INÊS ESTEVES

INVESTIGANDO OS FATORES QUE INFLUENCIAM O RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO EM ADOLESCENTES DE 14 ANOS – 8ª SÉRIE DO ENSINO FUNDAMENTAL

Mestrado em EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PUC – SP
2001

INÊS ESTEVES

INVESTIGANDO OS FATORES QUE INFLUENCIAM O RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO EM ADOLESCENTES DE 14 ANOS – 8 ª SÉRIE DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada com exigência parcial para a obtenção do título de MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA à Pontifica Universidade Católica de São Paulo, sob orientação da Professora Doutora Sandra M. P. Magina.

PUC – SP
2001

AGRADECIMENTOS

A Profª. Drª. Sandra M. P. Magina, não só pela orientação firme e segura como também pela amizade, paciência e entusiasmo, que transformaram um projeto de pesquisa em realidade.

Ao Prof. Dr. Jorge T. da Rocha Falcão e à Profª Drª Tânia M. M. Campos, pelas sugestões, comentários e críticas que tanto contribuíram para a elaboração e evolução desta dissertação.

A todos os professores, funcionários e colegas do curso de Pós-graduação em Educação Matemática da PUC-SP, pelo incentivo e apoio oferecidos de diversas maneiras.

Em especial, à Professora Maria Inez R. Miguel que, por meio de sua longa experiência profissional no ensino de análise combinatória, teve uma participação valiosa na montagem tanto dos instrumentos diagnósticos quanto da nossa seqüência de ensino. Sabemos que suas inúmeras leituras foram sempre acompanhadas de críticas e sugestões, o que enriqueceu em muito o nosso trabalho.

À Direção do colégio "Lusíada" , por autorizar a aplicação da seqüência de ensino, e à Profª Santa Elza Pivatto, por ceder suas aulas para tal aplicação. Sabemos que o sucesso da nossa pesquisa, cujo índice de desistência foi mínimo, é devido à abertura que a escola nos deu.

Aos alunos do colégio "Lusíada" que, com responsabilidade e carinho, demonstraram interesse em todo o processo. Para os alunos da 8ª série do Ensino Fundamental, os quais infelizmente não podem ser citados um a um, por serem muitos, um agradecimento especial por participarem de todos os encontros extra aula, sendo que muitas vezes deixaram o lazer de lado, assumindo este compromisso até o final. A todos esses alunos, nosso carinho e respeito.

À Universidade Santa Cecília, pela ajuda de custo que permitiu uma maior dedicação ao programa de Pós-Graduação.

À amiga Cileda de Queiroz Coutinho, pela amizade, companheirismo e valioso auxílio durante este processo, enviando valiosos textos para nossa revisão de literatura e para nosso estudo histórico.

Ã amiga Ana Kalassa, pela sua amizade e pelo valioso auxílio durante este processo.

À minha família, especialmente meus pais, que não só durante todo este processo, mas em todos os momentos, me apoiaram, fornecendo auxílio e compreensão.

Ao meu marido Sergio, pela compreensão quanto às ausências e falhas como esposa e sobretudo por haver sempre participado e me apoiado em todos os momentos do trabalho.

A Deus, sem o qual nada é possível.

RESUMO

O objetivo desta pesquisa consistiu em estudar a aquisição e o desenvolvimento dos primeiros conceitos de análise combinatória em adolescentes de 14 anos de idade, cursando a última série do Ensino Fundamental.

Para tal, construímos uma seqüência de ensino, fundamentada em teorias psicológicas e educacionais, que parte de situações-problema através da contagem direta.

Trabalhamos com dois grupos: experimental e de referência. Estes se submeteram a um pré-teste antes de serem introduzidos nesse novo conceito, para, depois, estudarem o conceito de análise combinatória, segundo duas abordagens distintas. Enquanto o grupo experimental realizou o estudo através de uma seqüência de ensino elaborada por nós, o grupo de referência seguiu a abordagem tradicional apresentada pelos livros didáticos. Por fim, os dois grupos realizaram um pós-teste, cujos resultados foram analisados sob os seguintes pontos de vista: desempenho geral dos grupos e desempenho por itens, objetivo, indivíduo. Por fim, procedemos à análise do comportamento de três duplas do grupo experimental quanto a seus desempenhos ao longo do estudo.

Os resultados mostram que os alunos apresentaram dificuldade em resolver esses problemas. As principais causas de fracasso são referentes à confusão sobre a relevância da ordem, principalmente em problemas de combinação, falta de organização para enumerar os dados sistematicamente, dúvidas na identificação da operação aritmética equivalente e interpretação incorreta do problema, quando este apresenta mais de uma etapa.

ABSTRACT

The aim of this research was studying the acquisition and the development of the prime concepts about combinatory analyses among fourteen years old teenagers finishing the elementary school.

In order to do this, we developed a teaching sequence based on psychological and educational theories, which belong to problem-situations through the direct county.

We dealed with two groups: the experimental and the reference ones. These had done a previous test before beginning the new concept, and then studying the combinatory analyses based on two different approaches. While the experimental group did a study through a teaching sequence prepared by us, the reference group followed the traditional approach presented by didactic books. At the end both groups did a final test whose results were analyzed observing these points of view: general fulfilment of the groups and the fulfilment by items, targets and the individual one. At last, we proceeded the analyse of the behaviour among the three pairs of students from the experimental group based on their performances during the study.

The results showed that the students presented troubles solving these problems. The main faillure motives were about the misunderstanding of the order combination problems; lack of organization to number systematically the data, doubts about the identification of equivalent arithmetic species and the wrong interpretation of the problem when this presented more than one stage.

ÍNDICE

CAPÍTULO III: METODOLOGIA

CAPÍTULO IV: ANÁLISE DOS RESULTADOS

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABELAS

ÍNDICE DE QUADROS

ÍNDICE DE GRÁFICOS

INTRODUÇÃO

1.1 PROBLEMÁTICA E OBJETIVO

Nosso trabalho tem por objetivo estudar a aquisição e o desenvolvimento dos primeiros conceitos de análise combinatória em adolescentes de 14 anos de idade, cursando a 8ª série do Ensino Fundamental.

No papel de professor e em discussões com colegas da área, percebemos que existem dificuldades no processo de ensino e aprendizagem de tal conteúdo e, conseqüentemente, na formação de seu campo conceitual.

Entre essas dificuldades, coube destaque àquelas relativas à interpretação e distinção entre arranjo e combinação, o que faz com que os alunos não consigam desenvolver o problema ou desenvolvam-no de forma equivocada.

Nosso interesse de pesquisa centra-se sobre a formação do conceito, ligado à operação de análise combinatória. Interessados em investigar mais amiúde a existência de problemas na formação desse conceito, desenvolveremos uma investigação da pré-concepção dos alunos sobre análise combinatória e, a partir dessa investigação, elaboraremos uma seqüência de ensino.

O método usado para a formulação da seqüência de ensino será a criação de situações-problema que se aproximem da realidade dos alunos. Essa proposta vem de encontro a estudos que procuraram relações entre a facilidade de compreensão de conceitos complexos a partir de outros conhecidos e de grau mais simples, dando significado aos conhecimentos que devem ser adquiridos. Não pretendemos abranger todo o estudo sobre análise combinatória. O âmbito desta seqüência restringe-se a fornecer uma alternativa para a introdução desse tema, procurando facilitar a ampliação posterior do conceito estudado.

Estabelecida nossa área de abrangência estipulamos, a seguinte questão de pesquisa: “Em função do ensino oferecido, os sujeitos demonstram progresso verificável no que tange ao campo conceitual considerado?“ E como questão derivada e operacional, temos: “Tal evolução se diferencia daquela observada no grupo de referência?”.

As situações-problema da nossa seqüência de ensino serão conduzidas de forma que o aluno as desenvolva sem a utilização de fórmulas, pois acreditamos na necessidade de o discente entender o desenvolvimento do conceito matemático em questão, seguindo alguns passos até chegarem à formalização. Segundo Nunes (1997), quando os alunos fazem uso da representação, eles criam ferramentas diferentes para a resolução do problema. Em outras palavras, o conceito pode ser representado de modos diferentes. A autora cita uma pontaria importante de instrução matemática: conduzir os alunos a comprimir as representações feitas por eles de tal modo que percebam as operações novas possíveis com essa visão, sem perder a visão do velho. Para Piaget (1995), a formalização deve se constituir em seu próprio tempo e não ser formada através de constrangimentos prematuros. Se a intuição matemática é essencialmente operacional e a natureza de estruturas operacionais consiste em dissociar forma de conteúdo, então a formalização final estaria preparada de maneira progressivamente necessária pela própria construção destas estruturas iniciais. Com isso, queremos mostrar que a fórmula em si não é negativa nem contraproducente; ao contrário, ela representa uma compressão algorítmica que assegura uma economia cognitiva importante, desde que colocada no tempo certo. Para o conteúdo Análise Combinatória, quando não reforçamos a fórmula, acreditamos que estamos valorizando o uso da árvore de possibilidade, do método de tentativa e erro, do desenho e do princípio fundamental da contagem para um melhor desenvolvimento do raciocínio combinatório. Assim, a fórmula no papel deixa de ser apenas uma ferramenta para desenvolver os problemas de maneira mais econômica. Como nossa intenção é desenvolver o raciocínio combinatório, não institucionalizaremos as fórmulas no final do estudo.

Desenvolveremos nosso estudo com dois grupos, um experimental e outro de referência, os quais estudarão a introdução desse conceito, segundo abordagens diferentes. Para o grupo de referência, utilizaremos a abordagem comumente adotada no ensino atual e para o grupo experimental, utilizaremos uma seqüência, elaborada por nós, em que não serão apresentadas as fórmulas. As definições e nomenclaturas de cada agrupamento serão apresentadas no último encontro da seqüência.

1.2 DESCRIÇÃO DA DISSERTAÇÃO

No presente capítulo, apresentamos nossa motivação no que se refere ao tema, por meio da descrição da problemática e da apresentação tanto da questão de pesquisa como da hipótese relacionada ao ensino de análise combinatória.

O capítulo II traz um breve estudo histórico com a intenção de ressaltar a origem, o desenvolvimento e os objetivos da análise combinatória na época de sua criação.

A seguir, investigaremos como esse conteúdo é desenvolvido atualmente no Ensino Fundamental e no Médio. Para tanto, apoiar-nos-emos na Proposta Curricular do Estado de São Paulo, nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e na análise de livros didáticos. Para esse estudo, procuraremos observar os materiais, por meio da elaboração de categorias que acreditamos serem capazes de interferir na aprendizagem do conceito. Faremos, ainda, uma revisão de literatura e, na seqüência, discutiremos idéias teóricas que embasarão nosso trabalho. Na revisão de literatura, temos a finalidade de obter uma visão geral das pesquisas existentes que envolvam analise combinatória ou temas correlatos que possam contribuir para esse trabalho. Quanto às idéias teóricas, procuraremos apresentar aquelas que tratam de representação e transposição didática. Neste caso, os estudos de Brousseau, Chevallard e Piaget e Vergnaud serão os mais abordados. Citaremos, também, Vygotsky em relação à Zona de desenvolvimento proximal (ZDP).

Descreveremos, no capítulo III, a nossa metodologia de pesquisa. Nela revisitaremos a nossa proposta, acompanhada de seus objetivos, e descreveremos os sujeitos e o material utilizado para o estudo de análise combinatória. Em seguida, apresentaremos o desenho geral do experimento, composto de três fases: o pré-teste, a seqüência de ensino e o pós-teste. Os pré e pós-testes serão nossos instrumentos diagnósticos, a partir dos quais procederemos à análise. Trabalharemos toda a seqüência de ensino em duplas, explorando a idéia de Vygotsky (1997) sobre a Zona de desenvolvimento proximal. Utilizando as concepções de Vergnaud (1994) – o conhecimento emerge na resolução de problemas – e ainda fundamentados em Piaget (1951), procuraremos criar uma série de atividades a fim de possibilitar que os alunos tenham diversas interações com o objeto de estudo, em situações análogas, de maneira a criar-lhes condições, a partir de seus esquemas de ação, de formarem os conceitos.

Dedicaremos o capítulo IV à análise dos dados obtidos nos testes e na seqüência. Assim sendo, teremos dois tipos de análise: quantitativa, associada ao percentual de acertos, e qualitativa, associada às estratégias de ação e à qualidade das respostas apresentadas por esses sujeitos.

No capítulo V, apresentaremos nossas conclusões e sugestões para futuras pesquisas e no capítulo VI as referências bibliográficas.

O DESENVOLVIMENTO DA ANÁLISE COMBINATÓRIA

2.1 INTRODUÇÃO

Este capítulo tem por objetivo abordar o tema análise combinatória sob três perspectivas.

A primeira diz respeito ao surgimento e desenvolvimento desse conteúdo no seio da ciência matemática. Nosso intento aqui é fornecer uma visão geral da origem e do desenvolvimento da análise combinatória, procurando descrever as necessidades e os objetivos da época, além de ressaltar os principais nomes que contribuíram para a criação e ampliação desse conceito.

Na seção seguinte, o ponto de vista passa a ser a escola, isto é, discutiremos a "transposição didática" [1]da análise combinatória. Nesse momento faremos a análise de alguns livros didáticos – aqueles mais comumente adotados nas escolas de maneira geral – e da proposta curricular. Partimos da hipótese de que esses instrumentos são os principais recursos do professor na sua tarefa de transpor o saber matemático para seus alunos.

A última perspectiva vem do campo dos estudos científicos na área da Educação Matemática, cujos temas são correlatos ao nosso. Assim sendo, apresentaremos trabalhos realizados em análise combinatória e idéias teóricas advindas da Didática da Matemática, de grande influência no desenvolvimento do nosso trabalho.

Esperamos que, após termos analisado o nosso conteúdo de estudo a partir desses três pontos de vista, estaremos mais aparelhados para pensar em

---

[1] O saber pesquisado pelo matemático sofre inúmeras transformações até chegar ao aluno. Ao conjunto destas transformações dá o nome de transposição didática.

uma maneira eficaz de introduzir o conceito de análise combinatória. Não estamos preocupados em englobar todo o conteúdo referente a esse tópico, já que o mesmo só é desenvolvido no ensino de nível médio e nosso estudo será realizado no de nível fundamental.

2.2 ESTUDO HISTÓRICO

Para melhor compreendermos as dificuldades relativas ao ensino e à aprendizagem do Cálculo de Análise Combinatória, faremos um pequeno recuo histórico, analisando as contribuições dos chineses, gregos, latinos, hindus e europeus.

Existem correntes com diferentes concepções a respeito do início do desenvolvimento da matemática, porém acredita-se que o conceito de número e o processo de contagem foram desenvolvidos antes dos primeiros registros históricos.

A necessidade de se efetuarem contagens mais extensas provocou uma sistematização no processo de contar. Assim, surgiram sistemas de agrupamentos simples (hieróglifos egípcios), que talvez sejam o mais antigo sistema de numeração, os multiplicativos (sistema chinês-japonês tradicional), os cifrados (sistema grego, conhecido como jônico ou alfabético, cujas origens situam-se por volta de 450 a.C.) e o posicional (o nosso sistema).

Provavelmente o trabalho mais antigo que envolve este assunto seja o livro chinês I – King ou livro das permutações (1182 – 1135 a.C), ponto de apoio para a escrita de outros livros sobre o assunto. Nesse livro, que se pretende haver sido escrito por Won – Wang, apareceu o Liang I, ou “os dois princípios” (o masculino Yang _, e o feminino Ying _ _). A partir deles, formam-se as seguintes oito figuras, chamadas Pa-Kua (ou oito trigramas).

Podemos perceber que estes oito trigramas representam arranjos com repetição de dois símbolos tomados três a três.

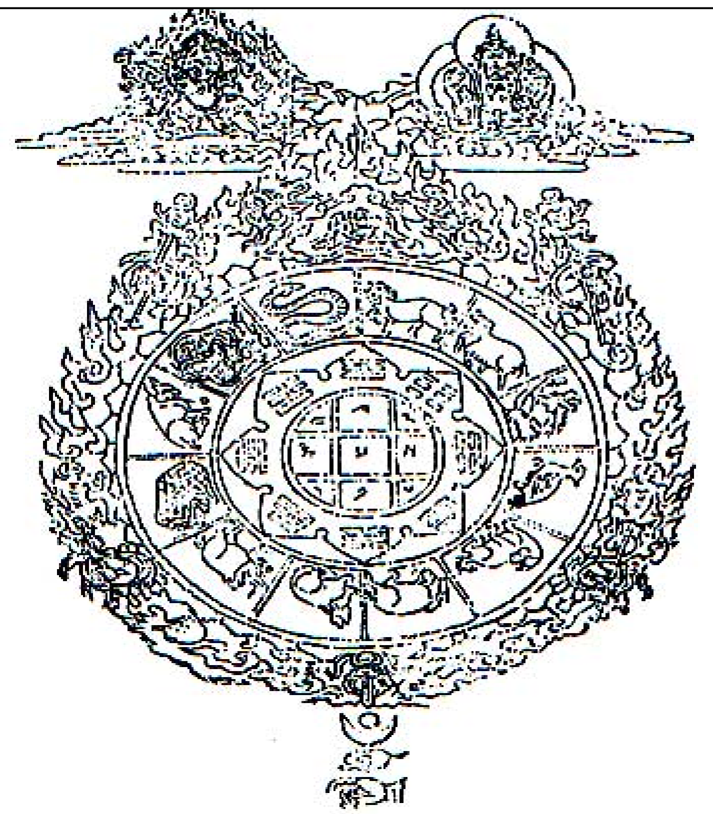
——   – –   ——   – –   ——   – –   ——   – –
——   ——   – –   – –   ——   ——   – –   – –
——   ——   ——   ——   – –   – –   – –   – –

$A_{2,3} = 2^3 = 8$

Estes oitos símbolos, aos quais estão ligados vários atributos, passaram a ser usados em adivinhações. Embora não se tenha certeza, acredita-se que o Pa-Kua representa um prenúncio do sistema de numeração binário, pois tomando-se o "___" como <u>um</u> e o "__ __" como <u>zero</u>, é possível supor que as sucessivas colunas de traços, mostrados anteriormente, começando da direita, representariam os números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7.

TIGRAMAS	—— —— ——	– – —— ——	—— – – ——	– – – – ——	—— —— – –	– – —— – –	—— – – – –	– – – – – –
Numerais na base 2.	111	110	101	100	011	010	001	000
Numerais na base 10	7	6	5	4	3	2	1	0

Podemos observar que o Pa-kua ganhou uma conotação mística em todo o oriente, tanto que esses agrupamentos são encontrados em vasos, talismãs e outros objetos. Cada um dos oito agrupamentos representa um ponto cardeal ou colateral, além de algum elemento da natureza.



THIBETAN "WHEEL OF LIFE"

From a sheet of block printing done at Lhassa. This portion represents the signs of the zodiac, the *Pa-kua*, and, in the center, a magic square

Figura 2.1: desenho do Pa-kua encontrado nos objetos (Smith,vol. 1, pp.27)

Encontra-se, ainda, nessa obra, o arranjo com repetição de dois símbolos (___ , __ __), tomados seis a seis, obtendo-se, assim, os “sessenta e quatro hexagramas”.

O desenvolvimento do binômio $(1 + x)^n$ está entre os primeiros problemas estudados ligados à análise combinatória. O caso n = 2 já pode ser encontrado nos elementos de Euclides, em torno de 300 a.C. O triângulo de Pascal era conhecido por Chu Shih-Chieh, na China (em torno de 1300) e antes disso pelos hindus e árabes.

Da Grécia, podemos destacar algumas pequenas contribuições nesta área, porém nenhuma teoria de análise combinatória. Sabe-se que o grego, Chrysippus

(280 – 270 a.C) achou que o número de combinações de dez axiomas era maior que 1000000.

Dentre os matemáticos latinos, o único que desenvolveu algo nesta área foi Boecio (510), criando uma regra para determinar combinações de n elementos tomados dois a dois.

Da Matemática hindu, podemos destacar Bhaskara (1114–1185), conhecido geralmente pela “fórmula de Baskara” para a solução de equação do 2º grau. Ele forneceu regras para o cálculo de arranjos de n elementos tomados r a r (com ou sem repetição) e para cálculo de combinações de n elementos tomados r a r (sem repetição). Esta contribuição aparece na sua obra intitulada “Lilavati”, onde ainda relaciona a idéia de permutação com situações práticas (aplicações na poesia, arquitetura, música e medicina).

Analisando agora o interesse da Europa nesse assunto, bem como suas contribuições, podemos destacar, no início da Era Cristã, em vários manuscritos hebreus, relações entre permutações e combinações com a ciência mística denominada cabala. Na Idade Média, Rabbi ben Ezra (1140) usou permutações e combinações com aplicações na astronomia (estudo de conjunções de planetas, dois a dois e três a três). Nos seus manuscritos aparece a relação $C_{7,2} = C_{7,5}$, porém não podemos afirmar se se conhecia a regra geral $C_{n,k} = C_{n, n-k}$.

Levi ben Gerson (1288 – 1344), matemático e filósofo religioso francês, que nasceu e trabalhou no sul da França, e que, entre outras coisa, tentou demonstrar o 5º postulado de Euclides, sistematizou as fórmulas de arranjo simples de n elementos tomados k a k, de permutação de n elementos e de combinação de n elementos tomados k a k (sem repetição). Estas noções aparecem no seu manuscrito denominado “trabalho para o computador”.

Outro francês, Nicole Oresme (1323 – 1384), apresentou em seu manuscrito “Tratactus de Figuratione potentiarum et mensurarum difforitatum” a soma das combinações de 6 elementos tomados 1 a 1, 2 a 2, 3 a 3, 4 a 4 e 5 a 5, que hoje representamos por: $C_{6,1} + C_{6,2} + C_{6,3} + C_{6,4} + C_{6,5.}$ Não podemos afirmar se o mesmo conhecia a regra geral envolvida nestes cálculos, visto que a apresentação destas combinações era dada de forma retórica.

A primeira obra impressa que contém problemas de Análise Combinatória foi a “Summa de Arithmetica, geometria, proportione et proportionalita” , de Luca Pacioli (1455 – 1514), publicada em Veneza no ano de 1494, onde ele apresenta como achar o número de permutações de qualquer número de pessoas sentadas ao redor de uma mesa. Luca Pacioli apresentou o resultado para os casos particulares em que n = 1, 2, ..., 11, acrescentando que valeria para qualquer “n”.

Devemos citar, também, na Inglaterra, W, Buckley (1540), que trabalhou em casos especiais de combinações de n elementos tomados k a k. Niccolo Tartaglia foi o primeiro a usar as noções de análise combinatória em jogos de dados, assunto também desenvolvido posteriormente por Joannes Buteo (1485 – 1560). Este apresentou na sua obra, “Logística qual e Arithmetica vulgo dicitur in libros quinque digesta”, um problema interessante das combinações de fechaduras com cadeados montados com cilindros móveis, conforme figura:

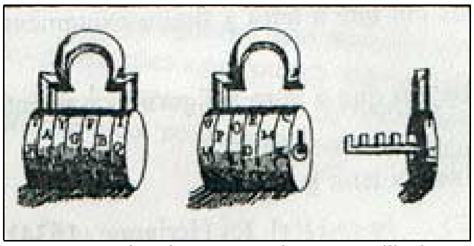


Figura 2.2: cadeados montados com cilindros móveis.
(Smith, vol 2, pp.527)

No século XVI, Rabbi Moses Cordovero desenvolveu algumas regras gerais da análise combinatória, na sua obra *Pardes Rimmonim*.

No século XVII, esse assunto passou a ser desenvolvido em grande escala. Thomas Harriot (1560 –1621) usou o seguinte simbolismo para o produto de binômios:

a – b = aaaa - baaa + bcaa
a – c   - caaa + bdaa
a – d   - daaa + cdaa – bcda
a – f   - faaa + bfaa – bcfa
                        + cfaa – bdfa
                        + dfaa – cdfa + bcdf

Podemos notar que ele trabalhou com agrupamentos de 4 elementos, com a condição de que a letra ”a” figurasse exatamente 4 vezes, em seguida 3 vezes, 2 vezes, 1 vez e, por último, houvesse um agrupamento com 4 elementos sem a letra “a”.

Porém, foi Hérigone (1634) o primeiro a escrever a regra geral:

$$C_{n,r} = n\ (n - 1)\ (n - 2)\ ...\ (n - r + 1)\ /\ r!.$$

Outra contribuição importante para o desenvolvimento da análise combinatória veio de Niccolo Fontana Tartaglia (1500 – 1557). Este relacionou os elementos do triângulo de Pascal com as potências de (x + y). É importante frisar que o primeiro aparecimento desse triângulo, no ocidente, foi no “frontispício” [2] de um livro escrito por Petrus Apinus (1495 – 1552).

Contudo, só no século XVII, deu-se destaque para o trabalho de Blaise Pascal (1623 – 1662), através da obra *Traité du triangle arithméthique*, embora escrita em 1653, só foi publicada em 1665. Ele construía seu triângulo aritmético de modo que se obtinha qualquer elemento (da segunda linha em diante) como soma de todos os elementos da linha precedente, situados exatamente acima ou à esquerda do elemento desejado.

---

[2] Frontispício: título principal e inteiramente desenvolvido de um livro; ilustração colocada na página de rosto ou anterior a ela. (Dicionário Larousse Cultural).

1	1	1	1	1	1 ...
1	2	3	4	5	6 ...
1	3	6	10	15	21 ...
1	4	10	20	35	56
1	5	15	35	70	126 ...

Os números ao longo da diagonal (do triângulo apresentado por Pascal) são os coeficientes sucessivos de uma expansão binomial. Por exemplo, os números ao longo da Quinta diagonal: 1, 4, 6, 4, 1 são os coeficientes sucessivos da expansão de $(a + b)^4$. Pascal usava seu triângulo para determinar o número de combinações de n objetos tomados r a r, o que ele corretamente afirmava ser: $n! : [r! (n - r)!]$

O símbolo “!” foi introduzido por Christian Kramp em 1808; n! é a notação atual para o produto n (n –1) (n-2) ... 3 . 2 . 1.

Como já vimos, Pascal não foi o primeiro a mostrar o triângulo aritmético. Vários séculos antes, esse arranjo numérico já havia sido antecipado por escritores chineses (ver figura abaixo).

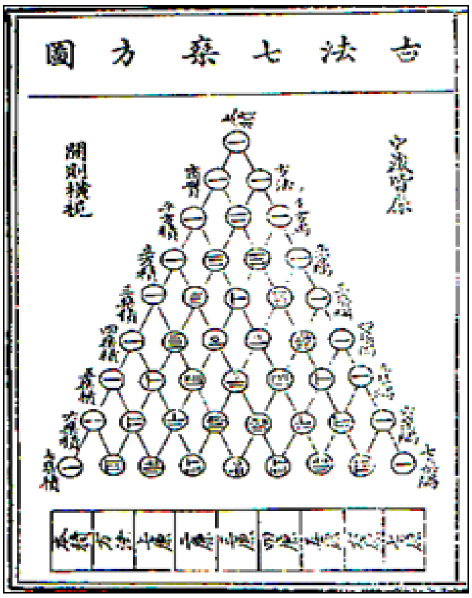


Figura 2.3: Triângulo Chu Shih-Chieh (Eves, pp.250)

Porém, como ele foi o primeiro matemático conhecido a utilizar-se do triângulo do mundo ocidental e por longo tempo foi o único a desenvolver e a fazer vária aplicações das propriedades desse triângulo, este se tornou conhecido como triângulo de Pascal.

Vejamos um bom exemplo das relações desenvolvidas por Pascal envolvendo o triângulo, relacionadas à análise combinatória:

> CONSIDERE UMA COLEÇÃO DE N OBJETOS. QUALQUER CONJUNTO DE R DESSES OBJETOS, CONSIDERADOS SEM SE LEVAR EM CONTA A ORDEM, CHAMA-SE COMBINAÇÃO DE N OBJETOS TOMADOS R DE CADA VEZ. USAREMOS C(N,R) PARA DENOTAR O NÚMERO DESSAS COMBINAÇÕES. MOSTRE QUE C(N,R) APARECE NA INTERSECÇÃO DA (N + 1)-ÉSIMA DIAGONAL COM A (R + 1)-ÉSIMA COLUNA DO TRIÂNGULO DE PASCAL.
>
> VERIFICANDO:
>
> EXEMPLO : C(4,3) = 4 (INTERSECÇÃO DA QUINTA DIAGONAL COM A QUARTA COLUNA).

Percebe-se, então, que no século XVII, o estudo da Análise Combinatória, desenvolvido principalmente para resolver problemas de probabilidade de jogos de azar, foi sistematizado. Sabe-se que Girolamo Cardano (1501 – 1576) escreveu um manual de jogador, onde aparecem interessantes problemas de análise combinatória e probabilidade. Essa obra, conhecida como o livro *De Ludo Aleae* (sobre jogos de azar), publicou-se em 1663. É possível que o interesse de Cardano pelo assunto se deva a sua paixão pelos jogos de azar.

Uma questão que está relacionada à origem da probabilidade e que se utiliza de conhecimento de análise combinatória é o “problema dos pontos” (introduzido na obra *Suma de Pacioli* em 1494), analisado por vários matemáticos dos séculos XVI e XVII. O grande avanço efetivo nesse problema se deu em 1654, quando Chevalier de Méré, um hábil jogador, cujo raciocínio teórico sobre o problema não coincidia com suas observações, o propôs a Pascal que, por sua vez, o levou ao conhecimento de Fermat. Com isso, ocorreu uma notável correspondência entre os dois matemáticos. Embora cada um tenha resolvido o problema por um método particular, ambos chegaram ao resultado correto.

PROBLEMA DOS PONTOS: “determine a divisão de apostas de um jogo de azar entre dois jogadores igualmente hábeis, supondo-se conhecido o marcador no momento da interrupção e o número de pontos necessários para ganhar o jogo”.

Solução de Fermat:

Fermat discutiu o caso em que o jogador A precisava de dois pontos para ganhar e o jogador B, de 3. Como é claro que mais quatro partidas decidem o jogo, seja “a” uma partida ganha por A e seja “b” uma partida ganha por B. Consideremos, então, os dezesseis arranjos completos, de ordem 4 das letras a e b.

aaaa, aaab, abba, bbab, baaa, bbaa, abab, babb, abaa, baba, aabb, abbb, aaba, baab, bbba, bbbb.

Os casos em que “a” aparecer duas ou mais vezes são favoráveis a A e há onze deles. O caso em que “b” aparece 3 ou mais vezes são favoráveis a B e há cinco deles. Portanto, as apostas devem ser divididas na razão 11:5. Para o caso geral, em que A precisa de m pontos para ganhar e B precisa de n, anotam-se os 2^{m+n-1} arranjos completos, de ordem m+n-1, das duas letras “a” e “b”. Procura-se o número x de casos em que “a” aparece m ou mais vezes e o número y de casos em que “b” aparece n ou mais vezes. As apostas devem ser divididas na razão x:y.

Solução de Pascal:

Ele utilizou o triângulo aritmético para a solução. Indicando por C(n,r) o número de combinações simples, de ordem r, de n objetos, pode-se facilmente mostrar que os números ao longo da Quinta diagonal do triângulo são respectivamente:

C(4,4) = 1, C(4,3) = 4, C(4,2) = 6, C(4,1) = 4 e C(4,0) = 1

Retornando ao particular problema dos pontos considerados, C(4,4) é o número de maneiras de se obterem quatro letras “a”, C(4,3) é o número de maneiras de se obterem três letra “a” e assim por diante. Segue-se, pois, que a solução do problema é dada por:

$[C(4,4) + C(4,3) + C(4,2)] : [C(4,1) + C(4,0)] = (1+ 4 + 6) : (4 + 1) = 11 : 5$

No caso geral, em que A precisa de m pontos para ganhar e B, de n, escolhe-se a (m + n)-ésima diagonal do triângulo de Pascal. Calcula-se, então, a soma x dos n números da diagonal considerada e a soma de y de seus últimos m números. Então, devem-se dividir as apostas segundo a razão x :y.

É importante citar que o triângulo de Pascal serviu de base para algumas demonstrações importantes da Matemática. Por exemplo, Jakob Bernoulli (1654 – 1705), em seu *Ars Conjectandi*, de 1713, usou a interpretação de Pascal para demonstrar que $(x + y)n = \sum (^{n}) \, x^{n-i} y^{i}$, $0 \leq i \leq n$. A segunda parte desse livro de Bernoulli foi dedicada à teoria das combinações e permutações, que continha praticamente toda a teoria de análise combinatória que conhecemos atualmente e que é desenvolvida no âmbito do ensino médio.

Devemos, também, citar Euler (1707 – 1783), que desenvolveu em seu livro clássico *Introductio in Analysin Infinitorum* a técnica das funções geradoras, utilizada para atacar o problema das partições de um inteiro. O interesse de Euler por esse problema surgiu devido a uma pergunta feita, em uma carta, pelo matemático francês Phillipe Naudé, que trabalhava em Berlim. Entre outras coisas, indagava de quantas maneiras um número pode ser escrito como soma de inteiros positivos distintos. A pergunta, prontamente respondida por Euler, foi a origem da “teoria das partições” ou “partitio numerorum”, como escreveu Euler. Mas suas contribuições à análise combinatória não se limitaram a isso. Várias obras suas, muitas delas sobre probabilidade, contêm resultados importantes no que diz respeito à análise combinatória. Em particular, devemos a ele o enunciado e a solução do “Problema das Sete Pontes de Königsberg, um teorema da Teoria dos Grafos, parte muito importante, atualmente, da análise combinatória”.

Tal problema, resolvido por Euler em 1736, tinha a seguinte questão: “Seria possível fazer um passeio pela cidade de Königsberg de maneira a cruzar todas as pontes da cidade, uma, e uma só vez, e voltar ao ponto de partida?”.

A cidade, localizada perto da foz do rio Pregel, era famosa por suas sete pontes, cinco delas dando acesso a uma ilha, como mostra a figura. Euler reduziu o problema ao de percorrer o grafo da figura de maneira tal que cada uma de suas linhas fosse percorrida uma só vez, terminando o percurso no ponto de partida.

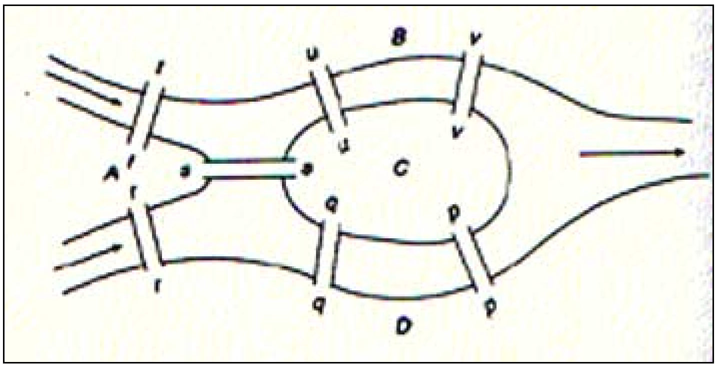


Figura 2.4- desenho das pontes da cidade de Königsberg (Eves, pp.500)

Por fim, gostaríamos ainda de citar uma teoria mais recente, e não menos importante, de combinatória, elaborada pelo lógico inglês F.P. Ramsey (1903 – 1930). Ela garante a existência de certas configurações. Um dos exemplos mais simples do chamado teorema de Ramsey afirma que se tivermos no plano um conjunto de n pontos, com $n \geq 6$, tais que nenhum subconjunto com três pontos seja colinear, e, se unirmos todos os pontos dois a dois, usando duas cores distintas, por exemplo, preto e branco, para traçar os segmentos de reta que unirão os pontos, então forçosamente teremos formado um triângulo cujos lados são todos da mesma cor (preto ou branco).

2.3 ANÁLISE COMBINATÓRIA NA ESCOLA

2.3.1 Introdução

Uma vez apresentados à origem e o desenvolvimento histórico da análise combinatória, trataremos aqui da questão de sua transposição didática nas escolas. Para tanto, analisaremos os principais instrumentos disponíveis para o professor, quais sejam a Proposta Curricular do Estado de São Paulo, o Parâmetro Curricular Nacional (PCN) e o livro didático. Com relação a este último, utilizaremos como critério para escolha dos livros aqueles mais comumente adotados pelos colégios da cidade de Santos, acreditando que, dessa forma, estaremos traçando um perfil mais realístico de como a análise combinatória vem sendo trabalhada na escola.

O critério adotado para a escolha dos livros foi uma amostragem por acessibilidade, isto é, selecionamos 7 escolas (5 particulares e 2 publicas) a que tínhamos acesso e pesquisamos os livros adotados no Ensino Fundamental e no Ensino Médio. Entrevistamos, ainda, os professores de matemática dessas escolas e que também ensinam em outras, a fim de obtermos informações sobre quais livros de matemática essas outras escolas adotavam.

Partimos do pressuposto de que se o aluno tiver oportunidade de interagir com o conteúdo através de situações significativas, ele terá maior oportunidade de aprender o objeto matemático. Acreditamos que o fato de oferecer ao aluno a possibilidade de interagir com o conceito de análise combinatória, desde o início, através de representações (diagramas, desenhos), de elaboração de atividades com espaço para discussão de idéias, ou, ainda, de construção do conceito por meio de matérias concretos, cria nele um ambiente mais rico para que possa entender e justificar as características inerentes a esse conceito.

De fato, segundo Vieira (1993):

> *"É importante, também, que repensemos a educação matemática, em torno de significados criados em tarefas culturalmente ligadas à escola, como uma prática cotidiana, na forma de atividades que requeiram a reflexão sobre conceitos matemáticos, a partir de situações problemáticas. Enquanto prática cultural, a atividade de matemática, na escola, pode gerar significados que são próprios deste contexto, apropriados para o desenvolvimento da compreensão de conceitos e modelos matemáticos". (pp. 24)*

Assim sendo, ao elaborarmos atividades pedindo que os alunos analisem sua construção, resolvam o problema e depois argumentem sobre o caminho escolhido para achar a solução, defendendo suas idéias matemáticas, estaremos instrumentalizando-os para resolverem problemas com diferentes enunciados.

O desenvolvimento desta seção será dividida em três partes. Inicialmente, iremos analisar os livros didáticos do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, em relação a seis categorias, por as considerarmos como fatores capazes de interferir na formação do conceito de combinatória. Em seguida, faremos uma análise da Proposta Curricular do Estado de São Paulo do Ensino Fundamental e Médio e do PCN em relação ao Ensino Fundamental, sob a óptica dessas mesmas categorias. E, por último, iremos comparar as abordagens adotadas nos livros didáticos do Ensino Médio com a proposta curricular e a dos livros didáticos do Ensino Fundamental com o PCN.

2.3.2 Categorias

Gostaríamos, inicialmente, de enfatizar que as categorias que elaboramos surgiram a partir do que consideramos ser variáveis que influenciam na formação deste campo conceitual. Para a escolha das variáveis, baseamos-nos nos critérios usados pelo MEC para analisar os livros didáticos, na teoria e na revisão de literatura.

♠ Forma de introdução do conteúdo

♠ Apresentação dos conceitos de arranjo e combinação

♠ Como e quando são introduzidas as fórmulas

♠ Apresentação de problemas com enunciados diversificados

♠ Ênfase na resolução com auxílio de diagramas

♠ Inclusão de fatos históricos.

2.3.3. Justificativa da escolha das categorias

Ao elencarmos as seis categorias, tínhamos em mente duas questões: primeiramente a de que elas representam fatores que podem, eventualmente, influenciar o processo de ensino-aprendizagem da análise combinatória; em segundo lugar, a de podermos olhar com maior imparcialidade os instrumentos disponíveis ao professor. Dessa forma, não estaremos aqui colocando nenhum juízo de valor quanto à qualidade deste ou daquele livro, nem tão pouco elegendo um livro como melhor que o outro. Estaremos discutindo os livros, o PCN e a proposta sob a óptica das nossas categorias. Em outras palavras, estaremos discutindo aqui se, como e quanto cada um desses instrumentos aborda e trabalha essas categorias. As categorias, por sua vez, não têm a pretensão de esgotar todas as variáveis didáticas e de conteúdo, envolvidas na introdução do conceito de análise combinatória. Elas representam apenas as nossas hipóteses, levantadas a partir da história, de leituras e de reflexões advindas de nossa prática docente. Acreditamos, ainda, que trabalhar no Ensino Fundamental, com a construção de diferentes agrupamentos, logicamente sem a sistematização do ensino médio, facilita a abordagem desse assunto no futuro.

♠**Forma de introdução do conteúdo:**

Parece-nos que interagir com o conceito inicial da análise combinatória não significa memorizar a definição e calcular mecanicamente cada tipo de agrupamento, pois, segundo Piaget (1995), a combinatória constitui o início do pensamento hipotético-dedutivo ou formal:

> *“O primeiro resultado dessa espécie de resultado de desengate do pensamento em relação aos objetos é liberar as relações e as classificações de seus laços concretos e intuitivos”. (pp. 113).*

Piaget (1995) considera a ação do sujeito como determinante para aquisição do conhecimento e Vergnaud (1990) complementa esse argumento, ao afirmar que a ação é fonte e critério do saber.

Segundo Vergnaud (1990), a construção do conhecimento consiste na construção progressiva da representação mental, implícita ou explícita, homomórfica à realidade para alguns aspectos e não para outros.

Como nossa preocupação é ajudar o aluno na sua construção do conceito e não apenas no domínio da técnica, temos como meta criar um ambiente onde o aluno seja incentivado a analisar e sintetizar os problemas propostos.

Nessa categoria, pretendemos observar se a abordagem adotada permite ao aluno a construção gradativa do conceito de análise combinatória. Para isso, analisaremos se o conteúdo é iniciado através da contagem direta e se são colocadas situações-problema para os alunos resolverem antes de ser introduzido o princípio fundamental da contagem. Observaremos, também, como se introduz o conceito do princípio fundamental da contagem.

♠Apresentação dos conceitos de arranjo e combinação.

A dificuldade em considerar se a ordem dos elementos é importante ou não está evidenciada nos estudos de Batanero (1997). Ela observa que o erro de ordem está principalmente ligado às combinações. Conforme nos mostram as pesquisas da autora, esse tipo de erro, já descrito por Fischbein e Gazit, consiste em confundir os critérios de arranjo e combinação.

Partindo da premissa de que a apropriação do conceito de arranjo e combinação passa necessariamente pela interação de diversas situações cuidadosamente preparadas, no sentido de favorecer a diferenciação dos dois tipos básicos de agrupamento, essa prática pode gerar no aluno segurança no momento da interpretação e resolução do problema. Tal premissa encontra apoio nas idéias de Vergnaud (1990), que defende que um simples conceito não se desenvolve normalmente isolado, mas sim em interação com os outros conceitos, através de vários problemas e com ajuda de vários tipos de problemas e com ajuda de várias expressões e simbolismos.

