Élio Mega

Ensino/aprendizagem da rotação na 5ª série:

um estudo comparativo em relação ao material utilizado

Mestrado em Educação Matemática

PUC / SP - 2001

Élio Mega
mega@dglnet.com.br

Ensino/aprendizagem da rotação na 5ª série:
um estudo comparativo em relação ao material utilizado

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de MESTRE em Educação Matemática, sob a Orientação da Professora Doutora Sandra Magina.

PUC / SP - 2001

Élio Mega

Ensino/aprendizagem da rotação na 5ª série:

um estudo comparativo em relação ao material utilizado

Comissão Julgadora

____

____

____

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta tese por processos fotocopiadores ou eletrônicos.

São Paulo, agosto de 2001.

Agradecimentos

Muitas pessoas, direta ou indiretamente, me ajudaram neste trabalho.

Mas sua concretização se deve ao empenho da minha sempre presente orientadora Professora Doutora Sandra Magina. **N**ão há como lhe

agradecer suficientemente.

Uma outra pessoa foi imprescindível: minha co-orientadora, a Professora Lulu Healy, incansável, competente e paciente. Muito obrigado!

Minha gratidão também

À Professora Ana Paula, pelas suas críticas e idéias.

À Professora Tânia, pelo apoio e o estímulo.

Ao Professor Paulo César, pela amizade e pelas sugestões pertinentes.

Aos demais professores da pós da PUC que, de várias maneiras, influenciaram minhas concepções sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática.

Aos funcionários, que sempre nos trataram bem, especialmente ao Francisco.

E, finalmente, aos vários colegas, que, com sua amizade, tornaram esta jornada um lapso bastante agradável.

RESUMO

Partindo do pressuposto de que as isometrias devam ser ensinadas já no Ensino Fundamental, propõe-se, neste trabalho, que se inicie com rotações a partir da 5ª série, empregando-se uma estratégia que inclua a utilização de manipulativos de fácil obtenção. A pesquisa compara os resultados obtidos por dois grupos de sujeitos ao longo de uma série de atividades desenvolvidas em classe, apenas com a intermediação do pesquisador; um dos grupos utilizou somente os instrumentos usuais do Desenho Geométrico e o outro usou predominantemente outros materiais e ferramentas, como palitos, papéis transparentes, botões e o transpel, um dispositivo especialmente projetado para este estudo. As atividades se ajustaram aos preceitos teóricos apresentados por Piaget e Garcia, no que diz respeito à psicogênese do pensamento geométrico e às idéias de Meira referentes à transparência dos artefatos utilizados no ensino de Matemática. A análise dos resultados obtidos nas atividades e no pós-teste mostrou que existe forte influência do material utilizado no desempenho dos alunos, variável de acordo com a natureza da atividade. O estudo conclui que ambos os conjuntos de materiais utilizados podem contribuir para uma ampliação das experiências dos estudantes e da sua compreensão do campo conceitual da rotação.

ABSTRACT

Starting from the premise that isometries should be included in the geometry curriculum, this research proposes that we should begin with rotations at 5^{th} grade, by means of strategies of using easily obtainable manipulatives. This investigation compares the achievements of two groups of subjects along a sequence of activities that took place in the classroom, mediated only by the researcher; one of the groups was allowed to use only traditional drawing tools and the other one was instructed to employ alternative material and tools like sticks, tracing papers, buttons and the “transpel”, a device specially designed for this study. The activities were planned to fit in the framework of the theory of Piaget and Garcia concerning the psychogenesis of the geometrical thinking and the ideas of Meira related to the transparency of artifacts used in the teaching of Mathematics. The analysis of results in the activities and in the post-test has shown that there is a strong influence of the applied material in the students performance, dependent on the nature of the activity. The research concludes that both sets of manipulatives can contribute in different ways to enlarging students’ experience and understanding of the conceptual field of rotation.

Índice Geral

APRESENTAÇÃO

No Brasil, a Educação Matemática busca seu espaço e a produção nesse campo já constitui um acervo cuja apropriação está além das capacidades individuais. Assim, mesmo sem considerar a produção estrangeira, já é díficil para o pesquisador em formação ter certeza de que seu trabalho de investigação seja relevante ou inédito, qualidades desejáveis num projeto de pesquisa.

Considerando-se o aspecto da relevância, dentre os grandes temas da Educação Matemática está o do ensino e da aprendizagem da Geometria, que se ramifica em várias questões. Dentre elas, destacamos a questão do ensino e aprendizagem das transformações geométricas e, em particular, da rotação. O aspecto da novidade, no sistema educacional brasileiro, evidencia toda a problemática que envolve o ensino dessa transformação: quando começar, que perspectiva adotar, de que forma deverá ser dada, que dificuldades deverão ser consideradas, etc.

Nosso trabalho consistiu essencialmente na pesquisa das diferenças de aplicação e dificuldades de duas seqüências de ensino da rotação, uma delas baseada no uso clássico da régua e do compasso e a outra centrada no uso de outros materiais manipulativos, como papel transparente, cordões, palitos e a comparação dos resultados obtidos na aprendizagem do conceito, nos dois enfoques. Os sujeitos da pesquisa eram, no início, 37 alunos da 5ª série do Ensino Fundamental de uma escola particular de São Paulo, cuja instrução escolar prévia não compreendia o estudo de transformações geométricas nem o de alguns conceitos geométricos relacionados a esse assunto, como o de mediatriz de um segmento e medidas de ângulos maiores do que 180^{o} .

Ao desenhar o experimento, tínhamos como pressupostos a expectativa de que os estudantes se apropriassem do conceito de rotação, concebido inicialmente como um movimento físico com certas características e finalmente como uma relação perfeitamente determinada entre duas figuras congruentes no mesmo plano. Caso as condições fossem favoráveis, não estariam descartadas possíveis aplicações elementares da rotação como ferramenta na resolução de problemas de geometria. Considerando o nível instrucional e cognitivo dos sujeitos da pesquisa, não era nossa meta tratar o conceito de rotação plana como o de uma função do plano no plano e o subseqüente enfoque da álgebra das transformações (grupos de transformações, representação matricial, etc). Com relação às duas seqüências de ensino, nossa expectativa era a de que, do ponto de vista das propriedades geométricas das figuras estudadas (por exemplo, a de que três pontos determinam um triângulo), o grupo da régua e do compasso tivesse melhor desempenho, e que, do ponto de vista da noção de rotação como movimento rígido (por exemplo, identificar uma relação de rotação numa configuração dada), o grupo do material manipulativo se saísse melhor. Como se vê, nossas expectativas a esse respeito possivelmente não se distanciavam das de um professor secundário com experiência no ensino das transformações geométricas.

Nesta monografia iremos apresentar nossa investigação, desde as idéias iniciais até os resultados finais. Organizamos nossa exposição em seis capítulos, que iremos descrever de forma resumida a seguir.

No primeiro capítulo, discutiremos alguns aspectos do conhecimento acadêmico de transformações geométricas e seu ensino, em especial a rotação, que terão reflexos em nossa pesquisa. Começaremos com uma síntese dos vários tipos de abordagens propostas para o ensino da Geometria, considerando apenas alguns aspectos teóricos do saber acadêmico desse ramo da Matemática. Em seguida, nos dedicaremos ao conceito e à definição clássica de transformações no plano, com enfoque na rotação e suas propriedades essenciais. Para tentar ajudar a compreender a concepção de Klein da Geometria como uma estrutura, definiremos grupo, apresentaremos exemplos e estudaremos com um certo detalhamento o subgrupo das rotações em torno de um ponto fixado. Depois, discutiremos um pouco a questão da questão da substituição dos axiomas de congruência pelos axiomas das isometrias, já que essa parece ser uma recomendação dos PCNs. Encerraremos o capítulo com algumas observações sobre construções com régua e compasso. Nossa intenção nesse capítulo é a de apresentar alguns elementos para reflexão por parte dos professores que eventualmente irão enfrentar o problema da introdução do estudo das transformações geométricas no Ensino Fundamental. Como as transformações geométricas são muito pouco estudadas nos cursos de licenciatura, é necessário que o professor tenha uma visão das suas noções fundamentais, parte das quais apresentamos aqui. Iremos recomendar alguns livros para que o professor complete o indispensável estudo desse assunto.

No segundo capítulo, abordaremos vários tópicos relacionados ao ensino da transformação na escola pré-universitária. Um desses aspectos se refere ao tratamento dado ao assunto na França, Estados Unidos e Inglaterra, com relação à inserção do ensino de transformações geométricas na escola, considerada na faixa dos 10 aos 17 anos. Outro aspecto se refere ao fato de que, nesses países, existe alguma interação entre as determinações dos órgãos institucionais de ensino (governamentais ou não) e as pesquisas de educadores matemáticos relacionadas a essas inovações, algumas a priori, outras concomitantes e outras a posteriori à época de implementação das reformas. Várias dessas pesquisas a que tivemos acesso permitiram delinear o tema de nosso trabalho, sugerindo aspectos ainda não investigados e apresentando vários resultados que pudemos confirmar em nosso estudo. Iremos tratar resumidamente também neste capítulo o ensino das transformações no Brasil, sob o ponto de vista de sua inclusão nos currículos e livros didáticos, a partir das recomendações dos PCNs.

No terceiro capítulo, ocupar-nos-emos da questão do desenvolvimento do conceito de transformação na criança e no adolescente, com base em algumas teorias psicológicas. Por exemplo, apoiamos-nos em Piaget e Garcia (1983), no que se refere aos mecanismos de evolução dos níveis *intra*, *inter* e *trans* de pensamento na conceituação das tranformações geométricas pelo indivíduo. Faremos uma breve conexão com a história das transformações geométricas, porque isso é essencial na teoria de Piaget e Garcia (ibid).

Veremos também neste capítulo como a utilização de instrumentos e materiais manipulativos como ferramentas que ampliam ou mudam, talvez nem sempre para melhor, a capacidade de compreensão, é vista em trabalhos de pesquisa, como o de Meira (1998). Valemo-nos de suas idéias para justificarmos algumas de nossas observações sobre o comportamento e o desempenho dos sujeitos de pesquisa durante o desenvolvimento de suas atividades.

No quarto capítulo, apresentaremos a metodologia empregada neste trabalho. Ela compreende um pré-teste, um conjunto de atividades e um pós-teste. O pré-teste foi aplicado no final do ano letivo de 1999 para um grupo de 40 estudantes da 4ª série do ensino fundamental da escola já mencionada antes. Foi feita uma análise dos resultados do pré-teste e com o auxílio das pistas fornecidas pelo mesmo, foi elaborado um conjunto de atividades em classe, dividido em três sessões, desenvolvidas em módulos que chamamos de ‘folhas’. Cada folha, com exceção de uma delas, foi concebida para durar o tempo normal de uma aula. Esse conjunto de atividades foi aplicado aos sujeitos do pré-teste no ano 2000, quando cursavam a 5ª série. Os oito encontros feitos com os estudantes se estenderam de maio a setembro desse ano, tendo que se ajustar às disponibilidades dos professores, já que foram aplicados durante o período normal de aulas. O pós-teste foi aplicado cerca de 40 dias após o último encontro, pois pretendíamos verificar se a aprendizagem não era efêmera. Os encontros foram filmados em vídeo, às vezes com tomadas da classe toda e o restante do tempo focalizando o trabalho de um indivíduo ou de alguma dupla.

Dedicaremos o quinto capítulo à análise e interpretação dos resultados de cada uma das seqüências de atividades e da comparação entre as duas; analisaremos e interpretaremos também os resultados do pós-teste, comparando-os com os das atividades em classe bem como os do pré-teste. Para a elaboração das tabelas de dados, parte das quais foi também apresentada em gráficos de colunas, foi necessário, muitas vezes, subdividir várias atividades em subitens pormenorizados, de leitura difícil. Por um problema de espaço, decidimos não anexar essas tabelas estatísticas, realmente bastante extensas. Algumas informações dificilmente quantificáveis, como as atitudes, reações, interações entre os sujeitos, dúvidas e até mesmo estratégias de resolução de problemas durante os encontros, foram retiradas das leituras das explicações escritas pelos sujeitos e, excepcionalmente, da observação das fitas gravadas durante as aulas.

No capítulo seis, a partir das análises desenvolvidas, responderemos às questões colocadas inicialmente e às outras surgidas ao longo da pesquisa; apresentaremos, também, algumas sugestões de futuras pesquisas que poderiam dar continuidade ao projeto iniciado nesta investigação. Iremos concluir este trabalho com algumas recomendações para o ensino de rotações nos 3º e 4º ciclos do nosso Ensino Fundamental.

CAPÍTULO 1

1.1 – INTRODUÇÃO

Iremos discutir neste capítulo algumas idéias de natureza matemática que possam ter influência no ensino escolar. Não se trata aqui de uma questão da escolha de um método de ensino, mas da adoção de uma particular perspectiva da Geometria do ponto de vista matemático. Como veremos, a escolha de diferentes conceitos fundamentais como ponto de partida levou a diferentes tratamentos da Geometria como disciplina escolar por alguns *reformadores* de currículos em diferentes países e em diferentes momentos. Para uniformizar a linguagem, iremos denominar *Geometria Euclidiana* ao conteúdo compreendido habitualmente pelos currículos escolares pré-universitários, no Brasil.

1.2 – CONSIDERAÇÕES SOBRE A NATUREZA DA GEOMETRIA ESCOLAR

As rotações constituem uma classe de funções contida em outra classe mais abrangente: a das transformações geométricas, denominação esta que deixa entrever uma conexão da Geometria com a Álgebra. No nível do trabalho acadêmico, as transformações são um objeto importante de estudo interdisciplinar até os dias de hoje. No nível do trabalho escolar pré-universitário, é preciso considerar os vários tipos de abordagem da Geometria, que irão determinar a importância do assunto. Willson (1977), faz uma lista dessas abordagens, que iremos apresentar a seguir, acrescentando comentários nossos para tornar o texto mais preciso.

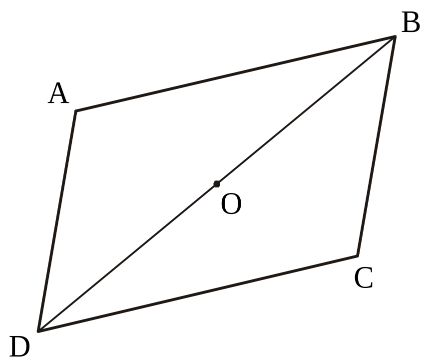
- A "tradicional", em que a Geometria é baseada em *Os Elementos*, de Euclides (300 a.C.): as ferramentas básicas são a congruência e a semelhança de triângulos (com base no 5^o postulado) usadas para estudar as propriedades dos polígonos e da circunferência, bem como algumas relações entre essas figuras. A ordem de apresentação em geral é pretensamente axiomatizada[1]: começa-se com os termos indefinidos, alguns axiomas (ou postulados) e definições. Em seguida, usando as regras da lógica clássica, demonstram-se novas proposições, denominadas *teoremas*, acompanhados, freqüentemente, de definições e apresentações de propriedades. A teoria se desenvolve com o aparecimento de novos teoremas, novos axiomas e novas propriedades e definições, como fez Euclides. O estudo dos corpos sólidos (Geometria Espacial) em geral é deixado para o final.

- A que se baseia nas idéias apresentadas no *Erlangen Programme*, de Felix Klein (1872), consistindo fundamentalmente numa troca de alguns axiomas iniciais. Em vez do axioma LAL de congruência e demais teoremas de congruências, adotam-se os axiomas das transformações denominadas *deslocamentos*[2]. Além disso, o axioma das paralelas pode ser substituído pelo axioma da translação e os teoremas de semelhança pelo axioma das similaridades[3]. No estudo de áreas, a transformação de cisalhamento (deslocamento paralelo) tem papel bastante importante. Considerando o conteúdo tradicional, alguns currículos no Ensino Médio também podem incluir os axiomas das projeções afins. O que conta é que, nesta abordagem, as transformações são meios que justificam os fins, pois são ferramentas usadas no estudo das propriedades das figuras geométricas e usadas para demonstrar teoremas. Por isso, esta perspectiva se reveste de particular interesse para nós neste trabalho. Lembramos que na classificação das geometrias por Klein, entende-se por Geometria Euclidiana, diferentemente do que convencionamos anteriormente, a que corresponde apenas aos grupos de transformações isométricas. Teríamos aqui, na verdade, uma Geometria Euclidiana com transformações.
- A vetorial, em que o vetor é o conceito fundamental e o produto escalar de vetores é um teorema essencial. Os vetores são aplicados como ferramentas para o estudo das propriedades das figuras planas usuais já mencionadas.

[1] Um exemplo de sistema axiomatizado da Geometria Euclidiana é o de Hilbert.
[2] *motions*, em inglês: reflexão na reta, reflexão com deslizamento, translação e rotação.
[3] ou semelhanças.

- A geometria das transformações, tal como sugerida por Max Jeger, em *Transformation Geometry* (1969), pressupõe conhecimentos prévios da Geometria "tradicional", tais como congruência e semelhança e tem as transformações como objetos de estudo e não ferramentas. As operações algébricas para transformações são introduzidas logo de início e são utilizadas extensivamente como método de prova. Segundo Jeger, "ela faz muito mais uso da estrutura de grupo da Geometria Elementar" do que outras abordagens envolvendo transformações geométricas no ensino da Geometria. Entretanto, o sistema axiomático que fundamenta a abordagem de Jeger não é apresentando consistentemente, de forma proposital, segundo o próprio autor, pois isso seria adequado apenas para níveis mais avançados de estudo. Ele afirma também que sua intenção é levantar a seguinte questão: "Até que ponto essa abordagem algébrica da geometria escolar é capaz de proporcionar maior 'insight' do estudante nessa matéria?".
- A algébrica, na qual pontos no plano são pares ordenados e as curvas são representadas por equações do segundo grau, no máximo, com duas variáveis. As transformações são expressas como matrizes. A Geometria é vista como algo pertencente à Algebra, ou mais precisamente, à Álgebra Linear.

As três primeiras abordagens diferem basicamente no conjunto de axiomas iniciais, mas todas visam o estudo das propriedades das figuras geométricas usuais. Vamos ver um exemplo. O desenho ao lado representa um paralelogramo ABCD, sua diagonal $\overline{BD}$ e o ponto médio O dessa diagonal. Na primeira abordagem, no estudo das propriedades do paralelogramo, o destaque é o fato de que $\triangle ADB \cong \triangle CBD$, pelo caso ALA de congruência de triângulos, admitido o axioma das paralelas; na segunda abordagem poder-se-ia dizer que o $\triangle ADB$ é levado ao $\triangle CBD$ por uma rotação de



180^o ao redor de O (ou que a figura tem simetria central com relação ao ponto O) e na terceira, a propriedade básica consiste no fato de que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Na quarta abordagem, se interpretamos corretamente Willson(1977) e o próprio Jeger(1969), os enfoques acima seriam igualmente possíveis, sem nenhum destaque em especial. Na quinta abordagem, passa-se algo parecido, pois é comum a utilização de diagramas em que se usam as propriedades geométricas das curvas estudadas. Mas certamente a linguagem e a metodologia seriam diferentes (na quarta, grupos e álgebra das composições e na quinta, equações e sistemas de equações de duas variáveis de primeiro e segundo graus).

1.3 – NOÇÕES DA TEORIA DA ROTAÇÃO QUE NOS INTERESSAM

No que segue, faremos uma apresentação de parte da teoria das transformações, vista na perspectiva da Geometria. Conforme já exposto, nosso trabalho irá focalizar apenas a transformação de rotação. Iremos falar um pouco superficialmente das transformações de uma forma geral, para depois apresentar uma definição geométrica de rotação, mostrar como a rotação opera sobre uma figura, como relaciona duas figuras e como encontra na estrutura de grupos seu “habitat” natural. Para esta última discussão, recordamos a definição de grupo e mostramos como o conjunto das rotações no plano ao redor de um ponto formam um grupo. No final, ilustramos como a composição das isometrias poderia ser utilizada para demonstrar o caso LLL de congruência de triângulos, caso se adotasse a segunda abordagem apresentada na secção 1.2. Deixamos claro que não é essa a estratégia usual clássica, utilizada nos livros de Geometria avançada. Entretanto, acreditamos que essas idéias devem despertar o interesse do professor que se prepara para ensinar as transformações em qualquer nível de escolaridade pré-universitária. Além disso, a continuação das pesquisas iniciadas neste trabalho inevitavelmente terá que recorrer a esta teoria como um todo.

No que consistem as chamadas *transformações geométricas*?

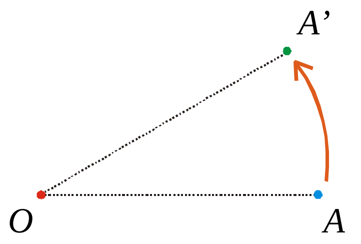
A palavra *transformação,* em sua acepção popular, refere-se a algo que muda suas características, mas que permanece intrinsecamente a mesma coisa ou que conserva o seu substrato. A água que passa da garrafa para o jarro não muda sua substância, mas aparece sob outra forma – ela se transforma. Uma janela quadrada, vista de lado, muda de forma, mas continua sendo a janela (na verdade, o que muda é o ponto de vista do observador). No movimento de corpos rígidos as coisas se complicam um pouco: uma roda que gira e um tijolo que cai mudam sua posição, mas permanecem os mesmos. Se considerarmos apenas o objeto, ele não muda (esse é um princípio dos corpos rígidos aceito universalmente). Entretanto, se olharmos para o ambiente (ou parte dele) em que está, a configuração do ambiente muda.

Ocorre que, ao representar esses fenômenos ou situações, pelos inúmeros instrumentos que se nos apresentam (fala, desenho, filme, etc), dois momentos sempre se destacam: o instante inicial e o instante final. Ao nível da representação, dependendo do instrumento utilizado, isto cria uma certa dificuldade: ao representar, por exemplo, uma bola que cai, em geral desenhamos duas bolas: uma em cima, outra em baixo, esperando que todos entendam que é a mesma bola em dois instantes diferentes. Entretanto, não é impossível que alguém interprete o desenho como a representação de duas bolas congruentes porém distintas. Quando a transformação implica mudança de forma ou tamanho do objeto, a representação estática do fato não causa dificuldade: crianças não estranham quando desenhamos a sombra elíptica de uma roda circular .

A Matemática, freqüentemente, se inspira no mundo físico e idéias intuitivas para formar conceitos. Com a formalização, as idéias intuitivas podem desaparecer (por exemplo, para o matemático experto), mas em geral permanecem como referência sensível, principalmente como recurso didático. Em geral, isso não é problema. Entretanto, a utilização da linguagem natural sem preocupação com o significado no contexto matemático pode trazer dificuldades inesperadas. Por exemplo, o professor pode pedir para os alunos transformarem um quadrado num retângulo que tenha a mesma área e os alunos aceitarem a tarefa com naturalidade, pois uma coisa virou outra (era um quadrado e se transformou num retângulo). Entretanto, o mesmo professor pode representar a rotação de um triângulo e desenhar dois triângulos congruentes, enfrentando perguntas dos alunos do tipo: *É o triângulo que se movimenta? Se os triângulos são iguais, por que não são o mesmo? Como é que o mesmo triângulo pode estar em dois lugares ao mesmo tempo? Quanto tempo leva para girar o triângulo?* Para evitar ambigüidades ou contradições, é preciso tratar a noção no contexto matemático, sem necessariamente despojá-la de todas as suas características intuitivas.

Em Geometria, no discurso moderno, reservamos o termo "transformação" para designar uma categoria de funções muito especiais. Interessante sublinhar que o conceito de função tem caráter algébrico e que as transformações geométricas assim definidas estabelecem uma ponte entre Álgebra e a Geometria. Como sabemos, as funções relacionam os elementos de um conjunto dado A com elementos de um conjunto B, de forma que todos os elementos de A sejam associados a um elemento de B e não haja dois elementos distintos de B associados a um determinado elemento de A.

No caso das transformações geométricas planas, e neste estudo vamos nos restringir apenas à Geometria Plana, os conjuntos A e B são iguais a um mesmo plano $\boldsymbol{\pi}$. Portanto, os elementos relacionados pelas transformações são pontos e, em última instância, figuras (definidas como conjuntos de pontos). Assim, cada ponto do plano $\boldsymbol{\pi}$, chamado *ponto original*, tem um ponto associado, no mesmo plano, chamado *imagem*. Uma das transformações possíveis do plano é a rotação. Conforme sugere seu nome, a rotação tem suas noções intuitivas baseadas no movimento circular e podemos até nos referir a esse movimento quando falamos nessa transformação. Mas a definição matemática é clara e não faz menção à variável tempo, diferentemente do que faz a Física.Vamos considerar um plano $\boldsymbol{\pi}$ (representado por nossa folha de papel) e *O* um de seus pontos. Seja *X* um outro ponto do mesmo plano. Qualquer que seja *X*, diferente de *O*, podemos sempre encontrar um ponto *X'* tal que o ângulo (orientado) $X\hat{O}X'$ tenha medida α (que é um número dado, positivo quando o ângulo é medido no sentido anti-horário e negativo, quando medido no sentido horário) e, além disso, $XO = X'O$. E se X coincidir com O , fazemos $X = X'$. O desenho abaixo mostra o ponto A e sua imagem A', na rotação de $\alpha = 30^o$ ao redor de O.

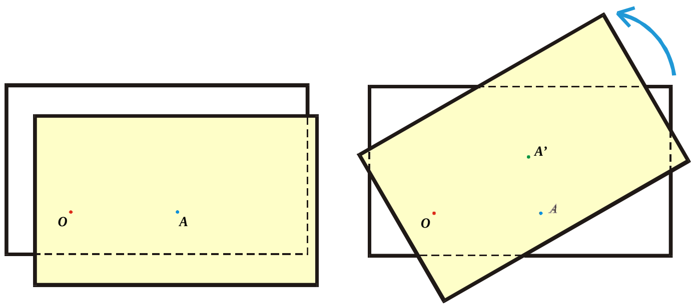


R(O,α):
a) $X = O \Rightarrow X = X' = O$
b) $X \neq O \Rightarrow m\,(X\hat{O}X') = \alpha$ e $XO = X'O$.

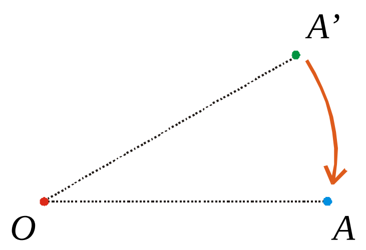
Na notação habitual, representamos esta rotação, que transforma o ponto A no ponto A' , por $R(O,\alpha)$ ou, quando não houver dúvida sobre os parâmetros (sentido, medida do ângulo, centro), simplesmente por R. Escrevemos então $R(A)=A'$.

Vamos ilustrar os exemplos a seguir com esta rotação em particular.

