

Luiz Roberto de Moura Lindegger

**Construindo os conceitos básicos da  
trigonometria no triângulo retângulo:  
uma proposta a partir da manipulação  
de modelos**

Mestrado em Educação Matemática

PUC – SP  
2000

Luiz Roberto de Moura Lindegger

**Construindo os conceitos básicos da  
trigonometria no triângulo retângulo:  
uma proposta a partir da manipulação de modelos**

**Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia  
Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial  
para a obtenção do título de MESTRE em Educação  
Matemática, sob a orientação da Profa. Doutora Sandra Maria  
Pinto Magina**

**PUC – SP  
2000**

**Ficha catalográfica elaborada pela Bib. Nadir Gouvêa Kfourri - PUCSP**

---

DM

510

Lindegger, Luiz Roberto de Moura

L

Construindo os conceitos básicos da trigonometria no triângulo retângulo: uma proposta a partir da manipulação de modelos. - São Paulo: s.n., 2000.  
204 p. ; il.

Dissertação (Mestrado) - PUCSP

Programa: Matemática

Orientador: Magina, Sandra Maria Pinto

1. Trigonometria. 2. Matemática - Estudo e ensino.

---

Palavra-Chave: Matemática - ensino e aprendizagem - Matemática -  
formação de conceitos - Trigonometria básica

## RESUMO

O objetivo deste trabalho foi investigar uma abordagem para o ensino da trigonometria no triângulo retângulo, onde se pretendeu introduzir os conceitos das razões trigonométricas seno, co-seno e tangente a partir da manipulação de modelos. Tivemos por hipótese que o desenvolvimento de uma seqüência de ensino criando situações-problema, a partir de questões simples, contextualizadas, concretas, tal ambiente servirá de facilitador para a construção e a apropriação dos conceitos da trigonometria.

Trabalhamos com duas turmas, ambas da 8ª série do Ensino Fundamental, sendo uma considerada como grupo de referência (GR) e uma outra considerada como grupo experimental (GE). No GE foi aplicada a seqüência de ensino objeto de nossa pesquisa, com pressuposto teórico construtivista, com base na psicologia cognitiva de Vygotsky e Vergnaud, e na didática francesa de Brousseau.

No GR, a abordagem da trigonometria se deu na forma por nós considerada tradicional (*definições seguidas de exercícios*). Os dois grupos foram submetidos a dois testes individuais: um antes (pré-teste) da introdução dos conceitos de razões trigonométricas e outro (pós-teste) após terem tido contato com esse conteúdo. A análise dos resultados envolveu duas etapas: a análise quantitativa e a qualitativa dos instrumentos diagnósticos.

Em síntese, quanto ao desempenho geral dos grupos nos testes, podemos dizer que o GE apresentou um desempenho satisfatório e superior ao GR. Não tivemos a pretensão de extrapolar nossos resultados para além do universo da pesquisa, uma vez que nossa amostra foi pequena. Mas, obtivemos pistas significativas sobre o processo de ensino-aprendizagem do conteúdo. A mais valiosa delas foi a de que o processo de construção dos conceitos básicos da trigonometria, a exemplo da história, ganha força quando inicia-se a partir da resolução de problemas concretos, advindos da realidade, dirigindo-se para os problemas formais, quando os conceitos ganham significado mais abstratos e abrangentes.

## ABSTRACT

This work aimed at investigating an approach to the teaching of trigonometry in the right triangle, where it was intended to present the concepts underlying the trigonometric ratios sine, cosine and tangent from the manipulation of models. We had, as the research hypothesis the development of a teaching sequence involving problem-situations, from simple, contextualized, concrete questions. Such environment will act as a facilitator for both construction and acquisition of the concepts of trigonometry.

We have worked with two groups, both from the 8<sup>th</sup> grade within the Fundamental Education, one considered the reference group (RG) and the other the experimental one (EG). At EG, the teaching sequence which is the object of the present research was applied, with a constructivist theoretical framework based on the cognitive psychology by Vygotsky and Vergnaud, and also on the French didactics of Brousseau.

At RG, the approach to trigonometry was the so-called traditional one (the presentation of definitions followed by exercises). Both groups have undergone two individual tests: a pre-test before the introduction of the concepts of trigonometrical reasons and another, a post-test after they had been presented this content. The analysis of the results involved two steps: quantitative and qualitative analysis of the diagnostical instruments.

To sum up, as for general performance of both groups in the tests, we can say that EG has presented a satisfactory and superior performance in comparison to RG. As we had a limited sample we do not mean to replicate our results beyond the universe of the present research. Nevertheless, we have obtained significant clues on the teaching-learning process of the content. The most valuable experience involved the realization that the process of construction of the trigonometrical basic concepts is enhanced when it begins from the solution of concrete problems engendered in reality, driven to formal problems, when the concepts gain broader and more abstract meanings.

## AGRADECIMENTOS

Muitas pessoas contribuíram de um certo modo para que fosse possível a realização dessa etapa da minha vida. Ao citar de modo especial algumas delas, não significa falta de reconhecimento da colaboração das demais. Registro aqui meus agradecimentos àquelas pessoas ou instituições que, no meu entender, participaram mais diretamente dessa minha formação:

À PUC-SP, em especial aos professores do Programa, cuja obstinação e ideal mantêm vivo o debate e se constitui referência em Educação Matemática.

À Professora Doutora Sandra M. P. Magina, pela acolhida como orientadora, feita com muita participação, empenho e amizade. Sua atuação foi fundamental para a minha formação.

Às Professoras Doutoradas Anna Franchi e Veronica G. G. Ferreira, integrantes da banca examinadora, pela aceitação, sugestões e comentários que contribuíram para o enriquecimento deste trabalho.

À CAPES, pela bolsa de estudos que permitiu uma maior dedicação ao Programa de Pós-Graduação.

À Professora Mestre Nanci de Oliveira, pelo incentivo, responsável pelo meu ingresso no Programa.

Ao secretário Francisco ("François"), que me recebeu, colaborou e deu todo apoio necessário.

Ao meu colega Professor Mestre Celso Ribeiro Campos, companheiro de curso e das viagens. Sem a sua participação e amizade, as coisas ficariam muito mais difíceis.

À UNITAU, pelo apoio que permitiu uma maior dedicação aos estudos.

À administração, professores e alunos do Colégio da UNITAU, pela aceitação e participação no trabalho de pesquisa.

À Professora Célia , diretora da EE “Amador Bueno da Veiga”, pelo apoio.

À minha família, pela compreensão quanto às minhas ausências e preocupações. De modo especial à minha esposa Neusa pelo apoio e incentivo nos momentos mais difíceis.

“Ainda que eu tivesse o dom da profecia, o conhecimento de todos os mistérios e de toda a ciência; ainda que eu tivesse toda a fé, a ponto de transportar montanhas, se não tivesse o amor, eu não seria nada” ( Trecho de uma carta de São Paulo aos coríntios).

Espero ser um instrumento a serviço do próximo.

# ÍNDICE

## Capítulo I : INTRODUÇÃO

1.1. Problemática e Objetivo.....	2
1.2. Descrição da Dissertação.....	8

## Capítulo II : DISCUSSÃO TEÓRICA

Introdução.....	11
2.1. Empréstimos de Idéias Teóricas .....	12
2.1.1. Vygotsky.....	14
2.1.2. Vergnaud.....	21
2.1.3. Brousseau .....	25
2.2 Trabalhos de Pesquisas Correlatas .....	30

## Capítulo III : A TRIGONOMETRIA DO PONTO DE VISTA HISTÓRICO E ESCOLAR

Introdução.....	39
3.1. Trigonometria Ontem e Hoje.....	40
3.1.1. Origem e Desenvolvimento Histórico da Trigonometria	40
3.1.2. A Trigonometria hoje .....	59
3.2. A Trigonometria na Escola.....	64
3.2.1. Análise da Proposta Curricular Vigente.....	64
3.2.2. Análise de Livros Didáticos .....	71
3.2.3. Comparação entre a Proposta e Livros .....	77

## Capítulo IV : METODOLOGIA

Introdução.....	81
4.1. Propostas e Objetivos .....	81
4.2. Desenho Geral do Experimento .....	82
4.2.1. Instrumentos de Avaliação Diagnóstica.....	85
4.2.1.1. Apresentação e Descrição do Pré-teste.....	85
4.2.1.2. Apresentação e Descrição do Pós-teste .....	94
4.2.2. Apresentação e Descrição da Sequência de Ensino...	105



## **Capítulo V : ANÁLISE DOS RESULTADOS**

Introdução.....	155
5.1. Análise Quantitativa dos Instrumentos Diagnósticos (Pré e Pós-teste).....	160
5.1.1. Análise Geral do Desempenho dos Grupos.....	160
5.1.2. Análise do Desempenho dos Grupos por Tipo de Questão no Pós-teste.....	162
5.1.3. Análise do Desempenho por Sujeito .....	168
5.2. Análise Qualitativa dos Procedimentos dos Sujeitos no Pós-teste.....	172
5.2.1. Análise dos Procedimentos por Sujeito.....	172
5.2.2. Análise do Desempenho dos Grupos na Questão Descritiva .....	182

## **Capítulo VI : CONCLUSÃO**

Introdução.....	191
6.1. Considerações Relevantes .....	191
6.2. Considerações Pessoais .....	194
6.3. Considerações Futuras.....	196
6.4. Nota Final .....	197

## **Capítulo VII : REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

# **CAPÍTULO I: INTRODUÇÃO**

# INTRODUÇÃO

## 1.1. Problemática e Objetivo

O objetivo deste trabalho é investigar uma abordagem para o ensino da trigonometria no triângulo retângulo, em que se pretende introduzir os conceitos das razões trigonométricas - seno, co-seno e tangente - de maneira significativa.

Dentro dessa perspectiva, eis a questão: como abordar o conteúdo relativo à trigonometria do triângulo retângulo (seno, co-seno e tangente) de forma a possibilitar que o aluno compreenda seus conceitos? E, conseqüentemente, investigar quais os fatores que interferem na aquisição desses conceitos. A princípio, temos em mente os seguintes fatores: participação do aluno (situação adidática, segundo Brousseau), trabalho em grupo (dentro da Zona de Desenvolvimento Proximal, como descrita por Vygotsky), com os conceitos trabalhados a partir de situações-problema (como Vergnaud propõe), com ênfase na contextualização<sup>1</sup> e, sempre que possível, buscando representações concretas (maquete, triângulos em madeira e dispositivos), que atuem como mediadores entre as situações práticas da vida e sua representação matemática. Essas representações chamaremos de *modelo*.

---

<sup>1</sup> Por contextualização estamos considerando aqueles problemas que vêm do mundo prático. Então, por exemplo, medir a altura de um muro é contextualizado, no sentido de que muro é algo da vida prática, da vida real do aluno. Já ao contrário, quando nos referimos à descontextualização, estamos falando em tirar do contexto do mundo prático. Assim, por exemplo, ao invés de determinarmos a medida da altura de um muro, determinarmos a medida  $x$  de um segmento ou dado o  $\sin \alpha$ , determinarmos  $\cos \alpha$  e  $\operatorname{tg} \alpha$ , é para nós um problema descontextualizado. Entendemos que existe aí um contexto, qual seja, o contexto matemático que tem sua própria linguagem e maneira de se expressar. Assim sendo, a partir de então, toda vez que nos referirmos a descontextualização entenda-se por isso, algo que está fora do contexto do mundo prático, isto é, a situação estará sendo apresentada dentro de um contexto matemático, formal.

Quanto a essa idéia de modelo empregada neste trabalho, gostaríamos, inicialmente, citar as palavras de Marineusa Gazzetta:

*“Atualmente o termo modelo ou modelo matemático subentende uma diversidade de definições. É quase inevitável que muitos usuários do termo modelo o estejam imbuindo com significados e conotações que são estranhos às outras pessoas”* (1989,p.16).

Em nosso trabalho entendemos por modelo a representação da realidade ou de um objeto matemático ideal, através de maquete (três dimensões), triângulos feitos em madeira (três dimensões), figuras (duas dimensões), construções geométricas (duas dimensões) e equipamentos criados para auxiliar a compreensão dos conceitos envolvidos. Acreditamos que a manipulação desses modelos, com as construções e medições, estimulem a participação do aluno, a experimentação, possibilitando melhores condições para a aquisição do conhecimento, do que uma aula exclusivamente expositiva.

Portanto, modelo é empregado aqui com ênfase no aspecto material, de concretização ou representação de uma imagem, do que no sentido de modelo matemático que entendemos conforme definido por Biembengut:

*“... um conjunto de símbolos e relações matemáticas que procura traduzir, de alguma forma, um fenômeno em questão ou problema de situação real”* (2000,p.12).

Assim sendo, investigaremos se esses fatores – participação ativa do aluno, trabalho em grupo, partir de situações-problema, contextualizados e manipulação de modelos - seguem a direção do particular para o geral (formalização) e como isso acontece.

Entendemos que o estudo da Trigonometria, de maneira geral, apoia-se nos conceitos básicos das razões trigonométricas do triângulo retângulo. Em outras palavras, acreditamos que uma vez formados esses conceitos, o desenvolvimento da trigonometria generalizada ocorrerá com maior facilidade e compreensão.

Baseando-se em observações empíricas, sejam elas advindas de nossa prática diária como professor em sala de aula ou de discussões com colegas, percebemos que os alunos se sentem “incomodados” ao tratar de questões que envolvam trigonometria, o que, normalmente, acarreta uma rejeição ao conteúdo. Acreditamos que essa rejeição esteja diretamente relacionada à falta de compreensão dos conceitos trigonométricos básicos. De fato, ainda baseados em evidências empíricas, podemos apontar alguns procedimentos dos alunos, quanto à representação matemática, em que constatamos erros de notação e de conceito, mesmo entre alunos em fase de conclusão do ensino médio ou já no curso superior.

Dentre esses procedimentos, encontramos, por exemplo:

a) **cos.x**

Provavelmente, ao escrever **cos.x**, acreditamos que o aluno não tenha entendido o significado de “co-seno de um ângulo  $x$ ” e, conseqüentemente, sua representação simbólica  $\cos x$ . Parece-nos que o aluno faz uma associação indevida entre  $\cos x$  a algo como, por exemplo,  $5x$ . Assim, do mesmo modo que  $5x$  significa  $5 \cdot x$ , então  $\cos x$  deve ser o produto **cos.x**. Em nosso entender, este erro sinaliza que as razões trigonométricas se apresentam desprovidas de significado.

Um caso análogo a esse ocorre, por exemplo, no estudo de derivada nos cursos superiores, em que constatamos com frequência, erros do tipo: se  $y = \text{sen}3x^2$ , então  $y' = \text{cos } 3x^2 \cdot 6x$ , portanto  **$y' = \text{cos } 18x^3$** , sendo que o correto seria  $y' = 6x \cdot \text{cos } 3x^2$ . Provavelmente este seja mais um caso daqueles em que o aluno esteja entendendo  $y' = \text{cos}3x^2 \cdot 6x$  como o produto  **$y' = \text{cos} \cdot 3x^2 \cdot 6x$** .

b)  **$\text{cos } x = 3,8$**

Em algumas aplicações, mesmo em Matemática, ou outra disciplina, como a Física, o aluno obtém e leva em consideração valores como  **$\text{cos } x = 3,8$** , quando sabemos que o co-seno de um ângulo é um valor restrito ao intervalo que varia de  $-1$  a  $+1$ . Portanto, não temos  $\text{cos } x > 1$ .

c)  **$\text{sen}(30^\circ + 45^\circ) = \text{sen } 30^\circ + \text{sen } 45^\circ$**

Nesse caso, o aluno não se deu conta que  $\text{sen } 75^\circ$  tem valor diferente da soma  $\text{sen } 30^\circ + \text{sen } 45^\circ$ , pelo próprio conceito de razão trigonométrica e ainda porque  $\text{sen } 30^\circ = 0,50$  e  $\text{sen } 45^\circ = 0,71$ , resultando uma soma  $1,21$ . Além de  $\text{sen } 75^\circ = 1,21$  ser incorreto, pois  $\text{sen } 75^\circ = 0,96$ , também o é pelo fato de que o seno de um ângulo é um valor restrito ao intervalo  $-1$  a  $+1$ .

Em nossa interpretação, este procedimento é muito semelhante ao citado no exemplo **a** acima. Se  $\text{sen}(30^\circ + 45^\circ)$  for entendido como  **$\text{sen} \cdot (30^\circ + 45^\circ)$** , então é possível que o aluno esteja aplicando a propriedade distributiva. Ou ainda, se considerarmos que aqui esteja havendo um envolvimento com o conceito de função, o aluno está

atribuindo à função seno uma propriedade que ela não possui:  $\sin(a + b) = \sin a + \sin b$ . Ou mesmo ignorando a periodicidade própria das funções trigonométricas.

d)  **$\text{tg } x = 1 \Rightarrow \text{tg } x = 45^\circ$**

Outro erro muito freqüente, que ocorre quando ao se determinar o valor de  $x$ , sabendo-se que  $\text{tg } x = 1$ , escreve-se  **$\text{tg } x = 1 \Rightarrow \text{tg } x = 45^\circ$** , em vez de  $\text{tg } x = 1 \Rightarrow x = 45^\circ$ . Acreditamos que possivelmente seja um erro conceitual, pois mesmo considerando que o aluno esteja se referindo ao ângulo de  $45^\circ$ , qual o significado para ele de “ $\text{tg } x$ ”?

e)  **$\text{tg } x = \text{sen}/\text{cos } x$**

Em vez de  $\text{tg } x = \text{sen } x / \text{cos } x$ , encontramos casos em que o aluno escreve  **$\text{tg } x = \text{sen}/\text{cos } x$** , ou ainda,  **$\text{tg} = \text{sen} / \text{cos}$** . Esta simplificação de notação, tratando as razões trigonométricas por “ $\text{tg}$ ”, “ $\text{sen}$ ” e “ $\text{cos}$ ” será somente um problema de notação ou está associada à falta de significado a respeito das razões trigonométricas ?

f)  **$\text{tg } x/\text{cotg } x = 1/\text{co}$**

Na Universidade de Taubaté ( UNITAU ), um professor passou a registrar os absurdos matemáticos que alguns alunos cometiam. Dentre eles, encontramos um registro bastante pitoresco, que foi a simplificação  **$\text{tg } x/\text{cotg } x = 1/\text{co}$** . É evidente que tal caso já é uma caricatura, podendo ser entendida como piada, mas com a garantia de que tenha de fato ocorrido, provavelmente seja mais um procedimento semelhante ao do exemplo **a**.

Os exemplos acima são alguns dos sinais que observamos no dia-a-dia de nossa prática como professor, por isso não há como levantar o porquê.

Mas certamente manifestam uma falta de compreensão dos conceitos trigonométricos e que inviabilizam o desenvolvimento do aluno nesta área.

Além disso, os alunos têm dificuldade quanto à resolução de problemas e em associar as razões trigonométricas com fatos da realidade, prevalecendo o formalismo vazio e, provavelmente, operações mecanizadas desprovidas de significado.

Temos consciência de que a observação de tais comportamentos acima são observações empíricas, portanto sem nenhum cunho de cientificidade. Porém, foram essas observações, enquanto professor, que nos levaram a ter interesse em pesquisar sobre o assunto, para podermos entender justamente os porquês que, na sala de aula, não tivemos condições de obter.

É nossa hipótese que se iniciarmos nossa seqüência didática criando situações de ensino a partir de questões simples, contextualizadas, concretas, tal ambiente servirá de facilitador para a construção e a apropriação dos conceitos da trigonometria. Achamos que o ideal é elaborarmos situações-problema que, ao resolvê-las, o aluno possa estar simultaneamente construindo o conceito e gerando competência.

Se nossa hipótese estiver correta, a segunda etapa de nossa seqüência de ensino - a institucionalização dos conceitos básicos da trigonometria - acontecerá como um caminho natural do processo ensino-aprendizagem, instrumentalizando o aluno para aplicar o conceito em situações descontextualizadas e de maior generalização.

A seguir, apresentaremos uma visão geral, resumida, do que constará o presente estudo, o qual será composto de sete (07) partes que chamaremos de capítulos.



## 1.2. Descrição da Dissertação

Apresentamos aqui uma descrição sumária da dissertação.

No capítulo I, apresentamos a problemática que motivou esta pesquisa, nosso objetivo e a hipótese sobre a qual desenvolvemos o trabalho.

No capítulo II, descreveremos sobre a fundamentação teórica considerada e que nos levou a propor uma abordagem para a construção dos conceitos considerados. Uma vez que estamos partindo de um pressuposto teórico construtivista, descreveremos sobre as contribuições que serão a base de nosso trabalho. Da psicologia cognitiva, usaremos de Vygotsky idéias da sua teoria sócioconstrutivista, especialmente quanto à zona de desenvolvimento proximal e de Vergnaud com a teoria dos campos conceituais, especialmente quanto à relação competência-concepção. Da didática francesa, usaremos de Brousseau a teoria das situações didáticas. Esses conceitos nos ajudarão a entender e explicar, à luz da formação do conceito, comportamentos assumidos por nossos alunos. Além das contribuições teóricas, faremos uma revisão de literatura para tomarmos conhecimento da existência de outras propostas de abordagem.

No capítulo III, trataremos dos aspectos históricos da trigonometria, para se ter uma idéia de sua origem, desenvolvimento e da maneira como é entendida hoje dentro da Matemática. Nesse capítulo, procuraremos também analisar como se dá a trigonometria na escola. Para isso, achamos por bem analisar os Parâmetros Curriculares Nacionais, a Proposta Curricular Para o Ensino da Matemática do Governo do Estado de São Paulo, alguns livros didáticos e, finalizando, uma comparação entre a Proposta e os livros.

No capítulo IV, metodologia, faremos uma descrição do universo da pesquisa. Apresentaremos a população alvo – o número de sujeitos, sua escolaridade, a característica da escola – os instrumentos diagnósticos (pré e pós testes) e a seqüência de ensino proposta. Na apresentação desses dois últimos – instrumentos e seqüência – procederemos com uma análise precisa de cada um dos itens neles abordados. Assim sendo, esta análise constará dos objetivos, de nossas expectativas, dos procedimentos, dos recursos e do embasamento teórico. A análise dos resultados obtidos pela aplicação dos instrumentos diagnósticos acontecerá no capítulo V. Faremos uma análise quantitativa e qualitativa dos resultados. Quanto à aplicação dos instrumentos, observaremos o desempenho por: grupo de alunos, tipo de questão, sujeito e procedimentos.

No capítulo VI, apresentaremos nossas conclusões (que puderam ser extraídas a partir do capítulo anterior) e faremos sugestões de investigações para futuras pesquisas sobre o assunto.

No capítulo VII, trataremos das referências bibliográficas que nos foi de grande valia para a elaboração e desenvolvimento de todo nosso estudo.

## **CAPÍTULO II: DISCUSSÃO TEÓRICA**

## INTRODUÇÃO

Ao desenvolver este trabalho, tivemos por base as idéias da psicologia cognitiva de Vygotsky, Vergnaud e da didática francesa de Brousseau. Isto significa dizer que o presente trabalho se apoia no pensamento sócio-construtivista, em resoluções de problema e na teoria das situações, respectivamente.

Entendemos que o ensino da Matemática tem duas vertentes: desenvolver o raciocínio teórico (abstração) e aplicações práticas (resolução de problemas, realidade).

A ênfase na parte prática pode contribuir para o desenvolvimento das estruturas lógicas do pensamento, porém, por si só, parece-nos insuficiente para o processo de generalização. Já a ênfase no raciocínio (entendido aqui como teorização), embora possa permitir a capacidade de ultrapassar o senso comum, pode fazer o ensino da Matemática parecer apenas um efetivo exercício para o desenvolvimento do raciocínio somente em matemática, ou seja, “matemática pela matemática”.

Assim, no ensino da matemática, as aplicações práticas e o desenvolvimento do raciocínio devem ser considerados elementos inseparáveis. São como os átomos de hidrogênio e oxigênio em uma molécula de água: não é possível compreender as propriedades da água através da consideração isolada de um e de outro elemento.

Portanto, ao desenvolver uma seqüência de ensino, devemos ter presente o equilíbrio entre vários fatores, tais como a prática e a teoria, a ferramenta e o objeto, situações concretas e situações abstratas, competência

e concepção, além de termos a preocupação em avançar para além do senso comum, visando à construção de uma autonomia intelectual.

## **2.1. EMPRÉSTIMOS DE IDÉIAS TEÓRICAS**

De acordo com o pensamento sócioconstrutivista (Vygotsky), o aluno deve participar ativamente da construção de seu conhecimento, que, por sua vez, é produzido a partir da cultura e contexto onde se encontra inserido esse aluno. Assim sendo, o trabalho em dupla ou grupo (zona de desenvolvimento proximal), favorece esta construção. Cabe ao professor a função de mediador da aprendizagem, instigador de idéias e trabalhar tanto os erros como os acertos de seus alunos.

O ponto de partida deve ser a colocação de um problema, situação que desafie o aluno a refletir e que tenha sentido para ele: situação-problema. Segundo Vergnaud, a partir da resolução de problemas, podemos gerar competência e formar o conceito. Dos teoremas e conceitos em ação, partes integrantes dos esquemas, vem a competência. Já os conceitos precisarão dos invariantes explícitos (Vergnaud, 1990).

Diante de uma situação-problema e trabalhando em grupo, cria-se uma ocasião propícia para:

- a ação (participação);
- a verbalização (pelo aluno) das observações feitas;
- o desenvolvimento de uma lógica de raciocínio para a defesa de sua opinião e avaliação do ponto de vista apresentado por um colega;
- a verificação da existência ou não de outras soluções.

Para tanto, é importante propor aos alunos problemas abertos, que permitam a discussão a respeito, a possibilidade de diferentes soluções e até mesmo de não ter solução.

A discussão de um problema permite o diálogo aluno-aluno e professor-aluno. O processo de familiarização com os entes e os conceitos matemáticos envolvidos e com suas representações fazem surgir a necessidade de uma linguagem que favoreça a comunicação das observações feitas.

Assim, pensamos que:

- 1) A linguagem utilizada na introdução dos conceitos deva aproximar-se, o mais possível, da linguagem do aluno;
- 2) O conceito precisa ser interiorizado pelos alunos antes de qualquer tentativa de formalização;
- 3) Uma linguagem matemática precisa é o fim de um processo de aprendizagem e não o início.

Além da questão das situações-problema, devemos considerar o processo dialético da aquisição do conhecimento. Assim sendo, o que hoje é um objeto matemático a ser apropriado, pode tornar-se uma ferramenta para a apropriação de um outro objeto.

Para evidenciar melhor isto, tomemos por exemplo o Teorema de Pitágoras. Quando ele é trabalhado inicialmente com o aluno, é um objeto matemático a ser dominado. Várias situações-problema devem ser apresentadas ao aluno para, dessa maneira, se apropriar deste objeto. Posteriormente, este objeto pode se tornar uma ferramenta, como no nosso caso aqui presente, em que o Teorema de Pitágoras é tratado como uma

ferramenta para a apropriação do objeto matemático *razões trigonométricas no triângulo retângulo*.

### 2.1.1 Vygotsky

Levaremos em consideração, em nosso trabalho, três fatores atribuídos ao pensamento de Vygotsky: a aprendizagem, a zona de desenvolvimento proximal e sobre a relação conceito espontâneo – conceito científico.

Quanto ao primeiro fator, sabemos que Vygotsky acredita na construção ativa do sujeito, nas fases de desenvolvimento, mas, diferentemente de Piaget, defende que a aprendizagem caminha à frente do desenvolvimento, servindo-lhe de guia.

*“O aprendizado é uma das principais fontes de conceitos da criança em idade escolar, e é também uma poderosa força que direciona o seu desenvolvimento, determinando o destino de todo o seu desenvolvimento mental” (Vygotsky, p. 74).*

Na perspectiva dele, a educação não fica à espera do desenvolvimento intelectual do sujeito. Ao contrário, sua função é levá-lo adiante, pois quanto mais ele aprende, mais se desenvolve mentalmente.

Partindo da premissa de que o aluno constrói seu conhecimento, é necessário, para que isto ocorra, sua interação com o objeto, objeto esse que pode ser concreto ou abstrato, como, por exemplo, um conceito matemático. Segundo Vygotsky, o centro de um processo de ensino-aprendizagem é essa interação, que irá ocorrer a partir de atividades, de resolução de problemas propostos ao aluno. Por isso, Vygotsky dá uma importância muito grande ao papel intervencionista do professor., que é quem define e elabora as atividades.

Portanto, na definição de uma seqüência de ensino, devemos levar em conta a elaboração de atividades que possibilitem o aluno participar da construção de seu conhecimento, caso contrário, vai se tornar um processo mecânico, vazio.

*“ A experiência prática mostra também que o ensino direto de conceitos é impossível e infrutífero. Um professor que tenta fazer isso geralmente não obtém qualquer resultado, exceto o verbalismo vazio, uma repetição de palavras pela criança, semelhante à de um papagaio, que simula um conhecimento dos conceitos correspondentes, mas que na realidade oculta um vácuo “ (Vygotsky, p. 72).*

Ou seja, o falatório do professor que, com isto, acredita ser capaz de formar o conceito na mente do aluno é algo impossível.

Outra idéia importante de Vygotsky e que vamos considerar em nosso trabalho, diz respeito à Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP).

Para Vygotsky, as medidas tradicionais de desenvolvimento, que se utilizam de testes psicológicos padronizados, focalizam apenas aquilo que as crianças são capazes de fazer sozinhas porque já têm um conhecimento consolidado. Portanto, esses testes medem o nível de desenvolvimento real ou atual da criança. Para ele, só isso não interessa, pois a criança vive num meio social, cultural e histórico, sofrendo influência desse meio. Assim, interessa considerar o desenvolvimento potencial dessa criança, ou seja, aquilo que a criança ainda não domina, mas é capaz de fazer com o auxílio de alguém mais experiente (professor, colega, pais, parentes, amigos,...). O que a criança é capaz de fazer hoje em cooperação (com ajuda), ela será capaz de realizar amanhã sozinha.



Segundo Vygotsky, a evolução intelectual é caracterizada por saltos qualitativos de um nível de conhecimento para outro. A fim de explicar esse processo, ele desenvolveu o conceito de Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP), que definiu como a “distância” entre o nível de desenvolvimento real e o nível de desenvolvimento potencial. Em outras palavras, a ZDP é a que separa a pessoa de um desenvolvimento que está próximo, mas ainda não foi alcançado.

Assim, no processo de ensino-aprendizagem, devemos estar preocupados com o presente do aluno e não somente com o seu passado. Devemos atuar na ZDP, levando em consideração o que ele está na iminência de formar pois já tem o desenvolvimento, mas não tem ainda o aprendizado. Cabe ao professor (ou adulto) estender e desafiar o aluno para que ele vá além de onde provavelmente pararia, através de desafios (conflitos), atividades dirigidas, construção e trabalho em grupo. Estaremos atentos à troca que é possível ser feita entre dois indivíduos (ou grupo) que tenham um desenvolvimento próximo.

Uma outra idéia apresentada por Vygotsky e que também levaremos em consideração em nosso trabalho, é a dos conceitos espontâneo e científico. Segundo Vygotsky, a criança constrói os conceitos, enquanto instrumentos do seu pensamento, tanto através da experiência individual, na interação social imediata (conceito espontâneo), como a partir dos conhecimentos transmitidos, em especial, na escola (conceito científico).

O conceito espontâneo (ou cotidiano) é desenvolvido no decorrer da atividade prática da criança. Tem a ver com a relação direta com o objeto (concreto, particularidade), sem nenhum conceito intermediando e a pessoa

não tendo consciência do conceito. Sua atenção está centrada no objeto ao qual o conceito se refere e nunca no próprio pensamento.

O conceito científico é adquirido por meio do ensino, submetendo o aluno a processos deliberados de instrução escolar, como parte de um sistema organizado de conhecimentos relevantes para a sociedade. Tem a ver com o pensamento (abstração, generalidade) e há, desde o início, um outro conceito intermediando a sua relação com o objeto ao qual o conceito se refere. Sua atenção está centrada no próprio pensamento.

Para Vygotsky, o conceito espontâneo vai evoluindo – ascendendo - de modo que a criança passa a tomar consciência dele, a ponto de ser capaz de defini-lo com palavras ou operar com ele à vontade, desenvolvendo-se para um conceito científico. O conceito científico, geralmente abordado na escola pela sua definição, seguida de aplicações não-espontâneas (formais ou científicas), carece de conteúdo fruto da experiência pessoal. Mas, à medida que é trabalhado, vai adquirindo aspectos mais “concretos”, “palpáveis”, “sensíveis”, ou seja, se encaminha – descendendo - na direção do espontâneo. Daí dizer que o conceito científico se desenvolve no sentido *descendente* e o espontâneo no sentido *ascendente*.

*“ Acreditamos que os dois processos – o desenvolvimento dos conceitos espontâneos e dos conceitos não-espontâneos – se relacionam e se influenciam constantemente. Fazem parte de um único processo: o desenvolvimento da formação de conceitos, que é afetado por diferentes condições externas e internas, mas que é essencialmente um processo unitário, e não um conflito entre formas de inteligência antagônicas e mutuamente exclusivas “(Vygotsky, p. 74).*

Embora distintos, estão intimamente relacionados, uma vez que, de maneira geral, a introdução de um conceito científico depende de que um conceito espontâneo correlato tenha se desenvolvido. Espera-se que do espontâneo (ou cotidiano) chegue ao científico e, a partir do científico, volte para o espontâneo. Ou seja, que os espontâneos se desenvolvam em direção a níveis cada vez mais abstratos e os científicos se desenvolvam em direção a níveis cada vez mais concretos.

Vygotsky afirma que a questão principal quanto ao processo de formação de conceitos é a questão dos meios pelos quais a relação espontâneo  $\Leftrightarrow$  científico é realizada. O ponto fundamental para nós é esse: embora inicialmente afastados, fazer com que, na sua evolução, esses conceitos terminem por se encontrar.

Portanto, achamos mais proveitoso, numa seqüência de ensino, trabalhar os conteúdos a partir dos conceitos espontâneos (confronto com uma situação concreta), isto é, daqueles que se apóiam na experiência imediata dos alunos, fazendo-os que evoluam para o nível dos conceitos científicos. Vamos estar atentos, ao desenvolvermos nosso estudo, ao fato do aluno estar inserido num meio social e que, então, é interessante que os problemas saiam de questões relacionadas ao seu meio, mais próximos de sua realidade.

Nesse processo, devemos ter em mente também que a expressão de um conceito pela definição verbal, ou seja, através de palavras faladas ou escritas, é algo complexo.

*“O pensamento tem sua própria estrutura, e a transição dele para a fala não é coisa fácil”*(Vygotsky, p. 128).

Vygotsky se refere à fala classificando-a em oral e escrita.

*“A escrita é a forma de fala mais elaborada”*(Ibid., p. 124)

*“A comunicação por escrito baseia-se no significado formal das palavras e requer um número muito maior de palavras do que a fala oral para transmitir a mesma idéia”*(Ibid., p. 124).

Deste modo, Vygotsky nos chama a atenção do fato observado pelos professores, de que os alunos sabem muito mais do que são capazes de explicar com palavras. Mas isso é normal, visto que o aluno está a caminho do conceito e de que, na formação do conceito, a palavra vai se apropriando devagar.

Assim sendo, em nossa pesquisa, teremos em mente esses três fatores analisados acima.

Vamos priorizar a idéia da ZDP, promovendo interações entre os próprios alunos e deles com o pesquisador. Durante todo o processo de nosso estudo de campo, o pesquisador terá na seqüência também a função de professor, assumindo o papel de mediador entre o aluno e sua apropriação do conceito. Dividiremos a sala em grupos de até 3 alunos cada um, esperando com isso trabalhar a ZDP, favorecendo a cooperação e a discussão. Nesse sentido, o pesquisador conduzirá o aprendizado atuando ativamente na ZDP, determinando o limiar mínimo (funções amadurecidas) do aluno, para que um certo conteúdo possa ser introduzido, e considerar o limiar máximo (funções em amadurecimento).

No caso particular de nossa pesquisa, o estudo das razões trigonométricas no triângulo retângulo envolve, de modo especial e como pré-requisitos, as noções de semelhança de triângulos, triângulo retângulo e o Teorema de Pitágoras. Deste modo, incluiremos numa avaliação diagnóstica (pré-teste) questões a respeito desses conceitos, que para nós constituem,

inicialmente, um patamar mínimo. Em nossa seqüência de ensino, teremos a preocupação de começar com atividades, breves, que retomem esses conceitos, partindo daí para um patamar máximo, qual seja, as razões trigonométricas.

Pretendemos que a construção dos conceitos se dê com a participação ativa do aluno, promovendo sua interação com o objeto (conceito matemático), através de desafios (situações-problema) e encontros sucessivos que, a cada encontro, levem o desenvolvimento do estudante de um nível  $x$  (limiar mínimo, atual) ao nível  $x+1$  (limiar máximo, potencial), que passará a ser, então, o seu novo  $x$ , estabelecendo-se uma nova ZDP. A intervenção do pesquisador será direta ao ajudar o aluno a avançar e na sistematização dos conhecimentos.

Nossa pesquisa tem por princípio partir de situações-problemas contextualizadas, ou seja, que tenham sentido para o aluno, por terem uma relação próxima à sua realidade. Como exemplos, podemos citar a obtenção da medida da altura de uma árvore, da altura de um prédio, a inclinação de um telhado, a construção de uma rampa de acesso a um prédio, sempre discutindo a importância de cada um e de como resolvê-lo a partir da própria experiência ou conhecimentos já adquiridos. Pretendemos, assim, caminhar do cotidiano para o científico, do concreto para o abstrato, numa evolução ascendente que permita a definição do conceito envolvido. Deste modo, esperamos que o aluno incorpore os conceitos à sua estrutura mental e os utilize em situações quer sejam descontextualizadas ou contextualizadas, ou seja, permita também a evolução descendente do conceito (concretude).

### 2.1.2 Vergnaud

Outra contribuição importante que levaremos em consideração em nosso trabalho são os pensamentos de Vergnaud.

Segundo Franchi (1999),

*“...os conceitos constitutivos dessa teoria são complexos, exigindo muita leitura e reflexão para sua apropriação.”* (p.156)

Para Vergnaud (1987, 1990), o estudo do desenvolvimento de um conceito requer que o pesquisador veja esse conceito como uma terna de conjuntos:

$C = (s, I, S)$

onde,

**C** → CONCEITO

**S** → CONJUNTO DE *SITUAÇÕES* QUE TORNAM O CONCEITO SIGNIFICATIVO; É A REALIDADE, O CONTEXTO.

**I** → CONJUNTO DE *INVARIANTES* (OBJETOS, PROPRIEDADES, RELAÇÕES E PROCEDIMENTOS) QUE PODEM SER RECONHECIDOS E USADOS PELO SUJEITO PARA ANALISAR E DOMINAR ESSAS SITUAÇÕES; É O SIGNIFICADO.

**S** → CONJUNTO DE *REPRESENTAÇÕES* SIMBÓLICAS PARA SE REFERIR AOS INVARIANTES E ÀS SITUAÇÕES, EM ESPECIAL AOS PROCEDIMENTOS PARA LIDAR COM ELES; É O SIGNIFICANTE.

Na sua teoria dos campos conceituais, Vergnaud considera que, para a obtenção do conhecimento, deva ocorrer uma interação com objeto de estudo em diversas situações, para que o aluno possa observá-lo e perceber os invariantes desse objeto. Para tanto, o aluno deveria fazer uso de vários conceito correlatos, chegando a uma representação simbólica e formando, no final do processo, o conceito do objeto em estudo.

Uma dificuldade para os pesquisadores está no fato de que um simples conceito não se refere apenas a um tipo de situação, assim como uma simples situação não pode ser analisada através de um único conceito. Portanto não faz sentido estudar conceitos isoladamente, mas sim dentro de *campos conceituais*.

Encontramos em Franchi (1999) uma síntese muito precisa desta teoria, deixando clara a essência e objetivo da mesma:

*“A teoria dos campos conceituais é uma teoria pragmática, ou seja, que faz apelo à noção de situação e das ações dos sujeitos nestas situações”(p.163). ” ... visa à construção de princípios que permitam articular competências e concepções constituídas em situação, e os problemas práticos e teóricos em que essas competências e concepções se constituem”(p.164).*

Um *campo conceitual* é definido como um conjunto de situações, cuja apropriação e análise requer o domínio de vários conceitos de naturezas diferentes, procedimentos e da representação simbólica a ele ligada.

Por exemplo, em nossa presente pesquisa sobre trigonometria no triângulo retângulo, trabalharemos com situações que envolverão outros conceitos correlatos, tais como razão, proporção, semelhança, sistemas de medida de ângulos, números irracionais, teorema de Pitágoras, entre outros. O objeto de nosso estudo é referente à construção dos conceitos de seno, cosseno e tangente.

Para construir o conhecimento, inicialmente o aluno deve perceber os invariantes que caracterizam o conjunto. A partir daí, inicia-se a formação de esquemas, que Vergnaud denominou de *teorema-em-ação*, evoluindo para a competência e o desenvolvimento do conceito.

Para Vergnaud (1987), os conceitos matemáticos estão enraizados nas situações e problemas:

*“É essencial que os professores estejam cientes que não podem resolver o problema do ensino, usando simples definições por melhores que elas sejam; as idéias dos alunos só podem mudar se conflitarem com situações que eles não consigam resolver ... Resolver problemas é a fonte e o critério do conhecimento operacional. Precisamos ter essa idéia sempre em mente e sermos capazes de oferecer aos alunos situações que busquem estender o significado de um conceito ...”* (p. 5).

Para ele, a *resolução de problemas* é parte integrante do processo de formação de conceitos.

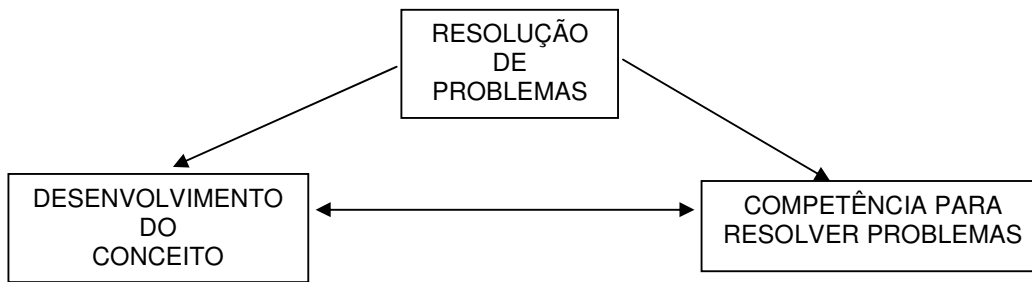
Em nossa pesquisa, desenvolveremos uma seqüência de ensino centrada na resolução de problemas. Acreditamos também que, para quem aprende, conceitos teóricos ou propriedades que não puderem ser aplicados a alguma situação-problema, ficam desprovidos de significados.

A pesquisa em Educação Matemática deve priorizar a coleta, análise e classificação de situações-problemas que tornem um conceito matemático funcional e significativo.

Na escola, geralmente costuma-se ignorar o desenvolvimento do conceito, partindo-se da definição para a resolução de problemas. Com isso, está-se privilegiando tão somente a competência para a resolução de problemas. Esta, por sua vez, provavelmente estará prejudicada pela falta de se trabalhar a relação entre a resolução de problemas e o conceito.

Segundo Vergnaud (1987, 1990), o conceito e a competência se formam a partir da resolução de problemas. O gráfico abaixo é uma tentativa de sintetizar as relações entre resolução de problemas, desenvolvimento do conceito e competência.





As competências e concepções dos alunos desenvolvem-se ao longo do tempo, através de experiências com um grande número de situações, tanto dentro quanto fora da escola. Quando confrontados com uma nova situação, eles usam o conhecimento que tem sido desenvolvido pela sua experiência dentro de situações mais simples e mais familiares, e tentam adaptá-la a esta nova situação.

Em nossa pesquisa, levaremos em consideração essa idéia de Vergnaud. Inicialmente daremos ênfase à competência, no sentido de levar o aluno a utilizar conhecimentos em ações, esquemas, escolhendo operações adequadas, sem que necessariamente consiga expressar as razões dessa adequação (conhecimento implícito). Porém, nosso objetivo principal é a construção do conceito relativo às razões trigonométricas. Assim, nossa seqüência de ensino deverá conduzir o aluno no sentido de que possa expressar os conhecimentos de forma simbólica, utilizando-se a linguagem natural, sentenças formais, etc... (conhecimento explícito).

Vergnaud também trata da importância da epistemologia do conceito, ou seja, da origem e formação do conceito na História.

*"... iremos dedicar nossa atenção a um restrito conjunto de questões epistemológicas que sejam centrais tanto para o estudo do processo aprendizagem-redescoberta-reinvenção na mente dos*

*estudantes, quanto para a História da Matemática: Qual é a natureza e a função de um novo conceito, um novo procedimento, um novo tipo de raciocínio, uma nova representação? Mais precisamente, qual é a relação existente entre as novas competências e concepções matemáticas e os problemas práticos e teóricos que as tornam valiosas e significativas ?” (Vergnaud,1994, p. 15).*

Para Vergnaud, e para nós também, é essencial esse tipo de pergunta para a escolha de situações feitas pelo professor. Se o professor souber como se deu a formação do conceito, então poderá trabalhar, inicialmente, com o concreto, com a realidade, resgatando a evolução do conceito. À medida que o aluno vai entendendo, vai-se desenvolvendo o conceito no sentido da prática para a formalidade do saber matemático.