Sendo assim, nesta categoria, observaremos se os livros didáticos iniciam tal abordagem com situações-problema introdutórias que confrontem os dois tipos de agrupamentos e que exijam do aluno o exercício da interpretação.

♠ Como e quando são introduzidas as fórmulas.

Considerando que a Análise Combinatória não é apenas um jogo de fórmulas complicadas, pretendemos observar se os livros didáticos introduzem as fórmulas após a definição de cada agrupamento ou se elas são apresentadas no final do estudo.

Segundo Batanero (1997), a falha da interpretação dos problemas de análise combinatória se deve à dificuldade em identificar a operação combinatória correta. A esses erros se unem outros: como exemplo, o erro em fórmula.

Inicialmente, defendemos que melhor seria proporcionar aos alunos situações-problema para que, de forma independente, os mesmos resolvam-nos sem o uso ou conhecimento de fórmula. Adotamos tal posição por acreditar que o aluno pode apresentar uma concepção errônea, conforme a maneira que o conteúdo for abordado. Isto é, se as fórmulas são apresentadas após ligeira abordagem e apresentação formal da definição de cada tipo de agrupamento, tal fato poderá gerar dificuldade por parte do aluno em reconhecer o tipo de agrupamento envolvido no problema e, conseqüentemente, a fórmula que deve utilizar. Com isso, o aluno estaria sendo induzido ao domínio da técnica, sem se preocupar com a interpretação do problema, o que na análise combinatória é fundamental.

Aqui, seguimos a idéia dos teoremas-em-ação, do Vergnaud (1990). Eles formam a primeira base intuitiva dos alunos que os professores podem usar para estender e formalizar o conceito do estudante. Isto é, acreditamos na necessidade do aluno iniciar trabalhando com situações-problema, usando um caminho intuitivo e, aos poucos, introduzirmos situações mais complexas, onde poderemos institucionalizar o conceito introduzindo, ou não, as fórmulas.

♠Apresentação de problemas com enunciados diversificados.

Observando os critérios que o Mec usou para analisar os livros didáticos, notamos que um dos itens do porquê avaliá-los referia-se à quantidade de exercícios repetitivos, o que nos motivou a construir essa categoria.

Levando em conta que a solução de um problema combinatório exige sempre criatividade e compreensão plena da situação nele descrita, iremos observar se os livros se limitam aos exercícios segundo os tópicos abordados ou se eles fornecem problemas diversos, exigindo, assim, não só a aplicação dos conceitos estudados bem como sua interpretação.

Também observaremos se existe um abuso de analogia dos problemas no sentido de eles apresentarem enunciados semelhantes uns aos outros, estimulando, dessa forma, o aluno a associar certas palavras-chave ao tipo de fórmula que deverá utilizar.

Nessa categoria, estamos levando em consideração o seguinte: apenas conseguiremos avaliar a assimilação do conteúdo se os alunos, de posse dos conceitos apresentados, souberem agir diante de problemas diversificados e, de preferência, com enunciados diferentes daquele trabalhados em sala de aula. E mais, que esse procedimento seja adotado durante todo o processo e não somente no final do capítulo.

♠ **Ênfase na resolução com auxílio de representações**

Acreditamos que o uso de representações pode facilitar o aprendizado do conteúdo análise combinatória, sob o ponto de vista de interpretação do problema, pois, segundo Vergnaud (1991), a representação é um reflexo da realidade, um instrumento de simulação. Piaget (1978) também enfatiza a importância da representação na aquisição e desenvolvimento do conhecimento, argumentando que a representação é a reunião de um significante que permite a formação de um significando fornecido pelo pensamento.

Mediante tais reflexões teóricas, observaremos se a diversidade de representações é valorizada, em outras palavras, se há proposta, e mesmo incentivo, do uso de diagramas, tabelas, árvore de possibilidades, antes da sistematização do princípio fundamental da contagem e de cada tipo de agrupamento.

Vergnaud (1991) ainda comenta que a representação em árvore guarda relações privilegiadas com a combinatória, pois tem a vantagem de ser estendida indefinidamente. Nesse caso, analisaremos até que ponto os livros trabalham com a árvore de possibilidades e se existe um espaço para que os alunos a possam construir.

♠ **Inclusão de fatos históricos**

Partimos do pressuposto de que a aprendizagem de um novo tópico se desenvolve de maneira mais sólida e, conseqüentemente, mais significativa, se o aluno entender em que contexto e por qual motivo ele foi criado, destacando-se aí as necessidades da época e a finalidade de seu estudo em tempos atuais.

Vergnaud (1990), ao escrever sobre a Epistemologia e Psicologia da Educação Matemática defende com ênfase a importância de trazer para os livros didáticos fatos históricos:

> *"É essencial que autores de livros textos incluam em seu material uma perspectiva histórica e apresentem alguns exemplos importantes de mudanças em idéias matemáticas. É também essencial que estudantes passem por mudanças importantes em suas próprias idéias através da resolução de problemas, discutindo conjecturas e procedimentos diferentes e tornando-se mais conscientes das suas próprias concepções e dificuldades". (pp. 30).*

E, segundo Piaget (1995), a orientação dada à Educação Matemática depende, naturalmente, da interpretação adotada sobre o tema desenvolvimento psicológico ou adquirida a respeito das operações e estruturas lógico-matemáticas. Tal interpretação depende igualmente do significado epistemológico dado a essas coisas.

Então, observaremos se há preocupação em situar o aluno no momento histórico da criação da análise combinatória, para que o mesmo compreenda os motivos do surgimento e desenvolvimento desse tópico.

2.3.4 Os livros didáticos

Selecionamos cinco coleções de livros didáticos do Ensino Fundamental e cinco livros do Ensino Médio, mais freqüentemente usados nas escolas de Santos. Para o Ensino Fundamental, iremos analisar se os livros abordam ou não o conteúdo problemas de contagem e, para o Ensino Médio, como o tema análise combinatória é trabalhado por eles.

Relações dos livros:

- ♦Matemática e vida –5ª a 8ª - Bongiovanni/ Vissoto/ Laureano – Editora Ática. São Paulo, 1996.
- ♦Matemática - 5ª a 8ª - Imenis e Lellis – Editora Scipione – São Paulo, 1997.
- ♦Matemática Uma Aventura do Pensamento - 5ª a 8ª - Oscar Guelli – Editora Ática – São Paulo, 1998.
- ♦Aprendendo Matemática - 5ª a 8ª - José Ruy Giovanni e Eduardo Parente FTD – São Paulo, 1999 (Com base nos avanços indicados pelo PCN).
- ♦A conquista da Matemática - 5ª a 8ª - Giovanni, Castrucci e Giovanni Jr. – FTD – São Paulo, 1998 (Coleção revisada de acordo com as observações da avaliação dos livros didáticos do Mec – SEF/FNDE).
- ♦Matemática - 2º grau, volume único – Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Mauro Degenszajn, Roberto Périgo – Editora Atual – São Paulo, 1997.

♦ Matemática e Vida – 2º grau, volume 2 – Bongiovanni/Vissoto/Laureano – Editora Ática – São Paulo, 1993.

♦ Matemática para a Escola do Segundo Grau – volume 2 – Antonio do Santos Machado – Editora Atual – São Paulo, 1996.

♦ Matemática para o Segundo Grau – volume 2 – Gentil, Marcondes, Greco, Belloto, Sérgio – Editora ática – São Paulo, 1997.

♦ Matemática 2 – volume 2 – José Ruy Giovanni e José Roberto Bonjorno – Editora Ftd – São Paulo, 1992.

2.3.5 Análise dos livros didáticos

Nesta seção, faremos a análise dos livros do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, separadamente, em relação às seis categorias citadas na seção 2.2.3.

<u>Ensino Fundamental</u>

Ao analisar as cinco coleções, citadas anteriormente, constatamos que apenas uma apresenta o conteúdo de análise combinatória na 5ª série e retornando-o um pouco, na 7ª série, como ferramenta para introduzir o conceito de probabilidade. Portanto, a análise dos livros didáticos para o Ensino Fundamental ficará um tanto comprometida, porque será feita apenas a partir de uma coleção, qual seja, Matemática 5ª a 8ª, de Imenis e Lellis, e ainda assim em apenas duas séries das quatro séries finais desse nível.

♠ *Forma de introdução do conteúdo*

A forma de introdução do conteúdo na 5ª série é feita por meio da contagem direta, trazendo situações-problema que podem criar no aluno, de modo gradativo, o raciocínio combinatório. Exemplificando, mostraremos uma das situações que inicia a abordagem do conteúdo.

CONVERSANDO SOBRE O TEXTO

♦ALGUÉM CONSEGUE DAR EXEMPLO DE SITUAÇÕES COM VÁRIAS POSSIBILIDADES?

♦NO JOGO DA VELHA QUE VOCÊ VIU, O X PODE FAZER UMA JOGADA QUE GANHA. QUAL É ESSA JOGADA? MOSTRE DUAS POSSIBILIDADES DE O JOGO TERMINAR DEPOIS DESSA JOGADA.

Matemática – (Imenis e Lellis, 5ª série, pp. 23)

No livro da 7ª série, ainda observamos a preocupação de mostrar ao aluno um caminho que o faça analisar e interpretar o problema proposto, direcionando-o para o conceito de probabilidade, como exemplificaremos a seguir:

JOGOS COM DADOS

JOGO 1 – SOMA DA SORTE

NA CLASSE, FORMAM-SE 11 TIMES. UM TERÁ O NÚMERO 2, OUTRO O NÚMERO 3 E ASSIM POR DIANTE ATÉ 12.

CADA TIME, NA SUA VEZ, JOGA DOIS DADOS E SOMA OS PONTOS. O TIME CUJO NÚMERO É IGUAL À SOMA FAZ GOL.

ALGUÉM DEVE ANOTAR NA LOUSA O NÚMERO DE GOLS DE CADA TIME.

APÓS 50 LANÇAMENTOS ACABA O JOGO E GANHA O TIME COM MAIS GOLS.

TRANSCREVA EM SEU CADERNO OS RESULTADOS DA LOUSA E ANOTE SUA OPINIÃO: O TIME VENCEDOR GANHOU APENAS POR TER MAIS SORTE?

Matemática – (Imenis e Lellis, 7ª série, pp. 169)

Analisando esses dois volumes, pudemos observar que a abordagem adotada tem uma grande chance de permitir que o aluno construa de forma gradativa o conceito.

♠ *Apresentação dos conceitos de arranjo e permutação*

Observamos que não há uma preocupação em definir arranjo e combinação, pois o objetivo é apenas introduzir o raciocínio combinatório.

♠ *Como e quando são introduzidas as fórmulas*

Como comentamos anteriormente, essa coleção tem apenas por objetivo introduzir o raciocínio combinatório e, conseqüentemente, não foi apresentada nenhuma fórmula.

♠ *Apresentação de problemas com enunciados diversificados*

Tanto na 5ª como na 7ª série notamos enunciados bem diversificados, solicitando dos alunos criatividade e compreensão plena da situação descrita no problema. Como é dada apenas uma introdução à análise combinatória, não há como o aluno associar certas palavras-chave.

Para exemplificar, mostraremos alguns tipos de problemas sugeridos em classe e para a casa.

• VEJA TODAS AS ADIÇÕES DE DOIS NÚMEROS NATURAIS QUE TÊM SOMA 3:

$\boxed{0+3}$ $\boxed{1+2}$ $\boxed{2+1}$ $\boxed{3+0}$

a) ESCREVA TODAS AS ADIÇÕES DE DOIS NÚMEROS NATURAIS COM SOMA 5.
b) ESCREVA TODAS AS QUE TÊM SOMA 8.
c) SEM ESCREVER TODAS, DESCUBRA QUANTAS SÃO AS ADIÇÕES DE DOIS NÚMEROS NATURAIS COM SOMA 100.

•AS PLACAS DE AUTOMÓVEIS DE UM CERTO PAÍS SÃO CONSTRUÍDAS COM APENAS UMA LETRA E DOIS ALGARISMOS.

A LETRA É SEMPRE UMA DAS CINCO VOGAIS. O PRIMEIRO ALGARISMOS É 1 OU 2; O SEGUNDO TAMBÉM.

a) MOSTRE TODAS AS PLACAS POSSÍVEIS QUE COMECEM COM A
b) CONSIDERANDO TODAS AS 5 VOGAIS, QUAL É O TOTAL DE PLACAS POSSÍVEIS?

Matemática – (Imenis e Lellis, 5ª série, pp. 236 e 240)

♠ *Ênfase na resolução com auxílio de diagramas*

Observamos que na 5ª série o autor utiliza desenhos e esquemas para a resolução do problema; já na 7ª série, ele se vale da árvore de possibilidades. Notamos que a resolução por meio de representações é bem valorizada, na interpretação do problema dado.

Exemplificando a observação acima, mostraremos dois exercícios propostos nos livros de 5ª e 7ª séries.

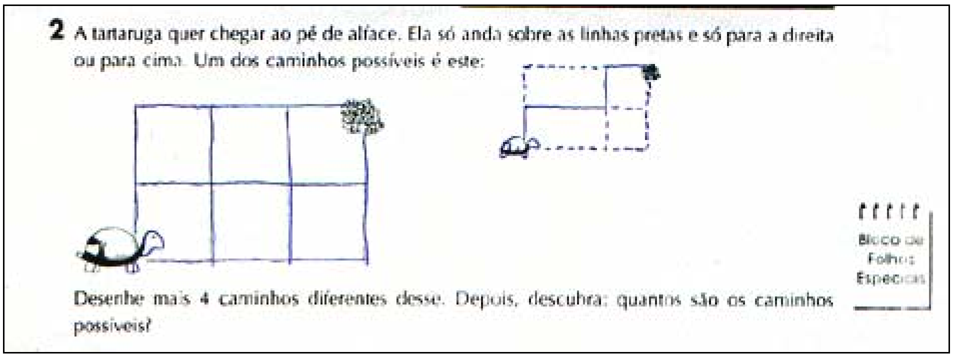


Figura 2.5: Exemplo do livro Matemática – (Imenis e Lellis, 5ª série, pp. 235)

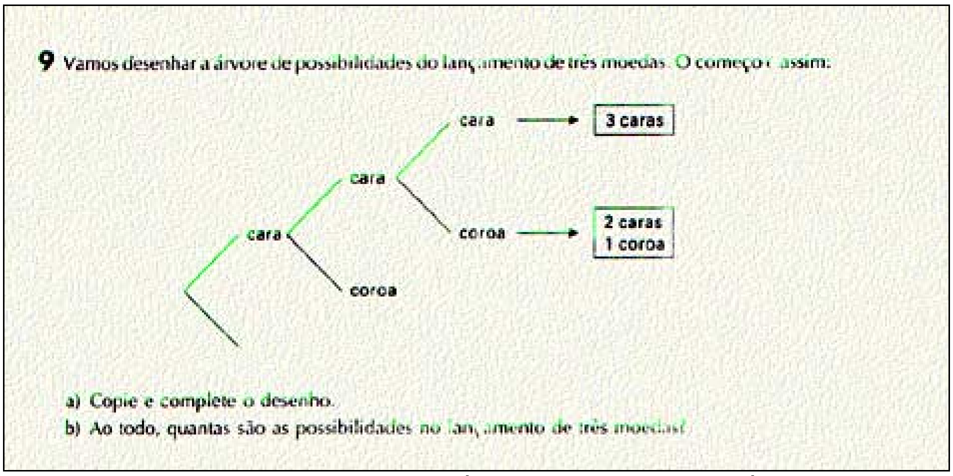


Figura 2.6: Exemplo do livro Matemática –(Imenis e Lellis, 7ª série, pp. 173)

♠ *Inclusão de fatos históricos*

Em nenhum momento, houve a preocupação em explorar fatos históricos ou apresentar biografia dos principais matemáticos envolvidos na criação da análise combinatória. Também não se apresentou exercício contextualizado da época. Encontramos, apenas, alguns problemas que solicitam o cálculo do número de possibilidades de um certo jogo, mostrando, indiretamente, o surgimento da análise combinatória.

<u>Ensino médio</u>

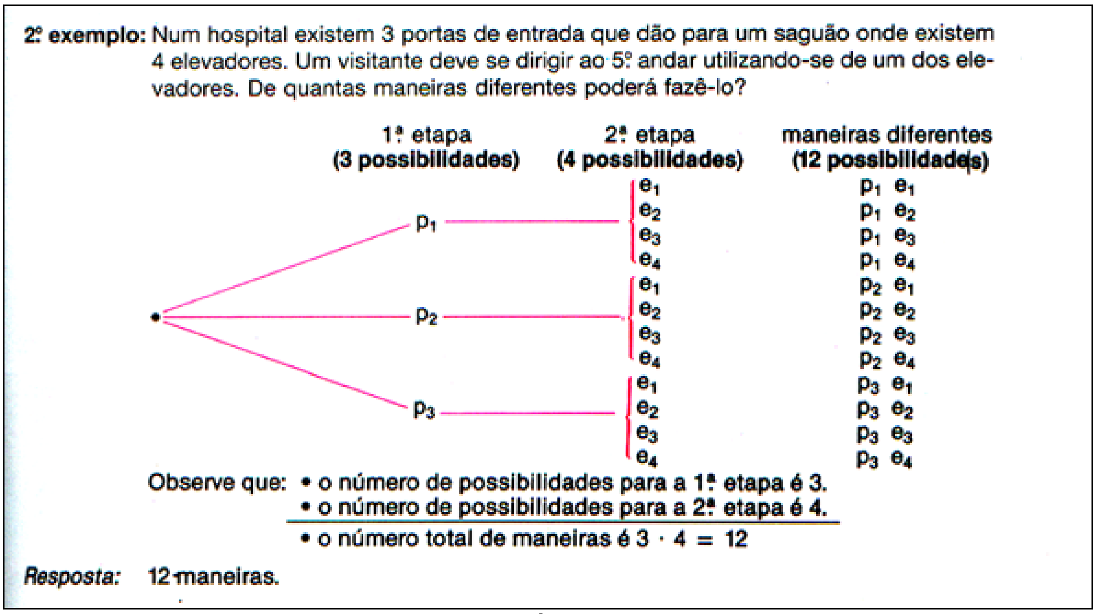
Aqui, analisaremos cinco livros didáticos, sempre sob a óptica de nossas categorias.

♠ *Forma de introdução do conteúdo.*

Nessa categoria, observaremos se os livros apresentam problemas que proporcionam os alunos a procurar caminhos para solucioná-los, motivando-os a desenvolver técnicas para a descrição dos casos possíveis e para sua contagem.

Apenas um dos cinco livros analisados familiariza os alunos com problemas de contagem, numa tentativa de possibilitar que os mesmos construam as técnicas para a resolução dos problemas propostos.

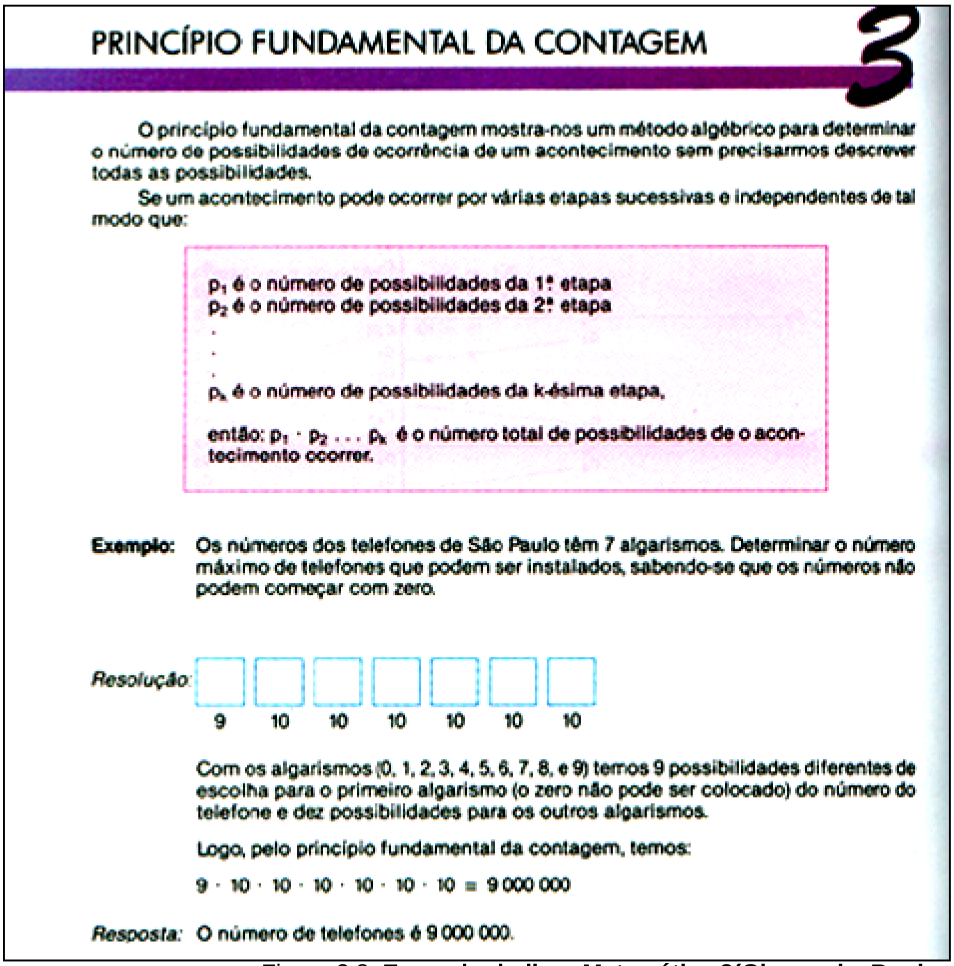
Nos demais livros didáticos analisados, não há proposta de familiarização com os problemas de contagem, mas sim com a sistematização imediata do conteúdo, isto é, são apresentados um ou dois exemplos os quais apresentam a resolução através da contagem direta e, logo a seguir, define-se o princípio fundamental da contagem, como exemplificaremos:


2º exemplo: Num hospital existem 3 portas de entrada que dão para um saguão onde existem 4 elevadores. Um visitante deve se dirigir ao 5º andar utilizando-se de um dos elevadores. De quantas maneiras diferentes poderá fazê-lo?

Observe que:
- **o número de possibilidades para a 1ª etapa é 3.**
- **o número de possibilidades para a 2ª etapa é 4.**
- o número total de maneiras é $3 \cdot 4 = 12$

Resposta: 12 maneiras.

Figura 2.7: **Exemplo do livro Matemática 2 (Giovanni e Bonjorno, pp. 183)**



PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM 3

O princípio fundamental da contagem mostra-nos um método algébrico para determinar o número de possibilidades de ocorrência de um acontecimento sem precisarmos descrever todas as possibilidades.

Se um acontecimento pode ocorrer por várias etapas sucessivas e independentes de tal modo que:

p_1 é o número de possibilidades da 1ª etapa
p_2 é o número de possibilidades da 2ª etapa
.
.
.
p_k é o número de possibilidades da k-ésima etapa,

então: $p_1 \cdot p_2 \ldots p_k$ é o número total de possibilidades de o acontecimento ocorrer.

Exemplo: Os números dos telefones de São Paulo têm 7 algarismos. Determinar o número máximo de telefones que podem ser instalados, sabendo-se que os números não podem começar com zero.

Resolução: $\square\ \square\ \square\ \square\ \square\ \square\ \square$

9 10 10 10 10 10 10

Com os algarismos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, e 9) temos 9 possibilidades diferentes de escolha para o primeiro algarismo (o zero não pode ser colocado) do número do telefone e dez possibilidades para os outros algarismos.

Logo, pelo princípio fundamental da contagem, temos:

$9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9\,000\,000$

Resposta: O número de telefones é 9 000 000.

Figura 2.8: **Exemplo do livro Matemática 2(Giovanni e Bonjorno, pp. 184)**

Notamos que o exemplo apresentado não sugere questionamento nem atividades que envolvam a participação do aluno. Trata-se de um texto pronto e formal, fato que, baseado nos estudos de Vergnaud (1991), acreditamos fornecer pouca ou nenhuma condição para o aluno construir de maneira gradativa e significativa esse conceito.

Segundo Vergnaud (1991), os conhecimentos adquiridos pelo aluno devem ser construídos por ele mesmo, em relação direta tanto com as operações que ele é capaz de fazer com a realidade como com as relações que ele está em condições de captar, compor e transformar, e ainda em relação aos conceitos que ele vai construindo progressivamente. A análise do papel da linguagem e do simbolismo dentro da conceitualização é muito importante para que o professor possa identificar em que ponto do processo de aprendizagem se encontra o seu aluno.

No caso do exemplo apresentado na figura 2.6, observamos que em nenhum momento é dada ao aluno a possibilidade de, a partir da análise do problema, poder chegar ao conceito do princípio fundamental da contagem.

♠ *Apresentação dos conceitos de arranjo e combinação.*

Analisaremos como os livros apresentam esses dois tipos de agrupamentos, pois, segundo resultados obtidos nas pesquisas de Batanero (1996), uma das principais causas do fracasso na resolução de problemas de combinatória é a confusão sobre a relevância de ordem.

Acreditamos que se esses dois tipos de agrupamentos forem explicados simultaneamente, facilitará a compreensão do aluno sobre a questão ordem.

Observamos que, em três dos livros analisados, a definição de arranjo e combinação vem pronta, ou seja, a institucionalização do conceito ocorre no início do estudo. Esses dois tipos de agrupamentos são mencionados separadamente e também não se faz uma relação entre eles.

Os outros dois livros abordam simultaneamente os dois tipos de agrupamentos, sendo que apenas um se preocupa em colocar problemas para serem analisados os dois tipos de agrupamentos, reforçando, assim, a importância ou não da ordem dos elementos, abrindo um sub item à parte "Arranjo ou Combinação", como exemplificado a seguir:

"Numa classe do 2º colegial há oito alunos que praticam corrida:

a) Quantos resultados diferentes podem ocorrer, para os três primeiros lugares, numa disputa entre eles?

b) De quantos maneiras diferentes podem ser escolhidos três desses alunos para formar uma comissão que irá pedir dispensa das aulas?".

Acreditamos que esse processo de ensino poderá gerar no aluno problemas em relação ao hábito de analisar e diferenciar arranjo de combinação.

♠ *Como e quando são introduzidas as fórmulas*

Conforme análise feita, pudemos constatar que apenas um livro, dos cinco livros analisados, iniciou arranjo e permutação sem utilização da fórmula, colocando-a apenas no final do capítulo, quando definiu combinação simples. Acreditamos que houve um trabalho significativo, antes da introdução das fórmulas, apesar de ter sido, apenas, para arranjo e permutação.

Nos demais livros, observamos que após a definição de cada tipo de agrupamento, as fórmulas são introduzidas, seguidas de uma série de problemas para que na resolução se utilizem as fórmulas.

♠ *Apresentação de problemas com enunciados diversificados*

Quatro dos cinco livros analisados apresentam, no final do capítulo, problemas com enunciados diversificados, relacionados a arranjo, combinação e permutação. Considerando o fato de que esses quatro livros analisados não partem de situações problemas para a introdução do conceito, acreditamos que os exercícios apresentados no final do capítulo não são de fácil resolução para os alunos, pois não houve um trabalho anterior que valorizasse o reconhecimento dos diferentes tipos de agrupamentos.

O quadro a seguir mostra as relações entre problemas resolvidos (incluindo exemplos), problemas propostos e problemas complementares, de cada livro analisado.

LIVROS	Nº DE PÁGINAS DO CAPÍTULO	QUANTIDADE DE PROBLEMAS RESOLVIDOS		QUANTIDADE DE PROBLEMAS PROPOSTOS		PROBLEMAS COMPLEMENTARES	
		COM CONTEXTO	SEM CONTEXTO	COM CONTEXTO	SEM CONTEXTO	COM CONTEXTO	SEM CONTEXTO
MATEMÁTICA E VIDA	29	31	0	94	4	0	0
MATEMÁTICA PARA O SEGUNDO GRAU	22	34	12	44	18	6	5
MATEMÁTICA 2	19	26	7	99	22	50	3
MATEMA'TICA PARA A ESCOLA DO SEGUNDO GRAU	23	15	4	71	23	08	0
MATEMÁTICA	15	12	2	60	17	28	2

Tabela 2.1: Relações entre os problemas resolvidos, propostos e complementares, dos livros analisados.

Podemos notar que o único livro que destacamos nas categorias anteriores, por trabalhar o conteúdo de análise combinatória de forma diferente dos demais, foi também o único que não colocou problemas complementares no final do capítulo. Observamos, também, que todos os livros analisados, apresentam exercícios sem contexto, alguns em quantidade que nós consideramos excessiva, pois estes tipos de exercícios levam os alunos ao mecanismo do cálculo.

O livro com maior número de problemas propostos e complementares foi o Matemática 2, que faz a institucionalização do conteúdo logo no início. Devemos ressaltar que esse livro é o adotado na escola onde trabalharemos nossa seqüência didática e será utilizado na turma de referência.

Podemos, também, observar que o livro Matemática para o Segundo Grau foi o que apresentou maior quantidade de exercícios resolvidos e menor quantidade de exercícios propostos.

Notamos que alguns dos problemas complementares trazem enunciados semelhantes aos exercícios propostos, estimulando os alunos a associar algumas palavras-chave.

♠ *Ênfase na resolução com auxílio da representação*

Todos os livros analisados iniciam o conteúdo usando esquemas ou a árvore de possibilidades, mas apenas um livro faz uso da árvore de possibilidades durante a apresentação do conteúdo.

Pudemos, também, observar que para definir o princípio fundamental da contagem, arranjo, permutação e combinação, todos fizeram uso do processo de “tentativa e erro”, para depois colocarem a fórmula.

Nos exercícios propostos, nenhum livro induz o aluno a usar qualquer tipo de representação. O único que ainda possibilita o discente a usar algum tipo de representação é o livro “Matemática e Vida”, pois além de iniciar o conteúdo através da contagem direta, propõe alguns problemas.

Podemos concluir que nenhum dos livros analisados apresenta uma proposta explícita para o uso de diagramas, tabelas ou árvore de possibilidades.

♠ *Inclusão dos fatos históricos*

Não existe, na maioria dos livros didáticos analisados, preocupação de explorar fatos históricos, afirmação que pode ser comprovada pela amostra de livros didáticos selecionados. Dentre eles, um inclui pequena exploração histórica e outro apresenta a biografia de “Henri Poincaré” (matemático que deu seqüência aos trabalhos de probabilidade). O primeiro apresenta, também, alguns problemas contextualizados da época, resolvidos por análise combinatória, usando jogos atuais como loteria esportiva e loto.

Nos demais livros, não encontramos nenhum comentário sobre o porquê do surgimento da análise combinatória.

2.3.6 Análise do Parâmetro Curricular Nacional – Ensino Fundamental

O conteúdo análise combinatória, no ensino fundamental, é apresentado, somente, no segundo e terceiro ciclos. O objetivo consiste, apenas, em introduzir o raciocínio combinatório, sem a preocupação de se deter em casos particulares.

♠ *Forma de introdução do conteúdo*

O PCN (1998) aborda noções básicas de análise combinatória, pretendendo que o aluno interaja com situações concretas de análise de dados através da contagem direta.

O assunto é introduzido no 2º ciclo, através das possíveis maneiras de combinar elementos de uma coleção e contabilizá-las usando estratégias pessoais.

Como exemplo, observemos, a seguinte situação-problema:

Tendo duas saias – uma preta (P) e uma branca (B) e três blusas – uma rosa (R), uma azul (A) e uma cinza (C), de quantas maneiras diferentes posso me vestir?

No 3º ciclo, notamos que são colocadas situações-problema para serem resolvidas usando contagem direta e o princípio multiplicativo. Existe uma proposta de direcionar os alunos a compreenderem intuitivamente o princípio multiplicativo através de problemas, como exemplificaremos a seguir:

“Lancei dois dados: um vermelho e um azul. Quantos resultados diferentes são possíveis encontrar?”.

♠ *Apresentação dos conceitos de arranjo e combinação*

♠ *Como e quando são introduzidas as fórmulas*

Como já observamos anteriormente, o parâmetro para o ensino fundamental não tem como meta introduzir estes conceitos nem, conseqüentemente, suas fórmulas.

♠ *Apresentação de problemas com enunciados diversificados*

Não são apresentados muitos problemas, mas acreditamos que a proposta de trabalho seria não criar um abuso de analogia dos mesmos.

♠ *Ênfase na resolução com auxílio de diagramas.*

Pudemos observar que existe uma valorização em relação à representação. Pretende-se, principalmente, que o aluno se confronte com situações concretas de análises de dados através da contagem direta, fazendo uso da árvore de possibilidades.

No terceiro ciclo, as situações-problema apresentadas direcionam o aluno a fazer uso de representações (diagramas de árvore, tabelas, desenhos) como procedimento de resolução.

♠ *Inclusão de fatos históricos*

Não há uma proposta de introduzir algum fato histórico nem problemas contextualizados da época para que o aluno tenha conhecimento do surgimento da análise combinatória.

2.3.6 Análise da Proposta Curricular do Estado de São Paulo para o Ensino da Matemática (1989)

Primeiro Grau (Ensino Fundamental)

O conceito de contagem aparece no ciclo básico, somente para o aprendizado do conceito de multiplicação (na 3ª série) e para o aprendizado de potenciação (na 5ª série).

Na abordagem desse tema, é proposto que o aluno classifique os elementos de uma coleção, fazendo uso do diagrama de árvores ou confeccionando material concreto, para chegar a uma escrita multiplicativa.

Existe uma preocupação de familiarizar o aluno com a relação existente entre as classificações e a árvore, para depois envolvê-lo em problemas de contagem em que seja necessário utilizar a multiplicação.

Na 5ª série, o objetivo é apresentar situações-problema que envolvam multiplicações sucessivas de fatores iguais, enfatizando a grandeza do resultado (potência), ainda fazendo uso da árvore de possibilidades.

A nosso ver, essa introdução de contagem no ciclo básico é uma etapa que auxilia o aluno na construção do raciocínio combinatório.

Segundo Grau (Ensino Médio)

♠ *Introdução do conteúdo*

A proposta inicia-se com problemas a serem resolvidos de forma intuitiva, com o objetivo de que os alunos discutam as soluções encontradas. Nela sugere-se que o professor conduza os alunos a tal apresentação das soluções, induzindo-os a uma discussão, onde possam argumentar seu procedimento de resolução. Nessa etapa, são colocados problemas variados, compostos de poucos elementos, para que os alunos se familiarizem com o raciocínio combinatório sem ainda precisarem se deter em casos particulares.

A seguir, propõem-se problemas para que os estudantes possam sistematizar a contagem. A proposta tem, para essa análise, o objetivo de fornecer indicações para o desenvolvimento da técnica de contagem, como, por exemplo, o princípio multiplicativo. Tal princípio deverá ser entendido intuitivamente, isto é, deve ser uma conseqüência natural do processo de formação e representação das possibilidades.

São propostos, a seguir, problemas para que os alunos utilizem o princípio multiplicativo, acreditando-se que eles já o dominem intuitivamente.

♠ *Apresentação dos conceitos de arranjo e combinação*

A apresentação desses conceitos é trabalhada de forma intuitiva, quando são propostos problemas para serem resolvidos através do princípio fundamental da contagem. Já são feitas algumas observações relacionadas a importância de considerar a ordem dos elementos, como exemplificaremos a seguir:

"Numa urna foram colocadas 5 bolas de cores diferentes: vermelha, preta, amarela, cinza e branca. De quantas maneiras diferentes poderemos retirar 3 bolas da urna?". (problema 21, pp 93)

Comentário

Ao ser proposto o problema para a classe, é possível que surjam soluções diferentes, pois os alunos podem interpretar diferentemente o enunciado. Façamos um levantamento dessas possíveis soluções.

São levantadas três possíveis soluções, a primeira onde serão retiradas três bolas consecutivas e com reposição (arranjo com repetição), a segunda onde serão retiradas três bolas consecutivas e sem reposição (arranjo simples) e a terceira, onde as três bolas serão retiradas simultaneamente (combinação simples). Observam que nas duas primeiras soluções ficou estabelecida a ordem em que as bolas foram retiradas.

Até este momento, nomenclatura, definições relativas a arranjos, permutações e combinações não foram abordadas. As idéias relativas a esses conceitos deverão ser desenvolvidas intuitivamente pelos alunos durante o trabalho com o princípio multiplicativo. Depois desta etapa é que deverá ser feita a sistematização dos conceitos de arranjos e combinações.

♠ *Como e quando são introduzidas as fórmulas*

Como já mostramos na análise da apresentação dos conceitos de arranjo e combinação, a sistematização desses conceitos é feita após um trabalho intuitivo, através do princípio multiplicativo, e logo em seguida são apresentadas as fórmulas, usando-se o conceito do princípio fundamental da contagem.

♠ *Ênfase na resolução com auxílio de diagramas*

Podemos observar que existe uma certa valorização no uso de diagramas, tabelas e árvores de possibilidades para iniciar a resolução de um problema.

Também são colocadas situações-problema onde não é aplicável o princípio multiplicativo, sendo um dos processos de resolução a árvore de possibilidades.

♠ *Inclusão dos fatos históricos*

Na proposta, não existe uma preocupação de mostrar aos alunos um pouco da história do surgimento da análise combinatória. Os únicos problemas, apresentados, referentes a jogos são os do dominó e da moeda, que mostram, de maneira indireta, a necessidade do surgimento da análise combinatória.

A nosso ver, o método de ensino da análise combinatória presente na Proposta Curricular é bom e pode ser desenvolvido em sala de aula, pois existe uma preocupação de levar o aluno à construção gradativa do conceito. Baseados neste ponto de vista, decidimos seguir alguns tópicos da proposta na nossa seqüência de ensino.

2.3.8 Comparação das abordagens adotadas nos livros didáticos analisados com a Proposta Curricular e com o PCN.

Quanto às coleções do Ensino Fundamental e do PCN, podemos observar que os dois enfatizam a contagem direta e o uso de representações para, só depois, fazerem uso do princípio multiplicativo. Ambos trabalham apenas com a parte introdutória de análise combinatória, isto é, introduzem o raciocínio combinatório sem a preocupação de definir arranjo, permutação e combinação.

As demais coleções não apresentam o conteúdo análise combinatória no ensino fundamental.

Quanto aos livros do Ensino Médio e a proposta curricular, temos, que dos cinco livros didáticos analisados, quatro não fornecem a parte introdutória sugerida pela proposta, ou seja, não há uma preocupação em familiarizar o aluno com os problemas de contagem, mas sim com a sistematização imediata do conceito. Esses quatro livros fornecem a parte introdutória, passando rapidamente sobre o tópico em questão, com todas as problemas resolvidos.

A proposta sugere, inicialmente, situações-problema sobre arranjo, combinação e permutação, para que possam ser resolvidas através de contagem. Dos livros didáticos analisados, quatro não se preocupam em motivar o aluno a analisar o tipo de agrupamento que está sendo envolvido no problema. Isso pode gerar dificuldade no momento em que o aluno se deparar com enunciados diferentes, aos quais não está acostumado a resolver.

Faremos, a seguir, uma comparação das seqüências adotadas pela proposta curricular e de três livros que não desenvolvem o conteúdo da mesma forma sugerida pela proposta.

Proposta Curricular	**Livros didáticos**
Problemas de contagem para serem resolvidos intuitivamente	Fatorial
Sistematização da contagem, através de diagramas, árvores e quadros para a descrição dos acontecimentos	Princípio multiplicativo
Princípio multiplicativo	Arranjo simples
Árvore de possibilidades em casos onde não é aplicável o princípio multiplicativo	Combinação simples
Arranjos com repetição	Arranjo com repetição
Arranjos simples	Permutação com repetição
Fatorial	Exercícios complementares
Permutação simples	
Combinação simples	

Tabela 2.2: Comparação das seqüências adotadas pela proposta curricular e os livros didáticos.

2.4 REVISÃO DE LITERATURA

Para a realização deste estudo, procuramos investigar o que já foi elaborado no contexto das pesquisas em Educação Matemática. Pouco encontramos, ao revisarmos a literatura, em relação ao ensino de análise combinatória. Todavia, o que existe é de grande relevância, como os trabalhos de Batanero, Piaget, Fischbein, Grenier e Maury, além de pesquisas correlatas de probabilidade, como a de Coutinho.

Iniciaremos por Batanero, dado que esta autora desenvolveu diversos trabalhos sobre o comportamento dos alunos na resolução de problemas combinatórios, com ou sem o conhecimento de análise combinatória. Esses trabalhos (1996, 1997) serviram de referência para o nosso estudo principalmente no que se refere ao capítulo da análise dos resultados que obtivemos.

Em "*Estratégias en la resolución de problemas combinatórios por estudiantes com preparación matemática avanzada*" Batanero (1997), destacamos a importância de analisar as etapas que o aluno seguiu para resolver os problemas propostos. A intenção era de observar o entendimento dos estudantes no processo de resolução de um problema combinatório. A aplicação foi realizada com apenas quatro estudantes do curso de licenciatura em matemática, escolhidos entre os que obtiveram os melhores e piores resultados na resolução de treze problemas combinatórios elementares, apresentados a 29 estudantes em questionário escrito, para que explicassem mais detalhadamente suas respostas.

Como conclusão dos resultados obtidos, foi observado que os alunos mostram uma dificuldade elevada na resolução desses problemas, inclusive os alunos com uma boa preparação matemática. Os bons resultados são caracterizados pela facilidade em identificar a configuração da combinatória pedida, compreender a ordem, a repetição e o enunciado do problema, ser capaz de enumeração sistemática, generalização e identificação da combinatória adequada. As causas de fracasso seriam a confusão sobre o tipo de elementos que se combinam, falta de capacidade de enumeração e falhas de tipo aritmético.

Esse trabalho em muito contribuiu na construção de nossa seqüência de ensino, alertando-nos para a ênfase na ordem e repetição e não utilização das fórmulas.

Em outro trabalho, *"Razonamiento combinatorio en alumnos de secundária"* (1996), Batanero, destaca a importância de analisar as variáveis que afetam os procedimentos e erros dos alunos ao resolverem problemas combinatórios, mostrando como devem ser consideradas essas variáveis no aprendizado. A aplicação foi realizada em uma amostra de 720 alunos (14 – 15 anos) de nove escolas de Granada e Córdoba. Desses 720 alunos, 352 aprenderam Combinatória e o restante (368) não.

A autora observou que nos dois grupos de alunos houve grandes dificuldades em resolver os problemas. Os estudantes mostraram falta de raciocínio recursivo e dificuldade de interação de todos os fatores de instrução. A análise qualitativa revelou a dependência de tipos de erros, de grande importância para nossa pesquisa.