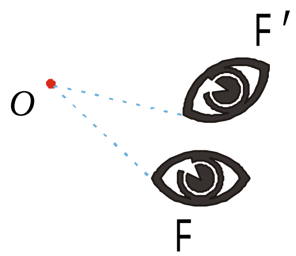
Olhando o desenho anterior, várias interpretações podem ser feitas, dependendo do grau de conhecimento do observador. Pode-se simplesmente ver um ângulo de 30^o de vértice O e lados $\overline{AO}$ e $\overline{A'O}$, de mesmo tamanho; pode-se imaginar um ponto que girou ao redor de O, da posição marcada por A até a posição marcada por A', no sentido horário ou no sentido anti-horário; podemos pensar no plano girando ao redor de O, isto é, todos os seus pontos (com exceção de O) giram ao redor de O, de 30^o no sentido anti-horário e o ponto A vai parar num outro ponto, que chamamos A'. Podemos até tentar representar esse "movimento" imaginário:



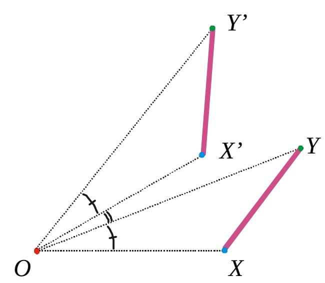
Uma rotação qualquer no plano **π** tem este plano como domínio e como conjunto de chegada. Essa rotação é uma função injetora, pois dois pontos diferentes têm imagens diferentes, e é sobrejetora, pois todo ponto é imagem de algum ponto (não é difícil demonstrar essas asserções usando argumentos geométricos). Em outras palavras, *R* é bijetora. Note que a imagem do ponto *O* é o próprio *O*, ou seja *R(O)* = *O* (dizemos que *O* é o ponto fixo da transformação). Sendo *R* bijetora, podemos afirmar que existe a aplicação inversa R^{-1}, de forma que para todo ponto imagem *A'* existe um ponto *A* objeto tal que $R^{-1}(A') = A$. No desenho ao lado, R^{-1} é a rotação que leva o ponto A' no ponto A. De acordo com nossa convenção, a medida do ângulo de rotação é -30^{o}.



Vamos considerar, agora, uma figura *F* em **π**. Sabemos que a imagem de um subconjunto do domínio é um subconjunto do conjunto de chegada. Ou seja, existe um conjunto $F' \subset \pi$ tal que *R(F)* = *F'*. As duas figuras se relacionam ponto a ponto, conforme sugere o desenho abaixo:



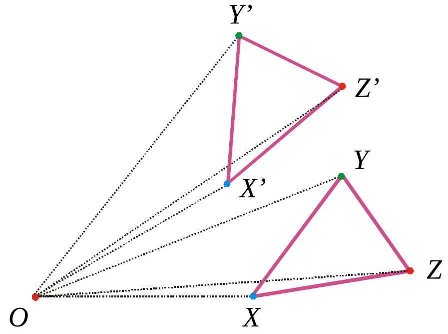
Aparentemente a figura original e sua imagem são congruentes. Usando argumentos da Geometria Euclidiana na abordagem tradicional, não é difícil provar que as duas figuras são realmente congruentes. Vamos fazer essa demonstração para o caso da rotação *R* considerada aqui (a demonstração para o caso geral é idêntica). De fato, se *X* e *Y* são dois pontos de **π**, então *X'* = *R(X)* e *Y'* = *R(Y)* são dois pontos de **π**. De acordo com a definição de rotação, temos *XO* = *X'O* e *YO* = *Y'O*.



Usando a mesma definição, temos também que $m(X\hat{O}X') = m(Y\hat{O}Y')$[1], logo $m(X\hat{O}Y) + m(Y\hat{O}X') = m(Y\hat{O}X') + m(X'\hat{O}Y') \Leftrightarrow X\hat{O}Y \cong X'\hat{O}Y'$. Utilizando o axioma LAL da congruência de triângulos, concluímos que $\Delta XOY \cong \Delta X'OY'$, ou seja,

$$XY = X'Y' \text{ ©}$$

o que significa que as distâncias entre pontos são preservadas na rotação.



Consideremos agora um terceiro ponto Z do plano π. Sendo $R(Z)=Z'$, pelo teorema demonstrado acima temos $XY = X'Y'$, $XZ = X'Z'$ e $YZ = Y'Z'$. Se os três são pontos distintos dois a dois, pelo axioma LLL de congruência de triângulos temos $\Delta XYZ \cong \Delta X'Y'Z'$, logo $X\hat{Z}Y \cong X'\hat{Y}'Z'$ ©

Isto significa que os ângulos são conservados na rotação.

Ora, dizer que distâncias e ângulos são elementos invariantes numa rotação significa dizer que tamanho e forma de figuras são invariantes. Em outras palavras, a figura original e a sua imagem na rotação são congruentes ou isométricas. Dizemos que a rotação é uma *isometria*.

Há quatro tipos básicos de transformações isométricas: a translação, a reflexão, a reflexão com deslizamento e a rotação. Como já foi dito, não iremos nos deter no estudo das três primeiras neste trabalho. Entretanto, para o leitor interessado em compreender como as transformações isométricas se relacionam com a teoria dos grupos para definir a Geometria Euclidiana, na visão de Felix Klein, em seu *Erlanger Programm* (1872), além das definições e propriedades de todas essas transformações, é necessário conhecer o conceito de grupo e, em particular, de grupos de transformações. É importante sublinhar que trabalho de Klein é muito abrangente, pois se constitui num princípio unificador de quase todas as geometrias. Entretanto, podemos ter uma compreensão inicial do princípio que fundamenta essas idéias

[1] Note que estamos falando em medidas algébricas de ângulos

trabalhando com a rotação, já definida e com o conceito de grupo, que apresentaremos em seguida.

Um grupo é um conjunto G não vazio de objetos *A*, *B*, *C*, ... para os quais os seguintes axiomas se verificam:

G1) Uma operação é definida em G de forma tal que todo par *(A,B)* de elementos de G é associado a um elemento *C* que também pertence a G. O elemento *C* é chamado *produto de A e B*; simbolicamente, escrevemos

$$C = A \circ B$$

G2) Existe um elemento *E* de G que satisfaz a relação

$$A \circ E = E \circ A = A$$

qualquer que seja $A \in$ G. Diz-se que *E* é o *elemento unidade* (ou *neutro*) do grupo.

G3) Para todo elemento *A* de G existe um elemento *inverso*, representado por A^{-1}, que satisfaz a relação

$$A \circ A^{-1} = A^{-1} \circ A = E$$

G4) A operação $\circ$ é *associativa*, ou seja,

$$(A \circ B) \circ C = A \circ (B \circ C)$$

Vamos considerar três exemplos de grupos, dois da Álgebra e o terceiro, da Geometria.

Exemplo 1. O leitor pode verificar facilmente que o conjunto *Z* dos números inteiros é um grupo com relação à operação de adição. Note que na definição de grupo, a palavra *produto* significa muito mais que a multiplicação de números; neste caso dos inteiros podemos dizer que, sendo $a, b \in Z$, a expressão $a \circ b$ significa o mesmo que $a + b$ e $-a$ significa o mesmo que a^{-1}. Neste grupo, o elemento unidade, mais conhecido como elemento neutro, é o zero.

Exemplo 2. Vamos considerar agora o conjunto A de todas as funções bijetoras do conjunto S ={1,2,3} em si próprio e a operação de composição de duas funções quaisquer em A. Temos A ={ {(1,1), (2,2),(3,3)}, {(1,1), (2,3), (3,2)}, {(1,2), (2,1), (3,3)}, {(1,2), (2,3), (3,1)}, {(1,3), (2,1), (3,2)}, {(1,3), (2,2), (3,1)}}. É fácil verificar que se *f*, *g*, *h* são funções de A , então

G1) $f \circ g \in$ A. De fato, para $x \in S$, temos $g(x) \in S$, logo $f \circ g(x) = f(g(x)) \in S$, ou seja, $f \circ g$ é uma função bijetora de *S* em *S*.

G2) existe $e \in$ A tal que $e \circ f = f \circ e = f$. Basta tomar e = {(1,1), (2,2),(3,3)}.

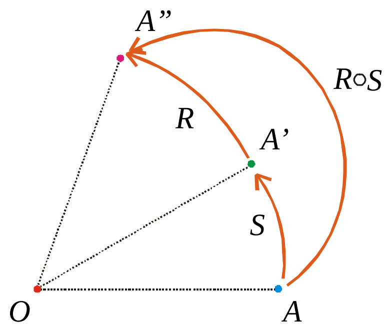
G3) todas as funções de A são bijetoras, logo são inversíveis e pertencem a A. Por exemplo, se f ={(1,1), (2,3), (3,2)}, então f^{-1}={(1,1), (3,2), (2,3)} $\in$ A e $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = e$ = {(1,1), (2,2),(3,3)}.

G4) $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$. De fato, para um ponto *x* qualquer de *S*, temos $(f \circ (g \circ h))(x) = f((g \circ h)(x)) = f(g(h(x)) = (f \circ g)(h(x)) = ((f \circ g) \circ h)(x)$

Exemplo 3. Não é difícil provar que as rotações em torno de um ponto fixo formam um grupo.

De fato, dadas as rotações R e S , de ângulos α e β, respectivamente, no sentido anti-horário, em torno do ponto O num mesmo plano, podemos ver que $R \circ S$ também é uma rotação em torno de O, de ângulo $\alpha + \beta$, no sentido anti-horário.

Vemos ao lado que $R \circ S(A) = R(S(A)) = R(A') = A''$.



Já vimos que qualquer rotação R de ângulo α em torno de O admite a inversa R^{-1} de ângulo -α em torno de O.

A rotação identidade pode ser vista como a rotação de 0^{o} ou outro múltiplo de 360^{o} .

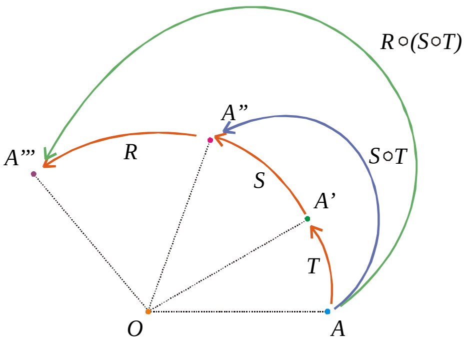
Vamos mostrar que vale também a propriedade associativa da composição para três rotações *R*, *S*, *T* em torno de O, no sentido anti-horário, ou seja, $R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T$.

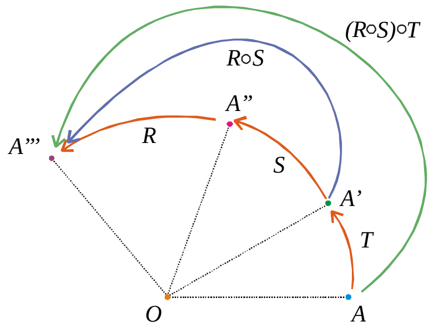
De fato, se A é um ponto do plano, temos

$(R \circ (S \circ T))(A) = (R(S \circ T)(A)) = R(S(T(A)))$ e

$((R \circ S) \circ T)(A) = (R \circ S(T(A)) = R(S(T(A)))$, logo $R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T$.

Se isto parecer muito abstrato, basta considerar os diagramas a seguir.Vemos, à esquerda, que $A'' = S \circ T(A)$ e que $R(A'') = A'''$, logo $R(S \circ T(A)) = R \circ (S \circ T)(A) = A'''$.





À direita, temos $A' = T(A)$ e que $R \circ S(A') = A'''$, logo $R \circ S(T(A)) = (R \circ S) \circ T(A) = A'''$.

Portanto, $R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T$.

O conjunto de todas as rotações não é um grupo, pois o produto de duas rotações pode não ser uma rotação. Entretanto, há outros exemplos de grupos de transformações: o das translações, o das translações e rotações, o das dilatações, das afinidades, etc. Na verdade, alguns desses grupos são subgrupos de outros. Por exemplo, o das translações é subgrupo do grupo das translações e reflexões centrais, que é subgrupo do grupo das translações e rotações. Se considerarmos as quatro transformações típicas que preservam a distância (translação, rotação, reflexão e reflexão com deslizamento), o conjunto de todas elas, munido da operação de composição das mesmas em número finito, é chamado *grupo das isometrias (*ou *dos movimentos rígidos),* na qual a distância é invariante (como já vimos, isto implica a constância da forma e do tamanho das figuras transformadas). No plano unificador de Klein, o que ele chama de Geometria Euclidiana é o estudo dos invariantes no grupo de isometrias, conforme já vimos. Se acrescentarmos ao conjunto das isometrias a transformação de ampliação ou redução de figuras, teremos o chamado grupo das semelhanças[1], que constitui o que nós convencionamos chamar aqui de Geometria Euclidiana (chamada *Geometria Parabólica*, no sistema de classificação das geometrias de Klein). Dependendo das transformações que definem o grupo, teremos diferentes tipos de geometrias (Euclidiana, Parabólica, Elíptica, Hiperbólica, Afim), em cada uma das quais algo é invariante.

O programa de Klein, resumidamente, consistia em traduzir os problemas geométricos das Geometria Projetiva em problemas algébricos da Teoria dos Invariantes, onde tais problemas poderiam ser resolvidos por métodos algébricos conhecidos (Greenberg, 1997).

É importante sublinhar que o Programa de Erlangen de codificação da Geometria manteve-se inalterado por mais de 50 anos, mas acabou mostrando-se inadequado após o advento das novas Geometrias que acompanharam a teoria da Relatividade Geral (1916). Isto não diminui a importância que estamos atribuindo a Klein neste estudo. Em nosso trabalho, de nível básico, não iremos trabalhar com as combinações de transformações que mostrariam como essas idéias teóricas poderiam ser utilizadas no ensino da Geometria em nível elementar. Mas achamos importante o leitor compreender, pelo menos superficialmente, como isso poderia ser feito.

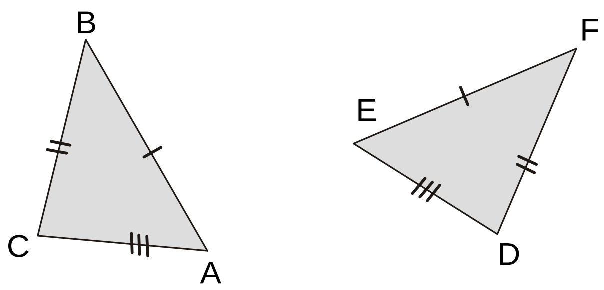
1.3.1 AS ISOMETRIAS E A CONGRUÊNCIA DE FIGURAS

Os chamados *critérios de congruência* para triângulos constituem um elegante conjunto de axiomas e teoremas fundamentais para a Geometria Euclidiana. Provavelmente, ninguém nega isso. Parece que a crítica dos educadores se refere ao fato de se abordar o assunto da maneira clássica: apresenta-se o LAL como axioma e se demonstram os demais casos, fazendo-se previamente uma definição formal de congruência baseada numa correspondência entre os vértices. Entretanto, substituir o axioma LAL e os outros teoremas de

[1] também chamado de grupo das dilatações. A homotetia é um caso particular de semelhança.

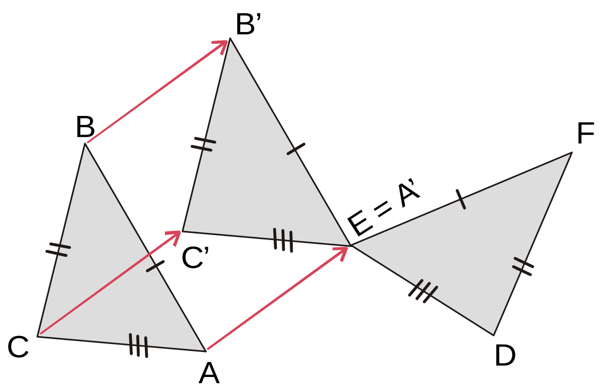
congruência por axiomas e teoremas envolvendo transformações não é uma tarefa tão simples. Greenberg (1997, pág. 358-362), por exemplo, mostra como os movimentos (isometrias) podem ser usados para definir congruências de figuras quaisquer, na chamada geometria neutra[1], onde se demonstra que uma figura *S* é congruente a uma figura *S'* se existe um movimento T que leva *S* em *S'*.

Por outro lado, não é difícil mostrar que são válidos os critérios de congruência através da composição de transformações. O procedimento clássico, a este respeito, consiste em aplicar reflexões, no máximo três. Mas podemos combinar outras transformações, como no exemplo a seguir. Vamos mostrar que vale o caso LLL de congruência de triângulos, por exemplo.



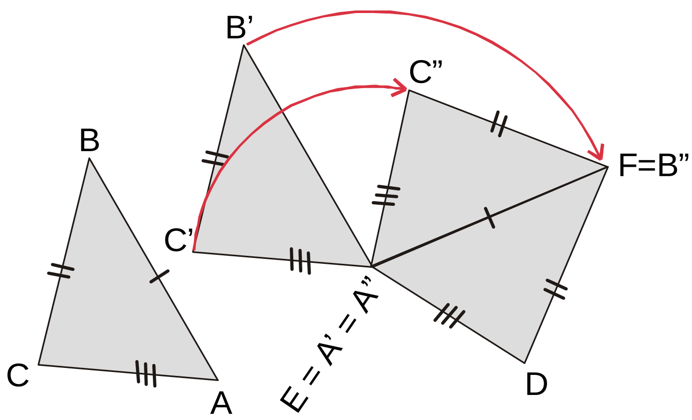
Dados os triângulos ABC e DEF, sabe-se que AB = EF, BC = FD e AC = ED (conforme indicações no desenho). Vamos demonstrar, usando transformações, que ΔABC ≅ ΔEFD.

Inicialmente, por uma translação, levamos o ponto A até o ponto E, o ponto B até o ponto B' e o ponto C até o ponto C' (a translação é sempre possível ; se A = E, a translação é a identidade).



[1] Geometria sem o axioma das paralelas

Em seguida, por uma rotação do triângulo ao redor de E, levamos B’ até F. Sabemos que essa rotação é possível, pois AB = A’B’= EF; vemos que C’ é levado até C”.



Finalmente, fazemos a reflexão do triângulo A”B”C” na reta *r* que contém o lado EF. Temos BC = B’C’ = B”C” = FD e AC = A’C’ = A”C” = ED, logo *r* é a mediatriz do segmento C”D , o que nos garante que o ponto C” será levado até o ponto D. Portanto, o triângulo A’’’B’’’C’’’, imagem desta reflexão, coincide com o triângulo EFD. Está demonstrado então que os triângulos ABC e EFD são congruentes (cuidado com a ordem dos vértices: o ponto B é levado, pelas três transformações, até o ponto F.)

1.3.2 CONSTRUÇÕES COM RÉGUA E COMPASSO

Por *Desenho Geométrico* costumeiramente entende-se uma parte da Geometria em que se resolvem problemas com o auxílio de dois instrumentos físicos: a régua e o compasso. Os problemas de Desenho Geométrico sempre exigem que se construa, com aqueles instrumentos, uma figura particular. Se levarmos em conta a tradição clássica, as construções somente poderão ser feitas com régua sem escala e compasso usual, sendo possíveis apenas as operações individuais, chamadas *operações fundamentais*, a seguir:

(1) dados dois pontos, pode-se desenhar a “reta” que passa por eles[1].

(2) dados dois pontos, podemos desenhar o segmento de reta que os une.

(3) dado um ponto e um segmento, podemos desenhar a circunferência como centro nesse ponto e raio igual à medida desse segmento.

(4) nos casos em que existem, as intersecções entre duas curvas (retas ou circunferências) estão sempre determinadas.

Combinando essas operações, resolvem-se graficamente inúmeros problemas geométricos. Entretanto, três problemas desafiaram os matemáticos por mais de 2000 anos. Usando somente os instrumentos e as regras estabelecidos acima, é possível:

(a) *duplicar o cubo*, ou seja, desenhar o lado do cubo cujo volume é o dobro do cubo cujo lado é um segmento dado?

(b) *trissectar um ângulo*, ou seja, dividir um ângulo qualquer em três partes iguais?

(c) *quadrar o círculo,* ou seja, construir um quadrado com a mesma área de um círculo dado?

A busca da solução para esses problemas é uma das mais fascinantes da história da Matemática e desemboca na Teoria de Galois. Para aqueles que consideram o Desenho Geométrico algo sem muito interesse, sugerimos a leitura do livro de C.R.Hadlock (1978), em que essa história é contada, de forma acessível. Apenas para satisfazer a curiosidade do leitor: nenhum desses três problemas pode ser resolvido com régua e compasso, usando somente aquelas 4 operações. Com dobraduras no papel, podemos resolver os dois primeiros, mas isso já é outra história!

Como no resto da Matemática, o Desenho Geométrico geralmente se afasta do rigor original, nos níveis de ensino mais básicos e incorpora práticas “profanas”. Por exemplo, é

[1] na verdade, desenhamos parte dessa reta; por isso, é permitido estendê-la tanto quanto quisermos e os meios materiais permitirem.

usual a utilização de transferidor para medir ângulos e régua para medir comprimentos nas atividades escolares. Se o objetivo original fosse estudar as questões teóricas mais avançadas envolvendo as construções geométricas, certamente esta prática se configuraria como uma “quebra de contrato”. Mas no Ensino Fundamental e, mesmo no Ensino Médio, não é possível atingirmos tal grau de rigor, o que justifica, por exemplo, a utilização experimental dos instrumentos de medida e construções aproximadas. Uma atividade bastante interessante com régua e compasso em termos experimentais está relacionada com a verificação dos chamados *casos de congruência* de triângulos: a partir de certos valores para lados e ângulos, os estudantes constroem triângulos que podem ser recortados e comparados, tendo-se um caso de congruência quando os triângulos construídos coincidirem (com a intervenção do professor nos casos de ambigüidade não descobertos pelos alunos).

As importantes propriedades geométricas subjacentes a essas atividades justificam a presença do Desenho Geométrico no estudo da Geometria, mesmo nas condições de experimentação mencionadas acima.

CAPÍTULO 2

2.1 – INTRODUÇÃO

Neste capítulo iremos apresentar o enfoque e aspectos do conteúdo do currículo de Matemática que contemplam o estudo das transformações geométricas no ensino dos 10 aos 17 anos em alguns países, para depois nos determos no caso do Brasil. Faremos, em função da disponibilidade dos dados, referências ocasionais a fatos relacionados com as reformas educionais desses países. Como as reformas têm alguma conexão com as pesquisas em Educação, iremos considerar alguns trabalhos de investigação em Educação Matemática a que tivemos acesso e que trazem informações pertinentes ao ensino e aprendizagem da rotação.

2.2 – AS TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS NO CURRÍCULO

Em vários países e em diferentes momentos foi tomada a decisão de incluir algumas transformações geométricas no currículo das escolas a partir dos dez anos de idade, em média. Vamos apresentar o caso da França, da Inglaterra e dos Estados Unidos.

2.2.1 – NA FRANÇA

Na França, segundo Jahn (1998), o assunto foi introduzido pela primeira vez em 1925 e existe toda uma história que culmina na reforma de 1985, quando os programas preconizavam o seguinte: no 6ème (10 anos), a primeira transformação sistematizada é a reflexão ortogonal, no 5ème (11anos) é estudada a reflexão central e no 4ème (12 anos) a translação (com vetor) e a rotação. Em 1998, transferiu-se a rotação para o 3ème (13 anos), quando também são ensinadas as composições de duas transformações quaisquer (exceto rotações). Os programas sugerem as seguintes estratégias de implementação dessa matéria:

- deve ser vista de forma pragmática, privilegiando-se as atividades experimentais: observação de desenhos e abordagens intuitivas;
- prosseguir visando o desenvolvimento de "imagens mentais adequadas" criadas a partir de problemas que exigem manipulação de desenhos e medidas (suporte material). A estratégia é trabalhar com muitas figuras, para que se evidenciem progressivamente as propriedades conservadas pela translação e a rotação, exploradas nos traçados.

Os programas oficiais fazem referência explícita às relações entre as transformações e as figuras planas mais comuns, em função das propriedades ou teoremas sobre as mesmas, bem como a utilização das transformações nas construções dessas figuras. Por exemplo, como usar a reflexão na reta para construir um triângulo isósceles, um quadrado, um losango; como usar a rotação para construir polígonos regulares; como o paralelogramo tem simetria central, suas diagonais se cruzam em seu ponto médio, etc. No nível "Collège", as transformações ensinadas são apenas as isometrias. Algumas delas são estudadas com mais detalhe, das quais nos deteremos apenas nas que dizem respeito a este trabalho:

- reflexões na reta
- translações
- reflexões centrais, com ênfase na questão de simetria: conservam-se as medidas (distâncias), alinhamento de pontos, ângulos, paralelismo de retas e suas imagens. Estão relacionadas particularmente com o estudo das propriedades dos paralelogramos, sem demonstrações, contudo.

Na verdade, as reflexões centrais são um caso particular das

- rotações, introduzidas no 3$^{\text{ème}}$, caracterizadas como transformações que deixam invariantes a forma e o tamanho das figuras rotacionadas.

Em particular, deve-se enfatizar que:

1. o alinhamento, os ângulos, as distâncias e as áreas se conservam;

2. reta é transformada em reta, segmento em segmento, preservando-se o ponto médio, círculo em círculo, objeto e imagem sempre congruentes;
3. a natureza do triângulo é conservada (triângulos isósceles, retângulos, equiláteros).

- composição de transformações

Jahn (1998) refere-se ao fato de que somente algumas propriedades da projeção são consideradas, o que é irônico se considerarmos a história da evolução do conceito da transformação. Além disso, os programas deixam claro que "Estas transformações não serão em nenhum momento apresentadas como aplicações do plano no plano. De acordo com a situação, serão vistas como uma ação sobre uma figura ou como uma ação que deixa a figura invariante" (Programe de 4ème, 1985, 1991, pág 51). Isto reflete os resultados de experiências anteriores fracassadas, em particular as tentativas de apresentar uma visão pontual das transformações no nível "Collège".

No Lycée, o ensino das transformações começa com o tratamento das homotetias, sob o nome de "cálculo vetorial", no 2ème. Não obstante estar ligada à geometria das figuras, a abordagem é diferente: agora se fala da geometria pontual, isto é, a transformação associa a todo ponto do plano um ponto determinado, sem contudo se precisar exatamente o que se deseja, segundo Jahn. No 1ème, o programa de 1996 define "rotação de centro O e de ângulo θ fixa O e associa a todo ponto M distinto de O o ponto M' tal que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'}$ e $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \theta$". Neste nível, são feitas composições de duas transformações calcadas em alguns exemplos básicos, incluindo-se o estudo da bijetividade e da transformação inversa. Nos terminais, somente alguns cursos (scientifique) estudam transformações: exploram-se então composições e seus efeitos sobre configurações, principalmente no caso de isometrias, deslocamentos e semelhanças diretas.

Como se vê, há uma grande ruptura na abordagem das transformações quando se passa do Collège para o Lycée, assunto estudado por Jahn na sua tese de doutorado.

2.2.2 – NA INGLATERRA

No Reino Unido, a introdução das transformações no currículo se concretizou há várias décadas. Mas também sofreu uma série de vicissitudes. Por exemplo, Willson, concluindo o capítulo 6 de seu livro *The Mathematics Curriculum – Geometry* (1977, p.19-21), escreve (minha tradução):

> Neste capítulo procuramos apresentar dois fortes argumentos a favor das transformações em Geometria. O primeiro ponto consiste na importância das transformações: deveriam ser vistas como absolutamente fundamentais na geometria escolar. O segundo ponto é que os autores dos atuais livros didáticos diferem largamente e em importantes caminhos no seu tratamento das transformações e é difícil achar algum que seja inteiramente satisfatório. Fizemos também algumas sugestões mais específicas. A primeira é que o cerne do trabalho em transformações na faixa dos 11-16 anos deveria ser proporcionado por uma discussão completa do grupo das isometrias do plano e os teoremas sobre isometrias deveriam ser aplicados para se obter teoremas sobre figuras.... Em segundo lugar, o estudo da semelhança deveria ser baseado no grupo das dilatações. Terceiramente, as transformações geométricas mais gerais – afinidades, perspectivas – deveriam ser tratadas somente de forma breve, quando surgissem em outros contextos, como o uso de matrizes, plano e elevação, desenhos de perspectiva. E por fim, um olhar mais genuíno nas transformações topológicas – em oposição à teoria dos grafos – vale a pena no nível da escola secundária.

