Samira Choukri de Castro

Os vetores do plano e do espaço e os registros de representação

Mestrado em EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PUC–SP
2001

Samira Choukri de Castro

Os vetores do plano e do espaço e os registros de representação

Dissertação apresentada como exigência parcial para obtenção do título de MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA **à Pontifícia da Universidade Católica de São Paulo, sob a orientação da** Professora Doutora Sonia Barbosa Camargo Igliori.

PUC–SP
2001

BANCA EXAMINADORA

AGRADECIMENTOS

À professora *Sonia Barbosa Camargo Igliori* que me orientou neste trabalho.

Às professoras *Silvia Dias Alcântara Machado* e *Marilena Bittar*, por suas valiosas sugestões no exame de qualificação.

À professora *Anna Franchi*, que acreditou em mim e, por quem tenho grande admiração.

Àquela que foi minha mestra e com quem muito aprendi, professora *Renate Watanabe*.

Devo muito ao professor *Trajano Couto Machado*, que me encorajou a prosseguir e me deu muitas sugestões úteis durante sua constante assistência.

À professora *Miua Tanaka* que me cedeu algumas de suas aulas para que eu pudesse aplicar meus testes.

Às amigas *Alda Stella Gaspar da Silva* e *Isva Maria Almeida Barreto* pela valiosa cooperação na tradução de textos.

À amiga e professora de português *Marília Wiechmann Gouveia* pela revisão de minha dissertação.

Em especial ao meu marido *Ezion*, e aos meus filhos *Marcos* e *Luciana*, pela compreensão e resignação em favor de meus estudos.

A Autora

RESUMO

Este trabalho enquadra-se no âmbito das investigações sobre o ensino e aprendizagem da Geometria Analítica, tendo por foco a noção de vetor.

A fundamentação teórica baseou-se na teoria dos *registros de representação* e aprendizagem da matemática de R. Duval (1995). Para ele, é essencial ao processo de aprendizagem distinguir representantes e representado e, assim, ao ensino, levar em conta as diferentes formas de representação semióticas de um mesmo objeto matemático.

A pesquisa desenvolveu-se pela concepção, realização, observação e análise de uma seqüência didática, visando articulação de registros do conceito de vetor. A aplicação foi realizada com alunos que tinham estudado ou estavam cursando a disciplina Geometria Analítica e Vetores.

Na elaboração da seqüência foram contempladas as três categorias de registros: simbólica, figural e língua natural. Na simbólica, “n-uplas” e “combinações lineares”, na figural a “flecha” e na da língua natural “vetor”.

As análises preliminares para a elaboração da seqüência foram efetivadas por um teste diagnóstico, aplicado a 70 alunos de três escolas de engenharia. Os sujeitos participantes da seqüência foram definidos, levando-se em conta características desses alunos.

Os resultados obtidos nesta pesquisa indicam que, os alunos apresentavam dificuldades em atividades envolvendo conversão de registros de vetor, e que puderam evoluir em seus conhecimentos com a aplicação da seqüência, confirmando a validade do quadro teórico que a fundamentou.

ABSTRACT

This work fits in the field of investigations on teaching and learning Analytic Geometry. It focuses on the notion of vector.

The theoretical basis relied on R. Duval (1995) *representation registers* and mathematics learning theory. To him, it is essential for the learning process to distinguish representatives and represented, and, thus, for teaching, to take on account the different semiotical representation ways of a same mathematics object.

The research comprised the conception, accomplishment, observation and analysis of a didactical sequence, aiming the articulation of vector concept registrations. The application was carried througjh students who had attended or were attending Analytical Geometry and Vectors disciplines.

For the sequence elaboration the three registers categories have been considered: the symbolical, the figural and the natural language ones. On the symbolical, “n-uplas” and “linear combinations”, on the figural the “arrow” and on the natural language “vector”.

The preliminary analysis for the sequence elaboration have been produced by a diagnosis test applied to seventy students of three engineering schools. The subjects taking part in the sequence have been defined considering these students characteristics.

The results achieved by this research indicate that the students had great difficulties in activities envolving the conversion of vector registrations and that they could improve their knowledge through the application of the sequence, confirming the validity of the theoretical view that has set it up.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

Nosso interesse pelo objeto de estudo desta pesquisa é advindo de nossa experiência, ao longo de vinte anos no magistério superior, lecionando Geometria Analítica em cursos de Ciências Exatas.

Durante esse tempo, constatamos dificuldades dos alunos de primeiro ano, na aprendizagem do conceito de vetor. Observamos por exemplo, que como no ensino médio o aluno trabalha com segmento de reta caracterizado por um comprimento, talvez ele tenha uma tendência de transportar esta caracterização do segmento a de vetor, não levando em conta a direção e o sentido.

Querendo investigar os fenômenos observados na nossa prática, dirigimos nossa pesquisa sobre o processo de aprendizagem do conceito de vetor, apoiando-nos na teoria dos Registros de Representação Semiótica, de R. Duval (1999) (1995).

Para Duval a coordenação dos registros de representação semiótica é necessária para que os estudantes possam apreender um conceito em Matemática. Trabalhar em vários deles, e poder escolher o melhor registro adaptado a uma situação dada, é essencial para o processo de aprendizagem.

Analisamos a tese de doutorado de K. Pavlopoulou, *Propédeutique de L'Algèbre Linéaire: La Coordination des Registres de Représentation Sémiotique*, de 1994, e tivemos inicialmente a intenção de desenvolver um estudo diagnóstico comparativo, utilizando os dados dessa tese para estudantes brasileiros.

Essa tese se apóia na teoria de Duval e refere-se ao relativo fracasso do ensino da Álgebra Linear no primeiro ano universitário em muitas das Universidades da França.

Segundo Pavlopoulou, no primeiro ano universitário um vetor é freqüentemente confundido com uma flecha desenhada no plano ou no espaço. Os alunos identificam, portanto, uma representação do objeto matemático denominado “vetor” com este objeto. A pesquisadora trabalha com quatro registros: o registro gráfico, o registro das tabelas (esse registro é representado por n-uplas na maioria dos livros didáticos brasileiros e nesta pesquisa), o registro da escrita simbólica e o registro da linguagem natural. Realizou quatro enquetes junto aos estudantes de 1º ano de DEUG A (primeiro ano universitário). Nessas enquetes, Pavlopoulou pedia aos estudantes que realizassem conversões entre registros de vetores, no plano ou no espaço. Os resultados dessa enquete mostraram dificuldades dos estudantes nessa tarefa de conversão.

Tomando por base os resultados de Pavlopoulou, direcionamos nossa investigação para a elaboração e aplicação de uma seqüência didática para o ensino do conceito de vetor, envolvendo conversão de registros.

Para subsidiar essa seqüência didática, aplicamos um teste diagnóstico a um grupo de alunos do ensino superior, na área de exatas. Constatamos através do teste que algumas das dificuldades, relacionadas a registros de representação, assemelhavam-se às apontadas por Pavlopoulou.

1. QUADRO TEÓRICO E PROBLEMÁTICA

Nosso interesse de pesquisa sobre o ensino e aprendizagem do conceito de vetor é advindo de nossa prática em sala de aula.

A oportunidade de nossa investigação é confirmada, uma vez que, diversos pesquisadores de Educação Matemática, nacionais e internacionais detectaram dificuldades dos alunos no ensino e aprendizagem da Geometria Analítica. (Bittar, 1998) (Pressiat, 1999), (Pavlopoulou, 1994) (Munhoz, 1999) (Cavalca,1997).

Escolhemos a teoria de R. Duval, sobre os Registros de Representação, como referencial, concordando com Damm (1999), que afirma:

> *Podemos pensar na utilização da teoria de Duval como uma maneira didática/metodológica que o professor e/ou o pesquisador devem utilizar se o objetivo é a aquisição de conhecimento.*

1.1. Os Registros de Representação

O papel das representações no ensino da Matemática, pesquisado na França por Raymond Duval, é uma rica contribuição às pesquisas da Educação Matemática que tratam de aspectos do funcionamento cognitivo relacionados à aquisição de conhecimentos.

Segundo Duval, a aprendizagem da matemática constitui seguramente um campo de estudos privilegiado para a análise de atividades cognitivas fundamentais como a conceitualização, o raciocínio, a resolução de problemas, e mesmo a compreensão de textos. Estas atividades cognitivas requerem a utilização de outros sistemas de expressão e de representação além da linguagem natural ou das imagens: sistemas variados de escrita para os números, notações simbólicas para os objetos, escritas algébrica e lógica que adquirem o *status* de linguagens, paralelas à natural, para exprimir as relações e as operações, figuras geométricas, representações em perspectiva, gráficos cartesianos, redes, diagramas, esquemas, etc.

Duval coloca a seguinte questão:

A utilização de vários sistemas semióticos de representação e de expressão é essencial ou, ao contrário, é apenas um meio cômodo mas secundário, para o exercício e para o desenvolvimento das atividades cognitivas fundamentais?

Existem argumentos muito poderosos que parecem impor a resposta. Duval cita dois deles:

O primeiro é que não pode haver compreensão em matemática se não se distingue um objeto de sua representação. É essencial não confundir os objetos matemáticos, isto é, os números, as funções, as retas, etc., com quaisquer de suas representações, isto é, as escritas decimais ou fracionárias, os símbolos, os gráficos, os traçados das figuras... Pois um mesmo objeto matemático pode ser dado através de representações muito diferentes. É o objeto representado que importa e não suas diversas representações semióticas possíveis. Toda confusão entre o objeto e sua representação acarreta, em médio prazo, uma perda de compreensão e, rapidamente os conhecimentos adquiridos tornam-se inúteis fora de seu contexto de aprendizagem.

O segundo argumento é mais global e mais psicológico. Ele se apóia na própria existência das representações mentais, isto é, em todo este conjunto de imagens e de concepções que um indivíduo pode ter sobre um objeto, sobre uma situação, e sobre o que é associado a eles. As representações semióticas, isto é, estas produções constituídas pelo emprego de sinais (enunciado em língua natural, fórmula algébrica, gráfico, figura geométrica...) parecem ser apenas o meio de que dispõe um indivíduo para exteriorizar suas representações mentais, isto é, para torná-las visíveis ou acessíveis a alguém. Elas estariam então, inteiramente subordinadas às representações mentais e só cumpririam funções de comunicação.

Duval chama de *semiósis* a apreensão ou a produção de uma representação semiótica, e *noésis* os atos cognitivos como a apreensão conceitual de um objeto. Não há *noésis* sem *semiósis,* é a *semiósis* que determina as condições de possibilidade e de exercício da *noésis.*

Em matemática, as representações semióticas não são indispensáveis apenas para fins de comunicação, elas são necessárias ao desenvolvimento da própria atividade matemática. De fato, a possibilidade de realizar tratamentos nos objetos matemáticos depende diretamente do sistema de representação semiótico utilizado. Os tratamentos matemáticos não podem ser efetuados independentemente de um sistema semiótico de representação. E esta função de tratamento só pode ser preenchida por representações semióticas e não por representações mentais. A utilização de representações semióticas parece primordial para a atividade matemática e parece ser intrínseca a ela.

De um modo mais global, pode-se constatar que o progresso dos conhecimentos é sempre acompanhado pela criação e pelo desenvolvimento de sistemas semióticos novos e específicos que coexistem mais ou menos com o primeiro deles, o da língua natural. Assim a formação do pensamento científico é inseparável do desenvolvimento de simbolismos específicos para representar os objetos e suas relações.

A Matemática é o domínio em que este fenômeno é o mais antigo e, talvez também o mais indispensável.

Pode-se observar, nos diferentes níveis do ensino da Matemática, a persistência de uma barreira entre as representações que não dependem do mesmo sistema semiótico. A passagem de um sistema de representação para um outro ou a mobilização simultânea de vários sistemas de representação no decorrer de um mesmo processo, fenômenos tão familiares e tão freqüentes na atividade matemática, não têm nada de evidente e de espontâneo para a maioria dos alunos. Estes, freqüentemente, não reconhecem o mesmo objeto através das representações que podem ser dadas em sistemas semióticos diferentes: a escrita algébrica de uma relação e sua representação gráfica, a escrita numérica de uma relação e sua representação geométrica em uma reta ou em um plano, o enunciado de uma fórmula e a escrita desta fórmula sob forma literal, etc. (Duval, 1995)[1]

Duval considera três tipos de Registros de Representação: o registro figural, o simbólico e o da língua natural. Para ele as representações semióticas têm dois aspectos: a forma (ou o representante) e o conteúdo (ou o representado).

Mas, como não confundir um objeto matemático e a representação que permite seu acesso (por exemplo, um número e sua escrita, uma figura e a situação representada, um vetor e uma flecha desenhada, um gráfico e a função...) se temos que ter a representação para acessar o objeto?

Para Duval, é essa a questão que constitui talvez, o problema central da aprendizagem da Matemática.

> *O ponto comum à grande maioria dos bloqueios dos alunos, quaisquer que sejam os domínios de atividade matemática e qualquer que seja o nível do currículo, é a incapacidade de converter a representação de um objeto em uma outra representação do mesmo objeto. (Duval, 1999)*

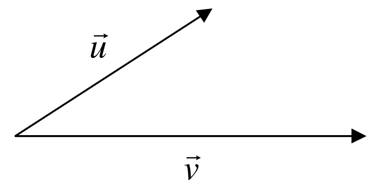
Segundo Duval, *conversão* é a operação que transforma uma representação pela mudança de um registro a outro, e *tratamento* é a operação que transforma uma representação, permanecendo no interior de um mesmo registro.

Um vetor $\vec{v}$ pode ser representado pelos três tipos de registros, indicados por Duval. No simbólico através de n-uplas, ou como combinações lineares de vetores em relação a uma base fixada. No figural, por uma flecha, registro de um representante da classe de eqüipolência de $\vec{v}$. E na linguagem natural, “vetor”.

[1] Tradução feita pela autora.

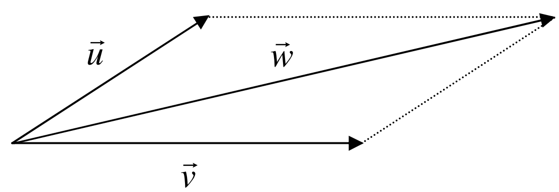
1.2. Exemplos de conversão e de tratamento

Consideremos os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, abaixo representados:



A soma de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é o vetor $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$. (1)

Vamos representar essa soma geometricamente.



(2)

Obs: Esta é a "regra do paralelogramo" que serve para representar geometricamente o vetor $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$.

Em (1), temos uma representação do vetor $\vec{w}$ no registro simbólico. Em (2) temos uma representação do mesmo vetor no registro figural. Ao passar de (1) para (2), fizemos uma conversão de registros do simbólico para o figural.

Consideremos agora, os vetores $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ e $\vec{v} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$. Vamos encontrar o vetor $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$.

$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$

$\vec{w} = (2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}) + (-\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k})$ (3)

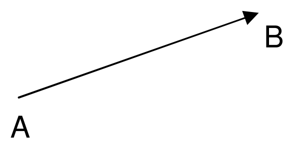
$\vec{w} = \vec{i} + 5\vec{j} + 2\vec{k}$ (4)

De (3) para (4) efetuamos uma operação que transformou a representação do vetor $\vec{w}$, permanecendo no interior do registro simbólico. Fizemos então um tratamento de uma representação do vetor $\vec{w}$.

1.3. Vetor e Registros de Representação

Dois pontos distintos A e B (do plano ou do espaço), definem o segmento geométrico AB. Se especificarmos que sua direção é a da reta que os contém, que A é sua origem e B a extremidade, temos o que se chama segmento orientado $\overline{AB}$.

Graficamente representamos:



Um segmento é nulo, se sua origem coincide com sua extremidade.

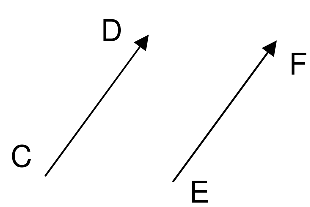
Graficamente:

$$A \equiv B$$

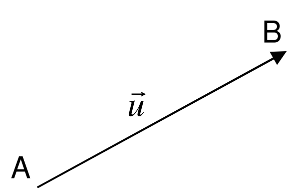
Obs: O ponto A representa o segmento nulo $\overline{\mathrm{AA}}$.

Dois segmentos orientados são eqüipolentes se, e somente se, são ambos nulos ou eles têm mesmo comprimento, mesma direção e mesmo sentido.

Na figura abaixo, temos $\overline{CD}$ eqüipolente a $\overline{EF}$.



Um vetor $\overrightarrow{AB}$ (do plano ou do espaço) é a classe dos segmentos orientados eqüipolentes ao segmento $\overline{AB}$. Cada um dos elementos dessa classe, representa o vetor $\overrightarrow{AB}$. Usaremos também a notação $\vec{u}$ para o vetor $\overrightarrow{AB}$.



Um vetor (do plano ou do espaço) pode ser representado pelos seguintes registros:

- Registro gráfico
- Registro simbólico
  - das combinações lineares
  - das n-uplas
- Registro da linguagem natural

Registro Gráfico

Um vetor não nulo (do plano ou do espaço), pode ser representado por uma flecha.

Três aspectos caracterizam um vetor não nulo:

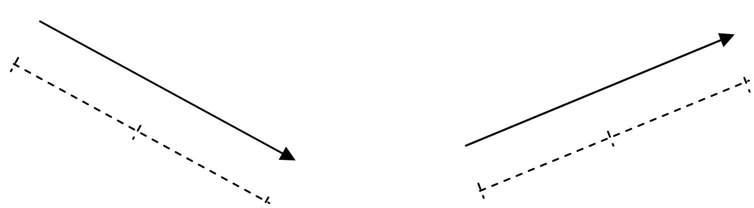
- comprimento
- direção
- sentido

Qualquer ponto do plano (do espaço) é um representante do vetor nulo do plano (do espaço), com comprimento zero, direção e sentido não determinados.

Dois vetores não nulos do plano ou do espaço podem ter: mesmo comprimento; mesma direção e mesmo sentido; mesma direção e sentidos contrários; diferentes comprimentos e diferentes direções; mesmo comprimento, mesma direção e mesmo sentido.

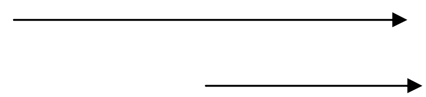
Em cada caso suas representações gráficas são:

- Mesmo comprimento

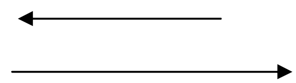


l (unidade l de medida de comprimento)

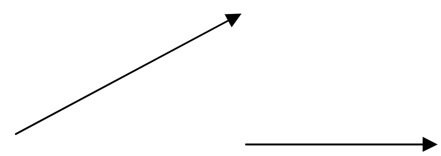
- Mesma direção e mesmo sentido



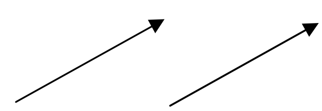
- Mesma direção e sentidos contrários



- Diferentes comprimentos e diferentes direções (portanto sentidos não comparáveis)

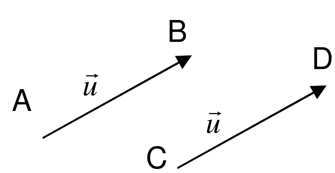


- Mesmo comprimento, mesma direção e mesmo sentido.



Neste caso cada uma destas flechas representa o mesmo vetor.

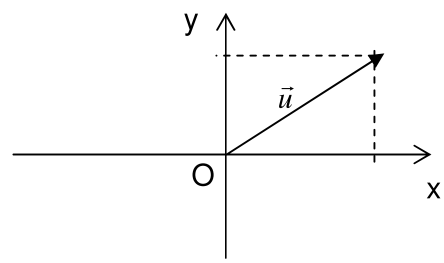
É importante notarmos que, dados um vetor $\overrightarrow{AB}$ não nulo e um ponto C qualquer do plano (do espaço), é possível obter um único representante de $\overrightarrow{AB}$ a partir da origem C.



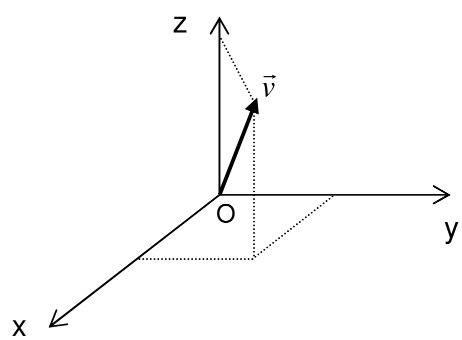
$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

Em geral, no ensino um sistema ortogonal de coordenadas é utilizado para representar graficamente um vetor:

no plano



no espaço



Não se explora no ensino, situações em que o sistema de coordenadas não seja ortogonal, nem as que o representante gráfico do vetor tenha origem distinta da origem do sistema. Nesta pesquisa não exploramos questões que envolvam a não ortogonalidade do sistema de coordenadas.

Registros simbólicos:

- Registro das combinações lineares

Dados os vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots\ldots, \vec{v}_n$ e os números reais $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_n$ o vetor $\vec{u} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \ldots\ldots + \alpha_n\vec{v}_n$ é uma combinação linear de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots\ldots, \vec{v}_n$.

No caso do vetor nulo, os números reais $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_n$ são nulos.

Um conjunto de vetores é linearmente dependente se, e somente se, um deles é combinação linear dos outros. Vetores que não são linearmente dependentes são ditos linearmente independentes.

Uma base do plano (espaço) é um conjunto ordenado com dois (três) vetores linearmente independentes. Uma base é dita ortonormal se, e somente se, cada vetor tem comprimento igual a 1 e dois a dois são ortogonais.

Se $B=(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ é uma base do plano, dado um vetor $\vec{u}$ qualquer do plano, existe um único par de números reais α_1 e α_2, tal que $\vec{u}=\alpha_1\vec{e}_1+\alpha_2\vec{e}_2$. Se $B=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ é uma base do espaço, dado um vetor $\vec{v}$ qualquer do espaço, existe uma única terna de números reais α_1, α_2 e α_3, tal que $\vec{v}=\alpha_1\vec{e}_1+\alpha_2\vec{e}_2+\alpha_3\vec{e}_3$.

A equação $\vec{u}=\alpha_1\vec{e}_1+\alpha_2\vec{e}_2$ ($\vec{v}=\alpha_1\vec{e}_1+\alpha_2\vec{e}_2+\alpha_3\vec{e}_3$) constitui o que denominamos registro simbólico das combinações lineares, do vetor $\vec{u}$ ($\vec{v}$) em relação à base considerada.

- Registro das n-uplas

Sejam $B=(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ uma base do plano e o vetor $\vec{u}=\alpha_1\vec{e}_1+\alpha_2\vec{e}_2$. O registro das n-uplas desse vetor é $\vec{u}=(\alpha_1,\alpha_2)$. Analogamente o registro das n-uplas de um vetor $\vec{v}=\alpha_1\vec{e}_1+\alpha_2\vec{e}_2+\alpha_3\vec{e}_3$ do espaço, sendo $B=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ uma base do espaço, é $\vec{v}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$.

Para o vetor nulo, escrevemos $\vec{0}=(0,0)$ no plano e $\vec{0}=(0,0,0)$ no espaço.

Dado um sistema de coordenadas ortogonais, sejam $A=(x_1,y_1)$ e $B=(x_2,y_2)$ dois pontos do plano ($A=(x_1,y_1,z_1)$ e $B=(x_2,y_2,z_2)$ do espaço). As coordenadas do vetor cujo representante tem origem em A e extremidade em B são (x_2-x_1,y_2-y_1) ($(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$). Usamos $\overrightarrow{AB}=B-A$.

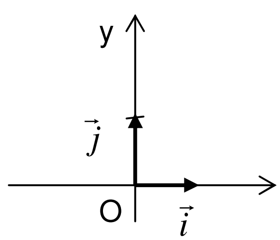
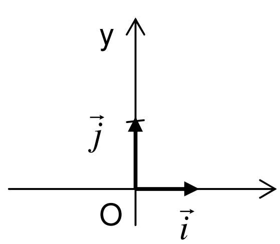
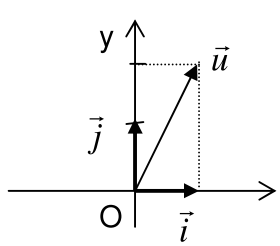
Registro da linguagem natural

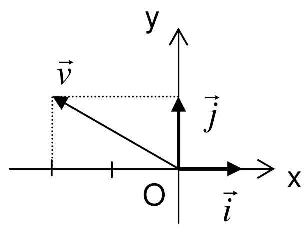
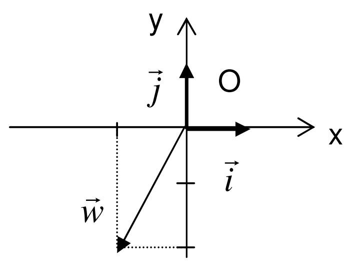
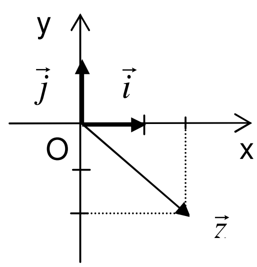
O registro da linguagem natural é necessário para descrever uma situação dada, para definir um objeto matemático ou para enunciar um teorema. Podemos encontrar em livros didáticos, definições, proposições, teoremas, etc., apresentados exclusivamente nesse registro. Como por exemplo: “Dois segmentos orientados não nulos se dizem *eqüipolentes* se, e somente se, eles tiverem mesmo comprimento, mesma direção e mesmo sentido”.