Muito significativos para a elaboração da nossa seqüência e para a análise dos instrumentos diagnósticos foram os trabalhos a seguir:

Nos anais do EPEM, encontramos o texto "*Como Resolver Problemas Combinatórios: Modelos e Analogias*" (Rigolino e Hariki, 1996). Esse mini curso teve como objetivo trabalhar os seguintes aspectos da heurística da resolução de problemas de análise combinatória: (i) o uso de modelos, por exemplo, o modelo da colocação de bolas em urna; e (ii) o uso de analogias, para criar conexões na rede de problemas. Com tais instrumentos heurísticos, seria possível abordar de maneira efetiva todos os problemas de contagem usualmente trabalhados no ensino de segundo grau, o atual ensino médio.

Esse trabalho foi apresentado de forma resumida, mais como caráter de experiência do que de pesquisa, o que não nos permitiu estabelecer maiores considerações. Apesar disso, notamos que o estudo envolve técnicas de modelagem matemática e assim concluímos sobre a importância de se construir uma visão mais ampla do conhecimento, através de uma seqüência que procurasse explorar e dar sentido ao conceito.

Encontramos, no “Educacional Studies in Mathematics”, um trabalho desenvolvido por Fischbein e Grossman (1997, nº 34) sobre a afinidade entre esquema e intuição, denominado: *“Schemata and intuitions in combinatorial reasoning”.* Tal trabalho basicamente procura levantar a hipótese de que as intuições são sempre baseadas nos esquemas estruturais.

Os autores analisaram a interação entre intuição e esquemas subjacentes em estimações intuitivas do valor das operações combinatórias com diversos tipos de sujeitos, entre os quais se encontram adultos sem instrução combinatória. Observaram que às estimações intuitivas dos sujeitos subjaziam cálculos básicos relacionados a operações combinatórias, e os números de elementos que se têm a combinar. Os cálculos se reduzem a operações multiplicativas binárias, em lugar de se realizar o conjunto requerido de operações, sugerindo que os esquemas combinatórios sofrem um processo de compreensão e reduzem-se a uma estrutura mínima, para apoiar as intuições errôneas dos sujeitos.

Achamos esse estudo importante para o nosso trabalho, visto que a nossa seqüência tem o objetivo de deixar que os alunos resolvam, a princípio, intuitivamente as situações-problema. O trabalho apresentado nos mostra que existem problemas em relação à construção dos esquemas e à forma de avaliar através do seu ponto de vista, mas que o pensamento seria simplesmente impossível se não nos apoiássemos, de imediato, nas próprias intuições evidentes.

No livro de Piaget e Inhelder, *"La genése de l'idée de hasard chez l'enfant"* (1951), o qual estudou a natureza e as condições da gênese das idéias do acaso, observamos que existe uma estreita relação entre a formação dos conceitos e as operações formais já avaliadas por Piaget.

No estado sensori-motora (4 a 7 anos aproximadamente), o aluno não chega a descobrir as combinações empíricas. Esse primeiro estágio (combinações empíricas) é comparável ao que caracteriza o começo da seriação. As operações de combinação persistem e agem a um nível preparatório.

No estado das operações concretas (7 a 11 anos) aproximadamente, já se inicia uma quantificação sistemática. Nesse estágio (pesquisa de um sistema), existe interesse por parte do aluno em fazer diversos ensaios de sistema, dos mais rudimentares até a aproximação de um método correto.

No estado das operações formais (11 – 12 anos em diante), o aluno procura a combinação metódica e completa. Nesse estágio (descoberta de um sistema), os sujeitos descobrem um sistema, de modo que nenhuma associação seja esquecida.

Esse livro apresenta trabalhos interessantes realizados com alunos nos três estágios apresentados. Foi a partir dessa leitura que nos veio o incentivo em aplicar a nossa seqüência em uma turma de 8ª série do ensino fundamental, já que, nessa fase, segundo Piaget, os alunos procuram a combinação metódica e completa.

Encontramos em "Recherches em Didactique des Mathématiques" (1998, nº1, vol.18), um trabalho desenvolvido por Grenier e Payan sobre o processo de modelagem na matemática discreta, denominado: *"Spécificités de la Preuve et de la Modélisation em Mathématiques Discrètes"*. Este desenvolve a importância da demonstração e da modelização (sair do problema de interpretação de uma situação real para chegar à resolução matemática), por meio de uma descrição rápida, ilustrada por alguns exemplos de certos temas e métodos da matemática discreta. Como exemplo, utiliza-se a análise combinatória, por ser um estudo que gera grandes dificuldades e por trazer à tona a necessidade de modelizar as situações de contagem.

Tal estudo veio evidenciar a necessidade de que o aluno participe do processo de modelagem para o ensino da análise combinatória.

Em "Recherches em Didactique des Mathématiques" (1986, nº 1, vol. 7), também encontramos um estudo sobre resolução de problemas combinatórios com alunos de 9 e 10 anos de idade, denominado *"Combinatoire et Résolution de Problemes au Cours Moyens Premiere et Deuxieme Années"*. É um estudo realizado em CM1 e CM2 (1ª a 4ª série do ensino fundamental), o qual investiga os processo utilizados pelos alunos ao resolverem problemas de combinatória, colocando um material referente à área de eletricidade. Os alunos do CM1 trabalham em dupla, enquanto os do CM2 trabalham individualmente, surgindo um efeito positivo na interação social em CM1.

Esse estudo reforçou a escolha em trabalhar nossa seqüência, para o grupo experimental, em dupla. E também foi ao encontro do que acreditamos ser possível, iniciar o conteúdo análise combinatória antes do 2º ano do Ensino Médio.

Nos anais do EPEM, também encontramos um estudo de Coutinho (1996), sobre "*Introdução ao Conceito de Probabilidade Para Adolescentes (12/13 anos – 6ª Série do 1º Grau)*". Nele foi possível verificar que os alunos têm capacidade para o raciocínio combinatório, desde que a introdução deste conceito seja feita a partir de construções que lhe dê sentido. A pesquisa objetivou utilizar a visão freqüentista como um agente facilitador para os conceitos básicos de probabilidade, devido a sua maior proximidade com a realidade do aluno. Acredita-se que a introdução do conceito de probabilidade no âmbito da 6ª série do Ensino Fundamental deve diminuir significativamente os entraves para a aprendizagem deste conteúdo, dificultando o reaparecimento das concepções errôneas.

Nos anais do PME20, encontramos outro estudo de Coutinho (1996), sobre *"Introduction on the Concept of Probability to Teenargers – (12/13 years old)*. Este trabalho se refere a um pôster apresentado no PME20, que analisa as concepções errôneas mais resistentes sobre as noções de acaso e probabilidade, encontradas na análise comparativa de dois questionários aplicados em momentos distintos, antes do aprendizado e três meses após o mesmo.

Nesse estudo, foi observado que muitos dos estudantes que apresentaram concepções errôneas no primeiro teste, apresentaram concepções corretas após a seqüência didática. Entretanto, também foram encontrados alguns alunos com os mesmos erros apresentados no primeiro teste.

Com base nestes resultados, em 1996, foi feita uma análise clínica com 6 alunos participantes das atividades no ano anterior, por meio de problemas que levassem a identificar as concepções então existentes.

Após a análise, conclui-se que os jovens analisados, que foram os que melhor se saíram nas atividades em 1995, não possuíam organização mental nem raciocínio combinatório, o que ficou bastante evidente nas questões que envolviam o conceito de proporção. Conforme esperado também, apresentaram problemas de linguagem, ou seja, muitas vezes sabiam o conceito, mas não conseguiam expressar seu pensamento por falta de um vocabulário adequado.

Essas duas pesquisas de Coutinho nos levaram a investigar os fatores que influenciam o raciocínio combinatório, utilizando-nos de situações-problema com enunciados significativos para os alunos.

Os resultados desses estudos somados com nossas leituras sobre Teorema-em-ação (Vergnaud, 1990, 1998) nos alertaram para a importância de considerarmos em nossa seqüência não apenas a fala dos alunos bem como suas ações. De fato, a partir de seus estudos, Falcão (no prelo), conclui que:

> *... Assim os experts mais experimentados não são capazes de exprimir em palavras uma boa parte dos conhecimentos que ainda assim eles utilizam na ação [competência-em-ação], e que são justamente representativas em sua expertise. Da mesma forma as crianças não são capazes de explicar todos os conhecimentos que contribuem à organização racional de suas atividades, apesar de serem de se engajar em atividades cognitivamente complexas, interpretáveis pelo observador externo em termos de "teoremas-em-ação".(pp.2).*

2.5 IDÉIAS TEÓRICAS

Nessa seção, descreveremos as concepções que fundamentam teoricamente a nossa pesquisa, provenientes da Didática da Matemática Francesa.

Há pelo menos três idéias principais influenciando nossa pesquisa: transposição didática, teoria dos campos conceituais e noções de registros de representações. Ao invés de discutirmos os autores, trataremos dessas idéias, inserindo-os no decorrer da análise. Faremos, ao final da seção, breves comentários sobre a noção de "contrato didático", na visão de Brosseau, e de "zona de desenvolvimento proximal", introduzida por Vergnaud.

2.5.1 Transposição didática

O estudo da transposição didática nos permitiu escolher a abordagem que daremos ao nosso trabalho. Para isso, fizemos um estudo histórico, procurando os métodos desenvolvidos para a resolução da análise combinatória; observamos livros didáticos atuais para comparar suas abordagens através das categorias que achamos ser essencial para o desenvolvimento do conteúdo; e produzimos uma seqüência didática ,a fim de aplicar o conteúdo de análise combinatória de forma mais significativa.

Uma das questões centrais da educação matemática é o estudo do processo evolutivo por que passa a formação do seu objeto de ensino. Na análise dessa evolução, é possível identificar diversas fontes de influências que determinam as transformações do saber ensinado na escola. Aqui, descreveremos a estrutura dessas transformações, através da noção de transposição didática segundo Brousseau e Chevallard.

Brousseau (1986) critica a metodologia do ensino da matemática que se apóia na apresentação axiomática. Essa metodologia permite ao estudante e a seu professor ordenar as atividades e acumular, num tempo mínimo, bastante “saber”, mais próximo do “saber sábio”.

Ele observa que essa apresentação esconde completamente a história desses saberes, isto é, a sucessão das dificuldades e questões que provocaram a aparição dos conceitos fundamentais, seu uso na criação de novos problemas, a introdução de técnicas e questões nascidas do progresso de outros setores, a rejeição de certos pontos de vistas julgados falsos ou impróprios e as numerosas alterações que esse saber sofreu.

O “saber sábio” deve sofrer adaptações e transformações para torná-lo ensinável. Brousseau (1996) chama essa operação de “transposição didática”.

O autor situa o processo de transposição didática em três etapas:

1) O trabalho dos matemáticos

No momento da comunicação dos resultados de sua pesquisa, o matemático despersonaliza, descontextuliza e destemporaliza o mais possível os seus resultados.

2) O trabalho do aluno

Para G. Brosseau (ibid.), o trabalho do aluno deve ser, às vezes, comparável ao do matemático. Saber a matemática não é só aprender as definições e os teoremas, para reconhecer a ocasião de os utilizar e os aplicar, mas além de tudo resolver os problemas. Brosseau observa que resolver os problemas é só uma parte do trabalho, pois achar boas questões e suas soluções é também importante. O professor é encarregado da busca das situações-problema que permitem ao aluno agir, formular, provar, etc...

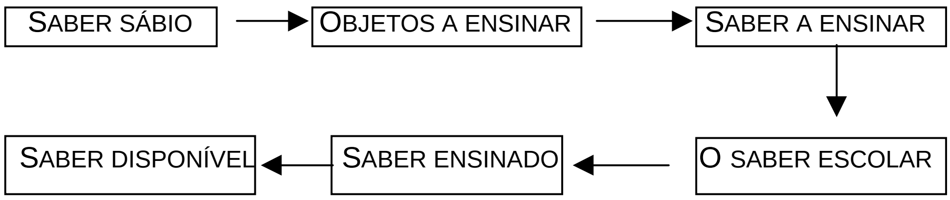
3) Trabalho do professor

O professor deve construir situações-problema nas quais o conhecimento matemático apontado seja recontextualizado e repersonalizado, em vista de se tornar um conhecimento do aluno, quer dizer, uma resposta mais natural às condições particulares é indispensável para que esse conhecimento tenha um sentido.

No desenvolvimento de toda prática educativa, é sempre necessário estabelecer prioridades na conduta dos procedimentos pedagógicos. Uma dessas prioridades diz respeito à seleção dos conteúdos presentes nos programas escolares. O conjunto desses conteúdos, que também pode ser chamado de *saber escolar,* tem como fonte original o saber científico. Entretanto, através dos efeitos de todo um processo evolutivo, ocorrem transformações que acabam determinando características bem particulares ao saber escolar. A noção de transposição didática visa estudar esse processo seletivo que ocorre através de uma longa rede de influências, envolvendo diversos segmentos do sistema educacional. Essas idéias já aparecem numa primeira definição de transposição didática dada por Chevallard (1991):

> *"Um conteúdo do conhecimento, tendo sido designado como saber a ensinar, sofre então um conjunto de transformações adaptativas que vão torná-lo apto a tomar lugar entre os "objetos de ensino". O "trabalho" que, de um objeto de saber a ensinar faz um objeto de ensino, é chamado de transposição didática.(pp.39).*

Chevallard estuda a transposição didática, seguindo o esquema:



Transposição didática = conjuntos destas adaptações e transformações.

A seguir definimos as diferentes etapas da transposição didática, segundo o pesquisador (1991).

Saber sábio:

Quando um pesquisador tem por objetivo comunicar os resultados da sua pesquisa, ele não faz geralmente referência a seus conhecimentos próprios, a suas estratégias pessoais de pensamentos, ao tempo e duração de seu trabalho. Digamos que ele despersonaliza esse saber.

Para dar uma generalidade máxima aos resultados, ele elimina a origem dos problemas encontrados na partida. Nessa passagem para a abstração, ele apenas retém os conceitos operatórios. Digamos que ele descontextualiza o saber. Podemos dizer que o saber sábio em matemática é:

- despersonalizado;
- descontextualizado (no que se refere às publicações);
- ordenado pelos problemas encontrados (no que tange aos conhecimentos dos pesquisadores);
- sincretizado, ou seja, os saberes são ligados.

Os objetos a ensinar.

O conjunto das fontes de influências atuantes na seleção dos conteúdos, que deverão compor os programas escolares e determinam todo o funcionamento do processo didático, recebeu, por parte de Chevallard, o nome de *noosfera*. Fazem parte da noosfera: cientista, professores, especialistas, políticos, autores de livros e outros agentes da educação.

O resultado do trabalho seletivo da noosfera não só determina os conteúdos escolares como também acaba exercendo uma influência considerável na estruturação dos valores, objetivos e métodos que conduzem o processo de ensino. Isto é o primeiro ato da transposição didática.

O saber a ensinar e os objetos do ensino:

Tendo sido designados os objetos a ensinar, o sistema educativo está encarregado de traduzi-los em um conjunto de conhecimentos que os alunos deverão saber. Os objetos do saber são, então, organizados em disciplinas do ensino (então o saber sábio é de natureza transdisciplinar), estruturados numa progressão e se integram nas propostas curriculares, articulados logicamente, sem lacunas importantes.

Para tentar fazer do saber a ensinar um conjunto de conhecimentos estruturados e acessíveis aos alunos, os especialistas são, às vezes, obrigados a reescrever as definições e propriedades, repensar as articulações lógicas e transformar certas demonstrações.

Podemos, assim, distinguir no texto do saber os objetos a ensinar e os objetos de ensino:

- Os objetos a ensinar na matemática são introduzidos explicitamente por uma definição, seguida de demonstrações de propriedades a partir de um certo nível, e do estudo sistemático das possibilidades do uso do saber pelos alunos.
- Os objetivos de ensino do tipo: saber raciocinar, saber argumentar, saber resolver problemas, não são sempre objetos do ensino explícito e sistemático.

Esse conjunto de etapas constitui o segundo ato da transposição didática.

O saber escolar

Na realidade, o ensino se refere mais aos livros didáticos em vigor que aos textos dos programas. Esses livros didáticos visam, geralmente, colocar nas mãos dos alunos uma ferramenta de referência para pesquisas eventuais. Fornecem ilustrações diversas, evitando aos professores a consulta constante de seus arquivos ou biblioteca. É uma base de dados para os exercícios de treinamentos e para os problemas complementares. Enfim, os livros explicam um texto, expondo as noções do programa.

Esses manuais didáticos ressaltam um certo tipo de saber que contribui à instalação de uma cultura particular nos alunos de uma mesma época. Esse saber chama-se saber escolar. Sua elaboração é o terceiro ato da transposição didática.

O saber ensinado

O quarto ato da transposição didática vem do professor. Nesse nível, o professor vai gerenciar a transposição didática e adaptar os objetos a ensinar a seus conhecimentos próprios, inseri-los no saber escolar e organizá-los no tempo.

O professor dispõe de variáveis didáticas que vão transformar a situação de aprendizagem. Suas escolhas terão conseqüências sobre a percepção do saber que os alunos vão desenvolver e as concepções que eles vão forjar.

Os professores sabem que o saber ensinado não é retido pelo aluno, este cumpre o quinto ato da transposição didática, isto é, a transformação do saber ensinado em saber do aluno.

Esta interação entre professor e aluno, colocando em jogo o saber transportado, é essencialmente a relação didática. Ela merece um exame mais aprofundado, onde podemos colocar em evidência a dialética que desempenha o papel motor na aprendizagem.

O professor deve proporcionar a devolução do ensino. Isso significa que o professor deve responsabilizar o aluno por uma parte da aprendizagem, de tal modo que esse aluno seja capaz de conduzir sua ação sem que o professor o faça no seu lugar.

Neste último processo de transposição, o professor deve relacionar o saber em jogo (saber novo) aos conhecimentos já adquiridos (pré-requisitos ou pré-construídos, saberes antigos) pelos alunos, nos quadros onde eles têm significado.

2.5.2 A teoria dos campos conceituais

Discutiremos, brevemente, a seguir, a teoria dos campos conceituais, elaborada por Gerard Vergnaud, detendo-nos em alguns conceitos.

Em linhas gerais, o objetivo da teoria dos campos conceituais consiste em proporcionar um quadro teórico para as investigações sobre as atividades cognitivas complexas, especialmente as que se referem aos aprendizados científicos e técnicos. Trata-se de uma teoria psicológica do conceito, ou ainda, a conceitualização do real, que permite localizar e estudar as filiações e as rupturas que os estudantes fazem durante aquisição do conhecimento. Ela explicita, também, a relação entre significados e significantes.

Define-se campo conceitual como um conjunto de situações cuja apropriação requer o domínio de vários conceitos de naturezas diferentes. Por exemplo, o campo conceitual das estruturas multiplicativas consiste em todas aquelas situações que podem ser analisadas ou como problemas simples ou de proporções inversas, ou ainda aquelas que precisam normalmente multiplicar ou dividir.

As relações multiplicativas servem não somente a um conjunto de composições numéricas (multiplicações, divisões, regras de três simples e compostas, etc.) como igualmente à composição sobre as dimensões.

Embora essa definição de campo conceitual seja bastante clara, as fronteiras cognitivas entre os campos conceituais não são necessariamente bem definidas. Por exemplo, existe uma filiação entre as estruturas aditivas e multiplicativas. A principal razão para tal é que há um severo corte no conhecimento humano. Contudo, existe também especificidade suficiente nos problemas cognitivos, que surgem ora através das estruturas aditivas ora das estruturas multiplicativas, as quais nos permitem estudar esses campos conceituais separadamente.

Um conceito não pode ser reduzido à sua definição. O que nos interessa é a sua aprendizagem e o seu ensinamento. Seu processo de elaboração pragmática é essencial para a psicologia e a didática da matemática, como é essencial para a história da ciência. O conhecimento racional é operatório ou não. Podemos distinguir dois tipos de classes de situações:

1) aquelas em que o sujeito dispõe, em seu repertório, a um momento dado de seu desenvolvimento e de suas circunstâncias, de competências necessárias ao tratamento relativamente imediato à situação;
2) aquelas em que o sujeito não dispõe de todas as competências necessárias, obrigando-o a um tempo de reflexão, exploração, hesitações e as tentativas, que ou o conduzem ao sucesso ou ao fracasso.

O conceito de esquema é interessante para uma ou outra classe de situações, mas não funciona da mesma maneira para os dois casos. No primeiro caso, vamos observar, para uma mesma classe de situações, as condutas largamente automatizadas, organizadas por um único esquema; no segundo caso, vamos observar desencadeamento sucessivo de vários esquemas.

Para Vergnaud (1990), esquema é a organização invariante de conduzir uma classe de situações dadas. Os esquemas investigam os conhecimentos-em-ação do sujeito, isto é, os elementos cognitivos que permitem à ação do sujeito ser operatória.

Outro conceito bastante importante dentro da teoria dos campos conceituais é o de “teorema em ação” o qual está muito ligado ao conceito de esquemas, uma vez que costuma lhe preceder no processo da formação do conceito.

Teorema-em-ação é definido por Vergnaud (1990) como relações matemáticas levadas em consideração pelos estudantes quando estes escolhem uma operação ou seqüência de operações para resolver um problema. Essas relações não são normalmente expressas verbalmente por eles. Portanto, teorema-em-ação não é um teorema no sentindo convencional do termo, pois não é explícito. Ele está subjacente ao comportamento dos alunos e seu âmbito de validade é local. Para estudar os comportamentos matemático dos alunos, é necessário expressar os teoremas-em-ação em termos matemáticos.

Normalmente, observa-se que os estudantes usam teorema-em-ação em domínios de contexto fáceis e de valores numéricos simples. No entanto, eles são a primeira base intuitiva que os professores podem usar para estender e formalizar os conceitos de seus alunos. Os professores podem ajudá-los a explicitar os teoremas-em-ação e, assim, estender o uso dessas interrelações para situações mais complexas.

Por fim, gostaríamos de apresentar algumas reflexões de Vergnaud (1990) sobre a Educação Matemática, do ponto de vista epistemológico.

A epistemologia diz respeito a uma questão principal: o que é conhecimento?

A partir dessa questão, Vergnaud sugere várias outras:

> *"Como o conhecimento é adquirido? Que papel a ação, a percepção, a linguagem e o simbolismo têm no desenvolvimento e funcionamento do conhecimento? Qual é a relação entre o conhecimento padronizado e a resolução de problemas? E assim por diante".(pp. 14)*

Há também questões epistemológicas específicas da matemática: que tipos de objetos são inteiramente matemáticos? Existem tipos de objetos diferentes? Qual é a relação entre a Matemática, as outras ciências, e os outros campos da experiência humana? Em que sentido a Matemática tanto é um conjunto de ferramenta quanto um conjunto de objetos?

Iremos dedicar a nossa atenção a um restrito conjunto de questões epistemológicas que sejam centrais, tanto para o estudo do processo aprendizagem-redescoberta-reinvenção na mente dos estudantes, quanto para a história da Matemática: qual é a natureza e a função de um novo conceito, um novo procedimento, um novo tipo de raciocínio, uma nova representação? Mais precisamente, qual é a relação existente entre as novas competências e concepções matemáticas e os problemas práticos e teóricos que as tornam valiosas e significativas?

Esse tipo de pergunta é essencial para a escolha de situações feitas pelos professores, visto que a identificação dos conceitos envolvidos e das propriedades relevantes dos teoremas é crucial para a análise cognitiva das tarefas e comportamentos – especialmente para a análise das novidades.

É também o tipo de questão epistemológica que dirige a investigação do historiador quando ele tenta descobrir as circunstâncias históricas e sociais sob as quais as invenções matemáticas emergiram. Há muito que ganhar a partir do estudo interativo do processo individual e histórico do desenvolvimento do conhecimento matemático. O estudo dos obstáculos vividos por matemáticos no passado ajuda-nos a interpretar os erros hoje cometidos por nossos alunos; por sua vez, os erros, dificuldades e concepções errônea dos alunos colocam luz sobre o nosso entendimento da história da Matemática.

O estudo da teoria dos campos conceituais entra em nosso trabalho em dois momentos. O primeiro, quando julgamos importante analisar os procedimentos que os alunos utilizam nas resoluções de situações-problema; segundo, na formulação da seqüência de ensino, quando pensamos em criar situações em que pudéssemos analisar o desenvolvimento de concepções e competências dos alunos.

2.5.3 A noção de registros de representações

Existe uma preocupação muito grande entre os pesquisadores em Educação Matemática com a aquisição do conhecimento, com a forma como se processa a aprendizagem. Inicialmente, descreveremos a idéia do uso de representações no ensino da matemática.

A matemática trabalha com objetos abstratos. Ou seja, os objetos matemáticos não são diretamente acessíveis à percepção, necessitando para a sua apreensão o uso de uma representação. Nesse caso, as representações, através de símbolos, signos, códigos, tabelas, gráficos, algoritmos, desenhos são bastante significativas, pois permitem a comunicação entre os sujeitos e as atividades cognitivas do pensamento.

A definição de representação à qual Piaget se atém em todos os seus trabalhos se limita a uma relação de objetos já vistos, familiares, mas momentaneamente ausentes porque se encontram afastados. Ela constitui essencialmente o ambiente próximo do indivíduo, o que é concreto.

Em "*O Nascimento da Inteligência da Criança*" (1937), Piaget recorreu à noção de representação como "evocação dos objetos ausentes" para caracterizar a transformação que marca o último dos estágios da inteligência sensório-motora.

Em um longo artigo de 1941 sobre o “mecanismo do desenvolvimento mental”, ele propõe esta definição a fim de explicar como a representação pode se formar em continuidade com a atividade sensório-motora:

> *“A representação não é outra coisa, com efeito, senão que o esboço motor interiorizado de ações que não têm necessidade de serem efetuados materialmente e sucessivamente para se coordenar, mas que ultrapassam a coordenação com a ajuda de seus sucedâneos simbólicos”.(pp.231).*

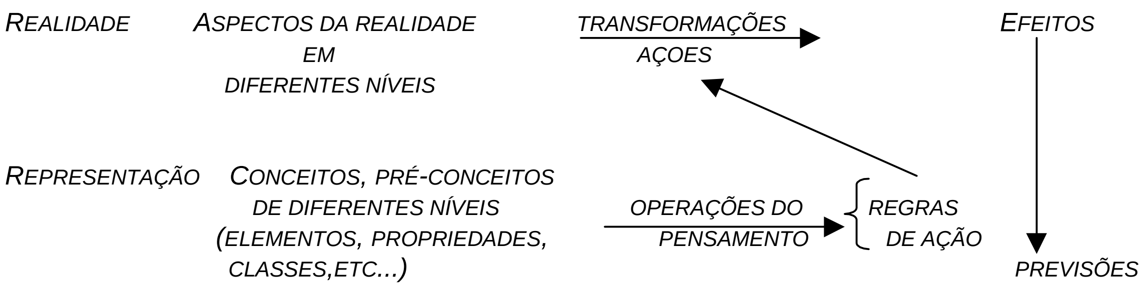
Em “*A formação do Símbolo na Criança*” (1978), Piaget retoma a mesma definição da representação como “evocação dos objetos ausentes” e introduz a idéia de uma função simbólica para relativizar a importância do aparecimento da linguagem e de seu papel no desenvolvimento intelectual.

Nessa obra, Piaget procura desenvolver duas teses. A primeira: no terreno do jogo e da imitação, pode-se acompanhar de maneira contínua a passagem da assimilação e da acomodação sensório-motoras – os dois processos que parecem essenciais na constituição das formas primitivas e pré-verbais da inteligência – para a assimilação e a acomodação mentais que caracterizam os inícios das representações. A representação começa quando há, simultaneamente, diferenciação e coordenação entre “significantes” e “significados”, ou significações. A segunda: interação das diversas formas de representação. Há representação quando se imita um modelo ausente. Assim acontece no jogo simbólico, na imaginação e até no sonho. Enfim, o sistema de conceitos e relações lógicas supõe a representação, quer em suas formas operatórias quer nas intuitivas.

Vergnaud (1991) vai ao encontro de Piaget quando coloca que o pensamento consiste, por sua vez, de operações conceituais e pré-conceituais sobre os significados, e de operações simbólicas sobre os significantes. Estes podem formar vários sistemas simbólicos distintos. É função do pensamento buscar estabelecer vínculos entre os significantes e o significado.

Para Vergnaud (1998), a representação nos habilita a antecipar eventos futuros e gerar comportamento para alcançar um pouco de efeito positivo ou evitar algum negativo. As representações podem ser verdadeiras ou erradas, vagas ou precisas, explícitas ou totalmente implícitas. O autor (1991) é enfático ao afirmar que não se compreenderia o papel da representação se ela não viesse como um reflexo da realidade, um instrumento de simulação desta e, conseqüentemente, um meio para prever efeitos reais e calcular as ações que se vão realizar.

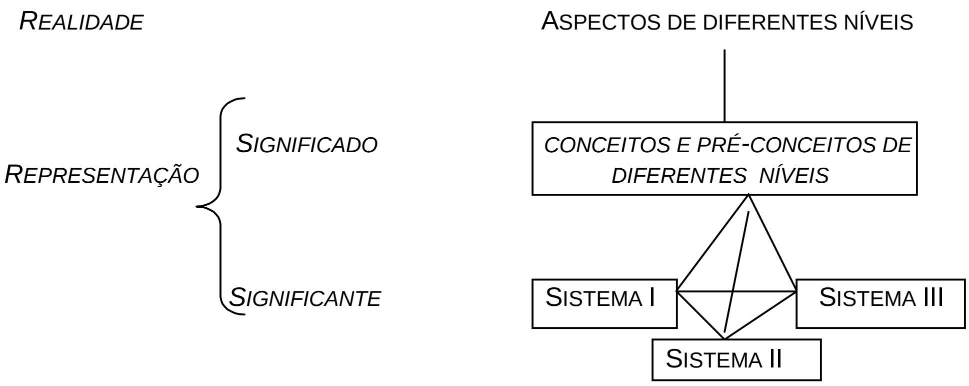
Reproduziremos, a seguir, um esquema elaborado por Vergnaud, o qual coloca de forma brilhante a relação entre representação e realidade:



Portanto, esse esquema geral seria excessivamente simples se não se colocassem imediatamente as seguintes idéias:

1. Não existe só uma representação e sim múltiplas representações, de formas e níveis diferentes.

2. Existem homomorfismos não só entre a realidade, por uma parte, e as representações, por outras, como também entre as diferentes formas de representações.



O pensamento funciona de maneira excessivamente diferenciada, posto que trabalha ao mesmo tempo em diferentes níveis (elementos, classes, relações,...) e com a ajuda de diferentes sistemas simbólicos (linguagem natural, representação imaginada, esquemas, etc.).

Há buracos importantes entre o que é representado na mente do indivíduo e o usual significado das palavras (Vergnaud, 1998). Essa cartografia parcial faz para a comunicação um tipo de milagre, pelo menos quando os indivíduos produzem novas idéias.

Um conceito não é uma mera definição; refere-se a um jogo de situações, envolve um jogo de invariantes operacionais diferentes, e suas propriedades podem ser expressas através de representações lingüísticas e simbólicas diferentes. Professores são mediadores e a parte deles consiste principalmente em ajudar o aluno a desenvolver o seu repertório de esquemas e representações.

2.5.4 O contrato didático

O contrato didático é importante em nosso trabalho no momento em que forem aplicados o pré-teste e a seqüência, pois acreditamos que o relacionamento dos alunos com a pesquisadora, os tipos de atividades propostas e o ambiente de trabalho são alguns dentres os diversos fatores que podem influenciar no aprendizado. Para o pré-teste, teremos uma ruptura do contrato didático adotado pela escola tradicional, pois os alunos terão que resolver os problemas sem terem conhecimento do conteúdo. A seqüência de ensino poderá, de forma geral, provocar nos alunos insegurança em relação ao objetivo do ensino a ser ministrado, o que pode ser explicada pela alteração do contrato didático.

Segundo Brousseau (1982), contrato didático é um conjunto de regras que determinam o comportamento e as expectativas de alunos e professor em sala de aula. Tais regras são freqüentemente implícitas, mas podem também ocorrer explicitamente.

As resoluções tomadas pelo professor durante a aula, seu comportamento frente às respostas dos alunos quando questionado ou seu modo de avaliar são alguns aspectos que fazem parte de tal conjunto. As atitudes dos alunos perante o comportamento do professor em relação ao saber ensinado também se incluem neste contrato.

2.5.5 Zona de desenvolvimento proximal (ZDP)

A zona de desenvolvimento proximal, pressupõe que a experiência coletiva contribui para a individual. Representa, ainda, a discrepância entre o que um indivíduo consegue resolver por conta própria e o que resolve com auxílio de alguém (diferença entre o nível de desenvolvimento real e o de desenvolvimento potencial). Essa idéia será utilizada no momento em que acreditamos que o desenvolvimento da seqüência em dupla garanta um avanço na aprendizagem, pois tem por finalidade explorar a cooperação entre indivíduos de ZDP(s) provavelmente próximas, mas diferentes. Além disso, o professor também terá por função, através da orientação e da solicitação de perguntas, contribuir para o sucesso nesse desenvolvimento.

METODOLOGIA

3.1 INTRODUÇÃO

Este capítulo diz respeito à realização de nosso estudo experimental. Na seção 1, serão apresentado o universo de estudo (seção 1), os sujeitos participantes e o material utilizado nas duas seqüências: a elaborada por nós (para o grupo experimental) e a proposta pela escola (grupo de referência). Na seção 2, mostraremos o desenho do nosso experimento, bem como, a descrição de uma análise prévia dos instrumentos diagnósticos e da seqüência elaborada para o grupo experimental.

3.2 UNIVERSO DO ESTUDO

O nosso estudo será realizado com alunos de uma instituição da rede particular de ensino do Estado de São Paulo, na cidade de Santos.

3.2.1 Os sujeitos

Este estudo será realizado com dois grupos: o grupo experimental e o grupo de referência. Em relação ao grupo experimental, trabalharemos com 14 duplas totalizando 28 sujeitos, todos pertencentes a uma mesma instituição, estudantes da última série (8ª série) do Ensino Fundamental, idade aproximada de 14 anos com a característica de não haverem realizado o estudo de análise combinatória. A escolha do número de sujeitos foi de origem pragmática. Por um lado, queríamos um grupo com cerca de 20 alunos para assemelhar-se a uma classe de aula ideal; por outro lado, sabemos que é comum a perda de sujeitos ao longo do experimento. Optamos, então, por 28 alunos para não nos distanciarmos muito do número 20 e ao mesmo tempo termos uma “folga” para o caso da “mortalidade” de sujeitos (seja por falta, mesmo que justificada, na seqüência, seja por desistência).

Já o grupo de referência será composto por uma turma da segunda série do ensino médio, com idade aproximada de 16 anos, inicialmente constituída por 30 alunos da mesma instituição particular de ensino. Realizaremos o estudo de análise combinatória através da abordagem tradicional apresentada nos livros didáticos.

Ambos os grupos se submeterão a dois testes individuais: um, antes de serem introduzidos no ensino de análise combinatória; outro, após o contato com esse conteúdo. Consideraremos para a análise dos resultados, em relação aos dois grupos, somente aqueles que participarem do estudo completo (pré-teste, seqüência e pós-teste).

Vale a pena ressaltar que os dois grupos são semelhantes em todos os aspectos, exceto em relação à variável que vamos estudar (abordagem didática) e à idade. Na escolha dos dois grupos, procuramos alunos que tivessem desempenho escolar semelhante e fossem semelhantes também quanto ao gênero (turmas mistas). Para nos certificarmos de que os dois grupos apresentavam o mesmo desempenho escolar, fizemos uma entrevista com a professora de matemática que trabalha com as duas turmas e a direção. Além disso, analisamos o histórico escolar dos grupos e pudemos constatar que ambos apresentavam, em média, um rendimento satisfatório. Logo, quanto ao rendimento escolar, teremos, distribuídos eqüitativamente, nos dois grupos, alunos considerados excelentes, médios e insatisfatórios em matemática.

Para o grupo experimental, a aplicação dessa seqüência será realizada em horário extra-aula, num total de sete encontros de aproximadamente 60 minutos cada, o que equivale, na escola, a uma média de 8 horas/aula. A aplicação desta seqüência será realizada em duplas, sendo que o atendimento será feito coletivamente em uma sala de aula.

Com relação ao grupo de referência, composto por uma turma de sala de aula, o trabalho será desenvolvido conforme determinado pela escola. As aulas serão realizadas em horário normal durante seis segundas-feiras, totalizando 12 horas/aula. Estas aulas serão ministradas pela pesquisadora, a fim de se certificar de que todo o planejamento referente a esse conteúdo será cumprido, além de observar mais de perto os alunos em relação aos questionamentos, o procedimento de resolução e a participação em aula.

O conteúdo para esse grupo será o do ensino tradicional, adotando-se todo o contexto do livro didático usado pela escola. Aqui a pesquisadora terá a preocupação de dar essas aulas da melhor maneira possível a fim de que não haja dúvida em relação aos resultados obtidos. Embora muitos pesquisadores prefiram deixar com a própria professora o trabalho de ministrar o conteúdo para o grupo de referência, alegando ser essa a forma mais imparcial de proceder nesse tipo de experimento, cremos que durante o desenvolvimento do conteúdo algumas observações importantes poderiam ficar obscuras, o que deixaria a nossa análise de resultado carente de muitas informações e explicações.

3.2.2 Material

Para a realização da nossa seqüência com o grupo experimental, faz-se necessário o uso dos seguintes materiais: papel, lápis. borracha, calculadora, fichas de atividades e materiais concretos, descritos em seção posterior. Quanto ao grupo de referência, o material utilizado será o livro didático adotado pela escola, além do material básico, como lápis, borracha e caderno. Embora não seja hábito da escola, forneceremos calculadora a esse grupo. Assim, os dois grupos poderão fazer uso da calculadora, quando estiverem resolvendo os testes.

3.3 DESENHO GERAL DO EXPERIMENTO

Nosso experimento incluirá duas fases, a fase dos instrumentos diagnósticos (testes) e a fase da seqüência de ensino para o grupo experimental.

3.3.1Fase dos instrumentos diagnósticos

Essa fase envolverá a aplicação de dois testes. O primeiro (teste inicial ou pré-teste) será composto de 10 questões sobre Análise Combinatória, distribuídas das seguintes maneiras: 9 questões básicas (nos moldes apresentados pelos livros didáticos e nos vestibulares) e uma questão de conceitualização. O teste será aplicado com a finalidade de fazer uma sondagem sobre os conhecimentos prévios dos alunos e as possíveis estratégias utilizadas por eles. Vale ressaltar que os alunos dos dois grupos serão submetidos ao teste sem ainda haverem estudado análise combinatória. O segundo, pós-teste, seguirá os moldes do primeiro. Isso significa que o pós-teste terá a equivalência matemática cuidadosamente respeitada em relação ao pré-teste . Este segundo teste será aplicado após o encerramento da seqüência.

A aplicação do pós-teste será complementada por entrevista, quando a resposta do aluno não estiver clara para a pesquisadora. Nesse caso, a entrevista acontecerá imediatamente após a aplicação do instrumento.

3.3.2 Fase da seqüência de ensino

A seqüência de ensino para o grupo experimental será realizada em 7 encontros, com duração média de aproximadamente 60 minutos, em horário extra-aula, como já comentamos na seção 3.2.1. Trabalharemos toda a seqüência de ensino em duplas, pois, segundo Maury e Fayol (1986), surge um efeito positivo, durante o aprendizado, através dessa interação social. As duplas serão formadas por afinidades. Pretendemos formar pares homogêneos (menino e menino ou menina e menina) e mistos. Essas atividades serão apresentadas em forma de fichas, sendo que em cada sessão será trabalhada uma ficha. As fichas apresentarão as situações-problema.

Como a proposta da nossa pesquisa é estudar uma forma significativa de introduzir análise combinatória, partiremos de situações-problema que envolvam contagem direta. A seguir, confrontaremos os alunos com situações-problema que envolvam o princípio fundamental de contagem e só depois buscaremos a institucionalização do conceito, apresentando, nesse momento, a nomenclatura de cada agrupamento sem as respectivas fórmulas. Após cada ficha, os alunos levarão alguns problemas para serem resolvidos em casa, de maneira a lhes permitir maior interação com o objeto de estudo.

Por estarmos preocupados com a formação do conceito e não com o treinamento de algoritmos, durante o processo de aprendizagem pretendemos usar calculadora para facilitar a resolução de problemas. Além disso, como já foi dito anteriormente, lançaremos mão do uso de materiais concretos para algumas atividades.

Objetivando possibilitar uma analise mais rica do processo interacional ocorrido no interior das duplas, e destas com a pesquisadora, iremos gravar alguns pares e video-gravar um outro, escolhidos aleatoriamente.

Assim sendo, elaboraremos a seqüência da seguinte forma:

- 1º ENCONTRO: SITUAÇÕES-PROBLEMA QUE POSSIBILITEM O USO DA CONTAGEM DIRETA E INDUZAM OS ALUNOS AO PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO.
- 2º ENCONTRO: SITUAÇÕES-PROBLEMA ENVOLVENDO O PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM.
- 3º ENCONTRO: CONTINUAÇÃO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS VOLTADOS PARA O PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM.
- 4º ENCONTRO: SITUAÇÕES-PROBLEMA ONDE O PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO NÃO É APLICÁVEL E INSTITUCIONALIZAÇÃO DA ÁRVORE DE POSSIBILIDADES COMO REPRESENTAÇÃO DE CONTAGEM.
- 5º E 6º ENCONTROS: CLASSIFICAÇÃO DE PROBLEMAS. DADO UM PROBLEMA RECONHECER AS CARACTERÍSTICAS QUE PERMITEM DIFERENCIAR ARRANJO DE COMBINAÇÃO.
- 7º ENCONTRO: INSTITUCIONALIZAÇÃO DE ARRANJO, PERMUTAÇÃO E COMBINAÇÃO.

Quadro 3.1: Apresentação da seqüência de ensino do grupo experimental.

A seguir, mostraremos, de forma geral, como será desenvolvida a seqüência do grupo de referência, sumarizando a quantidade de encontros. Para este grupo, será seguido o planejamento da escola e os encontros serão realizados em aulas duplas de 50 minutos cada, conforme as condições citadas na seção 3.2.1.

- 1º ENCONTRO: FATORIAL, PROBLEMAS DE CONTAGEM E PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM
- 2º ENCONTRO: EXERCÍCIOS REFERENTES AO PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM
- 3º ENCONTRO: ARRANJO SIMPLES, FÓRMULA DOS ARRANJOS SIMPLES E EXERCICIOS
- 4º ENCONTRO: COMBINAÇÃO SIMPLES, FÓRMULAS DAS COMBINAÇÕES SIMPLES E EXERCÍCIOS
- 5º ENCONTRO: PERMUTAÇÃO SIMPLES, PERMUTAÇÃO COM ELEMENTOS REPETIDOS E EXERCÍCIOS
- 6º ENCONTRO: EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

Quadro 3.2: Apresentação da seqüência do grupo de referência

3.3.3 Análise prévia dos instrumentos diagnósticos

A análise dos instrumentos diagnósticos será iniciada pelo pré-teste, seguida da análise do pós-teste.

