Francisco José Brabo Bezerra

INTRODUÇÃO DO CONCEITO DE NÚMERO FRACIONÁRIO E DE SUAS REPRESENTAÇÕES:
Uma abordagem criativa para a sala de aula

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA
SÃO PAULO – 2001

Francisco José Brabo Bezerra

INTRODUÇÃO DO CONCEITO DE NÚMERO FRACIONÁRIO E DE SUAS REPRESENTAÇÕES:
Uma abordagem criativa para a sala de aula

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, para defesa, como exigência parcial para a obtenção do título de MESTRE em Educação Matemática, sob a orientação da Profa. Doutora Sandra Maria Pinto Magina

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA
SÃO PAULO – 2001

Ficha catalográfica elaborada pela Bib. Nadir Gouvêa Kfouri - PUCSP

DM
510 Bezerra, Francisco José Brabo
B Introdução ao conceito de número fracionário e de suas representações: uma abordagem criativa para a sala de aula. - São Paulo: s.n., 2001.

Dissertação (Mestrado) - PUCSP
Programa: Matemática: Educação Matemática
Orientador: Magina, Sandra Maria Pinto

1. Matemática - Estudo e ensino.

Palavra-Chave: Números fracionários - Frações

COMISSÃO JULGADORA

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação por processos fotocopiadores ou eletrônicos.

Assinatura:________________________Local e Data: _____________

AGRADECIMENTOS

Muitas pessoas contribuíram para que fosse possível a realização dessa etapa da minha vida. Ao citar, de modo especial, algumas delas, não significa falta de reconhecimento da colaboração das demais. Registro aqui meus agradecimentos àquelas pessoas ou instituições que, a meu entender, participaram mais diretamente dessa minha formação:

À PUC-SP, em especial, aos professores do Programa que contribuíram nesta etapa de minha formação.

À Professora Doutora Sandra Maria Pinto Magina, pela acolhida como orientadora e amiga, sabendo dosar e respeitar o ritmo de meus estudos, além das contribuições sábias.

Às Professoras Doutoras que se dispuseram a fazer parte desta BANCA, Professora Dra. Maria Cristina Souza de Albuquerque Maranhão e Professora Dra. Alina Galvão Spinillo, que com muito carinho souberam apreciar o trabalho e opinar com legitimidade.

À CAPES, pela bolsa de estudos que propiciou condições para que eu me dedicasse com mais afinco nesta jornada.

Ao secretário Francisco (meu Xará) pelo apoio constante e incansável.

A meus colegas do curso, que nos bons e maus momentos, estiveram sempre a meu lado e, em especial, a Rosemary e Micheline, eternas companheiras.

A meus colegas do Grupo Caraça pelo incentivo e apoio, em especial, ao Luciano Lima.

À FAESP pelo apoio constante. E, em especial, às diretoras Sônia e Lourdes, a Ana Maria e aos funcionários.

À professora Regina Selli Pavanini, à coordenação, à direção e, em especial, a todos os alunos da Escola Estadual Conselheiro Antonio Prado pela acolhida e apoio a esta pesquisa.

A todos os meus amigos que sempre me apoiaram e incentivaram nessa luta, em especial, ao amigo-irmão Romildo.

A meus pais que souberam enfrentar a minha ausência para o cumprimento desta etapa e cujo carinho e amor são eternos.

A DEUS, pela vida e pela força de ter alcançado mais esta etapa.

“A possibilidade não é a realidade, mas é, também ela, uma realidade: que o homem possa ou não fazer determinada coisa, isto tem importância na valorização daquilo que realmente se faz. Possibilidade quer dizer liberdade.”

Antonio Gramsci

RESUMO

O objetivo deste trabalho foi investigar uma abordagem para o ensino dos números fracionários, em que se pretendeu estudar a aquisição do conceito deste e de suas representações com base em situações-problema que fossem significativas e desafiadoras para o aluno.

Trabalhou-se com duas turmas de 3ª série, uma que serviu de grupo experimental (GE) e outra de mesmo nível que representou o grupo controle (GC), ambas do Ensino Fundamental, de uma Escola Pública da cidade de São Paulo. No GE foram estudadas as questões da aprendizagem relacionadas à aquisição do conceito de fração, tomando-se por base uma seqüência de ensino elaborada, pelo autor desta pesquisa, utilizando-se das representações simbólicas e pictóricas, com base nos pressupostos da participação, da resolução de situações-problema, do trabalho em grupo e de vivências relacionadas ao dia-a-dia da criança. O GC não teve qualquer contato formal com esse conteúdo. Os dois grupos foram submetidos a dois testes individuais:

um antes (pré-teste) da aquisição dos conceitos de fração e outro (pós-teste), depois de ter tido contato com esse conteúdo. A análise dos resultados envolveu duas etapas: a análise quantitativa e a qualitativa dos instrumentos diagnósticos.

Em síntese, quanto ao desempenho geral dos grupos nos testes, pode-se citar que o GE apresentou um desempenho satisfatório, ao passo que o GC manteve-se no mesmo patamar. O estudo ofereceu pistas significativas sobre o processo de aquisição desse conteúdo. A mais valiosa delas foi a de que o processo de construção dos conceitos de fração, a exemplo da história, ganha força quando se inicia baseando-se na resolução de problemas concretos, advindos da realidade.

ABSTRACT

The aim of this work was to investigate the approaching to the fraction teaching, in which was intended to introduce the representation of fraction based on problem-solving that result in significative and challenge situation for students

The research was carried out into two groups, both coursing the third grade of a public school in São Paulo. One of them was taught by a teaching sequence elaborated by the author of this research and involving the use of symbolic and pictorial representation based on the presupposed of their participation, the result coming up from situations involving problems, the team work and their life experience. This was the experimental group (EG). The pupil from the another group did not received any teaching of fraction. This was called reference group (RG). Both groups were submitted to two independent

tests: the pre test, held before the fraction introduction and the other, and the post test, after having the experimental group being contact with this subject. The analysis of the results involved two points of view: the quantitative and qualitative approaches.

Finally, concerning the general perform of the groups, the experimental group presented a superior performance if compared with the reference group that stayed at same level as beginning. The study offered us significant leads about the building up process of these contents. The most valuable one was that the building up process of the basic concepts in the rational field as an example of the historic way, gathers strength when it comes from solving the concrete problem from the life problems.

SUMÁRIO	página
Capitulo I : INTRODUÇÃO	
1.1. Problemática e Objetivo	14
1.2. Questão de pesquisa	15
1.3. Descrição da Dissertação	17
Capitulo II : DISCUSSÃO TEÓRICA	
Introdução	
2.1. Pressupostos teóricos	
2.1.1. Vergnaud	
2.1.2. Nunes & Bryant	
2.2. Revisão de literatura	
Capitulo III : NÚMERO FRACIONÁRIO ONTEM E HOJE	
Introdução	
3.1. Frações Ontem (História)	
3.2. Frações hoje (Livros didáticos)	
Capitulo IV : METODOLOGIA	
Introdução	
4.1. Propostas e Objetivos	
4.2. Desenho Geral do Experimento	
4.2.1. Universo do estudo	
4.2.2. Procedimento	
4.2.3 Instrumentos de avaliação diagnóstica	
4.2.3.1 Apresentação e Descrição do Pré-teste	
4.2.3.2 Apresentação e Descrição do Pós-teste	
4.2.4 Apresentação e descrição da seqüência de ensino	
4.2.5 Avaliação geral da seqüência	
Capitulo V : ANÁLISE DOS RESULTADOS	
Introdução	
5.1. Análise Quantitativa	
5.1.1. Desempenho geral dos grupos	
5.1.2. Analise do percentual de crescimento do GE e manutenção do percentual do GC	
5.1.3. Análise por Sujeito	
5.1.4. Análise por questão	
5.1.5. Análise por objetivos	
5.2. Análise Qualitativa	
5.2.1. Análise dos erros cometidos pelos alunos	
5.2.2. Análise qualitativa das respostas	

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE FIGURAS

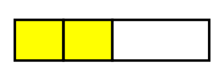
1. INTRODUÇÃO

INTRODUÇÃO

1.1. **Problemática e Objetivo**

Este trabalho tem como objetivo investigar como ocorre a aquisição do conceito de número fracionário, bem como se dá sua representação em crianças cursando a 3ª série do Ensino Fundamental, considerando-se que seu contato com esse campo numérico fosse inédito. Nesse sentido, abordamos as frações nas concepções parte-todo e quociente.

O conjunto dos números naturais é um obstáculo na aprendizagem do conjunto dos números racionais, que é denominado por Brousseau (1986) de obstáculo epistemológico. Segundo o autor, é inerente ao próprio saber, constitutivo do próprio conhecimento, podendo ser percebido nas dificuldades que os matemáticos encontraram na história.

Observamos como educadores que as dificuldades não são próprias apenas das crianças das séries iniciais, mas também de jovens e adultos de séries mais avançadas. As dificuldades a que nos referimos são aquelas relacionadas à resolução de situações-problema, à representação do número fracionário na forma a/b ($a \in N$, $b \in N$, com $b \neq 0$) e, sobretudo, à localização desse número na reta numérica e também à compreensão do próprio conceito da fração. Erros como: relacionar parte-parte ou todo/parte em função do modelo parte/todo; dividir uma quantidade contínua e representá-la com os números naturais; não considerar a conservação de área quando se está dividindo uma figura em n partes. Por exemplo, nesta figura: 

As crianças afirmam que a parte pintada representa 2/3, quando deveriam citar 2/4 ou ½ . Elas simplesmente contam as partes da figura e desprezam a conservação das áreas.

Entre as diversas formas de abordar o número fracionário, optou-se por uma forma não convencional, ou seja, partir do conceito de divisão já abordado nos números naturais e de frações impróprias.

1.2. Questão de pesquisa

A pesquisa tem como foco o estudo da formação do conceito de número fracionário e sua representação. Dentro dessa perspectiva, a questão é: *Como abordar os conteúdos relacionados ao número fracionário de forma que o aluno compreenda seu conceito e estabeleça a relação entre o número e sua representação?* E, conseqüentemente, investigar quais os fatores que interferem nessa relação. Observamos fatores evidenciados exaustivamente na literatura, tais como: participação ativa dos alunos nas atividades (Glasersfeld, 1997); trabalho em grupo (Vygotsky,1984); construção conceitual com base em situações-problema (Vergnaud, 1988; 1990; 1993; 1994; 1998); ênfase nos aspectos significativos da aprendizagem dos alunos (Carraher, 1993); (Nunes & Bryant, 1997); (Nunes, 1992; 1996; 1998); e o trabalho com representações concretas (Zabala, 1996) favorecem o processo de aprendizagem, pois a criança começa a encontrar significado no conteúdo trabalhado e a valorizar a educação formal adquirida na escola.

Nossa hipótese é: existem diversas formas de abordar a introdução do conceito dos números fracionários. Observamos nos livros didáticos que a mais usual é a relação parte-todo e quase sempre com quantidades contínuas.

Basear-se na operação de divisão com números naturais e problematizar um tipo de representação para o resto da divisão, no trabalho com quantidades contínuas e discretas, facilita a compreensão dos números fracionários e suas representações.

Como método usado na construção de nossa seqüência, descrevemos a formulação de situações-problema que motivam os alunos a encontrar as respostas que levem a aplicar os conceitos adquiridos em outras situações semelhantes. Segundo Vergnaud (1990; 1993, 1994), ao ampliar seu campo conceitual o aluno consegue resolver novos problemas e em contextos diferenciados. Consideramos que as situações vivenciadas em nossa seqüência foram desafiadoras e novas tanto aos alunos como ao pesquisador. Partimos sempre de uma situação-problema para que os alunos, fazendo uso de determinados materiais que lhes eram significativos, caminhassem na direção da construção do conceito do número fracionário. Desse modo, formalizamos o conceito do número fracionário, bem como sua representação na forma a/b ($a \in N$, $b \in N$, com $b \neq 0$), ocorrendo a institucionalização no sentido utilizado por Brousseau (1986).

Segundo Brousseau (1986) institucionalização é a situação em que o professor fixa de forma convencional e explícita o estatuto cognitivo do saber. Uma vez construído e validado, um novo conhecimento vai ser assimilado e adaptado pelo aluno. Após a institucionalização, o saber torna-se oficial, permitindo aos alunos sua retenção e utilização na resolução de problemas matemáticos.

Tendo em vista nosso universo, não temos a pretensão de abranger todo o estudo sobre os números fracionários, restringindo nossa seqüência para introdução desse tema.

1.3. Descrição da Dissertação

Na presente introdução, apresentamos nossa problemática, colocamos a hipótese da qual partimos, lançamos a questão de pesquisa e o objetivo, para o desenvolvimento do trabalho de pesquisa.

No capítulo II descrevemos a fundamentação teórica que nos levou a propor uma abordagem para a construção dos conceitos considerados. Uma vez que estamos partindo de um pressuposto sócioconstrutivista, discorremos sobre as contribuições que são a base de nosso trabalho. Da psicologia cognitiva, usamos os conceitos da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1988;1990;1993;1994), especialmente, no que se refere à função das situações-problema para a ampliação do campo conceitual multiplicativo, no qual se fazem presentes os números fracionários e os trabalhos de Bryant & Nunes (1997), Nunes (1992;1993), no tocante à construção e à compreensão de um conceito matemático. As idéias desses autores ajudam a entender e a explicar, como ocorre a formação do conceito e os comportamentos e erros assumidos por nossos alunos. Além dessas contribuições teóricas, buscamos na literatura pesquisas, cujo tema tenha relação com nossa dissertação.

No capítulo III, examinaremos as frações do ponto de vista histórico, isto é, fazemos um breve relato de seu surgimento e desenvolvimento, chegando até os dias atuais, discutindo como têm sido entendidas dentro da Matemática. Ainda, nesta perspectiva, procuramos também analisar como ocorre seu ensino na escola. Para isso, achamos por bem analisar alguns dos livros didáticos mais comumente adotados nas escolas, já que são eles os instrumentos de auxílio mais utilizados pelos professores.

No capítulo IV, Metodologia, fizemos uma descrição do universo da pesquisa. Apresentamos a população-alvo – sujeitos, escolaridade, idade, e características sociais da escola – os instrumentos diagnósticos (pré e pós-testes) e a seqüência de ensino proposta. Na apresentação desses dois últimos – instrumentos e seqüência – procedemos uma análise de cada um dos itens neles abordados. Assim sendo, nesta análise constam os objetivos de nossas expectativas, os procedimentos, os recursos e o embasamento teórico.

No capítulo V, realizamos uma análise qualitativa e quantitativa detalhada dos resultados obtidos pela aplicação dos instrumentos diagnósticos. Em relação à aplicação dos instrumentos, observamos o desempenho por: grupo de alunos, tipo de questão, sujeitos e erros e procedimentos.

No capítulo VI, apresentamos nossas conclusões (baseadas no capítulo anterior) e fizemos sugestões tanto para a sala de aula como para futuras pesquisas sobre o assunto.

Finalmente, apresentamos as referências bibliográficas que foram de grande valia para a elaboração e desenvolvimento de todo nosso estudo.

2. DISCUSSÃO TEÓRICA

INTRODUÇÃO

Este capítulo tem por objetivo apresentar as bases teóricas que sustentam nosso trabalho. Inicialmente, foi feito um relato da importância dos estudos de Educação Matemática e, em seguida, apresentamos os teóricos que deram suporte a esta pesquisa e, finalmente, descrevemos alguns trabalhos desenvolvidos no campo numérico dos racionais que serviram de comparação a nosso estudo.

Ao desenvolver este trabalho baseamo-nos nas idéias da Psicologia cognitiva e da Educação Matemática advindas de Vergnaud (1982; 1992; 1998) e de Nunes & Bryant (1997; 1999), além dos estudos de Spinillo (1994; 1995), Correa (2000), Silva (1997), Bianchini (2001) e de Kerslake (1986). Isto significa que o presente trabalho apóia-se no pensamento socioconstrutivista em resolução de situações-problema e na importância do desenvolvimento do raciocínio da criança.

Lima (1997) relata que a Matemática pode ser observada sob dois pontos de vista bastante distintos. O primeiro deles refere-se à Matemática mecânica, cujo pensamento fragmenta o conhecimento e que em lugar de elevar o aluno à prática do trabalho humano, bloqueia tal participação, é representada pelas aulas tradicionais que abordam um ensino mecânico e memorístico e propiciam uma aprendizagem descontextualizada, mecanizada e fragmentada. A outra, bastante discutida, atualmente, prioriza a construção do conceito e refere-se a uma pedagogia dialética que coloca como centro da aprendizagem o conceito, a participação ativa do aluno e o trabalho coletivo, consciente e qualitativo.

Devemos estar atentos não somente aos aspectos resultantes das crianças, ou seja, às respostas apresentadas em determinada resolução de um problema quando apreendem corretamente os conceitos matemáticos, mas também ao passo que ela, individual ou coletivamente, conseguiu galgar em sua trajetória de aprendizagem. Mesmo quando resolvem um problema, seja ele de adição, subtração, multiplicação ou divisão, suas soluções nem sempre percorrem os caminhos aceitáveis. Por essa razão, devemos reservar um tempo para que possam assimilar e entender, reduzindo, assim, as dificuldades. Nunes e Bryant (1997) sugerem que, provavelmente, tornamo-nos cegos ou rejeitamos formas de conhecimento matemático aprendidas fora da escola. Vale ressaltar que todas as formas de socialização e raciocínio são dignas de serem apreendidas, não devendo ser rejeitadas por valores acadêmicos.

Neste nosso trabalho consideramos os conceitos de número fracionário e de sua representação na forma a/b, ($a \in N$, $b \in N$, com $b \neq 0$), relacionados à concepção parte-todo e quociente, com enfoque nas frações próprias e uma pequena parte nas frações impróprias de onde partimos. Consideramos, também, os problemas mais significativos às crianças, de modo que cada situação-problema seja um desafio e instigue o aluno a encontrar a resposta.

As concepções parte-todo e quociente presentes neste estudo foram baseadas nas considerações de Ciscar (1988). A relação parte-todo apresenta-se quando um “todo” (contínuo ou discreto) divide-se em partes “congruentes” (equivalentes como quantidade de superfície ou quantidade de ‘objetos’). Neste caso, a fração indica a relação que existe entre um número de partes e o número total de partes (que pode estar formado por vários ‘todos’). A interpretação da fração como quociente associa-se à operação de dividir um número natural por outro (divisão indicada por a:b = a/b). Dividir uma quantidade em um número de partes dadas. Para a criança que está aprendendo a trabalhar com as frações, dividir uma unidade em cinco partes e escolher três (3/5) resulta ser diferente do fato dela dividir três unidades entre cinco pessoas, embora o resultado seja o mesmo.

Assim, ao desenvolver uma seqüência de ensino, devemos garantir a inserção de temas como a teoria e a prática, a construção de situações desafiadoras e reflexivas que permitam ao aluno uma autonomia intelectual de modo a avançar o senso comum.

2.1. PRESSUPOSTOS TEÓRICOS

Para a realização deste estudo, procuramos investigar o que já foi elaborado no contexto das pesquisas em Educação Matemática. Vários trabalhos já foram apresentados sobre o tema em questão. Mas, baseamo-nos na relevância dos aspectos da representação da forma a/b e do conceito dos números fracionários, encontrando nas pesquisas de Nunes & Bryant (1997) o aporte necessário para garantir a cientificidade de nossa pesquisa. Como teoria de suporte, estamos nos reportando à teoria de Vergnaud (1982, 1992, 1998) .

Segundo Nunes & Bryant (1997), a aprendizagem de matemática das crianças não é independente da complexa estrutura social na qual elas fazem esta aprendizagem; portanto, a compreensão dos conceitos matemáticos vai além da questão meramente cognitiva. Concluem que os fatores sociais são extremamente poderosos e não devem ser esquecidos.

> *“Há certamente descontinuidades importantes entre a adição e a subtração por um lado e a multiplicação e a divisão pelo outro, como Piaget e colegas enfatizaram, mas há também algumas continuidades importantes. O tema principal deste capitulo será que as continuidades e descontinuidades são igualmente importantes e ambas precisam ser completamente mapeadas para que possamos entender os muitos passos que cada criança tem que dar em direção a uma compreensão da multiplicação.” (Nunes & Bryant, 1997, p.141).*

Os mesmos autores descrevem que a compreensão progressiva das crianças, das operações de pensamento, sistemas de sinais e situações que estão conectadas aos conceitos de multiplicação e divisão, merecem reflexão sobre os novos sentidos de números e tipos de situações que as crianças encontram, quando começam a aprender. De forma análoga e dentro do campo conceitual multiplicativo (Vergnaud, 1994), abordamos as variáveis do raciocínio para a compreensão da representação dos números fracionários.

2.1.1. Vergnaud

Vergnaud (1990) relata alguns questionamentos com relação à epistemologia e à Psicologia da Educação Matemática. Ele apresenta três níveis de questões que interferem na identificação do tema Educação Matemática. O primeiro está relacionado à epistemologia da matemática, considerando a natureza de seu conhecimento, a natureza das invenções e dos processos de descoberta. O segundo refere-se à epistemologia da Psicologia, que tem diferentes vertentes, dentre elas, o comportamento, percepção, representações complexas, memória, etc. e o terceiro e último, a epistemologia da Educação Matemática que engloba tanto a Psicologia quanto a Matemática e que apresenta fortes implicações para que os professores vislumbrem novos caminhos no ensino da Matemática e na própria Matemática.

Segundo Vergnaud (1990), há uma lacuna entre a epistemologia do professor e a do aluno; esta lacuna é reforçada pelo fato de que, normalmente, os professores não se questionam sobre suas próprias epistemologias ou sobre aquelas impressas nos livros. E toda a visão estrutural e descritiva da matemática como ela aparece, atualmente, é o resultado de uma longa história. Os estudantes podem ultrapassar os obstáculos dos conceitos mais difíceis da matemática, já que desenvolvem estes conceitos por meio da discussão com outras pessoas ou mesmo com outros conceitos da matemática, uma vez que esses conceitos podem ser falíveis e sua construção pode gerar bons e maus frutos. A Educação Matemática propõe aos professores um entendimento melhor da interconexão dos conceitos, competências, símbolos e situações no desenvolvimento de muitos termos do conhecimento matemático.

Vergnaud (1994) deixa claro que não devemos considerar somente os relacionamentos entre os aspectos sociais, no processo da formação do conceito, embora devamos reconhecer sua importância e interesse nesse processo. O conhecimento conceitual deve emergir das situações-problema, isto é, devemos estabelecer referências que relacionem conceitos e situações e vice-versa. Um conceito não aparece isoladamente em uma situação-problema, pois cada situação traz em seu bojo um grande número de conceitos.

Dentro desse pensamento, Vergnaud (1994) gera uma discussão bastante interessante e pertinente sobre as competências e concepções dos estudantes. As competências e concepções desenvolvem-se ao longo do tempo, por meio de experiências envolvendo um grande número de situações tanto no interior da escola quanto fora dela. Assim, o conhecimento dos estudantes tanto pode ser explícito no sentido de que eles podem expressá-lo de forma simbólica como implícito no sentido de usá-lo em ação, escolhendo operações adequadas, sem conseguirem expressar as razões dessa adequação. Por exemplo, para que o professor possa perceber quais os conhecimentos que o aluno traz consigo frente a um dado objeto a ser ensinado, é preciso que ele busque um entendimento do que o aluno realiza e de como realiza, relacionando os dois aspectos.

O estudo do desenvolvimento do conceito implica defini-lo como uma terna de conjuntos C = (s, I, S), onde : s representa o conjunto de situações que tornam o conceito significativo em termos psicológicos, s é a realidade; I mostra o conjunto de invariantes (objetos, propriedades e relações) que podem ser reconhecidos e usados pelos sujeitos para analisar e dominar essas situações e ligado a esquemas de resolução; finalmente, S compreende o conjunto das representações simbólicas usadas para representar os invariantes e, assim, revelar as situações e os procedimentos utilizados na resolução de um determinado problema (Vergnaud, 1988,1993, 1994,1998).

Nesse sentido, podemos citar que, psicologicamente (s), é a realidade e (IS) é a representação que pode ser considerada sob dois aspectos do pensamento, a saber: I é o significado, ligado ao teorema em ação, e S é o significante. Mas um simples conceito não se refere apenas a um tipo de situação, bem como uma simples situação não pode ser analisada sob um único conceito. Assim, quando I é implícito, temos o teorema em ação, e quando S é explícito, é o próprio conceito.

Para compreender melhor o que nos referimos acima, segundo Vergnaud (1998) para uma dada situação podemos necessitar de n conceitos implícitos e n explícitos. Se propusermos n situações, iremos necessitar de n^2 conceitos. Nesse sentido, é importante conhecermos o que Vergnaud (1993) nos cita sobre a teoria dos campos conceituais.

Primeiramente, vamos definir o que Vergnaud (1994) entende por teorema em ação. Ele pode ser definido em termos das relações matemáticas, ou seja, o sujeito se apropria, quando escolhe uma operação ou seqüências de operações para resolver um dado problema. Essas relações não são expressas pelo sujeito de forma explícita, o que nos leva supor que elas não são conscientes para o sujeito.

O teorema em ação pode ser considerado como tendo aplicação apenas num conjunto de problemas. Assim, para estudar o comportamento matemático do aluno é necessário expressar tais teoremas em termos matemáticos. Normalmente, observa-se que os alunos usam teoremas em ação em domínios de contextos fáceis e valores numéricos simples, sendo estreito o âmbito de validade para eles. Entretanto tais teoremas são a primeira base intuitiva que os professores podem usar para entender e formalizar os conceitos. Por outro lado, os professores podem expressar e objetivar os teoremas em ação e ajudar os alunos a estender seu uso nas inter-relações e aplicá-los em situações mais complexas.

Portanto, os teoremas em ação apontam um caminho para se analisar as estratégias intuitivas dos alunos e ajudá-los a transformar conhecimento intuitivo em conhecimento explícito. Os teoremas em ação também apontam na direção de realizarmos um diagnóstico mais preciso do que os alunos sabem ou não, a fim de podermos lhes oferecer situações que lhes permitam consolidar seus conhecimentos, aumentá-los, perceber seus limites e, certamente, superá-los. Esse processo é longo, precisa de muitos anos e cabe ao professor a consciência de que tais resultados serão obtidos com o passar dos anos, pois todo o processo de ensino-aprendizagem requer um prazo para sua aquisição (Vergnaud, 1994).

O conhecimento conceitual deve estar imerso dentro de situações-problema. Enquanto a ação refere-se a um procedimento do participante, a transformação aplica-se a uma mudança de estado natural e a operação, ao procedimento usado para resolver um problema.

Como já dissemos, Vergnaud (1993, 1998) define um campo conceitual por intermédio de uma terna C= (s, I, S); por campo conceitual consideram-se as resoluções de uma certa quantidade de problemas denominadas situações, que envolvem os conceitos, as relações e estruturas, os conteúdos e operações do pensamento, conectados uns aos outros e suscetíveis de serem combinados durante o processo de aquisição.

"A teoria dos campos conceituais é uma teoria pragmática, ou seja, que faz apelo à noção de situação e de ações dos sujeitos nestas condições. Problemas são ao mesmo tempo práticos e teóricos e não somente empíricos, mesmo para as crianças. A teoria dos campos conceituais visa a construção de princípio que permitam articular competências e concepções constituídas em situação, e os problemas práticos e teóricos em que essas competências e concepções se constituem. A natureza desta relação é uma questão epistemológica (...). Entretanto é importante salientar que essa relação imprime ao conhecimento muitos traços locais e um domínio de validade restrito que varia com a experiência e o desenvolvimento cognitivo" (Franchi, 1999, P.163).

O campo conceitual admite estudar o desenvolvimento das estruturas da mente do aluno, num longo período de tempo. A teoria dos campos conceituais permite aos professores desenvolverem habilidades para melhor entender os conceitos matemáticos envolvidos em situações-problema. Ensinar aos alunos pressupõe um claro entendimento de suas concepções e competências desenvolvidas durante o tempo.

Os conceitos são formados por situações-problema com as quais os alunos se deparam. As crianças constroem o campo conceitual por meio de experiências da vida cotidiana e da escola.

Vergnaud (1994) analisou os tipos de situações-problema matemáticos, os tipos de formulação dos mesmos aliados às idades psicológicas e à maturação matemática, chegando às estruturas envolvidas na resolução dos problemas, a fim de entender as filiações e saltos do conhecimento dos estudantes.

Dentre as muitas estruturas estudadas, podem-se citar duas: **as aditivas e as multiplicativas.**

Um conceito não se desenvolve isoladamente, mas em inter-relação com os outros conceitos, por meio de vários tipos de problemas e com a ajuda de várias expressões e simbolismo. Podemos afirmar que as representações simbólicas ilustram o porquê do lento processo de aquisição e nos ajudam a entender melhor o comportamento das crianças (Vergnaud, 1988).

As fronteiras cognitivas entre os campos conceituais não são necessariamente bem definidas. Por exemplo: existe uma filiação entre as estruturas aditivas e multiplicativas, porém há situações específicas nos problemas cognitivos que ora surgem das estruturas multiplicativas, ora das estruturas aditivas, permitindo seu estudo separadamente.

Assim, os conceitos de medida (de quantidades discretas ou de grandezas), de adição, de subtração, de transformação, de tempo, relações de deslocamento num eixo, como o das abscissas são também elementos do campo conceitual, o campo das estruturas aditivas.

Por outro lado, as **estruturas multiplicativas** abrangem os conceitos de multiplicação, de divisão, de fração, de proporção simples ou composta, de função linear e de espaço vetorial, entre outros.

Segundo Vergnaud (1988), o Campo Conceitual Multiplicativo é um conjunto de situações e conceitos que não podem ser analisados separadamente. Assim, torna-se importante um estudo minucioso dos campos conceituais e não somente dos conceitos e das situações.

Sob o ponto de vista situacional, o campo conceitual multiplicativo abrange um número maior de situações que necessitam ser elucidadas e analisadas com cuidado, a fim de facilitar a hierarquia das competências possíveis desenvolvidas pelos estudantes, dentro e fora da escola. O fato de o aluno resolver algumas operações de multiplicação não representa quase nada, pois isso é apenas a ponta de um *iceberg* conceitual. Há muito mais a se fazer em sala de aula. A escola superestima o conhecimento explícito e despreza o conhecimento implícito (Vergnaud, 1988).

Prática e teoria são lados de uma mesma moeda e a solução de problemas é a fonte e o critério do conhecimento apropriado.

Baseado nas leituras de Vergnaud (1998), sobretudo aquelas relacionadas ao Campo Conceitual Multiplicativo, que optamos por trabalhar os conceitos de número fracionário e suas representações baseando-se em uma situação-problema contextualizada e que tenha significado para a criança. Essa teoria está presente em nosso trabalho nos aspectos dos teoremas em ação, quando das resoluções de problemas por parte dos alunos e das representações no processo de contextualização matemático.

2.2.2. Nunes & Bryant

Iniciamos o estudo desses autores baseados nas implicações do ensino da Matemática em uma sociedade multicultural. Nunes (1996) relata que somente algumas das práticas culturais a que somos expostos são tratadas como dignas de conhecermos no sistema escolar: somente considerada como matemática, quando apresentadas pelos professores nas aulas, durante o processo de socialização de significados e transmissão do sistema de signos.

Para esclarecer o sistema de signos, Nunes (1997) refere-se a Lúria (1979), para quem todas as funções mentais são mediadas por sistemas de signos . Sem tal mediação, nós nos restringiríamos basicamente àquilo que nosso organismo é capaz de realizar. Mas, há inúmeras ações que realizamos todos os dias que só podem ser feitas com o auxilio de ferramentas físicas e mentais. Estas ações estão no fato de que elas ultrapassam nossas capacidades orgânicas e não mais nos impressionam. Devemos observar que não somos nós que fazemos tudo, pois boa parte do trabalho mecânico, braçal, repetitivo é realizado pelas máquinas. É a ferramenta e não a pessoa.

> *"Uma das dificuldades de usar técnicas matemáticas como ferramentas de pensamento parte da relação entre o domínio de procedimentos gerais e seu uso em situações específicas. Dominar um procedimento geral freqüentemente não nos diz quando o procedimento é uma boa escolha para resolver um problema. Temos que entender a situação-problema a fim de pensar matematicamente sobre ela"* (Nunes, 1997, p.30).

Nunes (1992) refere-se que a maioria das crianças de 7 a 8 anos, em muitas culturas, pode facilmente contar de 1 a 1.000. Esta maravilhosa realização é somente possível, porque nós contamos com um sistema que nos permite generalizar mais do que, simplesmente, memorizar as palavras numa ordem fixa. Visto que a estrutura da contagem oral é entendida, o sujeito produz modelos de contagem que ele nunca ouviu. Neste caso, a estrutura do sistema permite ao usuário ir além das limitações de sua memória natural. Contar não é uma ação em si, mas precisamente uma ferramenta para a resolução de problemas. Quando usamos a contagem como ferramenta para resolver um problema, nós decidimos que sentido dar a ela. Entretanto o sentido cultural do desenvolvimento das ferramentas não é óbvio, pois ele é culturalmente construído e socialmente transmitido (Nunes, 1992).

Uma segunda razão apresentada por Nunes (1992) explica por que nós precisamos da idéia de ações mediadas para entender que o ensino da

Matemática é aquele em que os sistemas de signos permitem ao sujeito também construir as atividades em diferentes caminhos significativos. Contar até mil não é uma tarefa muito difícil em nosso sistema, mas, de fato, podemos contar indefinidamente.

Um terceiro aspecto da noção de ações mediadas é que em função do uso dos mediadores não serem óbvios, eles precisam ser entendidos no contexto das práticas culturais em que são usados. Crianças podem trabalhar com diferentes ferramentas para mediar suas atividades de resolução de problemas; em outras palavras, o mesmo conceito pode ser representado de distintas formas.

Assim, as representações oferecidas para crianças em situações-problema têm um impacto sobre como elas podem resolver bem os problemas. Crianças mais velhas parecem trabalhar melhor com representações de valores estendidos do que com as representações compactadas ao resolver problemas.

Se refletirmos sobre alguns exemplos da representação matemática, está claro que a representação compactada é, freqüentemente, usada mesmo sem nossa consciência dessa compreensão. O valor posicional, por exemplo, usa a representação compactada: em vez de escrevermos 100+20+3, escrevemos 123. Mas as crianças produzem uma representação estendida completa (100203 para 123) ou uma representação parcial (10023 para 123) antes de produzir as representações compactadas (Nunes & Bryant,1986; Seron & Fayol, 1994; Silva, 1993).

Outros exemplos de representações compactadas são: a+a+a pode ser compactada para 3a; a.a.a pode ser compactada para “a” elevado ao cubo; a:b pode ser compactada para a fração a/b, representando ambas a operação e o número, simultaneamente.

Nunes (1997) conclui que as representações tornam-se os objetos sobre os quais atuamos, quando nós resolvemos problemas. As operações que executamos sobre as representações estendidas, podem ser diferentes daquelas que operamos sobre as representações compactadas.

Representações estendidas podem permitir a contagem, por exemplo, quando representações compactadas requerem outras operações. Embora o problema possa ser o mesmo, por intermédio dos meios da resolução de problemas, o tipo de raciocínio requerido pode diferir, quando diferentes significados da representação são avaliados no meio. Quando se tem somente um conjunto incompleto de objetos para representar uma situação, haverá uma diferença no raciocínio das crianças: com conjuntos completos de materiais, a situação toda pode ser reordenada quando os problemas são resolvidos, visto que com materiais parciais as crianças necessitam desenvolver um esquema para a situação e, então, operar por meio do esquema. Conjuntos incompletos de materiais podem ser uma forma efetiva de provocar a compressão da representação: isto parece ser o caso em problemas de adição com um adendo invisível e nos problemas de multiplicação onde apenas um subconjunto de materiais é fornecido às crianças. As diferentes representações mudam os meios pelos quais as crianças resolvem os problemas. O mesmo sistema de signos pode ter uma diferença, dependendo da prática cultural a que estão envolvidas.

Segundo Nunes (1996), a solução de que a matemática do cotidiano mantenha-se fora da escola por não oferecer uma base sólida para a aprendizagem, não tem sido apoiada, como mostra o trabalho do Instituto Freudenthal dos Países Baixos. Autores como Lamon (1994) têm-se mostrado adeptos ao fato de que a matemática do dia-a-dia seja um bom ponto de partida para aprender as frações. Torna-se importante ao professor conhecer uma variedade de diferentes práticas matemáticas e de distintos grupos sociais. Essas práticas podem oferecer uma visão mais diversificada de esquemas de raciocínio que não são utilizados, muitas vezes, pelos próprios alunos. Há a probabilidade de flexibilizar o raciocínio, assim, criar uma variedade ainda maior de esquemas de raciocínio que poderiam se unir claramente com os signos matemáticos. No entanto, esses aspectos não poderiam se desenvolver num currículo linear.

Os trabalhos de Nunes & Bryant, por nós analisados, possibilitaram uma compreensão maior entre os esquemas usados pelos alunos e as conexões com os esquemas do dia-a-dia deles. Empregamos esses referenciais para propor uma seqüência de ensino que valorize os aspectos mais significativos da Matemática à criança.

2.2. Revisão de literatura

Spinillo

Os trabalhos de Spinillo (1994; 1995) caracterizam-se pela abordagem da proporção, com crianças em idade pré-escolar e escolar. Estudos sobre o conhecimento espontâneo observado pela autora, com crianças desde os seis anos de idade, demonstram a capacidade das crianças em transferir a aprendizagem de uma dada situação para outra, ampliando e solidificando o conhecimento informal; e as experiências do cotidiano interferem e desempenham um papel ativo na construção de novos conhecimentos, bem como os conceitos formalmente transmitidos.

Spinillo (1995) esclarece que diversos estudos demonstram que crianças entre 6 e 8 anos são capazes de realizar julgamentos proporcionais, beneficiar-se de treinamento envolvendo os conceitos de proporção e de aprender em proporção baseados em estimativas e experiências perceptuais desenvolvidas em sala de aula. Nos estudos conduzidos por Spinillo e Bryant, verificou-se, por exemplo, que nas tarefas não-numéricas que envolvem relações parte-parte (razão) em lugar de relações parte-todo (fração), para relações de segunda-ordem, as crianças usavam o referencial "metade" como estratégia em seus julgamentos para decidir acerca das equivalências ou não-equivalências entre as razões apresentadas. Comentam que as tarefas que requerem o estabelecimento da relação parte-todo são mais difíceis de compreender do que as parte-parte.

Analisando o conceito de probabilidade, Spinillo (1995) apresenta dois tipos de paradigmas: o procedimento de escolha e o da metodologia de medida funcional. O primeiro aponta para o insucesso da probabilidade no caso de crianças operacionais concretas que não consideram o denominador das frações em seus julgamentos, observando apenas o numerador. No segundo caso, quando a criança concebe os dois componentes em seus julgamentos, diz-se que ela integra a informação, neste caso, a criança é capaz de considerar mais de um aspecto relevante em uma dada situação.

Ao considerar as alternativas educacionais, Spinillo (1993) enfatiza para o caso de proporção que as comparações qualitativas do tipo 'maior/menor' e 'igual a' podem ser conduzidas em sala de aula com materiais diversos (quantidades contínuas ou discretas). Desta forma, os conceitos matemáticos são adquiridos com base na reflexão das diversas situações a que as crianças são submetidas. Torna-se interessante que o professor explore as justificativas, os critérios e as estratégias a serem adotados por seus alunos. A autora apresenta ainda uma descrição sobre a continuidade ou descontinuidade no processo de ensino-aprendizagem para a aquisição de um conceito.

> *"Se as crianças desde cedo possuem noções sobre proporção, por que então, apresentam tanta dificuldade na aprendizagem deste conceito? Uma possível explicação para isto é que a ruptura entre o conhecimento antigo e o novo é bastante acentuada. A escola parece ter dificuldades em lidar com a tensão entre continuidade e descontinuidade. O ensino tem se caracterizado ou por uma continuidade acentuada, em que o conhecimento novo assemelha-se de tal forma ao antigo que nada acrescenta em termos cognitivos; ou se caracteriza por uma descontinuidade acentuada, em que o conhecimento novo está tão distante do antigo que não é possível fazer uma ponte conceitual significativa entre eles. Esta tensão entre continuidade e descontinuidade precisa ser melhor considerada nas atividades matemáticas desenvolvidas em sala de aula, não apenas no que se refere ao conceito de proporção, mas em relação ao ensino de outros conceitos matemáticos"* (Spinillo, 1994, p.113).

Com relação ao processo de divisão, vale salientar que as crianças procedem usando o princípio de correspondência um a um ao lidar com diferentes unidades envolvidas. No entanto, ao introduzir a divisão, a escola não tem atentado para a existência dessas habilidades, restringindo a instrução ao uso de algoritmos e ao aprendizado do simbolismo convencional da Matemática. Concordamos com a autora que, para ampliar um campo conceitual, faz-se necessário um trabalho mais amplo por parte dos professores, procurando abarcar as noções matemáticas cotidianas e a Matemática escolar.

Este estudo foi importante para nosso trabalho, visto que nossa seqüência privilegia os aspectos da matemática cotidiana, evitando o formalismo na iniciação de um novo assunto, além da discussão sobre o aspecto perceptivo da criança com relação à “metade” e ao conhecimento espontâneo das crianças.

Silva

O trabalho apresentado por Silva (1997), objetivou perceber as diferenças de tratamento entre as situações que envolvem o conceito de fração nas concepções parte-todo, medida e quociente, a fim de que os professores das séries iniciais reflitam e possam dar significados a este conhecimento, proporcionou-nos uma pista para que estudássemos mais de perto uma 3ª série do Ensino Fundamental, sobre a formação do conceito de número fracionário, de forma a ampliar o universo desta pesquisa.