Quinze anos depois, um grupo de 6 pesquisadores do CSMS (Hart, Brown, Küchemann, Kerslake, Ruddock, McCartney), sob a coordenação de Kathleen M.Hart, publicou o livro *Children´s Understanding of Mathematics: 11-16* (1981) onde se encontram os testes e suas análises, acompanhadas de conclusões, sobre a compreensão de vários temas de Matemática dos estudantes dos 11 aos 16 anos. No capítulo destinado às transformações de reflexão na reta e rotação, (a translação e dilatação se encontram no capítulo dedicado aos vetores e razões), Küchemann afirma que a principal razão que levou os educadores a introduzir as transformações geométricas na escola secundária foi a esperança de revitalizar o conteúdo e os métodos de ensino da Matemática. Entretanto, foram grandes as decepções, que eles atribuem à falta de convicção em muitas escolas e à relutância em abandonar os métodos tradicionais de ensino (cita como exemplo o fato de que apenas metade das escolas pesquisadas onde se estudava a reflexão usavam dobras em papel ou espelhos). O baixo apreço com que as transformações geométricas eram tidas se devia ao fato de que não foram introduzidas como um tópico com identidade própria, mas como um meio para atingir alguns fins discutíveis, como

- substituir a Geometria Euclidiana tradicional, que se acreditava inadequada para a maioria das crianças da escola secundária, mais pela forma como era ensinada, favorecendo a memorização sem significado das demonstrações, do que pelo seu conteúdo. De fato, a matéria era (e é) considerada muito importante, tanto pela elegância de sua estrutura matemática quanto pelo seu valor como legado cultural;
- estimular as crianças a descobrir as regras gerais que governam as composições de transformações, levando-as a descobertas sobre a estrutura da Matemática, em particular a de grupo. Ocorre que os currículos, mesmo os mais avançados, não chegavam a esse ponto, levando os professores e seus alunos a perseguir metas confusas e incompletas. Mais ainda: as dificuldades das crianças no trato com transformações simples já as predispunham contra qualquer tentativa de sofisticar o assunto, como é o caso das combinações (composições) das transformações. Lograva-se manejar, quando muito, casos muito elementares de composições;
- proporcionar uma relação coerente entre a geometria da transformação e a álgebra das matrizes, como exemplo da admirável unidade da Matemática. A maneira como as matrizes se aplicam na geometria das transformações é impressionante e mesmo mágica. Küchemann sublinha, entretanto, que é extremamente duvidoso que isso seja visto como significativo pela maioria das crianças do secundário;
- substituir à altura a perda de uma área considerada de alto status do conhecimento (a geometria dedutiva) por outra também considerada de alto status (como já vimos). Ocorre que esta se mostra igualmente impraticável no nível mais formalizado. Nas palavras dos autores (minha tradução):

> Esta preocupação em proteger o status da Matemática reflete o interesse profissional dos matemáticos que, através dos exames em particular, exercem um forte controle sobre a reforma do currículo. Infelizmente, esses interesses não coincidem necessariamente com aqueles das crianças que estudam o assunto.

Segundo eles, é recomendável estudar as transformações como um tópico independente, com o seu valor próprio, sem se sujeitar aos fins mencionados acima. Os autores emitem seu parecer com base em seu trabalho de pesquisa, a que nos referimos também em outras secções.

Podemos comprovar que o atual currículo na Inglaterra segue essas sugestões, incluindo o ensino das transformações em todos os anos de ensino obrigatório. O documento on line do QCA (Qualifications, Curriculum and Assessment) apresenta as seguintes recomendações com relação ao tema, que traduzimos a seguir:

Compreendento propriedades de posição e movimento

Os alunos deveriam ser ensinados a

1º estágio (5/6-6/7 anos)

a) observar, visualizar e descrever posições, direções e movimentos, usando palavras comuns;
b) reconhecer movimentos em linha reta (translações) e rotações, combinando-as em situações simples (por exemplo, dar instruções para ir à sala do diretor ou para girar um brinquedo programável);
c) reconhecer ângulos retos.

2º estágio (7/8-10/11 anos)

a) visualizar e descrever movimentos usando linguagem apropriada;
b) transformar objetos em situações práticas; transformar imagens usando ICT (Information and Communication Technology); visualizar e predizer a posição de uma forma resultante de uma rotação, reflexão ou translação;
c) identificar e desenhar formas bidimensionais com diferentes orientações em grades (quadriculados); localizar e desenhar formas usando coordenadas no primeiro quadrante e depois em todos os quatro quadrantes (por exemplo, usar coordenadas para localizar posições num jogo de computador);

Transformações (e coordenadas)[1]

Os alunos deveriam ser ensinados a

3º estágio (11/12-13/14 anos)

Especificando transformações

a) entender que as rotações são especificadas por um centro e um ângulo (anti-horário), usar ângulos retos, frações de uma volta ou graus para medir o ângulo de rotação; entender que as reflexões são especificadas por uma “reta espelho”[2], translações por uma distância e direção e dilatações por um centro e um fator de escala positivo;

---

[1] a parte de coordenadas não iremos apresentar
[2] mirror line

Propriedades das transformações

b) reconhecer e visualizar rotações, reflexões e translações, inclusive simetria de reflexão de formas bi e tridimensionais; transformar formas planas por translação, rotação e reflexão, reconhecendo que essas transformações preservam comprimento e ângulo, de forma que qualquer figura é congruente à sua imagem sob qualquer dessas transformações;
c) reconhecer, visualizar e construir dilatações de objetos usando fatores positivo de escala maiores que um, depois menores que um; compreender a partir daí que duas circunferências ou dois quadrados quaisquer são matematicamente semelhantes, o que, em geral, dois retângulos não são;
d) reconhecer que a dilatação preserva ângulo mas não comprimento; identificar o fator de dilatação como a razão entre os comprimentos de dois segmentos correspondentes quaisquer e aplicar isto em triângulos; entender as implicações da dilatação para o perímetro; usar e interpretar mapas e escalas de desenhos; entender as implicações da dilatação para a área e o volume.

4º estágio fundamental (14/15-15/16 anos)

Especificando transformações

a) (mesma redação do item a do 3º estágio, adicionada de:) rotacionar uma figura ao redor da origem ou outro ponto qualquer; (quanto à “reta-espelho”, mesma redação do item a do 3º estágio, acrescida de:) inicialmente usando uma reta paralela a um eixo, em seguida por retas como $y = x$ ou $y = -x$; compreender que as translações são determinadas por uma distância e uma direção e a dilatação, por um centro e um fator positivo.

Propriedades das transformações

b) (mesma redação do item b do 3º estágio)
c) (mesma redação do item c do 3º estágio)
d) (mesma redação do item d do 3º estágio acrescentada do texto a seguir); distinguir as fórmulas para perímetro, área e volume, considerando as dimensões; compreender e usar exemplos simples de relações das dilatações com áreas de figuras e com volumes de sólidos.

O 4º estágio fundamental é uma revisão do 3º estágio, acrescentada do método analítico (uso de coordenadas cartesianas). Ele é destinado aos alunos que não tiveram rendimento satisfatório no estágio 3.

4º estágio avançado (14/15-15/16 anos)

Especificando transformações

a) entender que as rotações são especificadas por um centro e um ângulo (anti-horário); usar qualquer ponto como centro de rotação; medir o ângulo de rotação usando ângulos retos, frações de uma volta ou graus para medir o ângulo de rotação; entender que as reflexões são especificadas por uma “reta espelho”; entender que as translações são determinadas dadas uma distância e uma direção (ou vetor) e dilatações são especificadas por um centro e um fator de escala positivo;

Propriedades das transformações

b) reconhecer e visualizar rotações, reflexões e translações, inclusive simetria de reflexão de formas bi e tridimensionais e simetria de rotação de formas planas; transformar triângulos e outras figuras planas por translação, rotação, reflexão e combinações dessas transformações; usar congruências para mostrar que translações, rotações e reflexões preservam comprimento e ângulo, de forma que qualquer figura é congruente à sua imagem sob quaisquer dessas transformações; distinguir propriedades que são preservadas sob transformações particulares;

c) reconhecer, visualizar e construir dilatações de objetos; compreender a partir disso que duas circunferências ou dois quadrados quaisquer são matematicamente semelhantes, enquanto que, em geral, dois retângulos não o são; usar fatores de escala fracionários positivos e negativos;
d) reconhecer que a dilatação preserva ângulo mas não comprimento; identificar o fator de dilatação como a razão entre os comprimentos de dois segmentos correspondentes quaisquer; entender as implicações da dilatação para o perímetro; usar e interpretar mapas e escalas de desenhos; compreender as diferenças entre as fórmulas para perímetro, área e volume considerando as dimensões;entender e usar os efeitos da dilatação para a área de figuras e o volume de sólidos.

Os conceitos tratados no nível avançado são os mesmos do nível básico, mas se exige a compreensão mais aprofundada dos mesmos.

Do ponto de vista do conteúdo matemático, a proposta se parece com a nossa; a diferença é que, nela, alguns conceitos recomendados para a faixa de 11-12 anos nós estamos propondo, em nosso estudo, para a faixa de 10-11 anos.

2.2.3 – NOS ESTADOS UNIDOS

Numa das páginas introdutórias do livro de I.M. Yagloom, *Geometric Transformations I* (1962), publicado pela NML (New Mathematical Library), os editores afirmam que esta foi fundada em 1961 pelo SMSG (School Mathematics Study Group) para "tornar acessível aos estudantes secundários pequenos livros expositórios em vários tópicos usualmente não compreendidos pelos programas da escola média", de onde se conclui que o assunto *transformações geométricas* não fazia parte do conteúdo programático do ensino secundário.

Nos Estados Unidos não há um currículo oficial nacional, em contraste com os dois países acima. Há bastante liberdade na definição dos currículos em cada distrito, embora a influência do NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) seja muito grande em todos eles.

Os *Principles and Standards for School Mathematics,* NCTM (2000), sugerem explicitamente o ensino das transformações geométricas na escola primária e secundária, conforme recomendações que traduzimos resumidamente a seguir.

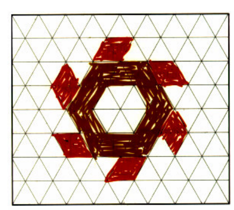
<u>Da pré-escola até o 2º ano</u>

Aplicar transformações e usar simetria para analisar situações matemáticas

Trata-se aqui do trabalho intuitivo do aluno com objetos e formas, ao deslizá-los (translações), girá-los (rotações) e virá-los 180º no espaço (reflexões). Estudantes trabalhando com programas de computador têm freqüentemente que usar algum movimento para resolver um quebra-cabeça. Essas ações exploratórias com transformações fazem parte da aprendizagem sobre o espaço e capacitam os estudantes a distinguir os movimentos e a prever os resultados das mudanças de posição ou orientação de um objeto, cuja forma e tamanho não mudam. Os professores devem envolver seus estudantes em tarefas acessíveis e suficientemente abertas, criando uma vasta gama de interesses que engajem as crianças. Por exemplo, ao construir pentaminos elas precisam decidir quais são distintos ou têm a mesma forma e os movimentos que levam um pentamino sobre outro representam as isometrias. Ao imaginar estratégias que levam a distinguir um pentamino de outro, o aluno estará formulando conceitos que envolvem tais transformações.

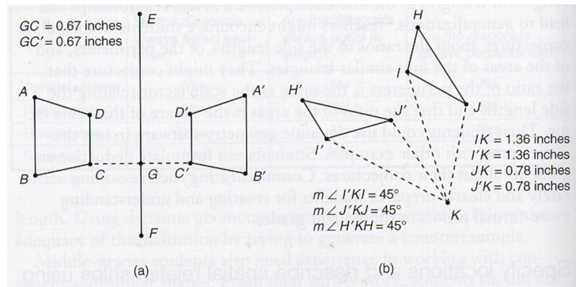
<u>do 3º ao 5º ano</u>

Os estudantes dessa faixa devem se conscientizar de três importantes tipos de transformação: reflexões, translações e rotações ("flips, slides" e "turns", respectivamente). Estudantes mais jovens geralmente "provam" (convencem-se) que duas formas formas são congruentes encaixando fisicamente uma sobre a outra, mas os estudantes dos graus 3-5 podem desenvolver uma maior precisão ("gire-o 90º" ou "rebata-o verticalmente, em seguida rotacione-o 180º"). Os estudantes devem ser capazes de visualizar o que vai acontecer quando uma forma é rotacionada ou refletida e predizer o resultado. Eles devem explorar formas com mais de um eixo de simetria. Por exemplo, "De quantas maneiras você pode colocar um espelho num quadrado de forma que o você vê seja exatamente o quadrado original?", "Isso é verdadeiro para todos os quadrados?", "Você pode fazer um quadrilátero com exatamente duas retas de simetria?", "Uma linha de simetria?", "Nenhuma reta de simetria?", "Caso você possa, que tipo de quadrilátero é?". Embora os estudantes mais jovens sejam capazes de criar figuras com simetria rotacional, eles sentem dificuldade em descrever a regularidade que vêem. Os estudantes 3-5 deveriam usar a linguagem sobre giros e ângulos para descrever desenhos, feitos por exemplo em papéis com grade triangular ou com blocos de padrões. Devem ser capazes de dizer, por exemplo, a respeito da figura ao lado, que "Se você girar 180º ao redor do centro, vai dar exatamente a mesma coisa" ou " Seriam necessários seis pequenos giros iguais para voltar ao ponto de onde você começou, mas você não pode dizer onde você começou, a não ser que você faça uma marca, porque o desenho parece o mesmo cada vez que você dá um desses giros".



<u>do 6º ao 8º ano</u>

A geometria transformacional oferece novas lentes através das quais se investigam e se interpretam objetos geométricos. Para ajudar a formar imagens de objetos através de diferentes transformações, os estudantes podem usar objetos físicos, figuras traçadas em papel de seda, espelhos ou outras superfícies refletoras, figuras desenhadas em papéis gráficos e softwares de geometria dinâmica. Da experiência trazida do nível anterior, os estudantes sabem que as transformações produzem figuras congruentes (às originais): agora, comparando posições, comprimentos dos lados e ângulos das figuras originais com as figuras resultantes, os estudantes poderão obter novos insights sobre a congruência, como por exemplo o fato de a congruência não depender de posições ou orientações, conforme ilustrado acima.



As transformações podem se tornar objetos de estudo por direito: os professores podem pedir para os estudantes visualizarem e descrever as relações entre linhas de reflexão, centros de rotação e as posições das imagens e pré-imagens. Usando softwares de geometria dinâmica, os alunos podem ver que cada ponto na reflexão está à mesma distância da reta de reflexão que sua pré-imagem, conforme mostrado acima. Na rotação ilustrada acima, os estudantes vêem que os vértices na pré-imagem e seus correspondentes na imagem estão à mesma distância do centro de rotação e que os ângulos formados ao se conectar o centro de rotação com correspondentes pares de vértices são congruentes.

Outros desafios podem ser propostos, como por exemplo, pares de figuras em que se pede para identificar a transformação que leva uma noutra, os parâmetros dessas transformações, etc. Além disso, os professores podem propor situações em que as transformações são compostas e a prever resultados como por exemplo o de que duas reflexões resultam uma translação (retas de reflexão paralelas) ou uma rotação (retas de reflexão concorrentes).

As transformações devem ser usadas também para os estudantes entenderem a semelhança e a simetria e devem ser encorajados a formular pequenas provas usando as transformações como ferramentas (por exemplo, provar que os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes, usando reflexão).

do 9º ao 12º ano

No secundário, os estudantes aprenderão a representar as transformações vistas nas séries anteriores (reflexões, translações, rotações, dilatações) através de matrizes, explorando as propriedades das transformações no papel gráfico e no computador. O aluno, a partir de situações simples, como reflexões nas retas $y = x$ ou $y = -x$ ou rotações ao redor da origem em múltiplos de 90°, descobririam como representar essas transformações através de matrizes, conforme ilustra o exemplo a seguir, onde o aluno deve desenhar um triângulo dados seus vértices, refleti-lo em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares e desenhar a imagem dessa reflexão. Ele deve determinar a matriz quadrada de ordem 2 que multiplicada pela matriz 2×3 formada pelas coordenadas dos vértices do triângulo original, seja igual à matriz 2×3 formada pelas coordenadas do triângulo imagem, ou seja, achar P, Q, R e S tal que

$$\begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & -4 & -8 \\ 1 & 7 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ -5 & -4 & -8 \end{bmatrix}$$

Temos $M = \begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Alternativamente, eles poderiam perceber que devem achar uma matriz *M*, tal $M \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$ e explorar várias possibilidades, observando que $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$.

Os alunos deveriam compreender também que as transformações têm muitas aplicações práticas.

Observamos, na proposta acima, uma ênfase bastante marcante com relação à utilização de manipulativos, característica presente nos *Principles and Standards* para todos os temas de Matemática. Neste ponto, a proposta apresenta elementos interessantes para nossa investigação. Entretanto, não está claro o nível de formalização que poderia ser exigido dos alunos na faixa etária dos 10-11 anos, que é a que nos interessa em nosso estudo.

2.3 – O ESTUDO DAS TRANSFORMAÇÕES NAS ESCOLAS BRASILEIRAS

No Brasil, como no resto do mundo, as reformas de ensino nas escolas de nível fundamental e médio são reguladas pelos órgãos governamentais, que definem ou sugerem os conteúdos curriculares adotados pelos livros didáticos e paradidáticos, sistemas didáticos e planos escolares; isso não evita o movimento inverso, quando publicações, congressos, conferências, workshops, ao divulgar resultados de pesquisas em Educação e inovações introduzidas por escolas pioneiras, às vezes inspiradas pela iniciativa de algumas universidades, acabam por influenciar os próprios órgãos que regulam o sistema educacional.

Ao longo dos anos houve várias referências ao assunto *transformações geométricas* nos documentos divulgados por órgãos governamentais municipais e estaduais de diversas origens. Evitando digressões históricas, vamos enfocar apenas os documentos mais recentes e de maior abrangência, os chamados *Parâmetros Curriculares Nacionais*, publicados pelo MEC/SEF, em 1998.

Como já deixamos claro, estamos sublinhando apenas as referências ao assunto que ora nos interessa, ou seja, as transformações isométricas e, em particular, a rotação. Nos PCNs correspondentes ao Ensino Fundamental, 3º e 4º ciclos (antigas 5ª a 8ª séries), encontramos a referência explícita ao assunto. Para o 3º ciclo (5ª e 6ª séries), em *Conceitos e Procedimentos*, na secção "Espaço e Forma", página 73, como parte dos conteúdos propostos temos:

- Transformação de uma figura no plano por meio de reflexões, translações e rotações e identificação de medidas que permanecem invariantes nessas transformações (medidas dos lados, dos ângulos, da superfície).

- Ampliação e redução de figuras planas segundo uma razão e identificação dos elementos que não se alteram (medidas dos ângulos) e dos que se modificam (medidas dos lados, do perímetro e da área).

Para o 4º ciclo (7ª e 8ª séries), propõe-se:

- Desenvolvimento do conceito de congruências de figuras planas a partir de transformações (reflexões em retas, translações, rotações e composições destas), identificando as medidas invariantes (dos lados, dos ângulos, da superfície).

- Desenvolvimento da noção de semelhança de figuras planas a partir de ampliações ou reduções, identificando as medidas que não se alteram (ângulos) e as que se modificam (dos lados, da superfície e perímetro).

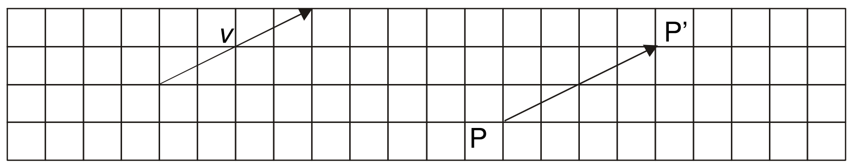
Pela leitura dos PCNs, inferimos que a abordagem sugerida seria a utilização das transformações como ferramentas para o estudo das propriedades das figuras geométricas planas. Mesmo assim, parece-nos, as isometrias teriam tratamento intuitivo e menos formal, sem qualquer referência ao fato de que poderiam ser definidas como funções do plano no plano. Isso se explica possivelmente pelo fato de que as funções não são estudadas explicitamente nessas séries.

Como os livros didáticos e paradidáticos fundamentam-se nos PCNs, é de se esperar que as próximas edições apresentem as transformações, pois atualmente em todos eles, salvo exceções que iremos comentar, não há um enfoque consistente do assunto. Algumas iniciativas isoladas podem ser apontadas. Por exemplo, no livro *As Transformações Geométricas e o Ensino de Geometria* (Catunda, Dantas, Nogueira, Souza e Guimarães, 1990), de acordo com seus autores, faz-se uma "apresentação da Geometria através das transformações" destinada a alunos da 7ª e 8ª séries (4º ciclo do atual Ensino Fundamental). O livro é composto de 55 fichas de atividades que cobrem a programação usual de Geometria para as séries mencionadas e se destina aos professores. Em cada ficha, segundo os autores, pretende-se que o aluno aprenda alguma definição, regra ou propriedade, de preferência como "redescoberta por indução". Várias fichas apresentam área quadriculada, para construção de desenhos com auxílio da régua; outras fichas demandam construções com régua e compasso. Não há referência a outros materiais "concretos". No prefácio lemos que:

> O livro começa com uma breve introdução de geometria afim de duas dimensões, baseada na idéia de vetor – que representa o conceito intuitivo de translação – acompanhada das noções de simetria axial e de multiplicação escalar, exploradas até a introdução das figuras planas elementares: triângulo, paralelogramo e trapézio. A geometria euclidiana plana é introduzida a partir da simetria axial que permite definir a ortogonalidade, a medida de ângulos, assim como a noção de distância. Segue-se o estudo das propriedades métricas dos triângulos, do círculo e suas aplicações. Com este livro, os autores põem o ensino da geometria, no Brasil, numa das linhas que vêm sendo mais trabalhadas no mundo...

Infelizmente não tivemos acesso aos resultados dessa abordagem, o que impossibilita avaliar os resultados do projeto como um todo. Os autores afirmam que nem sempre foi possível levar os alunos à redescoberta, dada a exigüidade do tempo disponível, obrigando muitas vezes os professores envolvidos no experimento a expor, em vez de inquirir. A nosso ver, examinando o material, achamos que a necessidade de intervenção dos professores se deve também à complexidade do material, no que tange a alguns conceitos mais abstratos e à linguagem simbólica. Por exemplo, na primeira ficha de atividades (p. 21), envolvendo translações, os itens 3 e 4 são assim apresentados:

3. Considere, no plano, um ponto P e um vetor *v*. A translação do vetor *v* leva P em P'.



O ponto P' é, também, chamado *soma* do ponto P com o vetor *v*. Pode-se escrever

P' = P + v

Assim, fica definida, no plano, *a soma de um ponto com um vetor, que é um ponto*.

4.Considere, agora, dois pontos do plano, Q e Q':

Ligue o ponto Q ao ponto Q' e indique por *v* o vetor da translação que leva Q em Q'.
Assim, dados pontos quaisquer do plano, Q e Q', fica determinado um vetor *v* que pode ser indicado por

v = $\overrightarrow{QQ}$ ou v = Q' – Q.

Deste modo, fica definida, no plano, *a diferença de dois pontos que é um vetor*.

É oportuno acrescentar que o tratamento dado às transformações, como relações entre figuras globais, em nenhuma parte do projeto encaminha o estudante para a concepção das mesmas como funções do plano no plano, onde as figuras são conjuntos de pontos desse plano. Além disso, foram privilegiadas as transformações de translação e homotetia, dando ao projeto o aspecto de um enfoque mais vetorial que transformacional (mais parecido com a terceira abordagem da Geometria, vista no capítulo 1). Com exceção da parte introdutória, o livro se aproxima da apresentação tradicional da Geometria Euclidiana.

Vamos considerar agora, de forma resumida, os livros didáticos de maior difusão, encontrados nas livrarias de São Paulo. Numa das coleções de livros de 5ª a 8ª séries mais conhecidas, *Matemática* (Imenes e Lellis, 1997), há referências, umas mais e outras menos explícitas, aos conceitos das transformações em Geometria. Por exemplo, no volume da 5ª série, os ângulos de 90º, 180º e 360º são "giros" de uma régua ao redor de uma de sua extremidades (p. 28) – mas não se trata da apresentação da rotação como transformação, pois as ilustrações pretendem reproduzir simplesmente o movimento da régua. Em outra parte desse mesmo volume (p. 32), são usados os ponteiros de relógios para representar ângulos estáticos ou deslocamentos angulares, mas sem referência ao movimento de rotação. No capítulo 4, dedicado a construções geométricas em papel quadriculado, o texto fala em "figuras transformadas"(por dilatações de várias espécies), mas a atividade é apenas decorativa, artisticamente falando (pp.102-104). Neste livro, o capítulo 7 é destinado à simetria axial; a abordagem é intuitiva, com recurso a dobras e corte de papel, papel quadriculado, ilustrações com espelhos, imagens de objetos físicos, etc (pp.180-184). O único conceito de transformação explorado aqui, sem nenhuma formalização, é o de eixo de simetria de algumas figuras geométricas ou figuras simétricas representando objetos físicos. No livro da 6ª série retoma-se o exemplo dos ponteiros do relógio (p. 61) e se menciona a simetria ortogonal (pontos simétricos, duas figuras simétricas, eixos de simetria) (pp. 173-178); utiliza-se também técnica de ampliação de desenho baseada na homotetia (pp. 179-183); mas em nenhuma dessas situações se explicita a presença das transformações geométricas. No livro de 7ª série, no capítulo 4, de construções geométricas, ensina-se a construir duas figuras com simetria axial e central, mencionando-se dois tipos de rotação: de 180º, no plano e no espaço (pp. 68-70). Há uma breve referência à homotetia, sem mencioná-la explicitamente como processo de obtenção de figuras semelhantes (p. 256). No fim do livro, há uma secção destinada à perspectiva (pp. 266-272), mas não há referência ao conceito de transformação. No livro de 8ª série, estão subentendidas algumas noções ligadas às transformações (pp.13-14) e, no capítulo das construções geométricas (cap. 12), é apresentada a simetria de rotação e a identificação da simetria central com a simetria da rotação de 180º; faz-se referência à propriedade do paralelogramo de apresentar simetria central e retoma-se a questão da simetria axial para demonstrar que os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes (p. 257). Há algumas atividades de construção de figuras simétricas, incluindo-se uma rápida referência à translação (pp. 258-260).

Em linhas gerais, concluímos que não há um tratamento da transformação nessa coleção de livros, mas apenas um enfoque de alguns tipos de simetria, trabalhados com atividades de reconhecimento e construção de figuras simétricas que não exploram o real conhecimento do que fundamenta essas atividades. Não se trata nem de usar as transformações como ferramentas para o estudo de propriedades geométricas das figuras nem de enfocar a Geometria fundamentada nas transformações geométricas (em qualquer grau de extensão).

Na coleção didática, de 5ª a 8ª séries, denominada *Matemática – Uma aventura do pensamento* (Guelli, 1997), encontramos no livro da 7ª série uma referência à simetria axial e algumas atividades enfocando a reta de simetria (pp.152-155). Nesse volume, no começo do estudo da congruência de triângulos (p.156), recorre-se à idéia de movimento do desenho, que apesar de representar uma figura geométrica, é visto como objeto físico ("podemos recortar a figura, ..., colocar sobre ..."). A congruência é verificada com ações de recortar e movimentar. Nada mais encontramos nessa coleção que pudesse ser relacionado às transformações geométricas.

Examinando também a coleção de 5ª a 8ª séries *Matemática e Realidade* (Iezzi et al, 1997), também de penetração nacional, não localizamos tratamentos significativos de transformações geométricas.

No entanto, para se fazer conclusões gerais, seria necessário um trabalho exaustivo de análise das publicações didáticas em todo o território nacional, tarefa que se afasta muito de nossas metas e disponibilidades no momento.