3.3.3.1 Pré-teste

Inicialmente, informaremos aos alunos que não haverá nota e que o teste tem a finalidade de informar a pesquisadora o que eles pensam sobre um assunto que a escola ainda não lhes ensinou. Também deixaremos bem claro que nossa intenção é tentar encontrar um bom caminho para o ensino desse conteúdo, baseando-nos nas resoluções apresentadas pelos alunos. Acreditamos que, dessa forma, os alunos poderão expressar mais livremente suas idéias, sem a preocupação de que essa expressão resultaria em um conceito negativo no seu desempenho escolar. Estimularemos o máximo possível a justificativa de suas respostas, de forma que possamos identificar com maior clareza os conceitos que esses alunos possuem sobre raciocínio combinatório.

A seguir, apresentaremos as questões do pré-teste, acompanhadas do objetivo, de uma análise a priori e de possíveis procedimentos de resolução.

QUESTÃO 1: JOÃO ESCOLHEU SEIS NÚMEROS PARA FAZER O JOGO DA SENA, CONFORME CARTÃO ABAIXO:

01	02	03	04	05	06	$\boxed{07}$	08	09	10
11	12	13	$\boxed{14}$	15	16	17	$\boxed{18}$	19	20
21	22	23	24	25	$\boxed{26}$	27	28	29	30
31	32	$\boxed{33}$	34	35	36	37	$\boxed{38}$	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

PERGUNTA-SE:

A)QUANTAS QUINAS DIFERENTES ELE PODERIA FORMAR COM ESSES NÚMEROS?

B)QUANTAS QUADRAS DIFERENTES ELE PODERIA FORMAR COM ESSES NÚMEROS?

JUSTIFIQUE CADA RESPOSTA, SABENDO QUE A ORDEM EM QUE OS NÚMEROS SERÃO SORTEADOS NÃO TEM IMPORTÂNCIA.

OBS: QUINA – SÉRIE DE CINCO NÚMEROS NO CARTÃO DA SENA

QUADRA – SÉRIE DE QUATRO NÚMEROS NO CARTÃO DA SENA

Essa questão objetiva analisar se os alunos apresentam algum raciocínio combinatório e se se utilizam de registros de representações.

Por ser uma questão fácil de ser desenvolvida de forma intuitiva, o que chamamos de princípio de contagem direta, os alunos poderão demonstrar a existência dos subconjuntos dos elementos do conjunto finito, satisfazendo as condições dadas, através de um processo de tentativas e erros. Aqui temos uma questão aberta, sem indicação do método de resolução que deverá ser aplicado.

Acreditamos que a maioria dos alunos resolverá o item "a" de forma intuitiva, através de tentativas e percebendo que a ordem dos elementos não seria essencial; quanto ao item "b", alguns alunos o resolverão também por tentativa e erro, mas pode ser que não cheguem ao total de possibilidades, pois o método é muito trabalhoso, e há dificuldade em se encontrar um procedimento que os leve a todas as possibilidades. Também poderão aparecer algumas respostas sem o raciocínio combinatório, como, por exemplo, o aluno apontar que pode se formar apenas uma quina e uma quadra, não utilizando a combinação dos números.

Possíveis procedimentos de resolução:

1ª) CONTAGEM DIRETA:

A) 07 – 14 – 18 – 26 – 33	07 – 14 –26 – 33 - 38
07 – 14 – 18 – 26 – 38	07 – 26 – 18 – 33 - 38
07 – 14 – 18 – 33 – 38	14 – 18 – 26 – 33 – 38

B) 07 – 14 – 18 – 26	07 – 26 – 33 –38	07 – 18 – 26 – 38
07 – 14 – 18 – 33	14 – 18 – 26 – 33	18 – 26 – 33 – 38
07 - 14 - 18 – 38	14 – 18 – 26 – 38	07 – 14 – 33 – 38
07 – 14 - 26 – 33	14 – 26 – 33 – 38	07 – 18 – 33 – 38
07 – 14 – 26 – 38	07 – 18 – 26 – 33	14 – 18 – 33 -38

2ª) USANDO O PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO E DIVIDINDO PELO NÚMERO DE PERMUTAÇÕES QUE SÃO IGUAIS.

A) (6 . 5 . 4 . 3 .2) : (5. 4 . 3 .2 .1) = 6 : 1 = 6
B) (6 . 5 . 4 . 3) : (4 . 3 . 2 . 1) = 30 : 2 = 15

3ª) USANDO A FÓRMULA DE COMBINAÇÃO:

$C_{6,5} = 6! : (5! \,.\, 1!) = (6.\, 5!) : (5! \,.\, 1) = 6 : 1 = 6$

$C_{6,4} = 6! : (4! \,.\, 2!) = (6.\, 5\, .4!) : (4! \,.\, 2 \,.\, 1) = 30 : 2 = 15$

RESPOSTA : ELE APOSTOU EM 6 QUINAS E 15 QUADRAS.

Nossa expectativa será de que nenhum aluno use os dois últimos procedimentos de resolução, pois ainda não houve contato com o conteúdo análise combinatória.

QUESTÃO 2: EXISTEM APENAS DOIS MODOS DE ATINGIR A CIDADE DANONE PARTINDO DA CIDADE ARAGUAIA. UM DELES É IR ATÉ A CIDADE INTERMEDIÁRIA BANANAL E DE LÁ ATINGIR DANONE, E OUTRO É IR ATÉ A CIDADE CANAVIAL E DE LÁ CHEGAR A DANONE. EXISTEM 10 ESTRADAS LIGANDO ARAGUAIA A BANANAL; 12 LIGANDO BANANAL A DANONE; 5 LIGANDO ARAGUAIA A CANAVIAL; 8 LIGANDO CANAVIAL A DANONE; NENHUMA ESTRADA ENTRE BANANAL E CANAVIAL E NENHUMA ESTRADA ENTRE ARAGUAIA E DANONE. PARTINDO DE ARAGUAIA, QUANTOS PERCURSOS DIFERENTES PODEM SER FEITOS PARA CHEGAR A DANONE. JUSTIFIQUE SUA RESPOSTA.

Nesta questão, ainda temos como objetivo analisar se os alunos apresentarão raciocínio combinatório e se levantarão alguns dos diversos registros de representação.

A questão é dividida em duas etapas: a primeira, em que é necessário calcular o número de percursos diferentes, usando cada cidade intermediária; a segunda, em que se junta o total de percursos em relação às duas cidades intermediárias.

Na primeira etapa, os alunos terão que perceber a situação de correspondência de "um para muitos"[3], e na segunda etapa será necessário o entendimento de que existem dois conjuntos disjuntos e que há necessidade de uni-los, fazendo a adição dos elementos.

Consideramos esse problema mais difícil que o anterior, pois requer dos alunos mais interpretação, principalmente por causa do enunciado longo e pouco familiar. Nossa expectativa é que haja alguns acertos, se bem que em menor

[3]Segundo Nunes, "um-para-muitos" refere-se a um termo usado para distinguir um tipo de situação multiplicativa. A correspondência de um-para-muitos é a base para um novo conceito matemático, o conceito de proporção. Alguns exemplos cotidianos dessa correspondência são: um carro tem quatro rodas (1-para-4)... . (Nunes e Bryant, 1997)

quantidade que o problema 1. É possível que certos alunos utilizem o princípio multiplicativo e aditivo, de forma intuitiva, para resolver o problema apresentado. É provável, ainda, que outros alunos utilizem a estratégia de diagrama ou desenho para representar as cidades e as estradas. Com a utilização dos princípios multiplicativo e aditivo, podem aparecer resoluções errôneas, como mostraremos a seguir:

$A \rightarrow C = 8$ estradas ; $C \rightarrow X = 5$ estradas , logo temos 8 + 5 estradas para chegar a X.
$A \rightarrow B = 10$ estradas; $B \rightarrow X = 12$ estradas, logo temos 10 + 12 estradas para chegar a X.
Temos 13 possibilidades passando pela cidade C e mais 22 possibilidades passando pela cidade B, dando um total de 35 possibilidades.

Possíveis procedimentos de resolução:

1ª) Para cada estrada que liga A e B, temos 12 possibilidades para chegar à cidade X. Como são 10 estradas ligando A e B, então temos 10 . 12 possibilidades, saindo de A passando por B e chegando a X.

Temos um raciocínio análogo para sair de A, passar por C e chegar a X. Então, temos 58 possibilidades. Somando os dois resultados, temos o número de percursos diferentes que podem ser feitos para atingir X pela primeira vez, partindo de A.

(10 . 12) + (5 . 8) = 120 + 40 = 160.

2ª) através de esquema

$\boxed{A}\ \underline{10\qquad}\ \boxed{B}\ \underline{12\qquad}\ \boxed{X} = 120$

$\boxed{A}\ \underline{8\qquad}\ \boxed{C}\ \underline{5\qquad}\ \boxed{X} = 40$

120 + 40 = 160

3ª) Usando a fórmula

C10, 1 . C12,1 + C5,1 . C 8,1 =

= [10! :(9! . 1!)] . [12! :(11! . 1!)] + [5! : (4! .1!)] . [8! : (7! . 1!)] =

= 10 .12 + 5 . 8 = 120 + 40 = 160

Resposta: Podem ser feitos 160 percursos diferentes para atingir a cidade X, saindo de A.

Esperamos que o terceiro procedimento não venha a ser usado por nenhum aluno, visto que os discentes ainda não tiveram contato com as fórmulas de análise combinatória. A possibilidade de o aluno lançar mão de algum procedimento de esquema é grande, embora saibamos que a escola não privilegia tal procedimento.

Considerando que este pré-teste será aplicado para alunos que não estudaram análise combinatória, temos por hipótese que o percentual de acerto a partir da terceira questão será zero ou próximo disso, pois a possibilidade de acerto por manipulação direta (contagem) é quase impossível. Pensando em manter a equivalência matemática entre as questões dos testes, as próximas perguntas estão voltadas principalmente para o pós-teste. Porém, estamos interessadas em investigar qual estratégia o aluno usará diante de questões que envolvem o conceito de combinatória, as quais requerem o uso do princípio fundamental da contagem, a interpretação de ordem ou de elementos repetidos, sabendo que esse aluno ainda não estudou formalmente análise combinatória. Pretendemos, então, observar se os alunos apresentarão alguma estimativa de resultado, usando o processo de tentativa e erro, e/ou se buscarão o auxílio da visualização através da construção de esquemas e/ou diagramas.

QUESTÃO 3: DE QUANTOS MODOS PODEMOS DISTRIBUIR 8 PRESENTES PARA 8 PESSOAS, DANDO UM PRESENTE PARA CADA UM? E OITO PRESENTES PARA SEIS PESSOAS, SABENDO QUE CADA PESSOA RECEBERÁ APENAS UM PRESENTE?

Nosso objetivo continua o mesmo: analisar se os alunos apresentarão raciocínio combinatório, observando sua capacidade de interpretação e se eles farão uso do princípio multiplicativo.

Visto que os alunos ainda não aprenderam Análise Combinatória, é possível que alguns utilizem o processo aditivo (somando 8 + 8, no caso do item “a”) ou, ainda, o princípio relacionado à multiplicação direta. Isto é, multipliquem 8 pessoas vezes 8 presentes, totalizando 64 combinações. Ou ainda teremos alunos que utilizarão a divisão, mostrando que cada pessoa irá receber 1 presente para o item a e para o item b que cada pessoa receberá 1 presente e sobram dois, pois o significado de distribuir, para eles, é dividir. Por motivos óbvios, prevemos, ainda, que nenhum aluno resolverá o problema através da fórmula de permutação simples, a qual apresentaremos no segundo procedimento de resolução.

Possíveis procedimentos de resolução:

1ª) 1ª PESSOA - 8 POSSIBILIDADES DE PRESENTES
2ª PESSOA – 7 POSSIBILIDADES DE PRESENTES
3ª PESSOA – 6 POSSIBILIDADES DE PRESENTES
4ª PESSOA – 5 POSSIBILIDADES DE PRESENTES
5ª PESSOA – 4 POSSIBILIDADES DE PRESENTES
6ª PESSOA – 3 POSSIBILIDADES DE PRESENTES
7ª PESSOA – 2 POSSIBILIDADES DE PRESENTES
8ª PESSOA – 1 POSSIBILIDADE DE PRESENTE

PORTANTO, TEMOS 8 X 7 X 6 X 5 X 4 X 3 X 2 X 1 = 40 320.

1ª PESSOA – 8 POSSIBILIDADES E ASSIM POR DIANTE ATÉ A SEXTA PESSOA

TEMOS 8 X 7 X 6 X 5 X 4 X 3 = 20 160

2ª) RESOLUÇÃO ATRAVÉS DE PERMUTAÇÃO SIMPLES:

$P_8 = 8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40\ 320$

$P_6 = 6! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 20\ 160$

RESPOSTAS: TEMOS 40 320 MODOS DIFERENTES PARA DISTRIBUIR 8 PRESENTES PARA 8 PESSOAS E 20 160 MODOS DIFERENTES PARA DISTRIBUIR 8 PRESENTES PARA SEIS PESSOAS.

QUESTÃO 4 : QUANTOS ANAGRAMAS PODEMOS FORMAR COM A PALAVRA FAZER? E COM A PALAVRA PRATA? TEMOS A MESMA QUANTIDADES DE ANAGRAMAS PARA AS DUAS PALAVRAS? JUSTIFIQUE SUA RESPOSTA.
ANAGRAMA: É UMA SENHA (OU CÓDIGO) FORMADA POR TODAS AS LETRAS DE UMA PALAVRA (SEM REPETIÇÃO A NÃO SER QUE A PALAVRA TENHA LETRA REPETIDA), PODENDO OU NÃO TER SIGNIFICADO NA LÍNGUA PORTUGUESA. (EXPRESSÃO MATEMÁTICA, 5ª SÉRIE, S.P., 1994)

Nosso objetivo consiste em diferenciar permutação simples de permutação com repetição.

Os conceitos multiplicação e divisão se fazem de grande importância para a resolução correta da questão. Este é um tipo de problema fechado onde os alunos têm pouca autonomia. Se fosse através de tentativas e erros, a resolução se tornaria exaustiva, o que muito provavelmente não os faria construir todas as possibilidades. Alguns alunos poderão dar uma solução numérica, sem justificá-la, o que a nosso ver é apenas uma tentativa de "chute".

Possíveis procedimentos de resolução:

1ª) MÉTODO INTUITIVO, ONDE OS ALUNOS CRIARÃO NOVAS PALAVRAS

FAZRE, REFAZ, ...

PARTA, ATARP, ...

A PALAVRA FAZER TEM MAIS ANAGRAMA QUE A PALAVRA PRATA.

2ª) A) 1ª LETRA = 5 POSSIBILIDADES

2ª LETRA = 4 POSSIBILIDADES ...

PELO PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO TEMOS 5 X 4 X 3 X 2 X 1 = 120

B) 1ª LETRA = 5 POSSIBILIDADES ...

PELO PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO TEMOS 5 X 4 X 3 X 2 X 1 = 120 E DIVIDE POR 2 QUE É A QUANTIDADE DE PERMUTAÇÃO DA LETRA A QUE APARECE DUAS VEZES, DANDO UMA REPOSTA DE 60 ANAGRAMAS.

PODEMOS VERIFICAR ATRAVÉS DOS RESULTADOS QUE A PALAVRA FAZER TEM MAIS ANAGRAMAS QUE A PALAVRA PRATA.

3ª) A) $P_5 = 5! = 120$

B) $5! : 2! = 60$

RESPOSTA: TEMOS 120 ANAGRAMAS DA PALAVRA FAZER E 60 ANAGRAMA PARA A PALAVRA PRATA.

QUESTÃO 5: UMA FÁBRICA DE PERFUMES PRODUZ 10 TIPOS DE ESSÊNCIAS DISTINTAS. A FIM DE CONSEGUIR NOVAS ESSÊNCIAS, RESOLVEU ESCOLHER 3 DELAS, AO ACASO, E MISTURÁ-LAS EM QUANTIDADES IGUAIS. QUANTAS NOVAS ESSÊNCIAS SERÃO OBTIDAS PELA FÁBRICA?

IMAGINE AGORA QUE, QUANDO ESCOLHIDAS AS 3 ESSÊNCIAS, ELAS SEJAM MISTURADAS, MAS EM QUANTIDADES DIFERENTES: 20% DA PRIMEIRA, 30% DA SEGUNDA E 50% DA TERCEIRA. QUANTAS NOVAS ESSÊNCIAS SERÃO OBTIDAS DESSA FORMA?

Nesta questão, temos por objetivo analisar a capacidade de interpretação dos alunos, onde eles poderão observar as situações em que se deve ou não considerar a ordem dos elementos. Também observaremos se fazem uso do princípio multiplicativo.

Os conhecimentos de que os alunos precisarão, nesta questão, são os conceitos de seqüência e conjunto. Tais conceitos servem para que registrem os casos possíveis, analisando quando a ordem é ou não importante. Também serão necessários os conhecimentos de multiplicação e divisão. Talvez possa existir alguma dificuldade nessa questão.

Quanto aos alunos que não fizerem uso do raciocínio combinatório, pode ser que se utilizem da multiplicação 10 por 3, dando um resultado de 30 essências, ou somem as porcentagens. Poderá acontecer de colocarem uma solução numérica qualquer e não a justificar.

Possíveis procedimentos de resolução:

1ª) USANDO CONTAGEM DIRETA

E1, E2, E3 ; E1, E2, E4 .... PARA AS MISTURAS EM QUANTIDADE IGUAIS, DEVEMOS ELIMINAR AS TERNAS IGUAIS COMO EXEMPLO, TEMOS QUE E1, E2, E3 É A MESMA MISTURA QUE E2, E3, E1, E É A MESMA QUE E3, E2, E1. ENTÃO, CONSIDEREMOS ESTAS TRÊS MISTURAS SENDO APENAS UMA.

PARA AS MISTURAS DE QUANTIDADES DIFERENTES DEVEREMOS CONSIDERAR TODAS AS TERNAS.

2ª) USANDO O PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO:

PARA AS MISTURAS COM A MESMA QUANTIDADE TEMOS 10 X 9 X 8 E DIVIDE POR 6 (PERMUTAÇÃO DAS TERNAS QUE SÃO IGUAIS)

PARAS AS MISTURAS COM QUANTIDADES DIFERENTES, FAZEMOS 10 X 9 X 8

3ª) USANDO AS FÓRMULAS:

MISTURAS COM MESMA QUANTIDADE: C10,3 = 10! : (3! . 7!) = 120

MISTURAS COM QUANTIDADES DIFERENTES: A 10,3 = 10! : 7! = 720

RESPOSTA: MISTURANDO AS ESSÊNCIAS EM QUANTIDADES IGUAIS, OBTEMOS 120 ESSÊNCIAS NOVAS E MISTURANDO AS ESSÊNCIAS EM QUANTIDADES DIFERENTE, OBTEMOS 720 ESSÊNCIAS NOVAS.

QUESTÃO 6: DNA MARTA TEM UMA MALA CUJO SEGREDO É CONSTITUÍDO POR 4 LETRAS DO NOSSO ALFABETO (26 LETRAS), SEGUIDO DE DOIS ALGARISMOS DISTINTOS DE 0 A 9. CASO LHE ROUBEM A MALA, QUAL O NÚMERO MÁXIMO DE TENTATIVAS DIFERENTES QUE PODERÁ SER NECESSÁRIO FAZER PARA ABRIR A MALA?

SUPONDO QUE AS LETRAS TEM QUE SER DISTINTAS E OS ALGARISMOS TAMBÉM, QUAL O NUMERO MÁXIMO DE TENTATIVAS? JUSTIFIQUE SUAS RESPOSTAS.

Temos como objetivo diferenciar arranjo simples e arranjo com repetição e observar a capacidade de interpretação dos alunos.

Para desenvolver o problema, os alunos precisarão do conceito de multiplicação.

Possíveis procedimentos de resolução:

1ª) CONTAGEM DIRETA

AAA00; AAA01; ....

2ª) PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO

26 X 26 X 26 X 10 X 10 = 1757600

26 X 25 X 24 X 10 X 9 = 1404000

3ª) USANDO FÓRMULAS

$AR_{26,3} . AR_{10,2} = 26^3 \times 10^2 = 1757600$

$A_{26,3} . A_{10,2} = (26! : 23!) \times (10! : 8!) = 140400$

RESPOSTA: O NÚMERO MÁXIMO DE TENTATIVAS PARA O PRIMEIRO CASO É 1757600 E PARA O SEGUNDO CASO, 1404000.

QUESTÃO 7: MARCOS POSSUI DOIS CDS DOS BEATLES, QUATRO DOS ROLLING STONES E TRÊS DO DIRE STRAITS. DE QUANTAS MANEIRAS DIFERENTES MARCOS PODE COLOCÁ-LOS NUM PORTA CD, DE MODO QUE OS CDS DO MESMO CONJUNTO FIQUEM JUNTOS?

Nosso objetivo é levantar os diversos registros de representação apresentados pelos alunos.

Nessa questão, faz-se necessário que os alunos percebam que temos a ação composta por duas etapas. A primeira etapa, como colocar os dois CDs dos

Beatles, os quatro dos Rolling Stones e os três do Dire Straits; a segunda como colocar cada coleção, o primeiro do Dire Straits e assim por diante. Para isto será necessário o conhecimento dos conceitos de seqüência e multiplicação.

Vislumbramos a possibilidade de alguns alunos tentarem resolver a questão por tentativas e erro, interpretando apenas uma etapa da resolução. Tomamos quase por certo que nenhum estudante usará o princípio fundamental da contagem como procedimento de resolução.

Possíveis procedimentos de resolução

1ª) USANDO A CONTAGEM DIRETA

CD1B CD2B CD1RL CD2RL CD3RL CD4RL CD1DS CD2DS CD3DS
CD2B CD1B CD1RL CD2RL CD3RL CD4RL CD1DS CD2DS CD3DS...

2ª) USANDO O PRINCÍPIO FUNDAMENTAL

BEATLES ROLLING STONES DINE STRAITS

2 x 1 x 4 x 3 x 2 x 1 x 3 x 2 x 1 = 288

6 . BEATLES DINE STRAITS ROLLING STONES = 288 ...

= 6 x 288 = 1728

3ª) USANDO FÓRMULAS

P2 . P4 . P3 = 6 x 2! X 4! X 3! = 6 x 2 x 1 x 4 x 3 x 2 x 1 x 3 x 2 x 1 = 1728

RESPOSTA EXISTEM 1728 MANEIRAS DE ARRUMAR OS CDS.

QUESTÃO 8: UMA AGÊNCIA DE PROPAGANDA VAI CRIAR O NOME DE UM NOVO PRODUTO FAZENDO ANAGRAMAS A PARTIR DA PALAVRA BONECA.

A)SABENDO QUE A SÍLABA NE TERÁ QUE APARECER, DESCUBRA QUANTOS ANAGRAMAS SÃO POSSÍVEIS?

b)Sabendo que começa por consoante e termina por vogal, descubra quantos anagramas são possíveis.

Temos como objetivo trabalhar com permutação, colocando certas condições e analisando a capacidade de interpretação dos alunos.

No item “a”, será preciso que os alunos percebam que a sílaba NE vai corresponder a uma letra. No item “b”, será preciso que eles observem que para cada consoante colocada no início do anagrama, temos 3 possibilidades para terminar.

Possíveis procedimentos de resolução:

1ª) PRINCÍPIO FUNDAMENTAL

NE _ _ _ _ 4 X 3 X 2 X 1 = 24

_ NE _ _ _ = 24

_ _ NE _ _ = 24

_ _ _ NE _ = 24

_ _ _ _ NE = 24

24 + 24 + 24 + 24 + 24 = 5 X 24 = 120

B) CONSOANTE _ _ _ _ VOGAL

9 x 4 x 3 x 2 x 1 = 216

2ª) USANDO FÓRMULAS

$5 \times P_4 = 5 \times 4! = 120$

$9 \times P_4 = 9 \times 4! = 216$

RESPOSTA: APARECENDO A SÍLABA NE, TEMOS 120 ANAGRAMAS; COMEÇANDO POR CONSOANTE E TERMINANDO POR VOGAL, TEMOS 216 ANAGRAMAS.

QUESTÃO 9: MARCAM-SE CINCO PONTOS SOBRE UMA RETA R. SOBRE UMA OUTRA RETA S, PARALELA À R, MARCAM-SE MAIS QUATRO PONTOS. QUANTOS TRIÂNGULOS PODEM SER FORMADOS COM VÉRTICE EM TRÊS QUAISQUER DESSES PONTOS?

O objetivo, nesta questão, é levantar os diversos registros de interpretação utilizadas pelos alunos e o raciocínio combinatório.

Este problema requer dos alunos conhecimentos adicionais tais como: as definições de retas paralelas e triângulo, além da lembrança de que a construção de um triângulo é feita através de três pontos não colineares. Precisarão ainda dos conceitos de multiplicação e divisão.

É necessário os alunos compreenderem que não basta somar todos os pontos pertencentes as duas retas e fazer uma combinação três a três. Terão que perceber que unindo três pontos de uma mesma reta não construirão um triângulo.

Referente a esta questão, acreditamos que a idéia inicial do aluno será construir as duas retas, marcar os pontos e construir alguns triângulos, ou iniciar a construção dos triângulos na reta r, indo para s, esquecendo que também poderia começar da reta s em direção à r.

Possíveis procedimentos de resolução:

1ª) PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO

SOMAMOS OS NÚMEROS DE PONTOS PERTENCENTES AS DUAS RETAS E A SEGUIR FAZEMOS A COMBINAÇÃO DOS 9 PONTOS 3 A 3. DEPOIS DEVEMOS SUBTRAIR DESSE NÚMERO AS COMBINAÇÕES FORMADA POR 3 PONTOS ESCOLHIDOS ENTRE OS 5 PONTOS DA PRIMEIRA RESTA E OS 4 PONTOS DA SEGUNDA RETA, POIS ESTA COMBINAÇÕES NÃO REPRESENTAM TRIÂNGULOS.

$(9 \times 8 \times 7) : (3 \times 2 \times 1) = 84$

$(5 \times 4 \times 3) : (3 \times 2 \times 1) = 10$

$(4 \times 3 \times 2) : (3 \times 2 \times 1) = 4$

TEMOS: $84 - 10 - 4 = 70$

2ª) USANDO FÓRMULA

$C_{9,3} - C_{5,3} - C_{4,3} = 70$

RESPOSTA: PODEM SER FORMADOS 70 TRIÂNGULOS.

QUESTÃO 10: TEMOS DOIS MODOS DE AGRUPAR OS ELEMENTOS DE UM CONJUNTO. UM É CHAMADO DE ARRANJO E OUTRO, DE COMBINAÇÃO. O QUE DIFERENCIA UM DO OUTRO? JUSTIFIQUE SUA RESPOSTA.

Nosso objetivo é identificar a concepção dos alunos acerca de arranjo e combinação.

Considerando que este pré-teste foi aplicado para alunos que não estudaram Analise Combinatória, acreditamos que nenhum deles dará a resposta correta, mesmo apresentando os conceitos de seqüência e conjunto. Pode haver resposta do tipo “não sei o que significa”.

RESPOSTA: COMBINAÇÃO É O PROCEDIMENTO PELO QUAL AGRUPAMOS ELEMENTOS DE MODO QUE, CADA AGRUPAMENTO, NÃO IMPORTA A ORDEM DOS ELEMENTOS; ARRANJO É O PROCEDIMENTO NO QUAL AGRUPAMOS ELEMENTOS DE MODO QUE, EM CADA AGRUPAMENTO, IMPORTA A ORDEM DOS ELEMENTOS.

3.3.3.2 Pós-teste

Este teste, tal como o pré-teste, também será composto de 10 questões, aplicadas para os mesmos alunos que responderam ao pré-teste e participaram da seqüência, já que a nossa finalidade é a de analisar os conhecimentos adquiridos após uma seqüência de ensino, tanto a nossa como a da escola. Dessa forma, poderemos proceder a uma análise sobre o desempenho dos alunos antes e depois do aprendizado.

A seguir apresentaremos as questões do pós-teste. Entre parênteses, colocaremos a qual questão do pré-teste cada uma é equivalente.

QUESTÃO 1: (QUESTÃO 7) UMA CINEMATECA DISPÕE DE DOIS FILMES DE TERROR, QUATRO FILMES DE ROMANCE E TRÊS FILMES DE FICÇÃO CIENTÍFICA. DE QUANTAS MANEIRAS DIFERENTES ESTES FILMES PODEM SER COLOCADOS NUMA PRATELEIRA DE MODO QUE OS FILMES DA MESMA CATEGORIA PERMANEÇAM JUNTOS?

Comentário: Nesse tipo de questão, o aluno, além de questionar a ordem, terá que perceber a importância da permutação dos filmes e das categorias. Queremos observar se a seqüência deu conta em relação à ordem, e se os alunos conseguem interpretar passo a passo o enunciado do problema. Erros já ressaltados em pesquisas, como de Batanero (1996,1997).

QUESTÃO 2: (QUESTÃO 4) QUANTOS ANAGRAMAS PODEMOS FORMAR COM A PALAVRA CALOR? E COM A PALAVRA CALMA? TEMOS A MESMA QUANTIDADE DE ANAGRAMAS PARA AS DUAS PALAVRAS? JUSTIFIQUE.

Comentário: Na literatura, observamos que o erro em relação à repetição de elementos, está associado aos problemas de permutação com repetição. Para saber se a seqüência deu conta em relação a este tipo de erro, elaboramos a questão acima.

QUESTÃO 3: (QUESTÃO 1) RICARDO FEZ UM JOGO DA SENA CONFORME INDICA CARTÃO ABAIXO. PERGUNTA-SE:

A) QUANTAS SÃO AS QUINAS QUE SE PODEM FORMAR, SABENDO-SE QUE, DOS SEIS NÚMEROS SORTEADOS, RICARDO TEM CINCO DELES MARCADOS EM SUA CARTELA?

B) QUANTAS SÃO AS QUADRAS POSSÍVEIS QUE SE PODEM FORMAR COM OS NÚMEROS ESCOLHIDOS POR RICARDO?

01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

Comentário: Nessa questão observaremos se os alunos questionarão a ordem dos elementos como essencial ou não, pois pudemos verificar nos estudos de Batanero (1996, 1997), um grande número de erro em relação à ordem, nos problemas de combinação,

QUESTÃO 4: (QUESTÃO 8) DETERMINE QUANTOS ANAGRAMAS DA PALAVRA CHAVE

A) APRESENTAM A SÍLABA VE.

B) COMEÇAM POR CONSOANTE E TERMINAM POR VOGAL.

QUESTÃO 5: (QUESTÃO 2) PARA IRMOS DA CIDADE ARRAIAL ATÉ A CIDADE BOTAFOGO, HÁ DUAS OPÇÕES; IR DE ÔNIBUS ATÉ O PONTO COMÉRCIO E DE LÁ PEGAR UMA AVIÃO ATÉ A CIDADE BOTAFOGO OU IR DE TÁXI ATÉ UM PONTO DIANA E DE LÁ PEGAR UM BARCO. SABENDO-SE QUE HÁ DOZE COMPANHIAS DE ÔNIBUS QUE COBREM O PERCURSO ARRAIAL - COMÉRCIO E DEZ COMPANHIAS AÉREAS QUE COBREM O PERCURSO COMÉRCIO – BOTAFOGO, ALÉM DE OITO COMPANHIAS DE TÁXI QUE COBREM O PERCURSO ARRAIAL - DIANA E CINCO COMPANHIAS DE BARCO QUE COBREM O PERCURSO DIANA – BOTAFOGO, PERGUNTA-SE: DE QUANTOS MODOS DIFERENTES É POSSÍVEL VIAJAR DE ARRAIAL ATÉ BOTAFOGO?

Comentário: Nessa questão, queremos observar se, depois do aprendizado, o aluno usará algum tipo de representação para a resolução.

QUESTÃO 6: (QUESTÃO 3) SOBRE UMA MESA ESTÃO OITO CARTAS E SEUS RESPECTIVOS ENVELOPES. UMA SECRETÁRIA MUITO MÍOPE, TENDO ESQUECIDO OS ÓCULOS, COLOCA, AO ACASO, UMA CARTA EM CADA ENVELOPE. DE QUANTOS MODOS ELA PODERÁ COLOCAR ESSAS CARTAS? E SE ESTIVESSEM FALTANDO OS ENVELOPES REFERENTES A DUAS CARTAS, DE QUANTOS MODOS ELA PODERIA COLOCAR AS OITO CARTAS EM SEIS ENVELOPES?

Comentário: Na literatura,observamos a existência de erro de interpretação do verbo, isto é, distribuir significa dividir. Nesse caso, queremos observar se a nossa seqüência deu conta deste tipo de erro.

QUESTÃO 7: (QUESTÃO 5) NUMA TURMA DE OITAVA SÉRIE, HÁ SEIS ALUNOS QUE PRATICAM NATAÇÃO:

A) QUANTOS RESULTADOS DIFERENTES PODEM OCORRER, PARA OS TRÊS PRIMEIROS LUGARES NUMA DISPUTA ENTRE ELES?
B) DE QUANTAS MANEIRAS DIFERENTES PODEM SER ESCOLHIDOS 3 DESSES ALUNOS PARA FORMAR UMA COMISSÃO QUE IRÁ PEDIR DISPENSA DAS AULAS?

Comentário: Segundo Batanero (1996), o erro de ordem está associado às combinações. Então, por meio dessa questão, gostaríamos de verificar se a seqüência conseguiu dar conta de tal tipo de erro ou se ele ainda persiste quando se trata de combinação.

QUESTÃO 8: (QUESTÃO 9) MARCAM-SE 4 PONTOS SOBRE UMA RETA R E 6 PONTOS SOBRE UMA RETA R', PARALELA À R. ESCOLHENDO-SE 3 DENTRE OS PONTOS MARCADOS, QUANTOS TRIÂNGULOS PODEM SER FORMADOS?

QUESTÃO 9: (QUESTÃO 6) O SEGREDO DO COFRE DE UM BANCO É CONSTITUÍDO DE DUAS LETRAS DISTINTAS (ESCOLHIDAS ENTRE AS 26 DO ALFABETO) E TRÊS ALGARISMOS DISTINTOS (ESCOLHIDOS DE 0 A 9). CASO O GERENTE ESQUEÇA O SEGREDO, QUAL O NÚMERO MÁXIMO DE TENTATIVAS DIFERENTES QUE ELE TERÁ QUE FAZER PARA ABRIR O COFRE? SUPONDO QUE AS LETRAS E OS ALGARISMOS NÃO TENHAM QUE SER DISTINTOS, QUAL O NÚMERO MÁXIMO DE TENTATIVAS? JUSTIFIQUE.

Comentário: Os erros de repetição estão associados a problemas de arranjo com repetição, segundo Batanero (1996). Logo, queremos observar se esse tipo de erro persiste depois de desenvolvida a seqüência de ensino com os alunos.

QUESTÃO 10: (QUESTÃO 10) O QUE PERMITE DIFERENCIAR ARRANJO DE COMBINAÇÃO?

Para facilitar a análise que faremos posteriormente sobre os testes aplicados, apresentaremos a seguir uma tabela relacionando as questões do pré com a do pós-teste, de tal forma a podermos referir às questões usando a mesma numeração. Assim sendo, a questão 1 do pré-teste teve equivalência matemática com a questão 3 do pós-teste e doravante ao nos referirmos a elas chamaremos de "questão1".

Questões	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Pré-teste	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10
Pós-teste	Q3	Q5	Q6	Q2	Q7	Q9	Q1	Q4	Q8	Q10

Tabela 3.1 : tabela referente as questões do pré e pós teste

3.3.3.3 Descrição da seqüência de ensino

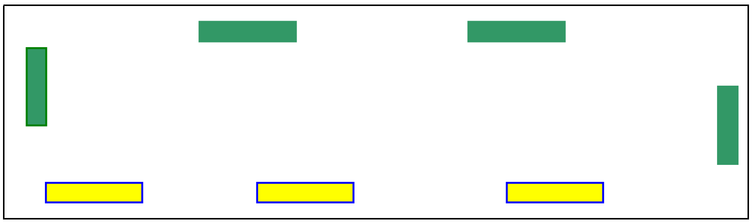
A seguir, apresentaremos a descrição inicial da seqüência de ensino. Faremos uma análise prévia das atividades bem como a descrição dos objetivos dos problemas.

Ficha 1

A primeira ficha de nossa seqüência envolve dois problemas cuja a resolução pode ser feita através do uso da contagem direta. O quadro a seguir apresenta esses problemas.

1) Atividade do parque

Você vai a um parque de diversões, o qual tem 3 entradas e 4 saídas. De quantos modos diferentes você pode entrar e sair desse parque?



Entrada s-

Saídas-

1) Atividade do campeonato de futebol.

Vamos realizar um campeonato de futebol, entre 4 escolas do bairro. Para esse campeonato, foi criada uma *loboteca*, fim de que os alunos pudessem fazer suas apostas. Ganha o aluno que acertar o primeiro e o segundo colocados. Quantas apostas diferentes poderão ser feitas?

	Time
1º	
2º	

Supondo que as escolas Acássio (A) e Barão (B) foram as duas primeiras colocadas.

O ganhador, da loboteca foi o que apostou em quail dos cartões abaixo:

João	***Time***	***Abel***	***Time***
1º	**Ac.**	**1º**	**Ba.**
2º	**Ba.**	**2º**	**Ac.**

() João ( ) Abel ( ) os dois ( ) nada posso afirmar

Quadro 3.3: Problemas da ficha 1 da seqüência de ensino

Objetivo das atividades: desenvolver o raciocínio combinatório através de experimentações com situações-problema que envolvam contagem. Observaremos a forma como os alunos interpretam as situações, estando atentos para os registros de representação. Temos, ainda, o objetivo de institucionalizar a árvore de possibilidades como uma ferramenta para produzir soluções. Por fim, discutiremos a aplicação do princípio multiplicativo em problemas de contagem.

Procedimentos: para a atividade um, a pesquisadora deixará que as duplas testem todos as maneiras possíveis de entrar e sair do parque, registrando todos os casos possíveis para efetuar a contagem.

A seguir, a pesquisadora pedirá para as duplas que façam as suas apostas, no cartão da atividade dois. Depois, colocará as apostas na lousa e perguntará se existem mais possibilidades para o primeiro e segundo lugar. Pedirá que algumas duplas façam a representação do problema na lousa, para análise e crítica dos registros apresentados, com o intuito de abrir uma discussão geral sobre quais são os registros mais descritivos, econômicos e informativos.

Após a discussão dos problemas iniciais, outros problemas serão propostos, para que os alunos possam ter mais interação com situações cuja solução pode ser encontrada, usando-se o princípio multiplicativo de forma intuitiva.

Assim sendo, serão postas questões complementares, tais como:

- Vamos supor que o parque da atividade 1 fosse o maior parque da América, o qual teria 20 entradas e 50 saídas. De quantos modos diferentes você poderia entrar e sair desse parque?

- Agora vamos voltar para o primeiro parque, o qual tem 4 saídas. Cada uma delas vai dar em um estacionamento e cada estacionamento tem 3 saídas. De quantos modos diferentes posso sair desse parque, sabendo que um estacionamento não tem ligação com o outro?

- E no parque que tem 50 saídas, se cada uma der em um estacionamento que tem duas saídas, de quantos modos diferentes posso sair desse parque?

- Para a atividade dois, vamos supor que estamos na quarta de final do campeonato brasileiro de futebol. Desses oito times que foram para a quarta de final, quais seriam as possibilidades para os dois primeiros colocados? (Nesta atividade a pesquisadora pedirá para que os alunos citem os times).

- Continuando na atividade dois, vamos supor que da próxima olimpíada irão participar 150 Países. Quais são as possibilidades para as medalhas de ouro, prata e bronze?

Material: Ficha de atividade contendo duas folhas.

Análise prévia: Na atividade da ficha 1, os alunos precisam ter como conhecimento o conceito de multiplicação (correspondência um para muitos).

Intuitivamente, acreditamos que os alunos facilmente escreverão o número de trajetos para entrar e sair do parque. Poderá ocorrer que algumas duplas se utilizem do raciocínio multiplicativo e outras, de esquema.

Para a atividade dois, esperamos que os alunos também não apresentem dificuldades, pois a solução apresenta poucas combinações. Nessa atividade, também poderá ocorrer o uso do raciocínio multiplicativo.

Para as questões complementares, acreditamos que se os alunos se apropriarem do raciocínio presente nas duas atividades da ficha, eles não apresentarão dificuldade em encontrar a solução correta, utilizando o princípio multiplicativo intuitivamente.

Tempo previsto: 15 minutos para cada uma das duas atividades e 30 minutos para as questões complementares.

Ficha 2

Nessa ficha, os alunos encontrarão atividades que lhes possibilitarão a utilização do princípio fundamental da contagem, ainda que de forma intuitiva.

1) Atividade dos triângulos e quadrados:

1.1) Dados quatro quadrados e três triângulos, conforme desenho abaixo, de quantas maneiras podemos selecionar:

a) Três quadrados sem reposição.
b) Três quadrados com reposição.
c) Dois triângulos sem reposição.
d) Dois triângulos com reposição.
e) Na primeira vez um triângulo e a seguir dois quadrados, sem reposição.
f) Na primeira vez um quadrado e a seguir dois triângulos, com reposição.
g) Um quadrado, um triângulo e um quadrado, nesta ordem e sem reposição.

1.2) Descreva as mesmas situações do problema 1.1, usando seis quadrados e cinco triângulos, conforme desenho abaixo:

1.3) Dados três quadrados e dois triângulos, conforme desenho abaixo, de quantas maneiras podemos colocar estas cinco figuras em uma fileira horizontal?

2) Atividades dos quadrados, triângulos e círculos.

Dados dois quadrados, dois triângulos e três círculos, conforme desenho abaixo, de quantas maneiras distintas podemos colocar essas sete figuras em uma fileira horizontal?

Quadro 3.4 : Problemas da ficha 2 da seqüência de ensino.

Objetivo da atividade: Continuar o trabalho de interpretar corretamente os enunciados, resolvendo situações-problema através de material concreto. Aplicar intuitivamente o princípio multiplicativo.

Procedimentos: A pesquisadora disponibilizará o material concreto e, em seguida, solicitará que os alunos, em dupla e usando o método de tentativa e erro, distribuam o material conforme as situações dadas. Quando as duplas tiverem chegado a uma solução, a pesquisadora pedirá que algumas delas escrevam na lousa o caminho percorrido na resolução, juntamente com a solução encontrada. Desse modo, poderá ser feita a comparação entre os resultados, destacando-se as diferenças e semelhanças observadas. Por fim, a pesquisadora convidará os alunos a refletirem e elegerem qual dos processos adotados se apresentou mais organizado.