1.4. Conversão de registros

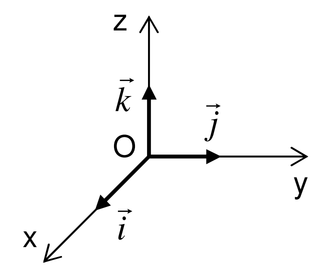
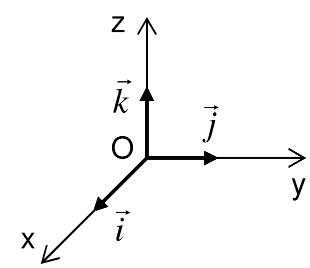
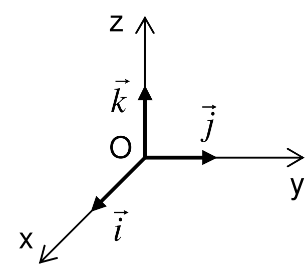
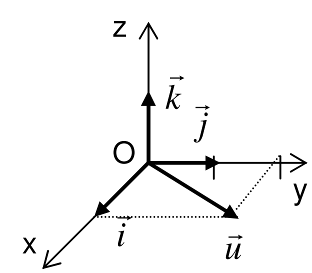
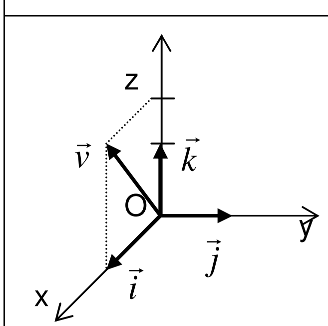
Nos quadros I e II, que se seguem, apresentamos vetores (numa base ortonormal) nos registros trabalhados nessa pesquisa.

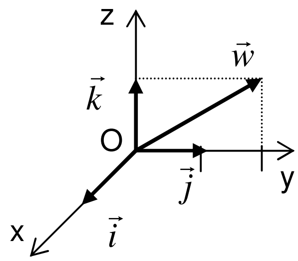
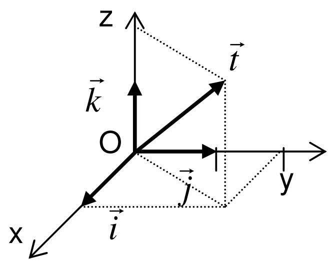
Quadro I - Vetores do plano

Registro gráfico	**Registro das n-uplas**	**Registro das combinações lineares**
	$\vec{i} = (1,0)$	$\vec{i} = 1\vec{i} + 0\vec{j}$
	$\vec{j} = (0,1)$	$\vec{j} = 0\vec{i} + 1\vec{j}$
	$\vec{u} = (1,2)$	$\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j}$

<table>
<tr><th>Registro gráfico</th><th>Registro das n-uplas</th><th>Registro das combinações lineares</th></tr>
<tr><td>
</td><td>$\vec{v} = (-2,1)$</td><td>$\vec{v} = -2\vec{i} + \vec{j}$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$\vec{w} = (-1,-2)$</td><td>$\vec{w} = -\vec{i} - 2\vec{j}$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$\vec{z} = (2,-2)$</td><td>$\vec{z} = 2\vec{i} - 2\vec{j}$</td></tr>
</table>

Quadro II – Vetores do espaço

Registro gráfico	Registro das n-uplas	Registro das combinações lineares
	$\vec{i} = (1,0,0)$	$\vec{i} = 1\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$
	$\vec{j} = (0,1,0)$	$\vec{j} = 0\vec{i} + 1\vec{j} + 0\vec{k}$
	$\vec{k} = (0,0,1)$	$\vec{k} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 1\vec{k}$
	$\vec{u} = (1,2,0)$	$\vec{u} = 1\vec{i} + 2\vec{j} + 0\vec{k}$
	$\vec{v} = (1,0,2)$	$\vec{v} = 1\vec{i} + 0\vec{j} + 2\vec{k}$

Registro gráfico	Registro das n-uplas	Registro das combinações lineares
	$\vec{w} = (0,2,1)$	$\vec{w} = 0\vec{i} + 2\vec{j} + 1\vec{k}$
	$\vec{t} = (1,2,2)$	$\vec{t} = 1\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$

1.5. Problemática

Esta pesquisa tem por intenção identificar dificuldades que alunos iniciantes na Universidade, apresentam sobre o conceito de vetor. E ainda, investigar se através de um meio de ensino é possível o enfrentamento das mesmas. Iniciamos nosso trabalho nos debruçando em algumas pesquisas com temas correlatos. Alguns enfoques foram encontrados nessas pesquisas: os vetores no ensino secundário atual na França (com a utilização do Cabri-Geométrico II), a relação ponto-vetor, visualização no espaço, impregnação do sentido cotidiano de termos geométricos, e articulação entre registros de representação semióticos.

Os temas e o quadro teórico da tese de K. Pavlopoulou (1994) nos pareceu mais adequados ao nosso interesse. Essa pesquisa refere-se ao processo de ensino-aprendizagem da Álgebra Linear, em especial do conceito de vetor. Nosso trabalho se propôs então por um lado, investigar se dificuldades indicadas por Pavlopoulou, aparecem no contexto da Geometria Analítica para alunos brasileiros e, por outro, procurar verificar a possibilidade de enfrentá-las através do ensino.

Tendo como hipótese de pesquisa que os alunos têm dificuldades em transitar pelos diversos registros que representam vetor, nos propusemos a efetuar um teste com questões que restringissem as de Pavlopoulou, no sentido acima. Esta nossa hipótese é fundamentada, por nossa prática docente e também porque nos parece que no ensino brasileiro, a questão de conversões de registros não é levada muito em conta. Em nossa pesquisa demos a esse teste um caráter menos de diagnóstico e mais de orientação de como interferir no ensino de vetores.

A partir destes pressupostos definimos como problemática de pesquisa o seguinte:

> É possível favorecer a evolução do funcionamento representacional dos alunos sobre vetor, por meio de uma seqüência didática que focalize atividades de tratamentos e conversões de registros?
>
> Há dois aspectos colocados por Duval, que ressaltam a importância da problemática que nos colocamos: a essencialidade de distingir o representado de seus representantes; a coordenação de registros como uma característica do funcionamento cognitivo do sujeito.

2. METODOLOGIA

Nossa atitude de pesquisa teve como característica, a propugnada por A. Robert (1992), de que investigação em didática de uma disciplina, deve levar em consideração o duplo movimento entre teorização e validação experimental. Assim sendo, orientamos nosso trabalho pela teoria de R. Duval e procedimentos característicos de uma Engenharia Didática (Artigue, 1992).

Uma engenharia didática baseia-se em concepção, realização, observação e análise de seqüências de ensino.

A noção de engenharia didática pode ser compreendida, tanto como um produto resultante de uma análise *a priori*, caso da metodologia de pesquisa, quanto como uma produção para o ensino.

O processo experimental da engenharia didática compõe-se de quatro fases: análises preliminares, concepção e análise *a priori* das situações didáticas, experimentação, análise *a posteriori* e validação (desta última realizamos apenas a análise *a posteriori*).

Nessa perspectiva, efetuamos análises preliminares através de um teste diagnóstico, e a partir deste, concebemos, realizamos, observamos e analisamos uma seqüência didática.

Os sujeitos da pesquisa foram alunos de curso universitário que já haviam estudado ou que estavam terminando de cursar a disciplina Geometria Analítica. Este último requisito era necessário pela característica da pesquisa, isto é, havia necessidade de partir de conhecimentos já adquiridos, tanto para observar a relação que os estudantes faziam com os registros de representação quanto para a aplicação da seqüência didática.

O teste (para análises preliminares), foi elaborado para detectar possíveis dificuldades dos alunos, relativamente à conversão de registros de vetores, do plano ou do espaço, composto de sete exercícios. Foi aplicado à três turmas de primeiro ano: em duas destas turmas do curso de engenharia (de escolas diferentes), e uma do curso de matemática (de uma terceira escola). Perfizeram um total de 70 alunos, e os exercícios foram resolvidos em duplas. Uma das turmas foi descartada, pois as condições de aplicação não foram apropriadas, motivos não previstos pela pesquisadora.

A aplicação do teste, em cada turma teve a duração aproximadamente de 20 minutos.

A seqüência foi concebida em duas sessões, tendo por referência a problemática, as análises preliminares e o quadro teórico desta pesquisa.

As sessões foram realizadas e observadas em uma turma composta por alunos de primeiro e segundo anos do curso de engenharia, em uma das escolas em que foi aplicado o teste diagnóstico, numa turma diferente da anterior.

A escola escolhida foi aquela em que os resultados do teste mostraram-se menos satisfatórios. Na primeira sessão houve a participação de 21 duplas. Esta se compõe de cinco atividades, envolvendo tanto "marcação" de pontos no sistema ortogonal de coordenadas, quanto conversão de registros de vetores.

Na segunda, houve a participação de 17 duplas, com a ausência de seis que participaram da primeira sessão e duas novas. Retomamos a "marcação de pontos" para as duplas que não obtiveram sucesso na sessão 1, incluindo uma atividade para isso. As demais duplas resolveram cinco atividades, referentes à conversão de registros de vetores do espaço.

Os alunos trabalharam em duplas durante todo o desenvolvimento das sessões, com o objetivo de possibilitar discussão sobre estratégias, para resolver os exercícios. Cada dupla deveria então encontrar ou não, uma resposta que fosse consensual e explicitá-la por escrito.

Para finalizar, realizamos as análises *a posteriori* das atividades desenvolvidas nas sessões, referenciadas pelas análises *a priori.*

3. TESTE DIAGNÓSTICO

O teste diagnóstico foi elaborado tendo por referência a tese de doutorado de K. Pavlopoulou.

Queríamos verificar se o aluno é capaz de fazer as conversões entre os registros gráfico, linguagem natural e os sub-registros do registro simbólico: o registro das n-uplas e o registro das combinações lineares. E, senão, quais as dificuldades encontradas pelo aluno.

O teste se compõe de sete exercícios nos quais o aluno deverá fazer conversão de registros (originais no anexo I). O tempo estimado para a aplicação foi de aproximadamente 30 minutos. Os alunos trabalharam em duplas. Pedimos para não usarem borracha ou corretivo (caso quisessem anular uma resolução, deveriam escrever "nulo" ou colocar parênteses). Sugerimos que os alunos usassem régua, pois isto facilitaria as construções gráficas.

O teste foi aplicado pela pesquisadora e teve em duas das escolas a participação de um observador e a presença do professor da turma. Esta presença foi proposta para favorecer o desenvolvimento das atividades.

Em todas as atividades desse teste, as coordenadas (registro das n-uplas) dos vetores do plano (do espaço), são relativas à base ortonormal $B=(\vec{i},\vec{j})$ ($B=(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$).

3.1. Análise a priori do teste diagnóstico

Exercício 1:

A) Sejam $\vec{v} = (4\ ,\ 3)$ e $\vec{w} = (1\ ,\ 2)$ dois vetores do plano. Determine as coordenadas do vetor $\vec{u}$ tal que:

a) $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$

b) $\vec{u} = \vec{v} - \vec{w}$

c) $\vec{u} = 2\vec{v} - 3\vec{w}$

B) Sejam $\vec{v} = (2{,}3{,}4)$ e $\vec{w} = (0{,}1{,}2)$ dois vetores do espaço. Determine as coordenadas do vetor $\vec{u}$ tal que:

a) $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$

b) $\vec{u} = \vec{v} - \vec{w}$

c) $\vec{u} = 2\vec{v} - 3\vec{w}$

No exercício 1, há dois registros de partida: o das combinações lineares e o das n-uplas; e um de chegada: o registro das n-uplas.

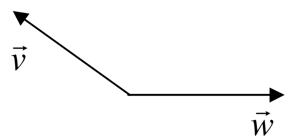
Os vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são apresentados no registro das n-uplas. O vetor $\vec{u}$ no registro das combinações lineares. A solução deverá ser apresentada no registro das n-uplas.

A resolução deverá ser feita realizando a conversão do registro das combinações lineares para o das n-uplas e em seguida efetuar tratamentos nesse registro, para chegar à solução.

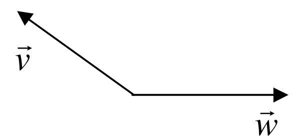
Exercício 2:

São dados dois vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ do plano. Trace o vetor $\vec{u}$ tal que:

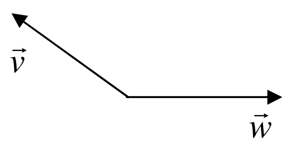
a) $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$



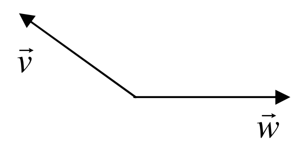
b) $\vec{u} = \vec{v} - \vec{w}$



c) $\vec{u} = 2\vec{v}$



d) $\vec{u} = -3\vec{w}$



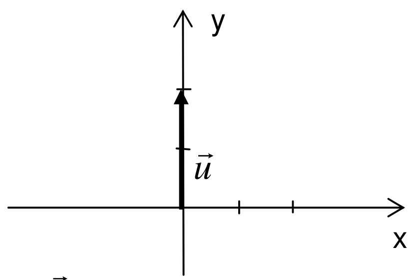
No exercício 2, há dois registros de partida: o registro das combinações lineares e o registro gráfico; e um de chegada: o registro gráfico.

Os vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são apresentados no registro gráfico. O vetor $\vec{u}$ no registro das combinações lineares. A solução deverá ser apresentada no registro gráfico.

A resolução deverá ser feita realizando a conversão do registro das combinações lineares para o registro gráfico. O aluno deverá usar conhecimentos, tais como: múltiplo de um vetor com mesmo sentido ou com sentido contrário (nos itens **c** e **d**) e adição de vetores no registro gráfico, onde ele deverá usar a “regra do paralelogramo” (nos itens **a** e **b**).

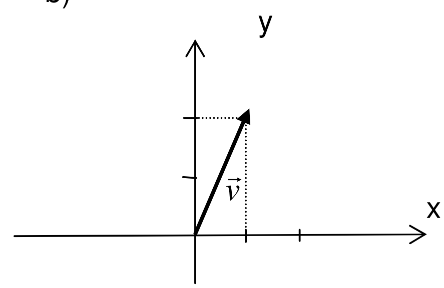
Exercício 3: Escreva as coordenadas dos vetores indicados nas figuras.

a)



$\vec{u} =$

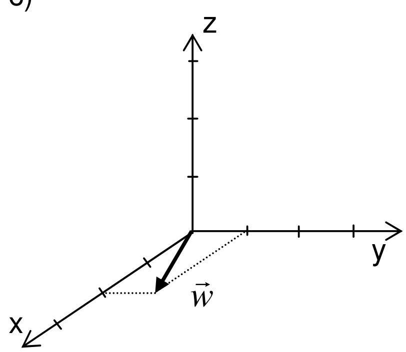
b)



$\vec{v} =$

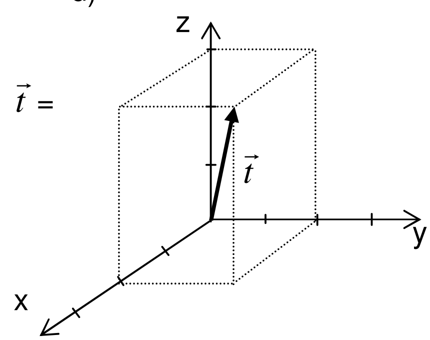
c)

$\vec{w} =$



d)

$\vec{t} =$



No exercício 3 é proposta a conversão do registro gráfico para o registro das n-uplas.

Os vetores do plano (itens **a** e **b**) ou do espaço (itens **c** e **d**) são dados no registro gráfico. A solução deverá ser apresentada no registro das n-uplas.

A resolução poderá ser feita pela conversão do registro gráfico para o das n-uplas, ou também poderá ser feita a princípio, fazendo a conversão para o registro das combinações lineares e depois para o registro das n-uplas.

O aluno deverá saber que um vetor do plano, no registro das n-uplas, é representado por um par ordenado, enquanto que um vetor do espaço, neste mesmo registro, é representado por uma terna ordenada.

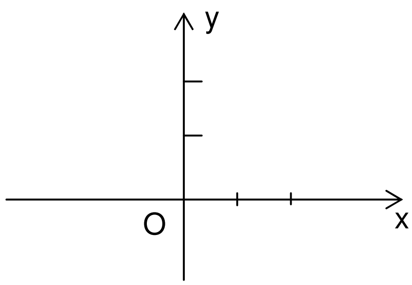
Como os representantes dos vetores dados têm origem em O, suas coordenadas são as coordenadas do ponto extremidade deste representante.

Logo, o aluno deverá somente “ler” as coordenadas deste ponto extremidade para chegar à resposta.

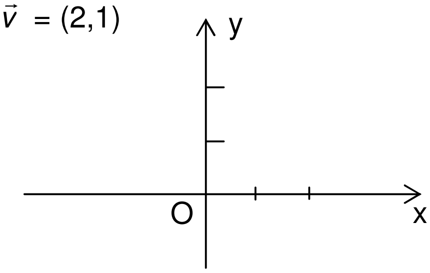
Achamos que no item **d**, talvez alguns alunos tenham dificuldades, porque o vetor $\vec{t}$ não tem a direção de um dos eixos, e também não é paralelo a nenhum dos planos coordenados. Hipótese fundamentada por nossa experiência profissional.

Exercício 4: São dados os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ e $\vec{z}$. Represente-os (com origem em O) nos sistemas de eixos coordenados.

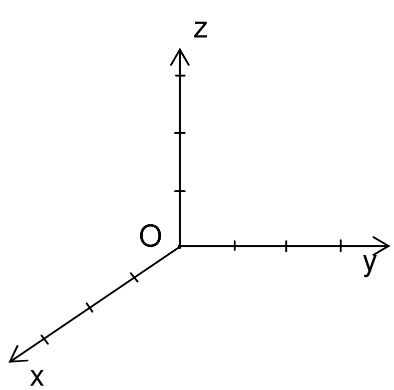
a) $\vec{u}$ = (2,0)



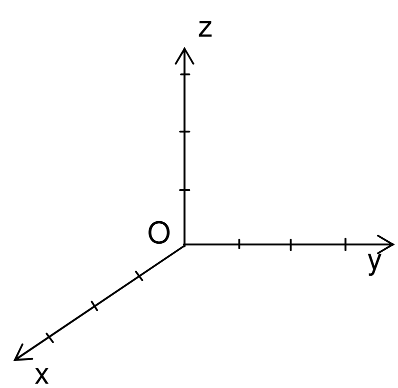
b) $\vec{v}$ = (2,1)



c) $\vec{w}$ = (0,2,1)



d) $\vec{t}$ = (1,2,3)



No exercício 4 a conversão proposta é do registro das n-uplas para o registro gráfico.

Os vetores do plano (itens **a** e **b**) ou do espaço (itens **c** e **d**) são apresentados no registro das n-uplas. A solução deverá ser apresentada no registro gráfico.

Neste exercício o aluno poderá fazer a conversão diretamente do registro das n-uplas para o registro gráfico. Ele deverá traçar um representante do vetor com origem em O (como foi pedido no enunciado) e extremidade no ponto cujas coordenadas são iguais as do vetor.

Outra resolução seria converter o registro das n-uplas para o registro das combinações lineares e em seguida uma nova conversão para o registro gráfico, trabalhando com soma de vetores.

Acreditamos que alguns alunos terão dificuldade para representar o vetor $\vec{t}$, porque o ponto extremidade do representante deste vetor (estamos considerando a origem em O) não está em nenhum dos planos coordenados.

Exercício 5:

A) Os seguintes vetores são dados em relação à base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ do espaço. Escreva cada vetor como combinação linear de $\vec{i},\vec{j}$ e $\vec{k}$.

a) $\vec{u}=(1,-2,3)$

b) $\vec{v}=(2,0,4)$

B) Agora os vetores são dados como combinação linear dos vetores da base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Escreva cada um como uma terna de coordenadas, em relação a essa base.

a) $\vec{u}=-3\vec{i}+4\vec{j}+5\vec{k}$

b) $\vec{v}=2\vec{j}+\vec{k}$

No exercício 5, parte A, a conversão é do registro das n-uplas para o registro das combinações lineares.

Os vetores são dados no registro das n-uplas. A solução deverá ser apresentada no registro das combinações lineares.

Nossa experiência no ensino da disciplina Vetores e Geometria Analítica, nos indica que alguns alunos poderão ter dificuldades, na conversão dos registros das n-uplas para o das combinações lineares, pois, temos encontrado com freqüência em nossa prática docente, uma confusão do tipo: representar $\vec{u} = (\vec{i}, -2\vec{j}, 3\vec{k})$ e não $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$.

No exercício 5, parte B, a conversão é do registro das combinações lineares para o registro das n-uplas.

Os vetores são dados no registro das combinações lineares. A solução deverá ser apresentada no registro das n-uplas.

Na conversão dos registros das combinações lineares para o das n-uplas poderemos também encontrar $\vec{u} = (\vec{i}, -2\vec{j}, 3\vec{k})$ e não $\vec{u} = (1, -2, 3)$.

Poderá ocorrer neste exercício, o que chamamos de erro de dimensão, isto é, o aluno poderá escrever $\vec{v} = (2,1)$ para representar o vetor do espaço $\vec{v} = 2\vec{j} + \vec{k}$.

Exercício 6:

Dado o vetor $\vec{u} = (2,4,8)$.

a) Escreva as coordenadas de um vetor $\vec{v}$ que tem o dobro do comprimento do vetor $\vec{u}$ e com mesmo sentido de $\vec{u}$.

b) Escreva as coordenadas de um vetor $\vec{w}$ que tem a metade do comprimento de $\vec{u}$ e de sentido contrário ao de $\vec{u}$.

No exercício 6, há dois registros de partida: o registro da linguagem natural e o registro das n-uplas; e um de chegada: o registro das n-uplas.

O vetor $\vec{u}$ é apresentado no registro das n-uplas. Os vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são apresentados no registro da linguagem natural. A solução deverá ser apresentada no registro das n-uplas.

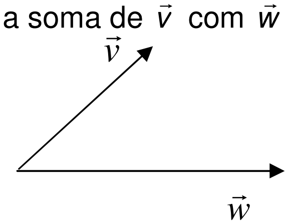
A resolução poderá ser feita realizando a conversão do registro da linguagem natural para o das combinações lineares, em seguida uma outra conversão para o registro das n-uplas, após efetuar tratamentos nesse registro para chegar à solução.

A resolução também poderá ser feita do registro da linguagem natural para o registro das n-uplas.

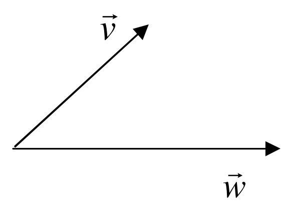
Neste exercício o aluno deverá saber trabalhar com múltiplos (de mesmo sentido ou sentido contrário) de um vetor.

Exercício 7:
São dados dois vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ do plano.

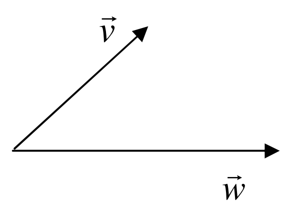
a) Trace o vetor $\vec{a}$ que é a soma de $\vec{v}$ com $\vec{w}$.



b) Trace o vetor $\vec{b}$ que é igual a soma do vetor $\vec{v}$ com o oposto do vetor $\vec{w}$.



c) Trace o vetor $\vec{c}$ que é igual a soma do dobro do vetor $\vec{v}$ com o oposto do dobro do vetor $\vec{w}$.



No exercício 7, há dois registros iniciais: o registro da linguagem natural e o registro gráfico; e um de chegada: o registro gráfico.

Os vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são apresentados no registro gráfico e o vetor pedido, no registro da linguagem natural. A solução deverá ser apresentada no registro gráfico.

A resolução poderá ser feita realizando a conversão do registro da linguagem natural para o das combinações lineares e em seguida uma outra conversão para o registro gráfico.

A resolução também poderá ser feita diretamente do registro da linguagem natural para o registro gráfico.

O sucesso do aluno, também neste exercício, dependerá da utilização da “regra do paralelogramo” para soma de vetores. Além disso, deverá ter noções geométricas de múltiplos (de mesmo sentido ou sentido contrário) de um vetor.

3.2. Aplicação do Teste diagnóstico

A população submetida à aplicação do teste diagnóstico foi a de alunos de nível universitário, de cursos de ciências exatas, que já cursaram a disciplina Geometria Analítica ou que estão terminando o curso.

Aplicamos o teste diagnóstico em duas Escolas de Engenharia do Estado de São Paulo e, em uma terceira Escola onde o curso era de Matemática. As turmas de Engenharia estavam terminando o curso de Vetores e Geometria Analítica e a turma de Matemática estava no início do seu segundo semestre. Escolhemos Escolas de Engenharia em cidades distintas e também cursos distintos para obter dados de “realidades” diferentes.

Nas três escolas tínhamos um total de 70 alunos.

Foi dito aos alunos que este teste é parte de um trabalho de pesquisa para uma dissertação de mestrado e, que as escolas e os alunos participantes ficariam resguardados dos resultados que seriam analisados. Chamamos as três escolas de A, B e C.

Colocamos algumas resoluções dos alunos, ao apresentar os resultados dos exercícios.

3.3. Análise a posteriori do teste diagnóstico

Escola A

Aplicamos o teste em 30/08/2000

Curso: Matemática / Física 2º semestre / 1º ano

O teste foi aplicado pela pesquisadora, acompanhada de uma observadora e a professora da turma que também estava presente.

Foi entregue a primeira folha (exercício 1) para cada dupla e, à medida que terminavam aquela questão, a pesquisadora ou a observadora recolhia aquela, para entregar a próxima. Este procedimento teve por objetivo evitar que uma questão pudesse ser refeita em função da próxima.

O tempo de aplicação foi de 20 minutos. Estavam presentes 24 alunos, ou seja, 12 duplas.

Exercício 1:

Todas as duplas resolveram corretamente.

Exercício 2:

Nos itens **a** e **b**, três duplas não souberam usar a “regra do paralelogramo”, para chegar ao vetor pedido (figura 1). Outra dupla traçou dois vetores, dos quais nenhum deles é o vetor pedido (figuras 2).