A autora constatou que, em relação aos aspectos didáticos, pode-se observar: na concepção dos professores ao associar uma fração a uma figura, esta deveria estar, necessariamente, dividida em partes iguais, considerando a área e a forma destas partes. Esta necessidade estabeleceu-se pelo uso da dupla contagem das partes na identificação da fração, e por outro lado, esta concepção conduz ao que chamou de discretização do contínuo, tendo em vista a referência do inteiro inicial ser substituído pelo número de partes conseguidas, após a divisão. Também foi observada a dificuldade dos professores perceberem o desenho e a divisão de figuras como suportes para a solução de algumas situações, descritas no trabalho, em que as figuras aparecem previamente divididas. Houve dificuldades em perceber as várias maneiras com que se pode dividir mais do que um inteiro ao mesmo tempo. E o fator da medição, cuja falta de entendimento representou dificuldades com unidades não usuais. Apresentou também uma tendência ao uso de algoritmos para as operações de adição e subtração, diferente da proposta trabalhada em classe. Independente do contexto, apresentaram resultados de divisões com uso de decimais, apesar da insistente necessidade de conversão de uma forma para a outra.

Com relação aos obstáculos de origem epistemológica, a autora constatou que o conhecimento dos números naturais conduz à crença de que somar e subtrair frações seguem o raciocínio análogo dos naturais, ou seja, somar os numeradores e somar os denominadores. O uso constante de nosso sistema métrico representado exclusivamente com decimais dificultou a percepção das representações fracionárias.

Como os professores demonstraram dificuldades com relação às medições, tornou-se necessária a aplicação de uma atividade extraclasse visando ao conceito de medida e à noção de unidade de medida. Foram observados alguns esboços na tentativa de entender o processo usado pelas crianças, a autora complementa que as crianças têm condições de aprender tal conteúdo, se o professor trabalhar a concepção quociente, aproveitando suas concepções espontâneas.

> *"O aluno não é colocado em uma situação de problema de divisão, de distribuição ou de medição, segue o modelo parte-todo, que historicamente foi um dos que permitiu o surgimento das frações, mas não se refere ao "tamanho" (área) nem à forma dessas partes*" (Silva, 1997, p. 41).

Silva (1997) ressalta que o estudo ideal para introduzir o conceito de fração deveria ser iniciado pelas concepções: quociente, parte-todo e medida, nessa ordem. Mas, a inversão ocorrida em seu trabalho deve-se ao fato de que os professores apresentaram concepções errôneas da concepção parte-todo.

Esse trabalho nos foi de grande valia, pois com base nele elaboramos uma seqüência de ensino que contemplasse a idéia da autora em iniciar o estudo das frações como quociente. Em função do curto espaço de tempo que teríamos para aplicar nossa seqüência, optamos por suprimir o item: medida. Trabalhamos as frações somente como quociente e parte-todo.

Correa

Tivemos acesso somente a um dos trabalhos da autora, em que ela investigou o entendimento intuitivo que crianças entre 5 e 7 anos de idade têm da divisão partitiva, envolvendo quantidades contínuas em tarefas nas quais tenham de estimar o valor relativo dos quocientes, em vez de calcular seu valor absoluto. Pode ser observado um progressivo desenvolvimento com a idade das habilidades das crianças em lidar com a relação de ordem inversa entre divisor e quociente. Os resultados indicaram que a experiência ao estabelecer comparações entre partilhas idênticas precede e parece constituir experiência fundamental à criança para a compreensão das relações entre os termos envolvidos na operação de divisão, especialmente no julgamento das relações de covariação inversa.

Em comparação, dados provenientes de estudos anteriores (Correa, 1995; Correa et al., 1998), mostram que 30% das crianças de 5 anos, 55% das de 6 anos e 85% das crianças de 7 anos tiveram atuação considerada acima dos níveis de chance, sendo mais difícil ser efetuado com quantidades contínuas do que com quantidades discretas. Os resultados obtidos, no presente estudo, foram somados às evidências empíricas obtidas e que permitem o delineamento de um quadro teórico acerca do desenvolvimento inicial da habilidade da criança em estabelecer comparações e fazer julgamentos relativos acerca do processo de divisão. Observou-se, também, um aumento, de acordo com a idade, da porcentagem de justificativas, de acordo com a idade, que faz menção a fatores que são matematicamente relevantes à solução do problema e a maior parte das crianças que consegue, efetivamente, resolver as tarefas, fornece também explicação verbal apropriada para sua solução.

Nos dois estudos, realizados anteriormente com quantidades discretas (Correa, 1995; Correa [et al.], 1998), as tarefas que envolvem o julgamento de partilhas idênticas entre os grupos são resolvidas mais facilmente do que as tarefas, nas quais as comparações entre os grupos envolvam uma relação de ordem inversa entre divisor e quociente. A experiência da criança em repartir e o uso do esquema de correspondência como ferramentas básicas e iniciais para o estabelecimento de comparações, gera inferências acerca das quantidades envolvidas em situações de divisão. Entretanto as exigências impostas pelas situações de repartir e dividir não são idênticas em termos cognitivos. As situações de repartir que a criança encontra em sua vida diária podem ser resolvidas baseadas em procedimentos aditivos por meio do uso da correspondência termo a termo, e podem estabelecer a equivalência entre as quotas a serem dadas a cada participante, adicionando ou retirando quantidades. No entanto, a divisão, como uma operação multiplicativa, vai requerer o entendimento por parte das crianças das relações entre dividendo e divisor na determinação do valor do quociente.

Os resultados deste trabalho, somados aos de outros estudos, indicam a importância dos esquemas de correspondência (Cowan & Biddle, 1989; Frydman & Bryant, 1988) e do uso de estimativas baseadas no julgamento dos valores relativos de quantidades (Correa et al., 1998; Correa, Spinillo et al., 1998; Singer, Kohn & Resnick, 1997; Spinillo & Bryant, 1991; Streefland,1982) como ferramentas cognitivas poderosas na construção das representações iniciais de conceitos lógico-matemáticos e, em particular, do conceito de divisão.

> *"Investigações acerca da relação entre a experiência quotidiana da criança ao partilhar e o seu conhecimento intuitivo de divisão (Correa, 1995; Correa & Bryant, 1994; Correa et al., 1998) indicam que esta experiência, embora necessária, não é suficiente para que a criança entenda as relações estabelecidas entre os termos envolvidos em situações de divisão"* (Correa, 2000, p. 4).

Este trabalho contribuiu para nos esclarecer sobre as questões intuitivas das crianças, com relação aos processos partitivos da divisão com quantidades contínuas e discretas. Como iniciaremos nossa seqüência abordando as frações como quociente, necessitamos compreender melhor para atuarmos de forma eficaz. Os estudos de Correa (2000) forneceram elementos essenciais para nosso ponto de partida.

Bianchini

Em seu trabalho, Bianchini (2001) estudou as questões de aprendizagem relacionadas à aquisição do conceito de número racional na forma decimal com alunos de 3ª série do Ensino Fundamental. Seu trabalho foi baseado nas teorias de Brousseau, com relação ao contrato didático, e de Duval, com relação aos registros de representação. Trata-se de uma pesquisa desenvolvida em sala de aula, numa abordagem qualitativa, na qual a pesquisadora acompanhou o desenvolvimento dos alunos durante uma seqüência de ensino.

Normalmente, encontra-se a apresentação dos racionais na forma fracionária, para que posteriormente seja trabalhado na forma decimal. Os estudos aqui relatados demonstraram que as crianças ainda apresentavam dificuldades na forma fracionária. A autora refere-se que na relação parte-todo, a noção de número racional pode expressar a síntese de duas idéias matemáticas, a medida e a quantidade (fração), nesse sentido os números racionais precisam ser compreendidos em suas representações.

O número racional na forma decimal foi apresentado neste trabalho com auxílio da representação figural, da fração decimal e de sua localização na reta numérica e com o uso da linguagem escrita. Procurou-se transitar por todas as representações, em todas as atividades.

Dentre as dificuldades encontradas pela autora, citaremos algumas: a não compreensão do número racional, em relação à medida (parte-todo) dividir o todo em partes iguais – a unidade em muitos casos não ficou clara aos alunos, gerando equívocos na representação figural; outro tipo de erro encontrado foi na localização de valores decimais na reta numérica, já que uma das duplas de crianças analisadas localizou corretamente 1,9, mas escreveu 1/9; outra situação que vale ilustrar foi quando a criança ao invés de representar 9,1 observou como dois naturais e escreveu o 9 à esquerda e o 1 à direita. Na observação de outro registro, ao pedir ao aluno que desenhasse 19/10, ele iniciou desenhando 19 retângulos e pintando 10, em lugar de desenhar dois retângulos divididos em 10 partes iguais, pintando num dos retângulos as dez partes e no outro apenas nove partes das dez existentes. Levantou-se a hipótese de que os alunos atrapalham-se com a representação na régua graduada.

Dentre as dificuldades observadas, a linguagem foi uma delas. As crianças apresentaram dificuldades tanto na compreensão do enunciado de algumas questões como nos momentos em que tinham de responder questões, utilizando a linguagem natural escrita. Às vezes, não ficava claro o que desejavam expressar, usando, por exemplo, a palavra “tri-metade”.

Apresentamos alguns relatos das reflexões da autora. Um deles refere-se à conservação de quantidade como sendo um elemento básico para a compreensão do conceito de fração, visto que o conceito pressupõe a existência de uma totalidade divisível. E cita: “as crianças menores têm dificuldade de pensar, ao mesmo tempo, na mudança do número de partes e na variação do tamanho dessas partes, de modo a assegurar a inalterabilidade do todo”. Finaliza referindo-se que a iniciação das frações é feita por meio de áreas de figuras geométricas regulares, sendo necessário observar se a criança já possui o desenvolvimento de conservação de área em sua estrutura cognitiva. Conclui afirmando que, muitas vezes, as crianças são introduzidas prematura e inadequadamente nos conceitos de fração, e isso poderá acarretar dificuldades de aprendizagem das operações com frações.

Em uma das atividades de sua pesquisa, Bianchini observou que uma das duplas respondeu “um décimo” indicando 10/1, trocando assim o numerador pelo denominador; em outras situações, como as orais, quando a professora fazia oralmente a pergunta à classe, os alunos respondiam corretamente. Apesar das interrogações, ficou claro que ao discutir com os alunos a questão, estava-se propiciando um momento de tomada de consciência, além da reflexão sobre algo anteriormente pensado. Em situações similares, com uso de decimais, esta descrição também ocorreu.

De forma geral, a avaliação da autora frente ao passos galgados durante sua seqüência didática apresentou elementos diversos e importantes para o dia-a-dia da sala de aula. Segundo Bianchini (2001), os erros tão massacrados pelo ensino tradicional podem ser compreendidos como um processo de aprendizagem que não se pode evitar, mas que se deve trabalhar, especificamente, para que sejam superados pelos alunos. E conclui que houve uma evolução conceitual, tendo em vista que os alunos não conheciam o assunto trabalhado.

Escolhemos este trabalho para incorporar aos nossos estudos tendo em vista as relações intrínsecas entre os decimais e as frações. As observações com relação às representações das frações presentes, neste trabalho, auxiliaram-nos em nossas análises sob o foco das representações aqui encontradas.

Kerslake

O livro *“Fractions: Children’s Strategies and Errors”* é resultado de um projeto de pesquisa sobre as estratégias e erros da Matemática secundária (que corresponde, no Brasil, a segunda fase do ensino fundamental, ou 5ª a 8ª séries), no qual foram investigados com profundidade alguns dos problemas comumente trabalhados com alunos e examinados no que o conteúdo sobre as frações poderia ser melhorado, especialmente, nos módulos de aprendizagem. Os resultados trouxeram grande contribuição tanto aos professores como aos pesquisadores no processo de aprendizagem Matemática e interação entre o que é ensinado e o que é aprendido. Os erros investigados projetaram-se sobre as seguintes áreas: razão, álgebra, gráficos, medidas e frações. As crianças tinham idade entre 11 e 15 anos, no início da amostra, restringindo-se para 13 e 14 anos no final. Os resultados obtidos foram coletados durante seis anos de pesquisa, os testes aplicados em 10.000 crianças, em várias escolas, na Inglaterra.

Os resultados contidos nesta pesquisa vão além das representações e do conceito de número fracionário, assim focalizamos apenas os aspectos que julgamos necessário para a compreensão de nosso trabalho.

No primeiro estágio do capítulo II, o autor apresenta as entrevistas realizadas, desde as estruturas até os resultados das fases e as conclusões. Na busca para encontrar novas informações acerca dos caminhos, pelos quais as crianças pensam sobre as frações, particularmente, a investigação favoreceu três aspectos que emergiram dos resultados obtidos.

1. observar se as crianças eram capazes de pensar as frações como números ou se elas pensavam que a palavra “número” implicaria somente em “números inteiros”;

2. descobrir que modelos de frações as crianças dispunham;
3. determinar como as crianças visualizavam a idéia de equivalência.

Uma das questões do teste pedia aos alunos a resolução de 3 : 5 ou 3/5 dentro de um contexto e sem o contexto de uma situação-problema. Quando o algoritmo foi dado com o contexto: “Três barras de chocolate foram divididas igualmente entre cinco crianças. Quanto cada criança recebeu?”, os acertos das crianças com 12 e 13 anos aproximaram-se de 65%. Por outro lado, quando apresentaram a questão 3:5 sem o contexto, os resultados caíram significativamente. Reproduzimos aqui a Tabela:

Respostas / Idade	3/5 ou 0,6	1 inteiro e 2/5	1 e sobra 2	5/3 ou 1 e 2/3
12 anos	35,0%	5,3%	18,3%	3,3%
13 anos	31,0%	9,4%	17,5%	8,7%

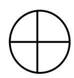
Tabela 2.1: Porcentuais encontrados no trabalho de Kerslake (1986)

A autora analisa que um número relativamente grande de crianças interpreta 3:5 como 5:3. As respostas das colunas dois e três também são relevantes e sugerem que as crianças também dividem um número grande por outro menor.

Nas observações das frações e números inteiros, notou-se que quando se perguntava aos alunos “Quantas frações se escondem entre ¼ e ½ ?” Eles respondiam ‘uma’ referindo-se a 1/3. Dessa forma, pode-se concluir que os alunos observam apenas os denominadores das frações e não se referem ao valor médio existente entre as duas frações.

Foi observado que o uso de diagrama, freqüentemente, ajuda na resolução de um problema. Durante as entrevistas, algumas crianças necessitaram de diagramas para interpretar uma palavra do problema. A relação do diagrama para a fração, que é representada, é um ponto interessante e possibilita que, enquanto o diagrama pode ajudar a entender certos aspectos das frações, outros aspectos podem ser mais difíceis. Por exemplo, o aspecto ‘parte de um todo’ da fração é ilustrado por um sombreado do círculo, enquanto a noção de fração como um número não o é. Este estudo incluiu pesquisas do uso de diagramas para a compreensão das frações. Outro fator importante do modelo parte-todo, com uso de diagramas, está no fato de que com as ilustrações de, por exemplo 2/3 + 3/4, a imagem dessas representações não ajudam na visualização imediata, sendo necessárias outras divisões na mesma figura para sua compreensão. A autora cita Kieren (1976) argumentando que o conceito de número racional é diferente de número natural, uma vez que eles não fazem parte do meio natural das crianças e as diversas interpretações do número racional resultam em uma variedade de experiências necessárias. Assim, conclui que o entendimento dos racionais como elementos de um campo quociente requer a oportunidade de experiências dos aspectos partitivos da divisão. Há necessidade de estender o modelo “parte-todo” e incluir os aspectos quociente das frações, conclui a autora, finalizando que as frações representadas como pontos sobre uma linha numerada pode ser discutido.

As crianças ilustram o fato de que somente o modelo produzido era de “parte de um inteiro”, por intermédio de forte resposta “parte de um número”, sugerindo que as escolhas das crianças apresentam uma conexão entre as frações e os números. Elas preferem dizer “um número em cima e outro número”, dando a aparência de que reorganizam as frações, quando escrevem, não dando qualquer evidência se entendem o que representam.

Em uma das questões propostas dizia: “Aqui estão três doces. Há quatro crianças que desejam a sua parte. Como você poderia fazer?”. As crianças dividem os três doces para as quatro pessoas, mas não se preocupam se as partes são iguais ou não. Na intenção de observar o processo de divisão realizado pela criança avaliou-se que elas não fazem a conexão entre 3:4 e ¾. Somente uma das crianças teve mais dificuldades e traçou três retas sobre as três bolas (doces); os demais desenharam uma cruz sobre cada bola. Quando perguntaram para a criança que traçou três retas sobre as três bolas se todos os pedaços tinham a mesma porção, ela respondeu: “O desenho não está muito correto”. Ela não pensou na maneira como fazer, mas quando se lembrou do modelo , realizou a divisão de forma melhor que a anterior. Um desenho foi criado por 11 crianças representando os três doces e quatro crianças (desenhadas), repartiram pedaço por pedaço de cada doce dividido em quatro partes para os desenhos das pessoas.

Outro problema aplicado descrevia um conjunto discreto. “Como você poderia encontrar ¾ da coleção de moedas?”. Foi apresentado um quadrado com o desenho de 12 moedas. A mesma questão foi aplicada em crianças de nível escolar inferior. Todos os alunos participantes desta pesquisa resolveram, segundo a autora, sem nenhuma dificuldade, quando as moedas estão delimitadas por um diagrama.

Em uma das comparações com frações do tipo ¾ e 3/5 Kerslake (1986), observando dois grupos, um com 23 crianças e outro com 14, encontrou porcentuais distintos para quantidades discretas, quando se apresenta o diagrama e o erro que elas cometem quando as quantidades estão soltas. As crianças relacionam as quantidades pintadas com as não pintadas e desprezam o todo, realizando a relação parte-parte. Representando apenas parte de sua Tabela, observamos os porcentuais das crianças que acreditam que o desenho dado representa a fração ¾ ou 3/5. Temos:

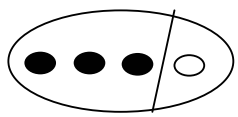
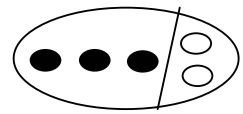
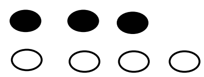
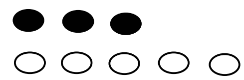
Fração ¾ modelo	Porcentuais com 23 alunos	Fração 3/5 modelo	Porcentuais com 14 alunos
	62,5%		71,4
	34,8%		14,3

Tabela 2.2 – Representação parcial dos modelos encontrados por Kerslake (1986, p. 30)

Uma das crianças responde que 3 para 5 é uma divisão e não fração.

Uma outra etapa da pesquisa observou as frações equivalentes, foram apresentados aos alunos três cartões com desenhos que representavam frações equivalentes do tipo: 2/3 e 4/6; ¼ e 2/8 (com traços verticais); e ¼ e 2/8 novamente, com traços na horizontal. A pergunta era: “O que nós descobrimos sobre estes cartões?” Eles observaram os diagramas e familiarizaram-se com os desenhos apresentados. Dois deles disseram ser iguais e um que havia pedaços menores. Após as respostas, a autora propõe outro problema envolvendo dinheiro e questiona se ¼ daquele valor é equivalente a 5/20 do mesmo valor apresentado inicialmente. Das 17 respostas, 13 dizem ser o mesmo valor, enquanto os demais afirmam não ser o mesmo e ainda respondem que 5/20 é maior.

Embora as aplicações do pré-teste e pós-teste abarcassem várias classes e escolas, seus resultados são significativos e indicam certas áreas de dificuldade relacionadas às frações. Os resultados do primeiro estágio sugerem uma hipótese geral de que os problemas das crianças com as frações estão relacionados aos restritos aspectos da fração. Em particular, as crianças descobrem a dificuldade em pensar que a fração não é uma parte do inteiro. Isto mostra, provavelmente, que esta identificação da fração como parte de uma figura cria esta dificuldade para compor qualquer senso de adição ou de colocar a fração sobre uma reta numérica. Similarmente, por meio de diferentes diagramas poderemos identificar as frações equivalentes, mas não necessariamente contribuir com os algoritmos na descoberta das frações equivalentes de uma dada fração qualquer.

A pesquisa revelou que, enquanto a interpretação da fração a/b como uma região geométrica, que está dividida em ‘b’ partes da qual ‘a’ é tomada era aceita por todas as crianças que participaram da pesquisa. Os resultados confirmam as escolhas nas entrevistas ao demonstrar que as crianças não tinham qualquer dificuldade em realizar a conexão entre a fração ¾ ou 3/5 e um círculo ou quadrado, no qual três quartos ou três quintos eram preenchidos com lápis colorido. A onipresença do modelo “parte-todo” é sempre refletida nos cadernos examinados; quase todos são observados conforme este modelo. Similarmente, os professores entrevistados também afirmam fazer uso do mesmo modelo, o que demonstra a familiaridade das crianças com tal modelo. Essas análises trazem no bojo das discussões, segundo a autora, os resultados obtidos por Hart (1981).

Segundo Kerslake (1986), o aspecto da divisão nas frações não era familiar nem aceito facilmente. Os professores também afirmaram não relacionarem, por exemplo, 3/5 com 3:5, assim, as conexões eram também rejeitadas pelas crianças. A pesquisa possibilitou a discussão entre as rotas alternativas para a aprendizagem das frações. A questão do numerador ser sempre menor que o denominador, segundo as observações encontradas, gerava nos alunos a idéia de que não se pode dividir, por exemplo, 4 por 3 (4:3), pois quatro é maior que três, como os alunos falavam. Tinham a convicção de que, na divisão, o maior número é sempre divido pelo menor. Os registro produzidos, muitas vezes, apresentam o contrário dessa idéia, sobretudo com o uso de calculadoras para observar que números maiores podem ser divididos por outros menores e resolver tais conflitos.

Este estudo contribuiu muito em nossa análise e conclusão, pois os aspectos aqui revelados aproximaram-se dos nossos. Os erros detectados pelo autor facilitaram a compreensão e análise dos erros que nossos alunos cometeram durante os testes. Embora o estudo tenha abrangido uma faixa etária maior e diferente da nossa, observamos que muitos erros são semelhantes, e iniciam-se antes dos 11 ou 12 anos.

3. NÚMERO FRACIONÁRIO: ONTEM E HOJE

INTRODUÇÃO

Este capítulo tem por objetivo estudar os números fracionários, do ponto de vista histórico, observando alguns relatos da humanidade para sua construção e, do ponto de vista atual, descrevendo sobre o material utilizado nas escolas, por meio da análise de quatro coleções de livros didáticos.

Primeiramente, vamos relatar os aspectos mais significativos do conceito de número fracionário e sua representação utilizada pela humanidade no processo de acumulação cultural. Os relatos históricos nos fornecem uma visão geral dos fatos relacionados à origem e ao desenvolvimento das frações, bem como nos permitem relacionar os fatores de sua criação na formação do conceito desses números.

Na etapa seguinte, passamos a observar um dos instrumentos mais utilizados nas escolas e disponíveis para o professor: os livros didáticos. Este instrumento nos possibilita compreender uma das principais fontes de pesquisa dos professores e do tipo de material empregado em sala de aula.

Acreditamos que, após este estudo comparativo do presente e do passado, estaremos em melhores condições de avaliar o ensino dos números fracionários e propor uma seqüência de ensino que possibilite às crianças uma compreensão maior e melhor deste tema.

3.1 ONTEM: A HISTÓRIA

Iniciamos nosso breve resumo histórico com a comparação da Matemática a uma árvore, descrita por Boyer:

> *“A matemática tem sido freqüentemente comparada a uma árvore, pois cresce numa estrutura acima da terra que se espalha e ramifica sempre mais, ao passo que ao mesmo tempo suas raízes cada vez mais se aprofundam e alargam, em busca de fundamentos sólidos”* (Boyer, 1974, p. 435).

Muitos concordam com esta citação. Mas gostaríamos, a exemplo de Lima (1997), de ir mais longe nesta metáfora proposta por Boyer. É preciso ver quem planta esta árvore e quem a trata é o homem, que a terra de onde a árvore retira seu líquido vital é a sociedade humana e que a folhagem dos ramos reage ao oxigênio da atmosfera da inteligência, à luz da criatividade da nossa espécie. Não se trata apenas dos gênios, mas sim, de toda a humanidade.

Uma árvore é muito pouco para servir de imagem ao desenvolvimento da Matemática. É melhor vê-la como uma imensa floresta, na qual milhares de árvores vão se formando, com seus ramos e raízes cruzando-se e confundindo-se; e as sementes lançadas por uma árvore são recolhidas e plantadas pela mão humana, gerando novas árvores. Nessa imensa floresta, destacamos uma grande árvore: a teoria dos números.

Voltar ao passado significa ampliar os horizontes que se erguem sobre os galhos das árvores. Nesse sentido, apresentamos um pouco dos relatos históricos sobre a evolução e criação das frações pelo homem.

Há aproximadamente 20.000 anos o homem já havia criado o fogo e ainda não havia criado o número. Vivendo em tribos nômades, encontrava na coleta sua forma de sobrevivência, limitando-se a colher o que lhe era possível conseguir. Porém as experiências e as observações diárias vão lhe mostrando os melhores caminhos, permitindo-lhe um controle cada vez maior da natureza.

O homem começa a substituir a caça e a coleta pela pecuária e a agricultura, com isso os mais diversos problemas aparecem como condição motivadora e potencializadora do desenvolvimento do trabalho humano. Fortalecendo essa idéia, citamos Boyer:

> *É claro que a matemática originalmente surgiu como parte da vida diária do homem, e se há validade no princípio biológico da 'sobrevivência do mais apto' a persistência da raça humana provavelmente tem relação com o desenvolvimento no homem de conceitos matemáticos"* (Boyer, 1974, p. 1).

Segundo Boyer, o conceito de número interior é mais antigo na matemática e sua origem perde-se em meio à pré-história. Por outro lado, a noção de fração racional surgiu relativamente tarde e, em geral, não estava relacionada de perto com os sistemas para os inteiros. O homem antigo utilizava unidades, suficientemente, pequenas para eliminar a necessidade de usar frações. Portanto, não houve um progresso ordenado de frações binárias para quinárias e para os decimais. Com o advento de culturas mais avançadas, durante a Idade do Bronze, parece ter surgido a necessidade do conceito de fração e de notação para frações.

Observando a história da Matemática, no Oriente Antigo, com a descoberta do *Papiro de Rhind* (descoberto em 1858; escrito por volta de 1650 *a. C.* por Ahmes) e do *Papiro de Moscovo* apresentando-nos a matemática egípcia, constata-se, por meio dos problemas neles contidos, que esse povo já tinha se familiarizado com as frações. Estas, porém, eram escritas de forma diferente da que utilizamos atualmente, ou seja, 1/10 era representado com 10, possibilitando, desde aquela época, a idéia de um inteiro e não de uma unidade fracionada (STRUIK, 1987).

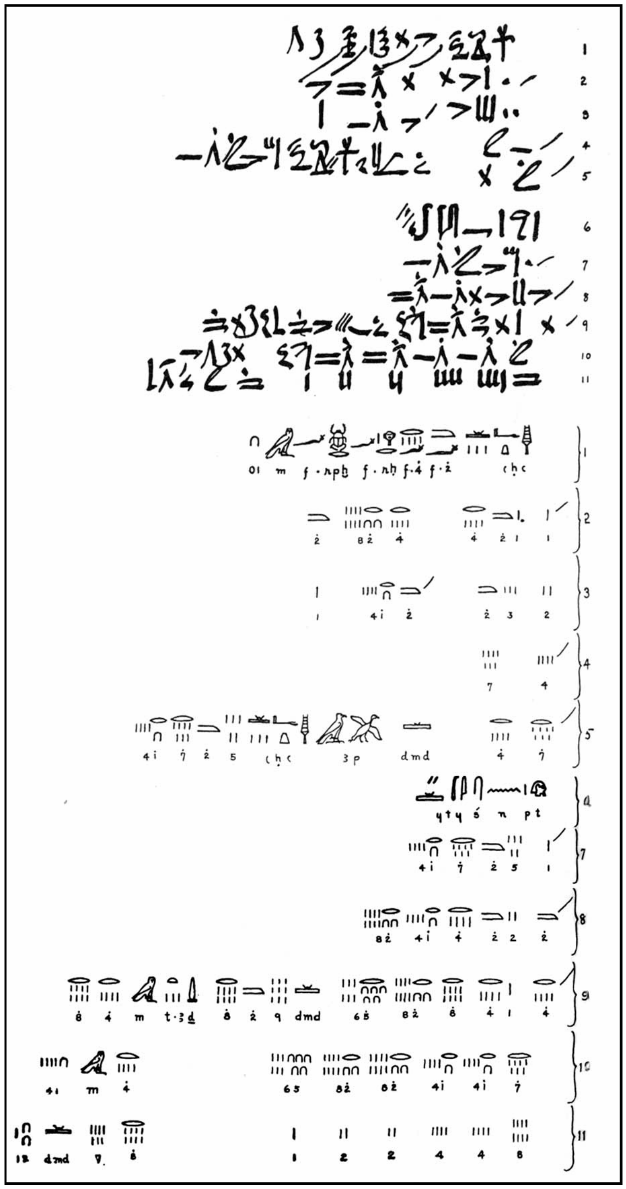


Figura 3a – Papiro de Rhind

Podemos notar que a aritmética egípcia fazia uso do calculo de frações, porém as frações eram reduzidas à soma das chamadas ‘frações unitárias’, o que significa afirmar frações de numerador 1. As únicas exceções eram ½ e 2/3, para os quais existiam símbolos especiais. O Papiro de Rhind tem uma tabela que dá as equivalências em frações unitárias para todos os números ímpares de 5 a 101, por exemplo:

$n=5 \Longrightarrow \overline{3}\ \ \overline{15}\ \ (2/5 = 1/3 + 1/15)$

n= 7 $\Longrightarrow$ $\overline{4}$ $\overline{28}$

Segundo Struik:

"O princípio subjacente a esta redução especial a frações unitárias não é claro. Este cálculo com frações deu à matemática egípcia um caráter complicado e pesado, mas, apesar destas desvantagens, a maneira de operar com frações unitárias foi praticada durante milhares de anos, não só no período grego, mas também na Idade Média" (ibid, p.53).

As frações foram conhecidas na Antigüidade, mas, na falta de numerações bem constituídas, suas notações foram durante muito tempo mal fixadas, não homogêneas e inadaptadas às aplicações práticas. Também não foram consideradas desde a sua origem como números; nem se concebia a noção de fração geral m/n, como m vezes o inverso de n. (Ifrah, 1996)

Boyer (1974) comenta que as frações 1/8, por exemplo, eram manipuladas livremente no tempo de Ahmes – 1650 d. C. – mas a fração geral parece ter sido um enigma aos egípcios. Assim, estes só concebiam as frações denominadas "unitárias" (as de denominador igual a 1) e só exprimiam as frações ordinárias por meio das somas de frações desse tipo (por exemplo: 7/12 = 1/3 + ¼).

Observamos que, com o desenvolvimento do cálculo e da aritmética, ficou claro que as frações se submetiam às mesmas regras que os inteiros e que eram, portanto, assimiláveis aos números (sendo um inteiro uma fração de denominador igual a 1). No Papiro de Rhind, podemos observar que para a resolução de um problema para achar dois terços de 1/5 procede-se ao método, como descreveremos a seguir, o que indica alguma percepção de regras gerais utilizados pelos egípcios.

“Para a decomposição de 2/5 o processo de dividir ao meio é inadequado; mas começando com um terço de 1/5 encontra-se a decomposição dada por Ahmes, 2/5 = 1/3 + 1/15. No caso de 2/7 aplica-se duas vezes a divisão por dois a 1/7 para obter o resultado 2/7 = ¼ + 1/28. A obsessão egípcia com dividir por dois e tomar a terça parte se percebe no ultimo caso da tabela 2/n para n = 101. Talvez um dos objetivos da decomposição de 1/2n fosse chegar a frações unitárias menores que 1/n” (Boyer, 1974, p. 11).

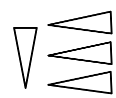
A extensão dos conceitos numéricos foi crescente, e se outrora serviam apenas para recenseamento, tornaram-se “marcas” adaptadas a inúmeros usos. De agora em diante, não só se podia comparar duas grandezas “por estimação”, mas era possível dividi-las em parcelas ou, pelo menos, supô-las divididas em partes iguais de uma grandeza da mesma espécie escolhida como padrão. Mas, apesar desse progresso, por causa de suas notações imperfeitas, os antigos não foram capazes nem de unificar a noção de fração nem de construir um sistema coerente para suas unidades de medida. (Ifrah, 1996) esclarece que:

“A notação moderna das frações ordinárias se deve aos hindus, que, devido a sua numeração decimal de posição, chegaram a simbolizar mais ou menos como nós uma fração como 34/1265: onde 34 é o numerador e 1265 é o denominador. Esta notação foi depois adotada e aperfeiçoada pelos árabes, que inventaram a famosa barra horizontal” (Ibid, p. 327).

Segundo Caraça (1998), a subdivisão da unidade se fez necessária, pois as relações do Estado para com o indivíduo impuseram-se muito cedo. A exemplo do Rei Sesóstris (que viveu, provavelmente, há perto de 4.000 anos), no Egito, às margens do Rio Nilo, que ao distribuir as terras, de igual porção, obrigava as famílias arrendatárias a pagar um certo tributo anual. Para a cobrança desse tributo, fazia-se necessária a medição do terreno ora arrendado. E, em razão da diversidade das áreas, o Estado viu-se obrigado a criar rigorosos sistemas de medição que assegurassem o cumprimento das leis referentes à produção e minimizassem as possibilidades de os interesses do Estado serem lesados. Nessa época, os chamados “estiradores de corda” realizam as medições, em especial, após as inundações do Rio Nilo. Os medidores reconheceram, naquela época, que os números inteiros eram insuficientes para exprimir bem as medidas, aproximando-se do mais real possível. Para garantir tal precisão, foi preciso subdividir a unidade em um certo número de partes iguais. Têm-se aí, frações da unidade. Podemos inferir daí o porquê dos estudos das frações estarem sempre relacionados às áreas de figuras geométricas.

Passamos agora ao sul da Mesopotâmia, cerca de 4.000 anos a.C. Assim como no Egito, também, no vale mesopotâmio havia uma civilização, freqüentemente chamada de babilônica, de alto nível. Ali os sumérios tinham construído casas e templos decorados com cerâmica e mosaicos artísticos em desenhos geométricos. Mas os escritos desse povo só tiveram progresso na leitura a partir do século XIX d.C., pois os aspectos cuneiformes (em foram de cunha) foram decifrados somente depois dos hieróglifos egípcios. (Boyer, 1974).

Para essa população, as frações foram importantes nos textos de economia relacionados ao direito dos herdeiros. Enquanto os legisladores descreviam os mecanismos particulares de distribuição de bens sem recorrer ao emprego freqüente das frações, nos documentos que mostram a prática, aparece uma grande variedade de exemplos da utilização de frações, sobretudo na distribuição de patrimônios, nos quais praticavam regras de divisão que contornavam as dificuldades aritméticas, respeitando sempre os costumes jurídicos em vigor.

Por volta da segunda metade do terceiro milênio a.C., os Babilônios e os Sumérios já utilizavam um princípio relativo para as frações; foram eles os primeiros a atribuírem uma notação racional, como hoje fazemos com as frações de horas em minutos e segundos. Assim, 1+30/60 ou 1 ½ era representado por símbolos cuneiformes: 

Essa notação, porém, podia ser interpretada também como 1 X 60 + 30, ou seja, 90. Essa ambigüidade, no entanto, era desfeita no contexto e compensada pela flexibilidade que proporcionava à confecção de tabelas para fins calculatórios. Observando esses aspectos, pode-se explicar em grande parte a superioridade dos babilônios em Matemática (Boyer, 1974).

> *"A atividade intelectual das civilizações potâmicas no Egito e Mesopotâmia tinha perdido seu calor de imaginação bem antes da era cristã; mas quando a cultura nos vales dos rios estava declinando, e o bronze cedendo lugar ao ferro na fabricação de armas, vigorosas culturas novas estavam surgindo ao longo de todo o litoral do Mediterrâneo"* (Boyer, 1974, p. 33).

Já os gregos, desde o segundo milênio a. C., apresentam nos textos matemáticos e nos documentos da prática, tais como declaração de propriedade, cálculos e registros de câmbio de moedas, taxas e realizações de arquitetura, as representações dos números desenvolvidos; podemos citar, entre outras, a base 10, para a qual se utilizavam de letras com um acento à direita para diferenciar das palavras. O mundo grego teve seu centro entre os mares Egeu e Jônio, mas a civilização helênica não estava só localizada ali. Em 600 a.C., colônias gregas podiam ser encontradas ao longo das margens do Mar Negro e Mediterrâneo; nessas regiões afastadas, um novo impulso se manifestou na matemática. Na Grécia, a palavra número era usada só para os inteiros. Uma fração não era considerada como um ente único, mas como uma razão ou relação entre inteiros. Como os egípcios, os gregos sentiam-se tentados a usar frações unitárias, com representações simples, escrevendo apenas o denominador, seguido de um acento ou sinal diacrítico. Como exemplo, 1/34 escrevia-se λδ', podendo ser confundido com 30 ¼, mas também ser esclarecido no contexto da situação (Boyer, 1974).

Para os romanos, o uso de frações aparece nos cálculos com moeda e na metrologia[1]. Cada fração tinha um nome especial e mantinha, geralmente, o denominador 12 como uma constante, provavelmente porque sua moeda de cobre ***as***, que pesava uma libra, era dividida em 12 ***unciae***. Ainda operacionalizavam com frações unitárias tal como os egípcios e os gregos.

Boyer relata que durante toda a sua longa história, Roma antiga pouco contribuiu para a ciência e a filosofia e menos ainda para a matemática, tanto durante a república como durante o império, os romanos mostraram pouca inclinação para a investigação especulativa ou lógica. Mesmo os projetos notáveis de engenharia e arquitetura relacionavam-se com os aspectos mais simples da ciência; contudo, os construtores romanos satisfaziam-se com

1. *Conhecimento dos pesos e medidas e dos sistemas de unidades de todos os povos, antigos e modernos (FERREIRA, Novo Dicionário da Língua Portuguesa. p.925).*

técnicas práticas elementares que requeriam pouco conhecimento para a grande massa de pensamento grego.

Passamos agora a alguns relatos da civilização chinesa. Um documento datado do século II a. C. deixa clara a existência de frações a partir da medida. Tais conclusões são retiradas de um outro documento escrito no século I de nossa era, tendo aquele como referência, que se tornou um clássico para os matemáticos chineses até o século XIII chamado "*Nove capítulos sobre os procedimentos matemáticos*". No século III, Lui Hui reorganiza o conteúdo dos "*Nove capítulos*" com um tratamento aritmético completo. As frações produzidas como as partes não inteiras dos resultados de divisões ocupam um lugar importante e não são definidas no início, mas, conforme vão aparecendo.

Nos relatos da China antiga encontramos os criadores do ábaco. Os chineses conheciam as operações sobre frações comuns, para as quais achavam o mínimo denominador comum. Assim como em outros contextos, representavam com analogias o numerador – que era o filho – e o denominador – que era a mãe. A ênfase sobre Yin e Yang (opostos) tornava mais fácil seguir as regras para manipular frações. Essa civilização tendia à decimalização de frações, objetivando a facilitação da manipulação. (Boyer, 1974)

As escavações arqueológicas realizadas em *Mohenjo Daro* fornecem provas de uma civilização antiga e de alta cultura na Índia durante a era das construções de pirâmides egípcias, mas não se tem documentos indianos dessa época. Só a partir do século V (d.C.), tomamos conhecimento dos trabalhos dos matemáticos indianos, por meio dos questionamentos sobre a natureza das frações. Sendo *Aryabhata* autor de um dos mais antigos textos matemáticos indianos, seu tratado de número 476 destina um capítulo às frações, apresentando as operações de adição e subtração. Sua obra é considerada uma miscelânea de coisas simples e complexas, corretas e incorretas (Boyer, 1974).

Nos matemáticos indianos, havia uma concepção única para os números inteiros e fracionários, pois os números inteiros já eram considerados como frações com a unidade no denominador e o termo *rapa-bhapa*, era usado para nomear a fração 1/1.

A matemática indiana era uma mistura de bom e ruim. A parte boa está relacionada à Brahmagupta, com a fórmula por ele proposta para a área do quadrilátero em conjunção com as fórmulas das diagonais, considerando os lados, diagonais e áreas racionais, podia se obter a área ”bruta” ou exata. Apesar das falhas, a Índia produziu muitos matemáticos até a segunda metade da Idade Média, como o até hoje conhecido Bhāskara.

Pela época em que Brahmagupta escrevia, o império Árabe tinha caído e a península passava por uma séria crise. Esta região era habitada, em geral, por nômades do deserto denominados beduínos que não sabiam ler nem escrever. Apesar de iniciado por Maomé, mesmo depois de sua morte, a expansão e domínio do vale mesopotâmico foi avassaladora. Interessante ressaltar uma lenda, na qual um soldado ao perguntar ao líder o que fazer com os livros, este ordenou queimá-los. Esse espírito guerreiro durou mais de um século. Por volta de 750 d.C., amenizam-se os espíritos de guerra. Durante o primeiro século de conquista árabe, houve confusão política e cultural. A língua árabe não era utilizada por todos e isso, provavelmente, dificultou o sistema de numeração, sem contar que os árabes inicialmente não tinham interesses intelectuais e impunham suas vontades por serem os vencedores das batalhas.

Mas para que a história não se repetisse, como os romanos sobre os gregos, os árabes mostraram-se ansiosos por absorver toda a cultura das civilizações que tinham sobrepujado.

Apossaram-se de tradições científicas tão antigas quanto variadas e resolveram assimilar todo esse saber por meio de um longo e complexo processo de tradução, o que os levou no século IX a dispor de conhecimentos matemáticos e de astronomia de diversas origens. Destacamos uma delas, proveniente do livro sagrado "Alcorão" dos mulçumanos, no qual encontramos nos versículos dedicados à divisão de heranças, o termo "parte" (guz) e a utilização da fração 2/3 e de frações do tipo 1/n, para $2 \leq n \leq 6$ e $n = 8$.

O interesse pelas frações como instrumento de cálculo foi grande na sociedade islâmica medieval, sobretudo, pela sua utilidade prática, que fez com que os matemáticos não hesitassem em reservar seções inteiras de seus livros a esses problemas.