Material: Ficha de atividades contendo três folhas e material concreto (quadrados, triângulos e círculos), confeccionado com cartolinas coloridas.

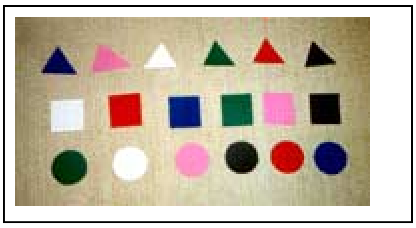


figura 3.1- Material concreto da ficha 2

Análise prévia: Nessas atividades, os alunos necessitam dos conceitos de seqüência e multiplicação. Com tais conceitos formados, acreditamos que a maioria dos estudantes consiga chegar intuitivamente ao princípio fundamental da contagem. Pode ser que a partir da segunda atividade, alguns alunos não façam mais uso do material concreto.

Tempo previsto: 10 minutos para a resolução de cada uma das quatro questões da atividade e 20 minutos para a discussão, no grande grupo dos procedimentos adotados e das respostas obtidas pelas duplas.

Ficha 3

A terceira ficha da nossa seqüência apresenta problemas em que a contagem direta é impraticável, sendo necessário que o aluno utilize o princípio fundamental da contagem, o qual será entendido intuitivamente e não memorizado.

1) ATIVIDADE DAS POLTRONAS

A ESCOLA VAI PROMOVER UMA EXCURSÃO PARA O PLAYCENTER E QUATRO AMIGOS, JOÃO, CARLOS, MANOEL E IVAN, VÃO OCUPAR AS QUATRO POLTRONAS DA FRENTE, CONFORME DESENHO ABAIXO:

$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ CORREDOR $\boxed{3}$ $\boxed{4}$

A) DE QUANTAS MANEIRAS DISTINTAS PODEMOS DISTRIBUIR OS BILHETES DAS QUATRO POLTRONAS REFERIDAS PARA OS QUATRO AMIGOS?

B) DE QUANTAS MANEIRAS PODEM SER OCUPADAS AS POLTRONAS DO LADO DIREITO E AS POLTRONAS DO LADO ESQUERDO, SEM PREOCUPAÇÃO COM A NUMERAÇÃO DAS POLTRONAS?

O NÚMERO DE POSSIBILIDADES DOS ITENS A E B SÃO IGUAIS? JUSTIFIQUE SUA RESPOSTA.

2) ATIVIDADE DOS ANAGRAMAS

2.1) VAMOS SUPOR QUE OS CÍRCULOS, OS QUADRADOS E OS TRIÂNGULOS DA ATIVIDADE 2 DA FICHA 2, REPRESENTAM, CADA UM, UMA LETRA DO ALFABETO. POR EXEMPLO A, B, C, D, E, F, G, DE QUANTAS MANEIRAS DISTINTAS PODEMOS COLOCAR ESSA SETE LETRAS EM UMA FILEIRA HORIZONTAL?

2.2) ESCOLHENDO A PALAVRA FAZER, QUANTOS ANAGRAMAS PODEMOS FORMAR?

ANAGRAMA: É UMA SENHA (OU CÓDIGO) FORMADA POR TODAS AS LETRAS DE UMA PALAVRA (SEM REPETIÇÃO, A NÃO SER QUE A PALAVRA TENHA LETRA REPETIDA), PODENDO OU NÃO TER SIGNIFICADO NA LÍNGUA PORTUGUESA

3) ATIVIDADE DA SENHA

3.1) O QUE É UMA SENHA?

3.2) PARA QUE SERVE?

3.3) CITE ALGUNS TIPOS DE SENHAS.

"É COMUM A UTILIZAÇÃO DE SENHAS PARA CARTÕES MAGNÉTICOS BANCÁRIOS, PARA PROGRAMAS DE COMPUTADORES, PARA RÁDIOS DE CARROS, MALAS DE VIAGEM, ETC".

NO FINAL DO MÊS, CADA ALUNO, USUÁRIO DO LABORATÓRIO DE INFORMÁTICA, DEVERÁ TER UMA SENHA PARA ACESSAR O COMPUTADOR. A TAREFA DO RESPONSÁVEL PELO LABORATÓRIO É CRIAR UM TIPO DE SENHA, DE MODO A DIFICULTAR QUE UMA PESSOA TENHA ACESSO À SENHA DA OUTRA. OBSERVANDO ALGUNS TIPOS DE SENHAS, RESPONDA:

QUAL DAS DUAS SITUAÇÕES A SEGUIR CRIARIA UMA SENHA MAIS DIFÍCIL DE SER DESCOBERTA? POR QUÊ?

A) TER UMA SENHA COM 4 ALGARISMOS DISTINTOS?

B) TER UMA SENHA COM 4 ALGARISMOS?

E NAS SITUAÇÕES ABAIXO, QUAL CRIARIA UMA SENHA MAIS DIFÍCIL DE SER DESCOBERTA? POR QUÊ?

c) Ter uma senha com 2 letras e 2 algarismos, nessa ordem?

d) Ter uma senha com 1 letra e 3 algarismos, nessa ordem?

e) Ter uma senha com 3 letras e 1 algarismo, nessa ordem?

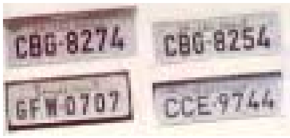
Agora, observando as situações abaixo, qual criaria uma senha mais difícil de ser descoberta? Por quê?

f)Ter uma senha com 4 letras?

g)Ter uma senha com 4 letras distintas?

Das três situações que você escolheu acima, qual delas criaria uma senha mais difícil de ser descoberta? Por quê?

4) Atividade das placas dos carros



Sabemos que as placas dos carros foram mudadas quanto a cor e o número de letras e algarismos: de amarela com duas letras e quatro algarismos, para cinza com três letras e quatro algarismos.

4.1) Por que você acha que houve essa mudança?

4.2) Calcule a quantidade máxima de placas que podem ser formadas com duas letras e quatro algarismos?

As placas GF 2544 e FG 2544 são diferentes? Por quê?

4.3) Calcule a quantidade máxima de placas que podem ser formadas com 3 letras e 4 algarismos?

As placas CLL 4566 e CLL 6645 são diferentes? Por quê?

4.4) Se precisássemos mudar novamente as placas, qual seria a melhor opção:

( ) aumentar a quantidade de letras

( ) aumentar a quantidade de algarismos

Por quê?

4.5) Qual seria a quantidade de placas possíveis com 3 letras e 4 algarismos, se considerássemos placas sem repetição de letras e algarismos?

As placas CTZ 8719 e CZT 8197 são diferentes? Por quê?

Quadro 3.5: problemas da ficha 3 da seqüência de ensino.

Objetivo das atividades: Reforçar o trabalho na direção da compreensão intuitiva do princípio multiplicativo através de situações-problema onde a contagem direta se torna impraticável. Generalizar o princípio multiplicativo, constituído como uma ferramenta básica, ao lado do princípio aditivo, para resolver problemas de contagem.

Procedimentos: Nas atividades, a pesquisadora não deverá tecer qualquer comentário inicial. Depois, solicitará que cada dupla exponha, para a classe, as idéias discutidas. A seguir, fará as comparações entre os resultados encontrados e institucionalizará o princípio multiplicativo.

Material: Ficha de atividade contendo 6 folhas e calculadora.

Análise prévia: Nas atividades da ficha 3, os alunos precisarão ter o conceito do princípio multiplicativo trabalhado nas fichas anteriores. Provavelmente, os alunos que entenderam as atividades anteriores não apresentarão dificuldades nas resoluções das atividades desta ficha.

Tempo previsto: para as atividades, 60 minutos; para a institucionalização do princípio fundamental da contagem, 10 minutos.

Ficha 4

A ficha 4 traz situações-problema onde o princípio multiplicativo não é aplicável, podendo tais situações ser resolvidas através da árvore de possibilidades.

1) ATIVIDADE DO JOGO DE FRESCOBOL

NUM TORNEIO DE FRESCOBOL, NA PRAIA DO BOQUEIRÃO, OS FINALISTAS FORAM ZECA E KADU. SERÁ DECLARADO CAMPEÃO AQUELE QUE VENCER DUAS PARTIDAS SEGUIDAS OU VENCER TRÊS PARTIDAS ALTERNADAS.

OBSERVANDO QUEM SAI VENCEDOR EM CADA PARTIDA ATÉ QUE SE OBTENHA O CAMPEÃO, QUAIS OS RESULTADOS QUE SE PODE OBTER?

SUGESTÃO: USE A ÁRVORE DE POSSIBILIDADES PARA ENCONTRÁ-LOS.

2) ATIVIDADE DOS ANAGRAMAS

A) QUANTOS ANAGRAMAS PODEMOS FORMAR COM AS TRÊS LETRAS DA PALAVRA ANA?

B) QUANTOS ANAGRAMAS PODEMOS FORMAR COM A LETRAS DA PALAVRA AMADA?

C) QUANTOS ANAGRAMAS PODEMOS FORMAR COM AS LETRAS DA PALAVRA LILI?

Quadro 3.6: Problemas da ficha 4 da seqüência de ensino.

Objetivo das atividades: Trabalhar com contra-exemplos, visando evitar a pseudoconcepção de que qualquer problema de contagem pode ser resolvido através do princípio multiplicativo. Continuar o trabalho de conscientização da importância na interpretação das situações-problema e observar os diversos registros de representação utilizados pelos alunos.

Procedimentos: Nas atividades, a pesquisadora deixará que os alunos tentem fazer a resolução solicitada. Depois, pedirá que cada aluno coloque as soluções dadas pelas duplas no quadro. Se nenhuma dupla utilizar a árvore de possibilidades, conforme sugestão dada na atividade 1, a pesquisadora utilizará a solução correta dada pelos alunos, usando a árvore de possibilidades. A seguir, mostrará, construindo na lousa, que a árvore de possibilidade serve tanto para problemas em que se aplica o princípio multiplicativo quanto naqueles casos onde o princípio multiplicativo não determina o número de casos possíveis.

Material: Ficha de atividade contendo duas folhas.

Análise prévia: Considerando que os alunos, nas atividades anteriores, já trabalharam com diversos registros de representações, acreditamos que nas duas atividades eles farão uso de esquemas, diagramas ou ainda tentarão se valer do princípio multiplicativo. Pode ser que nenhum aluno se utilize da árvore de possibilidades e aqueles que usarem o princípio multiplicativo não percebam que o problema está sendo resolvido de forma errônea.

Tempo previsto: 30 minutos para a primeira atividade, 20 minutos para a segunda atividade e 10 minutos para a institucionalização.

Ficha 5

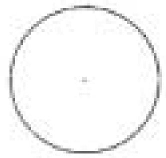
Na ficha 5, temos duas atividades para diferenciar arranjo de combinação.

1) ATIVIDADE DA AGÊNCIA DE TURISMO

A AGÊNCIA DE TURISMO CDD RECEBEU, PARA INCLUIR NO PACOTE DE VIAGEM, UMA PROPOSTA DOS SEIS RESTAURANTES DE LISBOA: RESTAURANTE ROSA DOS MARES, RESTAURANTE FADO, RESTAURANTE F.I.L., RESTAURANTE GRAND'ELIAS, RESTAURANTE SALSA LATINA, RESTAURANTE BAMBINO DE OURO.

SE A AGÊNCIA LEVAR OS TURISTAS PARA ALMOÇAR NESSES RESTAURANTES, RECEBERÁ UM DESCONTO, PORÉM, O RESTAURANTE ESCOLHIDO PARA O ALMOÇO NÃO PODERÁ SER O MESMO PARA O JANTAR.

VOCÊ FOI CONTRATADO PELA AGÊNCIA E FICOU ENCARREGADO DE ESCOLHER EM QUAIS RESTAURANTES ELES IRÃO ALMOÇAR E JANTAR. PARA O PRIMEIRO DIA DE ESTADA EM LISBOA, DE QUANTAS MANEIRAS VOCÊ PODE ESCOLHER RESTAURANTES PARA O ALMOÇO E O JANTAR?

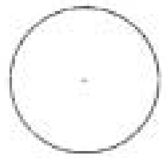


2) ATIVIDADE DA MARATONA DO SABER

UMA ESCOLA FOI CONVIDADA PARA PARTICIPAR DE UMA "MARATONA DO SABER" PARA ALUNOS DA 8ª SÉRIE.

COMO A ESCOLA TEM SEIS CLASSES DE OITAVA SÉRIE, A DIRETORA PEDIU QUE FOSSE SELECIONADO O MELHOR ALUNO DE CADA SÉRIE.

SABENDO QUE OS ALUNOS SELECIONADOS TÊM O MESMO DESEMPENHO E QUE A DIRETORA SÓ PODE MANDAR DOIS ALUNOS PARA A TAL MARATONA, DE QUANTAS MANEIRAS ELA PODERÁ ESCOLHER ESSA DUPLA?



NAS ATIVIDADES 1 E 2 ENCONTRAMOS O MESMO NÚMERO DE POSSIBILIDADES?

(   ) SIM   (   ) NÃO

POR QUE?

Quadro 3.7: Problemas da ficha 5 da seqüência de ensino

Objetivo das atividades: Reconhecer nos problemas as características que permitem diferenciar arranjo e combinação, trabalhando mais incisivamente na interpretação das situações-problema e na utilização de diversos registros de representação.

Procedimentos: A pesquisadora deverá deixar que as duplas discutam a solução de cada problema, iniciando a seguir, a institucionalização dos conceitos de arranjo e combinação.

Os alunos farão as representações das duas atividades através do uso do material concreto.

Solicitar que as duplas discutam os dois problemas até que consigam perceber que a primeira atividade é da mesma natureza que a maioria das atividades anteriores, isto é, para saber o total de casos, podemos aplicar o princípio multiplicativo. Todavia, na segunda atividade, somente o princípio multiplicativo não determina o número de casos possíveis, como na atividade dos anagramas usando palavras com letras repetidas.

A seguir, baseado nas atividades dessa ficha, outros problemas poderão ser propostos, tais como:

- Vamos supor que, na atividade da agência de turismo, você tivesse que escolher um restaurante para o café da manhã, outro para o almoço e outro para o jantar, seguindo a mesma regra. De quantas maneiras você pode escolher os restaurantes para o primeiro dia?

- Supondo que na atividade da maratona do saber a escola poderá mandar três alunos. De quantas maneiras a diretora poderá escolher os três alunos?

Material: Ficha de atividade, contendo duas folhas, canetas coloridas e um círculo de madeira dividido em seis partes e linha de bordar.

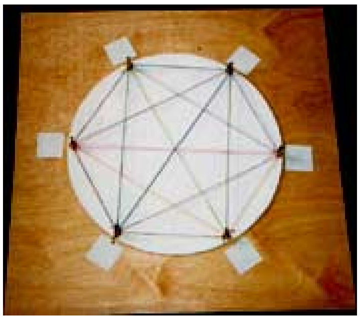


Figura 3.2 – material concreto da ficha 5

Análise a priori: Após haverem se familiarizado com problemas que envolvem contagem e com processos de formação de agrupamentos, acreditamos que os alunos consigam resolver estas atividades sem grandes dificuldades. Acreditamos que esse material poderá ajudá-los a entender o procedimento de resolução e chegar ao resultado correto, distinguindo quando a ordem é essencial ou não.

Tempo previsto: 25 minutos para cada atividade e 10 minutos para a institucionalização do conceito.

Ficha 6

Na ficha 6, temos algumas situações-problema em que se devem formar agrupamentos onde a ordem dos elementos é importante, e outras em que a ordem não é importante.

1) ATIVIDADE DA COBRANÇA DE PÊNALTIS FERNANDO, VINÍCIUS, JORGE E FABIO VÃO TREINAR PARA A COBRANÇA DE PÊNALTIS. INICIALMENTE, VÃO SER SORTEADOS DOIS DELES: UM PARA O GOL E OUTRO PARA A COBRANÇA DOS PÊNALTIS. QUANTOS POSSÍVEIS CASOS DISTINTOS EXISTEM PARA O RESULTADO DO SORTEIO DESSA PRIMEIRA DUPLA?

2) ATIVIDADE DA "MONTANHA RUSSA"

DEPOIS DO TREINO, ESSES QUATRO AMIGOS VÃO AO PARQUE DE DIVERSÕES ANDAR DE MONTANHA RUSSA. ELES PRETENDEM IR NO MESMO CARRINHO, PORÉM NO BANCO DA FRENTE, QUE PROVOCA MAIOR EMOÇÃO, SÓ CABEM DUAS PESSOAS. DE QUANTAS MANEIRAS DIFERENTES ELES PODEM ESCOLHER A DUPLA QUE IRÁ NO BANCO DA FRENTE?

ESCOLHER OS QUATRO AMIGOS PARA A COBRANÇA DOS PÊNALTIS E ESCOLHER A DUPLA QUE IRÁ NO BANCO DA FRENTE DO CARRINHO DA MONTANHA RUSSA REQUEREM O MESMO PROCEDIMENTO DE RESOLUÇÃO? POR QUÊ?

3) ATIVIDADE DO JÓQUEI

VOCÊ VAI AO JÓQUEI E DECIDE ARRISCAR UM PALPITE. NESSE DIA, HAVERÁ UM PÁREO COM SEIS CAVALOS E VOCÊ DECIDE ESTUDAR QUAL MODALIDADE DE APOSTA TEM MAIOR CHANCE DE GANHAR. AS MODALIDADES ESCOLHIDAS SÃO AS SEGUINTES:

a) MODALIDADE MAIS SIMPLES – VENCEDOR (OU PONTA)

NESSA MODALIDADE, VOCÊ ESCOLHE UM CAVALO E GANHA SE ELE CHEGAR EM PRIMEIRO LUGAR.

b) DUPLA (OU INEXATA)

VOCÊ ESCOLHE DOIS CAVALOS. PARA GANHAR, UM DELES TEM QUE CHEGAR EM PRIMEIRO LUGAR E O OUTRO EM SEGUNDO. VOCÊ SÓ TEM QUE ACERTAR OS DOIS VENCEDORES, MAS NÃO PRECISA ACERTAR QUEM CHEGOU EM PRIMEIRO E QUEM CHEGOU EM SEGUNDO LUGAR.

c) EXATA

VOCÊ ESCOLHE DOIS CAVALOS: UM PARA O PRIMEIRO LUGAR E OUTRO PARA O SEGUNDO. OU SEJA, É PRECISO ACERTAR OS DOIS PRIMEIROS COLOCADOS E ACERTAR, TAMBÉM, QUEM FOI O PRIMEIRO COLOCADO E O SEGUNDO COLOCADO.

d) TRIFETA SIMPLES

VOCÊ ESCOLHE TRÊS CAVALOS E É PRECISO ACERTAR QUEM CHEGOU EM PRIMEIRO LUGAR, QUEM CHEGOU EM SEGUNDO LUGAR E QUEM CHEGOU EM TERCEIRO LUGAR.

e) TRIFETA COMBINADA

PARA ACERTAR, É NECESSÁRIO QUE OS TRÊS CAVALOS ESCOLHIDOS CHEGUEM EM PRIMEIRO, SEGUNDO E TERCEIRO LUGARES, NÃO PRECISANDO ACERTAR QUAL DOS TRÊS CHEGOU EM PRIMEIRO EM SEGUNDO LUGAR E EM TERCEIRO LUGAR.

PERGUNTA –SE :

NO TOTAL, COM OS SEIS CAVALOS QUE PARTICIPARÃO DA CORRIDA, QUANTAS APOSTAS VOCÊ PODE FAZER EM CADA MODALIDADE? QUAL MODALIDADE LHE DÁ O MAIOR NÚMERO DE POSSIBILIDADES? O QUE DIFERENCIA A TRIFETA SIMPLES DA TRIFETA COMBINADA? O QUE DIFERENCIA A DUPLA INEXATA DA DUPLA EXATA? JUSTIFIQUE SUAS RESPOSTAS.

4) Atividade das frutas

Dona Maria foi à feira comprar frutas para seus três filhos: João, Roberto e Ana. O feirante tem, em sua banca, dez tipos de frutas. Dona Maria resolveu comprar cinco tipos de frutas diferentes. De quantas maneiras distintas ela poderá escolher essas cinco frutas?

Dona Maria comprou maçã, mamão, abacaxi, melancia e melão. De quantos modos distintos ela poderá distribuir uma fruta para cada um dos seus filhos, de modo que cada um coma uma fruta diferente?

Se dona Maria comprar maçã, mamão, abacaxi, melancia e melão ou se Dona Maria comprar abacaxi, maçã, melão, mamão e melancia, ela leva frutas diferentes para casa?

Se Dona Maria der uma maçã para João, um pedaço de mamão para Roberto e um pedaço de melancia para Ana ou se Dona Maria der um pedaço de mamão para João, um pedaço de melancia para Roberto e uma maçã para Ana, ela distribui as frutas de modo diferente?

Quadro 3.8: Problemas da ficha 6 da seqüência de ensino.

Objetivo das atividades: dar continuidade ao objetivo da ficha anterior, oferecendo condições para que os alunos avancem na diferenciação dos conceitos de arranjo e permutação e na interpretação cuidadosa das situações propostas.

Procedimentos: A pesquisadora distribuirá uma atividade de cada vez e após cada atividade analisará as respostas encontradas, observando os procedimentos utilizados. Ela buscará, constantemente, ressaltar as características que diferenciam arranjo de combinação.

Na atividade do jóquei, a pesquisadora deixará, a princípio, que os alunos façam suas apostas. A seguir, dará a atividade para que eles possam calcular o número de possibilidades.

Material: Ficha de atividades contendo quatro folhas e calculadora.

Análise prévia: Nessas atividades, os alunos precisam utilizar os conhecimentos adquiridos nas atividades da ficha anterior. Deverão, também, reconhecer quando a construção dos agrupamentos depende ou não da ordem dos elementos.

Uma vez entendida a diferença entre arranjo e combinação, acreditamos que os alunos conseguirão resolver todas as atividades. Pode ser que eles tenham uma dificuldade maior na atividade das frutas, pois terão que trabalhar com números maiores que as outras atividades.

Tempo previsto: 70 minutos para a resolução de todas as atividades.

Ficha 7

Na ficha 7, trabalharemos com situações-problema sobre arranjo, permutação e combinação.

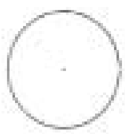
1) a) Quantos números de 3 algarismos distintos podem ser formados, usando-se os algarismos 1, 2, 3, 5, 8?

b) E quantos números de 5 algarismos distintos podem ser formados, usando os mesmos algarismos do item a)?

Quando vocês escolheram 3 algarismos e formaram um número, por exemplo, se o primeiro número escolhido for 5, depois os números 2 e 6, vocês criaram o número 526. Se escolhessem os mesmos algarismos, mas trocando a ordem da escolha, isto é, primeiro o número 2 e depois o cinco e o seis, o número formado seria diferente? Justifique sua resposta.

O que diferencia o item a) do item b)?

2)Quantas retas podem ser traçadas passando por dois pontos da circunferência abaixo. E quantas diagonais? Neste problema se você escolher primeiro o ponto A e depois o ponto B você tem uma reta. Se você escolher primeiro o ponto B e depois o ponto A, a reta que você obtém é diferente da anterior? Justifique.



3)Em um congresso há 10 físicos e 6 matemáticos. Quantas comissões de três físicos e 2 matemáticos podemos formar? Nesse problema, se você escolher primeiro os físicos Abel, Benedito e Carlos e depois os matemáticos Daniel e Eduardo estará formando uma comissão. Se você trocar a ordem da escolha, isto é, primeiro escolhe os matemáticos Daniel e Eduardo e depois os físicos Abel, Benedito e Carlos, a comissão formada será a mesma? Justifique sua resposta.

4)De quantas maneiras diferentes podemos trocar as posições dos elementos do conjunto B = = { , , , O, }?

5)Quantos são os números compreendidos entre 2000 e 3000, formados por algarismos distintos escolhidos entre 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9?

6)Você terá que pavimentar um salão conforme a figura 1 apresentada. O piso escolhido tem forma retangular e duas cores (conforme a figura 2). Pergunta-se: De quantas formas você poderá fazer este serviço, sem cortar o piso?

© → coluna

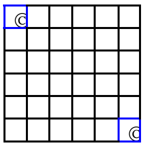


Figura 1

Fig.2

Quadro 3.9: Problemas da ficha 7 da seqüência de ensino.

Objetivo das atividades: Familiarizar os alunos com as notações de arranjo, combinação e permutação. O objetivo do último problema é mostrar que nem sempre na prática o raciocínio combinatório pode ser aplicado.

Procedimentos: A pesquisadora deverá dar um tempo suficiente para que os alunos leiam cada problema e cheguem à solução, destacando as diferenças entre eles e familiarizando-os com os nomes e notações de cada tipo de agrupamento.

Material: Ficha de atividade contendo três folhas, canetas coloridas, calculadora, chão do salão e pisos emborrachados, conforme desenho do problema 6.

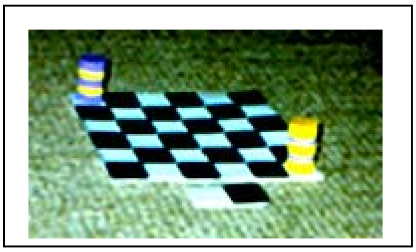


figura 3.3- material concreto da ficha 7

Análise prévia: Nesta ficha, os alunos precisam se valer de todos os conhecimentos usados e adquiridos durante a seqüência. Logo, acreditamos que os alunos não apresentarão grandes dificuldades na resolução dos problemas. Quanto à última atividade, apenas os alunos que fizerem a resolução por tentativa conseguirão chegar à conclusão certa.

Tempo previsto: 50 minutos para a resolução dos problemas e 10 minutos para a institucionalização.

ANÁLISE DOS RESULTADOS

4.1 – INTRODUÇÃO

Este capítulo é composto por três partes. A primeira traz comentários gerais sobre a aplicação de nossa seqüência com o grupo experimental. Na segunda parte, procederemos com a análise quantitativa do desempenho apresentado pelos grupos (experimental e de referência) nos pré e pós-testes. Essa análise será realizada, segundo quatro pontos de vista:

- o percentual geral de acertos de cada grupo nos dois testes;
- o desempenho por item;
- o desempenho por objetivo;
- o desempenho por indivíduo, envolvendo seu resultado em cada teste e a sua evolução do pré para o pós-teste.

Finalmente, a última parte será reservada para a análise qualitativa, a qual terá um momento que será a análise individual das estratégias de ação de três duplas nas três fases do experimento (pré-teste, seqüência e pós-teste).

4.2 COMENTÁRIOS GERAIS SOBRE A APLICAÇÃO DA SEQÜÊNCIA

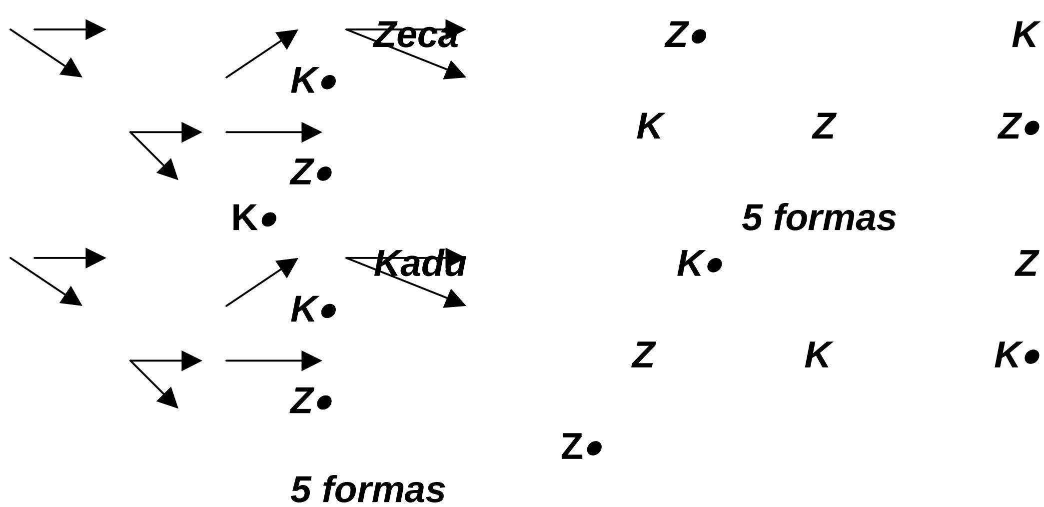
Nesta seção, apresentaremos e discutiremos o comportamento dos alunos frente às atividades e resolução de problemas propostos ao longo de nossa seqüência didática. Para uma melhor organização da apresentação e, principalmente, para sermos fieis à cronologia da seqüência, faremos nossos comentários e discussões de acordo com a ordem utilizada nas fichas, as quais mantém relação direta com o número de encontros. Como já havíamos dito no capítulo anterior, a análise da seqüência será feita para doze duplas, totalizando 24 alunos.

Inicialmente, convém definir operacionalmente três termos, usados ao longo de nossa análise.

Procedimento: **Processo usado pelos alunos na determinação de resultados possíveis, que pode ser por representação ou por tentativa e erro.**

Representação: **Quando o aluno faz uso de desenhos, tabelas ou árvore de possibilidades, na determinação de resultados possíveis.**

Exemplo: Resolução usada, por uma dupla, na atividade do jogo de frescobol da ficha 4.



Essa dupla usou um procedimento para chegar a todas as possibilidades, usando a árvore de possibilidades.

Tentativa e erro: **Quando o aluno escreve, uma a uma, as possibilidade de ocorrer um certo evento.**

Exemplo: Resolução usada, por uma outra dupla, na atividade do jogo de frescobol da ficha 4.

Zeca – Zeca
Kadu – Kadu
Zeca – Kadu – Zeca- kadu – Zeca
Kadu- Zeca – Kadu – Zeca – Kadu

Esta dupla não usou um procedimento que levasse a todas as possibilidades, e neste caso escreveu seis possibilidades a menos.

A seguir, historiaremos a aplicação da seqüência, comentando o comportamento e desempenho das duplas de alunos ao resolverem as fichas de atividades. Sempre que se fizer necessário ou adequado, transcreveremos trechos de diálogos de duplas para ilustrar esse desempenho.

Cabe informar ainda que esse histórico refere-se a 12 duplas (24 alunos). Dos 28 alunos iniciais, três foram excluídos do grupo por haverem faltado uma, ou mais vezes, aos encontros da seqüência e um trabalhou quase que constantemente sozinho. Este último sujeito só será computado na análise dos instrumentos diagnósticos.

4.2.1 Ficha 1

Situação problema 1: Atividade do parque

Das 12 duplas que participaram dessa atividade, nove duplas acertaram, uma errou, uma não respondeu e uma dupla deu duas respostas sem justificativa,

sendo que uma das respostas estava correta.

As nove duplas que acertaram fizeram uso da figura do parque, apresentada na ficha, desenhando as possibilidades.

Uma dupla resolveu de três maneiras diferentes:usou a figura do parque, valeu-se da tentativa e erro e, por último, utilizou um esquema para resolver a atividade.

Além da figura do parque, cinco duplas usaram a multiplicação para dar a solução do problema, e uma usou a adição.

A dupla que errou utilizou a figura apresentada na ficha, desenhando algumas possibilidades e, a seguir, respondeu que poderia entrar e sair do parque "de um modo só". Veja, a seguir, como foi o diálogo dessa dupla, conforme gravação:

Aluna 1: - ***Só pode entrar de um modo e sair de um modo. É uma coisa óbvia, de um modo só.***

Aluna 2: - ***eu acho que é 12***

Aluna 1: - ***Por que 12?***

Aluna 2: - ***3 vezes 4 dá 12, entra por esta entrada e sai por esta saída ...***

Aluna 1: - ***Isto não é matemática.***

Aluna 2: - ***Mas você entra por esta entrada e sai por esta saída, depois entra por esta entrada e sai por esta saída e ...***

Aluna 1: - ***Mas é de um modo só... Posso entrar e sair de modos diferentes... Este exercício é obvio, um modo só.***

Pela resposta apresentada na ficha, a aluna 1, depois de tanta insistência acabou convencendo a aluna 2.

Fica claro, nesse diálogo, que a dificuldade da aluna 1 estava na interpretação do problema. A pergunta dizia respeito ao número de *possibilidades* de entrada e saída e ela considerou apenas o processo realmente de entrada. É claro que uma pessoa não poderia entrar simultaneamente por três lugares, nem tampouco sair, simultaneamente, por quatro lugares.

A princípio, observamos que os alunos fizeram uma rápida leitura da atividade e logo em seguida começaram a reclamar que não haviam entendido. Solicitamos que lessem mais uma vez e novamente ficaram esperando uma resposta da pesquisadora, que leu lentamente o problema sem interferir na interpretação. Quando perceberam que não teriam a resposta, leram novamente o enunciado e tentaram buscar uma solução, discutindo os caminhos possíveis com o seu respectivo par. A maneira com que os alunos corresponderam à atividade nos pareceu reforçar a atitude de esperar do professor, quase sempre, uma resposta pronta. Percebemos, também, que as duplas apresentaram uma certa resistência em tentar resolver o problema, sem antes ter um conhecimento prévio do assunto. Observamos uma certa dificuldade na interpretação do enunciado, mas acreditamos que o desenho apresentado na ficha possa ter contribuído para que a maioria das duplas apresentasse o raciocínio correto.

A seguir, pedimos a cada dupla que escrevesse a resposta obtida na lousa e começamos a questionar os alunos. Debatemos a resposta “de um modo só”, discutindo o porquê de ela estar errada. Depois, questionamos qual seria o

processo de resolução mais eficiente, dentre aqueles que foram apresentados. Todas as duplas chegaram à mesma conclusão: multiplicar o número de entradas pelo número de saídas do parque.

Situação problema 2: Atividade do campeonato de futebol.

Dessa vez, os alunos leram o problema sem questionar ou esperar uma resposta da pesquisadora.

A princípio, foi pedido a cada dupla que fizesse sua aposta no cartão desenhado na atividade e, em seguida, escrevesse na lousa. Depois, a pesquisadora tirou as apostas iguais e, em relação as que ficaram na lousa, perguntou se existiam outras possibilidades e qual seria o número total de possibilidades para se apostar.

Nesta atividade, nove duplas responderam corretamente, sendo que oito duplas fizeram uso de representações e tentativas e erros e apenas uma usou a multiplicação. A dupla que respondeu "de um modo só" na atividade do parque também não apresentou raciocínio combinatório nessa atividade, respondendo: *"depende da quantidade de apostas feitas por escolas".* A dupla que respondeu à atividade 1 sem justificar também o fez nesta e a outra dupla, que não resolveu a atividade1, também não resolveu esta.

Quanto à segunda parte, onde os alunos tinham dois cartões com as aposta de João e Abel, dez duplas perceberam que era necessário especificar, no enunciado da questão, qual escola ficou em primeiro lugar e qual ficou em segundo lugar, para

ser possível identificar o ganhador da loboteca.
Após as duplas apresentarem as soluções da segunda atividade na lousa, questionamos novamente qual seria a melhor solução. Logo a seguir, foram propostas questões complementares. Nelas, todas as duplas se valeram da multiplicação, sendo que três iniciaram a solução usando representação , abandonando-a em seguida e optando pelo uso da multiplicação.

<u>Avaliação do encontro.</u>
Apesar da resistência apresentada no início, percebemos que os alunos foram ficando mais à vontade para expor seu raciocínio. No final, notamos uma aceitação maior do novo método de ensino.

4.2.2 Ficha 2

Situação-problema 1: Atividade dos triângulos e dos quadrados.

Essa atividade está dividida em três partes: Na primeira (1.1), as duplas receberam quatro quadrados e três triângulos de cores diferentes; na segunda (1.2), as duplas receberam seis quadrados e seis triângulos; e na terceira (1.3), os alunos trabalharam três quadrados e dois triângulos.
O objetivo de tal atividade é introduzir o princípio fundamental da contagem por tentativas e erros, com um procedimento que leve o aluno a todas as possibilidades. Na questão 1.2, colocamos mais figuras e questionamos os mesmos itens da questão 1.1. Nosso objetivo, ao colocar mais figuras, consistiu em dificultar a contagem e observar se os alunos iriam procurar uma

maneira mais rápida de chegar ao resultado, por exemplo, usando o princípio fundamental da contagem.

Distribuímos as fichas e o material concreto para cada dupla, sem comentar o que teriam que fazer. Como, no início, houve muita dificuldade em compreender o enunciado da questão, a pesquisadora fez uma interferência: leu o item a da questão 1.1 e iniciou a solução, com auxílio do material concreto, pedindo, a seguir, que as duplas continuassem até achar o número total de possibilidades.

Os itens restantes foram resolvidos sem questionamentos, com uso do material concreto. Apenas uma das duplas deixou o material concreto de lado e fez a resolução por meio de tentativa e erro, escrevendo as possibilidades na folha de questão.

A tabela a seguir apresenta a quantidade de acertos e erros em cada item da questão 1.1:

b	c	d
7	8	8
5	4	4

Tabela 4.1: **Desempenho das duplas nos itens a, b, c, d, e, f, g da atividade 1**

No item "a", dentre as duplas que acertaram, duas usaram o processo de tentativa e erro e uma usou o princípio multiplicativo. Entre as que erraram constatamos que três usaram a multiplicação de um para muitos, quatro duplas fizeram por tentativa e erro, e as outras duas usaram representação, mas com um procedimento que não possibilitou que encontrassem todas as possibilidades.

No item "b", também tivemos diferentes tipos de solução. Das duplas que acertaram, quatro usaram o processo

de tentativa e erro , duas usaram o princípio multiplicativo e uma resolveu usando representação. Uma das duplas que errou, usou o princípio multiplicativo, retirando quatro quadrados, com reposição, em lugar de três; outra usou o processo de multiplicação de um para muitos "4 cores vezes 4 opções" e as restantes usaram a representação ou fizeram por tentativa e erro, mas com um procedimento que não possibilitou que encontrassem todas as possibilidades.

Quanto ao item "c", oito duplas chegaram ao resultado correto. Nesse item, as duplas tiveram mais facilidade em achar um procedimento que as levasse a encontrar todas as possibilidades, pois o número de figuras era menor, em relação aos itens anteriores. Das oito duplas que chegaram ao resultado correto, 4 usaram o princípio multiplicativo e 4 usaram o processo de tentativa e erro.

No item "d", oito duplas fizeram a solução correta, pois tiveram a mesma facilidade do item anterior. Nesse item, apenas uma dupla, dentre as que acertaram, fez uso da representação para resolver a questão.

Nos itens "e", "f" e "g", as duplas voltaram a apresentar dificuldade em chegar ao número total de possibilidades. Talvez o fato de termos aumentado o número de figuras nesses itens possa ter contribuído para tal fato, mesmo porque, segundo Fischbein, existe uma dificuldade relativa dos problemas de análise combinatória em função da natureza e do número de elementos que devem ser combinados.

Dos resultados obtidos, constatamos que os alunos ainda não se apropriaram do conceito do princípio multiplicativo e

o processo de tentativa e erro não é um procedimento eficiente que possibilita a determinação de todas as possibilidades.
Depois que todas as duplas colocaram as respectivas resoluções na lousa, fizemos um debate para que os alunos discutissem qual seria a resolução correta de cada item. Discutimos, ainda, o que havia de errado nas outras resoluções. Logo a seguir, questionamos quais das soluções apresentadas eram mais eficientes.
Notamos um certo entusiasmo das duplas que responderam corretamente aos itens da questão 1.1, principalmente porque tiveram oportunidade de explicar o raciocínio para os colegas. Percebemos, também, uma certa fragilidade das duplas que não conseguiram chegar à resposta correta, mas tentamos incentiva-las mostrando-lhes que, mesmo não chegando ao resultado, usaram um raciocínio combinatório, que indicava um grande passo para o aprendizado desse conteúdo.
A seguir, distribuímos a continuação da ficha 2. Como já mencionamos, na questão 1.2 foram colocadas mais figuras, pedindo-se aos estudantes que descrevessem as mesmas situações da questão 1.1. Apenas duas duplas perceberam a relação existente nestas duas questões e fizeram corretamente todas as situações anteriores usando o princípio multiplicativo. As duplas que não interpretaram corretamente o problema fizeram a permutação das figuras.
Nas questões 1.3 e 2, as duplas ficaram em dúvida se deveriam trabalhar com todas as figuras ao mesmo tempo Nesse caso, houve intervenção da

pesquisadora: foi construída uma possibilidade, mudando-se a posição de duas figuras. Na questão 1.3, quatro duplas acertaram, usando o princípio multiplicativo. Das duplas que erraram, cinco usaram a multiplicação de um para muitos (5 x 4) e as restantes responderam sem justificar. Na questão 2, as quatro duplas que acertaram a questão anterior também acertaram esta, valendo-se do mesmo processo de resolução; as duplas que erraram a questão anterior também erraram esta, usando o mesmo processo para chegar à solução.

Observamos que o conceito de multiplicação do tipo um para muitos ainda é forte. Após a apresentação das soluções na lousa, houve a preocupação em comentar cada tipo de solução. Tentamos destacar as diferenças entre cada tipo de solução e a correta, dando condições aos alunos de aplicarem intuitivamente do princípio multiplicativo.

Avaliação do encontro:

Nesse segundo encontro, as duplas estavam mais soltas e pediam um tempo maior para resolver os problemas apresentados. Notamos que todas as duplas ficaram entusiasmadas com a entrega de um material concreto para trabalhar, mas observamos uma grande dificuldade em manuseá-lo. Descreveram as etapas solicitadas com certa dificuldade. Observamos, também, uma grande dificuldade na interpretação do enunciado e em relação ao desenvolvimento do raciocínio necessário para a resolução de problemas combinatórios.

Podemos notar que essa observação vai contra a Teoria de Piaget (1951). Segundo

o autor, depois das operações formais, o adolescente descobre procedimentos sistemáticos de construções combinatórias, mas ao mesmo tempo vai ao encontro do trabalho de Batanero (1997). Esta constata que a maior dificuldade em resolver os problemas de análise combinatória é a ausência de enumeração sistemática.

4.2.3 Ficha 3

Situação-problema 1: atividade das poltronas

Em relação a essa atividade, percebemos que as duplas utilizaram o desenho das poltronas, auxiliando a resolução do item "a". Oito duplas acertaram o item "a", sendo que quatro fizeram uso da representação e do princípio multiplicativo, uma dupla resolveu por tentativa e erro e três duplas usaram apenas o princípio multiplicativo. Uma delas, que resolveu erroneamente, fez a multiplicação do tipo um para muitos (4 amigos vezes 4 poltronas).

No item "b", houve necessidade da interferência da pesquisadora na interpretação do problema. Três duplas conseguiram chegar ao resultado correto, usando o processo de tentativa e erro. Uma das duplas que errou, usou o princípio multiplicativo e percebeu que deveria dividir o resultado, obtido no cálculo do princípio multiplicativo, pelo número de possibilidades que equivalem a uma, mas acabou dividindo por dois, quando deveria dividir por 4. Quantos aos erros, persistem os apresentados nas fichas anteriores.