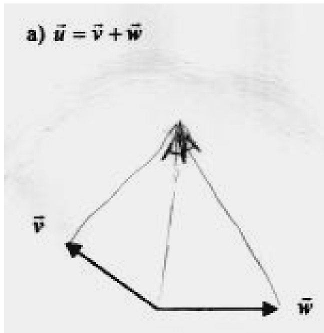


figura 1

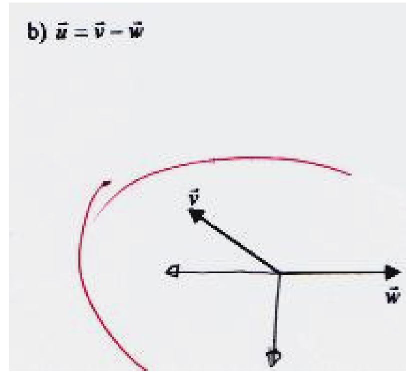


figura 2

Item **c**: Uma dupla não deixou claro onde está a origem do vetor.

Item **d**: Uma dupla errou o sentido do vetor pedido.

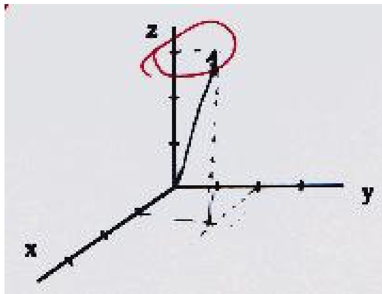
Exercício 3:

Todas as duplas resolveram corretamente os itens **a**, **b** e **c**, fazendo a conversão do registro gráfico para o registro das n-uplas.

No item **d**, três duplas escreveram $\vec{t} = (2{,}2{,}2)$, em vez de $\vec{t} = (2{,}2{,}3)$.

Exercício 4:

Todas as duplas resolveram corretamente os itens **a**, **b** e **c**, fazendo a conversão do registro das n-uplas para o registro gráfico. No item **d**, uma dupla traçou uma das linhas auxiliares na direção errada e conseqüentemente o vetor pedido tinha a direção errada (figura 3). Outra dupla fez o mesmo erro e, além disto colocou a origem do vetor no ponto (1,0,0) (figura 4).



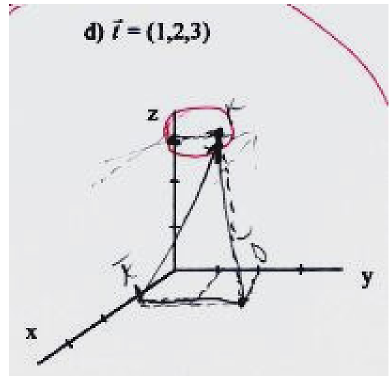


figura 3 **figura 4**

Exercício 5:

Item **A**: Duas duplas fizeram "mistura" de representações nos registros das n-uplas e combinações lineares. No item **b**, da figura 5, observamos ainda um erro de dimensão.

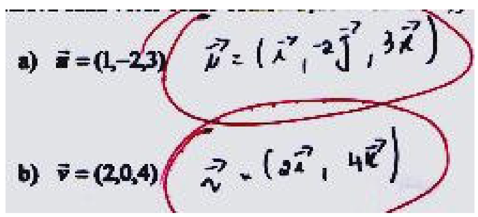


figura 5

Item **B**: Uma dupla usou um par ordenado para representar um vetor do espaço (figura 6): erro de dimensão. Outra dupla escreveu $\vec{v} = (2,0,1)$ em vez de $\vec{v} = (0,2,1)$.

figura 6

Exercício 6:

Todas as duplas resolveram corretamente. Seis duplas fizeram primeiro a conversão para o registro das combinações lineares, para depois passar para o registro das n-uplas.

Exercício 7:

Neste exercício, uma dupla fez primeiro a conversão para o registro das combinações lineares e, em seguida outra conversão para o registro gráfico.

Em todo o exercício, três duplas não souberam usar a "regra do paralelogramo" para obter o vetor pedido (as mesmas duplas citadas no exercício 2). Uma outra dupla, no item **b**, representou o vetor $\vec{v}+\vec{w}$ quando era para representar o vetor $\vec{v}-\vec{w}$.

No item **c**, uma dupla não traçou corretamente as linhas auxiliares e, portanto, errou a direção do vetor pedido (figura 7).

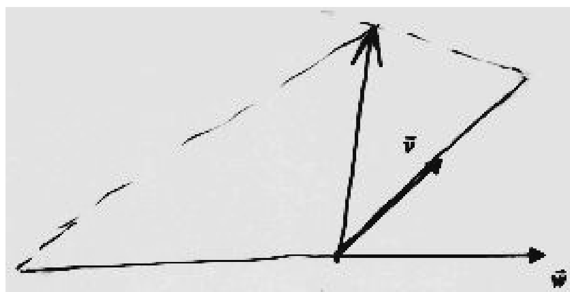


figura 7

Em cada um desses exercícios, foi proposta uma conversão.

No quadro a seguir, representamos por S o caso em que a dupla fez a conversão com sucesso. Usamos N para o caso em que a dupla não fez a conversão. Nas últimas linhas mostramos o número de duplas que tiveram sucesso ao fazer a conversão pedida e a porcentagem de acertos.

	Ex 1	Ex 2	Ex 3	Ex 4	Ex 5 A	Ex 5 B	Ex 6	Ex 7
Dupla 1	S	N	S	S	S	S	S	N
Dupla 2	S	S	S	S	S	S	S	S
Dupla 3	S	S	S	S	S	S	S	S
Dupla 4	S	S	N	S	S	S	S	N
Dupla 5	S	N	S	S	N	S	S	S
Dupla 6	S	S	S	S	S	S	S	S
Dupla 7	S	S	N	S	N	S	S	S
Dupla 8	S	S	N	S	S	S	S	S
Dupla 9	S	N	S	N	S	N	S	N
Dupla 10	S	S	S	S	S	S	S	S
Dupla 11	S	N	S	S	S	S	S	N
Dupla 12	S	N	S	N	S	N	S	N
Total de sucessos	12	7	9	10	10	10	12	7
Porcentagem de acertos	100%	58,3%	75%	83,3%	83,3%	83,3%	100%	58,3%

Observamos que nos exercícios 2, 3 e 7 (exercícios que envolvem o registro gráfico), o número de sucessos é menor.

Escola B

Aplicamos em 17/11/2000

Curso: Engenharia

O teste foi aplicado pela pesquisadora e a professora da turma não esteve presente.

O tempo de aplicação foi de 30 minutos. Estavam presentes 18 alunos, ou seja, 09 duplas.

Como a pesquisadora não teve a ajuda de um observador e, os alunos chegavam aos poucos à sala de aula, foi decidido entregar de uma só vez todas as folhas, com as sete questões. Quatro duplas estavam cursando o 3º ciclo, duas duplas o 4º ciclo, uma dupla o 5º ciclo, uma dupla o 9º ciclo, e uma dupla não informou o ciclo que cursava. O curso é semestral e cada ciclo corresponde a um semestre. Todos estes alunos ainda cursavam a disciplina Geometria Analítica.

A maioria dos alunos fez as questões com muita pressa, pois estavam preocupados em terminar um relatório que deveriam entregar, ainda naquele dia, ao professor de uma das disciplinas que cursavam. Duas duplas dividiram as folhas, de modo que cada aluno fez uma parte das questões. Em uma dupla, um só aluno trabalhou nas questões e o outro ficou fazendo o relatório. Os alunos não se mostravam dispostos a colaborar com a pesquisa.

Considerando os fatos citados acima, decidimos descartar os dados obtidos na aplicação do teste nesta escola e relatar este fato entendendo como limite de pesquisa de campo.

Escola C

Aplicamos em 28/11/2000

Curso: Engenharia

O teste foi aplicado pela pesquisadora, uma observadora e a professora da turma. Foi entregue a primeira folha (exercício 1) para cada dupla e, à medida que terminavam aquela questão, recolhia-se para entregar a próxima.

O tempo de aplicação foi de 20 minutos. Iniciamos às 18 h e 40 min e encerramos às 19 h. Algumas duplas não terminaram o teste porque às 19 h teriam aula de outra disciplina. Apesar deste inconveniente (tínhamos pouco tempo), os alunos mostraram boa vontade em colaborar com a pesquisa.

Estavam presentes 28 alunos, ou seja, 14 duplas.

Duas duplas fizeram até o exercício 6.

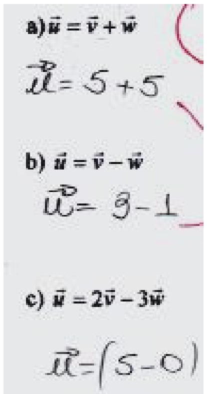
Outras duas só fizeram os dois primeiros exercícios.

Três duplas fizeram até o exercício 3.

As restantes fizeram todos os exercícios.

<u>Exercício 1:</u>

Duas duplas igualaram vetor a um número real (figuras 8 e 9).



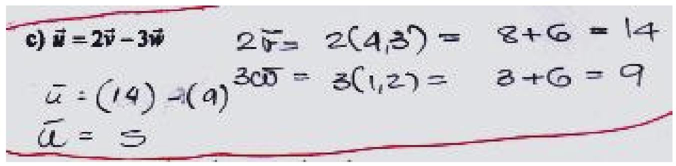


figura 8 **figura 9**

Exercício 2:

Item **a:** Uma dupla fez uma tentativa de encontrar o vetor soma, através das coordenadas dos vetores dados. Mas, essas coordenadas não foram dadas. Três duplas erraram a direção do vetor pedido. Outra dupla representou dois vetores e não deixou claro qual deles é o vetor pedido. Um desses dois vetores estaria correto se as linhas auxiliares tivessem a direção dos vetores dados (figura 10). Duas duplas não traçaram as linhas auxiliares paralelas à direção dos vetores dados.

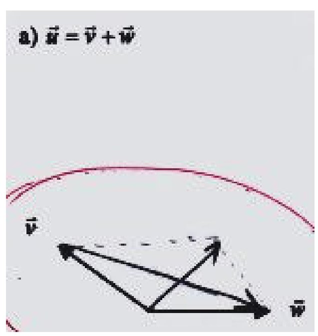


figura 10

Item **b**: Duas duplas não traçaram as linhas auxiliares paralelas às direções dos vetores dados (figuras 11 e 12). Seis duplas não representaram o vetor pedido de maneira correta. Avaliamos que a dificuldade é advinda do não conhecimento da representação gráfica do oposto de um vetor, ou da “regra do paralelogramo” para soma de vetores.

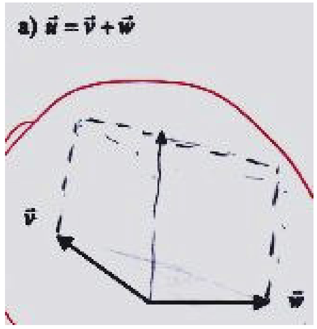


figura 11

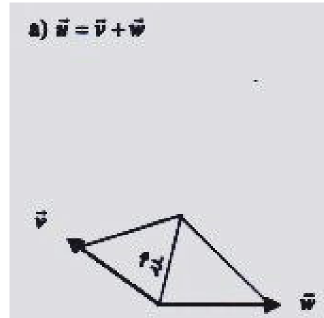


figura 12

Item **c**: Dez duplas consideraram a direção e o sentido do vetor pedido, de maneira correta, mas não deixaram claro onde está a origem desse vetor. Isto gera dúvidas sobre o comprimento do vetor. Duas duplas erraram a direção do vetor pedido.

Item **d**: Cinco duplas erraram o comprimento do vetor pedido. Devemos considerar o fato de que os alunos não usaram régua. Uma dupla errou o sentido e o comprimento do vetor.

Exercício 3:

Item **a**: Três duplas usaram par ordenado para representar o vetor pedido, mas não escreveram as coordenadas corretas. Uma dupla usou terna para representar um vetor do plano: erro de dimensão (figura 13).

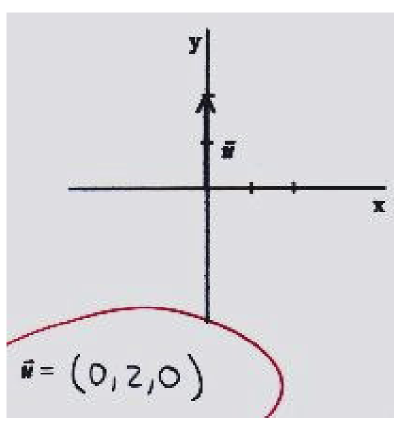


figura 13

Item **b**: Novamente a dupla citada no item a usou terna para representar um vetor do plano (figura 14). Uma dupla usou par ordenado, mas não o correto. Outra dupla igualou vetor a número real (figura 15).

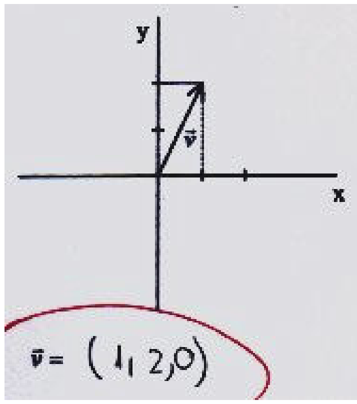


figura 14

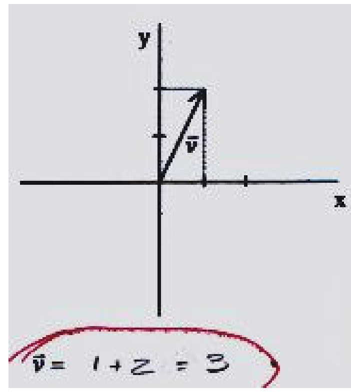


figura 15

Item **c**: Uma dupla igualou vetor a número real (figura 16). Outra dupla usou par ordenado, em vez de terna: erro de dimensão (figura 17). Duas duplas usaram triplas, mas não a correta.

Item **d**: Uma dupla não resolveu. Três duplas escreveram $\vec{t} = (2,2,2)$ em vez de $\vec{t} = (2,2,3)$. Duas duplas escreveram uma outra tripla que não é a correta.

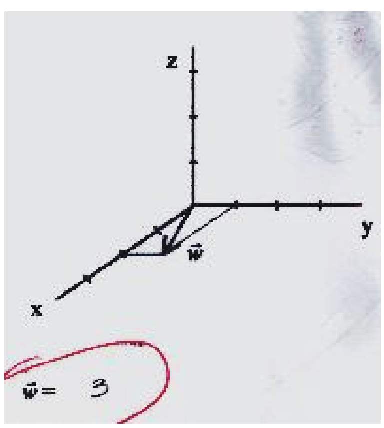


figura 16

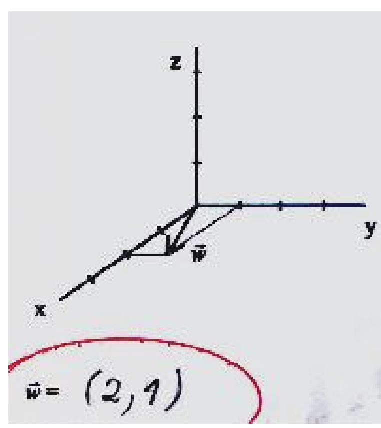


figura 17

Exercício 4:

Em todo o exercício duas duplas só marcaram pontos e segmentos.

Nos itens **a**, **b** e **c**, uma dupla representou o vetor do plano (0,2) em vez de (2,0), (1,2) em vez de (2,1) e, também o vetor do espaço (1,0,2) em vez de (0,2,1).

Item **c**: Uma dupla só marcou pontos e segmentos.

Item **d**: Duas duplas não traçaram as linhas auxiliares paralelas à direção dos vetores dados (figuras 18 e 19). Uma dupla errou a direção, pois obteve o registro gráfico do vetor sem o auxílio das linhas auxiliares (figura 20). Uma dupla colocou a origem do vetor em outro ponto, que não é a origem do sistema, e a extremidade no ponto (1,2,3) (figura 21). Outra dupla representou o vetor (3,1,2) em vez de (1,2,3) (figura 22) e, uma outra só traçou linhas auxiliares (algumas não corretas).

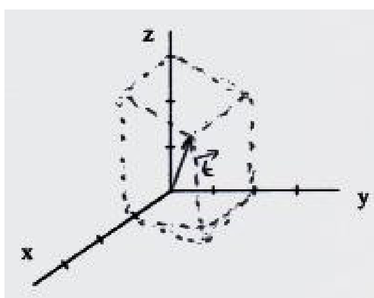


figura 18

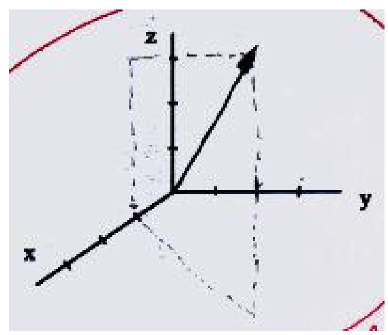


figura 19

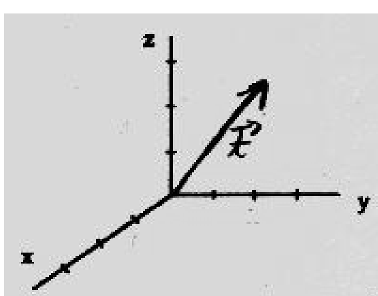


figura 20

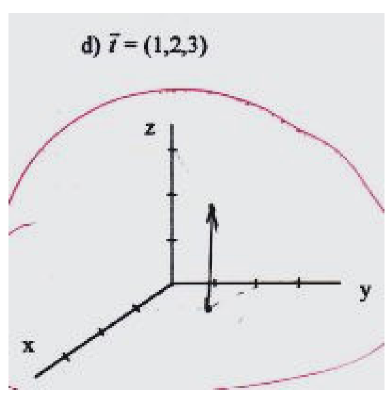


figura 21

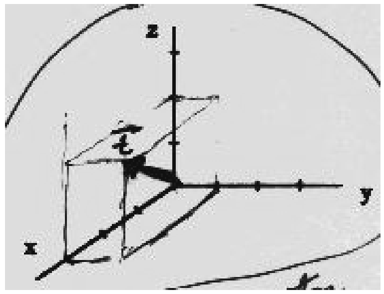


figura 22

Exercício 5:

Item **A**: Três duplas fizeram “mistura” de representações nos registros das n-uplas e combinações lineares (figuras 23, 24 e 25). Uma dupla igualou vetor a número real (figura 26).

Item **B**: Uma dupla escreveu $\vec{v} = 2 + 1(\vec{j}\vec{k})$ e, em seguida $\vec{v} = 3\vec{j}\vec{k}$.

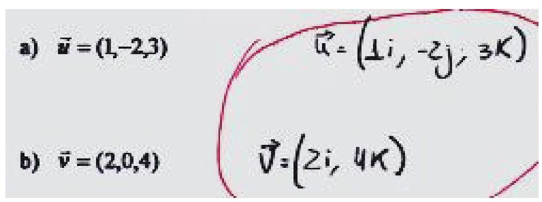


figura 23

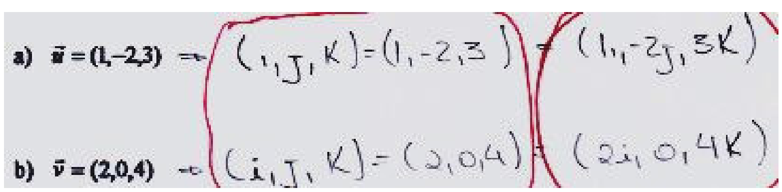


figura 24

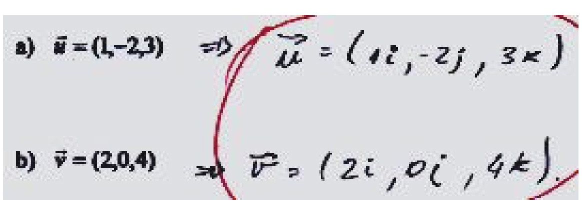


figura 25

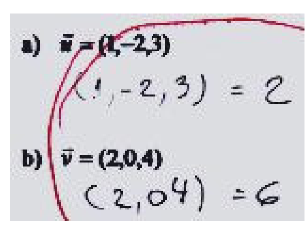


figura 26

Exercício 6:

Item **a**: Uma dupla chegou ao vetor pedido, relacionando os módulos de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ (figura 27). Uma resolução muito trabalhosa.

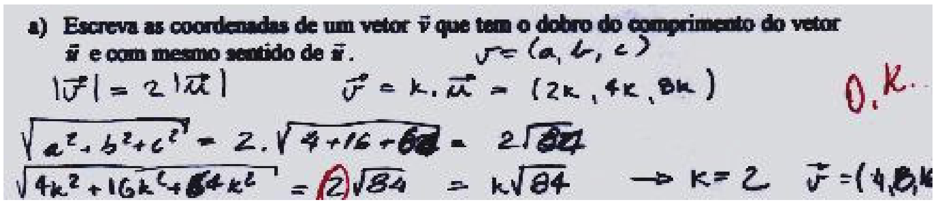


figura 27

Item **b**: Uma dupla em vez de escrever $\vec{w} = (-1,-2,-4)$, escreveu $\vec{w} = (4,2,1)$. Outra escreveu $\vec{w} = 2\vec{u}$, quando deveria ter escrito $\vec{w} = -\frac{1}{2}\vec{u}$.

Exercício 7:

Item **a**: Uma dupla só traçou as linhas auxiliares.

Item **b**: Esta mesma dupla representou dois vetores; um deles é o vetor pedido. Uma dupla representou $\vec{y} = -\vec{v}$, em vez de $\vec{y} = \vec{v} - \vec{w}$. Outra dupla representou o vetor $\vec{y} = \vec{v} + \vec{w}$.

Item **c**: Uma dupla não resolveu e outra traçou o vetor $\vec{z} = 2\vec{v} - \vec{w}$, ou o vetor $\vec{z} = -2\vec{v} + \vec{w}$ (não indicou o sentido deste vetor) (figura 28). Três duplas erraram o comprimento do vetor $-2\vec{w}$.

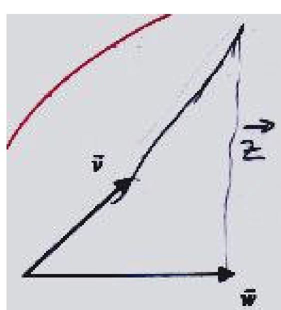


figura 28

No quadro abaixo, S é o caso em que a dupla fez a conversão pedida com sucesso e N é o caso em que a dupla não fez a conversão. Deixamos em branco o exercício que não foi feito. Nas últimas linhas mostramos o número de duplas que conseguiu fazer a conversão pedida e a porcentagem de acertos, considerando somente as duplas que tentaram uma resolução.

	Ex 1	Ex 2	Ex 3	Ex 4	Ex 5 A	Ex 5 B	Ex 6	Ex 7
Dupla 1	S	N	N	N			S	
Dupla 2	S	N	N	N	N	N	N	N
Dupla 3	S	N	N	N	S	S	S	S
Dupla 4	S	N	N	N	N			
Dupla 5	S	N						
Dupla 6	N	N	N	N	N	N	N	N
Dupla 7	S	S	N	N	S	S	S	N
Dupla 8	S	N	S	N	N	S	S	N
Dupla 9	S	N	S					
Dupla 10	S	N						
Dupla 11	S	S	S	S	S	S	S	N
Dupla 12	S	S	S					
Dupla 13	S	S	N	N	S	S	S	N
Dupla 14	N	N	N					
Total de sucessos	12	4	4	1	4	5	6	1
Porcentagem de acertos	85,7%	28,5%	33,3%	11,1%	50%	71,4%	75%	14,2%

Nesta escola, temos porcentagem menor de sucessos em todos os exercícios que envolvem o registro gráfico (exercícios 2,3,4 e 7).

Na tabela abaixo, podemos comparar as porcentagens de acertos nas escolas A e C.

	Acertos na Escola C	Acertos na Escola A
Exercício 2	28,5%	58,3%
Exercício 3	33,3%	75%
Exercício 4	11,1%	83,3%
Exercício 7	14,2%	58,3%

As porcentagens de sucessos da escola C foram menos favoráveis do que as da escola A, no que tange aos exercícios discriminados na tabela acima. Por essa razão, decidimos aplicar a seqüência didática a uma classe da escola C.

3.4. Erros típicos

Após ter aplicado o teste diagnóstico nas escolas A e C (no total eram 52 alunos, ou seja, 26 duplas), encontramos erros e dificuldades que se repetiam.

1. Visualização espacial e dificuldade de representação no registro gráfico

Observamos pelo teste diagnóstico que no exercício 3 item **d**, em que era dado um representante do vetor $\vec{t}$ no registro gráfico (figura 29), e foi solicitada a conversão para o registro das n-uplas. Das 24 duplas que tentaram fazer o exercício, seis duplas escreveram $\vec{t} = (2,2,2)$ e não $\vec{t} = (2,2,3)$. Acreditamos que a dificuldade desses alunos possa estar relacionada à visualização do espaço. Além disso, a configuração das linhas auxiliares poderia ter conduzido o aluno ao erro.

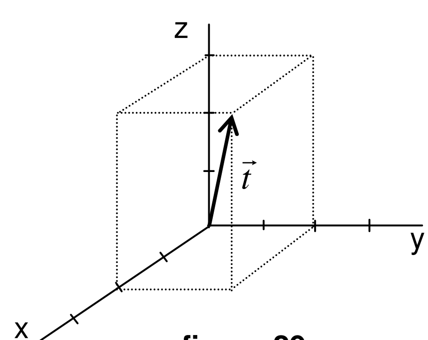


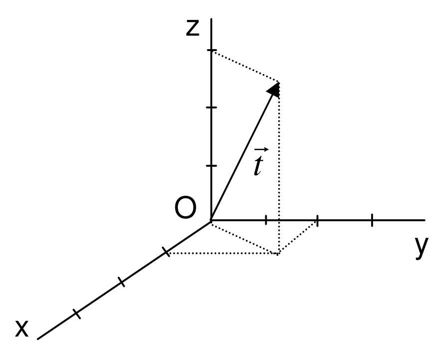
figura 29

No quadro abaixo, temos os seguintes resultados do exercício 3 item **d**:

	Número de duplas da Escola A	Número de duplas da Escola C
Escreveu $\vec{t} = (2,2,2)$	3	3
Fez o ex. corretamente	9	6
Fez outro tipo de erro	0	2

No exercício 4 item **d**, foi dado $\vec{t} = (1,2,3)$ (registro das n-uplas) e solicitamos a conversão para o registro gráfico. O representante de $\vec{t}$ neste registro, deveria ter origem em O e extremidade no ponto $(1,2,3)$ do espaço. Achamos que a dificuldade encontrada pelo aluno foi a “marcação” deste ponto no sistema de coordenadas.

