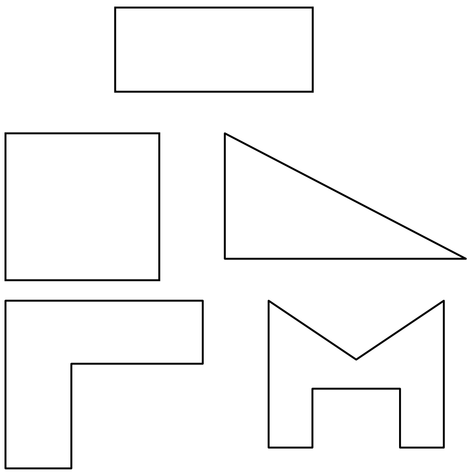
Atividade para ser desenvolvida individualmente em casa

1) Dado o desenho abaixo, tire uma cópia ampliando e outro reduzindo as figuras. Meça os lados e os ângulos de todas as figuras e responda:

a) o que ocorreu com os ângulos quando a figura foi ampliada (houve variação)? E quando a figura foi reduzida?

b) calcule a razão entre a medida dos lados de cada figura com a medida dos lados correspondentes na ampliação e na redução.

c) ampliando ou reduzindo as figuras, o que ficou invariante? O que variou?



2) Utilizando os desenhos da atividade anterior:

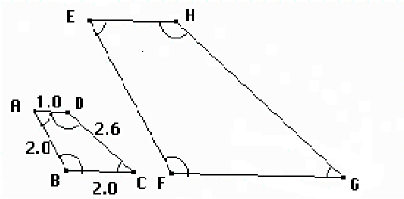
a) calcule as áreas das figuras da ficha, depois calcule as áreas das figuras ampliadas e reduzidas e em seguida determine a razão entre as áreas de cada figura da ficha com a área de sua respectiva ampliação ou redução;

b) calcule o perímetro das figuras da ficha, depois calcule o perímetro das figuras ampliadas e reduzidas e, em seguida, determine a razão entre o perímetro de cada figura da ficha com o perímetro da sua respectiva ampliação e redução;

c) observe as razões encontradas entre as medidas dos lados, das áreas e do perímetro e determine uma relação entre elas.

Seqüência Didática - Parte A - (2º encontro no laboratório)

Atividade 1



***obs.* -** Quatro segmentos são proporcionais se os números que exprimem suas medidas, na mesma unidade, formam uma proporção.

Abrindo o arquivo **A: S11**, você encontra os quadriláteros ***ABCD*** e ***EFGH***. Movendo os pontos **A** e **B** você consegue ampliar ou reduzir a área dos quadriláteros e movendo o ponto **F** você pode ampliar ou reduzir a área do quadrilátero ***EFGH***, sem modificar as medidas do quadrilátero ***ABCD***. Utilizando no menu "diversos" a opção "medir" marque as medidas dos lados e ângulos destes quadriláteros, observe estes valores e responda:

a) deslocando o ponto **F** o quadrilátero ***EFGH*** mantém a mesma forma, ou seja, a mesma aparência em relação ao quadrilátero ***ABCD*** ou ele se deforma? Resp.: ____

____

b) o que você observa com relação aos ângulos internos desses quadriláteros? ____

c) deslocando os pontos **A**, **B** e **F**, o que você observou no item anterior? ele continua válido?____

d) desloque o ponto **F** até que ***EF*** fique o dobro de ***AB***. Observe e escreva que relação existe entre as outras medidas do quadrilátero ***ABCD*** com relação ao quadrilátero ***EFGH***, ou seja, ***AB*** =____***EF***, ***AD*** = ____ ***EH***, ***BC*** = ____ ***FG***, ***CD*** = ____ ***GH***. __

____

____

e) desloque o ponto **F** até que ***EF*** fique o triplo de ***AB***. Observe e escreva que relação existe entre as outras medidas do quadrilátero ***ABCD*** com relação ao quadrilátero ***EFGH***, ou seja, ***AB*** = ____ ***EF*** , ***AD*** = ____ ***EH*** , ***BC*** = _____***FG***, ***CD*** = ____ ***GH***.

____

____

f) será que deslocando o ponto **F** em qualquer posição a razão entre as medidas dos lados correspondentes de um dos quadriláteros com relação ao outro se mantêm constante, ou seja, os lados correspondentes são proporcionais? (Nesse caso, os lados correspondentes são: ***AB*** e ***EF***, ***AD*** e ***EH***, ***BC*** e ***FG***, ***CD*** e ***GH***).___________

____

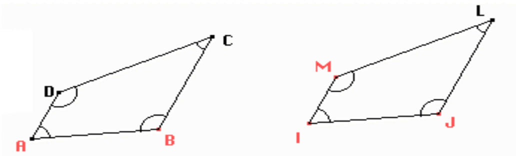
____

Você pode fazer esta verificação: desloque o ponto **F**, fixe uma posição, preencha a tabela abaixo e faça uma análise. Repita isso para uma outra posição.

1ª posição						2ª posição					
AB		*EF*		*AB/EF*		*AB*		*EF*		*AB/EF*	
BC		*FG*		*BC/FG*		*BC*		*FG*		*BC/FG*	
CD		*GH*		*CD/GH*		*CD*		*GH*		*CD/GH*	
DA		*HE*		*DA/HE*		*DA*		*HE*		*DA/HE*	

Conclusão: Os quadriláteros ***ABCD*** e ***EFGH*** _______a mesma aparência, os ângulos__________ congruentes e a medida dos lados ___________ proporcionais.

Atividade 2



Abrindo o arquivo **A: S12**, você encontrará os quadriláteros ***ABCD*** e ***IJLM***. Utilizando no menu diversos a opção medir marque as medidas dos lados e ângulos destes quadriláteros, observe estas medidas e responda:

a) os quadriláteros ***ABCD*** e ***IJLM*** têm a mesma forma, ou seja, a mesma aparência? ____

Deslocando os pontos **I**, **J** e **M** o quadrilátero ***IJLM*** mantém a mesma aparência em relação ao quadrilátero ***ABCD***? Escreva o que você observou. Resp. _____________ ____ ____

b) o que você observa com relação aos ângulos internos destes quadriláteros?____

c) deslocando os pontos **I**, **J** e **M**, o que você observou no item anterior continua válido? ____

d) desloque o ponto **J** até que ***IJ*** fique o dobro de ***AB***. Observe e escreva que relação existe entre: ***AB*** = ____ ***IJ***, ***AD*** = ____***IM***, ***BC*** = ____***JL***, ***CD*** = ____ ***LM***. Resp. __ ____