Quatro duplas acharam que o modo de solução seria igual para os dois itens. As

demais duplas perceberam que o processo de solução mudava, pois, no item “a”, a ordem em que os amigos ocupam as poltronas é importante e, no item “b”, a ordem em que os amigos ocupam as poltronas de cada lado do corredor é irrelevante.

Situação-problema 2: atividade dos anagramas

Tal atividade foi dividida em duas partes: 2.1 e 2.2. Na questão 2.1, tivemos sete duplas que acertaram, sendo que duas duplas usaram representação e cinco duplas usaram o princípio multiplicativo. Uma das duplas usou a multiplicação do tipo um para muitos e outra dupla fez por tentativa e erro, chegando a 12 possibilidades e multiplicou esse resultado pelo número de letras (7). As outras três duplas responderam, sem justificar.

Na questão 2.2, oito duplas responderam corretamente, sendo que apenas uma fez uso da representação e as restantes usaram o princípio multiplicativo. A dupla que resolveu a questão 2.1 usando a multiplicação de um para muitos repetiu o procedimento nessa questão. A dupla que usou tentativa e erro também repetiu o mesmo procedimento. As outras duas não responderam à questão.

Quando as duplas apresentaram as respostas na lousa, tivemos a preocupação de comentar os resultados errôneos, justificando. Utilizando a árvore de possibilidades, demonstramos que a multiplicação do tipo um para muitos se torna inviável nesse tipo de problema.

Percebemos uma certa resistência das duplas em usar a árvore de possibilidades ou qualquer tipo de representação.

Situação-problema 3: atividade da senha

Essa atividade foi dividida em 4 etapas. Seis duplas fizeram uso do princípio multiplicativo e oito duplas colocaram a quantidade de letras ou algarismos em cada situação, etapa inicial do princípio multiplicativo. Das doze duplas, apenas uma respondeu erroneamente a duas etapas, sendo esta uma das que não usou o princípio multiplicativo.

Após apresentarem as soluções, mostramos que havia necessidade de justificar a resposta através de um cálculo e todas concordaram que o melhor caminho era o princípio multiplicativo.

Resolvemos deixar a atividade quatro para ser dada junto com a ficha 4, já que teríamos que prolongar o encontro por mais 10 minutos e, certamente, não haveria rendimento satisfatório na resolução desta atividade. Além disso, já havíamos observado que algumas duplas tinham um certa ânsia em responder rapidamente às questões.

Situação-problema 4: atividade das placas dos carros

Todas as duplas conseguiram estabelecer uma relação com as atividades anteriores e a resolveram corretamente, usando o princípio multiplicativo.

Vale ressaltar que os alunos consideraram também as mudanças de ordem dos elementos como novas placas a serem consideradas, justificando que seriam diferentes porque as letras ou algarismos estavam em posições trocadas.

Ao final dessa atividade, foi institucionalizado o princípio fundamental da contagem.

<u>Avaliação do encontro:</u>
Nesse encontro, pudemos constatar a dificuldade de algumas duplas em diferenciar os casos em que a ordem dos elementos é fator de diferenciação dos resultados. A mesma constatação é apresentada nas pesquisas de Batanero. Notamos, ainda, que as duplas estavam mais soltas e participativas nas discussões das soluções apresentadas pelos colegas.

4.2.4 Ficha 4

Situação-problema 1: atividade do jogo de frescobol.
Inicialmente, as duplas tentaram fazer uso do princípio multiplicativo, mas não havia um número exato de partidas, determinando que poderia haver no mínimo duas e no máximo cinco. Nesse momento, houve interferência da pesquisadora, sugerindo que usassem a árvore de possibilidades, conforme enunciado na atividade. Mesmo com tal interferência, apenas três duplas fizeram uso de tal representação, sendo que uma dupla fez uma parte da árvore e depois multiplicou por cinco partidas, em vez de multiplicar o número de finalistas, que seriam dois. Tivemos cinco duplas que acertaram a solução do problema e sete que erraram. Das sete duplas que erraram, três usaram representação e três usaram o processo de tentativa e erro, porém sem usar um procedimento que as levasse ao número total de possibilidades.

Pedimos que as duplas colocassem as soluções na lousa e discutimos não só os erros apresentados como a impossibilidade do uso do princípio fundamental da contagem.
Novamente, nessa ficha, constatamos a dificuldade dos alunos em estabelecer um procedimento que os levasse a todas as possibilidades.

Situação problema 2: atividade dos anagramas
Essa atividade contém três itens e também não pode ser resolvida por meio do princípio multiplicativo, mas sim pela árvore de possibilidades.
A tabela abaixo mostra o desempenho das duplas nos três itens da situação descrita:

Itens	a	b	
Acertos	7	2	
Erros	5	10	

Tabela 4.2: **Desempenho das duplas nos itens a, b, c da atividade 2**

Nessa atividade, pudemos constatar a dificuldade dos discentes em trabalhar com elementos repetidos, principalmente na permutação, fato já observado nas pesquisas de Batanero. Outra constatação é a diminuição do número de duplas que acertaram o item “b”, pois nele aumentamos o número de letras a serem permutadas. Novamente, corroboramos os resultados de Fischbein (1997), “ os alunos apresentam dificuldade quando aumenta o número de elementos a combinar”.
Das duplas que acertaram o item “a”, uma fez uso da árvore de possibilidades e as outras usaram o processo de tentativa e erro. Uma das duplas que errou, fez a árvore de possibilidades, mas

não cancelou as possibilidades iguais, e a outra usou o princípio multiplicativo, porém sem levar em consideração as letras repetidas. As duplas restantes erraram o resultado, pois resolveram por tentativa e erro, sem usar um procedimento.
No item “b”, as duplas que acertaram usaram como método de resolução a árvore de possibilidades. Três das que erraram usaram o princípio multiplicativo e as outras, o processo de tentativa e erro.
No item “c”, das duplas que acertaram, cinco usaram o processo de tentativa e erro e uma usou o princípio multiplicativo. Uma das duplas que errou, usou a árvore de possibilidades, porém escreveu 12 possibilidades, duas usaram o princípio multiplicativo, sendo que uma delas começou usando representação antes de utilizar o princípio multiplicativo. As demais fizeram por tentativa e erro.

Avaliação do encontro:
Nesse encontro, constatamos a necessidade de usar os conhecimentos já adquiridos e a resistência em usar a árvore de possibilidades.As duplas ainda apresentam alguma dificuldade em relação ao desenvolvimento do raciocínio necessário para a resolução de problemas combinatórios. A cada encontro, observamos uma necessidade maior das duplas no que se refere à discussão de suas soluções. Não existe mais a preocupação por haverem errado, mas sim pela descoberta de onde estão errando.

4.2.5 Ficha 5

Nessa ficha, usamos um círculo de madeira, em que havia seis pregos. Faríamos as ligações dois a dois, com linha de bordar. O círculo foi escorado na lousa para que qualquer dupla o usasse se e quando julgasse necessário. Nas atividades, foi desenhado um círculo em cada uma das questões. Pedimos que cada dupla dividisse o círculo desenhado, conforme a divisão apresentada no material concreto. Distribuímos canetas coloridas para cada dupla e pedimos que resolvessem o problema, utilizando o círculo desenhado e colocando o nome de cada restaurante nos pontos marcados (para a atividade 1), e representassem cada 8ª série (para a atividade 2).

Situação-problema 1: atividade da agência de turismo

Todas as duplas chegaram ao resultado correto, sendo que sete responderam `a questão multiplicando o número de restaurantes pelo número de ligações que saíam de cada restaurante, quatro ligaram os pontos e responderam contando o número de retas traçadas no desenho apresentado na ficha e uma somou as possibilidades de cada restaurante, desenhadas na circunferência.

Situação-problema 2: atividade da maratona do saber.

Tal atividade tem como objetivo o questionamento do fator ordem, isto é, levar os alunos a perceberem que a mudança de ordem dos elementos, nesse caso, não altera a dupla que participará

da maratona. Cinco duplas acertaram, pois perceberam que, ao unirem “o aluno da 8ª B com o aluno da 8ª A, teriam os mesmos alunos”. As outras sete duplas erraram, pois chegaram à mesma solução da atividade anterior.

Quando fizemos o debate referente aos resultados colocados na lousa, tentamos questionar por que as duas atividades não apresentavam o mesmo processo de resolução. Utilizando o material concreto, mostramos passo a passo o desenvolvimento do raciocínio necessário para as duas atividades, com o auxílio da árvore de possibilidades.

A seguir, apresentamos duas questões complementares. Em uma das questões, pedimos para que escolhessem os restaurantes para o café da manhã, almoço e jantar, seguindo a mesma condição da atividade 1, e na outra, que escolhessem três alunos para participarem da maratona do saber.

Para a questão complementar do restaurante, as duplas usaram o princípio multiplicativo sem nenhuma dificuldade. Para a questão complementar da maratona, já apresentaram dificuldade. Nesse momento, houve interferência da pesquisadora no sentido de chamar-lhes a atenção para o fato de que eles teriam um número menor de possibilidades. Então, à parte, as duplas começaram as possibilidades, fixando três elementos, sendo que dez chegaram ao resultado correto.

<u>Avaliação do encontro</u>

Observamos um entusiasmo quanto ao uso do material concreto, mas pudemos constatar que este não foi suficiente para que todas as duplas percebessem a

relação de ordem, principalmente quando ligado a problema de combinação. Essa observação reafirma os resultados encontrados nas pesquisas de Batanero (1996, 1997).

4.2.6 Ficha 6

Situação-problema 1: atividade da cobrança de pênaltis

Nessa atividade, os alunos não pediram a interferência da pesquisadora, responderam às questões com muita confiança e rapidez. Apenas duas duplas levaram mais tempo para resolver porque não chegavam a uma conclusão entre si.

Uma dupla errou, não considerando a ordem, e onze acertaram, pois perceberam que a ordem das escolhas seria importante. Das que acertaram, sete usaram como processo de resolução o princípio multiplicativo, duas usaram a representação para depois utilizar o princípio multiplicativo, uma usou o processo de tentativa e erro e outra usou o princípio aditivo.

Situação-problema 2: atividade da montanha russa

Uma dupla considerou a ordem quando era irrelevante e usou o princípio multiplicativo; as demais perceberam que, nesse caso, a ordem não tinha importância, justificando que se mudassem as posições dos amigos, eles ainda ficariam no banco da frente.

Das onze duplas que acertaram, duas fizeram uso da representação, uma do processo de tentativa erro e oito utilizaram o princípio fundamental da contagem.

Na questão em que perguntamos se o procedimento de resolução das duas

atividades seria igual, onze duplas responderam que “não”, justificando “que na segunda atividade a ordem de quem vai no banco da frente não importa”.

Ressaltamos, novamente, a importância da interpretação cuidadosa de um problema de combinatória, para sucesso na sua resolução, Nesse momento, salientamos a necessidade de sempre nos questionarmos sobre “se trocarmos a posição entre dois elementos, teremos ou não uma nova possibilidade”. Comentamos que essa pergunta poderia nos auxiliar a saber qual procedimento usar para resolver um problema de análise combinatória.

Situação problema 3: atividade do jóquei

Entregamos a atividade e esperamos que todos lessem. A seguir, pedimos para que cada dupla fizesse a sua aposta. A partir das apostas, perguntamos quem teria uma chance maior de ganhar o prêmio. Depois de debater um pouco sobre o que a questão informaria e requeria, pedimos que ela fosse resolvida. Nesse momento, tentando resgatar um pouco da história comentando que o estudo da análise combinatória foi desenvolvido principalmente para resolver problemas de probabilidade referentes a jogos de azar.

Tal atividade está dividida em cinco itens e cada item representa uma modalidade de aposta.

a	b	c	
11	5	9	
1	7	3	

Tabela 4.3: **Desempenho das duplas nos itens a, b, c, d, e da atividade 3.**

Uma dupla respondeu, de forma errada, à primeira modalidade, colocando oito possibilidades. Questionamos como seria possível se tínhamos apenas seis cavalos. Logo perceberam o erro e comentaram que haviam trabalhado com oito cavalos em todas as modalidades.

Na segunda modalidade, as duplas deveriam perceber que a ordem era irrelevante. Cinco acertaram, sendo que apenas uma usou representação. As sete que erraram resolveram através do princípio multiplicativo.

Na terceira modalidade as duplas deveriam considerar a ordem. Nove resolveram corretamente, sendo que apenas a dupla que utilizou a representação na segunda modalidade, continuou usando nesta modalidade. As demais usaram o princípio multiplicativo. As três duplas que erraram consideraram irrelevante a ordem de chegada dos cavalos.

Na quarta modalidade, a ordem deveria ser considerada. Das sete duplas que resolveram corretamente, uma fez a representação e as demais usaram o princípio multiplicativo. As duplas que erraram a resposta não consideraram a ordem.

Na quinta modalidade, a ordem era irrelevante, pois precisavam só acertar os três primeiros colocados, não importando a ordem de chegada. Das quatro duplas que acertaram, só a dupla que usou a representação em todas as modalidades anteriores continuou a usar. As demais usaram o cálculo. Uma das que errou considerou a ordem irrelevante, mas errou no cálculo. As outras sete usaram o princípio multiplicativo.

Na questão que pedimos para diferenciar a trifeta simples da combinada, todas as duplas responderam corretamente, acontecendo o mesmo na questão que pedimos para diferenciar a dupla inexata da dupla exata. Observamos alguma dificuldade em relação ao procedimento que deveria ser usado para cada tipo de modalidade. Mediante a esta observação tentamos enfatizar qual procedimento deve ser usado para cada caso, quando discutimos as soluções colocadas na lousa.

Situação-problema 4: atividade das frutas

Novamente nesta atividade as duplas teriam que questionar se a ordem era essencial ou não. Na primeira fase do problema 9 duplas acertaram e todas usaram como processo de resolução o cálculo aritmético. As outras três erraram, sendo que duas consideram corretamente que a ordem era irrelevante, mas fizeram o cálculo errado. Uma dupla errou porque usou duas frutas no lugar de cinco, e outra dupla que errou usou representação, mas sem o procedimento que chegasse em todas as possibilidades.

Na outra parte da questão, cinco duplas perceberam que a ordem seria essencial e resolveram corretamente, usando o princípio multiplicativo. Das que erraram, uma usou a representação sem o procedimento que fizesse chegar a todas as possibilidades, outra respondeu sem justificar, outra considerou a ordem, mas fez repondo as frutas (5 x 5 x 5) e as demais consideraram a ordem irrelevante.

Quanto às duas últimas questões, em relação à ordem, todas as duplas responderam corretamente. Novamente, percebemos a dificuldade de interpretar o problema, de questionar o fator ordem e de saber qual processo de resolução usar.
Como estávamos no nosso penúltimo encontro, decidimos fazer um debate mais prolongado, utilizando a árvore de possibilidades para auxiliar na interpretação do problema e no raciocínio, novamente resgatando a importância de como a representação pode auxiliar nesse tipo de problema.

Avaliação do encontro:
Nesse encontro, começamos a observar que as duplas questionavam se era ou não importante à ordem dos elementos, mas tinham dificuldade em saber o processo de resolução a ser usado em cada tipo de problema. Acreditamos que os alunos que utilizaram a representação ou tentativa e erro, conseguiram diferenciar um processo do outro. No final do encontro, enfatizamos a questão da ordem e mostramos qual processo de resolução deveriam seguir para os problemas em que a ordem é importante e para os que a ordem não é importante.

4.2.7 Ficha 7
Entregamos essa ficha e esperamos que as duplas resolvessem os problemas propostos para depois familiarizar os alunos com as notações de arranjo, permutação e combinação.
Algumas duplas ainda apresentaram o erro ordem, principalmente nos

problemas com enunciados diferentes ou os que exigiam mais de uma etapa de resolução.

1b	2		
12	9	6	
0	3	6	

Tabela 4.4: **Desempenho das duplas nos problemas 1a, 1b, 2, 3, 4, 5, 6 da ficha 7**

Nos problemas 1a e 1b, todas as duplas perceberam que a ordem era essencial e conseguiram diferenciar que no item “a” deveriam usar três dos cinco números apresentados e no item “b” deveriam trabalhar com todos números. Uma das duplas respondeu sem justificar e as demais justificaram através do princípio multiplicativo.

No problema 2, temos duas partes: a que pede o número de retas que podem ser formadas passando pelos pontos dados na circunferência e a que pede o número de diagonais. Para a primeira parte temos nove duplas que acertaram e três que erraram, e para a segunda parte seis acertaram e seis erraram. Das duplas que acertaram a primeira parte, sete utilizaram o desenho apresentado na atividade, e das que acertaram a segunda parte, quatro utilizaram o desenho. Pudemos perceber que uma das duplas que errou as duas partes, desenhou as retas na circunferência apresentada na atividade, mas não respondeu numericamente à questão.

Percebemos que as duplas apresentaram dificuldade em relacionar este tipo de problema, que para eles seria geométrico, a um problema combinatório. Houve necessidade de que a pesquisadora interferisse, tentando associar este problema às atividades da ficha 5. Na parte do problema que pedia o número de

diagonais, as duplas apresentaram dúvida quanto ao conceito de diagonais.

As duplas também apresentaram uma grande dificuldade no problema 3, onde elas teriam que calcular a quantidade de comissões formadas por físicos e matemáticos. Inicialmente, as duplas não perceberam que teriam que formar, primeiro, a comissão dos físicos e, depois, a dos matemáticos, unindo as duas comissões. Novamente, houve interferência da pesquisadora.

Uma das duplas, cuja a solução foi classificada como errada, não fez e justificou que não sabia iniciar. Das outras quatro que erraram, uma só fez a comissão de físicos; outra representou as comissões, não terminou e usou o princípio multiplicativo, considerando a ordem importante; a terceira permutou todos os matemáticos; a quarta juntou a quantidade de físicos com a de matemáticos e fez uma comissão de seis pessoas. Das que acertaram, nenhuma usou representação.

No problema 4, todas as duplas perceberam que a ordem era essencial e resolveram-no corretamente, usando o princípio fundamental da contagem. Tratava-se de um problema de permutação, utilizando-se figuras, semelhante às últimas atividades da ficha 2.

No problema 5, as duplas, a princípio, não conseguiram perceber que o algarismo 2 teria que ficar fixo na casa do milhar. Então, começaram a questionar e uma das duplas conseguiu notar que os números compreendidos entre 2000 e 3000 começavam por 2. Essa compreensão foi colocada oralmente e as demais duplas acabaram ouvindo,

questionando até conseguirem entender e aceitar tal raciocínio.
Das cinco duplas que erraram, três esqueceram de eliminar o algarismo 2 e trabalharam com os 9 algarismos (9 x 8 x 7 no lugar de 8 x 7 x 6). Pudemos perceber que interpretaram corretamente a questão da ordem. As outras duas responderam sem justificar. As que acertaram usaram o princípio multiplicativo.
Para o problema 6, distribuímos canetas coloridas e deixamos o material confeccionado (material emborrachado) à disposição das duplas que quisessem usá-lo.
Cinco duplas não fizeram uso desse material, sendo que duas não chegaram a nenhuma conclusão e não responderam ao problema, e três encontraram uma solução. Dessas três, uma usou o desenho apresentado na ficha e respondeu que "teria que deixar dois espaços em branco", a outra resolveu uma usando divisão (34 : 2) e a outra, multiplicação (16 x 2). As demais usaram o material e o desenho apresentado na atividade, percebendo que era impossível dar uma solução.
Depois de discutida toda a solução encontrada em cada um dos problemas apresentados na ficha, a pesquisadora explicitou os nomes para cada tipo de agrupamento e suas respectivas notações.
Enfatizamos, mais uma vez, a importância de se analisar, em todos os problemas de análise combinatória, se o fator ordem era ou não relevante no problema. Aproveitamos para diferenciar arranjo de combinação, mostrando que, para arranjo, a ordem dos elementos é

essencial, enquanto que para combinação, irrelevante.

<u>Avaliação do encontro:</u>
Nesse encontro, ainda percebemos, conforme resultados encontrados nas pesquisas de Batanero (1996, 1997), dificuldade em resolver os problemas em que a ordem é irrelevante. Notamos que as representações e o processo de tentativa e erro foram praticamente abandonados.
Fazendo um levantamento da nossa seqüência, chegamos à conclusão de que precisaríamos ainda de mais dois encontros para que pudéssemos trabalhar com outros tipos de situações-problema, principalmente aqueles que precisassem de mais de uma etapa de resolução. Havia necessidade de mais problemas de combinação simples, momento em que os alunos apresentaram maior dificuldade.

4.3 ANÁLISE DO DESEMPENHO DOS GRUPOS EXPERIMENTAL E DE REFERÊNCIA NOS TESTES

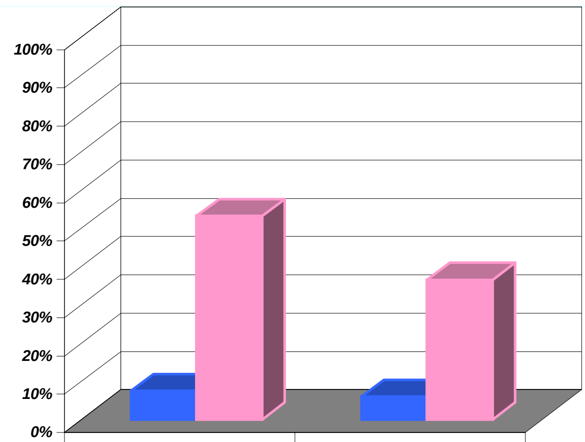
Nessa seção, faremos a análise quantitativa do desempenho apresentado pelos grupos experimental e de referência nos instrumentos diagnósticos, quais sejam pré e pós-testes. Sempre que pertinente, compararemos os resultados destes grupos.

Após a apresentação da tabulação numérica de cada um dos quatro pontos de vista pelos quais analisaremos os dados, procederemos à discussão dos resultados obtidos.

Antes de darmos procedimento à análise, gostaríamos de reiterar a mudança na quantidade de participantes tanto no grupo experimental quanto no de referência. Tal mudança foi necessária porque alguns sujeitos não compareceram a todos os encontros previstos no experimento. Assim sendo, o grupo experimental, que se iniciou com 28 sujeitos, perdeu três e ficou com 25 sujeitos; já o grupo de referência, que se iniciou com 30, perdeu seis e ficou com 24 sujeitos.

4.3.1 Análise Numérica e Gráfica do Percentual de Acertos dos Grupos.

Apresentaremos, a seguir, a análise da porcentagem relativa de acertos de cada grupo no pré e pós-testes. Em cada teste (pré e pós), havia 16 itens a serem analisados. Como o grupo experimental era composto de 25 alunos, tivemos um total de 400 possibilidades de acerto por teste. Já no grupo de referência, composto de 24 alunos, 384 passa a ser o número de possibilidades de acerto por teste. Dessa forma, obteremos a porcentagem relativa de acertos (de cada grupo) nos pré e pós-testes.



	Grupo experimental	Grupo de referência
Pré	*7,50%*	*6,00%*
Pós	*53,20%*	*36,50%*

Gráfico 4.1: porcentagem de acertos geral dos grupos

O gráfico, acompanhado da tabela, mostra-nos que o grupo experimental teve maior desempenho tanto no pré como no pós-teste, sendo que no pré-teste esta diferença foi ínfima (menos de 2%).

Observando o gráfico, surge uma questão: a diferença entre os dois grupos, no pós-teste, seria estatisticamente significativa?

Para responder a tal questão, construímos um quadro com os acertos globais de cada sujeito e fizemos um tratamento estatístico, para verificar a significância de diferenças.

Escolhemos o teste estatístico de Mann-Whitney por ser adequado para comparação de dois grupos independentes e o número de acertos por sujeito constituir uma mensuração ordinal.

Os cálculos obtidos foram os seguintes: $z = 2{,}56$ e $p = 0{,}0052$. Como o valor de p é inferior a $\alpha = 0{,}01$, nossa decisão é rejeitar a hipótese de nulidade em favor da hipótese alternativa. Concluímos, então, que a diferença obtida entre os dois grupos (experimental e referência) é significativa. Isso quer dizer que o melhor desempenho do grupo experimental sobre o grupo de referência não se deu ao acaso.

O grupo de referência, mesmo após haver estudado o conteúdo análise combinatória proposto para o ensino médio, sendo submetido a três avaliações antes de ser aplicado o pós-teste – o que implica maior contato com o objeto, em comparação com o grupo experimental – acertou o equivalente a pouco mais de um terço do pós-teste. No pré-teste, vale notar que o acerto em ambos os grupos foi muito baixo. De fato, o pré-teste foi elaborado de tal forma que permitisse que um aluno que não tivesse nenhum contato com o conteúdo análise combinatória pudesse acertar no máximo 20%, o que está longe de ser realidade nos dois grupos.

Com relação ao pós-teste, o percentual de acerto do grupo experimental foi satisfatório, muito mais se considerarmos que os alunos só tiveram contato com o objeto durante os encontros. Contudo, essa primeira apresentação dos resultados é muito geral e não nos fornece dados suficientes para que possamos analisar o comportamento desses alunos sob o ponto de vista da formação e do desenvolvimento do conceito de análise combinatória. Para tanto, procuramos realizar outros tipos de análise que apresentaremos nas seções a seguir.

4.3.2 Análise do Percentual de Acertos por Itens

A tabela a seguir representa o percentual de acertos de cada questão apresentado pelos grupos nos dois testes. Temos a intenção de realizar tal análise, visto que cada item foi elaborado de modo a privilegiar um determinado processo de resolução. Com isso, poderemos observar em que pontos há maiores dificuldades.

Faremos uma análise quantitativa de seus desempenhos em cada questão, citando os principais tipos de erros. Uma análise global da categorização de erros será apresentada mais adiante, com a finalidade de se obter uma visão mais ampla dos caminhos que levaram o aluno ao insucesso.

Questões/	Grupo experimental	Grupo de referência

Grupos	8ª série		2º colegial	
	Pré-teste	Pós-teste	Pré-teste	Pós-teste
Q1 a	72%	20%	50%	33%
Q1b	20%	8%	8%	25%
Q2	32%	76%	25%	42%
Q3a	0%	60%	0%	21%
Q3b	0%	44%	0%	12%
Q4a	0%	88%	4%	75%
Q4b	0%	84%	0%	42%
Q5a	0%	96%	0%	67%
Q5b	0%	44%	0%	38%
Q6a	0%	48%	0%	46%
Q6b	0%	52%	0%	46%
Q7	0%	28%	0%	4%
Q8a	0%	76%	0%	29%
Q8b	0%	32%	0%	17%
Q9	0%	28%	0%	17%
Q10	0%	72%	0%	71%

Tabela 4.5: Percentual de acertos dos dois grupos, no pré e pós-teste, por itens.

A seguir, apresentaremos os gráficos de comparação da evolução por questão do pré para o pós-teste e da comparação do percentual de acertos por questão entre os dois grupos (no pós-teste).

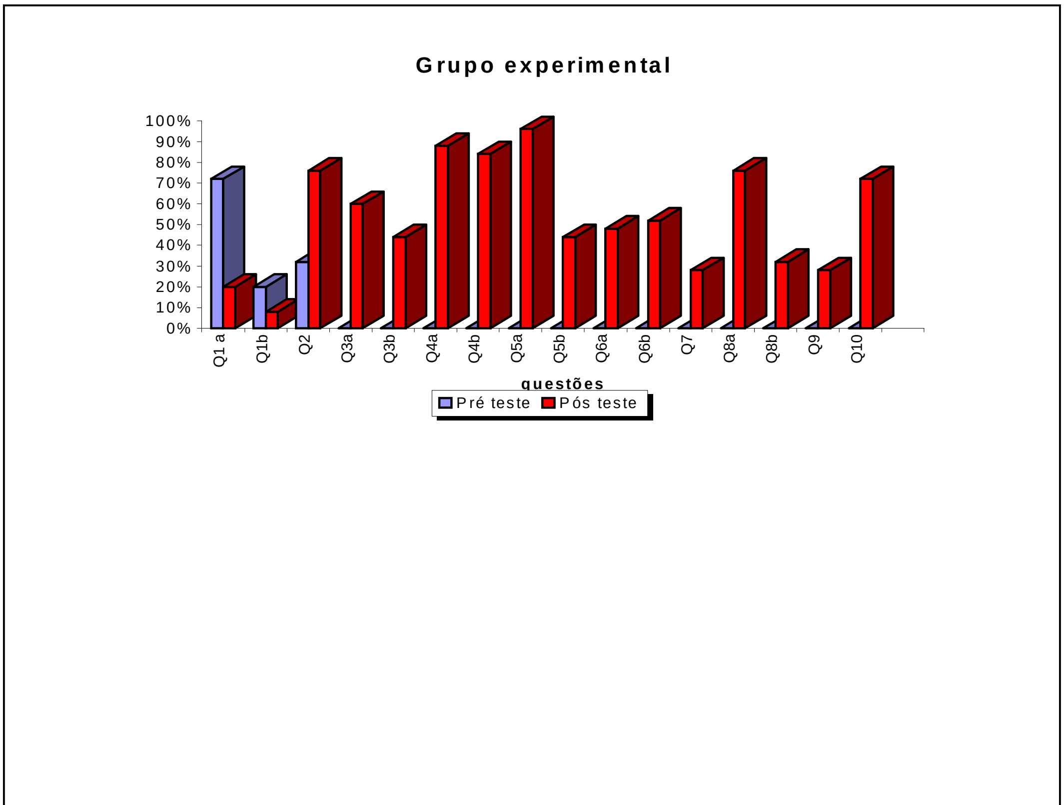
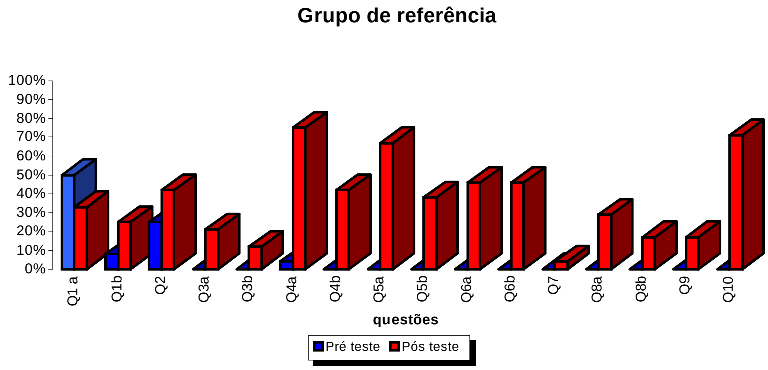


Gráfico 4.2: Desempenho dos grupos experimental e de referência no pré e pós-teste, por itens.

Observando o gráfico acima, notamos que o grupo de referência apresentou uma porcentagem de acerto maior na questão 1 em relação ao grupo experimental, não chegando, porém, a um resultado satisfatório. Nas questões 5b, 6a, 6b e 10, vemos que os dois grupos apresentaram quase a mesma



porcentagem de acerto, com uma diferença que varia de 1% a 6%. Nas demais questões, o grupo de referência apresentou um percentual maior de acerto.

Notamos que na questão 1a, o rendimento de acerto do pós-teste caiu substancialmente nos dois grupos, em relação ao pré-teste, sendo que a queda do grupo experimental foi ainda mais acentuada. Na questão 1b, o número de alunos que acertou no pré-teste também foi relativamente maior do que no pós-teste. Outra questão que nos chamou a atenção foi a 5a, pois os dois grupos apresentaram grande dificuldade no pré-teste (um acerto de 0 %) e, no pós-teste, houve um bom rendimento, principalmente o grupo experimental, com 96% de acertos. A questão 7 foi outra que nos chamou a atenção, já que, no pré-teste, nenhum dos alunos dos dois grupos conseguiu acertar e, no pós-teste, o número de acertos também foi pequeno para os dois grupos. O mesmo aconteceu com a questão 9. Tais questões serão melhores comentadas a seguir, quando iniciarmos a análise por questão.

Podemos, também, observar que os dois grupos mantiveram uma mesma tendência de comportamento, exceto na questão 1b. Em outras palavras, à exceção da questão 1b, todas as outras que o grupo experimental mais acertava eram as que o grupo de referência também mais acertava, embora os percentuais de acertos diferissem de um grupo para o outro. Assim, notamos que na questão 2 tanto o grupo experimental como o grupo de referência tiveram um percentual de acerto maior do que em relação à questão 3a. Depois, na questão 4a, aumenta o percentual de acerto, voltando a diminuir na questão 4b e novamente aumentando na questão 5a.

A seguir, partindo dos resultados apresentados no gráfico 4.3, faremos a análise para cada questão do pós-teste com relação aos dois grupos.

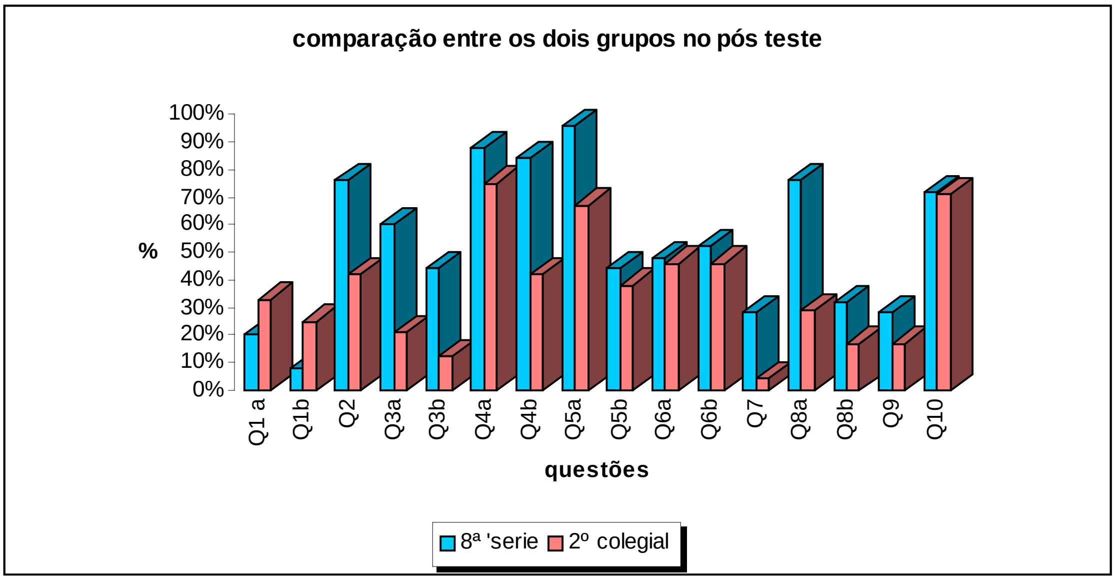
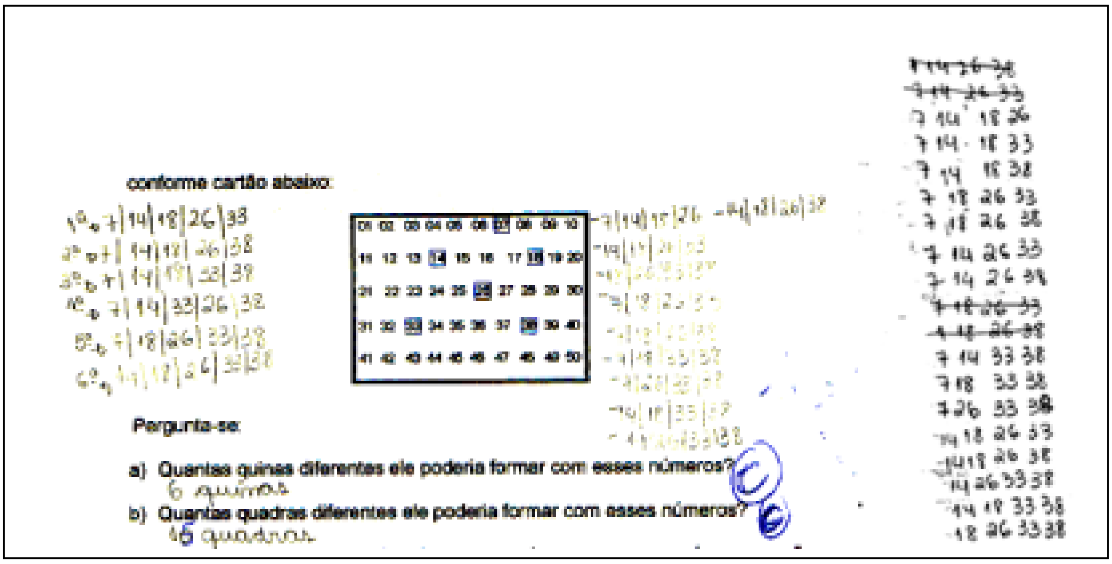


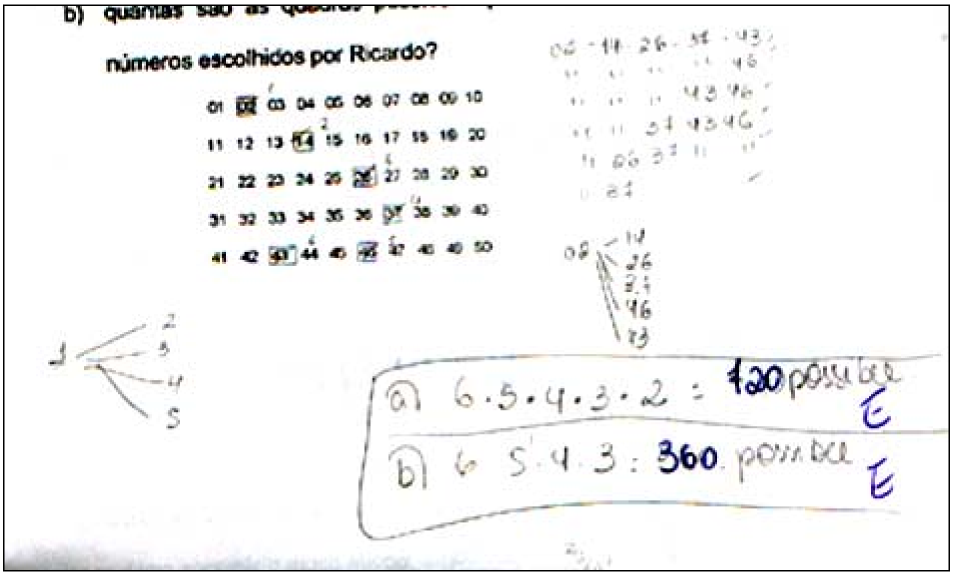
Gráfico 4.3: Resultado das questões do pós-teste com relação aos grupos experimental e de referência.

Observando o item “a” da questão 1, podemos notar que os dois grupos regrediram, não apresentando uma porcentagem de acertos satisfatória no pós-teste. Nessa questão, foram marcados seis números, em um cartão do jogo da sena, para se saber o número de quinas que poderiam ser formadas com eles. No pós-teste, notamos que os alunos perceberam a irrelevância da ordem e usam o princípio fundamental da contagem ou a fórmula de arranjo (grupo de referência), no processo de resolução. No pré-teste, acreditamos que a apresentação de um resultado mais satisfatório se deve ao fato de os alunos usarem o processo de tentativa e erro e assim conseguirem perceber que, ao mudarem a posição de um número, tinham a mesma quina formada, chegando a todas as possibilidades possíveis e, conseqüentemente, ao resultado correto.

As figuras abaixo são os protocolos da questão 1 do pré e pós-teste de um dos sujeitos do grupo experimental. Nela é possível observar as diferenças nas estratégias de ação desse sujeito.



Extrato de protocolo da aluna 3 do grupo experimental -extraído do pré-teste



Extrato de protocolo da aluna 3 do grupo experimental -extraído do pós-teste

Podemos observar que no pós-teste a aluna começou a resolver por tentativa e erro, tal qual o fez no pré-teste, mas desistiu e buscou resolver usando o princípio multiplicativo, considerando a ordem importante, enquanto esta não o era.

No item “b” da questão1, os alunos deviam calcular o número de quadras possíveis. Podemos notar que os dois grupos apresentaram resultados insatisfatórios, sendo que o grupo de referência evoluiu no pós-teste enquanto o grupo experimental regrediu. A dificuldade apresentada pelo dois grupos foi novamente não questionar o fator ordem. O grupo experimental obteve um resultado um pouco melhor no pré-teste, pois efetivou o mesmo procedimento de resolução do item “a”, por tentativa, onde novamente o fator ordem foi percebido intuitivamente.

Podemos observar, a partir do exemplo anterior, que se a aluna tivesse feito uso da representação também no pós-teste provavelmente chegaria à resposta correta, pois perceberia que a ordem era irrelevante. Questionando as resoluções apresentadas pelos alunos, pudemos observar que eles deixaram de lado a representação e tentaram usar o processo mais econômico (princípio fundamental da contagem ou fórmula, tratando-se do grupo de referência).

Depois de várias reflexões, achamos que deveríamos ter valorizado mais a representação, desde o início da nossa seqüência didática. Por exemplo, poderíamos ter criado uma atividade, onde eles trabalhassem com os volantes dos jogos da sena ou outros jogos, e fazer um sorteio, usando uma urna de bingo. Aí trabalharíamos com a troca da ordem dos números sorteados e questionaríamos os alunos para que pudessem perceber que, mudando a ordem dos números sorteados, estes teriam a mesma seqüência.

Nessa questão, também, podemos nos perguntar se os alunos não obtiveram melhor resultado no pré-teste devido ao contrato didático estabelecido. Isto é, no pré-teste eles não tinham conhecimento do conteúdo pedido e poderiam resolver de uma forma mais livre; já no pós-teste, eles haviam estudado o conteúdo e já possuíam conhecimento de outras formas de resolução sem ser a representação. Por isso, talvez se tenham sentido na obrigação de utilizar o conhecimento adquirido e quando foram usar o princípio fundamental da contagem, esqueceram-se de questionar a ordem.

A questão 2 é um tipo de problema que o aluno já conseguiria resolver no pré-teste, através da representação. Os dois grupos apresentaram uma porcentagem insatisfatória no pré-teste, provavelmente por exigir do aluno a interpretação do problema. Após o estudo do conteúdo Análise Combinatória, o grupo experimental teve um crescimento satisfatório (76%), enquanto que o grupo de referência, apesar de ter um crescimento em relação ao pré-teste, não chegou a um resultado satisfatório (42%).

Nesta questão os alunos fizeram uso do desenho para resolver o problema. Dessa forma, o tipo de representação através do desenho os auxiliou na resolução e eles não o abandonaram durante a resolução do pós-teste, como veremos em algumas questões adiante.