Na figura abaixo mostramos esta representação gráfica do vetor $\vec{t}$.



No quadro abaixo, temos os seguintes resultados do exercício 4 item **d**:

	Número de duplas da Escola A	Número de duplas da Escola C
Correto	10	3
Não correto	2	6

Após análise desses exercícios, concluímos que alguns dos alunos que não chegaram à resposta correta, não sabem marcar as coordenadas de um ponto do espaço, num sistema de coordenadas e também não sabem "ler" as coordenadas de um ponto marcado. Estas habilidades foram exploradas através de nossa seqüência didática.

Também observamos dificuldades nos exercícios 2 e 7, nos quais o aluno tinha que fazer conversão para o registro gráfico. Uma dificuldade encontrada foi a utilização da "regra do paralelogramo" para soma de vetores.

2. <u>Dificuldade nos sub-registros do registro simbólico</u>

Como observamos na análise do teste diagnóstico, muitos alunos confundem as notações de n-uplas e combinações lineares. Há dificuldade de articulação entre estes dois registros. Alguns exemplos do que escreveram: $\vec{u} = (1\vec{i}, -2\vec{j}, 3\vec{k})$ $\vec{u} = 1\vec{i}; -2\vec{j}; 3\vec{k}$ $\vec{v} = (2\vec{i}, 4\vec{k})$ $\vec{v} = 2\vec{i}; 4\vec{k}$ $\vec{v} = (2\vec{i}, 0\vec{j}, 4\vec{k})$.

Fizeram este tipo de erro em pelo menos um exercício: 2 duplas na escola A e 3 duplas na escola C.

3. <u>Igualdade entre vetor e número real</u>

Para alguns alunos, vetor e escalar pode ter o mesmo significado, uma vez que eles os igualaram.

Fizeram este erro, em pelo menos um exercício, 3 duplas na escola C.

4. <u>Erro de dimensão</u>

Algumas duplas usaram par ordenado para representar um vetor do espaço ou uma tripla para representar um vetor do plano.

Fizeram este tipo de erro em pelo menos um exercício: 1 dupla na escola A, e 2 duplas na escola C.

Todos os exercícios propunham tarefa de conversão. A partir da representação de vetores dada num dos registros, o aluno deveria chegar a uma representação correspondente em outro registro.

Observamos no quadro abaixo que a dificuldade maior aparece quando o registro gráfico está em jogo. Como já dissemos anteriormente, trabalhamos na nossa seqüência didática, atividades que envolvem este registro.

	Número de duplas da Escola A	**Número de duplas da Escola C**
Dificuldade no registro gráfico	3	6
Dificuldade nos sub-registros do simbólico	2	3
Igualdade entre vetor e número real	0	3
Erro de dimensão	1	2

A conversão que o aluno mostrou maior dificuldade é aquela em que o registro de chegada é o registro gráfico (exercícios 2, 4 e 7). A conversão onde este é o registro de partida (exercício 3), mostrou um resultado melhor. Isto nos faz afirmar que o sentido da conversão é um fator muito importante na aprendizagem de um conceito (K. Pavlopoulou, no seu trabalho de doutorado, também detectou isto). Pois, ”....as regras de conversão não são as mesmas de acordo com o sentido no qual a mudança de registros é efetuada”. (Duval., 1995)

4. SEQÜÊNCIA DIDÁTICA

Com base na análise dos resultados do teste diagnóstico, elaboramos uma seqüência didática com duas sessões, nas quais trabalhamos somente com vetores do espaço.

Nosso objetivo era verificar a possibilidade de realizar um aprendizado nas conversões entre os registros gráfico e das n-uplas, de vetores do espaço. Queríamos também descaracterizar a idéia de que um representante de um vetor precisa ter origem em O (origem do sistema de coordenadas). Para isto, o aluno trabalhou (nas últimas atividades) no registro gráfico, com representantes distintos de um mesmo vetor.

Os alunos trabalharam em duplas e sugerimos que usassem régua.

Cada sessão foi aplicada pela pesquisadora, com a participação da professora da turma.

Em todas as atividades desta seqüência, as coordenadas (registro das n-uplas) dos vetores, são relativas à base ortonormal $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

4.1. Sessão 1

Nesta primeira sessão trabalhamos com a relação entre coordenadas de um ponto do espaço e coordenadas de um vetor do espaço. Iniciamos trabalhando com pontos pertencentes aos eixos coordenados. Em seguida, com pontos nos planos coordenados (não pertencentes aos eixos) e no final da sessão com pontos não pertencentes aos planos coordenados. Todos esses pontos com coordenadas positivas.

Após a resolução destas atividades esperávamos que o aluno fosse capaz de fazer conversões entre os registros gráfico e das n-uplas, de vetores com representantes cujo ponto extremidade pertence ao primeiro octante e origem em O.

Esta sessão se compõe de cinco atividades (originais no anexo II).

O tempo estimado para a aplicação foi de aproximadamente 50 minutos.

4.1.1. Análise a priori da sessão 1

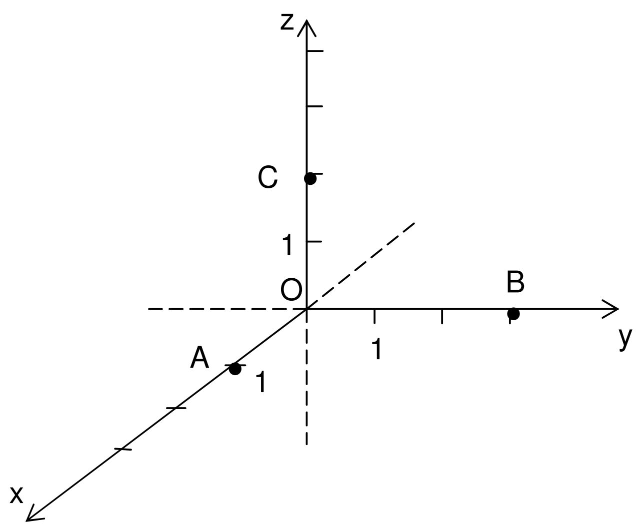
Atividade 1

a) Na figura abaixo, observe que o ponto A tem coordenadas (1,0,0). Dê as coordenadas dos pontos B e C.

$A = (1,0,0)$

$B =$

$C =$

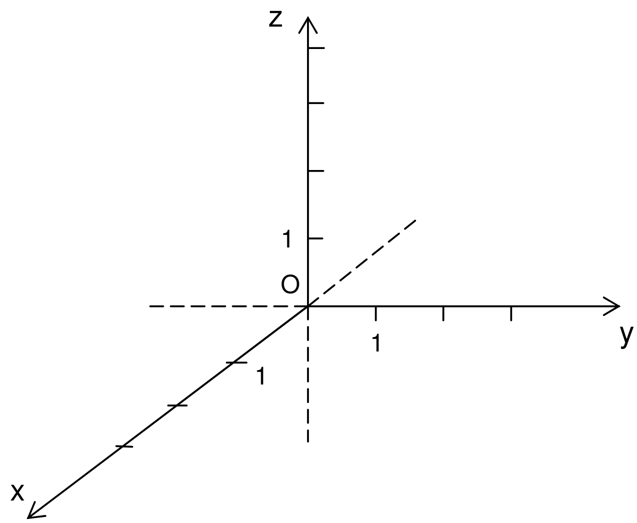


b) Represente os seguintes pontos, no sistema de coordenadas abaixo:

$D = (2,0,0)$

$E = (0,1,0)$

$F = (0,0,4)$

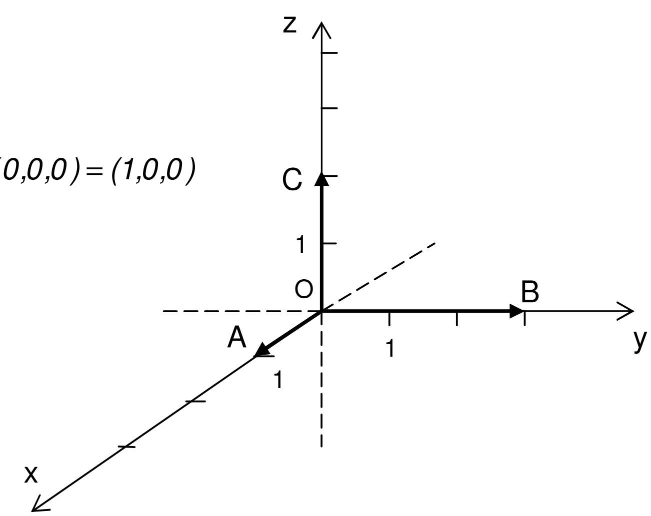


c) Na figura abaixo o vetor $\overrightarrow{OA}$ tem coordenadas (1,0,0), pois sabemos que $\overrightarrow{OA} = A - O$. Dê as coordenadas dos vetores $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$ representados na figura abaixo.

$\overrightarrow{OA} = A - O = (1,0,0) - (0,0,0) = (1,0,0)$

$\overrightarrow{OB} =$

$\overrightarrow{OC} =$

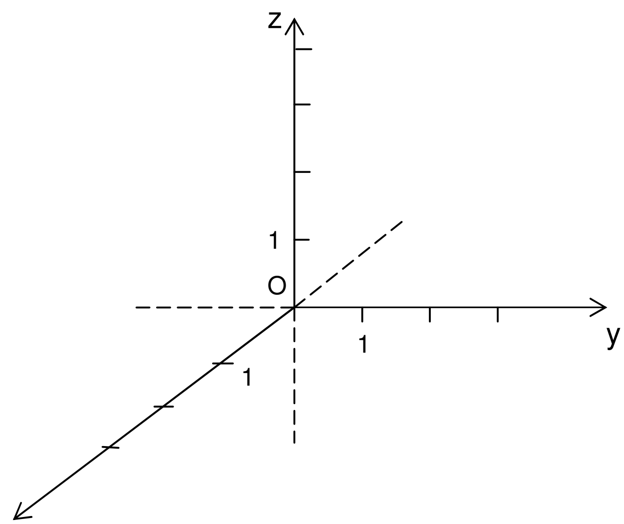


d) Represente os seguintes vetores no sistema de coordenadas abaixo.

$\overrightarrow{OD} = (2,0,0)$

$\overrightarrow{OE} = (0,1,0)$

$\overrightarrow{OF} = (0,0,4)$



Lembramos que, quando um representante de um vetor tem origem em O, as coordenadas deste vetor coincidem com as coordenadas do ponto extremidade daquele representante.

Na atividade 1, o aluno deverá fazer conversão entre registros de vetores com representantes de extremidade nos eixos coordenados (e origem em O).

Nos itens **a** e **b** desta atividade, foram exploradas as habilidades: determinação das coordenadas de um ponto num dos eixos coordenados, bem como sua representação gráfica. Tais habilidades foram consideradas necessárias para que o aluno realizasse as conversões dos registros de vetores, dos itens **c** e **d**. Escolhemos vetores que têm representante de extremidade nos mesmos pontos utilizados nos itens **a** e **b** (e origem em O), na tentativa de levar o aluno a comparar as coordenadas de um ponto e de um vetor cujo representante tem origem em O e extremidade naquele ponto.

No enunciado do item **c**, recordamos que $\overrightarrow{OA} = A - O$, pois os alunos iriam necessitar desta igualdade para resolver as atividades seguintes.

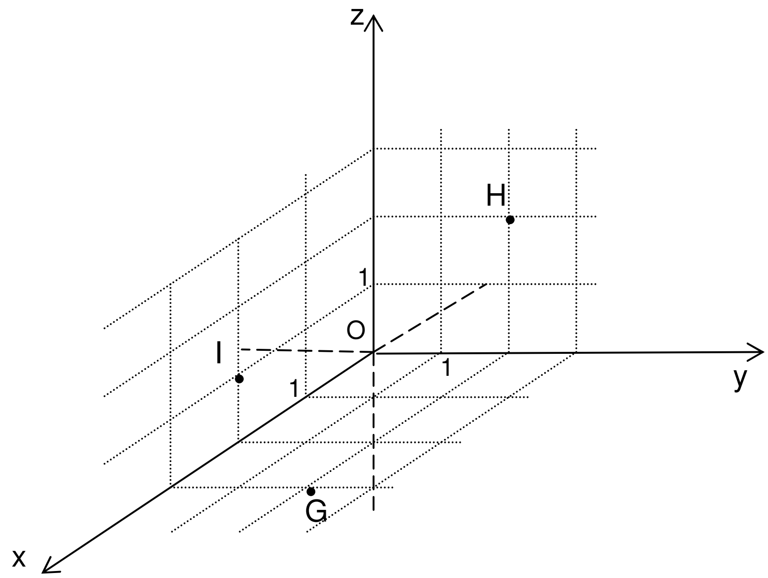
Atividade 2

a) Na figura abaixo, observe que o ponto G tem coordenadas (3,2,0). Dê as coordenadas dos pontos H e I.

G = (3,2,0)

H =

I =

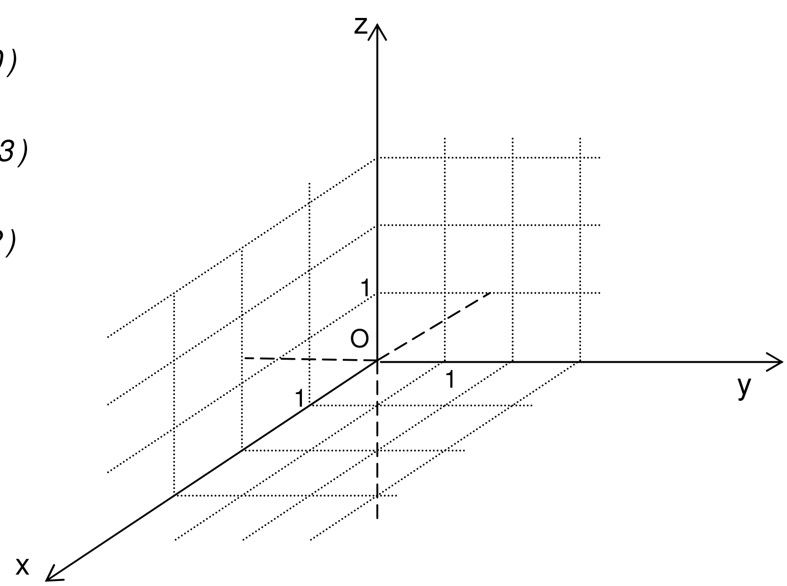


b) Represente os seguintes pontos, no sistema de coordenadas abaixo:

J = (1,3,0)

K = (0,2,3)

L = (1,0,2)

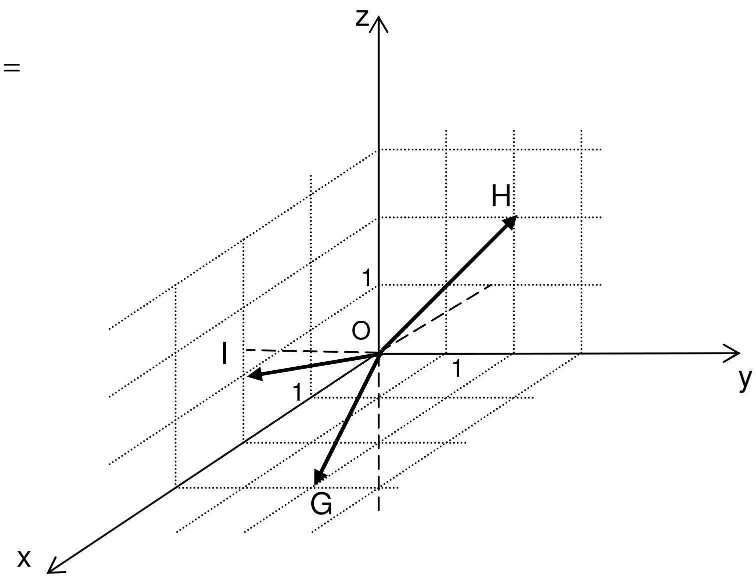


c) Dê as coordenadas dos vetores representados na figura abaixo.

$\overrightarrow{OG} = G - O =$

$\overrightarrow{OH} =$

$\overrightarrow{OI} =$

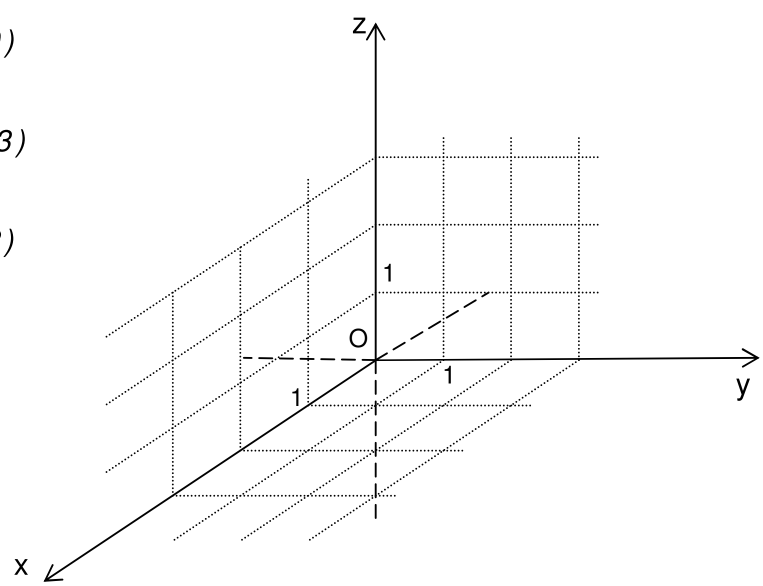


d) Represente os seguintes vetores no sistema de coordenadas abaixo.

$\overrightarrow{OJ} = (1,3,0)$

$\overrightarrow{OK} = (0,2,3)$

$\overrightarrow{OL} = (1,0,2)$



Na atividade 2, o aluno deverá fazer conversão entre registros de vetores com representantes de extremidade nos planos coordenados (e origem em O), porém, não pertencentes aos eixos.

Elaboramos a atividade 2 como a atividade 1. Nos itens **a** e **b** trabalhamos com pontos e nos itens **c** e **d** trabalhamos com vetores.

Nas figuras desta atividade traçamos as linhas auxiliares paralelas aos eixos coordenados, na tentativa de induzir o aluno a proceder desta maneira nas próximas atividades. Observamos no teste diagnóstico que muitos alunos não consideraram este paralelismo.

O objetivo das atividades 3 e 4 é dar condições ao aluno, de marcar corretamente um ponto do espaço (não pertencente a um dos planos coordenados) em um sistema ortogonal de coordenadas Oxyz, para que ele possa então representar graficamente um vetor que tem representante de extremidade neste ponto e origem em O. Cada uma destas atividades utiliza uma estratégia diferente.

Atividade 3

Represente os seguintes pontos, no sistema de coordenadas abaixo.

$O = (0,0,0)$

$M = (3,0,0)$

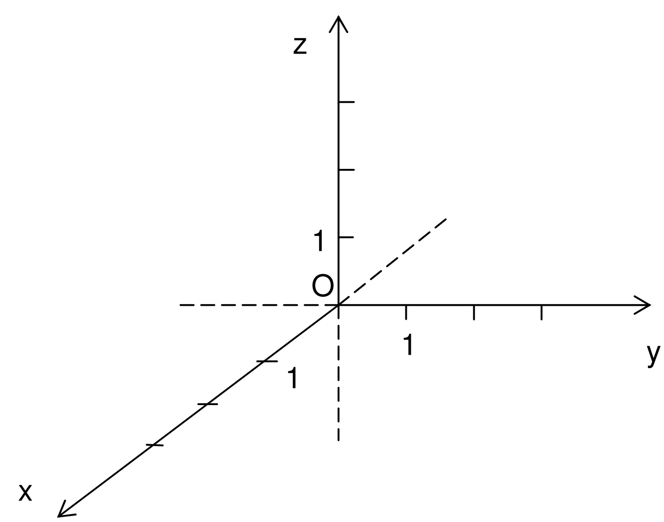
$N = (0,1,0)$

$P = (0,0,2)$

$Q = (3,1,0)$

$R = (3,0,2)$

$S = (0,1,2)$



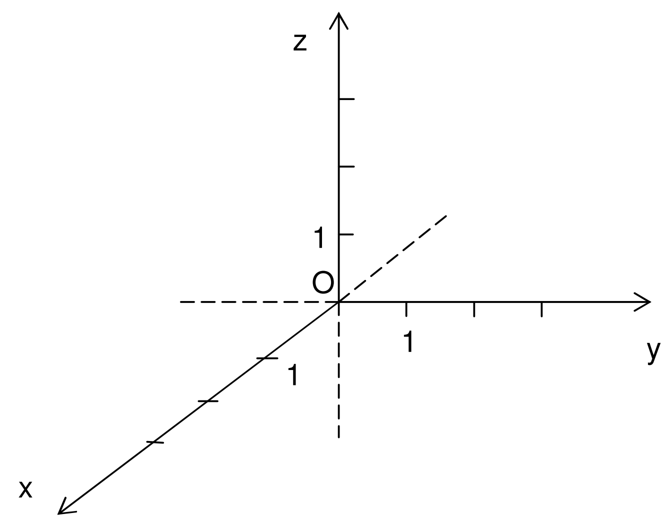
Construa o paralelepípedo que tem vértices nestes pontos.

Agora, nesta figura, marque o ponto $T = (3,1,2)$.

Na atividade 3, é através da construção de um paralelepípedo com um vértice em O e arestas paralelas aos eixos, que se marca o ponto T pedido. Escolhemos o ponto $T=(3,1,2)$ do primeiro octante. O aluno deverá marcar os pontos O, M, N, P, Q, R, e S e construindo o paralelepípedo (de faces paralelas aos planos coordenados) com vértices nestes pontos, ele deverá perceber que o vértice que não se encontra em nenhum dos eixos ou planos coordenados, é o ponto T pedido.

Atividade 4

Marque o ponto $Q=(3,1,0)$ no sistema de coordenadas abaixo. Por esse ponto, trace uma paralela ao eixo Oz e marque o ponto U, a partir de Q, duas unidades para cima.



Quais são as coordenadas de U?

Compare o ponto U com o ponto T da atividade anterior.
O que você pode dizer sobre eles?

Na atividade 4, o aluno deverá marcar o ponto $Q=(3,1,0)$ no plano coordenado Oxy e em seguida o ponto U, seguindo a orientação dada no enunciado. O aluno deverá perceber que este ponto U é o mesmo T da atividade anterior. Preferimos trabalhar com o mesmo ponto, para provocar uma comparação entre as estratégias das duas atividades. Nas próximas atividades ele poderá optar por uma ou a outra, quando precisar marcar um ponto do espaço.

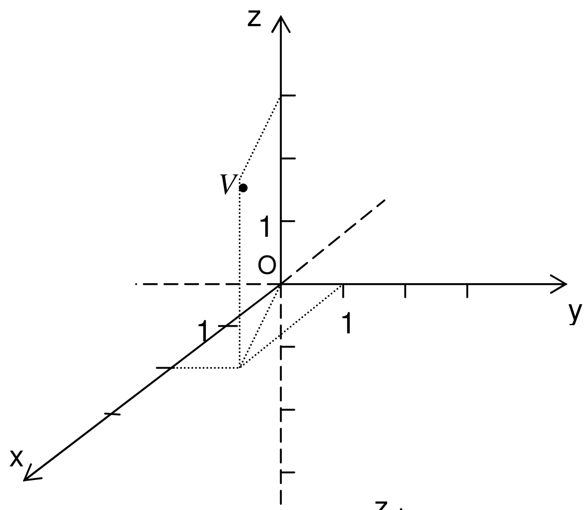
A estratégia da atividade 4 é menos trabalhosa, mas a estratégia da atividade 3 fornece para o aluno, melhor visualização do ponto no espaço.

Atividade 5

a) No sistema Oxyz, dê as coordenadas dos pontos V e W. Quais as coordenadas dos vetores $\overrightarrow{OV}$ e $\overrightarrow{OW}$?

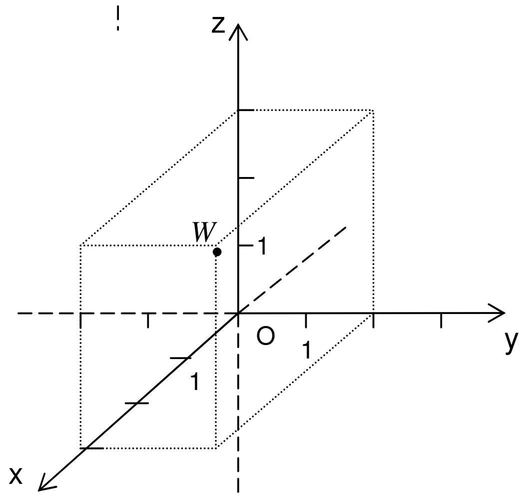
$V =$

$\overrightarrow{OV} =$

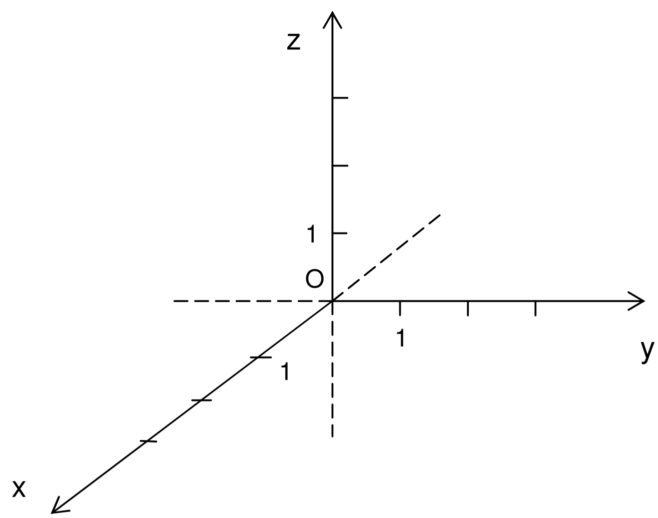


$W =$

$\overrightarrow{OW} =$



b) Represente o ponto $A = (1,2,3)$ no sistema abaixo. Em seguida, nesta mesma figura represente graficamente o vetor $\overrightarrow{OA}$.



