Setsuko Takara Mabuchi

Transformações geométricas: a trajetória de um conteúdo ainda não incorporado às práticas escolares nem à formação de professores

Mestrado em Educação Matemática

PUC/São Paulo – 2000

Setsuko Takara Mabuchi

Transformações geométricas: a trajetória de um conteúdo ainda não incorporado às práticas escolares nem à formação de professores

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo como exigência parcial para obtenção do título de MESTRE em EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, sob orientação da Professora Doutora Célia Maria Carolino Pires.

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação por processos fotocopiadoras ou eletrônicos.

São Paulo, agosto de 2000

____

Resumo

Este trabalho analisa estudos e pesquisas sobre o ensino e aprendizagem das transformações geométricas no ensino fundamental e tem como finalidade contribuir para a reflexão de como este tema deve ser incorporado aos cursos de formação de professores de Matemática. Para isso elege como questão central, a identificação de que conhecimentos sobre o assunto, em diferentes âmbitos, devem fazer parte da formação desses professores. Um desses âmbitos é o próprio conhecimento matemático, fundamental para apoiar qualquer prática docente. O estudo mostra, porém, a importância de conhecimentos construídos na própria experiência de sala de aula. Apóia-se no estudo de caso de um grupo de professores de Matemática da rede pública, com licenciatura em Ciências e que complementavam sua formação em um curso na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

Abstract

This thesis analyses studies and researches about teaching and learning of geometric transformations. It has as objective to contribute to the reflection about how this issue must be incorporated to the courses of mathematics teachers formation. In order to accomplish that, it elects as the main question the identification of the acquaintance of the studied subject, in many different approaches, as part of the formation of these teachers. One of these lines is the mathematical knowledge itself, a corner stone in the teaching practice. However the study shows the importance of the knowledge in epistemological, didactic and curricular fields and specially the one which is built in the own classroom experience. It supports itself through a case study of a group of public mathematics teachers, graduated in Sciences and complementing their formation in a course ministered by Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

Agradecimentos

À professora-doutora Célia Maria Carolino Pires, pela orientação competente e pelo estímulo constante.

À coordenadora professora-doutora Sonia Barbosa Camargo Igliori, pelo incentivo e orientação no retorno aos estudos.

Ao professor-doutor Saddo Ag Almouloud, pelo apoio e incentivo constantes desde as primeiras disciplinas do programa. À professora-doutora Regina Maria Pavanello, pelas valiosas sugestões para o traballho.

À professora-doutora Ana Paula Jahn e a todos os professores do programa, que tornaram possível concluirmos nosso trabalho.

Aos professores Almerindo Marques Bastos, Martha Maria de Souza Dantas e Lucília Bechara Sanchez, pela importante contribuição advinda dos depoimentos.

Aos colegas, pela amizade e companheirismo, às bibliotecárias e funcionários, pela ajuda e compreensão. À colega Rosana Nogueira de Lima, pela construção das figuras no computador.

Às diretoras Vera Lucia de Felice e Elza Babá Akama e à coordenadora Sathiko Fujino Rey, da Escola Pioneiro, por possibilitar a participação de seus alunos neste trabalho.

Ao professor-doutor Pedro Adão Ruiz, pela competência e dedicação na revisão dos textos e digitação dos esquemas.

À amiga e professora-mestre Irma, pela amizade desde os tempos da graduação. Ao colega Eugenio pela amizade e companheirismo. A Daniel Nakamura, pelo valioso auxílio com as ferramentas de informática.

À minha filha, Heloisa, por ter sempre participado e apoiado em todos os momentos do trabalho.

Índice Geral

Apresentação..1

Capítulo 1: Transformações geométricas: aspectos históricos epistemológicos e matemáticos..5

1.1 Construção histórica de uma "Geometria das transformações".....................5

1.2 Programa Erlanger e as transformações geométricas 14

1.3 Análise epistemológica das transformações geométricas.............................18

1.4 Breve análise matemática das transformações geométricas.........................21

Capítulo 2: Investigações das hipóteses e conhecimentos prévios de estudantes sobre as transformações geométricas 33

2.1 Pesquisas anteriores à década de 80..33

2.2 Pesquisas realizadas na década de 80 36

2.3 Síntese preliminar das pesquisas analisadas...58

2.4 Analisando aspectos das referidas pesquisas numa pequena investigação feita com alunos brasileiros 59

Capítulo .3: Presença das transformações geométricas nos currículos escolares 65

3.1 O movimento Matemática Moderna..66

3.2 Análise de propostas curriculares oficiais do Brasil 69

3.2.1 Guias curriculares para o ensino do 1° grau: Matemática - São Paulo - 1975 69

3.2.2 Proposta curricular para o ensino da Matemática: ensino fundamental -São Paulo - 1986 74

3.2.3 Proposta Curricular de Matemática para o Cefam e Habilitação Específica para o Magistério, Secretaria da Educação de São Paulo – Cenp - 1990 76

3.2.4 Parâmetros Curriculares Nacionais – 1997 e 1998..............................77

3.3 Análise de documentos oficiais e de instituições em outros países..............85

3.3.1 Padrões curriculares nos Estados Unidos..85

3.3.2 Proposta da Espanha 88

3.3.3 Proposta da França 95

3.4 Análise de livros didáticos.. 99

Capítulo 4: Estudo das transformações geométricas em cursos de formação de professores 110

4.1 Caracterização do curso 110

4.2 Perfil do grupo 112

4.3 Conhecimentos prévios dos professores..113

4.4 Fundamentação didática do trabalho proposto...121

4. 4. 1 As pesquisas dos Van Hiele...121

4.4.2 A teoria das situações didáticas segundo Guy Brousseau 125

4.4.3 A dialética ferramenta-objeto segundo Régine Douady 134

4.5 Descrição das atividades e do desempenho dos professores 137

4.6 O trabalho dos professores em formação com seus alunos. 186

4.7 Análise da avaliação final 189

Conclusões...192

Bibliografia..197

Anexos

Apresentação

O presente estudo "Transformações geométricas: a trajetória de um conteúdo ainda não incorporado às práticas escolares nem à formação de professores" insere-se na linha de pesquisa "A Matemática na Estrutura Curricular e Formação de Professores" do Mestrado em Educação Matemática do Centro de Ciências Exatas e Tecnologia da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

Seu objetivo é contribuir para uma reflexão sobre o processo ensino-aprendizagem de um assunto que há bom tempo faz parte de propostas curriculares no Brasil e em outros países, mas que, no entanto, ainda é pouco trabalhado em sala de aula.

Em nossa experiência docente, desde a década de 70, temos observado a ausência da geometria nas escolas, com reflexos hoje nos saberes dos professores em atuação. Constatamos que os conteúdos de geometria que não foram aprendidos pelos professores, também não são ensinados, dando origem a um círculo vicioso que acaba afetando gerações de alunos que não aprendem geometria.

Os que lecionam alguma geometria acabam adotando uma abordagem mais tradicional, com nomenclaturas, classificações, propriedades em figuras estáticas em posições estandardizadas. Há algumas tentativas de inovações, com o uso de tangrans, origamis, geoplanos e outros materiais, mas o trabalho com transformações geométricas, que desde as propostas curriculares da década de 70, vem sendo indicado como um interessante e rico eixo orientador de estudos em geometria, é pouquíssimo conhecido e, em conseqüência, raramente utilizado.

Se os professores, nas suas aulas de geometria, não trabalham com transformações geométricas porque não a conhecem, parece fundamental que o assunto faça parte dos conteúdos a ser estudados nos cursos de licenciatura.

Tendo tido oportunidade de vivenciar a experiência de dar aula da disciplina Geometria das Transformações num curso para professores estaduais, com licenciatura em Ciências, que complementavam sua formação matemática, propusemo-nos a documentá-la com o objetivo de contribuir para que o assunto possa ser incorporado à Formação de Professores e, conseqüentemente, passe a fazer parte das aulas de geometria no ensino fundamental e médio.

A partir dessa decisão, colocamos como questões a serem investigadas:

- que conhecimento sobre transformações geométricas deveriam fazer parte de um curso de formação de um professor de Matemática?
- que abordagens metodológicas seriam interessantes para a construção desses conhecimentos, em cursos de licenciatura?

Desde o início, prevíamos que, dentre esses conhecimentos, seria fundamental que os professores em formação possuíssem um domínio razoável dos aspectos matemáticos do assunto, tanto na dimensão geométrica, como na dimensão algébrica; isso lhes permitiria perceber que o tema é riquíssimo para estabelecer relações entre esses campos da Matemática, o que é tão importante para um professor dessa disciplina. Mas, além dos aspectos matemáticos, que outros seriam relevantes?

Sabemos que diferentes trabalhos na área da educação matemática ressaltam a importância de que o professor se dedique a estudar aspectos históricos e epistemológicos dos conceitos matemáticos, na medida em que permitem uma compreensão mais ampla de como esses conceitos surgiram e evoluíram na história, permitindo até detectar possíveis obstáculos no processo de construção dos conceitos pelos alunos.

Outro aspecto importantíssimo é a apropriação, pelo professor, dos processos e dos resultados de estudos e pesquisas ligados à construção de uma dada noção pelos alunos, que ajudam a orientar as escolhas didáticas do professor para o trabalho em sala de aula; No caso das transformações geométricas, encontramos vários resultados importantes, fruto de investigações realizadas em diferentes países e que podem servir de referência para um melhor conhecimento prévio dos alunos, a influência de determinadas variáveis didáticas no desempenho dos alunos, procedimentos mais usuais etc.

Nossa hipótese é que tais informações podem dar aos futuros professores melhores condições de analisar, criticar e por em prática as propostas contidas nas orientações curriculares de Secretarias de Educação e do Ministério da Educação e também de olhar, de modo mais crítico, o que os livros didáticos apresentam como propostas. Assim, neste trabalho buscamos focalizar esses diferentes aspectos.

No entanto, embora considerando todos eles aspectos muito importantes num curso de formação de professores na experiência que serviu de base para este estudo, tivemos que fazer opções em função do tempo disponível (cerca de 30 horas aula de curso) e dos primeiros diagnósticos feitos com o grupo, que revelaram total desconhecimento do assunto.

Nossa opção metodológica recaiu, então, num trabalho em que o professor se apropriasse dos principais conceitos e procedimentos relativos a simetrias e, ao mesmo tempo, pudesse discutir situações didáticas que orientassem a atuação em sala de aula.

Ao descrever o desenvolvimento das atividades em sala de aula, nossa intenção é registrar as análises didáticas realizadas durante o trabalho e as análises relativas a desempenhos e resultados obtidos.

No primeiro capítulo, como resultado de pesquisa bibliográfica, apresentamos uma análise histórica e epistemológica das transformações geométricas e, a seguir, a análise matemática, destacando as dimensões geométrica e algébrica das transformações.

No segundo capítulo, por meio de pesquisa bibliográfica, analisamos investigações e pesquisas sobre o assunto que indicam as concepções dos estudantes e obstáculos à apreensão dos principais conceitos.

No terceiro capítulo, por meio de pesquisa bibliográfica, fazemos uma análise de como o tema é proposto em currículos oficiais das ultimas três décadas e que nos permitiram avaliar as mudanças no enfoque dado a seu ensino. A análise dos livros didáticos mais recentes também indicou algumas perspectivas de abordagem do assunto.

No quarto capítulo, por meio de um estudo de caso, apresentamos o trabalho realizado com professores do curso de complementação de sua formação inicial, citado anteriormente, para que as transformações geométricas, incorporadas à formação de professores, também passem a fazer parte das práticas escolares desses professores. Primeiramente, será feita uma apresentação da concepção geral desse curso de formação e uma caracterização dos professores em formação. Um teste diagnóstico foi realizado para avaliarmos os conhecimentos prévios dos professores sobre o assunto e, também, para coletar informações sobre a correlação entre o conteúdo estudado em alguma etapa da vida escolar e a prática profissional de cada professor.

Capítulo 1

Transformações geométricas: aspectos históricos, epistemológicos e matemáticos

Introdução

Descreveremos aqui sucintamente alguns aspectos da construção histórica da Geometria das Transformações, destacando o Programa Erlanger[1] e o desenvolvimento epistemológico das transformações geométricas. A seguir, apresentamos uma breve análise matemática das transformações geométricas, destacando sua dimensão geométrica e algébrica.

1.1 Construção histórica de uma "Geometria das transformações"

Simples observações de como reconhecer configurações, comparar formas e tamanhos de objetos devem ter dado origem às primeiras noções geométricas do homem primitivo. Essa "geometria", que serviu para que os homens fizessem desenhos e objetos de arte primitiva, foi denominada por Eves "geometria subconsciente" (1992, p. 1).

Partindo de considerações sobre objetos concretos e particulares, o homem passou possivelmente a conceber propriedades e relações mais gerais que permitiam resolver problemas em conjuntos mais amplos e com procedimentos mais gerais. Assim, a geometria passou a ser, ainda segundo Eves (idem, p. 2), uma "geometria científica", em que noções primitivas foram conscientemente organizadas num conjunto de regras gerais.

Textos sobre a história da Matemática relatam que os babilônios e os egípcios se interessaram muito pelas questões de medidas de comprimentos e

[1] Programa Erlanger, anunciado na conferência de Felix Klein, em 1872, realizada na Universidade de Erlangern, Alemanha.

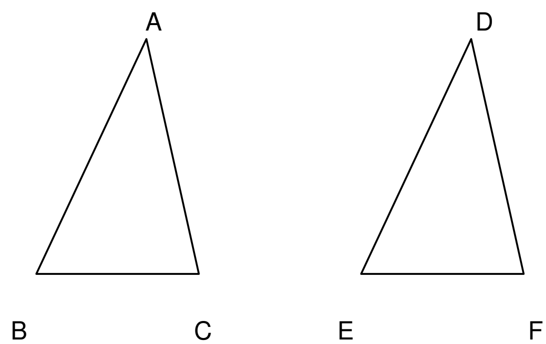
de áreas sem evidenciar, porém, nenhuma preocupação pela demonstração das fórmulas que utilizavam. Para os egípcios, por exemplo, as fórmulas eram destinadas a fornecer aos agrimensores e aos fiscais de obras modos apropriados de cálculo para executarem seu trabalho. Tratava-se, portanto, de uma geometria essencialmente prática.

Foram os gregos que deram à geometria o caráter de ciência do espaço, insistindo que os conhecimentos geométricos, herdados de civilizações anteriores, deveriam ser apresentados sobre uma base racional e não por procedimentos empíricos. Desenvolveram a noção de discurso lógico como um conjunto hierarquizado de proposições obtidas por raciocínio dedutivo a partir de afirmações iniciais, chamadas axiomas ou postulados. A geometria dedutiva começou a surgir com as proposições apresentadas em cadeias, em que umas eram derivadas de outras anteriores

A transformação operada pela geometria grega provavelmente começou com o trabalho de **Thales de Mileto** (624 a.C.-548 a.C.). O primeiro procedimento lógico surgiu com os resultados geométricos de Thales, que, apesar de elementares, representaram o primeiro pensamento dedutivo em Matemática. Outros geômetras gregos foram: **Pitágoras** (560 a.C.-480 a.C.), **Euclides** (aproximadamente 300 a.C.), **Arquimedes** (287 a.C.-212 a.C.) e **Apolônio** (aproximadamente 225 a.C.).

Euclides escreveu tratados sobre assuntos variados, mas seu nome está fortemente ligado a sua obra mais importante, *Os Elementos.* Ao contrário do que muitos supõem, os treze livros que compõem *Os Elementos* não se limitam a abordar somente a geometria, mas também tratam da teoria dos números e da álgebra. No livro I, encontram-se definições, postulados e axiomas preliminares, bem como proposições sobre congruência de triângulos e sobre quadriláteros, propriedades de retas paralelas (que levam à proposição sobre a soma dos ângulos de um triângulo ser igual a dois ângulos retos), terminando com a demonstração do teorema de Pitágoras e sua recíproca. Na Proposição IV, que estabelece a congruência de dois triângulos, foi usada uma prática experimental de deslocamento e coincidência de figuras. O resultado obtido passou a ser considerado um teorema, que serviria para provar novas proposições. No livro de Commandino, *Euclides — Elementos de Geometria,* encontra-se a Proposição IV como teorema, com a demonstração que passamos a descrever:

Proposição IV. Teorema

> Se dois triângulos tiverem dois lados iguais a dois lados, cada um a cada um, e os ângulos, compreendidos por estes lados, forem também iguais, as bases e os triângulos, e os mais ângulos, que são opostos a lados iguais, serão também iguais.
>
> 
>
>
> Sejam os triângulos ABC e DEF, cujos lados AB, AC, DE, DF são iguais, cada um a cada um, isto é, AB = DE, e AC = DF; e seja o ângulo BAC = EDF. Digo que a base BC é igual à base EF; e que o triângulo ABC é igual ao triângulo DEF; e que os outros ângulos do primeiro triângulo são iguais aos outros do segundo, cada um a cada um, segundo ficam opostos a lados iguais; isto é, o ângulo ABC = DEF, e ACB = DFE.
>
> Considera-se posto o triângulo ABC sobre o triângulo DEF, de sorte que o ponto A caia sobre o ponto D, e a reta AB sobre a reta DE. O ponto B cairá sobre o ponto E, por ser AB = DE. Ajustando-se pois AB sobre DE, também a reta AC se ajustará sobre a reta DF sendo o ângulo BAC = EDF. Logo, sendo AC = DF, o ponto C cairá sobre o ponto F. Mas temos visto que o ponto B cai sobre E. Logo a base BC se ajustará sobre a base EF. Porque se não se ajustarem, caindo B em E, e C em F, seguir-se-á, que duas linhas retas compreendem um espaço, o que não pode ser (Axioma 10).[2] Logo a base BC deve se ajustar sobre a base EF, e por conseqüência são iguais. Logo todo o triângulo ABC se ajusta sobre todo o triângulo DEF, e assim são iguais; e os outros ângulos do primeiro triângulo também se ajustam sobre os outros do segundo e são iguais, isto é, o ângulo ABC = DEF e ACB = DFE (Commandino, 1945, pp. 23-24).

[2] Axioma 10: duas linhas retas não compreendem espaço.

A proposição IV é o caso LAL (lado-ângulo-lado) de congruência de triângulos e, em sua "demonstração", Euclides aplica o triângulo ABC sobre o triângulo DEF, porém sem um axioma que justifique essa superposição. Utiliza implicitamente o fato de que o espaço não exerce ação deformante sobre os corpos quando eles são "transportados" de um lugar para o outro.

Em Jahn (1998, p. 27) encontramos que, "no que concerne às transformações geométricas, a cultura contemporânea nos induz a ler a Proposição IV de *Os Elementos* de Euclides como a descrição do efeito de um deslocamento de um triângulo, levando-o a coincidir com outro, o que nos leva a identificar o segundo triângulo como imagem do primeiro pelo deslocamento". Entretanto, ainda segundo Jahn, esses deslocamentos são apenas "transportes" de figuras e não transformações aplicadas a pontos do plano.

O procedimento usado por Euclides foi questionado posteriormente pelos matemáticos. Além disso, algumas definições sofreram objeções, justamente por Euclides ter tentado definir todos os conceitos sem admitir conceitos primitivos, o que é impossível de fazer. Nesse aspecto, a concepção grega difere da concepção moderna de método axiomático, pois, "para os gregos, a geometria não era exatamente um estudo abstrato, mas uma tentativa de análise lógica do espaço físico idealizado" (Eves, 1995, p. 656).

É provável que a obra *Os Elementos* seja uma coletânea bem organizada de trabalhos escritos por matemáticos anteriores, mas o grande mérito de Euclides consistiu na seleção e apresentação lógica das proposições a partir de suposições iniciais.

> Tão grande foi a impressão causada pelo aspecto formal de *Os Elementos* de Euclides nas gerações seguintes que a obra se tornou um paradigma de demonstração matemática rigorosa. A despeito de um considerável abandono nos séculos XVII e XVIII, o método postulacional inspirado em Euclides penetrou quase todos os campos da Matemática a ponto de alguns matemáticos defenderem a tese de que não só o raciocínio matemático é postulacional, mas que também, no sentido inverso, raciocínio postulacional é raciocínio matemático. Uma conseqüência relativamente moderna foi a criação de um campo de estudos

chamado *axiomática*, dedicado ao exame das propriedades gerais dos conjuntos de postulados e do raciocínio postulacional (Eves, p.179).

A obra de Euclides, sem dúvida, foi a contribuição mais importante da Antiguidade para a metodologia das ciências e influenciou durante vários séculos a Matemática. Até o século XVIII, a geometria foi a euclidiana, dita clássica. Somente no século XIX ocorreu uma mudança no significado atribuído à geometria.

No período do Renascimento, artistas e arquitetos se interessaram pela representação plana de figuras espaciais a partir do ponto de vista constituído pelo próprio olho. Desenvolveram o estudo da projeção central, ainda chamada projeção cônica, e, em particular, a noção de ponto de fuga. No século XV surgiram alguns elementos de perspectiva. A relação entre a arte e a Matemática também era forte na obra de Leonardo da Vinci (1452-1519), e a mesma combinação de interesses artísticos e matemáticos se encontra em Albrecht Dürer (1471-1528), na Alemanha. As noções renascentistas sobre perspectiva matemática seriam expandidas mais tarde para um novo ramo da geometria. A preocupação dos pintores e artistas em representar objetos do espaço fez surgir a idéia de projeções centrais e paralelas e, conseqüentemente, aparecerem as noções de geometria projetiva e de geometria descritiva, importantes na gênese do conceito de transformações.

Depois dos gregos, a grande mudança na geometria verificou-se com **René Descartes** (1596-1650) e **Pierre de Fermat** (1601-1665), que conceberam as idéias da geometria analítica.

Descartes e Fermat substituíram os pontos do plano por pares de números e as curvas por equações, e, assim, o estudo das propriedades das curvas passa a ser realizado com o das propriedades algébricas das equações correspondentes. Na época de Descartes e Fermat, o maior desenvolvimento da Matemática ocorreu na geometria analítica e na análise infinitesimal.

Fermat havia se interessado pela obra *As Cônicas,* de Apolônio, mas acabou se dedicando mais aos métodos analíticos. Apolônio considerava as cônicas como seções planas de um cone de base circular, mas, para ele e os demais geômetras gregos, a elipse, a parábola e a hipérbole eram curvas bem distintas, sendo estudadas separadamente. O estudo de *As Cônicas* foi retomado por **Girard Desargues** (1591-1661), arquiteto e engenheiro de Lyons que, influenciado pelas noções de perspectiva utilizadas pelos artistas da Renascença, trabalhou as cônicas com métodos projetivos. Segundo Boyer, "a geometria projetiva de Desargues tinha uma enorme vantagem, em generalidade, sobre a geometria métrica de Apolônio e Fermat, pois muitos casos especiais de um teorema se juntam num enunciado geral" (Boyer, 1974, p. 263).

A idéia de Desargues foi transportar para a geometria os métodos da perspectiva, da seguinte forma:

> Consideremos um plano α, um círculo γ deste plano e um ponto S não pertencente a α. As retas passando por S e se apoiando sobre γ geram um cone A. Um segundo plano α', não passando por S, corta o cone A segundo uma cônica γ'. Esta cônica γ' é a projeção do círculo γ sobre o plano α', à partir do ponto S. Toda propriedade do círculo γ poderá ser transportada à cônica γ', qualquer que seja a natureza desta (Godeaux,1947, p. 63).

Segundo Boyer (1974), Desargues desenvolveu essa idéia no livro *Brouillon Project d'une Atteinte aux Événements des Rencontres d'un Cone avec un Plan*[3], em 1639. Obtendo, por projeções de um círculo num plano, a elipse, a hipérbole e a parábola, ele introduziu a noção de ponto no infinito. É o primeiro a ter consciência dessa noção e a considerar um conjunto de retas paralelas como caso particular de retas concorrentes, sendo o ponto de interseção o ponto no infinito. Apesar de importantes, as idéias de Desargues não despertaram muito interesse na época. Apenas **Blaise Pascal** (1623-1662) e **Philippe de Lahire** (1640-1718) continuaram os trabalhos sobre o assunto.

Desargues e Pascal recorrem a um método de transformações que a pontos e retas de uma circunferência faz corresponder pontos e retas de uma

[3] Esboço tosco de uma tentativa de tratar o resultado de um encontro entre um cone e um plano. (Boyer, p. 263).

cônica arbitrária. Segundo Jahn (1998), aqui, as transformações geométricas são usadas como ferramentas de demonstrações, possibilitando transferir propriedades de uma figura para outras mais complexas, com o objetivo de destacar as propriedades geométricas invariantes por transformações.

O ressurgimento da geometria no espaço deveu-se aos trabalhos revolucionários de **Gaspard Monge** (1746-1818), professor na École Polytechnique. Monge publicou suas aulas na obra *Géometrie Descriptive*. A idéia da nova geometria descritiva, ou método da dupla projeção, consistia em representar no plano uma figura do espaço, utilizando para isso dois planos perpendiculares entre si, um vertical e outro horizontal, projetando ortogonalmente a figura nesses planos e rebatendo um deles sobre o outro. Obtinha-se, assim, duas figuras num plano, projeções verticais e horizontais da figura dada, nas quais era possível efetuar construções geométricas de modo mais simples que na figura do espaço.

> Se, para a criação da geometria descritiva, Monge contribuiu consideravelmente para as ciências aplicadas, retomando o que antes exigia longos cálculos e eram mais ou menos empíricos, não menos destacada foi sua contribuição para a geometria pura. Seus métodos foram, de fato, utilizados como instrumentos de pesquisas das propriedades das figuras; tiveram influência indubitável sobre a criação da geometria projetiva, como Poncelet explicitamente reconhece.
>
> A geometria descritiva levou não somente a estudar as propriedades geométricas do espaço e, particularmente as das superfícies de 2ª ordem ou quádricas, mas também permitiu obter novas propriedades da geometria plana (Godeaux, 1947, p.68).

Os geômetras, depois dos métodos de Desargues, Pascal e Monge, passam a considerar duas categorias de propriedades geométricas: aquelas que dizem respeito à distâncias e medidas dos ângulos e as propriedades descritivas ou de posição, nas quais importa a posição relativa dos elementos geométricos.

Outra profunda revolução no pensamento matemático ocorreu com **Jean-Victor Poncelet** (1788-1867) e **Michel Chasles** (1793-1880). Na segunda metade do século XIX, as transformações de tipos variados eram estudadas com entusiasmo, destacando-se entre elas o grupo que forma o que se chama hoje geometria projetiva. Anunciada na obra de Pascal e Desargues, só no fim do século XIX a geometria projetiva foi sistematicamente desenvolvida, principalmente por Poncelet. Sua idéia central estava no uso de duas operações: a projeção e a seção.

Poncelet publicou, em 1822, o célebre *Tratado das Propriedades Projetivas das Figuras* e, na introdução da obra, assinala como a geometria analítica superou a geometria até então conhecida:

> ... enquanto a geometria analítica oferece, pelo seu próprio caminho, meios gerais e uniformes para proceder à solução das questões que se colocam à busca das propriedades das figuras; enquanto ela chega a resultados de que a generalidade é, por assim dizer, sem limites, a outra procede ao acaso; a sua marcha depende, de fato, da sagacidade daquele que a utiliza e os seus resultados são, quase sempre reduzidos ao estado particular da figura que se considera. Pelos esforços sucessivos dos geômetras, as verdades particulares multiplicaram-se incessantemente, mas raramente aconteceu que o método e a teoria geral tivessem ganho (apud Piaget & Garcia, 1987, pp. 93-94).

Poncelet tornou-se um firme defensor da geometria pura ou sintética e, constatando a vantagem que a generalidade da geometria analítica proporcionava, procurou tornar os enunciados geométricos o mais geral possíveis. Estudou as propriedades das figuras que são invariantes por uma projeção central, enunciando o que chamou de “princípio de continuidade” ou o “princípio da permanência das relações matemáticas”, descrito da seguinte forma:

> As propriedades métricas descobertas para uma figura primitiva permanecem aplicáveis, sem modificações além de mudança de sinal, a todas as figura correlatas que podem ser consideradas como provindo da primeira (apud Boyer, p. 390).

Chasles[4] segue um caminho semelhante ao de Poncelet e chega às mesmas conclusões.

> ... refletindo sobre os processos da álgebra e procurando a causa das imensas vantagens que ela traz para a geometria, não será evidente que ela deve uma parte dessas vantagens à facilidade das *transformações* que provocamos nas expressões que aí anteriormente introduzimos? Transformações cujo segredo e mecanismo constituem a verdadeira ciência e o objeto constante das investigações do analista. Não seria natural, paralelamente, introduzir na geometria pura transformações análogas que atingissem diretamente as figuras propostas e as suas propriedades (apud Piaget e Garcia, pp. 96-97).

Para Piaget e Garcia:

> Poncelet e Chasles incorporaram os sistemas de transformações como método fundamental da geometria e tentaram, assim, dar a esta ciência, independentemente da álgebra, a mesma generalidade, a mesma leveza, a mesma fecundidade que a geometria analítica tinha demonstrado no curso do seu desenvolvimento no século XVIII (p. 97).

Com Poncelet e Chasles, a geometria pura ou sintética teve um glorioso renascimento, em grande parte por inspiração de Monge. A geometria projetiva foi muito importante na evolução da concepção da geometria, sendo a responsável pelo movimento das idéias que, durante o século XIX, confrontaram as diferentes geometrias e deram à noção de transformação geométrica papel preponderante.

Na Inglaterra, **Arthur Cayley** (1821-1895) interessou-se pelas formas algébricas e introduziu a teoria dos invariantes algébricos, contrapartida algébrica da geometria projetiva de Poncelet.

No século XIX, com as geometrias não-euclidianas de **Lobachevsky** (1793-1856)**, Bolyai** (1802-1860) e **Riemann** (1826-1866), os matemáticos passaram a aceitar o fato de que existia mais de um espaço e, portanto, mais de

[4] Em: Aperçu Historique sur L'origine et le Développement des Méthodes en Géometrie, 1875.

uma geometria. Nesse mesmo século surge um dos conceitos mais importantes, considerado o elemento unificador na matemática: a noção de grupo. Não houve uma pessoa responsável pela idéia de grupo, mas quem deu o nome a esse conceito foi **Evariste Galois** (1811-1832).

A idéia de transformação introduzida até então tinha origem intuitiva. Para cada caso particular aplicava-se um tipo de transformação, faltando meios para identificar e exprimir a estrutura do conjunto dessas transformações. A noção de grupo das transformações e os invariantes correspondentes permitiu fazer distinções entre os diferentes tipos de geometria, como foi desenvolvido por Klein no seu Programa Erlanger, apresentado no próximo item.

1.2 O Programa Erlanger e as transformações geométricas

Felix Klein (1849-1925), matemático alemão, impressionado com as possibilidades unificadoras do conceito de grupo, dedicou-se a desenvolver, aplicar e popularizar a noção. Numa aula inaugural em 1872, quando se tornou professor na Universidade de Erlangen, Klein mostrou como o conceito de grupo podia ser aplicado para caracterizar as diferentes geometrias elaboradas até o século XIX na tal conferência que ficou conhecida como Programa Erlanger. Além disso, desenvolveu importantes trabalhos tais como, investigações sobre geometrias não-euclidianas — consideradas casos particulares da geometria projetiva —; reconhecimento de duas classes de geometrias elíticas; e contribuições no campo da topologia.

Segundo Jean-Paul Collette (1985), o Programa Erlanger contém idéias provindas de várias fontes. O desenvolvimento da geometria projetiva no século XIX começou com várias investigações de Poncelet, com trabalhos sobre a conservação da razão anarmônica numa transformação projetiva[5], os pontos imaginários e o princípio da continuidade. Com Chasles, surgiram duas idéias básicas: a distinção entre as

[5] Dados 4 pontos colineares A,B,C e D, chama-se razão anarmônica à razão $\frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD}$.
Indica-se por (ABCD).
Teorema: Se 4 semi-retas de mesma origem são cortadas por duas transversais nos pontos A,B,C,D e A’,B’,C’,D’, então as razões anarmônicas (ABCD) e (A’B’C’D’)) são iguais, isto é, a razão anarmônica de 4 pontos colineares é invariante por uma projeção.

propriedades métricas e projetivas e o papel das transformações. A Cayley coube o mérito de "dar uma definição projetiva explícita e completa da distância entre dois pontos e, a partir dela, suas propriedades métricas, considerando que a geometria métrica aparece como uma parte da geometria projetiva" (Collette, p. 487).

Collette considera ainda que o aparecimento das geometrias não-euclidianas constitui etapa importante na gênese do Programa Erlanger. Julga ser Klein quem destacou a natureza projetiva das geometrias não-euclidianas, estabelecendo que as três geometrias, a euclidiana, a hiperbólica de Gauss, Bolyai e Lobachevsky e a de Riemann, eram casos particulares da geometria projetiva. Acrescenta que Klein demonstrou que a geometria projetiva é independente da teoria das paralelas.

Segundo Piaget e Garcia (1987), as transformações utilizadas até então tinham origem intuitiva, e para cada caso particular era aplicado um tipo de transformação, carecendo-se de meios para identificar e exprimir a estrutura do conjunto delas, o que é feito com a teoria dos grupos. O grande mérito de Klein foi ter concebido a relação entre uma geometria e seu grupo, tendo destacado o papel do grupo e os diversos espaços onde atua.

De acordo com Felix Klein:

> Há transformações do espaço que não alteram em nada as propriedades geométricas das figuras. Em contrapartida, estas propriedades são, com efeito, independentes da situação ocupada no espaço pela figura considerada, da sua grandeza absoluta, e finalmente também do sentido em que estão dispostas as suas partes. Os deslocamentos do espaço, as suas transformações por semelhança e por simetria não alteram, por isso, as propriedades das figuras, ou não alteram mais do que as transformações compostas pelas precedentes. Designaremos por *grupo principal* de transformações do espaço o conjunto de todas estas transformações; *as propriedades geométricas não são alteradas pelas transformações do grupo principal. A recíproca é igualmente verdadeira: as propriedades geométricas são caracterizadas pela sua invariância relativamente às transformações do grupo principal.* Com efeito, se se considerar um instante o espaço como não podendo deslocar-se, etc., como uma multiplicidade fixa, cada figura possui uma individualidade própria; propriedades que ela possui como indivíduo, apenas aquelas que as

transformações do grupo principal não alteram, são propriamente geométricas (apud Piaget & Garcia, p. 106).

Klein chega assim a uma profunda reformulação da geometria:

> Como generalização da geometria, coloca-se assim, a seguinte questão geral: considerando um multiplicidade e um grupo de transformações desta multiplicidade, estudar os seres que, sob o ponto de vista das propriedades, não são alterados pelas transformações do grupo (apud Piaget & Garcia, p. 106).

Junto com o norueguês **Sophus Lie** (1842-1899), Klein se tornou responsável pela concepção moderna da geometria. Segundo ambos, para definir uma geometria deve-se considerar:

- um conjunto S de elementos quaisquer chamados “pontos”;
- um conjunto de transformações aplicadas sobre esses pontos formando um grupo G com a operação de composição.

A geometria num espaço S, de grupo principal G, é o conjunto de propriedades de S invariantes para as transformações de G.

Por exemplo, para definir a geometria métrica plana, deve-se considerar:

- um conjunto Π (plano euclidiano) de pontos;
- o conjunto das isometrias[6] que formam um grupo G relativamente à operação de composição de transformações.

A geometria métrica em Π, de grupo principal G (isometrias), é o conjunto de propriedades de Π (congruências) invariantes para as transformações de G.

Euclides havia estabelecido a igualdade de figuras por superposição, o que significa que as figuras permanecem invariantes quando deslocadas no

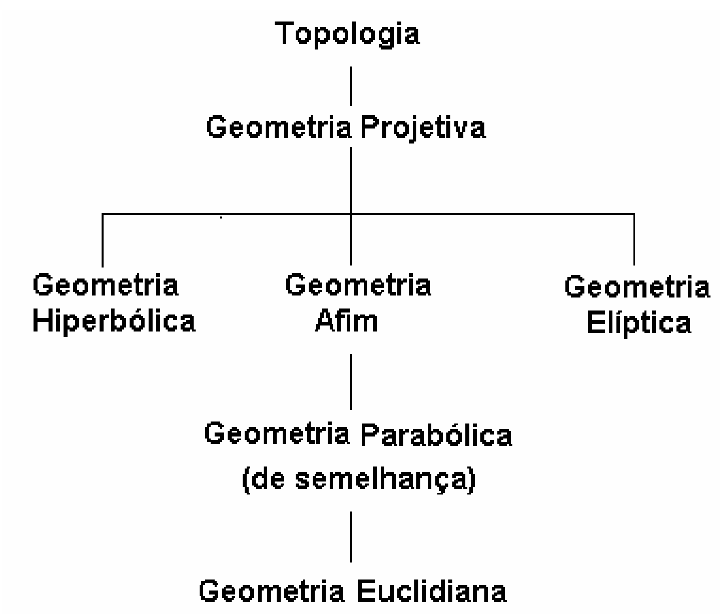
[6] Isometria é a transformação geométrica que conserva a distância entre pontos.

plano. Isso equivale a considerar as transformações chamadas rígidas, obtidas a partir de translações, rotações, simetrias e de suas composições, como constituindo um grupo de transformações. Klein considerou as homotetias e semelhanças como transformações mais gerais que as isometrias, e, portanto, o grupo principal da geometria euclidiana não é o das isometrias; este é um subgrupo do grupo das similitudes. As homotetias e as semelhanças constituem o grupo principal da geometria euclidiana.

De acordo com Klein, diz-se que a geometria euclidiana é mais ampla que a métrica, ou que a geometria métrica é uma subgeometria da euclidiana.

A geometria projetiva é aquela cujo grupo deixa invariantes, entre outras propriedades, a razão anarmônica. Num segundo nível encontram-se a geometria afim e as geometrias não-euclidianas. Em seguida, as subdivisões da geometria afim e a geometria métrica parabólica, na qual a medida dos ângulos é um invariante e, por fim, a geometria euclidiana, com o grupo dos deslocamentos.

Precedendo todas, encontra-se a topologia que é a geometria dos invariantes do grupo das transformações pontuais contínuas. O seguinte esquema (in Gutiérrez & Jaime, 1996) mostra as relações entre algumas geometrias mais conhecidas.



O Programa Erlanger induz os matemáticos a um grande interesse pelos diferentes conjuntos de transformações, particularmente pelo das isometrias, por ser próprio da geometria euclidiana. Também os psicólogos e didatas dos anos 60 e 70 se fixaram na obra de Klein, e iniciaram investigações sobre a compreensão dos conceitos pelos estudantes. Essa linha de investigação continua ativa até os dias de hoje, sofrendo, porém, variações tanto nos objetivos quanto na metodologia, conforme os pontos de vista predominantes em cada época.

1.3 Análise epistemológica das transformações geométricas

Piaget e Garcia, num estudo epistemológico das transformações geométricas, investigaram porque idéias esboçadas num determinado período não se desenvolveram, permanecendo em estado latente durante séculos. Eles destacaram que, embora as primeiras idéias de transformação sejam encontradas entre os gregos, foram necessários mais de 2.000 anos para que fossem incorporadas à geometria. A suposição desses autores é a de que foi preciso que outros métodos ou conceitos se desenvolvessem para que tais idéias pudessem ser aprofundadas. Sublinham que "a noção de transformação só aparece claramente com a álgebra e a análise, e que estas disciplinas apenas se desenvolveram a partir do século XVI e XVII" (Piaget & Garcia, p. 104).

Ambos consideram que a origem da noção de transformação geométrica se encontra, indiscutivelmente, na geometria analítica. Mesmo que seja considerada uma aplicação da álgebra à geometria, ela está intimamente ligada ao cálculo infinitesimal, que precisará de todo o século XVIII para desenvolver-se. Foi necessário esperar os avanços da álgebra, do cálculo e da própria geometria para que se pudesse progredir nos conceitos iniciados por Monge e sistematizados por Poncelet e Chasles.

Piaget e Garcia relatam que só no século XVIII é que **Euler** (1707-1783) mostra como os movimentos e as simetrias das figuras estão ligados ao problema da mudança dos eixos de coordenadas, e como a simetria pode ser traduzida analiticamente. Euler demonstra que um deslocamento plano é uma rotação, ou uma translação ou uma translação seguida de uma reflexão. Assim, a interação dos três campos vai proporcionar o grande avanço da Matemática do século XIX.

> Foi necessário um longo período de trabalho incessante em álgebra e cálculo infinitesimal, bem como em “tradução algébrica” dos resultados, para chegar a conceituar a própria idéia de transformação geométrica *sem passar pela álgebra ou pela análise.* Foi necessário “trabalhar” intensamente mediante “segmentos negativos” e com “soluções imaginárias”, apoiando-se continuamente na álgebra (Piaget &Garcia, p. 108).

Acrescentam, ainda, que em três momentos a aplicação da álgebra à geometria trouxe concepções fundamentais para a última:

1) quando a álgebra foi o meio usado para “traduzir” uma relação entre elementos de uma figura e um problema geométrico — é o que ocorre quando, da escolha de uma unidade de medida, se estabelece a correspondência entre um segmento e um número. São relações internas entre elementos de uma dada figura, e foi o que Apolônio usou para obter a propriedade fundamental das seções cônicas;
2) quando a noção de função algébrica e das transformações de funções são aplicadas. Foi o que ocorreu na fase da geometria projetiva;
3) o momento em que foi aplicado o conceito de estrutura algébrica e as relações entre os elementos de uma dada estrutura.

Piaget e Garcia aplicam à história da ciência os conceitos resultantes de investigações na psicologia genética para analisar e explicar o desenvolvimento epistemológico da geometria. Para eles, a evolução dos conceitos geométricos não significou apenas acréscimo de conhecimentos, mas uma reinterpretação total dos fundamentos conceituais, indicando que o desenvolvimento cognitivo nunca é linear e exige uma reconstrução e uma reorganização de conhecimentos por outro ponto de vista, proporcionado por novas aquisições.

Acrescentam que a psicogenética ajuda a esclarecer os desenvolvimentos históricos ou mesmo destacar aspectos importantes que poderiam passar despercebidos:

A geometria começa, com Euclides, por um período durante o qual se estuda as propriedades das figuras e dos corpos geométricos enquanto *relações internas* entre os elementos destas figuras e destes corpos. Não se toma em consideração o *espaço* enquanto tal, nem, por conseqüência, as transformações das figuras no interior de um espaço que as compreenderia todas. Chamaremos a esta fase *intrafigural,* utilizando uma expressão já utilizada em psicologia genética para dar conta do desenvolvimento das noções geométricas na criança.
Vem em seguida uma etapa caracterizada por um estabelecimento de relação das figuras entre elas, cuja manifestação específica é a procura de transformações, ligando figuras segundo múltiplas formas de correspondências, mas sem chegar à subordinação das transformações às estruturas do conjunto. É o período durante o qual a geometria dominante é a geometria projetiva. Chamaremos esta fase *interfigural.*
Em seguida começa uma terceira etapa, que chamaremos *transfigural*, caracterizada pela preeminência das estruturas. A expressão mais caracterizada desta etapa é o *Programa Erlanger,* de Felix Klein (p. 110).

(...)

De fato, a questão histórica coloca-se da seguinte maneira paradoxal. Por um lado, a geometria grega permanece, na ausência da álgebra, de natureza intrafigural e subordinada às suas fontes dos "porismas" de Euclides (ou transformações locais centradas no seu resultado figural), as coordenadas parciais de Apolônio e as modificações de figuras de Arquimedes ou de Papus, tudo isto casos particulares sem generalizações metodológicas.
A subordinação do espaço à álgebra data de Viète e permaneceu inteiramente local (transformações em trigonometria esférica). Por outro lado, apesar do estabelecimento de correspondência sistemática da álgebra e da geometria que inaugurava a obra de Descartes, foi necessário esperar oitenta e cinco anos até o *Traité* de Poncelet: a questão é encontrar a explicação da extensão deste período interfigural, ou seja, perto de dois séculos, que decorreram até chegar ao início das transformações geométricas, enquanto a álgebra é precisamente a ciência das transformações e que, a partir do século XVII, era aplicada à geometria. Finalmente, é com Lie e Klein (com um início anunciador em Chasles e Poncelet, mas limitado à geometria projetiva) que a superioridade das transformações se impõe e subordina o conjunto das (e não "a") geometrias aos sistemas algébricos (pp. 134 - 145).

Essa seqüência “intra”, “inter”, “trans” é encontrada não só no pensamento científico como no desenvolvimento cognitivo das crianças e no desenvolvimento histórico de todas as disciplinas.

Finalizando a apresentação do desenvolvimento epistemológico das transformações geométricas, Piaget e Garcia destacam que o longo lapso de mais de 2.000 anos, necessários para que o conceito de transformações geométricas adquirisse a importância dada a ele no estudo das geometrias, reflete o que se verifica com o desenvolvimento de conceitos de um modo geral: há necessidade de um período de “maturação”, proporcionado por novas aquisições e métodos, para que haja pleno crescimento de uma noção.

De acordo com Collette (1985), a partir do Programa Erlanger inicia-se uma etapa na Matemática em que fica evidente o domínio da teoria dos grupos e a interação dos conceitos originados da álgebra, da geometria e da análise, tendências presentes atualmente nas matemáticas.

1.4 Breve análise matemática das transformações geométricas

Uma **transformação geométrica no plano** é uma aplicação bijetora do conjunto de pontos do plano sobre si mesmo. As principais transformações no plano euclidiano são reflexões em retas, translações, rotações, reflexões centrais e homotetias. A imagem de uma figura por uma transformação geométrica é o conjunto de pontos que são imagens de pontos da figura pela transformação.

Um ponto do plano cuja imagem por uma transformação geométrica é o próprio ponto é chamado **ponto fixo** por essa transformação. Uma reta é fixa por uma transformação geométrica se sua imagem for a mesma reta. Por exemplo, na reflexão numa reta ou reflexão axial, os pontos do eixo de simetria são pontos fixos e uma reta perpendicular ao eixo de simetria é uma reta fixa. Nem toda reta fixa tem todos os pontos fixos, como a reta perpendicular ao eixo de reflexão, que é uma reta fixa, mas tem só um ponto fixo — a interseção da reta com o eixo. Um subconjunto do plano, ou uma figura, é um **invariante** por uma transformação geométrica se seus pontos forem fixos por essa transformação.

Para estudar o conjunto das transformações no plano e sua estrutura, define-se a **transformação identidade** como aquela pela qual a imagem de um ponto é o próprio ponto. Sendo a transformação geométrica no plano uma função bijetora, existe a **transformação inversa** de outra dada.

A composta de duas (ou mais) transformações geométricas é também uma transformação no plano; existe a transformação identidade e também a inversa de uma transformação geométrica dada; a composição de transformações é uma operação associativa. Portanto, o conjunto de todas as transformações no plano forma um grupo em relação à operação de composição. Os grupos de transformações geométricas foram usados por Klein para classificar e caracterizar as diversas geometrias existentes na sua época, conforme relato feito na parte histórica do tema deste trabalho.

Isometria é a transformação geométrica que conserva distâncias entre pontos, ou seja, a distância entre dois pontos é igual à distância entre seus pontos imagens pela transformação. O conjunto das isometrias forma um grupo em relação à operação composição de transformações.

Uma isometria conserva:

- a colinearidade de pontos;
- a ordem dos pontos numa reta;
- a medida dos ângulos;
- o paralelismo de retas.

A noção de isometria permite generalizar o conceito de congruência, a princípio definido apenas para segmentos, ângulos e triângulos, ampliando-o para quaisquer subconjuntos não vazios de pontos do plano chamados figuras geométricas.

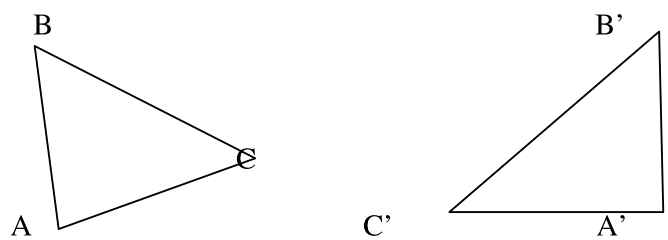
Assim, duas figuras F e F’ no Plano Euclidiano chamam-se **congruentes** se existe uma isometria que aplica F sobre F’.

O exemplo mais importante de isometria é a reflexão na reta ou simetria axial, pois qualquer outra isometria pode ser representada como resultado da composição de um número finito de reflexões em reta. Esse é um dos motivos que explica a atenção centralizada sobre reflexões em retas neste trabalho.

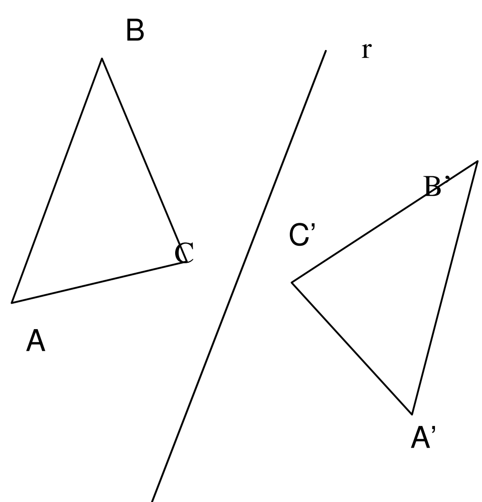
Reflexão na reta r ou **simetria axial** é a transformação geométrica que fixa todos os pontos de uma reta dada r e associa a cada ponto P do plano, não pertencente a r, o ponto P', de modo que r é a reta mediatriz do segmento PP'. A reta r chama-se eixo de simetria, e os pontos P e P' são chamados simétricos em relação a r.

Toda composição de um número finito de reflexões em reta é uma isometria. Para analisar a composta de duas reflexões em retas, é conveniente introduzir a noção de orientação no Plano Euclidiano. Isso será feito de forma intuitiva[7] considerando a orientação no plano como aquela determinada por um triângulo e uma ordem de seus vértices.

Assim, o triângulo ABC da figura abaixo está orientado em sentido horário, enquanto o triângulo A'B'C' está orientado no sentido anti-horário.



Seja R_r a reflexão em r do triângulo ABC.



A reflexão R_r inverte a orientação do plano, e não é possível passar do triângulo ABC para o triângulo A'B'C' por meio de um movimento dentro do plano. É necessário "sair do plano" que os contém e efetuar o movimento no espaço tridimensional.

[7] A definição matemática, por classes de equivalência, encontra-se em Ruoff, 1982, pp. 98-99.

Portanto, a composta de duas reflexões em reta no plano Π inverte duas vezes a orientação no plano, ou seja, essa composta mantém a orientação do plano, sendo, então, um movimento realizado dentro do plano Π.

Embora o enfoque esteja sobre a reflexão em reta, outras transformações, isométricas ou não, serão também apresentadas em diversas partes deste trabalho, o que torna conveniente introduzir, resumidamente, tais noções.

Translação de vetor *v* é a transformação geométrica no plano que, dado um vetor *v*, a cada ponto P do plano associa o ponto P', de modo que o vetor PP' seja igual a v.

Toda translação de vetor *v* pode ser representada de infinitas maneiras como composta de duas reflexões em retas. Basta tomar duas reflexões em retas paralelas que distem d, igual à metade de |*v*|, uma da outra.

Rotação de centro O e ângulo θ é a transformação geométrica que, dado o ponto O e um ângulo orientado θ, fixa o ponto O e, a cada ponto P do plano, distinto de O, associa o ponto P', de modo que o ângulo orientado POP' seja congruente a θ e as medidas dos segmentos PO e P'O sejam iguais.

Toda rotação de ângulo θ pode ser representada de infinitas maneiras como composta de duas reflexões nas retas r e s. A única condição é que r e s se interceptem num ponto A, formando ângulo congruente à metade de θ.

Simetria central ou **reflexão num ponto** é a transformação geométrica que, dado o ponto O, a cada ponto P do plano associa o ponto P', de modo que o vetor OP' seja oposto ao vetor OP.

A reflexão central de centro O é uma rotação de ângulo θ igual a π radianos e também é a composta de duas reflexões em retas perpendiculares entre si no ponto O.

Homotetia de centro O e razão k é a transformação geométrica que, dados o ponto O e o número real k não nulo, a cada ponto P do plano associa o ponto P', tal que o vetor OP' é igual ao vetor k.OP.

Com a composição de uma homotetia com uma isometria obtém-se a transformação **semelhança,** que leva ao conceito de **figuras semelhantes,** que, por estar definido para figuras quaisquer, é mais geral que o tradicionalmente feito para polígonos.

Alem da dimensão geométrica, as transformações podem ser analisadas também pelo aspecto algébrico.

No plano Π, estabelecendo um sistema de eixos ortogonais OX e OY, a cada ponto P do plano Π faz-se corresponder o par ordenado (x,y) de números reais e, reciprocamente, a cada par ordenado de números reais corresponde o ponto P do plano. Os números x e y são chamados coordenadas do ponto P. Isso permite definir uma bijeção entre Π e $R \times R = R^2$.

A distância entre os pontos P=(x,y) e Q=(x',y') é dada pela expressão:

$$d(P,Q) = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$$

A transformação T no plano Π é a função $T: \Pi \to \Pi$, isto é, a bijeção que a cada ponto P do plano associa outro ponto P'=T(P) chamado imagem de P pela T.

Uma isometria do plano Π é a transformação T do plano que preserva a distância entre pontos, ou seja, d(T(P),T(Q))=d(P,Q), para quaisquer pontos P e Q de Π.

Uma vez que um sistema de coordenadas em Π tenha sido estabelecido, uma transformação T pode ser descrita por suas equações, isto é, pelas expressões das coordenadas (x',y') do ponto P'=T(P).

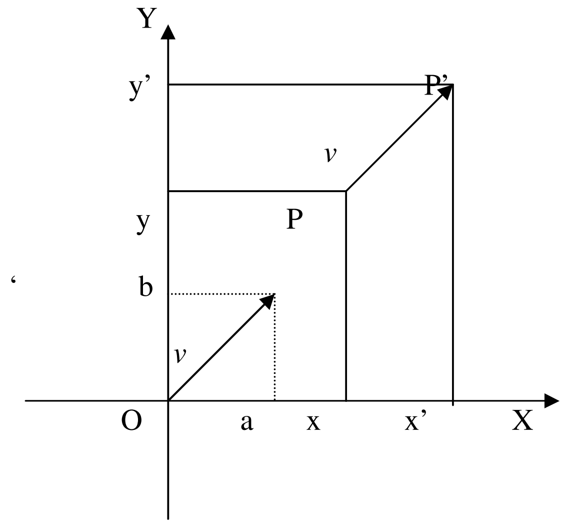
A **translação T_v,** determinada pelo vetor *v,* é a transformação que leva cada ponto do plano Π no ponto $T_v(P) = P + v$. Se $v = \overrightarrow{AB}$, então P+ *v* = Q é o ponto, tal que o segmento orientado PQ é eqüipolente a AB.

Se, num dado sistema de eixos ortogonais, as coordenadas de *v* forem (a,b), então, para cada ponto P=(x,y) tem-se:

$T_v(P) = (x+a,y+b)$, ou seja, $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$

Na notação matricial tem-se: $T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + a \\ y + b \end{bmatrix}$

em que a e b são chamados parâmetros da translação T_v.



Observa-se que:

a) sendo T_v uma bijeção, ela é inversível e sua inversa é a translação de parâmetros – a e – b;

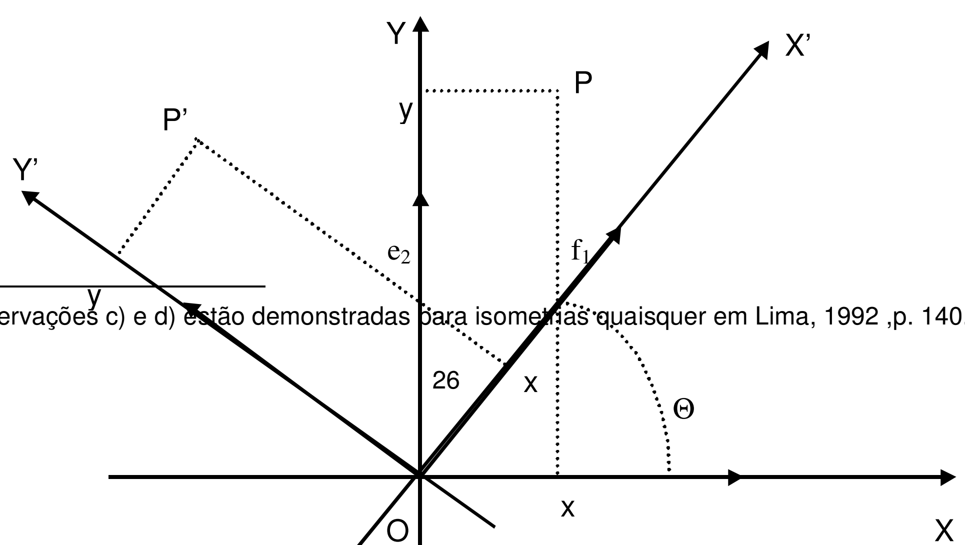
b) T_v é uma isometria. De fato, sendo $P=(x_1,y_1)$, $Q=(x_2,y_2)$ e $T_v=(x+a,y+b)$, então, d(T(P),T(Q))= $=\sqrt{[x_1+a-(x_2-a)]^2-[y_1+b-(y_2+b)]^2}$ = $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ = =d(P,Q)

Portanto, d(T(P),T(Q)) = d(P,Q) e T_v é uma isometria.

c) T_v transforma retas em retas e a imagem de uma reta é uma reta paralela a r;

d) T_v conserva o ângulo formado por duas retas concorrentes.[8]

Rotação de centro O e ângulo θ é a transformação geométrica que, dado o ponto O e um ângulo orientado θ, fixa o ponto O e, a cada ponto P do plano, distinto de O, associa o ponto P’, de modo que o ângulo orientado POP’ seja congruente a θ e as medidas dos segmentos PO e P’O sejam iguais. Se OXY é um sistema de eixos ortogonais no plano, tem-se:



[8] As observações c) e d) estão demonstradas para isometrias quaisquer em Lima, 1992 ,p. 140.

f_2

e_1

A rotação $R(\theta)$, de centro O e ângulo θ, transforma o ponto P no ponto P'e leva o vetor unitário e_1 do eixo OX no vetor $f_1 = \cos\theta.e_1 + \text{sen}\theta.e_2$; e leva o vetor unitário e_2 do eixo OY no vetor $f_2 = - \text{sen}\theta.e_1 + \cos\theta.e_2$.