Nos séculos XI e XII, de um lado a aritmética indo-arábica produzia um sistema de numeração e de escrita de frações, no qual o numerador era colocado sobre o denominador e, de outro, as tradições judias exprimiam as frações por intermédio de uma linguagem retórica como quantidades de partes de unidades originadas dos pesos e medidas.

Na segunda metade do século XV, a principal linha de desenvolvimento da matemática passa pelo crescimento das cidades mercantis sob a influência direta do comércio, da navegação, da astronomia e da agrimensura. A grande Era voltada às navegações e descobertas. As frações passaram a fazer parte do cotidiano das pessoas e os tipos de representação e conceitos da antiguidade foram aperfeiçoados e adaptados às soluções dos problemas da época.

Só a partir do século XVI, as frações com numeradores maiores que o inteiro aparecem, já próximas dos livros do século XIX e XX, com expressão de divisão. A notação moderna deve-se aos hindus pela sua numeração decimal de posição e aos árabes que inventaram a famosa barra horizontal, separando o numerador do denominador.

Boyer cita o *Líber abaci*, uma obra considerada não agradável ao leitor moderno, mas é interessante destacar que nela estavam presentes os problemas de transações comerciais e um complicado sistema de frações para calcular câmbios de moedas. Como ironia da história, a vantagem principal da notação posicional foi relegada aos que usavam os numerais indo-arábicos durante os primeiros mil anos de sua existência. Fibonacci tem tanta responsabilidade quanto qualquer outro, pois usou três tipos de frações – comuns, sexagesimais e unitárias – mas não frações decimais. Ainda, Fibonacci costumava colocar a parte fracionária de um número misto antes da parte inteira, em lugar de escrever 11 5/6, por exemplo, ele escrevia ⅓ ½ 11, a justaposição de frações unitárias e inteiros implicando adição.

Fibonacci gostava das frações unitárias ou julgava que seus leitores gostassem, pois o *Liber abaci* contém tabelas de conversão de frações comuns a unitárias. A fração 98/100 era decomposta em 1/100 1/50 1/5 ¼ ½ e 99/100 aparece como 1/25 1/5 ¼ ½ . Neste mesmo livro, observa-se a conversão das moedas como, por exemplo,: ¼ 2/3 de um rótulo vale 1/7 1/6 2/5 de um bizâncio, então $\frac{1\ 4\ 7}{8\ 9\ 10}$ de um bizâncio vale $\frac{3\ 8\ 83\ 11\quad .}{4\ 10\ 149\ 12}$ de um rótulo. (Boyer, 1974)

"Pobre do homem de negócios medieval que devia operar com tal sistema!" (Ibid, p. 186).

Para a formação conceitual das frações, do ponto de vista histórico, os grandes *insights* vão da pré-história até a Idade Média. Após esse período, constatamos um aperfeiçoamento da escrita, a utilização para os decimais e as implicações dentro da Análise. Dentro da Análise, destamos Leopold Kronecker (1823 – 1891), que reportava às antigas idéias pitagóricas e insistia que a aritmética e a análise se baseassem nos números inteiros.

A aritmetização foi típica da chamada escola de Berlim e, especialmente, de Leopold Kronecker que estudou durante muitos anos na Universidade, publicou sobre a teoria dos números, com exposições cuidadosas de descobertas anteriores, mostrando claramente a necessidade de aritmetizar as matemáticas. Assim, pensava ele, deviam basear-se no número e todo o número no número natural. A exemplo do número **π**, mais que derivado por meio da forma geométrica usual, devia basear-se na série 1 – 1/3 + 1/5 – 1/7 + ... , deste modo, numa combinação de números inteiros; certas frações contínuas para **π** podiam também servir o mesmo propósito. A tentativa de Kronecker de modelar toda a matemática, segundo a teoria dos números é ilustrada por meio da afirmação bem conhecida proferida num encontro em Berlim em 1886: *"Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk"* (Deus fez os inteiros, e todo o resto é obra do homem). A divisa de Platão, segundo a qual Deus "geometriza", foi substituída, pela escola de Kronecker, pela divisa que Deus "aritmetiza" sempre. Os ensinamentos de Kronecker sobre o infinito atual estavam em contraste flagrante com as teorias de Dedekind e, especialmente, de Cantor. (STRUIK, 1997)

A idade áurea da matemática – não foi a de Euclides, é a nossa.
C. J. Keyser

É indiscutível a presença dos números em nossa vida cotidiana. Nossa organização social atual, depende totalmente deles. No uso do calendário, nos horários, nos impostos, nas estatísticas, no troco, nas contagens em competições esportivas, etc., estamos utilizando números e processos de contagem. O mundo informatizado também prescinde da utilização dos números e de suas operações. As novas ferramentas de trabalho como computadores e calculadoras aparecem em nossa vida cotidiana como potencialidades para a libertação do homem de atividades mecânicas e repetitivas envolvidas na contagem, nos cálculos e na aplicação de fórmulas. Para além desse aspecto mecânico, abrem-se caminhos para a exploração conceitual que compreende as idéias envolvidas em cada criação matemática.

3.2 HOJE: OS LIVROS DIDÁTICOS

Escolhemos quatro coleções de livros didáticos para analisar. Esses livros são utilizados na 3ª série do Ensino Fundamental. Os critérios para a escolha foram: acessibilidade aos livros, utilização na escola em que foi aplicada a seqüência, critério de avaliação/premiação do Ministério da Educação (MEC).

Segundo Caraça (1998), podemos trabalhar no mundo das quantidades organizadas em unidades naturais ou no mundo das quantidades não organizadas em unidades naturais. Assim, Caraça define as **quantidades discretas** (enumeráveis) como sendo aquelas organizadas em unidades naturais que podemos relacionar um a um. Por **quantidades contínuas** o autor define como as que não se apresentam em unidades naturais, contrapondo a anterior, que são utilizadas nas medições. Definidos esses termos, passamos a utilizá-los no contexto deste trabalho.

As coleções a serem analisadas são as seguintes:

A.) **Viver e aprender Matemática**, de autoria da Professora Iracema Mori, Editora Saraiva, 6ª edição reformulada, 2000. Esta coleção está sendo utilizada por todas as 3as séries da escola em que foi aplicada a seqüência de ensino. Recomendado pelo MEC com uma estrela e com ressalvas.

B.) **Matemática para gostar e aprender**, de autoria da Professora Elizabeth França [et. Al.], São Paulo, Brasil, 1998. (Livro do Professor). Recomendado pelo MEC com duas estrelas.

C.) **Matemática ao vivo**, de autoria de Luiz Marcio Imenes [et. Al.], São Paulo, Editora Scipione, 1999. (4ª edição). Recomendado pelo MEC com duas estrelas.

D.) **Matemática no planeta azul**, de autoria das Profs. Célia Carolino Pires e Maria Nunes. São Paulo, FTD, 1998. Recomendado pelo MEC com duas estrelas.

Passamos a denominar apenas de livros A, B, C ou D, uma vez que os mesmos já estão identificados.

O livro A apresenta como título do assunto, Números Racionais. As situações denominadas, pela autora, de cotidianas, nas quais a palavra ‘meio’ ‘pedaço’ ou ‘metade’ aparece quando compramos alguma matéria ou substância por quilo ou por quantidade. A primeira referência apresentada é em formato de círculo, na situação de compra de uma pizza.

Conforme a figura abaixo, podemos observar que as frações são introduzidas pela relação parte-todo e apenas com palavras, sem a representação formal do tipo a/b (aЄN, bЄN, com b≠0). A forma apresentada das figuras é denominada como integrante das quantidades contínuas.

4 NÚMEROS RACIONAIS

Muitas situações do nosso cotidiano não podem ser representadas com números naturais.

Quando pedimos uma pizza, muitas vezes ela já vem dividida em pedaços. Um pedaço é uma parte de uma pizza.

Quando compramos "1 quilo e meio" de carne, o "meio" refere-se a uma parte de 1 quilograma de carne.

Ao meio-dia já se passou uma parte de um dia. Já se passou a metade dele.

Essas quantidades referem-se a partes de um inteiro e não são representadas com números naturais.

Vamos conhecer e usar novos números para essas situações: números representados por **frações**.

Figura 3b – Livro A: introdução

Uma parte do capítulo é destinada ao que a autora denominou de fração de uma quantidade. Entendemos essa abordagem como frações de quantidades discretas. Uma situação-problema é apresentada ao leitor, referindo-se que em cada parte da caixa cabem cinco bombons. O total de quantidades discretas é denominado de todo-referência. A estrutura das questões é semelhante, variando-se numericamente os seguintes itens: Fração – quantidade (todo-referência) – lacuna para resposta, havendo também variação da posição da lacuna, nessa ordem. Na figura abaixo, apresentamos um exemplo proposto no livro.

Figura 3c – livro A: quantidades discretas

Apesar do livro trabalhar com as quantidades contínuas e discretas, observamos que a introdução pelo modelo parte-todo pode provocar a discretização do contínuo, como afirmou Silva (1997). A pizza utilizada como elemento do cotidiano para a introdução do conteúdo, não foi apresentada sob a forma de uma situação-problema. O ganho estaria em apresentar um problema que desafiasse o aluno a refletir e pensar como solucioná-lo. Como a introdução baseou-se na pizza, diversas questões aparecem com formato de círculo, cuja divisão correta das áreas é complexa para essa faixa etária.

No livro 'B' o titulo do assunto não aparece no corpo do livro, somente no sumário, como Atividade 51 a 54 – Frações. O primeiro título em destaque é "*Virando fazendeiro*", conforme figura abaixo. A atividade sugere que o professor com seus alunos tenha em mãos uma folha retangular, denominada terreno retangular. A primeira idéia é dividir esse terreno em duas partes iguais. Apresenta a palavra metade ou um meio para denominar cada parte do terreno-folha. Depois solicita que a folha seja novamente dobrada ao meio. Encontra-se a fração um quarto. Finalmente, o mesmo procedimento é realizado e temos a folha com oito partes. Não aparecem questões ou problemas com a parte formal, ou seja, não encontramos, neste início, a formalização da fração com a escrita da forma a/b (a∈N, b∈N, com b≠0).


com as outras partes.

Virando fazendeiro

Seu Bezerra comprou um terreno retangular no campo para construir uma fazenda. Ele ainda está pensando em como dividirá suas terras.

Você vai ajudar Seu Bezerra em seu problema. Para isso, precisará de 3 folhas de papel do mesmo tamanho. (Podem ser de revistas ou de jornal.)

1ª idéia: "Vou dividir o terreno em duas partes iguais, também retangulares: uma para agricultura e outra para criação de animais".

Dobre uma folha para mostrar como Seu Bezerra pode fazê-lo. Compare sua dobradura com a de seus colegas.

Figura 3d – Livro B: introdução

A seguir a autora apresenta o cálculo de frações de quantidade que em nosso entender são as quantidades discretas. A atividade poderá ser realizada na sala de aula, com auxílio de tampinhas (12) e barbante para separar as quantidades desejadas. As questões apresentadas procuram as quantidades de tampinhas, segundo uma certa fração. Veja figura abaixo.

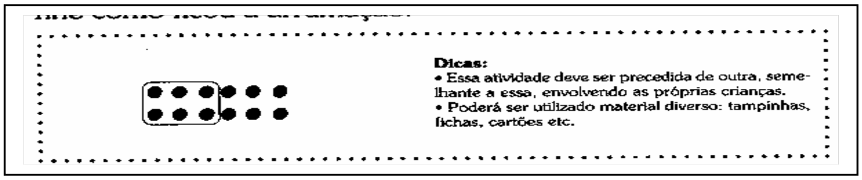


Figura 3e – Livro B: quantidades discretas

Existem quatro atividades semelhantes à da figura acima, entretanto, não aparece a formalização da fração na forma a/b. As atividades seguintes iniciam o assunto sobre os decimais, a atividade de número 61 volta ao assunto das frações, ainda sem a formalização. As atividades propostas pela autora contêm exercícios para pintar e escrever a relação parte-todo com palavras. Na atividade de número 64, encontramos as operações com frações. Os problemas apresentados pedem, para que as crianças resolvam sem a forma da representação de fração (a/b). Somente na atividade número 68, surgem as primeiras representações formais. O livro é composto de atividades, todas foram classificadas de acordo com os grandes temas dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), a saber: número, medida, espaço e forma, operações e tratamento da informação.

Embora o livro enquadrasse dentro da proposta dos PCNs, pudemos observar que o conteúdo das frações é dado sob a forma de "*flash*" e, no momento, em que a criança começa a assimilar o conteúdo, rapidamente muda para outro assunto. Além disso, uma boa parte dos problemas apresentados com quantidades discretas têm em suas respostas números naturais. As questões podem fortalecer a idéia de que a fração é composta por dois naturais e separados pelo traço horizontal.

No livro ‘C’, o primeiro contato dá-se com o título “Frações do círculo”, apresentando à criança conjuntos com figuras cortadas em duas, três, quatro e seis partes que deverão ser comparadas com um inteiro também na mesma página. Na página seguinte, as atividades pedem para que a criança forme outros círculos. A escrita formal do tipo a/b aparece na seqüência, figuras a seguir.

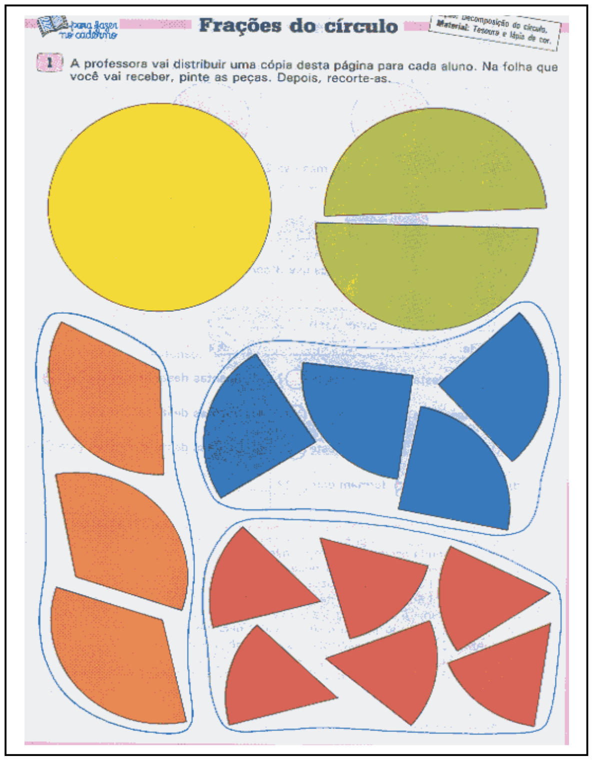


Figura 3f – Livro C: introdução

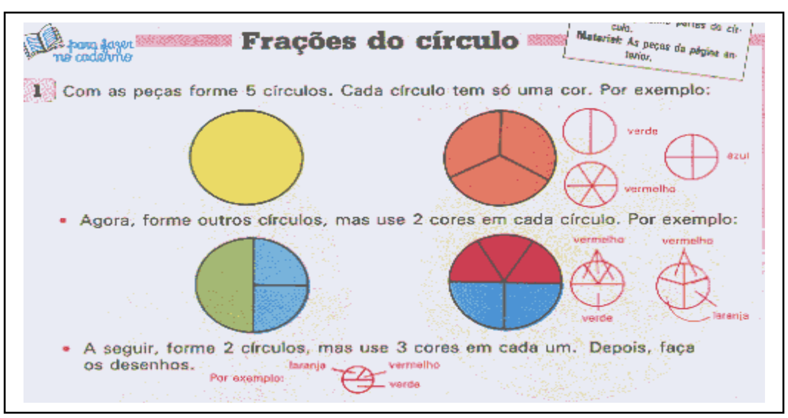


Figura 3g – Livro C: quantidades contínuas

Na página de número 114, encontramos as frações de quantidades, em que aparece o trabalho com as quantidades discretas. Há uma situação-problema, apresentada como história em quadrinhos, em que um batalhão de formigas separa-se em partes para que as crianças encontrem as frações das quantidades solicitadas na atividade. Destacamos a figura na página seguinte.

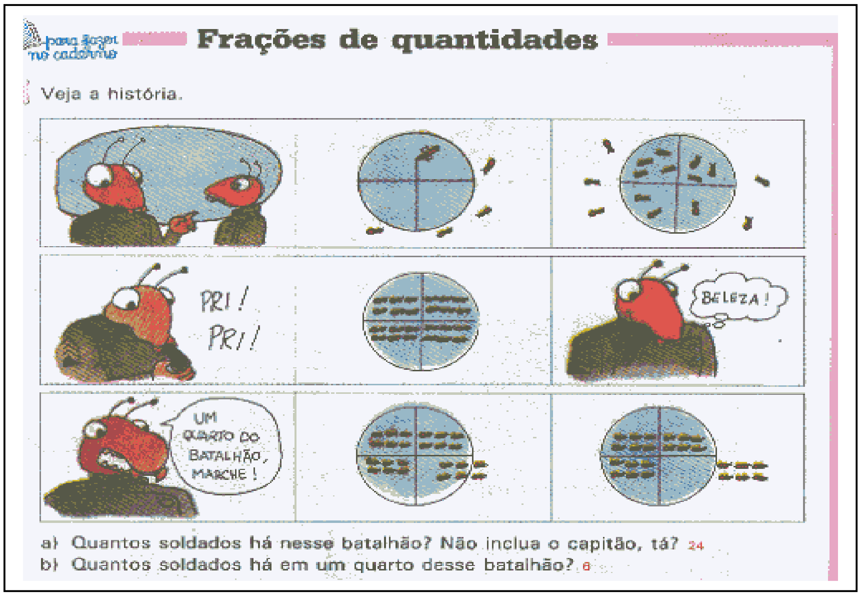


Figura 3h – Livro C: quantidades discretas

Este livro contempla algumas situações-problema de forma a envolver a criança na leitura e no desafio de buscar as respostas. A idéia de simbolizar o discreto com formigas é genial, pois as crianças poderão inferir que se cortá-las ao meio elas morrerão.

Observamos uma primeira falha com relação à quantidade contínua, a começar pelo material, que não está disponível no livro, pois a folha não poderá ser recortada. Se o aluno desenhar no caderno corre o risco de realizar as divisões do círculo de forma incorreta, o que poderá gerar, futuramente, a não conservação das áreas.

Parece-nos que a professora deverá preparar um material semelhante para que os alunos possam de fato trabalhar a atividade. E, ainda, que com toda sua boa vontade prepare o material, chegará um momento em que os alunos poderão questionar como podemos dividir o círculo em sete partes, por exemplo. Aqui teremos um problema. A professora primária não é especialista e, portanto, poderá não saber responder tal questão. Se a figura fosse, por exemplo, um retângulo, as divisões seriam bem mais tranqüilas tanto aos professores como aos alunos. Sugerimos que os autores repensem a forma de introduzir o conteúdo das frações, sobretudo as figuras.

No livro ‘D’, a introdução do assunto dá-se com ilustrações de várias situações presentes no dia-a-dia da criança, nas quais a fração é necessária. A definição da fração fica, inicialmente, por conta da criança, com base nos exemplos dados. Veja a figura abaixo.

Figura 3i – Livro D: introdução

Na página seguinte, a autora apresenta uma brincadeira com folhas de revista, na qual as situações dadas relacionam a operação de divisão como ponto de partida. As situações recaem nas frações próprias e impróprias. Nas páginas seguintes, encontramos atividades com a escrita do tipo “um meio” e a formalização do tipo a/b. Os exemplos misturam-se com quantidades contínuas e discretas, não havendo um tópico específico para cada um deles. As frações impróprias são, também, apresentadas como números mistos. Veja a figura abaixo.

Figura 3j – Livro D: quantidades contínuas

Dentre as coleções analisadas, o livro ‘D’ é o que, a nosso ver, apresenta a melhor proposta, pois trabalha com situações-problema que desafiam o aluno a descobrir as soluções. O material sugerido para o trabalho de classe é mais simples que os demais, podendo ser confeccionado com facilidade. As autoras transpõem a idéia de divisão para as frações de forma concreta e simbólica.

Segundo Nunes (1996) o entendimento desse novo tipo de número é um dos aspectos mais difíceis para o aluno do Ensino Fundamental. O número racional pode ser considerado em suas várias representações que sugerem procedimentos diferentes, constituindo-se numa tarefa difícil ao aluno. Muitas vezes os capítulos dos livros didáticos deixam a desejar com relação às várias formas de representação do número fracionário.

Sendo o livro didático o material mais utilizado pelos professores, o emprego da relação parte-todo, com um único enfoque, poderá limitar no tipo de aula a ser ministrada e, conseqüentemente, reforçar os alunos para uma única abordagem. Kerslake (1986) apresentou um estudo sobre o uso de diagramas para a compreensão das frações, dando pistas sobre modelo parte-todo, com uso de diagramas. As ilustrações de, por exemplo, 2/3 + 3/4, criam imagens dessas representações que não ajudam na visualização imediata, sendo necessárias outras divisões na mesma figura para sua compreensão. A autora cita Kieren (1976), argumentando que o conceito de número racional é diferente de número natural, uma vez que ele não faz parte do meio natural das crianças. As diversas interpretações de número racional resultam numa variedade de experiências necessárias. Assim, conclui que o entendimento dos racionais como elementos de um campo quociente requer a oportunidade de experiências dos aspectos partitivos da divisão. Há necessidade de estender o modelo "parte-todo" e incluir os aspectos quociente das frações, a autora conclui observando que representar as frações como pontos sobre uma linha numerada, é discutível.

Percebemos que o livro didático acaba enfocando uma ou outra concepção para o conteúdo das frações. Daí a idéia de que ensinar sob um único ponto de vista é mais fácil. Porém se o professor tivesse uma melhor formação para desenvolver as habilidades e competências dos alunos, permitiria a estes a construção de seu próprio conhecimento. Assim, se as frações pudessem ser exploradas sob os vários modelos, conseqüentemente, as crianças ampliariam seu campo conceitual.

4. METODOLOGIA

INTRODUÇÃO

Neste capítulo, descrevemos o desenho metodológico deste estudo e seu objetivo, bem como nossa proposta de pesquisa.

Ao discorrer sobre o experimento, tratamos do universo da pesquisa, descrevendo a respeito dos sujeitos envolvidos, os recursos, os instrumentos diagnósticos (pré-teste e pós-teste) e a seqüência de ensino aplicada.

Para a elaboração e definição dos instrumentos diagnósticos e da seqüência de ensino, realizamos uma aplicação preliminar dos mesmos que denominamos de “estudo piloto”. Essa aplicação aconteceu em um grupo de dez alunos, sendo cinco da 3ª série, com variação de faixa etária de 8 a 10 anos, que ainda não tinham estudado fração, e cinco da 4ª série, com faixa etária de 9 a 11 anos, que já haviam tido um primeiro contato com o estudo das frações na série anterior, ambos do Ensino Fundamental da Rede Pública Estadual. No presente trabalho, não descrevemos sobre o grupo piloto, mas só a respeito do estudo principal.

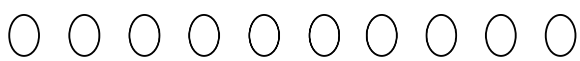
4.1 PROPOSTAS E OBJETIVOS

A pesquisa dirigida a alunos da 3ª série do Ensino Fundamental, foi elaborada com o intuito de introduzir o conceito de número fracionário e sua representação, limitando-se a abordar a fração como quociente e como parte-todo, partindo da divisão com números naturais. Em todo o trabalho as quantidades contínuas e discretas foram contempladas. Entendemos que uma abordagem deve dar ênfase ao processo de construção do conceito (Vergnaud, 1982; 1988; 1990; 1993; 1994) com base em situações-problema relacionadas ao cotidiano das crianças (Nunes, 1992; 1993; 1996; 1998). No contexto, propusemos uma abordagem diferente da convencional, observada em livros didáticos e, pessoalmente, no dia-a-dia da vida escolar.

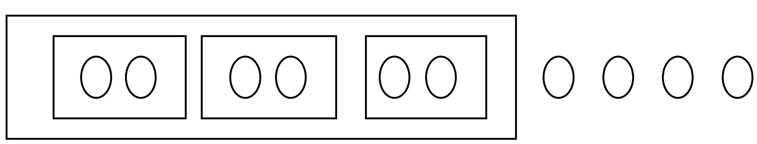
Acolhemos como princípio norteador uma seqüência em que o aluno participe da construção de seu conhecimento, pois a função do pesquisador é orientar a aprendizagem.

Para esclarecimento do leitor, apresentamos a seguir quais contextos comungamos com os autores citados abaixo que são demonstrados em nossa seqüência.

Segundo Ciscar (1988), é interessante ressaltar que ao utilizarmos contextos discretos, estamos proporcionando à criança a ampliação de seus esquemas de relação parte-todo, neste caso, quando trabalhamos quantidades discretas como unidades, por exemplo:



Se quisermos representar a fração 3/5 (três quintos) (dividir o conjunto em cinco partes e tomar três), os subconjuntos que resultam também serão formados, cada um deles por várias quantidades discretas (neste caso, duas)



Em contraposição às quantidades contínuas, em que as partes encontradas relacionam-se a um único todo. A dificuldade aumenta se tomarmos como unidade e pedirmos os 3/5 de uma situação em que a fração não pode se aplicar. Por exemplo, com sete bolinhas.

De acordo com Campos (1999), comentando e citando Kieren (1988), a fragilidade do modelo parte-todo está na afirmação de que essa metodologia induz no processo de dupla contagem e não introduz a criança no campo dos quocientes. Essa forma de ensino faz com que a criança desenvolva no modelo geométrico um processo de dupla contagem para aprender a linguagem das frações. Os alunos aprendem que devem contar o número total de partes em que o inteiro foi dividido e usar esse número como o denominador da fração; que devem contar o número de partes pintadas na figura e usá-lo para o numerador da fração. No entanto, provavelmente, não compreendem porque esse novo número não pertence ao conjunto dos inteiros, visto que estão sempre contando a quantidade de partes. Eles não relacionam esses dois inteiros, pois a interpretação de quociente não lhes é apresentada e com isso a relação entre numerador e denominador fica perdida, não se desenvolvendo a idéia de número fracionário, representando também uma quantidade discreta ou contínua.

No contexto contínuo, em que as representações mais freqüentes são os diagramas retangulares e circulares, neste caso, o ponto importante é a conservação das áreas.

Esses esclarecimentos permeiam os termos utilizados neste capítulo com relação às quantidades contínuas e discretas.

Procuramos elaborar uma seqüência de ensino, partindo de situações–problema, a fim de desencadear no aluno um processo de reflexão-ação, quer individualmente ou em grupo, utilizando-se de uma linguagem próxima à dele, e de situações significativas e desafiadoras. A formalização matemática é considerada como parte final do processo e não o início.

Durante todo o processo, apresentamos situações significativas, aliadas ao manuseio de material concreto. Entendemos que as situações contextualizadas e relacionadas ao cotidiano propiciam a compreensão e a construção do conceito de fração e suas representações pelos sujeitos nelas envolvidos.

Ao final do estudo, esperamos que os alunos tenham construído o conceito de fração no tocante à sua representação, na forma a/b ($a \in N$, $b \in N$, com $b \neq 0$) que depois de incorporados saibam aplicá-los.

4.2 DESENHO GERAL DO EXPERIMENTO

4.2.1 Universo do Estudo

Nosso experimento foi aplicado em uma escola estadual da cidade de São Paulo, trabalhamos com duas turmas de 3ª séries do Ensino Fundamental. Aplicamos a seqüência na primeira turma, que doravante passamos chamar de grupo experimental (GE) e a segunda turma, a que denominamos grupo controle (GC), que não teve contato com esse tema estudado. O GE é composto por 19 alunos e o GC por 20 alunos.

Os sujeitos participantes do trabalho, segundo os dados levantados no plano escolar de 2001, são provenientes de classe média baixa e baixa, moradores de cortiços ou de pequenos quartos onde se abrigam todos os membros da família. O acesso à cultura fica restrito, em sua maioria, às atividades realizadas na escola e a biblioteca escolar que também possui um acervo pobre e sem pessoal especializado para atender aos alunos.

Grupo Experimental

No grupo experimental, a aplicação do experimento pelo pesquisador foi realizada no horário normal de aula, de acordo com o programa estabelecido pela escola. A professora da sala atuou como observadora. O experimento compreendeu um total de 12 encontros, sendo dois dedicados à aplicação dos instrumentos diagnósticos e os dez restantes à seqüência de ensino. Estes dez encontros da seqüência, sempre em aulas duplas, totalizaram 20 horas. Dos 30 alunos, somente 19 foram considerados na amostra, pois estavam na faixa etária de 8 a 10 anos, não tinham repetido a 3ª série e participaram dos dois testes.

Grupo Controle

Este grupo não teve qualquer tipo de contato com o tema sobre frações. A atuação da professora seguiu, normalmente, sem qualquer interferência de nossa parte. O conteúdo sobre as frações foi abordado somente depois das aplicações dos dois testes, portanto, consideramos um conhecimento zerado. Apenas observamos se houve algum acréscimo significativo de aprendizagem que possa ter ocorrido de maneira informal, ou seja, fora da escola. Nesta classe, dos 28 alunos matriculados, somente 20 atenderam a nossos critérios, ou seja, apresentavam idade entre 8 e 10 anos, não repetiram a 3ª série e participaram dos dois testes.

4.2.2. Procedimento

Submetemos os grupos a dois testes individuais: um antes (pré-teste) da introdução dos conceitos de fração e outro (pós-teste) após terem tido contato com esse conteúdo, no caso do grupo experimental. Lembramos que o grupo controle não teve contato com o conteúdo em estudo.

Em relação à seqüência de ensino desenvolvida no grupo experimental, pretendemos que o ponto de partida sempre fosse por intermédio de situações-problema, fazendo um paralelo com as situações significativas e desafiadoras para os alunos. Assim, conforme enfatizamos no capítulo II, nossa seqüência foi elaborada por meio de atividades que privilegiam a construção do conceito via resolução de situações-problema (Vergnaud, 1990; 1993; 1994) e processo de dupla contagem que induza a criança, com base no modelo parte-todo, no campo dos quocientes (Campos, 1995). Portanto, iniciamos os estudos por questões práticas, relacionadas à operação de divisão do dia-a-dia das crianças, passando da manipulação (material concreto) para a representação pictórica (desenho) e, posteriormente, à formalização (escrita fracionária na forma a/b com a€N, b€N, e b≠0),

Destacamos, também, a inserção de atividades contextualizadas e desafiadoras que podem ocorrer dentro do ambiente de sala de aula, com o objetivo de auxiliar o aluno na construção do conceito de número fracionário e sua representação. Demos prioridade ao uso de recursos didáticos simples, baratos e de fácil acesso aos professores. Assim, empregamos papel cartão e cartolina com representações de diversas frações e materiais simples como bolinhas de gude, botões de camisa, figurinhas e palitos, entre outros, que foram manipulados nas próprias carteiras dos alunos. Fizemos uso de recurso teatral, no qual as crianças representaram papéis de vendedores, compradores, caixa, juízes de avaliação dos resultados (conferencista dos cálculos), para os quais são necessários recursos, tais como: o lápis, o papel, e lápis coloridos ou canetas hidrocor. Também utilizamos recursos didáticos manipulativos como jogos de memória, tômbola, dominó, entre outros, cujo objetivo é tornar a aprendizagem mais interessante e atrativa aos alunos. Todos os recursos elaborados e planejados têm a finalidade de propiciar uma aprendizagem mais significativa.

O método escolhido difere do tradicional, pois está centrado na participação ativa do aluno, no trabalho em grupo e na vivência de situações-problema contextualizadas. Acreditamos que seja uma experiência nova não só às crianças, mas também ao pesquisador. Considerando o pesquisador como aprendiz do processo ora despertado, previmos que variáveis do tipo tempo podem influenciar nos resultados.

Discutimos novamente a questão do número de encontros utilizados na seqüência, no capítulo 5 (Análise dos Resultados), quando apresentamos maiores detalhes de como se deu o processo de introdução do conceito do número fracionário e sua representação pelo grupo experimental.

4.2.3 Instrumentos de Avaliação Diagnóstica

Os instrumentos diagnósticos que serviram de parâmetros para avaliação de nossa seqüência, são descritos aqui. Eles ajudaram no entendimento de como ocorre a formação do conceito de número fracionário e de sua representação na forma escrita ou na simbólica a/b (a€N, b€N, com b≠0), para esse grupo de alunos. Os instrumentos citados são os pré e pós-testes que apresentamos, a seguir.

4.2.3.1. Apresentação e descrição do Pré-teste

O pré-teste tem por finalidade avaliar os conhecimentos anteriores do aluno com relação ao número fracionário, no sentido de servir de termômetro, para julgar se o mesmo possui alguma idéia intuitiva desse novo conjunto numérico. Essa avaliação tem, portanto, a função principal de diagnosticar, para posterior desenvolvimento de uma seqüência de ensino. O pré-teste também exerce a função de servir de parâmetro para avaliar, ao final da seqüência, se ocorreu a construção dos conceitos pretendidos, por intermédio da aplicação de um novo teste (o pós-teste) cujas questões possuem grau de dificuldade semelhante e equivalência matemática.

As questões envolveram conceitos de número fracionário como: quociente e parte-todo e sua representação sob a forma a/b (a€N, b€N, com b≠0) tanto às quantidades discretas como às quantidades contínuas, com frações próprias de numerador um e, posteriormente, de numerador maior que um, até chegarmos às frações impróprias. As questões foram elaboradas com base em um instrumento diagnóstico preliminar aplicado em dez crianças das 3ª e 4ª série do Ensino Fundamental, da Rede Pública de Ensino onde pudemos constatar algumas dificuldades na representação fracionária, sobretudo, nas atividades relacionadas com quantidades discretas.

No quadro abaixo, apresentamos as questões de acordo com o tipo de quantidade envolvida, ou seja, contínua ou discreta.

Abordagem / Questão	Quantidades contínuas	Quantidades discretas
1		X
2	X	
3	X	
4		X
5		X
6	X	
7		X
8		X
9	X	
10	X	

Quadro 4.1 Classificação das questões quanto à abordagem

Segundo Ciscar (1988), apesar das inúmeras maneiras de alcançar o conceito de fração, todas conservam um processo de aprendizagem a longo prazo. A variedade de estruturas cognitivas e as diferentes interpretações das frações condicionam os processos de aprendizagem. Em outras palavras, o conceito global de fração não se consegue totalmente de uma só vez. Desde as primeiras experiências que as crianças têm com as “metades”, “terços”, “quartos”, etc., vinculadas à habilidade de compreender o mecanismo de dividir e à habilidade de manipular a inclusão de classes, até o trabalho de razão e proporção para os adolescentes, vinculado à habilidade de comparar e manusear dois conjuntos de dados ao mesmo tempo, o desenvolvimento de esquemas de proporcionalidade exige um longo caminho a percorrer. A identificação e a caracterização dos contextos que tornam significativas as noções de fração, estão ligadas a um megaconceito.

Dentro desse megaconceito, podemos citar:

a) a relação parte-todo e a medida
    - representação em contextos contínuos e discretos
    - decimais
    - reta numérica
b) as frações como quociente
    - divisão indicada
    - como elemento de um corpo quociente
c) a fração como razão
    - probabilidades
    - porcentuais
d) a fração como operador.

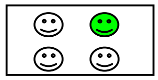
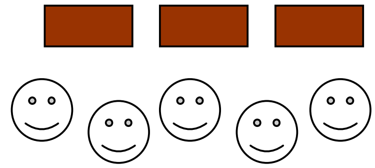
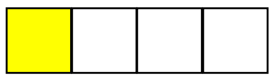
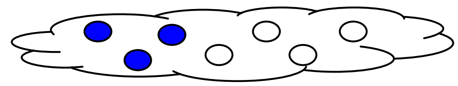
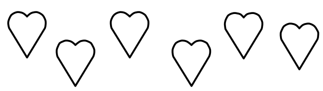
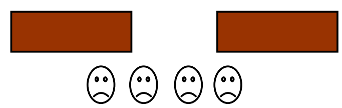
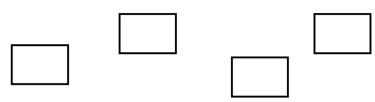
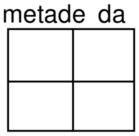
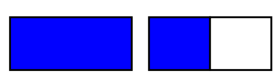
De acordo com Campos (1999), o modelo parte-todo é uma metodologia que induz a criança no processo de dupla contagem. Nitidamente, a dupla contagem leva ao desenvolvimento da linguagem de fração com base na enumeração das partes e não na construção do conceito de fração em seus distintos aspectos, isto é, a criança não percebe essa representação simbólica nem como número fracionário, nem como representante de uma quantidade.

Gostaríamos de deixar claro que não estamos nos opondo radicalmente ao modelo parte-todo, pois ele também é importante. As abordagens durante o processo de aprendizagem devem variar, de forma que garantam a apreensão do conceito.

Modelo / Questão	Parte-todo	Quociente
1	X	
2		X
3	X	
4	X	
5		X
6		X
7	X	
8		X
9	X	
10	X	

Quadro 4.2 – Classificação das questões quanto ao modelo

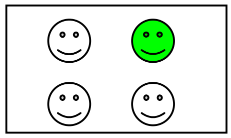
O teste é constituído de dez questões, que apresentamos uma a uma, realizando uma discussão sobre as mesmas. Antes, para que o leitor tenha uma idéia geral do teste, apresentamos, no quadro abaixo, todas as questões, que são discutidas a posteriori.

1. No quadrado abaixo, João pintou uma caretinha. Como você pode representar numericamente essa caretinha pintada em relação à quantidade total de caretinhas ?  Resposta	2. Divida os três chocolates entre as cinco crianças. Quanto cada criança vai receber?  Resposta______________________
3. Ana pintou uma quarta parte do retângulo. Quantas quartas partes faltam para terminar.  Resposta: _______________________	4. No balão, somente três bolas estão pintadas. Como você pode representar numericamente as bolas azuis em relação a todas as bolas que estão no balão abaixo?  Resposta
5. Circule a terça parte dos corações abaixo:  Represente numericamente a quantidade que você circulou em relação a todos os corações : Resposta	6. Divida duas barras de chocolate para quatro crianças, de forma que todas fiquem contentes:  Escreva a quantidade que cada criança recebeu. Resposta: ___________________
7. No balcão de uma doceria podem ser vistos dois bolos de chocolate, três bolos de coco e quatro de morango. Maria comprou um bolo de chocolate e outro de morango. Como você pode representar numericamente a quantidade de bolos que Maria comprou com relação à quantidade total de bolos da doceria? Resposta:	8. Circule a metade dos quadradinhos abaixo:  Represente numericamente a quantidade que você circulou em relação ao total de quadradinhos: Resp
9. Pinte a metade da metade na figura abaixo:  Represente numericamente a quantidade que você pintou em relação ao total de quadradinhos: Resp.	10. Represente numericamente a parte pintada na figura abaixo:  Resposta

Quadro 4.3 – Apresentação das questões do pré-teste

Questão 1

1. No quadrado abaixo, João pintou uma caretinha. Como você pode representar numericamente essa caretinha pintada em relação à quantidade total de caretinhas?

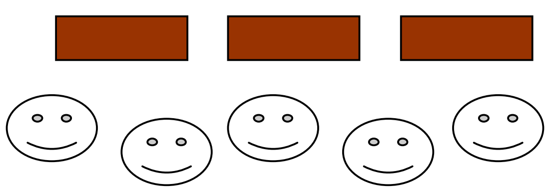


Resposta:

Trata-se de uma questão que envolve uma relação simples de fração própria com numerador igual a um. Aqui pretendemos observar se a criança estabelece a relação parte-todo com quantidades discretas. Esse procedimento de combinar dois números para formar a fração, parece-nos simples, mas como estamos trabalhando com quantidades discretas, o todo pode ser desprezado. O procedimento pode ocorrer tanto com professores como com alunos. Podemos encontrar respostas que relacionam o todo à parte solicitada ou, simplesmente, que operem com os valores subtraindo 1 de 4 ou relacionando 1 para 3, conhecida como relação parte-parte.

Questão 2

2. Divida os três chocolates entre as cinco crianças.
Quanto cada criança vai receber ?

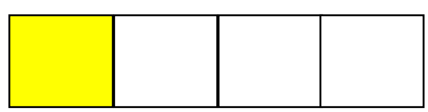


Resposta:
____
____

A questão trata da relação parte-todo com numerador maior que um. Nessa questão, analisamos se a representação formal predomina sobre o intuitivo, pois as crianças normalmente são capazes de responder a relação de forma inversa, ou seja, 5 para 3, ao pensar nos indivíduos e não nos chocolates, objeto da divisão. A questão parece-nos difícil. No entanto, poderemos encontrar respostas que se distanciam da representação formal desse algoritmo, marcando 1 para 5 ou 5 para 3 que são incorretas, isto porque as crianças visualizam somente os números naturais. Parece-nos que a idéia de numeradores maiores que um necessita de estruturas lógicas de pensamento para realizar a divisão em cinco partes para cada um dos chocolates e distribuí-los às crianças, num primeiro momento e, em outra situação, ir direto dos três chocolates para as cinco crianças. A mesma questão foi aplicada com crianças de 3ª série (25 alunos) por Silva (1997) e nenhuma acertou e, na 4ª série (29 alunos) em que apenas uma criança acertou a questão.

<u>Questão 3</u>

3. Ana pintou uma quarta parte do retângulo. Quantas quartas partes faltam para terminar.

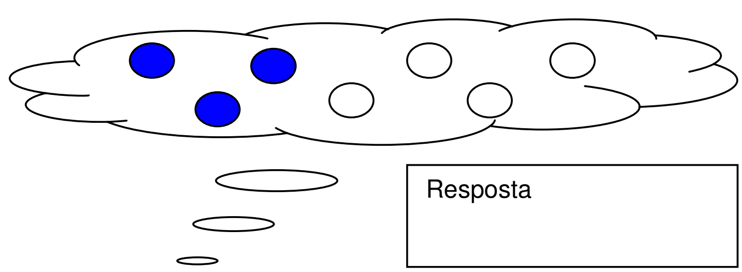


Resposta: ____

Na questão, o aluno deverá representar o resultado da fração, completando o desenho e usando a relação parte-todo, empregando a operação de subtração. Nosso objetivo é verificar se a representação gráfica e a escrita formal, próprias da matemática são apresentadas nas respostas de forma correta. A questão parece-nos simples, tendo em vista que a parte a ser pintada apresenta-se com valores simples e possíveis de identificação rápida, sobretudo porque a figura representa uma quantidade contínua e a fração resultante é do tipo própria. Com relação às respostas, poderemos encontrá-las do tipo: todos os quadrados pintados, o que pode significar falta de compreensão na leitura da questão. Outro fator será a dificuldade em relacionar no desenho a parte em relação ao todo; ou, simplesmente, operar como se fossem dois números naturais, apresentando como resposta o número três. Ainda será possível encontrarmos a relação parte-parte (um para três ou três para um). Questão semelhante pode ser encontrada no trabalho de Silva (1997), formando o modelo parte-todo para quantidades contínuas. No texto de sua questão, aparece a palavra "fração", cujo objetivo era observar se o aluno associa o termo. Na questão, optamos por suprimir a palavra para que possamos observar como as crianças representam situações semelhantes.