Na atividade 5, trabalhamos com pontos pertencentes ao primeiro octante e com vetores que têm representante de extremidade neste ponto e origem em O.

No item **a**, é solicitado ao aluno a conversão do registro gráfico para o registro das n-uplas, de um ponto V (W) do espaço. Em seguida o aluno deverá apresentar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OV}$ ($\overrightarrow{OW}$).Para marcar o ponto V usamos a estratégia da atividade 4 e para marcar o ponto W, a estratégia da atividade 3.

No item **b**, o aluno deverá marcar o ponto A, usando uma das estratégias das atividades 3 ou 4 e, em seguida representar o vetor $\overrightarrow{OA}$ (passagem do registro das n-uplas para o registro gráfico). Este item da atividade 5, é o **d** do exercício 4, do teste diagnóstico. Os resultados apresentados neste exercício do teste, evidenciaram dificuldades dos alunos na conversão dos registros envolvidos. A sessão 1 foi adequada, pois houve aumento das porcentagens de acertos dos alunos (ver tabela pg 69).

4.1.2. Aplicação da sessão 1

Os alunos para os quais foi aplicada esta sessão, eram de primeiro e segundo anos do curso de engenharia da escola C, mas não a mesma turma do teste diagnóstico.

A aplicação realizou-se em 04 de setembro de 2001, e contou com a participação dos professores das turmas, além da pesquisadora.

Antes da aplicação, evidenciamos aos alunos da classe que as atividades que seriam desenvolvidas com eles eram para um trabalho de pesquisa. Destacamos alguns aspectos desse trabalho e, informamos que já havíamos aplicado à outra turma dessa escola um teste com função diagnóstica. Apresentamos os conteúdos do teste e relatamos que a maior dificuldade que seus colegas tiveram, foi nas atividades em que se explorava aspectos gráficos. Sendo nosso alvo de pesquisa o ensino/aprendizagem de vetores, iríamos desenvolver com eles atividades similares, numa perspectiva de enfrentamento das dificuldades reveladas no teste, querendo com isso investigar a adequação de nossa proposta, com novas abordagens para esse ensino.

A princípio propomos aos alunos que formassem duplas e que não houvesse comunicação entre elas. Informamos que não iríamos interferir na resolução. Eles deveriam resolver as atividades usando os conhecimentos que tinham sobre o conteúdo. Dissemos também que os nomes da escola e dos alunos seriam resguardados.

Foi entregue a primeira atividade para cada dupla e a medida que terminavam, a pesquisadora ou a professora recolhia aquela, para entregar a próxima. Somente as atividades 3 e 4 foram entregues juntas.

Iniciamos às 9 h e 40 min e encerramos às 10 h e 40 min.

Estavam presentes 42 alunos, ou seja, 21 duplas que foram numeradas. As duplas formadas por alunos do segundo ano eram as de números 8, 10, 19, 20 e 21.

Colocamos algumas resoluções dos alunos, ao apresentar os resultados dos exercícios.

4.1.3. Análise a posteriori da sessão 1

Atividade 1:

As duplas 3 e 15 não tiveram sucesso nos itens **a** e **b** e consequentemente nos itens **c** e **d**.

Item **d**: Três duplas representaram graficamente pontos e não vetores e os indicaram simbolicamente como vetor (figura 30). Uma dupla apenas marcou pontos e não representou graficamente os vetores (figura 31).

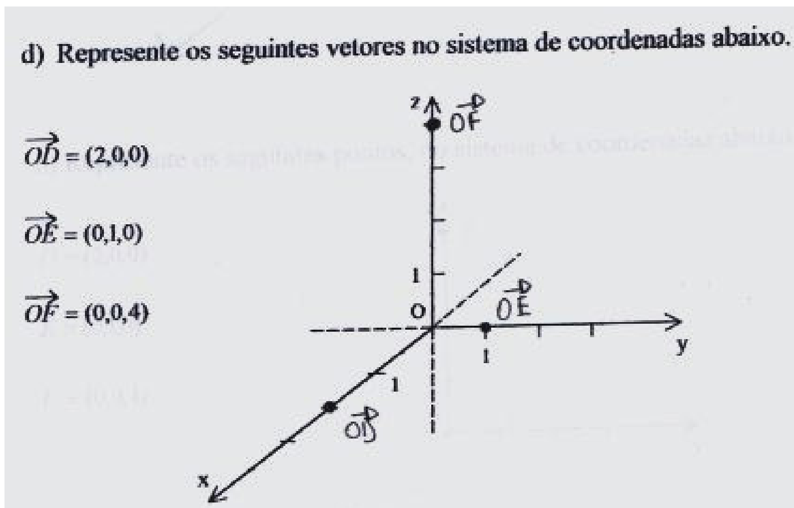


figura 30

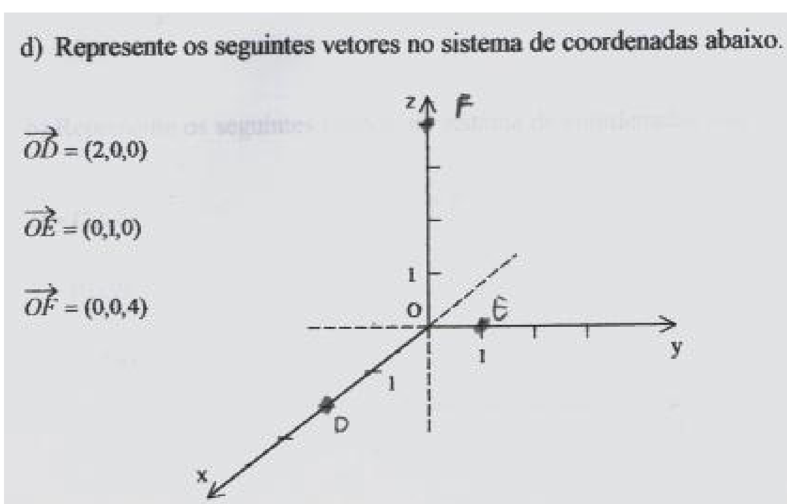


figura 31

Atividade 2:

As duplas 3 e 15 não tiveram sucesso, também nesta atividade.

Uma dupla, no item **b**, representou graficamente vetor e não ponto como foi solicitado (figura 32).

Item **d**: Duas outras duplas, não traçaram os vetores pedidos. Só marcaram pontos e representaram simbolicamente como vetor. Uma dupla (a mesma citada na atividade 1) marcou pontos em vez de representar graficamente vetores.

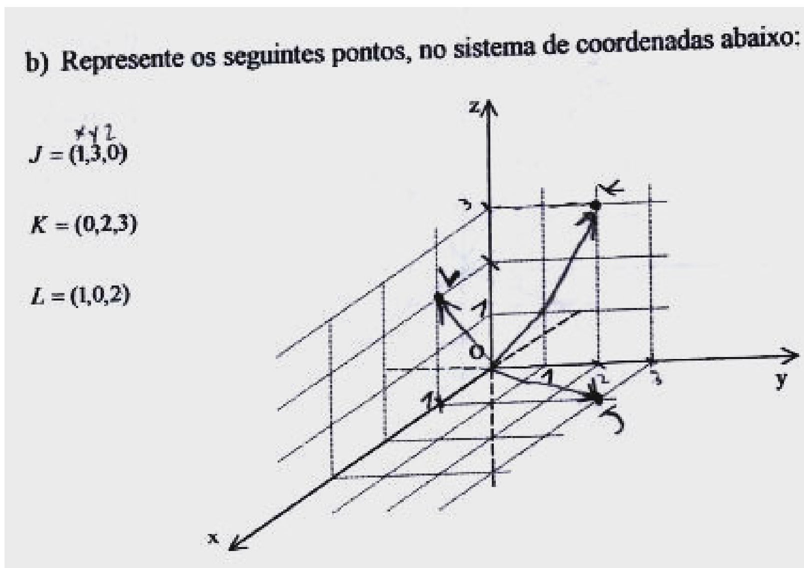


figura 32

Atividade 3:

Duas duplas construíram o paralelepípedo, porém, marcaram outro ponto e não o T (figura 33).

Duas outras duplas construíram o paralelepípedo e não marcaram o ponto T.

Cinco duplas não conseguiram construir o paralelepípedo.

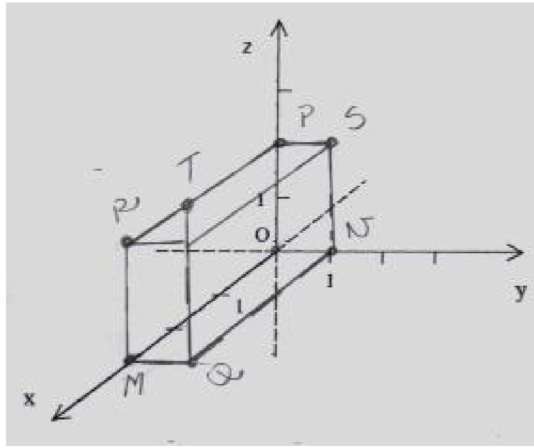


figura 33

Atividade 4:

Sete duplas, ao marcar o ponto U no sistema de coordenadas, obtiveram a terceira coordenada desse ponto, com o seguinte procedimento: levantaram a partir do ponto Q do plano, uma paralela ao eixo Oz. Em seguida, passaram pelo ponto (0,0,2), a paralela ao eixo Ox. Com esse procedimento, a terceira coordenada é maior que 2 e, portanto, o ponto marcado é distinto de T e não igual a T como responderam (figura 34).

A dupla 3, somente marcou o ponto Q. Como não marcou o ponto U, consequentemente não o comparou com T.

Duas duplas marcaram Q corretamente e erraram o ponto U. Uma delas não comparou U e T e a outra escreveu que estes dois pontos são “paralelos”.

Três duplas erraram Q e U e não compararam U e T.

A dupla 15 não marcou nenhum ponto e escreveu: “....os pontos U e Q são colineares”.

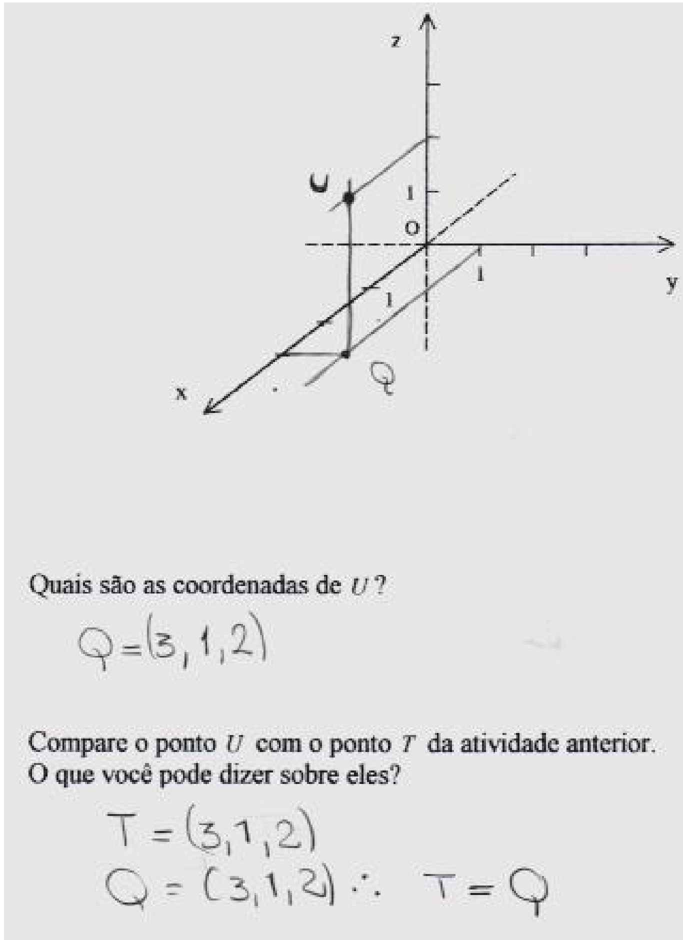


figura 34

Obs: Ao colocar a resposta, os alunos desta dupla escreveram Q em vez de U.

Atividade 5:

Item **a**: Três duplas (duas delas; 3 e 15) não encontraram as coordenadas dos pontos V e W. Outras três duplas erraram a cota de W. Uma dupla errou a abscissa de V.

Item **b**: Oito duplas não marcaram corretamente ponto A porque as linhas auxiliares não foram traçadas paralelas aos eixos. Consequentemente o vetor $\overrightarrow{OA}$ não foi representado corretamente. Mostramos a resolução de duas delas nas figuras 35 e 36. Quatro duplas não fizeram esse item. Uma dupla marcou o ponto *A* sem traçar nenhuma linha auxiliar.

Das duplas que fizeram corretamente este item **b**, somente uma usou a estratégia do paralelepípedo.

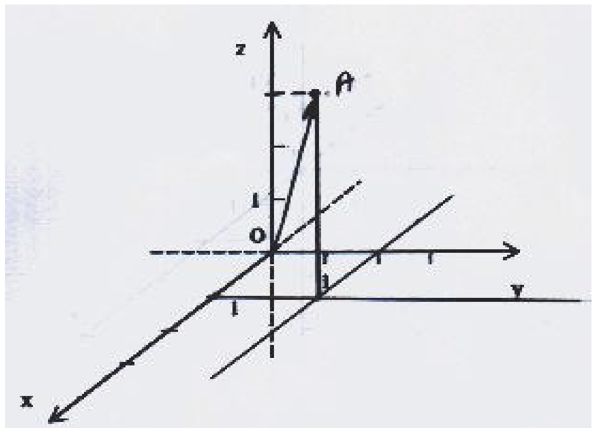


figura 35

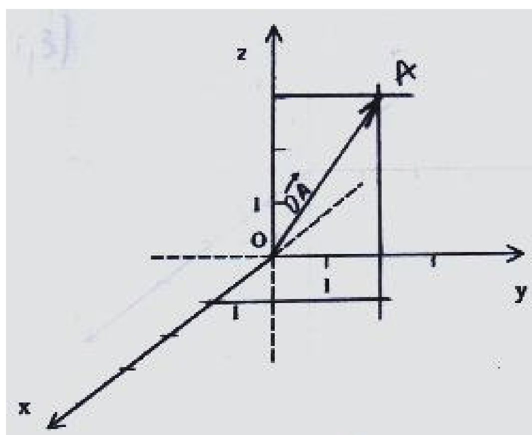


figura 36

Destacamos as duplas 3 e 15, porque não conseguiram obter sucesso em qualquer das atividades.

Síntese dos resultados da sessão 1

No quadro abaixo mostramos o número de duplas que fizeram a conversão com sucesso.

Atividade 1 itens a e b	19
Atividade 1 itens c e d	15
Atividade 2 itens a e b	19
Atividade 2 itens c e d	16
Atividade 5 item a	14
Atividade 5 item b	8

Neste próximo quadro, temos o número de duplas que utilizando a estratégia sugerida, marcaram o ponto pedido corretamente.

Atividade 3	12
Atividade 4	7

Um resultado que ainda não está satisfatório é o que se refere a conversão do registro das n-uplas para o registro gráfico, de vetores com representante de extremidade no primeiro octante e origem em O (atividade 5 item **b**). Trabalhamos novamente esta conversão, na sessão 2, somente com as duplas que não tiveram sucesso. Reforçamos também as estratégias das atividades 3 e 4.

No tabela abaixo comparamos resultados da atividade 5 item **b** desta sessão, com o exercício 4 item **d** do teste diagnóstico (escola C). Vale lembrar que eram turmas diferentes.

	Número de duplas que tentaram alguma resolução	**Número de duplas que resolveram corretamente**	**Porcentagem de acerto**
Teste diagnóstico	9	3	33,3%
Sessão 1	17	8	47%

Apesar de ser turmas diferentes, eram da mesma escola, tinham o mesmo professor, portanto, o mesmo curso para as duas turmas. Podemos considerar então, que houve uma evolução. Porém como dissemos acima, este resultado ainda não está satisfatório

4.2. Sessão 2

Nesta sessão trabalhamos a conversão entre os registros gráfico e das n-uplas de vetores do espaço, considerando algumas novas variáveis tais como coordenadas negativas, posição dos eixos, etc.

Nas duas últimas atividades trabalhamos com representantes gráficos distintos de um mesmo vetor, com a intenção de descaracterizar a idéia de que um representante de um vetor precisa ter origem em O (origem do sistema de coordenadas).

Esta sessão se compõe de seis atividades (originais no anexo III), sendo que algumas duplas farão somente cinco delas. Das 21 duplas que participaram da sessão 1, oito delas fizeram corretamente a atividade 5 item **b**. Estas duplas iniciarão a sessão 2 pela atividade 7. As outras iniciarão a sessão 2 pela atividade 6.

O tempo estimado para a aplicação foi de aproximadamente 90 minutos para as duplas que farão todas as atividades e 70 minutos para as duplas que farão somente cinco delas.

4.2.1. Análise a priori da sessão 2

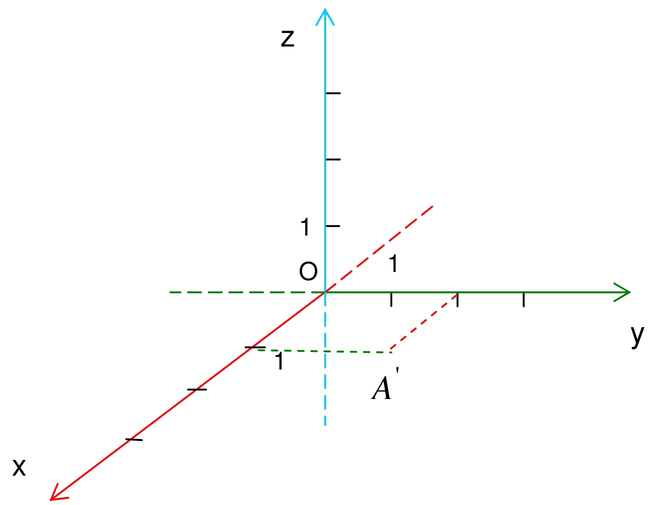
Atividade 6

Vamos retomar a atividade 5, quando no item b, tínhamos que representar o vetor $\overrightarrow{OA} = (1,2,3)$.

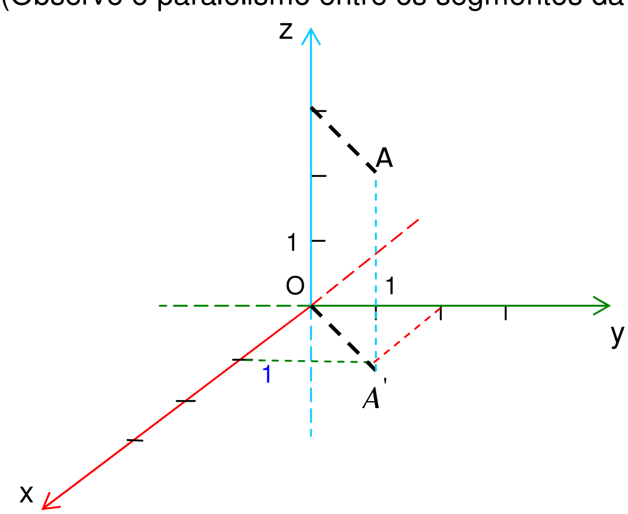
Vamos representá-lo, no sistema Oxyz, utilizando duas estratégias diferentes.

A primeira estratégia é exatamente o que trabalhamos na atividade 4. Vamos começar marcando o ponto $A' = (1,2,0)$ no plano xOy.

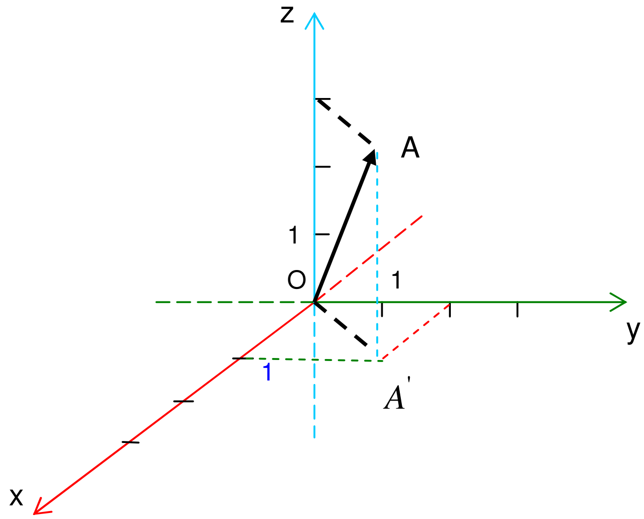
(Observe o paralelismo entre os segmentos da mesma cor)



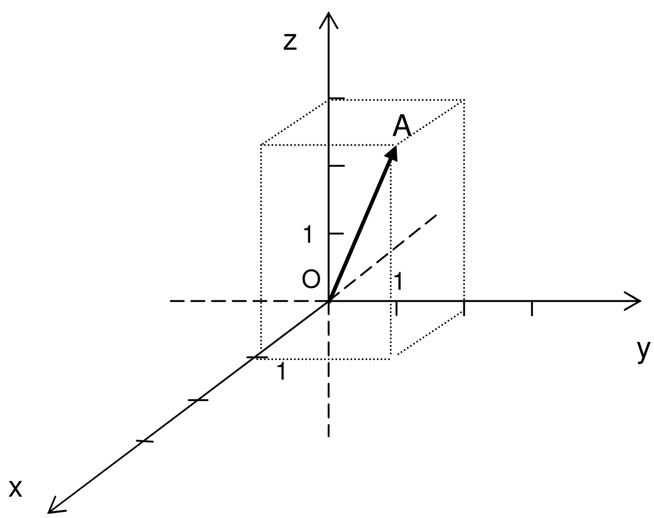
Em seguida, a partir de A' vamos "subir" 3 unidades e marcar o ponto $A = (1,2,3)$. (Observe o paralelismo entre os segmentos da mesma cor)



Agora podemos traçar o vetor $\overrightarrow{OA} = (1,2,3)$.

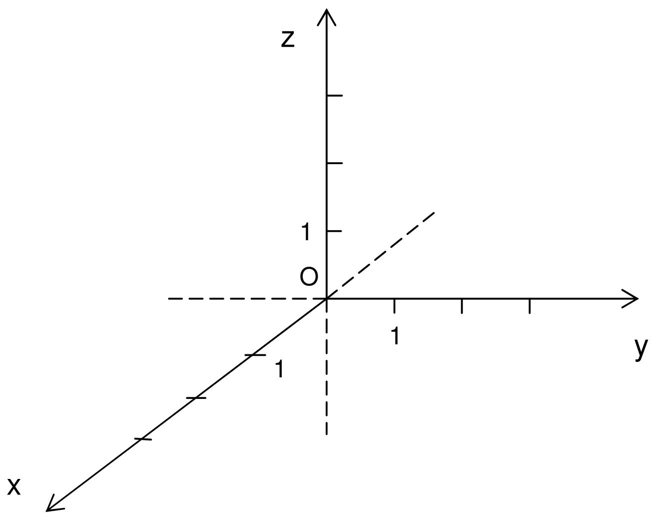


Usando outra estratégia (que trabalhamos na atividade 3), vamos representar o mesmo vetor $\overrightarrow{OA} = (1,2,3)$, desenhando um paralelepípedo de modo que um de seus vértices é o ponto A.



Observe os pontos (1,0,0), (0,2,0) e (0,0,3) marcados nos eixos. Estes pontos também são vértices do paralelepípedo.

Agora represente o vetor $\overrightarrow{OB} = (3,1,3)$ usando qualquer uma das estratégias acima.



Na atividade 6, retomamos o que foi proposto na atividade 5 item **b** da primeira sessão, pois ao analisá-la observamos um resultado não satisfatório. Naquela atividade, o aluno deveria marcar o ponto A (de coordenadas positivas) usando uma das estratégias trabalhadas em atividades anteriores e, então representar o vetor $\overrightarrow{OA}$ (passagem do registro das n-uplas para o registro gráfico).

Nesta atividade 6, mostramos para o aluno passo a passo, como marcar este ponto, usando uma ou a outra estratégia. Destacamos o paralelismo entre linhas auxiliares e retas usando cores diferentes.

No final desta atividade o aluno deverá marcar um outro ponto B (ainda no primeiro octante) e traçar um representante do vetor com origem em O e extremidade em B.

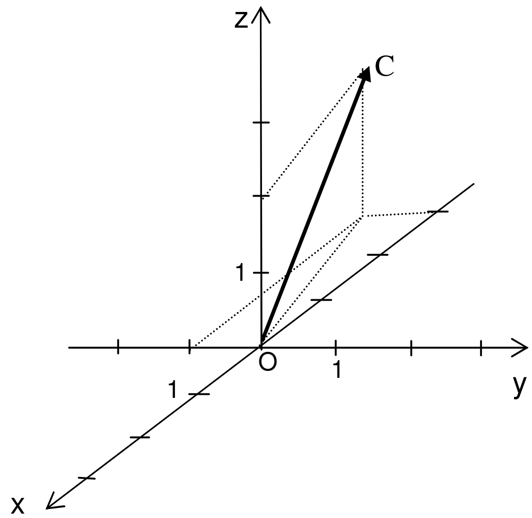
Oito duplas que participaram da sessão 1 foram dispensadas de fazer esta atividade.

Atividade 7

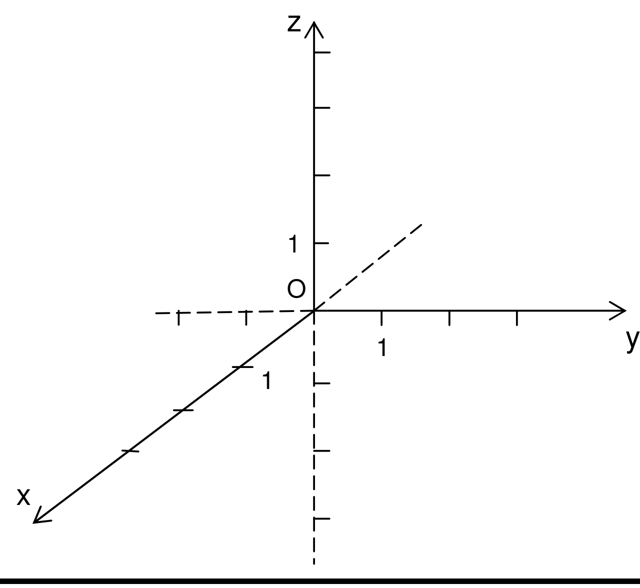
No sistema Oxyz:

a) quais as coordenadas do vetor representado na figura a seguir?