Temos: $OP = x.e_1 + y.e_2$

e $OP' = x'.e_1 + y'.e_2 = x.f_1 + y.f_2$

pois no sistema OX'Y', cujos vetores unitários são f_1 e f_2, o ponto P' tem as mesmas coordenadas x e y que o ponto P tem no sistema OXY.

Então: $OP' = x(\cos\theta.e_1 + \text{sen}\theta.e_2) + y(- \text{sen}\theta.e_1 + \cos\theta.e_2.) =$

$= (x \cos\theta. - y\text{sen}\theta)e_1 + (x \text{ sen}\theta. + y\cos\theta)e_2$

Portanto $\begin{cases} x' = x \cos\theta - y\text{sen}\theta \\ y' = x \text{ sen}\theta + y\cos\theta \end{cases}$

$$\text{ou} \quad R(\theta) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & - \text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$$

Observa-se que:

a) dadas as rotações $R(\theta_1)$ e $R(\theta_2)$, a composta das duas é $R(\theta_1).R(\theta_2)=R(\theta_2).R(\theta_1)=R(\theta_1+\theta_2)$;

b) $R(\theta+2k\pi) = R(\theta)$;

c) $R(0) = I$, onde I é a transformação identidade;

d) $R(\theta)$ é inversível e sua inversa é $R(-\theta)$;

e) $R(\theta)$ transforma retas em retas;

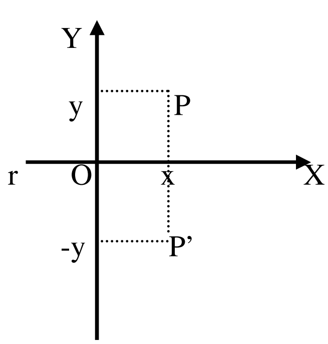
f) $R(\theta)$ conserva o ângulo formado por duas retas.

Em particular, uma rotação de 180° de centro O leva o ponto P=(x,y) no ponto P'=(-x,-y). Nesse caso, qualquer que seja o ponto P do plano, a origem O é ponto médio do segmento PP'. Portanto, a rotação de 180° de centro O é a **simetria central de centro O.**

Reflexão na reta r ou **simetria axial R_r** é a transformação geométrica que fixa todos os pontos de uma reta dada r e associa a cada ponto P do plano, não pertencente a r, o ponto P', de modo que r é a reta mediatriz do segmento PP'.

Para estabelecer as expressões algébricas de R_r considera-se um sistema de eixos ortogonais OXY.

1) Se o eixo OX coincide com a reta r, então, para cada ponto P=(x,y), a imagem de P é $R_r(P) = (x,-y)$



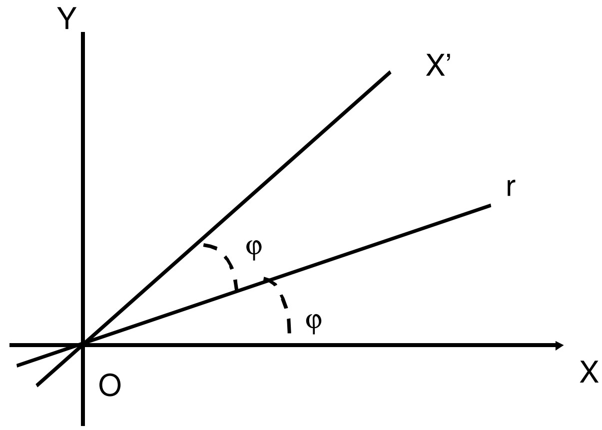
Portanto as equações da reflexão R_r são:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases} \quad \text{ou} \quad R_r\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$$

$$R_r\begin{bmatrix} x \\ \ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ \ \end{bmatrix}$$

y 0 -1 y

2) Se a reta r passa pela origem O e forma ângulo φ com o eixo OX, tem-se:

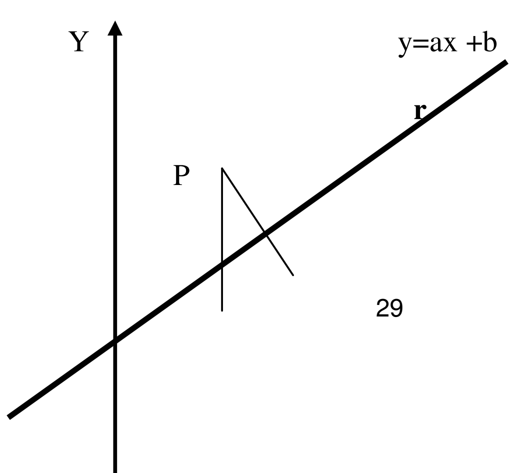


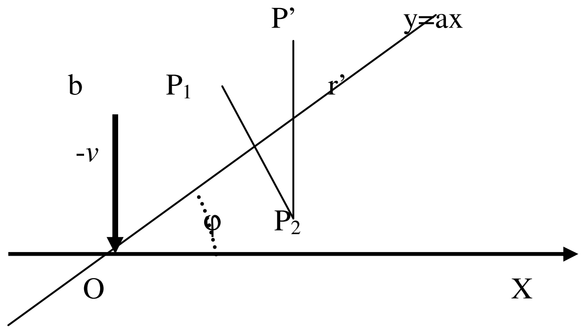
Pela reflexão R_r o eixo OX se transforma em OX', que corresponde à imagem de OX pela rotação de ângulo 2φ e o eixo OY se transforma em OY'. Como se viu, na rotação de ângulo 2φ tem-se:

$$\begin{cases} x' = x.\cos 2\varphi + y.\text{sen} 2\varphi \\ y' = x.\text{sen} 2\varphi - y.\cos 2\varphi \end{cases}$$ que são as equações dessa reflexão R_r.

ou $$R_r \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \text{sen} 2\varphi \\ \text{sen} 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

3) Se a reta r tem equação y = ax + b, em que a = tgφ é a inclinação de r, então, considera-se a reta r', passando pela origem e paralela a r, cuja equação é y = ax.





A reta r' é a imagem de r pela translação de vetor $-v = (0,-b)$. Para determinar a imagem P' do ponto P = (x,y), considera-se:

a) a imagem P_1 de P pela translação de vetor $-v$.

Logo, $x_1=x$ e $y_1=y-b$;

b) a imagem P_2 de P_1 pela reflexão em r';

Logo, $\begin{cases} x_2= x.\cos2\varphi + (y-b).\text{sen}2\varphi \\ y_2= x.\ \text{sen}2\varphi - (y-b).\ \cos2\varphi \end{cases}$

c) a imagem P' de P_2 pela translação de vetor v=(o,b);

Logo, $\begin{cases} x' = = x.\cos2\varphi + (y-b).\text{sen}2\varphi \\ y' = x.\ \text{sen}2\varphi - (y-b).\ \cos2\varphi + b \end{cases}$

Como a = tgφ, usando-se as expressões da trigonometria que fornecem cos2φ e sen2φ em função de tgφ, cosx = $\dfrac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$, senx = $\dfrac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$, tem-se: cos2φ = $\dfrac{1-a^2}{1+a^2}$ e sen2φ = $\dfrac{2a}{1+a^2}$

Logo, $\begin{cases} x' = \dfrac{1-a^2}{1+a^2}x + \dfrac{2a}{1+a^2}(y-b) \\ \\ y' = \dfrac{2a}{1+a^2}x - \dfrac{1-a^2}{1+a^2}(y-b) + b \end{cases}$

são as equações da reflexão R_r na reta r de equação y = ax + b

Observa-se que:

a) a reflexão R_r é uma isometria;

b) a reflexão R_r é inversível e sua inversa é a própria R_r;

c) R_r transforma retas em retas;

d) a reflexão em reta conserva o ângulo entre retas.

As equações de uma isometria T (translação, rotação ou reflexão) têm uma das formas:

$$\begin{cases} x' = cx - dy + m \\ y' = dx + cy + n \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x' = cx + dy + m \\ y' = dx - cy + n \end{cases}$$

e as matrizes de T são

$$\begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} c & d \\ d & -c \end{bmatrix}$$

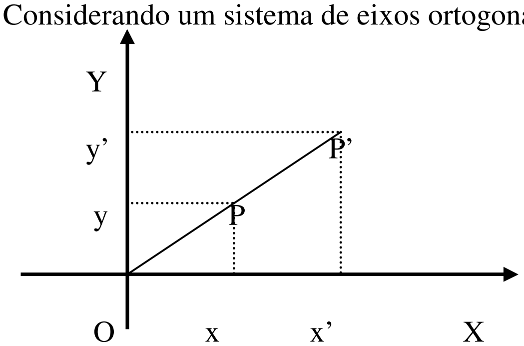
No primeiro caso, T preserva a orientação do plano e o determinante

$\Delta = c^2 + d^2 = 1$ é positivo; neste caso T é uma translação ou uma rotação.

No segundo caso, T inverte a orientação do plano e $\Delta = -c^2 - d^2 = -1$ é negativo; neste caso, T é uma reflexão em reta.

Homotetia de centro O e razão k é a transformação geométrica H_k em que, dados o ponto O e o número real k, não nulo, a cada ponto P do plano associa o ponto P', tal que o vetor OP' é igual ao vetor k.OP.

Considerando um sistema de eixos ortogonais OXY, tem-se:



$$x' = kx$$
$$y' = ky$$

$$\text{ou } H_k \begin{bmatrix} x \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ & \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$$

y 0 k y

Observa-se que:

a) para k=1, H_k é a transformação identidade;

b) H_k não conserva distâncias para $k\neq 1$;
Para k> 1, tem-se d(P,Q) < d(P',Q') e para k < 1, d(P,Q) > d(P',Q');

c) H_k é inversível e sua inversa tem razão $\frac{1}{k}$;

d) H_k transforma retas em retas;

e) H_k preserva ângulo de retas.

A apresentação das transformações geométricas no quadro algébrico permitiu analisar aspectos que não tinham sido evidenciados no quadro geométrico, como, por exemplo, as equações gerais de uma isometria, destacando aquelas que conservam e as que mudam a orientação do plano. Além disso, como vimos no desenvolvimento epistemológico, item 1.3 deste capítulo, a influência da álgebra foi fundamental na gênese do conceito de transformações geométricas.

Capítulo 2:

Investigações das hipóteses e conhecimentos prévios de estudantes sobre as transformações geométricas

Introdução

Inúmeras pesquisas em Didática da Matemática foram feitas nos últimos anos analisando as principais variáveis didáticas[1] que influem na aprendizagem das transformações geométricas. Essas experiências e resultados acumulados pelos pesquisadores são fontes importantes para modelar currículos e melhor

[1] Sinteticamente, variáveis didáticas são aquelas que estão à disposição do professor e que determinam a situação didática. Escolhas diferentes das variáveis podem provocar modificações nas estratégias escolhidas pelo aluno.

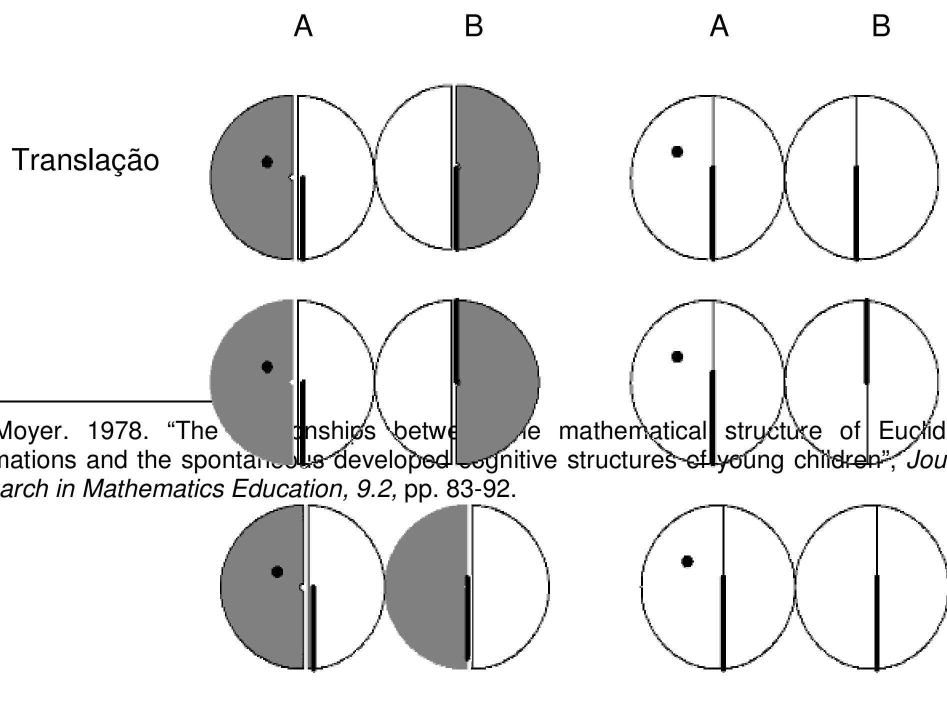
prever as dificuldades e erros dos alunos, a fim de ajudá-los a superar os obstáculos na aprendizagem.

Primeiramente, faremos uma breve exposição de algumas investigações realizadas antes da década de 80 sobre as transformações geométricas. A seguir, relataremos as pesquisas mais recentes sobre reflexões em retas realizadas na Inglaterra, Espanha e França.

Por fim, serão apresentadas associações entre as pesquisas analisadas com experiências feitas com alunos nossos do ensino fundamental e médio.

2.1. Pesquisas anteriores à década de 80

Gutiérrez & Jaime (1996) relatam que, em 1978, Moyer[2] trabalhou com crianças de 4 a 8 anos de idade propondo exercícios com pares de discos de plásticos, alguns totalmente transparentes e outros com metade colorida e metade transparente (figura 2.1). Nos exercícios, eram realizados movimentos correspondentes a translações, rotações e reflexões. O pesquisador informa ao aluno que operou determinado movimento com um dos discos (B) do par, chegando, em algumas vezes, a mover fisicamente o disco. Em seguida, marca um ponto no disco que permaneceu fixo (A) e pede à criança que marque um ponto no disco que foi movido (B), de modo que as duas marcas coincidam se o movimento for desfeito.



[2] J.C. Moyer. 1978. "The relationships between the mathematical structure of Euclidean transformations and the spontaneous developed cognitive structures of young children", *Journal for Research in Mathematics Education, 9.2,* pp. 83-92.

Rotação

Reflexão

Figura 2.1

Na investigação, avaliou-se a influência da isometria, do tipo de disco e a realização ou não do movimento dos discos nos seis casos da figura.

Os resultados, que o próprio Moyer assinala serem limitados às transformações particulares usadas na experiência e que deveriam ser interpretados com cautela, indicaram que:

- a translação ofereceu menor ou igual grau de dificuldade em relação à reflexão;
- a rotação é a isometria que apresentou maior dificuldade;
- a influência do tipo de disco e da realização física ou não do movimento foi pouco significativa.

Nos Estados Unidos, em 1978, Schultz[3] usou outras variáveis didáticas, como a direção do movimento (diagonal ou horizontal), a amplitude do movimento (grande, pequena ou média), o tipo de figura usada (com significado ou não) e o tamanho da figura (pequeno, de 8 cm, ou grande, de 80 cm). Seu trabalho foi realizado com alunos entre 6 e 10 anos de idade e as principais conclusões foram:

[3] K.A. Schultz. 1978. "Variables influencing the difficulty of rigid transformations during the transition between concrete and formal operational stages of cognitive development", em Lesh, R.; Mierkiewicz, D.: *Recent Research Concerning the Development of Spacial and Geometric Concepts.*(Eric: Columbus, USA), pp. 195-211.

- as translações apresentaram menor grau de dificuldade que as reflexões e as rotações, e estas ultimas apresentaram grau de dificuldade equivalente;
- para qualquer isometria, os movimentos horizontais foram mais fáceis de ser executados que os diagonais. A influência da amplitude dos movimentos não foi perceptível;
- as figuras de maior tamanho facilitaram a resolução dos exercícios, assim como as figurativas (borboleta, foguete, flor etc.) levaram a mais acertos do que as abstratas.

Esses estudos não permitiram tirar conclusões gerais sobre as três transformações e apresentaram algumas contradições. A relação entre a maior ou menor dificuldade da reflexão em comparação à rotação dependeu da situação concreta dos exercícios; algumas reflexões eram mais fáceis que as rotações e outras mais difíceis. Os movimentos não foram suficientemente variados e os alunos apresentavam diferenças de idade, o que limitou os resultados dos estudos.

2.2 Pesquisas realizadas na década de 80

As pesquisas mais modernas têm levado em consideração maior número de situações e variáveis didáticas, chegando a conclusões mais consistentes e consensuais. Analisaremos a seguir as investigações realizadas na Inglaterra, na França e na Espanha.

2.2.1 Inglaterra

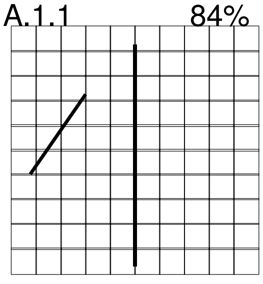
Importante pesquisa foi desenvolvida no âmbito do projeto inglês Concepts in Secondary Mathematics and Science, CSMS, realizado por Hart em 1981.

O objetivo inicial de Hart era investigar a compreensão de onze temas matemáticos pelos estudantes ingleses na faixa etária de 11 a 16 anos. Entretanto, as análises sobre os procedimentos e respostas dos alunos trouxeram informações cuja validade ultrapassaram as fronteiras do país. O projeto tem servido de fonte de informação para professores e pesquisadores em todo o mundo e significou grande avanço na didática da Matemática.

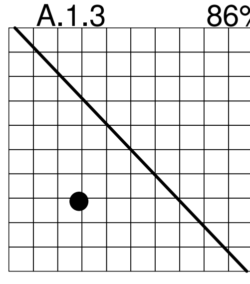
Participaram do projeto cerca de 10 mil estudantes, dos quais apenas 1.026, com idade entre 13 e 15 anos, responderam ao teste elaborado por Hart e outros autores, em 1985, sobre isometrias (reflexões, rotações e composições das mesmas). Na parte referente à reflexão havia vários itens em que se pedia para determinar o simétrico de uma figura dada, algumas vezes à mão livre e outras utilizando régua; outros itens consistiram na determinação do eixo de reflexão de figuras dadas, algumas simétricas, outras não; finalmente, em alguns itens eram dados uma malha quadriculada com coordenadas, um eixo vertical e um ponto com coordenadas inteiras e pedia-se a coordenada do simétrico do ponto.

No teste foram analisadas as influências de outras variáveis não consideradas na pesquisa de Schultz, como a complexidade das figuras (ponto, segmento ou triângulo), a presença ou não de quadriculados, a posição do eixo de simetria (vertical ou horizontal) e a distância entre a figura e o eixo de simetria. O teste continha seis questões com 27 itens e as respostas analisadas eram correspondentes às soluções apresentadas por alunos de 14 anos. Apresentaremos alguns itens das questões propostas e também a porcentagem das respostas corretas.

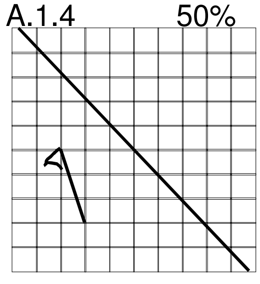
A.1.1 84%



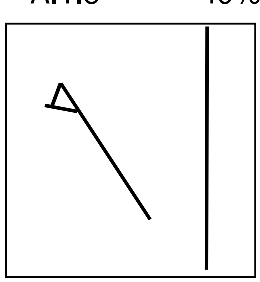
A.1.3 86%



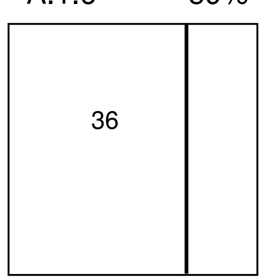
A.1.4 50%



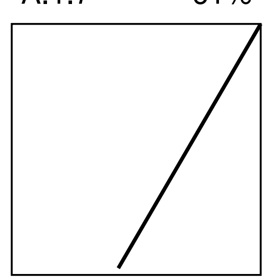
A.1.5 49%

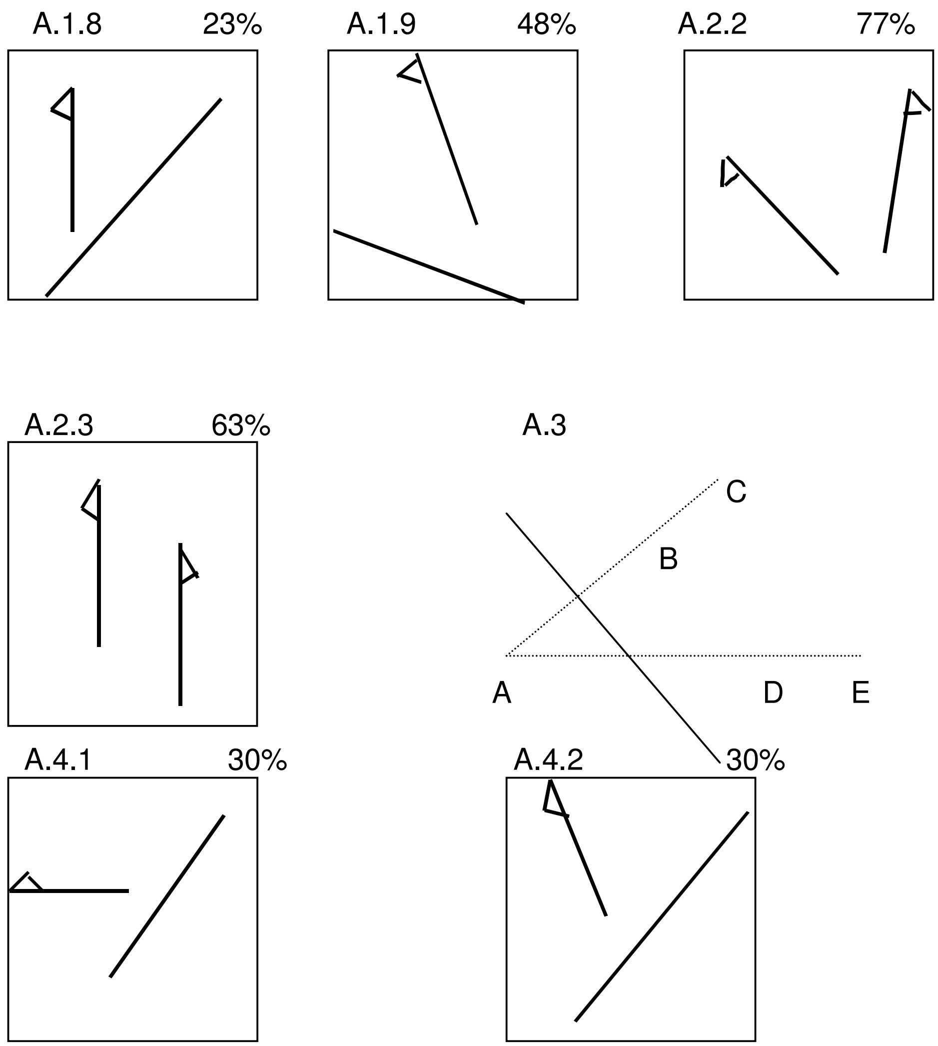


A.1.6 59%



A.1.7 61%





Nos itens A.2.2 e A.2.3, pedia-se o eixo de simetria de pares de figuras; e no item A.3, era necessário assinalar qual dos pontos apresentados B, C, D ou E era imagem do ponto A, explicando o porquê da escolha feita. Esperava-se que, com a justificativa da escolha, o estudante fizesse uma análise das propriedades da reflexão em reta, mesmo que essa escolha tivesse sido intuitiva. Somente 21% dos alunos explicaram usando a distância e a “direção” (perpendicular ao eixo); a maior parte se referiu apenas a uma das duas condições, sendo que 33% assinalaram a distância e 20% a “direção”. Nos itens A.4.1 e A.4.2, os alunos deveriam desenhar com régua e compasso o simétrico de “bandeiras”. As questões 5 e 6 trabalhavam com coordenadas de pontos.

Quase todos os alunos mostraram alguma compreensão de reflexão em reta, mas alguns procedimentos dependeram de fatores como:

- Inclinação do eixo.

  Os itens em que a posição do eixo de simetria era vertical e horizontal apresentaram índices maiores de respostas corretas. Entretanto, um erro comum foi ignorar a inclinação do eixo de simetria e deslocar horizontalmente a figura para obter o simétrico. Esses erros apareceram nos itens: A.1.3 com 3%; A.1.4, com 12%; A.4.2, com 12%; e A.4.1, com 23%.

- Presença ou não da malha quadriculada.

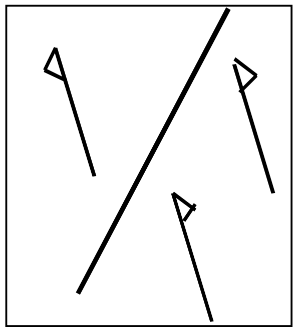
  Os itens A.1.3 e A.1.7 eram semelhantes, porém o primeiro estava numa malha quadriculada. Os alunos apresentaram índices de 86% e 61% de acertos, respectivamente, indicando que a malha pode ajudar na distância e na “direção”. No entanto, os índices dos que erraram, nos mesmos itens, são praticamente os mesmos, 6% e 7%, respectivamente, indicando que a malha não ajuda os estudantes a superar tais erros.

- Complexidade da figura.

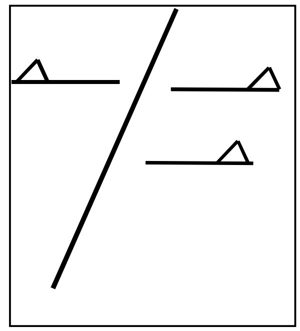
  Os itens A.1.3 e A.1.4 só se diferenciavam pela figura dada, um ponto no primeiro deles e uma “bandeira” no outro. Os índices de 86% e 50%, respectivamente, mostram a diferença no desempenho dos alunos.

- Inclinação da figura.

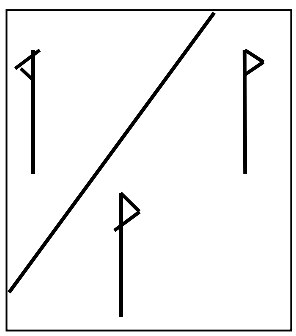
  Observou-se a tendência de deslocar horizontalmente ou verticalmente a imagem, conforme a figura dada estivesse numa posição horizontal ou vertical. Também, há a tendência a desenhar a imagem paralela à figura dada como nos seguintes exemplos:



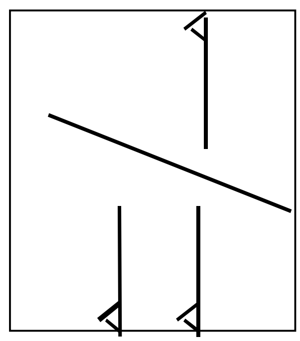
A.4.2 com 2%



A.4.1 com 26%



A.1.8 com 24%



A.1.9 com 48%

O projeto CSMS serviu como referência a numerosos estudos sobre as transformações geométricas. Os mesmos testes foram aplicados em contextos diversos (diferentes países, sistemas educacionais ou idades), mas os resultados permaneceram coerentes com os originalmente obtidos, confirmando as interpretações e descobertas feitas.

2.2.2 França

A pesquisa realizada por Hart em 1981 na Inglaterra tinha por objetivo determinar o nível de compreensão dos estudantes sobre reflexão em reta. Descrevia a influência das variáveis didáticas no desempenho dos alunos analisando estatisticamente os acertos. Mas os procedimentos dos estudantes não foram descritos, o que dificultou a interpretação dos resultados.

Já as pesquisas desenvolvidas por Gras em 1979 e 1983 na França apresentaram uma seqüência didática sobre a noção de transformações geométricas e, em particular, de reflexão — denominada por ele simetria ortogonal. Apesar de ter apontado alguns resultados sobre o procedimento dos alunos na evolução de suas concepções, Gras limitou-se a descrever e comparar diferentes tipos de classificação dos itens propostos na seqüência didática.

Com objetivos mais amplos, Grenier, em 1985, fez um estudo com alunos da 4ª, e 3ª série do colégio[4], para conhecer suas concepções sobre reflexão, antes e depois da aprendizagem em sala de aula. Grenier relata que:

> Admitimos como hipótese que o aluno em situação de aprendizagem elabora concepções dos conteúdos de ensino. O aluno pode ter várias representações de uma noção matemática e utilizar uma ou outra dessas representações, de acordo com o problema proposto. Essas concepções podem ser incompletas ou às vezes errôneas, ou ainda ser localmente ou globalmente verdadeiras, com domínio de validade para cada uma delas. Uma concepção pode funcionar para um tipo de problema e não para outro, ocasião em que o erro aparece. O erro é, então para nós, um indício das concepções do aluno que procuraremos explorar.
>
> Observando os alunos em situações de resolução de problemas, podemos deduzir seus procedimentos de resolução. Esses procedimentos nos permitem levantar hipóteses de suas concepções sobre noções matemáticas em jogo e seus limites de validade quando estão errados (1985, p. 57).

Na época desse estudo, a reflexão era ensinada no fim da 4ª série, e os alunos envolvidos na pesquisa não haviam ainda estudado o assunto. Participaram da experiência seis duplas de alunos, três da 4ª e três da 3ª série. Grenier analisou as mesmas variáveis didáticas do projeto inglês CSMS, porém com uma variedade maior de algumas delas. As atividades propostas propunham a determinação do simétrico de uma figura em relação a uma reta. O

[4] Na França, a 4ª e 3ª série correspondem no Brasil à 7ª e 8ª série do ensino fundamental, respectivamente.

processo de construção de figuras simétricas permitiu observar as diferentes estratégias dos alunos, que, em duplas, discutiam e resolviam os diversos problemas propostos. A situação era conveniente porque favorecia a expressão e comunicação de suas dúvidas e procedimentos de resolução.

Grenier destaca que, quando havia conflitos na resolução, para defender sua solução, os alunos argumentavam, o que favorecia uma progressão nos conhecimentos. “Em tal quadro, reproduz-se a situação de validação no sentido de Brousseau (1978), quando cada um dos alunos tenta convencer o outro ou compreender suas concepções para chegar a uma decisão comum” (1985, p.58).

A noção de simetria ortogonal foi apresentada como uma “dobra sobre uma reta”, mas a “dobra” deveria ser imaginada e não efetivamente realizada. Grenier pretendia observar as reações dos alunos da 4ª série, que ainda não haviam estudado a simetria ortogonal, diante dessa noção. Com relação aos alunos da 3ª série, a intenção era verificar se consideravam os dois aspectos envolvidos na noção, o de reflexão como imagem no espelho ou obtida por dobra no papel e também como objeto da aprendizagem, no sentido dado por Régine Douady[5].

Na tarefa de determinar a figura simétrica de uma figura em relação a uma reta, três aspectos principais foram considerados:

- a natureza do objeto: pontos, segmentos e figuras simples;
- as relações entre os diferentes elementos do objeto: comprimento, extremidades do segmento;
- as relações objeto-eixo: eixo inclinado ou não; segmento vertical ou não; objeto interceptando ou não o eixo.

Alguns aspectos externos também foram considerados:

[5] Na dialética ferramenta-objeto de R. Douady, por objeto entende-se o objeto cultural colocado num edifício mais amplo, que é o do saber sábio num dado momento reconhecido socialmente.

- rigidez do material: era proibido dobrar a folha;
- localização da figura na folha;
- tipo de papel utilizado: quadriculado ou não;
- instrumentos: os alunos não dispunham nem da régua nem do compasso.

A tarefa dos alunos consistia em obter o simétrico de oito figuras dadas (que se encontram no Anexo I deste trabalho). Na primeira e terceira figuras, o eixo era vertical, a figura dada era um segmento, e um deles estava colocado numa malha quadriculada. As outras figuras apresentavam o eixo não vertical e não horizontal (inclinado), algumas sobre a malha quadriculada e outras não. Na sétima, o eixo era inclinado, havia uma malha e a figura era mais complexa, tendo uma extremidade sobre o eixo. A oitava apresentava o eixo vertical, sem a malha, mas o segmento interceptava o eixo não no ponto médio.

Os resultados dos alunos nas primeiras figuras não apresentavam grandes diferenças. As duplas da 3ª série acertaram e as da 4ª série hesitaram em responder; somente uma dupla traçou o segmento paralelo ao segmento dado. A partir da quarta figura, as dificuldades começaram a surgir, porém Grenier relata que não houve diferenças marcantes entre as respostas dos alunos das duas séries. Grenier relata que os alunos da 4ª série apresentaram as seguintes concepções a respeito da reflexão em reta:

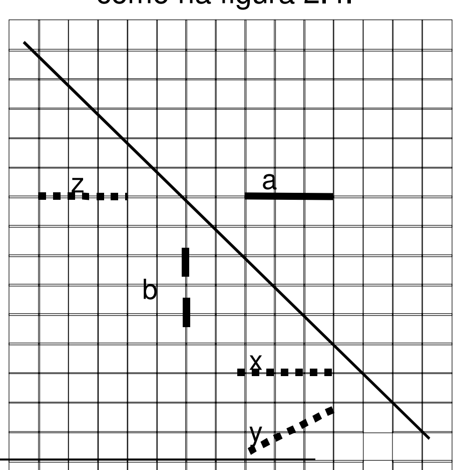
- um ponto é transformado num ponto e um segmento é transformado num segmento de mesmo comprimento;
- o eixo de simetria estabelece uma divisão da folha em dois semiplanos, e o simétrico de uma figura está no outro semiplano; a transformação reflexão faz a figura mudar de lado. Tal concepção explica por que é difícil obter o simétrico quando a figura intercepta o

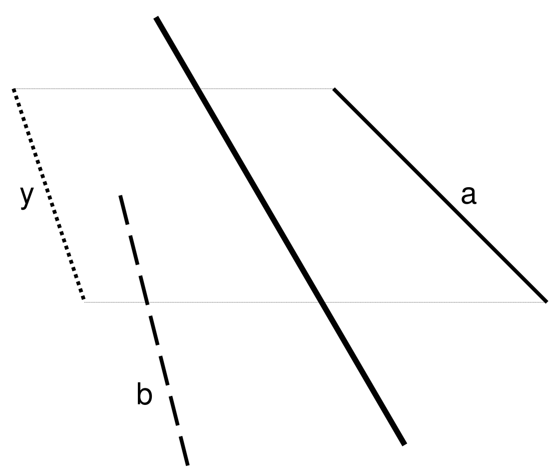
eixo. Essa dificuldade continuou presente nos alunos da 3ª série que já haviam estudado reflexão no ano anterior (na 4ª série);

- pela reflexão a figura se conserva (ângulos e forma).

Quanto aos procedimentos, de modo geral havia semelhanças nos comportamentos dos alunos das duas séries. Grenier relata que:

- as direções “vertical” e “horizontal” influíram nas resoluções apresentadas. As soluções (x,y,z...), usando “referência vertical”, ou “referência horizontal” como as ilustradas nas figuras 2.2 e 2.3 [6], são encontradas tanto na 4ª como na 3ª série. A malha quadriculada parece reforçar esse procedimento, pois as linhas privilegiam as direções verticais e horizontais e estimulam a contagem quando se considera a distância da figura ao eixo;
- para os alunos da 4ª série, a exigência de que o segmento determinado pelos pontos A e A’ simétricos entre si seja perpendicular ao eixo de simetria não tem muito significado, pois as imagens dos segmentos dados não apresentaram essa condição. Para os da 3ª série, a exigência aparece muitas vezes de forma errada, como, por exemplo, ao construir a imagem perpendicular ao segmento dado, como na figura 2.4.





[6] Nas figuras, o segmento dado é a, a solução correta é b (tracejada), algumas respostas dadas são c, d..., (pontilhadas) e as soluções usando “referências verticais e horizontais são x, y... (pontilhadas).

fig. 2.2 fig. 2.3

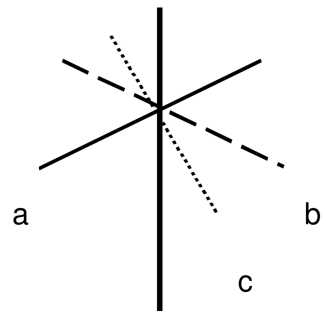


Fig. 2.4

- o paralelismo da figura com seu simétrico foi um procedimento bastante utilizado e que predominou em casos de conflito nas soluções;
- os alunos não determinaram com naturalidade a imagem de um segmento usando os simétricos das suas extremidades; em vez disso escolheram uma direção conveniente e tomaram a segunda extremidade de modo a obter um segmento de mesmo comprimento que o dado. A estratégia parece confirmar a hipótese de que não é suficiente para o aluno saber determinar o simétrico de um ponto para obter o simétrico de um segmento.

Havíamos destacado que a pesquisa realizada por Grenier foi um estudo que partiu da suposição de que o aluno, durante a resolução de uma situação-problema, elabora as primeiras concepções sobre uma noção matemática. Levando em consideração essa hipótese, Grenier valorizou a resolução das atividades em grupo, estimulando o intercâmbio de concepções e de argumentações, lembrando as situações didáticas de Brousseau. Foi um estudo que não se limitou a registrar quantitativamente os acertos e erros dos alunos e, acompanhando as estratégias e discussões na resolução das tarefas, permitiu observar, conforme o previsto, o modo como as concepções vão surgindo.

2.2.3 Estudo comparativo França-Japão

O estudo comparativo França-Japão foi realizado por Bernadette Denys, do I.R.E.M. de Paris VII, e por Denise Grenier, da Equipe de Didática das Matemáticas e de Informática da Universidade de Grenoble I da França.[7]

França e Japão configuram dois pólos culturais bastante diferentes. Comparando a organização do espaço e a arquitetura de ambos, Augustin Berque, em 1982, mostrou que na França a arquitetura destaca elementos geométricos e a perspectiva; enquanto no Japão isso não ocorre. Ao contrário, a propensão para a assimetria surgiu no Japão desde tempos remotos. Além disso, a linguagem e suas representações simbólicas, nos dois países, apresentam diferenças marcantes. A língua francesa usa um único alfabeto, ao passo que na língua japonesa a riqueza dos signos é bem maior: há dois alfabetos silábicos, com 52 signos e cerca de 7 mil caracteres chineses *(kanjis),*

além do alfabeto latino para a escrita matemática.

Contextos culturais tão diversos podem agir sobre o ambiente escolar, o sistema de percepção e os processos de aquisição de conhecimentos, especialmente os geométricos, de modos bem diferentes. No entanto, há que se considerar que os alunos japoneses, vivendo na França, sofreram influências do meio sociocultural.

Os níveis escolares dos alunos de 11 a 15 anos dos dois países estão indicados no quadro abaixo:

Correspondência entre a idade e o nível dos alunos

	idade	11	12	13	14	15
França	escola	colégio	colégio	colégio	colégio	
	série	6ª	5ª	4ª *	3ª	

[7] O estudo está relatado no *Petit x* n° 12, pp. 33-56.

Japão	escola	elementar	média	média	média
	série	6ª *	1ª	2ª	3ª

(* ano em que a simetria ortogonal é ensinada)

Fonte: *Petit x* n° 12

A noção de reflexão é abordada em etapas diferentes no programa escolar francês e no japonês.

Atualmente, a reflexão em reta, como transformação de figura, começa a ser ensinada na França na 6ª série do colégio, mas antes de 1986, época do estudo, translação, rotação e reflexão eram ensinadas na 4ª série, como transformações pontuais, ou seja, como funções bijetoras definidas em pontos do plano.

No Japão, o programa escolar propõe variadas manipulações, construções, medições com figuras geométricas planas e espaciais antes da descoberta de propriedades dessas figuras. Poucas demonstrações são feitas; os livros não são diversificados e os professores os seguem. A reflexão é ensinada desde o fim da escola elementar (11-12 anos), a partir da noção de eixo de simetria.

A experiência de Denys e Grenier foi feita com alunos de 11 a 14 anos de uma escola japonesa de Paris que segue os programas oficiais japoneses.

Observações preliminares com os alunos japoneses, aplicando-se o mesmo teste da pesquisa de Grenier, de 1985, haviam verificado que resultados excelentes começavam a surgir a partir da 2ª série da escola média. Por esse motivo, os alunos da 3ª série da escola japonesa não participaram da experiência.

Tomando como base os resultados obtidos nas pesquisas de Grenier em 1985, relatado no item anterior, um teste com 12 itens, a ser individualmente resolvido, foi aplicado, em Grenoble, a 80 alunos franceses e, em seguida, aos 110 alunos japoneses.

Os exercícios tinham por objetivo:

- assinalar que concepções a respeito de reflexão os alunos japoneses usavam numa tarefa de construção;
- determinar se as variáveis didáticas que parecem influenciar as respostas dos alunos franceses nas construções de figuras simétricas têm a mesma influência sobre as respostas dos alunos japoneses.

As atividades propostas referiam-se a construções, à mão livre, de uma figura simétrica a uma figura dada. Essas atividades eram consideradas convenientes por não serem afetadas pelo uso de instrumentos de construções nem por diferenças de linguagem que uma descrição escrita exigiria.

A opção de escolher um só tipo de figura, o segmento, foi feita porque é uma figura relativamente simples que está presente nos livros didáticos como exemplo clássico de simétrico de uma figura geométrica.

As pesquisas relatadas no item anterior haviam mostrado a influência das seguintes variáveis didáticas nas respostas dos alunos franceses:

- a orientação do eixo na folha (vertical, horizontal e oblíqua com inclinação de 45°);
- a posição relativa do segmento e o eixo de simetria (se o segmento intercepta ou não o eixo e a correlação com a amplitude do ângulo formado);
- o tipo de papel (quadriculado ou não).

Quanto à orientação do eixo na folha, as observações iniciais feitas com alguns alunos japoneses, antes dos testes, indicaram que quando os eixos eram verticais ou horizontais as tarefas eram muito bem resolvidas. Assim, fixou-se que a orientação do eixo na folha seria oblíqua, com inclinação de 45° à direita ou à esquerda em relação à direção horizontal.

A posição relativa do segmento e o eixo de simetria foram analisados em dois aspectos:

a) o segmento tem uma só extremidade no eixo, intercepta-o ou não e o segmento está contido no eixo;

b) o ângulo agudo que a reta que contém o segmento forma com o eixo de simetria.

Na análise a priori das figuras, a hipótese era que, se o segmento tem uma extremidade no eixo, a solução seria facilitada, pois esse ponto comum será também ponto do segmento simétrico. A dificuldade maior estaria no caso em que o segmento intercepta o eixo e, mais ainda, quando o segmento está contido no eixo.

Quanto ao ângulo agudo formado pela reta suporte do segmento com o eixo, alguns valores (entre 45° e 90°) contribuíram para erros como o prolongamento do segmento. Como nas figuras 7 e 8, os segmentos tinham posição vertical e horizontal na folha e o eixo era oblíquo, previa-se a ocorrência de erros do tipo paralelismo dos simétricos e imagem no prolongamento do segmento dado.

O tipo de papel, quadriculado ou não, particularmente o primeiro, poderia trazer dificuldades no caso de eixos oblíquos, pois as direções verticais e horizontais seriam induzidas pelas linhas da malha.

Os alunos japoneses que participaram do estudo haviam estudado reflexão em sala de aula. Já os alunos franceses da 6ª e da 5ª série não haviam visto o assunto e só iriam fazê-lo na 4ª e na 3ª série. A noção de reflexão nos livros japoneses é dada como superposição de partes quando uma dobra é feita sobre uma reta. Nos livros franceses da época, a definição de reflexão era dada como uma transformação de pontos no plano. Para evitar diferenças nas noções de reflexão, a definição proposta para as quatro séries das classes francesas foi:

“Quando se dobra ao longo da reta, a figura dada e a figura simétrica se superpõem perfeitamente. Vocês podem imaginar a dobra, mas não devem fazê-la” (Denys, 1986, p. 41).

Os resultados observados nos 80 alunos franceses e 110 japoneses serão analisados e discutidos a seguir.

O quadro permite comparar os índices de acerto dos alunos de ambos os países.

Porcentagem dos acertos dos alunos por classe

	6	5	4	3
classe francesa				
	61%	68%	80%	76%
	6	1	2	
classe japonesa				
	71%	80%	95%	

Fonte: *Petit x* n° 12

Observando-se o desempenho dos alunos dos dois países, três constatações surgem da experiência:

1) a taxa de acertos dos alunos japoneses é nitidamente superior à dos franceses. O desempenho do aluno de 12 anos da escola japonesa é semelhante ao do aluno francês de 14 anos;
2) a progressão da taxa de acertos com o nível de classe é nitidamente maior na escola japonesa. Nesta, o índice de respostas corretas é quase total, enquanto nas escolas francesas a progressão é menos evidente entre as classes de 6ª a 3ª série e quase inexistente entre a 4ª e 3ª série;
3) nas duas escolas, o índice de acertos quando a figura está na malha quadriculada é menor que na folha comum. Mas, no estudo, as duas situações não foram comparadas com a mesma figura.

As constatações confirmam o processo de maturação que se verifica nos alunos japoneses entre o 1° e o 2° ano da escola média (13 anos).

Quanto à variável interseção, as respostas dos alunos franceses de 14 anos demonstram ser influenciadas por ela mesmo após o ensino da reflexão. Os alunos japoneses de 13 anos conseguiram superar as dificuldades que as variáveis traziam aos diversos itens do teste.

O quadro seguinte indica os itens que obtiveram maior número de respostas corretas.

Classificação dos itens em ordem decrescente de acertos

alunos franceses	4 – 11 – 1 – 5 - 10	9 – 3 – 8 – 7 – 2	12 - 6
alunos japoneses	10 – 5 – 11 – 4 – 1	8 – 2 – 7 – 3 – 9	6 - 12

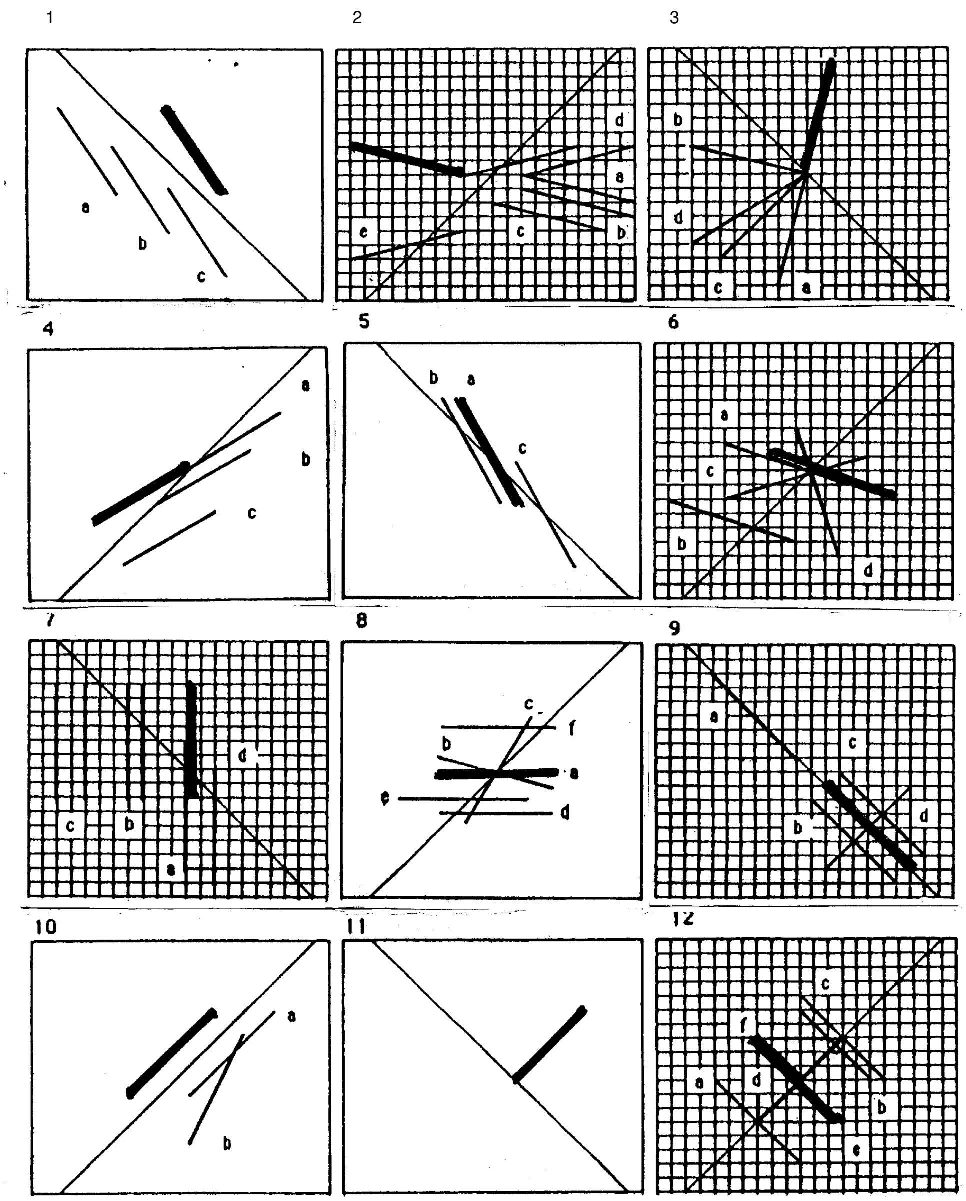
Fonte: *Petit x* n° 12

Os itens com maior índice de acertos nas duas populações (4, 11, 1, 5, 10) são os que estão em papel não quadriculado, o que reforça a hipótese de que o papel quadriculado pode atrapalhar a visão global da figura.

Os itens 6 e 12 são os que apresentam menor índice de acertos nas duas populações.

Observando os principais tipos de erro nas respostas, obtém-se melhor avaliação das semelhanças e diferenças no procedimento dos alunos franceses e japoneses. O quadro seguinte relaciona os principais tipos de erro:

Principais tipos de erro



Fonte: *Petit x* n° 12, p. 56

Como se observa no quadro anterior, com exceção do item 3, a resposta que usa translação do segmento dado aparece, na maioria das vezes, com “referência horizontal”. No item 3, o segmento tem uma das extremidades sobre o eixo de simetria, e os alunos entendem que essa extremidade pertence também ao simétrico, ou seja, é um ponto fixo. Mas, nos casos em que o segmento dado intercepta o eixo, o ponto de interseção nem sempre fica fixo nas respostas dadas.

O quadro seguinte permite comparar os principais tipos de erro nas duas populações e indica o número de acertos em cada item.

Comparação dos principais tipos de erro

Nº. Figura	**Tipos de erro**	**Alunos franceses**	**Alunos japoneses**	**Exemplos de tipos de erro**
1	Translações	1/84	5/108	a, b, c
2	Prolongamentos ou outras translações Referências horizontais ou verticais	13/80 16/80	13/107 3/107	a, b, c d, e
3	Prolongamentos Falsas inclinações	16/80 14/82	29/108 1/108	a b, c, d
4	Prolongamentos Outras translações	2/83 0/83	2/108 4/108	a b, c
5	Coincidência Translações	3/83 5/83	0/107 1/107	a b, c
6	Prolongamento com ou sem Superposição Outras translações Referências horizontais ou verticais Reflexão/eixo perpendicular, eixo dado	 13/80 4/80 4/80 6/80	 8/108 2/108 10/108 6/108	 a b c d
7	Prolongamentos Translações com referência horizontal Outras translações	8/80 6/80 7/80	7/108 1/108 7/108	a b, c d
8	Coincidência Falsas inclinações Outras translações	10/80 9/80 7/80	0/108 6/108 6/108	a b, c d, e, f
9	Imagens sobre o eixo de simetria Outras translações Reflexão / eixo vertical	6/86 3/86 0/86	16/107 4/107 7/107	a b, c d
10	Translações e referência horizontal Imagens não paralelas ao objeto	5/80 3/80	2/108 1/108	a b
11	Erros não notáveis			
12	Translações Reflexão / eixo vertical ou horizontal Traços de um quadrado Meia reflexão Impossibilidade ou sem resposta	7/84 6/84 0/84 10/84 10/84	10/107 14/107 6/107 1/107 6/107	a, b, c d e f

Fonte: *Petit x* n° 12, p. 49.

Observa-se que o maior índice de respostas incorretas aparece no item 3, em que o ponto fixo parece impedir a imagem por translação e induzir à resposta por prolongamento. Nos itens 2, 3, 6 e 7, em que o eixo é oblíquo, o segmento está numa malha quadriculada e intercepta o eixo, destaca-se a quantidade de respostas incorretas por prolongamentos, o que poderia ser provocado pela malha, que prejudica a visualização da imagem correta.

Denys e Grenier relatam as conclusões do estudo sobre os efeitos no desempenho dos alunos franceses e japoneses de três variáveis didáticas: a orientação do eixo de simetria na folha, a posição relativa eixo-objeto e o tipo de papel, quadriculado ou não:

1) a concepção de que a imagem de um segmento é paralela ao segmento dado é muito forte nos alunos dos dois países e aparece combinada com outros tipos de erro como, por exemplo, coincidências, prolongamentos e outras translações das imagens;
2) a posição horizontal ou vertical do segmento dado e o eixo inclinado não parecem influir muito para os alunos japoneses, pois estes giraram a folha até que o eixo, a princípio oblíquo, ficasse na posição vertical;
3) os alunos japoneses parecem evitar as respostas que indicam coincidência da imagem com o segmento dado;
4) o papel quadriculado parece influir no sentido de prejudicar a visão global da figura para os alunos de ambos os países.

Uma explicação para o resultado excepcional apresentado pelos alunos japoneses do 2° ano do curso médio está na ênfase maior dada à geometria no espaço nos programas propostos do ano anterior. Pelo programa do 1° ano, são abordados: construção de figuras do espaço obtidas por “movimentos” de figuras planas, seção, projeção e desenvolvimento de figuras do espaço.

Na França, a Geometria no espaço aparece nos programas de turmas de 5ª série do colégio e, freqüentemente, só aí é ensinada. Além disso, é menor o número das atividades de Geometria no espaço e menos diversificadas.

O tipo de ensino é um dos motivos para a diferença de desempenho, mas as variáveis que têm componentes culturais devem também ser consideradas no estudo dos dois países. Uma questão a ser investigada é como as atividades de origami, arte tradicional de dobradura em papel, e a caligrafia poderiam influenciar no desempenho dos alunos japoneses.

Não se pode deixar de considerar que os alunos japoneses, estando na França, sofriam influência da cultura local. Mesmo assim, com base nos resultados que o estudo apresentou não só sobre o desempenho diferenciado dos alunos como também das estratégias usadas na resolução, a experiência permitiu fazer observações sobre os fatores que podem influir nas situações de ensino-aprendizagem, como dado cultural, programa etc. Também o número de alunos (190) envolvidos na experiência confere caráter mais geral às análises do procedimento dos estudantes.

2.2.4 Espanha

Com respeito a reflexões, Gutiérrez & Jaime (1987) elaboraram testes baseados também no projeto inglês Concepts in Secondary Mathematics and Science, CSMS, mas com objetivos mais específicos e maior quantidade de itens, o que contribuiu para aumentar a confiabilidade e o detalhamento das conclusões.

Os dois autores centraram os estudos na compreensão do conceito de reflexão pelos alunos de magistério. Além de observar a influência das variáveis didáticas como complexidade da figura, presença de quadriculado, posição do eixo de simetria e posição da figura em relação ao eixo, pesquisaram também a influência que o ensino pode exercer para corrigir e modificar as concepções imperfeitas dos alunos. Utilizaram-se 38 itens, para determinação de simétrico de figuras, de eixos de simetria e de coordenadas da imagem por uma reflexão. O teste foi realizado com um grupo de 280 alunos da Escola de Magistério de

Valência, antes e depois de um curso por meio de descoberta das isometrias de um plano.

Gutiérrez & Jaime consideram a análise dos erros dos alunos importante para que o professor conheça as dificuldades de apreensão de uma noção, as reações dos alunos diante delas e as interpretações diversas sobre um conceito matemático. Classificaram os erros em duas categorias:

1) erros cuja origem se encontra numa interpretação mais “visual” da reflexão, como, por exemplo, imagem paralela à figura dada (fig. 2.5); deslocamentos verticais ou horizontais de extremidades de segmentos (fig. 2.6); imagem no prolongamento do segmento dado (fig. 2.7 e 2.8) [8]

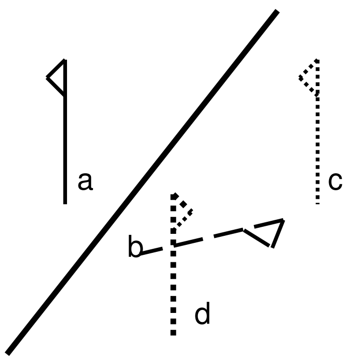


Fig. 2.5

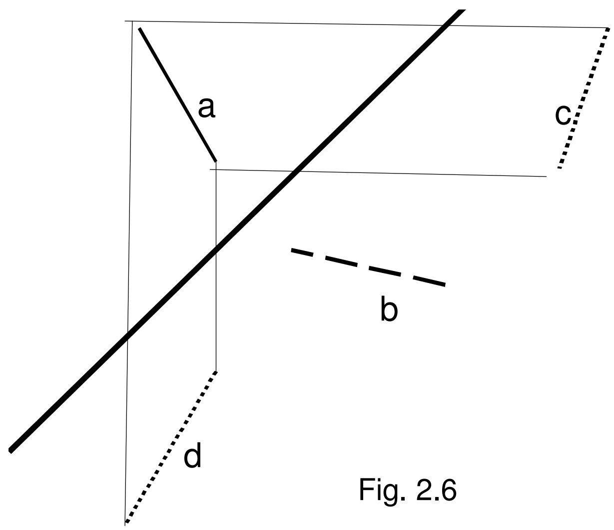
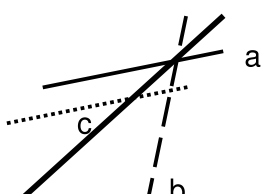


Fig. 2.6



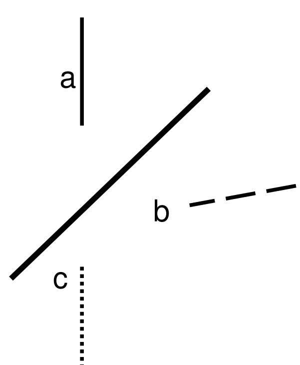


Fig. 2.7

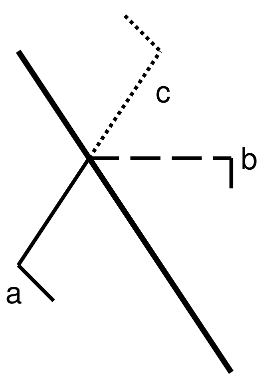


Fig. 2.8

[8] Aqui, a figura dada está indicada por a, a resposta correta por b (tracejada) e as soluções dos alunos são c, d... (pontilhadas).