Desloque o ponto **M** e verifique se esta relação se mantém. Resp. ____

e) desloque o ponto **J** até que ***IJ*** fique o triplo de ***AB***. Observe e escreva que relação existe entre: ***AB***= ____***IJ***, ***AD***=____***IM***, ***BC***=____***JL***, ***CD***=____***LM***. Resp. _______ ____

f) deslocando o ponto **J** em qualquer posição, a razão entre as medidas dos lados *AB* e *IJ*, *AD* e *IM*, *BC* e *JL*, *CD* e *LM* se mantêm constante, ou seja, os lados correspondentes são proporcionais? ______________________________________

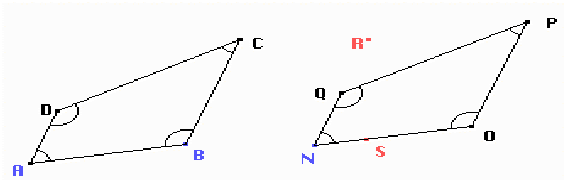
Se achar necessário pode fazer esta verificação: desloque o ponto J e M, fixe uma posição, preencha a tabela abaixo e faça uma análise. Repita isso para uma outra posição.

1º posição					
AB		IJ		AB/IJ	
BC		JL		BC/JL	
CD		LM		CD/LM	
DA		MI		DA/MI	

2º posição					
AB		IJ		AB/IJ	
BC		JL		BC/JL	
CD		LM		CD/LM	
DA		MI		DA/MI	

Conclusão: Os quadriláteros ***ABCD*** e ***IJLM*** ____ a mesma aparência, os ângulos _______ congruentes e a medida dos lados _________________proporcionais.

Atividade 3



Abrindo o arquivo **A: S13**, você encontrará os quadriláteros ***ABCD*** e ***NOPQ*** Movendo os pontos **A** e **B** você conseguirá ampliar ou reduzir a área do quadrilátero ***ABCD***; deslocando o ponto **S** você poderá ampliar ou reduzir a área do quadrilátero ***NOPQ*** e deslocando o ponto **R** você mudará as medidas dos ângulos internos do quadrilátero ***NOPQ*** sem modificar as medidas do quadrilátero ***ABCD***. Utilizando no menu "diversos" a opção "medir", marque as medidas dos lados e ângulos destes quadriláteros, observe estes valores e responda:

a) deslocando o ponto **R**, escreva o que você observa com relação a dimensão dos dois quadriláteros ____

o quadrilátero ***NOPQ*** mantém a mesma forma, ou seja, a mesma aparência em relação ao quadrilátero ***ABCD*** ou ele se deforma? Resp. ________________________

____

____

Deslocando o ponto **S,** o que você observa com relação a dimensão dos dois quadriláteros?____

____

b) o que você observa com relação aos ângulos internos desses quadriláteros?

____

c) deslocando os pontos **R** e **S**, o que você observou no item anterior continua válido?_

____

d) desloque o ponto **S** até que ***NO*** fique o dobro de ***AB***. Observe e escreva que relação existe entre: ***NO** e **AB***, ***OP** e **BC***, ***PQ** e **CD***, ***NQ** e **AD*** __________________________

____

e) desloque o ponto **S** até que ***NO*** fique o triplo de ***AB.*** Observe e escreva que relação existe entre: ***NO*** *e* ***AB***, ***OP*** *e* ***BC***, ***PQ*** *e* ***CD***, ***NQ*** *e* ***AD*** ________________________

____

f) será que, deslocando o ponto **S** em qualquer posição, a razão entre as medidas dos lados ***NO*** *e* ***AB***, ***OP*** *e* ***BC***, ***PQ*** *e* ***CD***, ***NQ*** *e* ***AD*** se mantêm constante, ou seja, os lados são proporcionais?____

Você pode fazer esta verificação: desloque os pontos **R** e **S**, fixe uma posição, preencha a tabela abaixo e faça uma análise. Repita isso para uma outra posição.

1º posição					
AB		*NO*		*AB/NO*	
BC		*OP*		*BC/OP*	
CD		*PQ*		*CD/PQ*	
DA		*QN*		*DA/QN*	

2º posição					
AB		*NO*		*AB/NO*	
BC		*OP*		*BC/OP*	
CD		*PQ*		*CD/PQ*	
DA		*QN*		*DA/QN*	

Conclusão: Os quadriláteros ***ABCD*** e ***NOPQ*** __________a mesma aparência, os ângulos ______congruentes e a medida dos lados___________________ proporcionais.

Atividade 4

Observando os quadriláteros das atividades **1**, **2** e **3,** responda:

- Ao "ampliar" e "reduzir" as figuras, quais delas mantiveram a medida dos lados correspondentes proporcionais?____

- Ao "ampliar" e "reduzir" as figuras, quais delas mantiveram a medida dos ângulos correspondentes congruentes?____

- Ao "ampliar" e "reduzir" as figuras, quais delas mantiveram a medida dos lados correspondentes proporcionais e dos ângulos correspondentes congruentes ? ________

____

- Em qual ou quais figuras, ao "ampliar" e "reduzir", as características foram as mesmas observadas nas figuras ampliadas e ou reduzidas pela máquina copiadora.?

____

Chamamos de ***figuras semelhantes*** *aquelas que possuem todos os* ***ângulos correspondentes congruentes e lados correspondentes proporcionais.***

OBS. - ***Ângulos homólogos*** são ângulos cujos vértices se correspondem.

- *Lados homólogos* são lados cujas extremidades são vértices que se correspondem.

- *Razão de semelhança* é a razão entre a medida dos lados homólogos de dois polígonos semelhantes.

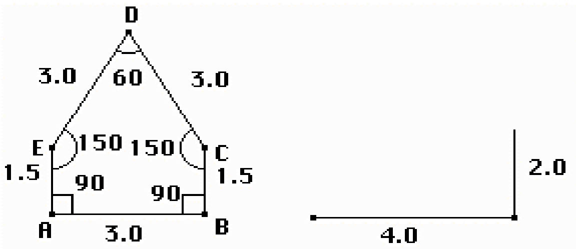
- Ângulos correspondentes - ____

- Lados correspondentes - ____

Diante disso podemos afirmar que os quadriláteros ***ABCD*** e ___________ são semelhantes. Quando ***EF*** é o dobro de ***AB,*** a razão de semelhança entre os quadriláteros ___________e ***ABCD*** é _____; e quando ***EF*** é o triplo de ***AB,*** a razão de semelhança entre os quadriláteros ___________e ***ABCD*** é ____.