<u>Questão 4</u>

4. No balão, somente três bolas estão pintadas. Como você pode representar numericamente as bolas azuis em relação a todas as bolas que estão no balão abaixo

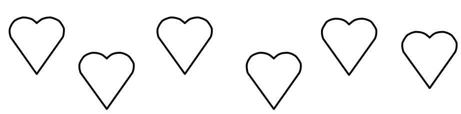


A questão pede ao aluno que relacione os elementos apresentados no conjunto de modo a obter uma fração que associe as bolas pintadas com o todo ou seja

3/7. As quantidades discretas não produzem quocientes inteiros, pois devemos ter 3 em 7 e, ainda, temos uma fração própria, com numerador maior que um, diferindo da questão um. Na questão, interessa-nos observar se o aluno estabelece ou não a relação entre as quantidades discretas, via desenho, se a escreve na forma de fração, do tipo a/b (a∈N, b∈N, com b≠0), conforme enunciado. A questão é complexa, pois apesar da contagem via números naturais e com uso de quantidades discretas, essa relação pressupõe associar a parte de um todo, em que o todo é composto também da parte solicitada. Há relações de comparação e de entendimento da linguagem escrita a ser expressa na linguagem matemática, a/b. Poderemos encontrar respostas do tipo: modelo parte-parte, ou seja, em relação aos números naturais 3 e 4; e ainda tentativas de repartição das três pintadas com as outras afirmando que sobra uma, apresentando a discretização como impossibilidade no caso de repartir três para quatro.

<u>Questão 5</u>

5. Circule a terça parte dos corações abaixo:



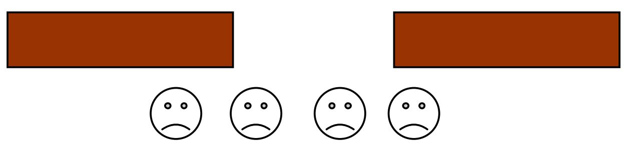
Represente numericamente a quantidade que você circulou em relação a todos os corações:

Resposta:

O objetivo da questão é discutir sobre a distribuição de quantidades discretas, observando a classe de equivalência das frações. A questão é complexa, pois, muitas vezes, os alunos não distinguem que a relação um para três é equivalente a dois para seis. As quantidades discretas são mais complexas para o aluno, pois grande parte dos exemplos trabalhados em sala de aula e nos livros didáticos refere-se a quantidades contínuas, poderemos encontrar respostas do tipo: pintou apenas uma figura; pintou três figuras, o que indicará uma contagem usando os números naturais. Silva (1997) não aplicou questões com quantidades discretas para as crianças; somente aos professores, no pós-teste, a questão de número oito, em que apenas uma pessoa errou. O trabalho realizado com as professoras surtiu efeito e o conjunto passou a ser observado como um todo de 16 bolinhas e não mais como 16 inteiros.

Questão 6

6. Divida duas barras de chocolate para quatro crianças de forma que todas fiquem contentes:



Escreva a quantidade que cada criança recebeu.

Resposta:

____

O objetivo dessa questão é observar como as crianças enfrentam situações de distribuição simples, usando quantidades contínuas como as que representam, ou seja, se ao dividir as figuras para dar as respostas, preocupam-se com a conservação das partes do inteiro ou não e se a escrita formal fosse (do tipo a/b com $a \in N$, $b \in N$, e $b \neq 0$), seria usada para dar as respostas. A questão é simples, pois as quantidades são contínuas e exemplos como este são mais presentes nos livros didáticos e nas salas de aula. Na questão, temos dois inteiros para dividir a quatro crianças, o que exigirá um raciocínio de equivalência de áreas ou, simplesmente, dividir os chocolates ao meio e distribuir metade para cada criança. Provavelmente, a questão será respondida corretamente por vários alunos. Poderemos encontrar respostas do tipo: duas crianças recebem um inteiro e as outras ficam sem nada; é possível também que cada inteiro seja dividido para duas crianças, porém, sem a conservação das áreas e, ainda, ocorra a distribuição de um dos chocolates e o outro ficará para ele, como se verificas no seu dia-a-dia. Questão semelhante também foi aplicada com crianças de 3ª e 4ª séries por Silva (1997), que considerou ser uma distribuição possível cada chocolate ser repartido ao meio. Essa atitude comum entre as crianças é uma ação intuitiva, no caso da 3ª série previa-se como resposta um pedaço, transformando a metade em um todo. Apenas 20% das crianças de 3ª série acertaram tal questão.

<u>Questão 7</u>

> 7. No balcão de uma doceria podem ser vistos dois bolos de chocolate, três bolos de coco e quatro de morango. Maria comprou um bolo de chocolate e outro de morango. Como você pode representar, numericamente a quantidade de bolos que Maria comprou com relação à quantidade total de bolos da doceira?

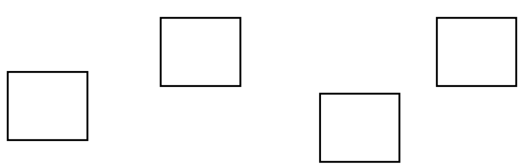
Resposta

Nessa questão, o aluno deverá apresentar o resultado na forma simbólica a/b e, portanto, formal. A relação parte-todo é dada via situação-problema. O aluno deverá basear-se na situação escrita, sob a forma de texto, para uma forma simbólica (escrita formal a/b com $a \in N$, $b \in N$, e $b \neq 0$) em que consiga relacionar a quantidade comprada em relação ao todo apresentado no balcão da doceria. Apesar do problema apresentar uma situação próxima ao cotidiano, novamente, temos quantidades discretas, pois os bolos não estão divididos e ainda são apresentados com sabores diferentes, devendo compor um todo. Acreditamos que a questão é de complexidade média, visto que o aluno consegue contar os bolos com os números naturais, mas necessitará da fração para relacionar a parte comprada em relação ao todo. Respostas do tipo: nove menos dois e ficaram sete; ou dois em relação à parte restante e não ao todo são esperadas.

Vergnaud (1990) deixa claro que não devemos considerar somente os relacionamentos entre os aspectos sociais no processo da formação do conceito, embora devamos reconhecer sua importância e interesse nesse processo. O conhecimento conceitual deve emergir das situações-problema, isto é, devemos estabelecer referências que relacionem conceitos e situações e vice-versa. Um conceito não aparece isoladamente numa situação-problema, pois cada situação traz em seu bojo um grande número de conceitos.

Questão 8

8. Circule a metade dos quadradinhos abaixo:



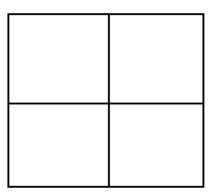
Represente numericamente a quantidade que você circulou em relação ao total de quadradinhos:

Resposta:

Nessa questão, pretendemos observar se a intuição da metade na quantidade contínua é facilmente transferida às quantidades discretas. A questão parece simples e o aluno poderá utilizar sua intuição para respondê-la. Poderemos encontrar respostas do tipo: o aluno escolhe um ou todos os quadrados e divide ao meio, ou seja, percebe apenas as quantidades contínuas. A ação de não perceber o todo, apesar da palavra circule, poderá apresentar-se no ato de circular apenas um quadrado. Questão semelhante também poderá ser encontrada no trabalho de Silva (1997), porém com desenhos diferentes. Em seu trabalho, a autora apresenta figuras como botões e flores que se repartidas perdem sua característica de objeto e função. Optamos por quantidades contínuas para observar se a criança consegue ter um olhar macro sobre essas quantidades.

<u>Questão 9</u>

9. Pinte a metade da metade na figura abaixo:



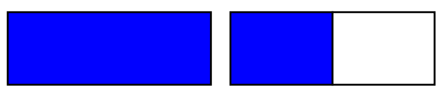
Represente numericamente a quantidade que você pintou em relação a todos os quadradinhos:

Resposta:

A questão é semelhante à anterior, porém nosso enfoque é a quantidade contínua. A figura encontra-se dividida em quatro partes iguais e o aluno deverá perceber que a metade da metade é exatamente ¼ da figura. Parece-nos uma questão complexa, pois a palavra metade da metade não é muito comum entre as crianças e sua interpretação poderá ser a de observar apenas a primeira instrução, ou seja, encontrar a metade da figura e pintar duas partes. Segundo Spinillo (1994), quando as crianças recebem um treinamento específico para fazer julgamentos proporcionais, usando o referencial ‘metade’, elas são “capazes de transferir a aprendizagem de uma dada situação para outra, ampliando e solidificando o conhecimento informal que já possuíam”. Queremos observar se a idéia de ‘metade’ avança sem instrução para ‘metade da metade’.

QUESTÃO 10

10. Represente numericamente a parte pintada na figura abaixo:



Resposta

Nosso objetivo é observar se a compreensão que as crianças possuem com relação ao conceito da fração e a representação dos números fracionários possibilita transpor a representação das frações próprias às frações impróprias. A questão é complexa e o número de acertos poderá ser bastante pequeno. O aluno poderá relacionar os conjuntos com os objetos dados ao conjunto dos naturais e não estabelecer uma relação direta com o desenho, pois temos a representação de mais de um todo. Os erros que poderão surgir estarão relacionados à contagem simples das partes pintadas, sendo, portanto, uma representação, utilizando-se somente os números naturais, tais como: relacionar parte-parte; relacionar dois para três, desprezar a conservação das áreas e escrever dois; na representação simbólica também poderão aparecer relações inversas do todo para as partes, duas partes pintadas e uma não, ou valores sem significados para a representação da escrita fracionária.

Segundo Silva (1997), nas quantidades contínuas podemos efetuar as divisões dos objetos, sem que eles percam suas características. Assim entendemos que as crianças precisam manipular e operar com as duas quantidades: contínuas e discretas para não conceituarem erroneamente as frações.

4.2.3.2 Apresentação e descrição do Pós-teste

O pós-teste é um instrumento com a finalidade de avaliar a compreensão dos conceitos básicos das frações, após a aplicação de uma seqüência de ensino. Analisando esse questionário e comparando os resultados com aqueles obtidos no pré-teste, esperamos observar o provável aproveitamento dos alunos e se eles construíram os conceitos relativos às representações da escrita fracionária.

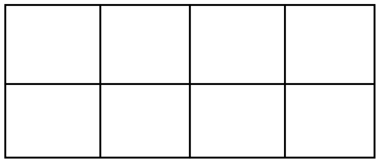
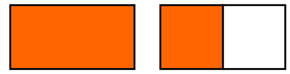
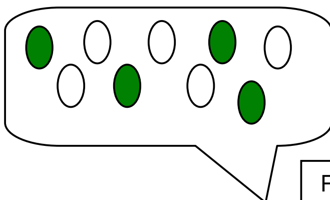
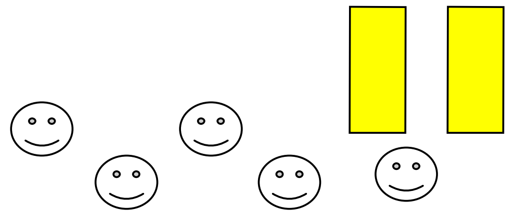
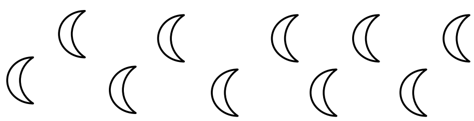
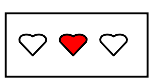
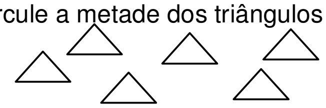
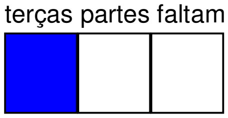
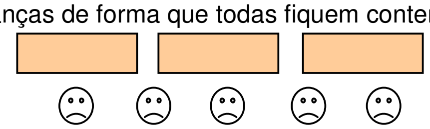
Procuramos elaborar um instrumento de avaliação semelhante ao pré-teste, contendo também dez questões cujo grau de dificuldade e equivalência matemática foram respeitados, com exceção da questão de número quatro que, por um lapso de atenção, saiu impressa errada e, na qual a quantidade de crianças deveria ser seis e não cinco. Isto dificultou ainda mais a questão.

Como parte integrante dessa metodologia, o referido pós-teste foi aplicado 12 dias após o término da seqüência de ensino, objetivando analisar seus resultados e compara-los com os do pré-teste. Queremos estudar o processo de resolução das situações propostas e das estratégias utilizadas nos cálculos e nas compreensões das representações dos números fracionários, bem como avaliar a seqüência proposta por nós.

Esperamos encontrar um panorama de resultados mais satisfatórios do que os obtidos no pré-teste, apesar de não termos a pretensão de solucionar todas as eventuais dificuldades apresentadas pelo grupo nesse curto espaço de tempo. Temos consciência de que se trata de crianças em formação, cujo período de desenvolvimento mental varia de indivíduo para indivíduo, talvez precisem de um tempo maior para assimilar esquemas de ação que lhes permitam operar com esse novo conjunto e acomodar o esquema de conceito numérico.

Segundo Vergnaud (1990), o conhecimento conceitual deve estar imerso dentro de situações-problema. Enquanto a ação refere-se a um procedimento do participante, a transformação atribui uma mudança de estado natural, a operação reporta-se ao procedimento usado para resolver um problema. Ao definir um campo conceitual por intermédio de uma terna C= (s, I, S), Vergnaud (ibid) considera as resoluções de uma certa quantidade de problemas denominados situações, que envolvem os conceitos, as relações e estruturas, os conteúdos e operações do pensamento, conectados uns aos outros e suscetíveis de ser combinados durante o processo de aquisição.

Apresentamos a seguir, para clareza do leitor, um quadro, semelhante ao anterior, contendo as dez questões do pós-teste.

1. Pinte a metade da metade na figura abaixo:  Represente numericamente a quantidade que você pintou: Resposta:	2. Represente com número a parte pintada na figura abaixo:  Resposta :
3. No balão, somente quatro bolas estão pintadas. Como você pode representar numericamente as bolas verdes em relação a todas as bolas que estão no balão abaixo?  Resposta:	4.Divida os dois bolos entre as cinco crianças. Quanto cada criança irá receber ?  Resposta: ______________________________
5. Circule a quinta parte das luas abaixo:  Represente numericamente a parte que você circulou em relação a todas as luas existentes: Resposta:	6. No balcão de uma doceria podem ser vistas três tortas de maracujá, quatro tortas de chocolate e cinco tortas de morango. Joana comprou uma torta de chocolate, uma de maracujá e duas de morango. Como você pode representar, numericamente, as tortas que Joana comprou em relação a todas as tortas da doceria? Resposta
7. No quadrado abaixo, Pedro pintou um coração. Como você pode representar numericamente o coração pintado em relação a todos os corações ?  Resposta:	8. Circule a metade dos triângulos abaixo:  Represente numericamente a quantidade que você circulou em relação ao total de triângulos: Resposta:
9. Antonio pintou a terça parte do retângulo. Quantas terças partes faltam para terminar ?  Resposta: ______________________________	10. Divida três doces de leite para cinco crianças de forma que todas fiquem contentes:  Escreva a quantidade que cada criança recebeu. Resposta: ___________________.

Quadro 4.4 – Apresentação das questões do pós-teste

4.2.4. Apresentação e descrição da Seqüência de ensino

A seqüência de ensino foi elaborada e ministrada por nós e contou com a colaboração da professora do grupo experimental, que atuou como observadora ora das questões gerais dos alunos, ora de uma dupla de crianças, anotando as discussões entre elas e a forma como estavam raciocinando frente às questões apresentadas ou da classe como um todo nos momentos de institucionalização. Foram planejados dez encontros de duas horas cada, no período da manhã, com 30 (trinta) alunos da 3ª série de uma Escola Pública, situada na região central da cidade de São Paulo. Os encontros aconteceram três vezes por semana. Os alunos eram provenientes de famílias pobres e de classe média baixa do centro da cidade, sendo alguns residentes em cortiços ou em pequenos quartos que abrigam vários integrantes da mesma família.

Resumidamente, os encontros são descritos, conforme o quadro a seguir:

ENCON TROS	OBJETO DE ESTUDO	OBJETIVO	Nº DE ATIVIDADES (CONTEÚDO)
1º	- DIVISÃO DE NÚMEROS NATURAIS (RESTO ZERO)	REVISAR OS CONCEITOS DA DIVISÃO COM NÚMEROS NATURAIS	3; REPARTIÇÃO COM USO DE MATERIAL SIGNIFICATIVO, COM QUANTIDADES DISCRETAS E CONTÍNUAS; REPRESENTAÇÃO PICTÓRICA; REPRESENTAÇÃO SIMBÓLICA.
2º	- DIVISÃO DE NÚMEROS NATURAIS (RESTO DIFERENTE DE ZERO)	CRIAR UMA SITUAÇÃO DE MODO A SURGIR A FRAÇÃO.	3; MANIPULAÇÃO E DIVISÃO COM OBJETOS CONTÍNUOS; REPRESENTAÇÃO DESSAS ATIVIDADES POR MEIO DE DESENHOS; ESCRITA FORMAL
3º	- NOMEAR OS RESTOS DAS DIVISÕES E REPRESENTÁ-LAS NUMERICAMENTE	PROPICIAR A LEITURA E A ESCRITA CORRETA DAS FRAÇÕES, DE FORMA SIGNIFICATIVA.	3; ATRAVÉS DAS SENTENÇAS MATEMÁTICAS, OBSERVAR OS RESTOS, REPRESENTANDO-OS CORRETAMENTE E NOMEANDO-OS; DESENHAR SITUAÇÕES DE DIVISÃO COM REPRESENTAÇÕES DE FRAÇÕES MISTAS; REPRESENTAR COMO SE LÊEM OS RESTOS.
4º	- FRAÇÕES PRÓPRIAS	CONCEITUAR A FRAÇÃO PRÓPRIA NA RELAÇÃO PARTE-TODO.	3; MANIPULAÇÃO DE QUANTIDADES CONTÍNUAS E DISCRETAS, EFETUANDO DIVISÕES DO TODO EM PARTES IGUAIS, CONSERVANDO AS ÁREAS DAS FIGURAS OU RELACIONANDO UM PARA MUITOS. DESENHAR AS SITUAÇÕES VIVENCIADAS.
5º	- FRAÇÕES PRÓPRIAS	CONCEITUAR FRAÇÕES USANDO A RELAÇÃO PARTE-TODO, COM BASE EM UMA SITUAÇÃO-PROBLEMA.	2; RESOLVER UM PROBLEMA COM VÁRIAS SITUAÇÕES, EM QUE QUANTIDADES DISCRETAS E CONTÍNUAS FORAM CONSIDERADAS; REPRESENTAR OS NÚMEROS NA FORMA A/B; JOGO DA MEMÓRIA.
6º	- REVISITANDO TODOS OS ASSUNTOS TRABALHADOS	PROPICIAR A COMPREENSÃO DO CONCEITO DA FRAÇÃO E SUA REPRESENTAÇÃO VIA SITUAÇÃO-PROBLEMA.	1; REPRESENTAR SITUAÇÕES DE COMPRA E VENDA DE PRODUTOS, DE FISCALIZAÇÃO DAS OPERAÇÕES ENVOLVIDAS EM CADA SITUAÇÃO, COMO PERSONAGEM DE UMA SITUAÇÃO DA VIDA REAL.
7º	- FRAÇÕES EQUIVALENTES	COMPARAR AS ÁREAS DAS FIGURAS, ENCONTRANDO AS EQUIVALÊNCIAS ENTRE ELAS.	4; RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS; MANIPULAÇÃO DO MATERIAL SIGNIFICATIVO E DESAFIADOR, POR MEIO DE FIGURAS GEOMÉTRICAS DIVIDIDAS EM PARTES IGUAIS; REPRESENTAÇÃO DAS FIGURAS ENCONTRADAS NO PAPEL (DESENHO); E REPRESENTAÇÃO FORMAL, COM USO DE FRAÇÕES.
8º	- ATIVIDADE PARA CONSTRUÇÃO DE ÁREAS EQUIVALENTES;	DIVIDIR FIGURAS DIVERSAS DE MODO A GARANTIR A EQUIVALÊNCIA DAS ÁREAS E RESOLVER SITUAÇÕES-PROBLEMA.	2; REPRESENTAR SIMBOLICAMENTE AS ÁREAS CONSTRUÍDAS COM AS FRAÇÕES E CONSERVAR AS ÁREAS; RESOLUÇÃO DE SITUAÇÕES-PROBLEMA.
9º	- ATIVIDADE DE CRIAÇÃO ARTÍSTICA	COM QUANTIDADES CONTÍNUAS, CRIAR UM DESENHO EM PAPEL QUADRICULADO. RELACIONAR AS PARTES EM RELAÇÃO AO TODO.	4; IDENTIFICAR A PARTIR DE MODELOS PRONTOS A RELAÇÃO PARTE-TODO; CRIAR UMA OBRA DE ARTE; RELACIONAR SUA OBRA, OU SEJA, QUANTOS QUADRADOS PINTADOS EM RELAÇÃO A TODOS OS EXISTENTES; ATIVIDADE DE CORRESPONDÊNCIA UM A UM.
10º	ATIVIDADE : REVISÃO GERAL.	PROPICIAR UMA REFLEXÃO SOBRE TODOS OS ASPECTOS DA FRAÇÃO NO DISCRETO E NO CONTÍNUO.	2; FORMAR UM GRANDE GRUPO, E PROPICIAR A PARTICIPAÇÃO DE TODOS. DISPOR DE VÁRIAS QUANTIDADES DISCRETAS E CONTÍNUAS; ATUAR COMO COMPRADOR E APRESENTAR UMA SOLUÇÃO A UMA DADA SITUAÇÃO-PROBLEMA DESAFIADORA.

Quadro 4.5 – Resumo dos Encontros – objetivos e conteúdos

O objetivo de nossa seqüência de ensino foi apresentar o conceito dos números fracionários e sua representação, propondo atividades que fossem, além de significativas às crianças, cognitivamente desafiadoras e que mobilizassem uma reflexão pertinente sobre as facetas da representação deste novo número. Limitamo-nos às concepções de parte-todo e quociente. Temos ciência de que essa seqüência não irá esgotar a introdução conceitual desses números, fazendo-se necessária a elaboração de outras seqüências que permitam sua ampliação.

Segundo Vergnaud (1988), as competências e concepções desenvolvem-se ao longo do tempo, por meio de experiências envolvendo um grande número de situações tanto no interior da escola quanto fora dela. Assim, o conhecimento dos estudantes tanto pode ser explícito, no sentido de que eles podem expressá-lo de forma simbólica, quanto implícito, no sentido de usá-lo em ação, escolhendo operações adequadas, sem expressar as razões dessa adequação. Para que o professor possa perceber, quais os conhecimentos que o aluno traz consigo frente a um dado objeto a ser ensinado, é preciso que ele busque um entendimento do que o aluno realiza e de como faz, relacionando os dois aspectos. Se o número de encontros está limitado, conseqüentemente, estão restritas as experiências pelas quais os alunos poderão participar e não poderemos garantir o desenvolvimento de todas as suas competências neste tema.

A classe era composta por 30 alunos, com idade entre 8 e 13 anos de idade. Quando da aplicação do pré-teste, 12 dias antes da seqüência, estavam presentes na sala 23 alunos; 12 dias depois, quando aplicamos o pós-teste, havia 27 alunos. Para efeito do presente estudo, foram analisados apenas os alunos com idade entre 8 e 10 anos que participaram do pré e pós-teste; com isso o número final de sujeitos resumiu-se a 19 alunos.

Todo o material foi distribuído aos alunos em cada encontro; eles trabalhavam em classe, em grupos com dois ou mais participantes ou, individualmente; no final, o material era recolhido, corrigido e aberto para discussão e síntese final, além do direcionamento para a formalização dos números fracionários. Ao final de cada institucionalização, ou seja, no sexto e décimo encontros, em especial, foram desenvolvidas atividades teatrais nas quais as crianças representavam papéis de vendedores, caixa, compradores e conferentes, papéis esses que estavam relacionados ao contexto econômico-social e que os desafiavam a resolver situações-problema com números fracionários.

Nosso procedimento constou de:

- Distribuição do material, tal como: fichas de atividades, papel sulfite e quadriculado, régua, palitos de fósforo, figuras previamente divididas e jogos elaborados por nós, etc.;
- Orientação na montagem de grupos para discussão das atividades;
- Circulamos pela sala de aula para responder a questionamentos e sanar dúvidas;
- Gerimos a discussão e nos encarregamos de proceder com a síntese final;
- Recolhemos todo o material ao final de cada encontro.

A dinâmica de nossa intervenção didática constou de atividades significativas, cognitivamente desafiadoras, que propiciavam às crianças uma reflexão sobre a compreensão das representações apresentadas. Desse modo, coube ao pesquisador e ao professor da classe as funções de coordenarem as atividades, propiciar as discussões e sistematizar os resultados encontrados pelos alunos, discutindo os erros e os acertos. As intervenções eram realizadas sempre que um aluno ou grupo de alunos apresentava uma questão sobre o tema em pauta. Inicialmente, propúnhamos à classe a mesma dúvida apresentada, em lugar de responder à questão, lançávamos outra como desafio, até que a resposta fosse fornecida por algum aluno. Os trabalhos foram bastante variados. Houve dias em que as crianças trabalhavam individualmente; em outros, em duplas ou em grupos maiores, e até com todos de uma só vez. Após cada criança ou grupo receber o material da atividade, prosseguíamos com uma leitura geral com todos, esclarecendo algumas dúvidas. Marcávamos um tempo para que elas pudessem responder ou realizar a atividade e, em seguida, formando o grande grupo, abríamos para o debate das respostas encontradas diante das questões que foram propostas inicialmente.

O princípio norteador de nosso trabalho está baseado na teoria de Vergnaud quanto aos aspectos da participação ativa do aluno na construção de seu conhecimento e na função do pesquisador que é de orientador da aprendizagem. Segundo Vergnaud (1988), observa-se que os alunos usam teoremas em ação em domínios de contextos fáceis e valores numéricos simples, sendo estreito o âmbito de validade para eles. Entretanto tais teoremas são a primeira base intuitiva que os professores podem usar para entender e formalizar os conceitos. Os professores podem expressar e objetivar os teoremas em ação e ajudar os alunos a estender seu uso nas inter-relações e aplicá-los em situações mais complexas.

Antes de iniciarmos as descrições de cada encontro, apresentamos um quadro com os dez encontros no qual abordamos a forma utilizada nas interpretações da fração como parte-todo e como quociente.

Abordagem / Encontro	**Divisão com naturais**	**Fração: modelo parte-todo**	**Fração: modelo quociente**
1	**X**		
2			**X**
3			**X**
4	**X**	**X**	
5	**X**	**X**	
6	**X**	**X**	**X**
7		**X**	
8			**X**
9		**X**	**X**
10	**X**	**X**	**X**

Quadro 4.6 – Classificação dos encontros

ENCONTRO 1 : **Dividir é repartir**

a) objetivos

- Motivar os alunos elucidando a importância do trabalho e a participação de todos.
- Reconhecer e proceder corretamente a divisão de quantidades discretas e contínuas.
- Representar pictoricamente as atividades realizadas;
- Escrever corretamente a sentença matemática.

b) atividades

Realizamos três atividades, sendo todas em dupla com respostas orais e escritas .

ATIVIDADE 1

Iniciamos a aula distribuindo às duplas de alunos uma caixa de fósforos queimados (para evitar acidente) contendo 50 palitos cada. Pedimos aos alunos que separassem apenas 12, deixando-os sobre a carteira e o restante na própria caixa. Com os 12 palitos em mãos, pedimos que os alunos dividissem ao meio, ou seja, para duas pessoas e perguntamos com quantos palitos cada um ficou. Em seguida, solicitamos aos mesmos que repartissem para quatro, três e seis pessoas. As quantidades foram diversificadas e utilizamos a totalidade dos palitos, ou seja, 50 o número maior utilizado.

ATIVIDADE 2

Depois da manipulação, pedimos para que eles desenhassem as situações de divisão realizadas com os palitos. Solicitamos que os alunos de cada dupla trocassem suas respostas. Com as respostas dos colegas em mãos, cada dupla iria explicar como foi que entendeu a divisão dos colegas. Houve a correção dos erros ocorridos. Pedimos que cada dupla devolvesse ao colega a folha recebida, ficando cada dupla com sua folha original.

ATIVIDADE 3

Finalmente, passamos a representar a sentença matemática de cada situação. Relembramos todas as atividades anteriores e começamos a registrar simbolicamente cada item das atividades realizadas. Houve a correção geral na lousa para todas as duplas. Entregamos uma folha contendo outras divisões para que eles respondessem, realizando a sentença matemática e apresentando a resposta. Ao final do encontro, recolhemos as fichas.

c) comentários

Consideramos normais as atitudes dos alunos de falar com os colegas de classe, levantar da carteira e andar pela sala, em decorrência da postura participativa e troca de atividades entre as duplas. A cada semana, a professora desta classe realiza trabalhos em grupo para despertar a capacidade de trabalho grupal, colaboração entre os colegas e para romper barreiras individualistas.

d) Avaliação do encontro

O primeiro encontro ocorreu 12 dias após a aplicação do pré-teste. Consideramos ter atingido os objetivos propostos, ao final da aula foi possível revisar as noções da operação de divisão com números naturais. Os alunos apresentaram dificuldades com relação à compreensão das classes e ordens da base dez. Esta dificuldade além de ser percebida por nós, durante o encontro, também o foi pela professora da classe que ao apresentar cadernos de alunos que continham operações realizadas, verificou não serem respeitadas as classes e as ordens do sistema de numeração decimal.

ENCONTRO 2: **Divisão que não é exata !**

a) Objetivos

- Manipular quantidades contínuas;
- Observar a existência de divisões exatas e divisões com resto;
- Relacionar os restos de cada divisão e criar uma forma de representá-lo;
- Revisão do sistema numérico decimal.

b) Atividades

Foram realizadas quatro atividades, todas em duplas, com respostas orais e escritas.

ATIVIDADE 1

Elaboramos um cartaz de pregas contendo as classes das unidades, milhares e milhões e as ordens das unidades, dezenas e centenas (Sistema de numeração decimal). Para manipular esse cartaz, usamos palitos de sorvete coloridos. Criamos algumas situações com as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão. Essa atividade foi necessária, pois havíamos detectado, com a professora da sala, que os alunos operavam com os naturais sem considerar as classes ou ordens no sistema decimal. Escolhemos também alguns alunos para manipular o cartaz e realizar algumas operações.

ATIVIDADE 2

Distribuímos aos alunos três retângulos de papel e pedimos que dividissem três retângulos para duas pessoas. Houve questionamento para saber se poderiam dobrar. Dissemos que os retângulos poderiam ser dobrados em quantas partes eles quisessem, a fim de obter unidades menores que o inteiro e possibilitando-lhes repartir igualmente as partes solicitadas. Frisamos bastante que cada pessoa deveria receber a mesma quantidade. Nesta atividade, procuramos fornecer divisões cujas partes dobradas ficam sempre em progressão geométrica, quando dobradas ao meio, em quatro ou oito partes iguais, pois os retângulos mediam 10 cm por 7,5 cm, (seria problemático aumentar muito as dobraduras). A atividade foi manipulativa; oralmente as crianças respondiam com quanto cada pessoa deveria ficar.

ATIVIDADE 3

Após inúmeras divisões realizadas com o material concreto, solicitamos aos alunos que representassem, por meio de desenhos, todas as operações feitas. Para que eles pudessem se lembrar delas, levamos um cartaz com todas as atividades realizadas. Pedimos que as duplas trocassem suas respostas para conferir os erros e os acertos. Discutimos sobre os seguintes temas: se os desenhos estavam claros, como as outras duplas interpretaram e se era possível responder com base nos dados apresentados no papel.

ATIVIDADE 4

Distribuímos uma folha de atividade com divisões de números naturais, utilizando-nos da "chave $\underline{|\quad\quad}$ " para apresentar as sentenças matemáticas. Seis questões mostraram a divisão exata, como continuidade da discussão feita na aula anterior. As outras 12 questões continham restos diferentes de zero. Começamos a questionar as crianças sobre como elas poderiam representar as respostas das sentenças matemáticas efetuadas, usando os números. Depois das discussões e soluções apresentadas, passamos a escolher a forma Euclidiana da soma dos inteiros com o resto dividido pelo dividendo (d – dividendo; D – divisor; r – resto; e q – quociente), ou seja: q.D=d+r, podendo ser representado q (inteiros) + r/D. Vejamos um exemplo numérico desta situação: 16 : 3 = 5 e resto 1. Informamos que podemos escrever o resultado obtido na forma 5+1/3, nomeando essa nova escrita de fração; o nome foi sugerido por três alunos que, provavelmente, já tinham ouvido falar dela, pois é comum falar em metade na 2ª série, bem como na palavra fração. Apresentamos uma nova forma sem o sinal da operação de adição, escrevendo o número misto e esclarecendo que ambos possuem o mesmo valor, estando porém registrados de forma diferente.

c) Comentários

A atividade envolveu a todos pois prontamente respondiam às questões realizadas por nós. A participação foi ativa, com poucas dispersões.

d) Avaliação do encontro

O encontro foi muito proveitoso, pois tivemos o *"feedback"* da professora, que nos contou que eles estavam realizando as operações, considerando as classes e ordens, sem os erros cometidos anteriormente. Pudemos observar esses avanços por meio das anotações realizadas nos cadernos dos alunos. O fato pôde ser confirmado em função das atividades com as quatro operações que a professora realiza com os alunos fora de nossos encontros. As dúvidas anteriores com relação às classes e ordens puderam ser clareadas por meio do "cartaz de pregas", um recurso didático simples, barato e que pode ser utilizado por todos os professores das séries iniciais. A manipulação dos objetos contribuiu para a formalização das representações numéricas na base dez. Observamos ainda que até, então, as unidades, dezenas e centenas não tinham significado. A partir do momento em que eles compreenderam que, para formar uma dezena, era necessário ter dez unidades e que em cada posição os algarismos de zero a nove têm seu valor posicional na escrita do sistema de base dez, os erros foram minimizados.

ENCONTRO 3: **Dar nomes aos restos**

a) Objetivos

- escrever corretamente um meio, um terço, um quarto, três quartos, etc.;
- comparar a escrita matemática (¾) com a linguagem três quartos;
- reconhecer nos desenhos um meio, um terço, etc.

b) Atividades

Neste encontro, realizamos três atividades, a primeira delas por meio de símbolos formais, a segunda via representação pictórica (desenhos) e a terceira por intermédio de jogos.

ATIVIDADE 1

Distribuímos aos alunos uma folha contendo várias operações de divisão com resto zero e também diferente de zero. Pedimos às duplas que resolvessem as questões e, em seguida, apresentassem as respostas de cada uma. Depois de representada cada resposta, entregamos outra folha contendo somente as respostas, ou seja, os números fracionários que havíamos conceituado na aula anterior. O espaço na frente de cada resposta foi utilizado, para que os alunos escrevessem a forma de leitura atribuída a cada uma das frações apresentadas. Realizamos a correção de todos os itens em conjunto.

ATIVIDADE 2

De posse de outra folha em branco, solicitamos aos alunos que desenhassem as respostas obtidas na atividade um, porém sem numerá-las ou deixando-as na ordem da resolução. Pedimos às duplas que trocassem as folhas para que os colegas tentassem descobrir qual desenho pertencia a qual escrita simbólica. Passamos à correção dos itens e esclarecemos as dúvidas que surgiram, conforme as questões por eles apresentadas.

ATIVIDADE 3

Pedimos que lessem os resultados. Baseados nas falas dos alunos, começamos a explicar que, para que todos pudessem entender, era necessário uma única forma de expressar aqueles números; assim sendo, começamos por aqueles que estavam corretos, a metade ou um meio, um terço, um quarto, ... fluindo naturalmente até o dez; em seguida, explicamos que lemos o número normalmente e acrescentamos a palavra avos.

c) Comentários

O encontro foi bastante produtivo, pois a participação dos alunos superou as expectativas; todos queriam responder a nossos questionamentos. Percebemos que é importante mudar a dinâmica a cada 50 minutos, porque eles começam a se desinteressar, quando a atividade prolonga-se muito.

d) Avaliação do encontro

O encontro possibilitou-nos perceber que as atividades de divisão podem contribuir na introdução dos números fracionários. A fração como quociente terá sentido se o aluno compreender o processo da divisão. Outro ponto importante foi sobre a leitura das frações, que é adquirida com mais facilidade, pois quando perguntávamos como se lia determinada fração, rapidamente, a quase totalidade da sala respondia em coro.

ENCONTRO 4 : **O contínuo e o discreto na relação parte-todo**

a) Objetivos

- reconhecer a fração na relação parte-todo em figuras de áreas equivalentes;
- observar a importância da conservação de área;
- relacionar as figuras com a escrita simbólica fracionária;
- reconhecer que as quantidades discretas não podem ser divididas, apenas relacionadas.

b) Atividade

Realizamos quatro atividades, nas quais os alunos trabalharam individualmente ou em grupo, utilizando-se de botões coloridos, problemas com representações pictóricas para pintar e debate. Apresentamos algumas situações para que relacionassem as partes de um todo, de forma a garantir a participação efetiva de todos, por meio de brincadeiras que os envolvessem.

ATIVIDADE 1

Nesta atividade, pedimos aos alunos que pintassem a fração correspondente. Na ficha, tínhamos a fração na escrita simbólica, um retângulo com as divisões de acordo com os denominadores de cada fração e um espaço para que eles escrevessem a forma como se lê cada uma das frações. Elaboramos oito desenhos, sendo sete de frações próprias e uma de fração imprópria. Com relação às frações próprias, cerca de 80% resolveram muito bem as questões, mas na fração imprópria tivemos de retomar a divisão pelo processo iniciado, apresentando o resultado em que a parte que cabia a cada um era maior que um inteiro. Depois da orientação, a atividade resultou em sucesso por parte dos alunos. Ao final, recolhemos as folhas.

ATIVIDADE 2

Iniciamos a atividade com um debate sobre o que era possível ser repartido ao meio ou três, ou quatro partes, e o que não era. Apresentamos exemplos do tipo: chocolate, pizza, pessoa, animal, carteira, giz, barbante, água, etc.. Nos exemplos, os alunos identificaram que as pessoas e os animais não poderiam ser cortados ao meio, pois poderiam não sobreviver. Após essa identificação e discussão, pedimos que contassem quantos alunos estavam presentes na sala de aula naquele dia. Eles disseram que eram 25. Solicitamos à aluna Maynara que se levantasse. Explicamos que iríamos relacioná-la em relação à sua classe. Depois das questões dos alunos, para melhor compreensão de nosso objetivo, escrevemos na lousa 1/25. O mesmo procedimento foi usado com relação à fileira dos alunos que estavam sentados próximos às janelas. Todos fizeram a contagem e disseram que a fileira era composta de cinco alunos. Pedimos que relacionassem essa quantidade de alunos em relação à quantidade de alunos da classe. Encontraram a resposta 5/25. Passamos a segunda fileira, com seis alunos, e eles responderam 6/25; na terceira, 4/25; na quarta, 7/25 e, finalmente, na quinta, 3/25. Dissemos que mesmo quando não se pode dividir os elementos de um certo conjunto, nós podemos relacioná-los, um ou mais, em relação ao grupo todo. Então, solicitamos exemplos de frações com substâncias como a água, o barbante e outras quantidades contínuas e quantidades discretas.

ATIVIDADE 3

Entregamos a cada um dos alunos um saquinho contendo botões (de camisa) nas cores azul, amarelo e branco. Cada saquinho continha quantidades variadas de botões e de cores, conforme o quadro abaixo, preparada aos 30 alunos da classe:

BRINCADEIRAS COM OS BOTÕES

Cores/cças	AZUL	AMARELO	BRANCO	Total
1	**2**	**4**	**1**	7
2	**3**	**5**	**0**	8
3	**4**	**3**	**2**	9
4	**3**	**4**	**2**	9
5	**4**	**2**	**1**	7
6	**2**	**6**	**3**	11
7	**4**	**8**	**1**	13
8	**2**	**2**	**3**	7
9	**0**	**2**	**1**	3
10	**5**	**1**	**2**	8
11	**0**	**5**	**2**	7
12	**7**	**2**	**1**	10
13	**8**	**1**	**3**	12
14	**2**	**2**	**1**	5
15	**2**	**1**	**2**	5
16	**4**	**4**	**0**	8
17	**3**	**1**	**1**	5
18	**1**	**3**	**1**	5
19	**2**	**2**	**2**	6
20	**2**	**2**	**4**	8
21	**3**	**1**	**2**	6
22	**3**	**3**	**0**	6
23	**6**	**1**	**0**	7
24	**0**	**3**	**2**	5
25	**1**	**1**	**2**	4
26	**2**	**1**	**1**	4
27	**1**	**2**	**3**	6
28	**4**	**4**	**2**	10
29	**2**	**1**	**6**	9
30	**2**	**3**	**6**	11
				221

Quadro 4.7 – Brincadeiras com botões.