Os alunos que não haviam estudado a reflexão em reta, presume-se, apresentavam esses erros em parte porque predominam no seu mundo e cultura eixos verticais de simetria como espelhos, edifícios e monumentos. Para os que já estudaram reflexão, o motivo pode ser a escassez ou ausência de exercícios com eixos não verticais e não horizontais. Uma análise das porcentagens de respostas corretas, levando em consideração a posição do eixo de simetria, indicou que os exercícios mais fáceis eram aqueles com eixos horizontais seguidos dos eixos verticais, sendo o mais difícil os que apresentavam eixos em outras posições;

2) erros cuja origem está na concepção de reflexão, porque os alunos não utilizam corretamente as propriedades que a caracterizam: a perpendicularidade ao eixo do segmento com extremidades no ponto e no seu simétrico (fig. 2.9); a eqüidistância ao eixo de pontos correspondentes (fig. 2.10).

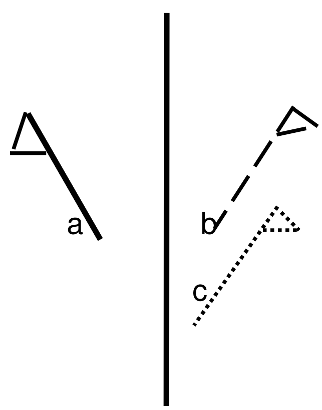


Fig. 2.9

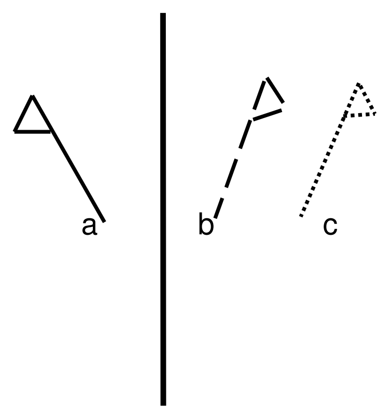
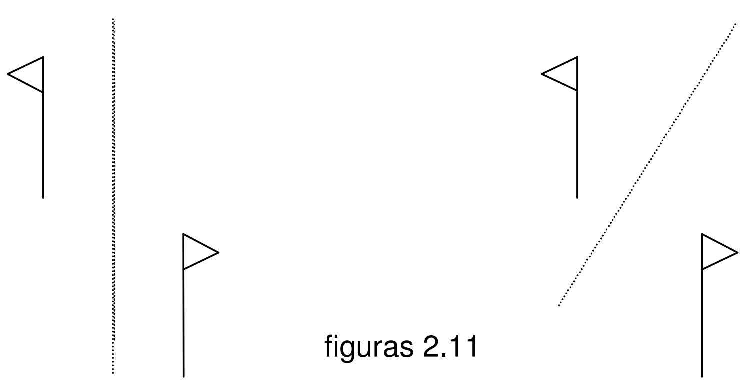


Fig. 2.10

Para traçar o eixo de simetria, erros análogos surgiram quando as figuras não eram simétricas (figuras 2.11)



figuras 2.11

A pesquisa feita na Espanha, aplicada a um número significativo de alunos e com análise de itens mais detalhada, trouxe contribuições importantes sobre a concepção de reflexão. Analisou a influência de variáveis não consideradas em pesquisas anteriores, como, por exemplo, a complexidade das figuras e como o ensino pode desestabilizar as concepções equivocadas.

2.3 Síntese preliminar das pesquisas analisadas

Como se observou nas pesquisas relatadas, algumas conclusões gerais podem ser deduzidas independentemente do contexto da experiência (faixa etária, local da pesquisa, população analisada etc.):

1) a posição relativa eixo-objeto é uma variável significativa no desempenho do aluno. Algumas combinações da posição relativa entre o eixo de simetria e o segmento induzem os alunos a mais erros, especialmente quando o segmento intercepta o eixo;
2) a posição do eixo de simetria na folha é outro fator que influi nos resultados dos testes. Todas as investigações modernas são unânimes em afirmar que é mais fácil determinar o simétrico de uma figura quando o eixo de simetria é horizontal ou vertical;
3) as direções verticais e horizontais são privilegiadas, e os procedimentos por “referência vertical” e “referência horizontal” estão presentes mesmo após o ensino da reflexão em reta;
4) o uso da malha quadriculada, na qual a figura está inserida, é um recurso que favorece a determinação do simétrico se o eixo de simetria for horizontal ou vertical e coincidir com uma das linhas da malha. Caso contrário, se for inclinado ou não coincidir com uma das linhas da malha, seu emprego induz a erros do tipo “referência horizontal ou vertical”, além de prejudicar a visualização da solução;
5) a complexidade da figura dada é uma variável didática que o professor deve levar em consideração nas atividades propostas sobre reflexão em reta;
6) o paralelismo entre a figura e seu simétrico é uma concepção que aparece de forma marcante nas respostas dos alunos.

2.4 Analisando aspectos das referidas pesquisas numa pequena investigação feita com alunos brasileiros

Embora o foco deste trabalho seja a presença do tema na formação de professores, registraremos, neste item, o resultado de uma pequena investigação que realizamos com os alunos do ensino fundamental e que permitem compreender melhor as questões envolvidas.

Em 1998, preparamos um teste diagnóstico sobre reflexão em reta que foi respondido por alunos de um estabelecimento de ensino particular de São Paulo. Nessa escola, que será denominada Escola I, o desenvolvimento da noção de reflexão é feito ao longo de várias séries, de forma gradativa, iniciando com exploração e manipulação de materiais diversos e chegando até a construção do simétrico de uma figura, usando régua e compasso, na 7ª série. O teste[9] foi realizado com 72 alunos da 8ª série, portanto, no ano seguinte ao do ensino sistematizado da reflexão.

O mesmo teste foi aplicado em uma escola do ensino médio. Responderam ao teste, na assim denominada Escola II, 41 alunos da 3ª série. Os alunos não haviam estudado transformações geométricas e usaram apenas as concepções espontâneas sobre figuras simétricas. Tinham conhecimentos geométricos suficientes para resolver as atividades, pois eram candidatos a exames de acesso a cursos universitários (vestibular), mas não possuíam a noção institucionalizada de reflexão. O professor de Matemática desses alunos informou que havia utilizado a idéia de reflexão apenas na análise do gráfico de funções e no estudo analítico das cônicas. Eram dois os objetivos do trabalho feito em ambas as escolas:

1) verificar em que medida o uso de uma metodologia adequada, com o desenvolvimento de um conceito organizado em espiral durante a vida escolar, pode influir positivamente nos resultados obtidos pelos alunos, fazendo-os superar os obstáculos decorrentes da escolha de diversas variáveis didáticas.

2) verificar se resultados similares aos apresentados em experiências feitas nos países estudados seriam observados nos alunos brasileiros.

[9] O teste encontra-se no Anexo II.

No teste, consideraram-se valores das variáveis didáticas que as pesquisas de Hart, Grenier e Gutierrez indicaram como influentes no desempenho dos alunos. O quadro indica a relação de cada exercício com a variável didática.

Exercício	Variável didática
1	complexidade da figura (imagem no espelho)
2 a	posição do eixo (inclinado na folha)
2 b	posição eixo-objeto (extremidade do segmento no eixo) eixo horizontal
3	papel quadriculado eixo vertical
4 a	papel quadriculado posição do eixo (inclinado)
4 b	papel quadriculado posição do eixo (inclinado) posição relativa eixo-objeto (segmento intercepta o eixo)
5 a	posição do eixo posição relativa eixo-objeto (segmento intercepta o eixo)
5 b	posição do eixo posição relativa eixo-objeto (segmento intercepta o eixo) ângulo da figura com o eixo
6 a	complexidade da figura posição relativa eixo-objeto
6 b	complexidade da figura número de eixos
6 c	complexidade da figura

Na Questão 1, as soluções que assinalaram corretamente as “orientações contrárias” dos elementos simétricos mas não observaram a eqüidistância ao eixo dos pontos simétricos foram consideradas acertos parciais. Na Questão 6b, havia dois eixos de simetria, e as soluções que apontavam apenas um deles foram consideradas acertos parciais.

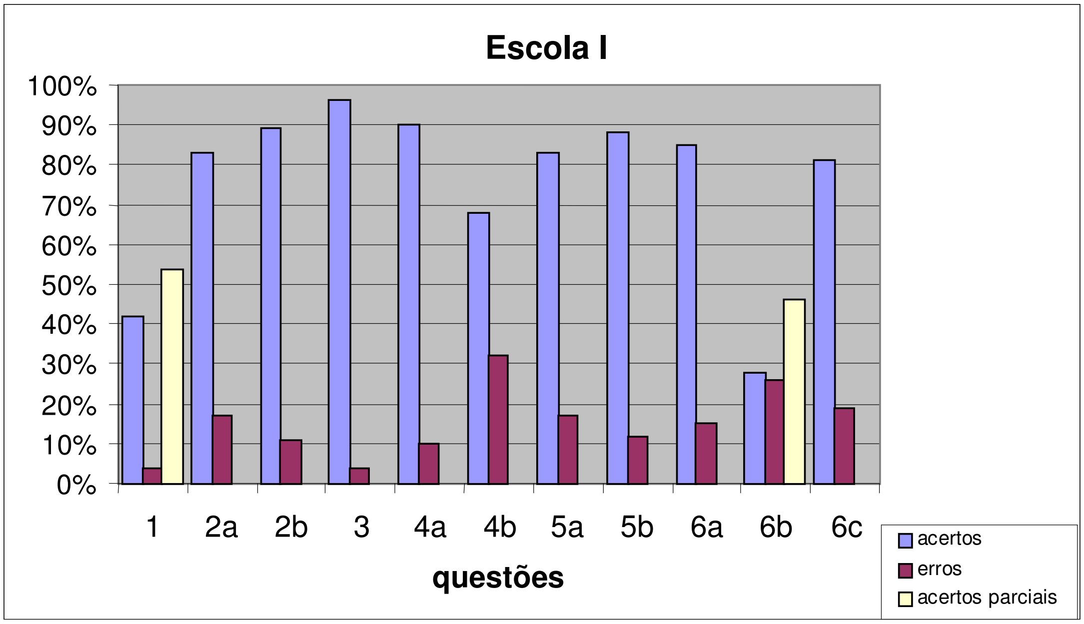
As tabelas e gráficos apresentados a seguir comparam o desempenho dos alunos das duas escolas.

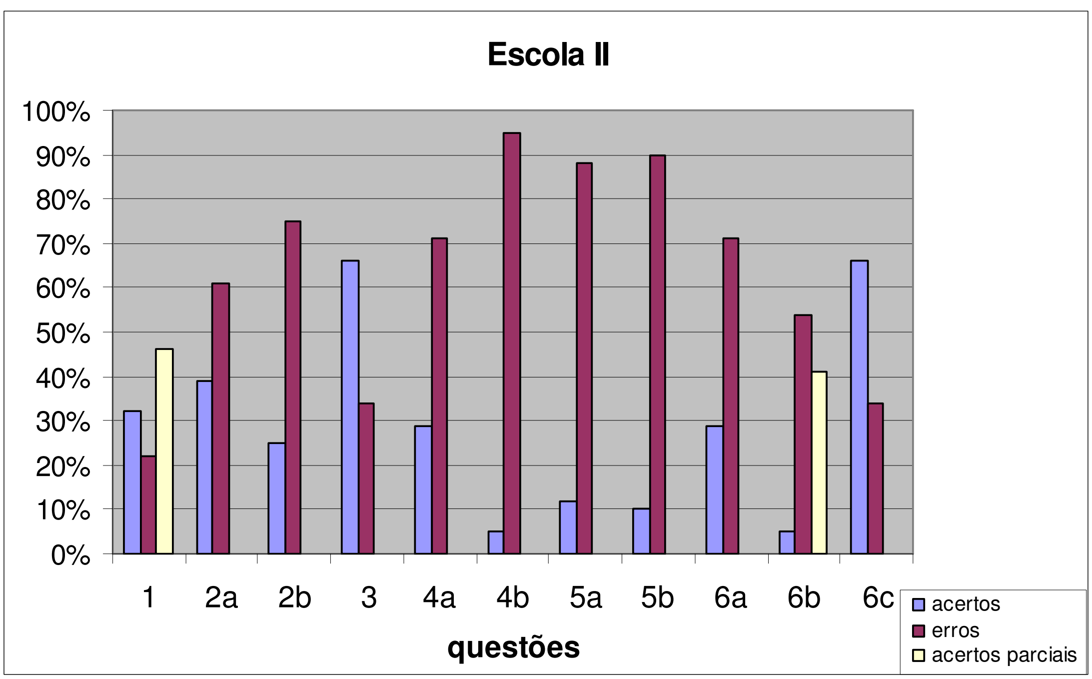
Escola I

questão	acertos	acertos parciais	erros
1	42%	54%	4%
2a	83%		17%
2b	89%		11%
3	96%		4%
4a	90%		10%
4b	68%		32%
5a	83%		17%
5b	88%		12%
6a	85%		15%
6b	28%	46%	26%
6c	81%		19%

Escola II

questão	acertos	acertos parciais	erros
1	32%	46%	22%
2a	39%		61%
2b	25%		75%
3	66%		34%
4a	29%		71%
4b	5%		95%
5a	12%		88%
5b	10%		90%
6a	29%		71%
6b	5%	41%	54%
6c	66%		34%


Escola I
100%
90%
80%
70%
60%
50%
40%
30%
20%
10%
0%
1
2a
2b
3
4a
4b
5a
5b
6a
6b
6c
questões
acertos
erros
acertos parciais


Escola II
100%
90%
80%
70%
60%
50%
40%
30%
20%
10%
0%
1
2a
2b
3
4a
4b
5a
5b
6a
6b
6c
questões
acertos
erros
acertos parciais

A análise dos gráficos permite destacar o excelente desempenho dos alunos da Escola I, que tiveram oportunidade de construir a noção de reflexão em reta em sucessivas e constantes apresentações, cada vez mais aprofundadas, ao longo de várias séries na escola.

Observou-se que quase todos os alunos da Escola I utilizaram régua e compasso tanto na determinação do simétrico de pontos como do eixo de simetria (construção da mediatriz do segmento). No entanto, na Questão 4b, que apresentou o maior índice de erros (32%), esses instrumentos deixaram de ser usados, provocando erros do tipo: superposição da imagem ao segmento (18% dos alunos) e imagem paralela ao segmento (8% dos alunos). A presença da malha quadriculada pode ter induzido o aluno a buscar visualmente a solução e esta ter sido prejudicada pelas linhas da malha.

Na Questão 1, em que se pedia a imagem de uma figura no espelho, 39% dos alunos deixaram de considerar a eqüidistância dos elementos correspondentes ao espelho. Nas questões em que um segmento interceptava o eixo, observou-se que o equívoco da imagem paralela ao segmento dado aparece de forma mais freqüente que os demais tipos de erro (26% do alunos). Na Questão 6b, a figura era mais complexa que as outras e apresentava dois eixos de reflexão; 46% dos alunos — índice correspondente a acertos parciais — identificaram apenas um dos eixos.

Na Escola II, nas questões em que o eixo era inclinado e o segmento interceptava o eixo, o procedimento que considerou a imagem paralela ao segmento dado foi mais freqüente que os outros e apareceu em 63% das respostas dos alunos. De modo geral, em todo o teste, essa foi a concepção de simétrico de uma figura que se apresentou de forma significativa para os alunos da Escola II. Uma breve análise nos resultados das duas escolas indicou que:

- cerca de 30% dos alunos erraram a imagem da figura dada no espelho, porém acertaram a imagem no quadriculado. Não levaram em consideração a eqüidistância ao eixo dos pontos correspondentes ou a "orientação contrária" dos elementos correspondentes, o que não ocorreu no quadriculado. Provavelmente, a malha facilitou a contagem dos quadrados para aplicar a eqüidistância ao eixo, pois o eixo era vertical e coincidia com uma das linhas da malha;

- alunos que acertaram (ou erraram) a Questão 4b também acertaram (ou erraram) a Questão 5a. As exceções foram 16% na Escola I e 12% na Escola II. Nos dois exercícios, o eixo era inclinado, o segmento interceptava o eixo e um deles estava numa malha quadriculada (4b) e o outro não (5a);
- desempenhos semelhantes relacionaram as questões 5b e 6a; o aluno que não determina corretamente o simétrico de um segmento que intercepta o eixo (5b) não determina também o eixo de simetria de figuras formadas por elementos que interceptam o eixo (6a).

Algumas constatações, baseadas no desempenho dos alunos que participaram da experiência realizada nas duas escolas, podem ser assinaladas:

- a aprendizagem de um conceito é de fato efetiva quando a apresentação é feita em sucessivas etapas da vida escolar de um estudante, explorando-se inicialmente manipulação de materiais, até chegar à construção exata e aplicação em outros contextos;
- procedimentos observados nos alunos de outros países foram detectados também nos dois grupos de alunos brasileiros, como, por exemplo: o paralelismo da imagem e da figura, a "referência horizontal", a imagem no prolongamento do segmento e a não observação da eqüidistância dos pontos correspondentes ao eixo.

Nas pesquisas, estudo e investigação sobre a reflexão em reta relatados neste capítulo, constatamos que a escolha das variáveis didáticas, como a posição do eixo de simetria, a posição relativa eixo-objeto, o tipo de papel, quadriculado ou não, e a complexidade da figura dada, modificou de maneira significativa o desempenho dos alunos. São considerados obstáculos[10] que o professor deve compreender para planejar situações didáticas no sentido de procurar meios para superá-los.

---

[10] De acordo com Brousseau,"um obstáculo é um conhecimento, uma concepção, não uma dificuldade ou uma falta de conhecimento." (apud Almouloud, 1997, p. 39).

Capítulo 3

Presença das transformações geométricas nos currículos escolares

Introdução

A partir da década de 60, mudanças no ensino da Matemática vêm sendo preconizadas em vários países. No Brasil, vimos surgir mobilizações ao redor de novas idéias, que culminaram com elaborações de propostas curriculares que incorporaram as reformas pretendidas. O objetivo deste capítulo é resgatar o processo de inclusão do tema transformações geométricas nos currículos escolares brasileiros.

Para isso, vamos apresentar as propostas curriculares que foram elaboradas no Estado de São Paulo em particular e no Brasil em geral, destacando os diferentes enfoques dados ao tema transformações geométricas, nas décadas de 70 a 90. As propostas curriculares desse período serão focalizadas em três situações: sob a influência do movimento Matemática Moderna, sob a influência de reformas posteriores e por uma perspectiva mais atual.

Aspectos de currículos de outros países também serão apresentados com o propósito de observar a abordagem do tema no bojo de novas propostas e orientações.

No Brasil, orientações emanadas de documentos oficiais levam muito tempo para chegar aos professores de todo o país e são incorporadas de modo muito lento. As pesquisas em Educação Matemática nem sempre são conhecidas porque nem todos os professores têm acesso a elas, a não ser em locais mais próximos a centros de produção de conhecimentos. Assim, o material mais acessível ao professor é o livro didático. Análises de alguns livros didáticos complementam este capítulo.

3.1 O movimento Matemática Moderna

Desde o início da década de 50, alguns países europeus e os Estados Unidos começaram a divulgar publicações sobre a modernização de programas e a nova linguagem matemática.

Em 1957, com o lançamento do Sputnik pelos russos, vários grupos representantes do bloco ocidental (Estados Unidos, França etc) decidiram trabalhar na criação de um novo currículo de Matemática. Não só a abordagem deveria ser reformulada, mas novos conteúdos precisariam ser incluídos.

Em 1959, a Organização Européia de Cooperação Econômica, Oece, organizou uma sessão de estudos sobre o tema "A Matemática Moderna", na qual se discutiu detalhadamente a orientação que se deveria dar a uma apresentação moderna da Matemática, ao ensino dessa matéria, em particular no nível secundário (atualmente ensino fundamental). Foi a partir desse ano, com a realização da convenção da Oece, de Royaumont, na França, e da convenção de Dubrovnik, na Iugoslávia, em 1960, que teve início o movimento chamado Matemática Moderna.

No Brasil, os primeiros trabalhos oficiais para introduzir os novos programas surgiram nos Congressos Brasileiros do Ensino da Matemática em Salvador (1955), Porto Alegre (1957), Rio de Janeiro (1959) e Belém (1962).

Em São Paulo, em 1961, foi criado o Grupo de Estudos do Ensino da Matemática, Geem, logo após o término de um curso de aperfeiçoamento destinado a professores secundários de São Paulo, realizado, em convênio, pela Secretaria da Educação, Universidade de São Paulo, Universidade Mackenzie e National Science Foundation dos Estados Unidos, que enviou o ilustre lógico-matemático George Springer como orientador dos dois meses de curso. Esse grupo, colaborando com a Secretaria da Educação de São Paulo, coordenou e se responsabilizou pela introdução da Matemática Moderna na escola secundária. Num dos vários livros publicados pelo grupo, consta que:

> Conjuntos e estruturas são conceitos que permitirão desde o curso primário, com muito menos esforço do que é despendido atualmente pelo aluno, compreender a

> unidade existente na interpretação de fatos que, constituem não só o que é ensinado pela matemática propriamente dita, mas também os que são apresentados no estudo da língua pátria, da geografia, da história, através de relações que guardam e que não têm sido reveladas (Geem, 1965, p. 2).

Também é importante destacar que, em 1965, designada pelo Departamento de Educação, uma comissão composta pelos professores Benedito Castrucci (presidente), Osvaldo Sangiorgi (secretário), Luiz Mauro Rocha, Renate G. Watanabe e Alcides Bóscolo, analisando as recomendações aprovadas nos Congressos Nacionais de Ensino de Matemática, sugere os conteúdos que deverão constar dos programas de Matemática do 1° e 2° ciclo (atualmente ensino fundamental e médio) e do curso normal (atualmente magistério) dos estabelecimentos oficiais de Estado de São Paulo.

Nesse documento, o tema deste trabalho aparece na 3ª série ginasial (atual 7ª série do ensino fundamental) e no 3° ano colegial (atual 3ª série do ensino médio), com as seguintes especificações:

3ª série ginasial: Construções Geométricas e Transformações

a) construções com régua e compasso;

b) transformações geométricas elementares: translação, rotação e simetria.

3ª série colegial: Transformações Geométricas

a) translação, rotação e simetria, propriedades;

b) semelhança, homotetia, propriedades.

Havia divergências entre os membros da comissão sobre como deveria ser o ensino da geometria na nova proposta em relação aos conteúdos, enquanto havia consenso que um método axiomático não seria conveniente para alunos de ensino secundário.

Por diversos motivos, entre os quais a falta de discussão dos verdadeiros propósitos da reforma e o preparo dos professores, a implantação da Matemática Moderna no Brasil provocou distorções, como a excessiva preocupação com a linguagem dos conjuntos e a prioridade dada aos temas algébricos, com a redução ou mesmo eliminação de tópicos de geometria.

Para resgatar a história de como as transformações geométricas foram introduzidas no ensino da geometria no Brasil, entrevistamos três professores, pioneiros na abordagem da geometria usando transformações geométricas. São eles: a professora Martha Maria de Souza Dantas, que, contando com a colaboração do professor Omar Catunda, coordenou os trabalhos para a introdução de uma Geometria das Transformações na Bahia, na década de 60; o professor Almerindo Marques Bastos, um dos coordenadores dos Subsídios para a Implementação do Guia Curricular de Matemática da Secretaria de Educação de São Paulo; e a professora Lucília Bechara Sanchez, que, trabalhando com o grupo Geem, foi uma das pioneiras na introdução da Matemática Moderna em São Paulo. As entrevistas estão transcritas no Anexo III e apresentaremos uma breve síntese dos depoimentos.

Na Bahia, as transformações geométricas começaram a surgir no ensino da geometria, a partir das pesquisas realizadas no Centro de Ensino das Ciências da Bahia, Ceciba, criado por um convênio entre MEC, Secretaria da Educação e a Universidade da Bahia. O projeto abrangia trabalhos experimentais desenvolvidos no Colégio de Aplicação da Universidade Federal da Bahia, UFBA, e em colégios da rede oficial de Salvador. Ao mesmo tempo foram publicados livros didáticos, em 1975 pela Edart – São Paulo: *Ensino Atualizado da Matemática — 7ª e 8ª Séries,* de Catunda, O., Dantas, M.M.S., Nogueira, E.C., Guimarães, E.C., Souza, N.C.P. e Araujo, N. C.

Em São Paulo, com o movimento Matemática Moderna, o ensino da geometria por meio das transformações geométricas começou a ser proposto. Publicações e orientações de matemáticos de vários países como Georges Papy da Bélgica, Lucienne Félix da França e outros, bem como cursos realizados pelo Geem, formaram a base de apoio para que a nova abordagem fosse introduzida no Estado. Em currículos oficiais, a nova proposta apareceu no Guia Curricular de Matemática para o 1° grau, elaborado em 1972, e também nos subsídios a esse guia.

Considerações diversas foram feitas pelos professores justificando a reapresentação do ensino da geometria por meio das transformações geométricas, destacando-se, entre elas: tornar o ensino da geometria mais motivador e criativo, procurando fundamentar noções mais abstratas sobre bases intuitivas mais simples e mais sólidas, uma vez que as transformações geométricas se apresentam na natureza animal, vegetal, inanimada, nas construções nos movimentos dos corpos etc.; melhor fundamentação dos conceitos geométricos, principalmente no que se refere à congruência e à semelhança; a importância do papel da Matemática na área de comunicações que exploram, na mídia, movimentos das figura, deformações, rotações etc.

Para os três professores entrevistados, não menos importante é o papel do professor, que precisa entender o espírito de ser educador. Educar não é ir para a frente dos discípulos e dar a matéria simplesmente, mas conscientizar-se de que é preciso envolver-se e envolver o aluno com a aprendizagem. No ensino, não é possível separar conhecimento matemático da postura de ensino-aprendizagem, da relação humana, fundamental na aprendizagem. Não se pode ensinar sem saber como o outro aprende. Algumas medidas são fundamentais, como maior atenção na reforma dos currículos dos cursos de formação de professores e capacitação dos professores para a incorporação das inovações.

3.2 Análise de propostas curriculares oficiais do Brasil

3.2.1 Guias Curriculares para o Ensino do 1° Grau: Matemática - São Paulo - 1975

No Estado de São Paulo nesse período, as escolas públicas receberam orientações sobre a Matemática Moderna por intermédio do documento Guias Curriculares para o Ensino do 1° Grau: Matemática, que será analisado em seguida. Esse documento desaconselhava, no 1° grau, um tratamento axiomático e afirmava que a orientação moderna no ensino da Matemática conferia maior dinamismo à aprendizagem, o que não ocorria anteriormente. Além disso, na introdução, declarava que:

> Sentimos que a orientação dada a um curso de Matemática deve ser moderna e, para isso, é necessário que se dê ênfase, no estudo da matéria, a certos aspectos que visam a destacar a indiscutível unidade da Matemática, mostrando-a como uma construção única sem compartimentos estanques. Dentre esses aspectos, gostaríamos de evidenciar dois deles, que consideramos de importância fundamental: o papel central desempenhado pelas estruturas matemáticas, estruturas essas que podem ser evidenciadas no estudo dos campos numéricos bem como na geometria, e o importantíssimo conceito de relação e, mais especificamente, o conceito de função, que pode ser abordado não só no estudo das funções numéricas, como também no estudo das *transformações geométricas*. Além disso, é de importância primordial destacar o papel do raciocínio matemático (p. 171).

Os conteúdos do programa proposto foram agrupados em quatro temas básicos:

I. Relações e funções;

II. Campos numéricos;

III. Equações e inequações;

IV Geometria.

As primeiras noções de funções eram abordadas na 5ª série e na 6ª série eram propostos os seguintes conteúdos:

– noções de transformação geométrica;

– noções de translação.

As noções sobre transformações geométricas eram introduzidas nessa série e, de acordo com o Guia da Secretaria de Educação, tinham como objetivos específicos:

> - Relacionar a idéia de função à de transformação do plano nele mesmo;
> - Saber que a isometria é um tipo de transformação que conserva as distâncias;

- Reconhecer figuras congruentes como figuras que se correspondem por uma isometria;
- Determinar segmento correspondente a outro por meio de uma translação;
- Associar o conceito de paralelogramo ao de translação (Guias, p. 223 e 224).

Na 7ª série, outras transformações geométricas eram estudadas e o guia indicava como conteúdos:

– simetria axial;

– simetria central;

– translação.

Ainda de acordo com o guia, como objetivos constavam:

- Construir os pontos simétricos de pontos dados em relação a uma reta;
- Fazer diagramas de "é o simétrico de" em relação a uma reta (vice-versa);
- Reconhecer a propriedade simétrica da relação "é o simétrico de";
- Reconhecer os eixos de simetria numa figura geométrica;
- Determinar a figura simétrica de uma figura relativa a um eixo de simetria;
- Determinar os invariantes por uma simetria axial;
- Construir os pontos simétricos de pontos dados em relação a um ponto;
- Fazer diagramas de "é o simétrico de" em relação a um ponto (vice-versa);
- Reconhecer a propriedade simétrica da relação "é o simétrico de" em relação a um ponto;
- Determinar a figura simétrica de uma figura relativa a um ponto;
- Determinar os invariantes por uma simetria central;
- Relacionar a simetria central com a simetria axial;

- Construir os pontos correspondentes por uma translação;

- Fazer diagramas de “é o correspondente de" por uma translação;

- Determinar os invariantes por uma translação (Guias, p. 225-226).

Sugeria, caso a classe o permitisse, mostrar que, se dois triângulos são congruentes, um deles pode ser obtido do outro compondo, no máximo, três simetrias axiais.

Os quatro casos de congruência de triângulos seriam identificados e utilizados para demonstrar as principais propriedades dos triângulos e dos quadriláteros.

Para a 8ª série, no guia a noção de homotetia era introduzida com os seguintes objetivos específicos:

- Determinar o homotético de um ponto dado;

- Relacionar o valor da razão com:

  * a posição de pontos homotéticos em relação ao centro de homotetia;

  * a ampliação, conservação ou redução da figura;

- Traçar diagramas de uma homotetia;

- Determinar os invariante por uma homotetia (Guias, p.227).

Nessa série, a homotetia permitiria a construção de noções básicas para a idéia de semelhança de triângulos.

Em 1979, como resultado do Projeto Capacitação de Recursos Humanos, foram publicados pela Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas, Cenp-SP, os Subsídios para a Implementação do Guia Curricular de Matemática, com oito volumes. Quatro volumes eram destinados ao ensino de 1ª a 4ª série, dos quais dois com atividades de álgebra e de geometria e dois com informações desses dois campos para o professor. Outros quatro volumes semelhantes eram destinados ao ensino de 5ª a 8ª série.

O objetivo da publicação era fornecer ao professor elementos que permitissem identificar atividades adequadas à implementação das propostas curriculares de

Matemática. As atividades, envolvendo tarefas múltiplas e progressivas, seriam realizadas pelos alunos, e o professor, seguindo as orientações metodológicas que as acompanhavam, supervisionaria a execução.

Enfatizava-se, em todos os volumes, que as atividades eram mera sugestão para o professor e não esgotavam todas as possibilidades existentes. A ele caberia, de acordo com as condições de trabalho e recursos existentes, decidir sobre a conveniência de aplicá-las, ampliá-las ou modificá-las.

O documento Subsídios para a Implementação do Guia Curricular de Matemática — Geometria para o 1° Grau: 5ª a 8ª séries — Atividades, com uma proposta menos centrada nos conteúdos e mais no processo ensino-aprendizagem, destaca, na introdução, os seguintes aspectos:

- o problema do ensino da Matemática não está no conteúdo e sim na metodologia utilizada na abordagem;
- a necessidade de haver participação ativa do aluno na aprendizagem para que ele encontre o próprio caminho na resolução dos problemas;
- a margem de liberdade nas atividades propostas para o aluno no desenvolvimento dos conceitos abordados;
- a importância de explorar conceitos sem preocupação de excessivo rigor;
- o fato de que qualquer situação explorada deve permitir que se façam pequenas "demonstrações locais";
- a possibilidade de o professor acatar ou não as sugestões de notações usadas nos Guias Curriculares para a geometria (letras maiúsculas para figuras geométricas, como conjunto de pontos, e minúsculas para pontos, como elementos de conjuntos).

Como orientação didática, nas observações ao professor, propõe o uso de recursos como papéis transparentes, dobraduras em papel e espelhos, para concretizar a simetria axial.

O documento Guias Curriculares, elaborado no início da década de 70, foi responsável pela introdução das orientações que o movimento Matemática Moderna preconizava no Brasil desde o início da década de 60.

Como procurava enfatizar, entre outros, dois aspectos que considerava fundamentais — o papel central das estruturas matemáticas e o importante conceito de relações e funções — a abordagem das transformações geométricas foi feita a partir da idéia de funções aplicadas a pontos do plano, dando ao aluno uma idéia mais teórica e abstrata do que intuitiva desses conceitos. Tal estrutura formal de ensino era muito precoce para os estudantes do ensino fundamental, como, posteriormente, as pesquisas dos Van Hiele indicaram.

Nesse documento, os objetivos e conteúdos estavam centrados no conhecimento matemático e não levavam em consideração as possibilidades de aprendizagem do aluno. De fato, é na década de 80 que começam a ser divulgadas pesquisas com foco na aprendizagem do aluno, como as citadas no Capítulo 2 deste trabalho. A influência das novas pesquisas é observada nas propostas curriculares das décadas seguintes.

Já nos Subsídios para a Implementação do Guia Curricular de Matemática algumas inovações se esboçam: maior atenção à metodologia, participação ativa do aluno na busca de soluções, maior liberdade para o aluno desenvolver os conceitos, não preocupação com o excessivo rigor e sugestões de recursos como espelhos, papéis transparentes e dobraduras para concretizar a simetria.

3.2.2 Proposta Curricular para o Ensino da Matemática - São Paulo - 1986

A Proposta Curricular para o Ensino de Matemática: 1° Grau publicada pela Secretaria de Estado da Educação de São Paulo em 1986 e elaborada pela Coordenadoria de Ensino e Normas Pedagógicas, Cenp, sugeria introduzir noções de simetria em figuras planas e não planas no ciclo básico, para alunos de 7 e 8 anos, por meio de observação intuitiva em jogos utilizando o próprio corpo, cortes ou dobraduras em figuras planas, espelhos etc. Para as demais séries do ensino fundamental, não havia propostas sobre transformações geométricas.

A Cenp publicou, entre 1994 e 1996, a coleção *Experiências Matemáticas*, *5ª a 8ª Série,* para dar subsídios ao professor e contribuições para a realização de um trabalho, em sala de aula, no qual o aluno participasse efetivamente do processo de construção de seu conhecimento. No livro, eram propostas várias atividades sobre simetrias axiais e centrais, translações, rotações e homotetias, com a preocupação de aplicá-las em construções geométricas.

Na 5ª série, com o objetivo de analisar características de figuras transformadas por movimentos no plano (simetria axial), bem como identificar eixos de simetrias de figuras planas (polígonos e outras figuras), as atividades propostas utilizavam imagens em espelhos, papéis transparentes para obter o simétrico de um ponto por dobradura e diversos tipos de malha. As atividades propostas sobre reflexões sucessivas em eixos concorrentes ou paralelos permitiam observar outros movimentos como rotação, translação e simetria central, relacionando-os a composições de simetrias axiais.

Na 6ª série, as atividades tinham outros objetivos, como usar régua e compasso nas construções geométricas. A simetria axial era ferramenta para o estudo e construção da mediatriz de um segmento, para a construção de uma reta perpendicular a outra e para o estudo e construção da bissetriz de um ângulo. Eram propostas atividades sobre rotações e translações.

Na 7ª série, o objetivo era construir o conceito de congruência de duas figuras e, em particular, o de triângulos congruentes. As atividades propostas sobre simetria axial eram realizadas com régua, compasso e transferidor, permitindo que os alunos descobrissem a congruência entre elementos correspondentes de duas figuras. As atividades relacionavam os principais movimentos de uma figura com as transformações geométricas.

Na 8ª série, o propósito era desenvolver experimentalmente a noção de semelhança de figuras planas. Começando com atividades de ampliação e redução de figuras, usando redes de diversos tipos e tamanhos, observava-se a deformação ou não das figuras. Com a noção de homotetia, a semelhança de figuras é abordada, destacando quais elementos ou propriedades permanecem, quais os que mudam e como se modificam. Numa outra atividade, o aluno é induzido a efetuar a composição de uma isometria com uma homotetia, chegando ao conceito de semelhança de triângulos.

Analisando a coleção *Experiências Matemáticas: 5ª a 8ª Série,* podemos verificar que as atividades propostas atendem a indicações didáticas que permitem ao aluno descobrir o sentido físico e dinâmico da simetria axial por meio de manipulações de materiais como espelhos e papéis transparentes. De maneira gradativa, passando da manipulação de materiais concretos ao uso da régua e compasso, o aluno é levado a observar propriedades, conceitos básicos da geometria e adquirir o conceito de ponto simétrico a outro, em relação a uma reta. Finalmente, a construção com régua e compasso do simétrico de uma figura permite ao aluno superar os principais e mais resistentes obstáculos didáticos indicados nas pesquisas, como a posição do eixo de simetria e a posição relativa eixo-objeto.

3.2.3 Proposta Curricular de Matemática para o Cefam e Habilitação Específica para o Magistério - Secretaria da Educação de São Paulo, - Cenp - 1990

O subprojeto "Elaboração de uma proposta para o ensino de matemática no curso Habilitação Específica para o Magistério (HEM)" surgiu do trabalho integrado entre a Cenp-SP e o Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo — IME-USP, participantes do projeto Rede Integrada de Programas de Ensino de Ciências, Ripec, firmado pelo PADCT/Capes. É um projeto para um curso de 2° grau, com duração de quatro anos, cuja meta é formar professores das quatro séries iniciais do ensino fundamental.

Participaram do projeto Ripec um grupo formado por professores do Centros Específicos para a Formação de Alunos do Magistério, Cefam, da Grande São Paulo, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, de escolas da rede de ensino e da equipe técnica de Matemática da Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas, Cenp/SE.

A essência da proposta é a abordagem que deve ser dada aos conteúdos, fazendo com que o aluno participe da construção do conhecimento. Fugindo ao esquema de aulas expositivas, o conteúdo é abordado a partir de situações-problema e de atividades, tornando-o mais acessível ao aluno. Isso leva a enfatizar dois recursos metodológicos: a resolução de problemas e a história da Matemática, no currículo da HEM — um documento oficial que propõe a abordagem de transformações geométricas desde as séries iniciais do ensino fundamental, introduzindo seu estudo num curso de formação de professores das séries iniciais.

Analisando as propostas de atividades sobre transformações geométricas, observa-se que, na 1ª série, é explorada a idéia de simetria tanto no plano como no espaço, nos objetos da natureza, nas manifestações artísticas, em mosaicos, logotipos etc. Usando dobraduras e espelhos, sugere que se iniciem os trabalhos com simetria em relação a um eixo, chegando depois à classificação de triângulos e quadriláteros segundo o número de eixos de simetria que possuem.

3.2.4 Parâmetros Curriculares Nacionais: — 1997 e 1998

No Brasil, no início da década de 90, vários Estados tinham propostas curriculares com orientações diversas. Algumas já haviam incorporado inovações didáticas e outras continuavam a seguir orientações não atualizadas.

O documento Parâmetros Curriculares Nacionais, PCN, elaborado pela Secretaria de Educação Fundamental do MEC, pretendeu construir referências nacionais para nortear o processo educativo no país, respeitando as diferenças regionais, culturais e políticas. Entre os propósitos do documento, assinalam-se: contribuir para a democratização do ensino e para a melhoria na formação do estudante numa nova sociedade e orientar a formação de professores e a elaboração de materiais didáticos. Nele, o termo currículo, mais do que um programa de conteúdos, significa um conjunto de princípios e metas orientadoras do processo educativo.

Nos PCNs, os conteúdos de Matemática foram organizado em quatro blocos: Números e Operações; Espaço e Forma; Grandezas e Medidas; e

Tratamento da Informação. O tema transformações geométricas encontra-se no bloco Espaço e Forma, a partir do 2° ciclo[1].

Na listagem de objetivos, de conteúdos e nas orientações didáticas desse ciclo destacamos a presença das transformações geométricas:

> Objetivo:
> - Identificar características das figuras geométricas, percebendo semelhanças e diferenças entre elas, por meio de composição e decomposição, simetrias, ampliações e reduções (PCN 1997, p. 81).
>
> Conteúdos:
> - Identificação de simetrias em figuras tridimensionais (idem, p. 88);
> - Sensibilidade para observar simetrias e outras características das formas geométricas, na natureza, nas artes, nas edificações (idem, p. 92).

Quanto às orientações didáticas para o 2° ciclo, encontra-se que:

> Um trabalho constante de observação e construção das formas é que levará o aluno a perceber semelhanças e diferenças entre elas. Para tanto, diferentes atividades podem ser realizadas: compor e decompor figuras, perceber a simetria como característica de algumas figuras e não de outras, etc. (idem, p. 128).

Destaca a possibilidade de levar a criança a perceber e valorizar aspectos geométricas em elementos da natureza e em criações do homem, explorando atividades que usam formas como as sugeridas pelas flores, animais, pelas formas em obras de arte, pinturas, esculturas, arquiteturas, bem como desenhos em tecidos, faixas decorativas, mosaicos etc.

Para o 3° e 4° ciclo do ensino fundamental, a respeito da seleção de conteúdos, considera que:

> Deve destacar-se também nesse trabalho a importância das transformações geométricas (isometrias, homotetias), de modo que permita o desenvolvimento de habilidades de percepção espacial e como recurso para induzir de forma

[1] Os objetivos e conteúdos nos PCNs estão organizados em quatro ciclos, sendo o 2° ciclo correspondente à 3ª e 4ª série, o 3° ciclo à 5ª e 6ª série e o 4° ciclo à 7ª e 8ª série.

experimental a descoberta, por exemplo, das condições para que duas figuras sejam congruentes ou semelhantes.

Além disso, é fundamental que os estudos do espaço e forma sejam explorados a partir de objetos do mundo físico, de obras de arte, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato, de modo que permita ao aluno estabelecer conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento (PCN, 1998, p. 51).

Dentre os objetivos e conteúdos para o 3° ciclo, ressalta-se:

Objetivo:
- resolver situações-problema que envolvam figuras geométricas planas, utilizando procedimentos de decomposição e composição, transformação, ampliação e redução (idem, p. 65).

Conteúdos:
- transformação de uma figura no plano por meio de reflexões, translações e rotações e identificação de medidas que permanecem invariantes nessas transformações (medidas dos lados, dos ângulos, da superfície);
- ampliação e redução de figuras planas segundo uma razão e identificação dos elementos que não se alteram (medida de ângulos) e dos que se modificam (medida dos lados, do perímetro e da área; idem, p. 73).

Nesse ciclo, os alunos reorganizam e ampliam as noções iniciais sobre reflexão em reta, abordadas no ciclo anterior, observando os elementos invariantes por essa transformação. São introduzidas outras transformações geométricas, as translações e rotações. As situações-problema propostas envolvem comparações de figuras, observando elementos que não se alteram nessas três transformações geométricas. Também, observa que:

Ainda neste ciclo, as atividades geométricas centram-se em procedimentos de observação, representações e construções de figuras, bem como o manuseio de instrumentos de medidas que permitam aos alunos fazer conjecturas sobre algumas propriedades dessas figuras. Desse modo, o estudo do espaço e das formas privilegiará a observação e a compreensão de relações e a utilização das noções geométricas para resolver problemas, em detrimento da simples memorização de fatos e de um vocabulário específico. Porém, isso não significa que não se deva ter preocupação em levar os alunos a fazer uso de um vocabulário mais preciso.

Outro aspecto que merece atenção neste ciclo é o ensino de procedimentos de construção com régua e compasso e o uso de outros instrumentos, como esquadro, transferidor, estabelecendo-se a relação entre tais procedimentos e as propriedades geométricas que neles estão presentes (idem, p. 68).

Para o 4° ciclo, tem-se:

Objetivos:
- produzir e analisar transformações e ampliações / reduções de figuras geométricas planas, identificando seus elementos variantes e invariantes, desenvolvendo o conceito de congruência e semelhança (idem, p. 82).

Conteúdos:
- desenvolvimento do conceito de congruência de figuras planas a partir de transformações (reflexões em retas, translações, rotações e composições desta), identificando as medidas invariantes (dos lados, dos ângulos, da superfície);
- desenvolvimento da noção de semelhança de figuras planas a partir de ampliações ou reduções, identificando as medidas que não se alteram (ângulos) e as que se modificam (dos lados, da superfície e perímetro; idem, p. 89).

Observa-se ainda que:

O estudo dos conteúdos do bloco Espaço e Forma tem como ponto de partida a análise das figuras pelas observações, manuseios e construções que permitam fazer conjecturas e identificar propriedades. É importante também na exploração desse bloco desenvolver atividades que permitam ao aluno perceber que pela composição de movimentos é possível transformar uma figura em uma outra.

Construindo figuras a partir da reflexão, por translação, por rotação de uma outra figura, os alunos vão percebendo que as medidas dos lados e dos ângulos, da figura dada e da figura transformada são as mesmas. As atividades de transformação são fundamentais para que o aluno desenvolva habilidades de percepção espacial e podem favorecer a construção da noção de congruência de

> figuras planas (isometrias). De forma análoga, o trabalho de ampliação e redução de figuras permite a construção da noção de semelhança de figuras planas (homotetias).
>
> Também neste quarto ciclo, os problemas de Geometria vão fazer com que o aluno tenha seus primeiros contatos com a necessidade e as exigência estabelecidas por um raciocínio dedutivo. Isso não significa fazer um estudo absolutamente formal e axiomático da Geometria (idem, p. 86).

Nesse ciclo, as transformações geométricas são retomadas com a intenção de avançar para além da conceituação e dedução de suas propriedades. As transformações isométricas, que conservam a colinearidade de pontos, os comprimentos e os ângulos, são utilizadas para a compreensão das propriedades das figuras e também como ponto de partida para a construção da noção de figuras congruentes. As atividades que envolvem ampliações e reduções de figuras levam o aluno a relacionar comprimentos para observar a proporcionalidade entre eles e com a noção de homotetia desenvolve-se a de figuras semelhantes. Introduzidas por meio das transformações geométricas, as noções de congruência e de semelhança de figuras são mais amplas do que as estabelecidas para triângulos.

Além disso, destaca que:

- a semelhança de figuras permite observar a proporcionalidade (dos lados e perímetros) ou a não proporcionalidade (das superfícies) entre grandezas, levando o aluno a perceber a conexão que existe entre a álgebra e a geometria;
- pequenas e simples “demonstrações” serão trabalhadas com os alunos, sem que as verificações empíricas sejam abandonadas, pois estas favorecem conjecturas e ampliam o grau de compreensão dos conceitos.

Nas orientações didáticas para o 3° e 4° ciclos, o documento propõe:

> As atividades que envolvem as transformações de uma figura no plano devem ser privilegiadas nesses ciclos, porque permitem o desenvolvimento de conceitos geométricos de uma forma significativa, além de obter um caráter mais "dinâmico" para este estudo. Atualmente, existem *softwares* que exploram problemas envolvendo transformações das figuras.
>
> (...)
>
> À primeira vista as transformações podem parecer um assunto que não tem relação com o dia-a-dia, mas, refletindo e observando um pouco, nota-se, por exemplo, que as simetrias estão muito presentes no cotidiano. Em inúmeros objetos físicos ocorrem aproximações de planos de simetria de reflexão. Em representações planas desses objetos, tais planos de simetria reduzem-se a eixos de simetria. No corpo humano pode-se observar (aproximadamente) um plano de simetria. Assim, também a imagem de um objeto no espelho é simétrica a ele. Há eixos de simetria em diversas criações do homem, como desenhos de aeronaves, edifícios e móveis.
>
> As simetrias centrais e de rotação também surgem em diversas situações: desenhos de flores, logotipos de empresas, desenhos de peças mecânicas que giram, copos, pratos, bordados, etc. Os exemplos de translação também são fáceis de encontrar: grades de janelas, cercas de jardins, frisos decorativos em paredes, azulejos decorados, etc. (idem, p. 124)

Destacando que diversas situações cotidianas e muitas profissões requerem que o indivíduo desenvolva competência em geometria, considera que:

> Também é cada vez mais indispensável que as pessoas desenvolvam capacidade de observar o espaço tridimensional e de elaborar modos de comunicar-se a respeito dele, pois a imagem é um instrumento de informação essencial no mundo moderno.
>
> (...)
>
> É importante que os alunos percebam que as transformações foram incorporada como linguagem básica nos programas de computação gráfica. Assim, ao manipular esses programas, o usuário faz simetrias de todos os tipos, ampliações e reduções. (idem, pp 122-125).

Sintetizando a apresentação feita, observamos que o assunto transformações geométricas é proposto nos PCNs desde o 2° ciclo do ensino fundamental, inicialmente de forma experimental, sendo retomado, ampliado e aprofundado nos ciclos seguinte.

No 2° ciclo do ensino fundamental, as orientações são feitas no sentido de que as simetrias sejam abordadas para a observação de características de figuras em objetos e configurações do cotidiano da criança. Já no 3° ciclo, além das observações das figuras, propõe-se que sejam feitos trabalhos com construções, usando régua, compasso, esquadro e transferidor, e que, nessa etapa, as propriedades geométricas das figuras sejam observadas e utilizadas. No estudo por nós realizado com alunos brasileiros, relatado no Capítulo 2, item 2.4, havíamos constatado que o uso de régua e compasso na construção do simétrico de figuras permitiu superar os obstáculos que a escolha de variáveis como a posição do eixo de simetria (inclinada) e a posição relativa eixo objeto provocou nas atividades desse estudo. No 4° ciclo, as reflexões em reta são retomadas, acrescidas de outras transformações geométricas, procurando-se salientar os elementos invariantes pelas transformações e que levam à idéia de congruência de figuras. A noção de congruência de triângulos, como era definida tradicionalmente (apenas como congruência de lados e ângulos correspondentes), tem pouco significado para o estudante do ensino fundamental, e a idéia de superposição e coincidência de figuras também traz problemas na congruência de figuras não planas. Do mesmo modo, a noção de semelhança de figuras planas é abordada por ampliação e redução de figuras junto com a homotetia.

Com o propósito de adequar o trabalho escolar a uma nova realidade, o documento PCN se apóia em princípios decorrentes de pesquisas, estudos, debates e práticas desenvolvidas nos últimos anos. Destacamos alguns desses princípios norteadores e também a forma como os conteúdos foram organizados que, na nossa opinião, constituem a grande inovação do documento em relação a propostas curriculares anteriores:

- A aprendizagem em Matemática está ligada à compreensão, isto é, à atribuição e apreensão de significado; apreender o significado de um objeto ou acontecimento pressupõe identificar suas relações com outros objetos e acontecimentos. Assim, o tratamento dos conteúdos em compartimentos estanques e numa rígida sucessão linear deve dar lugar a uma abordagem em que as conexões sejam favorecidas e destacadas. O significado da Matemática para o aluno resulta das conexões que ele estabelece entre ela e as demais áreas, entre ela e os Temas Transversais, entre ela e o cotidiano e das conexões que ele estabelece entre os diferentes temas matemáticos. (idem, p. 57).

... A organização de conteúdos pressupõe, portanto, que se analisem alguns pontos:

- Os conteúdos organizados em função de uma conexão não precisam ser esgotados necessariamente de uma única vez, embora se deva chegar a algum nível de sistematização para que possam ser aplicados em novas situações. Alguns desses conteúdos serão aprofundados, posteriormente em outras conexões, ampliando dessa forma a compreensão dos conceitos e procedimentos envolvidos;
- Os níveis de aprofundamento dos conteúdos em função das possibilidades de compreensão dos alunos, isto é, levando em conta que um mesmo tema será explorado em diferentes momentos da aprendizagem e que sua consolidação se dará pelo número cada vez maior de relações estabelecidas (idem, p. 53).

As orientações dos PCNs contribuem para que o professor não trate os conteúdos de forma compartimentada e sim de modo a favorecer e destacar as conexões possíveis entre as transformações geométricas com o cotidiano e com outras áreas da Matemática. Também, uma abordagem das transformações geométricas em quase todos os ciclos do ensino fundamental, em diversos momentos e em níveis cada vez mais profundos, permite uma aprendizagem que pode fazer com que os obstáculos diagnosticados nas pesquisas possam ser gradativamente superados pelos alunos. Como vimos no estudo do Capítulo 2, item 2.4, a apresentação das reflexões em reta, em sucessivas etapas da vida escolar dos estudantes, permitiu interações cada vez mais eficientes com o assunto, até o domínio da noção e das propriedades que as caracterizam.

3.3 Análise de documentos oficiais e de instituições em outros países

3.3.1 Padrões curriculares nos Estados Unidos

Em 1986, o National Council of Teachers of Mathematics, NCTM, criou uma comissão que elaborou o documento “Padrões curriculares e de avaliação para a educação matemática”[2] com o objetivo de ajudar na melhoria de qualidade no ensino da Matemática. As principais conclusões e propostas feitas no documento, referentes ao tema desse trabalho, serão apresentadas a seguir de forma resumida.

Os níveis escolares americanos foram agrupados em três blocos por faixas etárias: alunos até 10 anos; alunos de 11 a 14 anos; e alunos de 15 a 18 anos. No documento, integram-se três características das matemáticas.

Em primeiro lugar, “saber” matemática é “usar” a matemática. O conhecimento de uma informação só tem valor se ele for útil em alguma atividade usada para chegar a um objetivo. A atividade docente deve, portanto, dar ênfase ao “fazer”, mais do que ao “saber”.

Em segundo lugar, a Matemática é uma disciplina básica e seu crescimento vem aumentando conforme sua utilidade. Um currículo adequado de Matemática pode proporcionar oportunidades de desenvolver uma compreensão de modelos, estruturas e simulações que possam ser transferidas para outras áreas do conhecimento.

Em terceiro lugar, a Matemática sofreu mudanças e crescimentos significativos para acompanhar os avanços tecnológicos e a ampliação das áreas onde é aplicada.

Na faixa até 10 anos, o currículo deve se preocupar com o desenvolvimento de estruturas conceituais e relações matemáticas. As crianças adquirem conceitos claros e estáveis, dão sentido a um contexto de situações físicas e podem chegar a abstrações matemáticas a partir de experiências. A aprendizagem deve ser ativa, com grande variedade de materiais para manipulação.

---

[2] National Council of Teachers of Mathematics. Standares curriculares y de evaluación para la educación matemática.

Por meio da geometria a criança poderá ter um ponto de vista diferente da Matemática. Explorando padrões e relações com modelos, manipulando materiais como blocos lógicos, geoplanos e papel quadriculado, a criança poderá aprender as propriedades das figuras e fortalecer a intuição e o conhecimento sobre objetos espaciais. Para investigar eixos de simetria, o uso de dobras no papel e do espelho leva a observar figuras em diversas posições, suas propriedades, no que são semelhantes e no que são contrastantes.

Na faixa de 11 a 14 anos, os estudantes devem aprofundar os conhecimentos de geometria adquiridos anteriormente. O estudo de geometria nessa faixa etária vai conectar explorações informais iniciadas nas séries anteriores com os processos mais formais que serão estudados em etapas posteriores. Toda a Matemática deve ser, na faixa de 11 a 14 anos, estudada num contexto que dê sentido às idéias e conceitos.

A geometria de uma, duas ou três dimensões será apresentada, de acordo com o NCTM, com o objetivo de:

- explorar transformações de figuras geométricas;
- representar e resolver problemas por meio de modelos geométricos;
- entender e aplicar proporções e relações geométricas;
- reconhecer a geometria como meio de descrever o mundo físico (NCTM, p. 115).

Para os estudantes da faixa de 15 a 18 anos, os conteúdos matemáticos caracterizam-se por defender um deslocamento do centro de interesse do currículo, em que a memorização de fatos e procedimentos e a destreza com lápis e papel têm destaque para um outro enfoque de estruturas conceituais, de representações e conexões múltiplas, de criação de modelos matemáticos e resolução de problemas. Em especial, na integração de idéias da álgebra e geometria, na qual a representação gráfica tem papel importante nessa conexão. Como objetivos, indica:

- deduzir as propriedades de uma figura por meio de transformações e de coordenadas;
- identificar figuras congruentes e semelhantes por meio de transformações;
- analisar as propriedades das transformações euclidianas e relacionar translações com vetores;
- utilizar as transformações, os eixos coordenados e os vetores na resolução de problemas (idem, p. 115).

O documento ressalta que entre a álgebra e a geometria há uma das mais importantes conexões de toda a Matemática. A história da Matemática mostra o impulso considerável produzido no século XVII, quando as idéias geométricas dos antigos foram traduzidas na linguagem da geometria analítica e se transformaram em novas ferramentas para resolver uma grande variedade de problemas. As transformações e suas ligações com sistemas algébricos podem trazer aos futuros universitários experiências valiosas relacionadas à composição de funções e estruturas de grupo.

Mesmo trabalhando separadamente a geometria sintética, a analítica e a das transformações, os estudantes acabam tendo maior número de possibilidades para comparar e contrastar os sistemas, passar com desenvoltura de um para o outro. É fundamental que compreendam que um problema particular pode ser resolvido com mais facilidade num ou noutro sistema.

O documento destaca ainda que movimentos físicos como translações, reflexões, giros e dilatações são representados por transformações geométricas e estas podem constituir-se em ferramentas importantes na resolução de problemas, bem como permitir a aquisição de conceitos amplos de congruência e semelhança. Há programas de informática baseados nessa perspectiva dinâmica que podem ser usados para explorar as propriedades da translação, da simetria em relação a uma reta, rotação e homotetia, bem como as combinações entre elas. Tais experiências gráficas contribuem tanto para a aquisição de estruturas conceituais sobre transformações, como para o desenvolvimento de habilidades para perceber figuras congruentes e semelhantes.