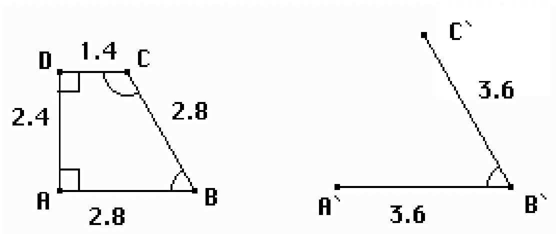
Atividade 5 - Cabri – S3

Abra o arquivo **A: S3** e você verá representado na tela a figura ***ABCDE*** e o início de uma outra. Comparando as duas, tente terminar a construção da segunda figura para que ela seja semelhante à primeira.



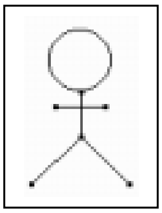
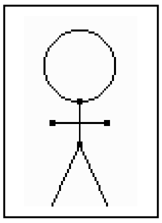
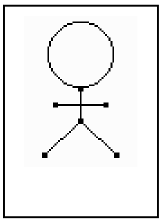
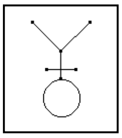
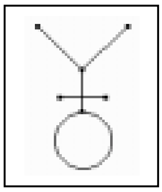
Atividade 6 – Cabri – S2

Abra o arquivo **A: S2** e você verá representada na tela a figura ***ABCD*** e o início de uma outra. Comparando as duas, tente terminar a construção da segunda figura para que ela seja semelhante à primeira.



Continuação das atividades para serem realizadas em casa

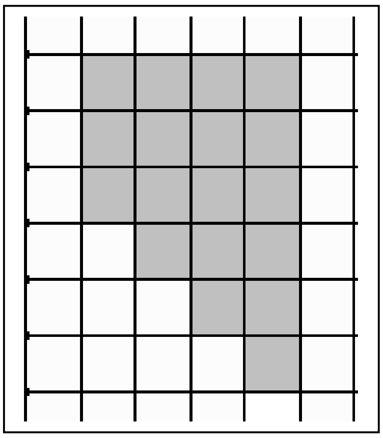
3) Quais das seguintes fotografias são semelhantes à figura do item **a**? Por quê?

- Explique em que se diferenciam as figuras semelhantes das que são só parecidas.
- a)  b)  c)  d)  e) 

4)

Amplie a figura ao lado, dobrando suas medidas, e reduza esta figura de forma que suas medidas fiquem pela metade.
Responda:

- Qual a razão de semelhança?
- Qual o perímetro das figuras? Quanto aumentou o perímetro?
- Qual a área? Quanto aumentou a área?



5) Observe os triângulos retângulos anexos. Todos são parecidos? Parecido é o mesmo que semelhante?

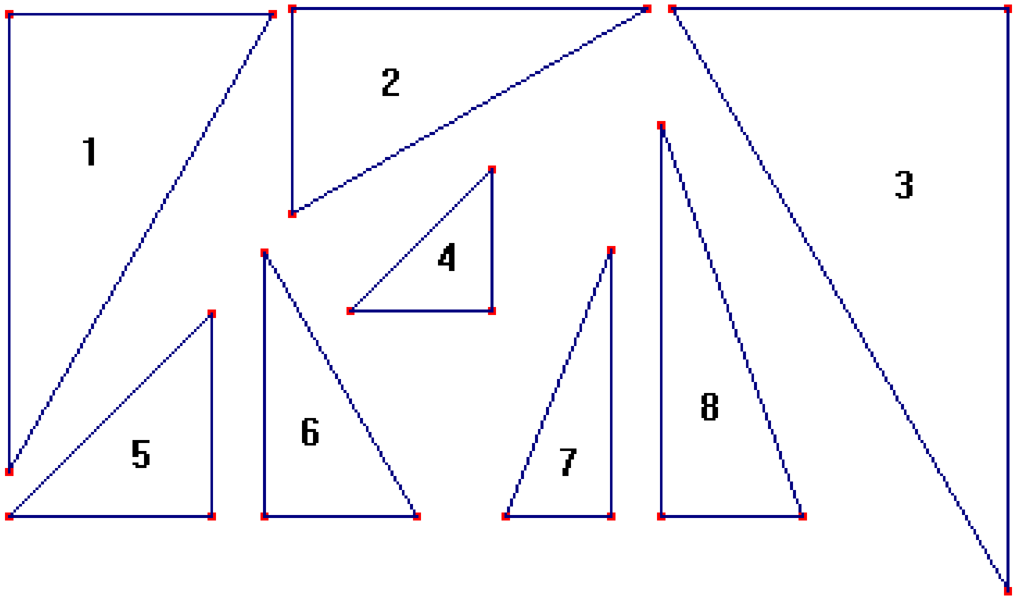
- Meça seus ângulos. O que observou?
- Meça seus lados. Complete a tabela seguinte.

Triângulos	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Cateto >								
Cateto <								
Razão: $\frac{cat >}{cat <}$								
$\angle$ agudo >								
$\angle$ agudo <								

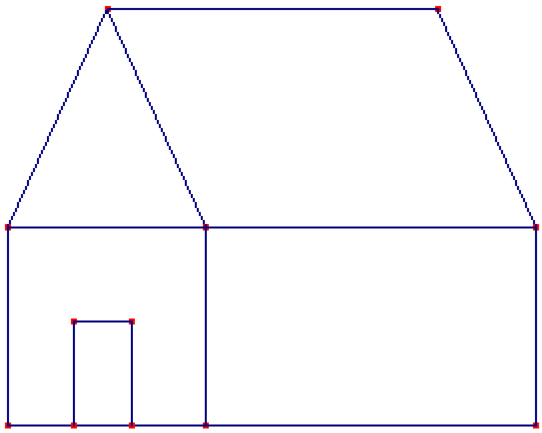
- Agrupe os triângulos que acredita serem semelhantes.
- Coloque-os sobrepostos no triângulo maior de forma a coincidir o ângulo reto.
- Escreva o que você observa: ____

Anexo – atividade 5 – Parte A

Triângulos



Sugestão de uma outra figura para a atividade 1 – parte A – (para casa)



ANEXO 3
Atividades visando a formação do conceito do Teorema de Thales

Seqüência Didática - Parte B - (3º encontro no laboratório)

Atividade 1 - adaptada (livro Cabri p. 114 e 115)

Construir um triângulo qualquer ***RTU***, em seguida construir o ponto **S** sobre o segmento ***RU***. A paralela à ***UT,*** passando por **S**, corta a reta ***RT*** em **K**. Crie e meça os segmentos: ***RS***, ***RU***, ***RK***, ***RT***,***SK*** *e* ***UT.***

Desloque os pontos e verifique se a figura que você construiu permanece com as características dadas no enunciado. Em caso afirmativo, chame o professor; em caso negativo, refaça.

Anote as medidas: ***RU***= ______, ***RT***= ______, *UT*= ________

Não desloque mais **R**, **U** e **T**.