De posse desses saquinhos, pedimos a cada aluno que efetuasse a contagem da quantidade total de botões, bem como das quantidades de cada cor. Explicamos como seria o jogo. Cada aluno iria retirar um cartão, que estava dentro de uma caixa, com uma fração escrita na forma simbólica; ou uma frase dizendo: relacione todos os botões do saquinho; ou ainda, escreva como se lê a fração "tal". Ao sortear um cartão, todos juntos liam a fração. Levantava a mão quem tinha, por exemplo 2/9 (que poderia ser dois botões amarelos, quatro azuis e três brancos), nos quais estariam relacionados os botões amarelos em relação a todos do saquinho. Depois que todos tivessem retirado um cartão e compreendido como relacionar os botões do saquinho, passamos para outra atividade.

ATIVIDADE 4

Aproveitando que todos estavam de posse de um saquinho com botões, solicitamos que cada um dos alunos desenhasse os botões de seu saquinho, circulando na forma de diagrama o conjunto de todos os seus botões. Em seguida, pedimos que relacionassem todas as cores e quantidades existentes no saquinho. Exemplo:

3 botões amarelos
5 botões azuis e,
2 botões brancos.

As relações encontradas seriam: 3/10, 5/10, e 2/10.

Terminada esta etapa, cada aluno colocou o nome na folha; em seguida, pedimos que trocassem de saquinho com os colegas. Já agora, de posse de um novo saquinho, solicitamos que anotassem em sua folha o nome de seu coleguinha e representassem o novo conjunto de botões da mesma forma como haviam representado o seu.

c) Comentários

Procuramos modificar as atividades e estratégias para dinamizar e manter o interesse, evitando a dispersão entre eles.

d) Avaliação do encontro

O grupo colaborou bastante nesta atividade. Os alunos questionaram sobre as possibilidades das relações entre as diversas cores de botões de cada saquinho, não se limitando mais a uma única cor. A atividade possibilitou a manipulação com quantidades discretas, além de facilitar a compreensão do que é possível dividir e do que não o é. Os botões, se quebrados, perdem as suas características e utilidade.

ENCONTRO 5 : **Relação parte-todo para os discretos**

a) Objetivos

- Reconhecer, num dado conjunto de quantidades discretas, as partes em relação a todos os seus elementos;
- comparar um ou muitos em relação ao todo, para quantidades discretas e contínuas;
- escrever corretamente as frações encontradas nestas relações parte-todo;
- resolver as situações-problema com o uso dos números fracionários.

b) Atividades

Neste encontro, trabalhamos duas atividades com objetos discretos, de modo a observar a relação parte-todo já estudada no contínuo. As crianças realizaram as atividades individualmente.

ATIVIDADE 1

Iniciamos a aula daquele dia com um problema relatado verbalmente às crianças, que dizia o seguinte: Ontem, em minha casa, estávamos reunidos eu, meu pai e meus dois irmãos. Assim que chegamos, percebemos que alguém havia deixado para nós os seguintes presentes: 15 chocolates, 18 flores e 12 balas que deveriam ser divididos igualmente entre todos. Como a briga foi muito grande e ninguém conseguiu dividir, nós trouxemos a questão para vocês, que são craques em resolver problemas. Pedimos, então, que eles dividissem correta e igualmente todos os presentes, a fim de resolver de vez as dúvidas, pois um dos meus irmãos, o caçulinha, queria por toda lei ficar com cinco chocolates. O problema posto para eles foi: quanto realmente cada um deve receber? Entregamos a cada aluno uma folha com os principais dados para resolver o problema.

ATIVIDADE

NOME: _________________________________ 3ª série B

PROBLEMA ... como resolver !!!!

Éramos em **4** pessoas

15 chocolates

Desenho	Sentença Matemática

18 flores

Desenho	*Sentença Matemática*

12 balas

Desenho	*Sentença Matemática*

ATIVIDADE 2

Pedindo aos alunos que formassem duplas, entregamo-lhes um Jogo de Memória, para que inicialmente reconhessem as formas escritas, comparadas aos desenhos. Isso posto, solicitamos que virassem as peças para baixo, de modo que não conseguissem visualizar nem o desenho, nem as formas simbólicas. Cada aluno deveria virar uma peça de cada conjunto e comparar se os mesmos eram correspondentes ou não

c) Comentários

A primeira parte foi um desafio, pois apresentamos problemas com quantidades discretas e contínuas e, apesar dos encontros anteriores, as crianças ainda tinham dúvidas e se atrapalhavam para iniciar a resolução.

d) Avaliação do encontro

Apesar da ansiedade inicial para resolver corretamente os problemas, aos poucos as crianças foram analisando cada questão. Por outro lado, nós lhes também devolvemos, com novos questionamentos, as questões por elas levantadas; elas pararam, pensaram e tentaram novamente chegar à solução. Com relação ao jogo de memória, inicialmente, ocorreram dúvidas, pois todos queriam jogar o mais rápido possível o que, neste caso, é inviável, pois torna-se necessário que se reconheçam primeiro as peças do jogo para só, então, começar a jogar.

ENCONTRO 6 : **Teatro como vivência do real**

a) Objetivos

- institucionalizar os conteúdos trabalhados;

- vivenciar situações do cotidiano;
- operacionalizar as situações tanto no fazer quanto no conferir.

b) atividades

Desenvolvemos uma atividade apenas, com os alunos divididos em equipes, cada uma representando o vendedor, o cobrador e o comprador, além de uma equipe que conferia todos os cálculos realizados. Em razão da variedade de situações e do pouco tempo disponível, não foi possível aplicar outras atividades.

ATIVIDADE 1

Realizamos esta atividade com a técnica da representação teatral. Para tal, montamos uma bancada de venda de produtos com os devidos preços, conforme abaixo:

VENDEMOS

TIPO	PREÇO POR UNIDADE
DOCE DE LEITE	10
TORTA DE UVA	50
DOCE DE ANIS	100
CHOCOLATE VERDE	200
TORTA DE MORANGO	50
TORTA DE CEREJA	500
BALÕES (BEXIGA)	10
ARGOLAS	50
BOLINHAS DE GUDE	100

Quadro 4.8 – Relação dos tipos de mercadorias utilizadas no teatro

Cabe observar que os valores foram fixados em unidades inteiras a fim de que não ocorressem outras interferências nos cálculos das frações, já que era esse o enfoque maior de nossa observação.

A classe foi dividida em grupos de três alunos cada um, e a equipe dirigia-se a frente da sala para representar o vendedor, o caixa e o comprador. Os demais alunos faziam o papel de conferentes das situações apresentadas pelo grupo. Nós exercíamos o papel de Banco, entregando a cada comprador uma certa quantia em dinheiro para que ele pudesse efetuar a compra (neste encontro foram fotografadas algumas situações).

A dinâmica da aula procedeu-se da seguinte forma: cada grupo decidia qual dos três papéis propostos para a atividade iria representar. O comprador dirigia-se ao Banco para retirar o dinheiro e a lista de compras, conforme exemplo abaixo:

VOCÊ RECEBERÁ : 2.200 reais	
Deverá comprar:	**1/3 de chocolate verde** **1/5 de torta de uva** **3/9 de doce de anis**
Responder ao final: quanto lhe sobrou em dinheiro ?	

Na bancada tínhamos:

Torta de cereja – dividida em quatro partes
Torta de morango – dividida em oito partes
Torta de uva – dividida em cinco partes
Doce de anis – dividida em nove partes
Doce de leite – dividido em dezesseis partes
Chocolate verde – dividido em seis partes

Saco com cinqüenta bexigas (balões)
Saco com cento e cinqüenta bolinhas de gude.

Argolas separadas em cores:

10 azuis
20 amarelas
12 verdes
30 rosas
8 laranjas
3 vermelhas.

Ao receber a lista de compras, anotávamos na lousa os dados obtidos pelo comprador. Todos os alunos realizavam as contas, para que no final procedêssemos à correção e à conferência dos gastos e do dinheiro devolvido. No caso de ocorrer algum erro, eles chamavam o vendedor ou o comprador de “ladrão”, pois um deles ficava com uma quantia superior ao correto. Houve também quatro grupos que acertaram tudo e todos os saldaram com palmas. Os cálculos baseavam-se na observação do preço e no cálculo de quantas peças ou pedaços deveriam ser comprados com base na fração solicitada na lista de compras. Cada aluno realizou suas anotações em uma folha identificada com seu nome que, posteriormente, recolhemos.

A atividade foi bastante interessante, pois além dos alunos participarem com muito entusiasmo, dando palpites sobre a quantidade estar correta ou não, sobre os cálculos estarem corretos ou não, diversas situações apresentadas continham cálculos do tipo: a torta tem oito pedaços e devo comprar um quarto, quantos pedaços vou levar e quanto devo pagar? Se o cálculo da fração estivesse incorreto, conseqüentemente, o dinheiro também estaria. Brincamos com todos dizendo que se eles tivessem que realizar uma compra para seus pais, no final iriam levar uma bronca, pois com certeza chegariam em casa com dinheiro a menos. A atividade, significativa e desafiadora, favoreceu a compreensão dos cálculos.

Segundo Vergnaud (1988), os conceitos são formados por situações-problema com as quais os alunos se deparam. As crianças constroem o campo conceitual por intermédio de experiências da vida cotidiana e da escola.

A atividade durou cerca de duas horas e todos os grupos puderam participar.

c) Comentários

Apesar do entusiasmo das crianças, analisamos que faltou uma folha com todas as situações, para que os alunos pudessem acompanhar os cálculos com mais atenção, pois alguns demoravam mais e se perdiam para copiar da lousa as fichas retiradas pelos colegas de classe, não respondendo a todas as questões envolvidas nas situações ocorridas.

d) Avaliação do encontro

Foi uma atividade bastante divertida e a participação das crianças foi total, com muito envolvimento nos problemas e sempre buscando não errar. Julgamos que seria importante ter elaborado uma folha com todos os problemas que iriam acontecer.

ENCONTRO 7 : **Conservação das áreas**

a) Objetivos

- comparar áreas de figuras equivalentes;
- relacionar as partes de um todo com formas diferentes;
- observar que uma fração irredutível possui inúmeras outras equivalentes;
- resolver situações-problema com uso de frações.

b) Atividades

Neste encontro, realizamos quatro atividades. Partimos de situações-problema para observar se realmente os alunos estavam compreendendo e relacionando corretamente as frações.

ATIVIDADE 1

Distribuímos a todos os alunos a ficha de atividades de número 6. Nesta primeira atividade, solicitamos que os alunos resolvessem três problemas propostos.

ATIVIDADE 6

NOME ____ 3ª SÉRIE B

Problema 1. João e Maria ganharam a mesma quantia de dinheiro do pai. João gastou a metade e Maria, a quarta parte. Quem gastou mais dinheiro?

Desenho
João Maria

Fração

João

Maria

Problema 2 . Pedro comeu três quartos de seu chocolate. Quanto falta para terminar de comê-lo?

Desenho

Fração

Problema 3. Antonio e Carlos são irmãos. Eles foram da escola até sua casa a pé. Antonio caminhou a metade do caminho e Carlos andou a metade da metade do caminho. Quem está mais próximo de casa?

Desenho

Escreva as frações que Antonio e Carlos andaram.

ATIVIDADE 2

Nesta atividade, pedimos aos alunos que formassem grupos de três elementos. Entregamos uma ficha individual contendo as instruções da atividade do grupo e três retângulos semelhantes desenhados. Cada grupo recebeu um saquinho contendo peças coloridas misturadas. Cada cor representava um retângulo semelhante, porém dividido em quantidade de partes diferentes (por exemplo: amarelo dividido em três partes, vermelho dividido em quatro partes e preto dividido em seis partes). Comunicamos a todos que com as peças de cada saquinho seria possível montar três retângulos e cada aluno do grupo estava incumbido de montar um. Demos a informação de que cada um dos alunos do grupo deveria ficar com uma cor. Aguardamos que todos conseguissem montar seus retângulos; apenas três grupos necessitaram do auxílio de nossa parte; os demais fizeram sozinhos.

O jogo de peças que distribuímos aos alunos correspondia a três peças inteiras e retangulares que foram divididas em partes iguais. As peças foram assim divididas: ao meio – considerando a diagonal, na horizontal e na vertical; três partes – na vertical, formando um triângulo eqüilátero e dois retângulos; quatro partes – usando as duas diagonais do retângulo; cinco partes – usando um retângulo (meio) e quatro triângulos retângulos e usando o losango com quatro triângulos retângulos (formato aproximado da bandeira brasileira); em seis partes – formando seis quadrados; em 12 partes - dividindo cada quadrado em dois e, formando um quadrado com dois terços da figura e um terço restante, que foi dividido em oito quadradinhos, o que equivale dizer que cada quadradinho representa um 24 avos da figura inicial e, finalmente, cada quadradinho foi dividido ao meio pela diagonal, obtendo-se assim um 48 avos da figura. Essa forma também facilitou em outros processos de comparação de inteiros, pois pudemos elaborar diversas formas de comparações com todas as retaliações descritas. Com a figura montada, cada aluno a desenhava no caderno e simbolizava, com a escrita fracionária, as suas representações. Esse material contribui para a conservação de áreas em quantidades contínuas. As divisões ao meio, por exemplo, foram feitas na horizontal, vertical e diagonal. Cada divisão apresenta uma figura geométrica diferente das demais, quer no formato, quer na área. Dessa forma, o aluno poderá explorar todas as possibilidades apresentadas e ainda criar novas.

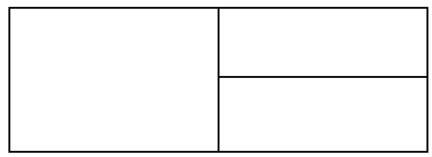
ATIVIDADE 3

Após as montagens dos retângulos, solicitamos que desenhassem as peças no retângulo já pronto da ficha. Orientamos para que utilizassem as peças e não deixassem espaços em branco, pois as áreas eram equivalentes.

ATIVIDADE 4

Pedimos que eles identificassem cada parte desta figura por meio de uma fração. Inicialmente, não sabiam como representar essa fração; observamos que muitos grupos estavam anotando frações, esquecendo-se da conservação das áreas. Observamos, então, que parassem a atividade e prestassem atenção na lousa. Desenhamos vários retângulos de mesma área na lousa e com a participação de todos, começamos a dividir os retângulos ao meio. Uma das metades, nós dividimos ao meio novamente. E perguntamos: e agora, qual é a fração deste pedaço? Inicialmente, tivemos resposta “um terço”. Solicitamos que analisassem, quando uma pessoa ganha o pedaço da direita ou um dos pedaços da esquerda, ela recebe a mesma quantidade. Colocamos a situação significativa de um doce qualquer. Eles afirmaram que não era a mesma quantidade. Um iria comer um pedaço maior do que o outro. Reconhecida a conservação das áreas e realizada a representação simbólica da fração de forma adequada, encerramos esta etapa e demos continuidade à atividade anterior. No desenho, questionamos como reconhecer qual fração representa o pedaço da direita, conforme a figura abaixo:

Esquerda



Direita

Procedemos com outros questionamentos, dividindo cerca de dez figuras em diferentes partes, também com divisões na diagonal, na horizontal e na vertical, de forma a garantir a maior variação possível e dar sentido ao fato de que as áreas são equivalentes.

Deixamos mais uns minutos, para que os alunos pudessem concluir a atividade sozinhos, recolhendo o material e encerrando a aula.

c) Comentários

Em determinados momentos, eles respondem corretamente às questões apresentadas, em outros discutem mais, questionando como resolvê-las.

d) Avaliação do encontro

O encontro foi estruturado de forma a garantir a participação dos alunos e a variação das atividades. Buscamos o envolvimento constante de todos e em todos os momentos. Observamos que os jogos e as brincadeiras são mais envolventes, quando procedemos às formalizações, os alunos logo se dispersam, tornando a concentração e a aprendizagem mais difíceis. Por várias vezes, a professora chamou a atenção deles.

ENCONTRO 8: **Fração e proporção**

a) Objetivos

- Representar uma fração e seu respectivo desenho;
- Garantir a conservação das áreas;
- Reconhecer corretamente as frações em desenhos com divisões não usuais;
- Representar frações com quantidades discretas (valores dos dominós).

b) Atividades

Neste encontro, elaboramos quatro atividades, a primeira pedindo a participação dos alunos na lousa para escrever uma fração e apresentar um desenho que simbolizasse a fração por ele escrita. Houve uma retomada da conservação de área. Na atividade dois, entregamos dois problemas para que, individualmente, eles resolvessem. Já na atividade três, mais descontraída, jogamos dominó, usando as pontas para representar frações.

ATIVIDADE 1

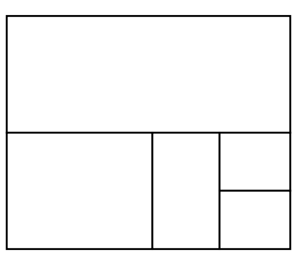
Entregamos aos alunos uma folha sulfite A4 e pedimos para que dobrassem ao meio, observando que as duas partes compunham o inteiro. Escrevemos a representação formal de cada metade, ou seja, ½. Em seguida, solicitamos para que dobrassem novamente a folha ao meio, formando um quarto. Aproveitamos para explicar que as duas dobras chamamos de “metade da metade” de uma figura, o que equivale a um quarto da mesma.

ATIVIDADE 2

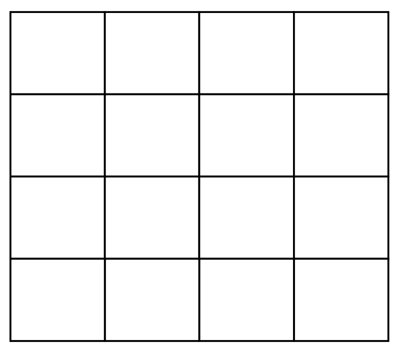
Iniciamos a atividade pedindo aos alunos que fossem à lousa e escrevessem simbolicamente uma fração e, em seguida, desenhassem a representação da mesma. Pudemos observar que eles escrevem corretamente, reconhecem que a relação se faz da parte para o todo, porém não conservam as áreas, vejamos uma situação por eles representada, na qual podemos observar que eles dividem aleatoriamente e representam um sexto.

Retomamos o assunto, explicando que para relacionar a parte em relação a um todo, é importante que as partes sejam exatamente iguais. Embora nós não tenhamos trabalhado com desenhos em círculo, eles apareceram quando lhes pedimos para desenhar na lousa. Explicamos também que a divisão do círculo é mais difícil e que para realizá-la precisamos de um instrumento chamado compasso. Eles questionaram a pizza. Explicamos que o pizzaolo corta a pizza tentando dividi-la em pedaços iguais; porém, como nem sempre ele consegue, os seus pedaços não representam porções iguais. Eles confirmam, dizendo que em algumas situações observam pedaços menores e pedaços maiores na mesma pizza, seja no restaurante ou em casa.

Em seguida, apresentamos alguns desenhos para que a classe reconhecesse qual fração representava cada parte da figura. Vejamos um exemplo:



Nesta figura, eles inicialmente diziam: um quinto. Novamente questionamos que se um deles ganhasse um pedacinho pequeno (um 16 avos) e seu amigo ganhasse o pedaço grande (um meio), ambos teriam a mesma quantidade de doce para comer. Rapidamente eles disseram que não. Questionamos, então, como resolver o problema e saber realmente quanto vale cada pedaço. Um aluno, Arthur, diz que basta prolongarmos cada “tracinho” (divisões) que conseguiremos saber realmente qual fração ele representa. Pedimos que ele assim o fizesse na lousa, para que todos os presentes pudessem ver e observar que a figura pode ser assim representada:



Depois de identificarmos três figuras semelhantes ao exemplo apresentado, passamos à atividade seguinte.

ATIVIDADE 3

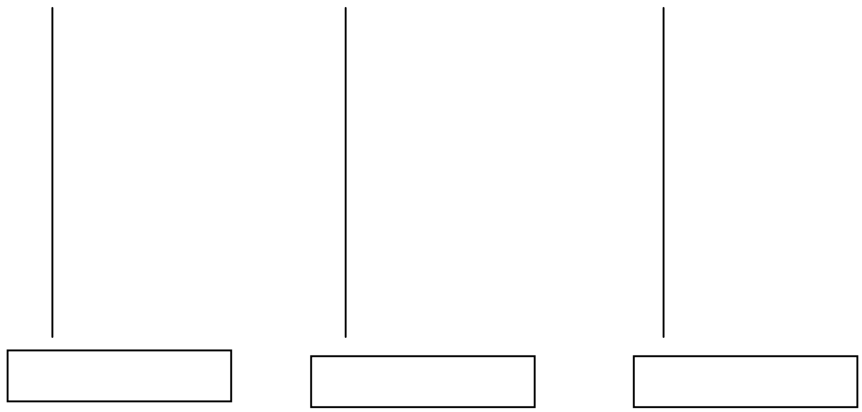
Na atividade, entregamos a cada aluno uma folha contendo os seguintes problemas:

ATIVIDADE 8

NOME ____ 3ª SÉRIE B

1. Problema

Numa família, há três irmãos: Carlos com 7 anos, Caio com 5 e Cícero com 3. O mais velho mede um metro de altura. O do meio mede três quartos do que mede o mais velho e o mais novo mede a metade do que mede o mais velho. Marque a altura de cada um dos irmãos, escrevendo seus nomes nos quadradinhos.



2. Problema

Mateus e Jorge ganharam uma mesada de R$ 12,00 cada um. Mateus gastou a metade e Jorge gastou a metade da metade. Quem gastou mais? Quanto cada um ainda tem guardado?

Sentença Matemática:
Resposta:
____
____

Procedemos à leitura do problema número um. Surgiram as questões: Como assim? Não entendi! Como eu faço? Para que eles compreendessem melhor o problema, pedimos que três alunos um de cada altura fossem até a frente da sala. Medimos cada um com um barbante e marcamos na lousa. Depois, dividimos o barbante maior para encontrar uma razão entre as alturas. Conseguimos, com uma precisão de 95% aproximadamente, relacionar a altura de Jhonny com a do Wellington. Elaboramos a relação na lousa. Perguntamos se eles haviam compreendido, se havia alguma dúvida. Iniciamos a leitura do problema dois. Também alguns alunos não o entenderam. Partimos, então, de uma situação semelhante. Solicitamos que dois alunos, na frente da sala, ficassem em pé e representassem a seguinte situação: cada um de vocês tem quatro reais. Pedimos que mostrem com os dedos. O primeiro irá gastar a metade. Quanto ele gastou? Perguntamos à sala. Eles disseram dois reais. E com quanto ele ficou? Agora, com dois dos quatro dedos fechados, sobram dois. E eles responderam corretamente. Pedimos que o outro aluno apresentasse quatro reais com os dedos. Perguntamos: se ele gastar a metade, quantos reais serão? Eles disseram dois reais. E se for a metade da metade? Quantos reais serão? Eles pensam... alguns dizem todos... outros dizem um. Questionamos porque todos. Será que a metade da metade é maior que a metade. Questionamos e pedimos que eles explicassem qual era maior. O Alanderson responde rapidamente que é somente um e que é menor. E mostra com o dedo que “a metade é dois e que a metade novamente é só um”. Aproveitamos sua explicação e solicitamos que ele explicasse aos demais colegas, na frente da sala. Depois, pedimos aos alunos para que cada um, individualmente, tentasse resolver com os dedos quanto era a metade de oito e a metade da metade de oito. Conseguimos obter uma melhora bastante significativa, pois apenas quatro alunos não souberam dizer. Pedimos, então, que voltassem à folha de questões para responder ao problema dois proposto nesta atividade. Particularmente, atendemos aos alunos com mais dificuldades. Ao terminarem, recolhemos as folhas.

ATIVIDADE 4

Pedimos aos alunos que formassem duplas com seus colegas. Distribuímos um jogo de dominó para cada dupla. Cada aluno deveria colocar uma peça na mesa, observando os valores numéricos dos extremos, construir uma fração própria ou imprópria. Ganhava-se o jogo, segundo as mesmas regras do dominó. Ao final, recolhemos as folhas com as frações.

c) Comentários

Elaboramos um problema, no qual a fração a ser representada indicava uma proporção entre as partes. Não tínhamos dito nada sobre proporção, mas a forma do desenho que estava na vertical, foi analisada por eles como diferente dos demais que realizamos. Propositadamente, criamos a situação para observar as respostas, visto que a metade de uma figura já havia sido bastante trabalhada nos encontros anteriores.

d) Avaliação do encontro

Os problemas representam situações do dia-a-dia, mas eles mostram respostas completamente absurdas; porém, quando colocamos na representação real, com pessoas, eles respondem de forma mais natural e correta. É interessante notar as diferentes matemáticas que eles imaginam existir.

ENCONTRO 9 : **Criando formas diferentes e criativas**

a) Objetivos

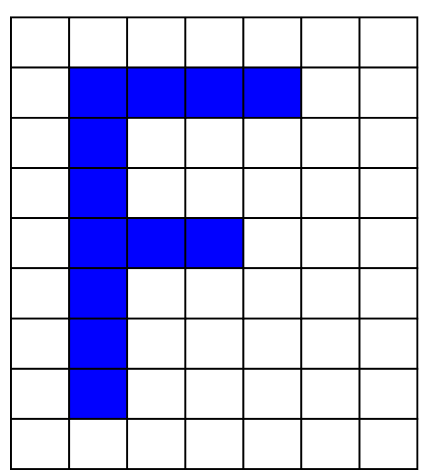
- institucionalizar os conteúdos trabalhados;
- relacionar as partes em relação ao todo;
- relacionar nos desenhos as formas simbólicas das frações tanto no discreto como no contínuo;

b) Atividades

Realizamos três atividades, sendo a primeira com a classe toda, mas somente com participação oral. Na segunda, eles trabalharam individualmente criando uma forma qualquer para ser exposta no final e, com isso, ganharem um prêmio. Finalmente, brincaram com o jogo de memória de frações e com desenhos contendo quantidades contínuas e discretas.

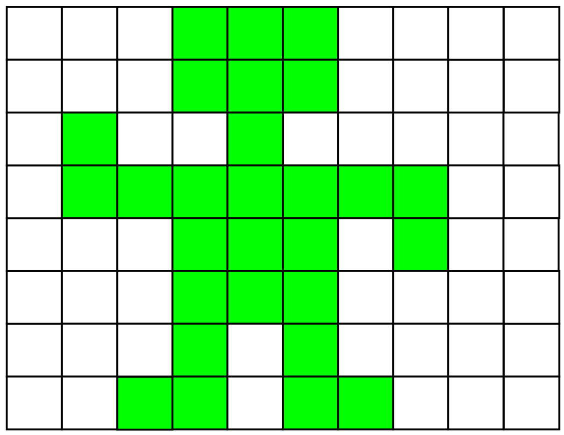
ATIVIDADE 1

Colocamos na lousa alguns quadriculados com algumas partes pintadas. O primeiro deles continha a letra F. Perguntamos quantos quadrados foram pintados para a letra F. Eles contaram e disseram que eram 12 quadradinhos. Perguntamos quantos quadradinhos havia no total. Eles começaram a contar um a um. Deixamos. As respostas não foram as mesmas. Perguntamos quem contou certo? Eles responderam: fui eu; não, fui eu. Pedimos que eles contassem com o professor. Concluiu-se que eram 63. Perguntamos se não havia uma forma mais rápida de contar todos os quadradinhos. A primeira resposta foi não, mas insistimos. Uma aluna, Larissa disse haver sete quadradinhos na primeira fileira. Perguntamos, então, quantas fileiras nós tínhamos. Eles contaram e disseram nove. Perguntamos quanto é sete vezes nove. Eles disseram 63. Questionamos se era a mesma 'coisa'. Eles pensaram, calcularam e disseram que sim.



Então, dissemos que agora iríamos representar a fração da letra F. Como poderíamos relacionar os quadradinhos pintados em relação a todos os quadradinhos? Deixamos que eles pensassem na resposta e chegaram à conclusão que eram 12/63.

Apresentamos então o segundo quadriculado: O ROBÔ



Perguntamos novamente quantos quadradinhos estavam pintados. Eles disseram: 28 quadradinhos. Perguntamos quantos quadradinhos havia no total, lembrado-lhes de que agora não precisavam mais contar um a um. Eles, então, contaram na horizontal e na vertical e disseram rapidamente 80. Qual é a fração do robô? Perguntamos. Eles disseram 28/80. Apresentamos outros dois quadradinhos para que todos relacionassem juntos.

ATIVIDADE 2

Iniciamos a atividade dois, distribuindo a cada aluno uma folha de papel quadriculado. Pedimos que dividissem a folha ao meio. Isso feito, solicitamos que escolhessem uma moldura qualquer, ou seja, decidissem quantos quadradinhos queriam destacar na horizontal e quantos na vertical. Cada aluno realizou seu quadro. Solicitamos que fizessem um desenho qualquer.

Avisamos que, no final da aula, faríamos uma votação para escolher o melhor desenho da classe.

Finalizamos a atividade pedindo para que relacionassem as partes pintadas em cada figura desenhada com relação à moldura feita para cada quadro.

Terminada a atividade, fizemos a exposição de todos os trabalhos apresentados. Votamos pelo melhor e premiamos os cincos primeiros colocados com figurinhas adesivas.

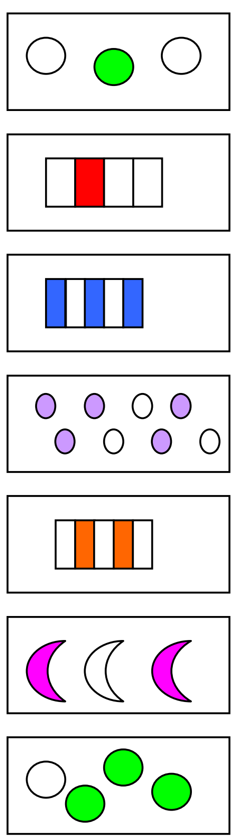
ATIVIDADE 3

Na terceira atividade, entregamos a cada aluno uma folha contendo a seguinte atividade:

ATIVIDADE 10

NOME: ____ 3ª série B

1. Ligue cada fração com o desenho correspondente:



$\frac{3}{5}$

$\frac{5}{8}$

Três quartos

$\frac{1}{4}$

1

-

$\frac{2}{5}$

Dois terços

Solicitamos aos alunos que ligassem cada desenho com a escrita ou a representação simbólica da fração. Nesta atividade, eles não tiveram dúvidas, quando a terminaram nós as recolhemos.

c) Comentários

As atividades realizadas cumpriram seus objetivos com relação à criatividade, pois vários trabalhos estavam muito bons; com relação à representação, apenas 50% dos alunos conseguiram fazê-la. Acreditamos que eles se envolveram muito com o desenho, acabando por esquecer de relacionar os quadradinhos pintados em relação a todos os quadradinhos escolhidos. A última atividade foi muito tranqüila, pois eles a realizaram sem qualquer dúvida.

d) Avaliação do encontro

Procuramos elaborar atividades cuja representação simbólica e escrita fracionária aparecesse de forma clara, cercando todas as possibilidades; porém, nem sempre as crianças responderam às nossas expectativas. No caso do desenho, a preocupação deles acabou sendo diferente da nossa.

ENCONTRO 10 : **Feira livre**

a) Objetivos

- aplicar corretamente os conceitos do número fracionário e de sua representação;
- transitar com facilidade e segurança nas representações das quantidades discretas e contínuas;

- transitar com facilidade nas representações simbólicas e pictóricas;
- resolver situações-problema com uso de números fracionários.

b) Atividades

Realizamos duas atividades, sendo a primeira de forma coletiva e a segunda individual.

ATIVIDADE 1

A primeira atividade foi com a classe toda. Dispusemos todos os alunos em um grande círculo. No centro do círculo, colocamos as mesmas figuras previamente recortadas e utilizadas no encontro de número seis. Entregamos a cada aluno uma folha em branco, pautada, na qual deveria anotar todas as situações de compra apresentadas e escrever as frações correspondentes.

Torta de cereja – dividida em quatro partes
Torta de morango – dividida em oito partes
Torta de uva – dividida em cinco partes
Doce de anis – dividido em nove partes
Doce de leite – dividido em dezesseis partes
Chocolate verde – dividido em seis partes

Cada um vai comprar uma certa quantidade desses produtos aqui expostos. Iniciamos com a situação: quero comprar um quarto da torta de cereja. Quantos pedaços de torta eu vou levar? Eles anotaram. Colocamos a situação dois: vou comprar um pedaço do doce de anis. Qual é a fração que estou levando? Eles disseram que precisavam saber quantos pedaços de anis existiam. Respondemos que ele estava repartido em nove pedaços. Eles calcularam e responderam que era um nono. Propusemos uma outra situação: quero comprar a metade da torta de morango. Quantos pedaços nós iremos levar? Como alguns alunos não se manifestaram e um terço da sala respondeu rapidamente, pedimos para que ninguém falasse as respostas, mas que as escrevessem no papel. Demos um tempo de dois minutos, para que eles fizessem os cálculos. Começamos a perguntar em quantas partes estava dividida a torta de morango. Passamos a perguntar um a um. Dos 23 alunos presentes, tivemos cinco que não souberam responder. Pedimos que fossem até a bancada, manuseassem e contassem quantas partes havia. Perguntamos depois quanto era a metade da torta. Apenas seis deles responderam corretamente. Colocamos uma situação nova, com quatro figurinhas. Quanto é a metade? Perguntamos. Todos responderam dois. Voltamos à torta de morango e agora perguntamos quanto era sua metade. Conseguimos obter a resposta "quatro pedaços" dos 100% dos alunos. Alguns pareciam desligados, mas depois dessas rodadas com a mesma questão começaram a despertar para não errar. Colocamos a situação de forma contrária: Vou comprar quatro pedaços da torta de morango, qual fração nós vamos comprar? Assim procedemos com todas as figuras. Inicialmente, solicitamos as frações com numerador um e depois fomos aumentando. Pudemos observar que oito alunos não erravam de forma nenhuma toda e qualquer divisão proposta; dez respondiam cerca de 70% corretamente e os demais, cinco alunos, ainda apresentavam bastante dificuldade para relacionar a parte ao todo.

ATIVIDADE 2

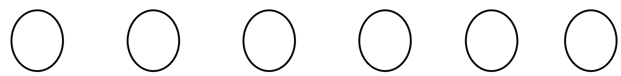
Na atividade dois, entregamos aos alunos a seguinte lista de problemas, contendo atividades com contínuo, discreto e fração imprópria. Após a resolução dos mesmos recolhemos.

ATIVIDADE 10

NOME ____ 3ª SÉRIE B

Problema 1

Em um saquinho, havia seis bolinhas de gude. José ganhou a metade e Alanderson ganhou a terça parte. Quem ganhou mais bolinhas de gude, e quantas sobraram?



José ficou com __________ bolinhas de gude.

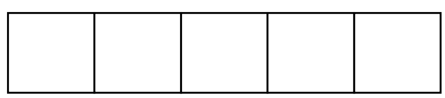
Alanderson ficou com ________ bolinhas de gude.

E sobraram ________ bolinhas de gude.

O _________________ ganhou mais bolinhas de gude.

Problema 2

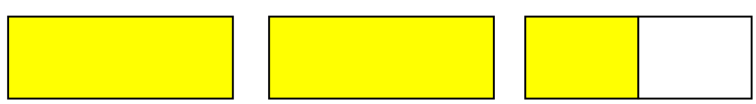
Pinte dois quintos do chocolate



Escreva a fração que falta pintar :

Problema 3

Um pintor tinha três muros para pintar. Porém a tinta acabou antes do término da pintura. Escreva uma fração que represente a parte pintada.



Fração:

c) Comentários

Criar situações semelhantes e pedir que respondam para, finalmente, voltar ao problema inicial e obter a resposta. Essa dinâmica favoreceu as dúvidas que alguns alunos ainda apresentavam. Como a grande maioria da classe respondeu às nossas questões, podemos inferir que os alunos já estão começando a dominar o assunto, pois a cada nova questão apresentada, eles imediatamente queriam dar a resposta.

d) Avaliação geral do encontro

O encontro propiciou uma retomada de todos os aspectos que foram trabalhados nos encontros anteriores. A primeira atividade privilegiou elementos do contínuo, tendo em vista que em encontros anteriores já havíamos trabalhado elementos discretos. Queríamos avaliar o domínio adquirido até o presente momento. Na outra atividade, apresentamos novos problemas que foram por eles resolvidos, só quatro alunos tiveram dúvidas.

4.2.5 AVALIAÇÃO GERAL DA SEQÜÊNCIA

Consideramos que as atividades elaboradas foram significativas para as crianças e cognitivamente desafiadoras, além de mobilizarem uma reflexão pertinente sobre as facetas da representação do número fracionário. Nos últimos encontros, as crianças começavam a resolver os problemas propostos com um número menor de questionamentos com relação ao início da seqüência, o que avaliamos de forma positiva, pois evidencia o crescimento deste campo conceitual.

Outros fatores que consideramos positivos foram os jogos e as situações-problema, nas quais a participação e o envolvimento se fizeram de forma muito mais presente do que em outras atividades. No caso específico do jogo, a criança muitas vezes não percebia o quanto ela estava interagindo com o conteúdo matemático. A disputa nas competições torna-se saudável neste caso, pois todos os grupos queriam ganhar e para tal era necessário a resolução correta de cada problema proposto.

É importante ressaltar que as generalizações, ainda que bastante elementares, propiciaram aos alunos a possibilidade de observar, experimentar, lidar com representações diferentes dos naturais e, assim, conceituar o número fracionário e representá-lo na forma a/b, com significado. Embora esse conceito formado não seja o definitivo, pois ainda será preciso ampliar seu campo conceitual, torna-se importante uma representação clara e correta desses números.

Neste trabalho, também consideramos válida e fundamental a confiança que os alunos adquiriram em si próprio diante da resolução de problemas, nas quais valorizamos suas estratégias pessoais e também aquelas que foram fruto da evolução histórica do conhecimento matemático.

Somente o grupo experimental (GE) participou desta seqüência, ficando o grupo controle (GC) sujeito apenas à instrução informal, fora do ambiente escolar.

Segundo Kerslake (1986), o aspecto da divisão nas frações não era familiar nem aceito facilmente. Os professores também afirmaram não relacionarem, por exemplo, 3/5 com 3:5, assim, as conexões eram também rejeitadas pelas crianças. A pesquisa possibilitou a discussão entre as rotas alternativas para a aprendizagem das frações e o fato dos numeradores serem sempre menores que os denominadores, segundo as observações encontradas, geravam nos alunos a idéia de que não se pode dividir, por exemplo, 4 por 3 (4:3), pois quatro é maior que três, conforme os alunos falavam. Eles tinham a convicção de que, na divisão, o maior número é sempre dividido pelo menor número. Os registros produzidos, muitas vezes, apresentaram o contrário dessa idéia, sobretudo quando se utilizou a calculadora para observar que números maiores podem ser divididos por outros menores, resolvendo tais conflitos. Elaboramos nossa seqüência de modo a iniciar os alunos no estudo das frações e suas representações sob a ótica diferente do modelo parte-todo. Concordamos com a autora sobre o fato de que uma rota alternativa pode facilitar os processos de ensino aprendizagem deste tema.

Complementando a idéia sobre as diferentes possibilidades de iniciarmos um conteúdo, Nunes (1998) apresenta um aspecto da noção de ações mediadas: em função do uso dos mediadores não serem óbvios que eles precisam ser entendidos no contexto das práticas culturais em que são usados. Crianças podem trabalhar com diferentes ferramentas para mediar suas atividades de resolução de problemas ou, em outras palavras, o mesmo conceito pode ser representado de distintas formas.

Finalizando, segundo Correa (2000) as situações de repartir que a criança encontra em sua vida diária podem ser resolvidas com base em procedimentos aditivos, por meio do uso da correspondência termo a termo, podendo-se estabelecer a equivalência entre as quotas a serem dadas a cada participante, adicionando-se ou retirando-se quantidades. No entanto, a divisão como uma operação multiplicativa vai requerer o entendimento, por parte das crianças, das relações entre dividendo e divisor na determinação do valor do quociente.

5. ANÁLISE DOS RESULTADOS

INTRODUÇÃO

Este capítulo trata da análise dos resultados obtidos da aplicação dos diagnósticos nos dois grupos tanto naquele em que foi trabalhada a seqüência de ensino (grupo experimental) quanto no de controle, que não teve qualquer contato com os números fracionários.

Nossa análise foi dividida em duas etapas. A primeira refere-se a uma análise quantitativa dos dados obtidos, observando o número de acertos obtidos em cada teste, em ambos os grupos e por aluno individualmente do GE, bem como o desempenho frente aos objetivos propostos. A segunda refere-se à análise qualitativa em que observamos os procedimentos e erros empregados na representação do número fracionário, bem como nos esquemas de ação usados para resolver os problemas propostos. Baseando-se nas estratégias de resolução, observamos a compreensão que cada aluno formulou com relação ao conceito do número fracionário e de sua representação. Esta análise foi realizada apenas no GE.

Antes de iniciarmos a análise propriamente dita, gostaríamos de relatar um pouco sobre nossa amostra.

Para a escolha da amostra, tanto experimental como de controle, cinco critérios foram considerados: 1º) que os sujeitos fossem alunos regulares da 3ª série da mesma escola, 2º) que a escola em questão fosse pública, 3º) que os alunos estivessem presentes em todas as etapas do estudo, testes e seqüência para os sujeitos do GE e testes para os participantes do GC. 4º) que as crianças estivessem na faixa etária de 8 a 10 anos e 5º) que estivessem cursando a 3ª série pela primeira vez.

O grupo de controle constou, inicialmente, de 28 alunos, porém nos dias em que aplicamos o pré-teste e pós-teste alguns não compareceram, o que resumiu o grupo a apenas 20 alunos.

Da mesma forma, no grupo experimental havia 30 alunos matriculados, dois deles saíram da escola e, entre os demais que participaram dos dois testes e dos encontros da seqüência, puderam ser aproveitados somente 19 alunos.

Quanto aos testes (pré e pós), embora tivessem equivalência matemática, sua ordem foi alterada, conforme apresentamos no quadro abaixo:

Pré	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Pós	7	10	9	3	5	4	6	8	1	2

Quadro 5.1: Relação de equivalência entre as questões dos pré e pós-testes

Para efeito da análise, estamos nos referindo às questões de ambos os testes como sendo numeradas de 1 a 10 (conforme o Pré-teste), devendo o leitor considerar sempre a correspondência exposta no quadro acima. Assim, por exemplo, quando nos referirmos à questão 7, estaremos nos mencionando a questão 7 do pré-teste e a questão 6 do pós-teste, cuja equivalência matemática e grau de complexidade foram respeitados.