Em nossa pesquisa, levaremos em consideração essa idéia, definindo uma seqüência de ensino partindo de situações-problema simples que, mesmo adaptados à realidade do aluno, possibilite a construção do conceito.

Nosso trabalho é organizar situações de ensino e realizar experimentações, tanto dentro de *objetivos de curto prazo*, permitindo que os alunos desenvolvam competências e concepções para uso imediato, quanto na *perspectiva de longo prazo* de lhes oferecer uma base para os conceitos que serão essenciais mais tarde.

### **2.1.3 Brousseau**

Outro pensamento que levaremos em consideração em nosso trabalho é o da *teoria das situações didáticas* de Brousseau. O objeto central dessa teoria é a *situação didática*, definida por Brousseau como:

*“Uma situação didática é um conjunto de relações estabelecidas explicitamente e/ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de*

*alunos, num certo meio, compreendendo eventualmente instrumentos e objetos, e um sistema educativo (o professor) com a finalidade de possibilitar a estes alunos um saber constituído ou em vias de constituição... o trabalho do aluno deveria, pelo menos em parte, reproduzir características do trabalho científico propriamente dito, como garantia de uma construção efetiva de conhecimentos pertinentes” (Brousseau, 1986, p. 33).*

Portanto, sempre que entre professor e aluno se estabeleçam relações com a intenção de aprendizagem de um determinado conhecimento, teremos aí uma *situação didática*. Na sua definição, Brousseau não propõe que se tente simplesmente reproduzir o ambiente científico, mas sim o planejamento adequado pelo professor de atividades que levem o aluno a uma *redescoberta* do conhecimento. Isso implica, necessariamente, questões de ordem metodológica.

Na elaboração de nossa seqüência de ensino, levaremos em conta esta proposta, à luz da história, preparando atividades em etapas que, a nosso ver, contribuam melhor para a construção dos conceitos relativos à trigonometria. Adaptaremos à realidade de hoje a formação desse saber matemático, conforme sua evolução histórica.

O objetivo da *teoria das situações* é pois, caracterizar um processo de aprendizagem matemática em sala de aula, envolvendo professor, aluno e o saber matemático. Visa, dessa forma, contemplar a especificidade do conhecimento matemático, realizando uma educação matemática mais significativa para o aluno. Assim, é uma questão primordial a forma de apresentação do conhecimento num contexto que proporcione ao aluno um verdadeiro sentido, um vínculo com a realidade.

Na definição de nossa seqüência de ensino, estaremos atentos para este fato, mediante atividades contextualizadas. Entendemos como contextualizadas aquelas atividades que têm significado para o aluno, pois estão relacionadas à sua realidade e ambiente.

A teoria de Brousseau apoia-se, numa primeira fase, em procedimentos metodológicos sobre os quais o professor não tem um controle direto. O objetivo é fazer com que o aluno participe efetivamente da elaboração do seu próprio conhecimento. Daí a noção de *situação a-didática* apresentada por Brousseau, que a define da seguinte maneira:

*“Quando o aluno se torna capaz de pôr em funcionamento e utilizar por si mesmo o saber que está construindo, em situação não prevista em qualquer contexto de ensino e também na ausência de qualquer professor, está ocorrendo então o que pode ser chamado de situação a-didática”* (Brousseau, 1986, p.33-116).

O que caracteriza uma situação a-didática é a ausência de controle pedagógico explícito do professor, ficando a mobilização de informações e inferências por conta do aluno. Cabe ao professor estimular o aluno a superar, por seu próprio esforço, certas passagens que conduzem o raciocínio na direção de sua aprendizagem.

Portanto, a *situação a-didática* é uma parte essencial da situação didática e está diretamente associada com a abordagem construtivista, pois se caracteriza pela intenção de colocar o aluno numa situação que envolve a produção de conhecimento.

Assim, cabe a nós, na elaboração da seqüência de ensino, planejarmos situações didáticas ricas no aspecto a-didático, possibilitando ao aluno

autonomia para que possa desenvolver seus próprios mecanismos de resolução de problemas, em busca da construção do conhecimento.

A situação a-didática apóia-se na noção de *devolução*. Ou seja, o professor não deve se limitar somente em transmitir conhecimento, mas sim na *devolução* de um bom problema. A *devolução* é definida por Brousseau como:

*“O ato pelo qual o professor faz o aluno aceitar a responsabilidade de uma situação de aprendizagem (a-didática) ou de um problema e aceita as conseqüências dessa transferência” (Ibid., 1986, p.50).*

A *devolução* tem, portanto, o sentido de transferência de responsabilidade, como se o problema fosse do aluno, e não somente porque o professor quer. Uma vez aceito o problema pelo aluno, inicia-se aí o processo de aprendizagem através da relação do aluno com o saber.

Entre a aceitação do problema e a efetiva aprendizagem, diversas etapas são percorridas. Brousseau observou e decompôs essa progressão da aprendizagem em quatro fases diferentes, interligadas: *ação*, *formulação*, *validação* e *institucionalização*. O aluno tem a responsabilidade de gerenciar sua relação com o saber nas fases de *ação*, de *formulação* e de *validação*. A fase de *institucionalização* do saber fica a cargo do professor. Nem todos os aspectos estão sempre presentes.

Na fase de *ação*, há sempre o predomínio do aspecto experimental e a solução de um problema resulta na produção de um conhecimento de natureza operacional.

Na fase de *formulação* ou *verbalização*, o aluno tenta explicar através de uma linguagem apropriada, escrita, falada ou simbólica, o que fez, mas sem a intenção de julgamento sobre a validade.

Quando o aluno começa pensar em justificativas sobre a validade de suas afirmações, ele estará entrando numa outra fase da situação a-didática que é a *validação*.

A fase de *validação* se caracteriza pela elaboração de algum tipo de prova, através de leis ou teoremas, daquilo que se fez. Está relacionada à razão e à busca da verdade.

A produção de conhecimentos, numa situação a-didática, tende a se caracterizar mais pelo aspecto experimental e por uma produção muito ampla de conhecimentos, não atingindo a essência teórica da matemática. Assim, faz-se necessário uma última fase, a de *institucionalização*, que visa dar um acabamento formal ao conhecimento elaborado pelo aluno.

A fase de *institucionalização* ou *formalização* deve ser conduzida pelo professor e tem como objetivo dar ao conhecimento um *status* de saber que não dependa dos aspectos subjetivos e particulares. Nesta fase, o professor generaliza, destacando as propriedades que são gerais e que podem ser usadas em outros contextos.

A seqüência de ensino que desenvolveremos em nosso trabalho terá, como característica geral, do primeiro ao último encontro, a intenção de caminhar da ação para a formalização. Procuraremos a cada encontro, a cada atividade, privilegiar o aspecto a-didático através da *devolução* de problemas, estimulando o aluno a se empenhar na busca de solução. Utilizaremos recursos didáticos tais como: situações-problema contextualizadas, manipulação de materiais concretos, maquetes, construções geométricas, medições, construção de tabelas, entre outras.

Entendemos como fundamental o papel do professor na elaboração das atividades e, principalmente, na transferência de problemas ao aluno. Neste tipo de abordagem pedagógica, construtivista, o professor deve encontrar um equilíbrio na quantidade de informações a serem passadas ao aluno e reduzir sua interferência.

## 2.2. TRABALHOS DE PESQUISAS CORRELATAS

Ao visitar a literatura especializada, temos por objetivo conhecer, a partir dos estudos científicos relativos à trigonometria – mais especificamente, a trigonometria no triângulo retângulo – o que tem sido pesquisado e discutido sobre o processo ensino-aprendizagem desse conhecimento. Analisamos os trabalhos buscando contribuições para o desenvolvimento e definição de nossa pesquisa.

Inicialmente consultamos dois bancos de teses: o da PUC-SP e o “EDUMAT” da UNICAMP. O “EDUMAT” tem catalogadas mais de 429 teses no Brasil e 22 no exterior, no período que compreende de 1971 a 1997, e o levantamento dessa relação deu-se a partir de coleta de informações realizadas por Dario Fiorentini, junto à ANPEd e a alguns programas brasileiros de Mestrado e Doutorado em Educação Matemática, em Educação e em Psicologia.

Abordando o tema trigonometria, encontramos, tanto no banco da PUC-SP como no da UNICAMP, somente duas dissertações de mestrado, a saber:

- a) Maria José Lourenção Briguenti, “*Ensino e aprendizagem da trigonometria: novas perspectivas da educação matemática*”,

mestrado em Educação Matemática da UNESP, campus de Rio Claro – SP, 1994.

- b) . Nielce Meneguelo Lobo da Costa “*Função seno e co-seno: uma seqüência de ensino a partir dos contextos do mundo experimental e do computador*”, mestrado em Ensino da Matemática da PUC-SP, 1997

Na Reunião de História e Pedagogia da Matemática, realizada em Lorena SP, em julho de 1998, tomamos conhecimento de uma terceira dissertação (em desenvolvimento):

- c) De Iran Abreu Mendes, “*O uso de tópicos históricos da trigonometria como perspectiva metodológica no ensino de 2º grau*”, mestrado em Educação, da Universidade Federal do Rio Grande do Norte.

Sobre as teses acima citadas, observamos o seguinte:

Briguenti (1994), baseada na sua experiência como professora, percebeu as dificuldades e até mesmo a aversão que alguns alunos apresentam em relação à trigonometria. Influenciada pelo movimento da Educação Matemática, definiu uma estratégia para o ensino da trigonometria baseada no pensamento dos teóricos cognitivistas Piaget, Bruner e Ausubel, que propõem a construção do conhecimento pelo aluno. Resolveu enfatizar a teoria de David Ausubel, enfocando a aprendizagem significativa dos conceitos. A pesquisa foi realizada em duas escolas públicas da cidade de Bauru-SP, sendo uma de 1º grau e outra de 2º grau. Na de 1º grau, a experiência foi desenvolvida numa classe de 8ª série, do período matutino, com 36 alunos, durante duas semanas do mês de novembro de 1992, num total de 6 horas-aula. Na de 2º grau, se realizou no período de 01/03/93 a 31/05/93, três



meses, com 5 aulas semanais, na 2ª série B, do período matutino, com 29 alunos, num total de 60 horas-aula.

Detendo-nos somente no que diz respeito ao 1º grau, a pesquisa abordou a trigonometria no triângulo retângulo, através de atividades apresentadas em duas folhas. A pesquisadora iniciou a experiência *“salientando a importância das idéias de proporcionalidade e semelhança, para a resolução de problemas que aparecem no cotidiano”*(p. 129). Em seguida, distribuiu uma folha “xerocada” (sic) onde era solicitada a construção de triângulos retângulos semelhantes, a obtenção das razões entre as medidas dos lados e, imediatamente, após observar que essas razões são constantes, a “definição” desses valores como seno, co-seno e tangente do ângulo agudo considerado, já usando a notação  $\text{sen } B$ ,  $\text{cos } B$  e  $\text{tg } B$ . *“Partimos, então, para a resolução dos exercícios propostos na 2ª folha”*(p. 131), num total de 10 questões. Iniciou com exercícios que tratavam os conceitos como objetos, terminando com dois (9º e 10º) “contextualizados” (relativo a um foguete e a um navio, respectivamente).

A avaliação final da pesquisa se deu através de uma entrevista coletiva, na qual a pesquisadora solicitou aos alunos que fizessem considerações sobre o curso. Em “Considerações Finais” à página 166, ela fez uma avaliação pessoal sobre o trabalho desenvolvido, observando que os alunos mantiveram-se motivados, baseado na entrevista, que a maioria gostou da maneira como o assunto foi abordado. Esse trabalho agora analisado contribuiu para a nossa pesquisa pela fundamentação teórica (que tem presença, clareza e objetividade acentuadas na dissertação), pelos aspectos históricos (apesar de breve e, ao mesmo tempo, talvez por isso) e pela visão que nos deu da

importância de uma avaliação diagnóstica final, antes de se tirar conclusões. Outro ponto que nos chamou atenção foi, a nosso ver, a limitada carga horária: 6 horas-aula.

Costa (1997), o segundo trabalho por nós analisado, teve como objetivo investigar a influência de dois diferentes contextos – computador e “mundo experimental” – na aprendizagem da trigonometria. Trabalhou com alunos da 1ª e da 2ª séries do 2º grau que já haviam estudado alguns tipos de funções elementares. Escolheu como “assunto alvo” as funções seno e co-seno e partiu da hipótese de que é possível introduzi-las de maneira significativa. Assim, entendemos que seu trabalho trata de trigonometria, mas assentada sobre o conceito de função (relacionando número com número).

A pesquisadora procurou identificar a ordem de introdução, por contextos, que se apresentava mais eficaz para a aprendizagem. Trabalhando com dois grupos de alunos, em um deles iniciou o conteúdo por atividades no computador, utilizando o software Cabri-Géomètre, para, em seguida, dar continuidade por manipulações no “mundo experimental”. O outro grupo seguiu a ordem inversa. A metodologia de avaliação consistiu na aplicação de três testes escritos: um antes de iniciar a seqüência didática, um ao término das atividades de um dos contextos e um ao final do estudo. Conclui, no final, que a ordem de introdução do assunto interferiu na aprendizagem.

O uso do computador e de equipamentos (elaborados para o que chamou de manipulação no “mundo experimental”), ambos com o objetivo de favorecer a concretização, constitui uma outra diferença importante em relação ao nosso trabalho. Com o objetivo de auxiliar o aluno na construção dos conceitos envolvidos, procuraremos favorecer a concretização, tendo como

prioridade a utilização de recursos (no sentido amplo) não sofisticados, baratos e acessíveis a toda classe social, possibilitando que tanto professor como aluno possam facilmente elaborá-los.

Outro detalhe que nos chamou atenção foi quanto ao critério para a escolha da amostra: “...o interesse e a disponibilidade dos alunos em participar da pesquisa em horário extra-classe...”(p. 82). Isto contrasta com nossa pesquisa, que pretendemos desenvolver numa turma regular de uma escola, dentro do horário de aula normal e no momento programado para a abordagem do assunto em questão.

Concluindo, podemos afirmar que o trabalho em análise contribuiu para nossa definição quanto à estrutura da dissertação, aos aspectos históricos, às considerações de fundamentação teórica (relativas à construção do conceito pelo próprio aluno) e, finalmente, de que se tratam de trabalhos complementares; a nossa pesquisa trata da construção de conceitos (razões trigonométricas) que são pré-requisitos àqueles abordados pela pesquisa de Costa (funções trigonométricas).

Mendes (1998), por cuja dissertação em desenvolvimento passamos agora a analisar, relatou, em sua apresentação no encontro em Lorena-SP, que o ponto principal, motivador de seu trabalho, foi, além da própria experiência profissional, o interesse manifestado pelos professores de Matemática da rede de ensino de Natal-RN. O interesse deste estudo é o aprofundamento histórico sobre trigonometria, tendo em vista contribuir para a melhoria de suas atividades docentes junto ao 1º e 2º graus.

Portanto, o objetivo de seu trabalho é a utilização de tópicos históricos como uma estratégia alternativa de ensino de trigonometria, para o 2º grau.

Propõe atividades de redescoberta para auxiliar na construção dos conceitos básicos de trigonometria. Cabe ao professor a função de orientador das atividades, nas quais o aluno deverá construir seu conhecimento partindo do próprio raciocínio e conhecimentos históricos (pesquisados), visando aplicá-la na solução de problemas práticos que assim o exijam.

Mendes, porém, reconhece que somente essa abordagem não é suficiente para gerar competência ao aluno quanto à resolução de problemas. Recomenda que se complemente com atividades voltadas à “fixação da aprendizagem” ou a utilização de outros recursos (inclusive “um melhor manuseio do livro didático”) que desenvolvam o conteúdo programático sugerido pela escola.

A leitura desse trabalho contribuiu em parte para a definição de nossas atividades, como um reforço e alerta à nossa pretensão de nos apoiarmos, sempre que possível, na contextualização, inclusive histórica.

Além das dissertações acima analisadas, consultamos também anais dos “Encontro Nacional de Educação Matemática” (ENEM) e dos “Encontro Paulista de Educação Matemática” (EPEM).

Nos anais do I EPEM, de outubro/89, Campinas-SP, encontramos à página 258, o resumo de um mini-curso em que o autor, Antonio S. Machado, propõe uma discussão sobre um programa para trigonometria, seguida de uma lista de dezesseis exercícios ditos como “para orientação das discussões”.

Nos anais do IV EPEM, de janeiro/96, São Paulo – SP, encontramos a apresentação à página 393, do trabalho “Conseguindo Ver as Funções Trigonométricas” de Vanilda da Silva Riedel Alves e, à página 440, do “Trabalho de Campo Para o Ensino de Trigonometria” desenvolvida por alunas

de licenciatura em Matemática da UNESP, Rio Claro-SP. O primeiro trabalho, aplicado à 2ª série do 2º grau, trata das funções trigonométricas. Com a utilização de lâminas de papel, propõe uma alteração na “ordem de apresentação” para permitir uma visualização melhor. Trabalha inicialmente no primeiro quadrante, permitindo a dedução para os demais. O segundo trabalho é uma comunicação de experiência, que teve o objetivo de avaliar, através de uma aplicação em sala de aula de uma escola pública, a adequação da proposta didática “Introdução à Trigonometria”, de Luiz Roberto Dante, à pedagogia de trabalho em grupo em “Assimilação Solidária”, de Roberto Ribeiro Baldino.

Nos anais do III ENEM, de julho/90, Natal-RN, encontramos à página 51, o mini-curso “Redescobrimo a Trigonometria”, de Ana Maria Piere e Virgínia Azambuja, do Colégio Bennett, da cidade do Rio de Janeiro. O objetivo foi apresentar uma proposta para que os fatos da trigonometria sejam “descobertos” concretamente através do material “tábua trigonométrica”.

Nos anais do IV ENEM, de janeiro/92, Blumenau-SC, encontramos à página 93, o resumo de um mini-curso apresentado por Evandro Felin Londero, com os seguintes objetivos: a) proporcionar uma visão das funções trigonométricas; b) pela utilização exclusiva do ciclo trigonométrico; c) levar os alunos a identificar os eixos de todas as funções; d) analisar os sinais e valores das funções trigonométricas de acordo com o ângulo; e) identificar os processos que relacionam o sistema de eixos cartesianos com as funções trigonométricas e seu uso em diversos problemas.

Embora apresentados em forma de resumos, o que não nos permite uma análise mais criteriosa, resolvemos citar os trabalhos acima, por estarem

relacionados com o tema de nossa pesquisa e por encontrarem-se inseridos em documentos de divulgação científica. Reconhecemos porém o pouco valor científico dos mesmos e a nossa impossibilidade de tecermos maiores considerações a respeito, ou mesmo de podermos discuti-los (inserir-los) no âmbito de nosso estudo.

**CAPÍTULO III A TRIGONOMETRIA DO  
PONTO DE VISTA  
HISTÓRICO E ESCOLAR**

## INTRODUÇÃO

Neste capítulo, estudaremos a origem e o desenvolvimento da trigonometria, de modo especial no que se refere aos conceitos básicos das razões seno, co-seno e tangente de um ângulo agudo.

Em Educação Matemática, é muito importante o estudo histórico da construção de um conceito, pois os erros e dificuldades superados pelos matemáticos, bem como as adaptações ocorridas ao longo da história, poderão fazer com que compreendamos melhor as dificuldades apresentadas pelos alunos. Aumentando nosso conhecimento a respeito da evolução do conceito, também poderemos enriquecer nossas aulas, colaborando para que, à luz da história, na elaboração da seqüência de ensino, definamos atividades em etapas que, a nosso ver, contribuam melhor para a construção do conceito.

Segundo Vergnaud:

*“É também o tipo de questão epistemológica que dirige a investigação do historiador quando ele tenta descobrir as circunstâncias históricas e sociais sob as quais as invenções matemáticas emergiram. Há muito o que ganhar a partir do estudo interativo do processo individual e histórico do desenvolvimento do conhecimento matemático. ...Mesmo que o conjunto de problemas com que os estudantes, proveitosamente, venham a se deparar seja diferente do conjunto de problemas que os cientistas tenham encontrado no curso da história, é fundamental para a Psicologia da Educação Matemática considerar o relacionamento entre o conhecimento desses problemas”(Vergnaud, 1994, p.16).*

Ou seja, não seria com a intenção de reproduzir os fatos históricos, mas sim de, baseados neles, possibilitar uma seqüência de ensino, na qual o



aluno compreenda o conceito não como algo dogmático, mas sim associado à realidade.

Não é nossa intenção fazer um estudo profundo e detalhado da história da trigonometria, mas sim, breve o suficiente que nos permita, restringindo-nos ao conceito das razões trigonométricas no triângulo retângulo, analisar como os livros escolares e professores abordam esse assunto, e compreender o que é a trigonometria hoje para os matemáticos.

### **3.1. TRIGONOMETRIA ONTEM E HOJE**

#### **3.1.1. Origem e Desenvolvimento Histórico da Trigonometria**

Podemos imaginar que há milhares e milhares de anos, o homem, diante da percepção óbvia e inexorável do fato do nascer e do pôr-do-Sol, no dia-a-dia, passou a utilizar esta situação binária (claro-escuro, Sol-Lua, dia-noite) como um dos primeiros elementos de contagem, ou seja, a primeira matemática que provavelmente tenha surgido foi relativa à contagem e, no caso acima, quanto ao tempo cronológico : quantas Luas caminhei, quantos dias faltam, etc...

E do pôr-do-Sol ao nascer do Sol, especialmente em noites de insônia, o homem, ao admirar o céu estrelado, deve ter observado que, de maneira geral, as posições do astros entre si se mantêm constantes, mas que a abóbada celeste, a cada dia, sofria um pequeno deslocamento, como se estivesse em movimento. Os astros passavam a tornar-se visíveis, ao anoitecer, cada vez em momentos diferentes e após muitos e muitos anos de observação, o homem percebeu que isto é cíclico, a tal ponto que, por exemplo, se ao pôr-do-Sol, o fato de uma estrela se tornar visível numa determinada hora, numa

determinada posição, ele faz a previsão de um período de chuvas, ou de seca, ou de frio, neve, etc...

Portanto, o homem observou que, estudando e registrando as posições dos astros, ele era capaz de prever, o que hoje costumamos chamar, as estações climáticas (primavera, verão, outono ou inverno), podendo estabelecer época de plantio, de colheita e estocagem, criando um calendário. Os homens que passaram a se dedicar a tal estudo foram identificados como astrônomos, surgindo daí a Astronomia. Como, no princípio, muitos destes fenômenos eram associados a poderes sobrenaturais e místicos, estes estudos passaram a ser também incumbência de sacerdotes, que se encarregavam, assim, de controlar o calendário e predizer a estação climática que se aproximava. Provavelmente surgiu daí também a Astrologia.

Para esses estudos dos astros, desenvolveu-se uma matemática, não como uma ciência em si, mas como ferramenta para a Astronomia. Dentre os recursos matemáticos utilizados, foi surgindo o que posteriormente passaríamos a chamar e considerar como ciência, parte da matemática: a Trigonometria. Na Astronomia, é impossível estudar as fases da Lua, os pontos cardeais e as estações do ano sem usar triângulos, um sistema de medidas e uma escala.

*“A identificação desses recursos pelo nome “trigonometria” só veio a acontecer em 1595 quando, Bartholomeus Pitiscus (1561-1613) usou este vocábulo como título de uma exposição que foi publicada nessa época como suplemento a um livro sobre esféricas e novamente, em separado, em 1600, 1606 e 1612” (Boyer, 1996, p. 213).*

A trigonometria, pela própria origem da palavra (“tri” = três, “gono” = ângulo e “metria” = medida) tem a ver com “resolução de triângulos”. Esta era a motivação inicial, ou seja, dados alguns elementos de um triângulo, determinar todos os demais (as medidas dos três lados e dos ângulos).

Como os astrônomos já tinham a noção, ou percebiam a Terra, assim como a abóbada celeste, esférica, então durante muito tempo o desenvolvimento da trigonometria foi comandado pelo desenvolvimento da trigonometria esférica, pois essa era usada na Astronomia Matemática e por muitos séculos foi sua maior aplicação. A trigonometria esférica trata da resolução de triângulos esféricos (na esfera) e a trigonometria plana trata da resolução de triângulos no plano.

A Trigonometria esférica embora pareça coisa do passado e em desuso, já que não é tratada pelo sistema de ensino, continua sendo disciplina básica para a Astronomia Matemática, bem como para a Geodésia, a Navegação Oceânica, a Navegação Aérea, a Mecânica de Satélites Artificiais, a Transmissão de Rádio de Grande Alcance, o Cálculo de Trajetória de Mísseis Intercontinentais, o Cálculo do Aquecimento Solar em Arquitetura, etc...

*“Nem sempre o desenvolvimento da ciência segue o caminho mais rápido ou mais cômodo.... Assim, a origem da trigonometria... possui uma história bastante curiosa. Sua idéia básica já existia no antigo Egito. As pedras de revestimento de uma pirâmide tinham que ser talhadas sempre sob um mesmo ângulo, para que se obtivessem superfícies laterais planas. Os mestres de obra avaliavam o ângulo com base nas relações entre as arestas dos blocos de pedra... Também os gregos utilizavam os conceitos fundamentais da trigonometria na resolução de problemas práticos, mas os grandes geômetras não reconheceram o enorme valor destes conhecimentos. Não os desenvolveram, abandonaram-nos e*

*erigiram o impressionante edifício de sua geometria plana sem o seu concurso. A resolução de triângulos planos pouco ou nenhum prazer lhes propiciava... Por que os gregos negligenciaram a tal ponto o cálculo trigonométrico de figuras planas? Ora, conhecemos seu pendor para a construção geométrica. A utilização de outros recursos além da régua e do compasso poderia ser perdoável, no caso de um agrimensor, mas para o matemático teria sido simplesmente condenável” (Karlson, 1961, p. 261).*

Embora se concentrassem na trigonometria esférica, foi necessário desenvolver partes da trigonometria plana, apesar de em nenhum dos casos se empregar o vocábulo “trigonometria” e nem reconhecê-los como objeto de estudo, mas sim ferramenta.

Os primeiros sinais de trigonometria surgiram no Egito e na Babilônia. Parece ter havido uma relação entre o conhecimento matemático dos egípcios e dos babilônios. Os babilônios tinham grande interesse pela astronomia, foram excelentes astrônomos e influenciaram os povos posteriores. Construíram um calendário astrológico e elaboraram uma tábua de eclipses lunares.

Foram os babilônios que escolheram o sistema sexagesimal, provavelmente relacionado com a facilidade de dividir o círculo em seis partes iguais, usando o raio como corda.

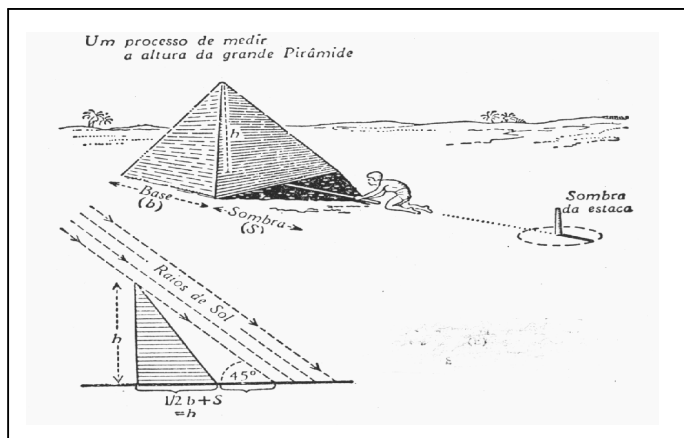
Há mais de 2000 anos, os gregos, tentando resolver o problema da navegação, interessaram-se por astronomia. Com o estudo dos astros, puderam resolver problemas oriundos da comunicação e transporte por via terrestre, optando pela via marítima, determinando sua posição em alto mar, permitindo assim navegar sem terra à vista.

É conhecida a competência e a grande contribuição dos gregos quanto à geometria, à qual o desenvolvimento da trigonometria está ligado. Neste

campo, a Grécia produziu grandes sábios, entre eles, Tales de Mileto (625-546 a. C.), com seus estudos de semelhança que embasam a trigonometria e seu discípulo Pitágoras (570-495 a. C.). Pitágoras é aquele a quem se atribui a demonstração do teorema que leva seu nome: *“O quadrado sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma dos quadrados sobre os catetos”* (Eves, 1995, p. 103). A relação fundamental da trigonometria tem a ver com este teorema.

É conhecido o fato de Tales, quando de sua visita ao Egito, ter calculado a altura da grande pirâmide de Queops. Provavelmente ele deve ter procedido conforme indica a figura a seguir (Hogben, 1970, p. 156), associando as noções de triângulo isósceles e de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é  $180^\circ$ .

No instante em que o Sol está com um ângulo de elevação de  $45^\circ$ , a sombra da estaca toca o círculo de raio igual à altura da estaca (portanto, sombra=altura), a altura da pirâmide é igual ao comprimento da sombra mais a metade da base.

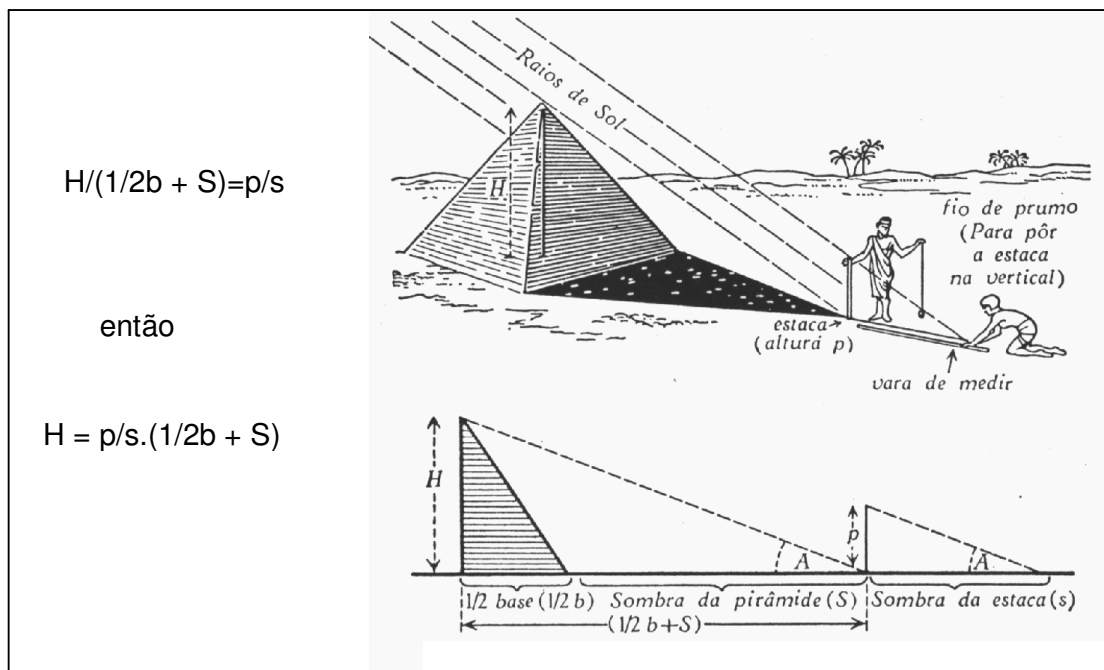


**Figura 3.1:** Um processo de medir a altura de uma pirâmide.

Mas, na região onde se localizam as pirâmides, o Sol só tem o ângulo de elevação  $45^\circ$  ao meio-dia, em dois dias do ano, tornando impraticável a solução acima. Então, atribui-se a Tales uma solução baseada na relação entre triângulos semelhantes.

Tales fez, conforme ilustra a figura a seguir (Hogben, 1970, p. 161); com que uma estaca fosse colocada no prumo, formando com a sombra dessa estaca e o raio do Sol um triângulo retângulo semelhante ao triângulo formado pela altura da pirâmide, sua sombra (acrescida da metade da base) e os raios de Sol.

Considerando a semelhança entre esses dois triângulos, os lados correspondentes estão, entre si, na mesma razão, isto é:



**Figura 3.2:** Como Tales mediu a altura da grande pirâmide.

Relativo ao problema da navegação e à astronomia, encontramos entre os gregos grandes matemáticos que contribuíram com medições, cálculos e idéias, que poderíamos considerar como os primeiros estudos com indícios de trigonometria. Podemos citar, por exemplo, Hípsicles (segunda metade do segundo século a.C.), Aristarco de Samos (310-230 a.C.), Eratóstenes de Cirene (276-194 a.C.), Hiparco de Nicéia (180-125 a.C.) e Ptolomeu (100-180 d.C.).

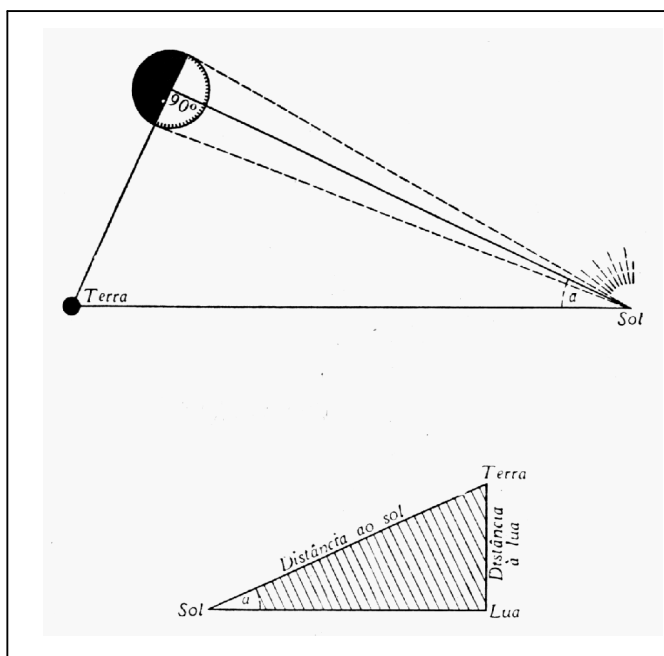
Hipsicles é o provável autor de uma obra de astronomia, *De ascensionibus*, a partir do qual pode ter sido adotada a divisão do círculo em 360 partes, uma influência dos babilônios, ao aplicar essa divisão ao zodíaco, ou seja, considerou um dia completo dividido em 360 partes.

Aristarco de Samos procurou fazer uma estimativa das distâncias relativas do Sol e da Lua, assim como de seus tamanhos relativos. Observando, conforme ilustra a figura a seguir (Hogben, 1970), o ângulo  $\alpha$  formado pela Lua, tal

como é vista de madrugada, o Sol e a Terra no momento exato em que só metade do disco lunar é visível, usou pela primeira vez a aproximação do seno de um ângulo pequeno ( $3^\circ$ ) e

deduziu que a distância da Terra ao Sol é maior do que 18 vezes e menor do que 20 vezes a distância da Terra à Lua. Não tendo sido desenvolvidas as tabelas trigonométricas, Aristarco recorreu a teoremas geométricos de então.

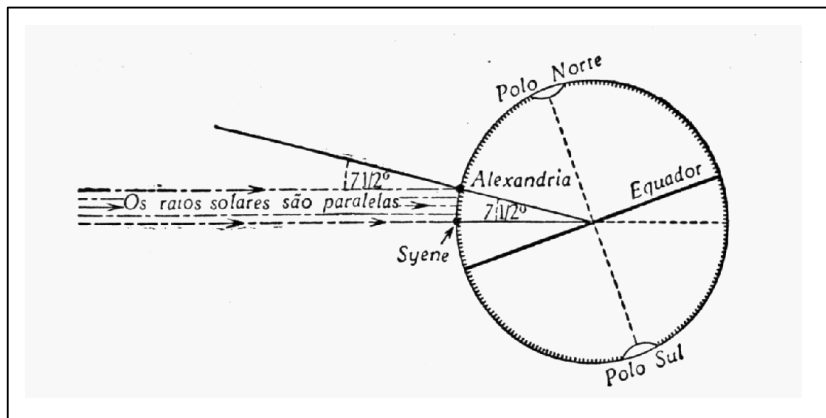
Aristarco sabia que num dado



**Figura 3.3:** Obtenção das distâncias Terra-Lua e Terra-Sol feita por Aristarco.

círculo a razão do arco para a corda diminui quando o arco diminui de  $180^\circ$  para  $0^\circ$ , aproximando-se do limite 1. Outro fato notável, digno de registro, é de que Aristarco, antecipando-se a Copérnico por mais de um milênio e meio, assumiu um universo heliocêntrico.

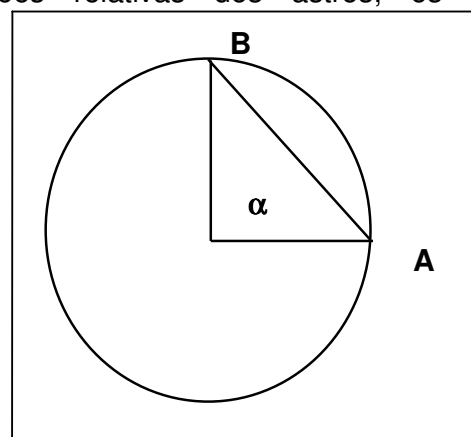
Eratóstenes de Cirene, usando semelhança de triângulos e razões trigonométricas, calculou a distância



entre dois pontos **Figura 3.4:** Obtenção da medida do raio e da circunferência da Terra feita por Eratóstenes.

da superfície terrestre, o raio e a medida da circunferência da Terra, dados de muito interesse para os astrônomos. Conforme ilustra a figura a seguir (Hogben, 1958, p. 248), Eratóstenes observou que ao meio dia, no dia do solstício de verão, o Sol brilhava diretamente para dentro de um poço em Siene (hoje Assuã), no Egito. Ao mesmo tempo em Alexandria, também no Egito, tomada como estando no mesmo meridiano e 5000 estádios ao norte de Siene, verificou-se que o Sol lançava uma sombra indicando que a distância angular do Sol ao zênite era um cinquentavos de um círculo ( $7\frac{1}{2}^\circ$ ). Isso forneceu um comprimento da circunferência terrestre de 250.000 estádios, correspondente a 25.000 milhas ou 37.000 quilômetros.

Interessados em estudar as posições relativas dos astros, os astrônomos procuravam calcular o comprimento da corda geométrica de um círculo, em função do ângulo central correspondente, ou subentendida por um ângulo central  $\alpha$ , ou arco AB, conforme ilustra a figura ao lado.

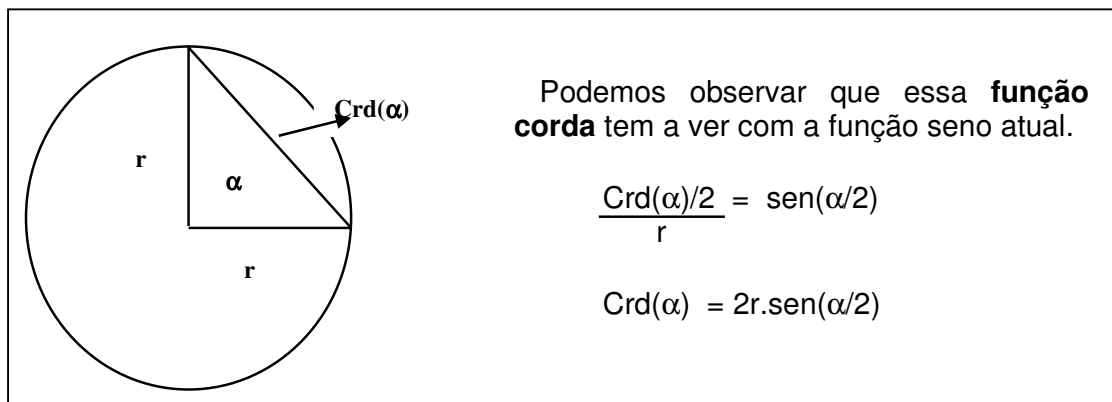


**Fig. 3.5:** Relacionando comprimento da corda com o ângulo central.



*“Durante cerca de dois séculos e meio, de Hipócrates de Chios (430 a. C.) a Eratóstenes de Cirene (276-194 a C.), os matemáticos gregos estudaram as relações entre retas e círculos e as aplicaram a uma variedade de problemas de astronomia, mas disso não resultou uma trigonometria sistemática”*(Boyer, 1996, p. 110).

O grego Hiparco de Nicéia, considerado o maior astrônomo da antigüidade, é tido como o “pai da trigonometria”, tendo toda sua obra se perdido ao longo do tempo. Mas, através de documentos posteriores de astrônomos que o sucederam, sabe-se que Hiparco introduziu uma única função (razão) trigonométrica, a função corda que podemos representar por **Crd**. Considerando a figura abaixo, dado um círculo de raio  $r$ , a função corda associa, a cada ângulo central, o valor da respectiva corda geométrica.



**Figura 3.6:** Relacionando o comprimento da corda com a razão (função) seno atual.

Hiparco associou a cada corda de um arco um ângulo central correspondente e construiu o que foi presumivelmente a primeira tabela trigonométrica (“tábua de cordas”), com os ângulos variando de  $0^\circ$  a  $180^\circ$ , o que representou um grande avanço para a astronomia e por isso ele recebeu o título de “pai da trigonometria”. Ao construir sua tabela de cordas, considerou a divisão do círculo em 360 partes, provavelmente seguindo a idéia de Hipsicles, inspirado na astronomia babilônica. Atribui-se a ele a denominação

de **arco de 1 grau** a cada parte em que a circunferência ficou dividida, bem como atribui-se a ele também a divisão de cada arco de 1 grau em 60 partes, obtendo o arco de 1 minuto. Foi o primeiro a determinar com precisão o nascer e o ocaso de várias estrelas, usando para isso a tabela de cordas por ele calculada. Calculou a distância da Terra à Lua, estimando-a em 402.500 Km e sua estimativa errava de apenas 5 %. Menciona-se que Hiparco escreveu doze livros (que se perderam) sobre cálculo de cordas, incluindo uma tábua de cordas, mas sempre voltadas para aplicações astronômicas.

Hiparco foi uma figura de transição entre a astronomia babilônica e a obra de Cláudio Ptolomeu (Klaudius Ptolemaios), autor da mais importante obra da trigonometria da antigüidade. Surgida no século 2 d.C. em Alexandria, a “*Syntaxis Matemática*” (Síntese Matemática), composta de treze volumes, ficou conhecida como *Almagesto*, palavra derivada do árabe, significando “A maior” (Al magest), pois os tradutores árabes a consideravam a maior obra existente na época em astronomia.

*“Da vida de seu autor, sabemos tão pouco quanto do autor de Os Elementos: não sabemos onde ou quando Euclides e Ptolomeu nasceram”* (Boyer, 1996, p. 112).

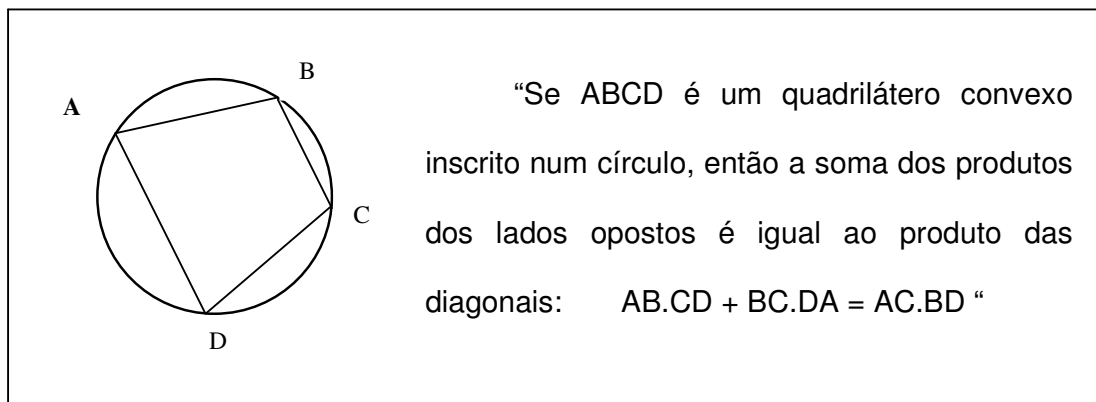
No *Almagesto*, Ptolomeu desenvolve uma teoria geocêntrica para explicar o sistema solar e teve grande influência devido à clareza e à elegância de seu estilo. Foi considerado o *trabalho-modelo* de astronomia, até que Nicolau Copérnico (1473-1543) e Johann Kepler (1571-1630) introduziram a teoria heliocêntrica do sistema solar.

Grande parte deste trabalho está baseado nos estudos de Hiparco além dos demais astrônomos da época, sendo reconhecida como uma obra de

sistematização e compilação da série de conhecimentos bastante difundidos até então. A contribuição original de Ptolomeu consiste em uma teoria do movimento dos cinco planetas, para o qual Hiparco e os demais tinham apenas coletados dados em observações.