Escolhendo várias posições de **S** sobre ***RU,*** preencha a tabela.

Posição de S	1	2	3	4	5		1	2	3	4	5
medida de *RS*						*RS/RU*					
medida de *RK*						*RK/RT*					
medida de *SK*						*SK/ UT*					

Exploração:

Ao traçar a paralela, quantos e quais triângulos você formou? _______________

Se o ponto **S** estiver no meio de ***UR***, qual é o valor do quociente ***RS/RU*** ?

____

Em cada posição, as razões entre si têm o mesmo valor?

____

Esses triângulos são semelhantes? Justifique. ____________________________

____

____

Analisando a tabela que você construiu, pesquise quais proporções podemos obter com as diferentes medidas. ____

____

____

Após observar esta atividade, tente enunciar alguma relação entre a paralela a um dos lados do triângulo e os outros lados ___________________________________

____

____

____

____

A- Salvar – A: B1

Atividade 2 -

Traçar 2 retas ***AC*** e ***AB*** concorrentes em **A**. Criar o segmento ***BC*** . Construir um ponto **D** sobre ***AB*** e a Paralela a ***BC*** por **D**. Nomear o ponto de intersecção desta reta com ***AC*** de **E**. Deslocando o ponto **D,** representar as possíveis configurações na folha de papel sulfite anexa. A seguir, chamar o professor.

Criar os segmentos ***AD, AE***, ***DE***, ***AB***, ***AC***, ***BC*** e, para cada configuração, marcar suas medidas.

Para cada configuração, os triângulos formados ***ADE*** e ***ABC*** são semelhantes?

____

____

Verificar em cada configuração quais são os lados correspondentes e completa a tabela de forma que os lados correspondentes fiquem associados nas colunas. A seguir, calcula a razão entre a medida dos segmentos correspondentes.

lados do triâng. *ABC*	*AB*=	*AC*=	*BC*=	lados do triâng. *ABC*	*AB*=	*AC*=	*BC*=
lados do triâng. *ADE*				lados do triâng. *ADE*			
razão				razão			
lados do triâng. *ABC*	*AB*=	*AC*=	*BC*=	lados do triâng. *ABC*	*AB*=	*AC*=	*BC*=
lados do triâng. *ADE*				lados do triâng. *ADE*			
razão				razão			

Tentar representar para cada uma das configurações todas as proporções possíveis com esses segmentos. Verificar se as proporções são válidas para qualquer uma das configurações.

Conclusão: ____

____

____

Trocar idéia com seu parceiro e tentar escrever uma relação ou conclusão desta atividade. ____

____

____

____

____

____

Salvar – A:B2

Atividade 3-

Observação: Projeção Paralela-

Dado um ponto **P** e uma reta **r**, chamamos de projeção de **P** sobre **r**, segundo uma direção **d**, o ponto (**P'**) de intersecção da reta paralela a **d** passando por **P** com a reta **r**. Veja figura **1** abaixo:

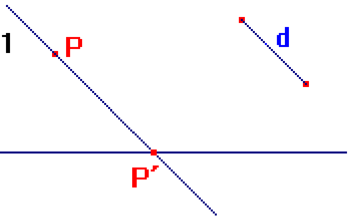


Fig. 1

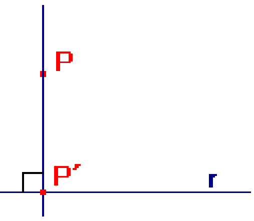


Fig. 2

Projeção Ortogonal:

Dado um ponto **P** e uma reta **r**, chamamos de projeção ortogonal de **P** sobre **r** o ponto (**P'**) de intersecção da reta perpendicular a **r** passando por **P**. Veja a figura **2** acima.

Traçar duas retas concorrentes **r** e **s** e uma reta **d** não paralela a **r** e **s** . Construir sobre **r** os pontos **A** e **B** e criar o segmento ***AB***. Em seguida, determinar os pontos **C** e **D** projeção dos pontos **A** e **B** sobre a reta **s**, segundo a direção **d**. O segmento ***CD*** é a projeção do segmento ***AB*** sobre a reta **s**. Construir o ponto **M** médio de ***AB*** e determinar sua projeção **M´.**

Responda: Em que posição; com relação ao segmento ***CD*** vocês acham que está a projeção do ponto médio de ***AB*** sobre **s**? ____

Verificar sua hipótese medindo o segmento ***CM´*** e ***M´D***, a seguir deslocar as retas e verificar se esta hipótese ainda é válida.

Conclusão: ____

____

____

Marque um ponto qualquer **P** sobre **r** e determine a projeção **P´** de **P** sobre **s** segundo a direção **d**. Verifique, em várias posições, se a razão entre os segmentos ***AP*** e sua projeção ***CP`*** se mantém constante. Fixe uma posição, meça e anote as medidas dos segmentos : ***AB*= ____, *AP*=____, *PB*=____, *CD*=_____, *CP`*=____, *PD*=_____.** A seguir, escreva todas as razões e as proporções que você conseguir formar com esses segmentos. ____

____

____

Salvar – A:B3

Nas atividades **1**, **2** e **3** – Parte **B** – podemos perceber algumas relações entre retas paralelas e segmentos proporcionais. Essas relações, durante muito tempo, foram denominadas Teorema dos Segmentos Proporcionais e hoje as conhecemos por "**Teorema de Thales".**

"O que vem a ser um teorema" ?

Teorema : "*proposição que precisa ser demonstrada para se tornar evidente*"

(Dicionário Prático Ilustrado, publicado sob a direção de Jaime de Séguier, edição actualizada e aumentada por José Lello e Edgar Lello- LELLO & IRMÃO- Editores – 1972).

Teorema: "*relação verdadeira numa teoria determinada*" (Dicionário da Matemática Moderna- CHAMBADAL, Lucien- tradução de ANDRADE, Ione- ED. Nacional, 1978)

A princípio vamos considerar o teorema como uma relação verdadeira e refletir sobre seus enunciados e, mais para frente, veremos alguma de suas demonstrações.

Selecionamos abaixo alguns enunciados relativos ao teorema de Thales. Leia-os com atenção e tente esboçar uma configuração que represente estes enunciados e suas respectivas proporções.

a) Nos elementos de Euclides (proposição **2** do livro ***VI***), temos:
"*Se traçarmos uma paralela a um dos lados de um triângulo, esta reta cortará proporcionalmente os lados desse triângulo, e, se os lados de um triângulo são cortados proporcionalmente, a reta que une as secções será paralela ao outro lado do triângulo*".

b) " *Se duas retas são transversais a um feixe de paralelas, então a razão entre dois segmentos quaisquer de uma delas é igual à razão entre os segmentos correspondentes da outra*".

c) "*Se retas paralelas determinam sobre duas transversais segmentos correspondentes, então as razões entre esses segmentos correspondentes formam uma proporção*".