A questão de número 4 do pós-teste, por um lapso de nossa parte, acabou sendo impressa de forma incorreta, o que não garantiu a equivalência matemática como nas demais. De fato, na questão 6 do pré-teste havia duas barras de chocolate para serem divididas entre quatro crianças, o que permitia uma resolução de forma intuitiva, ou seja, metade para cada um. Já a questão 4, do pós-teste, ficou impressa com dois bolos para cinco crianças, o que envolveria um raciocínio de dividir duas quantidades contínuas em cinco partes e atribuir um quinto de cada bolo para cada criança ou relacionar dois para cinco. Tal procedimento é bem mais sofisticado que a questão 6 e depende da compreensão dos números fracionários, entretanto os acertos surpreenderam nossas expectativas.

Os acertos que as crianças apresentaram no pré-teste na questão 6, foram confirmados com as pesquisas de Spinillo (1994) que observou que crianças com 6 anos possuem um conhecimento espontâneo sobre proporção, pois apresentam uma estratégia especifica para descobrir a equivalência ou não equivalência entre os retângulos (um deles possuía ½ em preto e ½ em branco). Essa estratégia teve por base o uso do referencial 'metade', no qual a criança estimava a proporção entre um retângulo grande e outro menor, examinando a 'metade branco e metade preto', demonstrando assim um conhecimento inicial sobre proporções antes da instrução escolar. Usando esse referencial, podemos comparar as questões 6 e 4 e expor que a questão 6 é mais simples que a 4, tendo em vista esse conhecimento inicial da criança.

Gostaríamos de enfatizar que nossa análise estará centrada no grupo experimental, ficando o outro grupo com a finalidade de comparação.

Por fim, é importante que afirmemos não ter a pretensão de validar os resultados para além do universo de nosso estudo, visto que o número de sujeitos é bastante reduzido. Mas, nossos resultados podem trazer subsídios importantes para a introdução da formação do conceito dos números fracionários e compreensão de sua representação. Contribuições essas que forneçam aos professores uma visão diferente de iniciar e trabalhar o estudo dos números fracionários.

5.1 ANÁLISE QUANTITATIVA

Nesta primeira parte da análise, procedemos inicialmente com a análise do desempenho geral (seção 5.1.1), seguida da análise do porcentual de crescimento do grupo experimental em detrimento da manutenção do grupo de controle (seção 5.1.2) e, na seqüência, uma análise por sujeito (seção 5.1.3), logo após uma análise por questão (seção 5.1.4) e, finalizando, apresentamos uma análise por objetivo (seção 5.1.5).

5.1.1. Desempenho geral dos grupos

Iniciamos a análise demonstrando um panorama geral do desempenho dos grupos. A Tabela 5.a, acompanhada de um gráfico tem essa finalidade. Antes de analisar os dados nela contidos, faz-se necessário esclarecer os cálculos que fizemos para chegar aos valores nela expressos. As dez questões do pré e pós-teste foram subdivididas totalizando 15 itens. Consideramos como item a representação formal da fração do tipo a/b, (com a,b $\in$ N, e b≠0) e a representação pictórica, quando a criança, com base nas figuras apresentadas no pré e pós-testes, com modelos de quantidades contínuas e discretas, circulava, pintava ou desenhava a situação.

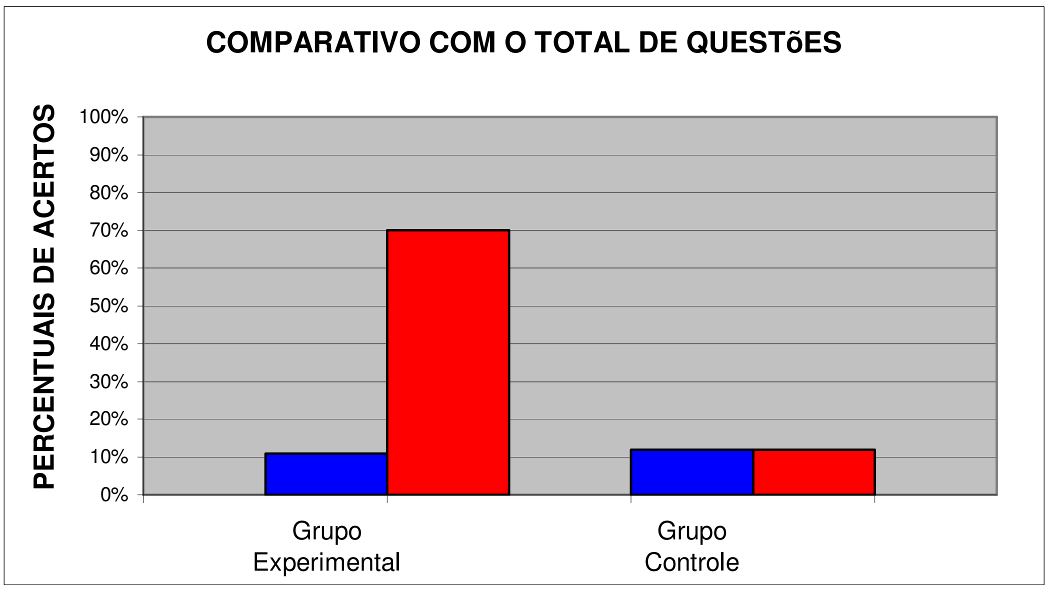
Assim, o número 300 significa que multiplicamos o número de itens (15) pelo número de alunos considerados (20), no caso do grupo de controle. Portanto, 300 significam a possibilidade total de acertos ou 100%. Para o grupo experimental, nós multiplicamos os mesmos 15 itens por 19 alunos e encontramos o número 285. Os valores porcentuais tiveram suas casas decimais arredondadas de acordo com os critérios estatísticos.

PORCENTAGEM DE ACERTOS

ANÁLISE DO DESEMPENHO GERAL DOS GRUPOS

TIPO DE TESTE / GRUPO	PRÉ-TESTE	PORCENTUAL DE ACERTOS	PÓS-TESTE	PORCENTUAL DE ACERTOS
EXPERIMENTAL	**30/285**	**11%**	**199/285**	**70%**
CONTROLE	**36/300**	**12%**	**37/300**	**12%**

Tabela I – Porcentuais de acertos dos desempenhos gerais do GC e GE.



Quadro 5.2. Porcentagem de acertos dos grupos nos testes

O gráfico acima e a tabela, demonstram que os dois grupos mantiveram-se com o mesmo porcentual de acertos no pré-teste. Esse índice baixo de acertos permite afirmar que ambos os grupos tiveram pouco ou nenhum contato com o conteúdo frações, do ponto de vista da escola.

Com relação ao pós-teste, o porcentual de acerto do grupo experimental foi satisfatório, pois este é considerado muito bom, se tomarmos por termômetro o patamar exigido pelo sistema escolar, já o mesmo não se pode falar do grupo controle, o qual se manteve no mesmo porcentual baixo de acerto. Essa primeira apresentação dos resultados, contudo, é muito geral, não nos fornece "pistas" suficientes, para que possamos analisar o comportamento desses alunos do ponto de vista da formação e desenvolvimento do conceito de número fracionário. Para tanto, procuramos realizar outro tipo de análise que apresentamos na seção a seguir.

5.1.2. Análise do porcentual de crescimento do grupo experimental e manutenção do porcentual do grupo controle

Com base nos dados apresentados para o pré-teste, em ambas as classes, podemos observar que os alunos dos dois grupos demonstraram ter pouco conhecimento com relação a nosso tema, uma vez que os índices de acerto foram bastante baixos. É importante informar que nos dois grupos a quantidade de respostas em branco também foi muito pequena, o que é um indicador de que esses alunos tentaram de fato responder o máximo de questões. Nos dados da Tabela abaixo, apresentamos os porcentuais de questões em branco por grupo.

TIPO DE TESTE / GRUPO	PRÉ-TESTE	PORCENTUAL DE QUESTÕES EM BRANCO	PÓS-TESTE	PORCENTUAL DE QUESTÕES EM BRANCO
EXPERIMENTAL	**35/285**	**12%**	**3/285**	**1%**
CONTROLE	**24/300**	**8%**	**21/300**	**7%**

Tabela II – Porcentual de respostas em branco.

Esses dados revelam que o grupo controle manteve-se estável em relação à quantidade de respostas em branco. Por outro lado, o grupo experimental consegue reduzir significativamente a quantidade de respostas em branco, passando de 12% para 1%. Podemos inferir que o contato com um determinado conteúdo pode favorecer as tentativas de se resolver situações apresentadas. Parece-nos que os alunos arriscam-se mais.

Retomando os dados apresentados no quadro 5.2, e comparando o porcentual de acerto do grupo experimental com o grupo controle no pós-teste, observamos uma diferença mais acentuada a favor do GE. De fato, enquanto o grupo de controle manteve-se com o mesmo número de acertos, o grupo experimental conseguiu acertar 70% das questões.

Não queremos afirmar com isso que estamos privilegiando a instrução formal, ela é importante, mas deve permitir que o conhecimento informal seja convidado para a sala de aula (Spinillo, 1994), de forma que a criança possa ampliá-lo, revisando os modelos de conhecimento que possui, explicitando que aspectos do conhecimento informal são relevantes e quais são os que sempre funcionam, desenvolvendo assim, uma compreensão mais efetiva dos conceitos.

Ao introduzir os conceitos com base em situações significativas e relacionadas ao cotidiano do aluno, criando um elo de ligação entre o conhecimento informal e o formal, podemos interferir e contribuir para uma compreensão mais efetiva dos conceitos formalmente transmitidos. Desta forma, podemos considerar que o ambiente favorável à aprendizagem possibilita ao aluno a aquisição de conceitos científicos partindo de situações significativas, o que encontra respaldo nos trabalhos realizados por Nunes (1997).

Esses resultados permitem inferir, em primeira instância, que a abordagem utilizada em nossa seqüência foi satisfatória, porém precisamos analisa-los mais amiúde. Para tanto faremos, a seguir, uma análise dos acertos dos grupos por sujeito, por questão e por objetivos.

5.1.3. Análise por sujeito

Apresentamos inicialmente uma análise dos alunos, segundo sua faixa etária, para que o leitor possa situar-se melhor no universo pesquisado. Na seqüência, tratamos de analisar o desempenho dos sujeitos.

No quadro abaixo, classificamos as crianças de acordo com sua idade, todas aqui consideradas estão cursando a 3ª série pela primeira vez.

Idade / grupo	8 anos	9 anos	10 anos	Total
GE	8	7	4	19
GC	3	15	2	20

Quadro 5.3 – Distribuição dos alunos por faixa etária.

Procuramos ajustar a faixa etária de modo a garantir que as experiências e ações sobre o mundo estivessem bastante próximas. O quadro 5.4 apresenta quantos alunos estavam na faixa de 8 a 10 anos de idade. Vale salientar que as crianças de 10 anos entraram na escola mais tarde que os demais ou pararam por um ano, e as de 8 anos, provavelmente, completaram 9 anos no decorrer do corrente ano.

Assim, fizemos um estudo do desempenho e da evolução dos alunos nos testes aplicados. Para tanto, numeramos cada aluno do grupo experimental (de 1 a 19). Não nos referimos ao grupo controle tendo em vista a manutenção do índice de acerto no pré e pós-testes. Vale lembrar que os dois testes possuíam 15 itens cada, portanto, o número máximo de acertos por aluno é 15. Os dados da Tabela abaixo indicam o número de acerto por aluno no pré e pós testes e a porcentagem de acertos no pós-teste.

Alunos	Pré-teste (nº de acertos)	Pós-teste (nº de acertos)	% de acertos no pós-teste
1	1	10	**67**
2	1	15	**100**
3	3	10	**67**
4	1	9	**60**
5	2	13	**87**
6	3	11	**73**
7	2	10	**67**
8	1	6	**40**
9	2	14	**93**
10	1	8	**53**
11	2	14	**93**
12	2	12	**80**
13	3	8	**53**
14	1	14	**93**
15	1	10	**67**
16	1	10	**67**
17	1	11	**73**
18	1	8	**53**
19	0	6	**40**

Quadro 5.4. Tabela do desempenho dos alunos – GE

Analisando os dados do Quadro 5.5, podemos observar que todos os alunos do grupo experimental evoluíram. Oito alunos, ou seja, 42% dessa população tiveram índice de acerto igual ou superior a 70%; nove alunos, 47% da população apresentaram acerto entre 50% e 69%. Dessa forma tivemos 17 alunos, quase 90% de nossa amostra teriam condições de ser aprovados, segundo o critério adotado pela maioria das escolas na avaliação escolar. Apenas dois alunos tiveram resultado inferior a 50%, que consideramos abaixo da média adotada nas escolas do ensino público ou privado. Apesar do índice ser inferior a 50%, um desses (o número 19) partiu de 0% no pré-teste para 40% no pós-teste, apresentando um crescimento, proporcionalmente, maior que os sujeitos de números 8 e 13. Quanto aos sujeitos de números 8 e 13 nada podemos afirmar, além da necessidade de se trabalhar com eles o conceito de fração por mais tempo. Os demais alunos apresentaram um bom crescimento em seus desempenhos.

No grupo controle, a maioria dos alunos conseguiu acertar de um a três itens no máximo com exceção de dois alunos. A primeira, a aluna Emília, conseguiu acertar no pré-teste cinco itens da avaliação que envolve a representação pictórica em sua maioria. No pós-teste, acertou apenas um item das representações pictóricas, o outro aluno que se destacou foi Gabriel, conseguindo acertar quatro itens no pré-teste e seis itens no pós-teste, também, em sua maioria, com representações pictóricas. Uma das questões que nos chamou a atenção foi a de número 2 do pós-teste, na qual ele tentou estimar quanto cada criança deveria receber de chocolate e apresentou a resposta de que cada criança ficaria com 65% de cada pedaço. Sabemos que a fração 3/5 equivale a 0,6 em decimal, e a 60% em porcentagem. Ele tentou, ainda que sem a conservação das áreas, delimitar qual pedaço do chocolate cada uma das crianças iria receber. Somente dois alunos destacaram-se da média dos demais, porém houve poucas respostas com uso da representação formal das frações. Podemos concluir que, sem uma instrução formal, a criança não consegue aprender somente por estar viva e inserida no meio social, é preciso mais do que isso.

Acreditamos ter atingido nossos objetivos por intermédio da aplicação de nossa seqüência. No geral, observamos que a maioria dos alunos cresceu significativamente, com exceção dos alunos de números 3 e 8 que tiveram apenas o acréscimo de cinco pontos a mais dos que atingiram quando da aplicação do pré-teste.

5.1.4. Análise por questão

Nesta seção, apresentamos uma análise do desempenho dos alunos por questão. Pretendemos apresentar os índices de crescimento na resolução da questão resolvida no pré-teste para a resolução no pós-teste. Para tanto apresentamos, inicialmente, uma Tabela comparativa com os porcentuais de acertos para cada questão.

Questão	1	2		3	4	5		6		7	8		9		10
Tipo de representação	Repres. formal	Repres. Pictórica	Repres. formal	Repres. formal	Repres. formal	Repres. Pictórica	Repres. formal	Repres. Pictórica	Repres. formal	Repres. formal	Repres. Pictórica	Repres. formal	Repres. Pictórica	Repres. formal	Repres. formal
Total pré-teste	**0%**	**0%**	**0%**	**5%**	**0%**	**0%**	**0%**	**5%**	**26%**	**0%**	**73%**	**0%**	**5%**	**0%**	**42%**
Total pós-teste	**68%**	**84%**	**58%**	**63%**	**95%**	**32%**	**37%**	**89%**	**68%**	**37%**	**79%**	**68%**	**100%**	**95%**	**74%**

Tabela III – Desempenho dos alunos do GE por questão

Analisando os dados da Tabela acima podemos observar que dos 15 itens constantes nos testes, 7 itens alcançaram índices de 70% ou mais, 5 itens estiveram entre 50% e 69% e 3 itens ficaram abaixo de 50%. As questões 5 e 7 tiveram os índices mais baixos. A questão 5 envolveu uma fração equivalente, com quantidades discretas, que foi trabalhada num curto espaço de tempo dentro da seqüência, assim julgamos ser necessário um tempo maior para que os alunos pudessem assimilar melhor esse conceito. Da mesma forma, a questão 7 teve seus resultados baixos, pois estava relacionada a uma situação-problema com texto extenso e cujo elemento bolo ou torta apresentou-se com vários sabores, o que dificultou sua compreensão por parte das crianças, algumas acabaram caindo no erro de relacionar os sabores por parte, esquecendo o todo.

A questão 1 apresentou quantidades discretas, devendo a criança relacionar a parte com o todo. Inicialmente, os alunos apresentaram resultados de 0% no pré-teste e 68% depois do contato com o conteúdo das frações, o que indica certa dificuldade, mesmo após nossa intervenção, ao estabelecer a relação parte-todo com quantidades discretas, pois as crianças operam com mais facilidade nas quantidades contínuas em que temos um único todo, apesar de conviverem no dia-a-dia com quantidades discretas. Resultados semelhantes podem ser encontrados no trabalho de Silva (1997).

Na seqüência, a questão 2 está subdivida em duas partes: a representação pictórica e a simbólica. Na primeira, o salto quantitativo foi maior que na segunda. Em ambas as representações, as crianças partiram de 0% de acerto e avançaram, significativamente, na representação pictórica com acertos da ordem de 84% contra os 58% da outra representação. De fato, desenhar, pintar, colorir, nesta faixa etária é menos complexo do que estabelecer a relação entre as quantidades a serem distribuídas para cada criança de modo a encontrar a fração 3/5. Consideramos correto o desenho que apresentou a divisão entre as crianças, apesar da não conservação das áreas, uma vez que eles dividiram a mão livre com uso apenas de lápis e borracha. Para ilustrar esse esquema de ação, apresentamos uma questão resolvida por um dos alunos do GE.

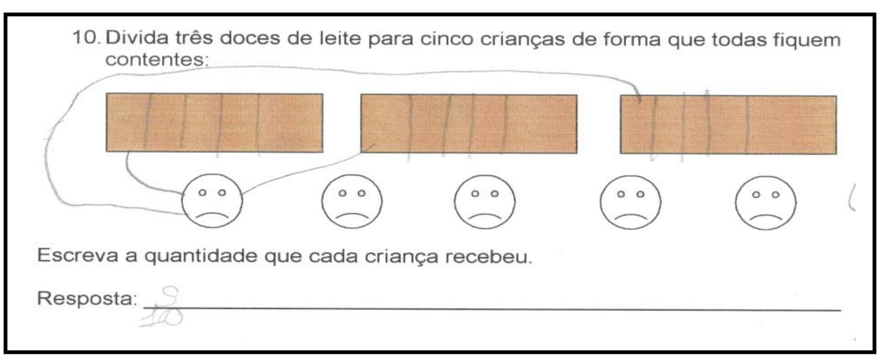


Figura 5a – resolução de aluno do GE.

Apenas um aluno do GE conseguiu acertar a questão 3 no pré-teste escrevendo "*falta tres quadro partes*" que se pressupõe uma intenção bastante próxima da forma correta ¾. Podemos inferir que sua resposta baseou-se na leitura do enunciado da questão "uma quarta parte", que tenha escrito de forma intuitiva sem de fato estabelecer a relação parte-todo.

Por outro lado, na questão 4, novamente a relação ocorreu com quantidades discretas, observamos que nenhuma criança no pré-teste conseguiu responder, ao passo que no pós-teste o ganho foi considerado muito bom, apenas um aluno resolveu com a relação incorreta, escrevendo 9/4. Os relatos das pesquisas de Kerslake (1986) assemelham-se a procedimentos iguais com inversão ou relação parte-parte.

Com quantidades discretas, a questão 5 apresentou os resultados mais baixos dentre as dos dois testes, embora as crianças, inicialmente, não tenham conseguido responder a não ser com números naturais. Os resultados da representação pictórica também surpreenderam, pois grande parte dos alunos que desenhou incorretamente, ao ler a quinta parte, circulava cinco luas, quando o correto seriam duas. Novamente, como descrevemos, anteriormente, as quantidades discretas dificultam a visão macro de observar o todo. Nessa questão, vale salientar que o aluno necessitaria decodificar a palavra quinta parte para circular ou pintar duas entre as dez luas presentes e, finalmente, escrever simbolicamente a fração 1/5 ou 2/10, além da classe de equivalência descrita anteriormente.

Já a questão 6 apresenta 5% de acertos (um aluno) na representação pictórica do pré-teste e 26% de acertos (cinco alunos) na representação formal. Consideramos como acerto a palavra metade ou um meio.

Na questão 6, deixamos claro que o pós-teste não garantiu a equivalência, a questão tornou-se mais complexa que a do pré-teste, mesmo assim os acertos foram 89% à representação pictórica e 68% à formal. Consideramos que esse porcentual foi muito bom em relação à mesma questão do pré-teste, no qual a intuição da criança poderia contribuir em sua resposta, conforme já discutimos baseados nos resultados das pesquisas de Spinillo (1994; 1995).

Na questão 7, uma situação-problema foi apresentada. No pré-teste como era esperado, não tivemos acertos. No pós-teste, o porcentual de 37% foi baixo em relação às nossas expectativas, mas devemos ponderar que o texto era maior que nas demais questões, além de envolver três sabores diferentes. As situações-problema trabalhadas na seqüência também mostraram textos menores do que o teste. Acreditamos que no curto espaço de tempo, um pouco mais de um mês em que trabalhamos com as crianças, não poderíamos conseguir progressos surpreendentes, e sim, razoáveis.

A questão 8, com quantidades discretas, a noção de metade é bastante comum às crianças, pois no dia-a-dia elas repartem seus objetos com outras, especialmente, doces. Já era de se esperar que na representação pictórica os acertos fossem maiores que na formal. No pré-teste, as crianças acertaram 73% e na formal 0%, após a aplicação de nossa seqüência, o porcentual da representação inicial praticamente se manteve, ou seja, 79% e o ganho foi na representação formal, que passou de 0% para 68%. A representação pictórica é mais intuitiva à criança e, portanto, a chance de acerto é de fato maior, portanto, novamente concordamos com os resultados de Spinillo (1994; 1995).

Por outro lado, a questão 9 apresenta a idéia de ‘metade da metade’ diferente da questão discutida com o referencial ‘metade’. Nesta questão, o grau de complexidade é maior que o anterior. Assim, observamos que apenas um aluno acertou a representação pictórica no pré-teste (5%), no pós-teste o acerto foi total. Já a representação formal, inicialmente, não apresentou acertos, no pós-teste tivemos o porcentual de 95%, considerado muito bom pelos critérios de avaliação escolar adotados nas escolas de modo geral. Podemos concluir que a idéia de metade não é transposta para a idéia de ‘metade da metade’, pois a segunda é menos intuitiva que a primeira. Os resultados de Spinillo (1994; 1995) podem ser comparados aos nossos quanto ao referencial ‘metade’, nos quais os procedimentos das crianças são intuitivos.

Finalmente, a questão 10 apresenta-se com quantidades contínuas e fração imprópria. As respostas no pré-teste foram do tipo: “1 e meio”, “inteiro mais metade”, “um e meia”, somente com palavras, embora a questão pedisse “represente numericamente”. Consideramos essas respostas como corretas, apesar de não terem sido escritas na forma simbólica, pois expressam de fato a quantidade pintada na figura. Inicialmente, os acertos chegaram a 42% no pré-teste. No pós-teste, a mesma questão foi novamente apresentada e as respostas atingiram um porcentual maior, com 74% de acertos, com um acréscimo de que as representações passaram a ser numéricas, do tipo mista $1\frac{1}{2}$ ou como uma soma de inteiros com frações: $1+\frac{1}{2}$.

Podemos concluir que as questões, de forma geral, apresentaram um acréscimo nos porcentuais de acertos. Os maiores acertos iniciais ocorreram na representação pictórica, ficando a formal a cargo do pós-teste, pois os alunos passaram a ter contato com esses números. Dos 15 itens dos testes, apenas três estiveram abaixo dos 50%. Podemos inferir que esses itens conduziram os índices gerais a patamares mais baixos.

5.1.5. Análise por objetivos

Nesta seção, foi feita uma análise por objetivos. Para tanto apresentamos nossos objetivos, explicando-os um a um. Para as dez questões dos testes considerados, foi possível agrupá-las dentro de cinco objetivos.

1. estabelecer a relação parte-todo para quantidades discretas;
2. representar simbolicamente, na forma a/b, com quantidades discretas, partindo de uma ação apresentada na situação-problema;
3. representar pictórica e simbolicamente a situação-problema apresentada, com quantidades contínuas;
4. dividir corretamente as áreas, garantindo a conservação das mesmas, com quantidades contínuas;
5. representar simbolicamente a fração imprópria, com base em uma representação com quantidades contínuas.

O objetivo 1 envolve as questões 1 e 4. O desenho proposto na situação permite ao aluno apenas observar, relacionando a quantidade discreta colorida em relação ao conjunto dado. Para responder corretamente, o aluno deverá relacionar a parte ao todo e representar sob a forma de fração.

O objetivo 2 aborda as questões 5, 7 e 8. Nestas questões, as quantidades discretas estão representadas uniformemente, sem qualquer destaque. Primeiramente, o aluno deverá circular, pintar ou desenhar a situação dada para em seguida apresentar numericamente sua resposta que deverá ser simbólica, sob a forma a/b.

O objetivo 3 compõe as questões 3 e 9. Ambas as questões envolvem quantidades contínuas e na questão 3 a parte já está pintada, pedindo apenas que o aluno relacione a parte com o todo. Na questão 9, além de relacionar o aluno deverá pintar a parte solicitada.

No objetivo 4, estão presentes as questões de número 2 e 6. As questões são semelhantes, pois são barras horizontais que deverão ser repartidas de acordo com o número de elementos distribuídos. Após a divisão eqüitativa das partes, os alunos deverão responder simbolicamente a quantidade que coube a cada elemento.

No 5º e último objetivo, somente a questão 10 se faz presente. Trata-se de uma quantidade contínua, com mais de um retângulo pintado, no qual o aluno deverá observar o desenho pronto e representá-lo sob a forma de fração, ou seja, simbolicamente.

Em relação aos objetivos propostos foi possível agrupar as questões em dois grandes blocos, ou seja, das representações das quantidades contínuas e discretas, de acordo com os objetivos de cada questão, nas quais consideramos tanto os acertos da representação do número bem como a representação pictórica, visto que consideramos ambas as formas como uma transcrição da cognição da criança. Para quantificarmos os resultados, atribuímos valores conforme a legenda a seguir:

sigla	Grau de resolução	pontuação
NA	não atingiu aos objetivos propostos	0 ponto
AP	atingiu parcialmente os objetivos	1 ponto
AT	atingiu plenamente os objetivos	2 pontos

Quadro 5.5 Legenda para orientação do leitor

QUANTIDADE		DISCRETO		CONTÍNUO		
OBJETIVOS		1	2	3	4	5
GRUPO EXPERIMENTAL	ALUNO 1	AT	AT	NA	AT	NA
		AT	NA	AT	AT	
			NA			
	ALUNO 2	AT	AT	AT	AT	AT
		AT	AT	AT	AT	
			AT			
	ALUNO 3	AT	NA	AT	NA	AT
		AT	NA	AT	AT	
			AT			
	ALUNO 4	NA	NA	AT	AP	AT
		AT	NA	AT	AP	
			AT			
	ALUNO 5	AT	NA	AT	AT	AT
		AT	AT	AT	AT	
			AT			
	ALUNO 6	AT	NA	AT	AT	AT
		AT	NA	AT	AP	
			AT			
	ALUNO 7	NA	AT	AT	AP	AT
		AT	NA	AT	AT	
			NA			
	ALUNO 8	NA	NA	AT	AP	AT
		AT	NA	AT	NA	
			NA			
	ALUNO 9	AT	AT	AT	AT	AT
		AT	NA	AT	AT	
			AT			
	ALUNO 10	NA	NA	NA	AP	AT
		AT	NA	AT	AP	
			AT			
	ALUNO 11	AT	AT	NA	AT	AT
		AT	AT	AT	AT	
			AT			
	ALUNO 12	AT	NA	NA	AT	AT
		AT	AT	AT	AT	
			AT			
	ALUNO 13	NA	AT	AT	NA	NA
		AT	AT	AP	NA	
			AT			
	ALUNO 14	AT	AP	AT	AT	AT
		AT	AT	AT	AT	
			AT			
	ALUNO 15	AT	NA	AT	AT	NA
		AT	NA	AT	AT	
			AP			
	ALUNO 16	AT	NA	NA	AT	AT
		NA	NA	AT	AT	
			AT			
	ALUNO 17	NA	NA	AT	AT	AT
		AT	AT	AT	AT	
			AP			
	ALUNO 18	AT	NA	NA	NA	NA
		AT	NA	AT	AT	
			AT			
	ALUNO 19	AT	NA	NA	AP	NA
		AT	NA	AT	AP	
			NA			

Quadro 5.6 – Classificação dos alunos quanto aos objetivos atingidos

Assim, considerando o quadro 5.6 e a legenda (quadro 5.5) apresentada acima, temos um novo quadro com as pontuações.

Observando a tabela abaixo, poderíamos encontrar, se os alunos atingissem 100% dos objetivos, os seguintes valores máximos: nos objetivos 1, 3 e 4 o número 76, no objetivo 2 o número 114, no objetivo 5 o número 38.

conjunto	DISCRETO				CONTINUO					
OBJETIVOS / QUESTÕES	Objetivo 1		Objetivo 2		Objetivo 3		Objetivo 4		Objetivo 5	
	PRÉ	PÓS	PRÉ	PÓS	PRÉ	PÓS	PRÉ	PÓS	PRÉ	PÓS
TOTAL	0%	82%	12%	48%	4%	80%	8%	75%	42%	74%

Tabela IV – Desempenho geral do GE por objetivos

Podemos afirmar que porcentualmente o objetivo número 1 foi atingido em 0% no pré-teste e, aproximadamente, 82% no pós-teste. Consideramos satisfatórios, pois os alunos não conseguiram '*estabelecer a relação parte-todo com quantidades discretas'*, no início, mas depois da seqüência esse tipo de representação parece ter significado para o aluno. Ilustramos com um exemplo de um aluno do GE, na resolução do pré-teste, que fez o círculo nas quantidades discretas, porém na representação formal utilizou somente dos números naturais para construí-la.

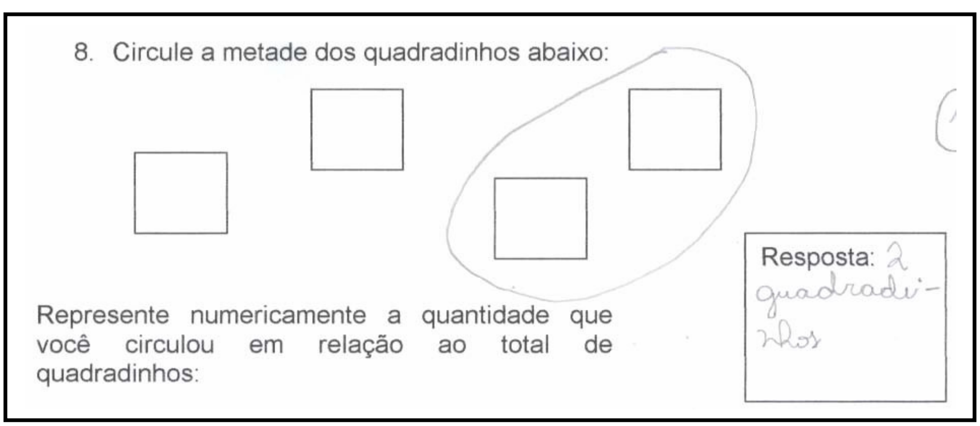


Figura 5b – resolução de aluno do GE

O objetivo número 2, *'representar simbolicamente quantidades discretas'*, o porcentual passou de 12% do pré-teste para 48% no pós-teste. Notamos que seu desempenho não foi tão satisfatório como no anterior, embora do estágio inicial para o final eles tenham apresentado quatro vezes mais êxito do que o realizado no pré-teste. O que é esperado, visto que as quantidades discretas, segundo Silva (1997) surgem da contagem e, por isso, são representadas pelo conjunto dos números naturais, essa divisão euclidiana é uma ferramenta bem adaptada a esses objetos. Normalmente, as divisões com resto estão relacionadas às quantidades contínuas como, por exemplo, dividir sete chocolates para duas crianças, cada uma irá receber 3½ de chocolate, normalmente, são respondidas com decimais.

As questões 5 e 7 já analisadas anteriormente compõem esse objetivo, assim já era prevista uma queda no desempenho dos alunos.

Pesquisas como a realizada por Kerslake (1986), indicam que as crianças relacionam as quantidades pintadas com as não pintadas e desprezam o todo, realizando a relação parte-parte. As crianças afirmam que "as bolinhas pintadas em cima de bolinhas não pintadas" representam, analogamente, o numerador e o denominador da fração, quando na verdade estão equivocadas, pois as bolinhas pintadas representam uma parte (que é o numerador), em relação a todas as bolinhas presentes (pintadas e não pintadas), que indicam o todo (que é o denominador). Apesar das crianças desta pesquisa estarem em estágios de aprendizagem mais avançados, especialmente em função da idade (provavelmente, 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental), ainda cometem erros quando as quantidades são discretas. Nossos resultados assemelham-se aos encontrados por Kerslake (1986), tendo em vista as dificuldades que as crianças enfrentam quando se deparam com situações de representações das quantidades discretas sejam na forma simbólica ou pictórica. Uma aluna do grupo controle mostrou de forma semelhante a representação acima citada na pesquisa de Kerslake, ou seja, relacionou parte-parte apenas com as bolinhas presentes na figura. Vejamos a ilustração como o primeiro indício de que a criança pode estabelecer um tipo de relação sem o contato com a instrução formal, ou seja, o que ela está intuindo a respeito da situação que lhe foi apresentada.

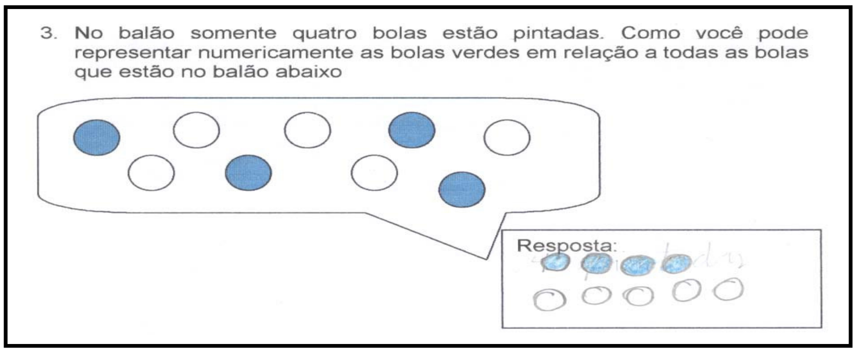


Figura 5c – resolução de aluno do GC

No objetivo 3, cujo máximo de respostas corretas seria 76, encontramos no pré-teste um porcentual de 4%, no pós-teste, este resultado passou para 80%. Podemos afirmar que este objetivo foi alcançado satisfatoriamente. Nosso objetivo de *'representar pictórica e simbolicamente com quantidades contínuas'*, revelou-nos que as crianças compreenderam essa representação e atingiram nosso objetivo, pois observamos que os desenhos e a escrita formal apresentaram-se de forma correta.

De modo similar, Silva (1997) revelou que nas quantidades contínuas podemos efetuar as divisões dos objetos sem que eles percam suas características. Assim, entendemos que a crianças precisam manipular e operar com as duas quantidades contínuas e discretas, para não conceituar erroneamente as frações.

Com relação ao objetivo 4, *'dividir corretamente as áreas para representar'* utilizando as quantidades contínuas, do número máximo possível 76, as crianças do GE atingiram 8% no pré-teste, passando para 75% no pós-teste. Os resultados obtidos a partir desse objetivo são considerados bons. As questões 2 e 6 dos testes apresentam resultados próximos aos encontrados por Kerslake (1986), para a resolução de 3 : 5 ou 3/5 dentro de um contexto e sem o contexto de uma situação-problema. Quando o algoritmo é apresentado com o contexto: "Três barras de chocolate foram divididas igualmente entre cinco crianças. Quanto cada criança recebeu?". Os acertos das crianças com 12 e 13 anos aproximaram-se de 65%. Por outro lado, quando apresentaram a questão 3:5 sem o contexto, os resultados caíram significativamente. A faixa etária considerada em nosso trabalho difere da pesquisa realizada por Kerslake (1986), com uma diferença de três anos aproximadamente. Se levarmos em conta esses três anos, nossos resultados foram muito satisfatórios.

O objetivo 5 *'representar simbolicamente a fração imprópria'* foi pouco trabalhado, pois focamos muito mais nas representações das frações próprias do que nas impróprias, embora tenhamos iniciado com situações-problema contendo a fração imprópria. A pontuação máxima deste objetivo está na casa dos 38 pontos. No pré-teste, os alunos do GE atingiram 42% do objetivo, pois consideramos as respostas do tipo "um e meio" que embora não sejam numéricas, respondem corretamente à quantidade pintada na questão de número 10. Por outro lado, o pós-teste atingiu a faixa de 74%, esse aumento significou quase o dobro do teste anterior. No pós-teste, as respostas foram numéricas e do tipo: 1+1/2 ou 1½ (fração mista). Alguns alunos ainda representaram de forma incorreta mostrando a resposta 2/1. Parece-nos que a contagem e a representação ainda se dão com os números naturais. A ruptura é lenta e progressiva, alguns alunos ainda se sentem fortalecidos com a idéia dos números naturais, assim os apresentam nas situações que permitem a contagem das partes.

Concordamos com Vergnaud (1988) que um conceito não se desenvolve isoladamente, mas em inter-relação com os outros conceitos por meio de vários tipos de problemas e com a ajuda de várias expressões e simbolismo.

Podemos afirmar que as representações simbólicas ilustram o por quê do lento processo de aquisição e ajudam a entender melhor o comportamento das crianças.

5.2. ANÁLISE QUALITATIVA

Nesta seção, temos a intenção de realizar uma análise da qualidade do procedimento que os alunos utilizaram para resolver os testes. Para tal, agrupamos os erros de acordo com suas características, estabelecendo assim categorias. Nosso objetivo consiste em identificar os principais raciocínios e procedimentos que conduziram os alunos ao insucesso. Comparamos os tipos de erros cometidos no pré e pós testes, além de confrontar os procedimentos utilizados pelo GE, a fim de obter um parâmetro mais pormenorizado da evolução dessas crianças.

Após a leitura cuidadosa dos testes, identificamos seis categorias de erros, que são apresentadas abaixo:

E_1: relacionar parte-parte, em quantidades discretas ou contínuas;

E_2: relacionar todo-parte, em quantidades discretas ou contínuas;

E_3: representar uma fração utilizando somente os números naturais;

E_4: considerar a palavra usada na leitura de uma fração como sendo a quantidade a ser assinalada, por exemplo, a quinta parte como sendo 5;

E_5: com quantidades discretas, centrar-se em uma única figura (observação da quantidade contínua) e desprezar as demais que compõem o todo.

E_6: realizar a divisão de uma quantidade contínua, desprezando a conservação das áreas na figura e repartindo as partes, segundo um critério aleatório.

Novamente, apesar de cientes de que existem casos em que há vários tipos de erros na resolução de uma única questão, fizemos uma relação unívoca entre cada item e a correspondente categoria de erro, destacando aquela que foi dominante para o insucesso da questão.

Consideramos que o aluno cometeu um erro do tipo E_1 se, dada uma relação do tipo parte-todo, ele procedeu a contagem da parte em destaque e, em seguida, procedeu a contagem das demais partes, esquecendo de relacionar o todo, seja com quantidades discretas ou com quantidades contínuas.

Exemplificando essa categoria, tomemos a resolução apresentada pela aluna Larissa, do grupo experimental no pós-teste, para a questão um que solicitava relacionar a parte pintada em relação a todos os corações.

Apresentamos a ação inicial do pré-teste e logo, em seguida, o erro cometido após nossa intervenção:

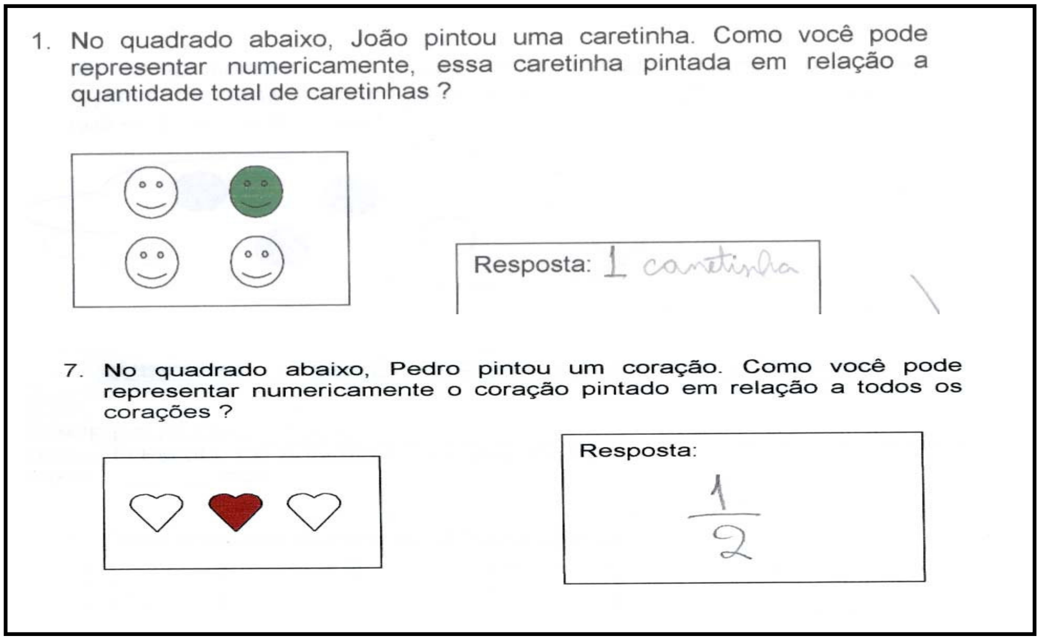


Figura 5d – Resolução da aluna Larissa (GE): pré e pós testes.