O Almagesto sobreviveu aos estragos do tempo e por isso temos não só suas tabelas trigonométricas mas também uma exposição dos métodos usados em sua construção.

Dos treze livros que compõem o Almagesto, Ptolomeu desenvolveu a trigonometria nos capítulos décimo e onze do primeiro livro: o capítulo onze consiste em uma tabela de cordas (ou seja, de senos), cuja construção e cálculos são explicados no capítulo décimo. Para a construção desta tabela, partiu do fato de que em um quadrilátero inscrito vale a relação conhecida como Teorema de Ptolomeu:



**Figura 3.7:** Teorema de Ptolomeu

A obra é essencialmente astronômica, mas os matemáticos têm interesse devido às identidades trigonométricas que Ptolomeu derivou para ajudá-lo a reunir dados para sua tábua de cordas (que é aproximadamente uma tábua de senos).

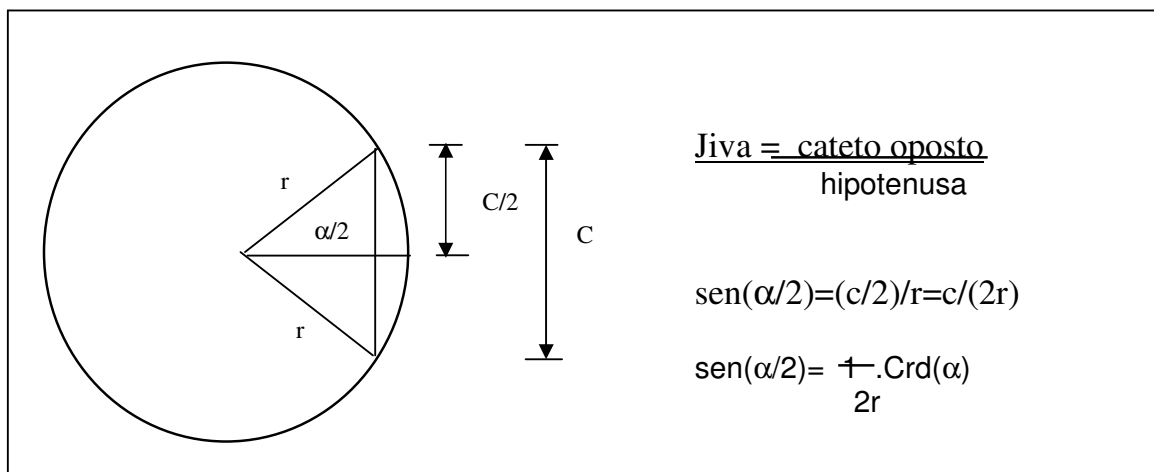
Partindo do teorema acima e operando com as cordas, Ptolomeu deduziu o que em notação moderna corresponde à expressão  $\sin(a \pm b)$  e, além disso, demonstrou que  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ , onde  $\alpha$  é um ângulo agudo. A circunferência foi dividida em 360 partes (agora chamadas graus), o diâmetro dividido em 120 porções e cada uma dessas foi dividida em 60 partes chamadas, de acordo com a primeira versão latina do Almagesto de 1155, “partes minutae primae” (primeiras menores partes ou sexagésimos). Cada uma dessas últimas, por sua vez, foi dividida em 60 partes (sexagésimo do sexagésimo) chamadas “partes minutae secundae” (segundas menores partes). Daí os termos “minuto” e “segundo”. A tábua de cordas de Ptolomeu fornece a medida das cordas de  $1/2^\circ$  a  $180^\circ$ , de meio em meio grau.

*“Com as técnicas expostas em seu livro, Ptolomeu é capaz de resolver qualquer triângulo, decompondo-o convenientemente em triângulos retângulos. A exposição da trigonometria dada por Ptolomeu no Almagesto foi padrão até o renascimento. Como já dissemos, a trigonometria era usada pelos gregos em astronomia. Eles nunca se preocuparam em utilizá-la em topografia, campo em que hoje ela tem emprego constante. A Topografia grega (como a romana) sempre recorreu somente à Geometria Euclidiana”* (Pitombeira, 1992 , Apêndice B, p. 104).

Os sucessores dos gregos na história da matemática foram os hindus, com os quais a trigonometria continuou como ferramenta aplicada à astronomia. A partir do século V d.C. passaram a trabalhar com a semi-corda, o que corresponde ao atual seno, à qual chamavam jiva. Isto ocorreu porque os hindus não seguiram o mesmo caminho de Ptolomeu, que relacionava as cordas de um círculo com os ângulos centrais correspondentes. Nas

aplicações da função corda, era necessário dobrar o arco antes de usá-lo na tábua de cordas. Naturalmente, era mais conveniente ter uma tábua na qual o próprio arco fosse a variável independente. Finalmente alguém pensou em calcular e usar metade da corda de um arco duplo. Quando isso foi feito nasceu a função seno.

No texto épico hindu de 400 d.C., Surya Siddhanta (Sistemas do Sol), escrito em sânscrito e em versos, a relação usada (“jiva”) era entre a metade da corda e a metade do ângulo central correspondente. Isto possibilitou a visão de um triângulo retângulo na circunferência,



**Figura 3.8:** O “Jiva” hindu

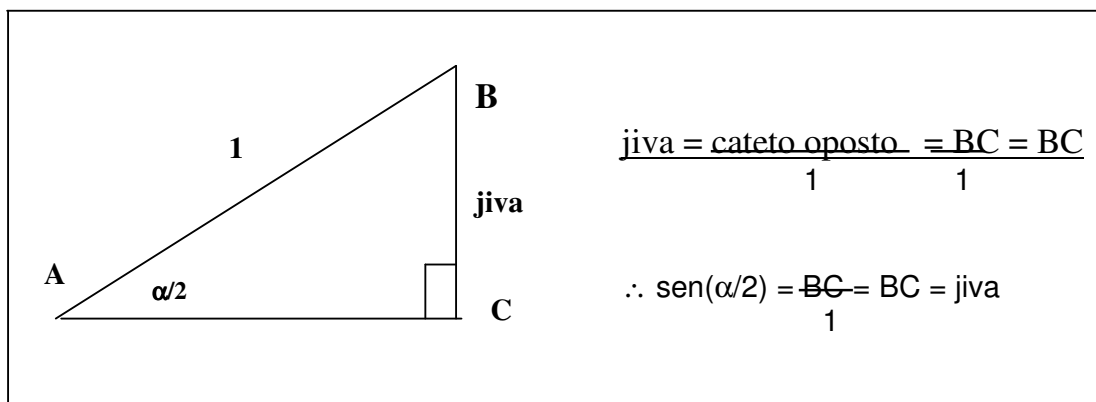
Definiam o jiva como sendo a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa.

A trigonometria hindu era essencialmente aritmética, ao contrário da grega, muito mais geométrica. Com as mudanças introduzidas (inclusive quanto ao comprimento do raio considerado), as tabelas de Ptolomeu foram refeitas, utilizando os métodos de tabulação.

Por volta de 800 d.C. a trigonometria chega ao mundo islâmico onde foi muito desenvolvida e aplicada, ainda, na astronomia e cartografia. Os árabes

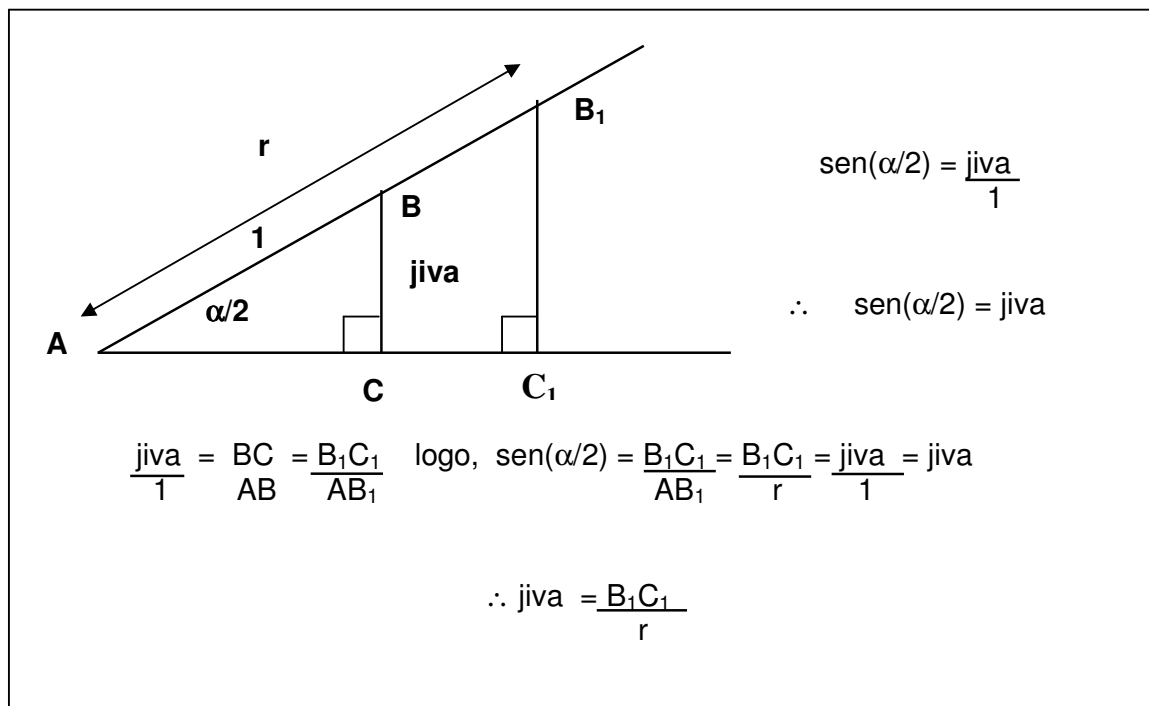
herdaram a trigonometria dos gregos e hindus, adotando o ponto de vista aritmético destes últimos.

Podemos dizer que a influência árabe começou com a fundação da Escola de Bagdad, no século IX, e um de seus maiores expoentes foi o príncipe da Síria Mohamed-ben-Geber, conhecido como Al Battani (850-929 d.C.), ou, na versão latina, Albategnius, chamado o Ptolomeu de Bagdad. Os estudos de Al Battani ficaram entre o Almagesto e Siddhanta, e foi sob sua influência que a trigonometria hindu foi adotada pelos árabes, principalmente a partir de sua genial idéia de introduzir o círculo de raio unitário e com isso demonstrar que a razão jiva é válida para qualquer triângulo retângulo, independente do valor da medida da hipotenusa.



**Figura 3.9:** A idéia do raio 1 de Al Battani

Se um triângulo retângulo tem um ângulo  $\alpha/2$ , então quaisquer que sejam as medidas do cateto oposto e da hipotenusa, pode-se afirmar, considerando ainda o Teorema de Tales e a figura a seguir, que:



**Figura 3.10:** Usando o Teorema de Tales para construir a tabela de Al Battani

Al Battani estava interessado em calcular a altitude do Sol e para isso foi necessário usar as razões trigonométricas e construir tábuas de senos (ou meias-cordas) mais precisas que as existentes na época, embora o nome seno ainda não ter sido utilizado, mas sim jiva (meia-corda).

Destacamos também o astrônomo persa Nasîr ed-dên al-Tûsî (“Nasir Eddin”), autor, em 1250, do primeiro trabalho (Tratado Sobre o Quadrilátero) no qual a trigonometria plana apareceu como uma ciência por ela própria, desvinculada da astronomia. Isto seria retomado na Europa, no século XV, quando Regiomontanus estabeleceu a trigonometria como um ramo da Matemática.

Com o fim do domínio mouro na Península Ibérica e o declínio da Escola de Bagdad, os estudiosos ocidentais puderam ter acesso aos textos clássicos

gregos e hindus, através da versão em árabe. Iniciou-se então, especialmente a partir do século XII, um grande trabalho de tradução de textos.

Por exemplo, o que tornou Ptolomeu conhecido no Ocidente foi uma tradução para o latim, a partir de uma versão árabe, do *Almagesto*, feita por Gerardo Cremona (1114-1187), em 1175. Dos tradutores na Espanha, este talvez tenha sido o maior deles, sendo atribuídos a ele mais de 85 obras. Entre outros tradutores podemos citar Platão de Tivoli, Adelardo de Bath e Robert de Chester. Assim, o Ocidente que passara mil anos nas trevas passou a ter acesso à herança grega que havia sido conservada, na medida do possível, pelos árabes.

Alguns atribuem a Gerardo de Cremona e outros a Robert de Chester, o uso da palavra *seno* para meia-corda. De qualquer forma, todos concordam que se trata de um fato relativo à tradução. A palavra meia-corda, em sânscrito, língua usada pelos antigos hindus, na sua forma simplificada, passou a ser representada pelo termo *jiva*. No entanto, conforme transformações que ocorrem com as línguas de maneira geral, os árabes acabaram grafando-a para *jiba*, uma vez que na pronúncia árabe j e b se confundem como labiais oclusivas. Pelo mesmo motivo, a palavra sânscrita *jiva* tem as mesmas consoantes que a palavra árabe bem familiar *jaib*. *Jaib*, em árabe, significa *baía* ou *enseada*. Assim, foi natural que os tradutores do árabe para o latim e que desconheciam o sânscrito, supusessem que lidavam com tabelas de *jaib*, e traduziram este termo pela palavra latina correspondente a *baía* ou *enseada*, *sinus*, que deu origem ao nosso *seno*.

A partir do Renascimento, época da expansão marítima europeia que exigiu o desenvolvimento da Cartografia, a trigonometria passou a ser utilizada



em Cartografia e em Topografia, como já proposto por Fibonnaci (1170-1250) em sua obra “Practica Geometriae”, de 1220, que trata de uma aplicação árabe na agrimensura.

Outro fator de desenvolvimento da trigonometria foi a necessidade de refazer todos os cálculos da astronomia posicional, com a adoção progressiva do sistema heliocêntrico de Copérnico.

Grande parte do desenvolvimento da trigonometria, no Renascimento, é devido aos alemães. Dentre eles, temos George Peurbach (1423-1461), de Viena, que traduziu o Almagesto diretamente do grego, livrando-o dos erros introduzidos por tradutores e copistas sucessivos e começou a calcular tabelas de senos mais precisas, exigidas pelas aplicações. Seu trabalho foi continuado por seu aluno João Regiomontano (1436-1476), que assinava “Regiomontanus”, o qual conhecia os trabalhos sobre trigonometria de Nasir Eddin e a partir deles, organizou a Trigonometria como uma ciência, parte da matemática, independente da astronomia.

Regiomontanus escreveu “De triangulis” (1464), um Tratado Sobre Triângulos, em cinco livros, contendo uma trigonometria completa, onde estuda cuidadosamente a resolução de triângulos, usando *trigonometria do triângulo retângulo*. Neste livro, encontra-se uma demonstração da Lei dos Senos, o cálculo de novas tabelas trigonométricas, aperfeiçoando a dos senos de Peurbach e a introdução na trigonometria européia do uso das tangentes, incluindo-as em suas tábuas. Podemos dizer que foi ele quem lançou as fundações para os futuros trabalhos de trigonometria plana e esférica.

No livro “Canon Doctrinae Triangulorum” de Joachim Rhaeticus (1514-1576), em Leipzig, 1551, as seis funções trigonométricas foram definidas como

funções do ângulo, em vez de funções do arco e subentendidas como **razões**, pela primeira vez, embora não tenha dado nomes para seno, co-seno ou co-secante, exceto perpendiculum, basis e hypotenusa. Rhaeticus retomou, um século depois, as tábuas de Regiomontanus de 1464, com maior rigor nos cálculos. Aumentou a precisão para onze casas decimais e os senos, co-senos, tangentes e secantes foram calculados de minuto em minuto para os arcos do primeiro quadrante e de dez em dez segundos para o arco de  $1^\circ$ . Ele foi o primeiro a adotar a organização das tábuas em semiquadrantes, dando os valores dos senos, co-senos e tangentes de ângulo até  $45^\circ$  e completando a tabela com o uso da igualdade  **$\text{sen } x = \text{cos}(\pi/2 - x)$** .

Viète (1540-1603) foi quem adicionou um tratamento analítico à trigonometria, em 1580. Ele foi o primeiro matemático a usar letras para representar coeficientes gerais, o que representou grande progresso no campo da Álgebra. Também construiu tábuas trigonométricas e calculou o sen  $1'$  com treze casas decimais. Viète iniciou o desenvolvimento sistemático de cálculo de medidas de lados e ângulos nos triângulos planos e esféricos, aproximados até minutos, e com a ajuda de todas as seis funções trigonométricas. Além disso, foi ele que introduziu métodos gerais de resolução em matemática.

É de Viète a idéia de decompor em triângulos retângulos os triângulos oblíquos, para determinar todas as medidas dos seus lados e ângulos, conforme está em sua obra "Canon Mathematicus".

A figura seguinte na trigonometria foi Pitiscus que publicou um tratado, em 1595, no qual corrigiu as tábuas de Rhaeticus e modernizou o tratamento do assunto. Conforme já citamos anteriormente neste nosso texto, a palavra **trigonometria** aparece pela primeira vez, como título de um livro seu.

A ênfase da trigonometria começou a passar da solução de triângulos para a investigação de relações funcionais, revelou-se mais útil e ampla do que inicialmente se imaginava e desempenha uma posição de grande importância em áreas como Cálculo e Análise Matemática.

Assim, como nossa pesquisa se limita às razões trigonométricas no triângulo retângulo, acreditamos poder interromper o estudo histórico neste ponto, em que a trigonometria passou a ser tratada como ciência e ter fundamentos e estruturas bem definidos, conforme concebida e estudada atualmente, especialmente a trigonometria no triângulo retângulo, ou seja, passou a ser objeto de estudo em vez de ferramenta.

Observamos, em nossa pesquisa histórica, que a trigonometria evoluiu da experimentação, da realidade à generalização. Até ser incorporada às relações funcionais, ela partiu de aplicações concretas, chegando a se constituir numa ciência, parte da Geometria. Dessa forma, podemos tirar como contribuição da história o fato de, ao trabalharmos com os alunos, seguirmos este modelo: a partir do concreto, ou seja, de algo que ainda não é ciência, estando mais ligado à realidade, caminhar para a formalização, trabalhando o ponto de vista geométrico. Isto não significa que reproduziremos os fatos da história, mas sim a adaptaremos à realidade de hoje a formação desse saber matemático, evoluindo de instrumento até se constituir em uma ciência, incorporada pela geometria.

Assim sendo, vamos iniciar o nosso estudo de trigonometria por questões da vida prática, tal como a utilização de sombra para medir a altura de uma árvore e enveredaremos pela geometria.

### 3.1.2. A Trigonometria hoje

No desenvolvimento histórico da Trigonometria, vimos que, a partir de um dado momento (século XVI), ela passou a ser encarada como uma ciência. Até então estava vinculada à astronomia como ferramenta e não tinha uma identificação própria. A partir dessa época, passou a ter uma estrutura e desenvolvimento próprios, tornando-se um objeto de estudo dentro da matemática. Conseqüentemente, passou a ter aplicações em outras áreas que não somente a astronomia.

Não pretendemos aqui dar uma definição de trigonometria. Assim como a matemática é de difícil definição, a ponto de não se defini-la, entendemos que não devemos fazer o mesmo com esta sua parte em questão.

Entretanto, achamos importante para a nossa pesquisa investigarmos a concepção que se tem a respeito de trigonometria, como é entendida e explicada hoje pelos matemáticos, pelos autores de livros didáticos, dicionários e enciclopédias.

No dicionário da língua portuguesa Aurélio, por exemplo, encontramos uma definição sucinta de trigonometria, relacionando-a à resolução de triângulos, e, a nosso ver, tratando as razões trigonométricas que relacionam lados e ângulos, como funções, num sentido mais amplo do que somente o aspecto geométrico.

“Trigonometria

*Parte da matemática em que se estudam as funções trigonométricas e se estabelecem os métodos de resolução de triângulos”*(Aurélio, 1988, p. 650).

Já na Enciclopédia Barsa, encontramos uma definição mais detalhada. Nela também se dá ênfase à resolução de triângulos, fica explícito seu enquadramento na Geometria e também usa a palavra *funções* no lugar de razões. Estende a definição, quanto ao aspecto funcional, salientando uma característica importante das funções trigonométricas que é a periodicidade.

*“Trigonometria*

*Parte da matemática que se ocupa da obtenção dos dados de um triângulo a partir de um número mínimo de elementos conhecidos. ...extensão da Geometria, estabelecendo funções entre ângulos e segmentos. ...modernamente, a trigonometria constitui um excelente operador do cálculo integral, exprime também com facilidade e elegância muitos fenômenos da eletricidade, da acústica e notavelmente fenômenos que se exprimem matematicamente por funções periódicas”(Barsa, 1991, p. 210, vol. 15).*

Buscando num dicionário específico de matemática, encontramos em Imenes & Lellis uma definição que, antes de tudo, trata do significado da palavra. Dá ênfase ao aspecto geométrico, não se estendendo ao algébrico, quando destaca as *razões trigonométricas* ao invés de *funções trigonométricas*, como convém, a nosso ver, a um livro destinado em nível de primeiro grau.

*“Trigonometria*

*Palavra que vem de trigono (triângulo) e metria (medida). É um ramo da Geometria no qual se estudam métodos para calcular medidas de lados ou ângulos de um triângulo, a partir de algumas informações sobre esse triângulo. As razões trigonométricas são a base desses cálculos. Isso é útil, depois, para qualquer polígono, pois qualquer um deles é formado por triângulos. É um conhecimento imprescindível para engenheiros, topógrafos, astrônomos, etc...”(Imenes & Lellis, 1998, p. 316).*

Paulo Boulos e Renate Watanabe, autores de livros didáticos, escrevem, em um de seus livros, que a trigonometria tem a ver com a resolução de triângulos. Ou seja, determinar a medida de todos os lados e ângulos de um triângulo, a partir de alguns dados do mesmo (Boulos & Watanabe, 1980).

Luiz Roberto Dante e José Ruy Giovanni, em um de seus livros para o ensino médio, afirmam que a trigonometria estuda as relações das medidas dos lados e dos ângulos de um triângulo e, em particular, do triângulo retângulo (Dante & Giovanni, 19??, p. 269).

De maneira geral, nos livros por nós analisados, observamos o entendimento de trigonometria como aquela que relaciona distância (comprimento) com ângulo.

Edward S. Kennedy, em seu livro referente à história da trigonometria, afirma que a partir do momento em que passou a ocorrer o desenvolvimento desta ciência em separado da astronomia, surgiu a trigonometria genuína, ou seja, aquela que tem como objeto de estudos o triângulo plano ou esférico, seus lados e ângulos.

Tanto Kennedy quanto Elon Lages Lima (IMPA-RJ) escrevem sobre a ameaça ao desenvolvimento da trigonometria (principalmente como ramo independente) com a criação do Cálculo.

*“Com a criação do Cálculo Infinitesimal e do seu prolongamento que é a Análise Matemática, surgiu a necessidade de atribuir às noções de seno, cosseno e suas associadas tangente, cotangente, secante e cossecante, o status de função real de uma variável. Assim, por exemplo, ao lado de  $\cos \hat{A}$ , o cosseno do ângulo  $\hat{A}$ , tem-se também  $\cos x$ , o cosseno do  $n^{\circ}$  real  $x$ , isto é, a função  $\cos: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ . Analogamente, têm-se as funções  $\sin$ ,  $tg$ ,  $cotg$ ,  $sec$  e*

*cossec, completando as funções trigonométricas*” (Lima, 1996, p. 209).

As funções trigonométricas são periódicas e, assim, podem ser adaptadas para descrever os fenômenos de natureza periódica, oscilatória ou vibratória. Como muitos fatores naturais estão relacionados à periodicidade, a “antiquada” trigonometria foi incorporada pela nova teoria, a Análise Matemática, e passou a ser um componente essencial em aplicações tais como: análise de sistemas elétricos (corrente alternada), ondas sonoras, o movimento dos planetas, circulação do sangue, batimentos cardíacos, etc...

Outro fator importante, no processo de transição da trigonometria, deve-se à apresentação de funções trigonométricas por meio de séries infinitas, o que permitiu, por exemplo, a obtenção dos valores de seno e de co-seno sem recorrer a construções ou considerações do ponto de vista geométrico. Esta é a base sobre a qual se obtém os valores das razões (funções) trigonométricas numa calculadora.

$$\text{sen } x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

e

$$\text{cos } x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

E como

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

isto permitiu a relação entre a trigonometria e as funções exponenciais.

Assim, observamos que as funções trigonométricas passaram a ter uma enorme importância na Matemática e na Física.

*“...A trigonometria começou como um instrumento de mensuração de figuras geométricas; hoje nós a concebemos como um conjunto*

*de relações entre números complexos, sem nenhuma necessidade de recorrer a arcos ou ângulos”.*

$$\operatorname{sen} z = (e^{iz} - e^{-iz})/2i \quad \text{e} \quad \operatorname{cos} z = (e^{iz} + e^{-iz})/2$$

(Kennedy, 1992, p.26).

Mas a trigonometria manteve sua identidade à parte, tanto como matéria escolar, como nos campos da topografia, agrimensura e navegação, sendo considerado como ferramenta de grande valia os trabalhos realizados nesses campos (Kennedy, 1992).

Concluindo, como a presente pesquisa se limita em nível de 8<sup>a</sup> série do Ensino Fundamental, esperamos que, após a aplicação de nossa seqüência de ensino, os alunos tenham uma visão da trigonometria como parte da geometria, portanto, sem o envolvimento do conceito de função de maneira explícita. Entendemos que ao relacionarmos medida de segmento com medida de ângulo, estamos implicitamente envolvendo o conceito de função. Entretanto, ao abordarmos somente os aspectos geométricos das razões trigonométricas, esperamos deixar os alunos aptos à abordagem das razões como funções trigonométricas.

Assim sendo, nossa expectativa é que os alunos, ao final do trabalho entendam a trigonometria como é proposta por Imenes & Lellis: parte da matemática que estuda a resolução de triângulos, tendo por base as *razões entre as medidas dos lados* e a sua relação com *as medidas dos ângulos*, existentes em triângulos retângulos semelhantes. Ou mais resumidamente: a parte que estuda a relação existente entre a medida de um segmento (ou distância) e a medida de ângulo, tendo por base triângulos retângulos semelhantes.



### **3.2. A TRIGONOMETRIA NA ESCOLA**

Acreditamos que o livro didático tenha uma influência significativa sobre o professor, no que se refere à linguagem, à profundidade e ao desenvolvimento do conteúdo. Assim, consideramos relevante observar em cada livro, como se dá a transposição do saber “sábio” para o saber “escolar”, a descontextualização versus contextualização e a seqüência didática proposta por cada autor.

Por este motivo, analisamos seis livros didáticos dentre aqueles que consideramos os mais adotados e um, de modo especial, mais antigo (de 1979) e esgotado, com uma proposta baseada na Matemática Aplicada.

Como o sistema de ensino está inserido num sistema maior, representado pela sociedade e, de modo especial, pelo governo, analisamos também a Proposta Curricular do Governo do Estado de São Paulo para o ensino de Matemática. Supomos ser esta Proposta a norteadora (uma referência) do ensino de modo geral e, em especial, do ensino público.

#### **3.2.1. Análise da Proposta Curricular Vigente**

O Governo do Estado de São Paulo oferece duas propostas curriculares, sendo uma para o Ensino Fundamental e outra para o Ensino Médio.

Ambas foram elaboradas por equipes de especialistas da Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas (CENP) da Secretaria de Estado da Educação do Governo do Estado de São Paulo, cada uma assessorada por dois pesquisadores, dedicados à área de Educação Matemática.

Ao analisarmos a Proposta Curricular Para o Ensino de Matemática – Ensino Fundamental, 5ª edição, de 1997, constatamos que trigonometria não consta dos conteúdos a serem desenvolvidos.

Observamos, nesta Proposta, em nível de 8ª série (página 153), série na qual tradicionalmente se desenvolveria trigonometria, o seguinte:

**“GEOMETRIA**

Semelhança : noção de semelhança, semelhança de figuras planas.  
 Teorema fundamental da proporcionalidade: verificação experimental e demonstração.  
 Teorema de Tales e aplicações.  
 Verificação experimental e demonstração dos casos de semelhança de triângulos.  
 Relações métricas no triângulo retângulo.  
 Demonstração do Teorema de Pitágoras”.

***(Proposta Curricular, página 153)***

**Quadro 3.1:** Proposta de Geometria para a 8ª série do Ensino Fundamental (ensino público)

Entretanto, como viríamos observar posteriormente, ao visitar duas escolas públicas e duas particulares, quanto à análise de livros didáticos, a Trigonometria no Triângulo Retângulo é tratada na 8ª série. Portanto, a Proposta é propriamente dita o que se propõe e não uma norma a ser seguida.

Na Proposta Curricular Para o Ensino de Matemática do 2º Grau, 3ª edição, de 1992, a Trigonometria aparece como uma das prioridades, como se pode constatar, por exemplo, à página 14 :

*“..., sugerimos que o aluno trabalhe prioritariamente com os seguintes conteúdos: Funções, Geometria, **Trigonometria**, Análise Combinatória, Probabilidade, Geometria Analítica, Matemática Financeira e Estatística”.*

Na página 15, complementada com a 16, encontramos :

*“..., sugere-se a seguinte distribuição de conteúdos,...*

*1ª série: Trigonometria no triângulo retângulo.*

*2ª série: Trigonometria da 1ª volta”.*

Como aspectos relevantes no tratamento da trigonometria, à página 20 encontramos :

*“Quanto às questões a serem tratadas em Trigonometria, consideramos que, em nível do Ensino Médio, as idéias que têm maior significado na formação de nosso aluno são aquelas que fundamentam as relações entre medidas de lados e ângulos de um triângulo retângulo,...”*

Como parte do item “5.3 – Conteúdos, Objetivos e Comentários”, encontramos, à página 24, referência à trigonometria no triângulo retângulo, complementado com sugestões para o tratamento do assunto desde a página 67 até a 97, com 42 exemplos ditos operacionais.

Em “preocupações metodológicas” (à página 10), a Proposta dá ênfase à construção do conceito, com a participação do aluno na elaboração de seu conhecimento, buscando as concretizações (sem artificialismo) e envolvendo manipulações. Assim, a Proposta sugere, por exemplo, a construção de um instrumento rudimentar para medir ângulos de visada utilizando transferidor e canudinhos de refrigerantes; propõe a divisão dos alunos em pequenos grupos e que cada grupo determine o ângulo de visada de um poste.

Sugere “iniciar o estudo das razões trigonométricas no triângulo retângulo com a tangente, devido à sua maior aplicação em problemas em que calculamos distâncias inacessíveis como a altura de um poste, de um edifício ou de um morro”. Do total de 42 exemplos (de atividades), a definição de tangente aparece antes do exemplo 5. A nosso ver, as sugestões para o tratamento da Trigonometria constituem um roteiro (etapas) de atividades que

podem ser seguidas pelo professor. Nessa seqüência de atividades propostas, não há referência a aspectos históricos quanto à trigonometria.

Recomenda-se que a linguagem utilizada seja próxima da linguagem do aluno, informal.

Segundo a Proposta, os problemas apresentados procuram contribuir para a construção do conceito, como, por exemplo, ao sugerir aos alunos que elaborem sua própria tabela trigonométrica, e são, na medida do possível, contextualizados, não-repetitivos e em quantidade que nos parece adequada. Acreditamos que essas atividades sugeridas procuram estimular a capacidade de resolver problemas.

Entendemo-nos na análise da Proposta do Ensino Médio, apesar de nosso trabalho se dirigir à 8ª série do Ensino Fundamental, pois esta se constitui na única referência oficial sobre a abordagem da trigonometria no triângulo retângulo. Entendemos que seria o caso de adaptar as recomendações acima em nível (cognitivo, biológico e psicológico) do aluno de Ensino Fundamental.

#### *PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS*

Este trabalho estava em fase adiantada de estruturação e definição, tendo como referência as idéias da Educação Matemática, a Proposta Curricular e o sistema escolar paulista, quando começou a acontecer o debate e a divulgação da proposta do governo federal, qual seja, os Parâmetros Curriculares Nacionais. Embora não tenham sido esses a nossa orientação para o trabalho, achamos de grande importância uma breve análise a respeito.

O documento (livro) Parâmetros Curriculares Nacionais<sup>2</sup> (5ª a 8ª séries): Matemática constitui uma **proposta** da Secretaria do Ensino Fundamental do Ministério da Educação e do Desporto (Brasília – 1998). Pretende este documento fornecer subsídios para o debate nacional sobre o ensino da Matemática.

O PCN é composto por duas partes.:

A primeira parte do documento trata do ensino da Matemática de maneira geral, analisando brevemente os últimos movimentos de reorientação curricular e propõe, considerando o atual quadro do ensino de Matemática no Brasil, uma nova abordagem, realista, em contraposição à tradicional.

O eixo orientador do PCN é a *construção da cidadania*, enfatizando sobremaneira a participação crítica e a autonomia do aluno. Assim, visa constituir-se num referencial que oriente a prática escolar de forma a garantir a toda criança e jovem brasileiros, o acesso a um conhecimento matemático que lhes possibilite de fato sua inserção, como cidadãos, no mundo do trabalho, das relações sociais e da cultura.

O PCN de Matemática leva em conta duas grandes questões: desmistificar a matemática (hoje forte filtro social na seleção dos alunos) e o ensino de matemática de melhor qualidade (adequando-o às novas demandas sociais e científicas). Essas questões trazem como conseqüência as mudanças curriculares que vão de encontro a crenças, concepções e valores muito arraigados. Uma das marcas desses parâmetros é a ênfase no estabelecimento de conexões da matemática com os conteúdos relacionados

---

<sup>2</sup> Passaremos a tratar os Parâmetros Curriculares Nacionais por “PCN” e na 3ª pessoa do singular, com o propósito de nos referir ao documento (livro).

aos Temas Transversais – Ética, Pluralidade Cultural, Orientação Sexual, Meio Ambiente, Saúde, Trabalho e Consumo.

Quanto aos objetivos da matemática no ensino fundamental, o PCN propõe objetivos que levem o aluno a valorizar a matemática como instrumento para compreender o mundo à sua volta e de vê-la como área do conhecimento que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas.

Quanto aos conteúdos, adotam como critérios para seleção sua *relevância social* e sua contribuição para o desenvolvimento intelectual do aluno em cada ciclo. Ainda quanto aos conteúdos, o PCN salienta a necessidade de explorá-los não apenas em sua *dimensão conceitual* (“saber”) ou na *dimensão de procedimentos* (“fazer”), mas também na de *atitudes* (“investigar, levantar hipóteses, argumentar, ser perseverante na busca de soluções, ter espírito de colaboração, respeito ao trabalho dos colegas, etc...”).

O PCN de Matemática destaca também os avanços da Educação Matemática que têm sido pouco considerados pelas práticas escolares.

No PCN de Matemática, a avaliação passa a fazer parte do processo ensino-aprendizagem, assumindo uma dimensão diagnóstica. Assim, os critérios de avaliação fornecem ao professor elementos que possam fazer reorganizações sistemáticas da atividade pedagógica, de modo a garantir a aprendizagem.

O PCN considera o ensino fundamental dividido em 4 ciclos, sendo o último aquele que compreende a 7<sup>a</sup> e 8<sup>a</sup> séries.

A segunda parte do PCN trata do processo ensino-aprendizagem de maneira específica, apresentando objetivos em termos de capacidades a

serem desenvolvidas em cada ciclo, indicam-se conteúdos e orientações didáticas para o terceiro e quarto ciclos.

Em “Objetivos de Matemática Para o 4º Ciclo”, que envolve a 8ª série – nível de ensino de nossa pesquisa – e nos atendo somente à parte de geometria, o objetivo é o:

*“Desenvolvimento do pensamento geométrico, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a ... produzir e analisar transformações e ampliações/reduções de figuras geométricas planas, identificando seus elementos variantes e invariantes, desenvolvendo o conceito de congruência e semelhança...”*(PCN, 1998, p. 81).

Em “Conteúdos Propostos Para o Ensino de Matemática no 4º Ciclo”, encontramos:

- “- Desenvolvimento do conceito de congruência de figuras planas ...*
- Desenvolvimento da noção de semelhança de figuras planas a partir de ampliações ou reduções, identificando as medidas que não se alteram (ângulos) e as que se modificam (dos lados, da superfície e perímetro).*
- Verificações experimentais e aplicações do Teorema de Tales.*
- Verificações experimentais, aplicações e demonstração do Teorema de Pitágoras.”* (PCN, 1998, p. 89).

Dos objetivos e conteúdos acima, observamos que o PCN também não propõe para a 8ª série do ensino fundamental o estudo de trigonometria no triângulo retângulo. Do mesmo modo que a Proposta Curricular de São Paulo recomenda semelhança de triângulos, Teorema de Tales e de Pitágoras (pré-requisitos ao estudo da trigonometria).

Em “Orientações Didáticas Para o Terceiro e Quarto Ciclos” destacamos:

*“... a Geometria ... possibilita ao aluno desenvolver um tipo de pensamento particular para compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive ... Além disso é um campo fértil de situações-problema ...”* (PCN, 1998, p. 122).

Salienta como importante (p. 123) o *“uso de recursos como as maquetes tridimensionais, e não apenas as representações desenhadas”*.

Portanto, mesmo que a princípio não tenhamos levado em consideração o PCN, vemos que essa proposta destaca as idéias da Educação Matemática. Salienta a participação crítica do aluno, situações-problema com ênfase na contextualização (mundo real), representações concretas e trabalho em grupo, fatores por nós já considerados e que vão ao encontro do PCN.

Prosseguindo com o estudo de como se dá a trigonometria na escola, faremos a seguir uma análise de alguns livros didáticos.

### **3.2.2. Análise de Livros Didáticos**

Reconhecemos que, de maneira geral, o livro didático constitui um elemento de referência para o professor, quanto à formação de sua estratégia de abordagem de um conteúdo programático.

Assim, consideramos muito importante observar propostas de abordagem da trigonometria na escola, analisando alguns livros didáticos. Selecionamos seis livros que, segundo nosso juízo, são alguns dos comentados adotados por professores e escolas, incluindo entre eles um já esgotado (Matemática Aplicada) por sua peculiaridade.

Os livros analisados foram:



1. **Matemática 1, 2º grau**, Giovanni & Bonjorno, Editora FTD, SP – 1992.
2. **Matemática e Vida, volume 1, 2º grau**, Bongiovanni, Vissoto e Laureano, Editora Ática, SP – 1993, 2ª edição.
3. **Matemática, volume 1, 2º grau, versão Beta**, Bianchini & Paccola, Editora Moderna, SP – 1995, 2ª edição revista e ampliada.
4. **Matemática Aplicada, volume 1, 2º grau**, Trota, Imenes e Jakubovic, Editora Moderna, SP – 1979 (esgotado).
5. **Matemática, 1º grau, 8ª série**, Imenes & Lellis, Editora Scipione, SP – 1997.
6. **Matemática, 1º grau, 8ª série**, Edwaldo Bianchini, Editora Moderna, SP – 1991, 3ª edição revista e ampliada.

Todos os livros acima incluem, em seu conteúdo, a trigonometria no triângulo retângulo e um dos elementos que julgamos de imediato observar é quanto ao número de páginas dedicadas a esse assunto. A nosso entender, esse número revela a ênfase dada pelo autor ao desenvolvimento de tal assunto. Obtivemos os dados registrados na tabela 3.1.

Nº DE P. DEDICADAS À TRIGONOMETRIA NO TRIÂNG. RETÂNGULO	
LIVRO	Nº DE PÁGINAS
1	7
2	11
3	18
4	44
5	22
6	9

**Tabela 3.1**

Para analisar os livros, resolvemos considerar os seguintes critérios:

1. Aspectos históricos.
2. Formas de abordagem do conceito e da definição / Linguagem e notação.
3. Problemas e exercícios.

As considerações históricas a respeito do conceito constitui mais uma oportunidade do aluno relacionar a Matemática com a vida. Entendemos que esses aspectos colaboram com a desmistificação da Matemática, contextualizando-a, dissociando-a de uma coisa pronta e acabada, dogmática. Situando o conceito na História, o aluno deverá compreender melhor o porquê da necessidade desse conceito (a gênese) e, se possível, os erros e acertos dos matemáticos na sua construção.

Quanto à abordagem do conceito, acreditamos que a linguagem utilizada, na introdução do mesmo, deva ser a mais próxima possível da linguagem do aluno. À formulação do conceito (definição), achamos que deva acontecer após a interiorização do assunto, obtida através da participação do aluno na construção de seu conhecimento. Para nós, a aprendizagem em Matemática deve levar a um processo de construção de uma linguagem e não apresentá-la já na sua forma final, formal, acabada, sintética e formalizada.

A nosso ver, os problemas e exercícios propostos devem contribuir, inicialmente, para a construção do conceito, bem como, para, posteriormente, sintetizar as idéias já trabalhadas. Achamos que devam ser, na medida do possível, contextualizados, ou seja, modelos da realidade, levando-se em consideração a realidade do aluno, suas aspirações, seu estágio de desenvolvimento (biológico, psicológico e intelectual). Além de problemas fechados, a proposição de problemas abertos pode possibilitar diferentes soluções e até mesmo não ter solução. Levamos em consideração a existência de situações-problema cuja discussão gera conceitos e, com suas representações, uma linguagem de comunicação das observações feitas. Observamos também se os problemas propiciam o desenvolvimento do

raciocínio lógico, a capacidade de resolver problemas (ou se são meros cálculos repetitivos, treinamento) e a dialética ferramenta-objeto.

### *ASPECTOS HISTÓRICOS*

Quanto aos aspectos históricos, observamos que, de maneira geral, para se colocarem numa posição mais atualizada, em acordo com a Educação Matemática, os autores introduzem, no livro didático, citações de fatos históricos, até mesmo pequena referência à biografia de algum matemático, mas desvinculado do conteúdo que continua inalterado a várias edições. Ou seja, não há uma postura do autor em relacionar história e conteúdo.

Assim, quando há referência a fatos históricos (dos seis livros analisados, três não fazem nenhuma referência histórica), isto ocorre na introdução, como clichês e, invariavelmente, incluindo o significado da palavra trigonometria. Em dois livros, nem se comenta sobre a origem dessa palavra.

A exceção fica por conta do livro “Matemática Aplicada”, que apresenta uma introdução de dez páginas envolvendo fatos históricos e da vida (determinação de medidas inacessíveis), ou seja, contextualizando o assunto, inclusive na parte de exercícios com, por exemplo, quatro páginas sobre a construção da primeira tabela trigonométrica por Hiparco.

### *INTRODUÇÃO DO CONCEITO E DA DEFINIÇÃO*

Quatro dos seis livros analisados apresentam a definição das razões trigonométricas seguida de exemplos e exercícios de “fixação”, descontextualizados. A linguagem utilizada é formal e o texto se desenvolve

de modo que não favorece a participação do aluno na construção do conceito. Acreditamos que os autores depositam aos exercícios o crédito de formar e desenvolver os conceitos desejados; daí a razão do esquema “definição-exercícios”.

A exceção fica por conta de dois livros. Um deles, novamente, o “Matemática Aplicada”, que, além dos mesmos motivos já citados acima quanto aos aspectos históricos e/ou introdutórios, por exemplo, apresenta a primeira definição na décima página do capítulo referente à Trigonometria.

A outra exceção é ao livro “Matemática, 1º grau, 8ª série, de Imenes & Lellis” que, através de um exemplo introdutório (“medindo o que não se alcança”), apresenta uma situação em que se deseja calcular a altura de um prédio. Utilizando uma linguagem informal, os autores pretendem que o texto introdutório seja lido em classe, texto este que procura “construir” o conceito de tangente e, em seguida (ver figura na página seguinte), no item “Conversando sobre o texto”, há perguntas dirigidas aos alunos estimulando a reflexão e a discussão, com o objetivo de formar o conceito e daí a definição. Segue um outro item intitulado “Ação”, no qual é solicitado ao aluno a construção de uma tabela trigonométrica com os valores das tangentes, tabela esta que será utilizada na solução de exercícios propostos.

### *PROBLEMAS E EXERCÍCIOS*

Três dos livros apresentam evidências de preocupação com o vestibular, apresentando um grande número de exercícios (alguns testes objetivos) em comparação com a parte teórica de formação do conceito. As questões são apresentadas com referências à instituição de ensino superior na qual a

questão fez parte do exame vestibular. Portanto, acreditamos que por esse motivo predominam os exercícios descontextualizados, até mesmo pela inadequação à faixa etária, o que pode causar desinteresse da parte dos alunos. Observamos também o que nos parece evidências de treinamento (ou de “fixação”), em que o conceito aparece mais como objeto do que ferramenta. A forma de construção e disposição do texto não conduz o aluno de tal modo a permitir a participação e a discussão, caracterizando-se mais como um manual. Desse modo, parece deixar ao professor que adota o livro a forma de conduzir o conteúdo, a fim de possibilitar a construção do conceito.

Dois dos livros analisados sugerem e orientam sobre o uso de calculadora, sendo que em um desses livros há também instruções sobre o uso da tábua

trigonométrica, inclusive com interpolação de valores, o que para nós é mais um indício de preocupação com o vestibular, em que não é permitido o uso de calculadora, do que com o conceito propriamente dito.