Além disso, nossa investigação de livros didáticos ou paradidáticos não se estendeu nem aos 1º e 2º ciclos do Ensino Fundamental. Por isso, são importantes as informações de Mabuchi (2000), a respeito dessas séries:

> Nos livros didáticos analisados, a partir da 2ª série são feitas as primeiras observações sobre a simetria de objetos do cotidianos dos alunos, usando a analogia da imagem no espelho. Atividades com dobras no papel, com e sem quadriculado, estimulam a localização da imagem de figuras pela reflexão em reta. Os alunos são estimulados a perceber a simetria no seu mundo, a investigar eixos de simetria em objetos e a desenvolver o senso estético e de organização, observando diversas configurações simétricas. Nas 3ª e 4ª séries, usando malhas diversas, são exploradas idéias de ampliação e redução de figuras. Não há muitas diferenças na abordagem das transformações geométricas (que se limitam apenas a reflexões em reta) entre os livros didáticos observados (p. 101).

Entre algumas das coleções didáticas mais conhecidas voltadas para o Ensino Médio (Iezzi, Dolce e Machado;Youssef e Fernandez; Iezzi, Dolce, Teixeira, Machado N.J., Goulart, Castro, Machado A.S.) não existe abordagem da Geometria por transformações nem estudo de propriedades das figuras ou resolução de problemas utilizando as transformações como ferramentas; também não existe o estudo das transformações como objetos matemáticos. Entretanto, idéias que se fundamentam na teoria das transformações se manifestam esparsamente pelos assuntos tradicionalmente estudados nessas séries. Por exemplo, a simetria é usada livremente, sem conceituação precisa, em várias partes, como a Geometria, a Geometria Analítica, a Álgebra e a Trigonometria: fala-se em eixos de simetria de figuras geométricas, diz-se com naturalidade que funções pares têm gráficos com simetria axial em Oy, funções ímpares têm gráficos com simetria na origem; pede-se para o aluno "memorizar" as propriedades de simetria das funções circulares; estudam-se matrizes simétricas, etc. As rotações são usadas em Trigonometria e nos movimentos circulares em Física.

O vestibular (exame de ingresso nas universidades), como fator gerador de reformas no conteúdo trabalhado nas escolas de nível médio, não tem exigido o estudo das transformações; tampouco o têm exigido outros instrumentos de avaliação do Ensino Médio, como o ENEM (Exame Nacional de Ensino Médio). Podem-se apontar exceções, como o exame de ingresso da UFBA, que inclui no conteúdo programático exigido : "Transformações Geométricas: noções de translação, rotação, simetria, homotetia", certamente muito pouco se levarmos em conta a atual proposta para o Ensino Fundamental. Não há dúvidas de que se o vestibular ou outros instrumentos de seleção e avaliação de ingresso nas universidades exigirem conhecimentos mais aprofundados em transformações, isso apressará a implementação do estudo das mesmas nas últimas séries do Ensino Fundamental, conforme recomendado pelos PCNs.

2.4 – AS TRANSFORMAÇÕES E AS PESQUISAS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Com a convicção de que as pesquisas desenvolvidas no campo da Educação Matemática possam ter realmente influência nas reformas e inovações no ensino e aprendizagem da Matemática e, em particular da Geometria, lançamo-nos a uma revisão da literatura ao nosso alcance e deliberadamente circunscrita ao âmbito de nosso estudo. Inicialmente selecionamos estudos, alguns já clássicos, envolvendo transformações geométricas de uma forma geral; depois procuramos localizar investigações que fizessem referência à faixa de escolaridade que nos interessa (Ensino Fundamental) e com o recorte que fizemos (ensino e aprendizagem da rotação no plano).

2.4.1 – RESULTADOS E CONCLUSÕES DE ALGUMA PESQUISAS

Entre os trabalhos de pesquisa realizados no exterior, encontramos alguns envolvendo transformações, mas ou se dedicam basicamente à transformação de reflexão ortogonal, em geral com enfoque na questão da simetria (Grenier,1985,1989;Gutierrez e Pastor,1987), ou às transformações no ambiente do computador, algumas vezes com destaque para uma dada transformação (Jahn, 1999; Graf e Hodson, 1998; Malara,1997; Hoyles e Healy, 1997; Edward e Zazkis, 1993).

A maior referência a rotações que encontramos deve-se ao trabalho já mencionado, realizado por Küchemann (1981), citado muito freqüentemente nos trabalhos ulteriores de pesquisa em Educação Matemática. Como é obra extremamente conhecida, limitaremos nosso enfoque somente nos resultados mais importantes relacionados com o objeto de nosso estudo, ou seja, a rotação simples, isto é, não composta com outras transformações. As questões do teste aplicadas aos sujeitos de pesquisa, cujas idades variavam dos 13 aos 15 anos, envolvendo rotações simples, consistiam de construções a mão livre ou da análise visual de configurações (algumas corretas, outras não), em rotações de 90° no sentido anti-horário. As figuras em sua maioria eram bandeiras simplificadas. As ilustrações eram apresentadas alternadamente em papel liso e quadriculado. Entre os resultados e conclusões mais relevantes apresentados pela autora, estão os seguintes:

- índice de sucesso nas tarefas depende bastante da posição do centro de rotação e da inclinação do objeto e menos do fato de o papel ser quadriculado ou não;
- em geral, os alunos acharam mais fácil determinar a inclinação correta da imagem do que localizar sua posição corretamente;
- papel quadriculado não facilitou necessariamente a resolução dos itens, ao contrário do que ocorreu na reflexão; parece que a grade encorajou as crianças a colocar a imagem "simetricamente" em relação ao centro de rotação (o pé da bandeira não girou 90°, como deveria ser);
- no reconhecimento do centro de rotação, dadas a figura geradora e a imagem, muitos alunos perceberam não ser centro quando as distâncias do mesmo aos pés eram diferentes, mas não o perceberam quando eram iguais mas o ângulo estava incorreto.

Como implicações para o ensino, a autora sugere que (nossa tradução):

> ...já que as transformações podem ser definidas em termos de ações (dobrando e girando) e seus resultados podem ser apresentados de uma forma direta por desenhos, isto significa que o tópico é ideal para uma abordagem prática e investigativa. As ações e representações são ambas altamente intuitivas, logo deveria ser possível desenvolver tal abordagem de formas que fossem significativas para a maioria das crianças. As transformações podem ser internalizadas em passos graduais, focalizando-se primeiro nas próprias ações, depois em suas representações e finalmente na representação de ações imaginadas (Küchemann, 1981, p.157).

No Brasil, encontramos trabalhos de pesquisas relacionados com o ensino de transformações, com ressalvas semelhantes às dos pesquisadores estrangeiros. A ênfase é dada para a questão de simetria (Araújo, 2000; Mabuchi, 2000), o ambiente é o do computador (Araújo, 2000). Como a rotação foi privilegiada num desses trabalhos, onde o autor afirma, no resumo, que:

> ... esta pesquisa tem como objetivo construir uma seqüência de atividades para identificar os efeitos didáticos decorrentes do emprego do Cabri-Géomètre como instrumento para aquisição dos conceitos de rotação de figuras planas em torno de um ponto e de simetria rotacional de figuras planas. (Araújo, 2000)

julgamos conveniente considerar os resultados obtidos por esse pesquisador.

A pesquisa foi desenvolvida junto a alunos da 6ª série e entre as conclusões mais relevantes para o nosso trabalho, apresentadas pelo autor, destacamos:

- nas questões do pré-teste, as maiores dificuldades dizem respeito aos desenhos de figuras, que o autor atribui ao maior número de variáveis envolvidas e a falta de habilidade no uso dos instrumentos;
- nas construções das imagens por rotação, os maiores erros se dão quando o centro de rotação está fora da figura, piorando quando "o centro está localizado numa posição deslocada de qualquer prolongamento (segmento de reta imaginário) que o liga, ao menos, a um par de pontos correspondentes" (Araújo, 2000, p. 92), fatos que o autor reconhece já constatados por Küchemann (1981).
- não há observação da congruência da imagem com a figura original, nas questões que exigem o desenho da imagem. A esse respeito, é oportuna a referência a seguir, que mostra que essa questão da conservação da forma pelos estudantes provoca alguma controvérsia, como a apresentada em nossa tradução a seguir:

  > As transformações usadas eram rotações, reflexões e translações. As crianças tinham que comparar o comprimento de um lado específico do triângulo antes e depois de um particular movimento, dizendo se era "mais curto", "mais comprido" ou "do mesmo comprimento" que antes. (Tomou-se o cuidado de se garantir que as crianças estivessem completamente familiarizadas com este vocabulário antes de o teste começar). Thomas descobriu que o fator crucial para o reconhecimento da invariância do comprimento do lado específico do triângulo transformado era a habilidade para conservar o comprimento no sentido piagetiano clássico. Esta descoberta também confirmada num estudo feito por Kidder – veja página 58. *A maioria dos estudantes* de Thomas considerou o comprimento invariante nas rotações e reflexões, mas para as translações os não-conservadores consideraram os lados de uma figura geométrica como coisas que haviam mudado. (Dickinson, 1984, p. 54)

- as dificuldades com o conceito de rotação equivalem às dificuldades com o conceito de simetria rotacional;

- as atividades envolvendo a descoberta do centro de rotação em simetrias tiveram baixo desempenho;
- nem sempre as propriedades observadas nas configurações eram utilizadas na resolução dos problemas.

2.4.2 – ASPECTOS DISTINTIVOS DO PRESENTE TRABALHO

Reconhecemos que nossa investigação compreende vários fatos, eventos e conclusões comuns aos estudos precedentes, mas acreditamos que difere dos mesmos em muitos aspectos. No que diz respeito aos sujeitos de pesquisa, os nossos são mais jovens que a maioria dos sujeitos dessas outras pesquisas. Trabalhamos com estudantes da 5ª série de uma escola onde a uniformidade das idades por série é uma questão institucional: todos eles tinham idades entre 10 e 11 anos, ao contrário dos outros sujeitos, em geral mais velhos e em níveis superiores de escolaridade. Mabuchi (2000), por exemplo, trata predominantemente com professores.

Com relação ao conteúdo focalizado, cingimo-nos somente à rotação no plano, sem nos prender à questão da simetria. Por exemplo, Küchemann (1981) trata de simetrias ortogonais e rotações no mesmo trabalho de análise e Araújo (2000) trata basicamente da questão da simetria rotacional.

Os trabalhos citados tratam as propriedades decorrentes da definição de rotação como dados intrínsecos da transformação; nossa abordagem trata separadamente cada um desses parâmetros (sentido da rotação, medida do ângulo de rotação, localização do centro de rotação e congruência), onde isso pode e deve ser isolado.

Nos trabalhos consultados, o parâmetro *sentido de rotação* é praticamente ignorado, na medida em que não se consideram as duas possibilidades, dando a impressão de que é um aspecto irrelevante da transformação.

O parâmetro *magnitude da rotação* (ou medida absoluta do ângulo de rotação) é grandemente explorado em nosso trabalho, enquanto que Küchemann (1981), por exemplo, usa somente rotação de 90^o .

Em nossa investigação, desde o início, introduzimos a terminologia que predispõe para a concepção de rotação como função: desde o início das atividades se destaca a figura inicial, sobre a qual atua a rotação, denominada *original* tanto quanto o resultado da rotação, que é a figura chamada *imagem*. Na nossa opinião, assim que se supera a intuição e a concepção da rotação como deslocamento de objeto físico, surge a necessidade epistemológica de justificar a existência simultânea de duas figuras congruentes que se relacionam de alguma maneira, quando representamos com desenho uma rotação dada. Essa "maneira" seria um movimento imaginário, no caso uma rotação, capaz de levar a figura original a coincidir com a figura imagem. Obviamente a compreensão profunda do significado dessas palavras somente virá com o estudo das funções, onde fica claro o que se entende por imagem de um conjunto.

O parâmetro *centro de rotação* é tratado num grande número de situações, desde a compreensão do seu papel numa rotação até o desenvolvimento de estratégias que levam à sua determinação. Particularmente, essa atividade envolve a compreensão de vários conceitos geométricos: mediatriz de um segmento como o lugar geométrico de pontos equidistantes dos extremos do segmento, mediatriz como a reta perpendicular ao segmento pelo seu ponto médio, a heurística da resolução de problemas envolvendo lugares geométricos como a busca dos pontos de intersecção desses lugares, etc.

Com relação ao ambiente em que foram desenvolvidas as atividades dos sujeitos e quanto aos instrumentos e ferramentas utilizados, não foi utilizado o computador, como fizeram vários dos pesquisadores já mencionados, e nem o papel quadriculado, também largamente empregado nas pesquisas já arroladas. Desenvolvemos um dispositivo físico especial para nosso estudo (que iremos descrever com detalhes), dadas nossas necessidades específicas. Em nosso estudo, um dos grupos de sujeitos utilizou sistematicamente instrumentos de Desenho Geométrico enquanto o outro utilizou o que denominamos *material alternativo*, tendo-se como pressuposto que o primeiro grupo teria privilegiada a concepção semi-pontual da rotação, enquanto que para o segundo teria primazia a concepção global da rotação (no primeiro caso, as figuras seriam vistas como determinadas por alguns pontos, enquanto que no segundo não seriam vistas como conjuntos de pontos, segundo Jahn, 1998, pp.26; 57; 81); essa comparação não encontra precedentes nas pesquisas citadas. Para o primeiro grupo, o procedimento se fundamenta nas operações clássicas com régua e compasso, envolvendo a compreensão de conceitos básicos, como o traçado de perpendiculares e paralelas; para o segundo, as dobraduras em papel substituem, em várias atividades, as operações com régua e compasso. Nos autores mencionados, não há um estudo paralelo com essas características.

Com relação às simetrias, que no nosso caso se reduziriam apenas às rotacionais, trabalhamos somente com a simetria central relacionada à rotação de 180º (na verdade, as concepções são distintas: a simetria central é algo mais "estático", mais imediato que a rotação de 180º, que evoca um deslocamento). Araújo (2000) trabalha com simetrias de rotação em geral, que acreditamos ser mais difícil trabalhar no ambiente papel/instrumentos de desenho do que no ambiente de material concreto do outro grupo. Essas considerações levaram-nos a reduzir as situações com simetrias de rotação.

Esperamos, neste trabalho, poder confirmar as hipóteses com resultados congruentes, aos que nos precederam, naqueles aspectos em que nossa pesquisa tem elementos comuns com as desses pesquisadores. Esperamos também contribuir com novas descobertas relacionadas com os elementos que para nós não se encontram nessas pesquisas.

CAPÍTULO 3

3.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Neste capítulo iremos esboçar as teorias que suportam nossa investigação. Fundamentamos nossas atividades de aprendizagem nas concepções de Piaget, no que se refere à construção do conhecimento. Nos instrumentos diagnósticos e na estruturação das atividades desenvolvidas com os sujeitos, empregamos os conceitos de níveis de pensamento, desenvolvidos pela teoria psicogenética. Na escolha e análise do uso das ferramentas acessíveis aos estudantes em suas atividades, tivemos em mente os conceitos desenvolvidos por Vigotsky e mais atualmente, por Meira (1998).

3.2 ESTÁGIOS DO DESENVOLVIMENTO INTELECTUAL

Segundo Piaget, as ações interiorizadas se transformam em pensamento; diante de uma situação de conflito, surge uma desequilibração seguida de uma equilibração, que acomoda o organismo. O conhecimento é construído dessa maneira e sua assimilação, dependente de sua natureza, está condicionada pelos chamados *estágios do desenvolvimento*: sensório-motor (de 0 a 2 anos), pré-operacional (de 2 a 7 anos), operacional concreto (de 7 a mais ou menos 12 anos) e operacional formal (de mais ou menos 12 anos em diante), que aparecem nessa ordem mas cada um com seu ritmo e intensidade. O desenvolvimento intelectual se dá continuamente e as linhas entre os estágios não estão bem definidas: uma criança pode estar em dois estágios diferentes em áreas diferentes. Se a teoria é válida, então devemos levar em conta a idade dos sujeitos do estudo e as atividades que lhe serão apresentadas: propor demonstrações formais sobre congruência de triângulos ou justificar logicamente construções geométricas, por exemplo, não seria adequado para crianças de 10 a 11 anos.

Por outro lado, o enfoque de transformações com apelo intuitivo seria apropriado para essa faixa etária. Intuitivamente, rotações são movimentos de objetos descritos por expressões do tipo “dar voltas”, “rodar”, “girar”, etc e compreendem uma infinidade de situações. Formalmente, a rotação é uma função com características muito especiais, definida de forma precisa, conforme já expusemos no capítulo 1.

Entre a concepção ingênua e a formal mais elementar, que desejamos atingir, há uma distância conceitual enorme. Se a meta é levar o estudante a se apropriar dessa última, será aconselhável respeitar os estágios de desenvolvimento, histórico e individual, da formação do conceito. Se concordarmos com Piaget, em *A Abstração Reflexionante* (1995, pp. 253-261), a criança de 9-10 anos consegue enfrentar tarefas que envolvem a concepção de rotação de objetos. Mais tarde, com 11-12 anos, quando começar a entrar no estágio lógico-formal, será capaz de construir a noção de rotação de forma abstrata, em direção ao conceito formalizado.

Vamos focalizar agora um aspecto pouco explorado da teoria de Jean Piaget, desenvolvido em conjunto com Roland Garcia, de interesse fundamental para nossa investigação. Trata-se da epistemologia genética, que procura traçar um paralelo entre os mecanismos de desenvolvimento do pensamento da criança e os mecanismos do desenvolvimento histórico do conhecimento nas ciências, que os autores ilustram com exemplos da Física e da Matemática.

3.3 PSICOGÊNESE E HISTÓRIA DAS CIÊNCIAS

Segundo Garcia (1980), a teoria psicogenética sustenta que há um paralelo na evolução dos sistemas cognitivos entre os níveis de desenvolvimento intelectual da criança e os níveis de evolução do conhecimento científico. Mais ainda, mostra uma surpreendente identidade dos mecanismos operantes em ambos os níveis. No caso particular da Geometria, Piaget e Garcia (1983) afirmam que, no desenvolvimento dos conceitos genéticos na criança, há três etapas características, chamadas, respectivamente, de “intrafigural”, “interfigural” e “transfigural”. Na primeira etapa, a criança consegue ver e pensar somente nas relações internas de uma figura; na segunda, a figura pode, num certo contexto, ser relacionada com outros elementos externos, por exemplo com outras figuras, parecidas ou não; na terceira etapa, a criança passa a considerar a transformação de figuras de um ponto de vista muito mais geral, que lhe permite combinar transformações. Os autores ilustram a diferença entre a primeira e a segunda etapas com os seguintes resultados de experimentos: uma criança na primeira etapa consegue desenhar segmentos perpendiculares enquanto componentes de uma única figura, pois é capaz de desenhar uma cruz, por exemplo; entretanto, ela leva muito mais tempo para traçar retas horizontais e retas verticais corretamente. Por exemplo, ao desenhar a chaminé de uma casa, ela a representa perpendicularmente ao telhado e não à linha do horizonte. Para entender “vertical” e “horizontal”, a criança tem que estabelecer uma relação entre a figura (no caso, a reta) e um sistema de referência externo à figura (por exemplo, a margem do papel). Para que isso ocorra, é necessário esperar que o desenvolvimento intelectual da criança atinja a segunda etapa, ou seja, a interfigural.

Piaget e Garcia (1983), buscando esclarecer mais as diferenças entre os estágios (ou etapas ou níveis) intrafigural e interfigural, acrescentam que se devem incorporar às relações intrafigurais aquelas que resultam de uma comparação entre as propriedades internas de duas ou mais figuras. Por exemplo, ao descobrir que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180^o, as crianças logo passam a prever que isso se dará com todas as formas triangulares. Essa ação se passa no nível intrafigural, no qual a posição das figuras não é um fator considerado. No nível interfigural, diferentemente, a posição das figuras no espaço que as engloba faz necessária a consideração dessas características da totalidade que o espaço representa, como veremos adiante.

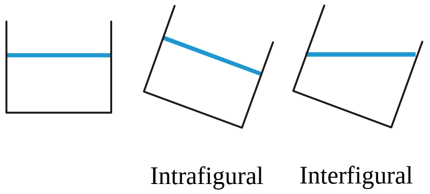
Pode-se também considerar certos lugares geométricos entendidos num nível intrafigural, como por exemplo quando a criança descobre que, colocando uma série de objetos à mesma distância de uma pessoa, obtém um círculo. Por outro lado, é mais difícil para a criança descobrir que os pontos à mesma distância de duas pessoas não se reduzem apenas ao ponto médio do segmento imaginário que as une, mas a todos os pontos da reta mediatriz desse segmento: neste caso, a reta é perpendicular ao referido segmento e sua construção supõe uma organização do plano que se insere então no sentido interfigural.

Segundo Piaget, a passagem das relações intrafigurais às interfigurais deve-se, no curso da psicogênese, ao domínio de três fatores principais:

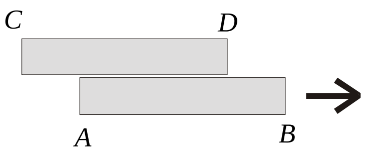
a) Homogeneização dos espaços vazios e cheios. Quando entre duas pequenas árvores distanciadas de mais ou menos 30 cm se coloca um muro de 2 ou 3 cm de espessura, a criança até 7 anos e meio dirá que aquela distância diminui, indicando que, para ela, o espaço ocupado e o espaço vazio têm valores distintos. Segundo Piaget, as crianças dizem que a distância volta a aumentar quando se faz um buraco no muro! Esta heterogeneidade sugere que a criança até a idade mencionada não tem uma concepção de um espaço geral que contém os objetos ou figuras que irão relacionar-se.

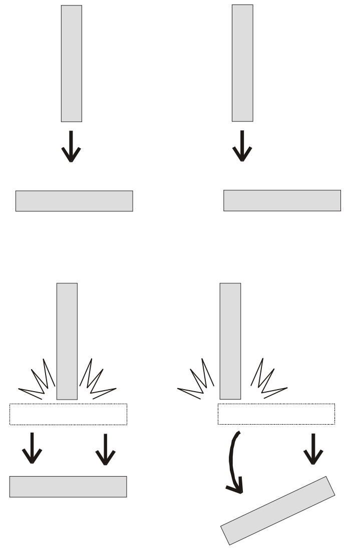
Coordenação das direções ou distâncias em duas ou três dimensões. Dada uma folha de papel para reproduzir na mesma posição um ponto desenhado perto de um canto de uma outra folha, as crianças, no início, fazem o ponto numa posição estimada visualmente. Ao começar a usar uma régua, entretanto, traçam um segmento do canto da folha até o ponto e demoram a perceber que isso não é suficiente, pois o ponto que desenham dificilmente estará na posição correta. Em seguida, passam a medir a partir da margem vertical ou da margem horizontal, sem grande sucesso. É somente com 7 ou 8 anos (estágio das operações concretas) que compreendem a necessidade de duas medidas para localizar exatamente o ponto. Testemunhamos aqui a estratégia que subentende a utilização das coordenadas cartesianas (se bem que no nível das ações e não das tematizações).

Outros experimentos, como a reprodução de uma pequena cidade com seus edifícios em posições determinadas, mostram que a coordenação de posições leva muito tempo para ser apropriada pelas crianças. Com relação às direções, é famoso o experimento do vaso com água colorida, inicialmente na horizontal e depois inclinado, que a criança deve reproduzir com desenho de memória: até os 8 ou 9 anos, a criança desenha o nível da água paralelo ao fundo do vaso, mesmo quando este está inclinado. Isto indica que a criança está ainda no nível intrafigural (o nível da água é paralelo ao fundo, água e vaso se fundem num único objeto); somente quando desenha o nível da água paralelo ao nível da mesa é que a cri-ança demonstra compreensão interfigural. Outros experimentos com fio de prumo mostram resultados parecidos com a noção de vertical.



Representação de móveis em casos de deslocamentos. Em uma experiência, desliza-se uma régua AB paralelamente a uma régua fixa CD; de acordo com Piaget, as crianças até 8 anos acham que o intervalo entre as extremidades A e C é menor do que o intervalo entre as extremidades B e D, demonstrando que ainda não diferenciam deslocamentos de alongamentos (supomos aqui que Piaget se refere às diferenças de abcissas $x_B - x_D$ e $x_A - x_C$, tomadas sobre uma reta paralela ao deslocamento). No nível intrafigural, as crianças acham que os deslocamentos implicam ganhos ou perdas, pois se concentram, no caso acima, somente nos pontos de chegada (da régua): nesse nível elas não se apropriaram da característica interfigural do deslocamento a que Piaget denomina “comutabilidade” ou seja, a equivalência entre aquilo que se adiciona na chegada e aquilo que se retira na partida. Em outras palavras, nos deslocamentos ocorre uma simples mudança de posição global da figura, não se modificando as relações entre as partes internas da figura, fato cuja compreensão exige a apropriação dos níveis intra e interfigural. Em outra experiência com duas réguas, uma é lançada perpendicularmente em direção a uma outra, primeiramente em direção ao meio,





depois em direção a uma das extremidades. Piaget afirma que, no primeiro caso, a cri-ança prevê facilmente o que vai acontecer (a segunda régua, ao sofrer o choque, sofre uma translação no mesmo sentido e direção do movimento da primeira régua), mas no segundo caso, irá ter noção geral do que poderá ocorrer (rotação e translação da segunda régua), somente por volta dos 7 ou 8 anos, com uma visão global do fato. Entretanto, é somente dos onze aos doze anos que a criança irá se apropriar dos recursos necessários para uma antecipação precisa, a saber: a) o conceito da composição dos movimentos de rotação com translação no que se refere ao movimento da extremidade da régua; b) além do relacionamento global entre as duas réguas, o estabelecimento de uma relação entre as réguas e o seu suporte imóvel (mesa ou outra superfície de apoio). Surge, então, algo que ultrapassa o nível de compreensão interfigural, denominado por Piaget de *transfigural*.

A caracterização do nível transfigural, bem como a passagem da etapa interfigural para a transfigural, ocupam a maior parte da exposição de Piaget e Garcia (1983), no capítulo destinado à psicogênese da Geometria. A necessidade do pensamento transfigural surge a partir do momento em que a análise interfigural do relacionamento de figuras (ou objetos físicos) consideradas globalmente é insuficiente para se fazer previsões corretas, como visto no experimento envolvendo o choque de duas réguas resultando na composição de movimentos (translação e rotação). Os autores apresentam vários experimentos e dão vários exemplos, envolvendo principalmente composição de movimentos de objetos físicos. Entre as várias características do pensamento transfigural apresentadas por Piaget e Garcia, vamos listar as que julgamos mais significativas:

- a transformação que relaciona duas figuras é o resultado da composição de duas ou mais transformações (equivalentemente, para movimentos de corpos rígidos, o resultado de um movimento relativo é a composição de dois ou mais movimentos absolutos);

- freqüentemente, a obtenção da figura transformada (ou da trajetória do movimento resultante ou da figura que representa a situação final) depende de um trabalho de dedução e cálculos algébricos prévios;
- tem natureza "endógena", em contraste com a natureza "exógena" do pensamento intrafigural e com a natureza "exo-endógena" do pensamento interfigural; enquanto o intra impõe as figuras (ou objetos) do mundo exterior (espaços geométrico e físico), o trans elabora as estruturas que não consistem mais em "figuras" (como os grupos, por exemplo) mas que integram em sistemas de conjuntos as transformações realizáveis;
- está relacionado com o estágio hipotético-dedutivo do desenvolvimento do indivíduo (a partir dos 11-12 anos), quando as estruturas lógico-aritméticas se libertam inteiramente do geométrico e quando a geometria se "algebriza".