Atualmente não se tem documentos que comprovem a autoria deste teorema por Thales. Apenas conjecturas baseadas em alguns relatos contidos no sumário Eudemiano de Proclus e/ou citados por Diocenes Laertus e/ou Plutarco relativos à medida da altura da pirâmide.

Segundo a lenda, as histórias do método de Thales medir as alturas das pirâmides variam. A versão mais simples e a de Hieronymus, um aluno de Aristóteles, citado por Diocenes Laertius.

Diógenes Laércio: "*Jerónimo diz que Thales mediu as pirâmides pela sombra, depois de observar o tempo que a nossa própria sombra demora a ficar igual à nossa altura." Vida, Doutrina e Opiniões dos Filósofos Ilustres; Tales, I, 27.* (Serres, M, 1997, p. 167)

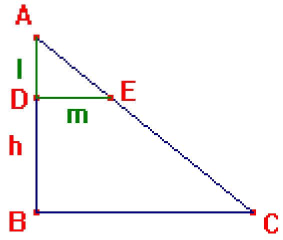
Plutarco: "*...gostou da tua maneira de medir a pirâmide limitando-te a colocar o bastão no limite da sombra lançada pela pirâmide, gerando o raio de sol tangente dois triângulos, demonstraste que a relação entre a primeira sombra e a segunda era a mesma que entre a pirâmide e o bastão. Mas também te acusaram de não gostares de reis..." Sept. Sap. Conv. , 147A.* . (Serres, M, 1997, p. 167)

Nesses dois textos vimos que Jerônimo relata um caso especial com triângulo isósceles e Plutarco, o caso geral; porém, em ambos podemos perceber a origem do teorema de Thales e uma de suas aplicações. Esse método implica a teoria geral dos triângulos semelhantes ou proporções.

Thales deve ter observado que, na ocasião, quando a sombra de um objeto particular é igual à sua altura, a mesma relação é válida para todos os outros objetos que projetam uma sombra. Isso provavelmente ele deduziu depois de fazer medidas em um número considerável de casos.

De Diógenes ou de Plutarco, os esquemas apresentam coisas que mudam e outras que permanecem. Imóveis e invariáveis seriam as pirâmides e, pelo contrário, variáveis, são o movimento aparente do sol, o comprimento e a posição da sombra.

Conjectura-se também o método que Thales utilizou para determinar a distância da praia ao navio. A suposição mais comum é aquela que Thales, observando o navio do topo de uma torre, na praia, usou a equivalência prática da proporcionalidade dos lados de dois triângulos retângulos semelhantes, um pequeno e um grande. Supondo que a torre está no ponto **B** e o navio no ponto **C**, bastava um homem ficar de pé no topo da torre **D**, ter um instrumento com 2 pernas que formassem um ângulo reto, colocá-lo com uma perna $\overline{DA}$ vertical e em linha reta com **B**, e a outra perna $\overline{DE}$ na direção do navio, pegar qualquer ponto **A** na distância $\overline{DA}$ e depois marcar em $\overline{DE}$ o ponto **E**, onde a linha de visão de **A** a **C** corta a perna $\overline{DE}$. Depois $\overline{DA}$ (= l, digo) e $\overline{DE}$ (= m, digo) pode ser realmente medida, como também a altura $\overline{BD}$ (= h, digo) de **D** ao pé da torre, e pelos triângulos similares".



$$BC = (h + l).\frac{m}{l}$$

Observação:

Segundo Pesquisa realizada por Henry Plane, foi apenas no final do século XIX, na França, que surgiu o nome de Thales na obra os "*Elementos de Geometria*" de Rouche et Comberousse (reedição de 1883)

No livro **III**: Figuras semelhantes, lê-se: "No triângulo, a igualdade dos ângulos acarreta a proporcionalidade dos lados. Esta propriedade, da qual a descoberta é dada a Thales (639-548), não sobrevive para os polígonos quaisquer".

Atividade 4 -

Construir um pentágono ***ABCDE*** e um ponto **O** no interior da figura. Traçar os segmentos: ***AO***, ***OE***, ***OB***, ***OC***, ***OD***. Determinar os pontos ***A´,B´, C´, D´, E´*** tal que*:* ***AO´= 1/2OA; OB´= 1/2OB; OC´= 1/2OC........,*** *a seguir, traçar os segmentos* ***A´B´, B´C´, C´D´, D´E´*** *e* ***E´A´.***

Pesquisar:

a) Quais retas ou segmentos são paralelos nesta figura? Tente justificar.____

____

b) Provar utilizando as propriedades que você conhece, que ***OÂ´B´*** = ***OÂB***______

____

____

c) Comparar os ângulos do pentágono ***ABCDE e A´B´C´D´E´***.________________

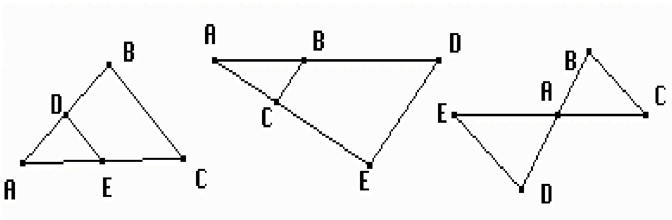
____

O pentágono ***A´B´C´D´E´*** é um(a) _______do pentágono ***ABCDE*** *na escala* ___

O pentágono ***ABCDE*** é um(a) _______do pentágono ***A´B´C´D´E´*** *na escala* ___

Observação: Podemos perceber nesta atividade o recíproco do teorema de Thales, veja:

Para cada uma das configurações abaixo podemos afirmar que:



Se $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC}{AE}$ **então** $BC \mathbin{//} DE$

Atividade 5 –

Verifique experimentalmente usando Cabri se a afirmação abaixo não é verdadeira para algum triângulo.

A ***"bissetriz de um ângulo interno de um triângulo divide o lado oposto em segmentos proporcionais aos lados adjacentes"***

Esboço *proporção*

Tente justificar essa afirmação utilizando o teorema de Thales. Trace uma paralela a bissetriz passando por um de seus vértices e determine o ponto de intersecção da paralela com a reta formada pelos outros vértices.

Atividade 6 –

Construir um trapézio ***ABCD***. Os lados não paralelos do trapézio se interceptam em **O**. As diagonais se interceptam em **I**. A reta ***OI*** corta os lados paralelos do trapézio em **M** e **N**.