$\overrightarrow{OC} =$



b) represente o vetor $\overrightarrow{OD} = (1,-2,4)$.



Na atividade 7, o aluno deverá fazer conversão de registros de vetor com representante de extremidade em qualquer um dos octantes (e origem em O). Ou seja, o ponto extremidade do representante pode ter uma ou mais coordenadas negativas.

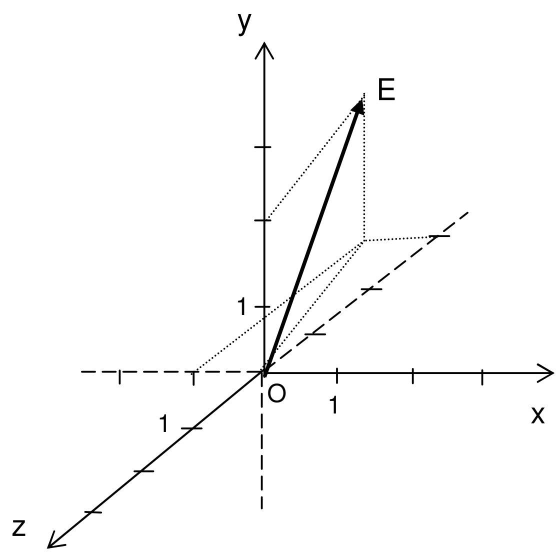
No item a, a conversão é do registro gráfico para o registro das n-uplas e no item b, a conversão é no sentido contrário.

Atividade 8

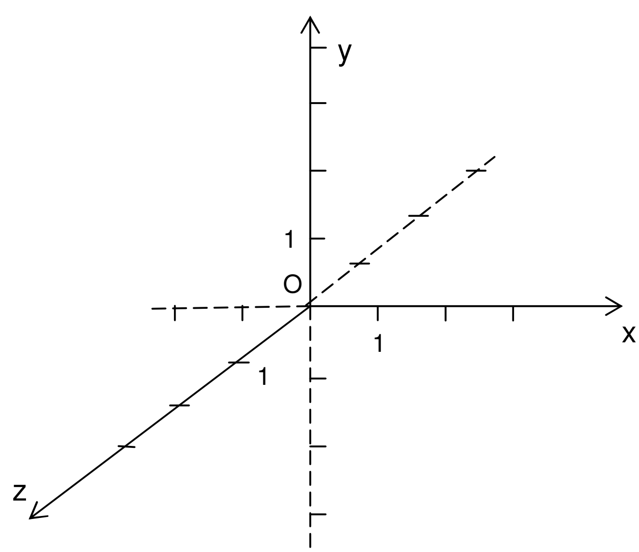
Preste atenção na posição dos eixos do sistema Oxyz.

a) Quais as coordenadas do vetor representado na figura a seguir?

$\overrightarrow{OE} =$



b) Represente o vetor $\overrightarrow{OF} = (1,2,-2)$.



Na atividade 8, apenas trocamos as posições dos eixos coordenados. Até a atividade anterior, os eixos Oy e Oz estavam representados no plano do papel. Nesta atividade os eixos que estão representados neste plano são Ox e Oy.

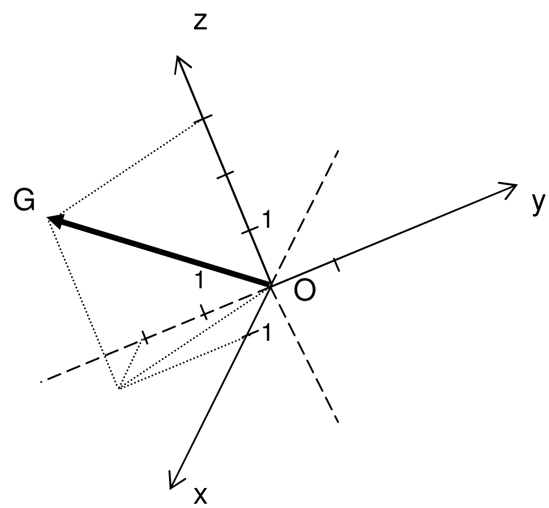
Considerando esta nova apresentação do sistema ortogonal de coordenadas, queremos verificar se o aluno continua fazendo as conversões como nas atividades anteriores.

Atividade 9

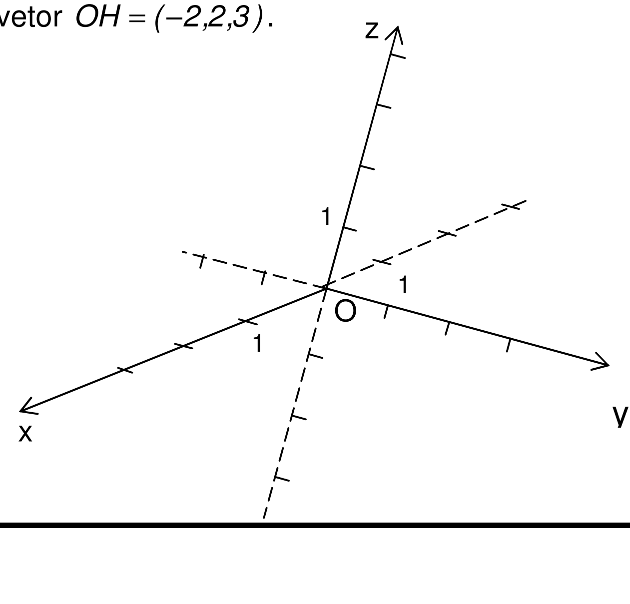
No sistema Oxyz:

a) quais as coordenadas do vetor representado na figura a seguir?

$\overrightarrow{OG} =$



c) represente o vetor $\overrightarrow{OH} = (-2,2,3)$.



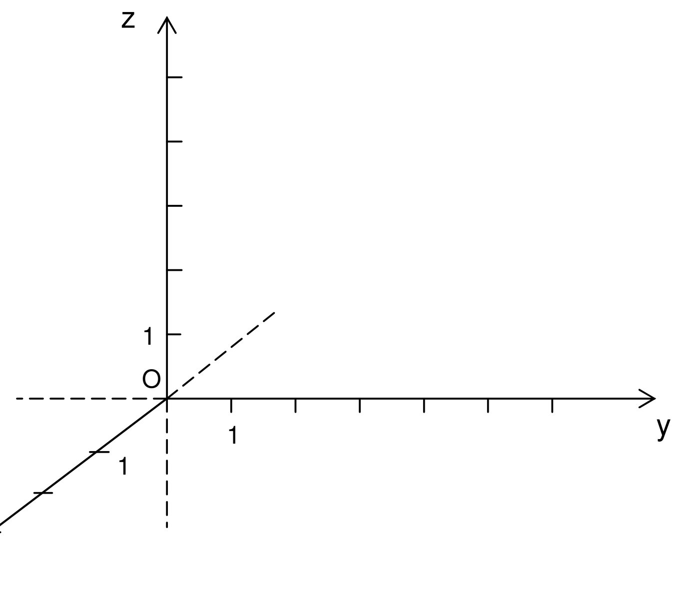
Na atividade 9, os eixos coordenados estão desenhados de forma diferente do que vinha sendo feito até agora. Novamente queremos verificar se o aluno faz as conversões citadas anteriormente.

Atividade 10

Um vetor nem sempre precisa ser representado graficamente, com a origem em O.

a) No sistema Oxyz, represente os pontos:

$I = (0,2,2)$, $J = (0,0,2)$, $K = (0,2,4)$, $L = (0,4,2)$ e $M = (0,6,4)$.



b) Nesta mesma figura represente: $\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{JK}$ e $\overrightarrow{LM}$.

c) Escreva as coordenadas de:

$\overrightarrow{OI} = I - O =$

$\overrightarrow{JK} = K - J =$

$\overrightarrow{LM} = M - L =$

d) O que você pode dizer sobre estes vetores?

É muito comum representarmos os vetores com origem em O (nos livros didáticos e em sala de aula). Talvez isto leve o aluno a acreditar que qualquer representante de um vetor deva sempre ter a origem neste ponto.

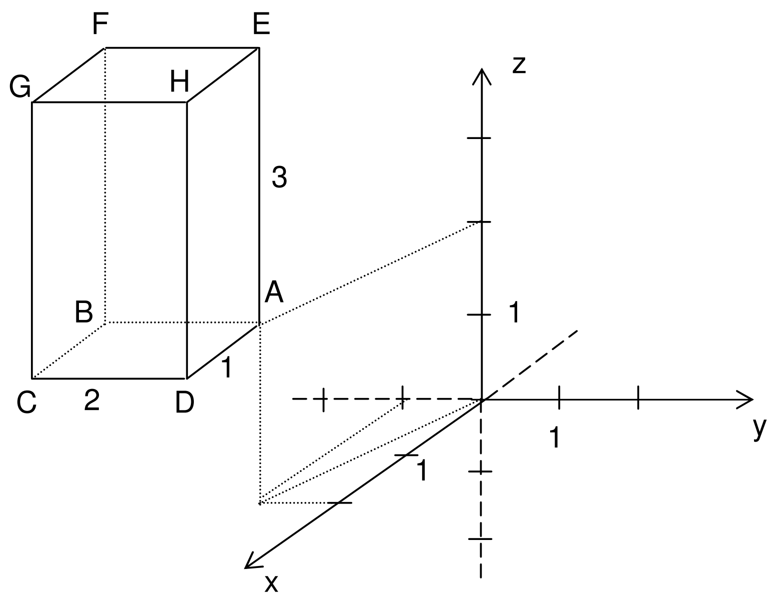
Na atividade 10, o aluno deverá traçar no sistema ortogonal de coordenadas, outros representantes de um vetor, além daquele com origem em O.

No item **a**, pedimos para o aluno "marcar" os pontos I, J, K, L e M, todos eles no plano yOz (o plano do papel). Em seguida, pedimos para representar graficamente os vetores $\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{JK}$ e $\overrightarrow{LM}$. Estes três representantes têm mesmo comprimento, mesma direção e mesmo sentido (escolhemos trabalhar com representantes no plano do papel, para que o aluno compare facilmente os comprimentos, direção e sentido). No item **c**, pedimos as coordenadas de cada um deles, que obviamente são iguais. No item **d**, esperamos que o aluno conclua (observando o registro gráfico e/ou observando o registro das n-uplas) que são representantes do mesmo vetor.

No que se refere à pergunta do item **d**, uma resposta que poderá acontecer é: "Os vetores são paralelos" (hipótese fundamentada por nossa experiência profissional). Neste caso, o aluno só considerou a direção e não comparou o comprimento e o sentido.

Atividade 11

Na figura abaixo, temos um paralelepípedo retângulo de arestas paralelas aos eixos coordenados e de comprimentos 2, 1 e 3. Determine as coordenadas, no sistema Oxyz, dos outros vértices deste sólido, sabendo-se que A= (2,-1,2).



B=(, ,) F=(, ,)

C=(, ,) G=(, ,)

D=(, ,) H=(, ,)

E=(, ,)

Escreva as coordenadas dos seguintes vetores:

$\overrightarrow{AD} =$ $\overrightarrow{EA} =$ $\overrightarrow{BA} =$

$\overrightarrow{FG} =$ $\overrightarrow{GC} =$ $\overrightarrow{CD} =$

Na atividade 11, dado um ponto A, vértice de um paralelepípedo retângulo de arestas paralelas aos eixos coordenados, o aluno deverá “ler” as coordenadas dos outros vértices (conversão do registro gráfico para o registro das n-uplas, de pontos do espaço).

Em seguida, pedimos as coordenadas de seis vetores (dois deles são sempre iguais. Por exemplo, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{FG}$).

O aluno deverá encontrar as coordenadas de $\overrightarrow{AD}$, calculando $D - A$. Para encontrar as coordenadas de $\overrightarrow{FG}$, ele poderá proceder de duas maneiras: ou copia as de $\overrightarrow{AD}$, caso tenha percebido na figura que eles representam o mesmo vetor; ou ele fará os cálculos de $G - F$ e, chegando nas mesmas coordenadas, talvez ele volte a observar a figura para se certificar de que representam o mesmo vetor.

Esta atividade também está reforçando a idéia de que um vetor pode ser representado com origem em qualquer ponto do espaço e não necessariamente em O.

4.2.2. Aplicação da sessão 2

A população que participou desta sessão é a mesma da sessão 1.

Aplicamos em 02 de outubro de 2001. Estavam presentes a pesquisadora e as professoras de cada turma.

Falamos sobre os resultados da sessão anterior; quantas duplas e quais delas atingiram o nosso objetivo, principalmente na atividade 5. Pedimos que, na medida do possível, formassem as mesmas duplas da sessão anterior, pois aquelas que tiveram sucesso na atividade 5, poderiam não fazer a atividade 6 e começar pela atividade 7. A maioria das duplas se manteve. Alguns alunos não se lembraram do número da dupla e, como tínhamos as resoluções dos alunos daquela sessão, mostramos a eles de modo que pudessem encontrar as suas e então conservar o mesmo número. Numeramos a partir de 22, duas duplas de alunos que não participaram da sessão anterior e, estas iniciaram a sessão pela atividade 6.

A participação dos alunos foi bastante satisfatória. Estavam interessados e concentrados nas resoluções.

Entregamos todas as atividades de uma vez, com as folhas grampeadas.

Iniciamos às 9 h e 20 min e encerramos às 10 h e 50 min. Após 40 minutos do início, uma dupla entregou o material com todas as atividades resolvidas.

Estavam presentes 34 alunos, ou seja, 17 duplas.

Seis duplas que participaram da sessão 1, não participaram da sessão 2.

4.2.3. Análise a posteriori da sessáo 2

<u>Atividade 6:</u>

Cinco duplas foram dispensadas de fazer esta atividade. Das doze duplas restantes, oito fizeram corretamente. Três duplas marcaram outro ponto e não o ponto B, pois a cota era maior que 3 (figura 37). A dupla 3 traçou dois vetores, sendo que nenhum deles é o correto (figura 38).

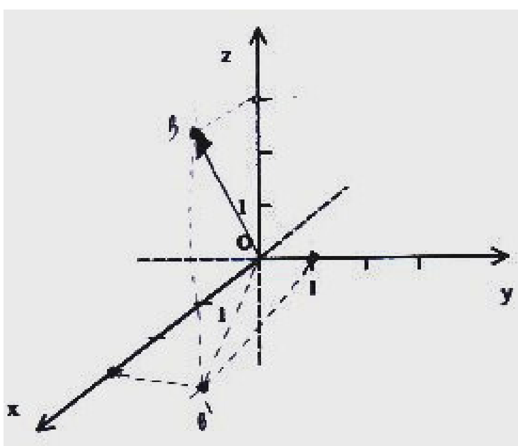


figura 37

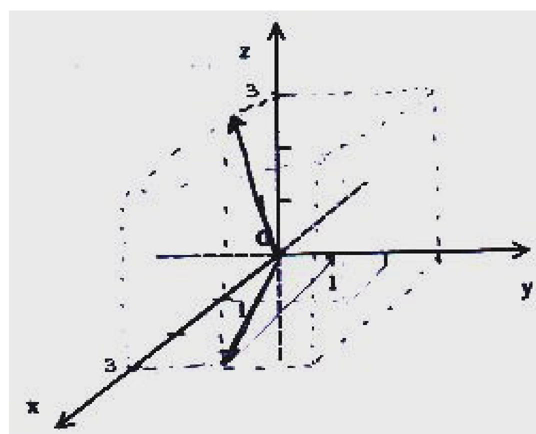


figura 38

<u>Atividade 7:</u>

Item **a**: Uma dupla escreveu $\overrightarrow{OC} = (3,-1,2)$, em vez de $\overrightarrow{OC} = (-3,-1,2)$. A dupla 15 escreveu $\overrightarrow{OC} = (x,y,z)$.

Item **b**: Onze duplas fizeram corretamente. Quatros duplas marcaram outro ponto e não o D, pois a cota era diferente de 4 (figura 39). A dupla 15 traçou um vetor sem traçar nenhuma linha auxiliar. Novamente a dupla 3 traçou dois vetores, sendo que nenhum deles é o correto.

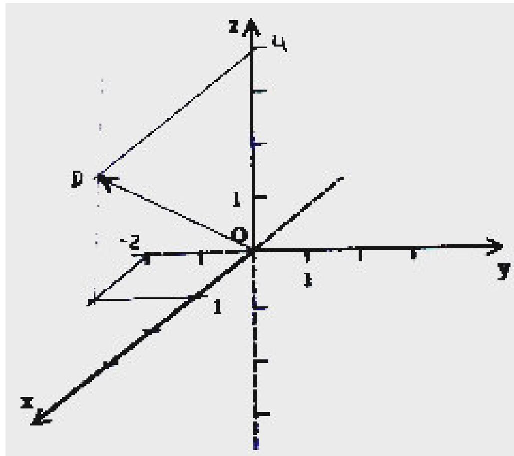


figura 39

Atividade 8:

Item **a**: Uma dupla escreveu $\overrightarrow{OE} = (-1,2,3)$, em vez de $\overrightarrow{OE} = (-1,2,-3)$. Outra dupla escreveu $\overrightarrow{OE} = (-3,-1,2)$. A dupla 15 escreveu $\overrightarrow{OE} = (x,y,z)$.

Item **b**: Dez duplas fizeram corretamente. Uma dupla marcou o ponto F com cota 2, em vez de –2. Outra dupla marcou outro ponto e não o F, pois a ordenada era maior que 2. Uma outra dupla marcou o ponto como se os eixos estivessem na posição das atividades anteriores, ou seja, marcou o ponto (2,-2,1) em vez de (1,2,-2) (figura 40). Quatro duplas (duas delas: 3 e 15) também não tiveram sucesso neste item **b**.

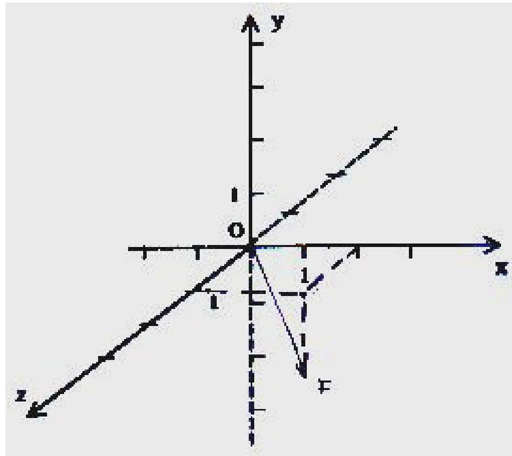


figura 40

Atividade 9:

Item **a**: A dupla 15 escreveu $\overrightarrow{OG} = (1,-3,3)$, em vez de $\overrightarrow{OG} = (1,-2,3)$.

Item **b:** Doze duplas fizeram corretamente. Quatro duplas (duas delas; 3 e 15) não tiveram sucesso. Uma dupla marcou outro ponto e não H, pois a cota era maior que 3.

Atividade 10:

Nos itens **a**, **b** e **c** nenhuma dupla teve dificuldade, exceto a dupla 15.

No item **d**, observamos as seguintes respostas (só a dupla 3 não respondeu):

- São paralelos.
- Eles têm mesma direção e mesmo sentido.
- Eles têm mesmo comprimento, mesma direção e mesmo sentido.
- Eles têm as mesmas coordenadas.
- São vetores iguais.

Podemos considerar que as duplas que escreveram uma das três ultimas respostas, entendem que os registros gráficos de $\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{JK}$ e $\overrightarrow{LM}$ representam o mesmo vetor.

Atividade 11:

Cinco duplas não acertaram as coordenadas dos pontos pedidos e conseqüentemente erraram as coordenadas dos vetores pedidos.

Todas as outras duplas fizeram corretamente. Destas, cinco duplas chegaram nas coordenadas de todos os vetores pedidos, fazendo “extremidade menos origem” como mostramos na figura 41.

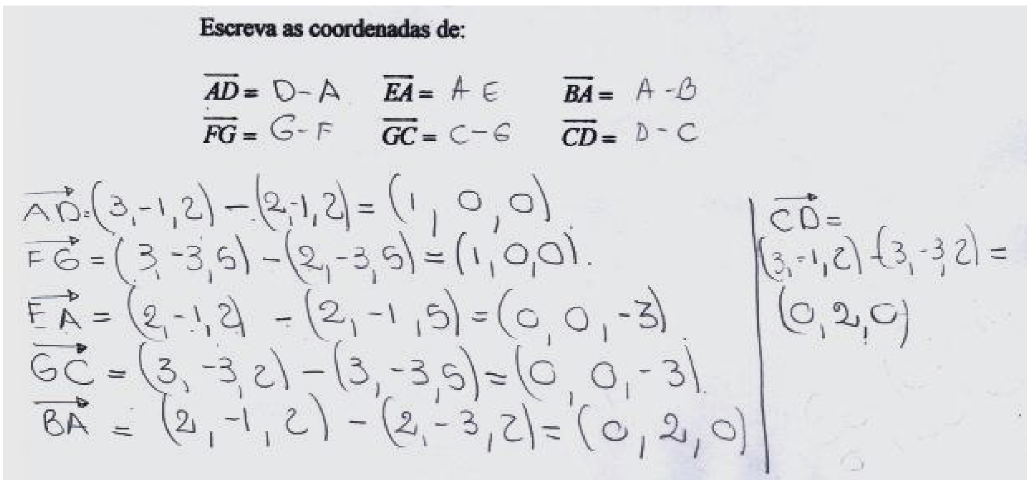


figura 41

Síntese dos resultados da sessão 2

Na tabela abaixo, usamos RN para registro das n-uplas e RG para registro gráfico. Observamos os seguintes resultados:

	Total de duplas	Número de duplas com resolução correta	Tipo de conversão
Ativ. 6	12	8	RN → RG
Ativ. 7 item a	17	15	RG → RN
Ativ. 7 item b	17	11	RN → RG
Ativ. 8 item a	17	14	RG → RN
Ativ. 8 item b	17	10	RN → RG
Ativ. 9 item a	17	16	RG → RN
Ativ. 9 item b	17	12	RN → RG
Ativ. 10	17	10	RN → RG
Ativ. 11	17	12	RG → RN

Observamos que o número de acertos, quando se tem a conversão do registro das n-uplas para o registro gráfico é sempre menor.

Vamos retomar e ampliar a tabela da página 69, quando comparamos resultados da atividade 5 item **b** da sessão 1, com o exercício 4 item **d** do teste diagnóstico. Nesses exercícios tínhamos este mesmo tipo de conversão.

	Tentaram resolver	**Resolveram corretamente**	**Porcentagem de acerto**
Exerc. 4 item d	9	3	33,3%
Ativ. 5 item b	17	8	47%
Ativ. 6 item b	12	8	66,6%
Ativ. 7 item b	17	11	64,7%
Ativ. 8 item b	17	10	58,8%
Ativ. 9 item b	17	12	70,5%

Observamos que houve uma evolução no que se refere a passagem do registro das n-uplas para o registro gráfico.

Além disso, observamos nas atividades 10 e 11 que o aluno, tendo representantes distintos no registro gráfico, reconhece o mesmo vetor. Foi descaracterizado o fato de que um representante gráfico de um vetor deva ter origem em O.

5. CONCLUSÃO

Atestando nossa hipótese de pesquisa, constatamos que os alunos investigados tinham dificuldades sobre representação de vetor.

Estas dificuldades foram reveladas nos resultados de um teste aplicado numa população de alunos, de cursos da área de exatas. O teste continha questões sobre conversões de registros de vetor do plano e do espaço.

Os resultados do teste indicaram que a maior dificuldade dos alunos, está na conversão em que um dos registros envolvidos é o registro gráfico. Indicaram também que a dificuldade é maior quando este registro é o de chegada.

Para enfrentar nossa problemática de pesquisa, tomamos por base as dificuldades evidenciadas nos resultados do teste, concebemos, realizamos, observamos e analisamos uma seqüência didática. Esta seqüência foi norteada pelo quadro teórico assumido e, teve procedimentos de uma engenharia didática. O objetivo foi o de investigar se uma seqüência didática com tal característica, propiciaria evolução do funcionamento representacional dos sujeitos no que concerne ao conceito de vetor.

A aplicação da seqüência e sua análise indicaram ser possível interferir por meio de ensino, na evolução do funcionamento representacional dos alunos.

Já na primeira sessão desta seqüência, houve evolução no que se refere à conversão do registro das n-uplas para o registro gráfico. Com a segunda, mesmo tendo sido introduzidas novas propostas com relação a primeira sessão, como por exemplo, coordenadas com características diferentes, eixos coordenados com posições distintas, os alunos foram capazes de efetuar conversões. Nesta segunda sessão, os alunos puderam reconhecer um vetor tendo sido apresentado através de diferentes registros gráficos, atingindo um objetivo da seqüência, qual seja, descaracterizar a concepção de que um vetor deva ser representado graficamente sempre com origem em O (origem do sistema de coordenadas).

Para finalizar pensamos que, com esta pesquisa, pudemos colaborar com outras investigações sobre o tema, na medida em que detectamos que é preciso levar em conta registros de representação de vetor, quando se concebe um ensino que considera dificuldades apresentadas pelos alunos.

Referências Bibliográficas

ARTIGUE, M. 1992. Didactic engineering. *Recherches en didactique des Mathématiques*, Paris, Selected papers (vol. esp.), pp.41-66.

BITTAR, M. 1998. *Lês vecteurs dans l'enseignement secondaire.* Dissertação de doutorado, Université Joseph Fourier. Grenoble 1.

BOULOS, P., OLIVEIRA, I. 1986. *Geometria analítica, um tratamento vetorial.* São Paulo: Mc Graw Hill.