Em suas conclusões, Piaget e Garcia consideram a seqüência (intra,inter,trans) sob o aspecto geral e sob o aspecto do espaço. Sob o geral, ela se caracteriza como a expressão das condições que as leis da assimilação e equilibração impõem a toda aquisição cognitiva, pois:

a) diante do novo, o sujeito deve assimilar os dados (objetos, figuras, relações) aos seus esquemas pré-existentes, de ação ou conceituais, e obter a acomodação desses esquemas às propriedades objetivamente dadas. Está aqui o caráter "intra" desse início de conhecimento;
b) os novos esquemas construídos não permanecem muito tempo isolados, pois o processo de assimilação levará às assimilações recíprocas e as novas exigências de equilibração irão impor aos esquemas ou subesquemas assim relacionados com formas mais ou menos estáveis de coordenação ou transformação. Isso define o caráter "inter" dessa etapa do conhecimento;
c) a multiplicação de subsistemas irá ameaçar a unidade do todo, com as tendências de diferenciação conflitantes com as de integração. Impõe-se então um equilíbrio entre as dife-

renciações e a integração, de forma que as diferenciações possam ser engendradas sem que haja perturbações internas ou conflitos entre elas: as estruturas de conjuntos formadores determinam o caráter “trans” dessa etapa.

Essa seqüência se reproduz indefinidamente ao longo do processo contínuo do desenvolvimento do sujeito, em todos os seus estágios, apresentando-se como um mecanismo geral e bem definido.

Sob o aspecto do espaço, ou seja, da Geometria, Piaget e Garcia invocam a necessidade lógico-matemática, de natureza endógena, que apresenta seus valores máximos no seio dos sistemas fechados de transformações construídas pelo sujeito. Contrariamente, os dados de fonte externa permanecem no estado de necessidade intrínseca mínima. Nesta perspectiva, a passagem do intra ao inter e ao trans correspondem então a uma extensão sistemática da necessidade (esse é um outro aspecto da equilibração). Em termos simples, no caso da Geometria, passa-se do espaço, como propriedades dos objetos e um produto das construções possíveis do sujeito, a partir de dados externos (por exemplo, quando desenha figuras que vê ou das quais se lembra) até chegar às transformações sobre entes abstratos escolhidos arbitrariamente, culminando com interação cada vez mais complexa da construção de instrumentos algébricos e formas espaciais a imaginar.

Piaget e Garcia (1983) propõem um paralelo entre a história das transformações e o desenvolvimento cognitivo das crianças, afirmando que o mecanismo (intra,inter,trans) é comum ao dois domínios. Segundo Inhelder, na introdução da obra citada, a intenção dos autores não é fazer corresponder, termo a termo, as características dessas evoluções, muito menos supor uma recapitulação de filogênese pela ontogênese ou procurar evidenciar analogias de sucessão, mas buscar saber se os mecanismos de passagem de um período histórico ao seguinte, no contexto do sistema nocional, são análogos àqueles da passagem de um estágio genético para os seguintes. Assim, no período histórico que vai dos geômetras gregos até o século XVIII, a Geometria teria um caráter **intrafigural**, onde não há propriamente transformação, mas somente o estudo da figura (propriedades) ou relação entre duas figuras (congruência, semelhança). Isso corresponderia ao estágio inicial das idéias geométricas no desenvolvimento infantil (primeiras formas). No período que compreende os primórdios da Geometria projetiva até a época de Chasles e Poncelet, a Geometria teria um aspecto **interfigural**: existe uma transformação que destaca uma posição inicial (figura objeto) e a posição final (figura imagem); o plano é o "lugar" onde se encontram todas as figuras, onde elas se movimentam, completamente neutro. Isso, no nível de desenvolvimento da criança, corresponderia ao estágio da elaboração das noções projetivas (uma figura circular e sua sombra elíptica) e concepções de movimentos rígidos (translações, rotações, reflexões). E, finalmente, teríamos o período histórico que se inicia com a concepção global da Geometria, por Klein, com carácter **transfigural**: a transformação atua sobre todos os pontos do plano e as propriedades do espaço sobrepõem-se às das figuras particulares. Compõem-se transformações e as leis de composição têm estrutura de grupos, evidenciando os invariantes em cada subgrupo. Isso corresponderia ao estágio em que a criança desenvolve sistemas de referência abstratos (eixos, coordenadas).

Jahn (1998) enfatiza que, à parte as polêmicas que tal teoria possa estimular, permanece a convicção de que há diferentes níveis de significação para as transformações. Traduzimos o trecho a seguir de seu trabalho:

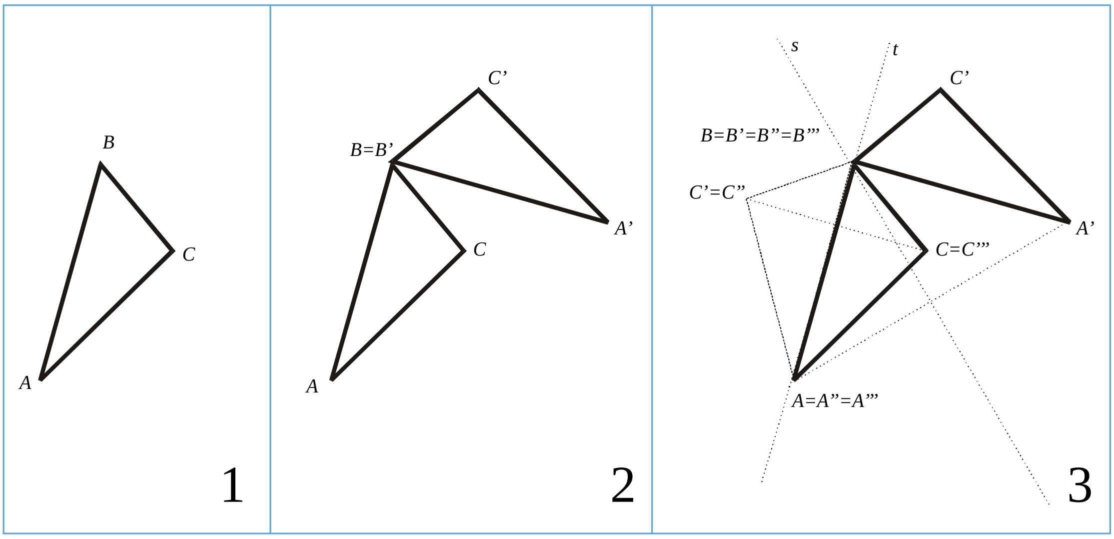
> Juntamo-nos assim a Laborde e Grenier(1987, p.66) para considerar três primeiros níveis:
>
> **Nível 1**: a transformação é considerada "como uma relação entre duas configurações geométricas ou uma relação entre duas partes de uma mesma configuração" (o caráter funcional está ausente);
> **Nível 2**: a transformação é considerada como uma aplicação pontual do plano sobre si mesmo (trata-se do objeto funcional);
> **Nível 3**: a transformação é considerada como uma ferramenta funcional que evidencia as propriedades invariantes ou se destina à resolução de problemas.

Jahn acrescenta o

> **Nível 4**: A transformação é considerada como elemento de um grupo (as transformações se compõem e se comparam, formando os grupos de transformações). (p. 60)

Pelo que foi exposto anteriormente, o nível 1 estaria mais relacionado com o aspecto intrafigural, enquanto que os níveis 2 e 3 estariam mais relacionados com as características interfigurais e o nível 4 teria uma natureza predominantemente transfigural. É bom lembrar, contudo, que essa associação pode apresentar contra-exemplos.

Considerando os aspectos teóricos esboçados anteriormente e o objetivo do trabalho que pretendemos desenvolver, fica claro que com os sujeitos do experimento não se pretende trabalhar ou atingir o nível transfigural, que envolveria, além do conceito de transformação como função do plano no plano, a composição de funções levando à noção de grupo de transformações. Vejamos o diagrama abaixo:



Em (1), ao nível das relações internas da figura, poderíamos por exemplo considerar que ao maior lado se opõe o maior ângulo: trata-se de uma análise intrafigural. Em (2), poderíamos afirmar que na rotação $R(B,+90^{o})$ o triângulo *ABC* é levado no triângulo *A'B'C'*. É uma análise interfigural, podendo o tratamento ser global ou pontual. Em (3) podemos afirmar que $R(B,+90^{o})\,(\Delta ABC) = R_s \circ R_t(\Delta ABC) = \Delta A'B'C'$ ou seja, a rotação é o produto das reflexões. Aqui, a análise é transfigural.

O nosso estudo irá ocupar-se das situações (1) e (2), sem menção explícita ao conceito de transformação como função do plano no plano. No nível (2), o tratamento será global e semi-pontual, mas nunca inteiramente pontual.

3.4 MANIPULATIVOS COMO FERRAMENTAS NO ENSINO/APRENDIZAGEM

Como já dissemos, o ensino da Geometria comporta diferentes perspectivas, tanto sob o aspecto da teoria (saber matemático) quanto da didática (construtivismo × não construtivismo, aspectos psicológicos, cognitivos, antropológicos do ensino e da aprendizagem, métodos, etc), todos sob a égide da Educação Matemática. Um dos temas colocados freqüentemente em discussão é o da utilização do chamado *material manipulativo* ou *material concreto*[1]. Não há escola que não utilize objetos (de produção industrial ou artesanal) dos mais variados tipos e materiais para ensinar Geometria. Isso não é algo novo. Existem publicações exemplificando o uso de materiais manipulativos no ensino da Geometria, como *Geometry by Discovery*, de David Gay (1998) e recomendações para o seu uso, como encontrado em *Principles and Standards for School Mathematics*, do NCTM (2000). Entretanto, são necessários certos cuidados no uso desse material. Por exemplo:

> Dobrar papel, cortar, colar, desenhar, pintar, medir, pavimentar e encaixar, tudo isso é organizado em forma de atividades geométricas. O mais importante é a maneira como o material é usado. De fato, não deve ser mero brinquedo. De acordo com a formulação de Dina van Hiele, o material concreto está voltado para a ação pensante da criança. Mãos e cérebro trabalham juntos de forma a responder à questão de como uma determinada coisa é feita. Se definições são dadas nesse estágio, elas precisam ser genéticas, isto é, devem dizer como a coisa a ser definida é feita. Mais tarde, se tal definição é reformulada de maneira mais formal, a nova definição deve estar relacionada à mais antiga. O desenvolvimento lógico posterior deverá estar enraizado no material concreto (Freudenthal, 1973, p. 408).

O conceito de mediação do instrumento encontra suas raízes nos estudos do desenvolvimento cognitivo de Vygotsky. De acordo com Meira (1998), o crescimento individual e a participação em atividades e práticas socioculturais garantem à criança dois tipos de ferramentas: os <u>signos</u> nos sistemas semióticos e as <u>ferramentas técnicas</u>, artefatos instrumentais que chamaremos simplesmente *instrumentos*, neste texto. Nas atividades com os sujeitos em nosso trabalho de pesquisa, os sistemas de signos estarão ligados diretamente à linguagem matemática utilizada na descrição dos objetos geométricos e suas propriedades: ponto, segmento, reta, perpendicular, mediatriz, triângulo, circunferência, distância, ângulo, etc e suas

---

[1] Usamos aqui “instrumentos”, “material manipulativo”e “material concreto” com o mesmo significado.

representações gráficas e algébricas. A estrutura de apresentação das atividades (instruções, textos explicativos, informações, organização de dados, layout da página, etc) e problemas (perguntas, tarefas, desafios, etc) constitui um sistema envolvendo aspectos semióticos e instrumentais. Os instrumentos propriamente ditos serão régua , compasso, transferidor, esquadro, lápis e papel, disponíveis para um dos grupos de sujeitos; régua, compasso, palitos, botões, linha, papel vegetal, transpel (instrumento criado para este estudo), serão os instrumentos para o outro grupo de sujeitos.

Meira (1988) enfatiza a questão da *transparência* do instrumento, ou seja, o índice do acesso dos alunos ao conhecimento matemático que o instrumento proporciona. Ele discute duas questões: a) De que forma a transparência se relaciona aos contextos em que os instrumentos são usados? b) A transparência é algo intrínseco ao instrumento? Ao responder a essas questões, Meira cita outros pesquisadores sugerindo que o uso de instrumentos envolve sempre alguma espécie de interpretação de procedimento (no sentido de sua dependência de regras específicas, como por exemplo os passos para programar o gravador de vídeo), bem como interpretações de significado cultural (como no caso em que as crianças sempre atribuíam a relação "maior urso" da história a suas mães, a despeito das gravuras dos ursos mostrando que o maior era o pai). Mas a visão tradicional da transparência é mais estreita, já que se ocupa apenas das qualidades intrínsecas do instrumento e de que forma essas qualidades podem promover eficiência cognitiva individual, capacitando os seus usuários a ver princípios e relações subjacentes através do mesmo. Segundo esse enfoque, a transparência do dispositivo é diretamente proporcional à qualidade de ligações entre as características evidentes do objeto e o domínio visado do conhecimento tal como entendido pelos expertos. Essa visão reduz o problema da transparência à medida da fidelidade epistêmica, presente nas idéias de Lesh, Behr e Post (1987), que, segundo Meira, afirmam: "Uma representação transparente não deveria ter nem mais nem menos significado do que as idéias ou estruturas que ela representa".

A tese de Meira (1998) é a de que a transparência do instrumento não é uma questão de fidelidade epistêmica, isto é, não pode ser determinada pela análise formal das qualidades intrínsecas do instrumento. Ele defende a idéia, exposta por outros autores, de que a transparência de qualquer tecnologia sempre existe em relação a algum propósito e está intimamente ligada à prática cultural e à organização social dentro da qual espera-se que funcione tal tecnologia. A transparência não pode ser vista como um atributo do artefato em si, mas como algo que pode ser apropriado por meio de formas específicas de participação, na qual a tecnologia preenche uma função de mediação.

Meira conclui que, no caso do ensino e aprendizagem escolar, a transparência dos instrumentos está intrinsecamente associada à natureza das práticas em sala de aula. Conclui também que a transparência é um aspecto inerente ao uso do material, mais do que um aspecto intrínseco do mesmo. Suas conclusões estão fundamentadas no experimento que realizou com estudantes de 8ª série nos Estados Unidos: explorando o conceito de função linear, utilizando três instrumentos diferentes nas atividades com esses alunos (dois artefatos físicos, um com manivelas e outro com molas e um computadorizado, uma máquina que apresentava um resultado para cada dado fornecido). Ele mostra, entre outras coisas, que o instrumento com suposta menor fidelidade epistêmica (máquina numérica), superadas as dificuldades iniciais, tornou-se um instrumento de acesso para as atividades de resolução de problemas e para o conceito de função desenvolvido na sala de aula. Meira ressalta que as representações feitas em papel pelos estudantes nas suas atividades usuais se tornaram uma ferramenta para dar sentido à máquina numérica e não o contrário, como poderia sugerir a fidelidade epistêmica. Isso ocorreu também, embora mais tarde, com os estudantes que trabalharam com as outras duas máquinas.

Em nosso estudo, iremos considerar as questões analisadas por Meira, pois estaremos utilizando vários instrumentos, descritos a seguir.

3.4.1 INSTRUMENTOS DE DESENHO

Do ponto de vista teórico, a Geometria tem uma característica não compartilhada por outras áreas da Matemática: os objetos e as relações entre os objetos por ela estudados podem ser representados através de desenhos (construções bidimensionais); pode-se mesmo raciocinar sobre as propriedades e demonstrar teoremas através de operações de natureza gráfica bem definidas, mediadas por instrumentos. Estamos nos referindo às chamadas construções com régua e compasso. Do ponto de vista didático, não podemos e não devemos desenvolver uma Geometria da régua e do compasso, na acepção clássica, pois isso pertence à esfera das preocupações acadêmicas e especializadas, conforme mencionado no capítulo 1. Entretanto, o Desenho Geométrico deve fazer parte do ensino e da aprendizagem da Geometria escolar, já que compõe um de seus registros mais importantes e é inerente à própria concepção da Geometria. Não conseguimos acessar trabalhos de pesquisa envolvendo diretamente a questão do Desenho Geométrico na sala de aula. Entretanto, a história recente dos currículos brasileiros mostra que ele tem sido uma componente do ensino formal, com enfoques variados. Em alguns livros didáticos de Matemática mais clássicos, como por exemplo, *Geometria Elementar*, Irmãos Maristas, FTD, 1957, as construções geométricas faziam parte do estudo das figuras planas. Há três décadas, com a disseminação de cursos profissionalizantes, várias escolas técnicas, como o Senai, ensinavam Desenho Geométrico como disciplina técnica. Houve uma época em que surgiram livros paradidáticos, como os de Marmo (1963) e Carvalho (1967), utilizados pelos candidatos às escolas de engenharia da Escola Politécnica da USP e do Ita. Atualmente ainda há vestibulares, como o do Mackenzie, exigindo construções com instrumentos de desenho na chamada *prova de habilidade específica* de Desenho Geométrico e Geometria Descritiva para os candidatos aos cursos de Engenharia e Arquitetura. A Fuvest inclui o assunto no programa de Geometria, destinado aos candidatos de Exatas e Administração e no programa para a prova específica de Arquitetura. No

Ensino Médio, o Desenho Geométrico nunca desapareceu completamente.

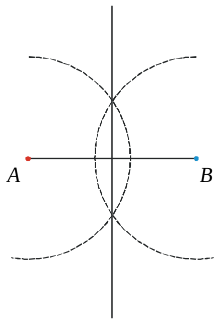
No Ensino Fundamental, pouco se falava de construções com régua e compasso, a não ser em alguns casos de desenho em Educação Artística, desvinculado do estudo de propriedades de figuras geométricas. Entretanto, temos testemunhado o ressurgimento, nos livros didáticos atuais, de uma abordagem das construções com régua e compasso no antigo estilo, ou seja, como parte integrante da Geometria. Nos PCNs, existem recomendações explícitas do uso da régua e do compasso, além de outros instrumentos para construções geométricas. Na secção de conteúdo para o 4º ciclo lemos:

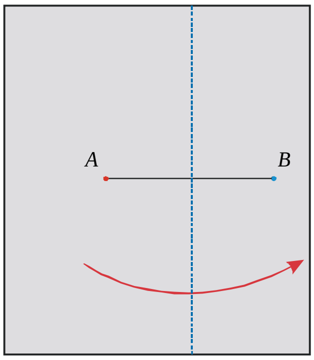
> Divisão de segmentos em partes proporcionais e construção de retas paralelas e retas perpendiculares com régua e compasso.
> Resolução de situações-problema que envolvam a obtenção da mediatriz de um segmento, da bissetriz de um ângulo, de retas paralelas e perpendiculares e de alguns ângulos notáveis, fazendo uso de instrumentos como régua, compasso, esquadro e transferidor.
> Identificação e construção das alturas, bissetrizes, medianas e mediatrizes de um triângulo utilizando régua e compasso (1998, pp. 88 e 89)

Como está implícito na sua descrição, as construções com régua e compasso (ou, mesmo com instrumentos adicionais, como transferidores e esquadros) não podem prescindir de instrumentos. Nesse caso, torna-se relevante a questão da transparência, conforme tratada em Meira (1998). Acreditamos, talvez como decorrência de nossa experiência como professor, que no estudo das transformações geométricas, particularmente a rotação, revele-se interessante o uso da régua e do compasso, pois não podemos negar a fidelidade epistêmica desses instrumentos no que diz respeito à geometria sintética; reconhecemos também, como Meira, que a participação dos sujeitos nas atividades também condicionem o significado dos conceitos geométricos ligados ao uso de tais instrumentos. Mesmo que se disponha de dispositivos e instrumentais mais sofisticados, como softwares de construção geométrica, a exemplo do Logo, Cabri-Géomètre e o Geometer's Sketchpad, acreditamos que o contato mais direto com o desenho proporcionado pela régua e pelo compasso possam trazer novos *insights* na aprendizagem do assunto. Na verdade, uma coisa não exclui a outra. Neste trabalho, entretanto, não estaremos considerando a utilização de softwares, pois, como já dissemos, há várias pesquisas disponíveis recentes sobre temas que envolvem o ensino e a aprendizagem da geometria e transformações geométricas com computadores.

3.4.2 MATERIAL ALTERNATIVO

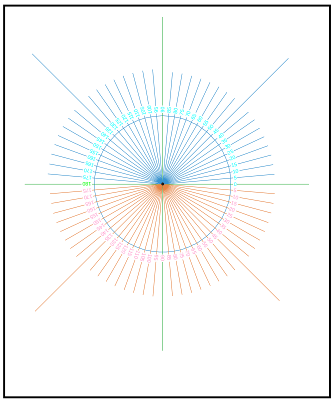
Neste trabalho, denominamos *material alternativo* a todo o conjunto de objetos que serão utilizados como instrumentos no estudo da rotação, com exclusão do material de desenho apresentado anteriormente. Palitos de sorvetes com furo na extremidade ou no seu centro serão os referentes nas situações iniciais do desenvolvimento do conceito de rotação. Os palitos de fósforo deverão desempenhar o mesmo papel em relação ao conceito de ângulo. O botão amarrado a uma linha de nylon pretende ser um modelo para a rotação de um ponto, que parece ser a principal noção a ser dominada numa situação de rotação em que os três parâmetros (sentido, ângulo, centro) estão em jogo. A utilização de papel translúcido para representar rotações não é uma prática incomum. Lemos *no Principles and Standards for School Mathematics* (2000), que “os estudantes podem explorar movimentos tais como deslizamentos, dobras (resultando as reflexões) e giros usando espelhos, dobra de papel e papel transparente (ou translúcido)”. Nas rotações, não vemos utilidade para o espelho mas vamos utilizar dobradura e papel translúcido. Como é sabido, as dobraduras em papel, de certa maneira, se assemelham às construções com régua e compasso, no sentido de que podem ser “axiomatizadas” algumas operações que compõem toda construção permitida com dobras de papel. Neste estudo, iremos utilizar apenas uma dessas operações fundamentais, que é a que permite traçar a mediatriz de um segmento. O desenho ao





lado compara as ações com régua e compasso (à esquerda) e as ações com dobraduras para determinar a mediatriz de um segmento (à direita). Em ambos os casos o segmento é desenhado previamente sobre a folha.

Mas o instrumento de maior utilidade, acreditamos, é o papel translúcido, que permite que o aluno “cole” a figura original e, ao mover o papel, faça o deslocamento da cópia. Entretanto, sua utilização exige uma coordenação complicada de ações. O problema, no caso da rotação, não é tanto o de fazer o papel girar ao redor do ponto fixado como o centro de rotação, mas o de medir esse ângulo. Após vários experimentos e tentativas com vários materiais, criamos um material que resolvemos chamar “transpel”, porque é uma espécie de transferidor de papel, além de servir de veículo para a rotação de figuras. Numa folha de papel vegetal 75 gramas, formato A4, imprimimos uma escala radial de medidas de ângulos de 5 em 5 graus (a impressão em papel vegetal não é muito precisa e não suportaria uma escala mais refinada). O centro da escala é o centro de rotação; fizemos duas escalas de 0^o a 180^o, sendo a azul no sentido anti-horário e a vermelha no sentido horário, pois achamos que duas escalas lado a lado trariam confusão no momento de ler o ângulo de rotação. Destacamos dois eixos verticais para facilitar o posicionamento da folha e para a averiguação imediata do perpendicularismo de dois traços. Como é um material de uso desconhecido, é necessário um certo tempo de treinamento no seu uso: como fixar o centro com uma ponta, como levar o zero até um ponto de referência da figura a ser rotacionada, como copiar a figura a ser rotacionada (decalcando todos os traços ou apenas alguns, suficientes para a reconstrução da figura na nova posição, etc). O desenho ao lado mostra uma réplica reduzida do transpel (reproduzido no tamanho original no anexo 5).



Não obstante todas as considerações feitas a respeito dos instrumentos e manipulativos que iremos utilizar, estaremos compartilhando com Meira a crença de que a transparência relacionada com o uso desses materiais não pode ser determinada através da análise formal de suas qualidades intrínsecas.

Iremos, na verdade, procurar estabelecer diferenças nos resultados dos dois grupos de sujeitos, um que utiliza régua, compasso, transferidor e esquadro e o outro, que utiliza o material alternativo, sem assumir expectativas definitivas com relação a esses resultados.

3.4.3 MATERIAL INSTRUCIONAL IMPRESSO

Iremos chamar de *material instrucional* todo o material impresso que será fornecido aos sujeitos do experimento. Antes de descrevê-lo, vamos fazer algumas considerações com base nos conceitos de Piaget apresentados na seção 3.2. Poderia ser associada aos estágios de desenvolvimento intelectual uma certa ordem no estudo da rotação:

1. Rotação de objetos físicos.
2. Rotação de figuras planas representando objetos físicos.
3. Rotação de figuras geométricas.
4. Rotação como função.
5. Rotação como integrante do grupo de isometrias.

Sobre a rotação de objetos físicos, podemos dizer que:

a) em geral, é um movimento espacial complexo, normalmente composto com outros movimentos. Além disso, dá-se no espaço, com corpos sólidos de três dimensões;

b) o objeto que se move é único, isto é, num dado instante está numa posição e noutro instante, findo o movimento, está em outra posição;

c) em geral, os objetos são girados ao redor de pontos do próprio objeto; situações em que objetos físicos giram ao redor de pontos que lhes são exteriores são menos usuais, exigindo dispositivos mais complexos (por exemplo, uma linha que une o objeto a um ponto de fixação ou um suporte plano contendo o objeto que roda em torno de um ponto, etc).

Na rotação de figuras representando objetos físicos podemos sublinhar:

a) o fato de que estamos falando de objetos bidimensionais (fotos, desenhos), localizados em um suporte físico (em geral, a folha retangular de papel);

b) a possibilidade de representar o objeto na posição original e o objeto na posição final no mesmo desenho. Isso pressupõe uma certa capacidade de abstração, a de imaginar um mesmo objeto em duas posições diferentes (desprezando-se o intervalo de tempo que medeia o antes e o depois);

c) o caráter intermediário da noção, que não se desprendeu ainda da rotação de objetos físicos, mas que ainda não chegou à concepção de figura geométrica como conjunto de pontos.

A rotação de figuras geométricas caracteriza-se por:

a) apresentar desenhos mais simples e esquemáticos, representativos das figuras planas elementares (pontos, segmentos de retas, retas, circunferências, polígonos e combinações dessas formas elementares);

b) referir-se à rotação da figura presente no suporte, como se o objeto fosse o próprio desenho (na verdade, sabemos que os desenhos são representações instanciadas das figuras geométricas ideais).

Na rotação como classe especial de funções, ressalta-se que:

a) é a função *R* bijetora no plano α, na qual, para todo ponto *X* de α existe um ponto *X’* também de α tal que $X' = f(X)$ e $m(X\hat{O}X') = \theta$, sendo $X\hat{O}X'$ ângulo dado orientado, $XO = X'O$ e *O* um ponto dado do plano tal que $f(O) = O$. Para cada *f*, demonstra-se que *O* é único e que *f* preserva distâncias, ou seja, *f* é isométrica (equivalentemente, a imagem de uma figura qualquer do plano é congruente a essa figura, qualquer que seja a rotação);

b) a linguagem torna-se precisa e simples: chamamos *figura* (original) e *imagem* (figura transformada), respectivamente os conjuntos *F* e *F’=f(F)*, conforme já vimos na definição de transformação. A idéia de movimento se atenua, pelo menos do ponto de vista conceitual, pois o tempo não está em jogo (na prática, dificilmente nos desvencilhamos do apelo intuitivo).

Quando falamos da rotação como integrante do grupo de isometrias, já estamos lidando com objetos de alto grau de abstração. A rotação passa a ser simplesmente um elemento de um conjunto formado por outros elementos: em comum com esses elementos, tem o fato de ser uma transformação que preserva distâncias. Por outro lado, qualquer rotação é um representante da classe de todas as rotações: existem infinitas rotações distintas.