Qual é a posição de **M** e de **N** sobre os lados?_____________________________

____

Justifique sua afirmação. ____

____

____

____

Aplicações do teorema de Thales

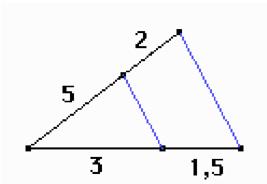
1) Dois triângulos ***ABC*** e ***PQR*** são semelhantes. Os lados homólogos ***AC*** e ***PQ*** medem, respectivamente, 5cm e 8cm. Qual é o perímetro do triângulo ***ABC***, sabendo que o do triângulo ***PQR*** é 22cm? (Bezerra, M. J. – pág. 142)

2) As bases de um trapézio retângulo medem 16cm e 12cm e a altura, 8cm. Calcular a altura do menor triângulo obtido pelo prolongamento dos lados não paralelos do trapézio. (Bezerra, M. J.- pág. 144)

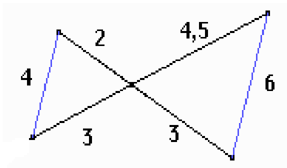
3) Um feixe de quatro paralelas determina, sobre uma transversal **t**, segmentos de 2, 3, 4 centímetros, e sobre uma transversal **t´,** outros segmentos cuja soma das medidas é 18cm. Calcule os três segmentos determinados sobre **t´.** (Bezerra, M. J. – pág. 150)

4) Verifique em quais configurações abaixo os segmentos azuis são paralelos.

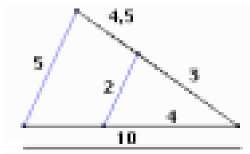
a)



b)



c)



5) Numa certa hora do dia um senhor de 1,6m observou que sua sombra era de 26cm e que a sombra do prédio onde mora era de 2,5m. Determine a altura desse prédio?

6) Criar um segmento ***AB*** e dividir em 6 partes iguais.

7) Criar um segmento ***BC*** e dividir em partes proporcionais a 2 e 3.

8) Criar um segmento ***AB*** e determinar os segmentos:

a) ***AC,*** sendo que ***AC = 2/3 AB***,

b) ***AD****, sendo que* ***AD= 5/3AB***

9) Determinar a Quarta proporcional entre os segmentos **a= 2**, **b= 3** e **c=4**

10) Determinar a terceira proporcional entre esses segmentos: **a= 3** e **b=4.**

ANEXO 4
Ficha de observação das atividades propostas no laboratório

FICHA DE OBSERVAÇÃO
Seqüência Didática - Parte B - Atividade 1

Componentes dos grupos por computador

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

1) Entendeu o enunciado inicial? (**S** – sim; **N** – não; **CP** – chamou o professor)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

2) Fez esboço do enunciado antes de construir? Qual configuração? (**S** – sim; **N** – não)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

3) Dificuldade em manipular com o software Cabri-géomètre? Qual? (**S** – sim; **N** – não)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

4) Dificuldade no cálculo da razão e/ou interpretação da razão:
(**SC**; **SI**; **NC**; **NI** → S sim, N, não, C cálculo, I interpretação)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

5) Para verificar se os triângulos são semelhantes, marcaram a medida dos ângulos?
(**S** – sim; **N** – não) O que foi feito?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

6) Dificuldade em montar as proporções?

(SN – não sabe o que é proporção; AS – não associa corretamente; N não tem dificuldade)

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**

7) Dificuldade em concluir a relação?

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**

8) Outras observações: ____

FICHA DE OBSERVAÇÃO
Seqüência Didática - Parte B - Atividade 2

Componentes dos grupos por computador

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**

1) Entendeu o enunciado inicial? (**S** – sim; **N** – não; **CP** – chamou o professor)

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**

2) Fez esboço do enunciado antes de construir? Qual configuração? (**S** – sim; **N** – não)

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**

3) Dificuldade em manipular com o software Cabri-géomètre? Qual? (**S** – sim; **N** – não)

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**

4) Dificuldade em representar as configurações: (S-sim , N- não).
Posição das paralelas: (V- vertical, H- horizontal, I- inclinada).
Transversais se interceptam: entre as paralelas - (x), acima – (Δ); abaixo – (∇)

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
S-N															
H-V-I															
X-Δ-∇															

5) Para verificar se os triângulos são semelhantes, marcaram a medida dos ângulos?
(**S** – sim; **N** – não) O que foi feito?

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**

6) Dificuldade em identificar os lados correspondentes? (**S** – sim; **N** – não)

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**

7) Dificuldade em montar as proporções?

(SN – não sabe o que é proporção; SA – não associa corretamente; N não tem dificuldade)

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**

8) Dificuldade em concluir a relação? (**S** – sim; **N** – não)

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**

9) Outras observações: ____

FICHA DE OBSERVAÇÃO
Seqüência Didática - Parte B - Atividade 3

Componentes dos grupos por computador

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**

1) Entendeu o enunciado inicial? (**S** – sim; **N** – não; **CP** – chamou o professor)

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**

2) Fez esboço do enunciado antes de construir? Qual configuração? (**S** – sim; **N** – não)

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**

3) Dificuldade em manipular com o software Cabri-géomètre? Qual? (**S** – sim; **N** – não)

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**

4) Dificuldade em determinar a projeção de um ponto: (**S** – sim; **N** – não)

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**

5) Dificuldade em representar as configurações: (S-sim , N- não).
Posição das paralelas: (V- vertical, H- horizontal, I- inclinada).
Transversais se interceptam: entre as paralelas - (x), acima – (Δ); abaixo – (∇)

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
S-N															
H-V-I															
X-Δ-∇															

6) Dificuldade em concluir a relação do ponto médio com sua projeção?

(**S** – sim; **N** – não)

7) Dificuldade em escrever as razões? (S - sim , N - não).

8) Dificuldade em identificar os lados correspondentes? (**S** – sim; **N** – não)

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**

9) Dificuldade em montar as proporções?

(SN – não sabe o que é proporção; SA – não associa corretamente; N não tem dificuldade)

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**

10) Dificuldade em concluir a relação? (S - sim , N - não).