No livro, “Matemática Aplicada”, um dos analisados, parece-nos haver uma preocupação constante com a contextualização, com o equilíbrio na relação ferramenta-objeto, com exercícios contribuindo para a construção e fixação dos conceitos, favorecendo a discussão. Porém, chega a questões (descontextualizadas) que acreditamos de profundidade inadequada à faixa etária: o capítulo sobre trigonometria no triângulo retângulo termina com o cosseno e seno da soma e da diferença de arcos.

No livro “Matemática”, 1º grau, 8ª série, de Imenes & Lellis, já citado anteriormente, em “Conversando sobre o texto” há questões que, acreditamos, estimulam o debate e a fixação de cada conceito apresentado e em “Ação”

onde se pretende a participação do aluno, incluindo manipulações. O capítulo sobre trigonometria termina com aplicações em polígonos regulares (cálculo de seus elementos, perímetro e área), conforme recomendação da Proposta Curricular do Ensino Médio, uma vez que esse conteúdo não consta na Proposta do Ensino Fundamental.

### **3.2.3. Comparação entre a Proposta e Livros**

Achamos importante salientar inicialmente que, das dezenas de livros levados em consideração antes de se definir pelos seis aqui analisados, somente um deles, “Matemática Atual, 8ª série, de Antonio José Lopes Bigode, Editora Atual, 1994 – SP”, não inclui trigonometria. Portanto, somente este livro nos parece rigorosamente de acordo com a Proposta Curricular Para o Ensino de Matemática – Ensino Fundamental, abordando em Geometria até o Teorema de Pitágoras.

Os demais livros de 8ª série desenvolvem em seu conteúdo a trigonometria no triângulo retângulo, sendo que dos seis analisados, para nós, fica evidente a identificação do livro “Matemática, 8ª série, de Imenes & Lellis” com a Proposta Curricular do Ensino Médio, ao tratar deste assunto. Evidentemente que esta identificação se dá no caráter geral, adaptado em nível de escolaridade e à maturidade do aluno. Em toda sua estratégia de desenvolvimento do conteúdo, parece-nos revelar as recomendações da Proposta: linguagem informal; resolução de problemas para a formação do conceito e daí a definição; aborda primeiro o conceito da razão trigonométrica tangente, com aplicações no cálculo de distâncias inacessíveis; propicia a discussão, a participação e a manipulação; os alunos constroem sua própria

tabela trigonométrica,... Além disso, identificando-se ainda mais com a Proposta, termina com aplicações em polígonos regulares (cálculo de seus elementos, perímetro e área).

Observamos que a trigonometria no triângulo retângulo é novamente tratada nos livros de matemática do ensino médio, mesmo daqueles autores de livros de 8ª série, agora em conformidade com a Proposta Curricular.

Entretanto, na Proposta, observamos uma atenção para a construção do conceito, enquanto que em quatro dos seis livros analisados, acentua-se o procedimento “definição seguida de exercícios”.

Na Proposta, recomenda-se, de início, o uso de uma linguagem informal, próxima da do aluno, de modo que, à medida que se vai construindo o conceito, com as discussões e contextualizações, introduz-se uma linguagem formal, matemática, propiciando aí a definição. Já nos livros didáticos analisados, em quatro deles, a linguagem é formal, não há estímulo à discussão e à participação do aluno na construção do conceito, caracterizando-se mais como um manual. Nos outros dois livros, parte-se de uma linguagem informal para uma formal.

Baseado em nossa experiência pessoal, podemos afirmar que tanto os autores de livros didáticos como os próprios professores não tratam com a devida consideração as recomendações feitas pela Proposta. Se assim fosse, implicaria uma significativa mudança de comportamento, o que contrariaria a postura do mais cômodo, da resistência à mudança e a própria pressão do sistema que espera um bom desempenho no vestibular, em que pese o prejuízo da construção do conceito, ou seja, o que importa é cumprir o programa.

## **CAPÍTULO IV : METODOLOGIA**



## INTRODUÇÃO

Neste capítulo, descreveremos sobre a nossa proposta de pesquisa, seu objetivo e o desenho geral do experimento.

Ao discorrer sobre o experimento, trataremos sobre o universo da pesquisa, descrevendo a respeito dos sujeitos envolvidos, os recursos, os instrumentos diagnósticos (pré-teste e pós-teste) e a seqüência de ensino a ser aplicada.

Para a elaboração e definição dos instrumentos diagnósticos e da seqüência de ensino, realizamos uma aplicação preliminar dos mesmos, que chamamos de “estudo piloto”. Esta aplicação aconteceu num grupo inicialmente composto por seis alunos cursando o 1º colegial, que ainda não tinham estudado trigonometria no triângulo retângulo. No final da aplicação, este grupo estava reduzido para somente três alunos. Neste trabalho, não descreveremos sobre este grupo piloto, atendo-nos somente ao estudo principal.

### 4.1 PROPOSTAS E OBJETIVOS

Nossa pesquisa, dirigida a alunos da 8ª série do ensino fundamental, foi elaborada com o intuito de introduzir os conceitos das razões trigonométricas seno, co-seno e tangente de maneira significativa, modo esse que entendemos ser aquele que dá ênfase ao processo de construção do conceito. Propomos uma abordagem que não segue a linha predominante, tradicional, de *definições seguidas de exercícios*, observada na análise dos livros didáticos e, pessoalmente, nas seqüências desenvolvidas em sala de aula.

Acreditamos que o aluno deva participar da construção de seu conhecimento e que a função do pesquisador é de orientador da aprendizagem. Assim, procuramos elaborar uma seqüência de ensino que, partindo de situações-problema, possa levar o aluno a refletir, em grupo, utilizando inicialmente uma linguagem próxima da linguagem dele. Entendemos que a utilização de uma linguagem formal matemática é o fim de um processo de aprendizagem e não o início. Precisamos favorecer a interiorização dos conceitos pelos alunos antes de qualquer tentativa de formalização.

Inicialmente, buscamos situações contextualizadas, que entendemos serem aquelas relacionadas com a realidade do aluno e que para ele tenham significado.

Nossa seqüência de ensino se caracteriza, de maneira geral, por partir da contextualização (sensível, concreto) para a formalização (abstrato, descontextualização) das idéias trabalhadas.

Ao final do estudo, esperamos que os alunos tenham construído de modo significativo os conceitos das razões trigonométricas. E que, com esses conceitos incorporados, saibam aplicá-los na resolução de problemas, suas definições, o intervalo de variação dos valores de cada uma e a relação existente entre eles para ângulos complementares.

## **4.2 DESENHO GERAL DO EXPERIMENTO**

Nosso experimento é para ser aplicado numa escola (autarquia municipal) da cidade de Taubaté, Estado de São Paulo. Trabalharemos com duas turmas de 8ª série desta escola, uma no período matutino e outra no vespertino. A primeira turma constituirá o que passaremos a chamar de grupo

de referência e a segundo, em que aplicaremos a nossa seqüência de ensino, de grupo experimental. O grupo de referência é composto por 32 alunos e o experimental por 24.

No grupo de referência, a abordagem da trigonometria no triângulo retângulo se dará na forma por nós aqui considerada tradicional, tendo, inclusive, a adoção de um livro didático. As aulas transcorrerão no horário normal de aula, conforme o programa estabelecido e sem a participação e controle do pesquisador. Para esse grupo, estão previstos sete encontros, entre aulas simples, duplas e triplas (cada aula com 50 minutos), num total de 15 horas/aula.

Para o grupo experimental, a aplicação do experimento pelo pesquisador se realizará no horário normal de aula, em conformidade com o programa e cronograma estabelecido pela escola. A professora de matemática desta sala atuará como observadora. O experimento compreenderá um total de treze encontros, sendo dois dedicados à aplicação dos instrumentos diagnósticos e os onze restantes para a seqüência de ensino. Estes onze encontros da seqüência, entre aulas duplas e simples, totalizarão 18 horas/aula de 50 minutos cada uma.

Submeteremos os grupos a dois testes individuais: um antes (pré-teste) da introdução dos conceitos de razões trigonométricas e outro (pós-teste) após terem tido contato com esse conteúdo.

Quanto à nossa seqüência de ensino a ser desenvolvida no grupo experimental, pretendemos que o ponto de partida seja sempre através de situações-problema e adidáticas, fazendo um paralelo com a história. Dessa forma, conforme já destacamos no item referente aos aspectos históricos

(capítulo terceiro), nossa seqüência, à luz da história, será elaborada através de atividades em etapas que, a nosso ver, contribuam melhor para a construção do conceito. Portanto, iniciaremos os estudos por questões práticas, ligadas à realidade, caminhando para a formalização sob o ponto de vista geométrico.

Destacamos também a procura de concretizações que possam ocorrer dentro do ambiente de sala de aula, com o objetivo de auxiliar o aluno na construção dos conceitos envolvidos. Teremos como prioridade a utilização de recursos (no sentido amplo) não sofisticados, baratos e acessíveis a todos, possibilitando que tanto pesquisador como aluno possam elaborá-los ou adquiri-los. Assim, num primeiro momento utilizaremos uma maquete (que para nós é um modelo que se coloca entre a realidade e sua representação no papel), em seguida utilizaremos modelos de triângulos feitos de madeira, manipulações através de construções geométricas feitas pelos alunos e de dispositivos (cartazes e modelo dinâmico de representação das razões trigonométricas) elaborados com a finalidade de possibilitar a aprendizagem.

Como se trata de um método que difere do tradicional, pois é centrado na participação do aluno, no trabalho em grupo e em situações adidáticas, entendemos que seja uma experiência nova não só para os alunos, mas principalmente para o pesquisador. Assim, considerando que o pesquisador também será um aprendiz no processo, prevemos a necessidade de um tempo maior para o desenvolvimento da seqüência, do que o seria se o pesquisador já tivesse experiência em lecionar a partir do ponto de vista construtivista.

Voltaremos a discutir esta questão do número de encontros dispendidos na seqüência no capítulo quinto (Análise dos Resultados), quando

apresentaremos maiores detalhes de como se deu a introdução dos conceitos básicos trigonométricos pelo grupo de referência e faremos uma comparação com o grupo experimental.

#### **4.2.1 Instrumentos de Avaliação Diagnóstica**

Descreveremos aqui os instrumentos diagnósticos que servirão de parâmetros para a avaliação de nossa seqüência. Eles também nos ajudarão no entendimento de como se dá a formação dos conceitos de trigonometria para esse grupo de alunos. Os instrumentos aqui tratados são os pré e pós-testes, os quais apresentaremos a seguir.

##### **a) Apresentação e Descrição do Pré-teste**

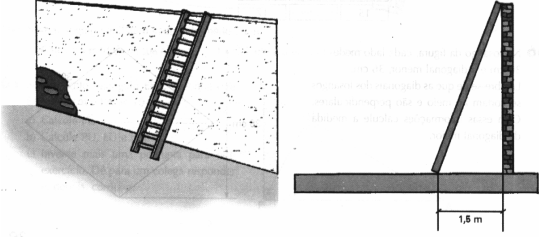
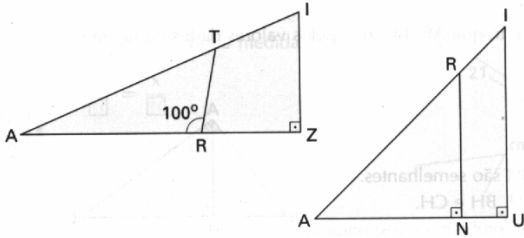
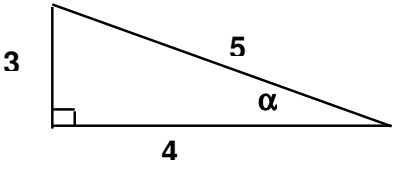
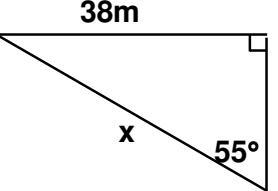
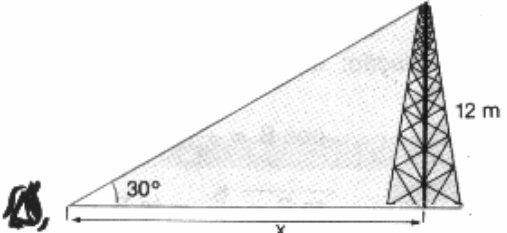
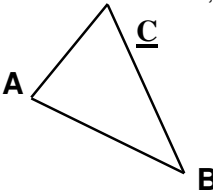
O pré-teste tem por finalidade avaliar os conhecimentos anteriores do aluno a respeito de trigonometria no triângulo retângulo e no sentido de servir de termômetro, para avaliar se o mesmo domina os conteúdos matemáticos considerados como pré-requisitos para o trabalho que desejamos realizar. Tal avaliação tem, portanto, a função principal de diagnóstico, para posterior desenvolvimento de uma seqüência didática. O pré-teste também tem a função de servir de parâmetro para avaliarmos, ao final da seqüência, se ocorreu a construção dos conceitos pretendidos, através da aplicação de um novo teste ( o pós-teste ) cujas questões o conhecimento se equivale e a dificuldade se aproxima.

Na elaboração do teste, houve a preocupação formal de selecionar exercícios existentes em livros didáticos, com a finalidade de aproximar nosso

instrumento diagnóstico à realidade escolar. Assim, cada questão vem acompanhada de uma referência ao livro do qual foi retirada, exceto aquela por nós elaborada.

O teste é constituído de nove questões, as quais apresentaremos uma a uma, fazendo, após cada apresentação, uma discussão sobre a mesma. Antes, para que o leitor tenha uma idéia geral do teste, apresentaremos, no quadro 4.1 a seguir, todas as questões propostas no pré-teste, as quais serão discutidas em seguida uma a uma.

## PRÉ-TESTE

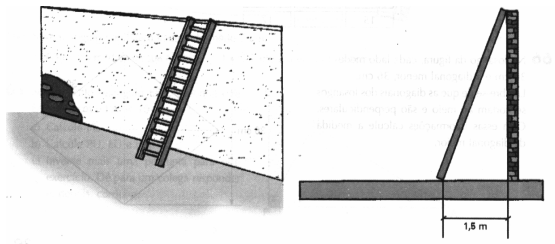
<p>1ª) A escada tem 5,2 m de comprimento. Qual é a altura aproximada do muro?</p> 	<p>2ª) Numa destas figuras há dois triângulos semelhantes. Quais são ?</p> 
<p>3ª) Calcule <math>\sin \alpha</math>, <math>\cos \alpha</math> e <math>\operatorname{tg} \alpha</math> no caso :</p> 	<p>4ª) Consulte a tabela (anexa a este teste) e calcule <math>\underline{x}</math> :</p> 
<p>5ª) Uma torre vertical, de altura 12m, é vista sob um ângulo de <math>30^\circ</math> por uma pessoa que se encontra a uma distância <math>x</math> da sua base e cujos olhos estão no mesmo plano horizontal dessa base. Determinar a distância <math>x</math>.</p> 	<p>6ª) Dado <math>\cos \alpha = 2/7</math> obtenha <math>\sin \alpha</math> e <math>\operatorname{tg} \alpha</math>, onde <math>\alpha</math> é um ângulo agudo.</p> <p>7ª) Na figura seguinte, determine <math>\cos C</math>, sendo dado <math>\sin B = 0,6691</math>.</p> 
<p>8ª) Complete cada afirmativa a seguir com o sinal <math>&lt;</math>, <math>=</math> ou <math>&gt;</math> :</p> <p>a) <math>\cos 50^\circ</math> ..... <math>\cos 40^\circ</math>  b) <math>\sin 50^\circ</math> ..... <math>\sin 40^\circ</math>  c) <math>\operatorname{tg} 50^\circ</math> ..... <math>\operatorname{tg} 40^\circ</math></p>	<p>9ª) Ao efetuar um cálculo, um aluno obteve <math>\cos \alpha = 5</math>, sendo <math>\alpha</math> um ângulo agudo. Existe <math>\alpha</math> tal que <math>\cos \alpha = 5</math> ? Justifique.</p>

Quadro 4.1: As questões do pré-teste

As duas primeiras questões são, respectivamente, relativas aos pré-requisitos: teorema de Pitágoras e semelhança de triângulos.

## 1ª Questão

A escada tem 5,2 m de comprimento. Qual é a altura aproximada do muro?



(Retirado do livro : Matemática, 8ª série, 1º grau de Imenes & Lellis, Ed. Scipione, 1997, p. 40, exercício 70 ).

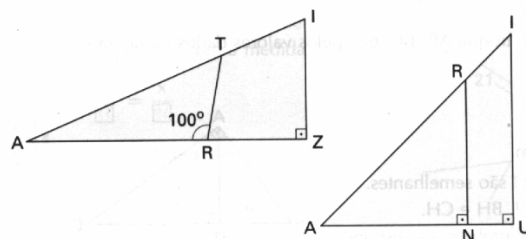
Esta é uma questão contextualizada e sua solução compreende uma aplicação imediata do teorema de Pitágoras. A

Quadro 4.2: Primeira questão do pré-teste

contextualização tem por finalidade observar se o aluno vai além da competência de manipular fórmulas, sendo capaz de utilizar, num fato da realidade, a aplicação do mesmo. Assim, por exemplo, um eventual cálculo incorreto devido aos decimais, não nos levará a considerar a questão errada.

## 2ª Questão

Numa destas figuras, há dois triângulos semelhantes. Quais são ?



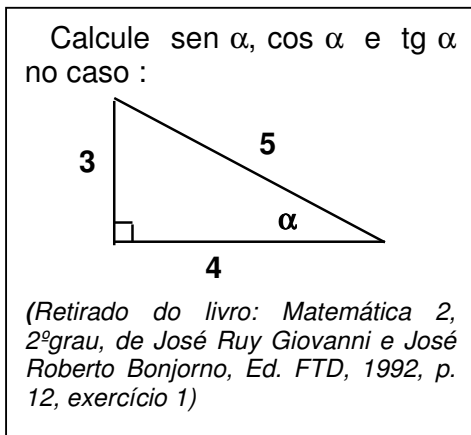
(Retirado do livro: Matemática, 8ª série, 1º grau, de Imenes & Lellis, Ed. Scipione, 1997, p. 24, exercício 29)

Quadro 4.3: Segunda questão do pré-teste

Nesta questão, procuramos de maneira objetiva, sem justificativa, observar se o aluno tem a noção, espontânea ou não, de semelhança de triângulos, já que o conceito de razão trigonométrica se baseia neste fato.



## 3ª Questão

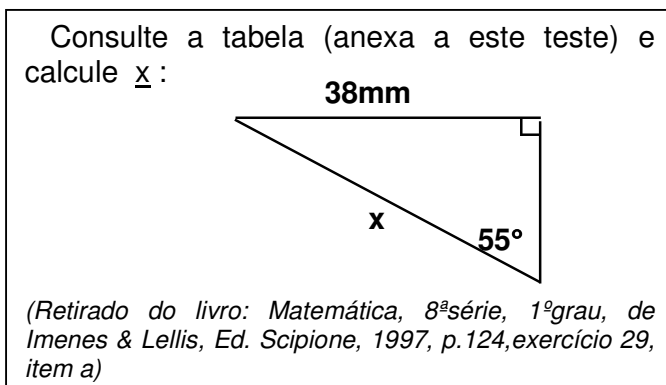


**Quadro 4.4:** Terceira questão do pré-teste

A terceira questão foi selecionada com a intenção de observar se o aluno tem conhecimento a respeito da **definição** de seno, co-seno e tangente de um ângulo agudo de um triângulo retângulo. Essa questão, porém, possibilita sua

resolução através da mecanização, ou seja, o cálculo das razões trigonométricas como aplicações de **fórmulas**. Caso o aluno lance mão desse recurso, não poderemos afirmar que o mesmo tenha o conceito, embora apresente a competência. Para nós, consideraremos que o aluno tem o conceito das razões trigonométricas quando este for capaz de, não só se utilizar das fórmulas, como trabalhar com estas razões aplicando-as em situações diversas, reconhecendo as relações entre elas e a variação de valores de cada uma.

## 4ª Questão



**Quadro 4.5:** Quarta questão do pré-teste

A importância da quarta questão está em que, para calcular o valor de  $x$ , o aluno deverá decidir sobre qual das razões aplicar. Como foram dadas as medidas de um

ângulo, do cateto oposto a esse ângulo e se deseja obter a medida  $x$ , relativa à hipotenusa, cateto oposto-hipotenusa induz à aplicação da definição de seno.

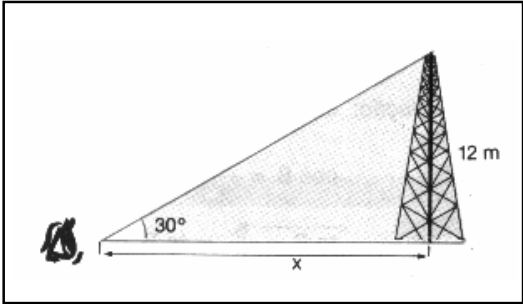
Assim, a solução mais provável e esperada pelo pesquisador quanto a esta questão é através do emprego da definição de seno de um ângulo agudo. Com os dados fornecidos e mediante um treinamento, acreditamos que o aluno possa ser induzido à solução. Assim, questões desse tipo (“calcular  $x$ ”) resolvemos classificá-las como algorítmicas. Uma outra solução, muito pouco provável, é de que o aluno calcule a medida do cateto desconhecido (cateto adjacente) através da definição de tangente e, em seguida, obtenha a medida  $x$  (comprimento da hipotenusa) aplicando o Teorema de Pitágoras. De qualquer maneira, o acerto desta questão não nos garante ainda que o aluno tenha o conceito a respeito das razões trigonométricas.

#### 5ª Questão

Com a quinta questão, contextualizada, esperamos observar se o aluno é capaz de relacionar seus conhecimentos formais com a resolução de problemas. Acreditamos que a ilustração que acompanha o enunciado da

Uma torre vertical, de altura 12m, é vista sob um ângulo de  $30^\circ$  por uma pessoa que se encontra a uma distância  $x$  da sua base e cujos olhos estão no mesmo plano horizontal dessa base. Determinar a distância  $x$ .

*(Retirado do livro: Matemática 2, 2º grau, de José Ruy Giovanni e José Roberto Bonjorno, Ed. FTD, 1992, p. 12, exercício 3)*



**Quadro 4.6:** Quinta questão do pré-teste

mesma, conforme texto original do livro donde foi retirada, facilite em muito essa transferência. Após a descontextualização, o aluno se encontrará diante de uma solução análoga à da questão anterior (“calcular  $x$ ”), onde deverá decidir sobre qual das razões trigonométricas aplicar: No caso, o emprego da

$\text{tg } 30^\circ$  é a mais provável. Esta questão, devido à sua similaridade com a anterior, também resolvemos classificá-la como **algorítmica**.

Portanto, as questões 3, 4 e 5 têm uma relação entre si, pois elas se baseiam no conhecimento de definições, fórmulas e procedimentos (algoritmos), e o acerto delas ainda não nos asseguram o domínio dos conceitos básicos das razões trigonométricas. A conjunção dessas questões com a próxima (sexta) poderá nos dar uma pista a respeito da construção dos conceitos básicos das razões trigonométricas.

#### 6ª Questão

Dado  $\cos \alpha = 2/7$  obtenha  $\sin \alpha$  e  $\text{tg } \alpha$ , onde  $\alpha$  é um ângulo agudo.

*(Retirado do livro: Matemática Aplicada, 2º grau, vol. 1 de Trotta, Imenes e Jakubovic, Ed. Moderna, 1979, p. 190, exercício 7).*

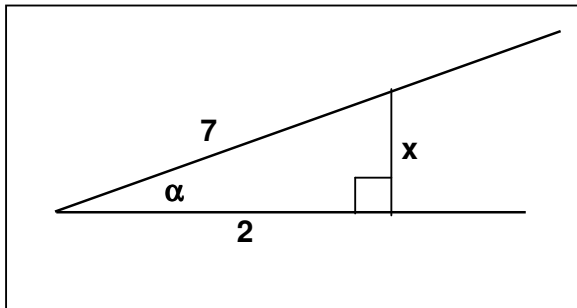
A sexta questão poderíamos chamá-la de clássica: dada uma razão trigonométrica determinar as demais, sem a

**Quadro 4.7:** Sexta questão do pré-teste utilização de tabela trigonométrica. De certo modo, ela envolve as razões trigonométricas entre si, ou seja, a partir do conhecimento de somente uma das razões, pode-se obter as demais. Assim, resolvemos classificá-la e identificá-la como a questão das **relações trigonométricas**. Para alunos a partir da 1ª série do 2º grau, a solução por nós considerada a mais provável de ocorrer é através das relações trigonométricas  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  e  $\text{tg } \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha$ . Neste caso, teríamos, então, uma solução algébrica, com emprego de fórmulas.

Entretanto, como em nível de 8ª série (nível objeto de nossa pesquisa) de maneira geral não se aborda as fórmulas (relações trigonométricas) acima, a solução mais provável e esperada por nós é a que podemos chamar de solução geométrica. Esta segunda solução é mais rica em termos conceituais

e por isso consideramos como um marco muito importante dentro da construção do conceito das razões trigonométricas. Por quê ?

Porque para resolvê-la, o aluno precisa conhecer a definição de co-seno



**Figura 4.1:** Representação geométrica

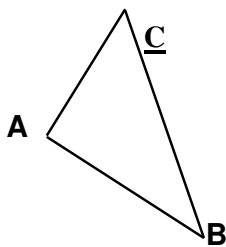
de um ângulo  $\alpha$  (“(cateto adjacente)/hipotenusa”), passar do quadro numérico (2/7) para o quadro geométrico, conhecer as definições de seno e de tangente de um ângulo  $\alpha$ ,

$$\text{sen } \alpha = x/7 \quad \text{e} \quad \text{tg } \alpha = x/2$$

passando, pois, para o quadro algébrico e, aí, através do Teorema de Pitágoras ( $7^2 = 2^2 + x^2$ ), calcular o valor da medida  $\underline{x}$  (obtendo  $x=3\sqrt{5}$ ) e, então, responder que  $\text{sen } \alpha = 3\sqrt{5}/7$  e  $\text{tg } \alpha = 3\sqrt{5}/2$ .

Portanto, quem acerta esta questão, provavelmente, terá resolvido acertadamente também a 1 e a 3 (especialmente essa), pois essas envolvem os requisitos básicos para resolvê-la. Trata-se, portanto, de uma questão clássica no ensino da trigonometria e de fundamental importância na formação do conceito de razão trigonométrica.

Na figura seguinte, determine  $\cos C$ , sendo dado  $\text{sen } B = 0,6691$ .



(Retirado do livro: Matemática, vol. 1, versão Beta, 2º grau, de Bianchini & Paccola, Ed. Moderna, 2ª edição revista e ampliada, 1995, p. 244, exerc. 12, item b)

### 7ª Questão

A sétima questão trata das relações existentes entre as razões trigonométricas de

**Quadro 4.8:** Sétima questão do pré-teste

**ângulos complementares** ( $\alpha + \beta = 90^\circ$ ). Esperamos que o aluno apresente conhecimento de que, num triângulo retângulo, temos dois ângulos agudos ( $\alpha$  e  $\beta$ ), que  $\alpha$  e  $\beta$  são complementares e que as definições de seno, co-seno e tangente se referem tanto a um ângulo como ao outro, seu complementar. A questão foi proposta para observar se o aluno, neste caso, tem o conhecimento de que o seno de um é o co-seno do outro, e vice-versa, pois um cateto oposto a um dos ângulos, em relação ao seu complementar é adjacente. Trata-se portanto, de uma questão que exige aplicação imediata do conceito, sem nenhum cálculo, em que não nos parece haver possibilidade da mecanização, pois **sen B = cos C = 0,6691**, pelos motivos expostos acima.

#### 8ª Questão

Complete cada afirmativa a seguir com o sinal  $<$ ,  $=$  ou  $>$ :

- a)  $\cos 50^\circ \dots \cos 40^\circ$
- b)  $\sin 50^\circ \dots \sin 40^\circ$
- c)  $\operatorname{tg} 50^\circ \dots \operatorname{tg} 40^\circ$

**Quadro 4.9:** Oitava questão do pré-teste

A oitava questão trata da variação de cada razão trigonométrica em relação à variação do ângulo correspondente: nem toda razão trigonométrica varia de forma

crescente de acordo com o ângulo, ou seja, à medida que o ângulo aumenta a razão aumenta. Consideraremos como certa a resposta do aluno, somente quando todas as afirmativas forem completadas corretamente, pois a questão permite ao aluno experimentar uma resposta ao acaso, para não deixá-la em branco.

Ao efetuar um cálculo, um aluno obteve  $\cos \alpha = 5$ , sendo  $\alpha$  um ângulo agudo. Existe  $\alpha$  tal que  $\cos \alpha = 5$ ? Justifique.

(Retirado do livro: *Matemática Aplicada, 2º grau, vol. 1 de Trotta, Imenes e Jakubovic, Ed. Moderna, 1979, p. 191. exercício 11. item f*).

**Quadro 4.10:** Nona questão do pré-teste

#### 9ª Questão

Ainda tratando da variação de cada razão

trigonométrica, a nona questão objetiva observar se o aluno sabe que  $\cos \alpha$  ( $\alpha$  um ângulo agudo) é um número compreendido entre 0 e 1 ( $0 < \cos \alpha < 1$ ). Acreditamos que o aluno possa saber desse fato, embora não tenha o domínio completo a respeito. Ou seja, o aluno não é capaz de justificar satisfatoriamente a sua resposta, não indo além de afirmar que  $\cos \alpha$  não pode ser maior do que 1. Assim, o acerto desta questão só terá um significado de domínio a respeito da variação das razões trigonométricas, se condicionada ao acerto da questão anterior. Portanto, as questões 8 e 9 tratam da *variação dos valores das razões* trigonométricas.

#### **b) Apresentação e Descrição do Pós-teste**

O pós-teste é um instrumento com a finalidade de avaliar a compreensão dos conceitos básicos da trigonometria do triângulo retângulo, após a aplicação de uma seqüência didática. Analisando esse questionário e comparando os resultados com aqueles obtidos no pré-teste, esperamos observar o provável aproveitamento dos alunos. Esperamos observar se os alunos construíram os conceitos relativos às razões trigonométricas: seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo.

Procuramos elaborar um pós-teste com questões equivalentes (quanto ao conteúdo, grau de dificuldade, quantidade, contextualização, ... ) ao do pré-teste, com o intuito de se obter dados comparativos o mais fiel possível.

Novamente, assim como ocorrera na elaboração do pré-teste, procuramos, sempre que possível, questões existentes em livros didáticos, com a intenção de, assim, estarmos mais próximos da realidade escolar. A questão

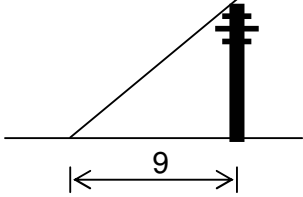
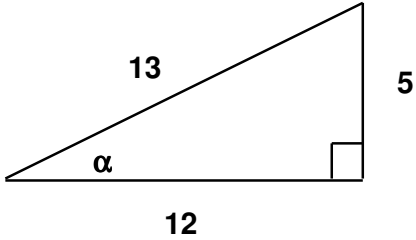
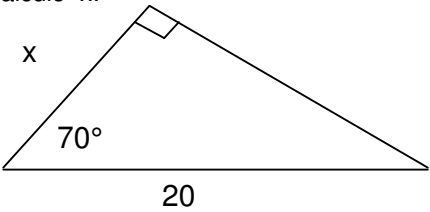
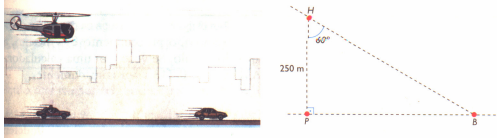
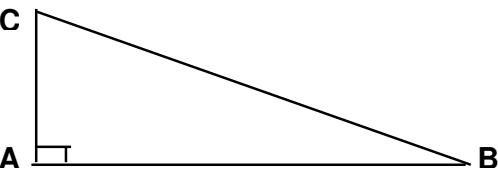
que não tiver a indicação do livro do qual foi retirada, significa que a mesma foi por nós elaborada.

Assim como o pré-teste, o pós-teste também tem nove questões e, para que o leitor tenha uma idéia geral do teste, o quadro 4.11, a seguir, apresenta todas as questões propostas no pós-teste, as quais serão discutidas adiante uma a uma.

Após o desenvolvimento de uma seqüência didática, agora o objetivo é observar se ocorreu a aprendizagem dos conceitos referentes às razões trigonométricas. Por isso, resolvemos não incluir questão referente à semelhança de triângulos: um pré-requisito ao estudo da trigonometria. Portanto, não há no pós-teste nenhuma questão equivalente à questão 2 do pré-teste.

Já quanto ao pré-requisito Teorema de Pitágoras, resolvemos manter uma questão relativa ao mesmo, por entendermos como muito útil em trigonometria.

## PÓS-TESTE

<p>1ª) Um poste precisa ser sustentado por um cabo conforme indica a figura abaixo. Sabendo-se que a altura do poste é de 12 m e que o cabo será afixado a 9m da base do mesmo, qual deve ser o comprimento do cabo?</p> 	<p>2ª) Calcule o <math>\sin \alpha</math>, <math>\cos \alpha</math> e <math>\operatorname{tg} \alpha</math> no caso:</p> 
<p>3ª) Consulte a tabela (anexa a este teste) e calcule x:</p> 	<p>4ª) Um helicóptero e um carro da polícia perseguem um carro de bandidos. O helicóptero está a 250 m de altura; o carro da polícia está bem abaixo do helicóptero (no prumo). Do helicóptero o carro de bandidos é avistado segundo um ângulo de <math>60^\circ</math>. Qual é a distância entre o carro da polícia e o dos bandidos ?</p> 
<p>5ª) Sabendo que <math>\sin \alpha = 3/5</math>, obtenha <math>\cos \alpha</math> e <math>\operatorname{tg} \alpha</math>, onde <math>\alpha</math> é um ângulo agudo.</p>	<p>7ª) Complete cada afirmativa a seguir com o sinal <math>&lt;</math>, <math>=</math> ou <math>&gt;</math> :</p> <p>a) <math>\cos 80^\circ \dots\dots \cos 20^\circ</math>  b) <math>\sin 41^\circ \dots\dots \sin 22^\circ</math>  c) <math>\operatorname{tg} 33^\circ \dots\dots \operatorname{tg} 55^\circ</math></p>
<p>6ª) Na figura seguinte, determine <math>\sin C</math> sendo dado <math>\cos B = 0,375</math> :</p> 	<p>8ª) O seno e o co-seno de um ângulo são sempre números menores do que 1 ? Justifique.</p> <p>9ª) O que você entende por Trigonometria ?</p>

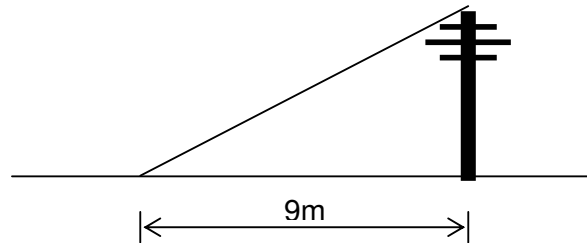
Quadro 4.11: As questões do pós-teste



*1ª Questão*

Um poste precisa ser sustentado por um cabo conforme indica a figura abaixo.

Sabendo-se que a altura do poste é de 12 m e que o cabo será afixado a 9m da base do mesmo, qual deve ser o comprimento do cabo ?



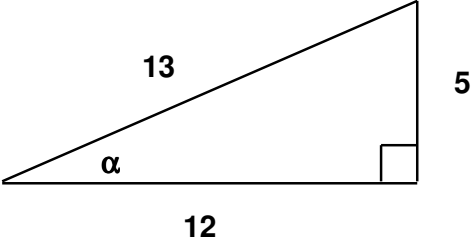
**Quadro 4.12:** Primeira questão do pós-teste

Esta questão envolve a aplicação do Teorema de Pitágoras numa situação contextualizada, equivalente à questão 1 do pré-teste, exceto pelo fato de trabalhar com números inteiros. Mas, assim como no pré-teste, esperamos observar se o aluno conhece e percebe a conveniência da aplicação do Teorema. Não consideraremos como errada a questão devido a um eventual erro de cálculo.

Pesquisando vinte e dois livros didáticos, não encontramos nenhuma questão que entendêssemos equivalente àquela do pré-teste. Por isso, esta questão foi por nós elaborada. Apesar de se tratar de uma aplicação imediata do Teorema de Pitágoras, alguns alunos poderão, inicialmente, reclamar a falta da medida de ângulos, uma vez que no estudo de trigonometria associam-se as razões entre os lados do triângulo com os ângulos.

## 2ª Questão

Calcule o  $\text{sen } \alpha$ ,  $\text{cos } \alpha$  e  $\text{tg } \alpha$  no caso:



(Retirado do livro: *Matemática 2, 2º grau*, de José Ruy Giovanni e José Roberto Bonjorno, Editora FTD, 1992, SP, p. 12, exercício 1, item a)

**Quadro 4.13:** Segunda questão do pós-teste

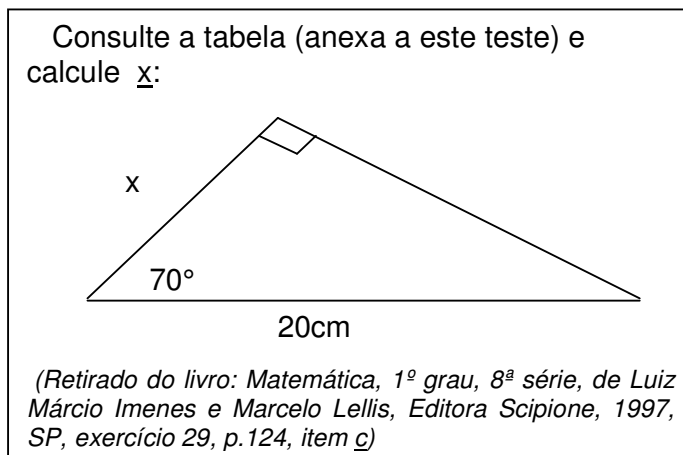
Esta questão é equivalente à questão 3 do pré-teste.

Trata-se de uma aplicação direta da definição de seno, co-seno e tangente de um ângulo agudo. Portanto, com esta questão, esperamos observar se o aluno tem conhecimento a respeito das definições das razões trigonométricas. Reconhecemos, assim como no pré-teste, que o aluno pode demonstrar competência na aplicação das definições, como se fossem fórmulas, possivelmente decoradas. O acerto desta questão não nos assegura, por si só, a construção do conceito.

Assim, ou o aluno sabe a definição e a aplica corretamente, ou então, poderá fazer inversões dos nomes atribuídos às razões, como, por exemplo, chamar de seno o que é co-seno, de tangente o que é seno, etc...

## 3ª Questão

Esta questão equivale à questão 4 do pré-teste.



Quadro 4.14: Terceira questão do pós-teste

Conforme a questão anterior, aqui também trata-se da aplicação da definição de razão trigonométrica. Porém, aqui o aluno deverá decidir sobre qual das razões empregar

para obter, do modo mais adequado possível, o valor de  $\underline{x}$ . No caso, a solução esperada está na escolha da razão **cos 70°**, que envolve a medida ( $\underline{x}$ ) do cateto adjacente e a medida (**20 cm**) da hipotenusa. Os dados não permitem, por exemplo, a solução pelo teorema de Pitágoras, pois falta a medida de um dos catetos.

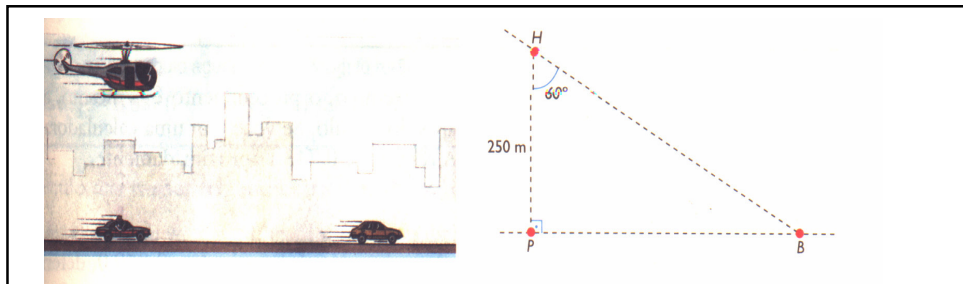
Portanto, a solução só se dará com a escolha adequada da razão trigonométrica. O aluno poderá identificar como uma pista, o fato de terem sido dados um ângulo, a medida do cateto adjacente a esse ângulo e a medida da hipotenusa. Isso, durante a fase de aprendizado, poderá ter se constituído num **processo algorítmico**, que leva o aluno a decidir pela **razão trigonométrica envolvida**:

$$\left. \begin{array}{l} \text{medida do ângulo } \alpha \\ \text{medida } (\underline{x}) \text{ do cateto adjacente} \\ \text{medida } (\mathbf{20cm}) \text{ da hipotenusa} \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{\cos \alpha}$$

Além do desconhecimento, um dos erros prováveis, novamente, é o da inversão, ou seja, tratar como seno o que é co-seno, de seno o que é tangente, etc...

A combinação de acertos das questões 2 e 3 sinalizam com a possibilidade de o aluno ter competência quanto à aplicação da definição de razão trigonométrica de um ângulo agudo.

Um helicóptero e um carro da polícia perseguem um carro de bandidos. O helicóptero está a 250 m de altura; o carro da polícia está bem abaixo do helicóptero (no prumo). Do helicóptero, o carro de bandidos é avistado segundo um ângulo de  $60^\circ$ . Qual é a distância entre o carro da polícia e o dos bandidos?



(Retirado do livro: *Matemática, 2º grau, volume 1, versão Beta, de Edwaldo Bianchini e Herval Paccola, Editora Moderna, 2ª edição revista e ampliada, 1995, SP, exercício 20, p. 251*)

**Quadro 4.15:** Quarta questão do pós-teste

#### 4ª Questão

Questão equivalente à questão 5 do pré-teste, aqui o aluno terá que, a exemplo da questão anterior, novamente decidir sobre o emprego da razão mais adequada. Também um processo algorítmico provavelmente poderá levar à solução correta:

$$\left. \begin{array}{l} \text{medida do ângulo } \alpha \\ \text{medida (250m) do cateto adjacente a } \alpha \\ \text{medida (x) do cateto oposto a } \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \text{tg } \alpha$$

No caso, espera-se a aplicação da razão trigonométrica tangente, numa situação de característica contextualizada. Cabe aqui salientar que, nos livros didáticos consultados, encontramos questões ditas contextualizadas que vêm com indicações, conforme o caso acima, que chegam a descaracterizar a situação de contextualização aparentemente pretendida. Trata-se, portanto, de uma facilitação ao aluno, em que o modelo matemático vem associado ao fato da realidade. O acerto das questões 2 (fórmula), 3 e 4 (algorítmicas) indicam competência quanto ao emprego da definição das razões trigonométricas.

Sabendo que  $\text{sen } \alpha = 3/5$ , obtenha  $\text{cos } \alpha$  e  $\text{tg } \alpha$ , onde  $\alpha$  é um ângulo agudo.

(Retirado do livro: Matemática Aplicada, 2º grau, volume 1 de Trotta, Imenes e Jakubovic, Editora Moderna, 1979, SP, p. 190, exercício 8)

#### 5ª Questão

Esta questão é equivalente à questão 6 do pré-teste.

Trata-se, portanto, de uma questão clássica da trigonometria, descontextualizada, em que, dada

#### Quadro 4.16: Quinta questão do pós-teste

uma das razões trigonométricas referente a um dos ângulos agudos ( $\alpha$ ), pede-se determinar as demais, sem a utilização de tabela trigonométrica.

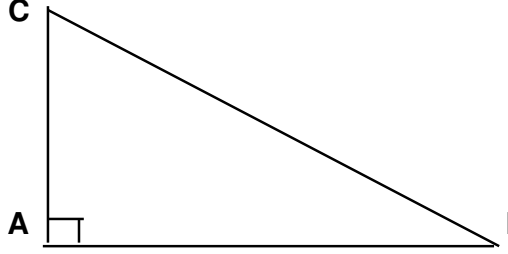
Como em nível de 8ª série geralmente não se abordam as relações fundamentais  $\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$  e  $\text{tg } \alpha = \text{sen } \alpha / \text{cos } \alpha$ , não esperamos o emprego delas, numa solução dita algébrica, mas sim a geométrica. Essa solução geométrica, de forte ênfase conceitual (em comparação com a algébrica), consiste em admitir um triângulo retângulo com ângulo agudo  $\alpha$ , cateto oposto a  $\alpha$  medindo 3 e hipotenusa 5. Esse triângulo hipotético, se construído, terá certamente o ângulo  $\alpha$ . Aplicando o Teorema de Pitágoras,

obtemos a medida do outro cateto (o adjacente a  $\alpha$ ) e, com todos os elementos calculados, determinamos  $\cos \alpha$  e  $\operatorname{tg} \alpha$ .