Em nosso estudo, daremos um pouco de atenção à rotação de objetos físicos, em um dos grupos de sujeitos; no outro grupo, isso será evitado. Iremos concentrar nossa atenção na rotação de figuras representando objetos físicos e mais ainda na rotação de figuras geométricas simples (pontos, segmentos de retas, triângulos, quadriláteros, bandeiras). O tratamento funcional será rudimentar, pois se limitará à terminologia que identifica a figura inicial e a figura resultante da rotação. Não faremos também nenhuma alusão à álgebra das composições ou à geometria como um grupo de transformações. Poderíamos fazer algumas combinações elementares, intuitivas (por exemplo, uma rotação seguida de outra), mas nosso estudo se alongaria demais.

Os estudantes irão trabalhar com base nas instruções, informações, comunicados, atividades e situações-problema contidos em material impresso, com uma estrutura baseada nas nossas concepções prévias a respeito do ensino e aprendizagem das rotações; essas concepções se fundamentam nos trabalhos de pesquisas já mencionados, na nossa experiência pessoal anterior como professor de Geometria no Ensino Fundamental e Médio e nas pistas que o pré-teste programado certamente deve apresentar. Em princípio, a responsabilidade pela condução da aprendizagem é a do aluno, que deve ler e interpretar as folhas impressas e agir. O pesquisador intervirá somente nos casos em que houver um impasse (falta de compreensão de texto, inabilidade impeditiva no uso do material, conflitos de relacionamento com colegas, ausência absoluta de estratégias de ação, etc). Na concepção do material influíram muito algumas das reflexões do pesquisador, apresentadas no início desta seção, culminando com a organização das atividades com base no conjunto de idéias a seguir. É bom observar que certas situações são mais indicadas para um grupo do que para o outro.

1. A rotação de objetos físicos pode servir de suporte para idéias mais abstratas. Por exemplo, quando o aluno sente dificuldade em imaginar uma posição para a imagem de um segmento, ele pode girar sua régua, para obter uma percepção mínima da sua posição. Não se deve entretanto pedir para os alunos representarem a rotação de objetos físicos, a não ser que sejam estilizados – a reprodução de objetos é difícil e se consentirmos que o aluno desenhe esboços neste estágio, será difícil exigir precisão em estágios mais avançados.
2. Na rotação de figuras que representam objetos físicos, julgamos possível explorar dois tipos de atividades:

- Apresentar duas figuras congruentes, uma das quais coincide com a outra após uma determinada rotação e se pedir uma avaliação (aproximada ou precisa) de um ou mais parâmetros envolvidos: sentido da rotação, magnitude da rotação (isto é, medida do ângulo de rotação) e a posição do centro de rotação. Os nomes *original* e *imagem* devem ser definidos aqui como uma convenção cômoda.
- Apresentar desenhos de figuras congruentes, mas que não coincidem por meio de uma única rotação (por exemplo, figuras transladadas ou refletidas em espelho ou centro de rotação falso, onde as distâncias de pontos correspondentes do original e da imagem não coincidem ou os ângulos entre diferentes pares de pontos correspondentes não se conservam) e verificar se o aluno reconhece que a ilustração não se refere a uma rotação. É importante que o aluno diga porque não se trata de uma rotação. Dentro dessa linha, podemos apresentar ilustrações de figuras semelhantes, mas não congruentes, ou mesmo,

apresentar figuras parecidas, mas não semelhantes, para verificarmos se a idéia de conservação das dimensões e da forma está estabelecida.

3. Nas rotações de desenhos de figuras geométricas, além das atividades já propostas, podemos acrescentar as de construção. Caracterizando quantitativamente a rotação (sentido, ângulo, centro), dada a figura original, a atividade consiste em desenhar a imagem. Aqui, a dificuldade se agrava, obviamente. A complexidade das figuras é determinante e certamente não se deve exigir do estudante que reproduza com fidelidade figuras complexas. Repetimos que este tipo de atividade não deve ser desenvolvido no caso de figuras representando objetos físicos (que por mais simples que sejam, apresentam detalhes difíceis de representar). Quanto aos instrumentos usados para desenhar, temos duas possibilidades em extremos opostos:

- régua e compasso apenas, com as operações usuais do desenho geométrico clássico, para o grupo que usa o material de desenho (onde às vezes se permite o uso de esquadro e transferidor, para facilitar o trabalho). Neste caso, será necessário o tratamento que Jahn (1998) denomina “semi-pontual”: a figura é vista como um todo, mas ao mesmo tempo determinada por alguns de seus pontos. Por exemplo, uma reta, um segmento de reta, uma circunferência e mesmo um quadrado (quando se conhecem dois vértices opostos) são determinados por dois pontos distintos; para desenhar um triângulo, basta conhecer os três vértices (no sentido que são pontos dados no plano).
- transpel, para copiar, rotacionar e reproduzir as figuras e papel retangular transparente para fazer dobras e transportar segmentos (medidas), em princípio seriam suficientes para os alunos do grupo do material alternativo obterem as imagens nas rotações, vistas como deslocamentos globais. É claro que os desenhos de segmentos, decalcados a mão livre, não teriam a precisão de segmentos traçados com réguas.
- além do material listado anteriormente, os sujeitos do grupo de material alternativo terão à mão régua e compasso, o que lhes irá possibilitar dar maior precisão aos seus desenhos,

quando forem traçar segmentos e circunferências. Por exemplo, no momento que forem reproduzir no papel vegetal a figura original, eles poderão utilizar a régua para traçar os segmentos que compõem a figura que estão copiando por sobreposição. No momento de decalcar a figura sobre o papel, para desenhar a imagem da rotação, poderão reforçar com a régua as partes constituídas de segmentos. Entretanto, isto não será formalmente exigido deles.

3.5 A IMPORTÂNCIA DA ROTAÇÃO

Independentemente do suporte concreto utilizado e da particular abordagem que se possa fazer, o estudo de rotações permite explorar e motivar o estudo de inúmeros conceitos apresentados tradicionalmente no ensino da Geometria Plana. Comecemos com a questão do ângulo, freqüentemente apresentado como algo estático (reunião de semi-retas, intersecção de semiplanos, etc) e com o problema da sua medida (compreender o que é o grau, o que é medir ângulo, aprender a usar corretamente o transferidor ou equivalente, ser capaz de estimar medidas, etc). Nas rotações, o conceito adquire dinamismo (fala-se em girar, rodar, no sentido ou contrariamente ao sentido dos ponteiros do relógio, etc) e utilidade (já que é um parâmetro da situação de rotação que precisa ser trabalhado); em rotações com orientação previamente fixada, surge a necessidade não encontrada na Geometria Plana tradicional de considerar ângulos com medida maior do que 180^{o}. Preferimos não tratar dessa questão neste trabalho, adotando a convenção do menor ângulo: diante de uma situação de ambigüidade, escolhemos o sentido que está associado a um ângulo de medida menor ou igual a 180^{o} (é claro que para utilizar esse critério, somos obrigados a comentar o fato, ou seja, há ângulos de rotação cuja medida é maior do que 180^{o}, mas isso pode ser feito de forma intuitiva). A congruência de figuras planas é outro aspecto essencial: uma vez compreendido o aspecto da invariância das figuras nas rotações, basta localizar os pontos imagens estratégicos para se reconstruir inteiramente a figura imagem, que será congruente à figura original. Muitas outras concepções ligadas à Geometria Plana são evidenciadas no estudo de rotações de figuras planas, como a simetria central, a mediatriz de segmentos como lugar geométrico (lg), a circunferência como lg, a simetria de rotação não trivial dos polígonos regulares, etc. Como se sabe, as transformações podem ser vistas como ferramentas na resolução de problemas de Geometria. Em particular, a rotação serve como instrumento para a construção de polígonos regulares. Do que foi dito, devemos ressaltar que o tratamento da rotação como objeto de estudo é grandemente facilitado pelo uso consciente da régua e do compasso.

O conceito de imagem é muito importante e simplifica enormemente a linguagem associada às transformações, em particular a rotação. Por isso, julgamos oportuno utilizar o termo "imagem", mesmo que o conceito de função não esteja ainda apropriado pelos sujeitos desta pesquisa. Aos poucos, a idéia de movimento da figura em dois instantes distintos (antes e depois da rotação) pode ser substituída pela situação em que duas figuras congruentes podem ser associadas por uma função com parâmetros bem definidos (a rotação de centro O e ângulo orientado θ), sem que se diga explicitamente que se trata de uma função. Uma noção importante não tratada neste estudo é a de que a rotação na realidade age sobre todos os pontos do plano. O estudo das transformações terá que considerar esse aspecto do conceito, em algum estágio posterior do ensino desse assunto.

3.6 ALGUMAS INDAGAÇÕES

No início deste trabalho, quando procurávamos definir precisamente nosso problema de pesquisa, a quantidade de questões surgidas inviabilizava a formulação da pergunta principal. Várias dessas perguntas foram eliminadas à medida que a problemática se delineava, mas algumas delas a seguir permaneceram, inevitavelmente atreladas à nossa pesquisa:

1. Existem evidências ou argumentos que apóiem o estudo das transformações no Ensino Fundamental (3º e 4º ciclos), conforme sugerem os PCNs e alguns livros didáticos mais recentes no Brasil?
2. Admitindo-se que se deva estudar transformações geométricas no Ensino Fundamental, existe uma abordagem mais adequada da Geometria a ser adotada, dentre as perspectivas apresentadas na seção 1.2?
3. Quais transformações devem ser estudadas no Ensino Fundamental?
4. As transformações devem ser enfocadas sob um ponto de vista "dinâmico"(movimento de figuras globais) ou sob o ponto de vista funcional (aplicações do plano nele mesmo, onde todos os pontos se transformam e as figuras são vistas como subconjuntos do plano, constituídas de pontos)?
5. Que recursos didáticos podem ser mobilizados no estudo das rotações?
6. Quais dificuldades podem ser apontadas no ensino/aprendizagem das rotações?

3.7 FINALIDADE DESTA INVESTIGAÇÃO

Antes de apresentarmos nossa questão de pesquisa, vamos fazer algumas considerações sobre as questões acima.

Com relação à questão 1, os capítulos anteriores, incluindo este, proporcionam elementos, do ponto de vista de teorias em Educação Matemática e das práticas educacionais em outros países, que justificam o ensino de algumas das transformações geométricas para as crianças, a partir mesmo dos primeiros anos da vida escolar. Por isso, o pesquisador deste trabalho concorda com os PCNs no que se refere à necessidade do tratamento desse tema no 3º e no 4º ciclos do Ensino Fundamental.

Sobre o tipo de abordagem teórica (do ponto de vista estritamente matemático) a que se refere a questão 2, se levarmos em conta as experiências educacionais de outros países, parece prudente estudar as transformações como um tópico dentro do quadro geral da Geometria, relacionado com outros assuntos, quando isso se mostrar interessante. Em outras palavras, não se recomenda nenhuma das abordagens descritas na seção 1.2 em sua forma mais pura.

Quanto às transformações em que devem ser iniciados os estudantes, teor da questão 3, parece não haver dúvidas de que as isometrias sejam as mais indicadas. Talvez seja possível que, numa abordagem intuitiva e ligada a movimentos de objetos rígidos, as três transformações básicas (translação, reflexão e rotação) possam ser apresentadas conjuntamente. Entretanto, ao estudar as propriedades e problemas relacionados a cada uma delas, não parece sensato tratá-las simultaneamente no início, devendo-se escolher uma delas. No tocante ao ensino da reflexão, intuitivamente simples, há várias pesquisas mostrando as dificuldades do seu ensino quando se trabalham suas propriedades geométricas. A translação, intuitivamente acessível, na sua formalização torna-se dependente da noção de vetor, algo que talvez não seja recomendável para uma abordagem inicial. Por outro lado, a rotação, também intuitivamente clara, a despeito de depender de um número maior de parâmetros que as outras duas, não exige conhecimentos especiais e aparece menos nos trabalhos de pesquisas que a reflexão. Por isso, interessamo-nos pela rotação como uma candidata a ser a primeira transformação a ser apresentada aos estudantes.

Nossa experiência, os livros didáticos e as recomendações curriculares dos países que pesquisamos nesse trabalho sugerem uma resposta, ainda que parcial, à questão 4: seria insensato iniciar o estudo da rotação com os alunos da 5ª série a partir do conceito de função de plano no plano, como fizemos no capítulo 2. As razões são várias: em geral, os desconhecem o conceito de função e a álgebra relacionada à mesma, o conceito de plano como conjunto de pontos, não dominam a notação algébrica, etc. Por outro lado, os movimentos de rotação de objetos físicos fazem parte dos conhecimentos prévios dos alunos nessa idade e, devidamente utilizados, podem ser úteis para o desenvolvimento das idéias mais abstratas que definem a rotação como uma transformação.

Para responder à questão 5, seria preciso fazer uma análise conclusiva dos recursos didáticos (perspectivas de abordagens teóricas, métodos de ensino, ferramentas, etc), disponíveis para o ensino das transformações; o tema seria muito interessante, mas extremamente amplo. Decidimos estudar como a estrutura e a forma de aplicação de cada uma das duas seqüências de atividades e o conjunto de ferramentas oferecido para os dois grupos seriam vivenciados e utilizados pelos sujeitos do experimento. Estamos conscientes de que sistemas instrucionais e materiais manipulativos (na acepção mais geral desta expressão) têm menos transparência epistêmica do que o significado construído pela ação do aluno em suas relações com o professor, com os colegas e com o material.

Com relação à questão 6, a revisão da literatura nos levou a considerar uma série de dificuldades apontadas por outros pesquisadores no ensino das transformações, que tivessem uma relação mais estreita com o ensino e a aprendizagem da rotação. Essas dificuldades foram essenciais para o desenho do nosso experimento. No ambiente desse experimento é de se esperar que possam observar dificuldades no ensino e na aprendizagem.

Em vista do que foi exposto, podemos enunciar mais claramente nosso problema de pesquisa, referente ao ensino de rotação para a 5ª série:

No âmbito do conjunto das atividades planejadas e dos dois tipos de material empregados, em que medida cada um deles influencia o desempenho dos alunos?

CAPÍTULO 4

4.1 INTRODUÇÃO

Este capítulo se destina à apresentação do nosso estudo. Inicialmente, mostraremos algumas características relevantes dos sujeitos da pesquisa e do ambiente da aplicação da investigação: idade, local, datas, duração, etc. Em seguida, descreveremos o estudo em suas três fases principais, aplicadas em três momentos diferentes: pré-teste, conjunto de atividades em classe e pós-teste. No caso dos instrumentos diagnósticos, o pré e o pós-teste, comentaremos somente os pormenores indispensáveis às considerações finais de análise de resultados; na apresentação das atividades desenvolvidas nas seqüências, iremos expor as metas e expectativas de cada sessão, com algumas amostras das situações apresentadas, selecionadas pela sua representatividade. O conteúdo total do material referente aos três blocos encontra-se nos anexos deste trabalho.

4.2 Apresentação do estudo

Nossa investigação versa sobre as várias dimensões (dificuldades de aprendizagem e ensino, aspectos cognitivos das atividades dos sujeitos, técnicas e estratégias, uso de material manipulativo e instrumentos, etc) que envolvem o conceito de rotação para alunos da 5ª série do Ensino Fundamental (10-11 anos), tendo sido esse conceito desenvolvido ao longo de 8 encontros de 50 minutos com os sujeitos. Foram aplicados testes antes e depois desses encontros.

O primeiro contato ocorreu quando foi aplicado o pré-teste, com duração de 1 hora, para 40 alunos escolhidos dentre os da 4ª série do Ensino Fundamental de uma escola particular de São Paulo, em novembro de 1999. O critério utilizado para a seleção desses estudantes será explicado na seção 4.2.1.1. O motivo pelo qual escolhemos a escola mencionada acima reside no fato de conhecermos seu currículo, suas concepções pedagógicas e sua filosofia de trabalho. Isso foi muito importante, pois nos permitiu estabelecer alguns parâmetros iniciais na elaboração de nossa seqüência e, certamente, do próprio pré-teste.

Dos objetivos do *pré-teste*, o fundamental era avaliar as concepções prévias dos sujeitos em relação à rotação como transformação geométrica: sentido da rotação, magnitude da rotação (medida do ângulo em graus), centro da rotação e congruência das figuras objeto e imagem. Queríamos também verificar se os resultados poderiam dar pistas sobre a natureza das atividades a serem propostas na seqüência. Além disso, pretendíamos identificar os fatores que poderiam interferir na resolução dos problemas a serem propostos: compreensão dos enunciados, uso correto do material de desenho, extensão da atividade, grau de dificuldade do problema, complexidade da figura, etc. Finalmente, acreditávamos que os resultados pudessem sugerir alguma forma de selecionar os sujeitos para a composição dos dois grupos de trabalho.

As *seqüências de atividades* foram organizadas através de material impresso. Cada conjunto desse material, apresentando diferenças entre as duas turmas, era composto de três módulos, chamados *sessões* e cada sessão se compunha de um certo número de *folhas*, cada uma delas consistindo numa série de atividades. Em princípio, cada folha seria destinada para um encontro, mas aos alunos seria permitido solicitar novas folhas, pois o pré-teste indicava que os ritmos dos alunos poderiam ser diferentes.

Os oito encontros seguintes, para cada grupo, ocorridos no período de maio a setembro do ano 2000, com os alunos cursando a 5ª série, foram dedicados ao desenvolvimento das atividades. Cada encontro tinha a duração de uma aula regular da escola, ou seja, 50 minutos. Os alunos saíam de suas classes e se reuniam em uma sala especial, destinada à aplicação da pesquisa. Adotamos esta estratégia, pois ela garantia a participação regular dos alunos engajados no projeto e evitava que se dispersassem. Como sabemos, nessa idade os alunos têm menor autonomia para participar de atividades extra-classe, além da propalada dificuldade de se dedicar a um único objeto de estudo por um intervalo de tempo muito prolongado.

Não sabíamos exatamente quanto tempo seria gasto em cada folha, nas condições dadas; no final, a média foi maior que a de uma folha por sessão, pois havia um total de 10 folhas (2 na primeira, 5 na segunda e 3 na terceira sessão, respectivamente). A irregularidade na distribuição das folhas se deve ao tratamento do conteúdo destinado a cada uma. O material em geral apresentava informações, definições e várias propostas investigativas que pudessem levar à construção de conceitos, além de exercícios e situações-problema.

Em cada grupo, as crianças trabalharam individualmente na primeira e na terceira sessões e com um companheiro na segunda sessão. A intervenção do pesquisador/professor, auxiliado por uma pessoa leiga, deu-se apenas quando necessário em situações previstas e algumas não previstas, que iremos mencionar em nossa análise no capítulo 5. Todos os encontros foram filmados, procurando-se sempre focalizar o trabalho de algum aluno ou dupla previamente determinados. Entretanto, os vídeos seriam utilizados para a análise dos resultados somente no caso de se querer confirmar alguma observação sobre o comportamento dos estudantes. A essa totalidade (encontros, material, atividades dos alunos e intervenções do pesquisador) iremos denominar *seqüência de atividades*. As duas seqüências diferiam pelos instrumentos utilizados pelos sujeitos e pelas características de algumas atividades, conforme iremos detalhar mais adiante. As folhas foram planejadas de forma a conter o máximo de atividades comuns, mas foram inevitáveis certas diferenças em suas apresentações gráficas (não conceituais), já que certas situações eram específicas para cada grupo. No que segue, iremos chamar de IC (instrumentos clássicos) o grupo dos alunos que utilizam como instrumentos de trabalho a régua não graduada e o compasso e de IA (instrumentos alternativos), o grupo de alunos que utilizam também outros equipamentos como instrumentos.

O último encontro, ocorrido cerca de 6 semanas após o encerramento das atividades mencionadas acima, foi dedicado à aplicação do *pós-teste* para as duas turmas, com duração de 1h 30min. O pós-teste foi elaborado de forma a conter as questões menos acertadas do pré-teste e as atividades mais significativas das seqüências; durante o teste, os alunos tinham liberdade de empregar os instrumentos utilizados nas seqüências.

A seguir, iremos descrever cada uma das três fases acima com mais detalhes. Para sintetizar um pouco a exposição, iremos aglutinar a primeira e a terceira fases.

4.2.1 Instrumentos diagnósticos

4.2.1.1 Pré-teste

Usualmente o pré-teste está comprometido com as concepções prévias do pesquisador e pode não se revelar inteiramente adequado ou satisfatório. Além da questão dos seus pressupostos, pode apresentar problemas de forma. Para ajustar melhor o pré-teste e procurar eliminar os fatores que pudessem interferir e mascarar os resultados, aplicamos um pré-teste piloto. Foram escolhidos dois estudantes da 6ª série aos quais foram dadas apenas instruções de como fazer o teste. Com base nos resultados do teste-piloto, foi possível eliminar vários trechos obscuros dos enunciados e tarefas inapropriadas (muito imediatas, portanto sem significado ou muito complexas, portanto irrealizáveis ou, ainda, sem conexão com as noções investigadas).

Completado o ajuste mais refinado do teste, foram escolhidos os sujeitos da investigação, conforme exposto anteriormente. As principais razões pelas quais foram escolhidos esses alunos eram as seguintes:

a) tinham todos a mesma faixa etária (entre 9 e 10 anos), pois a escola faz seleção dos alunos ingressantes, estabelecendo limite máximo de idade para matrícula e, além disso, alunos retidos não podem continuar freqüentando a escola;

a) os alunos já estavam habituados a trabalhar com régua e compasso em atividades simples de Desenho Geométrico;

a) esses alunos já haviam trabalhado com ângulos medidos em graus, usando o transferidor;

a) eles nunca estudaram transformações geométricas formalmente.

O pré-teste, com duração de uma hora, foi aplicado pelo experimentador auxiliado por duas professoras da escola. Na capa do caderno de testes foi anotado o tempo de cada estudante. Propositalmente, a comunicação aos alunos foi muito sucinta, limitando-se à exposição do motivo dessa atividade de uma forma que os motivasse ("ajudar a melhorar o ensino da Matemática"...) e as regras da aplicação do teste. O exame compôs-se de 21 questões, algumas com mais de um item. Entre os tipos de ações propostas aos estudantes, estavam:

- leitura compreensiva de texto (dar significado para as informações, compreender instruções, interpretar dados, entender definições, etc);
- redação de descrições e explicações;
- medição de ângulos com o transferidor e representação dessas medidas;
- construções geométricas elementares com régua e compasso (transporte de segmentos, traçado de perpendiculares e paralelas, traçado de arcos de circunferência, traçado da mediatriz, etc);
- escolha, dentre várias possibilidades, de elementos visuais que completam adequadamente uma configuração representativa de uma rotação;
- aplicação de concepções prévias da rotação no reconhecimento dos parâmetros de rotação: sentido, ângulo, centro de rotação;

- aplicação de conhecimentos prévios referentes às propriedades da rotação: congruência da figura original e imagem, igualdade das distâncias de pontos correspondentes ao centro de rotação, etc.
- construção da imagem em situações simples de rotações de figuras representando objetos físicos ou figuras geométricas elementares.

4.2.1.2 O pós-teste

É comum alguns estudos utilizarem-se de dois pós-testes: um imediato, aplicado logo após o encerramento da seqüência e outro aplicado mais tarde, o chamado *delayed pós-teste*. Às vezes, o pós-teste é aplicado ao longo do desenvolvimento do estudo, quando este é muito demorado. A diferença entre o teste imediato e o *delayed* consiste no fato de que este último pode indicar os elementos da aprendizagem mais permanentes. É claro que mesmo esta medida é relativa, mas existe uma preocupação legítima relativa ao fato de que muitos alunos respondem com base na memória recente, dando um indicador falso do seu grau de apropriação de um determinado conceito. Em nossa investigação, optamos por aplicar somente um pós- teste, 40 dias após a última atividade realizada pelos estudantes. Foi feito simultaneamente por todos os sujeitos que permaneceram participando da pesquisa, num total de 17 alunos do grupo IC e 16 alunos do grupo IA. O tempo máximo de realização da prova foi de 1h 30min e aos alunos que terminaram antes foi dada a permissão para deixarem o recinto.

No início do teste, o pesquisador deu as devidas instruções para os estudantes, avisando-os de que as perguntas não eram permitidas, salvo em situações especiais, como problemas com o material ou de ordem fisiológica do aluno; foram alertados também para o fato de que o teste era individual e que deveriam utilizar somente o material que estava à sua disposição na carteira e na pasta (os alunos foram misturados e espalhados pela sala, de grandes dimensões, assegurando que nenhum sujeito tivesse ao seu redor algum companheiro de grupo – além do pesquisador, duas outras pessoas auxiliaram na aplicação do teste). A realização da prova foi registrada em vídeo.

O pós-teste compôs-se de 23 questões, com estrutura semelhante à do pré-teste, porém com novos elementos de avaliação, já que 9 questões eram praticamente iguais às do pré-teste, sendo as demais questões equivalentes às situações encontradas nas seqüências.

Uma característica importante dos instrumentos diagnósticos se refere ao fato de que procuram avaliar o grau de apropriação dos estudantes daquilo que chamamos neste estudo de *parâmetros da rotação*: o sentido da rotação (horário ou anti-horário), a magnitude da rotação (medida do ângulo de rotação em grau), o centro de rotação (ponto fixo da transformação) e também da *isometria da rotação* (congruência da figura e da imagem). Aquilo que chamamos de *parâmetros* são os elementos característicos de uma determinada rotação. Por exemplo, aquilo que denominamos *centro de rotação* é um parâmetro no sentido de que qualquer ponto do plano pode ser o centro de rotação, mas uma vez fixado, vai definir várias propriedades das configurações representativas de situações de rotação que permanecem invariantes, como as distâncias AO e A'O, respectivamente, de um ponto do plano ao centro de rotação e da imagem desse ponto ao centro de rotação. Assim, os parâmetros , bem como os elementos invariantes, são elementos de análise para o pesquisador.

A ordem em que apresentamos o estudo dos parâmetros supostamente segue a ordem crescente da dificuldade do manejo desses parâmetros: iniciamos com o **sentido** da rotação, porque ele tem somente dois valores: horário ou anti-horário e não exige medida para ser caracterizado. Se quisermos, ele pode ser trabalhado no nível intrafigural somente. O parâmetro **ângulo** de rotação é mais complexo, pois envolve diferentes noções de ângulos e depende do conceito de medida. Ele pode se apresentar como um elemento de análise interfigural, além da intrafigural: enquanto comparamos dois ângulos num triângulo, estamos no nível intrafigural mas ele é interfigural quando se trata de medir o ângulo de rotação, pois aí precisamos relacionar elementos de duas figuras: da inicial (original) e da final (imagem). Entretanto, ângulo é algo que não é totalmente desconhecido dos alunos, do ponto de vista global, de acordo com os resultados do pré-teste. O parâmetro **centro** de rotação parece ser o mais difícil de ser apropriado: ele pode ser tratado no nível intrafigural, como é o caso de figuras que giram em torno de seus centros ou de outros pontos que pertencem a essas figuras; mas a maioria das situações exige o pensamento no nível interfigural, onde a figura original e a figura imagem se relacionam entre si, mas se relacionam também com algo que está fora de ambas: o centro de rotação.

A **congruência** da figura original e da imagem é uma decorrência lógica da definição de rotação, se adotarmos a abordagem euclidiana clássica; entretanto, considerando-se o conhecimento prévio dos sujeitos de pesquisa, fica claro que a demonstração do caráter isométrico da rotação não pode ainda ser feita. Por outro lado, é essencial despertar a atenção dos alunos para o fato de que figura e imagem são congruentes, evitando que se sedimentem concepções errôneas; isso não parece particularmente difícil, pois uma abordagem inicial intuitiva supõe que forma e tamanho das figuras rotacionadas não mudam. Consideramos que a congruência, na visão de Euclides, segundo Jahn (1998), tem um caráter intrafigural; no caso de simetrias, a imagem e o original se confundem, de forma que a análise da situação tem um enfoque intrafigural também, mas a prova de que original e imagem numa rotação não simétrica são congruentes tem um forte componente interfigural.