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**

11) Outras observações: ____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

FICHA DE OBSERVAÇÃO
Seqüência Didática - Parte B - Atividade 4

Componentes dos grupos por computador

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

1) Entendeu o enunciado inicial? (**S** – sim; **N** – não; **CP** – chamou o professor)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

2) Dificuldade em manipular com o software Cabri-géomètre? Qual? (**S** – sim; **N** – não)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

3) Determinou o ponto médio para achar A`, B`, C`, D`, E`? (**S** – sim; **N** – não)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

4) Dificuldade em justificar os segmentos paralelos? (**S** – sim; **N** – não)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

5) Dificuldade em provar com as propriedades conhecidas os ângulos congruentes? (**S** – sim; **N** – não)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

6) Mediu os ângulos para verificar se são congruentes? (**S** – sim; **N** – não)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

7) Mediu os lados para verificar se os lados são proporcionais? (**S** – sim; **N** – não)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

8) Dificuldade em expressar a escala? (**S** – sim; **N** – não)

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**

9) Outras observações:____

FICHA DE OBSERVAÇÃO
Seqüência Didática - Parte B - Atividade 5

Componentes dos grupos por computador

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

1) Entendeu o enunciado inicial? (**S** – sim; **N** – não; **CP** – chamou o professor)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

2) Fez esboço do enunciado antes de construir? (S – sim, N – não)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

3) Dificuldade em manipular com o software Cabri-géomètre? Qual? (**S** – sim; **N** – não)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

4) Construiu corretamente a situação proposta? (**S** – sim; **N** – não)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

5) Determinou corretamente a proporção? (**S** – sim; **N** – não)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

6) Conseguiu construir a situação sugerida para se justificar a afirmação? (**S** – sim; **N** – não)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

7) Conseguiram justificar aplicando o teorema de Thales? (**S** – sim; **N** – não)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

8) Outras observações:

FICHA DE OBSERVAÇÃO
Seqüência Didática - Parte B - Atividade 6

Componentes dos grupos por computador

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

1) Entendeu o enunciado inicial? (**S** – sim; **N** – não; **CP** – chamou o professor)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

2) Fez esboço do enunciado antes de construir? (S – sim, N – não)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

3) Dificuldade em manipular com o software Cabri-géomètre? Qual? (**S** – sim; **N** – não)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

4) Dificuldade em construir o trapézio? (**S** – sim; **N** – não)
   Não sabe o que è Trapézio? (NS)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

5) Construiu o trapézio a partir de um triângulo? (**S** – sim; **N** – não)
   Por meio do ponto médio? (**S** – sim; **N** – não)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

6) Concluiu que **M** e **N** são ponto médio das bases ***AB*** e ***CD*** do trapézio?
   (**S** – sim; **N** – não)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

7) Mediu os segmentos para verificar se **M** e **N** são ponto médio? (**S** – sim; **N** – não)

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**

8) Conseguiu demonstrar com propriedades matemáticas a conjectura?
(**S** – sim; **N** – não)

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**

9) Outras observações:____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

ANEXO 5
Teste-diagnóstico

a) Atividades

b) Tabela das variáveis binárias

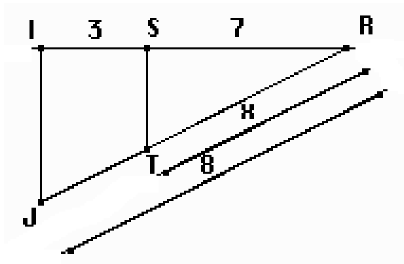
QUESTÕES – TESTE DIAGNÓSTICO e PÓS-TESTE

1) Considere, na figura ao lado, as retas ***ST*** e ***IJ*** paralelas:

a) calcular **x;**

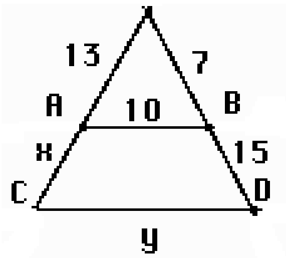
b) sendo $ST = 3{,}5\,\text{cm}$ é possível calcular IJ ?

Justifique.

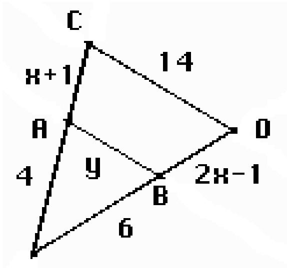


2) Sendo $\overline{AB}$ paralelo a $\overline{CD}$, determine **x** e **y** nos esquemas abaixo:

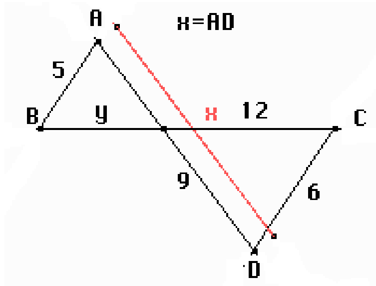
a)



b)

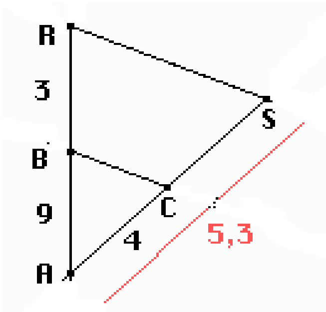


c)

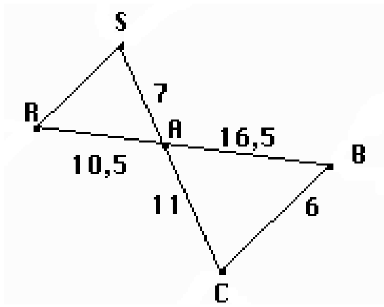


3) Nos casos seguintes as retas ***RS*** e ***BC*** são paralelas? Justifique sua resposta.

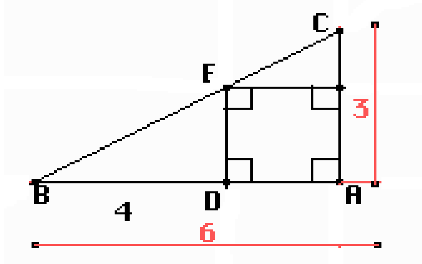
a)



b)



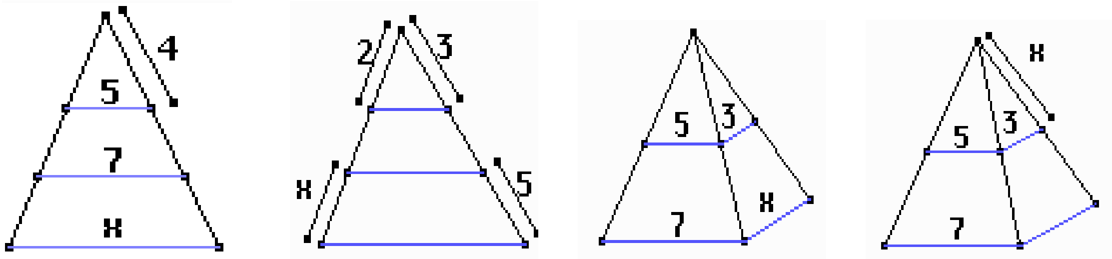
4) O quadrilátero ***ADEF*** é um quadrado? Justifique.