A próxima categoria, denominada por E_2, compreende a inversão das posições do denominador e numerador, de tal forma que a criança apresenta no numerador o todo e no denominador a parte. Apresentamos um exemplo desta categoria, mostrado pela aluna Rayane, do GE, no pós-teste:

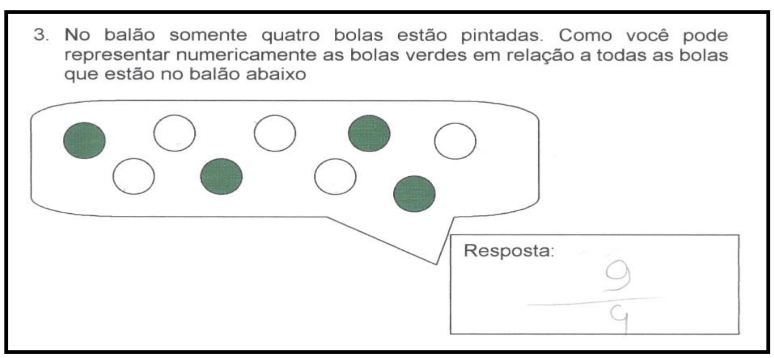


Figura 5e – Resolução da aluna Rayane (GE)

A categoria E_3 refere-se à representação da fração com uso somente de naturais. Esse tipo de resposta parece-nos que a criança ainda não conseguiu operar com o novo conjunto numérico, assim, representa com o conhecimento anterior a nova situação. Apresentamos o seguinte exemplo para ilustrar essa ação. Nela, Larissa (GE) no pós-teste, identifica corretamente a metade, mas representa formalmente com um número natural.

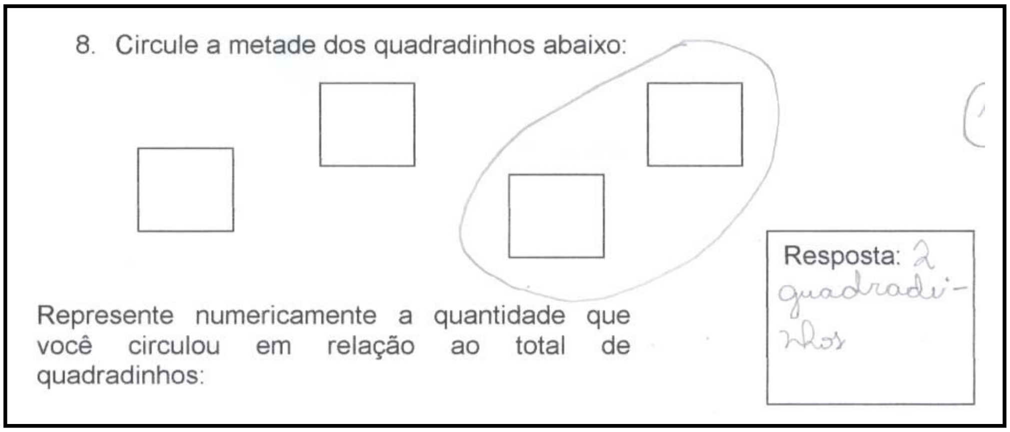


Figura 5f – Resolução da aluna Larissa (GE)

O erro classificado na categoria E_4 representa a ação da criança de pintar, circular ou desenhar o valor do denominador que corresponde ao todo, e não a parte. Parece-nos que esse tipo de erro está relacionado aos números naturais, pois a criança observa apenas o número e não a relação parte-todo.

Vejamos, como exemplo, dessa categoria o procedimento adotado pelo aluno Marcos do GE.

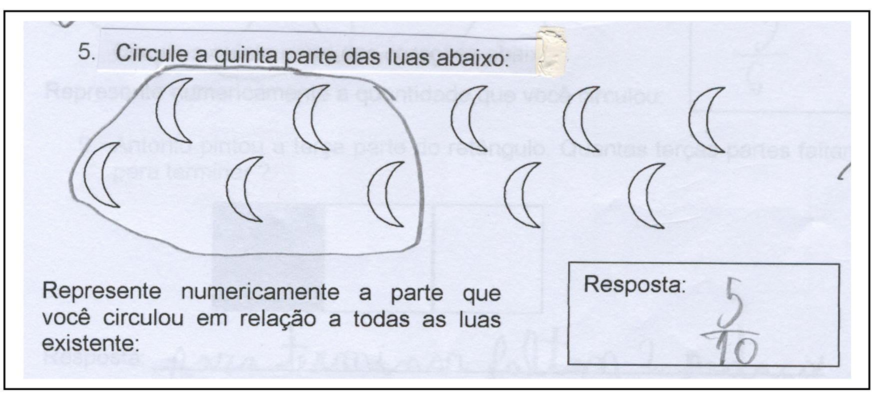
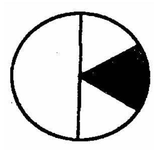


Figura 5g – resolução do aluno Marcos (GE)

O erro E_5 está relacionado ao procedimento da criança, frente a uma quantidade discreta, fixa-se em apenas uma figura e a considera como contínua e efetua a divisão somente nesta figura, desprezando as demais. As figuras presentes nos testes, tais como: luas, corações, estrelas podem ter favorecido para que os alunos as repartissem e focalizassem apenas uma delas. Em nossa seqüência, foram trabalhadas figuras semelhantes nas quais enfatizamos a observação do todo com quantidades discretas, mesmo assim alguns alunos, em lugar de relacionarem o subconjunto em relação ao conjunto dado, pontuaram apenas o subconjunto e nele operaram como uma relação parte-todo e como quantidade contínua. Este fato observado pode ter influência nas relações parte-todo das quantidades contínuas que também foram trabalhadas. Nas pesquisas de Silva (1997) e Kerslake (1986), notamos a discretização do contínuo, mas não existem relatos sobre esse tipo de erro. Parece que a criança entende a fração somente como parte de um único todo, assim procura centrar-se em uma única figura. Ë preciso compreender melhor, porque a criança que vive no mundo de quantidades discretas, não estabelece a relação parte-todo com quantidades discretas. Mais pesquisas precisam ser realizadas para avaliar melhor, porque elas interpretam a fração dessa forma.

Finalmente, o erro E_6 ocorre quando a criança despreza a conservação das áreas, divide e distribui de acordo com sua vontade e não da forma correta, garantindo a mesma porção para cada parte do todo. Esse tipo de erro ocorreu com quantidades contínuas. As pesquisas de Kerslake (1986) apontam para o mesmo tipo de erro, também, com crianças de idade entre 11 e 13 anos. Alguns alunos participantes da pesquisa realizada por Kerslake dividiram as tortas sem se preocuparem com a conservação das áreas. De modo análogo, a pesquisa de Silva (1997) realizada com futuros professores do Ensino Fundamental (de 1ª a 4ª séries) negligenciaram a conservação das áreas, quando questionados sobre certas partes pintadas em quantidades contínuas, cuja forma apresentada a eles continha omissão de traços como, por exemplo, na figura abaixo,



alguns responderam que a parte pintada corresponde a ¼ da figura.

Para maior clareza do leitor, apresentamos, a seguir, um quadro contendo os erros cometidos pelos alunos do GE. Além dos erros, apresentamos as questões que foram deixadas em branco (Eb), bem como as questões que foram resolvidas corretamente, simbolizadas pela letra C.

Questão		1	2		3	4	5		6		7	8		9		10
		F	P	F	F	F	P	F	P	F	F	P	F	P	F	F
1	Pré	E3	Eb	E3	E3	E3	E5	E3	Eb	E3	E3	E5	E3	E4	E3	C
	Pós	C	C	C	E3	C	C	C	C	C	E1	E5	E4	C	C	E1
2	Pré	E3	E6	E3	E3	E3	E5	E3	E6	E3	E3	E5	E3	E4	Eb	C
	Pós	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
3	Pré	E3	E6	E3	E3	E3	E4	E3	C	E3	E3	C	E3	E4	E3	C
	Pós	C	E6	Eb	C	C	E5	E4	C	C	E1	C	C	C	C	C
4	Pré	E3	Eb	E3	E3	E3	E4	E3	Eb	E3	E3	C	E3	E4	Eb	E3
	Pós	E1	C	E3	C	C	E4	E4	C	E3	E3	C	C	C	C	C
5	Pré	E3	Eb	E6	E3	E3	E4	E3	E6	C	E3	C	E3	E4	E3	E3
	Pós	C	C	C	C	C	E4	E4	C	C	C	C	C	C	C	C
6	Pré	E3	Eb	E6	E3	E3	E4	E3	Eb	C	E3	C	E3	E4	E3	C
	Pós	C	C	C	C	C	E4	E4	C	E3	E1	C	C	C	C	C
7	Pré	E3	Eb	E6	E3	E3	E4	E3	Eb	C	E3	E5	E3	E4	E3	C
	Pós	E1	C	E3	C	C	C	C	C	C	E3	E4	E5	C	C	C
8	Pré	E3	Eb	E3	E3	E3	E4	E3	Eb	E3	E3	C	E3	E4	E3	E3
	Pós	E1	C	E6	C	C	E4	E4	Eb	E6	E3	E4	E4	C	C	C
9	Pré	E3	Eb	E6	C	E3	E4	E3	Eb	E6	E3	C	E3	E4	E3	E1
	Pós	C	C	C	C	C	C	C	C	C	E3	C	C	C	C	C
10	Pré	E3	E6	E6	E3	E3	E4	E3	Eb	E6	E3	C	E3	E5	E3	E3
	Pós	E1	C	E3	E3	C	E4	E4	C	E3	E3	C	C	C	C	C
11	Pré	E3	Eb	Eb	E3	E3	E4	E3	E b	E3	E3	C	E3	C	E3	E3
	Pós	C	C	C	E1	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
12	Pré	E3	Eb	E6	E3	E3	E4	E3	Eb	C	E3	C	E3	E4	E3	C
	Pós	C	C	C	E3	C	E4	E4	C	C	C	C	C	C	C	C
13	Pré	E3	Eb	E6	E3	E3	E4	E3	Eb	C	E3	C	E3	E5	E3	C
	Pós	E1	E6	E3	C	C	C	C	E6	E3	C	C	C	C	E5	E1
14	Pré	E3	Eb	E3	E3	E3	E4	E3	Eb	E3	E3	C	E3	E4	E3	E3
	Pós	C	C	C	C	C	E4	C	C	C	C	C	C	C	C	C
15	Pré	E3	Eb	E3	E3	E3	E4	E3	Eb	E3	E3	C	E3	E4	E3	E1
	Pós	C	C	C	C	C	E4	E4	C	C	E3	C	E3	C	C	E1
16	Pré	E3	Eb	E3	E3	E3	E4	E3	Eb	E3	E3	C	E3	E4	E3	E3
	Pós	C	C	C	E3	E2	E4	E4	C	C	E3	C	C	C	C	C
17	Pré	E3	Eb	E3	E3	E3	E5	E3	Eb	E3	E3	E5	E3	E4	E3	C
	Pós	E1	C	C	C	C	E4	E1	C	C	C	C	E1	C	C	C
18	Pré	E3	Eb	E3	E3	E3	E4	E3	Eb	E3	E3	C	Eb	E4	Eb	E6
	Pós	C	Eb	E3	E3	C	E4	E4	C	C	E3	C	C	C	C	E1
19	Pré	E3	E6	E3	E3	E3	E4	E3	E6	E3	E3	E6	E3	E4	E3	E3
	Pós	C	C	E3	E3	C	E4	E4	C	E3	E1	E4	E3	C	C	E1

Quadro 5.7 – Análise do tipo de erro cometido nos testes – Grupo experimental

LEGENDA

Erro 1	Erro 2	Erro 3	Erro 4	Erro 5	Erro 6	Em branco	correta	Pictórica	Formal
E1	E2	E3	E4	E5	E6	Eb	C	P	F

5.2.1. Análise dos erros cometidos pelos alunos

Nesta seção, analisamos os erros cometidos pelos alunos do Grupo Experimental no pós-teste, com base no aporte teórico do capítulo II deste trabalho, bem como nos trabalhos de Ciscar (1988), Pinto (2000) e Silva (1997) com relação às classificações dos erros, em especial, com os números fracionários.

Segundo Ciscar (1988), há dois tipos de erros: a similaridade e os símbolos. Uma grande parte dos erros que as crianças cometem ao trabalhar com as frações tem sua origem na similaridade que, tanto a linguagem como a simbologia, se apresentam como os números naturais. Por um lado, as frações nomeiam-se, utilizando-se nomes iguais ou muito parecidos àqueles que são familiares no contexto dos números ordinais; assim, por exemplo, dizemos "um quarto", "dois quintos", etc. Por outro lado, e este é o mais grave, segundo o autor, os mesmos símbolos dos números naturais são usados também para as frações, diferenciando-se apenas no traço horizontal. Na experiência que a criança tem com os números naturais, acaba conservando a tendência de ver as frações como um conjunto de dois números naturais, separados por um traço. Em conseqüência, a criança trata e utiliza seus conhecimentos de cálculo dos números naturais, para o qual extrapola nas frações as regras e algoritmos deste conjunto. Isto constitui o que alguns autores têm denominado de "efeito da distração dos números naturais".

De acordo com Silva (1997), ao relacionar os critérios para análise dos livros didáticos, há a citação da questão dos erros apresentados neste recurso – o livros didáticos – tão utilizados nas salas de aula. Assim, explica a autora, o aluno é conduzido a adquirir concepções errôneas sobre as frações (as partes podem ser desiguais) como desenvolver a linguagem própria das frações com base na nomeação de figuras sempre do mesmo padrão (completamente divididos), o que faz com que o aluno erre, quando ocorre mudança nesse referencial. Na realidade, acreditamos que o aluno não desenvolve uma compreensão clara sobre as frações, pelo contrário, desenvolve um procedimento de dupla contagem das partes no modelo contínuo, baseando-se na prévia divisão das figuras completamente em partes iguais.

Finalizando, apresentamos algumas considerações de Pinto (2000) sobre o erro como estratégia didática. A autora cita os erros com números racionais, pois estes são demasiadamente freqüentes na 4ª série. No relato 7, a professora trabalha uma atividade intitulada: "Repartindo", cujo objetivo era empregar idéias relacionadas ao conceito de número racional tanto sob a sua representação fracionária quanto sua representação decimal. Ao mesmo tempo em que escreve no quadro o título da atividade, a professora vai alertando os alunos de que se trata de uma tarefa de "puro raciocínio":

> *Mamãe fez uma torta e repartiu em pedaços iguais. Papai comeu ¼ da torta. Os irmãos Luís e Andréa comeram, cada um, a terça parte da torta.*
>
> *a) cobrir a parte de cada um, em cores diferentes;*
>
> *b) qual fração da torta que sobrou?*
>
> *c) Quantos pedaços há em 1/6 da torta?*
>
> (Pinto, 2000, p.128)

A autora discorre todo o relato de como a professora e a classe comportam-se frente a este problema, sempre reforçando fixar as respostas corretas, dando de antemão todos os passos importantes na construção do conceito que deveria ser realizado pelas crianças. Finalizando, os alunos cometem uma variedade de erros, alguns dos quais se constitui em obstáculos (entendido pela autora como os de Brousseau) de difícil superação, mesmo para aluno considerados “fortes”.

Pudemos observar, baseados nesses relatos que as representações simbólicas e pictóricas apresentadas aos alunos constituem-se em um elo importante entre a conceitualização e a resolução dos problemas.

Apresentamos alguns erros que os alunos do GE cometeram no pós-teste, depois de nossa interferência no processo de aprendizagem.

Com relação às quantidades discretas, observamos a inversão entre o numerador e o denominador da fração. Para exemplificar, apresentamos o procedimento de Rayane do GE:

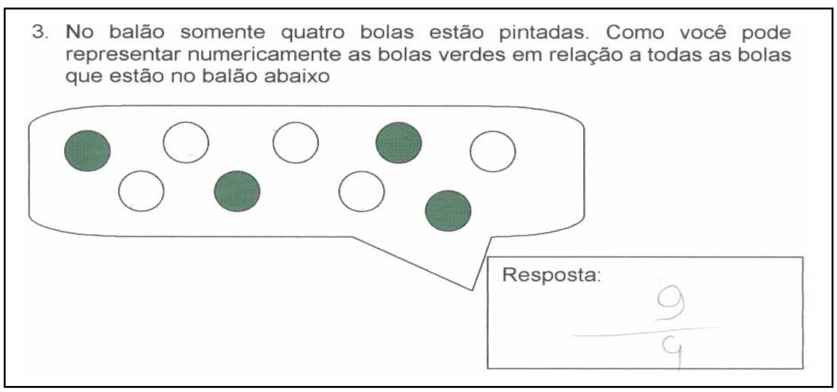


Figura 5h – Resolução da aluna Rayane (GE)

Dentre os 19 alunos, apenas uma única aluna inverteu a relação. Podemos inferir que essa aluna errou por distração, pois as resoluções apresentadas nas atividades não continham esse tipo de erro.

Outra aluna do GE que merece nossos comentários, é Bruna que no pré-teste acertou apenas um item e no pós-teste acertou 15, ou seja, 100%. Sua evolução superou a média dos demais alunos do grupo, seu crescimento foi, notadamente, significante. Em uma das atividades realizadas durante a seqüência, aproximadamente 35% das crianças presentes conseguiram responder corretamente, e Bruna foi uma delas. Vejamos sua resposta ao problema apresentado:

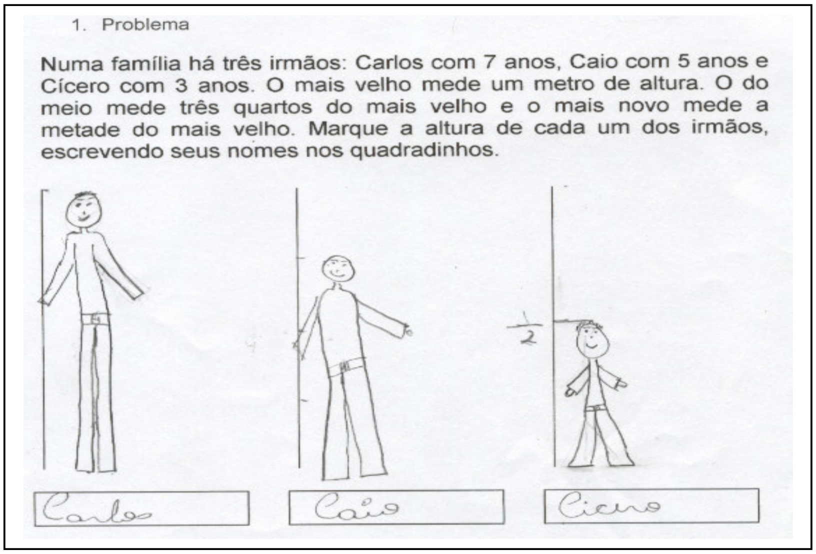


Figura 5i – resolução da aluna Bruna (GE)

Outro procedimento utilizado pela aluna Larissa do GE apresenta a mesma idéia observada na pesquisa de Kerslake (1986), quando a criança relaciona na quantidade discreta a figura pintada em relação às outras não pintadas, estabelecendo uma relação do tipo parte-parte.

Na questão 8 do pós-teste da Larissa, vale destacar sua compreensão com relação à metade. A questão apresentava seis triângulos e pedia para que o aluno encontrasse a metade, ou seja, três triângulos. Parece-nos que Larissa associou a idéia de metade ao número 2, pois circulou os triângulos dois a dois e ainda representou 2/6.

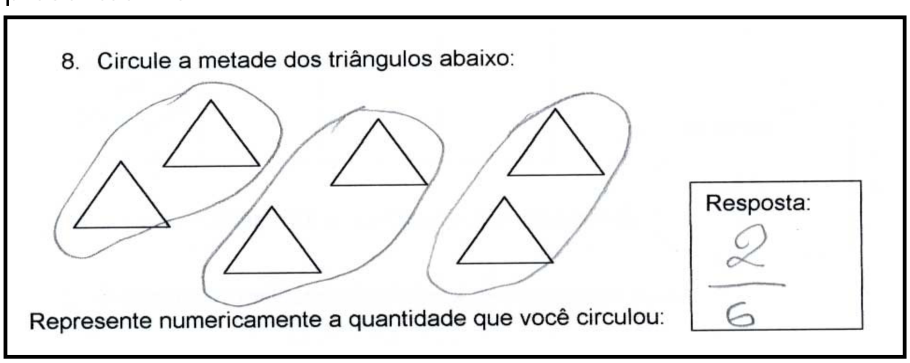


Figura 5j – Resolução da aluna Larissa (GE)

Podemos observar que os alunos ainda estão formando suas estruturas de pensamento para representar esse novo número que lhe foi apresentado, pois, no mesmo teste, ora acerta, ora erra questões semelhantes. Segundo

Nunes (1996), as diferentes representações mudam os meios pelos quais as crianças resolvem os problemas. O mesmo sistema de signos pode ter uma diferença dependendo da prática cultural a que está envolvida.

Outro aluno ao trabalhar com quantidades contínuas, realiza a divisão, embora não conserve as áreas, mas identifica corretamente que cada criança deverá receber 3 partes, ou seja, 1/5 + 1/5 + 1/5, formando 3/5. Ao representar simbolicamente escreve 5/10. Observamos que o elo entre o simbólico e o pictórico está apenas iniciando. Apresentamos a resolução realizada pelo aluno Wilker:

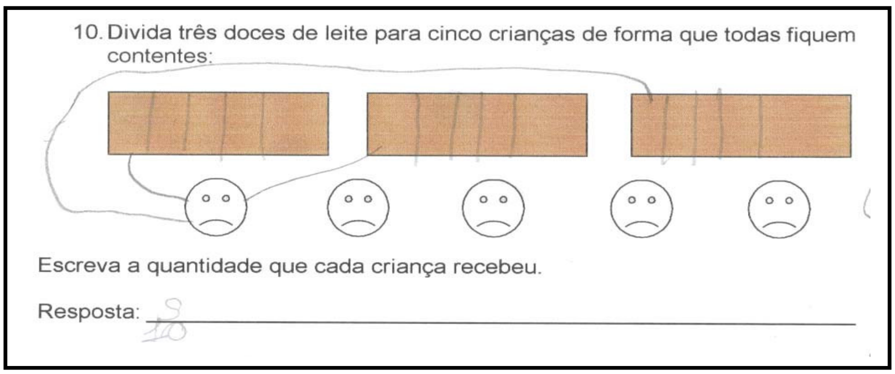


Figura 5l – Resolução do aluno Wilker (GE)

Com relação à tendência do aluno em empregar os números naturais, constatamos no pós-teste do GE esta concepção quando eles respondem ‘um pedaço’ (Valéria – Pré-teste).

Figura 5m – Resolução da aluna Valéria (GE)

5.2.2. Análise qualitativa das respostas

Apenas cinco dos 19 alunos ficaram abaixo de oito acertos no pós-teste, dois desses alunos conseguiram acertar seis itens do pós-teste.

Segundo Correa (2000), as exigências impostas pelas situações de repartir e dividir não são idênticas em termos cognitivos. As situações de repartir que a criança encontra em sua vida diária, podem ser resolvidas baseadas nos procedimentos aditivos por meio do uso da correspondência termo a termo e podem estabelecer a equivalência entre as quotas a serem dadas a cada participante, adicionando ou retirando quantidades. No entanto, a divisão, como uma operação multiplicativa vai requerer o entendimento por parte das crianças das relações entre dividendo e divisor na determinação do valor do quociente.

Observamos que a retomada realizada no primeiro encontro, em que tratamos da operação de divisão com os números naturais, os esquemas pictóricos que os alunos criam com base na manipulação dos palitos realizada, anteriormente, podem favorecer na construção dos diagramas, sobretudo, nas quantidades discretas que representem corretamente as frações. Vejamos os procedimentos do Marcos (1º encontro e o Pós-teste).

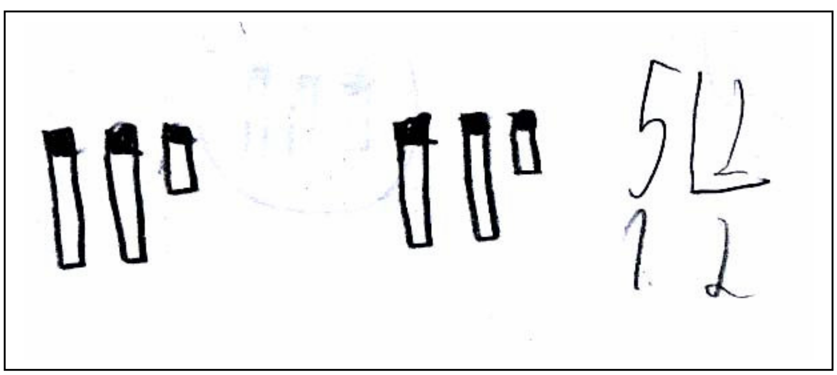


Figura 5n – Esquema de resolução de Marcos (GE)

Uma das crianças (Valéria) que no pré-teste não apresentou um esquema para dividir três quantidades contínuas entre cinco crianças. No pós-teste esses esquemas aparecem e a representação simbólica também. Podemos observar nitidamente que cada criança recebeu três partes de um todo que foi dividido em cinco, ou seja, 3/5. Como ilustramos abaixo, a aluna Valéria no pós-teste melhorou seus esquemas. Observe:

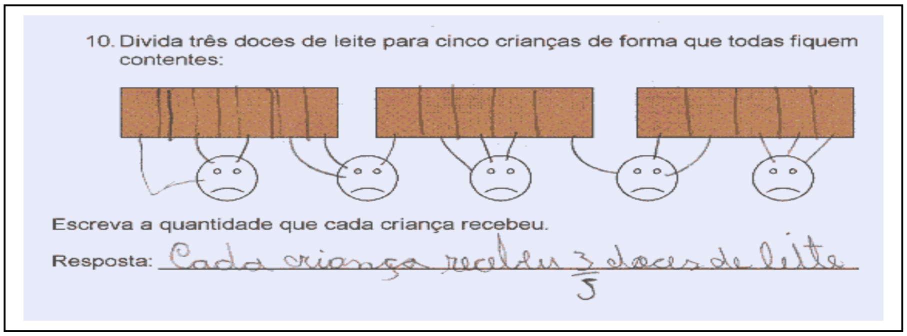


Figura 5o – Resolução da aluna Valéria (GE)

Foi possível observar os avanços cognitivos que as crianças apresentaram, após nossa intervenção. O exemplo acima descreve situações concretas de como as crianças realizavam as representações sem a instrução formal das frações e depois de terem tido contato com esse campo numérico.

Segundo Spinillo (1994), ao fazer um paralelo entre o conhecimento matemático espontâneo e a instrução escolar a autora relata que a matemática na escola é descontextualizada no sentido em que pode referir-se a qualquer coisa em qualquer situação e a matemática formal refere-se sempre a alguma coisa em determinada situação (referente concreto ou hipotético). É difícil à criança, ao ingressar na escola, passar a conceber a Matemática como um sistema sem um referente (generalização e abstração), visto que nas situações do dia-a-dia este referente está sempre presente.

6. CONCLUSÃO

INTRODUÇÃO

Neste capítulo, procedemos as conclusões obtidas, após a aplicação de uma seqüência de ensino, seguido dos resultados analisados com base na aplicação de dois instrumentos diagnósticos, o pré-teste aplicado, antes da seqüência e o pós-teste aplicado, após o desenvolvimento da mesma. Iniciamos com as conclusões obtidas respondendo à nossa questão de pesquisa, em seguida, fazemos algumas sugestões para serem aplicadas em sala de aula e, finalmente, tratamos da apresentação de nossas sugestões relevantes às futuras pesquisas dentro do tema.

6.1. Conclusão do trabalho

Nosso trabalho teve como objetivo investigar uma abordagem para a aquisição do conceito de número fracionário e de suas representações, considerando as representações simbólicas e pictóricas. Foram criadas diversas situações-problema, de modo significativo para o aluno que o desafiasse buscar uma solução. Era nosso objetivo também garantir a participação do aluno, em todas as atividades propostas, como propõe Vygotsky (1984) que a criança é um ser social e a velocidade de sua aprendizagem depende dos diálogos que ela estabelece com os seus pares.

A questão de pesquisa definida no início desse trabalho "***Como abordar os conteúdos relacionados ao número fracionário de forma que o aluno compreenda o seu conceito e estabeleça a relação entre o número e sua representação?"*** propiciou-nos indícios de que a abordagem, utilizada por nós, para a aquisição do conceito dos números fracionários e suas representações, com base na divisão com números naturais e problematizando uma representação adequada para o resto desta divisão, quando apresentamos uma operação de divisão do tipo 5:2, demonstrou resultados bastante satisfatórios, conforme descrito no capítulo anterior.

Tomando-se como base as análises dos dados realizados, podemos afirmar que uma seqüência de ensino que interfere no contexto cultural e social da criança (Nunes, 1998) e (Vygotsky, 1984) e privilegia a situação-problema como Vergnaud (1988, 1990) propõe, apresentando atividades significativas e desafiadoras para as crianças (Nunes & Bryant, 1997), de fato influencia efetivamente na formação do conceito de número fracionário e sua representação. As crianças encontram significados para sua aprendizagem e apresentam resultados satisfatórios na conceitualização desse campo numérico.

Existem diversas formas de introduzir o conceito dos números fracionários, como já citamos no corpo deste estudo. Porém a mais usual nem sempre é a melhor. Nossos resultados indicam que as crianças compreenderam o novo número que lhes foi apresentado e conseguiram satisfatoriamente representá-lo com um menor número de erros. As constatações, observadas no início deste estudo de que havia problemas e dificuldades no processo de aprendizagem do conceito referente ao campo numérico dos racionais, embora empíricas, propiciaram a busca de respostas para esse conteúdo, assim, demos início a nosso trabalho científico.

Construímos uma seqüência de ensino com várias atividades, considerando as pesquisas de Vergnaud (1988, 1990, 1993, 1994, 1998), Nunes (1992; 1996; 1998), Nunes & Bryant (1997), Ciscar (1988), Kerslake (1986), Spinillo (1994, 1995), Correa (2000), Bianchini (2001), Campos (1995) e Silva (1997), buscando nas concepções escolhidas, contemplar um número razoável de situações-problema que propiciassem a reflexão, o desafio, e dessem um significado à criança de por que aprender um novo campo numérico.

Concordamos com Campos de que:

> "*o modelo parte-todo é uma metodologia que induz a criança ao processo de dupla contagem. Claramente, a dupla contagem é um processo que leva ao desenvolvimento da linguagem de fração a partir da enumeração das partes e não à construção do conceito de fração nos seus diferentes aspectos, isto é, a criança não percebe essa representação simbólica nem como número fracionário, nem como representante de uma quantidade"* (Campos, 1999, p.173).

Portanto, iniciamos a seqüência com o modelo quociente para a aquisição desse conteúdo, no desencadear dos encontros, apresentamos também o modelo parte-todo. Acreditamos que o modelo parte-todo é importante, mas não deve ser o único e tampouco o início para o aprendizado das crianças, pois ele parece oferecer uma barreira maior entre os números naturais e os fracionários.

Durante a realização da seqüência de ensino, tivemos o apoio da professora da classe, que mesmo com nossa presença procurou garantir o respeito dos alunos para o bom desempenho deles e das atividades que estávamos propondo a cada encontro. Em alguns momentos, a professora centrou-se na atenção de um grupo ou de um aluno para observar o tipo de questionamento ou a forma como ele estava compreendendo um determinado conteúdo. Vejamos algumas questões formuladas pelos próprios alunos:

a) *Precisa fazer um X para marcar?*
b) *Quanto ele tem?*
c) *Quarto e metade quanto é?*
d) *Não mostra a quantidade que tem !!!*
e) *Quanto é três quartos?*
f) *Como é metade da metade?*

g) *Tem quantas coisas o chocolate?*
h) *Como assim 'metade da metade' do caminho?*

Essas questões apresentadas durante a realização da seqüência indicam que, para alguns alunos, elas foram respondidas e superadas, mas para outros ainda percorrem um caminho próprio para a compreensão que necessita de um tempo maior para sua assimilação e acomodação.

Podemos considerar que dez encontros representam um número reduzido para a compreensão dos conceitos inerentes aos números fracionários. Na construção de nossa seqüência, utilizamos as concepções contidas na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, defensor de que a resolução de problemas é parte integrante do processo de formação de conceitos. Segundo Vergnaud (1990), os estudantes podem ultrapassar os obstáculos dos conceitos mais difíceis da matemática, conforme desenvolvam estes conceitos pela discussão com outras pessoas, ou mesmo, com outros conceitos da matemática, uma vez que esses conceitos podem ser falíveis e sua construção gerar bons e maus frutos. As competências e concepções desenvolvem-se ao longo do tempo, por intermédio das experiências que envolvem um grande número de situações tanto no interior da escola como fora dela (ibid, 1994).

A seqüência procurou também explorar a relação entre os conceitos espontâneos (Spinillo, 1994) e intuitivos (Correa, 2000) apresentados pelas crianças e os conceitos científicos inerentes ao conteúdo. Para estabelecer o elo entre essa relação, nós procuramos criar situações desafiadoras e significativas como propõe Nunes (1997), de modo a garantir a participação e o envolvimento das crianças durante todos os encontros.

As atividades teatrais que aplicamos com as crianças durante os sexto e décimo encontros surpreenderam nossas expectativas, pois a participação delas foi bastante grande, tornando proveitosas as situações-problema que propúnhamos. Todos os alunos envolveram-se na atividade e as questões geravam desafios para se obter a resposta e avaliar se o colega de classe estava certo ou não. A animação da turma era maior quando um deles errava a questão, entregando troco errado ou calculando a fração de forma incorreta. Isto nos permite inferir que a sala de aula necessita de uma dose de emoção e prazer para que de fato haja interesse, por parte dos alunos, em aprender.

Gostaríamos de observar que a concepção escolhida de parte-todo e quociente não se deu necessariamente nesta ordem. Procuramos a cada encontro mesclar as duas concepções envolvendo as quantidades contínuas e discretas. Assim, concordamos com as opiniões de Silva (1997) de que uma combinação entre os modelos parte-todo, quociente, medida, com quantidades discretas e contínuas, favorecem a aprendizagem das frações. Ainda, segundo Silva (1997), nas quantidades contínuas, podemos efetuar as divisões dos objetos, sem que eles percam suas características. Entendemos que a criança precisa manipular e operar com as duas quantidades: contínuas e discretas, para não conceituar erroneamente as frações. Neste trabalho, procuramos abranger as duas quantidades, de modo a garantir não só a compreensão do conceito do número fracionário, mas também sua representação.

Nas discussões apresentadas no trabalho de Silva (1997), a autora justifica a inclusão das quantidades contínuas e discretas no estudo dos números fracionários e considera fundamental que o professor perceba as diferenças entre as situações e as ações que envolvem as quantidades discretas e as contínuas. Mesmo sendo o mundo da criança dominado pelo discreto, muito pouco se trabalha com esse tipo de quantidade no ensino de frações. Provavelmente, pelas limitações e diferenças de procedimento que aparecem em relação às quantidades contínuas que, inclusive, podem provocar obstáculos em outros momentos. A autora apresentou outro fator mostrando que as quantidades discretas surgem da contagem, por isso, são representadas pelo conjunto dos números naturais. Essa divisão euclidiana é uma ferramenta bem adaptada a esses objetos. Normalmente, as divisões com resto estão relacionadas às quantidades contínuas, por exemplo, dividir sete chocolates para duas crianças, cada uma irá receber 3½ de chocolate, normalmente, são respondidas com decimais.

No capítulo V, apresentamos os comentários gerais sobre a aplicação da seqüência e a análise dos resultados do pós-teste feito pelo grupo experimental, sob a ótica quantitativa e qualitativa. Partindo dessas informações, acreditamos que a abordagem de nossa seqüência favoreceu a construção do conceito de fração, ainda que de forma introdutória. Isto porque, apesar das dificuldades apresentadas durante a aplicação de nossa seqüência, o grupo experimental obteve sucesso em diversos aspectos. Essa afirmação é pertinente tendo em vista o porcentual de crescimento observado, com acertos de 70% no pós-teste e a redução significativa das respostas em branco.

De acordo com o que foi demonstrado no capítulo II sobre a socialização dos conceitos e as representações, Nunes (1992) afirma que as crianças podem trabalhar com diferentes ferramentas para mediar suas atividades de resolução de problemas, em outras palavras, o mesmo conceito pode ser representado de diferentes formas, também (ibid, 1997) conclui que as representações tornam-se os objetos sobre os quais atuamos, quando nós resolvemos problemas. As operações que nós executamos nas representações estendidas, podem ser diferentes daquelas que operamos nas representações compactadas. As frações encaixam-se, segundo a autora nas representações compactadas, tendo em vista a representação a/b.

Para Nunes (1997), a matemática do dia-a-dia pode ser um bom ponto de partida para aprender as frações, sendo importante que o professor conheça uma variedade de práticas matemáticas e de diferentes grupos sociais, a fim de que possa oferecer uma visão mais diversificada de esquemas de raciocínio que não são utilizados, muitas vezes, pelos próprios alunos. Procuramos sempre que possível flexibilizar o raciocínio e, assim, criar uma variedade ainda maior de esquemas de raciocínio que pudessem unir nitidamente com os signos matemáticos. O trabalho em grupo foi uma constante em nossa seqüência, para que fosse possível a aplicação das idéias de Nunes.

Figura 6a – Foto do GE durante a aplicação da seqüência.

Pretendemos deixar claro que acreditamos que existem outras formas eficazes de se introduzir os números fracionários, baseadas em situações que procurem dar significado ao aluno. De maneira alguma, defendemos que essa é a única forma de ensinar este conteúdo. Apenas acreditamos que, para o grupo experimental, nossa seqüência apresentou elementos facilitadores para aquisição e construção inicial do conceito de número fracionário e de suas representações.

Realizando uma avaliação crítica de nosso estudo, notamos que em certos pontos poderíamos aperfeiçoá-lo. Se ampliássemos a duração da aplicação da seqüência, trabalharíamos melhor certos aspectos que, provavelmente, levariam a obtenção de melhores resultados em determinadas questões. Acreditamos que seria válido trabalhar com um número maior de situações-problema, pois garantiriam ao aluno a possibilidade de interagir mais com este tipo de exercício, proporcionando-lhe habilidades e instrumentos de raciocínio matemático. Por fim, se pudéssemos explorar ainda mais os recursos manipulativos de que dispúnhamos, os erros que os alunos cometeram nas resoluções do pós-teste, poderiam ser minimizados.

6.2 Sugestões para o trabalho de sala de aula

Inicialmente, gostaríamos de sugerir aos professores que procurem criar novas situações de aprendizagem,e que tornem o espaço da sala de aula como um local gostoso e alegre às crianças. É preciso ousar!

Na sala de aula, no contato direto com os alunos, o educador desempenha a ação educativa. Apesar das relações da escola como instituição e com o Estado, de um modo geral, é preciso que o educador encontre na sala de aula seu espaço de atuação, de inovação e de criatividade. É necessário conscientizar-se de que ela é também um espaço histórico e político e sua ação também é limitada. No contato face a face com seus alunos, os discursos são confrontados com suas ações, daí a importância da coerência do discurso em sala de aula. Os alunos possuem sensibilidade suficiente para perceber os engodos que ocorrem no interior da sala de aula. Assim, a atuação do educador não envolve apenas a tarefa técnica, mas também um compromisso político de recuperar o lúdico por meio do uso da linguagem e, em conjunto, com seus alunos.

É preciso levar em conta também, como afirma Rubem Alves que:

> "*o que está em jogo é a política, a construção de mundos, a ação. A ação não se desenrola sobre um discurso analítico, exatamente por faltar a este o caráter de materialidade. Aqui, sim, se pode dizer: discurso, são discursos que nascem do amor e provocam o amor. Por isto mesmo a ação se mistura com eles, como a atividade criadora que traz à existência aquilo que ainda não existe*" (Conversas com quem gosta de ensinar, p.61).

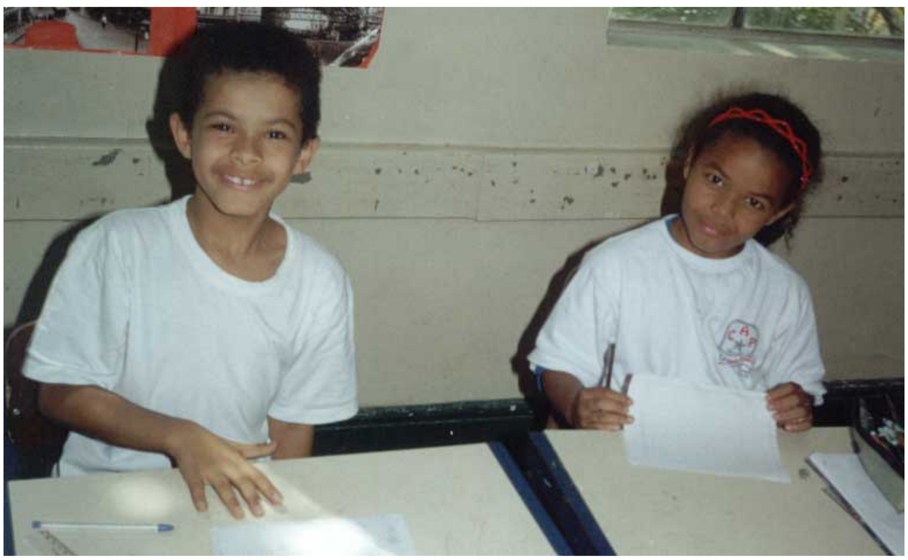


Figura 6b – Foto do GE durante a aplicação da seqüência

Àqueles que encaram os desafios como um estímulo para o trabalho de sala de aula, gostaríamos de sugerir a aplicação de nossas atividades que se encontram nos Anexos deste estudo. Nessas atividades, poderão ser percebidas a apresentação de problemas desafiadores como as Atividades 4 e 6.