Procuramos isolar os parâmetros, criando algumas situações em que somente um deles mudava, mas essas situações são muito particulares. As ocorrências de rotações em geral mobilizam todos esses parâmetros. Em todo o estudo, seja na elaboração dos instrumentos diagnósticos, seja na concepção das seqüências, essas idéias estiveram sempre presentes.

4.2.2 As seqüências

Os 40 alunos que fizeram o pré-teste foram classificados por seu desempenho; os alunos cuja ordem de classificação era ímpar foram designados para a turma IC e os alunos de ordem de classificação par formaram a turma IA. Por comodidade de referência, denominamos IC tanto o grupo de alunos quanto a seqüência em que se utilizava basicamente a régua e o compasso como instrumentos do Desenho Geométrico tradicional e por IA, o grupo de alunos e a seqüência em que outros materiais manipulativos, descritos com detalhes mais adiante, eram utilizados. As seqüências também tiveram algumas diferenças na formulação de algumas atividades, principalmente no início, quando certas situações eram mais contextualizadas para a turma IA, conforme veremos.

Em 2000, com o retorno às aulas, por motivos variados, 5 estudantes não puderam participar das atividades, tendo restado 19 estudantes para a turma IC e 16 estudantes para a turma IA. Começamos nossas seqüências com 35 alunos, portanto.

Como já dissemos, as atividades foram programadas para o aluno trabalhar, individualmente ou em parceria com outro aluno, em algumas delas, sem a intervenção do professor-pesquisador, excetuando-se as condições usuais em que isso era inevitável, como a incompreensão das definições ou instruções dadas no texto, a utilização incorreta de instrumentos ou dos materiais colocados à disposição do aluno, desconhecimento da simbologia ou nomenclatura, etc. Não foram previstas portanto ações diretas de ensino por parte do professor/pesquisador, à exceção dos casos (supostamente reduzidos) em que se tornaria necessária a intervenção geral para o esclarecimento de algum ponto particularmente difícil da seqüência.

Foi montada uma pasta para cada estudante, etiquetada com seu nome, contendo o material a ser utilizado (instrumentos e objetos manipulativos), descrito na tabela a seguir:

turma IC – pasta azul	turma IA – pasta cinza
régua sem escala	régua sem escala
compasso escolar, com ponta de grafite	compasso escolar, com ponta de grafite
borracha macia	borracha macia
2 lápis 02	2 lápis 02
esquadro de 30º	
transferidor	
	transpel
	folha de papel vegetal
	2 palitos de fósforo
	6 palitos de sorvete, com furos em diferentes posições
	botão amarrado a uma linha

Quadro 4.1: ferramentas disponíveis para dos dois grupos

Foram dadas instruções prévias para a utilização do material, procurando-se levar cada aluno a se responsabilizar pela sua conservação e organização. No final de cada encontro, o estudante devolvia a pasta, que era sistematicamente revisada por um auxiliar, assegurando que no próximo encontro tudo estaria em perfeitas condições de uso.

As folhas de atividade foram entregues a cada aluno seqüencialmente, à medida que o aluno (ou a dupla) fosse cumprindo as tarefas, sendo vedado o prosseguimento sem o completamento de cada atividade. O experimentador procurou controlar esse fluxo, evitando defasagens muito acentuadas, mas nem sempre foi bem sucedido, conforme veremos.

4.2.2.1 Metas, expectativas e ilustrações de atividades dos encontros realizados

A elaboração das atividades constituintes das seqüências IC e IA foi guiada por um conjunto de metas de ensino e expectativas em relação à produção dos alunos. No que segue, iremos estabelecer uma comparação, quando significativa, entre as duas seqüências, no que se refere ao uso do material e na particularidade da atividade, quando esta se encontrar na dependência do material utilizado. A tabela a seguir mostra o número de atividades propostas para cada folha, em cada uma das sessões, para as duas turmas:

sessão	folhas de atividades IC					folhas de atividades IA					método de trabalho
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	
1	11	7				9	9				individual
2	3	10	10	9	8	3	10	10	9	8	dupla
3	6	5	4			6	5	4			individual

Iremos expor, em seguida, o que seria desejável obter em cada sessão ou mesmo em cada atividade (metas), o mínimo que se esperava obter da maioria dos sujeitos (expectativas) e dar alguns exemplos de atividades, com comentários adicionais. As versões integrais das seqüências IC e IA constituem os anexos 2 e 3, respectivamente.

Sessão 1, folha 1 – familiarização com o uso dos instrumentos

a) metas

Inicialmente, julgamos imprescindível exercitar o uso do material dos instrumentos de desenho e do material manipulativo, do ponto de vista das habilidades manuais: com lápis e régua, como traçar segmentos de reta com precisão; com o compasso, como transportar ou comparar segmentos de reta sem medir seu comprimento, desenhar circunferências com precisão (usar corretamente o compasso, pressionando mais a ponta seca, apontar corretamente a grafite, etc). Entretanto, a mera manipulação pode não promover a transparência do material. Por isso propusemos avaliar e desenvolver conceitos relacionados com o uso desses materiais na construção de figuras geométricas simples e isso, por sua vez, implicava retomar alguns conceitos básicos da geometria plana e tornar a linguagem mais precisa (terminologia e simbologia adequados, como segmento de reta, congruência, perpendicular, etc). No quadro a seguir, apontamos algumas diferenças entre as duas abordagens.

TURMA IC	TURMA IA
esquadro: traçar perpendiculares e ângulos retos	transpel: para traçado de perpendiculares e ângulos retos
avaliar e desenvolver competências e habilidades nas operações com régua e compasso, como: o transporte de um segmento com régua e compasso para marcar as extremidades; usar o compasso para comparar tamanhos de segmentos e para comparar distâncias de vários pontos a um ponto, caracterizando a circunferência como um lugar geométrico; copiar figuras usando régua e esquadro ou compasso com base em propriedades de paralelismo e perpendicularismo.	avaliar e desenvolver idéias e conceitos básicos da geometria no nível de operações com o material alternativo, como: transportar um segmento com régua e papel vegetal para marcar as extremidades; usar o papel vegetal para copiar uma figura (colagem, que subentende o princípio da superposição); avaliar e desenvolver a habilidade na utilização do vegetal e transpel para construir figuras, com base na transferência de propriedades invariantes.

Quadro 4.2: diferenças no manejo e emprego dos instrumentos

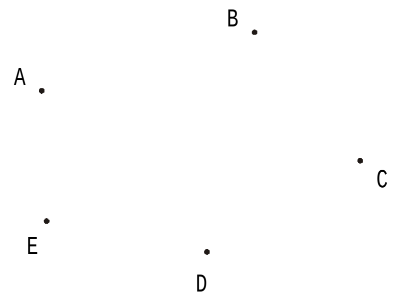
b) expectativas

Segundo os resultados do pré-teste, esperávamos dificuldade na manipulação do compasso; o transpel, em algumas situações podia ser usado como substituto do compasso, mas isso também não seria simples, dado que os estudantes não estavam acostumados a usar esse recurso. Achávamos também que os alunos estranhassem o uso da régua sem escala. Nossa intenção, ao eliminar a escala da régua, era evitar estratégias que dependessem da medida de comprimentos, incentivando o uso do compasso e do transpel para transportar segmentos. Dado o caráter informativo de algumas partes das folhas, com a introdução de palavras e conceitos possivelmente novos, era de se esperar que os alunos fizessem perguntas relacionadas com a falta de compreensão do texto.

Era razoável supor também que os estudantes usassem as estratégias mais “ingênuas”, isto é, as que menos dependessem dos axiomas de construção com régua e compasso, dado que esses instrumentos não parecem ter a transparência que usualmente lhes é atribuída. Por exemplo, ao tentar descobrir os pontos que estão à distância OA, na questão 2 ilustrada a seguir, os alunos poderiam tentar fazê-lo sem empregar a estratégia mais eficiente, que seria o uso do compasso.

c_1) alguns exemplos (atividades comuns às turmas IC e IA)

1. Você deverá traçar todos os segmentos de reta cujas extremidades são dois dos pontos mostrados abaixo. Capriche!



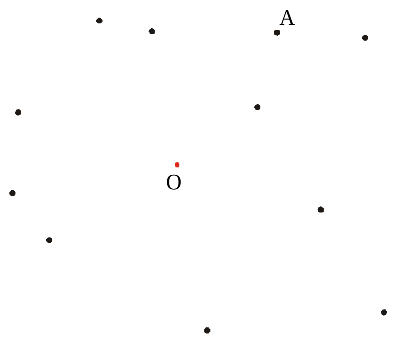
A atividade visa exercitar o uso da régua e do lápis, perguntando-se em seguida quantos segmentos foram traçados (para desafiar um pouco os alunos).

c_2) exemplos (turma IC):

4. Usando sua régua ou régua e compasso, desenhe no espaço abaixo um segmento que tem o mesmo comprimento que o segmento EC.

Esta é uma atividade que visa exercitar o transporte de segmentos sem medi-los.

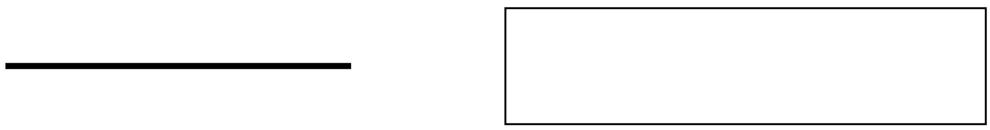
7. O ponto A está a uma certa distância do ponto O. Há outros pontos que estão a essa mesma distância do ponto O. Ache todos eles e diga quantos são.



Com compasso centrado em O e raio AO traça-se a circunferência que contém todos os pontos procurados. Uma estratégia menos econômica consiste em transportar AO para comparar com todas as distâncias dos pontos a O e, na pior das hipóteses, medir essas distâncias.

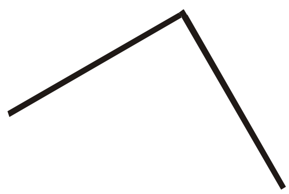
c_3) exemplos (turma IA):

2. Usando régua e o papel vegetal, copie o segmento de reta abaixo no quadro à direita.



O aluno deve usar o papel vegetal para transportar o segmento. Ao fazê-lo, terá que escolher entre decalcar todo o segmento (fazendo uma espécie de carbono com a grafite) e copiá-lo no quadro ou somente marcar as duas extremidades no vegetal (com a ponta seca do compasso, por exemplo) e reproduzi-las no quadro, completando o desenho com régua.

9. Termine de desenhar o quadrado:



Uma das "boas" soluções consiste em decalcar a figura acima, girar a imagem e fazer coincidir um dos lados; o vértice desconhecido aparece imediatamente, faltando somente traçar os lados com uma régua.

Sessão 1, folha 2 – concepções de ângulos e suas medidas

a) metas

Retomar o conceito estático de ângulo como a “abertura” entre dois segmentos ou, mais intuitivamente, entre dois palitos que se tocam. Certamente, esta é uma das múltiplas acepções de ângulo, mas a única que seria utilizada no momento. Visávamos também exercitar a habilidade de estimar grandezas angulares, usando o grau como unidade. Mais importante, porém, era exercitar a habilidade no uso dos instrumentos de medida de ângulos, ou seja, o transferidor para a turma IC e o transpel para a turma IA.

Objetivávamos também explorar a linguagem e a simbologia usual empregada em ângulos, buscando empregar corretamente os termos *vértice, lado do ângulo, medida do ângulo* e suas representações simbólicas.

Considerando as indicações do pré-teste, achamos importante enfatizar o reconhecimento e a construção do ângulo de 180^o, em diversas situações.

TURMA IC	TURMA IA
exercitar a capacidade de estimar ângulos apresentados graficamente como reunião de dois segmentos (representando duas semi-retas);	exercitar, através da manipulação (palitos de fósforos ou imagens de ângulos formados por objetos), a capacidade visual de avaliar ângulos; exercitar também a mesma habilidade com ângulos representados como na turma IC;
exercitar o uso do transferidor para medir ângulos, distinguindo as duas escalas (horária e anti-horária), posicionamento correto do instrumento, traçados auxiliares para medida precisa, etc;	exercitar o uso do transpel para medir ângulos (com precisão menor do que a dos transferidores – a escala é de 5 em 5 graus, para não sobrecarregar a figura, tornando a folha opaca);
exercitar o uso do transferidor para a construção gráfica de ângulos de diversas medidas.	exercitar o uso do transpel para a construção gráfica de ângulos de diversas medidas.

Quadro 4.3 – diferenças no uso dos instrumentos para medir ângulos

b) expectativas

Dadas as dificuldades de natureza perceptiva causadas pelas duas escalas do transferidor, em situações como a de medir ângulos com lados inclinados, ou no sentido horário, previmos a necessidade de orientação direta para alguns estudantes. Esperávamos, com isso, reduzir a ocorrência de leituras errôneas.

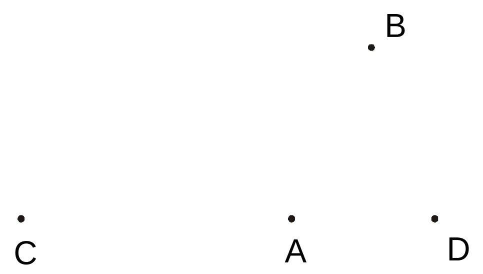
No caso do transpel para medir ângulos, principalmente porque a escala é impressa no papel vegetal e varia de 5 em 5 graus, sendo necessário também aprender a manuseá-lo, posicionando corretamente a reta de referência, programamos instrução prévia para todos os participantes.

A linguagem formal utilizada na representação de ângulos poderia causar alguma dificuldade e isto era o que prevíamos para alguns alunos com baixo desempenho no pré-teste.

A discriminação visual do ângulo raso ou de meia-volta, isto é, o ângulo de 180^{o}, pode causar dificuldade, pois pode ser confundido com uma reta ou segmento de reta. Esse obstáculo foi detectado no pré-teste e era possível que se repetisse.

c_1) exemplo (turmas IC e IA):

7. Temos, abaixo, alguns pontos. Trace todos os ângulos que têm vértice A.[1]



Qual é a medida do menor ângulo? Resposta:________________

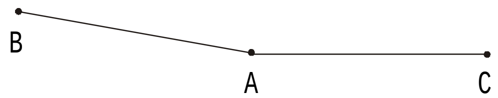
Qual é a medida do maior ângulo? Resposta:________________

Nesta atividade, basta traçar dois dos três ângulos CÂB, CÂD e BÂD. O menor ângulo mede 65 ^{o} *e o maior mede 180* ^{o}.

[1] Na turma IA, pedia-se todos os ângulos com vértices nos pontos (tarefa um pouco mais demorada)

c_2) exemplo (turma IC):

4. Na figura abaixo, os segmentos AB e AC formam um ângulo. Qual é a medida desse ângulo?

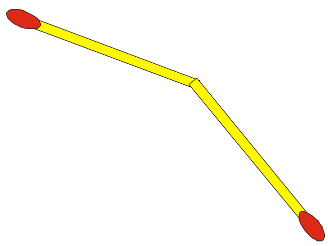


Resposta:__________

Basta usar o transferidor para obter 170 º.

c_3) exemplo (turma IA):

2. Qual é a medida do ângulo abaixo?



Resposta:_____________

Usando o transpel, o estudante deve obter 150 º .

Sessão 2

Os alunos trabalharam em duplas, organizadas de acordo com as suas preferências, pois julgamos que a amizade entre os companheiros de dupla pudesse contribuir mais positivamente que outros fatores (houve casos em que a dupla não deu certo; demos liberdade para que fizessem as devidas trocas). As atividades da folha 1, 4 e 5 são exatamente as mesmas para as duas turmas.

Sessão 2, folha 1 – sentido de uma rotação

a) metas

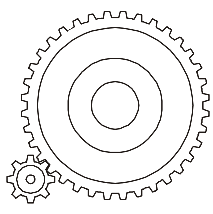
Visávamos solidificar o conceito de sentido de rotação, com base na intuição e referência a objetos físicos (ponteiros do relógio, engrenagens, chave de fenda, etc) e estabelecer uma convenção para identificar o sentido da rotação, através de uma flecha curva. Na engrenagem isolada, a análise é intrafigural; na comparação dos sentidos entre duas engrenagens, é interfigural.

b) expectativas

Esperávamos que a noção de sentido de rotação fosse familiar a todos os alunos e que a convenção estabelecida não apresentesse dificuldade a nenhum dos alunos. A comparação entre os sentidos das duas engrenagens não nos pareceu difícil, pois é contextualizada.

c_1) exemplo (turmas IC e IA)

2. No desenho abaixo, temos duas engrenagens. A maior gira no sentido anti-horário. Coloque flechas indicando o sentido da rotação de cada engrenagem



Aqui, basta colocar as flechas (a da engrenagem maior no sentido anti-horário e a menor no sentido horário).

Sessão 2, folha 2 – ângulo de rotação e imagem de figura

a) metas

Entre as finalidades desta folha, destacamos a de desenvolver o conceito de ângulo de rotação, ultrapassando a concepção usual de ângulo visto como algo estático e estabelecer a concepção de figura *original* e figura *imagem* numa configuração representativa de uma rotação, exercitando essa terminologia. Visamos fazer com que os alunos comecem a empregar o raciocínio interfigural e comecem a fazer emergir a transparência dos instrumentos.

Objetivava-se também firmar a convenção do menor ângulo de rotação, em caso de ambigüidade, ou seja, nas situações de reconhecimento em que se fornece somente original, imagem e centro de rotação. Para isso, seria necessária a apropriação da noção de medidas maiores do que 180^o. Com relação à questão da medida de ângulos, a proposta era desenvolver a habilidade de avaliar e medir ângulos de rotação em configurações dadas, bem como desenvolver a capacidade de utilizar corretamente a noção de ângulo de rotação na construção de imagens.

Nessa atividade, a preocupação com a isometria começa a surgir. Por isso, propusemos várias atividades de análises de configurações onde esse parâmetro também foi explorado. Por outro lado, achamos que uma repetição muito grande de situações semelhantes pudesse diminuir a motivação dos estudantes.

TURMA IC	TURMA IA
enxergar a configuração formada por dois segmentos congruentes com extremidade comum como dois objetos ligados pela relação (transformação) de rotação definindo-se os termos “original” e “imagem”, com ênfase na medida do ângulo de rotação.	através da manipulação de dois palitos de sorvetes superpostos sobre o transpel, construir um modelo de configuração de rotação; esse modelo tem base física e apresenta uma situação “antes” e “depois”. É preciso abstrair, para que seja possível, ao nível da representação, distinguir a figura origem da figura imagem.
trabalhar situações de rotações de segmentos, com reconhecimento de configurações ou exercícios de construções, onde a parâmetro mais importante é o ângulo de rotação.	trabalhar situações de rotações de figuras que representam objetos físicos como palitos de fósforos, palitos de sorvetes com furos nas extremidades, lápis, com reconhecimento de configurações ou exercícios de construções, onde a parâmetro mais importante é o ângulo de rotação.

Quadro 4.4: ângulo de rotação e abordagens distintas da noção de imagem

b) expectativas

Devido à abordagem, achamos que o texto definindo imagem e original na turma IC ficou muito abstrato e direto, tornando-se mais difícil de compreender que o da turma IA, que teve a mediação do modelo físico: o aluno iria girar palitos e representar o que estava vendo e não imaginando; portanto, estávamos esperando ter que intervir mais no grupo IC, nesse ponto, talvez apelando um pouco para a intuição imaginativa, comparando segmentos com palitos. Na verdade, estávamos esperando ter que ajudar na leitura dos textos explicativos de ambas as turmas, não somente nesta parte.

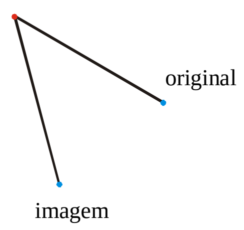
Esperávamos ter que explicar para todos os alunos o que são ângulos de medida maior do que 180^o.

Apesar de achar que os alunos teriam dificuldades para justificar suas atividades, pensávamos que as tarefas seriam satisfatoriamente enfrentadas por todos os sujeitos.

a) exemplos (turma IC):

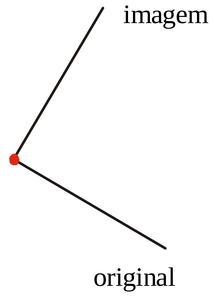
No desenho abaixo, temos dois segmentos de mesmo comprimento formando um ângulo de 45^o. Um deles é chamado original e outro é chamado imagem e dizemos que eles se relacionam por meio de uma rotação de 45^o no sentido horário, em torno do ponto vermelho.

1. No sentido anti-horário, há uma outra rotação que também relaciona os dois segmentos acima. Descreva essa rotação.



Nesta atividade, queremos estabelecer apenas o status de cada uma das partes da configuração, apresentando uma definição. Um ângulo de medida α considerado como a figura *geométrica composta de dois segmentos pode ser visto como uma rotação, onde um dos lados é o original e o outro, a imagem, sem que já seja necessário falar explicitamente em deslocamento. É explorada também a noção de que se possa imaginar uma outra rotação com o mesmo efeito: a que se dá no sentido contrário, de medida* $360^{o} - \alpha$.

2. Em nosso estudo, quando houver dúvida sobre qual das rotações considerar, iremos escolher sempre a de menor ângulo. De acordo com essa convenção, na rotação representada abaixo, o sentido é__________________ e o ângulo é de ____.

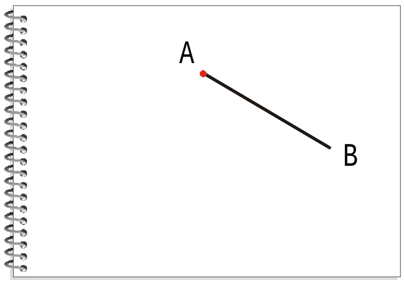


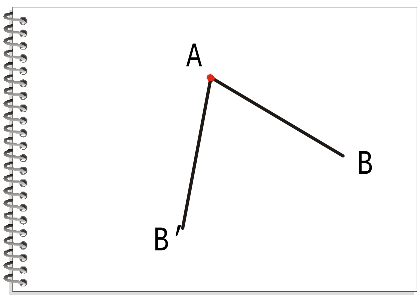
Aqui, estabelecemos a convenção do menor ângulo para as rotações. O estudante deve responder, então, que o desenho representa a rotação de 90^{o}*, no sentido anti-horário.*

5. Joana tinha um segmento AB desenhado no seu caderno, como mostra a figura ao lado. Ela desenhou a imagem da rotação desse segmento em torno do ponto A, de 80^{o} no sentido horário. Seu desenho ficou assim:

Você acha que está está certo ou errado?________

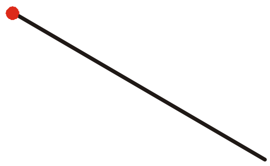
Por quê?





Nesta atividade, o aluno deve analisar a configuração e verificar se ela corresponde à rotação proposta. Para isso, ele vai ter que verificar centro, sentido, ângulo e isometria da imagem. Se algum desses elementos tiver valor diferente, a figura representando a rotação estará errada. No caso, a medida do ângulo é de 70 ^{o}, logo a figura está errada.

10. Desenhe a imagem do segmento desenhado abaixo, na rotação de 100^{o} ao redor do ponto vermelho, no sentido horário.

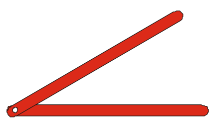


Esta é uma atividade envolvendo construção com material de desenho: o aluno deve desenhar o segmento imagem, observando os parâmetros envolvidos na rotação.

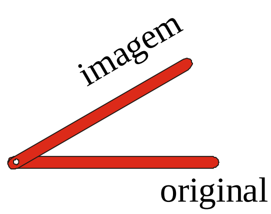
b) exemplos (turma IA):

Vamos supor que alguém lhe mostra o **desenho** de um palito:

e peça para você desenhar o palito após uma rotação de 30^{o} anti-horária em volta do furo. O desenho ficará assim:



Olhando para este desenho, temos a impressão de que são dois palitos. Para evitar confusão, escrevemos no desenho:



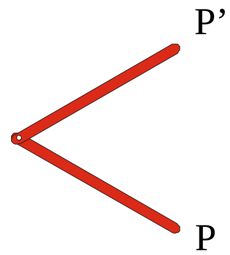
Olhando o desenho, podemos descrever a rotação ao redor do furo que muda o palito de sua posição inicial (original) para a sua posição final (imagem). Na verdade, podem ser dadas duas descrições diferentes: pode ser uma rotação de _____ (complete) no sentido horário ou uma rotação de ____ (complete) no anti-horário. Neste estudo, <u>você deverá escolher sempre o menor ângulo de rotação</u>.

4. No desenho ao lado, o palito P é o original e o palito P' é a imagem, numa certa rotação.

A rotação ocorre em volta do ___________.

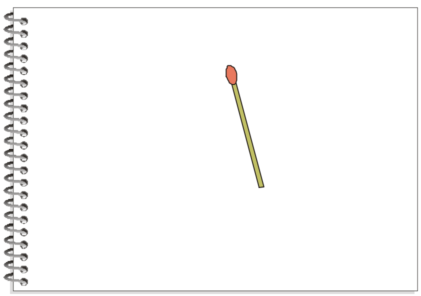
O sentido da rotação é o__________________.

O ângulo de rotação é de _______.



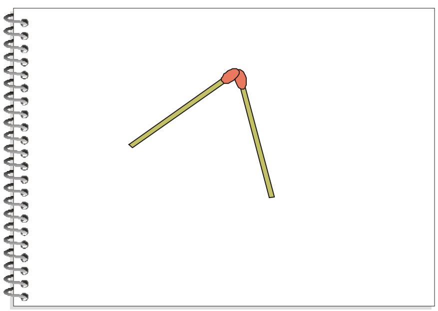
Esta atividade, destinada à turma IA, procura definir original e imagem a partir de uma situação concreta. Na representação do "antes" e do "depois" do movimento de um objeto físico pode surgir a ambigüidade que resolvemos da maneira descrita acima: o antes corresponde à figura original e o depois corresponde à figura imagem. A mesma atividade resolve também a questão da convenção do menor ângulo para identificar uma rotação.

5. Gabriela tinha um palito de fósforo desenhado em seu caderno, como mostra a figura ao lado. Ela imaginou uma rotação do palito de 80^{o} no sentido horário, ao redor da cabeça do palito. O desenho no seu caderno ficou assim:



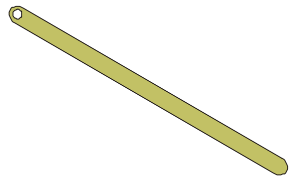
Você acha que está certo ou errado?_________

Por quê?



Mesma atividade que a correspondente da turma IC, só que aqui está contextualizada (refere-se a palitos).

10. Desenhe a imagem do palito desenhado abaixo, na rotação de 100^{o} ao redor do furo, no sentido horário.



Atividade semelhante à correspondente da turma IC, contextualizada. Por isso, a construção da imagem dá mais trabalho, mesmo que transportada pelo transpel.Para que o desenho seja preciso, é necessário reforçar os traços com a régua.

Sessão 2, folha 3 – considerando o centro de rotação

a) metas

Queríamos aqui estabelecer e desenvolver informalmente o conceito de centro de rotação. Essa noção já havia aparecido em atividades anteriores, pois em algumas das situações apresentadas era impossível desprezar o "ponto ao redor do qual gira a figura". Mas até então essa parâmetro era irrelevante ou secundário, pois o foco eram os outros parâmetros. Usamos a expressão "centro de rotação" sem explicá-la formalmente, já que isso seria impossível nesta altura (o centro de rotação é único ponto fixo da transformação rotação). A estratégia adotada para esse fim foi levar o estudante a perceber as diferenças nas rotações de um segmento (ou objeto físico de forma semelhante) quando se muda apenas o centro de rotação, através da construção das imagens dessas rotações.