Por envolver as razões de sentido, dada uma delas determinar as demais, identificamos esta questão como a de **relações trigonométricas**. É uma questão que julgamos muito importante em termos conceituais, de modo que, nos permite supor que, com o acerto das questões 2 + (3 ou 4) e esta, o aluno possivelmente apresenta um domínio parcial do conceito. Acreditamos que resta observar, para concluirmos pelo provável domínio total dos conceitos envolvidos, se o aluno tem conhecimento a respeito da variação dos valores das razões trigonométricas, bem como da relação existente entre as razões de ângulos complementares. Isto é o que se tentará observar com as questões

**Na figura seguinte, determine  $\operatorname{sen} C$  sendo dado**

**$\cos B = 0,375$  : C**



**A** **B**

*(Retirado do livro: Matemática, 2º grau, vol. 1, versão Beta, de Bianchini & Paccola, Ed. Moderna, 2ª edição revista e ampliada, 1995, SP, exercício 12, p. 244, item a)*

seguintes.

6ª Questão

Equivale à questão 7 do pré-teste.

Esta questão trata da relação existente

**Quadro 4.17:** Sexta questão do pós-teste

entre ângulos complementares (que somam  $90^\circ$ ) e razões trigonométricas. Como no caso acima B e C são complementares, então pela definição de seno e co-seno, esperamos que o aluno responda que  $\operatorname{sen} C = \cos B$ : uma resposta imediata, sem cálculo, baseada somente no conhecimento do aluno. Caso contrário, a questão terá um grau de dificuldade maior do que desejado, pois o aluno, desconhecendo esta relação existente entre ângulos complementares,

necessitará, através da figura apresentada e usando a definição, concluir que  $\text{sen } C = \text{cos } B = 0,375$ . Observamos que, exceto o ângulo reto, nenhuma outra medida do triângulo está definida e que não é permitida a consulta à tabela trigonométrica.

### 7ª Questão

Complete cada afirmativa a seguir com o sinal  $<$ ,  $=$  ou  $>$  :

a)  $\text{cos } 80^\circ \dots\dots \text{cos } 20^\circ$

b)  $\text{sen } 41^\circ \dots\dots \text{sen } 22^\circ$

c)  $\text{tg } 33^\circ \dots\dots \text{tg } 55^\circ$

Equivale à questão 8 do pré-teste. Tem a finalidade de observar a existência de conhecimento sobre a variação nos valores do seno, co-seno e tangente de um

**Quadro 4.18:** Sétima questão do pós-teste

ângulo agudo. Ou seja, à medida que o valor do ângulo aumenta (ou diminui), o que acontece, ou qual a relação existente entre essa variação do ângulo e a variação do valor da razão? Assim como no pré-teste, nenhuma das três afirmativas admite o sinal de igualdade. Pensamos, com isto, aumentar a confiabilidade quanto ao acerto da questão, indicando um provável conhecimento a respeito do assunto, visto ser esta questão a única que permite ao aluno arriscar uma resposta (ao acaso), preenchendo os espaços em branco.

Nesta questão, ou o aluno tem conhecimento do que se trata e, então, responderá corretamente, ou lançará uma resposta qualquer, com pouca possibilidade de acerto. No caso de desconhecimento do assunto, a resposta (caso ocorra) mais provável que esperamos, será aquela associada ao valor do ângulo, isto é, ângulo maior implica razão maior e

vice-versa, o que é um erro se aplicada indiferentemente à razão considerada.

O aluno que responder acertadamente a esta questão, provavelmente responderá corretamente à questão seguinte, relativa ao mesmo fato.

O seno e o co-seno de um ângulo são sempre números menores do que 1 ? Justifique.

(Retirado do livro: *Matemática, 1º grau, 8ª série, de Luiz Márcio Imenes e Marcelo Lellis, Editora Scipione, 1997, SP, exercício 32, p. 124, item g).*

**Quadro 4.19:** Oitava questão do pós-teste

### 8ª Questão

Eqüivale à questão 9 do pré-teste.

Também relativa à variação nos valores do seno, co-seno e tangente de um ângulo

agudo, procura observar se, além do fato de que  $0 < \text{sen } \alpha < 1$  e  $0 < \text{cos } \alpha < 1$ , sendo  $\alpha$  um ângulo agudo, se o aluno é capaz de justificar, indo além do simples conhecimento do fato. O aluno pode ter assimilado a informação (importante e relevante) de que tanto seno como co-seno são numericamente menores do que 1, mas além disso cobramos um complemento: a justificativa.

Estamos levando em consideração aqui duas coisas: o conhecimento do fato e a justificativa deste. Acreditamos que o aluno que vai além do conhecimento do fato, deva também ter respondido corretamente à questão anterior (a 7ª). As questões 7 e 8 se completam, indicando um provável conhecimento a respeito da variação dos valores das razões trigonométricas.



### 9ª Questão

O que você entende por Trigonometria ?
--

Com esta questão pretendemos observar o

**Quadro 4.20:** Nona questão do pós-teste  
conceito que o aluno passou a ter a respeito de *trigonometria no triângulo retângulo*, após se submeter a uma seqüência de ensino.

Esperamos que o aluno tenha associado a trigonometria à resolução de triângulos, tendo por base o triângulo retângulo e as razões seno, co-seno e tangente. E que essas razões, inerentes aos triângulos retângulos, são números que se obtêm da divisão (razão) entre as medidas dos lados desse triângulo. Essas razões (números) se mantêm, cada uma delas, constantes para cada ângulo agudo  $\alpha$  considerado.

Esperamos, ainda, que o aluno tenha entendido a trigonometria como um recurso muito útil no cálculo de distâncias inacessíveis.

Esta questão tem um caráter mais abrangente, genérico, subjetivo, ao perguntar sobre a idéia que o aluno passou a ter a respeito de Trigonometria. Não temos a intenção de avaliá-la como certa ou errada, mas utilizá-la como uma informação, com uma análise em separado a respeito da concepção do aluno.

Finalizando a descrição do pós-teste, observamos que, para fins de avaliação dos resultados, é possível agrupar algumas questões. Assim, não precisaremos fazer uma análise questão por questão, mas os agrupamentos daquelas que apresentam características comuns predominantes em seu objetivo.

Assim, podemos identificar as questões da seguinte maneira: a questão 1 como de aplicação do 'teorema de Pitágoras', a questão 2 como aplicação da

'definição de razão trigonométrica' (como se fosse uma fórmula), as questões 3 e 4 como 'algoritmicas' (a solução pode ocorrer pela aplicação de um algoritmo), a questão 5 como 'relações trigonométricas' (por envolver as razões trigonométricas entre si), a questão 6 como 'ângulos complementares' (por se tratar da relação existente entre as razões trigonométricas de ângulos complementares) e, finalmente, as questões 7 e 8 como 'variação dos valores das razões' (por tratarem deste fato propriamente dito).

Antecipando à análise dos resultados, acreditamos que, a priori, podemos afirmar que, provavelmente, o aluno possui o domínio completo do conceito (razões trigonométricas no triângulo retângulo) ao responder corretamente às questões 2 + (3 ou 4) + 5 + 6 + 7 + 8.

#### **4.2.2. Apresentação e Descrição da Seqüência de Ensino**

Nossa seqüência de ensino é constituída de onze encontros, correspondendo a dezoito aulas de cinquenta minutos cada uma. Esta distribuição foi feita em conformidade com o horário e calendário da escola, na qual esta seqüência será aplicada. Sumariamente, os encontros serão assim distribuídos:

ENCONTROS (tipo de aula)	OBJETO DE ESTUDO	OBJETIVO	Nº DE ATIVIDADES (conteúdos)
1º (aula dupla)	- Semelhança de triângulos - triângulo retângulo - Teorema de Pitágoras	Pré-requisitos ao estudo das razões trigonométricas	5; Medida de distância inacessível, maquete, modelos de triângulos em madeira, medições para construção de tabela, verificação do Teorema de Pitágoras e da razão (cat.oposto)/(cat.adjacente) .
2º (aula simples)	Tangente	Construção do conceito de tangente	1; Construção geométrica de um triângulo retângulo $c/\alpha=35^\circ$ e obtenção da razão (cat.op.)/(cat.adj.).
3º (aula simples)	Tangente	Construção do conceito de tangente	1; Determinação da altura de uma árvore vista sob um ângulo de $35^\circ$ .
4º (aula dupla)	Tangente	Construção do conceito de tangente	3; Construção da tabela da razão (cat.op.)/(cat.adj.) para ângulos de $5^\circ$ até $85^\circ$ ; determinação do ângulo de elevação do Sol e da largura de um rio.
5º (aula simples)	Tangente	Institucionalização do conceito de tangente	2; Definição de tangente; determinação da distância entre uma praia e uma ilha; do ângulo de inclinação de um telhado; uso de calculadora.
6º (aula dupla)	Seno e Co-seno	Construção do conceito de seno e de co-seno	2; Determinação do comprimento de uma rampa com inclinação dada; construção da tabela com as razões (cat.op.)/(hipotenusa) e (cat.adj.)/(hipotenusa).
7º (aula dupla)	Seno e Co-seno	Institucionalização do conceito de seno e de co-seno	4; Determinação da altura de um muro; da distância percorrida por um barco para atravessar um rio; definição de seno e de co-seno; determinação da altura em que se encontra uma pipa e o comprimento de um cabo de aço; uso de calculadora.
8º (aula simples)	Tangente, Seno e Co-seno	Institucionalização a partir de problemas formais	1; Aplicação da definição de razão trigonométrica em problema formal; determinação de $x$ (medida de lado ou ângulo); uso de calculadora.
9º (aula dupla)	Tangente, Seno e Co-seno	Institucionalização a partir de problemas formais	3; Aplicação da definição de razão trigonométrica em problema formal; determinação de $x$ (medida de lado ou ângulo); triângulos não-retângulos; uso da calculadora.
10º (aula dupla)	Ângulos complementares	Relacionar ângulos complementares e razões trigonométricas	3; Dada uma razão trigonométrica, determinar as demais; definição de ângulos complementares; determinação de seno e de co-seno de ângulos complementares.
11º (aula dupla)	Variações nos valores do seno, co-seno e tangente	Estudar as variações dos valores das razões trigonométricas	3; Ainda um problema sobre ângulos complementares e um problema analisando a equação " $\text{sen } \alpha = 3/2$ "; utilização de dispositivo p/ "visualizar" que $0 < \text{sen } \alpha < 1$ e $0 < \text{cos } \alpha < 1$ ; variação da tangente e uso de dispositivo para "visualizar" que $\text{tg } \alpha > 0$ .

**Tabela 4.1:** Resumo da seqüência de ensino a ser aplicada no Grupo Experimental

razões trigonométricas e ocorrerá numa aula dupla (duas aulas).

Do segundo ao sétimo encontro, o objetivo é a construção dos conceitos de tangente, seno e co-seno, sempre partindo de situações-problemas, num total de nove aulas.

Para cada conceito abordado, procuramos partir do sensível para o abstrato, ou seja, da contextualização (concreto) para a Institucionalização formal (formalização). Isso acontece tanto quanto aos pré-requisitos (primeiro encontro), como ao abordar a razão tangente (do segundo ao quinto encontro) e as razões seno e co-seno (sexto e sétimo encontros).

De forma geral, o mesmo também ocorrerá: do primeiro ao décimo primeiro

encontro caminharemos no sentido da contextualização para a formalização. Assim, do oitavo ao décimo primeiro encontro trataremos da sistematização dos conceitos envolvidos, com problemas descontextualizados, a abordagem a respeito de ângulos complementares e sobre a variação dos valores do seno, co-seno e tangente, num total de sete aulas.

Os alunos trabalharão divididos em grupos de, preferencialmente, três componentes cada um, mantendo sempre os mesmos componentes em todos os encontros.

Os onze encontros compreendem o desenvolvimento de vinte e seis atividades propostas através de fichas e outras três sem ficha, totalizando vinte e nove atividades. Para efeito de apresentação e discussão delas, nesta seção, terão formatação reduzida. No que se refere aos problemas que compõem as atividades, optamos por não procurar a originalidade.

Procuramos, preferencialmente, ficar próximos da realidade escolar, escolhendo, na medida do possível, problemas encontrados em livros

didáticos. Os problemas selecionados desta forma vêm com a indicação da fonte, caso contrário, não havendo indicação, isto significa que o problema foi por nós elaborado.

Dentre as atividades, há aquelas cuja execução necessita de papel quadriculado e material de desenho geométrico, como régua com escala e transferidor.

Para os cálculos, permitiremos e estimularemos o uso da calculadora, sendo que ao término dos encontros, os alunos deverão saber obter as razões trigonométricas dessa forma.

Toda atividade proposta deverá, de início, ser discutida por cada grupo isoladamente, estimulado pelo pesquisador. Por já termos feito um piloto, admitiremos para cada atividade um tempo médio de 10 minutos, que acreditamos seja o necessário para sua discussão em grupo. Porém, no caso de envolver construções geométricas, medições e cálculos, poderá exceder a 20 minutos. Portanto, distribuimos as atividades ao longo dos encontros de tal modo que acreditamos possibilitar a participação dos alunos dentro do tempo previsto, devendo ser esta uma preocupação constante do pesquisador.

Sugerimos criar um ambiente de jogo, gincana ou brincadeira, dilatando o tempo sempre um pouco mais.

Após um tempo (flexível) determinado pelo pesquisador, debate-se com todas as respostas obtidas até aquele momento, a fim de encontrar uma solução comum. A discussão isolada de cada grupo e, posteriormente, o debate em conjunto com a classe é uma ocasião propícia para a verbalização (pelo aluno) das observações feitas, o desenvolvimento de uma lógica de

raciocínio para defesa de sua opinião e a verificação da existência ou não de outras soluções.

Achamos conveniente o pesquisador ouvir e comentar sempre as respostas dos alunos, não nos deixando sem retorno, dirigindo-se a cada grupo solicitando que falem o que pensam.

No caso de ficha de atividade, cada uma deverá ser preenchida com data, uma identificação do grupo (por exemplo, letras maiúsculas: A, B, C,...) e os nomes dos componentes do grupo presentes nesse dia. Um dos elementos do grupo poderá ser escolhido entre eles, a cada atividade, como responsável pelo preenchimento da ficha, incluindo a solução do grupo à questão proposta.

Em todo encontro, as fichas (uma por grupo) serão recolhidas como documento de participação, para análise do pesquisador e, se necessário, um retorno ao grupo quanto ao conteúdo. Ao recolher a ficha de atividade de cada grupo, o pesquisador poderá fornecer a cada componente uma ficha dessa mesma atividade para que o aluno se documente e faça suas anotações.

A seguir, descreveremos com detalhes cada encontro.

### 1º ENCONTRO : Semelhança de triângulos, triângulo retângulo e Teorema de Pitágoras (aula dupla)

Esse primeiro encontro tem por objetivo rever o conceito de semelhança de triângulos, triângulo retângulo e Teorema de Pitágoras, pré-requisitos ao estudo das razões trigonométricas. Conseqüentemente, envolve também os conceitos de razão e proporção.

Nele, desenvolveremos cinco atividades, sendo duas, a 1ª e a 5ª, através de fichas (ficha de atividade 1 e 2) e as demais sem fichas, resolvidas através de material concreto.

O encontro inicia-se com o pesquisador dividindo a classe em grupos e nomeando esses grupos com uma letra maiúscula: A, B, C, D, ...

Descreveremos, a seguir, cada uma das atividades desse primeiro encontro.

### 1ª ATIVIDADE

Com os alunos separados em grupos, a cada um desses grupos, entregaremos uma ficha (ficha de atividade 1) com o seguinte conteúdo:

Ficha de atividade 1

---

(a) Como você faria para medir a altura (.....) ?

Explique em detalhes sua idéia e dê outras alternativas

---

#### **Quadro 4.21:** Ficha de atividade 1

Para estimular o interesse e a participação dos alunos, no espaço representado por (.....), indicaremos um monumento ou obra arquitetônica que tenha forma irregular, seja alto, de difícil acesso e conhecido pelos alunos.

Achamos conveniente indicar, na medida do possível, um objeto diferente para cada grupo. Assim, no caso da cidade de Taubaté-SP, local do experimento, podemos citar o monumento ao Cristo Redentor, a torre da igreja de

Sta. Terezinha, o prédio do relógio da CTI, uma torre de transmissão de energia, uma torre de retransmissão de rádio e TV, de um morro, de um prédio muito alto, etc...

Após distribuir as fichas, o pesquisador poderá se dirigir à classe perguntando: “O que podemos fazer para medir algo de difícil acesso?”. É provável que alguns alunos, devido ao conteúdo programático da escola, pensem numa associação entre sombra e altura do objeto, aplicando a idéia de semelhança de triângulos. Outros alunos poderão dar respostas baseadas no seu mundo concreto, imaginando escalar o objeto, usar corda, helicóptero,...

O objetivo desta atividade é despertar a atenção dos alunos sobre a existência de medidas inacessíveis, cujos processos comuns de medição direta não são possíveis. Há necessidade de um recurso diferente. Este problema servirá de introdução à revisão do conceito de semelhança de triângulos.

Depois de ouvir as respostas dos alunos e recolher as fichas, faremos um breve comentário sobre Tales, 600 A.C. Consta que Tales pensou a respeito de uma distância inacessível, a altura de uma pirâmide, e este fato servirá de introdução à 2ª atividade, em que se pretende medir é a altura de uma árvore.

## 2ª ATIVIDADE

A 2ª atividade não vem acompanhada de uma ficha e constitui um complemento à atividade anterior, pois ainda trata de distância inacessível, no caso a medida da altura de uma árvore. “Por que determinar a altura de uma



árvore?”, achamos que seja uma boa pergunta para estimular o interesse e a participação dos alunos.

Como nosso trabalho visa à participação do aluno, a contextualização e o concreto como forma de construção de conceitos, optamos por utilizar uma maquete (ver figura 4.2),



**Figura 4.2:** Foto da maquete escala 1:50, para modelar uma situação da realidade. Para nós, a maquete constitui uma representação da realidade, um modelo concreto entre a realidade e a representação no papel.

Entendemos que o melhor seria sair da sala de aula e ir para o pátio, rua ou campo. Mas, de maneira geral, isso não é possível, devido ao número de alunos, às normas da escola, às condições climáticas, aos instrumentos necessários, etc...

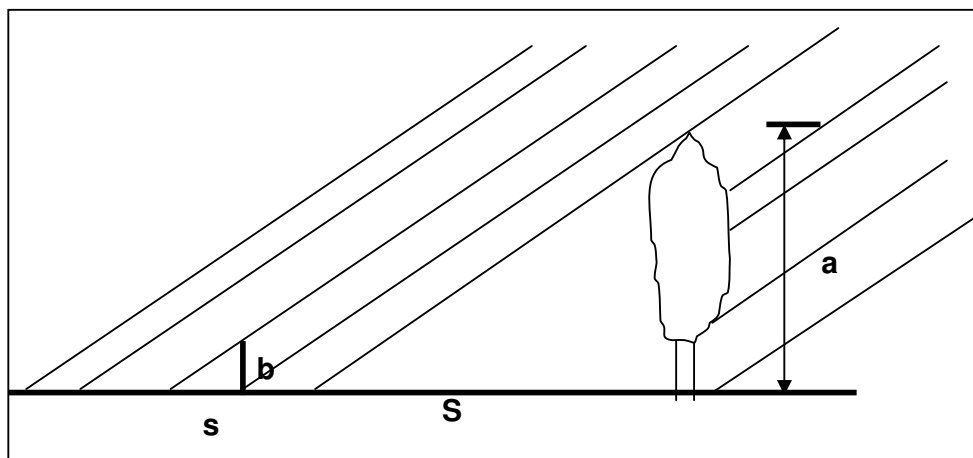
Assim, a atividade se inicia com o pesquisador apresentando à classe a maquete com a árvore, mas ainda sem as sombras e se dirigindo à sala perguntando: “De que forma podemos obter a altura de uma árvore?”.

Provavelmente, atentos pela discussão da atividade anterior ou ser do conhecimento de alguns alunos, prontamente respondam ser através da associação entre sombra e altura. De qualquer modo, acreditamos que o pesquisador possa conduzir o pensamento dos alunos nessa direção, lembrando novamente de Tales que associou a sombra da pirâmide (árvore) e sua altura, com a sombra de um bastão de altura conhecida.

O objetivo dessa atividade é rever o conceito de semelhança de triângulos, razão e proporção.

Após discutir com os alunos sobre a idéia de Tales, o pesquisador acrescenta à maquete as sombras e o bastão, e pergunta: “Como Tales procedeu para obter a altura da árvore?”.

A partir das respostas dos alunos, o pesquisador poderá esquematizar na lousa a situação:



**Figura 4.3:** Determinando a medida da altura de uma árvore

Aqui, então, formalizamos a idéia de Tales:

$$a/S=b/s \quad (I)$$

necessitando que o pesquisador reveja, **verbalmente**, os conceitos de **razão** e **proporção**.

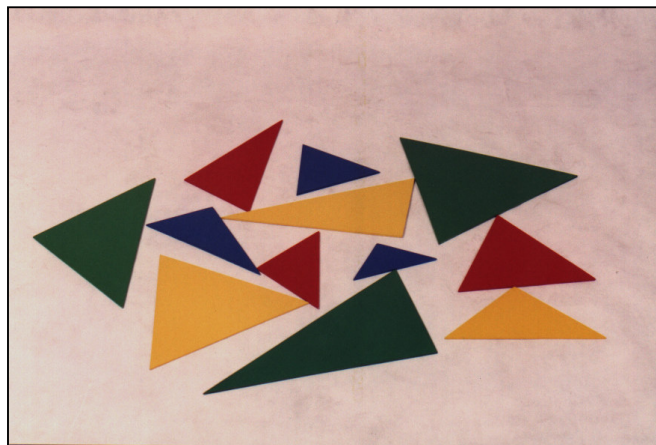
Com a colaboração de três alunos, um de cada grupo (A, B e C), obtemos as medidas **S**, **s** e **b**, com a utilização de régua com escala e não permitindo que nenhum dos alunos meça **a** (altura da árvore). Em (I), com as medidas **S**, **s** e **b**, obtemos o valor de **a** (altura da árvore).

Com a colaboração de mais um aluno (do grupo D), solicitamos que este meça a altura da árvore obtendo **a**, que deve ser o mesmo valor obtido com os cálculos acima.

Em seguida, achamos conveniente para a sistematização do conceito, comentar que Tales provavelmente tenha pensado da seguinte forma: no momento em que a *medida da sombra do bastão* for igual ao *comprimento do bastão*, então a *altura da árvore* (ou pirâmide) é igual à *medida da sombra da árvore*.

### 3ª ATIVIDADE

O pesquisador colocará sobre a mesa quatro conjuntos de quatro modelos de triângulos semelhantes, mas de forma desordenada, ao acaso (ver figura 4.4).



**Figura 4.4:** Foto dos modelos de triângulos

Com a colaboração de quatro alunos, um de cada grupo (E,F,G e H), o pesquisador solicitará que esses alunos identifiquem quais modelos de triângulos são semelhantes entre si e o porquê dessa escolha. O critério adotado pelos alunos será exposto verbalmente a todos e colocado em discussão.

É provável que os alunos já tenham o conceito de semelhança incorporado de modo que o critério venha ser o correto e que toda classe se manifeste de acordo com o mesmo. Caso contrário, o pesquisador poderá

solicitar a colaboração de mais quatro alunos e, agora anotando os critérios na lousa, submeta à manifestação da classe.

O objetivo dessa atividade é rever o conceito de semelhança de triângulos, concluindo com a formalização de um critério que caracterize essa semelhança.

Após discussão com a classe, o pesquisador formalizará o critério que provavelmente seja o consenso, escrevendo na lousa ou utilizando um cartaz previamente escrito :

“Para dois triângulos serem semelhantes, basta que eles tenham os ângulos respectivamente congruentes (“iguais”).

*(Do livro: Matemática Aplicada, vol. 1, de Trotta, Jakubo e Imenes, Editora Moderna, 1979, SP, esgotado, p. 154)*

**Quadro 4.22:** Condição para que dois triângulos sejam semelhantes

#### 4ª ATIVIDADE

Em seguida, ainda nesse encontro, vamos trabalhar os conceitos de triângulo retângulo e Teorema de Pitágoras, pré-requisitos ao estudo das razões trigonométricas.

Retomando os modelos de triângulo utilizados na 3ª atividade, já separados em conjuntos de triângulos semelhantes, o pesquisador se dirigindo à classe perguntará: “Dentre os modelos de triângulos aqui exibidos, identifiquem quais são triângulos retângulos”. Exibindo um a um dos conjuntos de triângulos semelhantes, ouvirá as manifestações dos alunos.

Esperamos que os alunos já tenham incorporado o conceito de triângulo retângulo e, assim, responderão corretamente.

O objetivo dessa atividade é rever o conceito de triângulo retângulo, bem como a nomenclatura utilizada para seus lados.

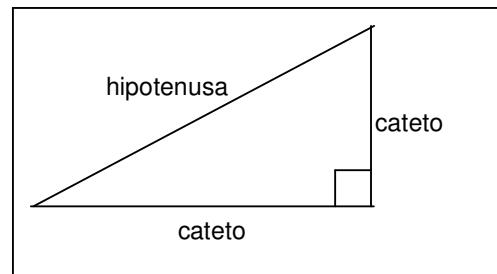
Após a identificação dos modelos de triângulos retângulos, o pesquisador perguntará o porquê dos triângulos serem considerados assim.

Com a participação dos alunos, o pesquisador formalizará o conceito de triângulo retângulo *escrevendo* a definição na lousa.

“Chamamos de triângulo retângulo a todo triângulo que possua um dos ângulos medindo  $90^\circ$  (“ângulo reto”).”

**Quadro 4.23:** Definição de triângulo retângulo

O triângulo retângulo é tão importante e especial, que até os seus lados têm nomes especiais. Será que os alunos são capazes de identificar a hipotenusa e os catetos? Isso o pesquisador poderá discutir com a classe e resumir desenhando na lousa a figura de um triângulo retângulo.



**Figura 4.5:** Triângulo retângulo

Finalizando a atividade e já se preparando para a próxima, o pesquisador questionará se os alunos têm conhecimento do Teorema de Pitágoras.

Tanto quanto à nomenclatura como ao Teorema de Pitágoras, admitimos que a maioria dos alunos tem conhecimento a respeito. Por isso, o trato desses assuntos tem a finalidade de revisão, por se tratar de pré-requisito ao estudo das razões trigonométricas.

O pesquisador poderá escrever na lousa :

## TEOREMA DE PITÁGORAS

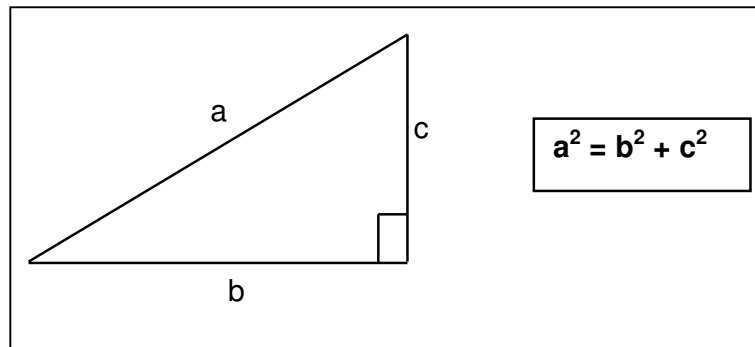


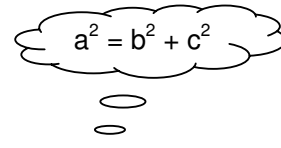
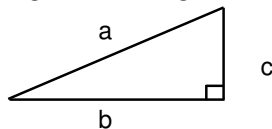
Figura 4.6: Teorema de Pitágoras

5ª ATIVIDADE

O pesquisador entregará a cada grupo um conjunto de três modelos de triângulos retângulos semelhantes, uma régua com escala e a ficha de atividade nº 2, cujo conteúdo é o seguinte :

## Ficha de atividade 2

Complete a tabela a seguir com dados obtidos das medições dos modelos de triângulos retângulos.



Grupo	Medida dos lados			$a^2$	$b^2$	$c^2$	$b^2+c^2$	$\frac{c}{b}$ —
	a	b	c					
1								
2								
3								

Quadro 4.24: Ficha de atividade 2

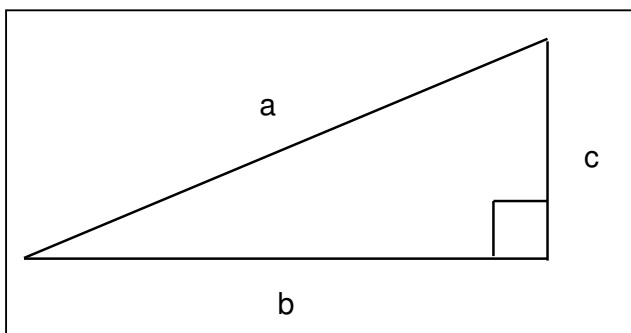
B.

Do conjunto de modelos de triângulos, cada grupo de alunos obterá, através de medições, os dados necessários para o preenchimento da tabela acima.

Pelo que já foi observado no piloto, os alunos poderão apresentar dificuldades no manuseio e leitura da régua., ou seja, muitos alunos não se apropriam do instrumento, das informações possíveis de se obter com ele. Não só com a régua ocorre isso, mas também, por exemplo, com a calculadora.

O objetivo dessa atividade é observar a validação do Teorema de Pitágoras, através de manipulação e medição, e observar que a razão  $c/b$  é constante no caso de triângulos retângulos semelhantes.

Quanto aos catetos, achamos que ainda não se deve qualificá-los em **oposto** ou **adjacente**, mas sim manter a associação com a representação :



**Figura 4.7:** Representação de um triângulo

Quanto às medições, aproveitar para comentar sobre a Matemática trabalhar com o mundo ideal (com o perfeito), sendo que na vida,

na realidade, não é tudo perfeito, exato. Por exemplo, os “triângulos” utilizados são modelos de triângulos, feitos em madeira ou por construção geométrica no papel.

Portanto, não obteremos  $a^2$  exatamente igual a  $b^2 + c^2$ , mas cabe ao pesquisador estimular os alunos a obterem a melhor aproximação possível.

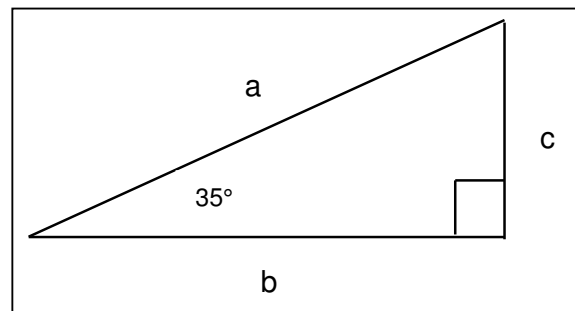
Essa atitude, de procurar uma melhor aproximação para que  $a^2 = b^2 + c^2$ , contribuirá para que a **razão**  $c/b$  seja mais próxima da realidade.

A atividade termina com o pesquisador chamando a atenção dos alunos para o fato de que, em cada conjunto de modelos de triângulos retângulos semelhantes, a **razão**  $c/b$  é constante, especialmente considerando uma aproximação de duas casas decimais.

Por que triângulo retângulo ? E no caso de triângulo qualquer ? O pesquisador deve explicar aos alunos que em todo conjunto de triângulos semelhantes, a **razão** entre as medidas dos lados permanece constante.

A escolha de triângulos retângulos se dá pela sua particularidade histórica, tornando-o um caso especial.

Em seguida, o pesquisador aproveita para, numa introdução ao 2º encontro, perguntar : “Qual será o valor da razão  $c/b$  se, por exemplo,  $\alpha=35^\circ$  ?”



**Figura 4.8:** Triângulo retângulo com  $\alpha=35^\circ$

## 2º ENCONTRO: Construção do conceito de tangente (aula simples)

Com esse encontro, iniciaremos uma seqüência de quatro encontros, nos quais pretendemos que os alunos construam o conceito de tangente a partir de situações-problema, contextualização, construções geométricas e medições.



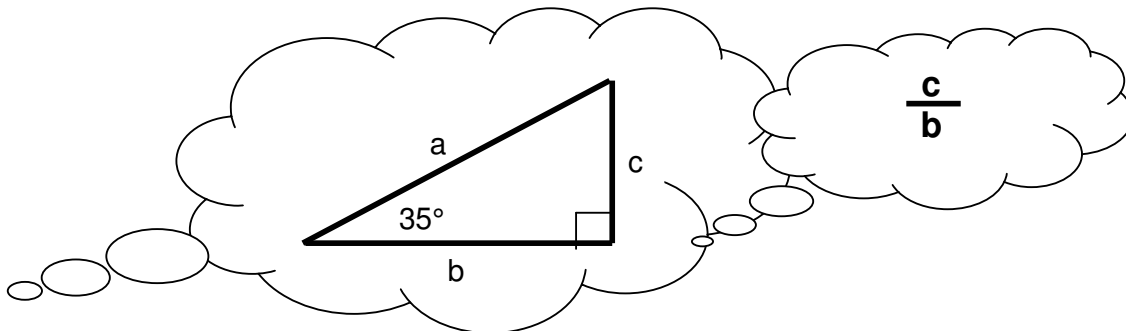
### ATIVIDADE ÚNICA

A atividade desse encontro corresponde à ficha de atividade nº 3, cujo conteúdo é o seguinte :

#### Ficha de atividade 3

---

Construir em papel quadriculado, utilizando régua e transferidor, um triângulo retângulo com um ângulo agudo de  $35^\circ$ , e obter a **razão**  $c/b$ .




---

**Quadro 4.25:** Ficha de atividade 3

O pesquisador distribuirá para cada grupo uma ficha de atividade nº 3, papel quadriculado e transferidor.

Mais uma vez aqui, fato observado no piloto, esperamos encontrar dificuldades por parte dos alunos na utilização de papel quadriculado e transferidor, além daquele já citado na atividade anterior quanto ao manuseio da régua. Assim, acreditamos que possa consumir quinze minutos do tempo da aula. Sugerimos que seja estabelecido dez minutos para o cumprimento da atividade, sempre com um pouco de acréscimo se necessário.

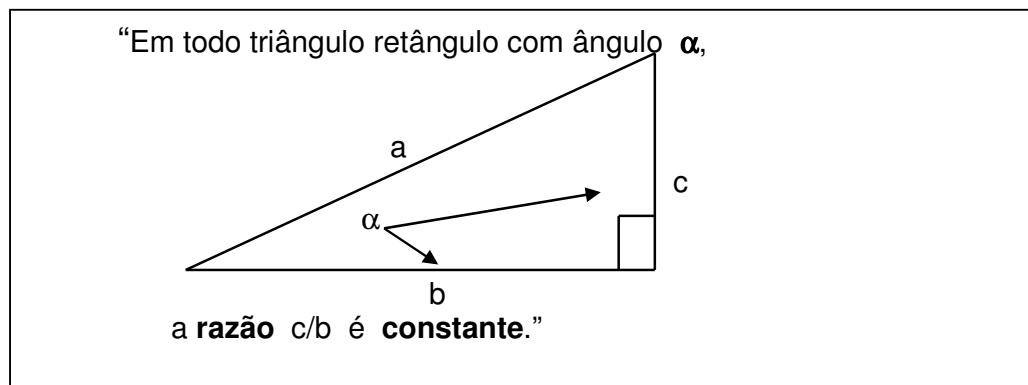
O objetivo dessa atividade é que os alunos observem, através de construção geométrica, que em qualquer triângulo retângulo com um ângulo de  $35^\circ$ , a **razão**  $c/b$  é constante.

Cumprido o tempo (flexível) estabelecido, o pesquisador solicitará que cada grupo diga o seu resultado, sendo que o esperado é uma constante para todos os grupos. Feita a discussão e os ajustes necessários, o pesquisador solicitará também que cada grupo experimente no seu próprio desenho, com triângulos maiores ou menores, o fato de que  $c/b$  é uma constante.

“E se não for  $35^\circ$  daria também esse valor ? Por exemplo, se for  $50^\circ$ ?

Estime o valor para um ângulo de  $50^\circ$ ! Será maior ou menor do que para  $35^\circ$  ?”, são perguntas e possibilidades que o pesquisador poderá considerar.

A atividade e o encontro terminam com a formalização do fato acima observado, escrevendo na lousa :



**Figura 4.9:** Relativa ao conceito de tangente

O pesquisador poderá, verbalmente e aproveitando o desenho na lousa (ou cartaz), explicar a qualificação dos catetos em *oposto* ou *adjacente*.

**c** → é a medida do cateto oposto ao ângulo  $\alpha$

**b** → é a medida do cateto adjacente ao ângulo  $\alpha$

### 3º ENCONTRO : Construção do conceito de tangente (aula simples)

Nesse encontro, desenvolveremos uma atividade correspondente à ficha de atividade 4, com o objetivo de construir o conceito de tangente.

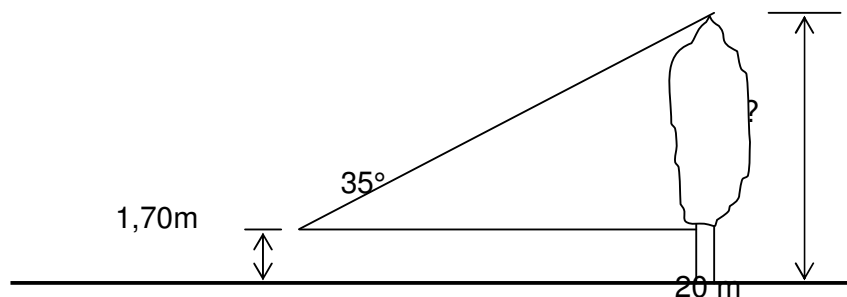
A seguir, descreveremos essa atividade.

#### ATIVIDADE ÚNICA

Após uma breve revisão a respeito do último encontro, o pesquisador entregará a cada grupo de alunos uma ficha de atividade nº 4, cujo conteúdo é o seguinte :

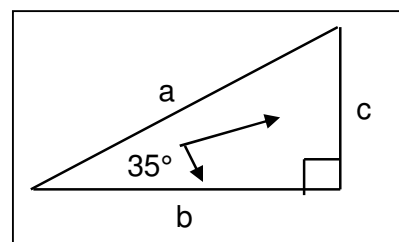
#### Ficha de atividade 4

Determinar a altura da árvore , dado:



**Quadro 4.26:** Ficha de atividade 4

Trata-se de uma aplicação, contextualizada, do fato observado na atividade do encontro anterior, de que num triângulo retângulo com um ângulo de  $35^\circ$ , a razão  $c/b$  é constante.



**Fig. 4.10:** Relativa ao conceito de  $\tan 35^\circ$

Com isso, podemos obter a altura de uma árvore (distância inacessível) mesmo numa situação de ausência de sombra. Esperamos que, estimulados pelo

pesquisador, os alunos façam uma associação entre a situação-problema acima e a atividade do encontro anterior. Daí a importância da revisão sugerida para o início dessa atividade.

O pesquisador poderá auxiliar na interpretação do texto do problema, inclusive comentando sobre a existência de instrumentos de medição de ângulos, como o teodolito e outros recursos improvisados.

Após a discussão e trabalho em grupo, o pesquisador poderá colocar em debate a solução do problema, ouvindo e orientando o raciocínio dos alunos, escrevendo na lousa, descontextualizando.

Resolvido o problema, achamos conveniente que o pesquisador comente sobre a utilidade do conceito empregado (razão constante) na obtenção de distâncias inacessíveis e independente de haver sombra ou não.

4º ENCONTRO : Construção do conceito de tangente (aula dupla)

### 1ª ATIVIDADE

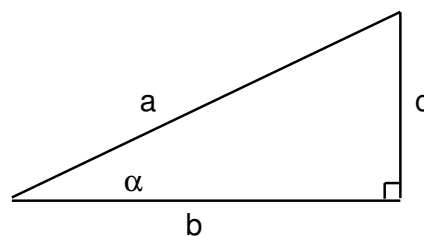
Essa atividade corresponde àquela proposta na ficha de atividade nº 5, cujo conteúdo é o seguinte :

## Ficha de atividade 5

Completar a tabela a seguir com os valores das razões (cateto oposto a  $\alpha$ ) / (cateto adjacente a  $\alpha$ ), por construção geométrica, usando régua, transferidor e papel quadriculado.

$\alpha$	$c/b$
5°	
10°	
15°	
20°	
25°	
30°	
35°	
40°	
45°	
50°	
55°	
60°	
65°	
70°	
75°	
80°	
85°	

$$\frac{(\text{cateto oposto a } \alpha)}{(\text{cateto adjacente a } \alpha)}$$



Quadro 4.27: Ficha de atividade 5

O pesquisador entregará a cada grupo, além da ficha de atividade nº 5, também papel quadriculado, régua com escala e transferidor.

Em seguida, poderá colocar em discussão um pensamento que provavelmente ocorrerá a todos nesse momento: “Por que construir tal tabela?”.

Já que as razões entre os lados de triângulos retângulos semelhantes se mantêm constantes, só dependendo do ângulo  $\alpha$  considerado (ver figura na ficha de atividade nº 5), então o objetivo dessa atividade é observar tal fato por experimentação.

Cada grupo trabalhará com dois valores de ângulos que, no caso de dez grupos, sugerimos os seguintes : A  $\rightarrow$  20° e 30°; B  $\rightarrow$  40° e 50°; C  $\rightarrow$  50° e 65°;

D  $\rightarrow$  10° e 60°; E  $\rightarrow$  10° e 55°; F  $\rightarrow$  20° e 45°; G  $\rightarrow$  25° e 15°; H  $\rightarrow$  85° e 25°; I  $\rightarrow$  15° e 5°; J  $\rightarrow$  80° e 45°.

A repetição de alguns valores de ângulos em mais de um grupo recomendamos pelo fato de podermos aferir os resultados, à medida que forem sendo obtidos serão anotados na lousa. Aqui é um bom momento para despertar a curiosidade dos alunos quanto à calculadora, conferindo os resultados através dela (somente o pesquisador). Do mesmo modo (usando a calculadora) e pelo mesmo motivo, podemos obter as razões correspondentes aos ângulos 70° e 75° não contemplados na relação acima.

Recomendamos que nos triângulos construídos nessa atividade, as medidas dos lados sejam muito bem registradas, pois a partir dessas mesmas construções, obteremos, no sexto encontro, os valores das razões trigonométricas seno e co-seno.

Terminada a atividade, o pesquisador poderá chamar a atenção, mais uma vez, de que a razão c/b é constante para todos os triângulos retângulos semelhantes, haja vista que grupos diferentes, utilizando-se do mesmo valor para o ângulo  $\alpha$ , obtiveram a mesma razão.

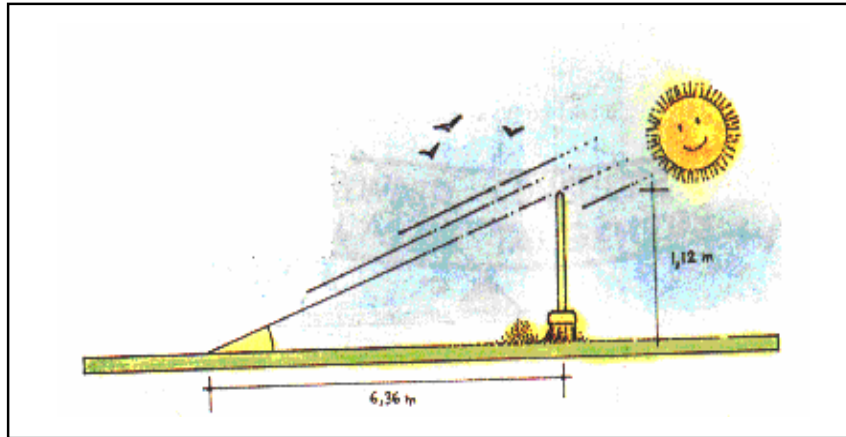
O pesquisador poderá solicitar aos alunos que anotem todos os valores obtidos, pois serão utilizados posteriormente, e em seguida as fichas serão recolhidas.

## 2ª ATIVIDADE

Essa atividade é proposta pela ficha de atividade nº 6 cujo conteúdo é o seguinte:

## Ficha de atividade 6

Num certo instante, a sombra de uma vassoura mede **6,36 m**. A vassoura mede **1,12 m**. Qual é, nesse instante, o ângulo  $\hat{\theta}$  de elevação do Sol ?



**Quadro 4.28:** Ficha de atividade 6

(Retirado do livro: *Matemática, 1º grau, 8ª série, de Imenes & Lellis, Editora Scipione, 1997 – SP, p. 116, exercício 7*)

Achamos que se trata de um problema de fácil interpretação, tendo como ponto central a **volta**, ou seja: obtida a razão tangente de um ângulo, qual é o valor desse ângulo ? Portanto, além de contribuir para a construção do conceito de tangente, objetiva o uso da tabela trigonométrica.

Acreditamos que os alunos não terão dificuldades na resolução desse problema, exceto quanto à aproximação, uma vez que na tabela utilizada os valores têm duas casas decimais.

Transcorrido um tempo estabelecido pelo pesquisador, poderá ser ouvido cada grupo quanto à solução do problema e aberta a discussão com a classe. Como o valor obtido da razão (com aproximação) se encontra na tabela, esperamos uma breve solução e discussão.