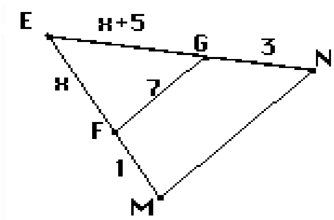
5) Traçar um paralelogramo ***EFGH***, tal que ***EF*** = 8cm, ***EH*** = 12 cm e ***FH*** = 10cm. Seja **K** o ponto do segmento $\overline{EH}$ tal que ***HK*** = 2,4 cm e **J** o ponto de intersecção de ***FH*** e da paralela a ***GH*** passando por **K**. Calcular ***HJ*** e ***JK***.

6) Pode-se calcular **x** com os dados geométricos propostos? Justifique.
(Considere as linhas azuis paralelas)

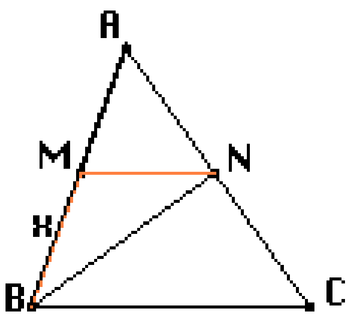
a) b) c) d)



8) A unidade é o centímetro. No desenho abaixo, ***EFG*** é um triângulo, tal que:
FG = 7cm e $\overline{EG}$ mede 5cm a mais que $\overline{EF}$, considera-se *EF*= **x**.
Quando prolonga-se $\overline{EF}$ com 1cm a mais, obtém-se **M**; quando prolonga-se *EG* = 3cm a mais, obtém-se **N** e as retas *FG* e *MN* são paralelas.
O triângulo ***EFG*** é retângulo? Justifique.



9) ***ABC*** é um triângulo tal que ***AB*** = 4 , ***AC*** = 7 e ***BC*** = 6. **M** é um ponto do segmento ***AB***, ele se projeta em **N** sobre $\overline{AC}$ paralelamente á $\overline{BC}$.
1°) Põem-se *BM* = **x**. Onde deve-se colocar **M** para que o triângulo ***BMN*** seja um triângulo isósceles em **M**?
2º) Nesse caso o que representa a reta *BN* no triângulo ***ABC***? Justifique.



ANEXO 6
Pós-teste

a) pós-teste 8ºsérie A
b) pós-teste 8ª série B

	AT1A	EM1A	ET1A	NF1A	AT1B	EM1B	ET1B	NF1B	AX2A	EX2A	NX2A	AY2A	EY2A	NY2A	AX2B	EX2B	EC2B	NX2B	AY2B	EY2B	NY2B	AX2C
AL01	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
AL02	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0
AL03	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0
AL04	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0
AL07	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0
AL08	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0
AL09	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0
AL10	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0
AL12	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1
AL13	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0
AL14	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0
AL15	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0
AL16	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0
AL17	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1
AL18	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0
AL19	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
AL20	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1
AL21	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
AL22	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0
AL24	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0
AL25	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0
AL26	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0
AL28	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0
AL29	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0
AL30	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
AL31	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0
AL32	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1
AL33	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0
AL34	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0
AL36	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
AL37	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0

Tabela 11 - Planilha de dados binários - Teste Diagnóstico - G.V. - 1998

EX2C	MX2C	NX2C	AY2C	EY2C	MY2C	NY2C	AT3A	ET3A	EQ3A	NF3A	AT3B	ET3B	EQ3B	NF3B	ATQ4	ETQ4	NFQ4	NJC4	ATQ5	MCD5	ETQ5	NFQ5
0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1
0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1
0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1
0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1
0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1

Tabela 11 - Planilha de dados binários - Teste Diagnóstico - G.V. - 1998

Pós teste - 1999- Grupo experimental - 8ª série A

	AT1A	EM1A	ET1A	NF1A	AT1B	EM1B	ET1B	NF1B	AX2A	EX2A	NX2A	AY2A	MY2A	EY2A	NY2A	AX2B	CX2B	MX2B	EX2B	NX2B	AY2B	MY2B	EY2B
AL02	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
AL03	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
AL04	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
AL05	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
AL06	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
AL07	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
AL08	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
AL10	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
AL11	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0
AL12	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
AL15	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
AL16	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
AL17	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
AL19	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
AL20	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
AL21	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
AL22	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
AL23	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1
AL24	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
AL25	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0
AL26	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
AL29	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
AL30	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
AL32	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
AL33	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1

Pós teste - 1999- Grupo experimental - 8ª série A

NY2B	AX2C	MX2C	EX2C	NX2C	AY2C	MY2C	EY2C	NY2C	AT3A	EA3A	EM3A	NF3A	AT3B	EJ3B	EM3B	ET3B	NJ3B	NF3B	ATQ4	EJQ4	ETQ4	NJQ4	NFQ4
0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0

Pós teste - 1999- Grupo experimental - 8ª série A

ATQ5	MCD5	ETQ5	NFQ5	ATQ6	EPQ6	NJQ6	ETQ6	NFQ6	ATQ7	ETQ7	NJQ7	NFQ7	ATQ8	AXQ8	CXQ8	ETQ8	NJQ8	NFQ8	ATQ9	EPQ9	ETQ9	NFQ9
1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0
1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0
0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0
0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0
1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0
0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0

Pós teste - 1999 - Grupo de referência - 8ª série B

	AT1A	EM1A	ET1A	NF1A	AT1B	EM1B	ET1B	NF1B	AX2A	EX2A	NX2A	AY2A	MY2A	EY2A	NY2A	AX2B	CX2B	MX2B	EX2B	NX2B	AY2B	MY2B	EY2B
BL01	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
BL03	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
BL04	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
BL05	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
BL06	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0
BL07	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
BL08	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
BL09	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
BL10	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1
BL11	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0
BL12	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
BL13	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
BL15	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
BL16	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0
BL17	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0
BL19	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
BL20	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
BL22	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
BL23	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
BL25	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0
BL27	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
BL29	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0
BL30	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
BL31	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0
BL32	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0
BL33	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
BL34	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1

Tabela de dados binários

Pós teste - 1999 - Grupo de referência - 8ª série B

NY2B	AX2C	MX2C	EX2C	NX2C	AY2C	MY2C	EY2C	NY2C	AT3A	EA3A	EM3A	NF3A	AT3B	EJ3B	EM3B	ET3B	NJ3B	NF3B	ATQ4	EJQ4	ETQ4	NJQ4	NFQ4
0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0

Tabela de dados binários

Pós teste - 1999 - Grupo de referência - 8ª série B

ATQ5	MCD5	ETQ5	NFQ5	ATQ6	EPQ6	NJQ6	ETQ6	NFQ6	ATQ7	ETQ7	NJQ7	NFQ7	ATQ8	AXQ8	CXQ8	ETQ8	NJQ8	NFQ8	ATQ9	EPQ9	ETQ9	NFQ9
0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0
0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0
0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1

Tabela de dados binários