A questão 3 é referente à permutação dos elementos , onde o processo correto de resolução seria através do princípio fundamental da contagem, ou através da fórmula de permutação sem repetição. Nessa questão, uma calculadora seria essencial para não haver erro de conta. Pudemos notar que no pós-teste o grupo experimental obteve 60% de acerto, enquanto o grupo de referência apenas 21%. O principal motivo que levou os grupos a uma resposta incorreta no pré-teste foi constituído pela forte interpretação do verbo “distribuir” que para eles significa dividir. Analisando o procedimento de resolução que os alunos adotaram no pós-teste, foi possível notar que o principal motivo que levou a resposta incorreta foi constituída pela correspondência do tipo um-para-muitos entre dois conjuntos: Uma carta para 8 envelopes, como são 8 cartas, então temos 8 x 8 possibilidades.

No item “b” da questão3, os alunos não teriam que usar todos os elementos do conjunto (arranjo simples). Os dois grupos não tiveram desempenho satisfatório. No pós-teste, acreditamos que o grupo experimental não teve um desempenho satisfatório, para os alunos que acertaram o item “a”, devido ao erro de conta ou a forte interpretação do verbo “distribuir”. Podemos ressaltar, para os alunos que erram o item a, que continuou a correspondência do tipo um-para-muitos. Este tipo de resolução apareceu freqüentemente nos primeiros encontros da seqüência e tivemos grande dificuldade para ‘convencer’ algumas duplas de que elas estavam erradas ao usar esta correspondência.

Questão 4, item “a”, pede o número de anagramas que podem ser formados através de uma palavra sem letras repetidas. Notamos que os dois grupos evoluíram, apresentando uma porcentagem de acertos satisfatórios no pós-teste.

Na questão 4, item “b” , já é dada uma palavra com duas letras (a) (permutação com repetição). Pudemos notar que o grupo experimental obteve 84% de acerto, enquanto o grupo de referência apenas 42%. Nesse caso, para o grupo de referência, durante a seqüência de ensino, valorizamos a fórmula de permutação com repetição, enquanto que para o grupo experimental valorizamos a árvore de possibilidades e o princípio fundamental da contagem, mostrando que as possibilidades que são iguais devem equivaler a uma possibilidade, diminuindo, assim, o número total de possibilidades. Talvez esta abordagem da nossa seqüência tenha favorecido o bom desempenho do grupo experimental nesse item, pois iniciamos o trabalho com problemas onde o número de letras das palavras era pequeno e com poucas repetições. Só depois aumentamos a quantidade de letras na palavra e a quantidade de letras repetidas. O que nos levou a formular uma situação-problema deste tipo foram os trabalhos de Batanero (1996, 1997), que mostra que um dos tipos de erros freqüentes no estudo de análise combinatória é o de repetição.

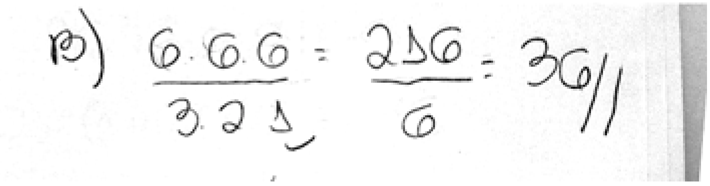
Questão 5 item “a”, o grupo experimental atingiu quase que a totalidade de acertos no pós teste (96%) e o grupo de referência é satisfatório (67%). Para o grupo de referência foi valorizada a fórmula e dada a definição de arranjo, enquanto que para o grupo experimental foi valorizado que a ordem tinha importância e que poderia fazer através da árvore de possibilidades ou através do princípio fundamental da contagem. Todos que acertaram do grupo experimental trabalharam com o princípio multiplicativo.

No item “b” da questão 5, temos por objetivo analisar se o aluno perceberia que a ordem, irrelevante, é um caso de combinação simples. Não foi apresentado um bom resultado nem no grupo experimental (44%) nem no grupo de referência (38%). Pudemos observar que alguns alunos do grupo experimental parecem ter percebido que existia uma certa diferença do item “a” para o item “b”, resolvendo-os de uma forma diferente, embora errônea. Outros consideraram a ordem irrelevante,mas erraram no cálculo. Quanto ao grupo de referência alguns alunos distinguiram a ordem como sendo irrelevante, mas erravam na aplicação da fórmula.

Na aplicação da seqüência, mais do que nas aulas com o grupo de referência, buscamos enfatizar a importância de se observar à ordem nos problemas de combinação, pois esse tipo de erro já havia aparecido nos trabalhos de Batanero. Pudemos observar que apenas um aluno do grupo experimental não se preocupou em ver se existia alguma diferença do item “a” para o item “b” e resolveu os dois itens usando o princípio multiplicativo e chegando ao mesmo resultado. Os outros alunos perceberam que o item “a” da questão era diferente do item “b”, mas não souberam que processo utilizar para resolver o item “b”. Exemplificando, temos:

O aluno número 12 do grupo experimental respondeu à questão usando o princípio fundamental da contagem: 6 x 5 x 4. Nesse caso, o aluno respondeu que o número de resultados possíveis para os três primeiros lugares é igual para a quantidade de comissões formadas por três alunos.

A aluna número 5 do grupo experimental respondeu à questão 5 item “a” usando o princípio fundamental da contagem, conforme aluno número 12. A questão 5 item b ela resolveu da seguinte maneira:



o correto seria (6 . 5.4) : 6

Extrato de protocolo da aluna 5 do grupo experimental -extraído do pós-teste

Podemos ver que a aluna considerou que o número de possibilidade diminuiu, só que não soube que processo aritmético usar para a resolução. Nesse caso, houve a interpretação correta do enunciado e sobre a questão ordem.

Observamos ainda que, nesta questão, no grupo experimental, apenas um aluno errou o item “a”, pois quando foi resolver colocou sete alunos em lugar de seis, mas fez o processo aritmético correto. Dos alunos que erraram o item “b”, um aluno montou corretamente o processo, mas errou na divisão:

(6 x 5 x 4) : (3 x 2 x 1) = 2

e outros alunos não souberam por qual número dividir.

Podemos concluir então que os alunos questionaram o fator ordem, só que eles ainda apresentam dificuldade no processo de resolução.

A questão 6 item “a”, do pós teste, pedia o número de tentativas para achar o segredo de um cofre, constituído com letras e algarismos distintos. Nessa questão, os dois grupos não apresentaram resultado satisfatório. Os erros apresentados foram: erros de conta, operação aritmética incorreta, consideraram que os algarismos de 0 a 9 são no total de 9 algarismos ou fizeram o número de possibilidades das letras separadas dos números de possibilidades dos algarismos.

Quanto ao item “b”, da questão 6, cujo segredo do cofre era formado por letras e algarismos distintos ou não, o grupo experimental chegou a uma porcentagem de acertos média (52%) enquanto o grupo de referência conservou a mesma porcentagem de acerto do item “a” (46%).

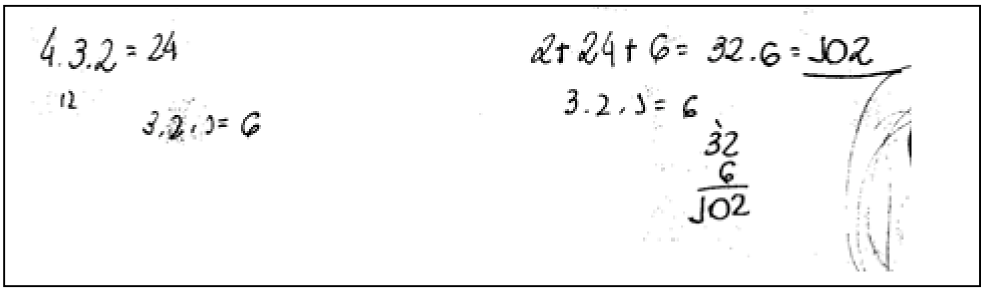
Esta diferença no grupo experimental, entre os itens “a” e “b”, se deve ao fato de o aluno ter errado no item “a”, a operação aritmética.

Novamente, percebemos que os alunos deixam a representação de lado e também não conseguem definir a operação aritmética a ser usada. Tal resultado evidencia que este é um fator com que devemos nos preocupar, quando pretendemos passar da representação para a operação aritmética.

A questão 7 pedia a permuta de 3 coleções. No caso do pós-teste foi a coleção de filmes, que deveria permanecer junto os da mesma categoria. No pós-teste não tivemos bom resultados tanto no grupo experimental (28% de acertos) como no grupo de referência (4% de acertos). Notamos que o principal erro apresentado pelos alunos foi falha na interpretação do problema, onde eles resolveram apenas uma etapa. Tivemos alunos que permutaram apenas as categorias dos filmes e outros permutaram os filmes permanecendo a ordem das categorias. Este tipo de problema foi trabalhado em vários exercícios propostos no grupo de referência e apenas um exercício para casa no grupo experimental.

Nessa questão, levantamos duas hipóteses quanto ao insucesso na resolução. 1) a interpretação errônea dos alunos se deve a um enunciado falho ou 2) a interpretação errônea se deve à dificuldade do aluno em pensar em mais uma etapa de resolução.

Dos alunos que erraram, no grupo experimental, 4 fizeram a permutação da coleção e dos filmes (no pós-teste), só que usaram a operação aritmética incorreta, como no caso da aluna 17:



Extrato de protocolo da aluna 17 do grupo experimental -extraído do pós-teste

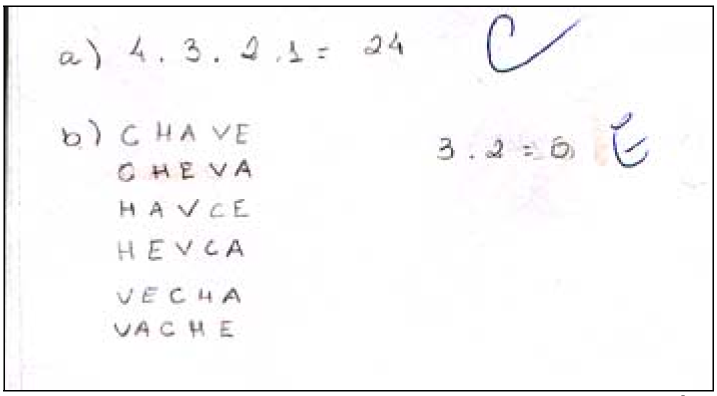
Nesse exemplo, podemos observar que a aluna permutou os dois filmes de terror, os quatro filmes de romance e os três filmes de ficção científica, só que somou as permutações dos filmes ao invés de multiplicá-las. A seguir, permutou as 3 categorias de filmes e multiplicou corretamente com o resultado errado da permutação de filmes. Novamente, temos um erro de operação aritmética incorreta.

Temos, neste caso, 44% dos alunos que interpretaram corretamente o enunciado e 56% que só fizeram uma permutação (ou só as categorias de filmes ou só os filmes). Podemos afirmar, portanto, que a maioria dos alunos teve o raciocínio combinatório, já que todos perceberam que se tratava de um problema de permutação.

A questão 8, tanto no item a como no item “b”, pedia para encontrar o números de anagramas de uma certa palavra de acordo com as condições dadas.

No item “a” do pós-teste, que pedia o número de anagramas da palavra Chave que apresentam a sílaba VE, o grupo experimental obteve um resultado satisfatório, com 76% de acertos, enquanto que o grupo de referência apresentou um resultado baixo, 29% de acertos. Apesar, do grupo experimental não ter trabalhado com este tipo de problema na seqüência, eles conseguiram utilizar uma representação e perceber que a sílaba VE representava uma letra. É possível que o trabalho que realizamos com as figuras da ficha 2, na qual o aluno tinha que lançar mão da representação para interpretar o problema, tenha ajudado o grupo experimental a conseguir uma melhor resultado.

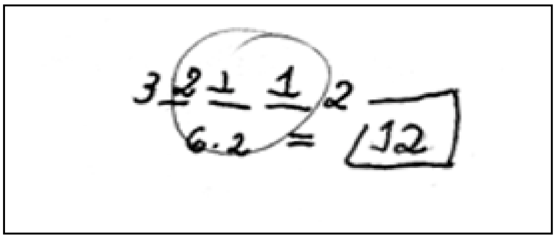
No item “b”, não obtivemos grandes sucessos em nenhum dos dois grupos. Pedia-se nesse item que o aluno calculasse o número de anagramas que começavam por consoante e terminavam por vogal. No grupo experimental tivemos alguns alunos que permutavam as consoantes e as vogais, mas esqueciam de permutar as letras que ficariam entre elas, ou então, que erravam no processo de permutação. Esse tipo de erro também aconteceu no grupo de referência, mas em menor porcentagem. Tal qual o item “a”, este item também requeria do aluno mais do que uma etapa no processo de resolução e, novamente, pudemos observar que alguns alunos faziam apenas uma das etapas, isto é, permutavam apenas as consoantes iniciais e vogais finais das palavras. O exemplo abaixo, retirado do protocolo da aluna 25 do grupo experimental, ilustra bem este caso.



Extrato de protocolo da aluna 25 do grupo experimental -extraído do pós-teste

Notamos, no exemplo acima, que a aluna troca as letras do meio, quando faz a representação das possibilidades por tentativa e erro, mas sua maior preocupação é com a permutação das consoantes e das vogais. Quando resolveu aritmeticamente, fez apenas o calculo das consoantes iniciais e das vogais finais.

Já a aluna número 17 pensou em todas as etapas da permutação, mas errou no número de letras da permutação central, como podemos notar no trecho de seu protocolo abaixo transcrito:

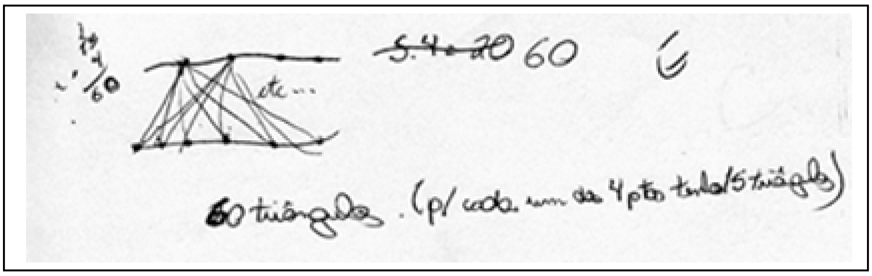


Extrato de protocolo da aluna 17 do grupo experimental -extraído do pós-teste

Na questão 9, os alunos tinham que calcular o número de triângulos que poderiam ser formados com os pontos marcados em duas retas paralelas. Novamente os dois grupos apresentaram baixos índices de sucesso (grupo experimental – 28% de acertos e grupo de referência – 17% de acertos). Ao analisar os protocolos, identificamos que a maior deficiência dos alunos estava na interpretação do número de combinações deveriam ser feitas. Isto é, não bastava somar os pontos e fazer a combinação entre 3 pontos. Alguns alunos desenharam as retas e os pontos e tentaram construir os triângulos, obtendo o número de possibilidades existentes referentes aos triângulos que conseguiram desenhar. Outros apresentaram apenas uma solução numérica sem justificar a respostas.

Nossa expectativa para este problema era a de que o grupo de referência apresentasse um bom desempenho, obtendo resultados melhores do que o outro grupo, uma vez que os alunos do grupo de referência já haviam resolvido em aula problemas muito semelhantes a esse. Quanto ao grupo experimental, esta era a primeira vez, depois do pré-teste, que os alunos se deparavam com esse tipo de situação. De fato, durante a seqüência de ensino, não apareceram problemas deste tipo, o que nos leva a ponderar que isto foi uma lacuna da nossa seqüência.

Observamos que os dois grupos fizeram uso do desenho para resolver o problema, mas a quantidade de triângulos a serem desenhados era numerosa, o que dificultava a representação. Alguns alunos usaram o processo aritmético, mas não levaram em consideração que se os três pontos pertenciam à mesma reta formar-se-ia um segmento de reta e não um triângulo. A figura abaixo ilustra o procedimento de uma aluna (N^o 10 do grupo experimental), que considerou apenas os triângulos que saíam dos 4 pontos da reta r:



Extrato de protocolo da aluna 10 do grupo experimental -extraído do pós-teste

Por fim, a questão 10 solicitava o conceito de arranjo e combinação. Pretendíamos observar se os alunos conseguiriam diferenciar estes dois tipos de agrupamentos ou, pelo menos, identificar quando a ordem é essencial ou não. Apesar de os alunos terem apresentado dificuldade durante o teste em distinguirem ser a ordem irrelevante ou não, os dois grupos apresentaram uma porcentagem de acertos satisfatória, o grupo experimental apresentou 72% de acertos e o grupo de referência 71% de acerto.

Observando os resultados como um todo, notamos que, para ambos os grupos, a dificuldade surgia em questões que exigiam uma interpretação mais cuidadosa do enunciado, isto é, quando eles teriam que resolver o problema em duas ou mais etapas ou quando tinham que questionar se a ordem era essencial ou não. Baseadas no percentual de sucesso que o grupo experimental apresentou no pós-teste para os itens relacionados a esses dois pontos, constatamos que precisaríamos ter trabalhado mais esses pontos em nossa seqüência.

4.4 ANÁLISE DOS TESTES POR OBJETIVO

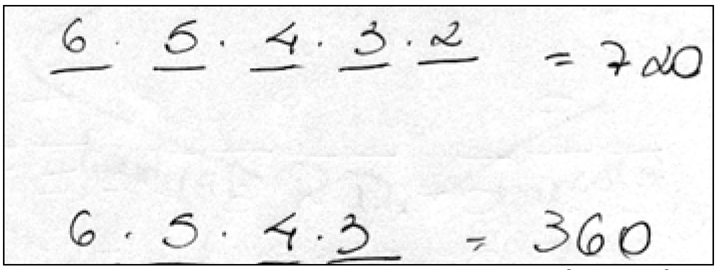
No capítulo 3, definimos os objetivos de nossa seqüência e elaboramos os testes tendo em vista tais objetivos. Faremos, então, uma análise do desempenho dos dois grupos sob a óptica desses objetivos, os quais servirão como mais um termômetro para avaliar a aprendizagem do conceito de Análise Combinatória.

A seguir apresentaremos os objetivos contidos nos teste, definindo e exemplificando cada um. Estes estarão indicados neste contexto por algarismos romanos.

I – apresentar raciocínio combinatório;

Nesse objetivo, observamos se os alunos apresentaram o raciocínio combinatório para a resolução de problemas de análise combinatória, não importando se chegaram ou não ao resultado correto.

Os dois casos abaixo foram retirados dos protocolos de dois sujeitos do grupo experimental. Eles ilustram o que consideramos como objetivo alcançado, embora a resposta final esteja incorreta. No primeiro exemplo (resolução da aluna 2 à questão 3 do pós-teste), está clara a presença do raciocínio combinatório, mas há erro na interpretação da ordem:


$\underline{6} \cdot \underline{5} \cdot \underline{4} \cdot \underline{3} \cdot \underline{2} = 720$

$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \underline{3} = 360$

Extrato de protocolo da aluna 2 do grupo experimental -extraído do pós-teste

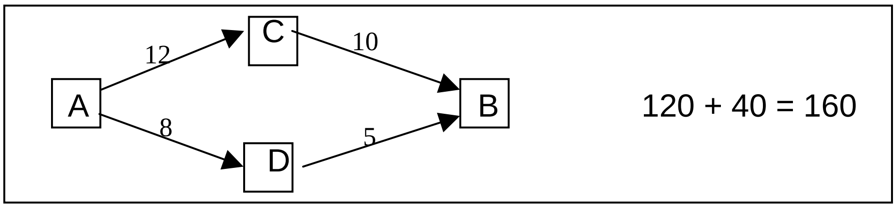
O segundo exemplo, abaixo ilustrado, vem da questão 7 do pós-teste. A aluna número 25 também apresentou raciocínio combinatório mas resolveu apenas a permutação das categorias de filmes:

Extrato de protocolo da aluna 25 do grupo experimental -extraído do pós-teste

II – registros de representações;

Nosso objetivo consiste em observamos se os alunos usaram algum tipo de representação para interpretar e resolver os problemas.

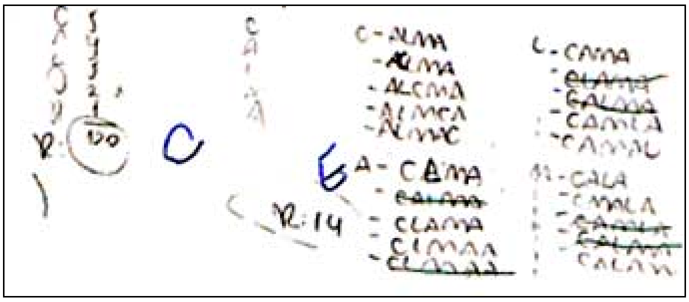
Exemplificaremos o objetivo apresentando a resolução do aluno 18 grupo experimental à questão 1 do pós-teste. Este aluno esquematizou as cidades e as estradas para chegar ao número total de possibilidades.



III – diferenciar permutação simples de permutação com repetição;

Aqui os, alunos precisam notar que a quantidade de anagramas para palavras com letras repetidas diminui em relação a uma palavra que contém a mesma quantidade de letras, só que todas diferentes. O importante é que os alunos percebam que as palavras com letras repetidas irão formar uma quantidade de anagramas que representarão apenas um, não importando se chegaram ao resultado correto.

Como exemplo, temos a resolução do aluno 15 à questão 4 do pós-teste., em que ele utilizou a estratégia de tentativa e erro, chegando a perceber que algumas possibilidades eram iguais, mas não chegou ao resultado correto. Neste caso consideramos que o aluno atingiu o objetivo.



Extrato de protocolo da aluna 15 do grupo experimental -extraído do pós-teste

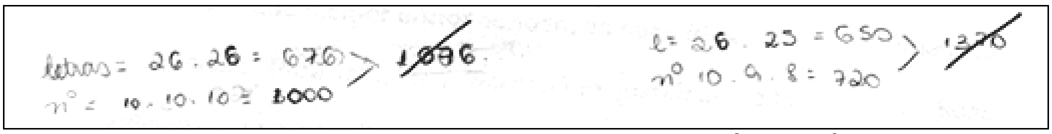
IV – utilização do princípio fundamental da contagem ou fórmula;

Neste objetivo: observamos, para o pré-teste, se os alunos faziam uso do princípio fundamental da contagem de forma intuitiva e para o pós-teste observamos se preferiam fazer uso do princípio multiplicativo ou da fórmula (no caso da turma de referência), ou ainda se usavam a representação.

V – diferenciar arranjo simples de arranjo com repetição;

Observamos se os alunos percebiam a diferença entre elementos distintos e não distintos, para o procedimento de resolução.

A resolução da aluna 6 do grupo experimental é um bom exemplo. Observamos que a aluna atingiu o objetivo, mas não chegou ao resultado correto, pois errou na operação aritmética a ser usada (somou ao invés de multiplicar o número de possibilidades de letra com o número de possibilidades de algarismos). Neste caso consideramos o objetivo atingido, embora o resultado não esteja correto.

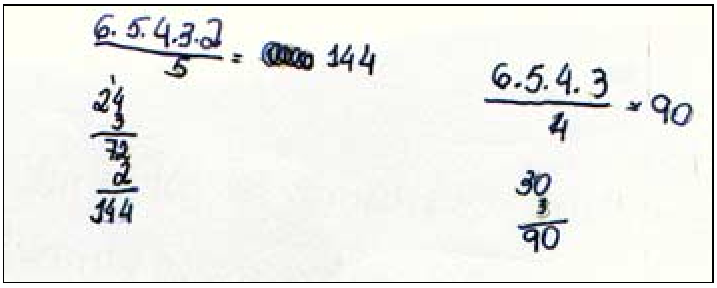


Extrato de protocolo da aluna 6 do grupo experimental -extraído do pós-teste

VI – interpretar os problemas combinatórios em relação à ordem;

Aqui, observamos se os alunos resolviam os problemas combinatórios questionando a importância da ordem, mesmo que não chegassem ao resultado correto.

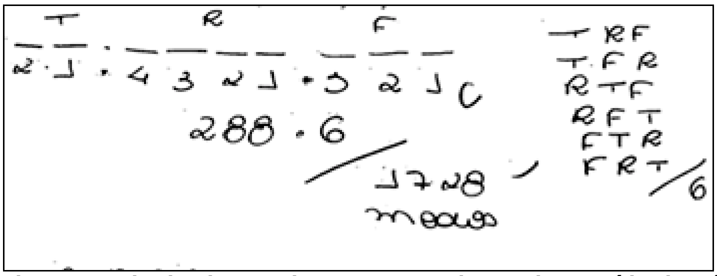
A aluna 17 do grupo experimental alcançou o objetivo, percebendo que conforme se mudava a ordem dos mesmos elementos, obtinha-se a mesma possibilidade, só que não calculou a quantidade de possibilidades que representariam uma única possibilidade.



Extrato de protocolo da aluna 17 do grupo experimental -extraído do pós-teste

VII – interpretação de todas as etapas.

Este objetivo está bem exemplificado na questão 1 do pós-teste, onde a primeira etapa requer a permutação das categorias dos filmes e a segunda, a permutação dos filmes por categoria. Depois, é preciso multiplicar os resultados das duas permutações. Observamos se os alunos faziam a resolução das duas etapas, conforme ilustra o protocolo da aluna 2 do grupo experimental:



Extrato de protocolo da aluna 2 do grupo experimental -extraído do pós-teste

Gostaríamos de enfatizar que dificilmente uma questão envolvia apenas um dos objetivos citados. Então, para realizar esta análise, relacionamos cada questão aos seus objetivos principais, como mostra a tabela a seguir:

Objetivos	Questões
I	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9
II	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ,8 e 9
III	4
IV	1, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9
V	6
VI	1 e 5
VII	7 e 9

Tabela 4. 6: Questões e seus principais objetivos

Na elaboração desta tabela, não separamos as questões por itens, pois quando as elaboramos, os itens seriam um modo de atingir os objetivos desejados. Exemplificaremos através da questão 5, onde no item “a” os alunos teriam que notar que a ordem é essencial e no item “b” a ordem não era essencial. Então, os dois itens foram elaborados para que pudéssemos observar se os alunos interpretavam em relação a ordem.

Para esta análise, continuaremos com a relação numérica entre as questões do pré e pós-testes, a qual apresentaremos a seguir:

Pré-teste	Pós-teste	Questão – nº
Q1	Q3	1
Q2	Q5	2
Q3	Q6	3
Q4	Q2	4
Q5	Q7	5
Q6	Q9	6
Q7	Q1	7
Q8	Q4	8
Q9	Q8	9

Tabela 4. 7: Relação numérica entre as questões do pré e pós-teste.

A questão 10 do pré e pós-teste não será analisada quanto ao objetivo, pois não consideramos de extrema importância que os alunos saibam as definições de arranjo e combinação e, sim que consigam diferenciar estes dois tipos de agrupamentos na resolução do problema, questionando a ordem.

A tabela a seguir mostra a correspondência dos objetivos com as porcentagens de sucessos, para cada grupo nos pré e pós-testes.

objetivos	Grupo experimental		Grupo de referência	
	PRÉ-TESTE %	PÓS-TESTE %	PRÉ-TESTE %	PÓS-TESTE %
I	27,5	84	25	61,1
II	45,8	25,3	33,3	13
III	8	84	4	45,8
IV	0,4	76,5	0,5	58,8
V	0	68	0	58,3
VI	30	42	25	39,6
VII	0	40	0	12,5

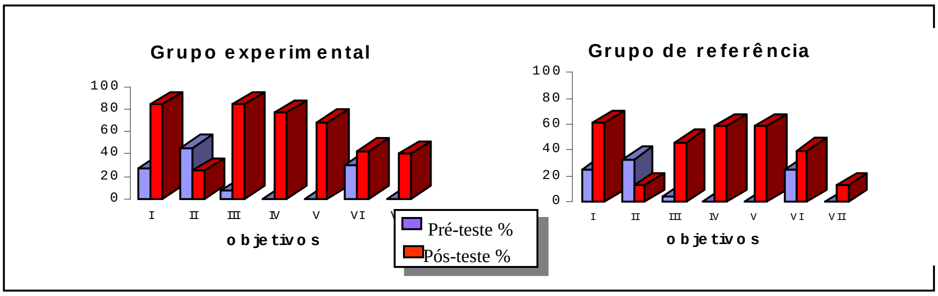


Gráfico 4.4: Resultado atingido no pré e pós-teste por objetivo

Fazendo uma análise do desempenho do grupo experimental com relação aos objetivos, notamos que a tabela mostra que não conseguimos atingir um resultado satisfatório nos objetivos II, VI e VII. Analisando estes objetivos, observamos que no objetivo II (registros de representações) houve uma queda em relação ao uso das representações para auxiliar na resolução dos problemas do pós-teste. Apesar da sua importância como ferramenta para produzir a solução, os alunos preferiram usar o processo aritmético conveniente. Alguns alunos que fizeram uso da representação para resolver o problema construíram um desenho, ou um diagrama inadequado causando uma interpretação errônea.

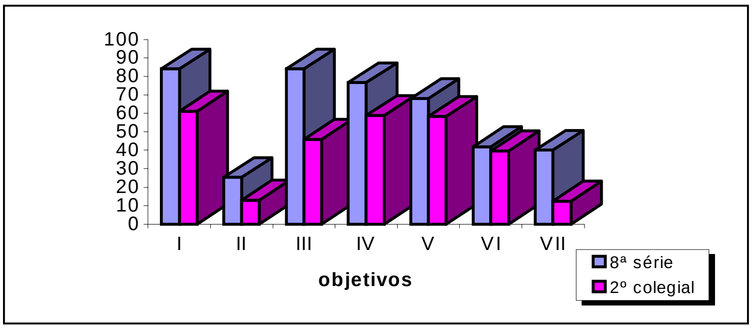


Gráfico 4.5 : Comparação entre os dois grupos no pós-teste

Quanto ao objetivo VI (interpretar os problemas combinatórios em relação à ordem), observamos que o fator representação pode ter interferido no insucesso dessa meta, visto que na questão 1, como já analisamos anteriormente, quando os alunos resolveram escrevendo as possibilidades (no pré teste), eles notaram que a ordem era irrelevante, já no pós-teste onde eles não fizeram a representação, não houve um percentual de acerto satisfatório.

Este objetivo consiste em diferenciar os critérios de arranjo e combinação. Podemos perceber que este objetivo não é alcançado principalmente nos problemas de combinação. Na questão 1 observamos que o índice de sucesso deste objetivo foi pequeno, em relação a questão 5, onde os alunos conseguirem observar que o número de possibilidade diminuía, mas não conseguiam achar o processo aritmético correto para resolver a questão.

Em relação ao objetivo VII (interpretação de todas as etapas), apesar do resultado apresentado ter sido insatisfatório, notamos que houve um crescimento no percentual de acerto com relação a este objetivo (de 0% para 40%). Vale a pena pontuar que não foi trabalhado este tipo de problema durante a seqüência. Podemos observar que na questão 7 poucos alunos questionaram se deveriam permutar as categorias dos filmes ou os filmes ou os dois, isto é, consideram apenas um subconjunto de todas as permutações.

Quanto aos outros objetivos envolvidos nos teste (I, III, IV, e V), consideramos de maneira satisfatória. Em relação ao objetivo V (diferenciar arranjo simples de arranjo com repetição), em que 68 % dos alunos responderam a contento, também há fortes indícios de que os fatores interpretação e representação tenham contribuído para não elevar este índice. Embora a maioria dos alunos tenha acertado a questão relativa ao objetivo III (diferenciar permutação simples de permutação com repetição), notamos a necessidade de trabalhar com outros tipos de problemas que envolvam estes dois tipos de situações, a fim de garantir que os alunos possam ter um bom desempenho nesse objetivo, pois alguns alunos consideram a possibilidade de não repetir os elementos quando podem faze-los ou vice e versa.

Já o grupo de referência dos sete objetivos analisados atingiu de forma pouco satisfatória apenas três objetivos (I, IV e V). Quanto ao objetivo I (apresentar raciocínio combinatório), notamos que, nesse grupo, o aprendizado do conteúdo baseado em técnicas de cálculo não desenvolveu um raciocínio combinatório tão satisfatório quanto o do grupo experimental. Visto que consideramos que este é um dos objetivos necessário para o aprendizado do conteúdo análise combinatória, pois o primeiro passo é aprender combinar os elementos, depois saber identificar se repete os elementos ou não, se a ordem dos elementos tem importância ou não, se existe mais de uma etapa ou não e qual operação aritmética (ou fórmula deverá ser usada).

Através dos dados da tabela, pudemos observar que os alunos no pré-teste já apresentavam algum raciocínio combinatório e nos pós-teste notamos que este raciocínio foi desenvolvido de maneira satisfatória nos dois grupos, principalmente no grupo experimental.

Nos demais objetivos (II, III, VI e VII), não conseguimos um resultado satisfatório. Notamos que o objetivo II (registros de representações) também registrou uma queda em relação ao pré-teste, conforme observado no grupo experimental. Para o grupo de referência, já era esperado não atingir satisfatoriamente este objetivo, pois a seqüência apresentada no livro didático não valorizou a representação. Para o grupo experimental, esperávamos um resultado mais satisfatório, pois tentamos sempre fazer uso da representação em todas as atividades apresentadas. É difícil analisar o porquê de os alunos não usarem a representação, depois de aprenderem o princípio fundamental da contagem, mas analisando os comentários dos alunos durante a seqüência de ensino no grupo experimental, percebemos que os alunos procuram sempre o processo mais econômico de resolução, o que no caso vem ser o uso de fórmulas ou de uma operação aritmética. Podemos, também, analisar o comportamento dos alunos quando aplicamos o pré-teste e até mesmo quando começamos a nossa seqüência. Eles apresentaram uma certa resistência em resolver um conteúdo desconhecido, pois não sabiam como resolver os problemas apresentados. Este comportamento nos faz concluir que os alunos não estão acostumados a usar uma representação para desenvolver o raciocínio no nosso ensino tradicional e de repente fica difícil quebrar este contrato já estabelecido há um tempo de sua vida.

O objetivo VII (interpretação de todas as etapas) foi o grupo que apresentou menor desempenho nas questões relacionadas a este objetivo, visto que foi um tipo de problema explorado durante o aprendizado do conteúdo, durante a seqüência apresentada no livro didático. O livro apresentou vários problemas em que os alunos teriam mais de uma etapa de resolução, principalmente em problemas de permutação e combinação.

É interessante destacar que o objetivo VI (interpretar os problemas combinatórios em relação à ordem) também atingiu um percentual baixo de desempenho, nesse grupo de referência.

Para esse objetivo, observamos que nenhum dos grupos sai do patamar zero no pré-teste, mas não atinge um percentual significativamente maior no pós-teste. Conforme pesquisas de Batanero, notamos que este tipo de erro é freqüente na resolução de problemas combinatórios. Podemos observar que nos resultados obtidos para este objetivo VI nenhuma das duas seqüências aplicadas para os dois grupos deu conta para que a maioria dos alunos pudesse interpretar se a ordem era importante ou não, e conforme mostrou Batanero (1996) este tipo de erro acontece principalmente nos problemas de combinação, justamente o que acontece nos teste aplicados para os dois grupos.

Durante a seqüência elaborada para o grupo experimental, trabalhamos com situações-problema que pudessem diferenciar arranjo de combinação, mas parece que não foi o suficiente para que os alunos pudessem questionar, durante a interpretação do problema se a ordem era essencial ou não. No nosso ponto de vista, deveríamos ter trabalhado com situações-problema em que os alunos pudessem fazer uso apenas da representação para chegar ao número de resultados possíveis, sem induzi-los ao princípio fundamental da contagem.

4.5 ANÁLISE DO DESEMPENHO DOS SUJEITOS POR GRUPO

Neste momento, faremos um estudo do desempenho e da evolução dos alunos nos testes aplicados. Para tanto, enumeramos os alunos do grupo experimental (de 1 a 25) e os alunos do grupo de referência (de 1 a 24). Vale lembrar que os dois testes possuíam 16 itens cada, portanto o número máximo de acerto por aluno é 16. A tabela a seguir indica o número de acertos por aluno no pré e no pós-teste e a porcentagem de acerto no pós-teste.

Alunos	Pré-teste Nº de acertos	Pós-teste Nº de acertos	% de acertos do pós-teste
1	1	2	12,5
2	1	13	81,25
3	3	6	37,5
4	1	10	62,5

5	1	12	75
6	2	12	75
7	0	5	31,25
8	0	4	25
9	3	11	68,75
10	2	11	68,75
11	0	9	56,25
12	0	6	37,5
13	1	12	75
14	1	6	37,5
15	1	5	31,25
16	1	10	62,5
17	2	11	68,75
18	3	11	68,75
19	2	7	43,75
20	0	3	18,75
21	1	4	25
22	0	11	68,75
23	1	15	93,75
24	1	7	43,75
25	0	11	68,75

Tabela 4.8: desempenho dos alunos – Grupo experimental

Analisando a tabela, podemos observar que todos os sujeitos do grupo experimental apresentaram evolução. Apenas 20% dos alunos (5 alunos) seriam aprovados com um acerto maior ou igual a 75% da avaliação e 56% (14 alunos) de nossa amostra experimental teria condições de ser aprovado, segundo os parâmetros da escola. O aluno “1” foi aquele que apresentou um menor crescimento em seu desempenho, visto que no pré-teste acertou uma questão e no pós-teste 2 questões, ou seja menos da metade do teste. Os alunos “3”, “7”, “8”, “12”, “14”, “15”, “19”, ”20”, “21” e “24” também não apresentaram um crescimento satisfatório, apesar de apresentarem uma certa evolução em relação ao pré-teste. Os demais sujeitos apresentaram um bom desempenho. O aluno “23” foi o que apresentou melhor desempenho, sendo que, no pré-teste, havia acertado 1 questão e no pós-teste, 15 questões, quase a totalidade. Podemos ressaltar o aluno número “18”, que em três itens o erro foi de conta, sendo que de 11 itens acertaria 14 no pós-teste. O mesmo ocorreu com os alunos “9” e “10”, o primeiro em 2 itens errou em conta, e o segundo, em 1 item, passando o número de acertos para 13 e 12, respectivamente, no pós-teste. Mesmo assim, acreditamos ter atingido uma boa parte dos nossos objetivos através da aplicação da nossa seqüência.

A seguir apresentaremos a mesma análise para os sujeitos do grupo de referência.

Alunos	Pré Nº de acertos	Pós Nº de acertos	% de acertos do pós-teste
1	0	1	6,25
2	0	3	18,75
3	0	4	25
4	2	10	62,5
5	4	8	50
6	1	9	56,25
7	0	5	31,25
8	2	7	43,75
9	1	10	62,5
10	0	0	0
11	0	10	62,5
12	1	8	50
13	0	2	12,5
14	1	7	43,75
15	0	1	6,25
16	1	9	56,25
17	1	4	25
18	1	2	12,5
19	1	8	50
20	0	3	18,75
21	3	15	93,75
22	0	6	37,5
23	2	7	43,75
24	1	1	6,25

Tabela 4.9: desempenho dos alunos – Grupo de referência

Consultando a tabela, notamos que apenas 33,3% dos alunos (8 alunos) tiveram um acerto maior ou igual a 50% do pós teste sendo que 4,2% (1 aluno) atingiu um percentual maior que 75%. Em relação aos outros dezesseis alunos dessa amostra, o desempenho apresentado foi insatisfatório, sendo que dois alunos não apresentaram nenhum crescimento do pré para o pós-teste (alunos 10 e 24). Com isso, menos de um terço da amostra teria condições de ser aprovado, segundo os parâmetros da escola. O aluno “21” apresentou um crescimento bem satisfatório, acertou 93,75% das questões, visto que no pré-teste acertou 3 questões e no pós teste 15 questões (quase a totalidade). E ainda temos os alunos “8”, “9”, “12” e “13” que erraram em conta em um item, assim passariam de

7 acertos para 8, de 10 para 11, de 8 para 9 e de 2 para 3 acertos, respectivamente. Tivemos 10 alunos que tiveram rendimento menor ou igual a 25%, que representa 42% da amostra. Podemos também ressaltar ao aluno número 5 que, apesar de atingir 50% de acerto no pós-teste, não obteve grande evolução do pré para o pós-teste (acertou 4 questões no pré-teste e 8 questões no pós-teste).

Convém novamente ressaltar que esta turma estudou todo o conteúdo de análise combinatória desenvolvido na segunda série do ensino médio, ou seja, teoricamente teria muito mais chance de obter um resultado satisfatório, visto que teve mais contato com esse tópico, se comparado com o grupo experimental. Além disso, realizaram o pós-teste como uma atividade que comporia a nota do bimestre. Com esta atitude, acreditamos ter obtido um resultado mais realista da situação de aprendizagem do grupo de referência.

Faremos uma comparação entre os grupos de referência e experimental. Para esta comparação, nós fizemos a diferença entre os acertos do pré para o pós-teste, isto é, para um aluno que acertou 2 questões no pré teste e 10 questões no pós teste a diferença foi de 8 questões. Na primeira coluna da tabela, colocamos esta diferença, na segunda coluna a quantidade de alunos do grupo experimental e na terceira coluna a quantidade de alunos do grupo de referência.

Diferença entre os acertos nos pré e pós-testes	Experimental	Referência
0	0	2
1	1	3
2	0	1
3	3	3
4	2	2
5	3	3
6	2	2

7	0	2
8	2	3
9	5	1
10	1	1
11	4	0
12	1	1
14	1	0

Tabela 4.10: evolução dos alunos do pré para o pós-teste

Analisando a tabela, podemos observar que todos os sujeitos do grupo experimental apresentaram uma evolução, mesmo que mínima, enquanto que no grupo de referência tivemos dois sujeitos que não apresentaram qualquer evolução. Notamos que 46% dos sujeitos do grupo de referência acertaram até 4 questões a mais em relação ao pré-teste contra 24% do grupo experimental. Acima de 4 questões, obtivemos 54% dos sujeitos do grupo de referência contra 76% dos sujeitos do grupo experimental.

4.6 ANÁLISE QUALITATIVA DAS DUPLAS.

Nesta seção, faremos uma análise do processo interacional ocorrido no interior de três duplas durante a seqüência de ensino e uma análise dos processos de evolução dos alunos em relação aos pré e pós-testes. Como estamos levando em conta o construto teórico ZDP, fizemos uma observação mais detalhada do processo interacional ocorrido em três das doze duplas do grupo experimental, as quais foram escolhidas aleatoriamente. Essas observações foram feitas através de gravações, filmagens e anotações durante o encontro.