CAVALCA, A. 1997. *Espaço e representação gráfica: Visualização e Interpretação*. Dissertação de mestrado, PUC-SP.

DAMM, R. 1999. Registros de Representação. In: MACHADO, S. D. A. *Educação Matemática: uma introdução*. São Paulo: EDUC, pp. 135-153.

DUVAL, R. 1995. *Sémiosis et pensée humaine*. Suisse: Editions scientifiques européennes, pp.1-14.

DUVAL, R. 1999. *Registros de representação e Educação Matemática.* Curso na PUC-SP.

MACHADO, S. D. A. 1999. Engenharia Didática In: MACHADO, S. D. A. *Educação Matemática: uma introdução*. São Paulo: EDUC, pp. 197-212.

MUNHOZ, M 1999. *A impregnação do sentido cotidiano de termos geométricos no ensino/aprendizagem da Geometria Analítica.* Dissertação de mestrado, PUC-SP.

PAVLOPOULOU, K. 1994. *Propédeutique de L'Algèbre Linéaire: La Coordination des registres de représentation sémiotique*. Dissertação de doutorado, Institut de Recherche mathémathique avancée. Strasbourg.

PRESSIAT, A. 1999. *Aspects épistémologiques et didactiques de la liaison "points-vecteurs".* Dissertação de doutorado, Université de Paris VII. Denis Diderot.

ROBERT, A. 1992. Problèmes methodologiques en didactique des Mathématiques. *Recherches en didactique des Mathématiques,* Paris, Vol. 12, nº 1, pp.33-58.

WATANABE, R., MACHADO, T. 1996. *Vetores e geometria analítica* . 5ª edição. São Paulo.

ANEXOS

Anexo I - Teste diagnóstico

Exercício 1: A) Sejam $\vec{v} = (4, 3)$ e $\vec{w} = (1\ ,\ 2)$ dois vetores do plano. Determine as coordenadas do vetor $\vec{u}$ tal que:

a) $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$

b) $\vec{u} = \vec{v} - \vec{w}$

c) $\vec{u} = 2\vec{v} - 3\vec{w}$

B) Sejam $\vec{v} = (2{,}3{,}4)$ e $\vec{w} = (0{,}1{,}2)$ dois vetores do espaço. Determine as coordenadas do vetor $\vec{u}$ tal que:

a) $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$

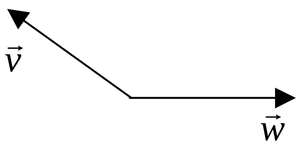
b) $\vec{u} = \vec{v} - \vec{w}$

c) $\vec{u} = 2\vec{v} - 3\vec{w}$

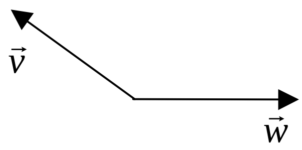
Anexo I - Teste diagnóstico

Exercício 2: São dados dois vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ do plano. Trace o vetor $\vec{u}$ tal que:

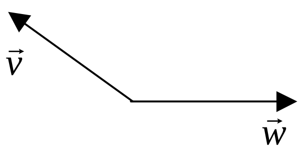
a) $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$



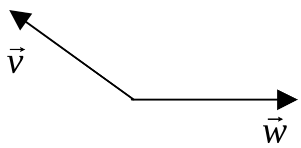
b) $\vec{u} = \vec{v} - \vec{w}$



c) $\vec{u} = 2\vec{v}$



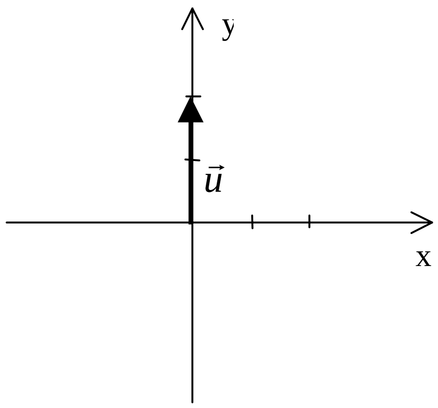
d) $\vec{u} = -3\vec{w}$



Anexo I - Teste diagnóstico

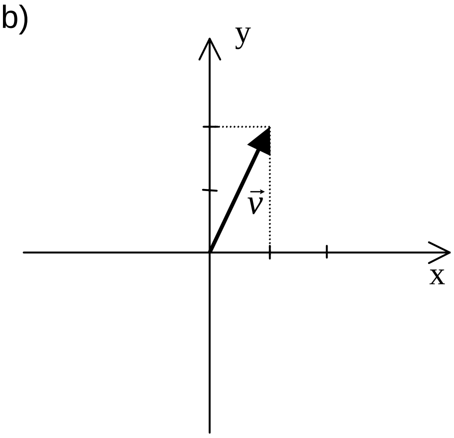
Exercício 3: Escreva as coordenadas dos vetores indicados nas figuras.

a)



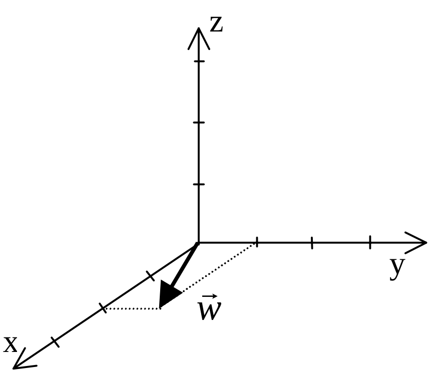
$\vec{u} =$

b)



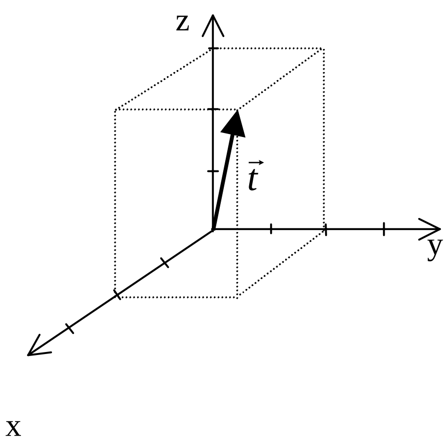
$\vec{v} =$

c)



$\vec{w} =$

d)

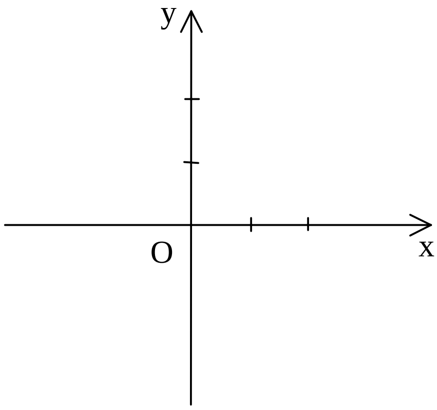


$\vec{t} =$

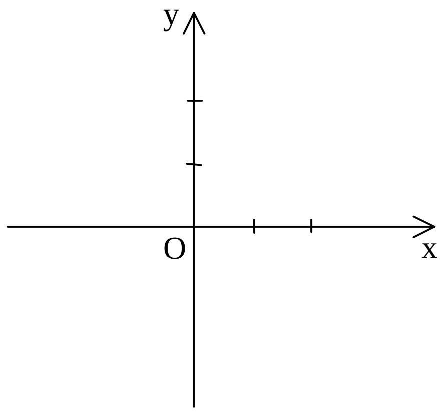
Anexo I - Teste diagnóstico

Exercício 4: São dados os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ e $\vec{z}$. Represente-os (com origem em O) nos sistemas de eixos coordenados.

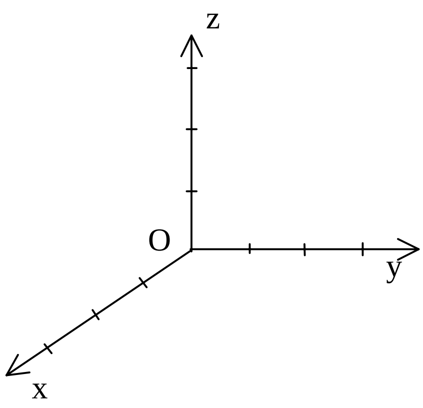
a) $\vec{u}$ = (2,0)



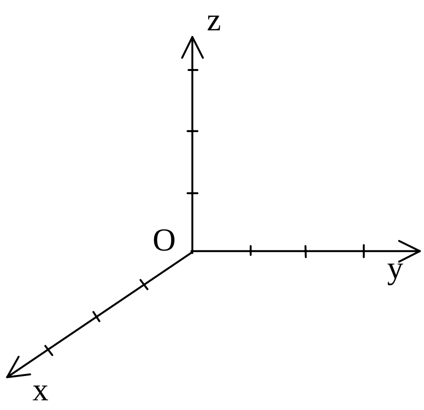
b) $\vec{v}$ = (2,1)



c) $\vec{w}$ = (0,2,1)



d) $\vec{t}$ = (1,2,3)



Anexo I - Teste diagnóstico

Exercício 5: A) Os seguintes vetores são dados em relação a uma base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$do espaço. Escreva cada vetor como combinação linear de $\vec{i},\vec{j}\ e\ \vec{k}$.

a) $\vec{u}=(1,-2,3)$

b) $\vec{v}=(2,0,4)$

B) Agora os vetores são dados como combinação linear dos vetores da base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Escreva cada um como uma terna de coordenadas, em relação a essa base.

a) $\vec{u}=-3\vec{i}+4\vec{j}+5\vec{k}$

b) $\vec{v}=2\vec{j}+\vec{k}$

Exercício 6: Dado o vetor $\vec{u}=(2,4,8)$.

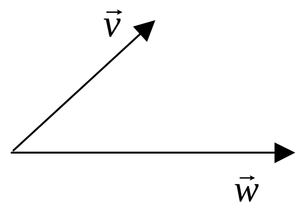
a) Escreva as coordenadas de um vetor $\vec{v}$ que tem o dobro do comprimento do vetor $\vec{u}$ e com mesmo sentido de $\vec{u}$.

b) Escreva as coordenadas de um vetor $\vec{w}$ que tem a metade do comprimento de $\vec{u}$ e de sentido contrário ao de $\vec{u}$.

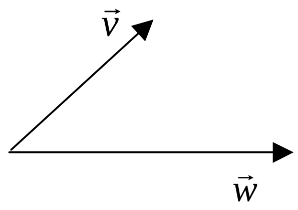
Anexo I - Teste diagnóstico

Exercício 7: São dados dois vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ do plano.

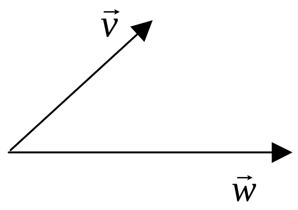
a) Trace um vetor $\vec{a}$ que é a soma de $\vec{v}$ com $\vec{w}$.



b) Trace um vetor $\vec{b}$ que é igual a soma do vetor $\vec{v}$ com o oposto do vetor $\vec{w}$.



c) Trace um vetor $\vec{c}$ que é igual a soma do dobro do vetor $\vec{v}$ com o oposto do dobro do vetor $\vec{w}$.



Anexo II - Sessão 1

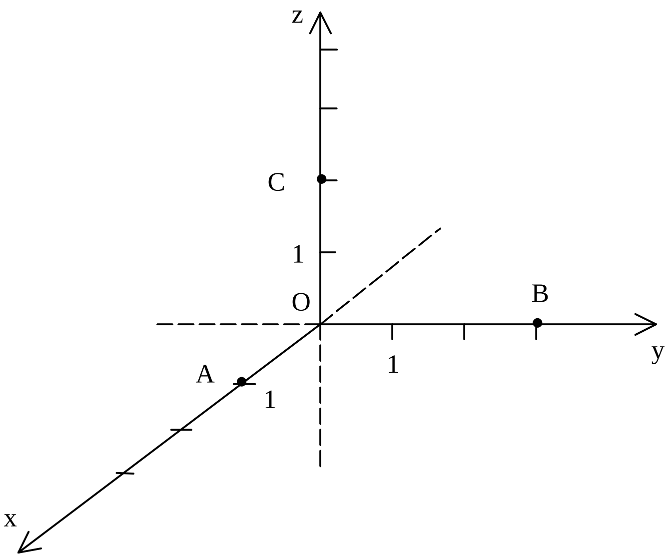
Atividade 1 **Dupla nº** ___________

a) Na figura abaixo, observe que o ponto A tem coordenadas (1,0,0). Dê as coordenadas dos pontos B e C.

$A = (1,0,0)$

$B =$

$C =$

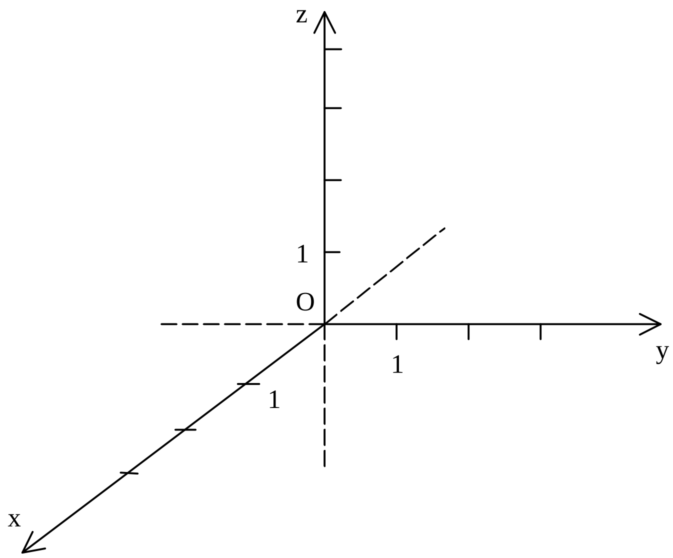


b) Represente os seguintes pontos, no sistema de coordenadas abaixo:

$D = (2,0,0)$

$E = (0,1,0)$

$F = (0,0,4)$

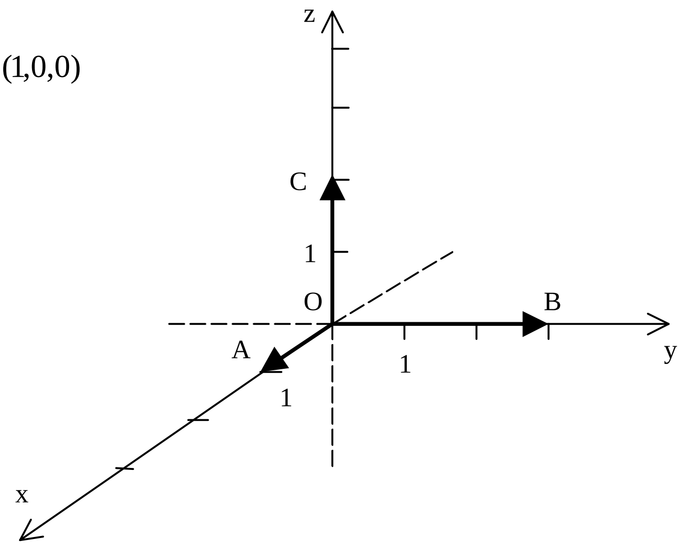


c) Na figura abaixo o vetor $\overrightarrow{OA}$ tem coordenadas (1,0,0), pois sabemos que $\overrightarrow{OA} = A - O$. Dê as coordenadas dos vetores $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$ representados na figura abaixo.

$\overrightarrow{OA} = A - O = (1,0,0) - (0,0,0) = (1,0,0)$

$\overrightarrow{OB} =$

$\overrightarrow{OC} =$

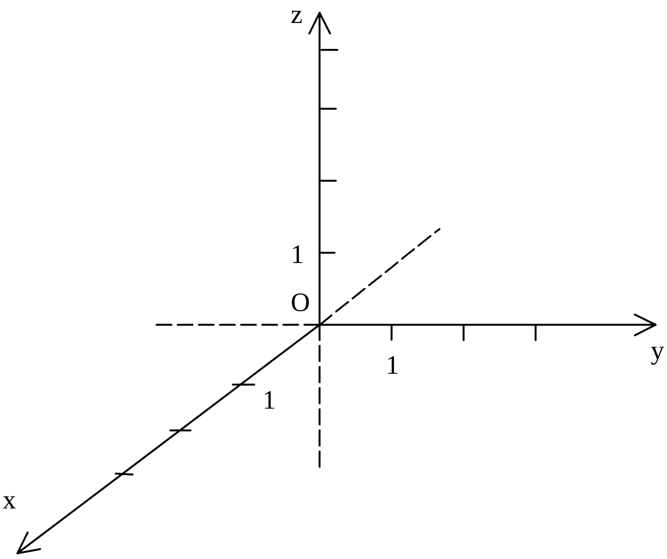


d) Represente os seguintes vetores no sistema de coordenadas abaixo.

$\overrightarrow{OD} = (2,0,0)$

$\overrightarrow{OE} = (0,1,0)$

$\overrightarrow{OF} = (0,0,4)$



Lembramos que, quando um representante de um vetor tem origem em O, as coordenadas deste vetor coincidem com as coordenadas do ponto extremidade daquele representante.

Anexo II - Sessão 1

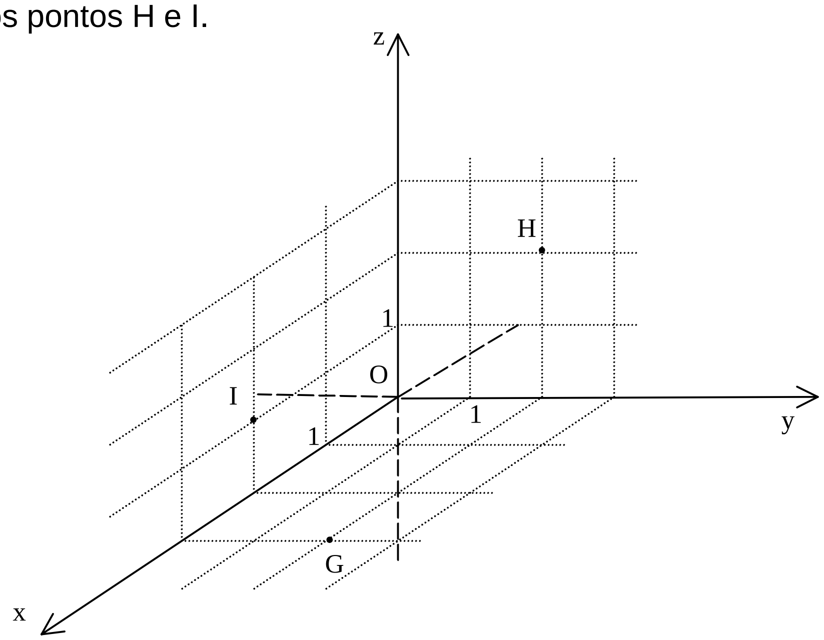
Atividade 2 **Dupla nº** ___________

a) Na figura abaixo, observe que o ponto G tem coordenadas (3,2,0). Dê as coordenadas dos pontos H e I.

$G = (3,2,0)$

$H =$

$I =$

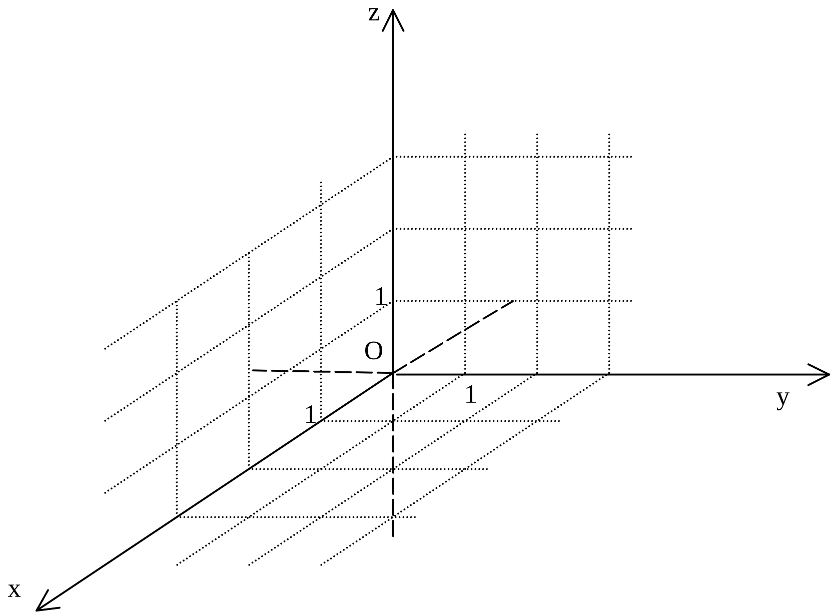


b) Represente os seguintes pontos, no sistema de coordenadas abaixo:

$J = (1,3,0)$

$K = (0,2,3)$

$L = (1,0,2)$

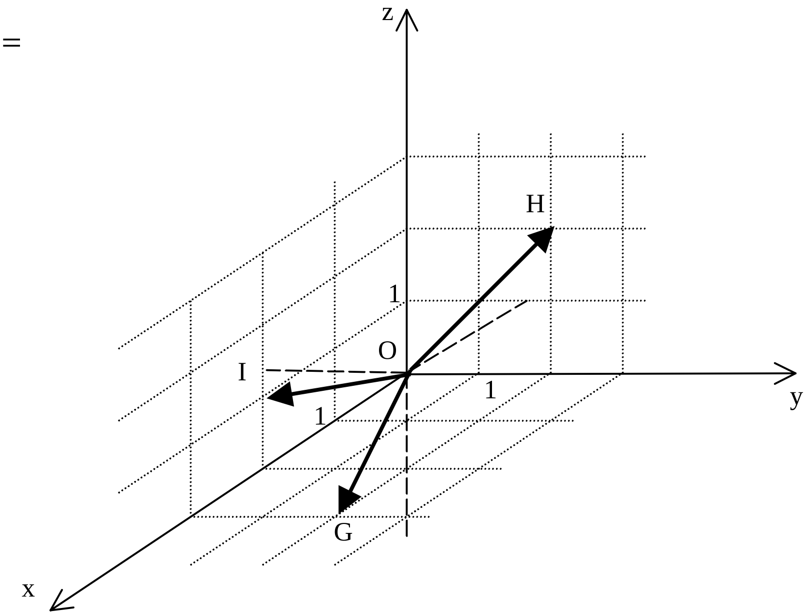


c) Dê as coordenadas dos vetores representados na figura abaixo.

$\overrightarrow{OG} = G - O =$

$\overrightarrow{OH} =$

$\overrightarrow{OI} =$

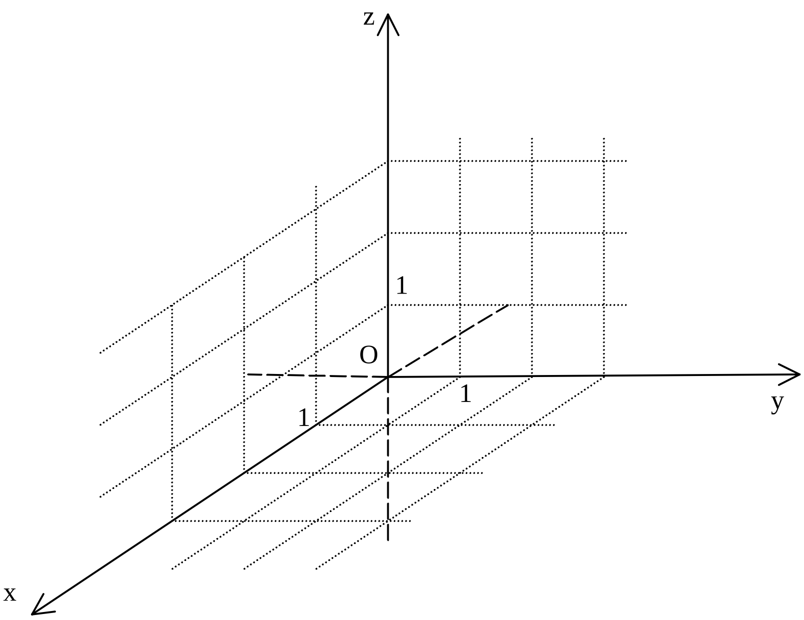


d) Represente os seguintes vetores no sistema de coordenadas abaixo.

$\overrightarrow{OJ} = (1,3,0)$

$\overrightarrow{OK} = (0,2,3)$

$\overrightarrow{OL} = (1,0,2)$



Anexo II - Sessão 1

Atividade 3 **Dupla nº** ___________

Represente os seguintes pontos, no sistema de coordenadas abaixo.

$O = (0,0,0)$

$M = (3,0,0)$

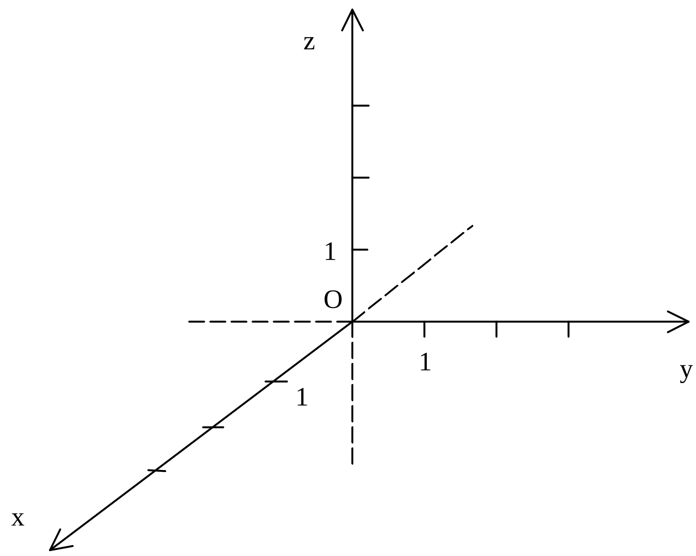
$N = (0,1,0)$

$P = (0,0,2)$

$Q = (3,1,0)$

$R = (3,0,2)$

$S = (0,1,2)$



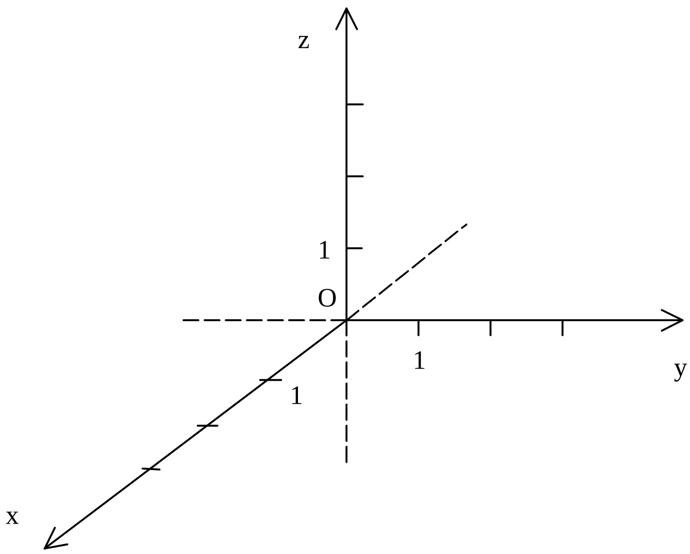
Construa o paralelepípedo que tem vértices nestes pontos.