O documento americano propõe que, numa primeira etapa, as crianças devem ter um aprendizado ativo por meio de manipulação de materiais e, a partir de experiências, apreender o sentido físico das transformações geométricas. Em etapas posteriores, por meio de abstrações, chegarão a um enfoque de estruturas conceituais, de conexões múltiplas, de criação de modelos matemáticos e à resolução de problemas (etapa correspondente ao nosso ensino médio). Entre essas duas etapas ficaria uma intermediária, na qual se faria a ligação entre os aspectos experimentais e os formais das transformações geométricas. De forma gradativa, passar-se ia das manipulações de materiais como espelhos e papéis transparentes ou quadriculados aos instrumentos da geometria, como régua e compasso, e, depois, aos processos mais formais e dedutivos.

Na opinião dos educadores americanos, as transformações geométricas fizeram com que a Matemática passasse de disciplina estática a dinâmica, o que possibilitou descrever e criar figuras em movimento numa tela de vídeo. Movimentos físicos como translação, reflexão, giros, simetria podem ser representados pelas transformações geométricas. Um conceito amplo de congruência e semelhança pode ser adquirido usando as transformações geométricas como ferramenta na resolução de problemas. Futuramente, as idéias desenvolvidas na relação da geometria com a álgebra servirão para que os alunos universitários entendam melhor a composição de funções e as estruturas de grupo.

Como se vê, o documento americano propõe reformulações no currículo escolar, atendendo às investigações sobre modernas concepções do processo ensino-aprendizagem. Outro papel é proposto para a Matemática, e novas necessidades da sociedade são nele consideradas; o "fazer", o "utilizar" e o "aplicar" são os aspectos valorizados.

3.3.2 Propostas da Espanha

Novas condições de democracia, desenvolvimento e abertura crescentes levaram à necessidade de reformas no sistema educativo espanhol a partir do final dos anos 70. Em resposta a essas exigências, em 1983, o Ministério da Educação iniciou a Reforma Experimental do Ensino Médio (14-18 anos); e, em 1984, iniciou a Reforma Experimental do Ciclo Superior do Ensino Básico (12-14 anos).

No início da década de 80, as primeiras sociedades de professores de Matemática foram constituídas, divulgando propostas metodológicas mais inovadoras. Foi nessa época que as Administrações Educativas criaram os centros de professores, que desenvolveram planos de formação de professores, antes a cargo das universidades e entidades privadas.

Em 1988, foram divulgados os aspectos estruturais que integravam a reforma, incluindo os Planos de Formação de Professores, Inovação e Investigação Educativa. O período de escolaridade obrigatória, que antes ia até os 14 anos, foi ampliado para 16 anos, com o ensino obrigatório abrangendo duas etapas: Educação Primária, dos 6 aos 12 anos, e Educação Secundária Obrigatória, ESO, dos 12 aos 16 anos.

Em julho de 1991, depois de amplos debates, surgiram os Ensinos Mínimos Nacionais, a base para os futuros currículos de algumas comunidades autônomas. A implantação da reforma iniciou-se em 1992-1993 para o 1° ciclo da etapa Primária e de forma escalonada continuou para os outros ciclos.

Os critérios metodológicos que nortearam a elaboração do Projeto Curricular apresentam uma concepção construtivista de aprendizagem, o que significa levar em consideração o ponto de partida do aluno e o processo que ele usa para elaborar conceitos matemáticos. A partir dos conhecimentos prévios, os alunos constroem novos conceitos, trabalhando com grande variedade de situações concretas.

Os conteúdos foram agrupados em blocos e, em cada um deles, aparecem três tipos de conteúdo: conceitos, procedimentos ou estratégias e atitudes. Destacam-se diferenças essenciais em relação ao sistema educativo anterior, como a inclusão da aprendizagem de atitudes, a importância dada ao desenvolvimento de estratégias para a resolução de problemas e a atribuição de um peso importante à geometria no plano e no espaço.

Para a Educação Primária, no bloco de geometria, os conteúdos propostos foram as regularidades e simetrias em figuras geométricas. Esses conteúdos serão trabalhados em situações de manipulações de materiais, como espelhos, dobraduras no papel, réguas etc., e em aplicações práticas, como, por exemplo, nas artes, arquitetura, publicidade, faixas decorativas etc.

Nos currículos da Educação Secundária Obrigatória, continua-se o estudo das isometrias. Os alunos utilizam aproximações sucessivas, desde as atividades de manipulação e de apreensões intuitivas, passando por etapas intermediárias de representações por desenhos, até a compreensão do conceito.

Os conteúdos foram agrupados em cinco blocos:

1. Números e operações: significados, estratégias e simbolização;

2. Medida, estimativa e cálculo de grandezas;

3. Representação e organização do espaço;

4. Interpretação, representação e tratamento da informação;

5. Tratamento do acaso.

Na ESO[3], com alunos da faixa etária de 12 a 16 anos, no 3° curso, estudam-se as transformações geométricas. Entre os objetivos a ser atingidos pelos alunos destacam-se:

- descrever as transformações geométricas de translação e simetria, analisando as propriedades invariantes;
- usar os conceitos de proporcionalidade numérica e geométrica para os elementos proporcionais e razões de semelhança;
- perceber o aspecto criativo, estético e utilitário da Matemática;
- utilizar conteúdos matemáticos para observar e interpretar melhor o mundo real.

Os conteúdos do curso estão distribuídos e no bloco 3, representação e organização do espaço, encontram-se os seguintes conteúdos:

- Translações no plano

1. vetores no plano;
2. componentes de um vetor;
3. soma de vetores;

[3] A ESO é constituída de quatro cursos, sendo o 3° curso correspondente à 8ª série de nosso ensino fundamental e o 4° curso correspondente à 1ª série de nosso ensino médio.

4. translação no plano;
5. equações da translação;
6. translações sucessivas.

- Simetria no plano

1. simetria axial;
2. simetria central;
3. equações da simetria em relação aos eixos coordenados;
4. equações da simetria em relação à origem;
5. simetrias axiais sucessivas;
6. simetrias centrais sucessivas.

Como procedimentos, espera-se, dos alunos do 3° curso que sejam capazes de:

- fazer uso das transformações geométricas translações e simetrias, levando em consideração as propriedades que se conservam nessas transformações;
- combinar movimentos, criar e classificar figuras a partir da observação;
- utilizar métodos indutivos e dedutivos para a obtenção de propriedades geométricas dos corpos e relações entre eles;
- resolver problemas geométricos.

Entre as atitudes a ser desenvolvidas nos alunos, destacam-se:

- valorização dos instrumentos de desenho;
- apreciação da beleza de certas configurações geométricas;

No mesmo 3° curso, os alunos estudam, no bloco de interpretação, representação e tratamento da informação, as diversas funções, e, entre os vários aspectos abordados no estudo, está a simetria. No estudo das funções polinomiais, chegam à construção de parábolas por translações e, nas funções racionais, utilizam a translação no gráfico de funções do tipo y = 1 / x. Os alunos estudam ainda congruências e semelhanças de triângulos e também suas aplicações.

No 4° curso, último ano da Educação Secundária Obrigatória, há certa diversificação, sendo oferecidas duas opções para a Matemática. No que concerne aos conteúdos sobre transformações geométricas, eles são praticamente os mesmos nos dois ramos, sendo diferentes apenas no enfoque dado.

A opção A, de caráter terminal, é orientada para o desenvolvimento de capacidades relacionadas com o entorno do aluno, dando especial importância à utilização da Matemática na comunicação habitual.

A opção B, de caráter formal, dá maior peso aos aspectos formais dos conteúdos, exigindo maior precisão na utilização dos conceitos e maior importância ao uso da linguagem simbólica e representações formais.

Os objetivos relacionados ao ensino das transformações geométricas no 4° curso são, no Curso A:

- descrever formas e configurações geométricas utilizando os conceitos de simetria, rotação, homotetia e semelhança;
- identificar relações de proporcionalidade numérica e geométrica na resolução de problemas;

no Curso B

- analisar as transformações geométricas de simetria, rotação, homotetia e semelhança, sensibilizando-se com a beleza que elas trazem às configurações geométricas;
- utilizar os conceitos de simetria, rotação, homotetia e semelhança na análise e descrição de formas e configurações geométricas.

Os conteúdos são:

- Rotações no plano
  1. rotações no plano;
  2. figuras homólogas; construções gráficas;
  3. rotações sucessivas;
  4. figuras com simetria rotacional;
  5. análise de figuras;
  6. movimentos no plano.

- Homotetia e semelhança
  1. proporcionalidade numérica e semelhança;
  2. homotetia;
  3. figuras homotéticas;
  4. Construção de figuras homotéticas.
  5. Análise de figuras.
  6. Transformações no plano.

Na opção B, de aspecto mais formal, acrescentam-se as composições de rotações e as de homotetias. As atitudes a serem desenvolvidas são:

- valorização da necessidade de representação gráfica em geometria;
- curiosidade em conhecer campos de aplicações das matemáticas;
- valorização do uso de instrumentos de desenho;
- apreciação da beleza de certas configurações geométricas;
- curiosidade e interesse em investigar sobre formas e configurações geométricas;
- confiança nas próprias capacidades para resolver problemas geométricos.

No 4° curso, no bloco de interpretação, representação e tratamento da informação, são propostas aplicações da proporcionalidade, estudo de funções simétricas e translação de funções trigonométricas, esta última somente para a opção B.

Os livros didáticos da Espanha trazem o conteúdo transformações geométricas em diferentes níveis de aprofundamento, alguns tratam do assunto de forma mais superficial e outros mais detalhadamente. A título de ilustração, estão reproduzidas, no Anexo IV, algumas páginas de um livro didático, considerado de boa qualidade para o 4° curso, *Matemáticas,* de C. Gonçales, J. Llorente e M.J. Ruiz, de 1996, da Editex, Espanha.

No quadro I, o esquema apresentado proporciona uma visão geral das isometrias. Podem-se observar características das diferentes isometrias ou movimentos, as relações entre elas e a composição de duas transformações geométricas.

O quadro II assinala os tipos de transformação geométrica, as que mantêm a forma e as que se deformam. É muito interessante e instrutivo o esquema que indica a semelhança como composta de uma homotetia com uma isometria, chegando ao teorema de Pitágoras generalizado e à proporcionalidade no espaço.

As transformações geométricas têm presença destacada no bloco da geometria. Apresentadas desde a Educação Primária e durante a Educação Secundária Obrigatória, vão sendo abordadas de forma cada vez mais rigorosa e detalhada.

Ao analisar as equações que descrevem as transformações geométricas, os alunos fazem conexões entre diferentes blocos de conteúdos matemáticos. Aprendem também aplicações das transformações geométricas no estudo das funções e nas construções dos gráficos respectivos.

A abordagem em vários domínios, geométrico, algébrico e funcional, proporciona uma visão mais ampla das transformações geométricas, levando o aluno a ter pontos de vistas diferente do mesmo conceito.

Com isso, o estudante aproxima-se do importante e fundamental conceito de transformação geométrica como função aplicada a pontos de um plano ou do espaço.

Observa-se que o currículo da Espanha apresenta uma inovação importante. Como conteúdos considera não só conceitos a ser estudados, como também os procedimentos e atitudes a ser desenvolvidos nos alunos.

3.3.3. Propostas da França

Na França, as transformações geométricas foram introduzidas em 1925 e, com enfoques diferentes, sempre ocuparam um lugar importante no ensino da geometria. Uma resolução do Ministério da Educação da França, de novembro de 1985, recomendava que:

- é preciso evitar a fragmentação e facilitar a boa estruturação dos conhecimentos e métodos;
- cada objeto matemático não deve ser considerado como algo que subsiste isoladamente e que necessite ser trabalhado exaustivamente. Ao contrário, deve-se fazê-lo funcionar em situações diversas como ferramenta para novas noções e, futuramente, ser incorporado como aquisição;
- o aluno não deve limitar-se à apreensão de conhecimentos formais, definições, resultados e técnicas. É preciso que os conhecimentos tenham significado e que possam ser mobilizados para a resolução de problemas;
- é preciso abrir um grande espaço para as atividades de construção, realização de desenhos, organização, tratamento de dados, cálculos, apresentando ao aluno o caráter de "ferramenta" da Matemática.

Na organização dos conteúdos, estes foram agrupados em três grandes blocos: trabalhos geométricos, trabalhos numéricos e organização e gestão de dados/funções. As transformações geométricas aparecem nos programas franceses da Escola Elementar ao Liceu[4] sob a argumentação de que:

> A introdução das transformações no ensino da geometria, a partir da escola elementar, apresenta diversas vantagens, entre as quais:
>
> 1) Do ponto de vista matemático e didático
>
> - é uma ferramenta atuante para o estudo da geometria “pura”;
> - podem levar a atividades formadoras ligando-as com números;
> - dão exemplos concretos da noção de aplicação.
>
> 2. Do ponto de vista pedagógico
>
> - uma transformação permite uma verdadeira ação do aluno (com a condição de que os métodos utilizados sejam bem escolhidos);
> - a utilização de dobras, de deslizamentos e de rotação de um desenho permite, desde as primeiras séries, introduzir iniciativas de justificação ou argumentação.
>
> As transformações podem dar lugar a múltiplas atividades ligadas ao ambiente da criança, tais como: ampliação ou redução de figuras por diversas isometrias, problemas de arquitetura, de espelhos, de decalques etc. (Marchivie, 1986, p. 52).

O programa começa pela transformação geométrica simetria ortogonal ou reflexão em reta, justificando a escolha do seguinte modo:

> Provavelmente é a transformação mais natural para o aluno, a mais fácil de explorar e da qual se pode comodamente dar uma imagem mental. Os modelos

[4] Os níveis escolares na França são: Escola Elementar, de 7 a 10 anos; Colégio, de 11 a 14 anos; Liceu, de 15 a 17 anos.

> físicos sobre os quais se apóia — dobradura (na justificativa das propriedades), "imagem no espelho" (na constatação das propriedades) — são bem operacionais.
>
> Enfim, de um ponto de vista puramente matemático, sabe-se que a simetria ortogonal dá origem às isometrias por composições sucessivas (idem, p. 53).

A utilização das transformações geométricas na Escola Elementar se limita a aplicações de simetrias, translações e rotações em figuras geométricas. Além disso, são propostos exercícios sobre ampliações e reduções de figuras desenhadas sobre malhas quadriculadas.

O que os alunos da Escola Elementar apresentam como conhecimento adquirido não é uma definição de uma noção nem uma propriedade institucionalizada, mas uma aquisição do "saber fazer". Nem sempre são capazes de formular ou explicitar claramente os conhecimentos, mas sabem pô-los em funcionamento. Por exemplo, não definem o retângulo, porém sabem representá-lo.

Na Escola Elementar e nas séries iniciais do colégio, as transformações geométricas são apreendidas de forma global. Para os alunos nesses níveis, trata-se apenas de "transporte de figuras", e até o termo transformação é evitado pelo professor.

No Colégio, como objetivos específicos do ensino das transformações geométricas, procura-se:

> - tornar explícitas e funcionais as propriedades das transformações geométricas planas (em particular, seus invariantes) a partir de experiências significativas para os alunos;
> - mostrar, por meio de situações-problema, a eficácia das transformações como ferramenta;
> - dar um sentido dinâmico à concepções de noções geométricas estáticas como a de mediatriz, bissetriz, ângulo, vetor, proporcionalidade etc (Marchivie,-1986, p. 52).

No Colégio, da 6ª à 3ª série, são introduzidas as diferentes isometrias, na seguinte seqüência: na 6ª série, a simetria ortogonal em relação a uma reta, ou simetria axial; na 5ª série, a simetria central; na 4ª série, a translação e a rotação; na 3ª série, a composição de duas translações, de simetrias centrais, de simetrias axiais em retas paralelas ou perpendiculares.

Na 6ª e 5ª série, as atividades propostas devem estar ligadas a manipulações ou a construções geométricas de figuras. Na 4ª e 3ª série, de forma gradativa, o aluno vai sendo encaminhado à noção de "transformação pontual", que será realmente apreendida na 2ª ou 1ª série do Liceu.

Marchivie (1986) relata que "no Colégio o objetivo essencial é a familiarização pelo aluno de diversas transformações, a fim de adquirir boas imagens concretas e mentais" (id., ib., p. 220). Também analisa o que representa para um estudante do colégio a noção de transformação geométrica e como é por ele apreendida, destacando alguns procedimentos que acredita dar significado às transformações:

Procedimento visual

Duas figuras, dois desenhos, se correspondem numa certa transformação. A criança se conscientiza, de uma forma ou de outra, que existem regras permitindo passar de uma figura para a outra.

Procedimento de manipulação

Em particular, para uma isometria: como fazer coincidir exatamente duas figuras que podem ser superpostas (ou que se supõe que seja possível) e por quais manipulações?

Procedimento tecnológico

Emprego de procedimentos para desenhar globalmente a imagem de uma figura: instrumentos para transformar, sistema ótico, computadores, etc.

Procedimento gráfico

Uso de um programa de construção, que leva à noção de transformação pontual, enquanto os outros, anteriormente citados, transformam globalmente.

Utilização de uma figura invariante numa transformação dada

Aqui vai aparecer a ligação entre a transformação e o estudo da figura (pp. 220-221).

Marchivie acrescenta não ser conveniente prescindir das transformações como ferramentas para o desenvolvimento do estudo de configurações clássicas, pois a manipulação ou a construção de imagens, pelas transformações geométricas, de figuras simples, como retas e segmentos, evidenciam propriedades que os alunos já haviam detectado ou utilizado.

No Liceu, retomam-se as transformações geométricas do Colégio com aplicações mais teóricas. É acrescentada a homotetia no plano (na 2ª série), no espaço e a semelhança no plano.

Observamos que, na França, as transformações geométricas sempre se apresentaram no currículo escolar de maneira mais significativa do que no Brasil. Pesquisas, estudos e artigos de matemáticos franceses sobre o ensino e aprendizagem das transformações podem se constituir em referências para estudos sobre o tema, como, particularmente, o foram na elaboração deste trabalho.

A partir de 1985, recomendações foram feitas para que se destaque o caráter de ferramenta da Matemática e para que os conhecimentos na área assumam significado, a fim de serem mobilizados na resolução de problemas. Além disso, nelas, considera que uma noção necessita ser trabalhada exaustivamente em situações diversas e em construções geométricas, antes de ser incorporada como aquisição.

No Brasil, novas recomendações sobre o ensino das transformações geométricas surgiram nos Parâmetros Curriculares Nacionais em 1997 e 1998. Apesar de recentes, essas orientações didáticas podem ser percebidas em alguns livros escolares. Para termos indicações de como o tema deste trabalho é abordado em diferentes publicações, no próximo item faremos a análise de alguns livros didáticos mais recentes.

3.4 Análise dos livros didáticos

Nos PCNs encontramos que:

> Não tendo oportunidade e condições para aprimorar sua formação e não dispondo de outros recursos para desenvolver as práticas da sala de aula, os professores apóiam-se quase exclusivamente nos livros didáticos, que, muitas vezes, são de qualidade insatisfatória (PCN, 1998, pp. 21-22).

Esse fato transfere ao livro didático a grande responsabilidade da implantação de inovações didáticas e de novas metodologias. O modo como o tema transformações geométricas é tratado em algumas das coleções mais conhecidas será analisado a seguir.

Nas últimas décadas, em função de novas propostas, alguns livros didáticos incorporaram as indicações preconizadas; mas há ainda considerações a ser feitas quanto à desvalorização da geometria — na maior parte das vezes apresentada nos últimos capítulos do livro —, à falta de conteúdos importantes na geometria, a conteúdos inadequados, a abordagens muito formais para o nível de escolarização a que se destina etc.

Alguns livros, presentes no mercado há décadas, apenas fizeram adaptações modernizadoras, não alterando nem o conteúdo nem a metodologia utilizada nas apresentações. Outros livros tiveram a preocupação de integrar orientações e inovações indicadas pelos documentos oficiais, procurando atender às novas exigências da sociedade.

Analisamos alguns livros destinados ao 1° e 2° ciclo (1ª a 4ª série). [5]

De acordo com o que as pesquisas didáticas recomendam e as propostas curriculares orientam, os primeiros contatos dos alunos com as transformações geométricas devem ser feitas num contexto experimental e de

---

[5] 1. Pires, C.M., Nunes, M., *Matemática no Planeta Azul,* FTD, 1998.
2. Magnusson Jr, M., *Recri(e)ação,* Ibep, 1998.
3. Imenes, J., Lellis, M., *Novo Tempo: Matemática,* Scipione, 1999.
4. Munhoz, A.F.S., Nazareth, H.R.S., Toledo, M.B.A., *Contar, Construir, Viver: Matemática,* Contexto. 1999.

manipulação de objetos representativos para o aluno. Os Parâmetros Curriculares Nacionais, por exemplo, indicam como conteúdos a ser trabalhados no 2° ciclo (3ª e 4ª série) do ensino fundamental: a identificação de simetria em figuras tridimensionais; a sensibilidade para observar simetrias e outras características das formas geométricas na natureza, nas artes, nas edificações etc.

Nos livros didáticos analisados, a partir da 2ª série são feitas as primeiras observações sobre a simetria de objetos do cotidiano dos alunos usando a analogia da "imagem no espelho". Atividades com dobras no papel, com e sem quadriculado, estimulam a localização da imagem de figuras pela reflexão em reta. Os alunos são estimulados a perceber a simetria no seu mundo, a investigar eixos de simetria em objetos e a desenvolver o senso estético e de organização, observando diversas configurações simétricas.

Nas 3ª e 4ª série, usando malhas diversas, são exploradas idéias de ampliação e redução de figuras. Não há muitas diferenças na abordagem das transformações geométricas (que se limitam apenas a reflexões em reta) entre os livros didáticos observados.

Um aspecto inovador e importante, presente nas coleções didáticas que abordam a reflexão em várias séries é o fato de que o mesmo assunto é revisto e retomado com novos enfoques, permitindo um aprofundamento nas noções estudadas.

No que se refere aos livros destinados a alunos de 5ª a 8ª série do Ensino Fundamental, analisamos as propostas de quatro livros.[6]

Conforme recomendação dos PCN, no 3° ciclo as atividades são sobre reflexões em reta, translações e rotações, identificando medidas que permanecem invariantes nessas transformações. Na ampliação e redução de figuras planas, o aluno deve observar quais elementos não se alteram.

---

[6] 1. Lopes, A. J., *Matemática Atual,* Editora Atual, 1994.
2. Dantas, M.M.S., et al., *As Transformações Geométricas e o Ensino da Geometria, vol. 1,* EDUFBA, 1996.
3. Mori, I., Onaga, D.S., *Matemática: Idéias e Desafios,* Saraiva, 1997.
4. Imenes,e Lellis, *Matemática,* Scipione, 1997.

No 4° ciclo, a análise dos elementos invariantes e dos que variam quando submetidas a transformações geométricas são usadas para desenvolver o conceito de congruência e semelhança de figuras.

As coleções didáticas observadas foram separadas em categorias que pudessem indicar os diferentes enfoques dados às transformações geométricas no 3° e 4° ciclo do ensino fundamental.

1ª Categoria: transformações geométricas como ferramentas para o estudo de congruências e semelhanças.

Três das coleções abordam as transformações (reflexão em reta, translação e rotação) identificando os elementos invariantes nas figuras. A observação desses elementos conduz à idéia de figuras congruentes, que, além de desenvolver uma noção mais ampla do que a de congruência só de triângulos, é mais natural para o aluno do que a estabelecida por uma definição.

O mesmo enfoque é dado à noção de semelhança de figuras. Inicialmente, trabalha-se com ampliação e redução para, depois, introduzir a homotetia como recurso para a obtenção de figuras ampliadas ou reduzidas. Também aqui, identificar os elementos invariantes e os que se modificam na homotetia leva à noção de figuras semelhantes de uma forma mais geral do que a habitual, que se dedica só aos triângulos.

Uma das coleções didáticas analisadas não trabalha com as transformações geométricas como ferramenta para o estudo de congruências de figuras, optando por abordar outros aspectos sobre o assunto. Assim, introduz a simetria central de forma experimental e também realiza construções exatas com instrumentos, chegando a composições de duas transformações geométricas e à relação destas com outras. Por exemplo, observa que a composta de duas reflexões em retas perpendiculares no ponto A corresponde à simetria central de centro A.

2ª Categoria: transformações geométricas como ferramentas na dedução de propriedades geométricas.

Duas das coleções, usam transformações geométricas para deduzir propriedades geométricas das figuras. Sem abandonar a abordagem exploratória e intuitiva, iniciam o aluno num processo dedutivo mais formal.

O livro *Matemática Atual* apresenta, no volume para a 8ª série, capítulos sobre lógica e argumentação e sobre demonstrações em geometria. São capítulos preparatórios para uma transição entre o conhecimento intuitivo e o obtido por meio de deduções teóricas.

Relaciona figuras congruentes com movimentos de rotação, translação e reflexão e utiliza a congruência de triângulos para deduzir as principais propriedades dos triângulos e quadriláteros.

Outro livro, *As Transformações Geométricas e o Ensino da Geometria, Volume I,* toma como referência idéias apresentadas no livro *O Ensino da Matemática: um Processo entre a Exposição e a Descoberta,* escrito por uma das autoras do primeiro livro. Trata-se de um livro com abordagem centrada nas transformações geométricas. Neste livro, o grupo de professores da Universidade Federal da Bahia apresenta fichas de trabalho envolvendo toda a matéria a ser dada da 5ª à 8ª série. Na tentativa de harmonizar o método expositivo e as estratégias heurísticas no ensino da Matemática, cada ficha de trabalho tem por objetivo que um conceito seja definido, uma regra seja estabelecida ou uma propriedade seja induzida.

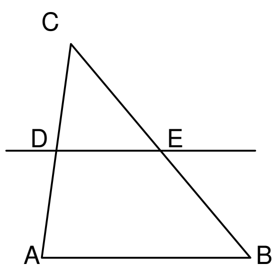
As transformações geométricas são consideradas como relações entre pontos e, a partir delas, são desenvolvidas outras noções geométricas. Por exemplo, o livro começa com a transformação *"translação de vetor v"*, define figuras obtidas por translação como figuras congruentes e introduz a simetria central. As retas paralelas são definidas usando vetores e destaca-se que retas obtidas de outras por uma das transformações, translação ou simetria central, são paralelas. Define a transformação homotetia, constrói imagens de triângulos destacando os lados homólogos que são proporcionais.

Usa diretamente as transformações geométricas para demonstrar propriedades de figuras geométricas. A demonstração do teorema de Thales, aqui feita usando translação e resultados provados por homotetia, é muito mais simples que a encontrada em livros tradicionais de geometria, conforme se pode observar:

Propriedade 2 : Toda paralela a um dos lados de um triângulo, que intercepta os outros dois lados, determina um triângulo homotético ao primeiro.

Considere um triângulo ABC e uma reta DE, paralela ao lado AB, que intercepta os outros dois lados.

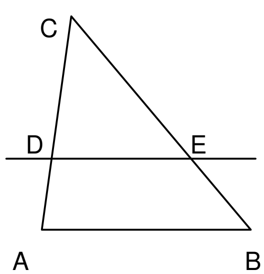
Considere a homotetia de centro C que leva o ponto A no ponto D. Esta homotetia leva a reta AB numa reta r, paralela a AB, passando pelo ponto D.



Pelo Postulado de Euclides, a reta r coincide com a reta DE, que é paralela ao lado AB. Nestas condições, o ponto E é homotético de B, pela homotetia considerada. Portanto, o triângulo CDE é o homotético do triângulo CAB.

Propriedade 3: Toda reta paralela a um dos lados de um triângulo, que intercepta os outros dois lados, determina sobre esses lados segmentos proporcionais.

Considere um triângulo ABC e uma reta DE, paralela ao lado AB, que intercepta os outros dois lados.



Pela propriedade 2, o triângulo CDE é homotético do triângulo CAB. Assim,

$$\frac{CD}{CA} = \frac{CE}{CB} \quad \text{ou} \quad \frac{CA}{CD} = \frac{CB}{CE}$$

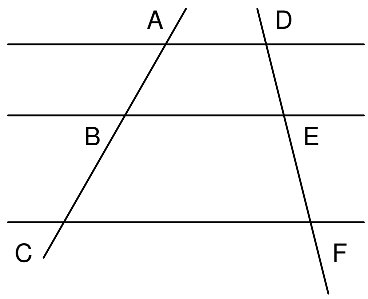
Aplicando a esta última igualdade a propriedade das proporções, complete:

$$\frac{CA - CD}{CD} = \frac{.......}{CE} \quad \text{ou} \quad \frac{....}{CD} = \frac{EB}{.....}$$

você deve ter concluído que $\frac{DA}{CD} = \frac{EB}{CE}$, o que mostra que a reta DE determina sobre os lados AC e BC segmentos proporcionais.

Teorema de Thales: Se três retas paralelas são cortadas por duas transversais, a razão do dois segmentos quaisquer determinados pelas paralelas, em uma dessas retas é igual à razão dos segmentos correspondentes determinados na outra.

Considere três retas paralelas cortadas por duas transversais AC e DF.



Considere, na transversal AC, os segmentos AB e AC.

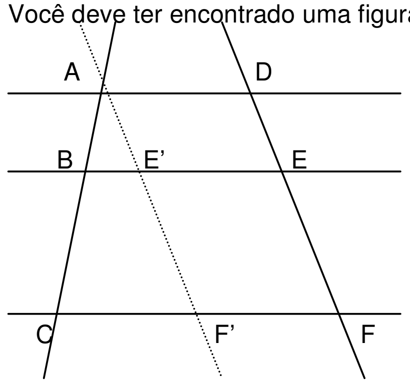
O segmento correspondente a AB, na transversal DF é DE. Diga qual é o segmento correspondente a AC, na transversal DF.

Resposta

Considere, agora, a translação de vetor DA.

Ache na figura acima, os transformados dos pontos D, E e F por esta translação e ligue estes transformados.

Você deve ter encontrado uma figura como a seguinte:



Observe que no triângulo ACF'a reta BE' é paralela ao lado CF'. Aplicando a propriedade 3 ao triângulo ACF', complete:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{....}{AF'}$$

Observe que pela translação de vetor DA, tem-se: AE'= DE e AF'= DF, donde $\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}$, o que mostra que a razão entre os segmentos AB e AC, determinados na transversal AC é igual à razão dos segmentos correspondentes DE e DF, determinados na transversal DF.

Procedendo como se fez acima, pode-se mostrar que

$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$ e $\frac{AC}{BC} = \frac{DF}{EF}$ (Dantas et al., 1996, pp. 76, 77, 82)

3ª Categoria: transformações geométricas como ferramenta para outras aplicações em geometria.

Uma das coleções usa as transformações para resolver problemas de construções de quadriláteros que apresentam algum eixo de simetria (por exemplo, a construção do losango e do quadrado usando as diagonais).

Outra coleção, no manual do professor, considera as transformações geométricas como correspondência entre pontos do plano e relaciona-as com movimentos no plano.

Além dos livros didáticos destinados ao ensino fundamental, examinaremos também livros com abordagens mais formais adequadas a cursos universitários e de formação de professores. Foram analisados, considerando que um professor necessita uma visão mais ampla e profunda dos conteúdos que vai apresentar aos alunos.[7]

Os livros observados apresentam aspectos diferentes na abordagem das transformações geométricas, importantes para uma sólida formação do professor.

---

[7] 1. Ruoff, E.B.L., *Isometrias e ornamentos do plano euclidiano,* Atual, 1982.
2. Lima, E.L., *Isometrias,* SBM, 1996.
3. Alves, S., Galvão, M.E.E.L., *Um estudo geométrico das transformações geométricas elementares,* Publicação do IME-USP, 1996.

Em Ruoff (1982), encontramos que a Geometria das Transformações tenta libertar o ensino da geometria do poder de Euclides e da Geometria Analítica de Descartes, da rigorosa axiomatização e do excesso de algebrismo.

Com a Geometria das Transformações as figuras geométricas têm sua importância reduzida, sendo dado um destaque maior às aplicações às quais são submetidas. Pela importância que dá às estruturas matemáticas, como grupos e isomorfismos, seu desenvolvimento confere um aspecto muito atual à geometria.

O livro *Isometrias e Ornamentos do Plano Euclidiano* é o que apresenta essas idéias.

Outro livro, *Isometrias*, tem como objetivo classificar as isometrias e analisar as composições destas. Esse estudo é feito usando coordenadas na reta, no plano e no espaço. Um aspecto interessante abordado é que, com o uso de coordenadas, se pode mostrar que as isometrias impróprias (as reflexões e as compostas destas com outras isometrias) só resultam de movimentos considerados em ambientes com uma dimensão a mais. Seguindo as idéias de Felix Klein, o texto do livro *Um Estudo Geométrico das Transformações Elementares* faz uma apresentação teórica das transformações geométricas no estudo da geometria euclidiana. Muitos exercícios e aplicações envolvem construções com régua e compasso, como conseqüências da opção de apresentar um estudo com ênfase maior nos aspectos geométricos do que nos algébricos. Destaca o modo "dinâmico" de abordar certos problemas em geometria, em oposição à maneira "estática" de tratá-los usualmente.

Conclusões gerais do capítulo

No Brasil, as transformações geométricas — introduzidas como funções aplicadas a pontos do plano — foram propostas, nos currículos oficiais, na década de 70, por ocasião da reforma curricular sob a influência do movimento Matemática Moderna.

Por vários motivos, sendo o mais importante a inadequação de tal abordagem aos estudantes do ensino fundamental, o assunto praticamente desapareceu na proposta curricular que sucedeu àquela da década de 70

A partir de 1994, com a publicação da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo da coleção *Experiências Matemáticas*, os professores das escolas públicas do estado receberam orientações sobre atividades a serem desenvolvidas com alunos. Entre essas atividades, algumas se referiam ao assunto transformações geométricas.

Com os Parâmetros Curriculares Nacionais publicados em 1997 e 1998, as transformações são reapresentadas em currículos oficiais, porém com outro enfoque.

No Brasil, como em outros países cujos currículos foram aqui apresentados, as transformações geométricas no ensino fundamental são empregadas como ferramentas no estudo da geometria tanto no plano como no espaço. Somente em etapas posteriores às do ensino fundamental elas serão abordadas como funções aplicadas em pontos do plano ou do espaço.

Um aspecto que chama a atenção, e que foi motivo de restrição na geometria proposta por Euclides, é a noção de figuras congruentes. Considerar figuras congruentes como aquelas que após deslocamentos e superposições coincidem é uma idéia que pode trazer dificuldades quando as figuras não são planas. No interessante exemplo citado pela professora Lucília Bechara Sanchez em seu depoimento (Anexo III), tomando-se um par de luvas, cada luva é congruente à outra, porém não coincidem após deslocamentos e tentativas de superposições. É preciso virar uma delas pelo avesso para que coincidam por superposição. Se as luvas forem consideradas como correspondências entre pontos, a congruência entre elas é perfeitamente entendida.

Apesar de não serem abordadas como funções no plano ou no espaço, acreditamos que as transformações geométricas possam ser apresentadas como simples correspondência entre pontos do plano ou do espaço nas últimas séries do ensino fundamental.

Pela análise dos livros didáticos observamos que, mesmo sendo recentes, as novas propostas sobre o ensino das transformações geométricas, emanadas do documento oficial PCN, estão sendo apresentadas em algumas coleções didáticas.

As variáveis didáticas, como a complexidade da figura, a posição da figura na folha, a posição do eixo de simetria, a posição relativa eixo-objeto na reflexão e o tipo de papel, quadriculado ou não, são variáveis que devem ser levadas em consideração para melhor apreensão da noção de reflexão em reta. Nesse sentido, nem todos os livros didáticos trabalham com eixos de simetria inclinados em relação às bordas da folha e com figuras em posições mais complexas em relação ao eixo de simetria.

As transformações geométricas ainda não estão totalmente incorporadas aos livros didáticos do ensino fundamental. Livros didáticos conhecidos, como *Matemática & Vida* e *Matemática — Uma Aventura do Pensamento,* não apresentam a geometria usando transformações geométricas como ferramentas.

Como é uma prática comum o professor adotar um livro didático, a escolha deve envolver uma análise criteriosa não só dos conteúdos, mas também na maneira como eles são apresentados.

Capítulo 4

Estudo das transformações geométricas em cursos de formação de professores

Introdução

Uma das hipóteses para a justificativa da não inclusão de temas geométricos nas atividades de sala de aula é a falta de preparo dos professores — tanto das séries iniciais como das séries finais do ensino fundamental e ensino médio —, que reproduzem uma prática comum em sua própria formação: a ausência ou a pouca ênfase dada ao ensino da geometria.

Por esse motivo, neste capítulo, apresentamos um estudo realizado com um grupo de professores em formação, num curso que o Centro de Ciências Exatas e Tecnologia da PUC/SP desenvolveu em 1999 especialmente para professores que tinham feito licenciatura curta em Ciências e complementavam a formação em Matemática.

Faremos uma caracterização do curso e dos professores participantes, um diagnóstico dos conhecimentos prévios dos professores, para depois descrever o trabalho realizado no curso, na disciplina Geometria das Transformações. Apresentaremos, também, a fundamentação didática para o trabalho proposto.

Nosso propósito é mostrar a necessidade e a importância da incorporação desse tema em cursos de formação de professores, que, assim, encontrarão alicerce teórico para as práticas escolares.

4.1 Caracterização do curso

O Centro de Ciências Exatas e Tecnologia da PUC/SP, no âmbito do Projeto Inovações no Ensino Básico, da Secretaria Estadual de Educação de São Paulo, realizou, em 1997, uma pesquisa para traçar o perfil dos professores de matemática que atuavam em cinco Delegacias de Ensino: 3ª e 4ª DE de São Paulo, 1ª e 2ª DE de Guarulhos e DE de Caieiras.

O estudo constatou que, dos 900 professores pesquisados, cerca de 50% eram licenciados em Matemática, aproximadamente 47% tinham licenciatura curta em Ciências e os restantes eram formados em Pedagogia.

Aos professores licenciados em Ciências era permitido assumir aulas de Matemática no ensino fundamental, mas a análise das grades curriculares desses cursos de licenciatura em Ciências po eles freqüentados apontavam insuficiências na formação matemática dos professores.

Coordenadores e professores representando a PUC/SP e técnicos, supervisores e delegados de ensino representando a Secretaria Estadual de Educação de SP, levando em consideração que tais professores eram bastante jovens, com muitos anos de docência pela frente e bastante interessados no aperfeiçoamento profissional, tiveram a idéia de criar uma oportunidade para que eles cursassem uma Licenciatura Plena em Matemática, com o aproveitamento dos estudos feitos no curso de Ciências.

Em função disso, o Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas da PUC/SP elaborou um projeto para um Curso de Licenciatura Plena em Matemática para Professores com Licenciatura Curta em Ciências, oferecido aos professores em exercício na rede pública estadual de São Paulo.

O curso tinha por objetivos:

- consolidar e ampliar os conhecimentos da Matemática e levar os professores a adquirir novos conceitos nesse campo;
- atualizar o professor nas pesquisas e estudos de Educação Matemática;

- inserir o professor no campo da informática, que tem presença cada dia mais marcante no campo da aprendizagem;
- desenvolver a análise e compreensão crítica da nossa realidade, particularmente da esfera educacional, para que o docente possa atuar de forma mais conseqüente.

A estrutura curricular do curso, no campo dos conhecimentos matemáticos, procurou incluir, preferencialmente, conteúdos do ensino fundamental e médio. No bloco de geometria, as disciplinas eram: Geometria Euclidiana, no primeiro semestre letivo, com 72 horas/aula, Geometria Analítica, com 36 horas/aula e Geometria das Transformações, com 36 horas/aula, ambas no segundo semestre letivo.

Em 1999, os professores inscritos no curso constituíram quatro turmas, duas no período da manhã e duas no período da noite. Lecionando a disciplina Geometria das Transformações numa das turmas matutinas, tivemos a oportunidade de realizar o estudo relatado neste capítulo.

A seguir, faremos a caracterização dos professores dessa turma.

4.2 Perfil do grupo[1]

Tratava-se de um grupo de 34 professores, com idade variando de 20 a 45 anos. Distribuído em faixas etárias, apresentava 32% de professores na de 20 a 25 anos, 26% de 26 a 30 anos, 32% de 31 a 40 anos e 10% com mais de 40 anos. Do ponto de vista profissional, no grupo, 51% dos professores eram recém-formados do ano de 1998, 16% haviam se formado entre 5 e 7 anos, 20% eram formados há aproximadamente 10 anos e 13% há mais de 10 anos.

Como eram professores com Licenciatura Curta em Ciências e Biologia, alguns (12%) não lecionavam Matemática. A maioria (69%) tinha de 1 a 5 anos de docência em Matemática, e 19% dos professores tinham de 6 a 10 anos de experiência docente nessa disciplina.

[1] Ver no Anexo V o instrumento para a coleta de dados.

Do total, 81% lecionavam no ensino fundamental e 19% no ensino médio. Cerca de 50% dos professores admitiram não ensinar ou ensinar pouca geometria nas aulas de Matemática.

Para um conhecimento mais amplo sobre o grupo, foram solicitadas informações sobre formação acadêmica, constatando-se que a formação básica, correspondente ao antigo curso ginasial e colegial, de 84% dos professores foi feita em escolas públicas estaduais e municipais. Nesse período da vida escolar, cerca de 41% deles não estudaram geometria, indicando que já há 20 anos se apresentava a tendência de essa disciplina ser negligenciada no ensino da Matemática. Alguns indicaram ter estudado noções de desenho geométrico no curso ginasial e no colegial. Do total de professores, 50% foram ter alguma abordagem de geometria só no curso superior. A informação mais significativa foi que 19% dos professores não haviam estudado geometria em nenhum momento da vida escolar antes deste Curso de Licenciatura Plena em Matemática para Professores com Licenciatura Curta em Ciências. Todos os professores haviam feito o curso de licenciatura em faculdades particulares.

4.3 Conhecimentos prévios dos professores

Para planejar o curso, achamos fundamental verificar quais eram os conhecimentos prévios que os professores tinham sobre transformações geométricas e também diagnosticar as deficiências. Utilizamos, então, um teste diagnóstico[2], com questões sobre reflexão em reta, translação e rotação. Junto com o teste havia questionários que visavam colher algumas informações sobre os professores, como: séries em que lecionavam; se trabalhavam ou não conteúdos geométricos nas aulas; se o conteúdo do teste havia sido estudado em alguma ocasião e onde; se havia termos desconhecidos no teste e quais eram. Foram propostas seis questões, dando-se maior destaque para a reflexão em reta, por ser esta transformação geométrica o foco deste trabalho.

[2] Ver no Anexo VI o teste diagnóstico dos professores.

A questão 1 tinha como objetivo introduzir a noção de simétrico de uma figura e eixo de simetria usando a imagem da “figura no espelho”. Os resultados foram os apresentados no quadro abaixo:

Questão	Soluções corretas	Soluções incorretas	Em branco
1	21%	79%	0%

Dos procedimentos incorretos apresentados, dois deles se destacaram:

- os que desenharam a imagem paralela à figura, como se esta se deslocasse horizontalmente na direção do eixo de simetria e do outro lado do eixo. Esse procedimento foi apresentado por 36% dos professores.
- os que observaram a “orientação contrária” da imagem em relação à figura de alguns de seus elementos e não consideraram a eqüidistância ao eixo de simetria. Esses procedimentos foram encontrados em 35% das respostas.

Observou-se, nas respostas incorretas, que não eram considerados dois aspectos fundamentais na determinação de uma imagem no espelho: a “orientação contrária” dos elementos da figura e a eqüidistância dos pontos correspondentes em relação ao eixo.

O objetivo da questão 2 era a identificação do(s) eixo(s) de simetria de figuras dadas. Foram apresentadas seis figuras, cinco delas simétricas e uma não simétrica, algumas com um só eixo de simetria e outras com mais de um; as figuras a e d admitiam dois eixos de simetria, as figuras b e c um só eixo, a figura e não era simétrica e a f admitia vários eixos de simetria. Analisaremos os resultados em cada figura.

Questão	Soluções corretas	Soluções incorretas	Em branco
2 a	4%	57%	39%

2 b	14%	47%	39%
2 c	57%	4%	39%
2 d	11%	50%	39%
2 e	61%	35%	4%
2 f	18%	43%	39%

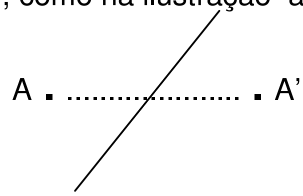
Nas figuras a e d, que apresentavam dois eixos de simetria, cerca de 36% das respostas (entre as respostas consideradas incorretas) assinalavam apenas um dos eixos.

A figura simétrica que apresentou maior índice de acertos foi do triângulo isósceles, e a explicação pode estar na simplicidade da figura e na posição favorável do eixo de simetria (vertical).

Na terceira questão, no item a, o eixo de simetria era inclinado e pedia-se o simétrico de um ponto. No item b, a figura dada era um segmento com uma extremidade no eixo de simetria, na posição horizontal na folha. Na mesma questão, o professor em formação era induzido a observar alguma propriedade relacionando o ponto (ou o segmento) com seu simétrico. O objetivo era verificar se as características de um ponto simétrico a outro, em relação a uma reta, seriam observadas. Os resultados obtidos foram:

Questão	Soluções corretas	Soluções incorretas	Em branco
3 a	43%	46%	11%
3 b	29%	57%	14%
3c (propriedade)	18%	32%	50%

No item a, em 14% das respostas verificamos o tipo de procedimento que chamamos de “referência horizontal”, como na ilustração abaixo.



No item b, observamos que 29% dos professores acertaram o exercício e 18% o fizeram parcialmente porque consideraram a extremidade comum como ponto fixo, mas não respeitaram a necessidade de que cada ponto fosse eqüidistante a sua imagem em relação ao eixo de simetria. Além desse, outro tipo de erro, apresentado por 14% do grupo, consistiu em localizar a imagem no prolongamento do segmento dado, usando a extremidade comum ao eixo como ponto fixo.

Verificou-se, também, no teste o procedimento de “referência horizontal” e o do prolongamento, que haviam surgido na experiência relatada no capítulo 2, item 2.4, com alunos de duas escolas brasileiras, e nas pesquisas de Grenier (1985) e Gutiérrez & Jaime (1987).

Uma constatação interessante nos resultados do teste com os professores é que 18% dos que haviam errado o simétrico de um ponto acertaram o simétrico do segmento. A hipótese que formulamos é que, como o segmento tinha uma extremidade no eixo e este era horizontal, o ponto fixo ajudou a visualização do simétrico.

Quanto à propriedade relacionando a figura e sua imagem, verificou-se que, dos 12 professores que acertaram o item a, 5 responderam corretamente, indicando a eqüidistância ao eixo dos pontos correspondentes. Nas respostas erradas, verificou-se que o conceito de distância de um ponto a uma reta foi usado incorretamente, sem considerar o perpendicularismo exigido.

Comparando o índice de respostas corretas no item a (43%) com o dos que indicaram corretamente a propriedade (18%), podemos inferir que a propriedade que caracteriza a reflexão em reta é utilizada implicitamente pelos professores. A “imagem no espelho” relacionada ao simétrico de uma figura, provavelmente, levou os professores a usar o “modelo implícito”, que Brousseau considera como “conjunto de relações ou regras com as quais o aluno toma suas decisões sem ser capaz de ter consciência disso e, *a fortiori*, de formulá-las.” (apud Perrin-Glorian, 1994, p.111).

Na questão 4, o objetivo era identificar os diversos tipos de transformação geométrica em figuras dadas. Apenas a reflexão em reta tinha sido sugerida, pela questão 1, como “imagem no espelho” e, como as noções das outras transformações geométricas, translação e rotação, não haviam sido dadas, o que se pretendia, nesta questão, era detectar os conhecimentos espontâneos dessas noções.

Verificamos os seguintes resultados:

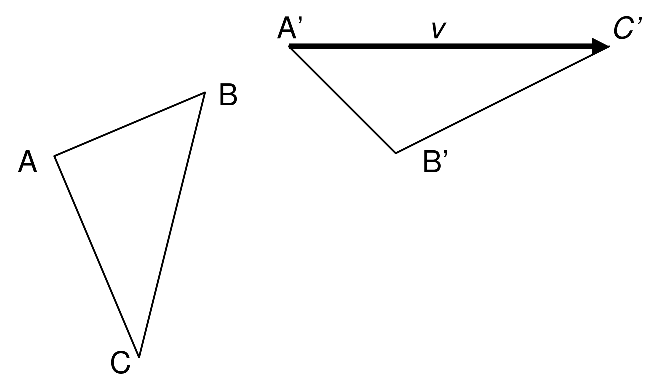
Questões	Soluções corretas	Soluções incorretas	Em branco
4 *i*	18%	71%	11%
4 *ii*	36%	64%	0%
4 *iii*	57%	43%	0%
4 *iv*	57%	43%	0%
4 *v*	25%	75%	0%

A tarefa de identificar a reflexão em reta foi corretamente realizada por 57% dos professores, mas o que surpreendeu é que o mesmo índice de acertos foi apresentado na identificação de uma rotação. Já a translação foi a transformação mais difícil de ser identificada. Aliás, no questionário apresentado no fim do teste, o termo translação foi indicado como desconhecido pela maior parte dos alunos.

Na questão 5, a transformação geométrica envolvida era a translação de vetor *v*, sendo a figura colocada numa malha quadriculada e o vetor numa das linhas horizontais da malha para facilitar a contagem das distâncias. As respostas apresentaram os seguintes índices:

Questão	Soluções corretas	Soluções incorretas	Em branco
5	0%	53%	47%

O índice de respostas em branco indicou que quase a metade do grupo de professores nem tem idéia do que seja esse tipo de transformação. Cerca de 18% dos professores não consideraram a amplitude (módulo do vetor) da translação e 21% das respostas foram do tipo:

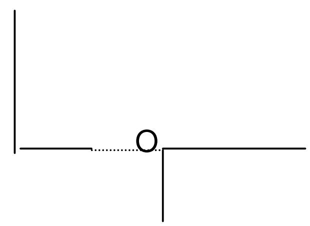


Na questão 6, o que se pedia era a determinação da imagem de uma figura por uma rotação de 90°. Também a malha quadriculada foi usada para permitir a avaliação das distâncias.

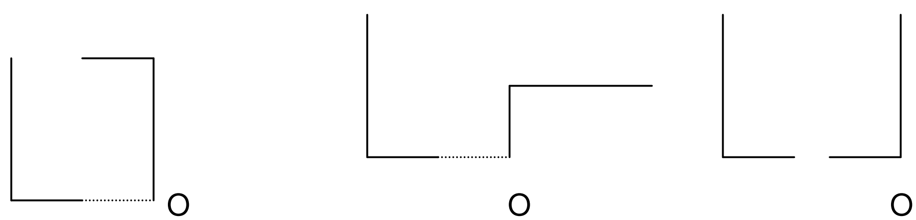
Questão	Soluções corretas	Soluções incorretas	Em branco
6	0%	86%	14%

Observamos que a porcentagem de professores que não responderam à questão 5 sobre translação foi bem maior do que aquela dos que não responderam à questão 6 sobre rotação. É provável que a idéia de rotação seja mais familiar do que a de translação, o que determinou um baixo índice de respostas não dadas para a rotação. Entretanto, uma análise das respostas apresentadas indicou que, se a idéia de rotação é espontânea e permite identificar quando essa transformação geométrica está sendo utilizada, como se observou na questão 4*iv,* o mesmo não ocorre quando a rotação deve ser aplicada na determinação da imagem de uma figura. As respostas indicaram que o centro de rotação não tem um papel definido nas concepções apresentadas, como podemos observar em algumas soluções dadas.

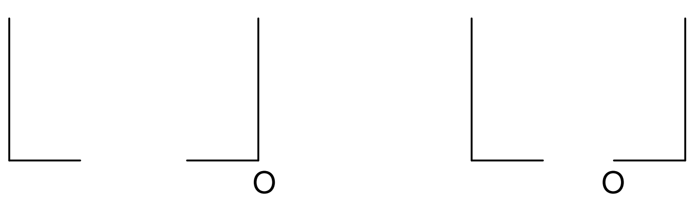
Em 21% das respostas, a solução foi:

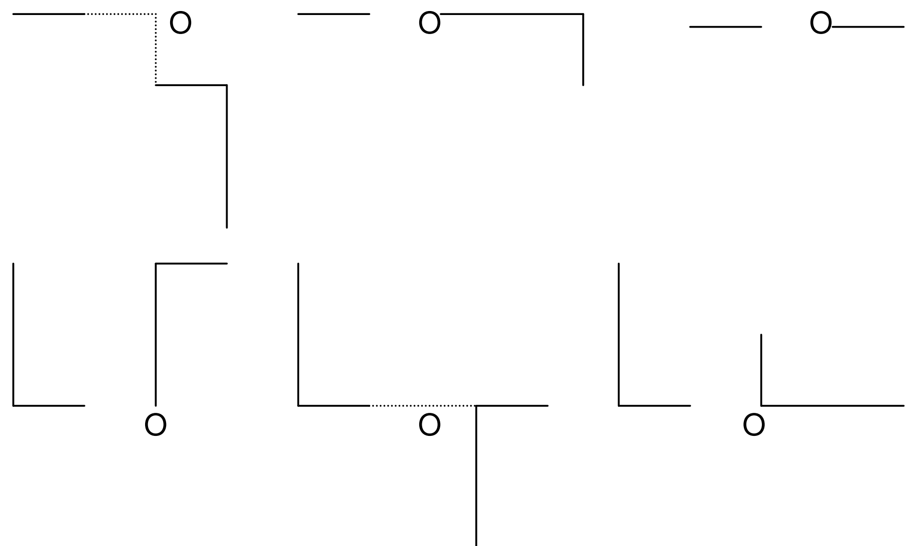


Com 7% de respostas, encontramos as seguintes soluções:

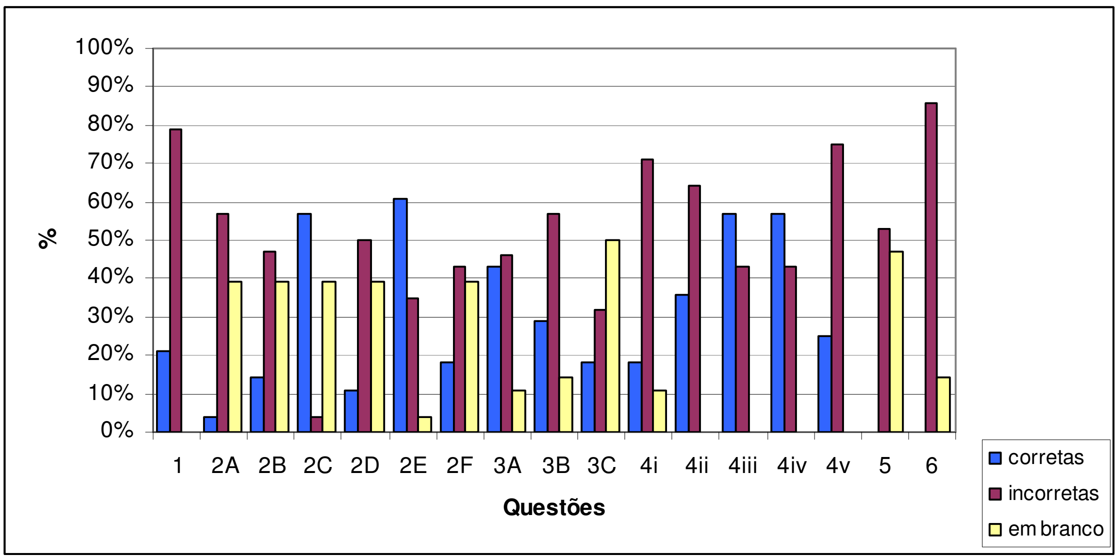


Com o índice de 4% das resposta encontramos soluções do tipo:





Para ter uma visão geral do desempenho dos professores no teste diagnóstico, apresentaremos um gráfico com os índices em cada questão.



Em relação às informações adicionais solicitadas, quase todos (74%) admitiram que nunca estudaram o assunto transformações geométricas e 70% dos entrevistados desconheciam termos como vetor, translação, rotação e até mesmo a idéia de simetria. Poucos alunos (22%) haviam estudado reflexão em reta e, assim mesmo, de maneira superficial.

Algumas considerações podem ser feitas sobre os conhecimentos dos professores dessa turma. Analisando as três questões sobre reflexão em reta, observamos que menos da metade do grupo de professores tem noção de simetria em figuras, com o recurso da “imagem no espelho”. Outros professores usam incorretamente essa noção, e aproximadamente 12% do grupo não responderam às questões sobre a simetria ou não das figuras dadas.

Quanto à localização do eixo de simetria, os resultados dependiam da figura considerada, mas constatamos que 36% das respostas não assinalavam o eixo e 7% apresentavam todos os eixos errados.

As outras duas transformações geométricas, translação e rotação, são desconhecidas por todo o grupo, pois nenhuma resposta correta foi apresentada.

Com o diagnóstico feito, observamos que, em primeiro lugar, havia necessidade de que as noções matemáticas sobre as transformações geométricas fossem apreendidas pelos professores. Uma vez atendida a primeira exigência, poder-se-ia cogitar nosso outro objetivo, que era indicar possibilidades sobre trabalhos com transformações geométricas que poderiam ser desenvolvidos com alunos do ensino fundamental.

Nossa proposta de trabalho foi apresentar uma seqüência didática que, além de pautar-se nos objetivos, atendesse às necessidades detectadas no diagnóstico.

Para isso, procuramos pesquisar as bases teóricas para o trabalho.

4.4 Fundamentação didática do trabalho proposto

Dentre os estudos, pesquisas e teorizações que dão sustentação à educação matemática, selecionamos alguns que, por suas características, poderiam ajudar-nos a melhor explicitar e fundamentar, didaticamente, o trabalho proposto.

Apresentamos, na seqüência, uma síntese dos estudos extraídos das pesquisas dos Van Hiele, da teoria das situações didáticas de Brousseau e da dialética ferramenta-objeto de Douady.

4.4.1 As pesquisas dos Van Hiele

O modelo de Van Hiele de pensamento geométrico teve origem nos trabalhos de doutoramento de Dina van Hiele-Geldof e Pierre van Hiele, na Universidade de Utrecht, na Holanda. Os trabalhos intitulados A didática da geometria nas classes iniciais da escola secundária e O pensamento da criança e a geometria foram publicados em 1957 e 1959, respectivamente.

Em 1960, a União Soviética reformulou seu currículo escolar para adaptar-se ao modelo, mas passaram-se alguns anos antes que os trabalhos dos Van Hiele fossem conhecidos em outros países.