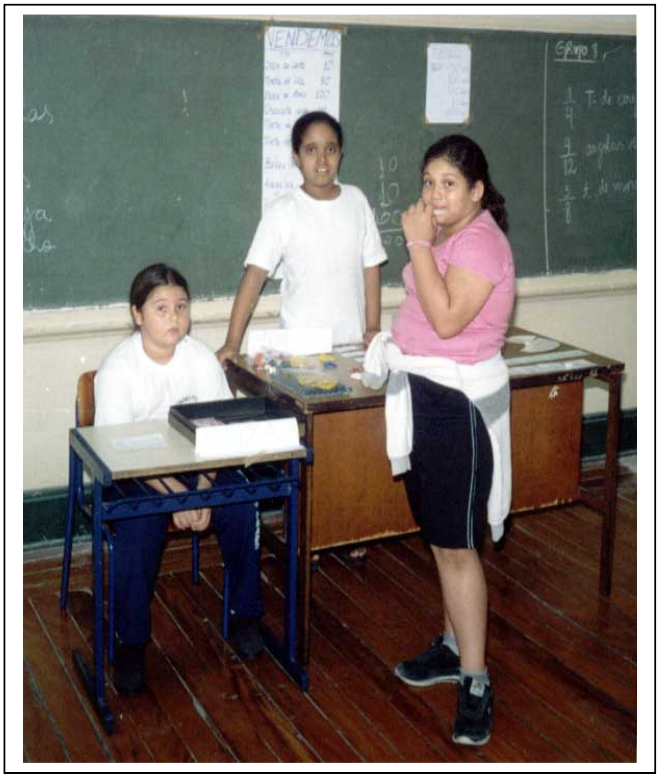


Figura 6c – foto do 6º encontro

No trabalho com quantidades discretas, vale lembrar a importância dos recursos didáticos que, ao serem divididos, perdem suas características iniciais como, por exemplo, o botão de camisa. Se quebrarmos um botão ao meio, qual será sua utilidade? Diferente de repartirmos um bolo por exemplo, em que todos poderão apreciar o mesmo sabor.

O fator também considerado em sala de aula é o trabalho em equipe. Se o professor não o realiza por medo da algazarra dos alunos, sugerimos que o inicie em duplas. Essa sociabilidade entre eles é importante, pois as discussões estabelecidas não requerem cuidados de linguagem ou medo de errarem, pois ambos estão no mesmo patamar de aprendizagem. Os alunos disponibilizam todo tipo de aprendizagem adquirida nos vários contextos sociais e da escola, e as diferenças entre eles poderão contribuir nas capacidades cognitivas ao adquirir um novo conteúdo nesse repertório inicial.

Figura 6d – Foto do GE durante os trabalhos em grupo

Cabe ao professor amenizar as hierarquias presentes na sala de aula, administrar os ritmos de aprendizagem de cada um de seus alunos. É preciso 'olhar' o erro como a porta de um caminho obscuro que pode levar ao fracasso e à exclusão, se a luz do professor não for deveras suficiente para iluminar e criar novos horizontes.

Afinal, o espaço pedagógico é um "texto" para ser constantemente "lido", interpretado, "escrito" e "reescrito" (Paulo Freire).

6.3 Sugestões para futuras pesquisas

Gostaríamos de finalizar nosso estudo com algumas sugestões de pesquisas para futuros trabalhos que venham enriquecer ainda mais o ensino dos números fracionários. Uma atividade interessante seria a comparação entre as metodologias que iniciam com a relação parte-todo e esta com o quociente. Outra poderia testar o início do estudo das frações pela concepção de medida. E, por último, sugerimos pesquisas que possam compreender o porquê os alunos, quando estão lidando com quantidades discretas, fixam seu olhar em uma única figura e passam a representar a fração somente como parte de um todo contínuo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

ALEKSANDROV, A . D. [et al] *La matemática: su contenido métodos y significado.* Versión española de Manuel Lópes Rodríguez. Espanha: Alianza Editorial, 1988.

BIANCHINI, Bárbara Lutaif. *Estudo sobre a aplicação de uma seqüência didática para o ensino dos números decimais*. Tese de doutorado em Psicologia da Educação. São Paulo: PUC/SP, 2001.

BOYER, Carl Benjamin. *História da Matemática*. Trad. Elza F. Gomide. Sao Paulo: Edgard Blucher, 1974.

BROUSSEAU, Guy. *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques.* RDM, vol. 7, nº 2, 1986.

CAMPOS, Tânia, JAHN, Ana Paula, LEME DA SILVA, M. C., e FERREIRA DA SILVA, Maria José. *Lógica das equivalências*. PUC, São Paulo: Relatório de pesquisa não publicado, 1995.

CARAÇA, Bento de Jesus. *Conceitos fundamentais da Matemática*. Lisboa-Portugal: Gradiva, 1998.

CARRAHER, Terezinha, CARRAHER, David, Schliemann, Analúcia. *Na vida dez, na escola zero.* 7 ed. São Paulo: Cortez, 1993.

CORREA, Jane. *A compreensão intuitiva da criança acerca da divisão partitiva de quantidades contínuas*. Rio de Janeiro: UFRJ, 2000.

CISCAR, Salvador Llinares, GARCÍA, Maria Victoria Sánchez. *Fracciones*. Madri-Espanha: Sintesis, 1988.

FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. *Novo dicionário da Língua Portuguesa*. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1976.

FRANCHI, Anna. *Considerações sobre a teoria dos campos conceituais* in: MACHADO, Sílvia Dias Alcântara [et al]. *Educação matemática: uma introdução.* São Paulo: Educ, 1999. pp. 155-196.

FURTH, Hans G. *Piaget e o conhecimento*. Rio de Janeiro: Forense-universitária, 1974.

GLASERSFELD, Ernst von. *Radical constructivism: a way of knowing and learning*. Washington, D.C.: The Falmer Press, 1997.

HIEBERT, H. & BEHR, M. *Research Agenda in Mathematics Education. Number Concepts and Operations in Middle Grades*. Laurence Erbaum Ed., 1988. pp. 141-161, Hillsdale.

IFRAH, Georges. *Os Números: a história de uma grande invenção.* Trad. Stella M. de Freitas Senra. 8 ed. São Paulo: Globo, 1996.

KERSLAKE, Daphne. *SESM interviews in: Fractions: Children's Strategies and errors – a report of the Strategies and Errors in Secondary Mathematics Project*. London: Nfer-Nelson, 1986. pp. 1 – 42

LIMA, Luciano . *A dialética do conceito A pedagogia como socialização da Ciência, da Cultura e da Arte*. São Paulo: Dantas Galhardo, 1997.

___. *Da mecânica do pensamento ao pensamento emancipado da mecânica.* São Paulo: Dantas Galhardo, 1996.

LIMA, Luciano; TAKASAKI, Mário & MOISÉS, Roberto P. *Momento de criar matemática. Contando com coisas*. São Paulo: CEVEC – CIARTE, 1994.

NUNES, Terezinha, BRYANT, Peter. *Crianças fazendo matemática*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

___. *Learning and teaching mathematics: an international perspective*. London UK: Psychology Press, 1997.

NUNES, Terezinha, SCHLIEMANN, Analucia Dias, CARRAHER, David William. *Street mathematics and school mathematics*. New York: Cambridge University Press, 1993.

NUNES, Terezinha. *Aprendizaje de las matemáticas como socialización de la mente*. Revista Pensamiento Educativo (19), dezembro de 1996.

___. *Cognitive invariants and cultural variation in Mathematical concepts*. London: International Journal of behavioral development, 1992, 15(4). pp. 433-453.

___. *Developing children's minds through literacy and numeracy*. London: Institute of Education University of London, 1998.

PINTO, Neuza Bertoni. *O erro como estratégia didática: estudo do erro no ensino da matemática elementar*. São Paulo: Papirus, 2000.

SILVA, Maria José Ferreira da. *Sobre a introdução do conceito de número fracionário.* Tese de Mestrado em Ensino da Matemática, PUC/SP, 1997.

SPINILLO, Alina Galvão. *O conhecimento matemático de crianças antes do ensino da matemática na escola*. A educação matemática em revista – SBEM (3), 2º sem. de 1994. pp. 47-68

SPINILLO, Alina Galvão. *Noções iniciais das crianças sobre probabilidade* in: Temas em Psicologia, Nº 1, 1995. pp. 109-112.

SPINILLO, Alina Galvão. *Raciocínio proporcional em crianças: considerações acerca de alternativas educacionais*. Pro-posições. Vol.5, Nº 1[13], março de 1994.

STRUIK, D.J. *História concisa das matemáticas*. Trad. João Cosme Santos Guerreiro. Lisboa: Gradiva, 1987.

VERGNAUD, Gérard. *Epistemology and psychology of mathematics education* in: KILPATRICK, Jeremy and NESHER, Pearla (eds). Mathematics and cognition: a research synthesis by the international group for the psychology of mathematics education. New York: Cambridge University Press, 1990. pp. 14-30.

___. *Multiplicative conceptual field: what and why?* In: HAREL, G. & CONFREY, J. (eds). The development of multiplicative reasoning in the learning of Mathematics. New York: State University of New York Press, 1994.

___. *Psicologia cognitiva e do desenvolvimento e pesquisas em educação matemática: algumas questões teóricas e metodológicas.* Baseado numa apresentação para o Grupo Canadense de Estudos em Educação Matemática na Queen's Univerty, Kingston, junho, 1982.

___. *A comprehensive theory of representation for mathematics education. Journal of mathematical behavior*. Paris: 1998. 17(2) pp.167-181.

___. *Multiplicative Structures* in: HIEBERT, H. & BEHR, M. Research agenda in mathematics education. Number concepts and operations in middle grades. Laurence Erlbaum Ed., pp. 141-161 Hillsdale, 1988.

___. *Teoria dos campos conceituais*. Anais do 1º Seminário Internacional de Educação do Rio de Janeiro: UFRJ, 1993

VYGOTSKY, Lev Semenovictch. *A formação social da mente*. São Paulo: Martins Fontes, 1984

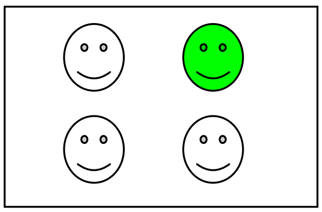
ZABALA, Antoni. *Os enfoques didáticos* in: COLL, Casar [et al]. O construtivismo na sala de aula. São Paulo: Ática, 1996.

ANEXOS

PRÉ-TESTE

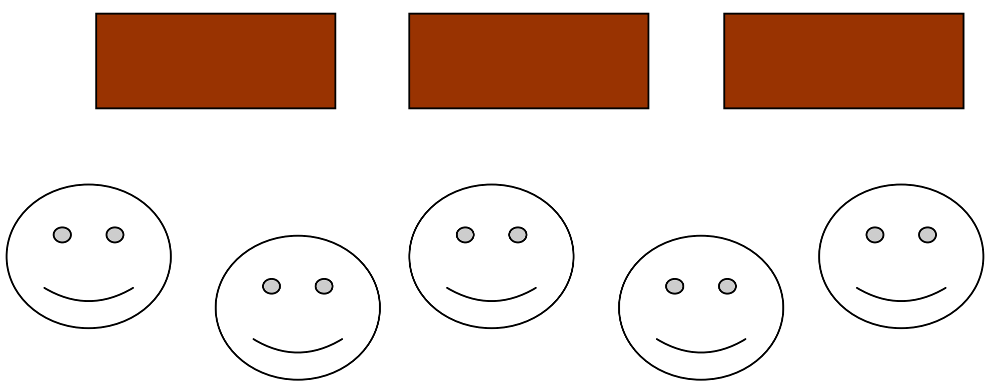
NOME DO ALUNO: ____
Nome da Escola: EE Conselheiro Antônio Prado
Idade: ________anos.
Já repetiu alguma série : (   ) SIM . Quantas vezes? ______Qual ?_______
(   ) NÃO.

1. No quadrado abaixo, João pintou uma caretinha. Como você pode representar numericamente, essa caretinha pintada em relação à quantidade total de caretinhas ?



Resposta:

2. Divida os três chocolates entre as cinco crianças.
   Quanto cada criança vai receber ?

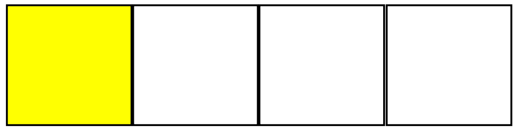


Resposta:

____

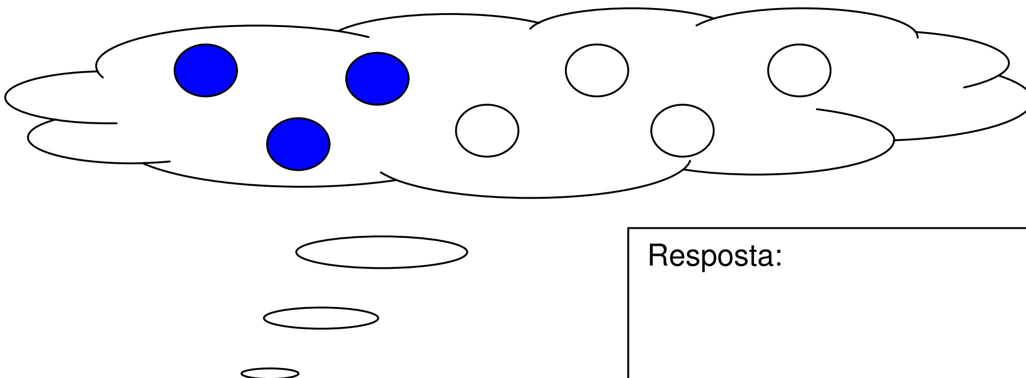
____

3. Ana pintou uma quarta parte do retângulo. Quantas quartas partes faltam para terminar.



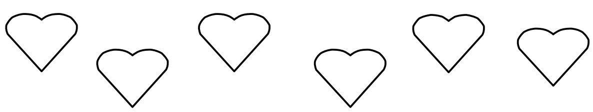
Resposta: ____

4. No balão, somente três bolas estão pintadas. Como você pode representar numericamente as bolas azuis em relação a todas as bolas que estão no balão abaixo



Resposta:

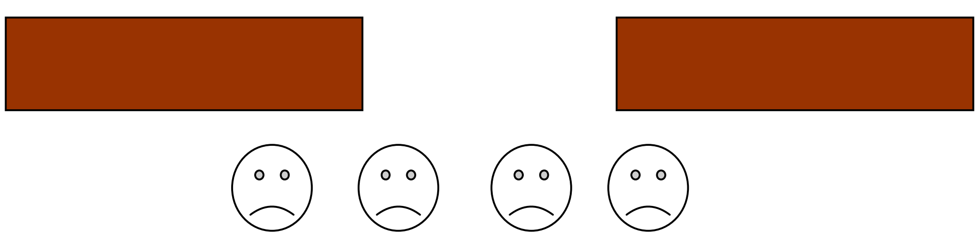
5. Circule a terça parte dos corações abaixo:



Represente numericamente a quantidade que você circulou em relação a todos os corações:

Resposta:

6. Divida duas barras de chocolate para quatro crianças, de forma que todas fiquem contentes:



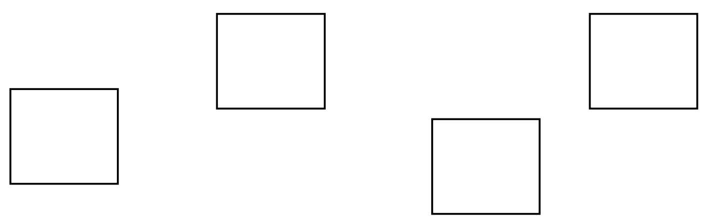
Escreva a quantidade que cada criança recebeu.

Resposta: ____

7. No balcão de uma doceria, tem dois bolos de chocolate, três bolos de coco e quatro de morango. Maria comprou um bolo de chocolate e outro de morango. Como você pode representar numericamente a quantidade de bolos que Maria comprou com relação a quantidade total de bolos da doceira?

Resposta:

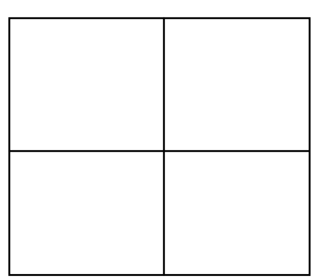
8. Circule a metade dos quadradinhos abaixo:



Represente numericamente a quantidade que você circulou em relação ao total de quadradinhos:

Resposta:

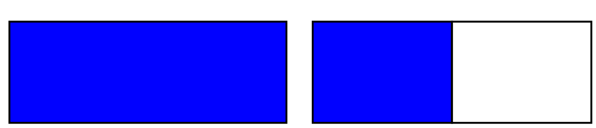
9. Pinte a metade da metade na figura abaixo:



Represente numericamente a quantidade que você pintou em relação a todos os quadradinhos:

Resposta:

10. Represente numericamente a parte pintada na figura abaixo:

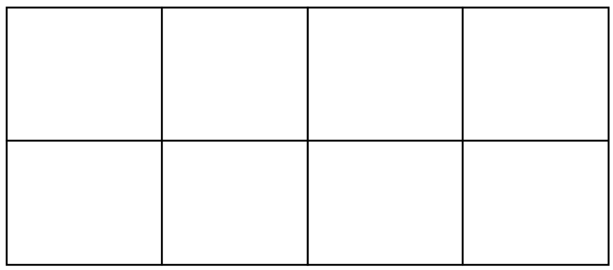


Resposta:

PÓS-TESTE

NOME DO ALUNO: ____
Nome da Escola: EE Conselheiro Antônio Prado
Idade: ________anos.

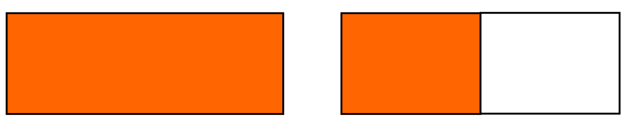
1. Pinte a metade da metade na figura abaixo:



Resposta:

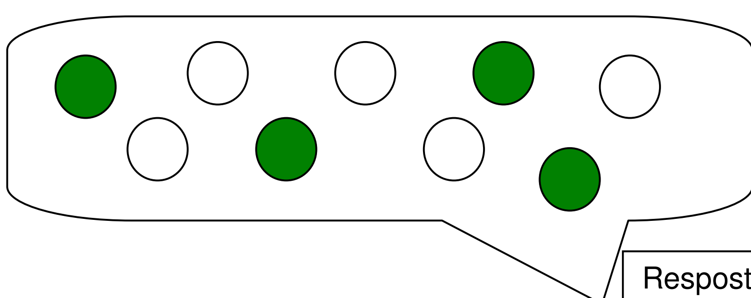
Represente numericamente a quantidade que você pintou:

2. Represente com número a parte pintada na figura abaixo:



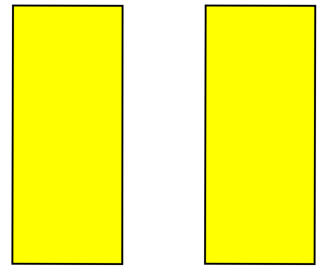
Resposta:

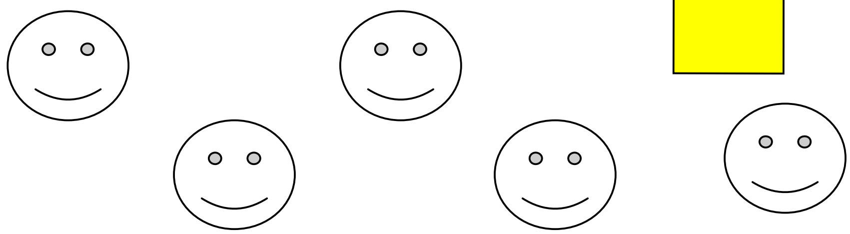
3. No balão, somente quatro bolas estão pintadas. Como você pode representar numericamente as bolas verdes em relação a todas as bolas que estão no balão abaixo



Resposta:

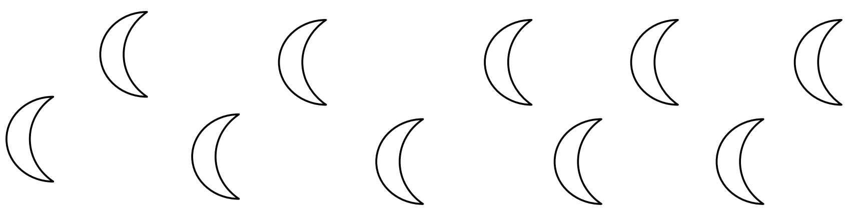
4. Divida os dois bolos entre as cinco crianças.
   Quanto cada criança irá receber ?





Resposta:

5. Circule a quinta parte das luas abaixo:



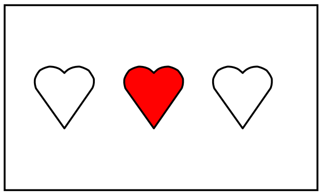
Represente numericamente a parte que você circulou em relação a todas as luas existentes:

Resposta:

6. No balcão de uma doceria, podem ser vistas três tortas de maracujá, quatro tortas de chocolate e cinco tortas de morango. Joana comprou uma torta de chocolate, uma de maracujá e duas de morango. Como você pode representar, numericamente, as tortas que Joana comprou em relação a todas as tortas da doceria?

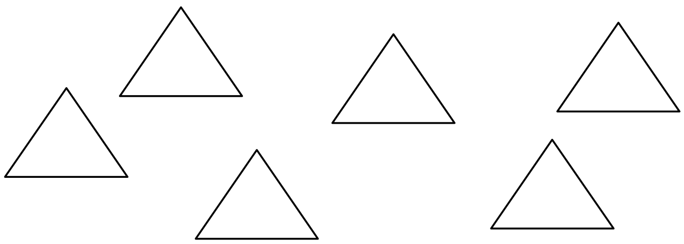
Resposta

7. No quadrado abaixo, Pedro pintou um coração. Como você pode representar numericamente o coração pintado em relação a todos os corações ?



Resposta:

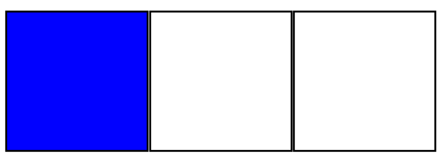
8. Circule a metade dos triângulos abaixo:



Resposta:

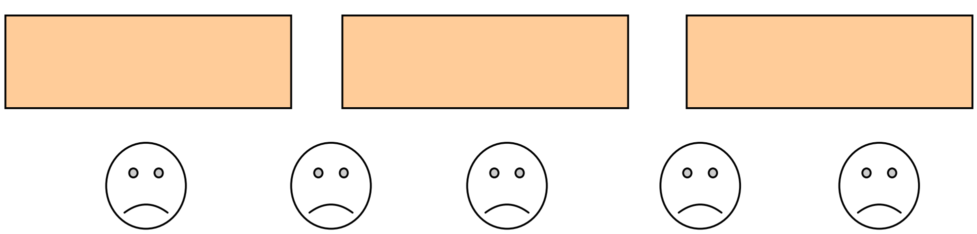
Represente numericamente a quantidade que você circulou:

9. Antonio pintou a terça parte do retângulo. Quantas terças partes faltam para terminar ?



Resposta: ____

10. Divida três doces de leite para cinco crianças de forma que todas fiquem contentes:

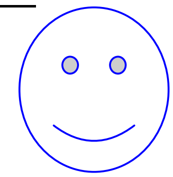


Escreva a quantidade que cada criança recebeu.

Resposta: ____

VAMOS DIVIDIR !!!

Aluno (a): ____

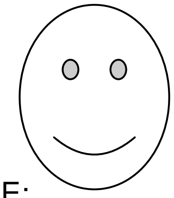


ATIVIDADE 1

1) **402 : 3 =**
2) **192 : 4 =**
3) **750 : 6 =**
4) **3.192 : 7 =**
5) **2.313 : 9 =**
6) **258 : 2 =**
7) **325 : 5 =**
8) **1.536 : 6 =**
9) **1962 : 3 =**
10) **1.062 : 2 =**

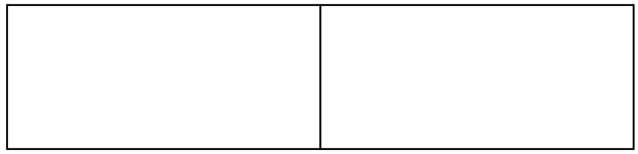
ATIVIDADE 2

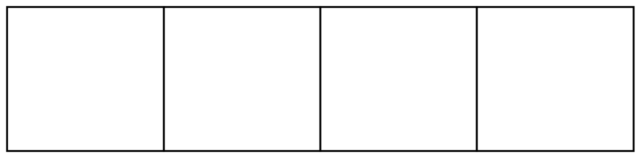
1) **3 : 2 =**
2) **5 : 2 =**
3) **5 : 4 =**
4) **9 : 2 =**
5) **9 : 4 =**
6) **5 : 3 =**
7) **7 : 4 =**
8) **7 : 5 =**
9) **9 : 3 =**
10) **9 : 5 =**

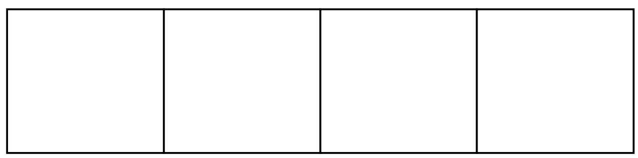


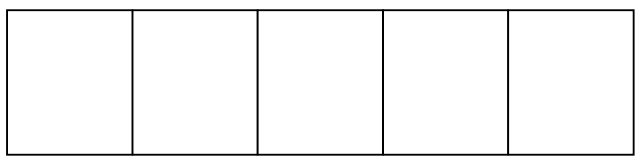
ATIVIDADE 3

PINTE EM CADA RETÂNGULO A FRAÇÃO CORRESPONDENTE:

$\frac{1}{2}$ 

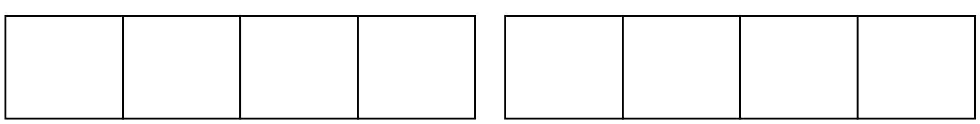
$\frac{3}{4}$ 

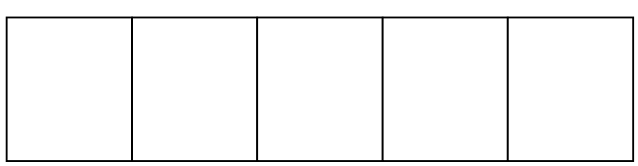
$\frac{1}{4}$ 

$\frac{2}{5}$ 

$\frac{1}{3}$ 

$\frac{2}{3}$ 

$\frac{5}{4}$ 

$\frac{3}{5}$ 

ATIVIDADE 4

NOME: ___________________________________ 3ª série B

PROBLEMA ... como resolver !!!!

Éramos 4 **pessoas**

15 chocolates

Desenho	Sentença Matemática

18 flores

Desenho	**Sentença Matemática**

12 balas

Desenho	**Sentença Matemática**

ATIVIDADE 5

NOME: ________________________________ 3ª série B

PROBLEMA ... um aluno resolveu o problema abaixo de três maneiras diferentes. Ajude o Prof. Francisco a encontrar qual solução está correta !!!

Antonio tem um time de Futebol. Como as camisetas estavam velhas ele precisou tingi-las para o campeonato da semana que vem. Das quinze camisetas ele já conseguiu tingir sete. Pedimos a ele que representasse as camisetas tingidas em relação ao total de camisetas com uma fração.

RESPOSTA 1:

$$15 - 7 = 8$$

RESPOSTA 2:

$$\frac{7}{15}$$

RESPOSTA 3:

$$\frac{15}{7}$$

ATIVIDADE 6

NOME ____ 3ª SÉRIE B

Problema 1. João e Maria ganharam a mesma quantia de dinheiro do pai. João gastou a metade e Maria, a quarta parte. Quem gastou mais dinheiro?

Desenho	**Fração**
João Maria	João Maria

Problema 2 . Pedro comeu três quartos de seu chocolate. Quanto falta para terminar de comer?

Desenho	**Fração**

Problema 3. Antonio e Carlos são irmãos. Eles foram da escola até sua casa a pé. Antonio caminhou a metade do caminho e Carlos andou a metade da metade do caminho. Quem está mais próximo de casa?

Desenho

ATIVIDADE 7

Nome ____ 3ª série B

1. Cada grupo deverá montar com todas as peças vários retângulos, de forma que não sobre qualquer peça.

2. Depois que todos os retângulos estiverem montados, represente-os com desenhos usando as figuras abaixo:

Escreva as frações que Antonio e Carlos andaram.

ATIVIDADE 8

NOME ____ 3ª SÉRIE B

1. Problema

Numa família, há três irmãos: Carlos com 7 anos, Caio com 5 anos e Cícero com 3 anos. O mais velho mede um metro de altura. O do meio mede três quartos do mais velho e o mais novo mede a metade do mais velho. Marque a altura de cada um dos irmãos, escrevendo seus nomes nos quadradinhos.

2. Problema

Mateus e Jorge ganharam uma mesada de R$ 12,00 cada um. Mateus gastou a metade e Jorge gastou a metade da metade. Quem gastou mais? Quanto cada um ainda tem guardado.

Sentença Matemática:

Resposta :

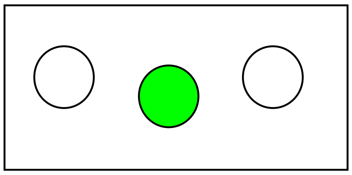
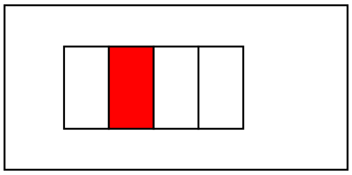
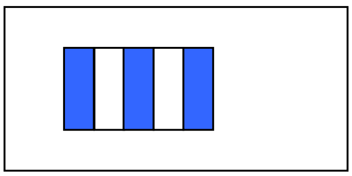
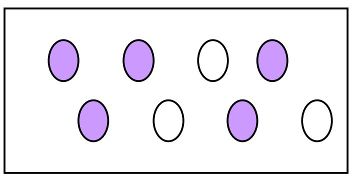
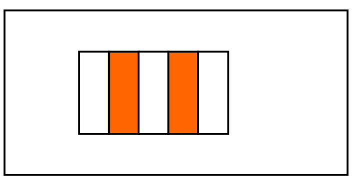
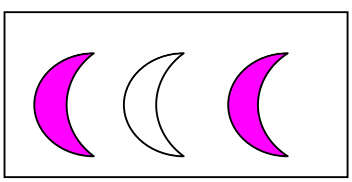
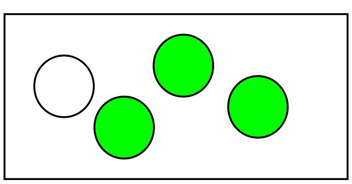
____

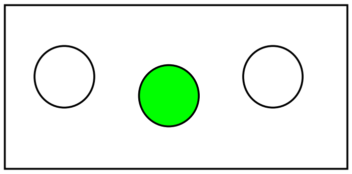
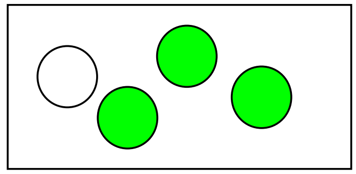
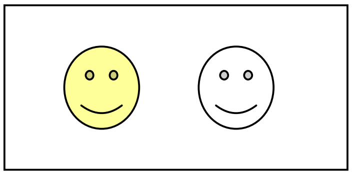
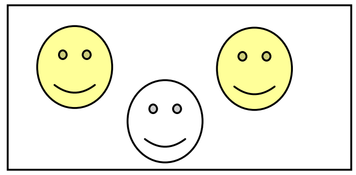
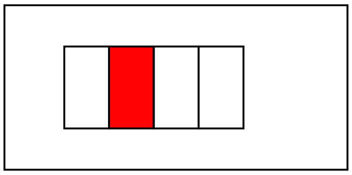
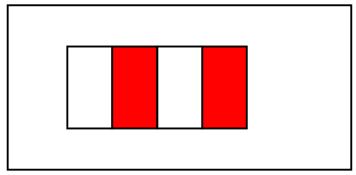
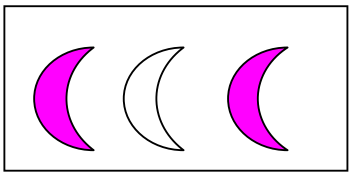
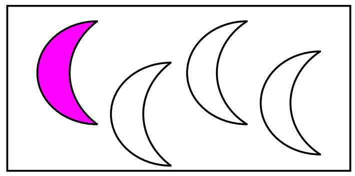
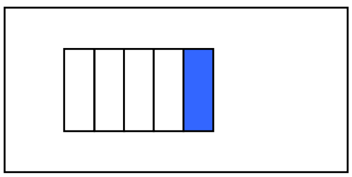
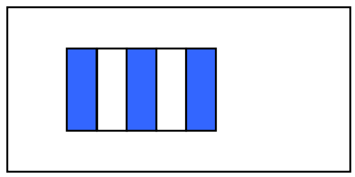
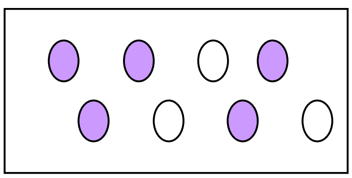
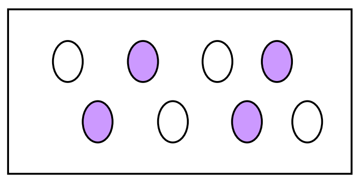
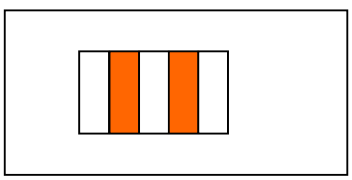
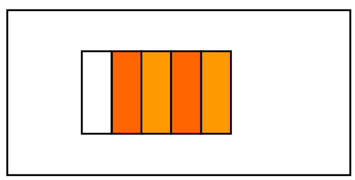
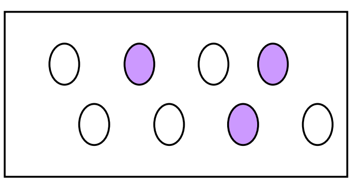
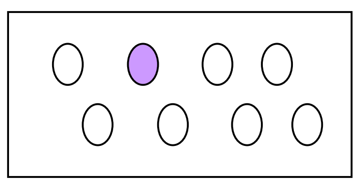
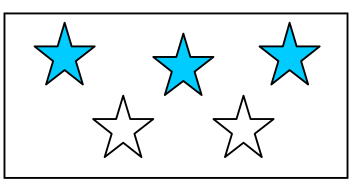
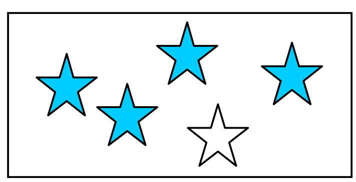
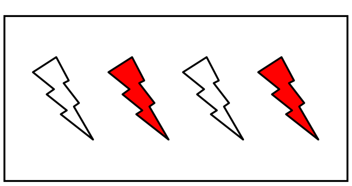
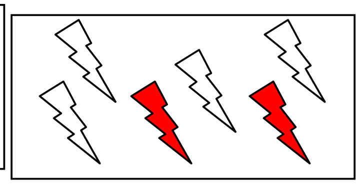
____

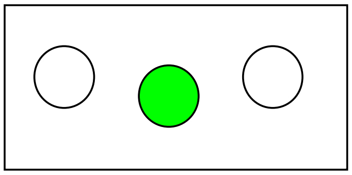
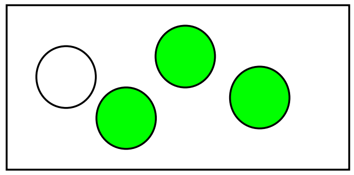
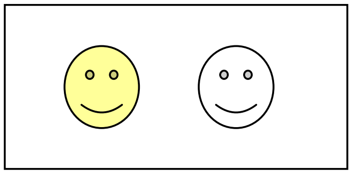
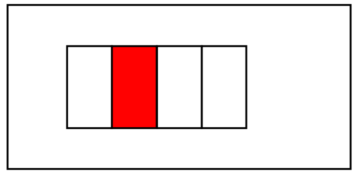
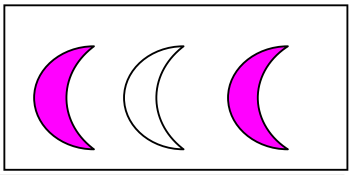
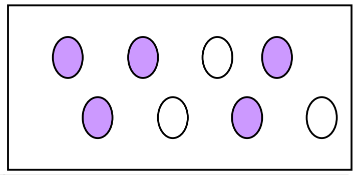
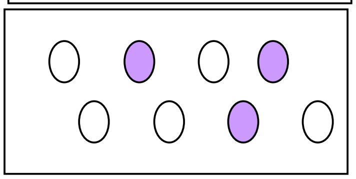
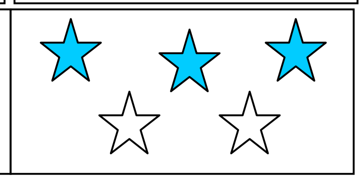
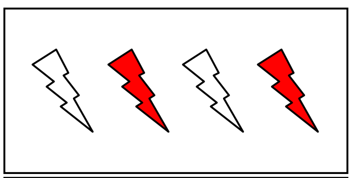
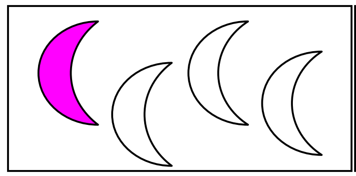
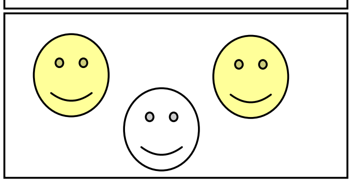
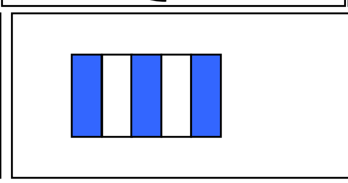
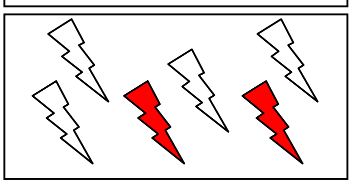
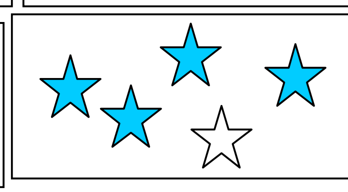
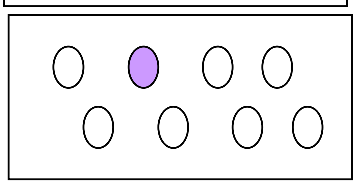
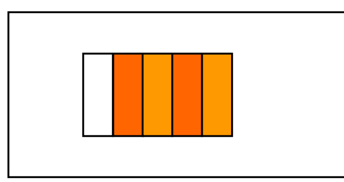
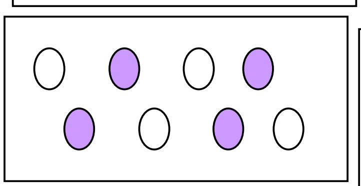
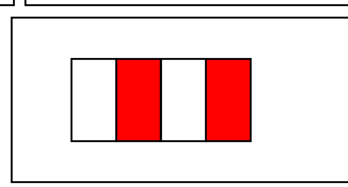
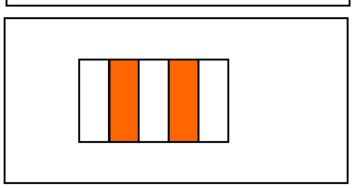
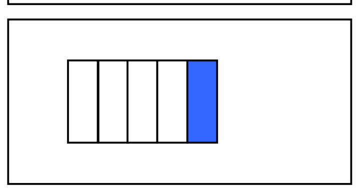
ATIVIDADE 9

NOME: ____ 3ª série B

Ligue cada fração com o desenho correspondente:

	$\frac{3}{5}$
	$\frac{5}{8}$
	Três quartos
	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{3}$
	$\frac{2}{5}$
	Dois terços

	$\frac{1}{3}$		$\frac{3}{4}$
	$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$
	$\frac{1}{4}$		$\frac{2}{4}$
	$\frac{2}{3}$		$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{5}$		$\frac{3}{5}$
	$\frac{5}{8}$		$\frac{4}{8}$
	$\frac{2}{5}$		$\frac{4}{5}$
	$\frac{3}{8}$		$\frac{1}{8}$
	$\frac{3}{5}$		$\frac{4}{5}$
	$\frac{2}{4}$		$\frac{2}{6}$

	Um terço		Três quartos
	metade		Um quarto
	Dois terços		Cinco oitavos
	Três oitavos		Três quintos
	Dois quartos		Um quarto
	Dois terços		Três quintos
	Dois sextos		Quatro quintos
	Um oitavo		Quatro quintos
	Quatro oitavos		Dois quartos
	Dois quintos		Um quinto

BRINCADEIRAS COM OS BOTÕES

Cores/cças	AZUL	AMARELO	BRANCO	Total
1	**2**	**4**	**1**	7
2	**3**	**5**	**0**	8
3	**4**	**3**	**2**	9
4	**3**	**4**	**2**	9
5	**4**	**2**	**1**	7
6	**2**	**6**	**3**	11
7	**4**	**8**	**1**	13
8	**2**	**2**	**3**	7
9	**0**	**2**	**1**	3
10	**5**	**1**	**2**	8
11	**0**	**5**	**2**	7
12	**7**	**2**	**1**	10
13	**8**	**1**	**3**	12
14	**2**	**2**	**1**	5
15	**2**	**1**	**2**	5
16	**4**	**4**	**0**	8
17	**3**	**1**	**1**	5
18	**1**	**3**	**1**	5
19	**2**	**2**	**2**	6
20	**2**	**2**	**4**	8
21	**3**	**1**	**2**	6
22	**3**	**3**	**0**	6
23	**6**	**1**	**0**	7
24	**0**	**3**	**2**	5
25	**1**	**1**	**2**	4
26	**2**	**1**	**1**	4
27	**1**	**2**	**3**	6
28	**4**	**4**	**2**	10
29	**2**	**1**	**6**	9
30	**2**	**3**	**6**	11
				221