Agora, nesta figura, marque o ponto $T = (3,1,2)$.

Anexo II - Sessão 1

Atividade 4 **Dupla nº** ___________

Marque o ponto $Q = (3,1,0)$ no sistema de coordenadas abaixo. Por esse ponto, trace uma paralela ao eixo Oz e marque o ponto U, a partir de Q, duas unidades para cima.



Quais são as coordenadas de U?

Compare o ponto U com o ponto T da atividade anterior.
O que você pode dizer sobre eles?

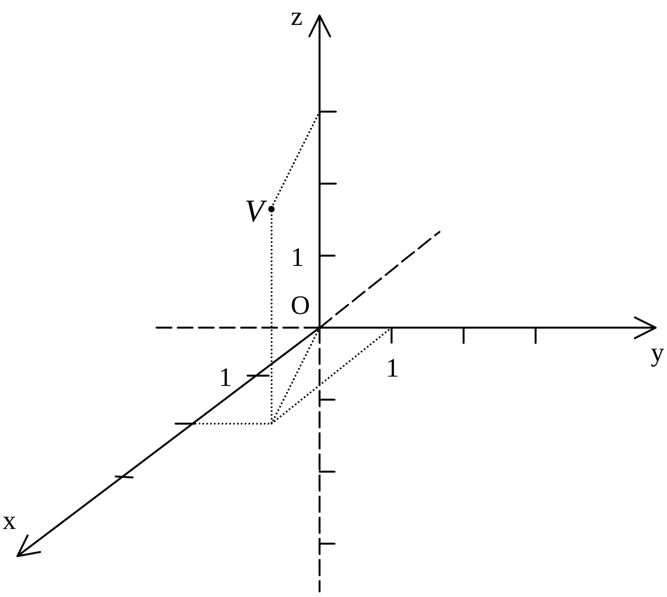
Anexo II - Sessão 1

Atividade 5 **Dupla nº** ___________

a) No sistema Oxyz, dê as coordenadas dos pontos V e W. Quais as coordenadas dos vetores $\overrightarrow{OV}$ e $\overrightarrow{OW}$?

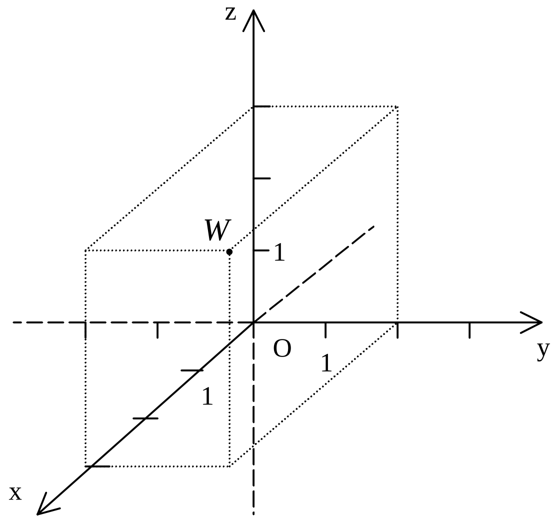
$V =$

$\overrightarrow{OV} =$

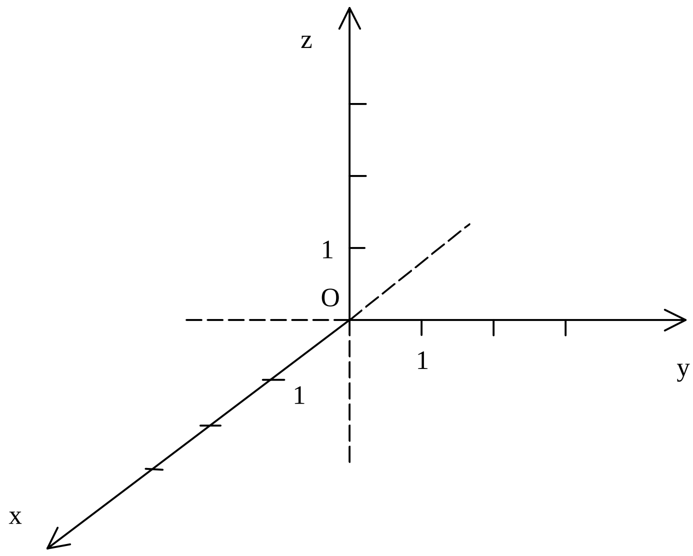


$W =$

$\overrightarrow{OW} =$



b) Represente o ponto $A = (1,2,3)$ no sistema abaixo. Em seguida, nesta mesma figura represente o vetor $\overrightarrow{OA}$.



Anexo III - Sessão 2

Vocês participaram da nossa sessão 1 no dia 04 de setembro?

Sim ☐ Não ☐

Se participou, você formava dupla com este mesmo colega?

Sim ☐ Não ☐

Se afirmativo qual era o número de sua dupla? __________

Se vocês eram uma das duplas 6, 7, 8, 10, 11, 16, 19 ou 20 vá direto para a atividade 7. Caso contrário comece da atividade 6.

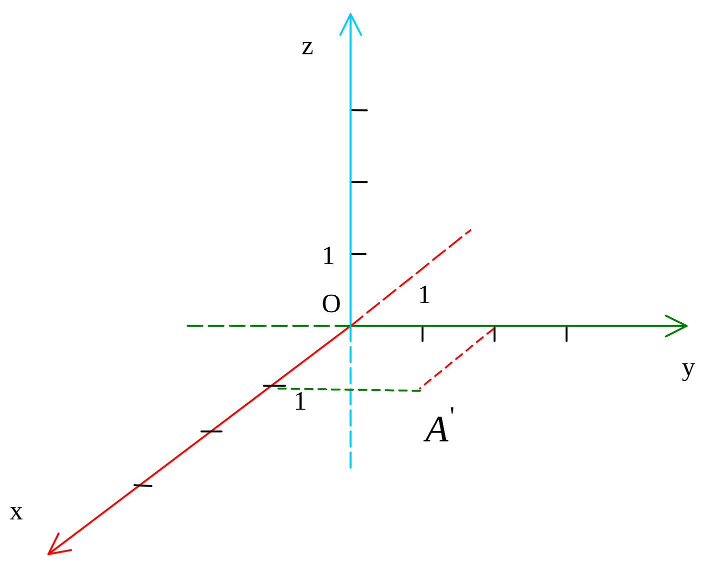
Atividade 6 **Dupla nº** __________

Vamos retomar a atividade 5, quando no item b, tínhamos que representar o vetor $\overrightarrow{OA} = (1,2,3)$.

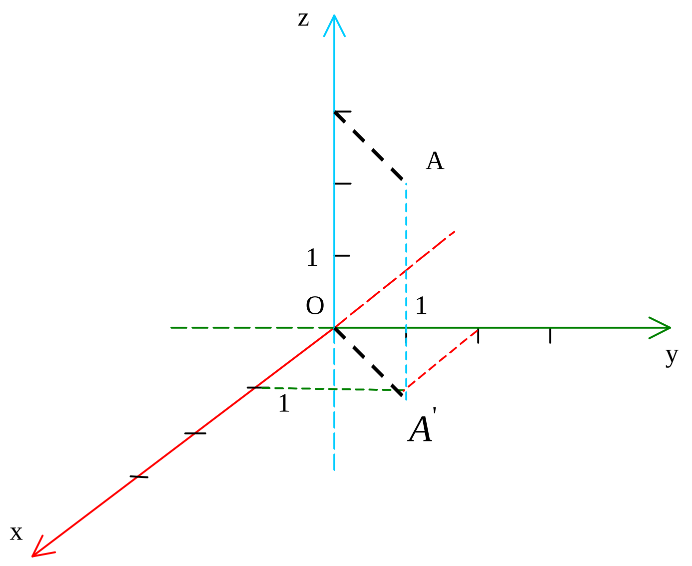
Vamos representá-lo, no sistema Oxyz, utilizando duas estratégias diferentes.

A primeira estratégia é exatamente o que trabalhamos na atividade 4. Vamos começar marcando o ponto $A' = (1,2,0)$ no plano xOy.

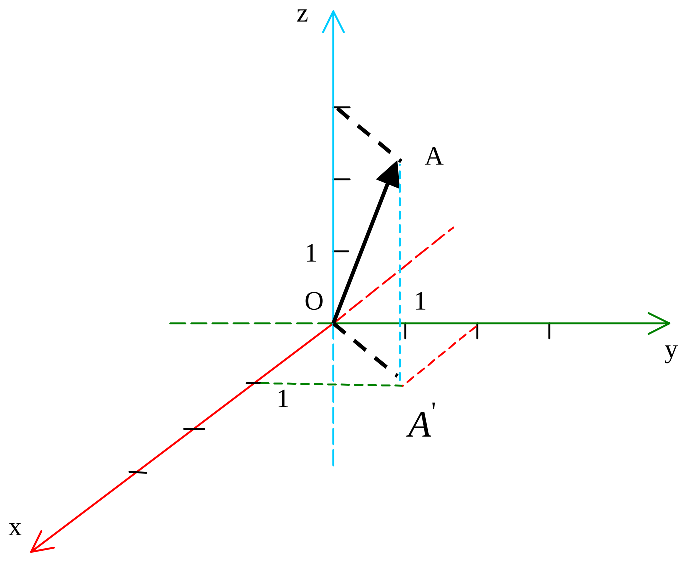
(Observe o paralelismo entre os segmentos da mesma cor)



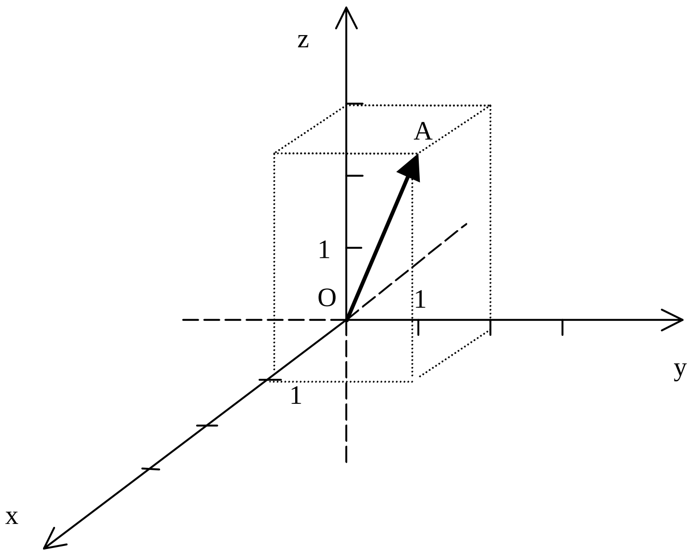
Em seguida, a partir de $A^{'}$ vamos “subir” 3 unidades e marcar o ponto $A=(1,2,3)$. (Observe o paralelismo entre os segmentos da mesma cor)



Agora podemos traçar o vetor $\overrightarrow{OA}=(1,2,3)$.

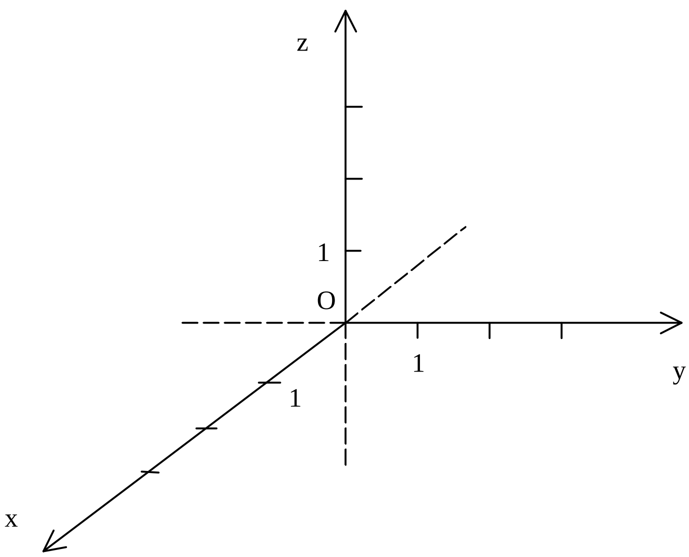


Usando outra estratégia (que trabalhamos na atividade 3), vamos representar o mesmo vetor $\overrightarrow{OA} = (1,2,3)$, desenhando um paralelepípedo de modo que um de seus vértices é o ponto A.



Observe os pontos (1,0,0), (0,2,0) e (0,0,3) marcados nos eixos. Estes pontos também são vértices do paralelepípedo.

Agora represente o vetor $\overrightarrow{OB} = (3,1,3)$ usando qualquer uma das estratégias acima.



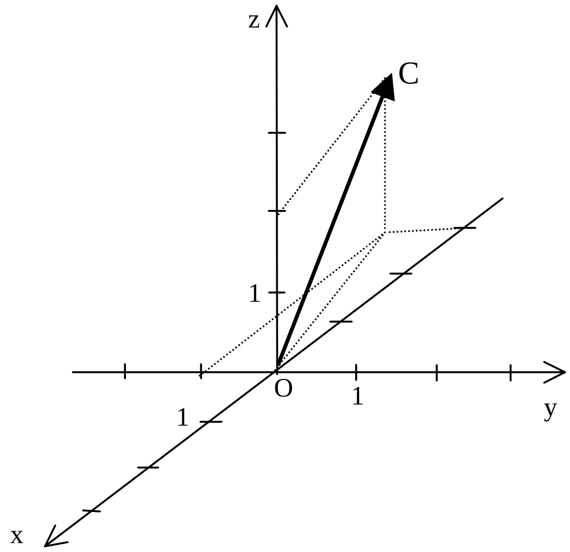
Anexo III - Sessão 2

Atividade 7 **Dupla nº** ___________

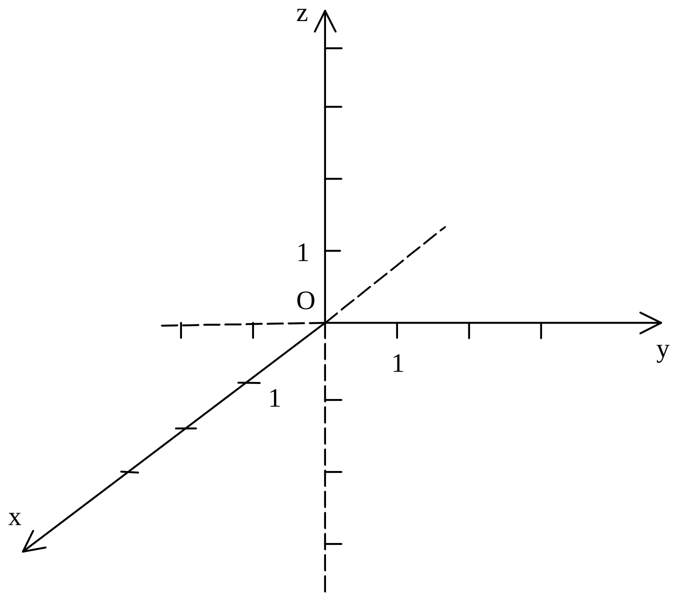
No sistema Oxyz:

a) quais as coordenadas do vetor representado na figura a seguir?

$\overrightarrow{OC} =$



b) represente o vetor $\overrightarrow{OD} = (1,-2,4)$.



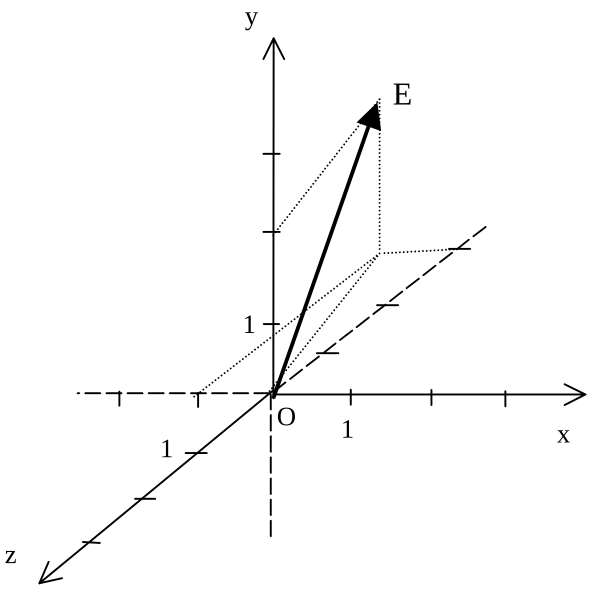
Anexo III - Sessão 2

Atividade 8 **Dupla nº** ___________

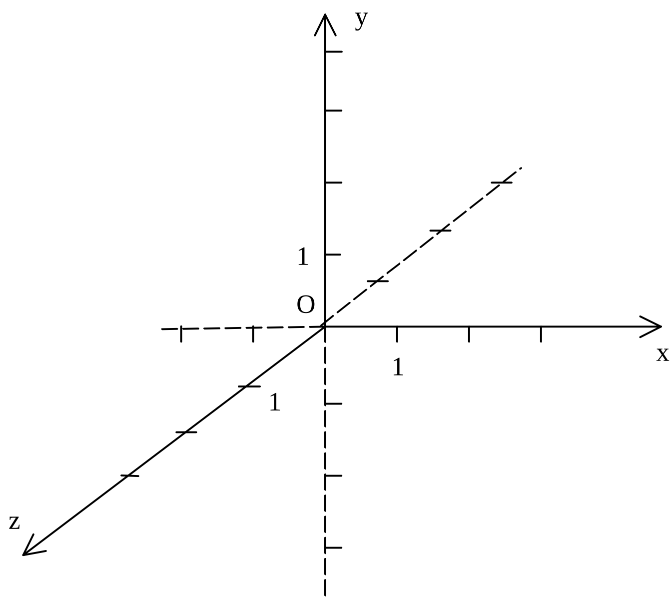
Preste atenção na posição dos eixos do sistema Oxyz.

a) Quais as coordenadas do vetor representado na figura a seguir?

$\overrightarrow{OE} =$



b) Represente o vetor $\overrightarrow{OF} = (1,2,-2)$.



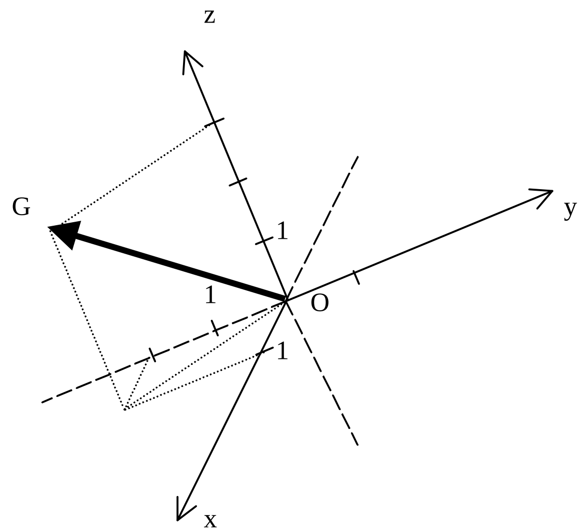
Anexo III - Sessão 2

Atividade 9 **Dupla nº** ___________

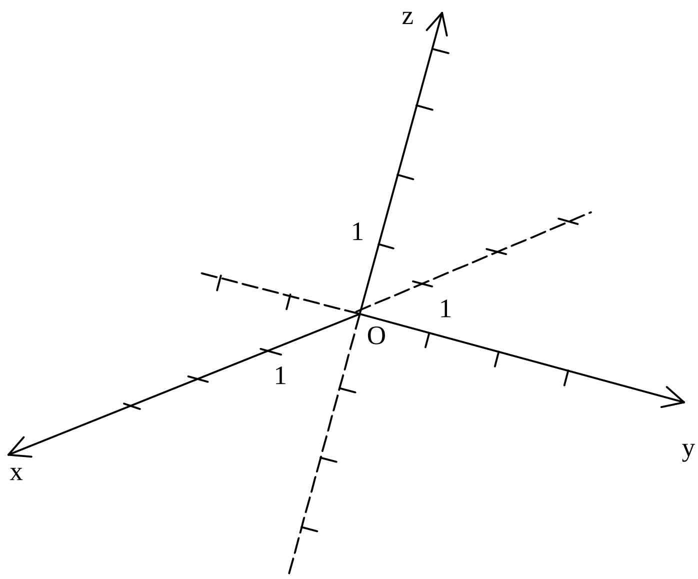
No sistema Oxyz:

a) quais as coordenadas do vetor representado na figura a seguir?

$\overrightarrow{OG} =$



c) represente o vetor $\overrightarrow{OH} = (-2,2,3)$.



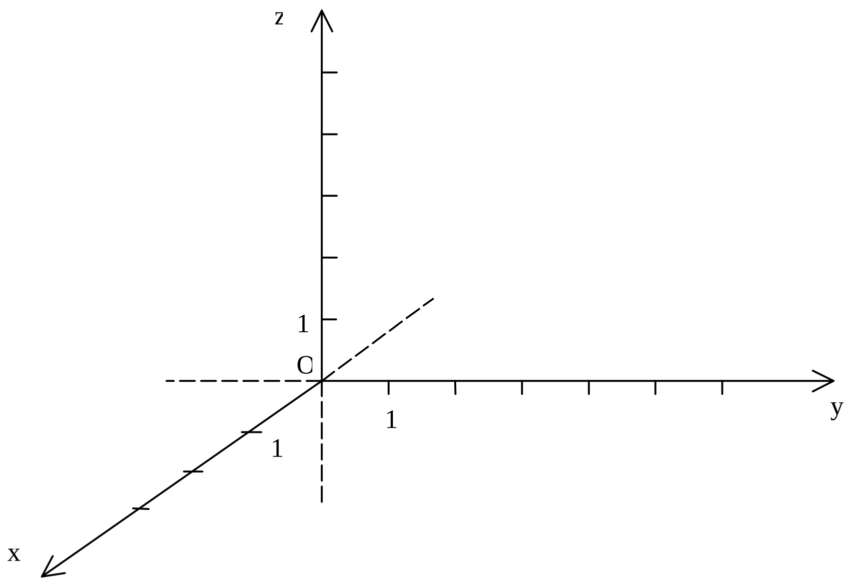
Anexo III - Sessão 2

Atividade 10 **Dupla nº** ___________

Um vetor nem sempre precisa ser representado graficamente, com a origem em O.

a) No sistema Oxyz, represente os pontos:

$$I = (0,2,2),\ J = (0,0,2),\ K = (0,2,4),\ L = (0,4,2)\ e\ M = (0,6,4).$$



b) Nesta mesma figura represente: $\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{JK}$ e $\overrightarrow{LM}$.

c) Escreva as coordenadas de:

$\overrightarrow{OI} = I - O =$

$\overrightarrow{JK} = K - J =$

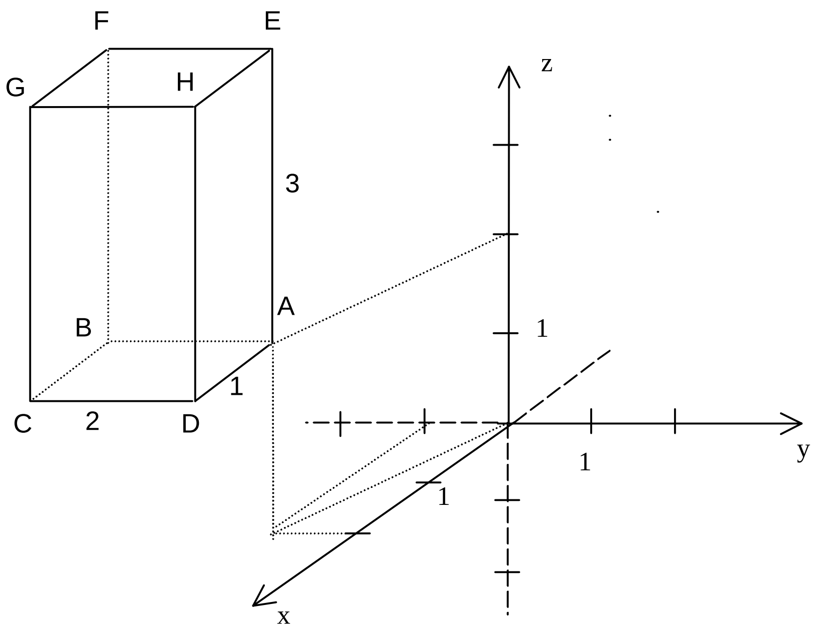
$\overrightarrow{LM} = M - L =$

d) O que você pode dizer sobre estes vetores?

Anexo III - Sessão 2

Atividade 11 **Dupla nº** ___________

Na figura abaixo, temos um paralelepípedo retângulo de arestas paralelas aos eixos coordenados e de comprimentos 2, 1 e 3. Determine as coordenadas, no sistema Oxyz, dos outros vértices deste sólido, sabendo-se que A= (2,-1,2).



B=(, ,) F=(, ,)

C=(, ,) G=(, ,)

D=(, ,) H=(, ,)

E=(, ,)

Escreva as coordenadas dos seguintes vetores:

$\overrightarrow{AD} =$ $\overrightarrow{EA} =$ $\overrightarrow{BA} =$

$\overrightarrow{FG} =$ $\overrightarrow{GC} =$ $\overrightarrow{CD} =$