Na década de 70, Hans Freudenthal, professor dos Van Hiele em Utrecht, começou a divulgar esses trabalhos no seu livro *Matemática como Tarefa Educacional.*

Em 1984, foram traduzidos e editados nos Estados Unidos os principais trabalhos e artigos dos Van Hiele, como parte do projeto de pesquisa "An Investigation of the van Hiele Model of thinking in Geometry among adolescents".

O modelo apresenta cinco níveis de compreensão, que descrevem características do processo de pensamento geométrico. Afirma que o aluno se desenvolve em seqüência, a partir do nível básico de observação do espaço até o nível mais elevado, de rigor, quando apresentam conhecimentos mais abstratos e formais. Poucos são os alunos que atingem o último nível. Ressalta que o ensino, mais do que a maturidade, contribui para o desenvolvimento do pensamento geométrico do aluno.

Gutiérrez & Jaime, em 1987, no trabalho Estudo das características dos níveis de Van Hiele, analisam com detalhe as características específicas dos níveis nas principais isometrias do plano

O modelo de Van Hiele, na forma mais geral, é formado por cinco níveis de raciocínio, mas Gutiérrez & Jaime consideram apenas os quatro primeiros. Um dos motivos é que o estudo das isometrias pesquisado foi feito para a

Educação Primária e Secundária espanhola, e para a formação de professores desses níveis escolares. Outro motivo é um certo ceticismo a respeito das características do quinto nível e a possibilidade de testá-las. Sobre as isometrias, Gutiérrez & Jaime escrevem as seguintes observações para cada nível:

Nível 1 — Visualização ou reconhecimento

Os estudantes, raciocinando nesse nível, são capazes de:

a) Considerar os movimentos (translações, rotações e simetrias) de maneira global.

b) Reconhecer a característica da isometria (conservação do tamanho e a forma das figuras) dos movimentos.

c) Reconhecer os movimentos quando se vêm objetos em ação ou seus resultados. Descrever os movimentos, por exemplo como trajetória em linha reta, circular ou “passar para o outro lado”.

d) Realizar movimentos (translações, rotações e simetrias) usando materiais auxiliares, como uma régua, um disco, um espelho etc, em diferentes direções e com diferentes posições relativas das figuras com o vetor, centro ou eixo.

e) Utilizar propriedades visuais para identificar ou descrever os movimentos, como a “mesma colocação” das figuras nas translações, a disposição circular das figuras nas rotações e a visão do eixo de simetria como “separador pela metade” das duas figuras simétricas, junto com a troca de orientação nestas

f) Aprender e utilizar o vocabulário elementar das isometrias: translação, rotação, simetria, centro de rotação, eixo de simetria etc.

Nível 2 (nível 1 de Van Hiele) — Análise

Neste nível de raciocínio, os estudantes são capazes de:

a) Considerar os movimentos mediante seus elementos matemáticos.

b) Utilizar, de forma explícita os elementos próprios de cada movimento: módulo, direção e sentido do vetor nas translações, centro e ângulo nas rotações e eixo nas simetrias.

c) Identificar em casos concretos as características das translações (componentes do vetor), das rotações (centro, ângulo e eqüidistância ao centro) e das simetrias (eixo, perpendicularidade e eqüidistância ao eixo).

d) Descobrir novas propriedades dos movimentos a partir de sua verificação em casos concretos e utilizá-las para resolver outros problemas. Em particular, generalizar os resultados de composições de movimentos (exceto rotações de centros distintos).

e) Realizar simetrias transladadas.

f) Utilizar explicitamente as definições de translação, rotação e simetria nas atividades realizadas.

g) Utilizar as coordenadas do vetor translação em situações concretas.

h) Aprender e utilizar notação e vocabulário matemático associados a isometrias e seus elementos: P, P', T_{v}, S_{r}, R(O,ϑ), perpendicularidade, mediatriz, módulo, direção, sentido etc.

Nível 3 (nível 2 de Van Hiele) — Classificação ou Dedução informal

Os estudantes desse nível adquirem capacidade para:

a) Identificar as características de qualquer rotação (centro por interseção de mediatrizes de segmentos e ângulo). Generalizar e justificar os resultados de composições de rotações de centros distintos.

b) Completar o estudo das simetrias transladadas, suas propriedades e suas relações com outras isometrias.

c) Estabelecer relações entre as propriedades das isometrias e descobrir ou deduzir novas propriedades. Compreender proposições e argumentações gerais para demonstrá-las.

d) Compreender e utilizar a possibilidade de decomposição, de infinitas formas, de translações e rotações em produto de simetrias ou em produto de rotações de centros distintos.

e) Utilizar as propriedades das composições de isometrias para justificar:

1) que características pode-se conhecer do resultado de uma particular composição de isometrias;

2) a possibilidade de transformar uma figura em outra congruente por uma composição de isometrias.

f) Estabelecer relações gerais, sem o auxílio de figuras ou translações concretas, entre as coordenadas de um ponto, as de sua imagem e o vetor da translação aplicada.

g) Enunciar definições das isometrias como condições necessárias e suficientes. Compreender as definições formais usuais.

h) Compreender demonstrações formais simples que forem feitas ou explicadas pelo professor. Fazer demonstrações formais simples que só sejam adaptação de uma demonstração já conhecida.

i) Passar de um caso concreto a uma situação geral, realizando uma demonstração baseada em argumentos informais.

Nível 4 (nível 3 de Van Hiele) — Dedução formal

No quarto nível de raciocínio os estudantes têm capacidade para:

a) Raciocinar formalmente, prescindindo de todo suporte concreto, para demonstrar tanto propriedades novas como as anteriormente estudadas.

b) Compreender e utilizar a estrutura algébrica das isometrias do plano e suas propriedades mais importantes.

c) Fazer e compreender demonstrações formais completas. Identificar as hipóteses, a tese e a rede de implicações lógicas que levam ao resultado (Gutiérrez, 1996, p. 95-97).

A pesquisa dos Van Hiele, indicando os níveis de pensamento geométrico das crianças e considerando o processo educativo como responsável pelo progresso no desenvolvimento do raciocínio geométrico, abriu novos caminhos para o ensino da Matemática, especialmente da geometria.

Houve necessidade de reformular os currículos escolares, principalmente os destinados a alunos da faixa de 10 a 15 anos que, na época da divulgação da pesquisa, estavam sob a influência da Matemática Moderna, muito estruturalista e formalista para alunos dessa faixa etária.

As novas propostas curriculares passaram a focalizar mais as necessidades do aluno do que o conteúdo matemático propriamente dito.

O modelo de Van Hiele, tendo como princípio fundamental a idéia de que a evolução do raciocínio geométrico é conseqüência de um processo educativo adequado, indicou caminhos que o professor pode seguir para ajudar o desenvolvimento do aluno e pode contribuir significativamente para a melhoria do ensino de Matemática.

4.4.2 A teoria das situações didáticas segundo Brousseau

Brousseau propôs uma modelização do processo de aprendizagem envolvendo professor, aluno e saber matemático.

Segundo Brousseau

> O aluno aprende adaptando-se a um meio, fator de dificuldades, de contradições, um pouco como faz a sociedade humana. Esse saber, fruto da adaptação do aluno, manifesta-se pelas novas respostas que são a prova da aprendizagem (Brousseau, 1987, p.48 e 49).

Entretanto, o meio, sem intenções didáticas não é suficiente para a aquisição de conhecimentos matemáticos. Cabe ao professor propor problemas que provoquem nos alunos as adaptações necessárias para a aprendizagem.

Por “situação”, entende-se o conjunto de circunstâncias em que um indivíduo se encontra envolvido, um conjunto de elementos que caracterizam uma ação. Uma situação-problema é um exemplo de “situação” que demanda uma adaptação e uma resposta. Quando na situação se manifesta direta ou indiretamente vontade de ensinar, caracteriza-se o que se chama situação didática.

Brousseau define **situação didática** como:

> ...o conjunto de relações estabelecidas explicitamente e/ou implicitamente entre um aluno ou grupo de alunos, um certo meio (contendo eventualmente instrumentos ou objetos) e um sistema educativo (o professor), para fazer esses alunos adquirirem um saber constituído ou em constituição (apud Almouloud,1997, p. 65).

Orientações didáticas atuais preconizam que o professor delegue ao aluno a maior responsabilidade possível na sua produção, no seu aprendizado. São orientações que devem transformar, dentro das possibilidades, as situações de ensino em situações de aprendizagem.

Brousseau introduz a noção de **situação a-didática,** na qual destaca o novo papel do professor, com uma atuação mais discreta, mais "apagada". Em Ag Almouloud, p. 65, encontra-se que:

> A **situação a-didática** — parte essencial da situação didática — é um situação na qual desaparece a intenção de ensinar, mas é específica do saber. Caracteriza-se pelos seguintes fatos:
>
> - o problema matemático é escolhido de modo que possa fazer o aluno agir, falar, refletir, evoluir por sua própria iniciativa.
> - o professor se recusa a intervir como aquele que propõe os conhecimentos que ele gostaria de provocar.
> - o problema é escolhido para que o aluno adquira novos conhecimentos inteiramente justificados pela lógica interna da situação.

Assim, por exemplo, num trabalho sobre reflexão em reta, indica-se que uma figura simétrica à outra em relação a uma reta é a que se obtém quando uma dobra na folha da figura é feita sobre o traço da reta. A seguir, são propostas atividades nas quais os estudantes devem determinar os simétricos de várias figuras dadas, que não podem ser dobradas. O professor deixa para o aluno a tarefa de criar condições e conhecimentos para resolver as situações-problema.

Observa-se que uma situação didática caracteriza-se pela participação do professor nas interações do aluno com o problema que ele propõe, e a situação a-didática, ao contrário, caracteriza-se pelo afastamento do professor dessas interações.

A maneira como o aluno é motivado a participar dessa nova situação é explicada pela noção de **devolução,** que Brousseau define como:

> O ato pelo qual o professor faz o aluno aceitar a responsabilidade de uma situação de aprendizagem (a-didática) ou de um problema e aceita ele mesmo as conseqüências dessa transferência (RDM 9.3, 1990, p. 325).

De acordo com Brousseau,

> Na didática moderna, o ensino é a devolução ao aluno de uma situação a-didática correta e aprendizagem é a adaptação a esta situação (Brousseau, 1986, p. 51).

Portanto, o ensino tem como objetivo primordial o exercício do conhecimento como produção pessoal do aluno nos seus envolvimentos com um meio a-didático. A distinção entre situações didáticas e a-didáticas e a noção de devolução recolocam novo papel do professor na teoria das situações didáticas.

Nas atividades propostas para os professores, que serão descritas no próximo item, procuramos provocar a mobilização de seus conhecimentos em investigações que permitissem desencadear o processo de elaboração do conceito de reflexões em reta e reflexões em ponto. Nesse trabalho, situações didáticas e a-didáticas foram vivenciadas por nós e pelos professores envolvidos.

O meio que o professor tem para pôr em jogo as situações didáticas é dado pelo contrato didático. Para Brousseau, "o **contrato didático** é a regra do jogo e a estratégia da situação didática" (Brousseau, 1986, p. 50). A relação que se estabelece, em parte explicitamente e sobretudo implicitamente, o que cada participante do processo educativo, professor e aluno, tem a responsabilidade de gerir, constitui um sistema de obrigações recíprocas que se assemelha a um contrato chamado contrato didático. O funcionamento desse contrato didático depende das escolhas pedagógicas, do tipo de trabalho proposto ao aluno, dos objetivos do curso etc..

Visando fundamentalmente a aquisição do conhecimento pelos alunos, o contrato didático se manifesta principalmente quando não é respeitado por um dos parceiros da relação didática e, em muitos casos, há necessidade de uma ruptura e uma renegociação do contrato para que a aprendizagem se verifique.

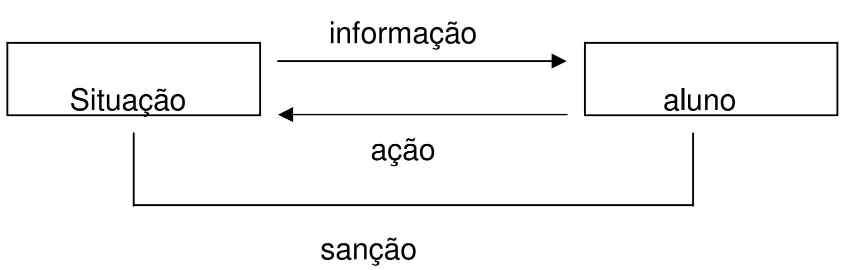
No trabalho feito com os professores licenciados em Ciências, diante das primeiras dificuldades, alguns deles preferiram solicitar nossa ajuda a discutir com os colegas de grupo; outros perguntavam como começar ou se o exercício não iria ser explicado. O contrato tradicional, em que o professor explica a matéria para depois o aluno resolver exercícios sobre o assunto, precisou ser renegociado para se adaptar às novas propostas de trabalho.

Brousseau classifica as situações didáticas em etapas que, no início, denominou dialéticas, porque a situação:

> Evolui no tempo pela seqüência de interações sucessivas de informações e de ações entre o aluno e a situação. (...) Durante essas situações, a criança modifica sua primeira idéia da situação, cria e ensaia um comportamento, um modelo mental, uma linguagem ou uma teoria (apud Perrin-Glorian, 1990, p. 108).

Atualmente, as dialéticas são conhecidas como situação de ação, de formulação, de validação e de institucionalização.

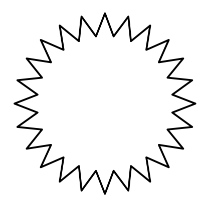
A **situação de ação** ocorre quando o aluno, ativamente empenhado na busca da solução de um problema, direciona a ação para o conhecimento a ser ensinado. Ele passa a agir sobre a situação e esta lhe retorna informações sobre a ação. Um esquema dessa dialética da ação, baseado em M. Henry, é:



Fonte: Ag Almouloud, 1997

Na situação de ação, o aluno organiza estratégias, constrói um “modelo” da situação, que pode ser um conjunto de relações ou regras que o levam a decidir sem que tenha consciência ou saiba explicitar os mecanismos utilizados. Esse processo leva à elaboração, pelo aluno, de um “saber fazer”. A situação deve permitir ao aluno um julgamento de sua ação e um processo de ajustamento, sem intervenção do professor, graças à retroação da situação. O aluno pode abandonar ou melhorar seu modelo, e a aprendizagem se verifica por adaptação. Por exemplo, na atividade 1 trabalhada com os professores, os eixos de simetria de figuras deveriam ser determinados recortando e fazendo dobras nas figuras dadas.

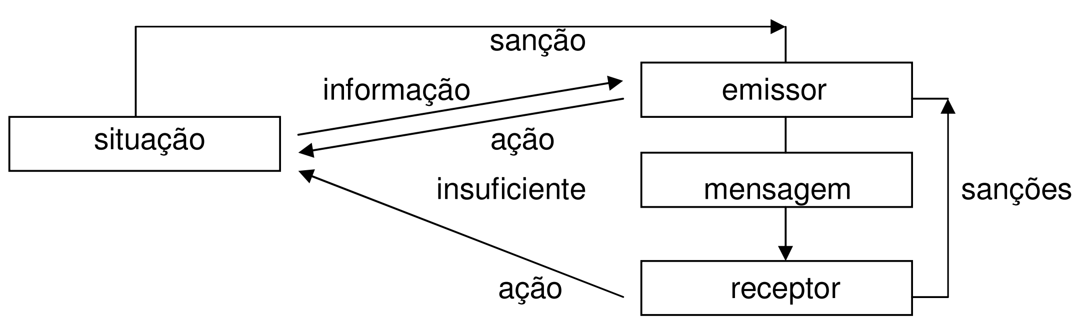
No item seguinte, as figuras não podiam ser recortadas nem dobradas e um outro procedimento deveria ser pesquisado para obter o eixo de simetria das figuras. No caso de figuras mais complexas, como o polígono de 48 vértices, era preciso organizar uma estratégia e regras para verificar a simetria ou não da figura, reproduzida abaixo:



Neste caso, a estratégia foi fazer "tentativas", traçando retas ligando "ponta com ponta", "ponta com reentrância" e "reentrância com reentrância"; e a regra era: comparando o número de vértices de cada um dos semiplanos determinados pela reta, se fossem iguais, a figura seria simétrica, se diferentes, não seriam simétricos.

A **situação de formulação** caracteriza-se pela troca de informações entre uma ou várias pessoas. Os alunos agora são emissores e receptores e trocam mensagens escritas ou orais em linguagem informal ou matemática. Nesse momento, o aluno explicita por escrito ou oralmente as ferramentas que utiliza para determinar a solução de um problema proposto.

Um esquema seguinte, baseado em M. Henry. ilustra a situação de formulação.



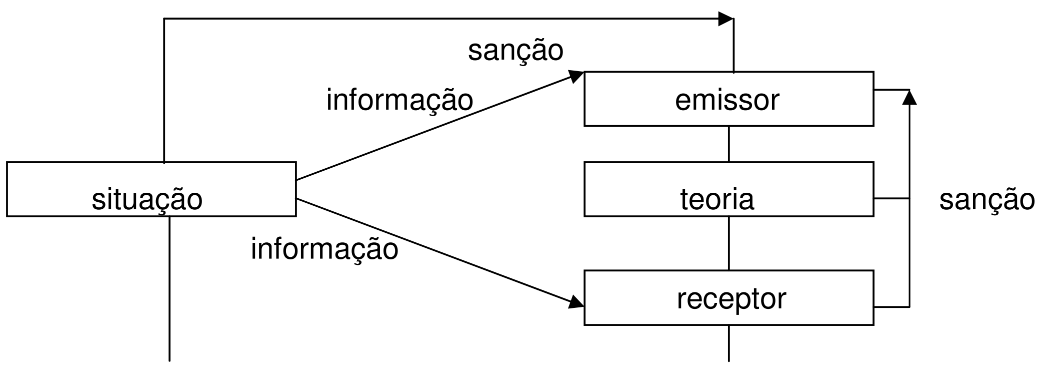
Fonte: Ag Almouloud, 1997

O objetivo da situação de formulação é a troca de informações e a explicitação de mensagens relativas à interação com o problema, não tendo intenção de julgar nem validar, embora esses aspectos possam se apresentar na situação. O aluno pode enviar uma mensagem a ele mesmo, o professor pode ser um dos interlocutores, os dois interlocutores podem ser alunos ou grupos de alunos.

Por exemplo, no trabalho realizado com os professores do curso, a terceira atividade estabeleceu um processo de construção, com régua e compasso, do simétrico de um ponto em relação a uma reta. Na terceira atividade, era preciso construir o simétrico de um segmento dado em relação a uma reta. Esta atividade foi resolvida em grupo e possibilitou troca de informações, mensagens e explicitações de procedimentos e noções para a resolução, entre elementos do mesmo grupo e, posteriormente, entre grupos diferentes, num painel geral. As informações ou noções teóricas necessárias nessa atividade eram: o segmento é um conjunto de pontos e sua imagem deve ser determinada ponto a ponto; pela reflexão em reta, pontos colineares têm imagens colineares, ou seja, a reflexão em reta conserva o alinhamento de pontos.

Na **situação de validação,** o aluno deve mostrar por que o modelo que criou é válido. O emissor deve justificar a exatidão e pertinência de suas conclusões e, se possível, validá-las. O objetivo principal da situação de validação é a discussão sobre a verdade das asserções que foram formuladas nas fases da ação e da formulação.

Um esquema, baseado em M Henry, ilustra a situação de validação:



sanção

Fonte: Ag Almouloud, 1997

Nesta situação, o aluno utilizas a teoria nos debates e nas elaborações de provas para aceitar o que foi formulado em outras etapas. Dificuldades na produção de provas podem ser, nessa fase, conseqüências de um domínio insuficiente da linguagem.

Por exemplo, na décima atividade, era necessário investigar os eixos de simetria de polígonos particulares, tais como: retângulo, quadrado, triângulo isósceles, triângulo equilátero e losango, justificando a resposta dada. Essas justificativas requeriam a aplicação de propriedades geométricas desses polígonos como por exemplo:

- as diagonais do losango e, portanto do quadrado também, são perpendiculares entre si e se interceptam no ponto médio de cada uma delas.
- no triângulo isósceles e, portanto, no equilátero também, a mediana e a altura relativas à base coincidem.

Na **situação de institucionalização** "fixa-se convencionalmente e explicitamente o estatuto cognitivo de um conhecimento ou de um saber" (apud Perrin-Glorian, 1994, p. 126). O novo conhecimento construído e validado passa a ser patrimônio da classe, mas não é ainda reconhecido como saber social. Cabe ao professor organizar os conhecimentos para que se tornem referência cultural, universal e não particularizada. É a situação em que:

> o professor vai permitir ao aluno saber que os conhecimentos utilizados na situação de ação, de formulação e depois de validação, correspondem a saberes reconhecidos (legítimos) que o aluno deverá reutilizar em outras ocasiões que certamente se poderá exigir dele (apud Perrin-Glorian, 1994, p. 126).

Brousseau observa que a institucionalização traz uma mudança no contrato didático, pois o aluno deverá saber o conhecimento institucionalizado que o professor irá exigir. Por exemplo, no trabalho com os professores do curso, após atividades explorando reflexões em reta por meio de procedimentos experimentais e construções, com régua e compasso, foi necessário estabelecer a noção de reflexão em reta como transformação no plano, bem como as principais propriedades geométricas relativas a essa transformação.

Outro conceito importante no processo ensino-aprendizagem é, segundo Brousseau, o de obstáculo. Nas diversas pesquisas de didática, a análise do erro toma como base a noção de obstáculos.

> Segundo Guy Brousseau, o erro seria a expressão ou a manifestação explícita de um conjunto de concepções espontâneas ou reconstruídas integradas numa rede coerente de representações cognitivas, que se torna em obstáculo à aquisição de novos conceitos. A superação desses obstáculos seria então o projeto do ensino e o erro a passagem obrigatória.
>
> Um obstáculo é um conhecimento, uma concepção, não uma dificuldade ou uma falta de conhecimento (apud Almouloud, 1997, pp. 38-39).

Os erros são indícios de obstáculos para a aquisição de um conhecimento e, segundo essa visão, são necessários para o professor situar as concepções dos alunos, diagnosticar os obstáculos e adaptar as situações didáticas.

Para Brousseau:

> Organizar a superação de um obstáculo consistirá em propor uma situação suscetível de evoluir e fazer evoluir o aluno segundo uma dialética conveniente. Tratar-se-á não de comunicar as informações que se queira ensinar, mas de encontrar uma situação na qual elas são as únicas a serem satisfatórias ou ótimas — entre aquelas às quais se opõem — para obter um resultado no qual o aluno se investiu (apud Almouloud, p. 40).

Podemos citar como exemplos de obstáculos:

a) a concepção de que o eixo de simetria determina na figura duas "metades", que devem se superpor ao imaginar (ou realizar) uma dobra sobre o eixo, é um obstáculo para o caso em que um segmento dado intercepta o eixo de simetria não no seu ponto médio.

b) persistir na interpretação "visual" da reflexão em reta, considerando que a imagem de uma figura sempre estará situada "no outro lado da reta", constitui um obstáculo, pois as propriedades geométricas da transformação não estarão sendo consideradas.

4.4.3 A dialética ferramenta-objeto segundo Régine Douady

Régine Douady introduziu as noções de ferramenta, objeto, quadros e mudanças de quadros ou jogos de quadros na didática da Matemática.

Para Douady:

> Um conceito é **ferramenta** quando focalizamos nosso interesse no uso que está sendo feito para resolver um problema. Por **objeto,** entendemos o objeto cultural colocado num edifício mais amplo que é o saber dos matemáticos num dado momento e reconhecido socialmente (1992, p. 134).

As transformações geométricas, no ensino fundamental, são ferramentas para o estudo de propriedades de figuras geométricas e para a noção de congruência de figuras. Num curso superior, passam a ser objeto de estudo com o objetivo de classificar as diferentes geometrias por grupos de transformações.

Também Brousseau utiliza na teoria de situações didáticas a noção de ferramenta e objeto, ao considerar que há um duplo processo quando, primeiramente, a cada etapa, a precedente é uma ferramenta que se transforma em objeto de estudo (sentido ferramenta$\rightarrow$objeto) e depois esse objeto se transforma em ferramenta nas aplicações dos conhecimentos (sentido objeto$\rightarrow$ferramenta).

Para Douady:

> Um **quadro** é constituído de objetos de um ramo da Matemática, de relações entre os objetos, de formulações eventualmente diversas e de imagens mentais associados aos objetos e às relações.

> **Mudança de quadros** é um meio de obter formulações diferentes de um problema, que sem serem necessariamente equivalentes, permitem um novo acesso às dificuldades encontradas e o funcionamento de ferramentas e técnicas que não se apresentavam na primeira formulação (Douady, 1992, p. 135).

Isto é, mudar de quadro é utilizar objetos de outro ramo da Matemática para estudar mais uma questão localizada em outro ramo.

As mudanças de quadros ou jogos de quadros são estimuladas pelo professor, para fazer progredir as investigações nas fases de pesquisa e especialmente ligar questões pertinentes ao problema dado.

No caso das transformações geométricas, além do quadro geométrico, pode-se utilizar o quadro algébrico (das estruturas algébricas), o quadro das funções e o quadro numérico (das medidas). Há subquadros do quadro geométrico, tais como: o pontual, o de grandezas, o de construções com régua e compasso, o de vetores, o de coordenadas (geometria analítica) etc.

Nas atividades sobre reflexões em reta, nas pesquisas e estudos relatados no Capítulo 2, as transformações geométricas foram apresentadas apenas no quadro geométrico, com o uso de subquadros, como o pontual e o de construções com régua e compasso. Nas atividades desenvolvidas no curso para professores licenciados em Ciências, além desses subquadros geométricos, trabalhou-se também no quadro numérico das medidas e no quadro de funções. Na institucionalização realizada depois das atividades, foi usado o quadro das funções para definir transformação geométrica como função bijetora do conjunto de pontos do plano sobre si mesmo.

Com a interação dos domínios geométricos e o de funções, os "deslocamentos" de figuras são interpretados como funções bijetoras aplicadas a essas figuras.

Douady propôs uma organização do ensino em várias fases e denominou-a **dialética ferramenta-objeto**.

Na primeira, chamada fase do **antigo,** o aluno mobiliza conhecimentos antigos como ferramentas explícitas para engajar-se num processo de resolução ou resolver, ao menos, parte do problema.

Por exemplo, num primeiro momento, a noção de ponto simétrico a outro em relação a uma reta é abordada experimentalmente com a ação de dobrar a folha sobre a reta. Num segundo momento, o aluno é desafiado a investigar as características que determinam quando um ponto é simétrico de outro em relação a uma reta. Para isso, terá de mobilizar noções geométricas conhecidas, como a de distância de ponto a reta, que possam servir de ferramentas na resolução do problema.

Na segunda fase, chamada de **pesquisa,** os conhecimentos dos alunos podem ser insuficientes para resolver totalmente o problema. Eles formulam conjecturas e são estimulados a usar implicitamente ferramentas novas. Sabem que é algo novo, mas não sabem explicitá-lo. Se os conhecimentos de um certo domínio não forem suficientes para a resolução do problema é importante que haja uma mudança de quadro.

Por exemplo, estando entendido que características um ponto simétrico a outro apresenta, o professor propõe ao aluno que investigue um processo de construção do simétrico de ponto. Além do quadro das construções geométricas com régua e compasso, é necessário que o subquadro das propriedades geométricas seja utilizado na resolução do problema.

Na terceira fase, a de **explicitação,** os alunos descrevem resultados obtidos e justificam o que afirmaram. Esses resultados e a validação dos mesmos são discutidos coletivamente. Diversas concepções surgem, podendo haver conflitos com os antigos, ou ainda gerar erros ou contradições.

Por exemplo, na investigação de um processo de construção, com régua e compasso, do simétrico de um ponto em relação a uma reta, os alunos descrevem os diferentes processos utilizados, que, colocados em discussão, podem ser validados ou não. Deve haver debate sobre os conhecimentos antigos e os novos empregados na tarefa.

Na quarta fase, de **institucionalização,** o professor seleciona, entre os conhecimentos explicitados na fase anterior, aqueles que vão ser descontextualizados e considerados como objetos de saber matemático. Cabe ao professor a tarefa de dar um estatuto de objeto aos conceitos usados como ferramentas. E o novo explícito é destinado a desempenhar mais tarde o papel de antigo.

No ensino das transformações geométricas, após a resolução de atividades sobre simetrias, o professor institucionaliza os novos conhecimentos que serão apresentados sob forma de definições, enunciados de teoremas etc..

A quinta fase, chamada de **familiarização,** é aquela em que o professor propõe diversos exercícios que exigem dos alunos o uso, como ferramenta explícita, dos conhecimentos que foram institucionalizados.

Na última fase, de **reinvestimento numa situação nova,** o professor propõe problemas mais complexos, nos quais se podem verificar as novas aquisições em funcionamento, ou seja, o novo objeto se tornando antigo, para um novo ciclo da dialética ferramenta-objeto.

No próximo item, analisaremos as atividades propostas na seqüência didática com os professores e o desempenho dos mesmos, descrevendo, ao mesmo tempo, a maneira como essas fases da dialética ferramenta-objeto se apresentaram nas atividades.

4.5 Descrição das atividades e do desempenho dos professores

Na sala de aula, os professores trabalharam em grupos, seguindo as orientações dadas nas atividades, organizadas de modo que eles mesmos descobrissem as noções fundamentais sobre o tema.

Atuamos como orientadores e organizadores das produções dos diversos grupos da classe, com a incumbência de institucionalizar os principais resultados obtidos. Foram constituídos nove grupos, sete com quatro professores e dois com três professores.

Com a nova proposta de trabalho, o contrato didático tradicional precisou ser adaptado, pois se transferia a responsabilidade da aprendizagem do aluno para ele mesmo. Foi necessário discutir solicitações, do tipo:

- “não entendi o que é para fazer”;
- “é isto que o exercício pede?”;
- “está certo o que eu fiz?”

O curso de Geometria das Transformações teve como material de apoio uma apostila elaborada pelo professor Saddo Ag Almouloud da PUC de São Paulo.

Na tabela seguinte, apresentaremos os conteúdos centrais de cada atividade.

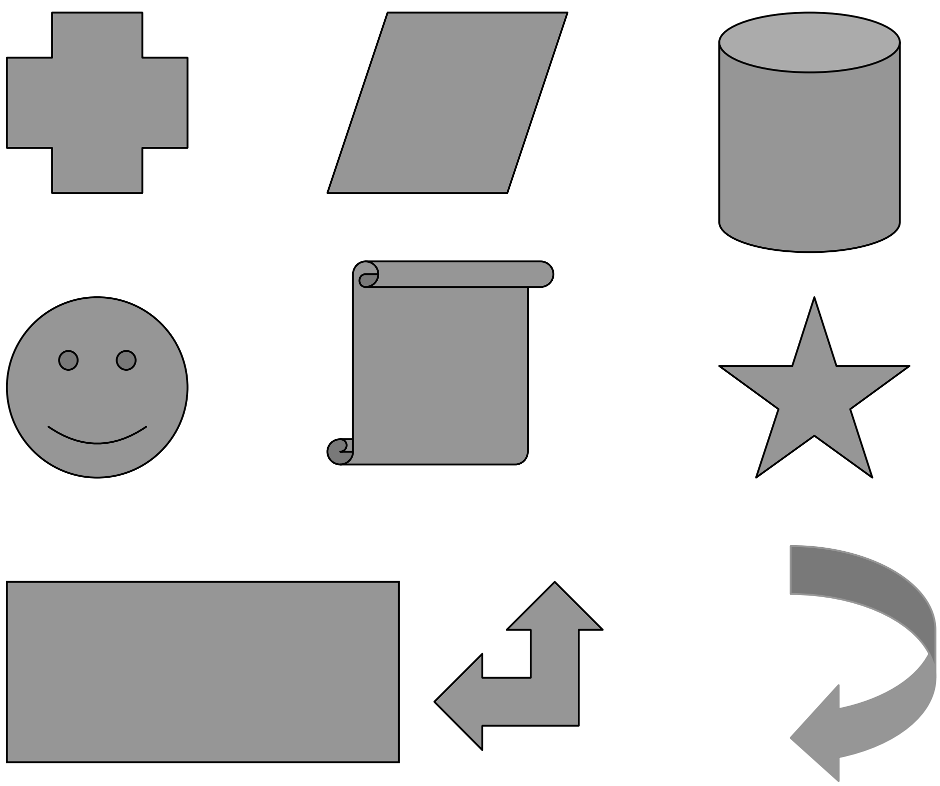
Ativ. 1	Noção de figura simétrica e eixo de simetria num figura
Ativ. 2	Figura simétrica à outra como imagem no espelho
Ativ. 3	Definição de ponto simétrico a outro em relação a uma reta
Ativ. 4	Noção de simétrico de um segmento em relação a uma reta
Ativ. 5	Construção de simétricos de segmentos em relação a uma reta
Ativ.6	Identificação do simétrico de segmentos em relação a uma reta
Ativ. 7	Simétricos de figuras mais complexas em relação a uma reta
Ativ. 8	Características e propriedades da simetria axial ou reflexão em reta
Ativ. 9	Identificação e construção de eixos de simetria
Ativ. 10	Eixos de simetria de polígonos particulares
Ativ. 11	Simétricos de figuras particulares em relação a uma reta
Ativ. 12	Composta de simetrias axiais
Ativ. 13	Noção de simetria central ou reflexão em ponto
Ativ. 14	Simetria central como composta de duas simetrias axiais
Ativ. 15	Definição de simétrico de um ponto em relação a outro ponto
Ativ. 16	Simétrico de um segmento em relação a um ponto
Ativ. 17	Simétricos de figuras em relação a um ponto

Ativ. 19	Características e propriedades da simetria central

A seguir, serão descritas as atividades realizadas, analisados os objetivos e discutidos os resultados de sua aplicação.

Atividade 1: Dobrando e coincidindo[3]

Entre as figuras abaixo, recorte aquelas que podem ser dobradas uma única vez, de modo que as duas partes coincidam.



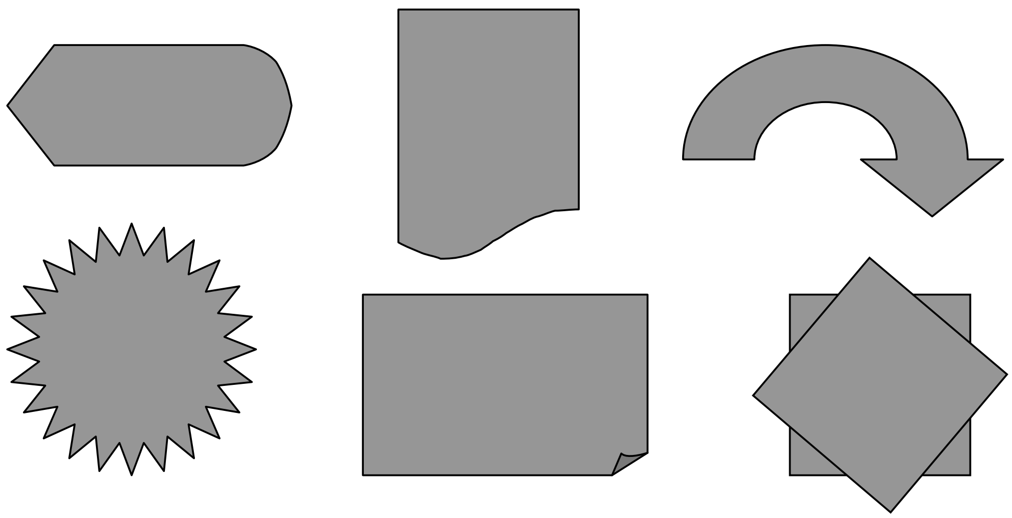
A seguir, cole abaixo, destacando com lápis e régua, o vinco da dobradura que permitiu fazer com que as duas partes coincidissem. Figuras como essas, para as quais existe uma dobradura mediante a qual as duas

[3] Atividade extraída de um trabalho desenvolvido pelo Projeto de Educação Continuada (PEC) na PUC-SP.

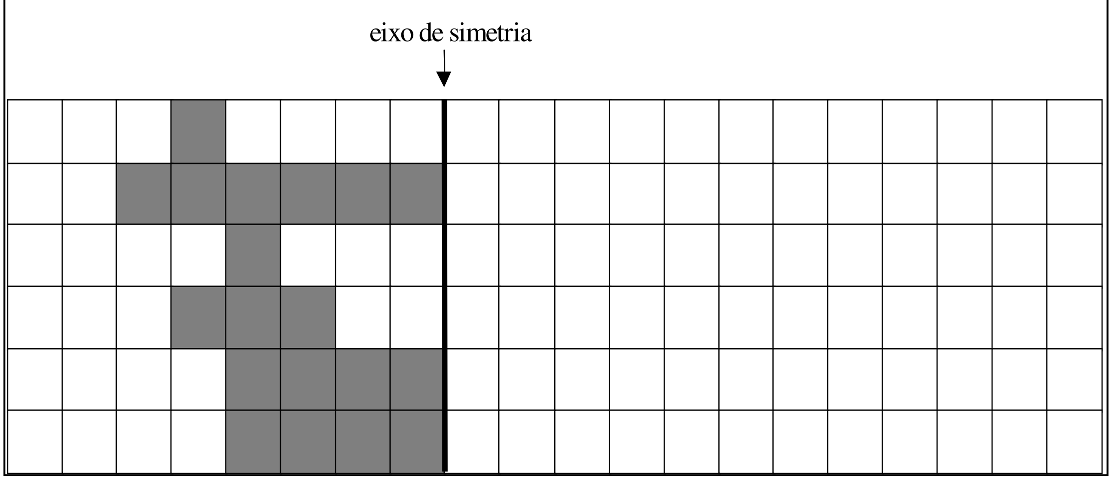
partes obtidas coincidem, são denominadas **figuras simétricas** e o vinco da dobradura é seu **eixo de simetria.**

2) Nem sempre é possível dobrar a figura pelo seu eixo de simetria (se é que ela possui um).

Imagine que as figuras abaixo tenham sido desenhadas na lousa. Para prever se elas são ou não figuras simétricas e, em caso positivo, onde se localizam seus eixos de simetria, você não poderia dobrar a lousa. Explique como faria para tal previsão, desenhando os eixos de simetria.



3) No quadro abaixo está desenhada parte de uma figura simétrica e seu eixo de simetria. Complete-a



<u>Objetivos</u>

Introduzir a noção de figura simétrica e de eixo de simetria, de forma experimental, realizando dobras nas figuras do primeiro item e no segundo, sem a manipulação das figuras. No terceiro item, o objetivo é induzir a observar algumas características que "partes simétricas" de uma figura apresentam, como a "orientação contrária", quantidade iguais de "quadrados" da malha e a relação dessas partes com o eixo de simetria.

<u>Análise da atividade</u>

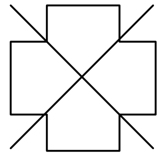
As variáveis didáticas presentes nesta atividade são a complexidade das figuras, a posição do eixo na figura e o número de eixos de simetria. São variadas as posições dos eixos de simetria na figura, algumas verticais ou horizontais e outras inclinadas. Algumas figuras não apresentam eixo de simetria, outras têm um só e algumas apresentam mais de um eixo.

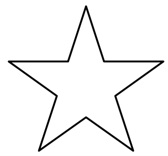
Nessa primeira atividade sobre simetria axial, caracteriza-se uma "situação de ação" em que, segundo Brousseau, os alunos realizam manipulações na produção de um conhecimento experimental, solucionando o problema, mas não explicitando nem argumentando sobre os processos utilizados.

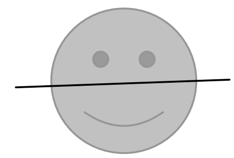
<u>Análise dos resultados</u>

Item 1): A noção de figura simétrica foi dada como a figura repartida, por meio de uma reta, em duas partes, as quais se superpõem quando é feita uma dobra pela reta. Esta seria o eixo de simetria da figura.

Essa "definição local" mostrou-se útil tanto na resolução dos problemas e também como meio de validação das conclusões. Nosso propósito era mostrar, porém, que é uma definição cujo uso se limita a figuras recortáveis e, por isso, deve ser substituída por outros procedimentos mais eficazes. Na fase de dobrar as figuras notou-se que alguns alunos só percebiam uma das possibilidades, quando havia pelo menos duas.

Na figura  apenas um grupo assinalou as duas retas inclinadas como eixos de simetria.

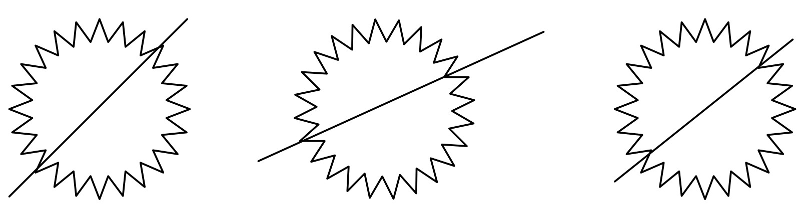
Na figura  quase todos os grupos assinalaram só um eixo (vertical), apenas um grupo assinalou todos os eixos.

Um grupo apresentou a seguinte solução para a figura  por não ter considerado os detalhes no interior do circulo.

Item 2): Aqui a dobra não era permitida e devia-se prever a existência e a localização do eixo de simetria.

A complexidade da figura e o número de eixos de simetria foram variáveis que influíram nas estratégias dos professores. Observamos que algumas pessoas não conseguiam imaginar o eixo de simetria de determinadas figuras, chegando mesmo a recortá-las e dobrá-las para poder visualizar os eixos. Na etapa em que as diversas soluções eram discutidas pela classe toda, questões interessantes surgiram. Na figura do polígono de 48 vértices, todos os grupos haviam assinalado um eixo de simetria vertical, mas colocamos em discussão a questão de como verificar a simetria da figura. Da discussão orientada, surgiu um "critério" que consistia em comparar o número de vértices em cada um dos semiplanos determinados pelo eixo de simetria. Tivemos, também, de salientar que todas as possibilidades para um eixo deveriam ser analisadas, chegando então às seguintes "tentativas":

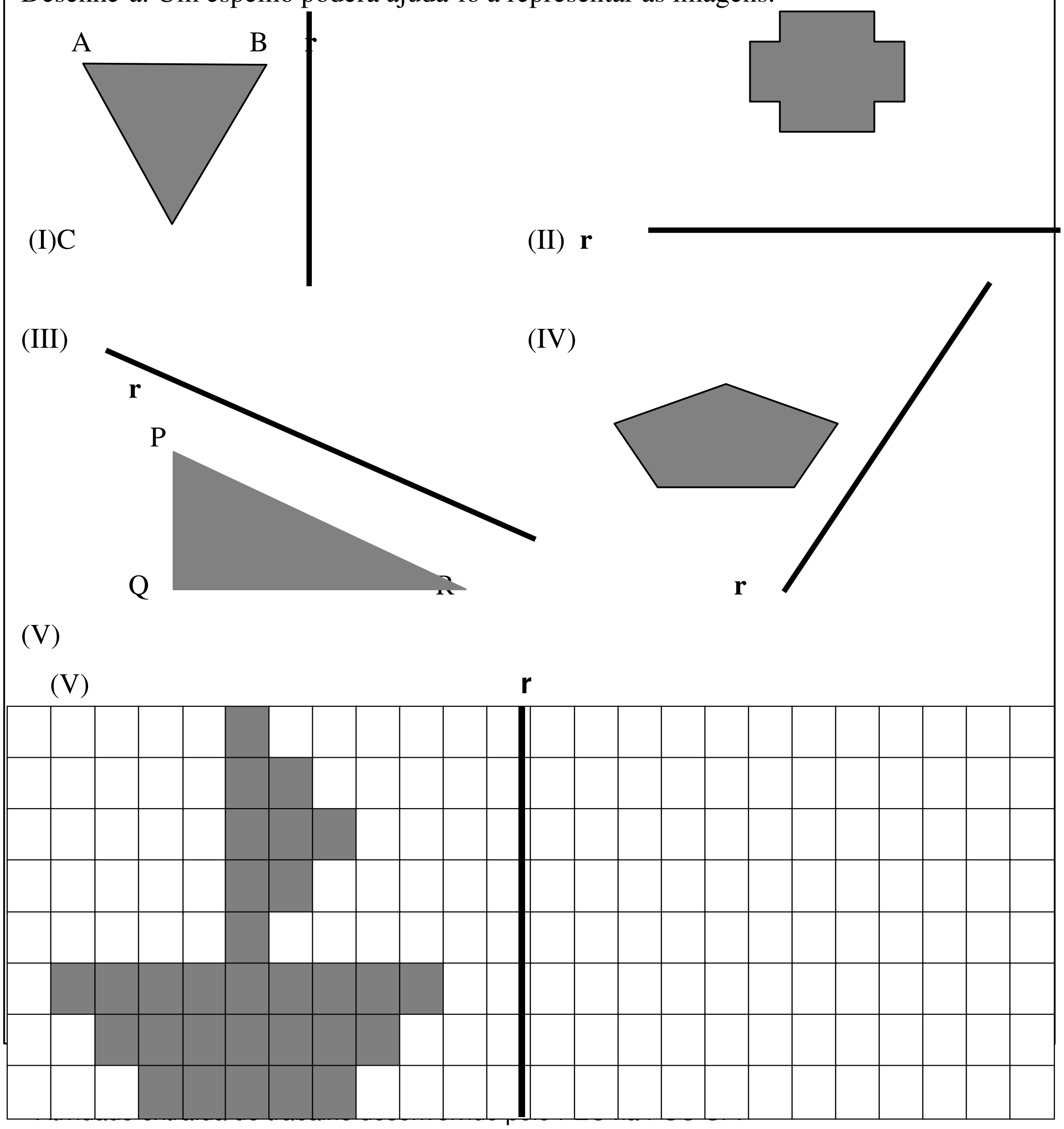
- retas ligando "ponta com ponta", como na 1ª figura;
- retas ligando "ponta com reentrância", como na 2ª figura;
- retas ligando "reentrâncias com reentrâncias, como na 3ª figura.



Item 3) Foi corretamente resolvido por todos os grupos. Neste caso, a presença da malha quadriculada, permitindo a contagem dos quadrados, e a posição vertical do eixo de simetria, que coincidia com uma linha da malha, facilitaram a resolução.

Atividade 2: Espelhando[4]

1) Se você puser um espelho “de pé” sobre a reta r, em cada caso, que imagem vai obter? Desenhe-a. Um espelho poderá ajudá-lo a representar as imagens.



Objetivo

Representar a imagem de uma figura num espelho colocado sobre uma reta.

Análise da atividade

As variáveis didáticas em jogo são a posição do eixo de simetria na folha, a complexidade das figuras (mais simples como o triângulo ou mais complexas como o pentágono e a cruz), a posição relativa eixo-objeto e o tipo de papel (quadriculado na última figura)

No caso das figuras (I)e (II), com os eixos vertical e horizontal e uma posição favorável da figura em relação ao eixo, previamos que não haveria dificuldades, pois até “visualmente” a solução poderia ser determinada. Na figura (III), com eixo inclinado, é mais difícil visualizar a imagem, mas, como um lado do triângulo é paralelo ao eixo, acreditamos que esse fato pode facilitar a tarefa. Na figura (IV), o eixo é inclinado e o pentágono tem, também, um de seus lados paralelo ao eixo, porém, o número de vértices da figura dificulta a visualização da imagem. Aqui, é necessário considerar as características que apresentam a figura e sua imagem no espelho, para que a questão seja corretamente resolvida. A figura (V), colocada numa malha quadriculada, apresenta o eixo de simetria vertical numa posição particular, não coincidindo com nenhuma linha da malha, porque o propósito é avaliar de que modo essa colocação especial será levada em consideração na determinação da imagem da figura.

Tem-se aqui, ainda, uma situação de ação, segundo Brousseau, em que o aluno realiza determinadas ações mais imediatas, resultando um conhecimento de natureza mais operacional. A solução encontrada sem a preocupação de explicitar ou justificar o que foi feito na resolução, predominando o aspecto experimental do conhecimento.

Análise dos resultados

As imagens das figuras (I) e (II) foram corretamente determinadas por todos os grupos. A da figura (III) apresentou erros ou respostas não dadas. Apenas um grupo obteve a imagem do lado paralelo ao eixo e depois construiu, com régua e compasso, a imagem do triângulo com as mesmas medidas dos outros dois lados do triângulo dado. A imagem da figura (IV), o pentágono, estavam deformadas nas resoluções de todos os grupos, indicando a ineficiência do uso do espelho em figuras mais complexas.

Também no caso da figura (V), nenhum grupo a resolveu corretamente. Alguns procedimentos incorretos foram: contar os quadradinhos como se não houvesse diferença entre a posição do eixo e a linha do quadriculado; em lugar de usar o eixo de simetria como referência para determinar o simétrico de partes da figura, contar os quadradinhos a partir dos limites externos do quadriculado, sem levar em consideração que o eixo não se encontrava no meio do mesmo; contar os quadradinhos a partir do eixo e depois descontar a diferença entre o eixo e a linha do quadriculado.

As variáveis didáticas em jogo influíram nas estratégias usadas pelos professores. Observaram que nas imagens das figuras (I) e (II) a “forma” era conservada, e os eixos vertical e horizontal facilitaram a visualização da imagem. Na figura (III), a posição inclinada do eixo de simetria dificultou a determinação da imagem do triângulo, levando um grupo a considerar implicitamente a congruência da imagem com a figura dada. Na figura (IV), além do eixo de simetria estar na posição inclinada, a figura era mais complexa e o uso do espelho não ajudou na determinação da imagem.

Atividade 3: Descobrindo a simetria ortogonal (ou axial)

a) Numa folha de sulfite marque uma reta d e um ponto P fora dela.

b) Dobre a sua folha sulfite seguindo a reta d e marque o ponto coincidente com P.

c) Desdobre a sua folha e nomeie esse ponto de P'.

d) Crie o segmento PP', nomeie de O a interseção do segmento PP' e da reta d.

e) Compare os segmentos OP e OP'. Qual é a natureza dos ângulos formados pela reta d e o segmento PP'? O que representa a reta d para o segmento PP'?

Definição:

1 - O ponto P' assim construído é o simétrico de P em relação à reta d.

f) Qual é o simétrico de P' em relação à reta d? Explique por quê.

2 – Dizemos que os pontos P e P' são simétricos em relação à reta d. A reta d é chamada eixo de simetria.

g) Apoiando-se no que você acabou de descobrir, explique a seguinte asserção: "*O ponto A' é simétrico de um ponto A em relação a uma reta t*".

h) Proponha um processo para a construção, com régua e compasso, do simétrico de um ponto M em relação a uma reta r.

Objetivos

Fazer o professor elaborar o conceito matemático de ponto simétrico a outro e chegar a algum processo de construção com régua e compasso.

Análise da atividade

Os quatro primeiros itens, a até d, constituem a parte experimental da reflexão em reta, na qual, por dobra no papel, é determinado o ponto simétrico a outro em relação a uma reta. No item e, são propostas questões fundamentais para chegar ao conceito de ponto simétrico a outro em relação a uma reta, e os itens f e g reforçam o conceito. Obtido o ponto P', simétrico de P em relação à reta d, as questões do item e levam a observar as principais propriedades desses pontos, tais como, distâncias iguais de P e de P' à reta d, ou, a sua equivalente, o ponto médio O do segmento PP' e d perpendicular a PP'. Ambas levam à conclusão que a reta d é mediatriz do segmento PP'. No último item h, há necessidade de determinar algum processo de construção, com régua e compasso, do simétrico de um ponto em relação a uma reta.

Os diversos itens da atividade estabelecem relações e informações que permitem elaborar o conceito e, finalmente, a construção do ponto simétrico a outro em relação a uma reta, mas prevemos dificuldades nesses itens, pois o teste diagnóstico realizado com o grupo havia detectado problemas na análise de relações geométricas entre figuras.

Esta é a primeira atividade em que, além da manipulação da folha (dobradura), é necessário utilizar conhecimentos geométricos na tarefa. Nos primeiros itens, até o item e, observamos a fase do "antigo" na dialética ferramenta-objeto de Douady, na qual são utilizados conceitos geométricos desenvolvidos no semestre anterior na disciplina Geometria Euclidiana, como, por exemplo, ângulos retos, retas perpendiculares e mediatriz de segmento.

No último item h, na elaboração de um procedimento para a construção do ponto simétrico a outro em relação a uma reta, observa-se a segunda fase da dialética ferramenta-objeto de Douady, chamada de "pesquisa ou novo implícito", na qual novos conhecimentos são colocados em jogo.

Com base nos princípios da dialética ferramenta-objeto, é importante usar a mudança de quadros ou domínios. A interação dos diversos domínios, das grandezas, das medidas, dos conceitos geométricos e das construções com régua e compasso, permite elaborar a concepção e um processo de construção do simétrico de um ponto em relação a uma reta.

<u>Análise dos resultados</u>

Os quatro primeiros itens não apresentaram problemas na resolução, mas o item e precisou de um debate aberto com todos os professores para que fosse respondida a questão sobre o que a reta d representa para o segmento PP”. A maior parte das respostas dizia que d era perpendicular a PP’, outras diziam que d era eixo de simetria. Quando se chamou a atenção para o ponto O, um professor lembrou que O era ponto médio do segmento PP’ e outro concluiu que era mediatriz do segmento PP”. A seguir, discutiu-se a definição de ponto simétrico a outro em relação a uma reta, proposta nesse mesmo item.

A falta de familiaridade com a linguagem geométrica foi, de fato, um aspecto que precisou ser trabalhado em todas as atividades do curso, para que os professores percebessem a importância do uso correto de termos geométricos e da precisão da linguagem matemática.

Algumas imprecisões das respostas precisaram ser trabalhadas, como, por exemplo: ao relacionar o eixo de simetria com o segmento determinado pelo pontos simétricos, diziam que o primeiro era perpendicular ao segundo, sem citar, porém, em que ponto; ou afirmavam que o eixo passava pelo meio do segmento, sem indicar que eram perpendiculares.

O item f reforçava o conceito de ponto simétrico a outro em relação a uma reta. Quando se pediu a explicação, uma professora respondeu que as distâncias eram iguais.

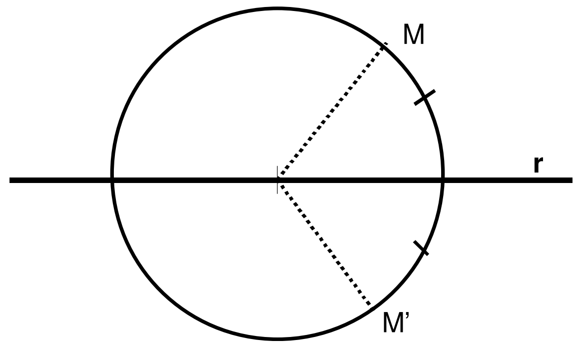
No item g, pedia-se para explicar uma asserção sobre pontos simétricos, mas ninguém sabia o significado dessa palavra. Mesmo depois de fornecido o significado, os professores apresentaram dificuldades de explicar a asserção.

No último item, o que se pedia era uma proposta de construção, com régua e compasso, do simétrico de um ponto em relação a uma reta. Os professores tiveram muita dificuldade, pois, embora entendessem que o eixo de simetria é a mediatriz do segmento com extremidades nos pontos simétricos, não relacionaram esse conhecimento com as características que a mediatriz apresenta: perpendicularidade e eqüidistância.

Dois grupos, com algumas orientações nossas, chegaram à seguinte construção: pelo ponto M construíram uma reta perpendicular a r, chamaram de

O o ponto de interseção dessa perpendicular com a reta r e consideraram o ponto M', sobre a perpendicular, com a distância OM' igual a OM. Essa construção foi discutida no painel aberto com os professores e foi validada pela definição dada no item e.

Uma aluna sugeriu a seguinte construção, também, correta.



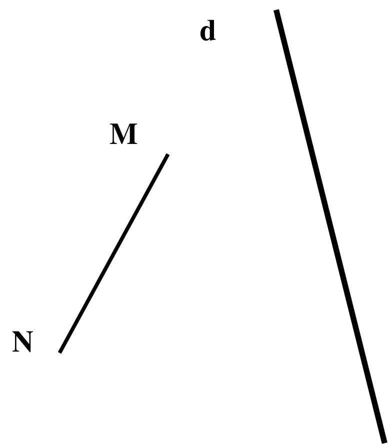
Propusemos que ela pesquisasse meios para que o processo fosse validado, demonstrando que o ponto M' obtido era simétrico de M em relação a reta r. Comentamos, então, que outros processos para a construção do simétrico de um ponto em relação a uma reta poderiam ser encontrados, mas que deveriam ser validados para serem empregados.

Observamos nos professores uma atitude comum a muitos estudantes, o de não perceber que, nesta atividade com vários itens, cada um deles dependia dos anteriores para a solução. Essa ligação entre vários itens de uma situação-problema nem sempre é considerada, mas é um aspecto que é resolvido com quantidades maiores de atividades com tal característica. Foi uma atividade essencial para que o conceito de ponto simétrico a outro em relação a uma reta fosse apreendido e uma construção do mesmo fosse estabelecida.

Além disso, várias situações didáticas, segundo Brousseau, apresentaram-se nessa atividade. Nos cinco primeiros itens, observou-se uma situação de ação, quando o participante do trabalho "sabe fazer" e aplica algum conhecimento anterior, mesmo sem formulá-lo. Nos itens f,g e h, observou-se uma situação de formulação, na qual, se devem descrever relações, propriedades e procedimentos para comunicar ferramentas usadas na solução do problema. Finalmente, no item h, apresentou-se uma situação de validação, pois foi necessária uma justificativa (ou uma prova) de que os procedimentos utilizados na construção levaram à determinação do ponto simétrico de outro em relação a uma reta. Como sugestão, o termo asserção do item g poderia ser substituído por afirmativa.

Atividade 4: Construindo o segmento simétrico de um segmento dado

Crie um segmento MN e uma reta d conforme desenho abaixo.



b) Explique como construiria o simétrico do segmento MN em relação à reta d. Construa-o e nomeie-o de OP.

c) Compare os segmentos MN e OP. Justifique a sua resposta.

d) Seja L um ponto qualquer da reta d. Qual é o simétrico de L em relação à reta d?

Objetivos

- Reconhecer que um segmento é um conjunto de pontos e que seu simétrico é o segmento determinado pelos simétricos dos pontos do segmento dado;
- Destacar que o simétrico de um segmento em relação a uma reta é outro segmento congruente ao segmento dado;
- Destacar que os pontos do eixo de simetria são os pontos fixos da reflexão em reta.