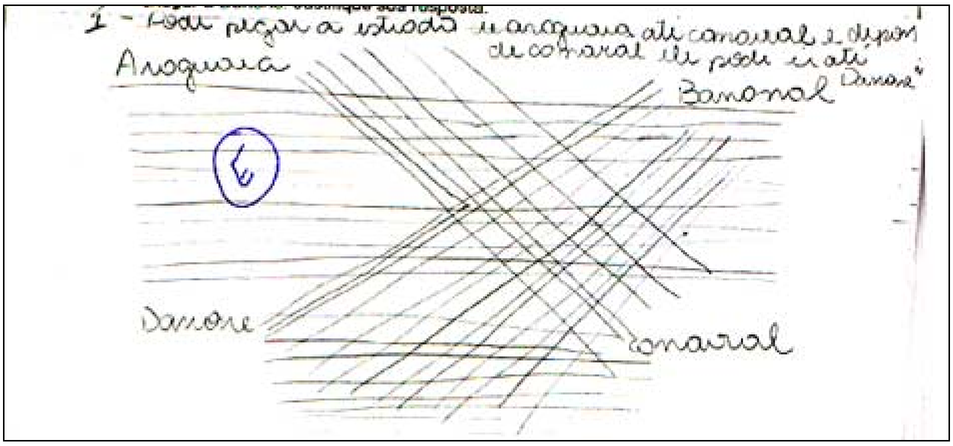
4.6.1 Dupla A: Alunas número 1 e número 18

A primeira constatação que podemos fazer das componentes da dupla é que, quantitativamente, os desempenhos delas foram díspares. A aluna número 18 apresentou uma grande evolução do pré para o pós-teste, ao passo que a aluna número 1, uma evolução mínima, como mostra a tabela abaixo:

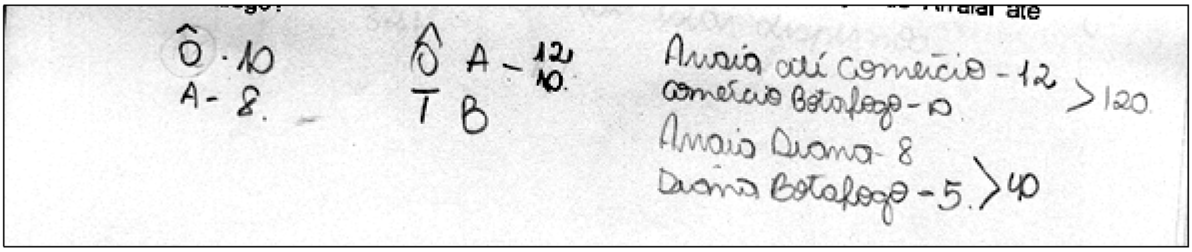
Alunas	Pré	Pós
Nº 1	1	2
Nº 18	3	11

A transcrição das gravações ao longo da seqüência nos informa que era a aluna número 18 quem resolvia todas as atividades da seqüência de ensino, mas sempre com a preocupação de expor o seu raciocínio para a aluna número 1. Esta assumia o papel passivo de aceitar o processo de resolução feito por seu par, sem discuti-lo ou dele discordar, embora parecesse estar atenta à explicação dada. Quanto à interlocução com a pesquisadora, isso era sempre feito pela aluna número 18, por meio de questionamento sobre o entendimento do problema ou exposição de suas dúvidas em relação a como resolver as atividades. Embora quantitativamente possamos afirmar que não houve evolução no aprendizado da aluna número 1, o mesmo não é verdade do ponto de vista qualitativo, como mostraremos a seguir:

Na questão 2 do pré-teste, a aluna fez um esquema e não chegou a nenhuma resposta; já no pós-teste ela, não só se utilizou de um esquema como, a partir dele, calculou o número de possibilidades de cada caminho. O que faltou foi fazer o somatório das possibilidades, obtendo, assim, o total. Podemos perceber que a aluna atingiu o objetivo referente a apresentar raciocínio combinatório, embora não tenha realizado a segunda etapa do problema.



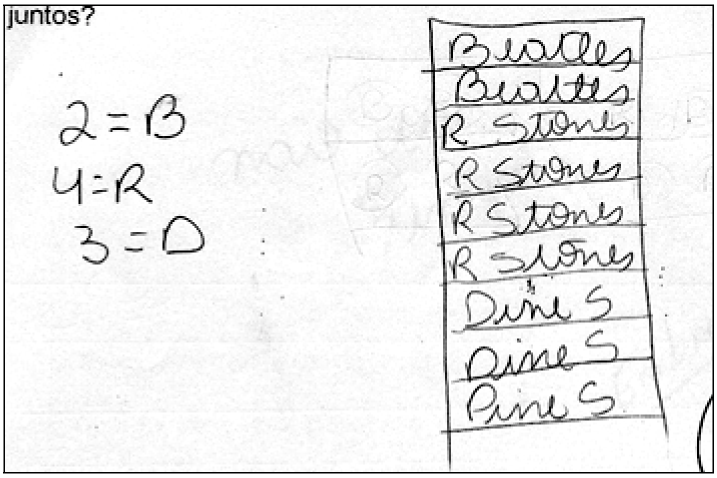
Extrato de protocolo da aluna 1 do grupo experimental – extraído do pré-teste



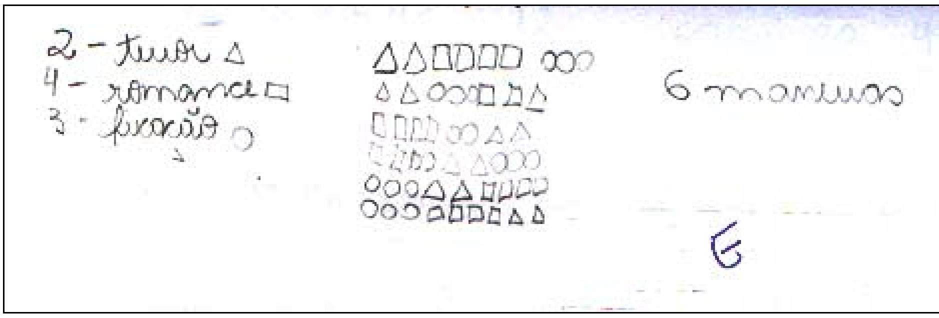
Extrato de protocolo da aluna 1 do grupo experimental – extraído do pós-teste

Essa evolução também pode ser observada ao compararmos o processo de resolução de tal aluna nas questões 7 do pré e do pós-teste.

No pré-teste, a aluna não apresentou nenhum raciocínio combinatório. Tudo o que ela fez foi listar os conjuntos e indicar que havia 2 Beatles, 4 Rolling Stones e 3 Dire Straits. No pós-teste, a aluna voltou a apresentar raciocínio combinatório. Ela fez a permutação das categorias dos filmes, embora não tenha feito a permutação dos filmes; conseqüentemente, não multiplicou os resultados.



Extrato de protocolo da aluna 1 do grupo experimental – extraído do pré-teste



Extrato de protocolo da aluna 1 do grupo experimental – extraído do pós-teste

Até agora, fizemos uma análise parcial da aluna número 1, mostrando que qualitativamente ela apresentou uma evolução na direção de se apropriar do conceito de combinatória, diferindo dos resultados quantitativos. Neste momento, começaremos uma análise mais geral desta aluna.

No pré-teste, pudemos observar que a discente apresentou raciocínio combinatório nas questões 1, 4 e 8. Em todas elas, o procedimento adotado foi tentativa e erro. Esse procedimento deu conta de resolver apenas o item 1a, ficando o item 1b e as questões 4 e 8 sem apresentar todas as possibilidades possíveis. Nas demais, questões a aluna não apresentou nenhum raciocínio combinatório. Na questão 3, podemos notar que a palavra “distribuir” foi associada a “dividir”.

Durante a seqüência de ensino, não foi possível avaliar o desempenho da aluna, pois, como explicamos anteriormente, ela deixava que a aluna 18 desenvolvesse o processo de resolução das atividades apresentadas.

No pós-teste, observamos que a aluna iniciou a resolução de todas as questões através da representação. Na questão 1, ela resolveu o item “a” do mesmo modo que resolveu no pré-teste, por tentativa e erro, encontrando as 6 possibilidades, mas a seguir colocou uma multiplicação (12 x 5) e apresentou o resultado dessa multiplicação como o número total de possibilidades. Na primeira parte da questão 3, não mais associou a palavra “distribuir” a “dividir”, resolvendo-a corretamente, mas na segunda parte (onde faltava envelope para a quantidade total de cartas), ela voltou a resolver por tentativa e erro. Seu protocolo mostra que ela fez algumas tentativas de sistematização para encontrar todas as possibilidades e depois, mais abaixo, voltou a associar a palavra “distribuir” com “dividir”, como havia feito no pré-teste. Observamos que quando a aluna se utilizava do método de tentativa e erro e o número de possibilidades a serem encontradas era muito grande, este não funcionava, pois ela não conseguia encontrar um procedimento que a levasse a encontrar todas as possibilidades. Batanero (1996, 1997) encontrou tal tipo de procedimento muito freqüentemente em seus trabalhos. Podemos classificá-lo como a primeira etapa na aquisição do raciocínio combinatório.

Podemos, então, concluir que a aluna 1 partiu de praticamente nenhum raciocínio combinatório (no pré-teste) e ao final da seqüência já apresentava os primeiros rudimentos desse raciocínio. Nossa hipótese para explicar o pouco avanço desta aluna vem do contrato implícito que a dupla estabeleceu. De fato, o papel ativo, necessário na construção do conhecimento, foi assumido apenas pela aluna 18, e o processo de interação entre as alunas – onde a troca de conhecimento e dúvidas, a discussão e discordância como posterior convencimento das idéias de um dos elementos sobre o outro – não ocorreu.

Quanto à aluna número 18, observando qualitativamente o seu pós-teste, notamos que a mesma errou apenas a questão 1, onde considerou a ordem importante enquanto esta não era. Nas questões 7 e 3, a aluna resolveu corretamente, só que errou em conta.

Em relação ao pré-teste, ela só "regrediu" quantitativamente na questão 1, pois acertou no pré-teste e não no pós-teste. No pré-teste, a resolução apresentada pela aluna foi por tentativa e erro, acertando os dois itens da questão, e no pós-teste usou o princípio fundamental da contagem e, quando fez uso desse procedimento, acabou não percebendo a questão da ordem dos elementos, conforme havia percebido quando resolveu por tentativa e erro.

4.6.2 Dupla B: Alunas número 3 e número 8

A transcrição das filmagens, ao longo da seqüência, informa-nos que as alunas discutem muito entre si, mas quem, na maioria das vezes, conduz a resolução é a aluna número 3. Comparando essa dupla com a dupla A, constamos que a "B" apresentou uma interação bem maior, pois todo processo de resolução que a aluna 3 começava a aluna 8 questionava e vice-versa.

A partir da ficha 2, a dupla sentiu mais dificuldade e, sempre que possível, as estudantes pediram a interferência da pesquisadora, expondo as dúvidas ou questionando sobre a interpretação do problema.

Analisando as fichas apresentadas e seguindo as filmagens, constatamos que esta dupla sempre iniciava as atividades da seqüência de ensino usando o procedimento de tentativa e erro, para encontrar o total de possibilidades. Notamos, ainda, que este tipo de resolução foi abandonado no pós-teste. Na transcrição da filmagem e usando as observações feitas durante os encontros, percebemos que a dupla apresentou dificuldade em resolver as atividades propostas, mas. ao mesmo tempo, as alunas tentavam vencer a dificuldade.

Tal dupla teve uma interação muito boa entre si e com a pesquisadora, mas não foi o suficiente para um bom desempenho no pós-teste pelo ponto de vista quantitativo, como mostra o quadro abaixo:

Alunas	Pré	Pós
Nº 3	3	6
Nº 8	0	4

Fizemos uma análise do desempenho da aluna número 3 e pudemos observar uma regressão quanto à questão número 1, tal qual aconteceu com a aluna número 18 da dupla A. No pré-teste, a aluna 3 acertou os dois itens da questão, resolvendo por tentativa e erro. Já no pós-teste, ela iniciou o item “a” por contagem, encontrou as 6 possibilidades, abandonou o raciocínio, fez uso do princípio fundamental da contagem e acabou considerando a ordem importante, seguindo com o mesmo procedimento para o item “b” (como já demonstramos na seção 4.3.2, através de seu protocolo).

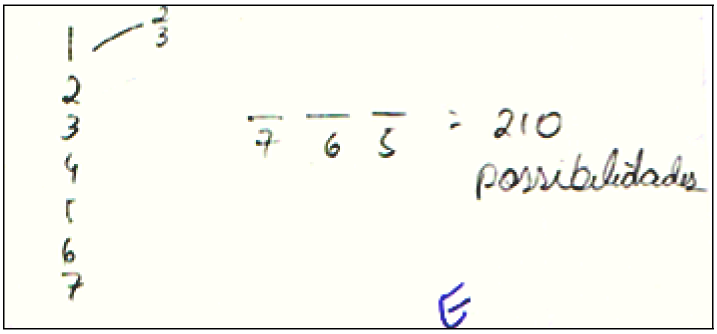
Já na questão 5, podemos notar avanço no raciocínio desta aluna no item “a”. No pré-teste, ela resolveu por tentativa e erro e não chegou a um procedimento que levasse a todas as possibilidades. Quanto ao item “b”, a aluna não respondeu. Já no pós-teste, ela resolveu o item “a” usando o princípio fundamental da contagem e de maneira correta, considerando a ordem importante. No item “b”, ela fez o mesmo cálculo usado no item “a”, isto é, não questionou a ordem.

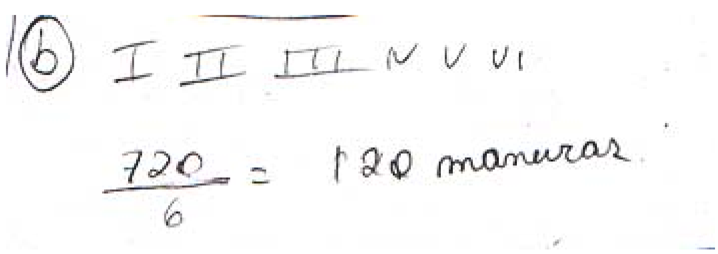
Analisando a filmagem da seqüência de ensino e os testes diagnósticos desta aluna, percebemos que a mesma apresentou problema em discernir a importância da ordem apenas nos problemas de combinação. Esse tipo de erro nos problemas de combinação parece ser comum, segundo as pesquisas realizadas por Batanero (1996, 1997).

Constatamos que essa aluna muito vezes, durante a seqüência de ensino, discutiu constantemente com seu par a questão da ordem. No entanto, ficava clara, sua insegurança, demonstrada pelas inúmeras vezes que a mesma procurava a pesquisadora para expor o seu raciocínio e certificar-se quanto a estar correto ou não. Analisando o pós-tese, notamos que tal questionamento de ordem nos problemas referentes à combinação parece ter sido abandonado e a aluna assumiu que em todos os problemas a ordem era importante.

Analisando, agora, a questão 6 do pré-teste, vemos que a aluna 3 deixou em branco a primeira parte da questão e na segunda parte fez a multiplicação de 23 letras por 26 letras. Entretanto, no pós-teste, ela alcançou o objetivo do raciocínio combinatório, só que nas duas partes do problema ela fez a quantidade de possibilidades de letras separada da quantidade de possibilidades dos números e não multiplicou estas duas respostas encontradas. Similarmente, ao resolver a atividade das placas na seqüência de ensino, a dupla o fez isolando o número de possibilidades de letras e algarismos. Agora, analisando a resolução da aluna número 8, nesta mesma questão, constatamos que em parte ela resolveu corretamente, juntando o número de possibilidades das letras com o número de possibilidades dos algarismos, só que usou 9 algarismos no lugar de 10, conforme fizera ao iniciar a resolução da atividade das placas. Na seqüência, nesse momento, houve interferência da pesquisadora, que mostrou que os algarismos de 0 a 9 formam um total de 10 algarismos e não 9.

Na questão 5 do pós-teste, a aluna 8 resolveu a primeira parte, usando o processo de resolução de forma correta, mas acabou errando a resposta porque eram 6 alunos e a aluna colocou 7 alunos. Na segunda, parte a aluna questionou o fator ordem, mas o procedimento de resolução foi errado, conforme protocolo abaixo:





Extrato de protocolo da aluna 8 do grupo experimental – extraído do pós-teste

Fazendo uma análise geral da aluna 8, pudemos observar que a aluna partiu praticamente do zero, colocando em questão o raciocínio combinatório, mas ao longo da seqüência era evidente o desenvolvimento desse raciocínio. No pós-teste, seu raciocínio combinatório se mostrou mais eficaz que o de sua parceira. Em relação à aluna 3, esta partiu com um pouco mais de raciocínio combinatório comparado ao da aluna 8 e também apresentou avanço no desenvolvimento desse tipo de raciocínio, mas a superação da dificuldade de detectar se a ordem era importante nos problemas de combinação persistiu.

Podemos concluir que houve um processo interacional entre as duplas, mas não o suficiente para superar a dificuldade inicial sobre a importância da ordem e da enumeração sistemática (Batanero, 1996). Esse último erro consiste na resolução, por tentativa e erro, sem um procedimento que conduza à formação de todas as possibilidades. O erro de enumeração sistemática foi observado durante a seqüência. Quando a quantidade total de possibilidades era pequena, a dupla não apresentava tal tipo de erro. Este só apareceu nas atividades em que a quantidade de possibilidades era muito grande.

Concluímos que a aluna 3 quase não apresentava raciocínio combinatório no pré-teste. Já ao longo da seqüência, esse raciocínio estava sempre presente, algumas vezes de maneira mais simples. Ela também percebeu que é importante questionar a ordem. No pós-teste, ela assumiu a ordem importante para todas as questões. Já a aluna 8 foi mais longe: a ordem passou a ser menos problemática do que era no início. Embora apresentasse erro de ordem, começou a apresentar acerto. Podemos observar que as duas alunas saíram de um patamar muito baixo, porém conseguem atingir uma certa evolução, só que a aluna 8 desenvolveu mais que a 3.

4.6.3 Dupla C: alunos número 6 e número 12

Desta dupla, temos apenas a análise feita durante os encontros, mas achamos interessante continuar com a opção de analisá-la, pois o comportamento do aluno 12 durante os encontros bem como seu desempenho, tanto qualitativo como quantitativo no pós-teste, nos surpreendeu.

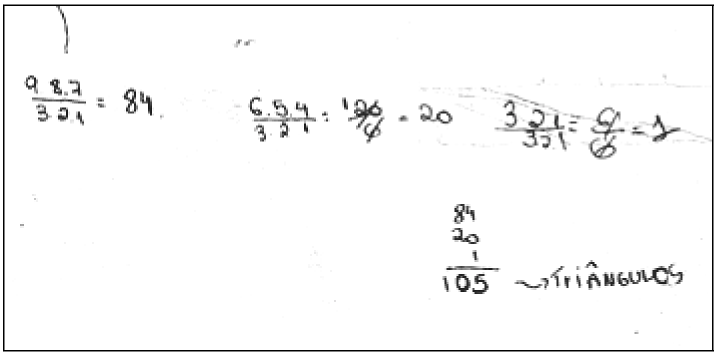
Esta é uma dupla mista, sendo que o menino foi um pouco disperso durante a resolução das atividades, brincou muito e muitas vezes deixou a menina iniciar sozinha a resolução das atividades da seqüência. A pesquisadora interferiu várias vezes no comportamento deste aluno e conseguiu que a cada encontro este participasse um pouco mais.Observamos que sempre que possível ele tentava atrapalhar o raciocínio da menina com brincadeiras conversa sobre outros assuntos.

Constatamos que do pré para o pós-teste, o aluno 12 apresentou evolução, mas a aluna 6 apresentou uma evolução ainda maior, o que já era esperado, pois as dúvidas sobre o procedimento ou sobre a interpretação do problema eram sempre questionados por ela e quando a pesquisadora pedia para a dupla colocar a resolução das atividades na lousa era sempre a aluna número 6 que o fazia, mostrando o raciocínio utilizado para resolver a atividade.

Abaixo, apresentamos o quadro com o número de acertos nos dois testes pela dupla.

Alunas	Pré	Pós
Nº 6	2	12
Nº 12	0	6

Analisando os procedimentos de resolução, no pós-teste, apresentado pelo aluno 12, pudemos constatar que sua dificuldade residia no discernimento da ordem nas questões 1 e 5, de combinação. Na entrevista com o aluno, logo após o término do pós-teste, este comentou que não chegou a se questionar se a ordem era importante ou não. Apenas pensou em combinar os elementos, usando o princípio fundamental da contagem. Na questão 9 do pós-teste, que também era de combinação, ele questionou o fator ordem e resolveu o problema, considerando a ordem irrelevante, o erro apresentado nesta questão foi o de operação errada e de conta, como mostra o seguinte protocolo:



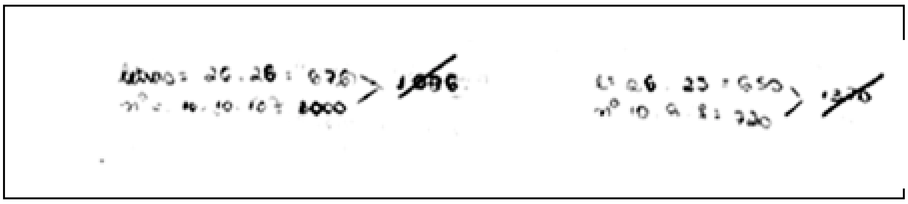
Extrato de protocolo da aluna 6 do grupo experimental – extraído do pós-teste

Observando o pré-teste deste aluno e lembrando da sua participação, na seqüência e comparando com o pós-teste, podemos concluir que ele teria um desempenho melhor se seu par ou a pesquisadora tivessem conseguido motivá-lo o suficiente para envolvê-lo nas resoluções das atividades. Mesmo com suas brincadeiras, tentando atrapalhar o andamento da seqüência, ele foi um aluno que evoluiu, pois no pré-teste ele apresentou o raciocínio combinatório apenas na questão 4. Assim mesmo, sua estratégia de resolução foi a de tentativa e erro, e mesmo essa foi abandonada.

Constatamos também que este aluno não voltou a resolver nenhuma questão do pós-teste da mesma forma que havia tentado resolver no pré-teste, isto é, usando o mesmo raciocínio ou o mesmo tipo de operação como aconteceu com a aluna número 1 da dupla A, questão 3, conforme já mencionamos anteriormente.

Podemos concluir que o aluno 12 partiu de praticamente nenhum raciocínio combinatório (no pré-teste) e ao final da seqüência apresentou evolução satisfatória, a qual é verificada no pós-teste tanto quantitativa como qualitativamente. Nossa hipótese para explicar o porquê de o avanço desse aluno não ter sido melhor se deve ao fato de que o papel ativo necessário para o desenvolvimento do conhecimento foi assumido em maior proporção pela aluna 6. O aluno só o fez em poucas atividades de alguns encontros. Quando resolvia questionar as dúvidas, discutir com e discordar de seu par, até chegarem a uma conclusão comum.

Quanto à aluna número 6, esta cometeu o mesmo erro das alunas números 3 e 18, duplas B e A consecutivamente. Na questão um, no pós-teste, a aluna resolveu pelo princípio fundamental da contagem e não questionou a ordem, enquanto no pré-teste resolveu pelo processo de tentativa e erro e conseguiu perceber que a ordem era irrelevante. Na questão 6, o erro cometido pela aluna 12 foi operação aritmética incorreta; ela somou a possibilidades de letras e algarismo no lugar de multiplicá-los, conforme resolução a seguir:



Extrato de protocolo da aluna 6 do grupo experimental – extraído do pós-teste

Nas três duplas analisadas, pudemos observar que os alunos durante a seqüência de ensino, utilizavam a representação para iniciar as atividades, mas na última ficha esta representação foi praticamente abandonada, e só faziam uso quando era apresentado um desenho na questão dada. Observamos, também, que durante algumas atividades, principalmente nas últimas fichas, em alguns momentos eles questionam se a ordem era importante ou não, em outros não questionavam. Notamos em que nas atividades que o número de possibilidades era relativamente grande, eles procuravam um processo aritmético que os levassem à solução correta, mas nem sempre conseguiam encontrá-la, enquanto nas atividades que o número de possibilidades era pequena eles conseguiam encontrar todas as possibilidades pelo processo de tentativa e erro e muitas vezes conseguiam chegar ao processo aritmético correto. Portanto, o processo de tentativa e erro foi uma estratégia usada até o final, a qual dava certo quando o total de elementos a ser combinado era pequeno.

Mediante as constatações sobre o desenvolvimento dos alunos no pós-teste, pudemos observar que nossa seqüência de ensino carece de mais encontros. Avaliando a seqüência, percebemos que esse é o caminho a ser seguido, pois a seqüência deu conta desse raciocínio. Nós apontamos como um ponto a ser mais trabalhado, nos problema de combinatória, seria o enunciado desses problemas verificando supostas ambigüidades. Nesse ponto, questionamos que se o enunciado for mais claro, e mais discutido, isto é, se conseguirmos trabalhar uma seqüência visando a interpretação do enunciado talvez possamos levar os alunos a um resultado melhor onde os erros em relação à ordem, operação aritmética incorreta e de enumeração sistemática, sem um procedimento que leve a todas as possibilidades, possam ser minimizados. Também achamos que se as representações forem mais valorizadas no início da seqüência, este processo talvez não seja abandonado no final da seqüência e na resolução dos problemas, depois do aprendizado do conteúdo.

CONCLUSÃO

5.1 CONCLUSÃO

Nesta pesquisa, estudamos a aquisição e desenvolvimento dos primeiros conceitos de análise combinatória em adolescentes de 14 anos de idade, cursando a última série do Ensino Fundamental.

Partimos das noções de contagem, representações e princípio fundamental da contagem. Buscamos problemas que colocassem os alunos em situações as quais, através da experimentação, eles pudessem realizar uma modelização do real e descrever o número de possibilidades do evento dado. Assim, iniciamos nosso trabalho buscando identificar as concepções espontâneas dos alunos (aplicação de um instrumento diagnóstico - pré-teste) e continuamos trabalhando essas concepções nos primeiros encontros da seqüência de ensino.

Ao analisar as concepções apresentadas pelos alunos, no pré-teste e na seqüência, pudemos classificar algumas que dificultaram a aprendizagem do conteúdo análise combinatória. As mais freqüentes foram:

- A falta de um procedimento recursivo que os levasse à formulação de todas as possibilidades. Isto acontecia quando os alunos resolviam problemas por enumeração, mediante tentativa e erro, principalmente nos casos em que a formação de todas as possibilidades se tornava exaustivo.
- A resposta injustificada errônea. Algumas vezes, os alunos apresentavam uma solução numérica errônea, sem explicar de onde veio tal número ou ainda sem indicar o caminho percorrido para encontrá-lo.
- O não uso da árvore de possibilidades ou sua construção inadequada, a qual levava a uma interpretação errônea.
- Nos problemas de permutação e arranjo, apareceu a interpretação da palavra distribuir como dividir.

- Nos problemas de combinação e arranjo, os alunos confundiam os critérios que deviam ser usados em cada situação e algumas vezes decidiam considerar a ordem importante quando esta não era ou vice-versa.

Estas concepções ganharam maior evidência em nossas análises feitas da metade para o final da nossa seqüência de ensino e no pós-teste.

Um comportamento que nos chamou muito a atenção foi que quando os alunos aprenderam um processo aritmético ou algébrico, eles abandonavam as representações. Pudemos observar que poucos alunos fizeram uso da árvore de possibilidades, mesmo quando dada como sugestão para resolução do problema e no final da seqüência de ensino e na resolução do pós-teste ela foi praticamente abandonada.

Este dado é confirmado nos estudos de Batanero (1996), já citados no capítulo II. Batanero aponta como dificuldade o escasso uso que os estudantes fazem da árvore de possibilidades, e quando a usam é com pouco êxito.

Nossa explicação para tal comportamento vem do contrato didático implícito ou talvez explícito que a escola estabelece para com seus alunos, ou seja, a valorização do uso do processo formal (utilização de algoritmo). Esta valorização costuma acontecer a partir do 2º ciclo do Ensino Fundamental (3ª e 4ª séries) quando o cálculo mental é pouco ou nada valorizado e existe uma cobrança do uso correto dos algoritmos. A partir do 3º ciclo (5ª e 6ª série), a resolução de problemas sem o uso dos tradicionais “x” e “y “ é considerada uma resolução “pobre” ou, o que é pior , algumas vezes é considerada errada.

Nossa amostra é de alunos da 8ª série, ou seja, alunos que lidam com esse critério a maior parte de suas vidas escolares. Para eles, o uso da representação chega a ser uma ruptura deste contrato didático, onde apenas os alunos “atrasados” é que necessitam representar para a seguir fazer uso ou não do algoritmo.

Apesar de estimularmos o uso da representação constatou-se que não foi o suficiente a ponto de romper com este contrato didático. Acreditamos que para tal ruptura seria necessário ter valorizado mais em todas as atividades sua importância.

Durante a seqüência, pudemos observar que os alunos evoluíram passo a passo com as apresentações das resoluções e com as discussões relativas aos processos de resoluções usados. Acreditamos que a mudança na forma de se trabalhar com o conteúdo, seguindo uma abordagem que procurou envolver o aluno através de situações reais, além do trabalho desenvolvido em dupla, criou um ambiente favorável para tal comportamento. Apesar disso, todos apresentaram dificuldade na interpretação dos problemas propostos, o que vai ao encontro a nossa análise dos livros didáticos, onde constatamos que a memorização do algoritmo é privilegiada.

Notamos que as dificuldades apareceram, quando começaram as fichas em que era preciso questionar se a ordem em que os elementos eram colocados tinham importância ou não. Também observamos grande dificuldade na ficha 2, onde os alunos se perdiam em fazer as representações das figuras dadas através de tentativa e erro, e esta dificuldade apareceu principalmente nos problemas em que o número de possibilidades era grande.

Analisando os testes diagnósticos, pudemos verificar que estas dificuldades são constatadas nos dois testes (pré e pós-teste). No pré-teste, pudemos constatar que os alunos iniciavam a questão por tentativa e erro e abandonavam ou chegavam até um certo número de possibilidades e colocavam este número como resultado. Quanto à ordem, eles só conseguiam distinguir se era importante ou não usando a representação. No pós-teste, já observamos que os alunos procuravam não usar o processo de tentativa e erro, ou quando iniciavam este processo, acabavam abandonando-o, por ser exaustivo, e procuravam uma operação aritmética para resolver o problema. As questões em que os alunos tinham que perceber que a ordem era irrelevante (problemas de combinação) são as que apareceram com índice maior de erro.

Tanto no pré como no pós-teste pudemos notar uma grande dificuldade dos alunos em decomporem o problema em partes para depois generalizarem a solução.

Todas estas dificuldades aqui demonstradas também, são nomeadas nos estudo de Batanero (1996.1997), como já citamos anteriormente.

Estamos conscientes das dificuldades encontradas pelos alunos nos problemas relativos ao conteúdo analise combinatória. Acreditamos que a solução para as dificuldades está na busca de uma aprendizagem fundamentada na atividade do aluno que procura construir seu próprio conhecimento. As atividades diversificadas, que venham a ser proposta para favorecer um comportamento de busca, de hipóteses e que despertem o raciocínio, ajudam o processo de aprendizagem do aluno. O importante é admitirmos que os erros dos alunos são normais no processo de aprendizagem, e que através deles podemos levar os discentes a superarem os obstáculos e, conseqüentemente, à evolução do desenvolvimento do conhecimento.

Esta reflexão sobre a aprendizagem de análise combinatória nos leva à teoria de Piaget que afirma que a solução para as dificuldades dos alunos, em questões matemáticas, esta numa aprendizagem fundamentada na atividade do aluno que constrói seus próprios conhecimentos. E nas idéias de Vergnaud, quando afirma que um campo conceitual representa um conjunto de situações cujo domínio requer uma variedade de conceitos, procedimentos e domínio da representação simbólica.

5.2 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Gostaríamos de apresentar, nesta seção, como educadores e pesquisadores, as nossas posições pessoais. Os resultados obtidos nessa pesquisa nos forneceram um enorme crescimento, além da credibilidade de que é possível desenvolver um conceito matemático em sala de aula de forma significativa. Para nós, ficou evidente que uma abordagem que procura envolver a participação do aluno, explorando constantemente situações próximas de seu cotidiano, favorece a apresentação de um outro tipo de comportamento. Fato comprovado pela participação assídua dos alunos em encontros que foram ministrados fora do horário normal de aulas. A “mortalidade” dos 3 alunos que não entraram na nossa análise se deve aos seguintes motivo:

A ausência de um dos três alunos explica-se por problemas relativos à saúde. Esse aluno, após ter iniciado os encontros, ficou com uma infecção, mas na semana que não apresentava febre, fazia questão de participar da seqüência e realizou o pós-teste. Quando faltou a primeira vez, pediu para que não o tirássemos dos encontros, pois, assim que pudesse voltaria.

Os outros dois alunos apenas não compareceram no dia da aplicação do pós-teste.

Outro fato que nos fez comprovar que esta abordagem foi bem aceita se deve ao elogio recebido dos pais dos alunos que participaram da seqüência. Tais pais telefonaram para a diretora e um deles foi diretamente conversar com a pesquisadora. Também ficamos contentes quando recebemos alguns alunos do 2º ano do Ensino Médio (nosso grupo de referência), pedindo para darmos o mesmo estilo de aula que estava sendo ministrada à turma da 8ª série.

Nos iniciais momentos, do primeiro encontro, pudemos constatar que este era visto pelos alunos como uma atividade de lazer e não como algo que objetivasse um aprendizado. No segundo momento, já ocorreu uma certa resistência dos alunos em resolverem as atividades dadas, sem que houvesse uma explicação prévia sobre o assunto. Sentimos, então, a quebra do contrato didático existente até o momento, provocando uma dispersão por parte de alguns alunos, embora poucos. Depois de uma explicação sobre a pesquisa que estava sendo realizada, constatamos que os alunos não mais assumiram um papel apático e passivo, caracterizado pela espera da "transmissão" do conhecimento como algo obrigatório. Conseguimos que uma boa parte dos alunos assumissem o papel de "construtores" de tal conhecimento. Quanto aos materiais concretos, estes foram bem aceitos e quase a totalidade dos alunos fez uso deles.

Pretendemos deixar bem claro que acreditamos que existem outras formas de introduzir o conceito de análise combinatória, baseadas em situações que procuram dar significado ao aluno. Apenas acreditamos que o enfoque que demos para nossa seqüência ajudou a facilitar um pouco a construção desse conhecimento.

Realizando uma avaliação crítica de nosso estudo, notamos que, em alguns pontos, haveria necessidade de aperfeiçoamento. Cremos que ampliando a duração da aplicação de nossa seqüência, trabalharíamos melhor certos aspectos que provavelmente levariam à obtenção de melhores resultados, tanto qualitativo como quantitativo. Acreditamos, ainda, que seria válido trabalhar com um número maior de situações-problema que valorizassem a contagem direta e permitissem aos alunos descobrir um procedimento que os levassem a todas as possibilidades, sendo que pouco a pouco, seria aumentado o número de possibilidades total. Essa afirmação se deve ao fato de julgarmos que, se o aluno tiver possibilidade de interagir mais com esse tipo de problema, terá condições de desenvolver a habilidade de interpretação sobre a ordem dos elementos e algumas etapas a serem realizadas, quando formadas, uma a uma, as possibilidades possíveis. Temos, também, que devíamos trabalhar mais a interpretação do enunciado e ter uma preocupação, maior do que a que tivemos com a elaboração da nossa seqüência, em ver a clareza do enunciado. Em alguns problemas, observamos que os alunos apresentaram dificuldade na interpretação do enunciado. Como exemplo, temos a questão 7 do pós-teste, em que os estudantes permutam as categorias dos filmes, mas não fazem a permutação dos filmes dentro das categorias. Questionamos nesse problema se o enunciado estava claro, se os alunos conseguiram interpretar que os filmes podiam ser permutados dentro de cada categoria.

Por fim, ainda como sugestão de pesquisa, acreditamos ser de vital importância desenvolver o estudo sobre análise combinatória de forma significativa, e que este estudo aconteça em etapas, como sugerem os PCNs. O ideal, no nosso ponto de vista, seria que o estudo pudesse ser iniciado no Ensino Fundamental de forma significativa, sem apresentação de fórmulas, e que no Ensino Médio o aluno pudesse ter este conceito institucionalizado, apresentando as fórmulas de forma significativa e não apenas como um algoritmo que o leve a mecanizar e associar palavras-chave.

Pretendemos, em futura pesquisa, trabalhar em relação aos enunciados dos problemas de análise combinatória. Formaríamos, assim, dois grupos, um em que os enunciados são cuidadosamente trabalhados, com a preocupação de formular cada problema com muita clareza e trabalhar a interpretação através de representações, e o outro em que os enunciados estejam nos livros didáticos. Com esse estudo, gostaríamos de avaliar até que ponto a interpretação do enunciado e a clareza deste podem sanar os erros encontrados na nossa pesquisa.

BIBLIOGRÁFIA

BATANERO, C. et al. *Estrategias en la Resolución de Problemas Combinatórios por Estudiantes con Preparación Matemática Avançada*. Epsilon (36), 433-446, 1997.

BATANERO, C.; GODINO, J.D.; NAVARRO-PELAYO, V. *Razonamiento Combinatorio En Alumnos de Secundaria*. Educación Matemática,8 (1), 26-39,1996.

____ *Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils*. Educacional Studies in Mathematics, (32), 181-199, 1997.

BONGIOVANNI, V., VISSOTO, O., LAUREANO, J. L. *Matemática e Vida –5ª a 8ª séries.* São Paulo. Ática, 1996.

____ *Matemática e Vida – 2º grau, volume 2.* São Paulo. Ática, 1993.

BOYER, C. B. *História da Matemática*. São Paulo. Edgard Blucher Ltda, 1974.

CHEVALLARD, Y.; JOSHUA, M. A. *La Transposition Didactique: du savoir suivant au savoir enseignée. Suivie de um exemple de la transposition didactique*. Éditions la Pensée Sauvage, 1991.

COUTINHO, C. et al. *Introdução ao Conceito de Probabilidade para adolescente – 12/13 anos*. Comunicação Científica, IV EPEM, p.165-170, 1996.

____________________ *Introduction os the Concept of Probability to Teenagers – 12/13 years old.* Proceedings of the 20th International Conference for the Psychology of Mathematics Education, vol. 1. Universidade de Valência – Espanha, pp. 230, 1996.

FALCÃO, J. T. R. *Relações entre pensamento e linguagem: explorações teóricas no contexto da educação matemática, (?) .*

DELAHAYE, J. P.; MATHIEU, P. Des surprises dans le monde de la coopération. *Les Mathématiques Sociales*. Édition Française de Scientific American, p. 58-66, 1999.

EVES, H. *Introdução a História da Matemática*. São Paulo. Editora da UNICAMP, 1995.

FISCHBEIN, E. ; GROSSMAN, A. *Schemata and Intuitions in Combinatorial Reasoning*. Educacional Studies in Mathematics, (34), .27-47, 1997.

GENTIL, N. et al. *Matemática para o Segundo grau – volume 2*. São Paulo. Ática, 1997.

GIOVANNI, J. R. e BONJORNO, J. R. *Matemática 2 – volume 2*. São Paulo. FTD, 1992.

GIOVANNI, J. R. ; PARENTE, E. *Aprendendo Matemática - 5ª a 8ª séries*. São Paulo. FTD, 1999.

GIOVANNI, J. R. ; CASTRUCCI, B., GIOVANNI JR. J. R. *A conquista da Matemática - 5ª a 8ª séries*. São Paulo. FTD, 1998.

GUELLI, O. *Uma Aventura do Pensamento – 5ª a 8ª séries*. São Paulo. Ática, 1998.

GRENIER, D. ; PAYAN, C. *Spécificités de la Preuve et de la Modélisation en Mathématiques Discrétes*. Recherches en Didactique des Mathématiques 1, vol.18, pp 59-100, 1998.

HENRY, M. *Didactique des Mathématiques: Une présentation de la didactique em vue de la formation des enseignants*. IREM de Besançon, 1991.

ICMI Study Series. *Mathematics and Cognition: A Reasearch Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* CamBridge University Press, 1990.

IEZZI, G. et al. *Matemática – volume único, 2º grau*. São Paulo. Atual, 1997.

____________ *Testes de Vestibular, 2: seqüências, matrizes, determinantes, sistemas, combinatória, probabilidade, complexos, polinômios, equações*. São Paulo. Atual, 1992.

IMENIS, L. M. ; LELLIS, M. *Matemática – 5ª a 8 ª séries*. São Paulo. Scipione, 1997.

NUNES, T. ; BRYANT, P. *Crianças Fazendo Matemática*. Artes Médicas, 1997.

______________________ *Learning and Teaching Mathematics.* Psychology Press Ltd, 1997.

MACHADO, S. D. A. et al. *Educação Matemática: Uma Introdução*. São Paulo. Educ, 1999.

MACHADO, A. S. *Matemática para a Escola do Segundo Grau – Volume 2*. São Paulo. Atual, 1996.

MAURY,S. ; FAYOL, M. *Combinatoire et Resolution de Problemes au Cours Moyens Premiere et Deuxieme Années*. Recherches en Didactique des Mathématiques 1, vol.7, pp.63-104, 1986.

MEIRA, L. *O “Mundo-real” e o dia-a-dia no ensino de matemática.* A Educação Matemática Em Revista – SBEM 1 – 2º sem, pp. 19-27, 1993.

Ministério da Educação e do Desporte, Secretária de Educação Fundamental. . *Parâmetros Curriculares Nacional, Matemática*. Brasília: MEC./SEF, 1998.

MORGADO, A. C. O. et al. *Análise Combinatória e Probabilidade*. Rio de Janeiro. Sociedade brasileira de Matemática, 1991.

PIAGET,J. *A Formação do Símbolo na Criança.* Editora Guanabara Koogan. S.A, 1978.

__________ *The essential Piaget: an interpretive reference and guide /* edited by Howard E. Gruber an J. Jacques Vonéche. London. Jason Aronson Inc, 1995.

PIAGET,J. et INHELDER, B. *La Génese de I’dée D’hasard Chez L’enfant*. París. Presses Universitaire de France, 1951.

PIAGET,J. et INHELDER, B. *A Psicologia da Criança.* Rio de Janeiro. Editora Bertrand Brasil S.A, 1995.

RIGOLINO, J. C. ,HARIKI, S. *Como Resolver Problemas de Combinatória: Modelos e Analogias*. Mini-curso, IV EPEM, pp.353, 1996.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. *Proposta Curricular Para o Ensino da Matemática: 2º Grau, 2 ed.*. São Paulo: SE/CENP, 1989.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. *Proposta Curricular Para o Ensino da Matemática: 1º Grau, 4 ed.*. São Paulo: SE/CENP, 1992.

SMITH, D. E. *History of Mathematics*. Dover Publications, Inc. New York, 1958.

VERGNAUD, G. *El niño, las matemáticas y la realidad: problemas de la enseñanza de las matemática en la escuela primária.* Editorial Trillas. México, 1991.

________________ *A Comprehensive Theory of Representation for Mathematics Education*. JMB – Journal of Mathematical Behavior, 17 (2), 167 –181, 1998