3ª ATIVIDADE

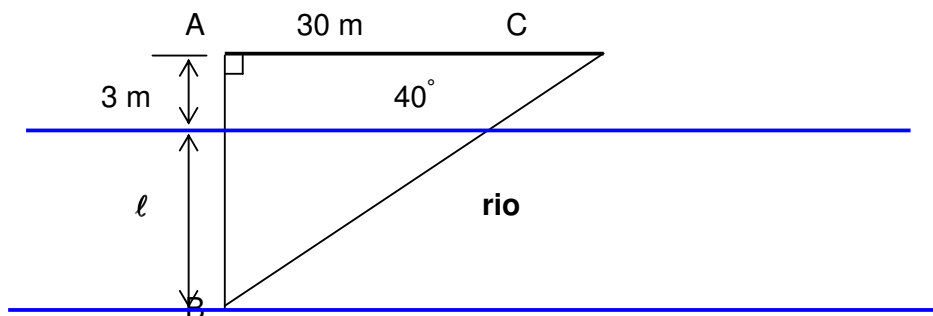
**Essa atividade corresponde àquela proposta na ficha de atividade**

**nº 7, cujo conteúdo é o seguinte :**

## Ficha de atividade 7

Para medir a largura de um rio, sem atravessá-lo, um observador situado num ponto A, distante 3 m da margem, visa, perpendicularmente à sua margem, um ponto B da margem oposta. De A, ele traça uma perpendicular à reta AB e marca sobre ela um ponto C distante 30 m de A. Em seguida, ele se desloca para C, visa os pontos A e B e mede o ângulo ACB obtendo  $40^\circ$ .

Qual é, aproximadamente, a largura do rio ?



**Quadro 4.29:** Ficha de atividade 7

(Retirado do livro: *Matemática Aplicada, vol 1, de Trotta, Imenes e Jakubo, Editora Moderna, 1979-SP, esgotado, exercício 12 da p. 192*).

“Por que medir a largura de um rio?”, acreditamos que deva ser uma boa pergunta para estimular a participação dos alunos, após haver distribuído uma ficha de atividade para cada grupo. Ouvida a opinião dos alunos, o pesquisador poderá auxiliar na interpretação do texto do problema. Estipulado um tempo para a solução do mesmo, esperamos que os alunos tenham condições de resolver o problema, uma vez que a situação apresentada é similar àquela (ficha de atividade 4) do cálculo da altura de uma árvore. Um certo grau de dificuldade deverá existir, devido à posição do



triângulo associado ao problema ser diferente daquela comumente usada até agora. Isso não foi por acaso.

Transcorrido o tempo determinado, o pesquisador poderá colocar em discussão a solução do problema, ouvindo e orientando o raciocínio dos alunos, anotando na lousa e descontextualizando. Resolvido o problema, serão recolhidas as fichas e, recapitulando o conteúdo desenvolvido, o pesquisador poderá encerrar esse encontro.

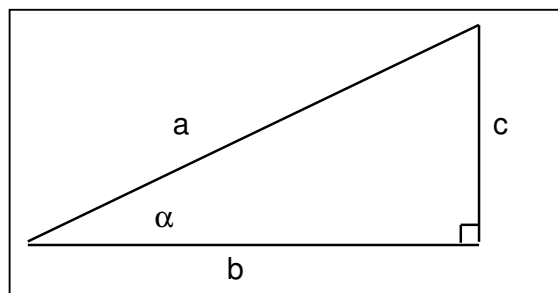
### 5º ENCONTRO: Institucionalização do conceito de tangente (aula simples)

O objetivo desse encontro é a institucionalização do conceito de tangente de um ângulo agudo.

O encontro se inicia com o pesquisador fazendo uma revisão do que foi desenvolvido no último encontro, de tal modo que, com a participação dos alunos, conduza à definição de tangente escrita na lousa.

#### Definição de tangente

“Chamamos de *tangente de um ângulo*  $\alpha$  ao número que se obtém quando, num triângulo retângulo com ângulo  $\alpha$ , se divide a medida do cateto



**Figura 4.11:** Modelo de triângulo retângulo

oposto ao ângulo  $\alpha$  pela medida do cateto adjacente ao ângulo  $\alpha$ ”.

<p>“tangente do ângulo <math>\alpha</math>” = <math>\frac{\text{medida do cat. oposto. ao âng. } \alpha}{\text{medida do cat. adjac. ao âng. } \alpha}</math></p> <p>↓</p> <p><b><math>\text{tg } \alpha = c/b</math></b></p>
---

**Quadro 4.30:** Definição de tangente

Esse número é constante para todo triângulo retângulo com ângulo  $\alpha$ .

Em seguida, desenvolveremos as atividades das fichas 8 e 9, ambas contextualizadas. Para o cumprimento dessas atividades, será necessário que os alunos tenham em mãos a tabela por eles construída no 4º encontro (ficha de atividade 5).

Com a definição, passamos a poder utilizar a palavra tangente e o símbolo  $\text{tg } \alpha$ , e introduzir a utilização da calculadora na obtenção dessa razão trigonométrica.

A seguir, descreveremos cada uma dessas atividades.

### 1ª ATIVIDADE

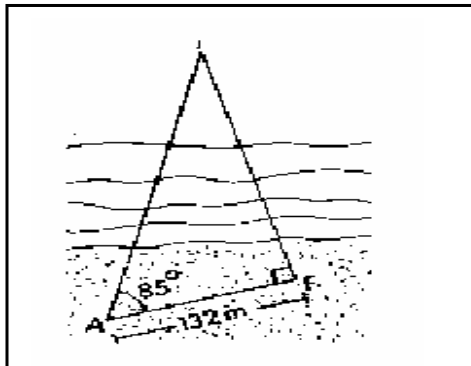
Corresponde à ficha de atividade nº 8, com o seguinte conteúdo :

#### Ficha de atividade 8

---

Qual a distância entre você (numa praia) e uma ilha (ou navio)?

Na figura, o ponto **I** representa uma ilha e o ponto **F** você deitado na praia. Com trena e teodolito, um topógrafo e seu ajudante podem calcular a distância entre você e a ilha (ou navio).



Com o teodolito colocado em **F**, eles obtêm a direção **FA**, formando  $90^\circ$  com **FI**. No ponto **A**, cravam uma estaca na praia. A distância de **F** até **A** é medida com a trena : **132 m**. Levando o teodolito para o ponto **A**, medem o ângulo formado pelas direções **AF** e **AI** :  $85^\circ$ . Com esses dados, pode-se calcular a distância entre você e a ilha (ou navio).

---

#### Quadro 4.31: Ficha de atividade 8

(Retirado da Proposta Curricular Para o Ensino de Matemática do 2º Grau, da Secretaria de Estado da Educação do Governo do Estado de São Paulo, 3ª edição, 1992 – SP, p. 79, exemplo 16).

Acreditamos que o texto longo e detalhado tem o intuito de dar ênfase à prática, à realidade e, portanto, sua interpretação constitui um aprendizado. Então, o pesquisador poderá auxiliar na interpretação do texto do problema e estabelecer um tempo para a resolução dele.

Por se tratar de uma aplicação direta do conceito de tangente, evidenciado pela ilustração, acreditamos que os alunos não terão dificuldades em resolvê-lo.

Transcorrido o tempo estabelecido, o pesquisador colocará em discussão a solução do problema, ouvindo cada grupo, orientando e desenvolvendo o raciocínio com anotações na lousa.

Resolvida a questão e considerando que a tangente já foi definida, achamos que é o momento propício para ensinar aos alunos a utilização da calculadora na obtenção dessa razão trigonométrica, através da tecla (função) “**TAN**”. Achamos conveniente determinar a tangente de  $85^\circ$  através da calculadora, comparando esse valor com o valor obtido da tabela utilizada, aproveitando para comentar novamente sobre aproximação e erro.. Porém, achamos conveniente não tratar ainda da função inversa (“**arctg(x)**”) na calculadora, deixando isso para um outro momento (ficha de atividade nº 9).

## 2ª ATIVIDADE

*Corresponde à ficha de atividade nº 9 cujo conteúdo é o seguinte:*

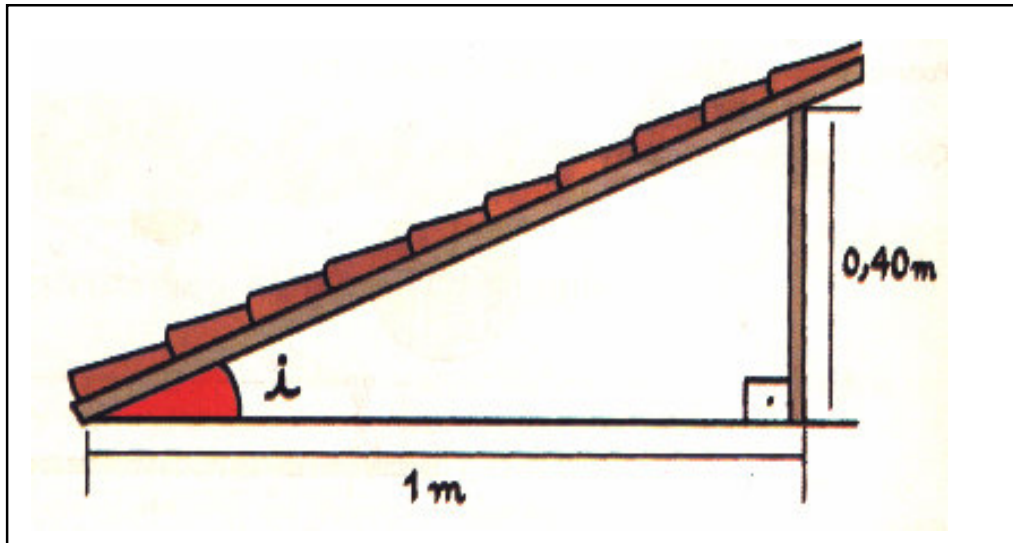
### Ficha de atividade 9

---

Um telhado foi construído de tal modo que, para cada **1 m** na horizontal, sobe-se **0,40 m** (ou 40 cm) na vertical.

Pergunta-se:

- a) Qual é o valor da  $\text{tg } \hat{i}$  ?
- b) O ângulo de inclinação  $\hat{i}$  é maior, menor ou igual a  $20^\circ$  ? Maior, menor ou igual a  $25^\circ$  ?
- c) Qual é, aproximadamente, o valor de  $\hat{i}$  ?



**Quadro 4.32:** Ficha de atividade 9

*Retirado do livro: Matemática, 1º grau, 8ª série, de Imenes & Lellis, Editora Scipione, 1997 – SP, p. 114, exercício 7)*

É um problema fechado, no qual cada grupo deve fazer sua própria leitura e interpretação, não necessitando a intervenção do pesquisador nesse sentido. Trata-se novamente de um problema de volta, ou seja: obtida a tangente de um ângulo, qual é o valor desse ângulo ?

Tem como objetivo o uso da tabela trigonométrica (e/ou calculadora), além da sistematização do conceito de tangente.

O pesquisador determinará um tempo para a resolução da atividade, após o qual abrirá discussão com a classe, primeiramente ouvindo cada grupo.

Como o valor da tangente obtida não se encontra na tabela utilizada, acreditamos que alguns alunos farão uma aproximação “grosseira” para o valor do ângulo correspondente, provavelmente considerando  $20^\circ$ . Outros, mais

preocupados e atentos com a exatidão, atribuirão um valor entre  $20^\circ$  e  $25^\circ$ , embora sem observar um critério mais apurado.

Estará o valor do ângulo  $\hat{i}$ , mais próximo de  $20^\circ$  ou de  $25^\circ$  ? Toda essa discussão certamente contribuirá para sistematização do conceito de tangente.

Resolvida a questão, achamos que agora é novamente um momento propício para a utilização da calculadora. Para aferir o resultado obtido no problema acima, podemos obter as tangentes dos ângulos  $20^\circ$ ,  $21^\circ$ ,  $22^\circ$ ,  $23^\circ$ ,  $24^\circ$  e  $25^\circ$ . Assim, teremos uma aproximação melhor para o ângulo  $\hat{i}$ . Achamos conveniente aqui ensinar a utilização da função inversa (“**ARCTG**”) na calculadora. Desse modo, obteremos um resultado mais preciso, sendo mais um momento para comentar sobre aproximação e erro.

Resolvido o problema, recolhem-se as fichas.

#### 6º ENCONTRO : Construção do conceito de seno e co-seno (aula dupla)

Esse encontro tem como objetivo a construção do conceito de seno e de co-seno a partir de situações-problema, construções geométricas e medições.

Desenvolveremos duas atividades correspondentes às fichas 10 e 11, ambas com o objetivo especificado acima.

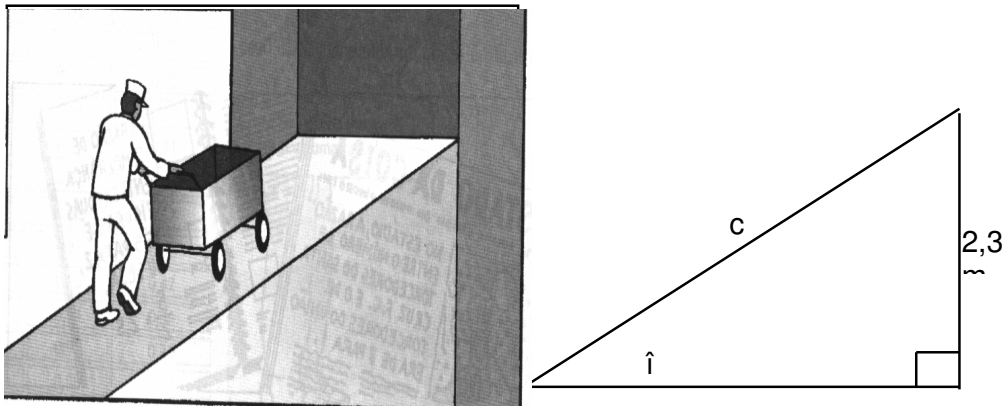
A seguir, descreveremos cada uma dessas atividades.

#### 1ª ATIVIDADE

A primeira atividade é descrita pela ficha de atividade nº 10, cujo conteúdo é o seguinte:

## Ficha de atividade 10

Numa indústria, deseja-se construir uma rampa de comprimento  $c$  para vencer um desnível de  $2,3\text{m}$ . O ângulo de inclinação  $\hat{i}$  da rampa deve ter, no máximo,  $20^\circ$ . Qual deve ser o comprimento mínimo da rampa? (Atenção para este problema!)

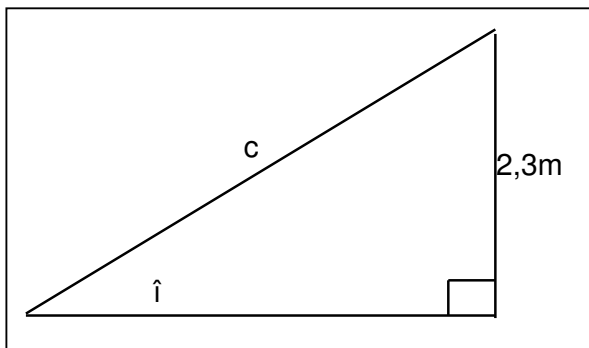
**Quadro 4.33:** Ficha de atividade 10

(Retirado do livro: *Matemática, 1º grau, 8ª série, de Imenes e Lellis, Editora Scipione, 1997-SP, n. 117. exercício 19*)

Após entregar uma ficha para cada grupo, acreditamos ser conveniente, para estimular o interesse e a participação dos alunos, um comentário sobre rampas. Onde há necessidade de rampas? Em supermercados, indústrias, escolas, monumentos públicos, templos, estações rodoviárias, etc... Para subir ou descer uma rampa, é muito importante o ângulo de inclinação desta.

O objetivo é colocar o aluno diante de uma situação em que a aplicação do conceito de tangente não é, por si só, suficiente para solucionar o problema.

Acreditamos que a maioria dos alunos a princípio aplicará, erroneamente, o conceito de tangente envolvendo a medida  $c$ . O



**Figura 4.12:** Ilustração referente à ficha de atividade 10

pesquisador deverá chamar a atenção dos alunos e, fazendo a correção necessária, os alunos poderão ainda persistir na idéia de utilizar tangente, calculando o valor de  $x$  (medida do cateto adjacente ao ângulo de  $20^\circ$ ),

$\text{tg } 20^\circ = 2,3/x \Rightarrow x = 2,3/\text{tg } 20^\circ$  e, aplicando o Teorema de Pitágoras,

$c^2 = x^2 + 2,3^2$ , obtendo desse modo o valor  $c$ . Achamos que os alunos

poderão levar até 10 minutos para a definição do procedimento e a solução acima. Assim, o pesquisador poderá estipular um tempo de sete minutos para discussão em grupo. Transcorrido esse tempo, o pesquisador ouvirá cada grupo, abrindo a discussão para toda classe.

De qualquer maneira, havendo uma solução (acima) ou não, achamos que o pesquisador deverá questionar: “Já que a tangente por si só não resolveu o problema, será que num conjunto de triângulos retângulos semelhantes, somente  $c/b$  é uma razão constante ? E  $c/a$  ou  $b/a$  ?”

Sem recolher a ficha de atividade 10, o pesquisador introduzirá a ficha número 11, que trata das razões  $c/a$  e  $b/a$ .

## 2ª ATIVIDADE

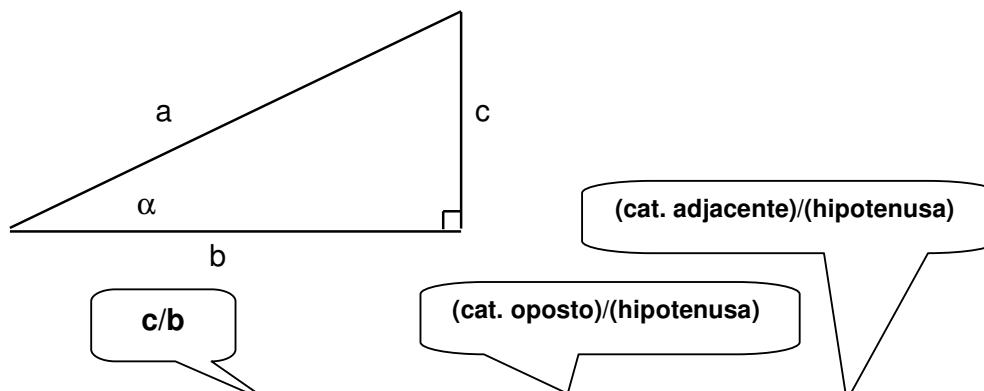
Corresponde à ficha de atividade número 11 cujo conteúdo é o seguinte

:

### Ficha de atividade 11

---

Completar a tabela a seguir com os valores das razões indicadas, utilizando-se das construções já efetuadas quando do trabalho com a ficha de atividade 5.



$\alpha$	$\text{tg } \alpha$	$c/a$	$b/a$
5°	0,09		
10°	0,18		
15°	0,27		
20°	0,36		
25°	0,47		
30°	0,58		
35°	0,70		
40°	0,84		
45°	1,00		
50°	1,19		
55°	1,43		
60°	1,73		
65°	2,14		
70°	2,75		
75°	3,73		
80°	5,67		
85°	11,43		

**Quadro 4.34:** Ficha de atividade 11

Como se trata de um complemento do que foi desenvolvido na ficha número 5 (4º encontro), então, juntamente com a ficha número 11, deveremos entregar a cada grupo também essa ficha (nº 5) e uma régua com escala.

Acreditamos que os alunos acabarão completando a tabela, provavelmente num tempo aproximado de 15 minutos, mesmo apresentando dificuldades com medições e quanto ao conceito de cateto oposto, adjacente e hipotenusa. O pesquisador poderá estipular um tempo de 10 minutos, após



solicitará de cada grupo os resultados obtidos, preenchendo a tabela na lousa (ou cartaz).

Podemos recorrer à calculadora para conferir, estimulando o interesse dos alunos, sem contudo ensinar a utilização da mesma nesse momento, deixando isso para o próximo encontro, com as definições de seno e de co-seno.

O objetivo da atividade é a construção do conceito de seno e de co-seno por experimentação, mas implicitamente envolve o conceito de função pois relaciona o valor do ângulo com a razão entre as medidas de segmentos.

Novamente, como já aconteceu com a tangente (razão  $c/b$ ), à medida que os resultados forem sendo obtidos, os alunos deverão observar que  $c/a$  e  $b/a$  são razões constantes para todo conjunto de triângulos retângulos semelhantes.

Aberta a discussão com toda classe e diante dos dados obtidos, o pesquisador conduzirá os alunos à seguinte conclusão:

“Em todo triângulo retângulo com ângulo  $\alpha$ , as **razões**

$\frac{\text{medida do cat. oposto a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}}$	e	$\frac{\text{medida do cat. adjacente a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}}$
--	---	---

são **constantes.**”

**Quadro 4.35:** Relativo aos conceitos de seno e de co-seno

Com essa conclusão, pode-se retomar a ficha de atividade 10 e obter a medida  $c$  (comprimento da rampa) utilizando-se da razão mais conveniente.

O pesquisador estabelecerá um tempo de pelo menos cinco minutos para que cada grupo discuta essa solução. Transcorrido esse tempo, o pesquisador ouvirá cada grupo e abrirá a discussão à sala. Aproveitará para

comparar a solução apresentada com aquela (provável) que considerou a  $\operatorname{tg} \alpha$ , inclusive quanto à aproximação. Também poderá analisar as diferenças entre o uso da tabela (com valores aproximados) e o uso da calculadora na obtenção das razões trigonométricas.

Terminada a atividade, o pesquisador recolherá as fichas 10 e 11.

7º ENCONTRO: Institucionalização do conceito de seno e de co-seno (aula dupla)

Esse encontro tem o objetivo de formalizar o conceito das razões trigonométricas seno e co-seno.

Compreende quatro atividades através das fichas 12, 13, 14 e 15, ainda predominando os problemas contextualizados. Somente a última atividade (ficha nº 15) não é contextualizada, servindo de preparação ao 8º encontro que visa à institucionalização a partir de problemas formais.

Achamos conveniente abrir o encontro com as atividades das fichas 12 e 13, pois essas servirão de revisão dos conceitos desenvolvidos no último encontro: as razões **seno** e **co-seno**. Em seguida, feita a revisão, o pesquisador definirá essas razões trigonométricas e prosseguirá com as demais atividades, agora podendo utilizar as notações  **$\operatorname{sen} \alpha$**  e  **$\operatorname{cos} \alpha$** , além da calculadora (teclas “**sin**” e “**cos**”).

Acreditamos que será possível desenvolver as quatro atividades e mais as definições no tempo de um encontro (50 minutos), devido à familiaridade dos alunos quanto ao processo, representações e linguagem, e pelas situações-problema que pensamos ser de fácil interpretação.

## 1ª ATIVIDADE

Corresponde à ficha de atividade nº 12, cujo conteúdo é o seguinte :

### Ficha de atividade 12

---

Uma escada de **2,80 m** de comprimento está apoiada no alto de um muro, formando com esse (o muro) um ângulo de **60°**. Qual é a altura do muro

---

**Quadro 4.36:** Ficha de atividade 12

(Retirado do livro: Matemática, 1º grau, 8ª série, de Edwaldo Bianchini, Editora Moderna, 4ª edição, 1996 – SP, p. 165, exercício 15, item c)

Trata-se de um problema fechado, sem ilustração, ficando a critério dos alunos sua interpretação e descontextualização. Recomendamos ao pesquisador que, durante o acompanhamento dos grupos, chame a atenção de que o ângulo citado é em relação ao muro.

Embora o nosso objetivo aqui seja o emprego do conceito da razão trigonométrica co-seno ( $b/a$ ), acreditamos que alguns alunos tentem empregar o conceito de seno ( $c/a$ ), no caso com o ângulo  $30^\circ$  (complementar de  $60^\circ$ ). Outro fator de dificuldade presente é quanto à posição do triângulo associado à situação-problema. Sendo diferente da usual até aqui, ocasionará alguma insegurança quanto à classificação dos catetos em oposto ou adjacente. Isso não foi por acaso.

De um tempo previsto de 10 minutos, o pesquisador deverá determinar 5 minutos para a solução do problema, após passará a consultar cada grupo a respeito e, em seguida, abrir a discussão para a sala.

Ouvidas as considerações e propostas apresentadas pelos alunos, o pesquisador poderá desenvolver na lousa, especialmente aquela que se baseia no emprego da razão co-seno. Entretanto, achamos que o pesquisador deva

desenvolver também a solução que se baseia na razão seno do ângulo complementar de  $60^\circ$ , venha ela a ser sugerida pelos alunos ou não.

## **2ª ATIVIDADE**

Corresponde à ficha de atividade número 13, cujo conteúdo é o seguinte

:

### Ficha de atividade 13

---

Um barco atravessa um rio num trecho onde a largura é **100 m**, seguindo uma direção que forma um ângulo de  **$40^\circ$**  em relação à margem. Determinar a distância percorrida pelo barco para atravessar o rio.

---

**Quadro 4.37:** Ficha de atividade 13

*(Retirado do livro: Matemática, 1º grau, 8ª série, de Edwaldo Bianchini, Editora Moderna, 4ª edição, 1996-SP, teste 25, p. 167)*

O pesquisador, após distribuir as fichas, deverá determinar um tempo de 5 minutos para que cada grupo analise o problema proposto.

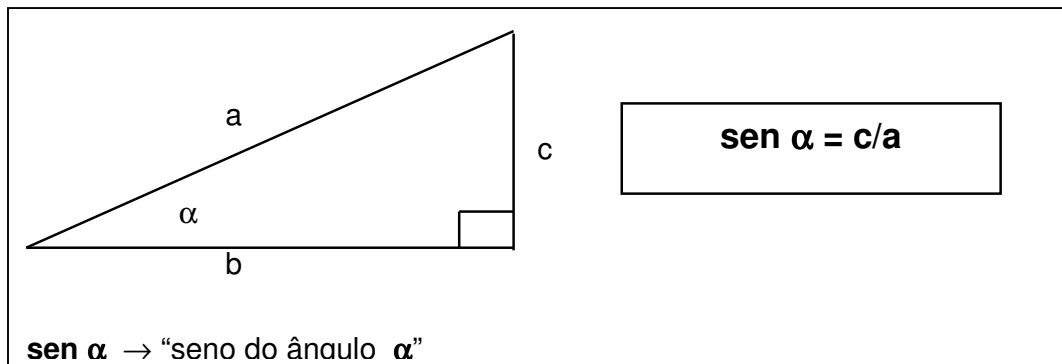
É provável que, sendo a primeira atividade do encontro, os alunos necessitem de uma breve revisão do conceito desenvolvido no último encontro e uma participação maior do pesquisador quanto à interpretação do texto. Entretanto, nesse primeiro momento, achamos que se deva deixar a interpretação por conta dos alunos, com pequenas contribuições se solicitado. Transcorrido o tempo acima, o pesquisador deverá ouvir cada grupo e, estendendo a discussão para toda sala, colaborar para uma correta interpretação do texto e, com a participação dos alunos, definir a estratégia a ser empregada.

O objetivo dessa atividade é rever os conceitos de seno e co-seno já tratados no encontro anterior e, desse modo, possibilitar a institucionalização dos mesmos através da definição.

Esperamos que os alunos resolvam esse problema utilizando a **razão seno**, embora haja uma remota possibilidade de usarem a **razão co-seno** do ângulo complementar ao  $40^\circ$ , ou seja,  $60^\circ$ . Resolvido o problema, com a solução desenvolvida na lousa, o pesquisador definirá **seno** e **co-seno**.

### DEFINIÇÃO DE SENO

Chama-se **seno de um ângulo  $\alpha$**  à **razão** (número) que se obtém quando, num triângulo retângulo com ângulo  $\alpha$ , se divide a medida do cateto oposto ao ângulo  $\alpha$  pela medida da hipotenusa.

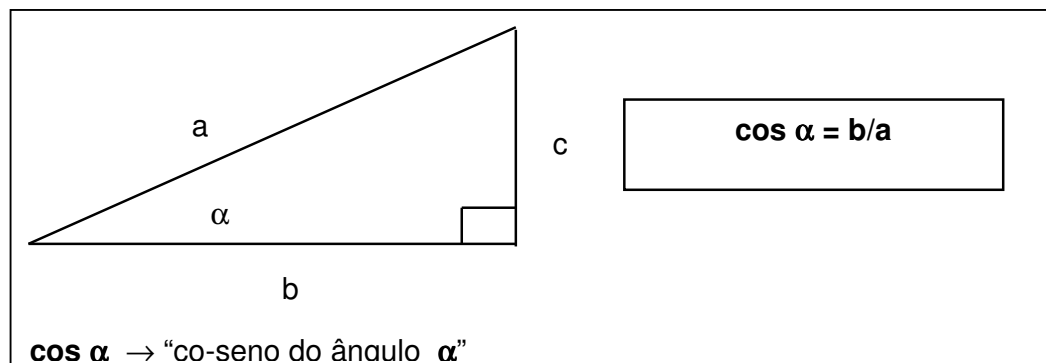


**Figura 4.13:** Definição de seno

Esse número (**razão**) é **constante** para todo triângulo retângulo com ângulo  $\alpha$ .

#### a) DEFINIÇÃO DE CO-SENO

Chama-se **co-seno de um ângulo  $\alpha$**  à **razão** (número) que se obtém quando, num triângulo retângulo com o ângulo  $\alpha$ , divide-se a medida do cateto adjacente ao ângulo  $\alpha$  pela medida da hipotenusa.



**Figura 4.14:** Definição de co-seno

Esse número (**razão**) é **constante** para todo triângulo retângulo com ângulo  $\alpha$ .

### 3ª ATIVIDADE

Compreende a atividade especificada pela ficha número 14, cujo conteúdo é o seguinte:

#### Ficha de atividade 14

---

Uma pipa está presa a uma linha esticada que forma um ângulo de  $45^\circ$  em relação ao solo. A linha tem **50 m** de comprimento. Determine em que altura se encontra a pipa.

---

#### **Quadro 4.38:** Ficha de atividade 14

*(Retirado do livro: Para Aprender Matemática, 8ª série, de Iracema Mori e Dulce Satiko Onaga, Editora Saraiva, 1ª edição – 1989, SP, 1º problema, p. 211)*

Inicialmente, achamos que o pesquisador deva deixar a interpretação do texto e a descontextualização por conta dos alunos, estipulando um tempo (flexível) de cinco minutos para uma discussão em grupo. Após esse tempo, o pesquisador ouvirá a manifestação de cada grupo, abrindo a discussão para a sala, fazendo anotações na lousa e, com a participação de todos, desenvolverá a solução do problema.

Como já foram dadas as definições de seno e de co-seno, podemos usar as notações  $\sin 45^\circ$  e  $\cos 45^\circ$  para as razões trigonométricas, bem como ensinar a utilização da calculadora na obtenção dessas razões, através das teclas “sin” e “cos”. Novamente a questão da aproximação e erro deva ser tratada.

Os objetivos dessa atividade são a sistematização da noção de seno e co-seno, a utilização da notação “ $\text{sen } \alpha$ ” e “ $\text{cos } \alpha$ ”, e o uso da calculadora.

Acreditamos, com base no piloto, que os alunos resolverão esse problema, empregando corretamente o conceito da razão seno.

#### 4ª ATIVIDADE

***Essa atividade é descrita pela ficha número 15, cujo conteúdo é o seguinte:***

##### Ficha de atividade 15

---

Do ponto mais alto de uma torre de retransmissão de TV, será esticado um cabo de aço para sustentação da mesma. Sabendo-se que esse cabo será afixado a **15 m** da base da torre e que faz um ângulo de **55°** com o solo, determine o comprimento do cabo.

---

##### **Quadro 4.39:** Ficha de atividade 15

Após distribuir as fichas e um tempo de cinco minutos, o pesquisador ouvirá cada grupo sobre o entendimento da questão e a solução proposta.

Aberta a discussão a todos, o pesquisador desenvolverá a solução proposta pelos alunos através de anotações na lousa.

O objetivo do problema é contribuir para a construção do conceito de seno e co-seno, sendo que no caso específico, a solução esperada é com a aplicação da razão  $\text{cos } 55^\circ$ . Acreditamos que os alunos, na sua maioria, não terão dificuldades em resolvê-lo dessa maneira.

Novamente, recomendamos o uso da calculadora (além da tabela trigonométrica) na obtenção da razão co-seno, para estimular o interesse dos

alunos quanto à utilização desse instrumento e para comparar os valores obtidos de uma e de outra forma.

8º ENCONTRO : Institucionalização a partir de problemas formais (aula simples)

Com esse encontro, iniciamos uma seqüência de quatro encontros com o objetivo de sistematização dos conceitos envolvidos. Os problemas são descontextualizados e as razões trigonométricas são tratadas, principalmente, como objeto de estudo.

Nesse 8º encontro, com somente uma atividade, começamos pela resolução e sistematização quanto às atividades 14 e 15 do encontro anterior. Isso servirá para retomarmos os conceitos de seno e de co-seno envolvidos nessas atividades.

### ATIVIDADE ÚNICA

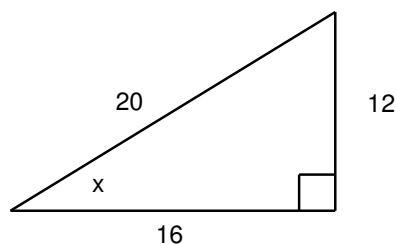
Essa atividade é proposta pela ficha número 16, cujo conteúdo é o seguinte:

#### b) Ficha de atividade 16

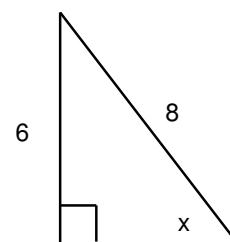
---

Calcule as razões trigonométricas **sen x**, **cos x** e **tg x**, nos casos:

a)



b)




---

**Quadro 4.40:** Ficha de atividade 16

(Retirado do livro: *Matemática, 8ª série, de Edwaldo Bianchini, Editora Moderna, 4ª edição, SP, 1996, exercício 11, p. 165*)



Essa questão tem como objetivo a descontextualização e a sistematização do conceito de seno, co-seno e tangente.

No item **a**, pretendemos que aconteça a aplicação imediata do conceito de razão trigonométrica. Supomos que possa acontecer de alguns alunos pensarem em calcular, por condicionamento, o valor de  $x$ , embora isso não tenha sido solicitado. De qualquer maneira, achamos recomendável que o pesquisador levante essa questão: “Que ângulo  $x$  é esse?”. Nesse caso, com a tabela trigonométrica e/ou calculadora, trata-se da função inversa, ou seja, dada uma das razões trigonométricas de um ângulo  $x$ , determinar  $x$ .

No item **b**, devido à falta de medida de um dos lados (cateto adjacente ao ângulo  $x$ ), só é possível calcular diretamente a razão  $\text{sen } x$ . Para calcular as demais razões, é necessário obter a medida do cateto adjacente a  $x$  através do emprego do teorema de Pitágoras. Ao aplicar esse teorema, o valor obtido será um número irracional ( $\sqrt{28}$  ou, na forma simplificada,  $2\sqrt{7}$ ). Achamos conveniente tratar desse assunto, inclusive comparando o resultado obtido dessa forma com o da forma decimal.

Conforme ocorreu no piloto, acreditamos que possa acontecer de, obtido  $\text{sen } x=3/4$ , muitos alunos determinarem  $x$  pela tabela e, assim, obter  $\text{cos } x$  e  $\text{tg } x$ . Com a tabela construída e utilizada em sala de aula, o resultado obtido desse modo será aproximado. Entendemos que seja uma solução válida, sinal de compreensão do conceito e que deva ser levado em conta pelo pesquisador. Entretanto, o pesquisador deve comparar o resultado obtido dessa forma, com aquele através do Teorema de Pitágoras, além de recorrer à calculadora na obtenção do ângulo  $x$ , a partir de  $\text{sen } x=3/4$ .

9º ENCONTRO : Institucionalização a partir de problemas formais (aula dupla)

Esse encontro é composto por três atividades, correspondentes às fichas 17, 18 e 19, que passamos a descrever.

1ª ATIVIDADE

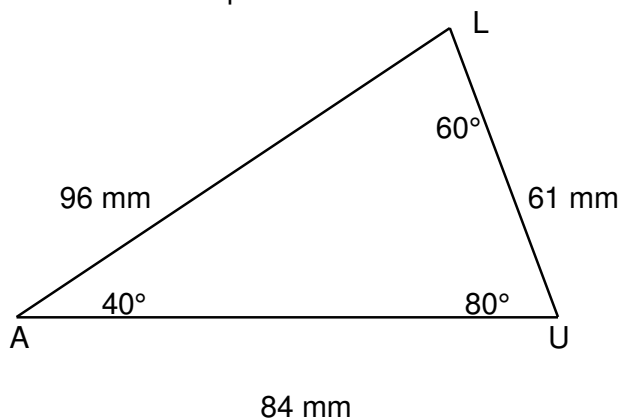
Ficha de atividade 17

---

José Carlos mediu lados e ângulos do triângulo LUA. Depois, fez este cálculo:

$$\cos 40^\circ = 84/96 \cong 0,87$$

Quando conferiu com a tabela percebeu que algo estava errado. Descubra o erro que ele cometeu.




---

**Quadro 4.41:** Ficha de atividade 17

*(Retirado do livro: Matemática, 1º grau, 8ª série, de Imenes e Lellis, Editora Scipione, 1997-SP, p. 122, exercício 27)*

O objetivo dessa atividade é de possibilitar ao aluno a sistematização do fato de que os conceitos das razões trigonométricas se desenvolvem tendo por base o triângulo retângulo. Assim, o erro cometido se deve a não ter sido levado em consideração este fato.

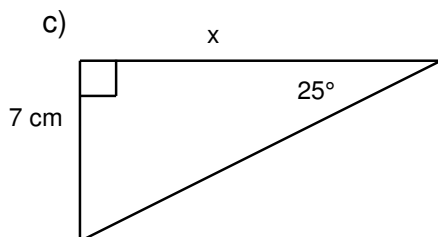
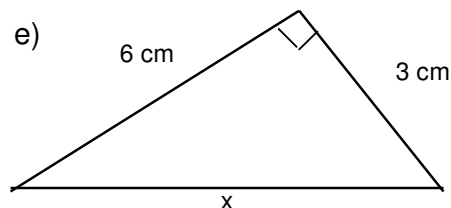
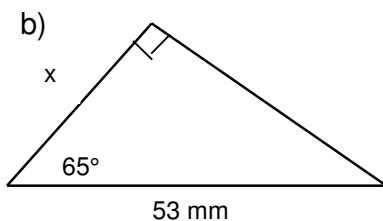
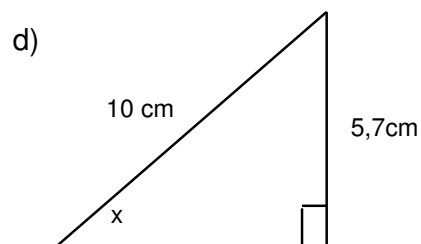
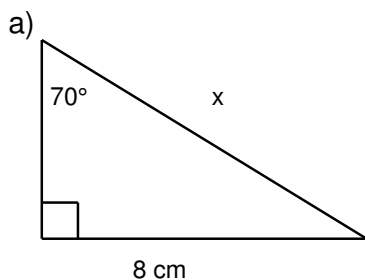
Acreditamos que, através da discussão em grupo, os alunos chegarão a esta conclusão. No debate com todos os alunos, pode ser que ocorra da parte de algum grupo (ou mesmo o próprio pesquisador) sugerir o cálculo correto do

cos  $40^\circ$ , a partir da obtenção da altura correspondente ao vértice L do triângulo. A efetivação desse cálculo, embora seja recomendável, dependerá da disponibilidade de tempo.

## 2ª ATIVIDADE

### c) Ficha de atividade 18

Consulte a tabela trigonométrica e calcule o valor aproximado de  $x$  nos seguintes casos



**Quadro 4.42:** Ficha de atividade 18

(Retirado do livro: *Matemática, 1º grau, 8ª série, de Imenes e Lellis, Editora Scipione, 1997-SP, p. 120, exercício 21*)

Trata-se de um problema composto por cinco itens, envolvendo de forma direta (como fórmulas) as definições de seno, co-seno e tangente. O item d apresenta uma situação em que se pede para obter o valor do ângulo  $x$ , diante de condições evidentes para a obtenção do  $\text{sen } x$ .

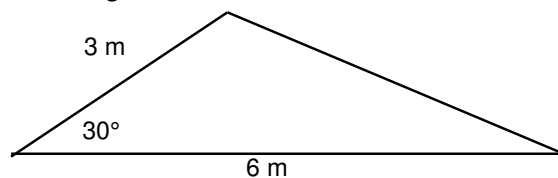
O último item e tem a finalidade de criar uma situação em que a utilização das razões trigonométricas não é a solução mais conveniente. Através da aplicação direta do Teorema de Pitágoras, temos a solução mais viável.

### 3ª ATIVIDADE

#### Ficha de atividade 19

---

Determinar a área do triângulo




---

#### **Quadro 4.43:** Ficha de atividade 19

(Retirado do livro: *Matemática, 8ª série, de Edwaldo Bianchini, Editora Moderna, 4ª edição, SP, 1996, exercício 27, p. 167*)

Diante da necessidade do cálculo da altura do triângulo, o objetivo do problema é colocar o aluno numa situação em que precise optar pela razão trigonométrica apropriada. Portanto, a razão aparece aqui como ferramenta. Além disso, como não se trata de um triângulo retângulo, o problema renovará a idéia de que as razões trigonométricas têm por base o triângulo retângulo. Nesse caso, qual será a hipotenusa e quais os catetos ?

Não se trata, pois, de um problema de aplicação direta de fórmula (ou da definição), mas sim de haver apreendido o conceito envolvido.

## 10º ENCONTRO : Ângulos complementares (aula dupla)

Ainda com a finalidade de sistematização dos conceitos, da descontextualização, esse encontro tem o objetivo imediato de abordar a relação existente entre ângulos complementares e as razões trigonométricas dos mesmos. Antes, na 1ª atividade deste encontro, apresenta um problema clássico da trigonometria, que passaremos a descrever a seguir.

### 1ª ATIVIDADE

#### Ficha de atividade 20

---

Sabendo-se que  $\text{sen } \alpha = 2/3$ , determinar  $\text{cos } \alpha$  e  $\text{tg } \alpha$ .

---

#### **Quadro 4.44:** Ficha de atividade 20

*(Retirado do livro: Matemática Aplicada, 2º grau, vol. 1, de Trotta, Imenes e Jakubovic, Editora Moderna, 1979-SP, exercício 8, p. 190)*

Em nível de 8ª série, não se costuma fazer a abordagem algébrica das razões trigonométricas, através da relação  $\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$  e  $\text{tg } \alpha = \text{sen} \alpha / \text{cos} \alpha$ . Então, para se obter as razões trigonométricas a partir do conhecimento de uma delas, esperamos dos alunos a utilização da tábua trigonométrica (e/ou calculadora) ou, então, a interpretação geométrica do fato. Entendemos que a solução geométrica, de acentuado apelo conceitual, contribui mais para a compreensão dos conceitos envolvidos.

Assim, acreditamos que se deva estimular a solução geométrica, sem perder, entretanto, a oportunidade da utilização da calculadora (ou tábua trigonométrica), o que só enriquece a discussão.

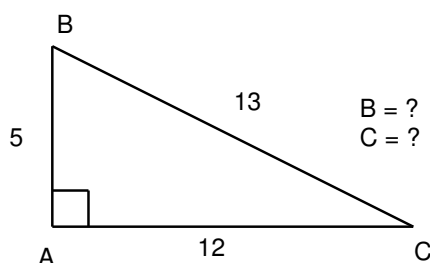
2ª ATIVIDADE

Esta atividade é definida pela ficha de atividade 21 que descrevemos a seguir.

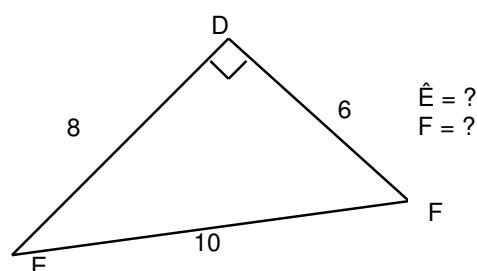
Ficha de atividade 21

Observe as figuras e determine:

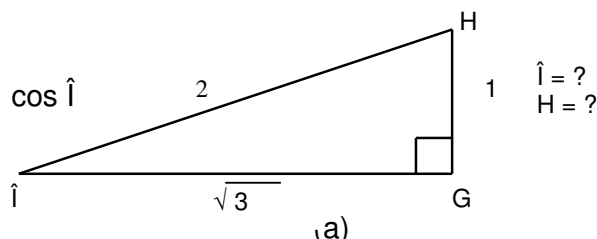
a)  $\sin B$ ,  $\cos B$ ,  $\sin C$  e  $\cos C$



b)  $\sin \hat{E}$ ,  $\cos \hat{E}$ ,  $\sin F$  e  $\cos F$



c)  $\sin H$ ,  $\cos H$ ,  $\sin \hat{I}$ ,  $\cos \hat{I}$



Quadro 4.45: Ficha de atividade 21

Esse problema é composto por três itens, fechados, com a finalidade de induzir o aluno quanto à relação existente entre ângulos complementares e as razões trigonométricas dos mesmos. Acreditamos que, à medida que cada item for sendo resolvido pelo grupo de alunos, estes observarão a relação existente.