Análise da atividade

No item b, para determinar o simétrico de um segmento em relação a uma reta, é necessário considerá-lo como conjunto de pontos, determinar os simétricos das extremidades e de alguns pontos do segmento para verificar que a reflexão em reta conserva a colinearidade dos pontos. Isso deve ser explicado na resolução do problema.

No item c, comparando o segmento dado e sua imagem pela reflexão em reta, conclui-se que são congruentes, ou seja, a reflexão em reta é uma isometria.

Do ponto de vista de Brousseau, observa-se, nessa atividade, uma situação de formulação, na qual um estudante troca informações com um ou mais colegas. Eles são emissores e receptores nas mensagens escrita e orais. O objetivo é a troca de informações que possam levar a julgamentos e debates de validação, aspectos que não são essenciais nem estão necessariamente presentes na situação.

É necessário usar explicitamente informações teóricas de forma mais elaborada e uma linguagem mais apropriada ao explicar como construir o simétrico do segmento e comparar a imagem, que é congruente ao segmento dado.

<u>Análise dos resultados</u>

Seis professores resolveram corretamente a atividade, mas os outros, determinaram o simétrico de uma das extremidades do segmento dado — já discutida e entendida em atividade anterior — mas não sabiam como achar a imagem do segmento. A dificuldade consistiu em não considerar o segmento como um conjunto de pontos, bastando determinar as imagens destes para obter o simétrico do segmento. Aqui, o aspecto pontual da figura não foi levado em consideração, sendo o segmento apreendido como um todo. Como primeira atividade de construção, com régua e compasso, do simétrico de uma figura que não fosse ponto, percebemos que os procedimentos eram próprios de estudantes no nível 1 (de visualização) do modelo de raciocínio geométrico, extraído das pesquisas dos Van Hiele, como, por exemplo:

- considerar os movimentos de modo global;
- utilizar propriedades visuais para descrever os movimentos;
- reconhecer características das isometrias como conservação da forma e do tamanho.

Esses procedimentos foram observados quando alguns professores determinaram o simétrico de uma das extremidades do segmento. Para completar o simétrico, estimavam visualmente a localização da outra extremidade tomando um ponto tal que o segmento imagem ficasse congruente com o segmento dado.

Aqui, observou-se o fato — apontado pela pesquisa sobre o ensino e aprendizagem da simetria axial de Grenier— de que *não é suficiente saber determinar o simétrico de um ponto para saber determinar o simétrico de um segmento ou de uma figura qualquer.*

Na fase que Douady indica como de "explicitação", foram discutidos os conhecimentos antigos que estão sendo usados (simétrico de um ponto) e os novos, que estão sendo criados explicitamente durante a tarefa (simétrico de um segmento).

Na discussão, observou-se que surgiram erros e contradições como, por exemplo, quando uma pessoa determina, como imagem de um segmento, qualquer outro segmento congruente a ele e observa que nem todo segmento congruente a outro é seu simétrico.

Foi necessário explicitar algumas noções usadas (por exemplo, a de segmento como conjunto de pontos) e esclarecer e introduzir outras (a imagem de um segmento é um segmento, isto é, a reflexão em reta conserva a colinearidade de pontos).

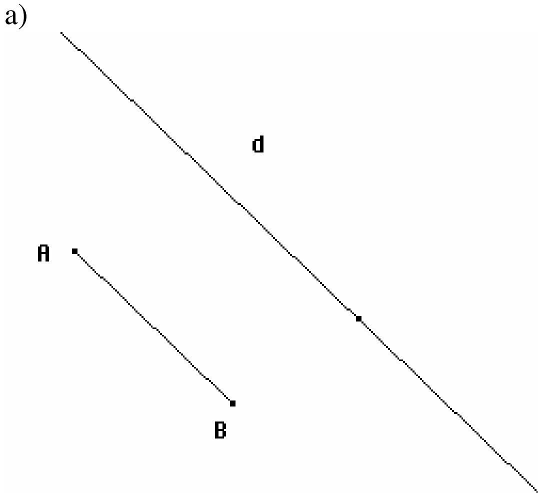
Os professores desse curso haviam estudado Geometria Euclidiana no semestre anterior e não tinham ainda muita prática em demonstrações geométricas. Por isso, no item c, optou-se por uma verificação prática da congruência de segmentos, com compasso ou régua, em substituição a uma justificativa formal.

Finalmente, numa fase que Douady denominou "institucionalização", selecionamos, entre os conhecimentos explicitados na fase anterior aqueles que foram descontextualizados e considerados como objetos do saber matemático, comum a todo o grupo.

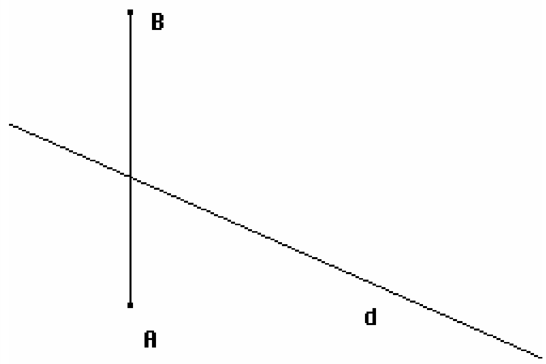
Atividade 5: Construindo segmentos simétricos a segmentos dados

Nos seguintes casos, construa o segmento MN simétrico do segmento AB em relação à reta d. Explique o seu procedimento de construção.

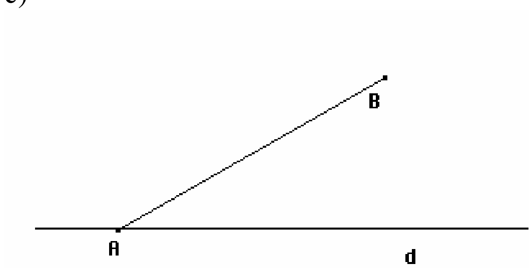
a)



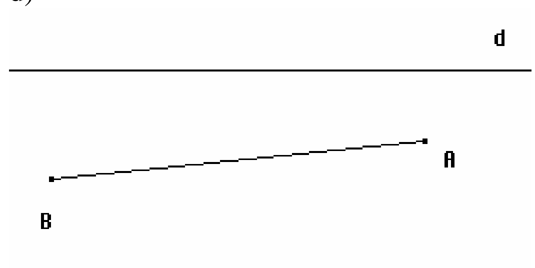
b)



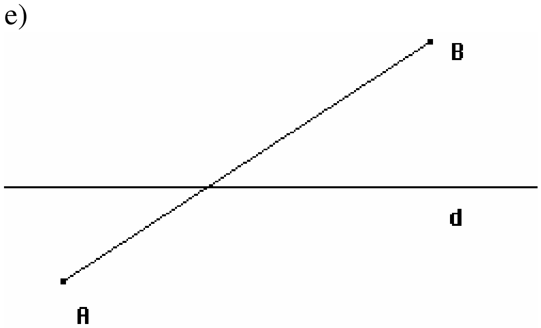
c)



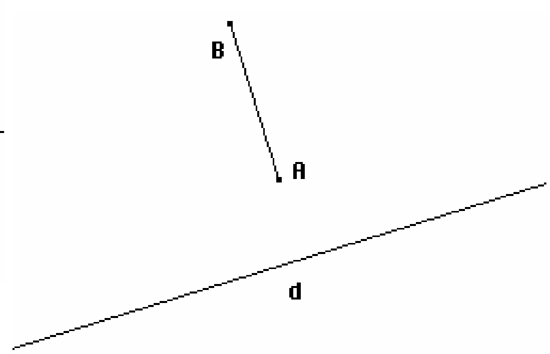
d)



e)



f)



Objetivo

Propor exercícios diversos, com outras variáveis didáticas, sobre construção de segmentos simétricos em relação a uma reta.

Análise da atividade

As variáveis didáticas são posição do eixo na folha (horizontal e inclinada) e posição relativa eixo-objeto. Vejamos como essas variáveis didáticas se apresentam em cada figura:

Fig.	Posição do eixo na folha	Posição relativa eixo-objeto
A	Inclinada	segmento não intercepta o eixo
B	inclinada	segmento intercepta o eixo
C	horizontal	segmento tem uma extremidade no eixo
D	horizontal	segmento não intercepta o eixo
E	horizontal	segmento intercepta o eixo
F	inclinada	segmento é perpendicular ao eixo e não o intercepta

Na dialética ferramenta-objeto de Douady, essa atividade corresponde à fase de “familiarização”, em que o novo conhecimento é usado como ferramenta explícita na resolução de exercícios.

Análise dos resultados

A discussão da atividade 3 permitiu elaborar um processo de construção do simétrico de um ponto em relação a uma reta, utilizando régua e compasso. Essa atividade e a seguinte (simétrico de um segmento) possibilitaram a construção do simétrico de qualquer figura. Assim, a construção dos simétricos dos segmentos dados foram resolvidas sem dificuldades, e os problemas encontrados nas pesquisas sobre a influência das variáveis didáticas nas respostas dos alunos não foram detectados.

A atividade pedia que o procedimento usado na construção fosse explicado, mas 5 professores não responderam, 16 o fizeram corretamente e 4 de forma incompleta. Descreveremos alguns procedimentos especiais apresentados.

No item a, o segmento era paralelo ao eixo, mas essa informação não havia sido dada. Duas pessoas, sem verificar o paralelismo, construíram a perpendicular ao segmento (e não ao eixo) para determinar o simétrico de cada extremidade. O segmento imagem era simétrico neste caso, mas, como tal procedimento foi repetido no item d, provavelmente, essas pessoas se fixaram mais no aspecto visual do que matemático da simetria.

No item b, a posição do eixo de simetria é inclinada e o segmento dado intercepta o eixo, mas não no ponto médio. Os valores escolhidos para essas duas variáveis didáticas dificultaram a visualização da solução e favoreceram procedimentos diferenciados. Por exemplo, o fato de o segmento interceptar o eixo tornou mais visível o ângulo por eles formado. Seis professores "inventaram" outro processo de construção do simétrico de um segmento, usando a propriedade da conservação desse ângulo pela reflexão em reta. Essas pessoas usaram o mesmo método para resolver os outros itens semelhantes c e e.

No item c, o eixo de simetria era horizontal e o segmento tinha uma extremidade no eixo. Para alguns, os valores das variáveis didáticas favoreceram a construção do simétrico do segmento, a partir da conservação do ângulo formado pelo eixo e o segmento dado. Aqui também se confirmou o que as diversas pesquisas didáticas descritas no Capítulo 2 concluíram: *se o segmento tem uma extremidade no eixo, a imagem contém esse ponto, e o simétrico do segmento é determinado mais facilmente*

No item d, alguns alunos repetiram o procedimento usado no item a, construindo a perpendicular ao segmento e não ao eixo, mas o segmento aqui não era paralelo ao eixo horizontal.

No item e, em que o eixo era horizontal e o segmento o interceptava, repetiu-se o que havia ocorrido no item 5b, em que o ângulo do eixo com o segmento foi utilizado na determinação da imagem do segmento.

No item f, o eixo era inclinado e o segmento perpendicular a ele, mas essa informação não era dada no exercício. Apenas uma pessoa não verificou o perpendicularismo.

Alguns exemplos de explicações equivocadas formuladas pelos professores:

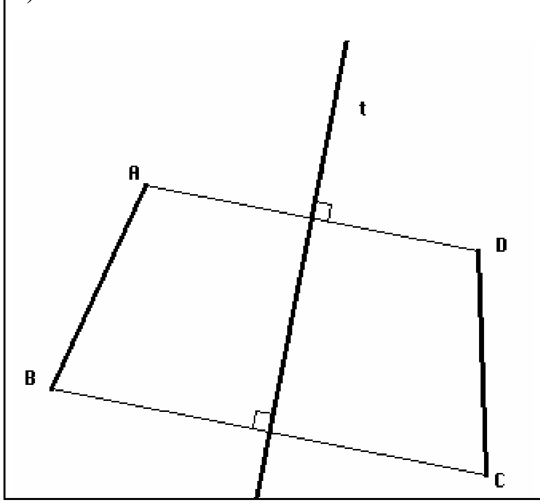
- "traçar perpendicular em relação à reta d...";
- "traçar perpendicular à reta d, em relação ao ponto A";
- "a reta d é o eixo de simetria do ponto A".

Observou-se que algumas pessoas retomaram a fase chamada de "novo implícito" ou "pesquisa", em que conceitos, propriedades ou procedimentos são formulados pelos alunos com condições de emprego no momento, e que podem ser refutados ou validados pela ação. No processo de construção "inventado", os professores usaram implicitamente que o ângulo formado pelo segmento com o eixo se conserva numa reflexão em reta, o que precisaria ser validado por outros meios.

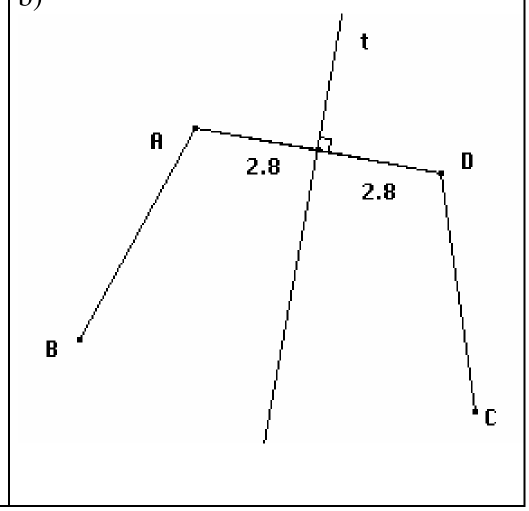
Atividade 6: Identificando o simétrico de um segmento

Nas figuras abaixo, o segmento CD é simétrico do segmento AB em relação à reta t? Justifique a sua afirmação.

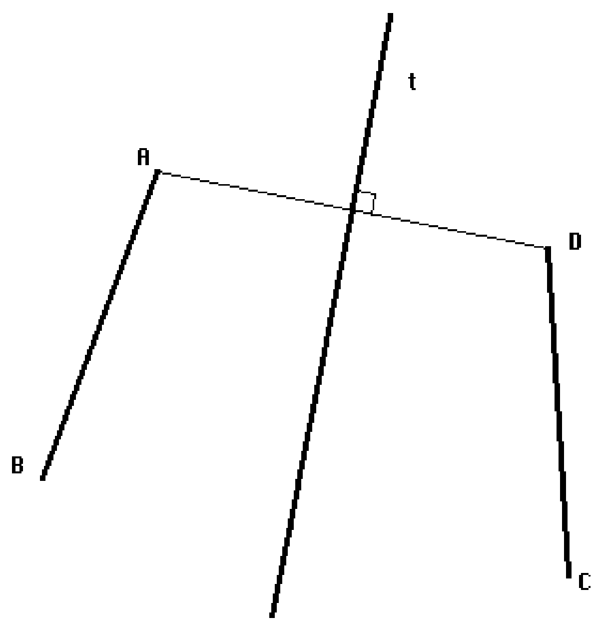
a)



b)



c)



<u>Objetivo</u>

Identificar as características da reflexão em reta, explicitando-as para justificar as respostas e, também, usar corretamente a linguagem geométrica.

Análise da atividade

Aqui se pede a confirmação ou não da simetria de pares de segmentos dados em relação a uma reta e, também, a justificação da resposta

As variáveis didáticas nessa atividade são: posição do eixo de simetria e posição relativa eixo-objeto. Em todas as figuras, o eixo está na posição inclinada e o segmento não intercepta nem é paralelo ao eixo de simetria, porém os segmentos são congruentes entre si.

Faremos a análise da atividade em cada figura.

Na figura a, os segmentos dados são AB e DC, sendo dado, também, que os segmentos AD e BC são perpendiculares à reta t. É necessário verificar que as distâncias de A e D à reta t e de B e C à t são iguais. Neste caso, os segmentos dados AB e DC são simétricos em relação à reta t.

Na figura b, as indicações dadas são que as distâncias de A e D à reta t são iguais, havendo necessidade de verificar que os pontos B e C têm, também, distâncias iguais à reta t. Isso pode ser feito de dois modos: construindo a reta perpendicular a t, pelo ponto B (ou C) e medindo as distâncias de B e C ao ponto de interseção da perpendicular com t; ou construindo a mediatriz do segmento BC para verificar a coincidência da mediatriz com a reta t. Neste caso, os segmentos AB e DC são simétricos em relação à reta t.

No caso da figura c, a única informação é que a reta t é perpendicular ao segmento AD. É necessário verificar se A e D eqüidistam do ponto de interseção de t com AD e, também, se B e C eqüidistam da reta t. Isso pode ser feito usando um dos procedimentos empregados para a figura c, indicados no parágrafo anterior. No caso desta figura, A e D são eqüidistante de t, mas B e C não têm distâncias iguais à reta t e, portanto, os segmentos dados AB e DC não são simétricos.

Observa-se nessa atividade a fase de "explicitação", segundo Douady, na qual, resultados obtidos devem ser justificados e validados geometricamente.

Análise dos resultados

Quase todos os grupos analisaram as condições exigidas para a simetria, estabelecendo corretamente a simetria ou não dos segmentos em relação a t.

Somente alguns professores afirmaram que os segmentos eram simétricos baseados na aparência e de alguns dados das figuras como, por exemplo, os ângulos retos e medidas iguais de determinados segmentos

A dificuldade maior estava nas justificativas das conclusões, quando as características de uma figura simétrica à outra em relação a uma reta deveriam ser explicitadas. Observamos que algumas concepções surgiram, trazendo conflitos com os antigos e gerando erros ou contradições. Por exemplo, nas justificativas, alguns professores haviam afirmado que os segmentos eram simétricos porque eram congruentes entre si. Quando apresentamos o caso da figura c, em que os segmentos eram congruentes mas não simétricos, ficou claro, para eles, que a congruência de segmentos não é suficiente para que sejam simétricos um do outro. Foi entendida a relação causa e efeito entre a simetria e a congruência.

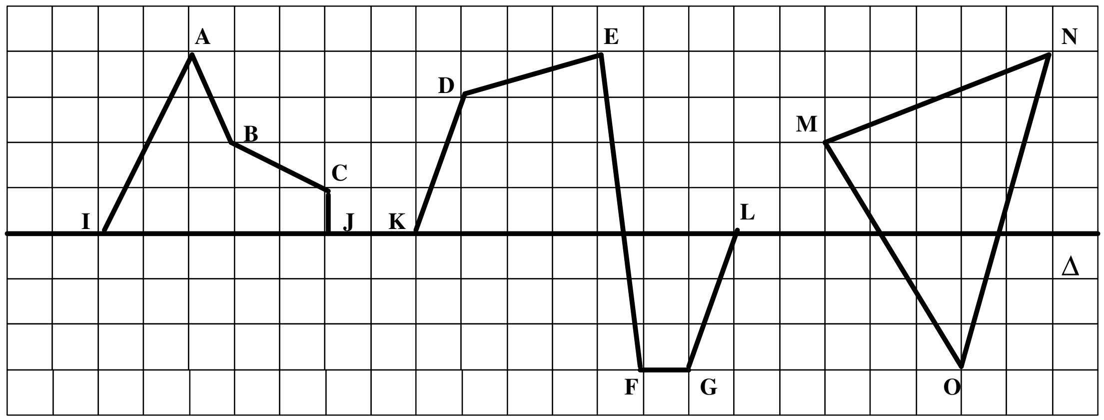
Nota-se, com essa atividade, que os procedimentos apresentados são característicos do nível 2, de análise, de acordo com o modelo extraído da pesquisa dos Van Hiele, como, por exemplo:

- identificar em casos concretos as características da reflexão em reta;
- utilizar de forma explícita os elementos característicos da reflexão;
- aprender e utilizar o vocabulário geométrico corretamente.

O fato de ter de justificar uma afirmação proporciona um avanço no desenvolvimento do raciocínio de um estudante.

Atividade 7: Construindo figuras simétricas

a) Considera-se o desenho abaixo



Reproduza as três figuras num papel quadriculado.

b) Construa os pontos A', B', C' simétricos dos pontos A, B, C em relação à reta Δ. O que representa a reta Δ para o novo desenho obtido.

c) Complete

A'B'=....., B'C'=...., $I\hat{A'}B'$=...., $P\hat{M}N$=....,

d) Escreva cinco outras igualdades a propósito dos triângulos M'N'P' e MNP.

Síntese das propriedades

Dizer que dois pontos A e B são simétricos em relação à uma reta Δ, quer dizer que Δ é a mediatriz do segmento AB.

Digamos também:

- A é simétrico de B em relação à reta Δ

- B é simétrico de A em relação à reta Δ.

- Todo ponto de Δ é seu próprio simétrico em relação à reta Δ.

<u>Objetivo</u>

Construir simétricos de polígonos diversos.

<u>Análise da atividade</u>

As variáveis didáticas aqui são: a posição do eixo de simetria, a complexidade da figura, a posição relativa eixo-objeto e o tipo de papel. Nas três figuras dadas, o eixo é horizontal e o tipo de papel é uma malha quadriculada. Analisaremos as outras variáveis em cada figura.

A primeira figura dada é uma poligonal com as extremidades no eixo de simetria Δ. A segunda figura dada é também uma poligonal com as extremidades no eixo de simetria, mas com um dos lados interceptando o eixo. A terceira figura é um triângulo com dois lados que interceptam o eixo de simetria.

No item a, é necessário reproduzir as figuras numa folha de papel quadriculado.

No item b, os simétricos de cada vértice das poligonais devem ser determinadas.

No item c, pedia-se para assinalar alguns lados e alguns ângulos congruentes nas figuras dadas.

No item d, outras congruências entre elementos correspondentes na figura e na imagem devem ser destacadas.

<u>Análise dos resultados</u>

A malha quadriculada e a posição horizontal do eixo sobre uma linha da malha facilitaram a localização do simétrico de cada ponto, sendo de cerca de 70% o índice dos professores que resolveram corretamente a atividade. O que parece ter causado dificuldades na resolução foi que duas das figuras "passaram" para o outro lado do eixo.

Algumas incorreções na linguagem geométrica ainda foram encontradas, como por exemplo:

- "Δ é mediatriz do novo desenho";
- "Δ é mediatriz dos pontos P e P' ";
- "Δ é mediatriz".

O item c, que pedia para observar a congruência de alguns segmentos e ângulos correspondentes pela reflexão em reta, foi respondido corretamente por todos.

No item d, os alunos deveriam indicar os elementos, lados e ângulos, congruentes nos triângulos simétricos. Apesar de haver muitas respostas corretas no item anterior, semelhante a este, apenas 50% das pessoas responderam correta e completamente. Do total da classe, 17% (5) deram respostas erradas, 14% (4) incompletas e 2 professores não responderam. Alguns acertaram os lados congruentes e erraram os ângulos.

Uma resposta apresentada indicou imprecisão na linguagem geométrica. Uma pessoa escreveu no item d: "M = M', N = N' e P = P' ", quando se referia a ângulos de vértices em M, M', N, N', P e P'.

Junto com essa atividade, é apresentada na apostila uma síntese dos conhecimentos geométricos sobre a reflexão em reta.

Atividade 8: Desvendando as propriedades da simetria axial

Complete as seguintes afirmações:

a) Se um ponto A' é o simétrico de um ponto A em relação à uma reta d, então:

as retas d e $\overleftrightarrow{AA'}$ são ....

a reta d é .... do segmento $\overline{AA'}$.

b) Se um segmento $\overline{L'K'}$ é o simétrica de um segmento $\overline{LK}$ em relação à uma reta t, então $\overline{L'K'}$ e $\overline{LK}$ são ....

c) A imagem de uma reta b em relação ao eixo q é:

- uma reta b' paralela a b, se b e q são ....
- a reta b=b', se b e q são ....
- uma reta b' interceptando b no eixo q, se b e q são ....

d) Se os triângulos ABC e A'B'C' são simétricos em relação à uma reta x, então os triângulos ABC e A'B'C' são ...., pois ....

Objetivos

- Estabelecer a noção geométrica de ponto simétrico de outro em relação a uma reta;
- Estabelecer a congruência de segmentos simétricos em relação a uma reta;
- Analisar a imagem de uma reta numa reflexão em reta.
- Ampliar os conhecimentos sobre a reflexão em reta.

Análise da atividade

Em todos os itens, é necessário completar as afirmativas.

As do item a assinalam as características de uma reflexão em reta.

A do item b destaca a congruência de segmentos simétricos em relação a uma reta.

No item c, as sentenças analisam as imagens possíveis b' de uma reta b numa reflexão na reta q, observando que:

- b' é paralela a b se b e q forem paralelas;
- b' é igual a b se b e q forem coincidentes ou se b e q forem perpendiculares entre si;
- b' intercepta b num ponto do eixo, se b e q forem concorrentes.

As afirmativas do item d levam o estudante a concluir que dois triângulos simétricos em relação a uma reta x são congruentes entre si e, ao mesmo tempo, ele deve justificar essa afirmativa.

De acordo com Brousseau, observa-se uma situação de validação em que se procuram mecanismos de prova e o saber é usado com essa finalidade; é preciso elaborar algum tipo de prova dos fatos observados e das afirmações obtidas de outra forma

Análise dos resultados.

Os itens a e b foram respondidos corretamente por quase todos os professores, e o item c requereu alguma orientação sobre a interpretação do texto.

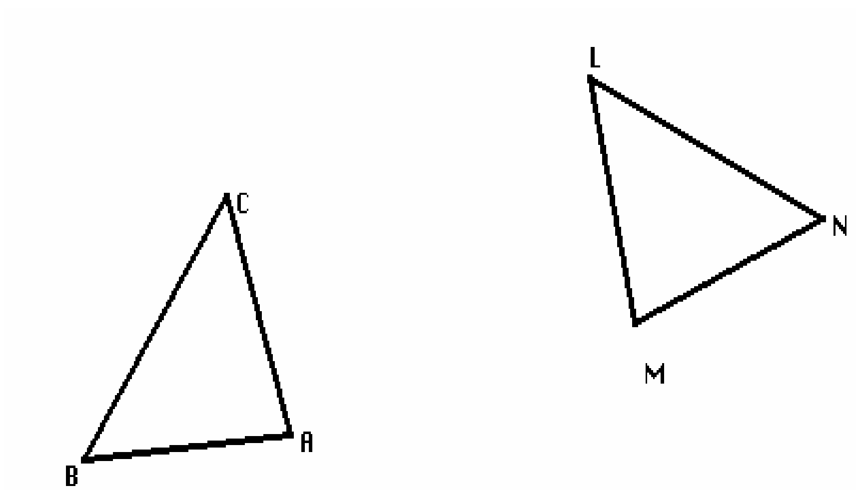
O item c foi considerado difícil de entender, pois a linguagem geométrica ainda não lhes é familiar.

O último item levava a observar a congruência de triângulos simétricos por causa da congruência de seus lados. Quando questionados sobre o porquê dessa conclusão, os alunos não relacionavam a congruência dessa questão com o que já haviam estudado em Geometria Euclidiana no semestre anterior. Um dos professores perguntou se a congruência dos ângulos que se correspondem nesses triângulos poderia ser deduzida como conseqüência da simetria dos mesmos. A pergunta nos levou a retomar e discutir a definição de dois triângulos congruentes, estudada na disciplina Geometria Euclidiana.

Atividade 9: Identificando eixos de simetria

I)

a) No desenho abaixo, os triângulos são simétricos em relação à uma reta d? Por quê?

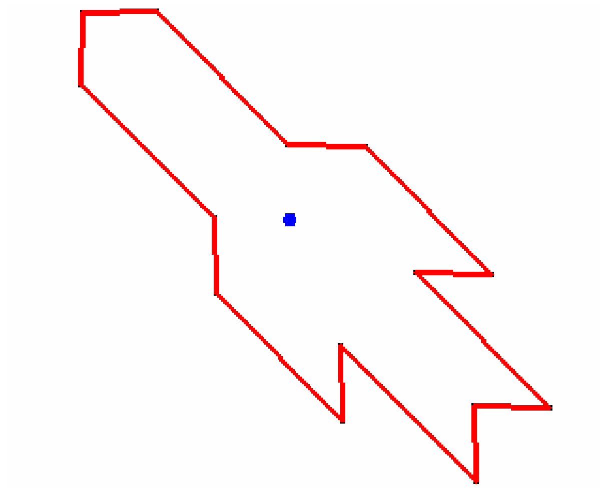


b) Se sim, explique como construiria o eixo de simetria? Construa-o.

II) a) O desenho abaixo representa um avião. Existe uma simetria no desenho? Explique sua resposta.

b) Quantos eixos de simetria possui este desenho ? Explique sua resposta. Desenhe-o(s).

c) Nomeie os vértices do desenho. Construa um eixo de simetria. Indique os vértices correspondentes em relação a esse eixo. Explique sua resposta.

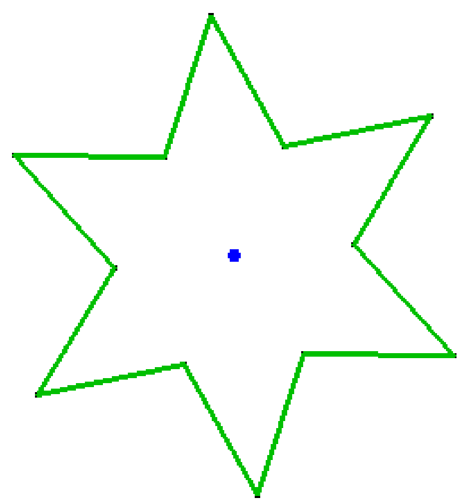


III)

a) O desenho ao lado representa uma FLOR. Existe uma simetria no desenho? Explique sua resposta.

b) Quantos eixos de simetria possui este desenho? Explique sua resposta. Desenhe-os.

c) Nomeie os vértices do desenho. Construa um dos eixos de simetria. Indique os vértices correspondentes em relação a esse eixo. Explique sua resposta.



IV) Examine o desenho abaixo.

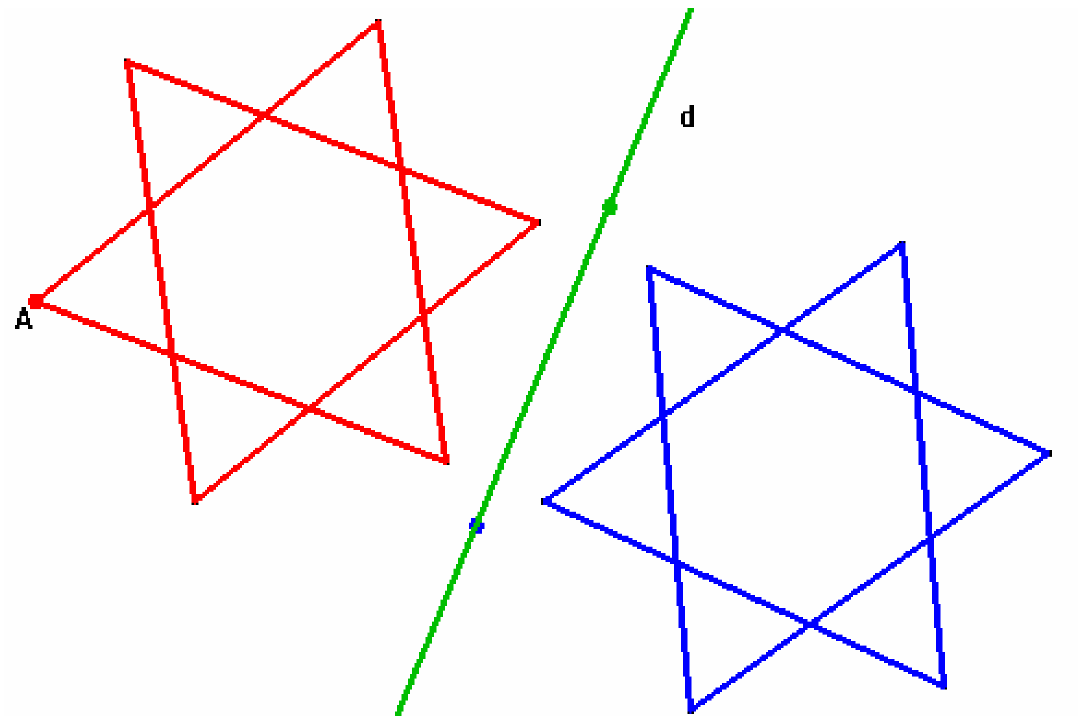
a) Quantos eixos de simetria tem cada um dos triângulos que formam a estrela da esquerda? Construa-os e explique como você fez.

b) Os triângulos que formam a estrela da esquerda têm os mesmos eixos de simetria? Por quê?

c) Quantos eixos de simetria possui cada estrela ? Explique porquê e desenhe-os.

d) Retome as questões a), b) e c) e responda com a estrela da direita.

e) A estrela direita é o simétrico da estrela esquerda em relação à reta d? Ligue os vértices da estrela esquerda com seus correspondentes da estrela direita. Explique como você fez.



g) A reta d é o eixo de simetria do desenho inteiro? Por quê?

Objetivo

Identificar a simetria e construir o eixo de simetria em figuras dadas, desde a mais simples (dois triângulos) até a mais complexa (duas estrelas formadas por dois triângulos equiláteros), explicando como a solução foi obtida.

Análise da atividade

As variáveis didáticas aqui são:

- posição do eixo de simetria na figura. O eixo de simetria poderia ser interno à figura, como nas figuras II e III, ou externo, como nas figuras I e IV;
- complexidade da figura;
- número de eixos de simetria.

Para que as figuras dadas sejam simétricas em relação a uma reta d é necessário que os vértices correspondentes — um em cada figura — sejam simétricos em relação a d. Pela definição de ponto simétrico a outro em relação a uma reta, d deverá ser mediatriz dos segmentos determinados pelos pares de vértices correspondentes da figura. Havendo coincidência das mediatrizes desses segmentos, então se conclui que a figura é simétrica em relação a d.

Analisaremos cada figura da atividade.

Figura I): É constituída por um par de triângulos que são simétricos em relação a uma reta d.

Figura II): O único eixo de simetria é uma reta interna a mesma.

Figura III): a) É uma flor simétrica, com eixo de simetria interno à ela. Para explicar o porquê da simetria é necessário determinar o eixo de simetria, construindo a mediatriz do segmento determinado por dois vértices quaisquer da figura e verificando se essa reta também é mediatriz dos outros segmentos determinados por pontos correspondentes.

Figura III): b) Há seis eixos de simetria, que são as mediatrizes distintas dos segmentos determinados por pares de pontos correspondentes. Na explicação da resposta, é preciso indicar as mediatrizes que coincidem.

Figura III): c) Nomeando os vértices da figura e construindo apenas um dos eixos de simetria, é necessário explicitar os vértices que são correspondentes pela reflexão nesse eixo.

Figura IV): a) A figura considerada é o triângulo equilátero que forma uma das estrelas, que apresenta três eixos de simetria. Na explicação, destacar que a mediatriz de qualquer lado do triângulo equilátero contém o vértice oposto ao lado.

Figura IV): b) Os dois triângulos, que formam a estrela da esquerda, têm os mesmos eixos de simetria, porque há coincidências de pares de eixos.

Figura IV): c) Neste item, a figura a ser considerada é uma das estrelas, formada por dois triângulos equiláteros. Os três eixos de simetria de um dos triângulos coincidem com os do segundo triângulo, mas, além desses, havia outros eixos de simetria passando pelos pontos de interseção dos triângulos, como se observa na figura:

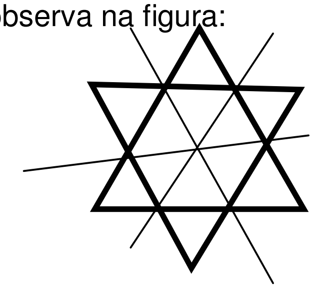


Figura IV): d) São questões análogas às dos itens anteriores.

Figura IV): e) A figura é o par de estrelas que são simétricos em relação à reta d.

Figura IV): f) Pela verificação feita no item anterior, conclui-se que d é o eixo de simetria do par de estrelas.

Nessa atividade, que corresponde à fase de "familiarização" na dialética de Douady, permite-se o uso, como ferramenta explícita, da noção de eixo de simetria de uma figura. A noção, que em várias atividades estava associada à dobra no papel, passa a ser considerada uma noção matemática.

Análise dos resultados

Na figura I, um par de triângulos, a constatação da simetria e a determinação do eixo foram resolvidas por todos os alunos. Nas explicações do porquê da simetria os erros começaram a surgir: verificar se apenas um par de vértices correspondentes é simétrico (27,2%) e verificar a simetria de apenas dois dos vértices (27,2%). Mas 42,4% da classe respondeu corretamente à questão.

Na figura II, um foguete, 36,3% dos alunos responderam corretamente, 27% verificam a simetria de apenas alguns pares de pontos correspondentes e 9% não explicaram a resposta dada. Apesar de as características da reflexão em reta já terem sido estabelecidas, cerca de 27% dos professores verificaram a simetria por dobra feita no papel ou "por visualização", sem a construção correta do eixo.

Na figura III, um polígono estrelado, o índice de respostas totalmente corretas diminuiu para cerca de 9%, pois muitos indicaram apenas o número de eixos de simetria, sem explicar como haviam sido obtidos. No item c, era necessário considerar apenas um dos eixos e indicar os vértices correspondentes em relação a esse eixo, porém, várias pessoas traçaram todos os eixos e indicaram pontos correspondentes em relação a diferentes eixos. Faltou uma leitura mais cuidadosa que evitaria esse tipo de resposta.

Algumas respostas dadas indicaram ainda dificuldades com a noção de eixo de simetria. Por exemplo, no item b:

- "a figura III tem 6 eixos de simetria porque a figura possui 12 vértices";
- "existem 12 eixos de simetria, ' ponta com ponta' (6 eixos simétricos) e 'entrada com entrada' (6 eixos simétricos);
- "existem 6 eixos, qualquer vértice unido forma uma reta simétrica";
- "não há necessidade de fazer a mediatriz com o compasso, basta apenas relacionar o vértice com o vértice oposto".

Por outro lado, há respostas do tipo:

> "Sim, a figura III é simétrica porque existem retas que são mediatrizes dos segmentos formados pelos pontos correspondentes a cada eixo de simetria".

Na figura IV, um par de estrelas formadas, cada uma, por dois triângulos equiláteros, a complexidade da figura e os detalhes dos itens pedidos exigiram dos professores bastante atenção na leitura e interpretação do que era pedido. Algumas incorreções, já citadas, voltaram a ser apresentadas, como, por exemplo, a falta ou erro nas explicações:

- "no item b, existe uma simetria central que é o ponto M, o mesmo centro para os dois triângulos";
- "no item c, cada estrela é formada por dois triângulos equiláteros, dando origem a 6 eixos de simetria, porque, como cada triângulo possui 3 eixos de simetria, na junção dos dois triângulos vamos obter 6 eixos de simetria".

Por outro lado, foram apresentadas explicações do tipo:

- "o triângulo equilátero que forma uma estrela tem 3 eixos de simetria, que são as mediatrizes da base e que passam pelo vértice oposto";
- "no item c, cada estrela tem 6 eixos de simetria. A estrela possui 12 vértices, opostos 2 a 2, então, a cada par de vértices teremos um único eixo de simetria, totalizando 6".

Atividade 10: Figuras notáveis e eixo(s) de simetria

a) Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F) a seguinte afirmação: *"As diagonais de um retângulo são eixos de simetria desse retângulo*" Justifique a sua resposta.

b) Construa um retângulo de comprimento 6 cm e de largura 4 cm. Trace seus eixos de simetria. Explique sua resposta.

c) Quantos eixos de simetria tem um quadrado? Justifique sua resposta.

d) Quantos eixos de simetria tem um triângulo isósceles? Justifique sua resposta.

e) Quantos eixos de simetria tem um triângulo equilátero? Justifique sua resposta.

f) Quantos eixos de simetria tem um losango? Justifique sua resposta.

Objetivo

Fazer que alguma forma de validação seja apresentada na investigação de eixos de simetria de polígonos particulares.

Análise da atividade

A variável didática é o tipo de figura dada.

No item a, é necessário indicar se as diagonais do retângulo são ou não eixos de simetria desse retângulo, justificando a resposta dada. Isso requer uma análise das propriedades geométricas do retângulo.

Nos demais itens, os eixos de simetria de um retângulo, um quadrado, um triângulo isósceles, um triângulo equilátero e um losango devem ser indicados, junto com uma justificativa da resposta. Também é preciso analisar propriedades geométricas dessas figuras.

A necessidade de justificar a resposta leva o estudante a usar algum mecanismo de prova, característico da situação de validação. Para Brousseau, nessa dialética, as afirmativas obtidas nas fases de ação e de formulação deverão ser comprovadas por alguma explicação teórica.

Análise dos resultados

A figura do item a é a mesma (retângulo) das primeiras atividades realizadas, em que se verificou a simetria de uma figura por dobra feita no papel. A dificuldade se encontrava na justificativa da resposta. Além da dificuldade natural com a linguagem matemática, os professores haviam estudado a classificação e propriedades dos triângulos e quadriláteros notáveis no semestre anterior e, para alguns, pela primeira vez. Muitos ainda não haviam incorporados esses conhecimentos e só com o painel aberto é que se pôde chegar a uma resposta.

Exemplos de algumas respostas:

- para verificar se as diagonais do retângulo são eixos de simetria, disseram que a afirmativa era verdadeira porque “as diagonais dividem o retângulo em duas partes iguais” (5 pessoas);
- outros professores responderam que era falsa porque as duas partes do retângulo determinadas por uma diagonal não coincidiriam se fosse feita uma dobra sobre a diagonal (6 pessoas);
- apenas um grupo concluiu não ser verdadeira a afirmativa porque as diagonais do retângulo não eram perpendiculares entre si (3 pessoas).

As justificativas dos demais itens foram sendo encontradas à medida que íamos revendo e destacando as principais propriedades das figuras envolvidas. Observou-se que, para o aluno, ainda é difícil relacionar e aplicar o que foi aprendido em Geometria Euclidiana a outras situações. Isso é perfeitamente justificável quando se considera que, para muitos, a Geometria foi estudada, de modo mais detalhado, somente neste curso.

Atividade 11: Construindo os simétricos de figuras notáveis

Construa o simétrico de um ângulo, de um paralelogramo e de uma circunferência em relação à uma reta d. Em cada caso explique seu processo de construção.

Objetivo

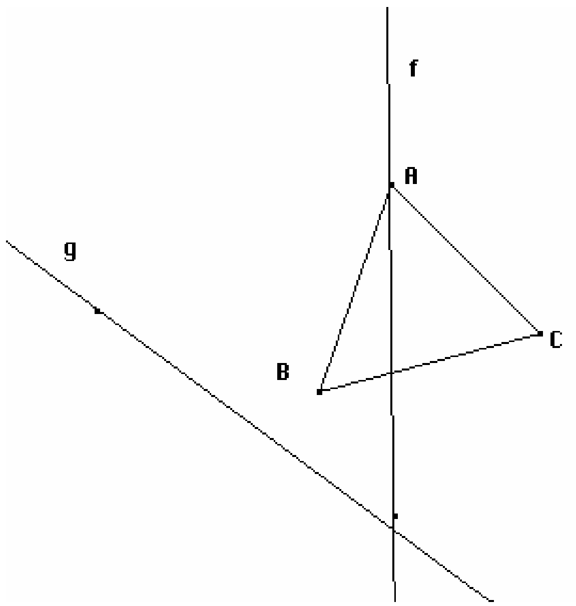
Examinar imagens de figuras diversas, polígonos e não polígonos.

Análise da atividade

Com a construção dos simétricos de um ângulo e de um paralelogramo, pode-se destacar a congruência das figuras com sua imagens, que, aplicado para uma circunferência, permite determinar seu simétrico em relação a uma reta. Essa atividade foi apresentada como exercício proposto, e as resoluções não foram discutidas.

Atividade 12: Construindo e justificando com a simetria ortogonal

a) Construa duas retas f e g e um triângulo ABC, conforme desenho abaixo.



b) Construa o triângulo A'B'C', simétrico do triângulo ABC em relação à reta g.

c) Construa o triângulo A"B"C" simétrico do triângulo A'B'C' em relação à reta f.

d) Construa o triângulo A'''B'''C''' simétrico do triângulo A"B"C" em relação à reta g.

e) Compare os triângulos ABC e A'''B'''C'''. Eles são simétricos em relação a que reta? Justifique sua resposta.

<u>Objetivo</u>

Efetuar composições sucessivas de três reflexões em retas e observar que o resultado dessas composições é também uma reflexão em reta.

<u>Análise da atividade</u>

A variável didática envolvida aqui é a posição relativa eixo objeto e a posição do eixo de simetria na folha. A figura dada, um triângulo, tem um vértice sobre um dos eixos e um de seus lados intercepta esse eixo. O que pode dificultar a tarefa é o fato de haver dois eixos de simetria e o problema pedir três reflexões nessas retas.

Análise dos resultados

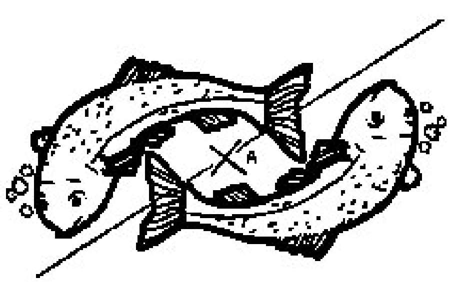
Muitos professores resolveram a atividade apenas parcialmente, pois não sabiam como fazer a composição das simetrias. Para que a completassem, foi preciso dar uma orientação e um prazo maior para a entrega do trabalho.

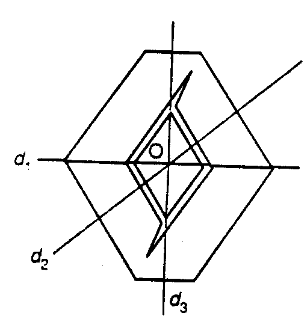
Na discussão, feita em classe após a entrega dos trabalhos, foi destacada a congruência do triângulo dado com os obtidos pela composição das simetrias.

Atividade 13: Descobrindo a simetria central

a) Observe os desenhos abaixo.

b) Considere o desenhe 1 e dobre-o segundo a reta d. Os dois peixes são simétricos em relação à reta d? Explique por quê.



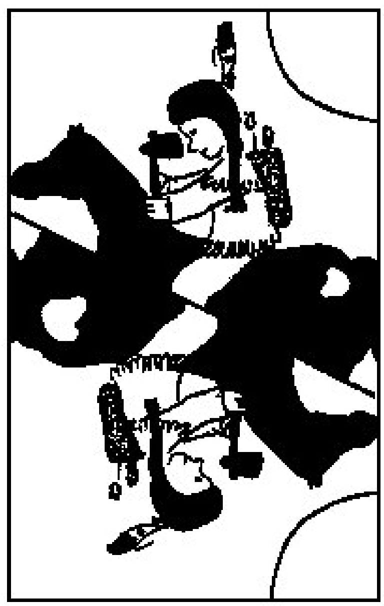


c) Observe o logotipo da Renault (desenho 2). As retas d1, d2 e d3 são eixos de simetria do logotipo? Por quê?

d) Usando um papel transparente decalque um dos peixes. Faça girar de uma meia-volta o seu peixe ao redor do ponto A. O que você observa?

e) Usando um papel transparente decalque o logotipo da Renault. Faça girar o seu desenho ao redor do ponto O. O que você observa?

f) Um pintor queria usar a técnica da meia-volta, mas cometeu 5 erros no desenho abaixo. Quais?



Observação:

Dizemos que os dois peixes são simétricos em relação ao ponto A.   *O ponto O é o centro de simetria do logotipo da Renault.*

<u>Objetivo</u>

Explorar a noção de simetria central, ou reflexão num ponto.

Análise da atividade

Por meio de figuras e logotipos conhecidos, usando papel transparente e a "técnica da meia volta", a noção de simetria central foi introduzida nessa atividade, numa situação de ação, segundo Brousseau.

Análise dos resultados

Repetiram-se, de forma mais resumida e rápida, todos os procedimentos feitos para a reflexão em reta.

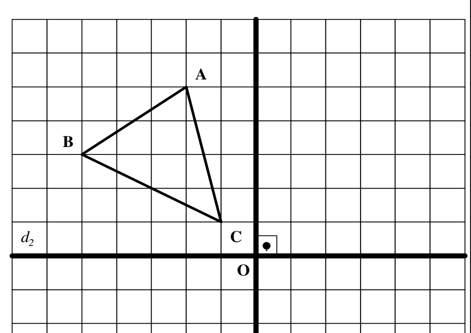
No item c, pergunta-se no logotipo da Renault se as retas d1, d2 e d3 são eixos de simetria e por quê. Um grupo respondeu que o logotipo não era simétrico em relação a nenhuma das retas dadas porque se tratava de uma rotação de 180°. Apesar de não terem estudado a rotação, esses professores aplicavam implicitamente esse conceito.

Atividade 14: Construindo a figura simétrica de uma figura dada

a) Observe o desenho abaixo.

b) Construa o triângulo F1 simétrico de F em relação à reta d1 e o triângulo F2 simétrico do triângulo F1 em relação à reta d2.

c) Verifique que F e F2 são simétricos em relação ao ponto O.



e) Nomeie de A’ B’ C’ os simétricos dos pontos A, B, C em relação ao ponto O.

f) Crie os segmentos AA’, BB’, CC’. Complete a seguinte frase: “*Parece que esses três segmentos passam pelo ponto..... e que O seja.... desses segmentos*”.

Objetivo

Relacionar a composta de duas reflexões em retas perpendiculares entre si no ponto O com a simetria central nesse ponto.

Análise da atividade

A variável didática é o tipo de papel e, no caso desta atividade, o valor dessa variável é a malha quadriculada

A malha quadriculada auxilia na construção do simétrico do triângulo dado em relação aos dois eixos.

Na atividade anterior, por meio da movimentação de figuras, foi explicado o que se considerava uma simetria em relação a um ponto. Agora, o objetivo é usar a composição de reflexões em dois eixos perpendiculares entre si no ponto O para observar que a composta é uma simetria de centro O. Outro objetivo é fazer o aluno chegar ao conceito de simetria central, definido na atividade seguinte.

Análise dos resultados

Os professores não tiveram dificuldades nessa tarefa.

Atividade 15: Definindo o simétrico de um ponto em relação a um ponto

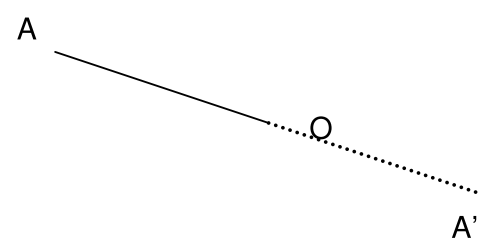
1) Crie dois pontos A e O. Construa um ponto A' tal que O seja ponto médio do segmento AA'. 2) Compare os segmentos AO e OA'? 3) **O ponto A' é chamado de simétrico de A em relação ao ponto O**. Quando se pode dizer que um ponto N é o simétrico de um ponto M em relação a um ponto K.? 4) Qual seria o simétrico do ponto A' em relação ao ponto O ? Explique.

Objetivo

Conceituar a simetria central ou reflexão num ponto.

Análise da atividade

A resolução do item 1 da atividade leva à seguinte configuração.



No item 2, a comparação dos segmentos AO e A'O leva a observar a congruência e a colinearidade dos mesmos, ou seja, que O é ponto médio do segmento AA'.

No item 3, é definido que o ponto A' é simétrico de A em relação a um ponto O, e é preciso explicitar a característica que esses pontos A e A' apresentam em relação a O.

No item 4, observa-se que a relação "é ponto simétrico de" em relação a um ponto é também uma relação simétrica.

Análise dos resultados

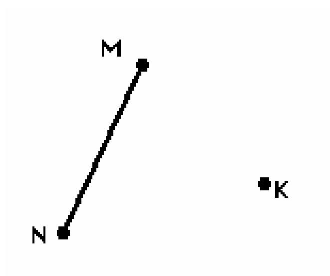
No primeiro item, em que se pede para criar dois pontos A e O e construir o ponto A', de modo que o ponto O seja ponto médio do segmento AA', os professores tiveram muita dificuldade em construir o ponto A' devido a problemas na interpretação da redação do texto. Acreditamos que a falta de familiaridade com textos geométricos provoque essas dificuldades.

Um aluno determinou A' no ponto médio do segmento AO, em vez de considerar O como ponto médio de AA'.

Atividade 16: Construindo o simétrico de um segmento

a) Criar um segmento MN e um ponto K conforme desenho abaixo

b) Explique como você construiria, o simétrico do segmento MN em relação ao ponto K. Construa-o e chama-o de PQ.



c) Compare o segmento MN e seu simétrico em relação ao ponto K.

d) Os segmentos MN e PQ são paralelos? Por quê?

Objetivo

A atividade é proposta para, conhecido o conceito de simétrico de um ponto em relação a outro, obter a imagem de um segmento pela simetria central.

Análise da atividade

Nos itens a e b, é necessário construir os simétricos das extremidades do segmento MN em relação ao ponto K e observar que os demais pontos de MN têm imagens sobre a imagem do segmento MN.

Nos itens c e d, a comparação do segmento MN e do seu simétrico PQ em relação a K leva à congruência e ao paralelismo dos mesmos. A justificativa do paralelismo dos segmentos MN e PQ é feita pela congruência dos triângulos MNK e PQK e pela congruência dos ângulos alternos internos, ou pela propriedade do paralelogramo (as diagonais têm o mesmo ponto médio).

Análise dos resultados

Quase todos os professores resolveram corretamente a atividade, salvo a justificativa do item d, que precisou ser discutida e orientada para ser concluída.

Observou-se aqui o mesmo que havia ocorrido na reflexão em reta. Embora entendendo o que é o simétrico de um ponto em relação a outro ponto, algumas pessoas não conseguiram transferir esse conhecimento para determinar o simétrico de um segmento. Para elas, o segmento é considerado como um todo e não como um conjunto de pontos. É, novamente, o aspecto global prevalecendo sobre o pontual em algumas pessoas.

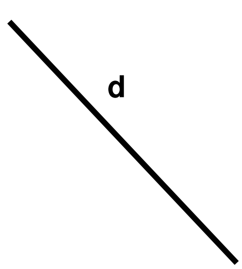
Atividade 17: Construindo simétricos de figuras

Em cada uma das situações abaixo responda as seguintes perguntas :

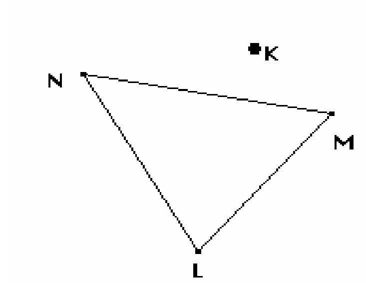
a) construa o simétrico da figura-objeto em relação ao ponto K.

b) Explique como você fez. Compare a figura-objeto e seu simétrico em relação ao ponto K. Explique o que você observou.

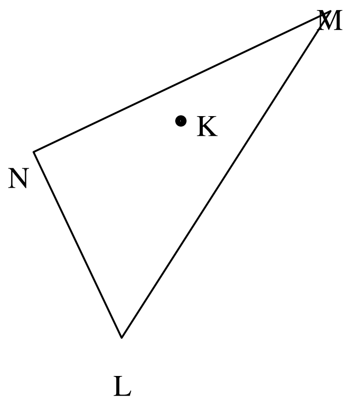
1) A figura-objeto é uma reta d criada conforme desenho abaixo



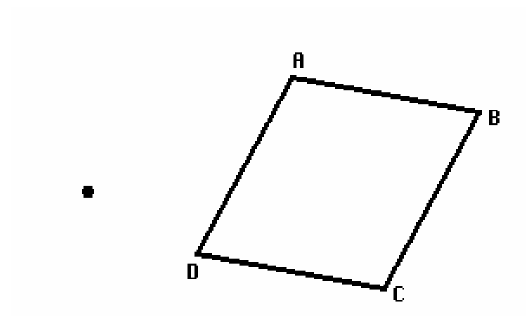
c) A figura-objeto é um triângulo MNL criado conforme desenho abaixo



3) A figura-objeto é um triângulo criado conforme desenho abaixo



4) A figura-objeto é um paralelogramo construído conforme desenho abaixo



<u>Objetivo</u>

O propósito da atividade é desenvolver uma certa familiaridade com a simetria central em figuras, desde a mais simples (reta) até as mais complexas, com o centro de simetria em diferentes posições.

<u>Análise da atividade</u>

As variáveis didáticas da atividade são o tipo de figuras dadas e a posição do centro de simetria. Em cada figura, é necessário construir o seu simétrico, explicando a construção feita, compará-las e observar propriedades geométricas que as relacionam, como a congruência de segmentos e ângulos correspondentes e o paralelismo de retas que se correspondem na simetria central.

Análise dos resultados

A posição do centro em relação à figura foi uma variável didática que na resolução do item 3 fez algumas pessoas vacilaram em aceitar o simétrico do triângulo em relação a K quando este era interno ao triângulo.

Atividade 19: Desvendando as propriedades da simetria central

Complete as seguintes afirmações:

a) Se o segmento $\overline{M'N'}$ é o simétrico do segmento $\overline{MN}$ em relação a um ponto I, então $\overline{MN}$ e $\overline{M'N'}$ são ...., e as retas $\overleftrightarrow{MN}$ e $\overleftrightarrow{M'N'}$ são ....

b) Se uma reta d' é a simétrica de uma reta d em relação a um ponto O, então d e d' são ....

c) Se o segmento $\overline{M'N'}$ é o simétrico do segmento $\overline{MN}$ em relação a um ponto I, então o ponto I é ....dos segmentos $\overline{MM'}$ e $\overline{NN'}$.

d) Se o segmento $\overline{M'N'}$ é o simétrico do segmento $\overline{MN}$ em relação a um ponto I, então o quadrilátero MNM'N' é um ...., pois suas diagonais $\overline{MM'}$ e $\overline{NN'}$ .têm .... e) Se o triângulo A'B'C' é a imagem do triângulo ABC pela simetria de centro O, então os triângulos ABC e A'B'C' são ....pois ....

....

Objetivo

Levar a uma síntese das principais conclusões sobre a simetria central, observando que essa é uma isometria que leva à congruência de figuras.

Análise da atividade

Completando afirmativas sobre simétricos de figuras em relação a um ponto I, as principais características e propriedades da simetria central são estabelecidas.

No item a, observa-se a congruência e o paralelismo de um segmento e de sua imagem pela simetria central.

No item b, conclui-se que a imagem de uma reta d numa simetria central de centro O é uma reta d' paralela a d.

No item c, observa-se que o centro I de simetria é ponto médio dos segmentos determinados por pares de pontos simétricos entre si pela simetria central.

No item d, conclui-se que se dois segmentos são simétricos um do outro em relação a um ponto, então o quadrilátero convexo, determinado pelas extremidades desses segmentos, é um paralelogramo, pois suas diagonais interceptam-se no ponto médio de cada uma das diagonais do quadrilátero.

No item e, conclui-se que dois triângulos, um simétrico do outro em relação a um ponto, são congruentes entre si porque seus lados correspondentes pela simetria central são congruentes entre si.

<u>Análise dos resultados</u>

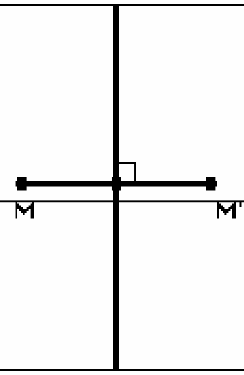
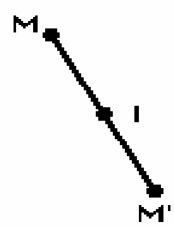
Os professores tiveram muita dificuldade para completar as sentenças que resumem as principais conclusões observadas nas atividades propostas sobre simetria central, provavelmente originada pela falta de familiaridade com textos de geometria e com a linguagem geométrica. Para muitos deles, a noção de congruência é confundida com a de semelhança, pois diziam que os triângulos eram semelhantes quando na realidade eram congruentes.

Junto com essa atividade há uma “caixa de ferramentas”, em que se encontram resumidas as principais definições e propriedades da reflexão em reta e em ponto e cujo texto foi discutido com os alunos em sala de aula.

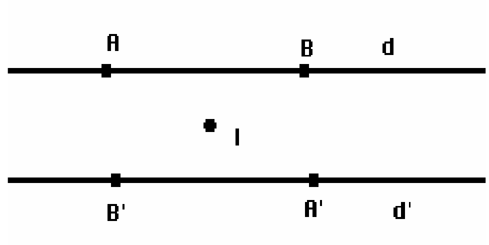
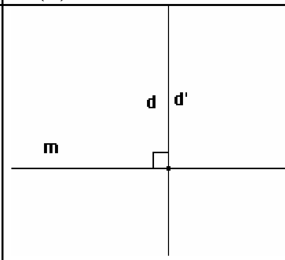
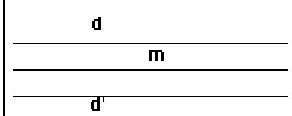
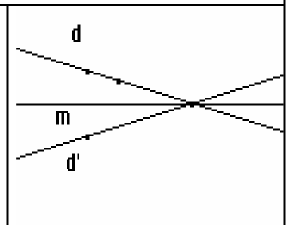
Foi uma etapa de institucionalização dos conhecimentos novos, com uma síntese dos aspectos importantes de todas as definições e propriedades sobre simetrias, quais deveriam ser retidos e registrados.

Caixa de ferramentas

Na seguinte tabela resumimos as principais definições das transformações usuais: ***simetria axial, simetria central.***

Transformação	**"M' é imagem de M" significa:**	**Ilustração**	**Os pontos invariantes**
Simetria axial de eixo Δ: S_Δ	***Se $M \in \Delta$, $M' = M$*** ***Se $M \notin \Delta$, Δ é a mediatriz de*** $\overline{MM'}$	 	***o pontos de Δ***
Simetria central de centro I: S_I	***I é o ponto médio de*** $\overline{MM'}$	 	***o centro I***

Propriedades	
Simetria axial e simetria central	*A imagem de um segmento é um segmento de mesmo comprimento*
Simetria axial e simetria central	*A imagem de uma circunferência é uma circunferência de mesmo raio e os centros dessas circunferências correspondem-se na transformação*
Simetria axial e simetria central	*Um **triângulo**(isósceles, equilátero, retângulo...) e um **quadrilátero** (paralelogramo, retângulo, losango, quadrado...) têm como imagens um triângulo e um quadrilátero de **mesma natureza.***
Imagem de uma reta por uma simetria central	*Uma reta d e sua imagem d', por uma simetria central, são paralelas*

	 $S_I(d) = d'$ e $d // d'$		
Imagem de uma reta por uma simetria axial de eixo m: Temos três casos	 $d \perp m$, então $d' = d$	 $d // m$, então $d // d'$	 se não d e d' interceptam-se na reta m.

Como o semestre letivo estava terminando, as últimas aulas foram destinadas a abordar as duas transformações que os professores, no teste diagnóstico aplicado, diziam desconhecer: translação e rotação.

Essas duas isometrias foram estudadas sob dois aspectos:

- dinâmico, como movimentos no plano;
- funcional (de funções), como resultado da composição de duas simetrias em retas paralelas (translação) ou concorrentes (rotação).

Ao final do curso elaboramos uma síntese dos principais conceitos e propriedades das quatro isometrias, culminando com a institucionalização, em que foi destacada a *congruência de duas figuras quaisquer.*

Segundo Brousseau, as *situações de institucionalização* visam estabelecer o caráter de objetividade e universalidade do conhecimento.

No Anexo VII encontra-se o texto que sintetiza as principais noções institucionalizadas com os alunos.

4.6 O trabalho dos professores em formação com seus alunos

Considerando que este curso tinha por finalidade a formação dos professores, na qual a articulação teoria e prática desempenha papel fundamental, propusemos a eles que vivenciassem situações semelhantes com seus alunos.

Elaboramos algumas sugestões de atividades sobre reflexão em reta para os professores do curso aplicarem a seus alunos com o propósito de propiciar uma vivência no ensino de transformações geométricas.

Foram sugeridas cinco atividades que os professores podiam utilizar (ou criar outras) para que seus alunos resolvessem, sem que o assunto tivesse sido explicado em aula. A orientação dada era deixar os alunos trabalharem em grupos com a mínima intervenção do professor. Este, por sua vez, observaria os procedimentos, os comentários e a linguagem dos alunos e elaboraria um relatório sobre as atividades, para ser discutido no curso[5].

Alguns professores ministravam aulas de Matemática para turmas especiais de reforço, outros para o curso supletivo; de modo que seus alunos apresentavam muitas defasagens na aprendizagem de um modo geral. Por isso, os professores até tiveram de fazer uma leitura das atividades com a classe para que os alunos compreendessem o enunciado das atividades.

As duas primeiras atividades eram semelhantes às que os próprios professores em formação haviam resolvido na aula de Geometria das Transformações. Dadas várias figuras, usando recortes e dobraduras, pedia-se o eixo de simetria das mesmas. De modo geral, as duas atividades foram bem entendidas pelos alunos, que não solicitaram ajuda do professor e foram resolvidas satisfatoriamente.

Na terceira atividade, partes de figuras significativas foram colocadas em malhas quadriculadas, com eixos de simetria verticais, horizontais ou inclinados, para que os alunos completassem com a parte simétrica. Para os alunos das 5ª e 6ª série, as figuras eram menos complexas do que as propostas para os da 7ª e 8ª série. Alguns grupos

[5] Ver no Anexo VIII as atividades propostas para a 5ª e 6ª série e para a 7ª e 8ª série.

dobraram a folha para determinar o simétrico. Para as 7ª e 8ª séries, a última figura era mais difícil do que as outras e alguns grupos não resolveram o exercício.

A quarta atividade era mais elaborada e tinha por objetivo chegar à noção, mais matemática do que experimental, da reflexão em reta. Essa atividade utilizava outros conhecimentos de geometria, os quais muitos alunos não dominavam ou desconheciam, como, por exemplo, a noção de distância de ponto à reta e unidades de medida. Quase todos os professores apontaram esta atividade como aquela em que foram mais solicitados, tanto para auxiliar no entendimento do texto como na resolução do exercício. Muitos professores relataram que, mesmo tendo de intervir, várias incorreções foram apresentadas.

A quinta atividade tinha por objetivo verificar se o aluno, assimilada a idéia de simetria na atividade anterior, utilizava os resultados obtidos para determinar o simétrico de um ponto em relação a uma reta. Muitos alunos não relacionaram esta com a quarta atividade e a resolveram de modo experimental, dobrando a folha.

Os professores relataram que os alunos demonstraram mais entusiasmo com as atividades propostas do que com as aulas normais. A participação geral deixou a aula mais dinâmica e ativa.

Alguns professores verificaram e relataram como o ensino da geometria é precário em nossas escolas e como é importante, para a vida prática, que o aluno aprenda noções geométricas essenciais como distâncias e medidas.

A seguir selecionamos algumas das observações escritas nos relatórios dos professores em formação:

> - "Apesar de haver erros na resolução de algumas atividades, no final do exercício, ficou nítido para todos os grupos o conceito de eixo de simetria.
>
> Gostaria de salientar que, durante a aplicação do exercício, relembrei minha primeira aula de simetria na faculdade, pois a insegurança apresentada pelos alunos no início da aula pôde ser comparada a minha, pois, tanto para mim quanto para eles, foi a primeira vez que se propôs uma atividade relacionada ao assunto simetria.
>
> . Devo confessar que essa aula despertou meu interesse em encontrar novas atividades sobre o assunto..."

- “Perguntas do tipo: ‘o que é um triângulo equilátero?’, ‘ o retângulo pode dobrar duas vezes?’, ‘ porque o quadrado apresenta mais eixos de simetria do que o retângulo?’ foram surgindo e eu direcionava os alunos de acordo com o exercício. Diante disso, conclui que embora o resultado do trabalho em si não tenha sido satisfatório (houve muitos erros), a atividade valeu a pena porque fez com que os alunos adquirissem outros conhecimentos também relevantes.

  Considero que o sentido visual é de grande importância para a compreensão de um novo aprendizado e acho que o desenho deveria ser mais explorado dentro da Matemática.

  Apesar de a classe ser numerosa, de os alunos não colaborarem quanto à disciplina, não trazerem o material solicitado (cola, tesoura, régua, espelho) e de todas as dificuldades do dia-a-dia na sala de aula, devo acrescentar que a atividade foi de grande aproveitamento, tanto para os meus alunos, como para mim enquanto profissional, pois, também aprendi com esta proposta de trabalho.”

- “A atividade foi bem-sucedida, pois os alunos demonstraram bastante interesse em realizá-la, embora apresentassem algumas dúvidas, que julgo interessante destacar, tais como: ‘ o que é triângulo equilátero?’

  Não podendo deixar para um próximo momento, a atividade foi interrompida brevemente para que eu pudesse mostrar os diferentes triângulos com relação aos seus lados.

  Outra questão foi quanto a distância, alguns alunos não sabiam medir ou comparar, e que tipo de referência deviam usar para verificá-la. O método mais utilizado foi a medição com régua, e alguns alunos não sabiam com que unidade de medida estavam operando.

  Posso concluir que o trabalho representou para mim uma experiência bastante proveitosa, pois forneceu um posicionamento com relação aos conhecimentos dos meus alunos no campo da geometria, servindo como um bom parâmetro para análise e seleção do conteúdo que pretendo destacar nessa área, pois verifiquei a necessidade de dar maior ênfase aos conteúdos da geometria.”

- “De maneira geral, o trabalho com os alunos foi proveitoso, eu pude perceber que a minha dificuldade também era a deles. “

- “Adorei desenvolver a atividade em sala, pois pude perceber que o aluno é capaz de construir o próprio conhecimento apenas com as ferramentas fornecidas e direcionadas pelo professor, o que denota mais uma vez que <u>eu,</u> enquanto aplicador de prática pedagógica, estou mudando, e de forma marcante; pois minha concepção de ensino da Matemática hoje adere a outra postura, mais viva, dinâmica, objetiva e realmente essencial.'"

- "Observei que os alunos usavam termos mais simples (próprios de seu vocabulário) e quando terminaram a atividade procurei corrigir e adequar as expressões à linguagem matemática. Do meu ponto de vista, o desempenho dos grupos foi muito bom, superando as expectativas. Eles provaram trazer implícito o conceito de simetria. Não tive nenhuma dificuldade em aplicar a atividade. Foi uma aula produtiva e dinâmica que teve a participação de todos os alunos, principalmente dos ' menos interessados'.

  Expressões e termos usados pelos alunos:

  'juntar as pontas do outro lado', significando dobrar;

  'linha que divide a figura ao meio' com o significado de eixo de simetria;

  'a outra parte da figura', ' cobrir o outro lado da figura', ' bate os lados' significando simétrico da figura

  'não cobre o outro lado da figura' com o significado de não simétrico;

  'quanto tem de um lugar ao outro', como distância;

  'nome da distância', significando unidade de medida."

A experiência contribuiu, em vários aspectos, para que resultados surpreendentes surgissem. Por exemplo, quase todos relataram que o interesse e a mobilização dos estudantes do 3° e 4° ciclos do ensino fundamental foi maior do que o esperado, indicando que a geometria pode ser apresentada de modo agradável e produtivo para os jovens. Vários professores solicitaram mais atividades para serem trabalhadas com os alunos dessas séries escolares, além de bibliografia que permitisse o aprofundamento no tema. Conforme discussão em classe, o aspecto de menor importância foi a quantidade de exercícios respondidos corretamente, ficando a atenção centralizada na iniciativa, no envolvimento e nos procedimentos dos alunos na realização das tarefas.

Esperamos que essa experiência tenha, acima de tudo, indicado possibilidades no ensino da geometria, para que essa disciplina não deixe de ser ensinada, lembrando que um dos objetivos do curso é "desenvolver a análise e compreensão crítica da nossa realidade, particularmente da esfera educacional, para que o docente possa atuar de forma mais conseqüente".

4.7 Análise da avaliação final

Uma avaliação final foi realizada, a fim de comparar os procedimentos e evolução dos professores no início e no fim do curso. Nessa avaliação, que se encontra no anexo IX, os exercícios se referiam a reflexões em retas, em pontos e a composições de duas reflexões em retas.

As variáveis didáticas consideradas eram algumas daquelas que haviam provocado, nas pesquisas relatadas no capítulo 2, item 2.3, os procedimentos mais incorretos: a posição do eixo de simetria inclinado na folha, a posição relativa do eixo-figura e a complexidade da figura.

Comparando os resultados obtidos na avaliação final com os do teste diagnóstico, verificamos que 71% dos professores, que haviam determinado incorretamente a figura simétrica de outra, agora o fazem corretamente, mesmo considerando-se a maior complexidade da tarefa.

Para alguns professores (3%), dobrar, ou imaginar a dobra na figura, ainda é um recurso para justificar a simetria ou não da figura.

O problema maior continua sendo a justificativa das conclusões apresentadas. Cerca de 9% do grupo explica e justifica muito bem as conclusões, 34% o fazem de modo razoável e 57% não conseguem ou não respondem a essa parte da questão.

Exemplificaremos, com algumas respostas apresentadas, como alguns professores já utilizam, de forma quase precisa, a linguagem matemática, que no início do curso era a dificuldade central dos professores.

- "O segmento AB tem somente um eixo de simetria que fica localizado exatamente no ponto médio do segmento e forma ângulo de 90° com o segmento.
  Uma reta tem vários eixos de simetria, pois o eixo pode estar em qualquer ponto, desde que forme ângulo reto com a reta."

- "Um segmento tem um eixo de simetria que passa pelo ponto médio e é perpendicular ao segmento AB."

- "A reta Δ é eixo de simetria da figura, pois é mediatriz dos segmentos formados por pontos correspondentes."

Apesar de as análises dos desempenhos dos professores terem sido feitas em cada atividade, algumas considerações podem ser apresentadas sobre o curso desenvolvido.

No trabalho realizado, observamos, também, uma progressão nos níveis de raciocínio geométrico, segundo o modelo extraído das pesquisas dos Van Hiele. Na atividade 4, verificou-se que são apresentados procedimentos do nível 1 desse modelo. Os procedimentos próprios do nível 2, de Análise, são verificados na resolução da atividade 6 e na atividade 8. A partir da atividade 10, observa-se, em muitos professores, características presentes no nível 3, de Dedução Informal.

A proposta de um trabalho dos professores do curso com seus alunos do ensino fundamental foi importante para que eles sentissem e se convencessem da viabilidade de trabalhar conceitos geométricos, por meio das transformações geométricas.

Quanto às dificuldades apresentadas pelos professores do curso, lembraremos o que Brousseau considerou:

> A aquisição de uma noção é feita durante um longo período. Não se considera que ela deva ser completamente assimilada e, ainda mais, explicitada desde sua introdução. (...) Como na leitura, a uma primeira fase global sucede, num prazo mais ou menos longo, uma fase analítica. (...) Da manipulação ao desenho, do desenho ao "gráfico", depois ao símbolo, a idéia se precisa por um processo complexo de abstrações, de concretizações e representações (apud Perrin-Glorian, 1994, p. 99).

Conclusões

Em primeiro lugar, a pesquisa bibliográfica realizada revelou a existência de muitos estudos sobre o tema em relação a questões didáticas e também em relação a questões epistemológicas, que, sem dúvida, deveriam fazer parte do corpo de conhecimentos de um professor de Matemática.

O trabalho evidencia também que a presença do tema nos currículos é bastante marcante. No entanto, os livros didáticos ainda o abordam de maneira tímida, superficial e desconectada. Assim, por exemplo, não há relações explícitas entre o estudo das isometrias e a noção de congruência, ou entre o estudo da homotetia e a noção de semelhança.

Por outro lado, provavelmente ainda por um bom tempo, nos cursos de licenciatura, em função de o assunto não ser do conhecimento dos alunos, teremos de partir das noções mais elementares sobre ele, o que não deve impedir que possamos avançar no sentido de uma compreensão mais ampla dos aspectos que vão além do estritamente matemático.

Nossa experiência revelou que, embora grande parte do grupo de professores lecionasse Matemática há bom tempo e trouxesse alguma bagagem de conhecimentos geométricos, muitos dos docentes apresentaram procedimentos semelhantes aos assinalados em pesquisas feitas com alunos do ensino fundamental. Observamos que a escolha de diferentes valores das variáveis didáticas, como, por exemplo, a posição do eixo de simetria, a complexidade da figura, o tipo de papel e a posição relativa eixo-objeto, favoreceu ou dificultou a resolução dos problemas, fazendo surgir concepções e erros semelhantes aos dos alunos das pesquisas.

Além desses aspectos, pudemos observar que os professores demonstraram pouca autonomia para explorar novas situações-problema e mesmo para mobilizar os conceitos e procedimentos de uma dada situação a outra bastante similar. Por exemplo, na atividade 3, foram discutidos e estabelecidos processos de construções de simétricos de pontos em relação a uma reta e, na atividade 4, construções de imagens de segmentos pela reflexão em reta, no entanto, vários professores preferiram usar outros procedimentos, alguns implicitamente e outros experimentalmente, por meio de visualização da imagem, para determinar os simétricos de segmentos propostos na atividade 5.

Outra dificuldade observada refere-se à elaboração de justificativas para os procedimentos usados. Se, por um lado, a falta de domínio de alguns conhecimentos geométricos pode ser uma causa dessa dificuldade, por outro, pudemos observar que a validação e a justificativa não fazem parte das preocupações dos professores. Acostumados a um "ensino" em que os fatos matemáticos são "assim porque são", eles não valorizam o processo de construção de conhecimentos, as relações entre eles, as explicações dos fatos. Da mesma forma, descobrir os invariantes de uma transformação, procurar regularidades, fazer generalizações também são atitudes pouco comuns. Assim, por exemplo, em várias atividades sobre reflexões em reta, procuramos destacar a congruência de segmentos correspondentes. Na atividade 7, as figuras dadas eram poligonais abertas e um triângulo e, no item c, era necessário observar a congruência de determinados lados da poligonal e de um dos ângulos do triângulo com seus correspondentes na imagem das figuras, tarefa resolvida sem dificuldades. Já, no item seguinte, era necessário indicar as demais congruências entre elementos correspondentes do triângulo dado e o índice de respostas corretas foi de apenas 50%. Portanto, quando os professores são induzidos a observar determinadas congruências, não há problemas na resolução, mas quando devem tomar a iniciativa de pesquisar, por conta própria, outras propriedades, muitos não o fazem. Também têm dificuldades para generalizar o que foi observado na atividade 7, na justificativa da congruência do triângulo dado e sua imagem pela reflexão numa reta, pedida na atividade 8.

Um ponto sobre o qual buscamos trabalhar intensamente foi estimular os professores a analisar os erros cometidos e a ensaiar, eles próprios, estratégias alternativas para superar tais erros, pois consideramos que essa é uma das competências importantes para o professor de Matemática. A concepção de que o erro é parte integrante da aprendizagem, ou seja, de que aprendemos com os erros, é ainda pouco comum nas reflexões do professor. Da mesma forma que lida mal com os erros de seus alunos, ele também não consegue reconhecer nos erros a "lógica" que lhes é subjacente. Assim, por exemplo, um procedimento comum na determinação do simétrico de um ponto em relação a um eixo inclinado, tanto nos alunos pesquisados, como nos professores, foi realizar um deslocamento horizontal do ponto para o outro lado do eixo; mas, esse é um erro provocado pelo fato de se ignorar a inclinação do eixo e se determinar a imagem do ponto como se o mesmo fosse vertical.

Durante o trabalho com os professores, pudemos perceber que o estudo das transformações geométricas envolve diferentes objetos:

- o espaço físico — ou seja o domínio das materializações: observamos simetrias nas asas da borboleta, em algumas logomarcas, em obras de artes etc.;
- a geometria, considerada como um modelo desse espaço físico — ou seja, o domínio das figuras geométricas: identificamos eixos de simetria num triângulo equilátero, desenhamos um triângulo simétrico a outro em relação a uma reta etc.;
- o sistema de representação das figuras — o domínio das representações gráficas: construímos um ponto simétrico a outro em relação a uma reta usando para isso a construção da reta perpendicular, o transporte de segmento etc.;

A esses objetos correspondem aspectos ligados à aprendizagem e que são:

- desenvolvimento das habilidades de percepção espacial;
- elaboração de um sistema de propriedades geométricas e de uma linguagem própria para esse modelo;
- desenvolvimento de um sistema de representação gráfica.

No caso dos professores do curso, observamos que um aspecto fundamental para a compreensão das características das reflexões em reta e em ponto estava relacionado às atividades que envolviam construções com régua e compasso.

Um ponto em que se notou melhora sensível ao longo do trabalho foi a comunicação matemática desses professores, não apenas por meio da linguagem matemática, como também pelo uso da própria língua materna.

Finalmente, consideramos que foi essencial o fato de os professores terem experienciado com seus alunos situações a-didáticas de trabalho com o mesmo tema que estavam estudando. No trabalho dos professores em formação com alunos do ensino fundamental — descrito no capítulo 4, item 4.6 —, os relatórios discutidos e os depoimentos transcritos indicaram ter sido bastante proveitosa a experiência realizada e destacaram a ligação existente entre o que os professores vivenciaram na formação e a prática profissional. Esses docentes assinalaram que:

- durante a aplicação dos exercícios, relembraram a primeira aula de simetria no curso, em que a própria insegurança, no início, podia ser comparada à dos alunos do ensino fundamental;
- a dificuldade dos alunos era a que também eles haviam experimentado;
- professores e alunos aprenderam com essa proposta de trabalho.;
- eles mesmos estão mudando, de forma marcante, pois perceberam que a concepção de ensino da Matemática hoje traz demandas de novas posturas do professor;
- o desenho geométrico deveria ser mais explorado na Matemática;
- foi proveitosa a experiência por ter fornecido um posicionamento quanto a conhecimentos dos próprios alunos, que servirão de parâmetros para análise e seleção do conteúdo nessa área, considerando que é necessário dar mais ênfase aos conteúdos de geometria.

Em relação aos alunos, verificou-se que:

- o aluno é capaz de construir o próprio conhecimento com as ferramentas fornecidas e direcionado pelo professor.
- os alunos adquiriram outros conhecimentos também relevantes;
- as aulas se tornaram dinâmicas e produtivas, com a participação de todos os alunos, principalmente dos “menos interessados”.

O processo de formação do professor apresenta particularidades especiais; há uma forte correlação e coerência entre o que ele vivencia na sua formação com o que apresenta como profissional, pois aprende no mesmo lugar em que vai atuar, porém numa situação invertida. É necessário, portanto, que o futuro professor, durante seu processo de formação, tenha oportunidade de pôr em prática atitudes, procedimentos metodológicos e organizações de trabalho, que depois lhes servirão de modelo didático. O professor desenvolve nos seus alunos aquilo que teve oportunidade de desenvolver nele mesmo, a aprendizagem de conteúdos, a construção de conhecimentos, a independência e autonomia próprias.

As concepções de aprendizagem, de conteúdos, de avaliação, entre outras competências que o futuro professor construir durante seu processo de formação, marcarão sua atuação profissional, daí, a importância de que elas sejam discutidas pela equipe de formadores e que estejam explicitadas no projeto pedagógico de cada curso de formação.

A formação do futuro professor de Matemática deve atender aos vários aspectos que envolvem o ensino das transformações geométricas, suas dimensões geométricas e algébricas, mas, ao mesmo tempo, acompanhar as pesquisas didáticas, as análises de currículos escolares e de livros didáticos, estimulando nos professores atitudes investigadoras sobre as concepções de seus alunos.

Finalizando, destacamos que nosso trabalho é uma parte do que é necessário desenvolver sobre as transformações geométricas, no ensino da geometria. Um aspecto muito importante, não abordado em nosso trabalho e que deve ser objeto de estudos em trabalhos futuros, é o uso de tecnologias para o ensino das transformações geométricas no ensino fundamental.

Bibliografia

Ag ALMOULOUD, Saddo. 1997. *Fundamentos da Didática Matemática e Metodologia de Pesquisa. Caderno de Educação Matemática, vol. III*, PUC-SP.

BOLETIM Inter-Irem. Suivi Scientifique 1985-1986.

BOYER, Carl B.. 1974. *História da Matemática.* Tradução: Elza Gomide. São Paulo: Edgard Blücher.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental 1997. *Parâmetros curriculares nacionais: 1° e 2° ciclos*. Brasília: MEC/SEF.

_______Secretaria de Educação Fundamental. 1998. *Parâmetros curriculares nacionais: 3° e 4° ciclos*. Brasília: MEC/SEF.

BROUSSEAU, Guy. 1986. *Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques.* RDM, vol. 7 n° 2.

COLLETTE, Jean-Paul. 1985. *Historia de las matemáticas II.* 1ª edição em espanhol. México: Siglo veintiuno editores.

COMMANDINO, Frederico. 1945. *Euclides — Elementos de Geometria.* Adicionados e ilustrados por Roberto Simson, 2ª edição. São Paulo: Edições Cultura.

CROWLEY, Mary L. 1994. "O modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico". In: LINDQUIST, Mary M., SHULTE, Albert

P.(org.). *Aprendendo e ensinando Geometria.* Tradutor: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual.

DANTAS, Martha Maria de Souza. 1987. *Ensino da Matemática: um processo entre a exposição e a descoberta.* Salvador: EDUFBA.

DANTAS, Martha Maria de Souza et al. 1996. *As transformações geométricas e o ensino da geometria. Vol. 1.* Salvador: EDUFBA

DENYS, Bernadette e GRENIER, Denise.1986. *Symétrie orthogonale: des élèves français et japonais face à une même tache de construction.* Petit x n° 12.

DOUADY,Régine. 1992. *Des apports de la didactique des mathématiques à enseignement,* Répères-IREM n°6.

EVES, Howard. 1995. *Introdução à História da Matemática.* Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp.

EVES, Howard. 1992. *Tópicos da História da Matemática.* São Paulo: Atual.

FREITAS, José Luiz Magalhães. 1999. "Situações Didáticas". In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara...et al.. *Educação Matemática: uma introdução.* São Paulo: EDUC.

Geem- Grupo de Estudos do Ensino da Matemática. 1965. *Matemática Moderna para o ensino secundário.* 2ª edição. São Paulo: LPM editora.

GODEAUX, Lucien. 1947. *Les Géometries, Collection Armand Colin,* 3ª edição. Paris: Libraire Armand Colin.

GRENIER, Denise. 1985. *Quelques aspects de la symétrie orthogonale pour des élèves de classes de 4ème et 3ème.* Petit x n° 7, Grenoble.

GUTIERREZ, Rodriguez, JAIME PASTOR, Adela. 1996. *El grupo de las isometrias del plano*. Madri: Editorial Sintesis SA.

HART, Kathleen et al. 1981. *Children's Understanding of Mathematics: 11 ~ 16.* The CSMS Mathematics Team. London: John Murray.

JAHN, Ana Paula. 1998. "Des transformations de figures aux transformations ponctuelles: étude d'une séquence d'enseignement avec Cabri-géomètre". Tese de Doutorado, Université Joseph Fourier, Grenoble.

KLINE, Morris. 1992. *El pensamiento matemactico de la Antiguidad a nuestros dias,* Vol.III. Madri: Alianza Editorial SA.

LIMA, Elon Lages. 1992. *Coordenadas no Plano.* Colaboração: Paulo Cezar Pinto Carvalho. Rio de Janeiro: SBM.

LUELMO, María Jesus. 1991. "A Matemática e o Processo de Reforma em Espanha". Tradutor: Florbela Cunha. In *Educação e Matemática*, n° 19/20.

MARANHÃO, Maria Cristina S. de A. 1999. “*Dialética Ferramenta-Objeto”*. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara... et al. *Educação Matemática: uma Introdução*. São Paulo: Educ.

MARCHIVIE, François. 1986. *A Propos du Statu Didactique des Transformations dans L'enseignement des Mathématiques*. In: Suivi Scientifique 1986-1987.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. *Standares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matematica.* S.A.E.M. Thales.

PERRIN-GLORIAN, Marie-Jeanne. 1994. “Théorie des situations didactiques: naissence, développement, perspectives.” In*: Vingt Ans de Didactique des Mathématiques en France*. RDM. La Pensée Sauvage Editions.

PIAGET, Jean, GARCIA, Rolando. 1987. *Psicogénese e História das Ciências.*Tradutor: Maria Fernanda de Moura Rebelo Jesuino, 1ª edição. Lisboa: Publicações Dom Quixote.

PIRES, Célia Maria Carolino. 1995. “Currículos de Matemática: da organização linear à idéia de rede.” Tese de Doutorado, Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo.

RUOFF, Erika Brigitta Ledergerber. 1982. *Isometrias e Ornamentos do Plano Euclidiano.* São Paulo: Atual.

SÀO PAULO. Secretaria da Educação.1975. Guias Curriculares para o Ensino de Matemática: 1° grau. São Paulo: SE/Cenp.

___________ Secretaria da Educação. 1986. Proposta Curricular para o Ensino de Matemática: 1° Grau. São Paulo: SE/Cenp.

___________ Secretaria da Educação. 1994. *Experiências Matemáticas.* São Paulo: *SE/Cenp.*

___________ Secretaria da Educação. 1990. Proposta Curricular de Matemática para o Cefam e Habilitação Específica para o Magistério. São Paulo: SE/Cenp.

___________ Secretaria da Educação. 1979. *Subsídios para a Implementação do Guia Curricular de Matemática — Geometria para o 1° grau- 5ª a 8ª séries- Atividades.* São Paulo: SE/Cenp.

SILVA, Benedito Antonio. 1999. "Contrato didático". In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara. *Educação Matemática: uma Introdução.* São Paulo: Educ.

Anexo I

Figuras da pesquisa de Denise Grenier- França

Figuras da pesquisa de Grenier- França

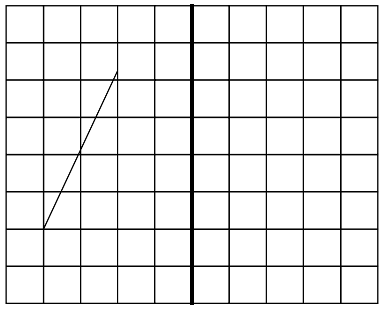


Figura 1

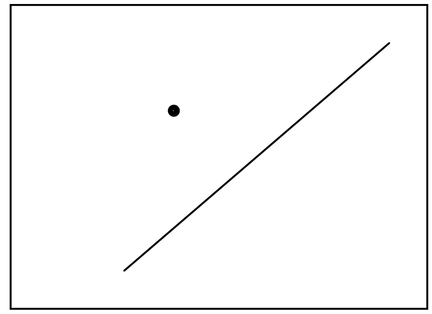


Figura 2

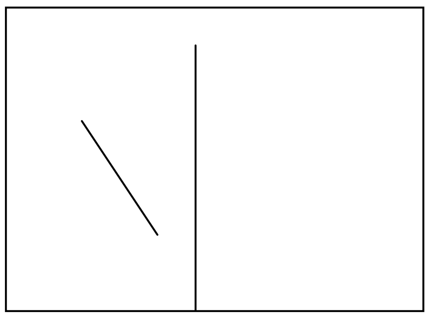


Figura 3

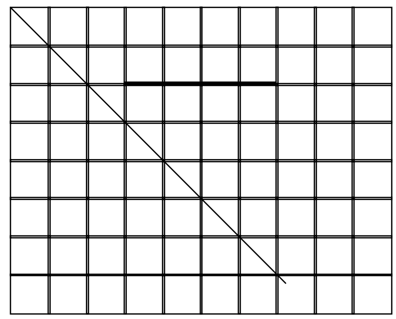


Figura 4

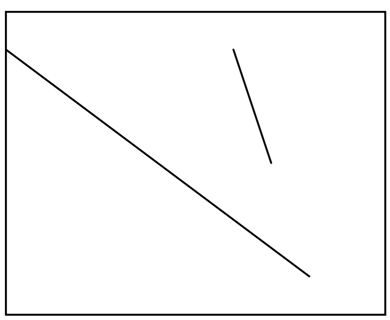


Figura 5

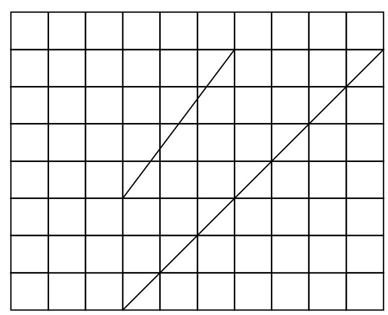


Figura 6

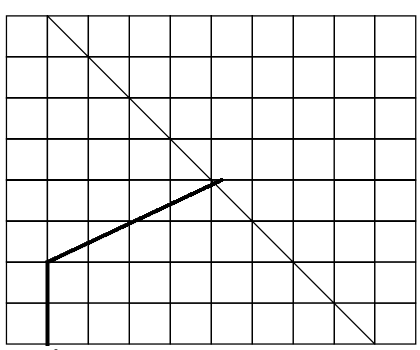


Figura 7

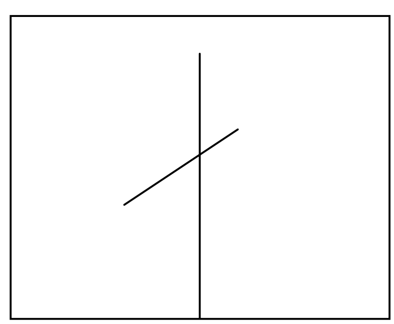


Figura 8

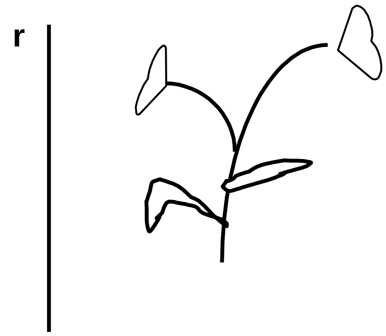
Anexo II

Teste diagnóstico das Escolas I e II

Programa de Estudos Pós-Graduados em Ensino da Matemática- PUC-SP

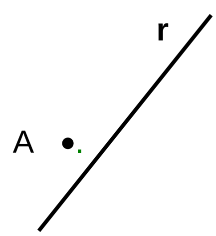
TESTE DE GEOMETRIA

1. A reta **r** abaixo representa um espelho colocado em pé. Desenhe, à mão livre, a figura que você enxergaria no espelho. Escreva como você fez isto..

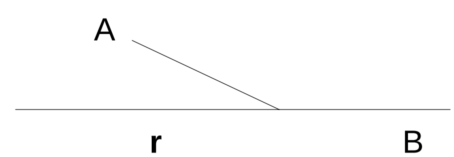


2. Determine o simétrico da figura (em verde), em relação `reta **r**. Se quiser, use qualquer instrumento: régua, compasso, esquadro, transferidor, etc.

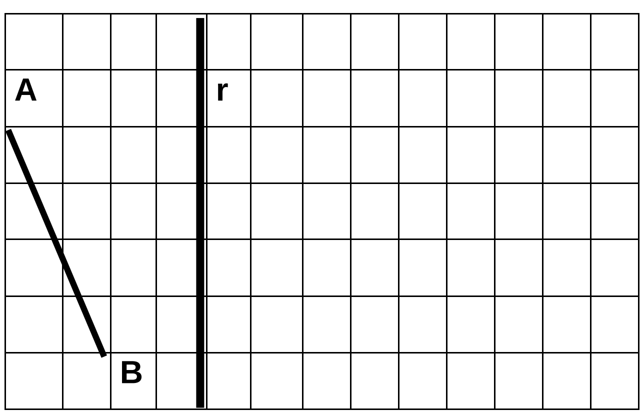
a)



b)



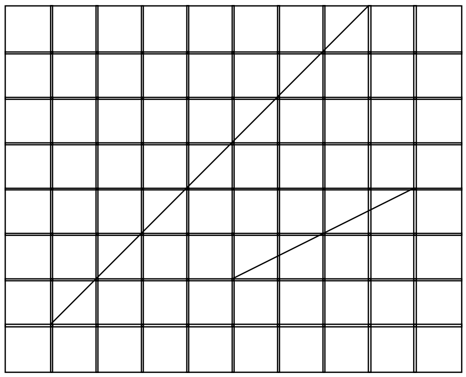
3. No quadriculado dado determine o simétrico do segmento (em verde), em relação à reta **r**



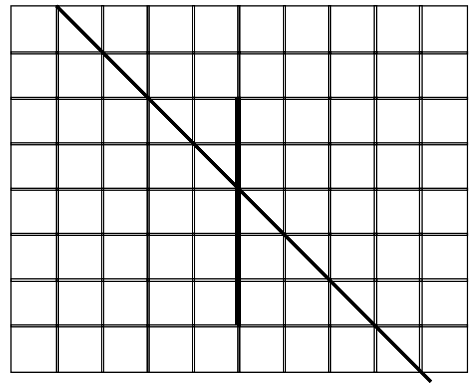
Sua colaboração é muito importante neste trabalho de pesquisa. Por favor deixe o seu nome nesta folha. Muito obrigada.

4. No quadriculado dado determine o simétrico do segmento (em verde), em relação à reta **r**

a)

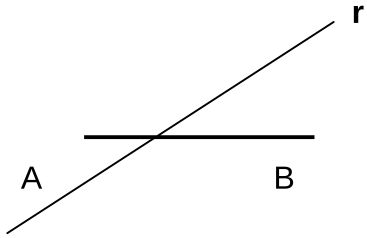


b)

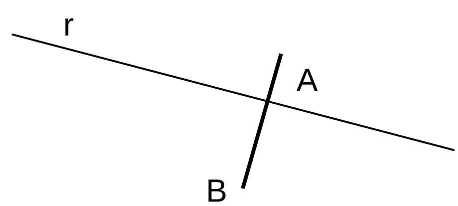


5. Determine o simétrico do segmento AB, em relação `reta **r**.

a)

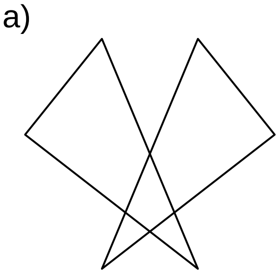


b)

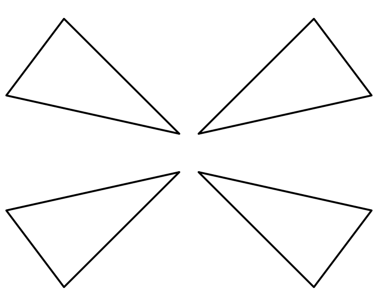


6. Tudo o que estiver na mesma cor representa uma só figura. Indique com a letra S as figuras que são simétricas e com N as que não são simétricas. Naquelas que forem simétricas, determine o eixo de simetria, indicando, se possível, como você achou esses eixos.

a)



b)



c)

NAN

Anexo III

Entrevistas

1. Depoimento da professora Martha Maria de Souza Dantas

Martha Maria de Souza Dantas é titular aposentada pela Universidade Federal da Bahia e a mais importante mestra em Educação Matemática daquele Estado. Participou ativamente, como mentora e organizadora, das discussões que surgiram a partir do 1° Encontro Nacional de Educação Matemática, Enem.

Realizou os cursos de Bacharelado e Licenciatura na Faculdade de Filosofia da Universidade da Bahia e, logo depois de formada, foi convidada pelo Diretor da Faculdade de Filosofia a dirigir o Colégio de Aplicação. O colégio destinava-se à prática docente dos alunos matriculados no Curso de Didática da Faculdade de Filosofia.

Em 1952, foi convidada para lecionar Didática Especial da Matemática na Faculdade de Filosofia. Ausentou-se, em 1953, para observar a organização do Ensino da Matemática fora do Brasil. Os países escolhidos foram Bélgica, pela existência de um Curso de Didática Especial da Matemática, Inglaterra, pelo interesse de conhecer o ensino em um país não latino, e França, pelo entusiasmo pessoal em relação às publicações francesas e às informações do Centro Internacional de Estudos Pedagógicos de Sèvres.

Retornou ao Brasil e continuou lecionando Didática Especial da Matemática até a reestruturação da Universidade da Bahia em 1969, quando passou a lecionar na Faculdade de Educação.

Em 1971, nessa mesma faculdade, foi aprovada no concurso para professora titular da área de Metodologia e Prática do Ensino da Matemática, com a tese “Sobre a metodologia da Matemática”.

A fim de estar sempre atualizada com as novas conquistas da educação matemática, participou de diversos congressos, entre os quais, o 1º Congresso Internacional de Educação Matemática, realizado em Lyon – França em 1969.

Em 1972 apresentou um trabalho sobre Geometria das Transformações no 2º Congresso Internacional de Educação Matemática, realizado em Exeter – Inglaterra. Em 1973 participou do 3º Congresso Internacional de Educação Matemática, realizado em Kalsrushe – Alemanha, como membro do painel que tratou do ensino da matemática no 2° grau. Mesmo após se aposentar, em 1977, participou ainda do 7º Congresso Internacional de Educação Matemática, realizado em Quebec, Canadá, em 1992.

No Encontro Nacional de Educação Matemática, Enem, realizado em São Paulo, em fevereiro de 1987, promovido pela Faculdade de Ciências Matemáticas e Físicas da Pontifícia Universidade Católica de Sào Paulo e coordenado pela professora-doutora Tânia Mendonça de Campos, foi homenageada com o título de Presidente de Honra do Encontro Nacional de Educação Matemática.

Autora, com outras parceiros, de vários livros didáticos para o ensino fundamental e também para professores, com propostas novas sobre processos de ensino, trouxe contribuição nesse campo como os livros "*As transformações geométricas e o ensino da geometria" , volume I,* publicado pela EDUFBA, em 1996 e .o livro *O ensino da Matemática: um processo* entre a exposição e a descoberta.

Diz a professora Martha Maria de Souza Dantas:

As transformações geométricas foram introduzidas no ensino da Geometria na Bahia na década de 60 e continuam sendo estudadas até hoje. Em 1964, existiam no Brasil os chamados Centros de Ensino das Ciências, criados por um convênio entre o MEC, Secretarias de Educação e Universidades. Na Bahia, tinha como sigla Ceciba.

Coordenei o setor de Matemática do Ceciba porque lá encontrei espaço para participar das mudanças solicitadas pela Comissão Internacional de Educação Matemática, Ciem, na atualização do ensino da Matemática no nível médio.

Contando com a colaboração do professor Omar Catunda, que na época dirigia o Instituto de Matemática e Física da Universidade Federal da Bahia, o grupo de Matemática do Ceciba elaborou um projeto intitulado "Desenvolvimento de um currículo para o ensino atualizado da Matemática", que permitiu introduzir a Matemática Moderna no curso secundário. O projeto exigia novos programas e abordagens para os conteúdos selecionados. Houve consenso quanto à introdução dos conceitos de aritmética e álgebra, mas o mesmo não aconteceu em relação à geometria. Assim também o tema das transformações geométricas foi aceito, mas não se chegou a um acordo quanto ao tratamento da geometria euclidiana.

Desejando atender aos apelos de Felix Klein, que já em 1872 afirmava que o conceito de transformação geométrica desempenha vasto papel coordenador e simplificador no ensino da geometria, o grupo se propôs a reapresentar a geometria euclidiana usando as transformações geométricas, mas não sabia como fazê-lo. Não se podia mantê-la num projeto que introduzisse a Matemática Moderna na escola secundária conservando seu tratamento milenar. Por isso, em 1964, foi solicitado ao professor Omar Catunda que reapresentasse a geometria euclidiana usando transformações geométricas. Ele aceitou o desafio. Até porque o estudo da geometria com base nessa premissa permite assentar noções abstratas sobre bases intuitivas mais simples e mais sólidas, tornando-as mais facilmente compreendidas e facilitando a demonstração formal das propriedades que as envolvem.

Além disso, utilizando as transformações geométricas no ensino da geometria, dispõe-se de ferramentas preciosas para desenvolver a imaginação e a criatividade do aluno. E, se se admitir a importância dos conceitos de relação e estrutura para a Educação Matemática, considerada como instrumento da modernidade, haverá um motivo a mais para utilizar as transformações geométricas e explorar sua riqueza estrutural.

Uma vez selecionados os conteúdos a ser estudados na 7ª e 8ª série, era necessário proceder-se à redação dos textos. Para a elaboração desse material, as idéias originais do professor Catunda não passaram pelo concreto, ou seja, pela visualização, porque, como bem disse, quando aqui esteve, Dienes — famoso pedagogo húngaro —, o professor Catunda era um dos que queimavam a etapa da concretização. À proporção que os textos eram elaborados, iam sendo aplicados em escolas do Estado e no Colégio de Aplicação da UFBA.

O algebrismo utilizado, sobretudo na introdução da geometria, e a abstração decorrente da introdução de conceitos estruturais foram responsáveis, em parte, pela rejeição dos textos em alguns colégios públicos. Mas a utilização do material foi bem-sucedida no Colégio de Aplicação da UFBA, pois os professores que colocaram essas idéias em prática estavam preparados para tal, e os alunos se encontravam em condições de utilizá-lo. A implantação do projeto permitiu, também, oferecer cursos de atualização e estágio a professores.

Quando o Ceciba deixou de existir, as condições para continuar pesquisando foram negadas, mas, com as professoras Eliana Costa Nogueira, Neide Clotilde de Pinho e Souza e Eunice da Conceição Guimarães, continuamos trabalhando em pesquisa, tentando manter o ensino de Matemática da 5ª à 8ª série atualizado.

A partir das considerações críticas dos professores que realizaram o projeto no Colégio de Aplicação da UFBA e com base na reação dos alunos a ele submetidos e nas recomendações de congressos internacionais que se realizavam periodicamente, fizemos a avaliação do trabalho até então feito.. Essa avaliação permitiu substituir o projeto desenvolvido no Ceciba pelo "Projeto para melhoria do ensino da Matemática de 5ª à 8ª série", que utiliza um processo de ensino intitulado "Entre a exposição e a descoberta", cujo principal objetivo é preparar o aluno para estudar sozinho e, conseqüentemente, adquirir autonomia.

A implantação desse processo de ensino exigiu textos mais adequados à consecução dos objetivos e elaborados de forma a incentivar, ao máximo, o aluno a realizar atividades, por meio de questões e tarefas, trabalhando só.

A experimentação do novo projeto teve início em 1975 no Colégio Estadual Duque de Caxias (na periferia de Salvador), tendo as professoras Neide, Eliana e Eunice, da equipe que o elaborou, assumido a aplicação do processo chamado "Entre a exposição e a descoberta".

As dificuldades iniciais foram grandes porque o objetivo principal era a substituição do processo expositivo tradicional por um estudo individual ou em grupo. À proporção que os novos textos iam sendo experimentados, iam sendo revistos. Tanto os alunos como os próprios professores responsáveis pela elaboração dos textos, a partir das dificuldades encontradas, sugeriam mudanças, que eram analisadas e, se procedentes, executadas. Vale acrescentar que na revisão dos textos foi sempre dada particular atenção à geometria.

No final da década de 70, o projeto foi levado ao Centro Educacional Carneiro Ribeiro e, em 1990, à Escola Reitor Miguel Calmon – Sesi – Fieb. Além dessas escolas, o projeto foi aplicado no Colégio das Ursulinas, em Salvador e em Ilhéus.

Para tornar viável a implantação do projeto, realizamos cursos de atualização para professores priorizando os cursos de geometria para 7ª e 8ª série.

Lamentavelmente, a rotatividade de diretores e de professores de Matemática nas escolas oficiais, e até mesmo na rede particular, bem como o despreparo infelizmente cada vez mais acentuado dos professores do ensino fundamental, principalmente em geometria, não nos ajudaram a expandir o projeto. Por isso, em 1995, decidimos fazer uma revisão apenas dos textos de geometria inseridos nos livros de 7ª e 8ª série do projeto com o objetivo de publicá-los em dois volumes: *As transformações geométricas e o ensino da geometria — volume I,* publicado em 1996 pela EDUFBA, Salvador, Bahia, e*, As transformações geométricas e o ensino da geometria — volume II,* publicado em 1998 pela EDUFBA, Salvador, Bahia.

Dentre os argumentos que, na nossa opinião, justificam inserir as transformações geométricas no currículo do ensino fundamental, considero como mais importante a necessidade de sua utilização na reapresentação da geometria euclidiana, cujo estudo, assim fundamentado, permite assentar noções abstratas sobre bases intuitivas mais simples e mais sólidas, fazendo com que sejam mais bem compreendidas e facilitando a demonstração formal das propriedades que as envolvem. Além disso, as transformações geométricas tornam o ensino da geometria mais motivador e criador, uma vez que se apresentam na natureza animal, vegetal e inanimada, nas construções do homem, nos movimentos dos corpos, no universo etc. Não se pode, também, deixar de citar a utilização das transformações geométricas na computação.

Segundo Zalman Usiskin, do Departamento de Educação da Universidade de Chicago, a Matemática a ser ensinada para atender à necessidade de mais e mais Matemática para alguns e para suprir a demanda da tecnologia do computador não será um superconjunto do que se está ensinando hoje, pois o que puder ser feito rápida e facilmente pelos computadores vai, provavelmente, desaparecer do currículo. Permanecerá uma Matemática mais conceitual, aplicada e visual. O ensino da geometria utilizando as transformações geométricas se antecipa por preencher essas condições.

O ensino das isometrias favorece a compreensão do conceito de congruência porque se pode mostrar que, se duas figuras são congruentes, existe um movimento bem definido que permite levar uma delas a coincidir com a outra. Esse movimento é obtido pela aplicação de reflexões, translações ou rotações que levam uma figura a outra ou pela composição dessas isometrias. A prova de congruência de triângulos apresentada por Euclides é feita por meio de superposições. Porém, a forma como são feitas as superposições, os livros não esclarecem. Euclides achava que havia um movimento que permitia levar uma figura a coincidir com outra, mas esse movimento também não foi explicado por ele.

A congruência definida como composição das transformações geométricas, acima citadas, permite aplicar, segundo o professor Zalman Usiskin, a geometria a objetos reais, a gráficos de funções e a relações que o estudante encontra na álgebra.

Quanto às relações que podem ser estabelecidas entre o estudo das transformações geométricas e o cotidiano dos alunos, devem ser estabelecidas relações que impliquem o uso de transformações estudadas. Por exemplo, se é dado ao aluno um problema que requer ampliação ou redução de uma figura e ele já compreende o conceito de homotetia, ele fará uso dessa transformação. Problemas que envolvem decoração de paredes, colocação de azulejos, construção de painéis etc. podem relacionar o cotidiano dos aluno a simetrias e translações.

Atualmente, em Salvador, as noções elementares de transformações geométricas constam do programa de vestibular da Universidade Federal da Bahia e do Curso de Fundamentos de Matemática da Universidade Católica da Bahia.

2. Depoimento do professor Almerindo Marques Bastos

O segundo entrevistado foi o professor Almerindo Marques Bastos, que se formou em 1954 pela Faculdade de Filosofia da USP, prestou concurso de ingresso ao magistério público estadual em 1955, ingressando numa escola de Ibitinga, interior de São Paulo.

Indicado pelo professor-doutor Ubiratan D'Ambrósio, lecionou na Faculdade de Filosofia da Universidade Católica de Campinas de 1959 a 1965, dando aulas de Análise Matemática, Análise Superior e Cálculo Diferencial e Integral; na Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras Sedes Sapientiae ministrou aulas de Geometria Analítica, Projetiva e Descritiva.

Em 1962 e 1963, lecionou na Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Araraquara da Unesp. Em 1974, foi convidado pelo professor D'Ambrósio, então diretor do Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da Unicamp, Imecc, para coordenar uma equipe que iria elaborar e redigir textos de Geometria Experimental, Funções, Equações e Inequações que constavam de um projeto do MEC/Premen/Imecc/Unicamp.[1]

Em 1976, foi convidado a integrar a Equipe Técnica de Análise de Ensino da Assessoria Técnica de Planejamento e Controle Educacional, órgão diretamente vinculado ao Gabinete do Secretário de Educação do Estado de São Paulo.

Em 1977, ocupando o cargo de Assistente Técnico de Direção na Coordenadoria de Ensino e Normas Pedagógicas — Cenp, foi designado para ser um dos coordenadores dos Subsídios para Implementação do Guia Curricular de Matemática, trabalhando junto com a professora Lydia Condé Lamparelli.

[1] Premen/Imecc?Unicamp: Projeto de Melhoria do Ensino da Matemática/Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação/Universidade de Campinas.

O professor Almerindo começou pela discussão da questão: “O que é a Geometria?”

Para responder a essa pergunta é necessário saber o que é importante numa figura do ponto de vista da geometria. Seguindo essa idéia, fiz um pequeno resumo do caminho que poderíamos seguir para compreender tal fato. Ao analisar a história da humanidade, perceberemos que sempre houve, no homem, um medo do desconhecido, o que cria um pavor que traz, como resultado, a necessidade de compreender. Entender, para o homem, é condição e meio para dominar, adquirir capacidade de defesa e sentimento de segurança. A matéria na natureza se apresenta de formas bastante variadas e imprevisíveis. Por esse motivo, o homem sempre procurou descobrir o que há de comum, de imutável, por trás de toda a variedade.

Na antiga Grécia, muitos filósofos se preocuparam com o assunto. Thales de Mileto achava que era a água. Para Anaxímenes de Mileto e Diógenes de Apolônia, e também para Anaximandro de Mileto e Parmênides de Eléia, era o ar. Para Heráclito de Éfeso era o fogo. Empédocles de Agrigento considerava quatro elementos: fogo, ar, terra e água. Finalmente, para Demócrito de Abdera, era o átomo. Da mesma forma, o matemático está interessado na procura de alguma coisa imutável nas figuras quando elas são submetidas às transformações geométricas, principalmente em relação à semelhança. Um caso particular muito importante é dos movimentos rígidos que levam à noção de congruência. Assim, *congruência e semelhança* passam a constituir os dois capítulos fundamentais da geometria elementar. Poderíamos definir essa geometria como “o estudo das propriedades das figuras que são *invariantes por uma transformação de semelhança”.*

Embora esse aspecto sempre estivesse presente nas pesquisas dos matemáticos, o primeiro a se preocupar explicitamente com o problema foi Felix Klein (1849-1925). Seu ponto de vista sobre o assunto foi apresentado numa conferência que proferiu sob o título “Vergleinchende betrachtungem über neuere geometrische forschungen” (“Uma reflexão comparativa sobre as recentes pesquisas em geometria”). A palestra foi realizada por ocasião de sua admissão na Universidade de Erlangen. Por esse motivo ficou conhecida como o “Erlanger Programm”. A idéia fundamental era que cada tipo de geometria pode ser caracterizada por um grupo de transformações e pelo estudo dos invariantes sob esse mesmo grupo. As idéias básicas da abordagem estavam, portanto, fundamentadas em quatro conceitos:

1. grupo;
2. grupo que opera em um conjunto;
3. grupo de transformações;
4. invariantes (e covariantes).

Assim, a geometria de um grupo G é o estudo das operações desse grupo sobre vários conjuntos. Em outras palavras, se um grupo G opera sobre um conjunto E, estudam-se as *órbitas* dos elementos desse conjunto, ou seja, os elementos de E que são invariantes por G. Se G opera sobre dois conjuntos E e F, estudam-se os *covariantes* por G.

Segundo esse ponto de vista, a geometria do grupo simétrico é a teoria das funções simétricas. A do grupo linear é a Geometria Vetorial. A do grupo projetivo é a Geometria Projetiva. A do grupo ortogonal é a Geometria Euclidiana. A do grupo unitário é a Geometria Hermitiana.

Para ter uma idéia geral sobre essas noções, é recomendável uma leitura dos livros de Klein[1], Boyer e Morris Kline, nos trechos referentes ao Erlanger Programm. Acho importante, também, um exame das geometrias não euclidianas e da topologia.

Com o surgimento da chamada Matemática Moderna (denominação que sempre considerei imprópria), o ensino da geometria por meio de transformações voltou a ser cogitado. Dieudonné e outros, na parte teórica, Georges Papy, Lucienne Félix, Frederique Papy, as coleções Bréard e Maillard, Condamine e P. Vissio, Dienes, Gunther Pickert, nos livros dedicados ao ensino da Matemática e nos livros didáticos, foram os autores que mais elaboram obras sobre o assunto nas décadas de 50 e 60. Havia, também, nos Estados Unidos, vários grupos de ensino que se dedicaram ao assunto. Foi a partir dos cursos promovidos por um

---

[1] Felix Klein. 1939. Elementary mathematics from an advanced standpoint; Geometry.

grupo de professores liderados por Osvaldo Sangiorgi que, no Brasil, essa maneira de estudar geometria começou a ser abordada. O ponto de partida para todo esse movimento foi um curso dado, em São Paulo, pelo professor George Springer, matemático americano, que, inclusive, resultou na fundação do Grupo de Estudos do Ensino da Matemática, Geem.

Começaram, então, a surgir em livros didáticos as primeiras abordagens da geometria por esse método. Em currículos oficiais, apareceram no Guia Curricular de Matemática para o 1º Grau, elaborado em 1972, e também nos subsídios a esse guia.