Devido a se tratar de fato relacionado, achamos recomendável que à medida que os grupos forem terminando a atividade 21, já lhe seja passada a atividade 22. Nesse caso, a discussão com todos os alunos se daria no final da resolução da atividade 22.

Se dois ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  são complementares ( $\alpha + \beta = 90^\circ$ ), então

$$\text{sen } \alpha = \text{cos } \beta \quad \text{e} \quad \text{cos } \alpha = \text{sen } \beta$$

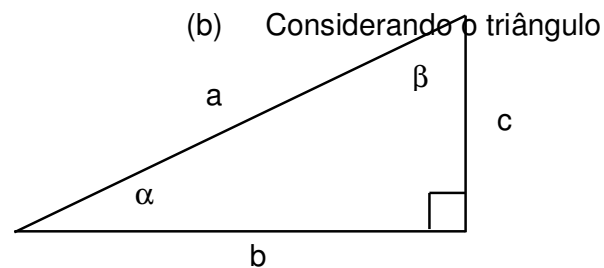
**Quadro 4.47: Relação entre seno e co-seno de ângulos complementares**

A ficha de atividade 22 é descrita a seguir.

### 3ª ATIVIDADE

#### Ficha de atividade 22

---



Pede-se:

- Em todo triângulo retângulo, qual é o valor de  $\alpha + \beta$ ? Por quê?
  - Quando que dois ângulos são chamados de complementares? Dê exemplos.
  - Determine **sen  $\alpha$** , **cos  $\alpha$** , **sen  $\beta$**  e **cos  $\beta$** .
  - Observando os resultados acima e os da ficha de atividade 21, que conclusão podemos tirar da relação entre ângulos complementares e razões trigonométricas?
  - Escolha dois ângulos complementares e observe na tabela trigonométrica a relação entre seno e co-seno desses ângulos?
- 

**Quadro 4.46: Ficha de atividade 22**

A atividade 22 é uma extensão da anterior. É fechada e tem como objetivo possibilitar que o aluno observe a relação existente entre ângulos complementares e as razões trigonométricas dos mesmos.

Numa análise, a priori, supomos que, até aqui, alguns alunos já tenham observado, na construção da tabela trigonométrica, o fato de que os valores do seno e do co-seno são seqüências invertidas.

Assim, ao final desta atividade (conjugada com a 21), acreditamos que o aluno terá as condições propícias para a construção e a formalização do conceito.

Na formalização, o pesquisador questionará o porquê.

11º ENCONTRO: Variações nos valores do seno, co-seno e tangente(aula dupla)

Tem como objetivo a construção do conceito de que, sendo  $\alpha$  um ângulo agudo, então  $0 < \sin \alpha < 1$ ,  $0 < \cos \alpha < 1$  e  $\operatorname{tg} \alpha > 0$ . Ou seja, estudar a variação dos valores do seno, co-seno e tangente.

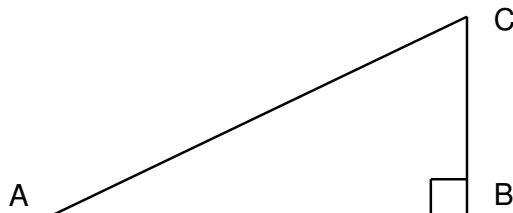
Entretanto, a 1ª atividade desse encontro ainda trata de ângulos complementares, com o objetivo de rever e sistematizar o conceito estudado no encontro anterior.

### 1ª ATIVIDADE

#### Ficha de atividade 23

---

Determinar  $\cos \hat{A}$ , sabendo-se que  $\sin C = 0,3675$ .



**Quadro 4.48:** Ficha de atividade 23

(Retirado do livro: *Matemática, 2º grau, vol. 1, versão Beta, de Bianchini e Paccola, Editora Moderna, 2ª edição, 1996, p. 244, exercício 12, item b*)



Após a discussão em grupo e o debate final com todos, acreditamos que o pesquisador terá as condições de rever e sistematizar os conceitos envolvidos.

## 2ª ATIVIDADE

Esta atividade correspondente à ficha número 24, tem como objetivo tratar a respeito da variação dos valores do seno de um ângulo agudo.

### Ficha de atividade 24

---

Um professor “bolou” a seguinte questão: “Dado  $\text{sen } \alpha = 3/2$ , determinar  $\text{cos } \alpha$  e  $\text{tg } \alpha$ ”. Não percebeu que havia cometido um *engano* (uma vez que professor não erra). Durante a prova, um aluno percebeu e chamou a atenção do professor. Qual foi o erro (digo, o engano) cometido pelo professor?

---

#### **Quadro 4.49:** Ficha de atividade 24

A priori, acreditamos que os alunos poderão vir a responder através da observação da tabela trigonométrica ou da representação (esboço) geométrica de um triângulo retângulo que atenda às condições apresentadas.

Consultando a tabela, os alunos não encontrarão  $\text{sen } \alpha = 1,5$ . Acreditamos que observarão o fato de que, à medida que o valor do ângulo aumenta, os valores do seno tendem a ficar próximos de 1 e, portanto, não chegam a 1,5. Essa aproximação (“tende a 1”) poderá ser analisada com o uso da calculadora, aumentando o valor do ângulo. Do mesmo modo, à medida que o valor do ângulo diminui, os valores do seno “tendem a 0”.

Com relação à “solução geométrica”, similar à da ficha número 20, ao determinarem o valor da medida ( $x$ ) do cateto adjacente a  $\alpha$ , os alunos encontrarão um valor incompatível:  $x^2 = -5$ .

Na discussão com todos os grupos, acreditamos que será observado que não é possível, num triângulo retângulo, um cateto ser maior do que a hipotenusa. Assim, na sistematização dos conceitos envolvidos, concluiremos que, sendo os catetos menores do que a hipotenusa, as divisões  $(\text{cateto oposto})/(\text{hipotenusa})$  e  $(\text{cateto adjacente})/(\text{hipotenusa})$  serão sempre valores menores do que 1.

Logo,  $0 < \text{sen } \alpha < 1$  e  $0 < \text{cos } \alpha < 1$ .

### 3ª ATIVIDADE

#### Ficha de atividade 25

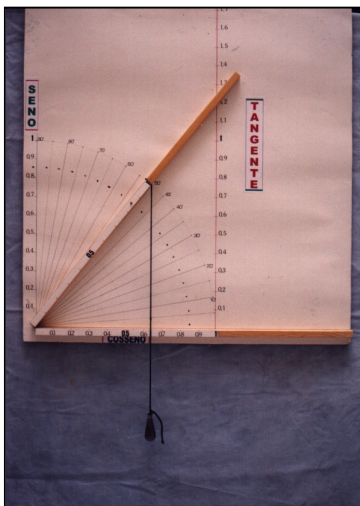
Classifique cada afirmação como verdadeira (V) ou falsa (F):

- Se um ângulo aumenta, sua tangente também aumenta. ( )
- A tangente de  $70^\circ$  é o dobro da tangente de  $35^\circ$ . ( )
- A tangente de  $60^\circ$  é o triplo da tangente de  $20^\circ$ . ( )
- Se um ângulo dobra, sua tangente sempre dobra também. ( )
- A tangente de um ângulo é diretamente proporcional ao ângulo. ( )

#### **Quadro 4.50:** Ficha de atividade 25

(Retirado do livro: Matemática, 1º grau, 8ª série, de Imenes e Lellis, Editora Scipione, 1997-SP, p. 114, exercício 6)

Tem como objetivo estudar a variação do valor da tangente. Através da observação da tabela trigonométrica, cada grupo classificará as afirmações apresentadas.

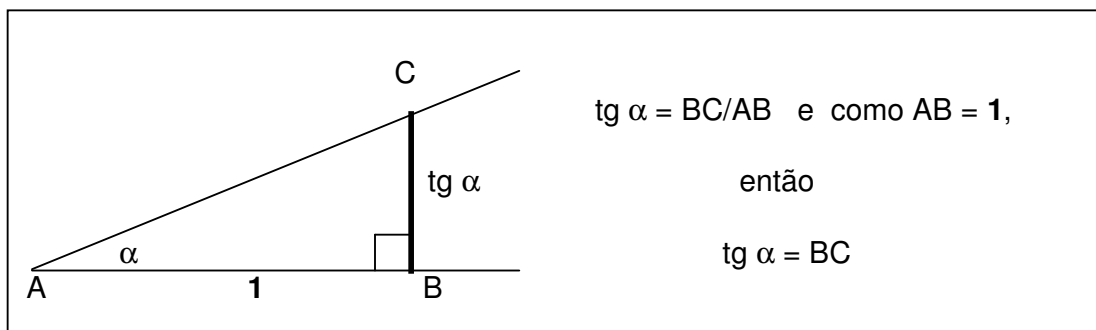


É um problema fechado, que acreditamos, a priori, será respondida sem dificuldade pelos alunos. Na formalização, esperamos que o pesquisador possibilite aos alunos a observação do fato de que  $\text{tg } \alpha > 0$ .

**Figura 4.15:** Foto de dispositivo elaborado para visualizar a variação nos valores das razões trigonométricas

Para isso, sugerimos a utilização de um dispositivo (ver figura 4.15), que se baseia na consideração de um triângulo retângulo com a medida do cateto adjacente igual à unidade. Nesse caso, a medida do cateto oposto corresponderá ao valor da tangente do ângulo agudo considerado.

O dispositivo tem como finalidade contribuir para o entendimento da variação dos valores das razões trigonométricas, pela experimentação. É um recurso que achamos ser de fácil construção (não sofisticado) e, portanto, acessível a todos.



**Figura 4.16:** Triângulo retângulo com cateto adjacente a  $\alpha$  medindo 1

#### 4ª ATIVIDADE

Tem como objetivo estudar a variação dos valores do seno e do co-seno; corresponde à ficha de atividade número 26.

#### Ficha de atividade 26

---

Classifique cada afirmação a seguir como verdadeira (**V**) ou falsa (**F**). Consulte a tabela trigonométrica para responder.

- a) Se um ângulo aumenta, seu co-seno aumenta. ( )
- b) Se um ângulo aumenta, seu seno aumenta. ( )
- c)  $\sin 80^\circ = 2 \cdot \sin 40^\circ$  ( )
- d)  $\sin 50^\circ = \cos 40^\circ$  ( )
- e)  $\cos 70^\circ = \cos 30^\circ + \cos 40^\circ$  ( )

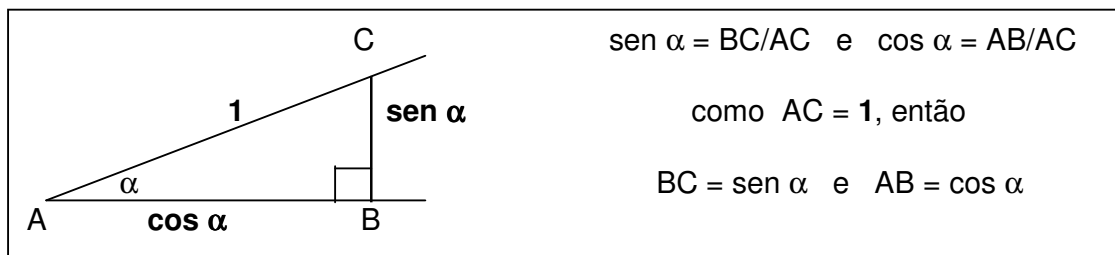
- f)  $\sin 85^\circ = \sin 50^\circ + \sin 35^\circ$  ( )  
 g) O seno e o co-seno de um ângulo são números sempre menores do que 1. ( )  
 h) A tangente de um ângulo é sempre um número menor do que 1. ( )

**Quadro 4.51:** Ficha de atividade 26

(Retirado do livro: *Matemática, 1º grau, 8ª série, de Imenes e Lellis, Editora Scipione, 1997-SP, p. 124, exercício 32*)

Consultando uma tabela trigonométrica, cada grupo classificará as afirmações apresentadas, referentes aos valores do seno e do co-seno. Após a discussão em grupo e considerando as questões anteriores (24 e 25), acreditamos que os alunos não terão dificuldades em responder corretamente.

Com a tabela trigonométrica e o emprego do dispositivo apresentado na atividade anterior, o pesquisador formalizará os conceitos envolvidos. A utilização do dispositivo para o caso de seno e de co-seno tem por base a consideração de um triângulo retângulo com a hipotenusa medindo 1.



**Figura 4.17:** Triângulo retângulo com hipotenusa medindo 1

# **CAPÍTULO V: ANÁLISE DOS RESULTADOS**

## Introdução

Este capítulo tratará da análise dos resultados obtidos da aplicação dos instrumentos diagnósticos nos dois grupos, tanto naquele em que foi trabalhada a seqüência de ensino (grupo experimental – G.E.<sup>3</sup>), quanto naquele que serve de referência (grupo de referência – G.R.<sup>4</sup>), representando um modelo da escola. Faremos dois tipos de análise dos testes. Um primeiro quantitativo, relacionado ao acerto e erro, e um outro qualitativo, ligado ao tipo de procedimento que os alunos utilizaram para responderem aos testes. No que diz respeito à parte quantitativa - acerto e erro - vamos observar primeiramente o desempenho geral dos alunos e, em seguida, analisaremos esses resultados por tipo de questão e, finalmente por sujeito. Na parte qualitativa da análise dos testes, vamos buscar entender as estratégias usadas por esses alunos, a partir dos estudos dos tipos de erros cometidos por eles, e observar o conceito que cada aluno formou a respeito da trigonometria.

Antes de darmos início à análise propriamente dita, gostaríamos de discutir um pouco sobre a nossa amostra.

Na seleção de nossa amostra, tanto experimental quanto de referência, dois critérios foram considerados: primeiramente, que os sujeitos fossem alunos regulares da 8ª série da mesma escola e, segundo, que estivessem presentes em todas as etapas do estudo (aos testes de avaliação diagnóstica e participado de toda seqüência de ensino).

O G.E. constava inicialmente de vinte e quatro alunos. Durante o desenvolvimento da seqüência, dois alunos saíram da escola e onze faltaram

---

<sup>3</sup> Para simplificar e facilitar a leitura, passaremos a indicar grupo experimental por “G.E.”

<sup>4</sup> O grupo de referência passaremos a indicar por “G.R.”

pelo menos uma vez. Portanto, para efeito de pesquisa, puderam ser aproveitados apenas onze sujeitos. Saliente-se, entretanto, que esses alunos não considerados numericamente pela pesquisa (por terem ao menos uma falta), continuaram a participar dos trabalhos.

Com relação ao G.R., foi adotado o mesmo critério, o que fez com que, dos trinta e dois alunos que compuseram a classe, 16 cumprissem os nossos critérios.

Quanto aos testes (pré e pós), embora tivessem equivalência matemática, sua ordem de correspondência foi alterada como descreve o quadro abaixo.

Equivalência entre as Questões

Pré	1	3	4	5	6	7	8	9
Pós	1	2	3	4	5	6	7	8

**Tabela 5.1:** Equivalência entre as questões

Para efeito de discussão, referimo-nos às questões de ambos os testes como sendo numeradas de 1 a 8 (conforme no pós-teste), devendo o leitor considerar sempre a correspondência exposta na tabela acima. Assim, por exemplo, quando nos referirmos à questão 2, estaremos nos referindo à questão 2 do pós-teste, cuja questão matematicamente equivalente no pré-teste é a 3.

O foco principal de nossa análise será o G.E., tendo o G.R. somente a finalidade de comparação.

Uma observação importante que gostaríamos de fazer diz respeito à representatividade de nossa amostra. De fato, não temos a pretensão de extrapolar nossos resultados para além do universo de nosso estudo, uma vez

que esse é pequeno. Porém, apesar disso, nossos resultados podem trazer contribuições importantes para entendermos a formação dos conceitos básicos relativos à trigonometria. Estamos certos de que ao final desta dissertação estaremos trazendo pistas significativas sobre o processo de ensino-aprendizagem desse conteúdo.

Por fim, faz-se necessário ainda descrever, resumidamente, a seqüência de ensino que a professora utilizou com os alunos do grupo de referência para trabalhar as razões trigonométricas (tabela 5.2).

ENCONTROS (tipo de aula)	REGISTRO NO DIÁRIO DE CLASSE	ATIVIDADES DESENVOLVIDAS (observadas pelo professor-pesquisador, a partir das anotações no caderno de uma aluna indicada pela professora)
1° (aula tripla)	Definição das razões trigonométricas, exercícios e utilização da tabela	Definição de seno, co-seno e tangente, e emprego (como se fossem fórmulas) na resolução de 25 exercícios (os 5 últimos contextualizados) retirados do livro adotado e já envolvendo a utilização da tabela trigonométrica.
2° (aula dupla)	Exercícios: problemas e determinar a medida x	15 exercícios (1 contextualizado) envolvendo relações métricas no triângulo retângulo, principalmente o Teorema de Pitágoras; mais 5 exercícios envolvendo a determinação de razões trigonométricas pela definição e a medida de um segmento x.
3° (aula simples)	Exercícios	Não há registro.
4° (aula tripla)	Exercícios	Não há registro.
5° (aula dupla)	Razões trigonométricas notáveis - 30°, 45° e 60° - exercícios	Não há registro.
6° (aula simples)	Exercícios diversos: problemas e determinar a medida x	Determinar, a partir de um quadrado de lado medindo 1, o valor exato do seno, co-seno e tangente de 45°; determinar, a partir de um triângulo equilátero de lado medindo 1, o valor exato do seno, co-seno e tangente de 30° e de 60°; 4 exercícios descontextualizados com a utilização desses valores.
7° (aula tripla)	Exercícios diversos	Resolução de 23 exercícios (13 descontextualizados)

**Tabela 5.2:** Resumo da seqüência de ensino aplicada no Grupo de Referência



Esse resumo foi feito a partir do diário de classe, fornecido pela própria professora. A importância de proceder com esse resumo é entender a diferença das abordagens e dar oportunidade ao leitor de conhecer como foi introduzido o assunto no G.R., uma vez que no G.E. já foi discutido no capítulo anterior.

Na tabela 5.2 acima, observamos que a abordagem das razões trigonométricas se deu através de definição seguida de exercícios, retirados do livro<sup>5</sup> adotado pela professora.

Consultamos também o caderno de uma aluna, indicada pela professora, e constatamos que, logo no primeiro encontro foram resolvidos vinte e cinco exercícios, em que as definições foram empregadas como se fossem fórmulas. Os cinco últimos exercícios desse encontro apresentavam um contexto do tipo: determinar a medida da altura de um prédio, de uma torre e a distância que um navio se encontra de um farol.

Ainda segundo a tabela 5.2, observamos que em todos eles há uma ênfase quanto aos exercícios, chegando a um total de setenta e seis, sendo que, desses, dezenove são contextualizados. Portanto, há um predomínio dos exercícios descontextualizados, seguindo a ordem inversa de nossa pesquisa: partimos de problemas contextualizados para os descontextualizados, sem uma preocupação com a quantidade excessiva de exercícios.

Por fim, gostaríamos de salientar a escassez de informação, pois os registros no diário de classe são muito sucintos (sumários) e não há uma correspondência com as anotações da aluna.

A seguir, daremos início à análise dos resultados.

---

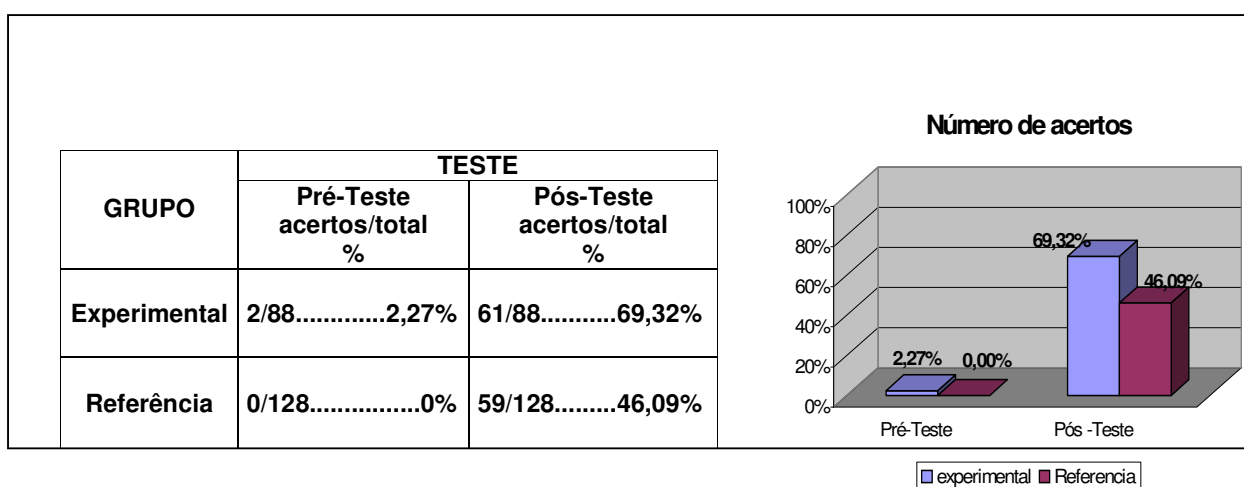
<sup>5</sup> Matemática, 1º grau, 8ª série, de Bianchini, Editora Moderna, 4ª edição revista e ampliada, 1997 - SP

## 5.1. Análise quantitativa dos Instrumentos Diagnósticos (Pré e Pós-teste)

Conforme já foi dito anteriormente, dedicaremos esta seção a três tipos de análises. Primeiramente faremos uma análise do desempenho geral quanto ao número de acertos de cada grupo, seguida de uma análise dos acertos dos grupos por tipo de questão no pós-teste e, finalmente, observaremos o desempenho por aluno nesse mesmo teste posterior.

### 5.1.1 Análise Geral do Desempenho dos Grupos

Esta primeira análise tem a finalidade de apresentar uma idéia geral do desempenho dos alunos. Ela mede o número total de acertos que os dois grupos tiveram nos testes. Assim sendo, o G.E., composto por 11 alunos, teria a possibilidade de obter 88 questões certas (11 alunos x 8 questões) e o G.R., composto por 16 alunos, 128 questões certas (16 x 8).



**Quadro 5.1:** Desempenho geral dos grupos nos testes – Números de acertos

Inicialmente, com base no pré-teste, podemos notar, observando a tabela e o gráfico acima, que os alunos dos dois grupos demonstraram não ter conhecimento a respeito do assunto, uma vez que apresentaram patamares de acertos bastante baixos. É importante salientar que esse patamar foi equivalente em ambos os grupos, 2,27% para o G.E. e 0% para o G.R.. Por esse motivo e mais o fato de que o número de respostas em branco foi muito elevado, 42,19% para o G.E. e 50% no G.R., nas análises que se sucederão, levaremos em consideração somente o pós-teste.

Posteriormente, com base no pós-teste, a diferença entre eles aumenta bastante. De fato, enquanto o grupo de referência acertou abaixo da metade possível de respostas certas (46,09%), o grupo de experimentação acertou em torno de 70% das respostas. Há a favor do grupo experimental mais de 20 pontos percentuais. Temos aqui o primeiro indício da importância de se introduzir conceitos a partir de situações significativas. Ou seja, de se trabalhar em um ambiente que possibilite o aluno a estabelecer relações entre conceito científico, que ele está aprendendo, e os conceitos espontâneos, particulares e não conscientes, que ele tem formado a partir de suas interações com situações cotidianas (Vygotsky).

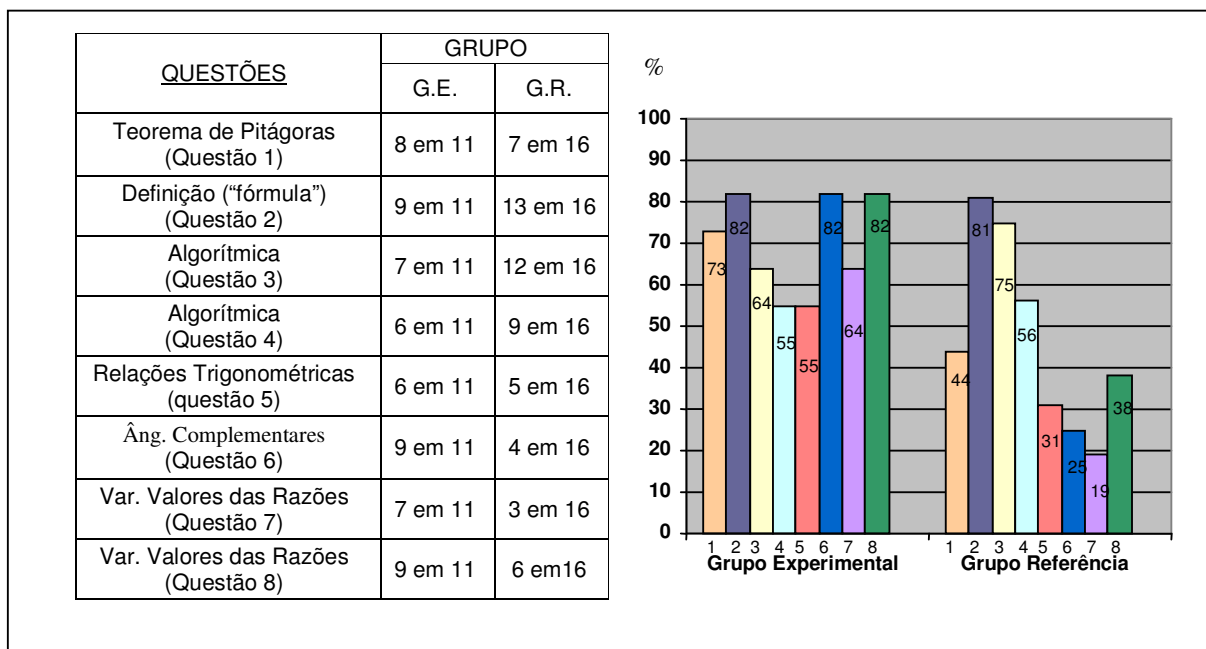
Tomando por base a pontuação geralmente adotada pelo sistema escolar, no qual o aluno tem um bom desempenho quando acerta 70% da prova e que, além disso, é aprovado se acerta pelo menos a metade das questões, podemos dizer que o grupo experimental apresentou, nesta primeira análise, um desempenho satisfatório, já que houve um acerto em torno de 70% das questões.

Tal resultado nos permite inferir que a abordagem adotada por nós na realização da seqüência foi satisfatória.

Os resultados até aqui apresentados ainda são muito gerais, o que nos leva a uma análise pobre, por demais superficial. Devemos procurar entender melhor o desempenho mais especificamente. Assim sendo, faremos a seguir uma análise com relação ao desempenho dos alunos quanto ao tipo de questão.

### 5.1.2. Análise do Desempenho dos Grupos por Tipo de Questão no Pós-teste

Esta análise diz respeito ao estudo do desempenho dos sujeitos de nosso estudo, segundo cada questão referente ao instrumento diagnóstico posterior. Levaremos em consideração a possibilidade de agrupar essas questões segundo a característica predominante no objetivo de cada uma delas (ver análise, *a priori*, do pós-teste no capítulo de metodologia).



**Tabela 5.3:** Acertos dos grupos por tipo de questão no pós-teste

Analisando a tabela acima, observamos que em cinco das oito questões o G.E. teve um desempenho melhor do que o G.R. (questões 1, 5, 6, 7 e 8). As exceções ficaram por conta da questão 3, em que o G.R. apresentou um desempenho efetivamente acima do G.E., e as questões 2 e 4 em que os desempenhos dos grupos se equívalem. Em todas as questões desse instrumento, o percentual de acerto do G.E. foi acima de 50%. Além disso, esse grupo apresentou muito bom desempenho para 4 das 8 questões, em que houve um acerto acima de 70%. Essas questões trataram, respectivamente, do teorema de Pitágoras, definição de razão trigonométrica, ângulos complementares e da variação dos valores das razões trigonométricas, o que é uma indicação de que os alunos desse grupo foram além da aplicação imediata de fórmulas ou de algoritmos. Ou seja, enquanto o grupo de referência se saiu bem ao trabalhar com algoritmo e aplicação de fórmula, o experimental teve melhor desempenho nas questões cuja abrangência maior tinha a ver com a formação do conceito.

É muito importante observarmos que, no teste, há uma clara divisão entre um bloco de questões formado pelas questões 2, 3 e 4, e um segundo bloco das questões 1, 5, 6, 7 e 8. No primeiro bloco tivemos três questões que classificamos como relativas à definição (“fórmula”) e aos algoritmos. Já no segundo bloco tivemos uma questão, a primeira, que tratou de um pré-requisito (Teorema de Pitágoras), muito importante, e as quatro últimas questões relacionadas aos conceitos da trigonometria propriamente dita. Para essas questões, entendemos ser necessário ir além da definição, fórmula ou procedimentos algorítmicos para o sucesso na

resolução. Era preciso uma tomada de decisão, definir uma opção de escolha e uma representação para se obter uma resolução adequada. Resumindo, podemos classificar o primeiro bloco como referente à competência (fórmula e algoritmo) e o outro relativo ao conceito.

Os dados da tabela 5.3 acima nos revela que o desempenho dos dois grupos se equipararam quanto às questões 2, 3 e 4. Nessas, o G.E. apresentou um aproveitamento médio de 67% e o G.R. 71%. Já quanto às questões 1, 5, 6, 7 e 8, o G.E. manteve um bom percentual médio de acerto, 71%, enquanto que o desempenho do G.R. caiu para o percentual médio de 31%.

Sob a ótica da divisão das questões do teste em dois blocos, notamos que houve uma pequena diferença positiva, de 4%, no desempenho do G.E. de um para outro bloco. De fato, no primeiro bloco houve 22 acertos de um total de 33 possíveis(22/33) e no segundo bloco 39 dos 55 possíveis. Para o G.R. houve uma divisão nítida quanto ao desempenho, pois o mesmo apresentou um razoável percentual de acertos no primeiro bloco, 34 acertos de um total de 48 possíveis, caindo drasticamente para apenas 25 acertos de um total de 80 possíveis no segundo bloco. A nosso ver, há evidências de que o trabalho com o G.R. ficou centrado na competência algorítmica, enquanto que a seqüência de ensino aplicada no G.E. foi além disso, trabalhando tanto a competência quanto a formação do conceito.

Observando especificamente o G.E., notamos que o mesmo teve um bom desempenho diante de uma situação-problema cuja solução envolvia uma aplicação direta do teorema de Pitágoras (questão 1) – 8 de 11 ou 73%. Já na questão 5 (relações trigonométricas), em que havia a necessidade do emprego

desse teorema, o sucesso desse grupo caiu (55% ou 6 de 11). O porquê de tal comportamento poderemos avaliar melhor nas análises que se sucederão. O grupo de referência ficou abaixo da média em ambas as questões (1 e 5).

A questão referente à aplicação da definição de razão trigonométrica, através do reconhecimento da fórmula correspondente (questão 2), não foi problema para nenhum dos dois grupos, o que deixa evidente uma competência satisfatória. Quanto às questões algorítmicas (3<sup>a</sup> e 4<sup>a</sup>), é interessante notar que o grupo de referência se saiu melhor que o experimental, embora ambos tenham mostrado razoável domínio, já que apresentaram um índice médio em torno de 60 pontos percentuais (66% para o G.R. e 59% para o G.E.).

Na questão 5 (relações trigonométricas), que a nosso ver está ligada diretamente à formação de conceito (ainda mais quando conjugada com outras questões), o grupo experimental apresentou um índice de acerto significativamente maior que o de referência: 24 pontos percentuais a mais. Entretanto, julgamos que esse percentual (55%) de acerto não foi um bom resultado, pois só um pouco mais da metade dos alunos acertou. Nesse sentido, questionamo-nos sobre o quanto os alunos conseguiram realmente formar o conceito. Mas, não podemos analisar o processo de aprendizagem desses alunos por apenas uma questão. É preciso que consideremos as demais e façamos relações para podermos chegar a uma conclusão, a uma análise mais acurada do processo de aprendizagem desses alunos quanto ao desenvolvimento do conceito.

Portanto, as questões 4 e 5 (55% em ambas) foram de relativo sucesso pelos alunos do G.E.. É interessante observarmos que a questão 4 estava no

primeiro bloco de questões, por nós considerado como algorítmico, e a 5ª questão no segundo bloco, considerado como relativo ao conceito. Assim, o G.E. apresentou um índice de acerto baixo relativo em uma questão de cada bloco. Só vamos poder entender melhor isso, quando mais à frente analisarmos os tipos de erros.

As três últimas questões – 6, 7 e 8 – referiam-se a dois tópicos do conteúdo, quais sejam: a questão 6 relativa aos ângulos complementares e as outras duas à variação dos valores das razões trigonométricas. Porque trataram da construção do conceito, consideramos essas questões tão importantes quanto a questão 5. Nesses dois tópicos, o grupo de experimentação obteve um percentual de acerto acentuadamente maior (57% e 45% a mais, respectivamente) que o de referência. Esses índices sinalizam para nós uma provável maior abrangência de nossa seqüência didática quanto ao conteúdo abordado.

Quanto às questões sete e oito, embora tratassem do mesmo assunto, entendemos que a sétima foi mais abrangente do que a oitava.

A 7ª questão requereu do aluno uma análise mais apurada, mais sofisticada, da relação entre a medida do ângulo e o valor da razão entre os lados do triângulo retângulo. Portanto, foi além da definição.

A 8ª questão foi mais dirigida, mais restrita. Seu enunciado, além de permitir uma resposta ao acaso – *sim* ou *não* -, foi mais objetivo ao se referir à limitação dos valores do seno e do co-seno ao intervalo  $]0,1[$ . Desse modo, entendemos que o seu grau de dificuldade foi bem menor do que a 7ª questão, favorecendo a resposta correta. A resposta se completava com uma justificativa.



Isso talvez explique a tendência que se observa de o número de acertos na questão 8 ser maior do que a 7ª questão. Essa tendência é observada mesmo no G.R. em que o número de acertos foi proporcionalmente muito menor do que o G.E. . Só vamos poder entender melhor isso, quando mais à frente analisarmos os tipos de procedimentos.

Ainda resta analisarmos os resultados dos dois grupos sob o ponto de vista do sujeito. Em outras palavras, se é o mesmo sujeito quem acerta sempre nas mesmas questões e onde é que cada aluno está acertando. Daí o terceiro tipo de análise quantitativa, levando-se em conta o desempenho do sujeito.

### 5.1.3 Análise do Desempenho por Sujeito

Aplicado o pós-teste aos dois grupos, obtivemos os resultados que aparecem nas tabelas a seguir.

SUJEITO	QUESTÃO								acertos/total	%
	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8		
SE1	C	C	C	C	E	C	E	B	5/8.....	62,5%
SE2	C	C	C	C	E	C	C	C	7/8.....	87,5%
SE3	E	C	E	E	C	C	E	C	4/8.....	50,0%
SE4	E	C	E	E	B	B	E	B	1/8.....	12,5%
SE5	C	C	C	E	C	C	C	C	7/8.....	87,5%
SE6	C	C	C	C	C	C	C	C	8/8.....	100%
SE7	C	C	C	C	C	C	C	C	8/8.....	100%
SE8	E	E	E	E	B	B	E	C	1/8.....	12,5%
SE9	C	C	C	C	C	C	C	C	8/8.....	100%
SE10	C	C	C	C	C	C	C	C	8/8.....	100%
SE11	C	E	E	E	E	C	C	C	4/8.....	50%

**Tabela 5.4:** Desempenho por sujeito – Grupo Experimental (pós-teste)

#### LEGENDA

C – certo  
 B – branco  
 E – errado  
 NS – não sei

SUJEITO	QUESTÃO								acertos/total	%
	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8		
SR1	C	C	C	C	C	C	C	C	8/8.....	100%
SR2	E	C	E	E	E	E	E	C	2/8.....	25%
SR3	E	E	C	E	E	E	E	B	1/8.....	12,5%
SR4	C	C	C	C	E	B	E	E	4/8.....	50%
SR5	C	C	C	C	E	E	E	C	5/8.....	62,5%
SR6	E	C	E	E	E	E	E	C	2/8.....	25%
SR7	E	C	C	C	E	E	E	B	3/8.....	37,5%
SR8	E	E	C	C	E	C	E	C	4/8.....	50%
SR9	C	C	C	C	C	C	E	E	6/8.....	75%
SR10	C	C	C	C	C	B	C	C	7/8.....	87,5%
SR11	E	C	C	E	E	NS	C	E	3/8.....	37,5%
SR12	B	B	E	E	B	B	E	B	0/8.....	0%
SR13	C	C	C	C	C	C	E	E	6/8.....	75%
SR14	E	C	C	E	B	E	E	E	2/8.....	25%
SR15	E	C	E	E	B	E	E	E	1/8.....	12,5%
SR16	C	C	C	C	C	E	E	B	5/8.....	62,5%

**Tabela 5.5:** Desempenho por sujeito – Grupo de Referência (pós-teste)

Conforme podemos observar nas tabelas acima, o grupo de referência apresentou como resultado todos os números de acertos possíveis, ou seja,

desde nenhuma (zero) até todas as questões certas. Já no grupo de experimentação tivemos 2 alunos que não entenderam, porque só tiveram um acerto; tivemos 3 que entenderam em parte (na média entre 4 e 5 acertos) e daí um salto para 7 e 8 acertos. No grupo experimental, não houve número de acertos 0, 2, 3 e 6, ou seja, não aparecem esses valores, havendo uma demarcação muito clara entre os alunos que entenderam e os que não entenderam. Já no grupo de referência apareceram todos os valores possíveis.

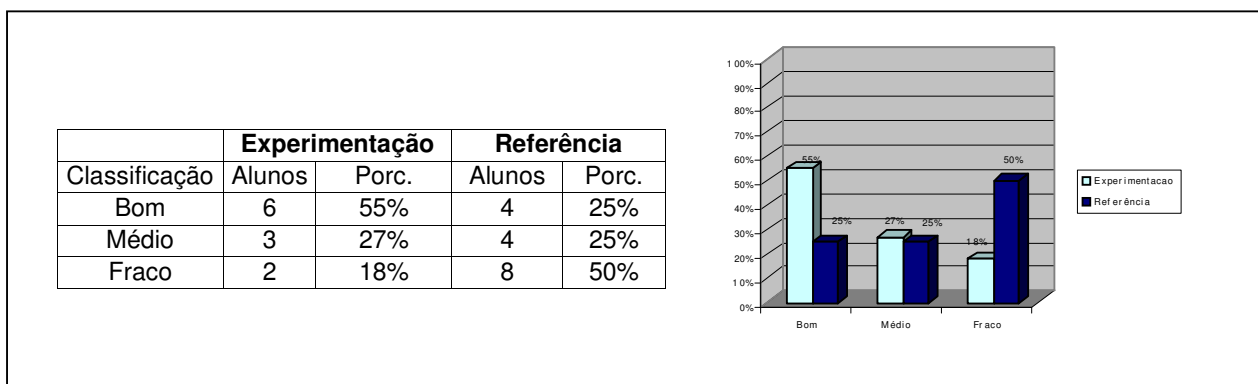
Quanto aos dois alunos (SE4 e SE8) do G.E. que tiveram somente um acerto, devemos assumir que a seqüência não deu conta deles. Dois sujeitos de uma amostra composta por somente 11 elementos, correspondem a 20% do total. Isso significa que, o desempenho desses dois alunos, puxou para baixo o número de acertos do G.E., enquanto que no G.R. os acertos ficaram mais espalhados.

O desempenho do G.E quanto às questões 3, 4, 5 e 7 ficou prejudicado, pois entre os que erraram, estão esses que erraram praticamente todas as questões. Um deles, o SE8, foi um dos dois que erraram a questão 2. Na questão 6, por exemplo, os dois únicos sujeitos que erraram foram esses alunos. Quanto à questão oito, o aluno SE4 deixou em branco, enquanto que o SE8, por ter respondido somente sim, teve a resposta considerada como certa, apesar da falta de justificativa. Como esse aluno foi um daqueles dois que ficou sempre no erro ou em branco, levantamos a hipótese da resposta ter sido fruto do acaso, pois houve 50% de probabilidade de acertar ao ter respondido sim. Parece-nos que os únicos acertos dos sujeitos 4 e 8 são frutos da memorização.

A distinção entre cada grupo pode ser melhor evidenciada se considerarmos, por exemplo, a seguinte classificação de desempenho baseada no número de acertos:

BOM desempenho	⇒ acerto de 6, 7 ou 8 questões (75% - 100%)
MÉDIO desempenho	⇒ acerto de 4 ou 5 questões (50% - 62,5%)
FRACO desempenho	⇒ acerto de 0 a 3 questões (0% - 37,5%)

**Quadro 5.2:** Critério para avaliação de desempenho



**Quadro 5.3:** Análise do desempenho por sujeito

Assim, em ambos os grupos computamos:

Considerada esta classificação de desempenho, observamos que os alunos do grupo de experimentação apresentaram melhores índices do que os do grupo de referência, quanto mais se associarmos esses valores com as médias consideradas de maneira geral pelas escolas para aprovação. Se considerarmos a nota  $\geq 7$  (BOM), mais da metade (55%) dos alunos do grupo experimental aí se enquadra, enquanto que no de referência somente um quarto (25%). Se, a exemplo do que ocorre no sistema escolar, considerarmos satisfatória a nota  $\geq 5$  (MÉDIO), no grupo de experimentação, teremos 82% do total nessa condição, enquanto que no de referência 50%;

metade do grupo de referência estaria reprovada, enquanto que no de experimentação, somente 18%.

Na tentativa de responder à pergunta “Quem possui o conceito completo das razões trigonométricas?”, um outro critério de avaliação do desempenho por sujeito poderia ser: possui o conceito completo o aluno que acertou todas as questões ou pelo menos às questões 2+(3 ou 4)+5+6+7+8, que abrangem conteúdos que, juntos, têm a ver com a formação do conceito de razões trigonométricas. Com base nesse critério, no grupo de experimentação, encontramos 5 alunos nessa situação (SE5, SE6, SE7, SE9 e SE10) para um total de 11 alunos, o que corresponde a 45%. Já no grupo de referência, apenas um aluno (SR1) satisfaz essa condição, num total de 16 possibilidades (6%).

Dos comentários acima e os feitos na análise do pós-teste, podemos observar a importância da questão 5 na avaliação quanto à construção do conceito das razões trigonométricas. Considerando-a como mais um parâmetro de análise do desempenho do aluno, observamos que no grupo de experimentação 6 alunos (de um total de 11; 55%) responderam corretamente a essa questão, enquanto que no grupo de referência 5 (de um total de 16 ; 31%) acertaram.

## 5.2. Análise Qualitativa dos Procedimentos dos Sujeitos no Pós-teste

Esta parte da análise diz respeito aos tipos de erros observados nos procedimentos adotados pelos alunos e, através da resposta à nona questão do pós-teste, observar a concepção geral do aluno a respeito de trigonometria.

### 5.2.1. Análise dos Procedimentos por Sujeito

Com o objetivo de identificar os principais raciocínios e procedimentos que conduziram os alunos ao insucesso, vamos analisar a qualidade do procedimento que os alunos utilizaram para resolver as questões.

Para esta análise, vamos agrupar os erros em categorias, de acordo com suas características predominantes. Reconhecemos que existiram casos em que houve vários tipos de erros na resolução de uma questão. Nesses casos, levaremos em consideração aquele que imaginamos dominante para o insucesso do aluno. Com isso, poderemos comparar os tipos de erros cometidos no pós-teste e efetuar uma análise do desempenho dos dois grupos (G.E. e G.R.) quanto aos procedimentos.

Identificamos oito categorias de erros, as quais apresentamos a seguir:

**E<sub>1</sub>**: resolução e/ou resposta incompleta

**E<sub>2</sub>**: relativo à definição das razões trigonométricas

**E<sub>3</sub>**: relativo às manipulações algébricas

**E<sub>4</sub>**: relativo ao conceito de razão trigonométrica

**E<sub>5</sub>**: relativo à competência na aplicação do Teorema de Pitágoras

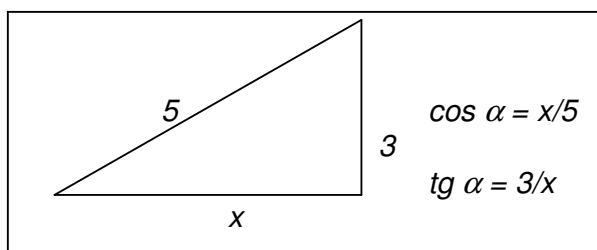
**E<sub>6</sub>**: desconhecimento quanto à relação entre a medida do ângulo e a variação do valor da razão trigonométrica

**E<sub>7</sub>**: associação incorreta entre a medida de ângulo e a variação do valor da razão trigonométrica

**E<sub>3</sub>**: desconhecimento quanto à limitação dos valores do seno e do co-seno ao intervalo  $]0,1[$

Consideramos que o aluno cometeu um erro do tipo **E<sub>1</sub>** – *resolução e/ou resposta incompleta* - quando, apesar de utilizar o procedimento correto de resolução e/ou resposta, esse foi interrompido. Ou seja, a resposta e/ou resolução foi parcial, incompleta.

Podemos tomar como exemplo dessa categoria, uma das resoluções apresentadas para a questão 5. A questão 5 solicita, dado o valor do sen  $\alpha=3/5$ , determinar o  $\cos \alpha$  e a  $\operatorname{tg} \alpha$  :



**Quadro 5.4:** Resolução da questão 5 pelo aluno SE1 do G.E.

Observamos que o aluno não concluiu a resolução, deixando a resposta em função de  $\underline{x}$ . Faltou, portanto, o cálculo do valor de  $\underline{x}$  para que se obtivesse uma resposta completa

e conclusiva.

Consideramos que o aluno cometeu um erro do tipo **E<sub>2</sub>** – *relativo à definição das razões trigonométricas* - quando, na aplicação da definição de razão trigonométrica (como se fosse fórmula), trocou a medida do cateto oposto pela do cateto adjacente, ou hipotenusa por cateto.

Exemplificando essa categoria, podemos considerar uma das resoluções observadas quanto à questão 2. Essa questão solicita, dado um triângulo

retângulo com todas as medidas de seus lados, a determinação das razões trigonométricas referente a um ângulo  $\alpha$  :

$$tg \alpha = 5/13, \cos \alpha = 5/12, \text{sen } \alpha = 12/13$$

**Quadro 5.5** : Resolução da questão 2 pelo aluno SE11 do G.E.

sen  $\alpha = 5/13$  .

Observamos que o aluno cometeu um erro de definição, pois a resposta correta seria:

$$tg \alpha = 5/12, \quad \cos \alpha = 12/13 \text{ e}$$

Quanto ao erro do tipo **E<sub>3</sub>** – *relativo às manipulações algébricas* -, assim foi por nós considerado quando, apesar de utilizar o procedimento correto, o sujeito errou nas passagens do processo de resolução de equações ou em contas.

Como exemplo podemos considerar uma das resoluções apresentadas relativa à questão 4. A 4ª questão solicita a determinação da medida  $x$  de um lado de um triângulo retângulo, dada a medida de um ângulo e de um dos lados:

$$tg 60^\circ = x/250$$

$$1,73/1 = x/250$$

$$x = 250/1,73$$

$$x = 144 \text{ m}$$

Observamos que na última operação efetuada, ao invés de  $x = 250 \cdot 1,73$ , o aluno fez  $x = 250/1,73$  .

**Quadro 5.6** : Resolução da questão 4 pelo aluno SR14 do G.R.

Consideramos que se cometeu um erro do tipo **E<sub>4</sub>** – *relativo ao conceito de razão trigonométrica* - quando, por exemplo, para a resolução de uma questão, se exige uma decisão da parte do aluno quanto a qual razão



trigonométrica aplicar. Ou seja, não basta o conhecimento da definição como se fosse fórmula. Exige-se uma observação mais detalhada e uma tomada de decisão. Nessas condições, observamos resoluções que apresentam razões entre medidas que, a nosso ver, não têm significado, ou, por exemplo, operações que envolvem medida de ângulo com medida de segmento.

Como exemplo, podemos citar uma das resoluções apresentadas quanto à 6ª questão, questão essa que, referente a ângulos complementares (no caso, B e C), solicita o  $\sin C$  sendo dado o  $\cos B = 0,375$ :

$\sin C = x/0,37$ $90^\circ = x/0,37$ $x = 33,3$
--

**Quadro 5.7** : Resolução da questão 6 pelo aluno SR7 do G.R.

Como C e B são ângulos complementares, então  $\sin C = \cos B = 0,375$ . Portanto, entendemos que seja uma questão que vai além da definição, que a resolução ao lado não apresenta significado e que, a nosso ver, revelou problemas referentes ao conceito de razão trigonométrica.

Classificamos como um erro do tipo **E<sub>5</sub>** – *relativo à competência na aplicação do Teorema de Pitágoras* – quando, por exemplo, o aluno não obteve sucesso na resolução da questão 1. Essa questão, contextualizada, apresentou uma situação correspondente a um triângulo retângulo, no qual foram dadas as medidas dos catetos e se desejou obter a medida da hipotenusa. Portanto, teve como objetivo a aplicação do Teorema de Pitágoras.

Pelos dados do problema e também pelas condições de aplicação do pós-teste, onde não foi permitido o uso de calculadora científica, tabela

trigonométrica e nem instrumentos de desenho geométrico, entendemos que não havia outra resolução possível.

Analisando as resoluções consideradas erradas, observamos tentativas de utilização de uma razão trigonométrica, em especial a tangente, e outras aparentemente sem significado. Um aluno, por exemplo, multiplicou a medida de um lado pela medida do outro e considerou o produto como resposta. Um outro aluno calculou a área do triângulo e deu essa medida da área como resposta. Um outro cálculo  $\text{tg } x = 12/9$  e deu como resposta  $x = 1,33$ .

Portanto, com a intenção de identificar um erro predominante e diante de uma diversidade de respostas erradas, achamos por bem classificar esses erros como *relativo à competência na aplicação do Teorema de Pitágoras*. Isso significa, a nosso ver, que como o problema não pediu explicitamente a aplicação do teorema, provavelmente o aluno, mesmo tendo o conceito, não teve a competência de perceber a necessidade de aplicação do mesmo.

Consideramos que ocorreu um erro do tipo **E<sub>6</sub>** – *desconhecimento quanto à relação entre a medida do ângulo e a variação do valor da razão trigonométrica* - quando, na resposta à questão 7, que solicita a inclusão dos sinais <, = ou > de forma conveniente, o aluno colocou os sinais aparentemente ao acaso. Essa questão tem a ver com a variação dos valores das razões trigonométricas.

Como exemplo, podemos considerar a resposta de um aluno do G.R. relativa à 7ª questão:

- |  |
|--|
| <p>a) <math>\cos 80^\circ \dots &gt; \dots \cos 20^\circ</math><br/> b) <math>\text{sen } 41^\circ \dots &lt; \dots \text{sen } 22^\circ</math><br/> c) <math>\text{tg } 33^\circ \dots = \dots \text{tg } 55^\circ</math></p> |
|--|

A resposta correta deveria ter sido <, > e <, respectivamente.

**Quadro 5.8** : Resposta da questão 7 pelo aluno SR3 do G.R.

Um outro tipo de erro, **E<sub>7</sub>** – *associação incorreta entre a medida de ângulo e a variação do valor da razão trigonométrica* - também tem a ver com a variação dos valores das razões. Consideramos que isto ocorreu quando o aluno associou incorretamente que quanto maior a medida do ângulo, maior será o valor da razão.

Exemplificando essa categoria, podemos considerar a resposta apresentada por um aluno do G.E. para a 7ª questão:

<p>a) <math>\cos 80^\circ \dots &gt; \dots \cos 20^\circ</math>  b) <math>\sin 41^\circ \dots &gt; \dots \sin 22^\circ</math>  c) <math>\operatorname{tg} 33^\circ \dots &lt; \dots \operatorname{tg} 55^\circ</math></p>
---

**Quadro 5.8** : Resposta da questão 7 pelo aluno SE4 do G.E.

Observando este tipo de resposta, entendemos que a mesma sugere a idéia de que ângulo maior implica razão maior.

A categoria **E<sub>8</sub>** – *desconhecimento quanto à limitação dos valores do seno e do co-seno ao intervalo ]0,1[* - representa o erro devido ao desconhecimento do fato de que os valores do seno e do co-seno são menores do que 1. Por exemplo, podemos tomar a resposta apresentada por um aluno do G.R. para a 8ª questão:

<p><i>Não. Não sei por quê (sic).</i></p>
---

**Quadro 5.9** : Resposta da questão 8 pelo aluno SR13 do G.R.

Apesar do aluno ter respondido “não”, entendemos que essa resposta pode ter sido ao

acaso pois, em seguida, ele afirma não saber o porquê.

A tabela 5.6, a seguir, indica o tipo de erro cometido pelos alunos nos grupos G.E. e G.R., respectivamente. As notações utilizadas são as das

categorias de erros, sendo que as questões “em branco” foram simbolizadas por “E<sub>b</sub>” e as questões corretas por “C”.

GRUPO	SUJEITO	QUESTÃO							
		Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8
E X P E R I M E N T A L	SE1	6. C	7. C	C	C	E <sub>1</sub>	C	E <sub>6</sub>	E <sub>b</sub>
	SE2	C	C	C	C	E <sub>1</sub>	C	C	C
	SE3	E <sub>5</sub>	C	E <sub>4</sub>	E <sub>4</sub>	C	C	E <sub>6</sub>	C
	SE4	E <sub>5</sub>	C	E <sub>3</sub>	E <sub>2</sub>	E <sub>b</sub>	E <sub>b</sub>	E <sub>7</sub>	E <sub>b</sub>
	SE5	C	C	C	E <sub>2</sub>	C	C	C	C
	SE6	C	C	C	C	C	C	C	C
	SE7	C	C	C	C	C	C	C	C
	SE8	E <sub>5</sub>	E <sub>2</sub>	E <sub>2</sub>	E <sub>2</sub>	E <sub>b</sub>	E <sub>b</sub>	E <sub>6</sub>	8. C
	SE9	C	C	C	C	C	C	C	C
	SE10	C	C	C	C	C	C	C	C
	SE11	C	E <sub>2</sub>	E <sub>2</sub>	E <sub>2</sub>	E <sub>4</sub>	C	C	C
D E R E F E R Ê N C I A	SR1	C	C	C	C	C	C	C	C
	SR2	E <sub>5</sub>	C	E <sub>2</sub>	E <sub>2</sub>	E <sub>2</sub>	E <sub>4</sub>	E <sub>7</sub>	C
	SR3	E <sub>5</sub>	E <sub>4</sub>	C	E <sub>2</sub>	E <sub>4</sub>	E <sub>4</sub>	E <sub>6</sub>	E <sub>b</sub>
	SR4	C	C	C	C	E <sub>3</sub>	E <sub>b</sub>	E <sub>7</sub>	E <sub>4</sub>
	SR5	C	C	C	C	E <sub>5</sub>	E <sub>4</sub>	E <sub>7</sub>	C
	SR6	E <sub>5</sub>	C	E <sub>2</sub>	E <sub>2</sub>	E <sub>4</sub>	E <sub>4</sub>	E <sub>6</sub>	C
	SR7	E <sub>5</sub>	C	C	C	E <sub>4</sub>	E <sub>4</sub>	E <sub>6</sub>	E <sub>b</sub>
	SR8	E <sub>5</sub>	E <sub>4</sub>	C	C	E <sub>4</sub>	C	E <sub>6</sub>	C
	SR9	C	C	C	C	C	C	E <sub>7</sub>	E <sub>4</sub>
	SR10	C	C	C	C	C	E <sub>b</sub>	C	C
	SR11	E <sub>5</sub>	C	C	E <sub>2</sub>	E <sub>1</sub>	NS	C	E <sub>1</sub>
	SR12	E <sub>b</sub>	E <sub>b</sub>	E <sub>2</sub>	E <sub>2</sub>	E <sub>b</sub>	E <sub>b</sub>	E <sub>6</sub>	E <sub>b</sub>
	SR13	C	C	C	C	C	C	E <sub>7</sub>	E <sub>8</sub>
	SR14	E <sub>5</sub>	C	C	E <sub>3</sub>	E <sub>b</sub>	E <sub>4</sub>	E <sub>7</sub>	E <sub>8</sub>
	SR15	E <sub>5</sub>	C	E <sub>2</sub>	E <sub>2</sub>	E <sub>b</sub>	E <sub>4</sub>	E <sub>7</sub>	E <sub>4</sub>
	SR16	C	C	C	C	C	E <sub>4</sub>	E <sub>7</sub>	E <sub>b</sub>

LEGENDA

C – certo  
 E<sub>b</sub> – branco  
 E – errado  
 NS – não sei

**E<sub>1</sub>**: RESOLUÇÃO E/OU RESPOSTA INCOMPLETA  
**E<sub>2</sub>**: RELATIVO À DEFINIÇÃO DAS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS  
**E<sub>3</sub>**: RELATIVO ÀS MANIPULAÇÕES ALGÉBRICAS  
**E<sub>4</sub>**: RELATIVO AO CONCEITO DE RAZÃO TRIGONOMÉTRICA  
**E<sub>5</sub>**: RELATIVO AO CONCEITO DO TEOREMA DE PITÁGORAS  
**E<sub>6</sub>**: DESCONHECIMENTO QUANTO À RELAÇÃO ENTRE A MEDIDA DO ÂNGULO E A VARIAÇÃO DO VALOR DA RAZÃO TRIGONOMÉTRICA  
**E<sub>7</sub>**: ASSOCIAÇÃO INCORRETA ENTRE A MEDIDA DE ÂNGULO E A VARIAÇÃO DO VALOR DA RAZÃO TRIGONOMÉTRICA  
**E<sub>8</sub>**: DESCONHECIMENTO QUANTO À LIMITAÇÃO DOS VALORES DO SENO E DO CO-SENO AO INTERVALO ]0, 1[

Analisando as tabelas acima, observamos de imediato uma grande queda do número de respostas em branco, em comparação com o ocorrido no pré-teste. No pré-teste, em ambos os grupos, correspondeu a aproximadamente 50%, enquanto que aqui no pós-teste correspondeu a aproximadamente 8%. Isso significa que os alunos apresentaram, mesmo que incorreta, um tipo de tentativa ao responder as questões.

O G.E. apresentou 27 erros num total de 88 respostas (30,68%) e o G.R. 68 erros de um total de 128 respostas (53,12%). Novamente nos chama a atenção o fato de que, no G.E., dois alunos (SE4 e SE8) juntos correspondem a 50% do total dos erros, apresentando 7 erros cada um. Desses erros, o aluno SE4 com três  $E_b$  e o SE8 três  $E_2$ . O G.R. apresentou, quanto aos sujeitos, uma distribuição mais uniforme.

No G.E., o erro que mais se destacou foi do tipo  $E_2$  (com 8 casos), relativo à definição de razão trigonométrica. A nosso ver, isso significa que em oito situações, os alunos apresentaram dificuldades em relacionar os catetos e hipotenusa com as respectivas razões trigonométricas. Utilizaram, por exemplo, como se fosse tangente a razão definida como seno. Em segundo lugar, se destacou o número de questões em branco (6 casos) e, em seguida, apareceram três tipos com o mesmo número de casos (três):  $E_4$ ,  $E_5$  e  $E_6$ .

No G.R., o erro que mais se destacou foi quanto ao conceito de razão trigonométrica, erro do tipo  $E_4$  (com 17 casos). Entendemos assim que, nesses casos, os alunos revelaram não estar com os conceitos bem estruturados. Em seguida, destacou-se o número de respostas em branco (12 casos) e depois os tipos  $E_2$  (11 casos),  $E_5$  (9 casos) e  $E_7$  (8 casos).

Nas questões 7 e 8, que tratam de um mesmo assunto, variação dos valores das razões, em ambos os grupos houve uma tendência de maior acerto na 8ª questão do que na 7ª. Isso já foi tratado anteriormente quando da análise do tipo de questão. Agora faremos uma análise dessa tendência quanto aos procedimentos.

Observando a tabela 5.6 acima, vemos que dois, SE3 e SE8, dos alunos do G.E. que erraram a questão 7, acertaram a 8ª questão. Analisando as respostas, vemos que um deles, o SE8, respondeu somente *sim* quanto à questão 8, o que foi correto, porém sem justificativa. Levantou, assim, a hipótese do acaso. O outro aluno, o SE3, respondeu corretamente: *sim* e mais a justificativa. Entretanto, ambos erraram a 7ª questão apresentando o mesmo procedimento: responderam com os sinais  $>$ ,  $=$  e  $<$ , quando o correto seria  $<$ ,  $>$  e  $<$ . Isso nos faz julgar que, possivelmente, os dois alunos possuem um *conhecimento parcial* do assunto, já que ambos erraram a 7ª questão, mais abrangente, e acertaram a 8ª, mais restrita.

Nos procedimentos relativos à 7ª questão, entendemos que tanto na ocorrência do erro tipo  $E_6$  quanto do  $E_7$ , manifestou-se um *desconhecimento* quanto à variação dos valores das razões trigonométricas.

No caso do erro  $E_7$ , acreditamos que o aluno *resolveu* seu desconhecimento apelando para a magnitude dos ângulos. Registramos um caso no G.E. e oito no G.R..

Já quanto aqueles que consideramos erro do tipo  $E_6$ , três no G.E. e 5 no G.R., os sinais foram colocados de maneira aparentemente aleatória. Entretanto, os que utilizaram os três sinais,  $<$ ,  $=$  e  $>$ , nos levam a considerar a

hipótese de que procuraram cumprir um contrato implícito de que, se o professor colocou três sinais, é porque os três deveriam ser utilizados.

No G.E., quanto ao erro  $E_6$ , percebemos uma tendência na utilização dos sinais. Dos quatro sujeitos que erraram a questão 7, 1 foi do tipo  $E_7$  e 3 do tipo  $E_6$ . Os três que apresentaram erro  $E_6$  responderam, sistematicamente, da mesma forma:  $>$ ,  $=$  e  $<$ . A nosso ver, procuraram conciliar os sinais à proposta do professor. Acompanharam a magnitude dos ângulos, escolhendo um dos três casos apresentados para utilizarem o sinal de igualdade, mesmo os ângulos, nesse caso, serem de magnitudes diferentes.

Já no G.R. não se manifestou uma tendência, pois os 5 erros do tipo  $E_6$  observados apresentaram procedimentos distintos.

Quando da análise por tipo de questão, observamos a existência de um certo relacionamento entre as questões 1 e 5, pois em ambas havia a necessidade do emprego do Teorema de Pitágoras. Entretanto, o desempenho do G.E. caiu de 73% de acerto na 1ª questão, para 55% na 5ª. Já o G.R. ficou abaixo de 50% em ambas as questões.

Observando a tabela 5.6, vemos que 5 alunos do G.E. erraram a questão 5. Dois deles deixaram em branco e, desse modo, não temos como avaliar o tipo de erro. Inclusive, salientamos que, esses dois alunos são aqueles mesmos (SE4 e SE8) que erraram praticamente todas as questões. Analisando as resoluções dos demais alunos, observamos que dois deles (SE1 e SE2) mostraram procedimentos corretos, mas não concluíram a resolução. Deixaram de apresentar um resultado final, indicando a resposta em função de um valor  $x$  que não foi calculado. Para o cálculo desse valor  $x$ , havia a necessidade do emprego do Teorema de Pitágoras. Salientamos que esses

dois alunos tinham conhecimento do teorema, pois o empregaram corretamente na resolução da questão 1.

Portanto, entendemos que, dos três alunos que apresentaram resoluções por nós consideradas erradas, somente um (SE11) errou de fato a 5ª questão.

### 5.2.2. Análise do Desempenho dos Grupos na Questão Descritiva

A 9ª questão do pós-teste – O que você entende por Trigonometria ? – teve como objetivo observar a concepção geral do aluno a respeito da *trigonometria no triângulo retângulo*, após se submeter à seqüência de ensino. Não tivemos, portanto, a intenção de avaliar a resposta como certa ou errada.

Iniciaremos nossa análise observando, com satisfação, que apenas um dos onze alunos do G.E. deixou de respondê-la. Portanto, esses dez alunos que tinham algo a dizer a respeito de trigonometria no triângulo retângulo, propiciaram-nos, positivamente, motivo para análise e discussão. Quanto a esse único aluno que deixou a resposta em branco, nada podemos afirmar, pois não temos dados para concluir se o mesmo não sabia o que responder ou se teve receio em se colocar sobre o assunto.

Dentre os dez alunos que responderam a esta pergunta, nove citaram explicitamente que trigonometria tinha a ver com triângulo retângulo. Podemos tomar como exemplos as respostas:

*“Entendo que a trigonometria serve para os cálculos de triângulo retângulo”* (aluno SE4 do G.E.).

*“É o estudo dos triângulos retângulos”* (aluno SE8 do G.E.).



Pelas respostas acima, entendemos que os alunos relacionaram, corretamente, a trigonometria com triângulo retângulo e que estavam a caminho da formação do conceito

O único aluno que não citou o triângulo retângulo em sua resposta escreveu:

*“Com as razões dos lados pode se encontrar a tangente, o sen e o cos”* (aluno SE11 do G.E.)

Tal resposta deixa implícita a idéia de triângulo, embora esteja mais voltada às definições das *razões trigonométricas*. Entretanto, não podemos assegurar que o aluno tenha relacionado a trigonometria ao triângulo retângulo. Outros três alunos também utilizaram a palavra *razão* na resposta. Um desses escreveu:

*“É o estudo da razão entre os lados de triângulos retângulos semelhantes: seno, co-seno e tangente”* (aluno SE2 do G.E.).

Como vemos acima, além dos termos *razão* e *triângulo retângulo*, o aluno considerou o conceito de *semelhança*. Portanto foi uma resposta mais abrangente, completa e que, a nosso ver, insinuou que as razões trigonométricas são equivalentes para triângulos retângulos semelhantes.

Dois alunos associaram a trigonometria ao cálculo de distâncias, tendo como base o triângulo retângulo. Por exemplo, um deles respondeu:

*“A Trigonometria é um método matemático que é usado para medir distâncias difíceis de medir como por exemplo a distância Lua, Terra e Satélite formando triângulo retângulo”* (aluno SE3 do G.E.).

Observamos que o aluno associou a trigonometria ao uso de triângulo retângulo para o cálculo de distâncias inacessíveis. Provavelmente, influenciado por nossa seqüência de ensino, o aluno tenha feito um paralelo

com o caminho histórico do conceito, que de instrumento evoluiu para uma ciência.

Pelas respostas apresentadas, observamos que, no grupo experimental, a Trigonometria apareceu como tendo a ver com *razões*, que servem para o *cálculo de medidas envolvendo triângulo retângulo*. Como pudemos ver, um dos alunos acrescentou ainda que ela está relacionada com *triângulos retângulos semelhantes*.

É interessante observarmos que não houve nenhuma referência a ângulo. Porém, isso pode ter sido devido aos tipos de problemas que propusemos, os quais, provavelmente, deram um maior destaque às razões, embora estas estejam relacionadas aos ângulos.

Um aluno citou, no seu entendimento a respeito de Trigonometria, sobre ângulos complementares. Na sua resposta, relacionou variáveis do campo conceitual da trigonometria.

*“Trigonometria é a fórmula que mede triângulo retângulo por isso tem Pitágoras, tg, seno, co-seno e ângulos complementares”* (aluno SE9 do G.E.).

Embora a palavra ângulo tenha sido citada, não consideramos esse conceito como vinculado à noção de trigonometria.

Podemos observar que, em termos conceituais, os alunos do G.E. parecem ter percebido as propriedades básicas da trigonometria. Eles fizeram associações com triângulo retângulo, semelhança, razões e distâncias inacessíveis, que eram o nosso propósito.

Comparando as respostas do G.E. quanto a esta questão qualitativa com as demais oito questões quantitativas, podemos observar que o único aluno que deixou em branco acertou cinco questões do pós-teste, portanto, um

aluno que foi considerado dentro daquele grupo de alunos que apresentou um desempenho tido como *médio*.

Aqueles dois alunos (SE4 e SE8) que tiveram um baixo desempenho na análise quantitativa, pois erraram praticamente todas as questões, mostraram, através de suas respostas, que o conceito de trigonometria estava em processo de formação. Portanto, na relação saber-professor-aluno o saber não ficou fora. Eles podem não ter tido a competência suficiente para resolver problemas, mas do ponto de vista da formação do conceito, suas respostas nos permitem conjecturar que houve avanços nesse processo.

O aluno SE2, que apresentou uma resposta que consideramos como muito boa, pois relacionou trigonometria com razões entre os lados de triângulos retângulos semelhantes, errou somente uma das oito questões quantitativas. Entretanto, conforme análise feita anteriormente, o erro apresentado foi devido a uma resolução inacabada e não propriamente a um erro conceitual. Portanto, se levarmos em conta as nove questões, podemos considerar esse aluno com um aproveitamento total.

Quanto ao grupo de referência, dos 16 alunos desse grupo, um deixou em branco, dois deram respostas não relacionadas com o assunto e um quarto aluno respondeu:

*“São números que possuem grau que são representados por números que possuem a vírgula que são representados por fórmulas” (aluno SR6 do G.R.).*

Provavelmente o aluno relacionou a trigonometria com ângulo, números decimais e definições que para ele correspondem às fórmulas. Entretanto, não vemos clareza suficiente para uma análise mais segura de sua resposta.

Dentre os 12 restantes que responderam a esta pergunta, três se referiram explicitamente ao triângulo retângulo. Um desses respondeu:

*“Eu entendo que é triângulo retângulo e valores do sen, cos e tg”* (aluno SR5 do G.R.).

Embora o aluno tenha citado *triângulo retângulo*, ele não relacionou trigonometria ao estudo do triângulo retângulo, mas sim que a trigonometria é o próprio.

Somente um citou a palavra *razão* relacionada a triângulo, porém não especificou se o triângulo é retângulo. Este aluno escreveu:

*“Trigonometria é a ciência que estuda as razões trigonométricas de um triângulo”* (aluno SR10 do G.R.).

Além desse aluno, outros dois também citaram a palavra *triângulo* no seu entendimento a respeito de trigonometria. Um desses respondeu:

*“Uma parte da matemática que estuda os triângulos”* (aluno SR2 do G.R.).

Interpretamos esta resposta como uma tentativa do aluno querer associar trigonometria com triângulo. Resta-nos a dúvida quanto ao aluno ter citado triângulo pensando em triângulo retângulo, ou simplesmente à etimologia da palavra. Como não fizemos entrevista posterior, não podemos afirmar que o aluno escreveu tudo o que sabe.

Ao contrário do G.E. que não apresentou nenhuma resposta com referência explícita a ângulo, no G.R. encontramos quatro que utilizam a palavra *ângulo*. Um deles diz que a trigonometria é o *estudo dos ângulos de um triângulo* e um outro *que trigonometria é os estudos (sic) dos ângulos de triângulos retângulos*.

Parece-nos que esses alunos formaram um conceito de trigonometria, não só relacionando-a a ângulos, como a triângulos retângulos.

As outras duas respostas foram:

*“Eu acho que é para achar as áreas os comprimentos e os ângulos dos polígonos”* (aluno SR14 do G.R.),

portanto, uma resposta que, a nosso ver, referiu-se à aplicação da trigonometria e não propriamente dela, e

*“É a parte da matemática que estuda os ângulos de  $1^\circ$  a  $89^\circ$  ou seja os ângulos agudos”* (aluno SR15 do G.R.),

que consideramos pouco esclarecedora quanto ao conceito de trigonometria. A trigonometria não é a parte de matemática que estuda ângulos. Porém, o ângulo é uma propriedade (invariante) muito importante na sua estrutura. Nas duas respostas acima, resta-nos dúvidas como, por exemplo, se houve uma referência implícita a triângulos retângulos.

Nenhum aluno do G.R. relacionou a trigonometria com o cálculo de distâncias inacessíveis.

As quatro respostas restantes foram:

*“Seno, seqüência, tangente, tabela, etc...”* (aluno SR13 do G.R.)

*“Achar valores desconhecidos a travez (sic) de medidas diferentes”* (aluno SR11 do G.R.)

*“Eu entendo que é (sic) os cálculos sobre o co-seno, seno e a tangente”* (aluno SR3 do G.R.)

*“... é um estudo geométrico que tem como objetivo descobrir números desconhecidos das divisões de catetos por hipotenusa e catetos por catetos”* (aluno SR1 do G.R.).

Analisando essas quatro respostas acima, observamos que as três primeiras foram mais relacionadas à questão de achar o valor desconhecido, seno, co-seno e tangente. Ou seja, algo mais ligado ao cálculo ou o emprego de fórmula do que propriamente com o conceito. A quarta resposta, de aparência mais sofisticada, mostrou mais uma preocupação com o *como fazer* do que com *o que é*. Referiu-se mais ao procedimento de resolução do que ao conceito.

Essas respostas voltadas para o algoritmo tiveram sentido, se nos atermos ao fato de que nas aulas do G.R. houve uma predominância da quantidade de exercícios.

Em resumo, podemos perceber, com relação à formação do conceito de trigonometria e levando em consideração as respostas apresentadas, que o G.R., na sua diversidade de respostas, mostrou uma tendência ao aspecto algorítmico. Portanto, na relação situação-conceito-competência, o G.R. acentuou a competência.

Já o G.E. que, no início do desenvolvimento de nossa seqüência de ensino, centrou-se na competência para a resolução de problemas, acentuou nas suas respostas o aspecto conceitual. Ao final do estudo, este grupo relacionou explicitamente trigonometria a triângulo retângulo, semelhança, razões e determinação de distâncias inacessíveis.

Na análise das respostas dos alunos, uma observação que a nosso ver se evidencia, é quanto à qualidade das respostas. Conforme entendemos de Vygotsky(1987), o aluno sabe muito mais do que é capaz de explicar. Mas isso é normal, porque o aluno está a caminho da formação do conceito e, nesse caminho, o conceito irá surgir à medida que ele se apropria e amplia o

significado da palavra. Inicialmente, com o centro nas atividades, o aluno desenvolve a competência na resolução de problemas, melhor do que se expressar.

## **CAPÍTULO VI: CONCLUSÃO**



## **Introdução**

No presente capítulo, procederemos às conclusões obtidas após o desenvolvimento de uma seqüência de ensino, seguido dos resultados analisados a partir da aplicação de dois instrumentos diagnósticos. Iniciaremos com *considerações relevantes* a respeito do trabalho, em seguida faremos uma *avaliação pessoal* do estudo e, finalmente, trataremos sobre questões relevantes para *futuras pesquisas*.

### **6.1. Considerações Relevantes**

O nosso trabalho teve como objetivo investigar uma abordagem para o ensino da trigonometria no triângulo retângulo, em que se pretendeu introduzir os conceitos das razões trigonométricas – seno, co-seno e tangente – de maneira significativa para o aluno. Um dos pontos que pudemos enfatizar dessa pesquisa foi o da participação do aluno – trabalhando em grupo – na construção do conceito, em contraposição ao ensino tradicional de aulas expositivas. Assim, entendemos que a seqüência de ensino, apoiada numa abordagem socioconstrutivista, iniciando por situações-problema, a-didática, apresentou resultados satisfatórios, tanto quantitativa quanto qualitativamente. Em nossa análise no capítulo V, observamos que o GE concluiu a seqüência de ensino tendo, efetivamente, iniciado a formação do conceito das razões trigonométricas, além de ter desenvolvido substancialmente a competência na resolução de problemas.

Acreditamos que a participação do aluno e o trabalho em grupo foram fatores importantes para se atingir os objetivos, permitindo tomadas de decisões e favorecendo a construção do conceito. De fato, ao longo dos

encontros, a idéia do aluno trabalhar em conjunto, de poder dividir seu pensamento com o colega, além de termos colocado problemas que realmente os levaram a tentar resolvê-los, fez com que o aluno fosse mais ativo, participando mais dentro de sala de aula. Desse modo, observamos que, de acordo com o pensamento de Vygotsky, é possível agir na zona de desenvolvimento proximal dos alunos, impulsionando a aquisição de novos conhecimentos. As institucionalizações que ocorreram nas discussões com os grupos foram muito importantes para a estruturação do conhecimento, tal qual propõe Brousseau.

Outro ponto que enfatizamos é o de que geralmente a trigonometria é abordada de maneira teórica, numa linguagem formal, exigindo abstração e memorização de fórmulas por parte do aluno. Em nosso trabalho, inicialmente, enfatizamos o concreto. Essa abordagem com a utilização de material concreto (maquete, triângulos em madeira, instrumentos e dispositivo), manipulando construções geométricas, tabelas, cartazes e calculadoras, envolveu os alunos em atividades que, a nosso ver, foram fatores essenciais para a formação do conceito. Sob a ótica de Vergnaud, podemos concluir que tais interações devem ter proporcionado aos alunos condições para que se apropriassem dos invariantes, auxiliando-os a compreenderem o objeto matemático em questão.

Quanto ao conteúdo específico, principiar a abordagem pela razão trigonométrica tangente se mostrou, a nosso ver, ser uma boa estratégia. Muitas situações-problema significativas para o aluno estão relacionadas com essa razão. Cabe ressaltar aqui que essa estratégia teve a ver com a questão histórica do cálculo de distâncias inacessíveis, principalmente àqueles relativos

ao triângulo retângulo, com referências ao episódio marcante atribuído a Tales quanto ao cálculo da altura de uma pirâmide.

Outro fato relevante foi o de que com somente 28 atividades, a nossa seqüência de ensino desenvolvida no GE, juntamente com a metodologia adotada, mostrou-se eficaz. O GR, com base na aula tradicional, propôs a resolução de 76 exercícios, ou seja, quase três vezes mais que o GE. Entretanto, o GR teve um aproveitamento final abaixo do GE. Essa diferença de desempenho foi mais uma razão que nos levou a inferir que, além da metodologia em sala de aula, a resolução de problemas - cuidadosamente pensados – em situações significativas, foi outro fator importante. Somente propor muitos exercícios não garante o conhecimento. Situações que requeiram mais raciocínio (pensar sobre) do que memorização e/ou mecanização na sua resolução, juntamente com a participação ativa do aluno, essa é que foi a diferença provada.

Também observamos dificuldades quanto à representação simbólica (significantes), tanto no que se refere à linguagem simbólica matemática, quanto à linguagem natural - expressão. Porém, acreditamos que tal dificuldade faz parte do processo de formação e que essa *deficiência* provavelmente será superada, ou pelo menos relativizada à medida que o aluno for caminhando na aquisição deste conhecimento. Essa conclusão retiramos não só de observações superficiais das fichas de atividades, as quais não nos detivemos pois não as analisamos, mas das análises dos testes, principalmente quanto à questão 9 do pós-teste. Por outro lado, sabemos que essa dificuldade de expressão, tanto na linguagem matemática quanto na

natural, não é um problema diretamente relacionado à nossa proposta e nem mesmo inerente ao conteúdo em questão.

As considerações que fizemos se resumem apenas à discussão a partir dos instrumentos diagnósticos. Portanto ficam em parte prejudicadas por não envolverem uma análise da seqüência de ensino desenvolvida ao longo dos encontros. Em nome de um rigor científico, diante de uma análise que poderia não ser muito fiel em virtude da quantidade de fatores a serem observados e da incipiente formação do professor-pesquisador, detivemo-nos aos instrumentos diagnósticos, pois nesses, foi possível um controle que garantiu a qualidade da pesquisa. O material recolhido é rico e esperamos discuti-lo brevemente em outro trabalho a ser publicado.

## **6.2. Considerações Pessoais**

Destinamos esta seção para discutir impressões pessoais que tivemos enquanto professor-pesquisador e enquanto aluno em nosso processo de se tornar pesquisador. Esta seção vai estar mais ligada às impressões e sentimentos do que propriamente ao aspecto científico.

A experiência de aplicar uma seqüência de ensino com enfoque construtivista, em que o aluno constrói, ele próprio, o conhecimento, através de sua participação ativa nas situações propostas, interagindo com o objeto, tomando decisões, resolvendo problemas e trabalhando em grupo, contrasta com a formação do professor. De maneira geral, o professor também é um aprendiz ou, mais sério ainda, um reeducando, pois terá que reformular toda sua formação e experiência profissional, calcada em aulas expositivas

tradicionais, com giz e quadro-negro. Ele não tem aquele mesmo jogo de cintura ou experiência, que já adquiriu quanto à aula tradicional.

Com certeza, a pesquisa (pelo menos quanto à aplicação da seqüência de ensino) tem esse fator a ser considerado, que não pode ser negado, que não compromete ou invalida, mas pesa. Ou seja, com a aplicação continuada, a metodologia e a seqüência iriam sendo melhor incorporadas pelo professor quanto ao fator tempo, domínio de sala, fatores imprevistos, domínio da teoria de aprendizagem (fundamentos), etc... Como fatores imprevistos, entendemos as mudanças no calendário da escola, atividades extra-classe – campeonatos esportivos, feiras, viagens, ... -, intervalos muito grandes entre um encontro e outro, “paredes”,...

Essa questão é tratada por Luna (1996):

*“A ameaça à viabilidade do projeto começa quando o cronograma de execução não dá conta adequadamente das condições externas à pesquisa, prendendo-se exclusivamente à (suposta ou real) capacidade de trabalho do pesquisador.*

*Alguns exemplos cotidianos:*

*. as 6 semanas previstas para a coleta de dados em uma escola podem virar 20 por não se levarem em conta as várias festas, períodos de provas ou as tradicionais greves; ...” (p. 47).*

Portanto, o fato de passarmos à ótica construtivista e do ponto de vista de professor para o de pesquisador, foi uma aprendizagem. Uma maior experiência com a metodologia, provavelmente acarretaria uma melhor capacitação de trabalho como pesquisador, com possível consequência de redução do número de encontros e maiores condições de contornar fatores imprevistos.

### 6.3. Considerações futuras

Eventualmente questionamos se numa seqüência de ensino, que está relacionada à sala de aula, não se poderia estar propondo algumas tarefas para casa, para o aluno continuar pensando sobre trigonometria e não dar um vácuo tão grande entre um encontro e outro. Essas atividades não teriam um controle por parte do pesquisador no sentido de estar acompanhando a sua resolução, mas no entanto teriam um peso sim, no sentido de propiciar ao aluno oportunidade

para desenvolver sua competência em situações que estariam seguindo a mesma idéia nossa de serem significativas. Assim, num trabalho futuro, gostaríamos de questionar a validade da tarefa. Uma eventual pesquisa poderia controlar isso, no sentido de trabalhar com um grupo tendo atividade para casa e outro não, e avaliar o desenvolvimento disso.

Quanto às dificuldades observadas relativas à representação simbólica, tanto na linguagem matemática como a natural, essa questão perpassa pelo trabalho desde o começo. Talvez a responsabilidade pela ocorrência desse fato se deva ao destaque dado ou à competência, ou ao conceito. Com a ênfase na competência, geralmente o professor inicia-se pela definição, seguida de exercícios, quando o aluno ainda não adquiriu o conceito. Daí a representação simbólica empregada pelo aluno possa revelar falhas na construção do conceito. Por outro lado, a ênfase no conceito pode fazer o professor relevar – em nome da construção do conhecimento - falhas de notação ou comunicação. Então o aluno não se apropria dessa linguagem matemática como um todo e pesquisas futuras poderiam se ater a esse fato.

Será que um número maior de atividades e mais tempo resolveriam esse problema ?

Outra questão é quanto à análise do desenvolvimento da seqüência de ensino, que não foi feita, pelos motivos alegados na seção anterior. Conforme dissemos, esses dados estão disponíveis e poderão ser discutidos e analisados *a posteriori* em futuros trabalhos. Entretanto, acreditamos que uma pesquisa pudesse ser realizada baseada somente nos dados qualitativos, pois julgamos interessante investigar com mais cuidado esse aspecto. Uma pesquisa também baseada na resolução de problemas mas que analisasse as perguntas e as colocações dos alunos dentro da sala de aula, pudessem levantar com maior precisão os passos que os alunos dão para adquirir esses conceitos. Para isso, talvez, fosse necessário um número menor de alunos, em horário extra-classe, em que se pudesse investigar melhor essas passagens.

#### **6.4. Nota Final**

Não tivemos a pretensão de extrapolar nossos resultados para além do universo da pesquisa, uma vez que nossa amostra foi pequena. Mas, obtivemos pistas significativas sobre o processo de ensino-aprendizagem do conteúdo. A mais valiosa delas foi a de que o processo de construção dos conceitos básicos da trigonometria, a exemplo da história, ganha força quando se inicia a partir da resolução de problemas concretos, advindos da realidade, dirigindo-se para os problemas formais, quando os conceitos ganham significados mais abstratos e abrangentes.

# **CAPÍTULO VI : REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS**



## BIBLIOGRAFIA

ALMOULOUD, Saddo Ag. *Caderno de Educação Matemática, volume III, Fundamentos da Didática da Matemática e Metodologia da Pesquisa*. São Paulo: PUC-SP, 1997.

BARSA, Enciclopédia. Volume 15, p. 210, 1991.

BIANCHINI & PACCOLA. *Matemática, volume 1, 2º grau, versão beta*. São Paulo: Moderna, 1995.

BIANCHINI, Edwaldo. *Matemática, 1º grau, 8ª série*. São Paulo: Moderna, 1991.

BIEMBENGUT, Maria Salett e HEIN, Nelson. *Modelagem matemática no ensino*. São Paulo: Contexto, 2000.

BIGODE, Antonio José Lopes. *Matemática Atual, 8ª série*. São Paulo: Atual, 1994.

BONGIOVANNI, VISSOTO & LAUREANO. *Matemática e Vida, volume 1, 2º grau*. São Paulo: Ática, 1993.

BOULOS, Paulo e WATANABE, Renate. *Matemática, 2º grau, volume 1*. São Paulo: Ed. Nacional, 1980.

BOYER, Carl Benjamin. *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais: Matemática*. Brasília: MEC/SEF, 1998.

- BRIGUENTI, M.J.L. *Ensino e aprendizagem da trigonometria: novas perspectivas da educação matemática*. Dissertação de mestrado, UNESP-Rio Claro, 1994.
- BROUSSEAU, G. *Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques*. RDM, vol. 7, nº2, pp. 33-116, Grenoble, 1986.  
\_\_\_\_\_ *Le contrat Didactique: le milieu*. RDM, vol. 9, nº 3, pp. 309-336, Grenoble, 1988.
- COSTA, Nielce Meneguelo Lobo da. *Funções seno e co-seno: uma seqüência de ensino a partir dos contextos do "mundo experimental" e do computador*. Dissertação de mestrado, PUC-SP, 1997.
- DANTE & GIOVANNI. *Matemática, 2º grau, volume 2*. São Paulo: FTD, sem data.
- EVES, Howard. *Introdução à História da Matemática*. Campinas: Ed. UNICAMP, 1995.
- FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. *Dicionário Aurélio Básico da Língua Portuguesa*. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1988.
- FRANCHI, Anna...et al. *Educação matemática: uma introdução*. São Paulo: EDUC, 1999, pp. 155 – 195.
- FREITAS, José Luiz Magalhães de...et al. *Educação matemática: uma introdução*. São Paulo: EDUC, 1999, pp. 65 – 87.
- GAZZETTA, Marineusa. *A modelagem como estratégia de aprendizagem da Matemática em cursos de aperfeiçoamento de professores*. Dissertação de mestrado, UNESP-Rio Claro, 1989.
- GIOVANNI & BONJORNO. *Matemática 1, 2º grau*. São Paulo: FTD, 1992.

HOGBEN, Lancelot. *Maravilhas da Matemática*. Porto Alegre: Ed. Globo, 1970.

IMENES & LELLIS. *Matemática, 1º grau, 8ª série*. São Paulo: Scipione, 1997.

\_\_\_\_\_. *Microdicionário de Matemática para o 1º grau*. São Paulo: Scipione, 1998.

KARRER, Monica. *Logaritmos: proposta de uma seqüência de ensino utilizando a calculadora*. Dissertação de mestrado, PUC-SP, 1999.

KARLSON, Paul. *A magia dos números*. Porto Alegre: Ed. Globo, 1961.

KENNEDY, Edward S. *História da Trigonometria*, da série Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula, volume 5, São Paulo: Atual, 1992.

LIMA, Elon Lages & outros. *A Matemática do Ensino Médio, vol. 1*. Coleção do Professor de Matemática – SBM, Rio de Janeiro: SBM, 1996.

LUNA, Sergio Vasconcelos de. *Planejamento de pesquisa: uma introdução*. São Paulo: EDUC, 1996.

MENDES, Iran Abreu. *O uso de tópicos históricos da trigonometria com perspectiva metodológica no ensino de 2º grau*. Dissertação de mestrado em desenvolvimento. Natal: UFRN – RN, 1998.

PITOMBEIRA, João Bosco de Carvalho, CARMO, Manfredo Perdigão do & outros. *Trigonometria e Números Complexos*. Coleção do Professor de Matemática – SBM, Rio de Janeiro: SBM, 1992, pp. 101 em diante, apêndice B.

SÃO PAULO (Estado), Secretaria da Educação, Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. *Proposta curricular para o ensino de Matemática: 2º grau*. São Paulo: SE/CENP, 1992.

- \_\_\_\_\_ *Proposta curricular para o ensino de Matemática: Ensino Fundamental*. São Paulo: SE/CENP, 1997.
- TROTA, IMENES & JAKUBOVIC. *Matemática Aplicada, volume 1, 2º grau*. São Paulo: Moderna, 1979.
- VERGNAUD, G. *Problem Solving and Concept Development in Learning of Mathematics*. E.A.R.L..I., Second Meeting, Tübingen: EARLI, September, 1987.
- \_\_\_\_\_ *La Théorie des Champs Conceptuels*. RDM 23, vol. 10, pp.133-170, 1990.
- \_\_\_\_\_ *Epistemology and Psychology in Mathematics Education*, em NESHER, P. e KILPATRIK, J. *Mathematics and Cognition*, Cambridge: Cambridge University Press, 1994, pp. 2-17.
- VYGOTSKY, Lev Semenovitch. *Pensamento e linguagem*. São Paulo: Martins Fontes, 1987.