Em particular, eu mesmo utilizei a orientação de Lucienne Félix para o ensino da geometria usando o método das isometrias, em meados da década de 60, quando era professor no Ginásio Estadual Professor Eurico Figueiredo, no bairro de Jaçanã, em São Paulo. E foi o melhor resultado, em termos de aproveitamento dos alunos, que obtive ensinado geometria.

Quanto aos outros Estados, não posso precisar quando ocorreu a implantação do método. Em 1973, participei de um seminário sobre o ensino de Matemática e Ciências promovido pelo Premen, no Rio de Janeiro. Nesse seminário havia professores de todo o Brasil, e, já naquela época, muitos deles relataram experiências relativas ao assunto.

Os argumentos mais utilizados em favor do uso das transformações geométricas no ensino da geometria são:

- melhor fundamentação dos conceitos geométricos, principalmente no que se refere à congruência e à semelhança;
- possibilidade do uso de instrumentos no estudo desses assuntos, como o compasso na congruência e o pantógrafo na semelhança;
- melhor assimilação do conteúdo didático por parte dos alunos, pois o uso desses instrumentos torna mais compreensíveis as construções efetuadas;
- ênfase num aspecto importante: a unidade da Matemática.

Nos dias de hoje, com a utilização cada vez mais comum dos computadores da televisão e do vídeo, é fácil encontrar exemplos no cotidiano dos alunos (pois nada mais ligado à vida de todos do que o uso desses meios de comunicação) que se relacionam com transformações geométricas. Basta lembrar da manipulação de figuras em programas de computador tais como o Microsoft Power Point e Corel Draw e em todos os programas que utilizam o CAD.

Insisto, no entanto, num aspecto que sempre costumo destacar: nenhuma reforma, nenhuma inovação, seja de currículo, seja de metodologia, que possa ser tentada no ensino da Matemática obterá êxito enquanto não se tomarem duas medidas efetivas:

- reforma dos currículos dos cursos de formação de professores;
- treinamento e capacitação dos professores para a aplicação dessas inovações.

Comecei este depoimento a partir da pergunta “O que é a Geometria?” A resposta é fundamental para elucidar uma outra questão que considero primordial para o ensino da Matemática: “Como a percepção espacial se desenvolve no indivíduo até atingir a forma precisa da Matemática?” Buscar a resposta é de fundamental importância do ponto de vista pedagógico. Encontrando-a, quase todos os problemas relativos ao ensino da geometria estarão resolvidos.

3. Depoimento da professora Lucília Becharra Sanchez

Nossa terceira entrevistada é a professora Lucília Bechara Sanchez, bacharelada e licenciada em Matemática.

Em 1961, iniciou-se o Ginásio Vocacional Osvaldo Aranha, mesma época em que foi criado o Grupo de Estudos de Ensino de Matemática, Geem, em São Paulo, e também quando aconteceram as primeiras experiências da professora Lucília com o tema transformações geométricas.

Lucília foi uma das pioneiras na introdução da Matemática Moderna no país, trabalhando ao lado do professor e líder Osvaldo Sangiorgi, no Geem, onde aconteceram os primeiros estudos sobre o movimento que acabou por determinar uma radical mudança no ensino da disciplina no país.

Seu mestrado, "O desenvolvimento da noção de semelhança na resolução de questões de ampliação e redução de figuras planas", em 1991, e doutorado, "Cultura, poder e legitimação na organização escolar: um estudo de casos", em 1997, foram ambos feitos na Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo.

Lucília Bechara Sanches é autora de vários livros didáticos de Matemática para o ensino fundamental, entre os quais: *Curso moderno de Matemática para a escola elementar, Curso moderno para o ensino de 1° grau, Gruema 1 a 4 e 5 a 8* e o mais recente, *Matemática — fazendo e compreendendo,* para o ensino fundamental à luz dos Parâmetros Curriculares Nacionais.

Escreveu diversos artigos e trabalhos sobre educação matemática publicados em revistas e em anais de congressos e apresentou trabalhos em congressos de Ensino da Matemática, entre os quais destacamos:

- Em 1966, o trabalho publicado em anais do Congresso Científico, Grupo de Transformações. Abordagem para o Curso Secundário, apresentado no Congresso Brasileiro de Ensino de Matemática, realizado em São José dos Campos.

- Em 1985, o trabalho apresentado na VI Conferência Interamericana de Educação Matemática VI CIEM, “Aprendizage significativo en contenido de Geometria: una propusta para capacitación de professionales de curso noturnos en la ciudad de San Pablo”, realizado em Guadalajara-Jalisco no México.

- Em 1987, os trabalhos apresentados e publicados no Encontro Nacional de Educação Matemática, Enem, em São Paulo: a) “Ensino e Aprendizagem em Geometria: Ampliação e Redução, Semelhança e Homotetia”. B) “Aprendizagem da Aritmética e Sistema de Numeração no 1° grau”.

- Em 1987, trabalho apresentado e publicado em dois congressos: “Enseignement et aprentissage du concept de similitude”, no XI PME-

“Psicology mathematical education”, em Montreal, Canadá e na VII Conferência Interamericana de Educación Matemática, em Santo Domingo, República Dominicana.

- Em 1988, o trabalho apresentado e publicado no Sexths International Congress on Mathematical Education (ICME-6), “Study of the mechanism of the formal operatories systems on the knowledge of similarity”, em Budapest, Hungria.

- Em 1989, trabalho apresentado e publicado em dois congressos, XIII PME— Paris, França e Comission Internationale por l’Étude et Amélioration de l’Enseignement des Mathematiques (CIEAEM 4),Etude des connaissances de la geométrie et des nombres dans la résolution des problèmes des ampliation et rédution.

Prestou assessoria na Coordenadoria de Ensino e Normas Pedagógicas da Secretaria de Estado de São Paulo e em alguns estabelecimentos escolares do Estado de São Paulo, como no Ginásio Vocacional Oswaldo Aranha, escola estadual no bairro do Brooklin, e na Escola Vera Cruz, na qual é Diretora Pedagógica, desde 1988.

Foi professora de escolas estaduais de São Paulo, da Faculdade de Filosofia da Universidade Bezerra de Mello de Mogi das Cruzes e, em São Paulo, da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras Tereza Martin, da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Moema e nas Faculdades Metropolitanas Unidas, onde permanece até hoje.

Relata a professora Lucília Bechara Sanchez:

Quando comecei a lecionar, na década de 60, era a época do movimento hippie, da contracultura que influenciou o mundo todo, com grande repercussão principalmente nas artes e na cultura, momento de enormes transformações sociais, quando o movimento Matemática Moderna chegou ao Brasil com um curso organizado pelo Geem. O professor Osvaldo Sangiorgi, seu presidente, foi uma das lideranças mais importantes do movimento. Havia outros líderes que não podem ser esquecidos, como a professora Martha Maria de Souza Dantas., da Universidade Federal da Bahia, onde estava outro centro irradiador de idéias tão importante quanto São Paulo. É preciso citar ainda a participação decisiva dos professores Omar Catunda e Benedito Castrucci, que também faziam parte do Geem.

A Matemática Moderna surge como um movimento cultural inspirado no estruturalismo, que acontece também nas artes e nas ciências. Procurava-se encontrar a unidade de todo o conhecimento matemático por meio de alguns conceitos e, no caso da Matemática Moderna, um desses conceitos eram os conjuntos. Na geometria, os pontos são elementos, as retas são conjuntos de pontos e as formas geométricas são conjuntos de conjuntos, que podem ser transformados. O conceito de função foi o outro elemento unificador, e as transformações geométricas surgiram como uma função, uma regra fixa que faz, por exemplo, o ponto A ir ao ponto A' e assim por diante.

Nesse caldo de cultura, aparecem as transformações geométricas. No Brasil, os trabalhos dos matemáticos russos exerceram influência marcante. Os livros russos eram os mais avançados no estudo das transformações geométricas. Com conceitos precisos, muito bem-feitos, serviram para formar uma base sólida aqui no Brasil. Um dos livros, o de Kutusov, foi estudado por grupos de ensino da Matemática dos Estados Unidos, e chegou aqui traduzido para o inglês.

A teoria dos conjuntos começa a aparecer bem antes, nas décadas de 40, 50, com o Bourbaki. A França constituiu um berço forte da didática da Matemática, com grande preocupação no formalismo e nas pesquisas. Não se pode, entretanto, perder a perspectiva histórica; os revolucionários acontecimentos de 1968 tiveram como pano de fundo principalmente as fortes ondas libertárias que emergiam da sociedade francesa. Eram os ventos dessas transformações mundiais que aqui aportavam.

Lembrando esse movimentos de vanguarda nas artes, cabe uma correspondência com as ciências. Tudo foi parte de um movimento, e deve-se buscar entender o que permanece de tudo isso no mundo atual. Do ponto de vista histórico, a imagem da semente que morre para que uma flor nasça ajuda a ilustrar a questão. A Matemática Moderna morreu, mas foi uma semente que deu origem a outras flores, que irão da mesma forma morrer e depois virarão sementes... Assim se processam os acontecimentos no planeta.

É preciso ter essa visão histórica. A vanguarda é um movimento de seu tempo, e não deve ser apenas criticada, como algo que não deu certo. Há um engano no entendimento e no discurso das pessoas quando falam que a Matemática Moderna estava errada. Não existe isso. Trata-se, é fato, de um movimento hoje superado, mas que foi fundamental na sua época. Os vanguardistas devem ser vistos como obreiros empreendedores de seu tempo e não ser apontados pelos erros que porventura cometeram.

A Matemática Moderna foi um movimento que marcou a época da modernidade; hoje vivemos o que se pode chamar de pós-modernidade. O conhecimento está muito mais fragmentado, diluído, a pós-modernidade tem a característica de mosaico, de horizontalidade. A profundidade está na horizontalidade e não na verticalidade; enquanto a Matemática Moderna é estruturalista, indo as suas origens. É outro o momento histórico que vivemos hoje. Eu mesma fiz parte do movimento da Matemática Moderna, mas nem por isso deixo de estar presente na pós-modernidade. Mesmo se se entender que o que houve depois foi uma ruptura com a Matemática Moderna, isso só foi possível porque havia algo contra o que se insurgir, com que romper, e esse foi um movimento importante na história. É fundamental ter essa visão histórica, porque observando os acontecimentos apenas pelo aspecto linear não se saberá tirar real proveito do passado.

Na França, os centros de pesquisas em vários pontos do país, como em Grenoble ou Paris, os Institutos de Pesquisas do Ensino da Matemática, Irem, tiveram papel importante no aprimoramento da didática. O livro de Lucienne Félix *Iniciação à geometria* trabalha as transformações geométricas de modo bem formal e com traçados geométricos. Essa rigidez francesa, no entanto, foi um entrave para uma influência mais viril em nosso meio acadêmico; esse formalismo não foi muito compatível com nosso samba. Os Estados Unidos, por seu turno, são mais pueris, não se aprofundaram tanto na geometria, nos temas que nos diziam e dizem respeito. A Rússia, sim, tem muita tradição nessa área. A Matemática Moderna foi muito formalista e até hoje há resquícios disso no Brasil, herdados do estruturalismo. Por exemplo, nossos vestibulares são bastante formais. Essa influência vai continuar ainda por algum tempo, porque a era industrial não acabou totalmente no Brasil.

Na Bélgica, temos Georges Papy, matemático de grande liderança, cujos trabalhos influenciaram o mundo todo e que esteve presente no congresso, em Campos do Jordão, que marcou o início da Matemática Moderna no Brasil. Papy, no seu livro, trabalha de maneira muito formal com as flechas, que são a materialização das relações e funções e se acabaram transformando em outro símbolo forte da Matemática Moderna. Especificamente com relação às transformações geométricas, Papy escreveu sobre todas as simetrias, centrais, axiais, de maneira muito detalhada.

Tanto Papy quanto Lucienne Félix estiveram no Brasil fazendo palestras no Geem e mostrando como as transformações geométricas eram introduzidas na Matemática Moderna. Meu trabalho e o de meus colegas no Instituto Vocacional foram muito influenciados pelo livro de Papy, baseado em fichas de alunos sobre transformações geométricas, e na noção de homotetia, entendida como uma transformação que mantém a proporcionalidade das distâncias e a linearidade ou alinhamento dos pontos, que já aparecia nos livros de desenho geométrico, mas foi introduzida como função.

A parte das transformações geométricas era a menos conhecida pelos professores de Matemática e foi a mais prejudicada; trabalhava-se com conjuntos, uniões, interseções, funções, e os poucos professores que abordaram o assunto ficaram só na iniciação da noção. Ao contrário, porém, do que alguns críticos da Matemática Moderna apontam, a geometria não foi esquecida, apenas foi pouco difundida, menos trabalhada pelos professores, como ainda ocorre até hoje. Mesmo nos cursos das universidades a geometria não aparece como matéria obrigatória, dá-se mais ênfase à álgebra vetorial, que, apesar de tudo, não deixa de ser uma transformação geométrica.

Isso não deve ser lamentado porque hoje se deve ter um sentido da vida mais amplo. Pode-se fazer uma analogia com a arte moderna, que também teve várias correntes que acabaram não se fixando muito, mas que exerceram forte influência na época.

Minha dissertação de mestrado versou sobre semelhança, homotetia, tema por que tenho especial apreço. As transformações geométricas, no meu entender, vieram dar movimento à geometria e, citando Piaget, lembro que, do ponto de vista da aprendizagem, existe geometria enquanto existe movimento. Meu método de ensino se baseava na geometria, de cuja aplicação partia às vezes para ensinar álgebra. Ao aluno era mostrado, por exemplo, determinado movimento, como um carro que faz uma curva de 180 graus, uma rotação. O aluno podia ver o objeto em várias posições, e, a seguir, deveria representar o movimento, desenhando um ponto antes e verificando sua nova posição após o movimento. A função começava assim a ser mais facilmente entendida, formalizava-se a questão após vivenciar o movimento. Na didática, na sala de aula, o grande mérito das transformações geométricas foi abrir espaço para trabalhar a geometria no movimento.

Hoje a geometria está mais presente nos livros didáticos do que na época da Matemática Moderna. É uma característica da nossa era pós-moderna o aprofundamento no plano horizontal, a diversidade, o mosaico em que se entremeiam conceitos matemáticos e temas do cotidiano, pois o professor, assim como o autor ou o artista, é um homem de seu tempo.

O que restou das transformações geométricas hoje? O que brotou dessa semente? Os livros didáticos trabalham com simetria, simetria central, movimento de figuras, ampliação e redução, mas a formalização não está presente. A geometria não é ainda muito estudada nas escolas. Os livros de 1ª a 4ª série já trazem, é verdade, muita simetria, exercícios para que o aluno complete uma figura, faça cópias de figuras, trabalhe com espelhos, dobraduras. O origami, a técnica milenar japonesa da dobradura de papéis para formar figuras, foi muito utilizado para ajudar meus alunos a visualizar as transformações geométricas. Hoje vivemos num mundo de muitos ícones, imagens, que formam os alicerces da mídia. O movimento das figuras na publicidade fala algo às pessoas; o simbolismo, a deformação, a rotação, a diluição dessas formas têm um poder de comunicação de que às vezes não temos consciência. Qual o papel da Matemática com relação a esta nova era? Resposta: estudar essas transformações, o que comunicam e de que forma, o efeito que causam nas pessoas, a velocidade com que se processam, pois movimento está intimamente ligado a velocidade.

Os matemáticos estão um pouco inconformados atualmente com o fato de a Matemática ter sido relegada a um plano secundário. No iluminismo, no positivismo, a Matemática estava em alta, exercia grande influência e era muito respeitada; no mundo de hoje, a transformação geométrica está presente, mas está sendo apenas revisitada.

Uma questão interessante que merece ser citada em transformação geométrica é o que chamo de “quarta dimensão”. Peguem-se, por exemplo, duas luvas — elas são congruentes, mas não coincidem por superposição. No entanto, por definição, duas figuras congruentes são aquelas que coincidem por superposição. Os polegares têm a mesma forma e tamanho, assim como os outros dedos e a palma. Cada ponto da luva da mão esquerda tem seu correspondente na luva da mão direita. Porém, se as luvas forem de borracha e uma for virada do avesso — a “quarta dimensão” —, elas passarão a coincidir por superposição e irão tornar-se completamente congruentes.

Para o aluno, essa é uma experiência próxima, tem a ver com seu mundo, e a Matemática cumpre a função de ajudá-lo a compreender melhor o cotidiano, as coisas ao redor. Essa é a orientação da didática atual, fazer que o aluno sinta que o ensino tem a ver com sua vida, manipulando objetos com que tem intimidade, recortando, dobrando. A transformação geométrica dá suporte teórico para a Matemática de hoje, os professores podem buscar apoio em seus conceitos.

Com relação ao papel do professor, às dificuldades de lecionar, acredito que é preciso que o docente entenda o espírito de ser educador. Educar não é ir à frente dos discípulos e dar a matéria simplesmente, mas conscientizar-se de que é preciso envolver-se e envolver o aluno com a aprendizagem. No ensino não é possível separar conhecimento matemático da postura do ensino-aprendizagem, da relação humana, fundamental na aprendizagem. Não se pode ensinar sem saber como é que o outro aprende. Embora ensino e aprendizagem sejam dois movimentos distintos, na sala de aula eles têm de estar articulados. O que se ensina não é exatamente o que o aluno aprende, é claro, são dois processos diferentes, mas ambos acontecem na relação interativa em sala de aula.

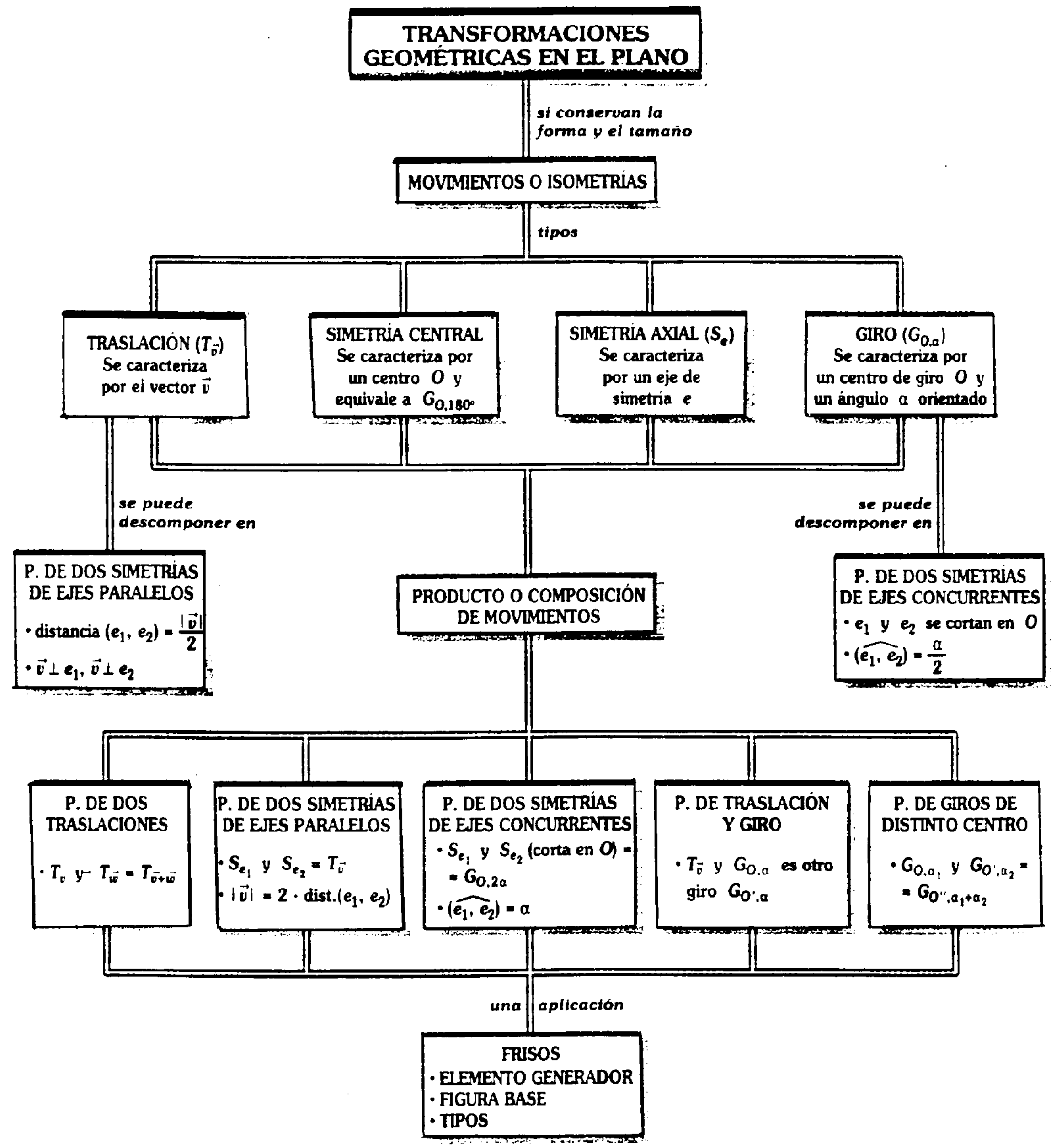
O modelo das transformações geométricas ainda é bastante presente no nosso mundo, dentro da geometria é um modelo que ainda oferece um vasto campo a ser explorado, principalmente pela sua utilização na mídia. Para compreender como a transformação geométrica foi uma semente fértil, é só perceber como ela colocou a geometria na trilha da função, além dos subsídios inestimáveis que oferece à ciência da computação.

Anexo IV

Livro didático da Espanha

CONTENIDOS MÍNIMOS

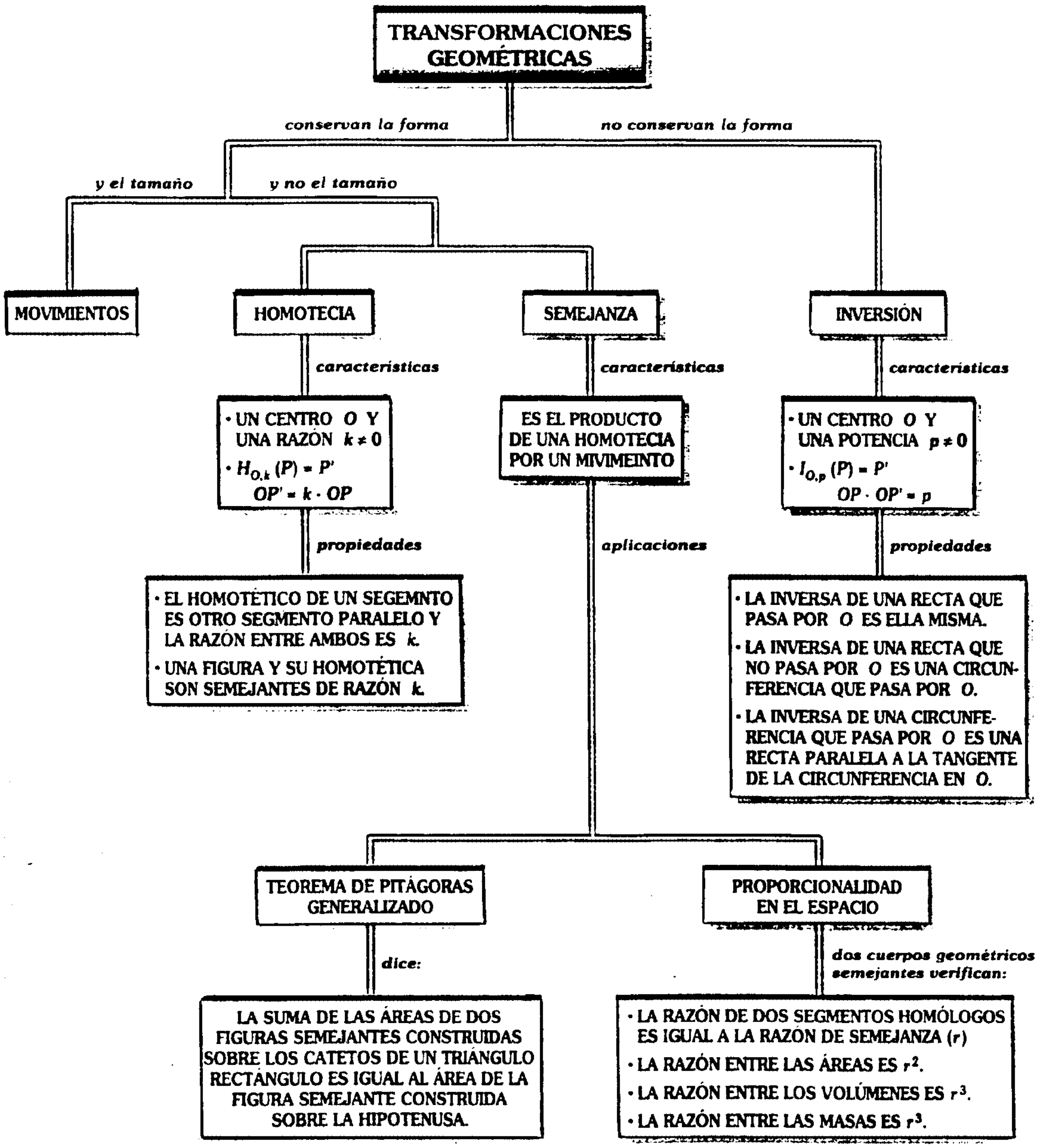
Conceptos



Quadro I

CONTENIDOS MÍNIMOS

Conceptos



Quadro II

Anexo V

Instrumentos para coleta de dados

DADOS DOS ALUNOS DA LICENCIATURA ESPECIAL

Nome ....

Endereço ....

Bairro..................................... CEP .... Telefone ....

Idade......................... Sexo .... e-mail ....

1. Escola onde fez o curso ginasial (5ª a 8ª Séries):
   Escola estadual .... Particular .... Supletivo........... Outros ....

2. Nessa escola você teve aulas de geometria? ..... e de desenho geométrico? .....

3. Escola onde fez o curso colegial (2°grau) ....
   Escola estadual .... Particular .... Supletivo ....Outros ....

4. Nessa escola você teve aulas de geometria? ..... e de desenho geométrico? .....

5. Fez cursinho para entrar numa Faculdade? ....

6. Escola onde fez o curso superior
   Estadual .... Particular .... Federal .... Outros ....

7. Nome do curso superior ....

8. Nessa escola você teve aulas de geometria? .... e desenho geométrico? ....

9. Ano em que terminou o curso de licenciatura ....

10. Fez algum curso de especialização? .... Quando? ....
    Em que escola?...
    Nome do curso de especialização ....

11. Em algum momento estudou o assunto simetria em relação a uma reta? ....
    Quando e onde?...

12. Número de anos de magistério: ....

13. Números de anos que leciona matemática ....

14. Séries em que dá aulas de matemática ....

15. Nome da(s) escola(s) que leciona atualmente. É estadual , municipal ou particular?

16. Você teria dificuldades para ensinar simetria axial e simetria central?
    Comente sua resposta.

17. Na sua opinião, quais seriam as principais dificuldades de um professor de 5ª a 8ª para ensinar o assunto transformações geométricas?

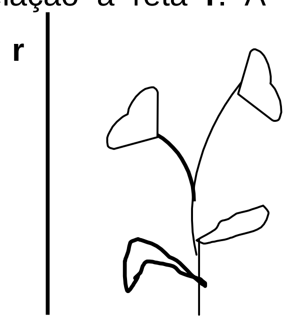
18. Outras observações

Anexo VI

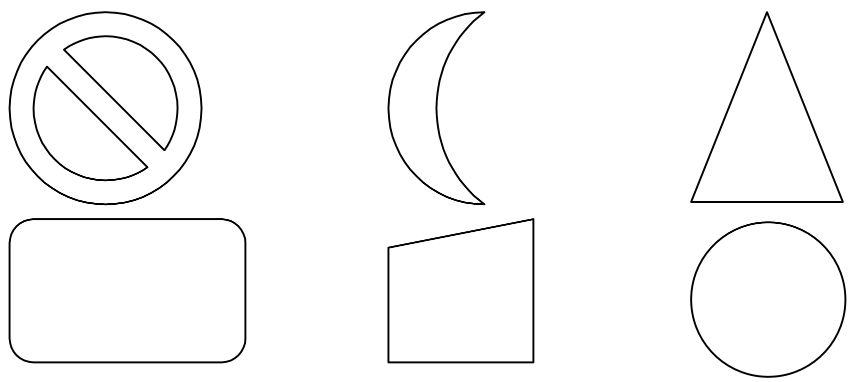
Teste diagnóstico dos professores

EXERCÍCIOS DE GEOMETRIA

1. A reta **r** abaixo representa um espelho colocado em pé. Desenhe, no outro lado da reta **r,** a figura que você enxergaria no espelho. Este desenho chama-se simétrico da figura dada, em relação à reta **r**. A reta **r** chama-se eixo de simetria.

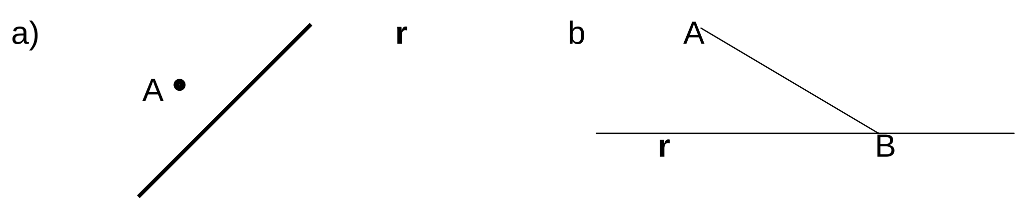


2. Indique com S as figuras que são simétricas e com N as que não simétricas. Naquelas que são simétricas represente o(s) eixo(s) de simetria.



3. a) Determine o ponto P simétrico do ponto A, em relação `a reta **r**.

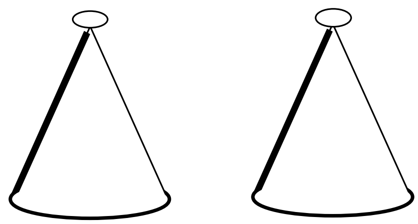
   b) Determine o simétrico do segmento AB, em relação à reta **r**. Se quiser, use qualquer instrumento: régua, compasso, esquadro, transferidor, etc.



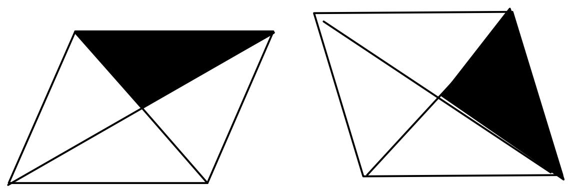
Em cada caso, você observou alguma propriedade relacionando o ponto (ou o segmento) dado com o seu simétrico? Descreva o que foi observado.

3. Em cada par de figuras, uma delas pode ser correspondente de outra por uma transformação geométrica. Assinale com X

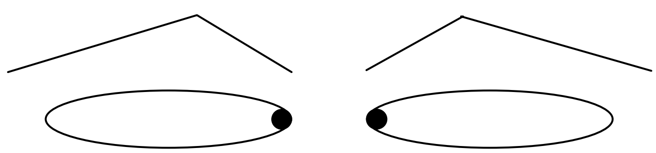
   a) se a transformação for uma simetria em relação à reta.
   b) se a transformação for uma translação.
   c) se a transformação for uma rotação.
   d) se nenhuma das anteriores ocorrer.



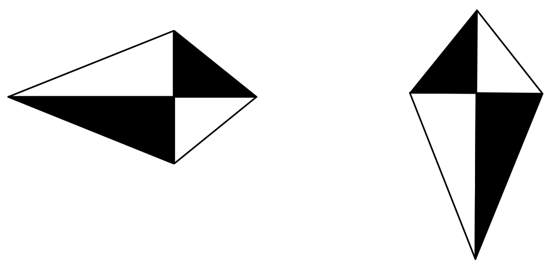
a) simetria
b) translação
c) rotação
d) nenhuma das anteriores



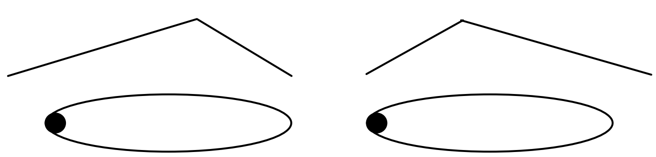
a) simetria
b) translação
c) rotação
d) nenhuma das anteriores



a) simetria
b) translação
c) rotação
d) nenhuma das anteriores

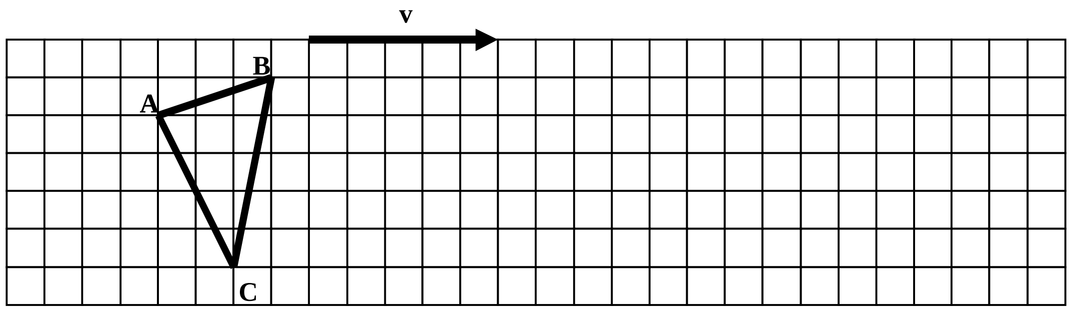


a) simetria
b) translação
c) rotação
d) nenhuma das anteriores

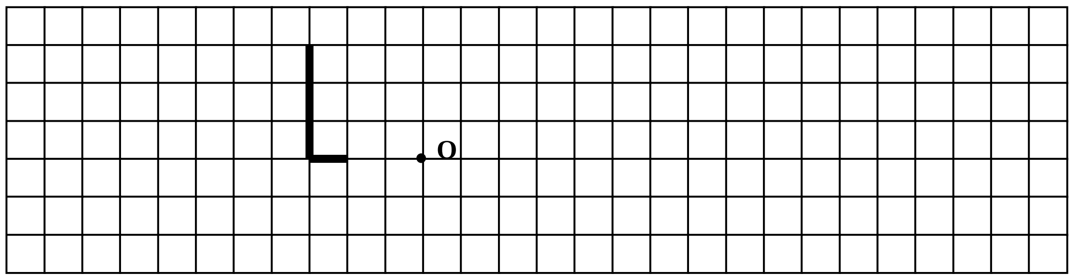


a) simetria
b) translação
c) rotação
d) nenhuma das anteriores

4. Determine como ficará o triângulo ABC após uma translação de vetor v



6. Determine como ficará a letra L após uma rotação de 90°, com centro no ponto O.



Algumas informações solicitadas:

1. Tempo de magistério:

2. Séries em que já deu (ou dá) aulas de Matemática.

3. Trabalha com geometria em suas aulas de Matemática?

4. Em alguma ocasião o assunto tratado nestes exercícios foi estudado? Onde?

5. Participa das oficinas do PEC?

6. Identifique os termos desconhecidos nos exercícios.

Anexo VII

Texto analisado com os professores

TRANSFORMAÇÕES NO PLANO

TRANSFORMAÇÃO NO PLANO : função bijetora f do conjunto de pontos do plano sobre si mesmo.

INVARIANTE: diz-se que um subconjunto A do plano é invariante por uma transformação f se f(A) = A.

COMPOSIÇÃO DE TRANSFORMAÇÕES : função h, composta de duas transformações f e g.

ISOMETRIA : transformação do plano que conserva distâncias, isto é, se P' e Q' são as imagens de P e Q pela função f, então, P'Q'= PQ.

TEOREMA : Toda isometria do plano conserva: a colinearidade de ponto; a ordem dos pontos numa reta; a medida dos ângulos; o paralelismo e perpendicularismo de retas.

PONTO FIXO . RETA FIXA: a) o ponto P é fixo por f, se f(P)=P.
b) a reta r é fixa por f, se f(r) = r.

Se uma reta é fixa e ainda mais todo ponto dela é fixo, a reta é chamada fixa ponto a ponto.

SIMETRIA EM RELAÇÃO À RETA OU REFLEXÃO NUMA RETA: Dada uma reta d , a simetria em relação à reta d é a transformação que fixa todos os pontos de d e associa a cada ponto P do plano, não pertencente a d, o ponto P' tal que d é a reta mediatriz do segmento PP'. A reta d chama-se eixo de simetria.

TEOREMA: A simetria em relação a uma reta é uma isometria.

TEOREMA: a) os pontos fixos pela simetria em relação à reta d são os pontos da reta d e somente estes;

b) as retas fixas(ou os invariantes) numa simetria em relação à reta d são a reta d (d é fixa ponto a ponto) e todas as retas perpendiculares a d (estas retas não são fixas ponto a ponto) e somente essas.

SIMETRIA EM RELAÇÃO A PONTO: dado o ponto S do plano, a simetria em relação a S é a transformação que fixa o ponto S e associa a cada ponto P do plano, distinto de S o ponto P' tal que S é o ponto médio do segmento PP'. O ponto S chama-se centro de simetria.

TEOREMA: O único ponto fixo da simetria em relação ao ponto S é o centro S. As únicas retas do plano que são invariantes pela simetria em relação a S são as que passam pelo centro S.

TRANSLAÇÃO: Dado o vetor v, a transformação que associa a cada ponto P do plano o ponto P', tal que PP'=v chama-se translação de vetor v.

TEOREMA: A translação de vetor v é uma isometria e não tem pontos fixos.

TEOREMA: A composta de duas simetrias em relação à retas paralelas distintas é uma translação de vetor v = 2 a, onde a é a distância entre as retas paralelas.

ROTAÇÃO: Dado o ponto O e um ângulo ϑ orientado, a transformação que fixa o ponto O e associa a cada ponto P do plano, distinto de O, o ponto P", tal que, OP = OP' e POP'= ϑ, chama-se rotação de centro O e ângulo ϑ.

TEOREMA: A rotação de centro O e ângulo ϑ é uma isometria. Todas as retas são fixas se $\vartheta = 0°$. As retas por O são fixas se $\vartheta = \Pi$.

TEOREMA: A composta de duas simetrias em relação a duas retas concorrentes num ponto O é uma rotação de centro O e ângulo 2α, onde α é o ângulo formado pelas retas.

FIGURAS CONGRUENTES: Duas figuras do plano são congruentes se existe uma isometria do plano que leva uma figura na outra.

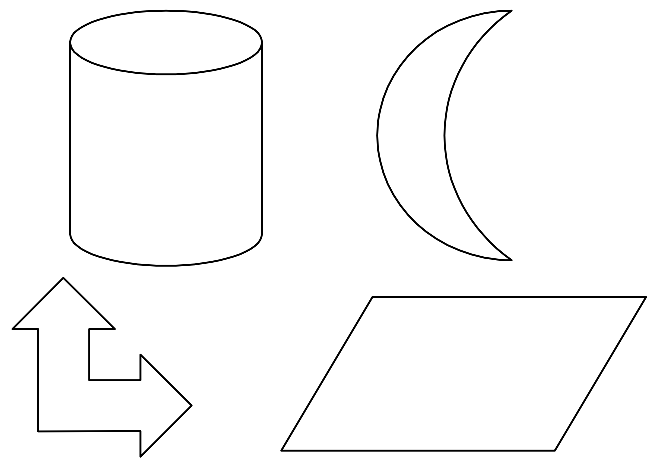
Anexo VIII

Atividades com os alunos

EXERCÍCIOS DE GEOMETRIA

Nomes dos alunos Prof. 5ª e 6ª séries

I. Recorte as figuras e dobre uma só vez de modo que as duas partes coincidam. Cole nesta folha somente as figuras nas quais as duas partes coincidam. Trace com régua e caneta o lugar onde foi feita a dobra.

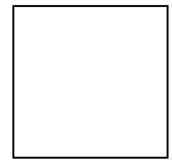


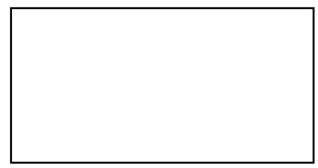
Figuras como estas são chamadas **simétricas** e a reta feita sobre a dobra é seu **eixo de simetria.**

Nessas figuras simétricas você pode colocar um espelho sobre a dobra e verificar que a imagem de uma parte da figura, no espelho, completa a figura toda.

2. Recorte as figuras para descobrir seus eixos de simetria. Use o espelho ou dobre as figuras. Cole nesta folha a figura e trace, com régua e lápis, os eixos de simetria de cada figura.

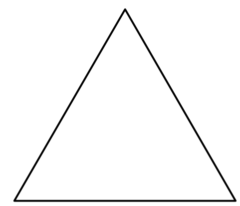
a) Quadrado



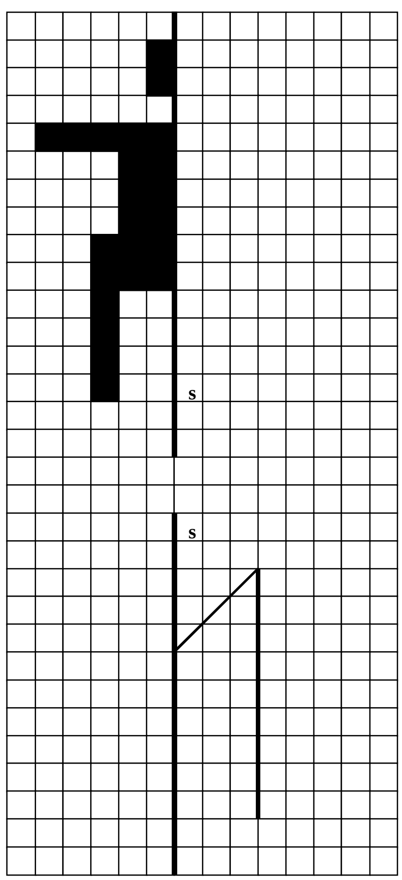


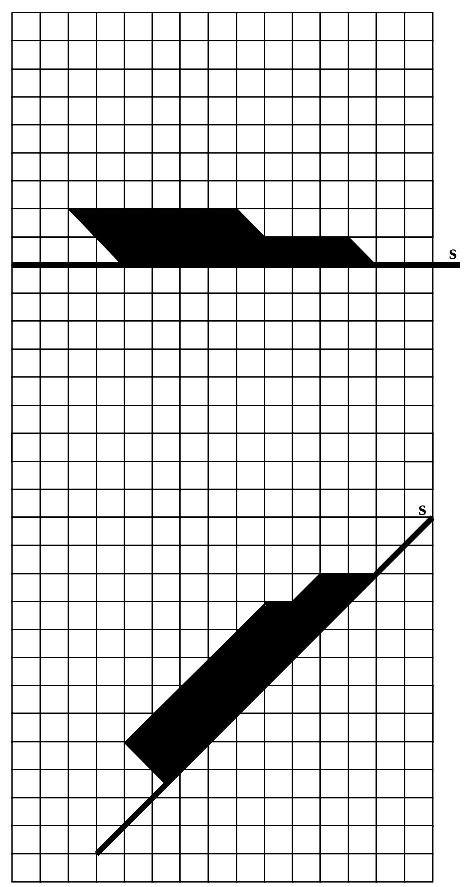
b) Retângulo

c) Triângulo equilátero

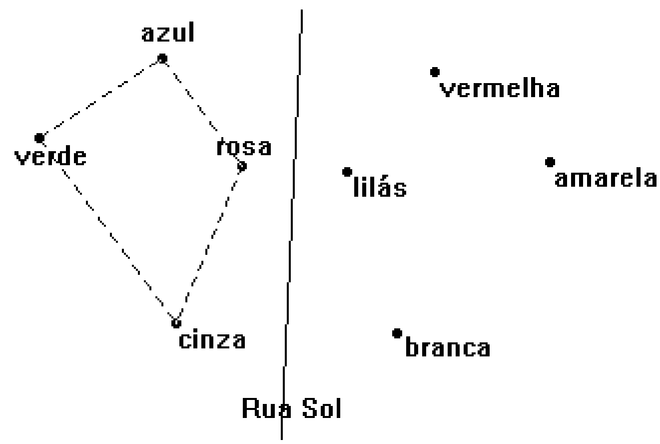


3. No quadriculado dado estão desenhadas uma das duas partes de figuras simétricas e seu eixo de simetria. Complete-as.





4.O desenho abaixo representa um condomínio onde foram construídas 8 casa separadas por uma rua chamada Sol.



Pede-se:

1°) que casa fica mais perto da rua Sol: a azul ou a vermelha?

2°) que casa fica mais longe da rua Sol: a rosa ou a lilás?

3°) qual a distância da casa verde à rua Sol?

4°) qual a distância da casa amarela à rua Sol?

5°) o morador da casa amarela vai visitar o da casa azul; o da casa verde vai visitar o da casa vermelha. Se eles forem em linha reta de uma casa à outra, qual deles vai percorrer a maior distância?

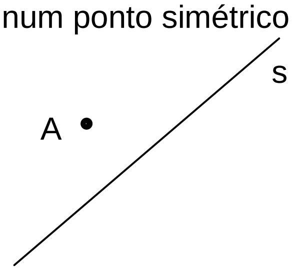
Eles vão passar por um ponto comum nesse caminho?

Trace os caminhos e mostre se existe ou não esse ponto comum.

Dizemos que a casa azul está localizada num ponto que é simétrico do ponto onde está a casa amarela, em relação à reta que representa a rua Sol.

Do mesmo modo dizemos que a casa verde está num ponto simétrico ao da casa vermelha em relação à rua Sol; a casa rosa está num ponto simétrico ao da casa `a rua Sol.

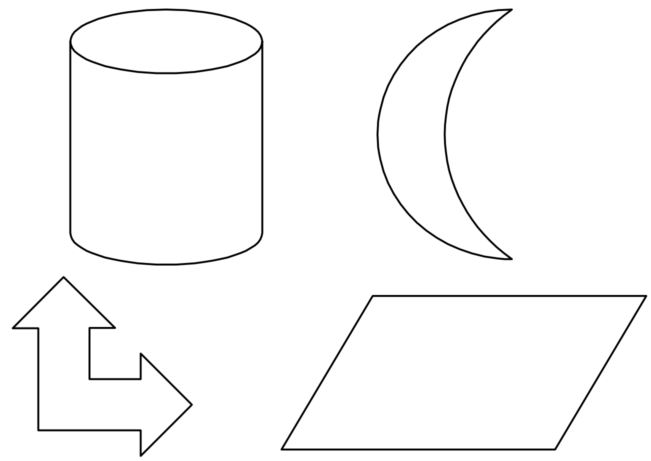
5.Se a reta s for a rua Sol e o ponto A for o lugar onde fica uma casa marrom, onde deve ficar a casa simétrica de A em relação à lilás em relação à rua Sol; a casa branca está num ponto simétrico ao da casa cinza em relação rua Sol?



EXERCÍCIOS DE GEOMETRIA

Nomes dos alunos Prof. 7ª e 8ª séries

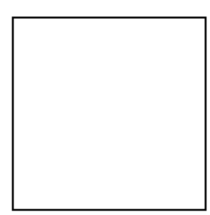
I. Recorte as figuras e dobre uma só vez de modo que as duas partes coincidam. Cole nesta folha somente as figuras nas quais as duas partes coincidam. Trace com régua e caneta o lugar onde foi feita a dobra.



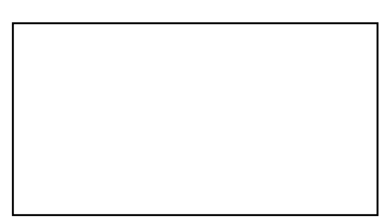
Figuras como estas são chamadas **simétricas** e a reta feita sobre a dobra é seu **eixo de simetria.**

Nessas figuras simétricas você pode colocar um espelho sobre a dobra e verificar que a imagem de uma parte da figura, no espelho, completa a figura toda.

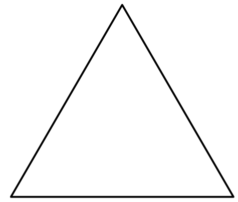
1. Recorte as figuras para descobrir seus eixos de simetria. Use o espelho ou dobre as figuras. Cole nesta folha a figura e trace , com régua e lápis, os eixos de simetria de cada figura.
   a) Quadrado



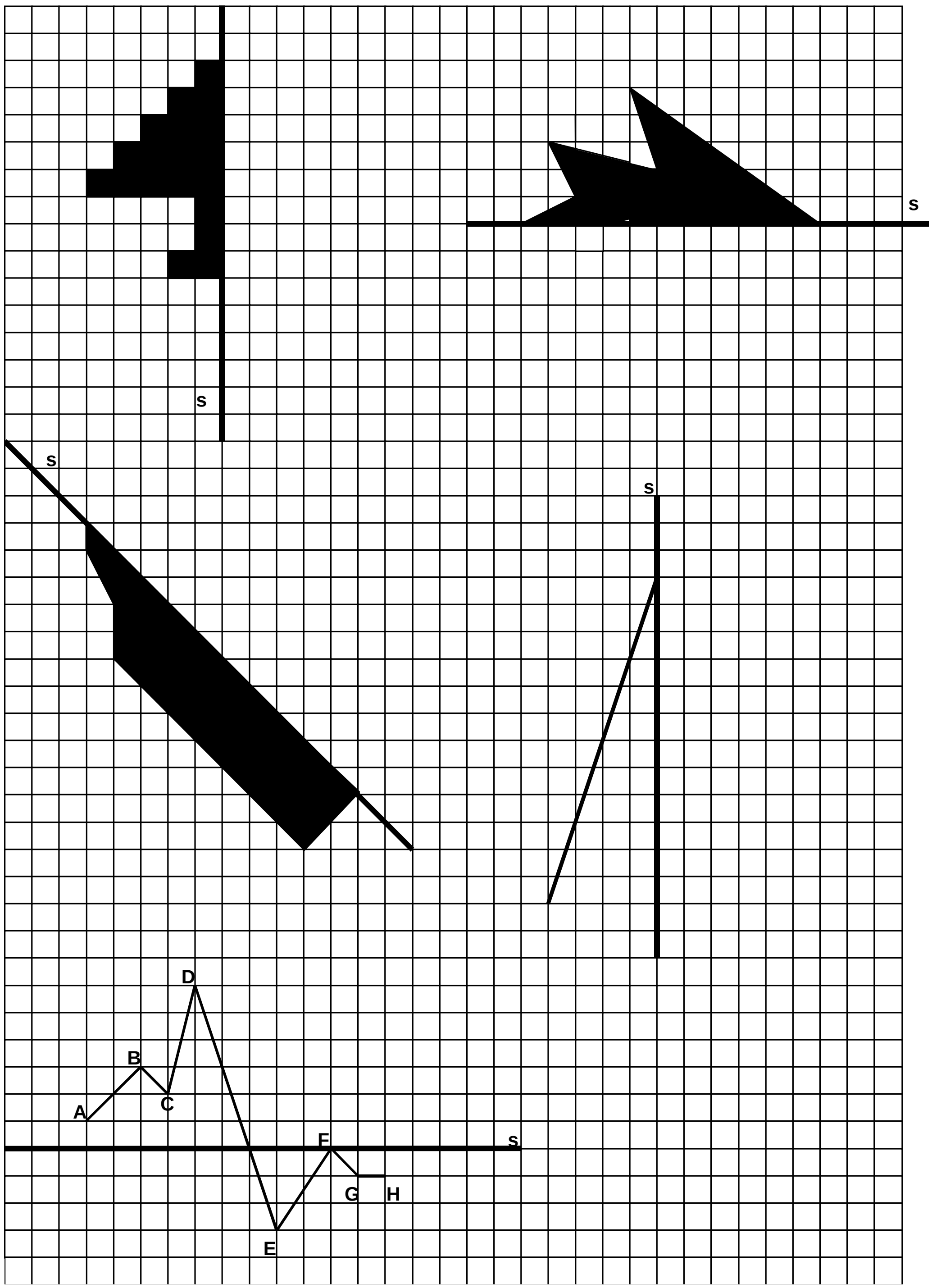
   b) Retângulo



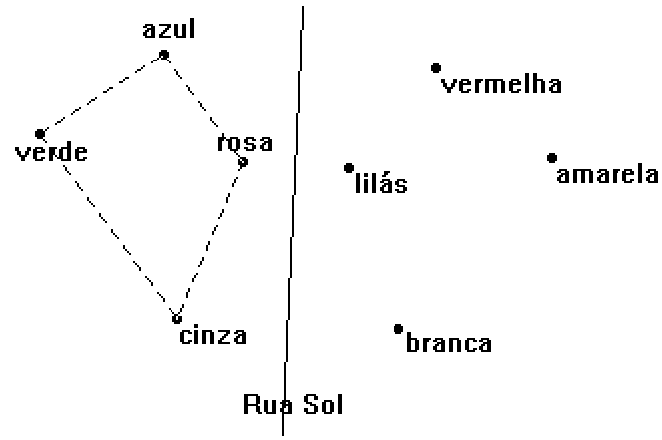
c) Triângulo equilátero



2. No quadriculado dado estão desenhadas uma das partes de figuras simétricas e seu eixo de simetria. Complete-as.



4.O desenho abaixo representa um condomínio onde foram construídas 8 casa



separadas por uma rua chamada Sol.

Pede-se:

1°) que casa fica mais perto da rua Sol: a azul ou a vermelha?

2°) que casa fica mais longe da rua Sol: a rosa ou a lilás?

3°) qual a distância da casa verde à rua Sol?

4°) qual a distância da casa amarela à rua Sol?

5°) o morador da casa amarela vai visitar o da casa azul; o da casa verde vai visitar o da casa vermelha. Se eles forem em linha reta de uma casa à outra, qual deles vai percorrer a maior distância?

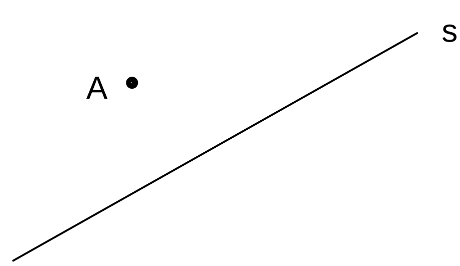
Eles vão passar por um ponto comum nesse caminho?

Trace os caminhos e mostre se existe ou não esse ponto comum.

Dizemos que a casa azul está localizada num ponto que é simétrico do ponto onde está a casa amarela, em relação à reta que representa a rua Sol.

Do mesmo modo dizemos que a casa verde está num ponto simétrico ao da casa vermelha em relação à rua Sol; a casa rosa está num ponto simétrico ao da casa lilás em relação à rua Sol; a casa branca está num ponto simétrico ao da casa cinza em relação `a rua Sol.

5.Se a reta s for a rua Sol e o ponto A for o lugar onde fica uma casa marrom, onde deve ficar a casa simétrica de A em relação à rua Sol?



Orientações ao Professor

1. Em cada exercício e em cada figura assinalar as seguintes avaliações, se possível, por grupo:

   a) redação do texto: ☐ é clara para o aluno ☐ é difícil para o aluno

   b) no entendimento do exercício: precisou de ajuda? ☐ não ☐ sim

   c) na resolução do exercício: precisou de ajuda? ☐ não ☐ pouca ☐ muita

   d) dificuldade na resolução: pontuar de 0 a 5:
   0 indica nenhuma dificuldade: 5, muita ajuda para resolver ____________

   e) principais erros dos grupos

2. Entregar todos os exercícios feitos pelos alunos junto com um relatório do Professor, aluno do curso de Licenciatura Especial da PUC (por exemplo: com comentários, críticas, conclusões, avaliação geral do trabalho, sugestões, etc).

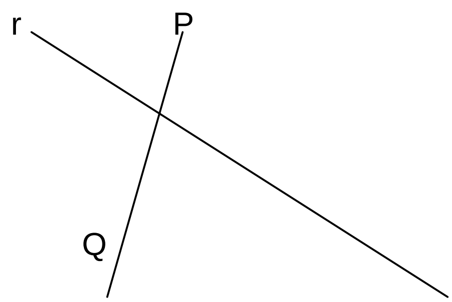
Anexo IX

Avaliação Final

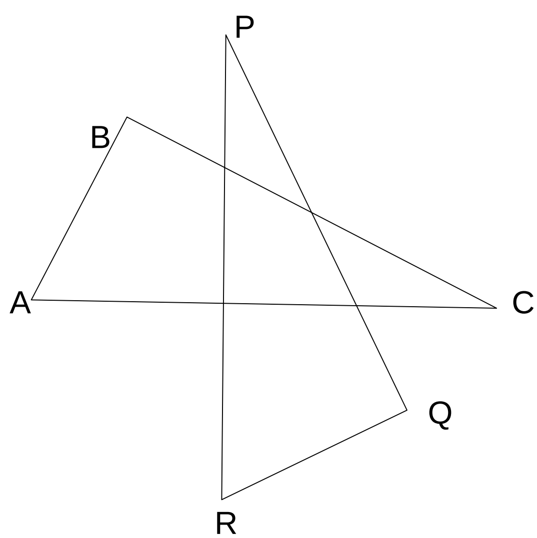
PUC PROVA DE GEOMETRIA DAS TRANSFORMAÇÕES

NOME TURMA I outubro 99

Determine o simétrico do segmento PQ dado, em relação à reta r.



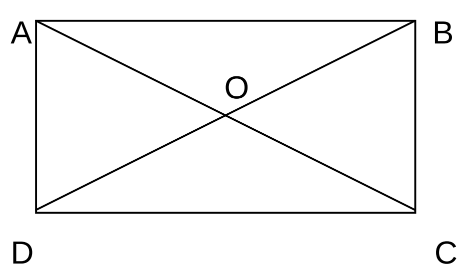
2. Verifique se os triângulos dados ABC e PQR são simétricos em relação a uma reta. Justifique sua resposta.



3. Seja ABCD um retângulo. Classifique em V ou F cada sentença, justificando sua resposta.

a) as diagonais AC e BD são eixos de simetria do retângulo.

b) O retângulo é uma figura simétrica em relação ao ponto º.



3. Quantos eixos de simetria tem:
   a) um segmento AB? Quais? Justifique sua resposta.
   b) uma reta? Quais? Justifique sua resposta.

4. Dadas as retas d e f, perpendiculares entre si no ponto O e um triângulo ABC, determine:
   a) o simétrico do triângulo ABC em relação à reta d e chame-o de A'B'C'.
   b) o simétrico do triângulo A'B'C' em relação à reta f e chame-o de A"B"C".
   c) una os pontos correspondentes A e A", B e B", C e C". O que você observa a respeito dos segmentos determinados por esses pontos e o ponto O?
   d) relacione os triângulos ABC e A"B"C" com o ponto º