Visava-se também desenvolver todos os aspectos e propriedades da rotação de um único ponto: sentido, ângulo e rotação. Note-se que aqui não existia a preocupação com a isometria, já que o ponto não tem dimensões. Entretanto, o sujeito deveria perceber que a distância AO é a mesma que a distância A'O (sendo A o original, A' a imagem e O, o centro de rotação) e que os pontos A e A' pertencem à mesma circunferência.

TURMA IC	TURMA IA
usar o compasso, a régua e o transferidor para a obtenção de imagens de pontos nas rotações onde o parâmetro principal é o centro: traçar reta AO, posicionar transferidor, marcar ângulo, traçar reta A'O e depois usar o compasso para marcar as distâncias iguais AO e A'O.	desenvolver a habilidade de construir imagens de rotações de pontos utilizando o transpel como o plano que rotaciona: posicionando corretamente o transpel, com centro em O, fazendo a reta de ângulo 0^o passar por A; marcar esse ponto no transpel; girar o transpel, no sentido correto, até cair sobre A a reta marcando o ângulo de rotação; decalca-se então A para se obter A' no papel original.
levar o sujeito a compreender as propriedades das rotações de 180^o: independência do sentido de rotação e a simetria central de um ponto e sua imagem, tornando-as ferramentas importantes para a obtenção de simetrias centrais, dispensando o uso do transferidor.	o transpel não tem elementos que facilitem as propriedades da simetria central (principalmente a questão do ponto médio) – entretanto, o compasso e a régua estão à disposição deste grupo.

Quadro 4.5 : possíveis estratégias de uso do material na rotação de ponto

b) expectativas

Achávamos que as construções de imagens de segmentos, vistos como figuras globais, seriam feitas pelos alunos de forma correta, pois no pré-teste já se notava uma certa facilidade em reproduzir imagens de segmentos.

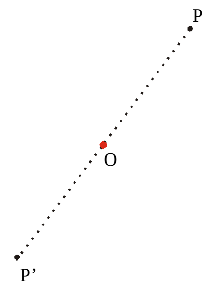
Contávamos com dificuldades na compreensão das explicações, como é o caso da rotação de um ponto (na turma IA, o botão com a linha pretendia dar um suporte mais concreto a essas idéias).

Achávamos que o ponto médio de um segmento era um conceito conhecido das crianças, que não teriam dificuldade em reconhecê-lo e usar a terminologia correta. Conseqüentemente, não esperávamos dificuldades na representação da imagem do ponto na rotação de 180^o. Dada a complexidade visual das construções, achávamos que as crianças tivessem bastante dificuldade na representação das imagens de dois pontos isolados numa rotação.

a) exemplo (turmas IC e IA):

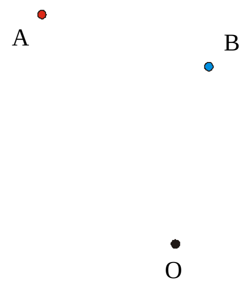
6./ 5. Nas rotações de 180^o, um ponto P e sua imagem P' ficam na mesma reta que passa pelo centro de rotação O. Neste caso, dizemos que o ponto O é o

____________________________ do segmento PP'.



O aluno deve se lembrar (porque já viu isso) que O é o ponto médio do segmento. Esse fato deve sugerir uma maneira mais fácil de achar a imagem de P: basta prolongar a semi-reta PO e nela marcar um ponto P' tal que P'O = PO.

10./ 9. Ache a imagem do ponto A e imagem do ponto B, ambos desenhados abaixo, na rotação de 90^o ao redor de O, no sentido horário.



Aqui o estudante deve traçar o segmento AO e, perpendicularmente a ele, o segmento A'O, obedecendo à orientação. Em seguida, traçar BO e perpendicularmente a este, B'O, obedecendo à orientação. É recomendável achar uma imagem por vez.

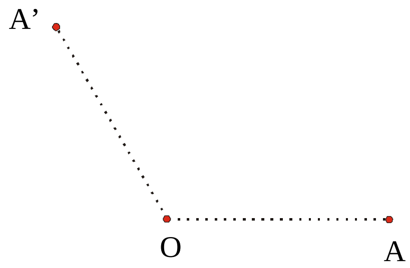
b) exemplo (turma IC):

3. A figura ao lado mostra a rotação de um ponto A em torno de O, de 120^{o} sentido anti-horário. O ponto imagem, por convenção, é representado por A’. Diga se

distância OA = distância OA’ ou se

distância OA ≠ distância OA’

Escreva como chegou à conclusão acima.



Nesta atividade, o estudante irá se preocupar com os três parâmetros apenas: direção, ângulo e centro, já que a questão da isometria da figura é irrelevante (um ponto não tem forma). Entretanto, a propriedade da invariância da distância dos pontos que giram ao centro de rotação se destaca aqui de forma bastante clara e é vital para o o acerto dessa questão. A utilização do compasso garante a melhor estratégia.

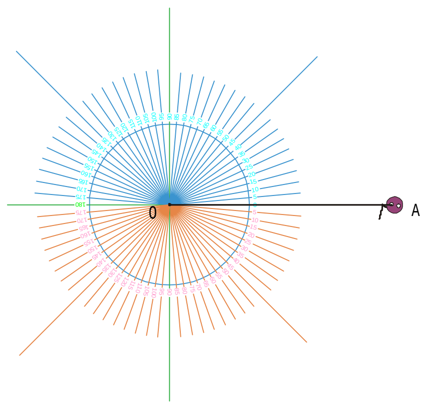
c) exemplo (turma IA):

3. Podemos girar apenas um ponto. Para ver como isso funciona, pegue o botão preso à linha e a prenda com a ponta do dedo, no ponto O, sobre o transpel; puxe o botão deixando a linha esticada, na posição A, como mostra a figura ao lado. Desenhe esse botão após um giro de 120^{o} no sentido anti-horário. Chame essa nova posição de A’. Marque com um X a resposta certa:

distância AO = distância AO’ ou se

distância AO ≠ distância AO’

Escreva como você chegou essa conclusão.



Esta atividade, destinada à turma IA, corresponde à atividade anterior da turma IC. Aqui, baseada na experiência física, a criança deve chegar à mesma conclusão. O único problema é que o botão não é um ponto e como tal levanta a questão da isometria da imagem (ela tem que desenhar um botão). Mas o importante é perceber que as distâncias do botão ao centro de rotação são iguais.

Sessão 2, folha 4 - o centro de rotação em situações mais complexas

a) metas

Nesta folha, idêntica para as duas turmas, a meta principal era refinar o conceito de centro de rotação, deslocando-o para fora das figuras (segmentos, triângulos e circunferências). Entre outras coisas, isto implica desenvolver as habilidades, específicas para cada turma, de construção de imagens por rotações

Desejávamos também exercitar a capacidade de descrição de estratégias usadas nas resoluções de problemas de construção, permitindo ao leitor das respostas identificar essas estratégias.

Dada a inexistência de habilidades dessa natureza, demonstrada no pré-teste, era essencial explorar propriedades invariantes nas rotações: igualdade das distâncias OP e OP'(O, centro de rotação, P original e P´, imagem), igualdade das medidas angulares na rotação de dois ou mais pontos da mesma figura (PÔP' ≅ QÔQ'), congruência de partes correspondentes da figura original e da imagem, como $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $A\hat{B}C \cong A'\hat{B}'C'$, etc. Além disso, era importante explorar rotações que deixam invariante a figura original (isto é, original e imagem coincidem), preparando o terreno para futuro estudo de simetrias rotacionais.

TURMA IC	TURMA IA
desenvolver a estratégia aqui denominada "semi-pontual": para a construção da imagem da figura na rotação, determinam-se os pontos chaves, ou seja, extremidades no caso do segmento, vértices no caso do triângulo e centro e raio (ou ponto da curva) no	figura ou simplesmente alguns pontos, utilizando a versão semipontual da turma IC; o decalque pode ser usado com guia, tendo-se que reforçar os traços depois). Aqui certamente não há ênfase nas propriedades geométricas das figuras.

caso da circunferência. Afora a concepção fundamental de rotação de ponto, aqui são essenciais as propriedades das figuras planas, advindas do estudo da geometria euclidiana clássica.	

Quadro 4.6: diferentes transparências quanto às propriedades geométricas

b) expectativas

Na turma IC, prevíamos a necessidade de intervenção do pesquisador no sentido de discutir a idéia de que a determinação de A’ e B’ são a chave para a resolução do problema da rotação do segmento por um ponto fora da reta suporte.

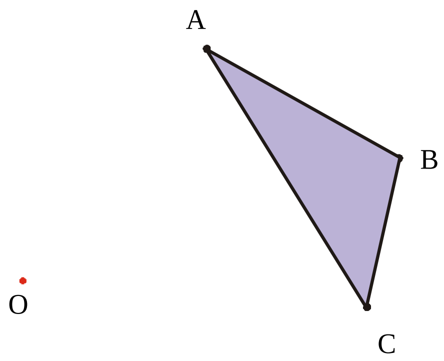
Dentro do mesmo esquema conceitual (semi-pontual), achávamos que, uma vez apropriada a noção do conjunto mínimo de pontos que definem uma figura geométrica simples, a rotação do triângulo e da circunferência seria feita sem dificuldade pela maioria dos estudantes do grupo IC.

Com relação ao grupo IA, não prevíamos nenhuma dificuldade desde o início, do ponto de vista global, dado que bastava decalcar a figura no transpel, girar e transferi-la para o papel. Talvez a manipulação do instrumental oferecesse dificuldades: como decalcar, como prender o transpel no centro, como dirigir a rotação no sentido e magnitude corretos, como decalcar do transpel para a folha. Por exemplo: para desenhar uma circunferência com precisão no transpel, não há como dispensar o compasso e o mesmo vale para a transferência para a folha original. Era de se supor que os estudantes preferissem fazer isso a mão livre, dada a complicação de ordem manipulativa.

Segundo os indicadores do pré-teste, na rotação da circunferência ao redor do seu centro deveriam surgir interrogações (pois a imagem coincide com o original).

c) exemplos (turmas IC e IA):

3. Desenhe a imagem do triângulo ABC na rotação de 100° em torno de O no sentido horário. Chame essa imagem de A'B'C'.



Para a turma IC, a construção da imagem deve ser feita com régua e compasso, localizando-se, uma por vez, as imagens A', B' e C' dos pontos A, B e C. Depois, é só traçar os segmentos AB, AC e BC. Para a turma IA, basta decalcar os pontos A, B e C, girar o transpel ao redor de O e transportar esses pontos para o papel, traçando-se em seguida os lados do triângulo.

4. Complete, a partir da situação acima:

A medida do ângulo AÔA' é ___________.
A medida do ângulo BÔB' é ___________.
A medida do ângulo CÔC' é ___________.
Complete com o símbolo = ou o símbolo ≠ :

AO____ A'O　　　BO____B'O　　　CO____C'O
AO____BO　　　AO____C'O

Esta atividade explora as propriedades mencionadas nas metas. O aluno pode responder diretamente, porque já se apropriou dessas propriedades ou pode verificar no desenho que fez.

5. Escreva V (verdadeiro) ou F (falso), sobre a rotação do triângulo acima:

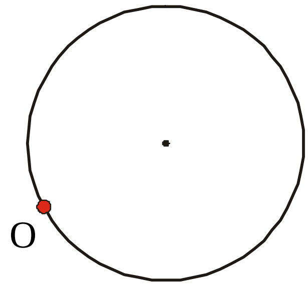
☐ AB = A'B'　　　☐ AC = A'C'　　　☐ BC = B'C'

Podemos afirmar que o triângulo ABC (original) e o triângulo A'B'C' (imagem) são triângulos

☐

Para os estudantes que se apropriaram do caráter isométrico de rotação, a resposta é imediata e independe de sua ação sobre o desenho. Para os outros, é necessário reconhecer a aplicação do teorema LLL de congruência de triângulos. Mas as duas estratégias são interessantes.

8. Determine a imagem da rotação de 90° em torno de O, sentido anti-horário, da circunferência abaixo:



Basta localizar a imagem do centro da circunferência e traçar outra circunferência de mesmo raio. Para a turma IC, é um trabalho com régua e compasso. Para a turma IA, é um simples movimento do transpel, sem que seja necessário decalcar toda a circunferência (basta o centro e um ponto e o uso posterior do compasso).

Sessão 2, folha 5 - resolvendo problemas de rotação

a) metas

A finalidade dessa folha era encerrar o enfoque sobre a parâmetro centro de rotação como algo essencial na transformação, sendo propostas atividades de diferentes naturezas, como construção de imagem por rotação, análise de configurações representando rotações (corretas ou incorretas) e medidas dos parâmetros em rotações apresentadas corretamente. Era também nossa meta levar o estudante a enfrentar situações de rotações mais complexas, em que parte da imagem se sobrepõe à figura original, compondo ambas, original e imagem, uma terceira figura, como no exemplo dado a seguir (esse tipo de situação é comum em problemas que exigem a rotação como ferramenta de solução). No caso mais extremo, os alunos deveriam reconhecer que certas rotações não triviais deixam invariante a figura, isto é, a imagem coincide com a original (simetria rotacional).

O aluno deveria também detectar incoerências em configurações apresentadas como representativas de rotações em situações mais complexas, bem como avaliar e exercitar a habilidade de distinguir a figura original de sua imagem e desenvolver estratégias eficientes para medida do ângulo de rotação (sentido e magnitude) nessas situações mais complexas.

Dentro das nossas limitações, queríamos fazer o sujeito começar a utilizar a rotação como ferramenta na resolução de problemas de construção geométrica (por exemplo, construção de polígonos regulares, em situações específicas).

Finalmente, como assunto de importância menor, verificar se a convenção do menor ângulo estava sendo observada.

TURMA IC	TURMA IA
levar o aluno a escolher um conjunto de pontos estratégicos para a obtenção da imagem da rotação figuras mais complexas	exercitar o uso do transpel como ferramenta para analisar as parâmetros de rotação numa situação dada e construir imagens de rotações.
avaliar o uso da propriedade do ponto médio, nas rotações de 180^o	avaliar o uso do transpel na rotação de 180^o
avaliar o grau de precisão do desenho das imagens e ver se estão sendo obedecidas as regras de construção com régua e compasso.	Em geral, as propriedades geométricas que permitem as construções na turma IC não são mobilizadas aqui.

Quadro 4.7: figuras mais complexas e diferentes dificuldades de construção

b) expectativas

Achávamos que a maioria dos alunos da turma IC resolveria as situações de simetria central usando o transferidor, esquecendo a propriedade do ponto médio, tratada na folha anterior.

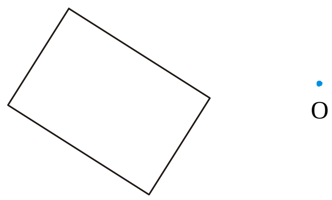
Pensávamos também que a atividade envolvendo sobreposição de parte da imagem na original deveria provocar indagações em ambas as turmas (insegurança quanto ao resultado do trabalho).

Ligado ao problema da simetria rotacional, detectado no pré-teste, prevíamos que a atividade envolvendo simetria rotacional do quadrado (sem uso dessa expressão) deveria apenas ser parcialmente cumprida (sendo possível que a rotação de 360^o não seja tão trivial assim).

Imaginávamos também que a obtenção do quadrado poderia ser feita sem rotação, contrariando a proposta. Havia uma suspeita de que certos procedimentos já enraizados oferecessem obstáculos para a aceitação da nova ferramenta.

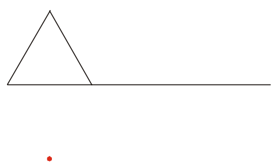
a) exemplos (turmas IC e IA):

1. Desenhe a imagem do retângulo. A rotação é de 180^o, sentido horário, ao redor de O.



Para os integrantes da turma IC, a estratégia mais eficiente é achar as imagens de cada vértice, usando O como ponto médio, dispensando o transferidor. Para a turma IA, basta girar o decalque no transpel.

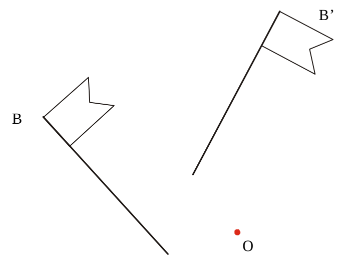
3. Desenhe a imagem da bandeira a seguir , na rotação horária de 60^o ao redor do ponto vermelho :



Para a turma IC, é importante escolher alguns pontos estratégicos (como os vértices do triângulo e o pé da bandeira), nomeando-os adequadamente, para não haver confusão, já que irá ocorrer superposição parcial da imagem sobre a figura original. Os instrumentos de *desenho devem ser utilizados com cuidado. Para a turma IA, deve haver cuidado no movimento de rotação, para que haja precisão na construção da imagem.*

6. Na figura abaixo, a bandeira B' é a imagem da bandeira B por uma rotação ao redor de O. Qual foi o sentido da rotação ?_______________

De quantos graus foi a rotação? ________

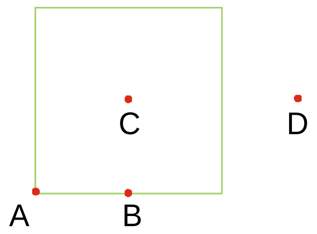


Aqui, para a turma IC, basta escolher P e P', por exemplo os pés dos mastros, e analisar a rotação que leva P em P'. É claro que esta estratégia se fundamenta no fato de que todos os pontos da figura sofrem a mesma rotação, logo dois pontos quaisquer, correspondentes, são suficientes para caracterizar a transformação. Para a turma IA, a estratégia é decalcar B, girar o transpel com centro O e medir a rotação diretamente no transpel.

7. No desenho abaixo temos o vértice A de um quadrado e o seu centro O. Usando rotação, ache os demais vértices e desenhe o quadrado.

Em princípio, a estratégia consiste em girar A em torno de O, de 90 ^{o}*, 180* ^{o} *e 270* ^{o} *, obtendo-se as imagens B, C e D, que são os demais vértices do quadrado. Mas os alunos podem usar inúmeras outras abordagens, como por exemplo, achar o simétrico de A em relação a O e depois traçar a outra diagonal (segmento congruente, perpendicular, com ponto médio em O).*

5. Uma menina fez a rotação do quadrado abaixo e desenhou a imagem na mesma posição que estava o quadrado original.



Você acha que

a) a rotação pode ter sido de 90^o ?___________ Se você acha isso, qual dos pontos acima foi centro de rotação?__________

b) a rotação pode ter sido de 180^o ?___________ Se sim, qual foi o centro de rotação?______

c) a rotação pode ter sido de 360^o ? ___________Se sim, qual foi o centro de rotação?______

Nesta atividade, mais dependente da capacidade imaginativa para os sujeitos da turma IC, está implícita a idéia de simetria rotacional, incluindo a trivial (360 ^{o}). O quadrado tem um único centro de simetria rotacional diferente da trivial, que é o ponto C (coincidente com o centro das circunferências inscrita e circunscrita). Relativas a esse centro, há simetrias nas rotações de 90 ^{o}, 180 ^{o} e 270 ^{o}, em qualquer sentido. Para os alunos da turma IA, fica relativamente fácil verificar essas simetrias e ver que os pontos A, B e D não são centros de simetria.

Sessão 3, folha 1- a determinação do centro de rotação: a propriedade da mediatriz do segmento.

A determinação do centro de rotação, fornecidas a figura e sua imagem numa dada transformação, é a situação mais complexa que os estudantes irão encontrar nesta seqüência. A determinação do centro de rotação envolve a propriedade geométrica da igualdade da distância de um ponto da figura ao centro de rotação e da distância da imagem desse ponto ao centro de rotação; envolve também a idéia de que figuras são conjuntos de pontos. Não há como escapar da noção geométrica de que o centro de rotação está na mediatriz do segmento que une ponto e imagem. Esta parte da seqüência explora a noção de que a mediatriz de um segmento é o conjunto dos pontos que estão à mesma distância dos extremos do segmento e como tal é a reta perpendicular ao segmento, passando pelo seu ponto médio. Daí, o algoritmo para sua obtenção decorre naturalmente. A seqüência aborda também a questão da coincidência das mediatrizes, o que impossibilita a determinação do centro de rotação pela sua intersecção; mas como isso ocorre nos casos em que há simetria ortogonal, a determinação do centro recai no caso já visto em que o centro de rotação está na reta suporte de qualquer segmento contido na figura, não paralelo à mediatriz.

Nesta sessão definimos mais precisamente a simetria por rotação de 180^o (ou simetria central ou ainda reflexão num ponto) já vista isoladamente.

a) metas

Inicialmente visamos definir formalmente a mediatriz de um segmento como a reta que passa pelo seu ponto médio e é perpendicular a ele e, em seguida, enxergar a mediatriz do segmento como o lugar geométrico dos pontos equidistantes dos extremos de um segmento. Dando continuidade à construção do conceito, levamos o aluno a comprovar experimentalmente o fato de que qualquer ponto da mediatriz está à mesma distância dos dois extremos.

Com tudo isso, queremos conduzir o aluno a uma extensão do conceito de mediatriz do segmento AB, que deverá ser vista como o lugar dos centros de rotação que levam um extremo do segmento ao outro extremo (A até B ou B até A).

É nosso desígnio também desenvolver as estratégias da determinação do centro de rotação em configurações original/imagem (mediatrizes que se interceptam, mediatrizes coincidentes), usando ferramentas diferentes (régua e compasso ou dobradura).

TURMA IC	TURMA IA
construir a mediatriz de um segmento com régua e compasso utilizando sua propriedade básica de lugar geométrico dos pontos que estão à mesma distância das extremidades desse segmento.	levar o sujeito a construir a mediatriz do segmento AB utilizando um dos axiomas das dobraduras: fazer uma dobra que leva A em B.
com régua e compasso, obter a intersecção das mediatrizes dos segmentos AA' e BB' ou intersecção da mediatriz comum com a reta AB, determinando o centro da rotação que leva {A,B} em {A',B'}.	com duas dobras, determinar o centro da rotação que leva {A,B} em {A',B'} – essas dobras são as mediatrizes de AB e A'B', quando distintas ou a mediatriz comum e a dobra contendo AB.

Quadro 4.8: diferentes estratégias na determinação do centro de rotação, conforme o instrumento.

b) expectativas

Tínhamos a impressão de que o conceito de mediatriz, como reta perpendicular pelo ponto médio do segmento ou como o lugar geométrico dos pontos que equidistam dos extremos, não fosse estranho às crianças e nem fosse apresentar muitas dificuldades à compreensão, embora, segundo Piaget (1983), o conceito tenha caráter predominantemente interfigural. Além disso, a dobradura não é uma ferramenta da qual já tenham se apropriado.

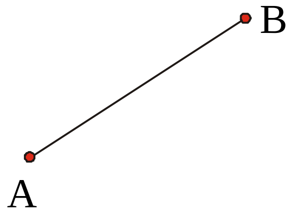
Prevíamos que haveria dificuldade na compreensão de que a mediatriz de um segmento AB é o lugar geométrico dos centros de rotação que levam A em B (ou B em A). Na atividade que deixa indeterminado o centro de rotação que leva A em A', pensávamos que o ponto médio do segmento AA' seria o preferido.

Achávamos também que, dada a quantidade de linha construídas, a determinação do centro de rotação poderia provocar confusão (por exemplo, achar mediatrizes de AB e A'B', em vez de mediatrizes de AA' e BB' ou achar simplesmente a intersecção de retas determinadas pelos pontos da configuração).

Os dois primeiros exemplos a seguir referem-se à mesma atividade, mas com apresentações diferentes, pois demandam ações diferentes por parte dos alunos. As demais atividades são enunciadas da mesma forma, uma das quais escolhemos como exemplo.

c_1) exemplo (turma IC):

1. O desenho ao lado mostra o segmento AB. Desenhe uma reta perpendicular a esse segmento e que passa pelo seu ponto médio (indicado na figura). Essa reta é chamada <u>mediatriz</u> do segmento AB.



2. Escolha um ponto dessa reta. Compare as distâncias desse ponto até as extremidades do segmento. Elas são iguais ou diferentes ? ____

Escolha outro ponto e compare novamente as distâncias. Qual é a sua conclusão?____

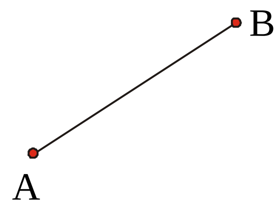
Se você pegar um outro ponto e comparar as distâncias, o que você acha que irá acontecer?

3. O que você fez para comparar as distâncias?

Nestas atividades, apresenta-se a mediatriz com um determinado conjunto de propriedades geométricas e se faz uma verificação experimental (pois não está demonstrada) da propriedade que nos interessa: a de qualquer ponto da mesma está à mesma distância das extremidades do segmento. Aparentemente, a régua e o compasso apresentam transparência total com relação à construção da mediatriz; a dobradura, nem tanto.

c_2) exemplo (turma IA):

1. O desenho ao lado mostra o segmento AB. Dobrando o papel, faça os pontos A e B coincidirem. Alise bem a dobra. Abra a folha de papel e desenhe a reta representada pelo vinco. Essa reta é perpendicular ao segmento AB e passa pelo seu ponto médio. Ela é chamada <u>mediatriz</u> do segmento AB.



2. Escolha um ponto dessa reta. Compare as distâncias desse ponto até as extremidades do segmento. Elas são iguais ou diferentes ? ____

Escolha outro ponto e compare novamente as distâncias. Qual é a sua conclusão?____

Se você pegar um outro ponto e comparar as distâncias, o que você acha que irá acontecer?

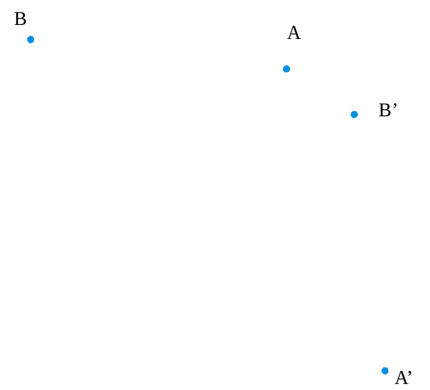
3. O que você fez para comparar as distâncias?

Temos aqui a versão das atividades iniciais para a turma IA. Em vez de usar o compasso, usam-se dobras, em operações equivalentes a traçar mediatrizes com régua e compasso.

c_3) exemplo (turmas IC e IA):

6. Desenhe a reta que contém os centros de rotação que levam A em A'; em seguida, desenhe a reta contendo os centros de rotação que levam B em B'.

As duas retas desenhadas por você cruzam-se num único ponto. O que você pode dizer a respeito desse ponto?



Para a turma IC, a solução consiste em traçar, usando régua e compasso, as mediatrizes dos segmentos AA' e BB', que irão cruzar-se no ponto O, centro de rotação. Os alunos da turma IA podem dobrar o papel, levando A em A' e B em B'; o encontro das dobras determina o centro de rotação.

Sessão 3, folha 2 – situações especiais na determinação do centro de rotação

a) metas

Queríamos, neste conjunto de atividades, dar um fechamento ao conceito ligado à questão de determinação do centro de rotação, levando o sujeito a aplicar a propriedade AO≠A’O para verificar que um ponto dado não é centro da rotação de uma configuração dada, mas também perceber que a propriedade acima é necessária mas não suficiente, quando aplicada apenas a um par de pontos (A, A’).

Desejávamos, por isso, exercitar as estratégias da determinação do centro da rotação de um segmento, seja nas construções, seja na análise de configurações dadas.

b) expectativas

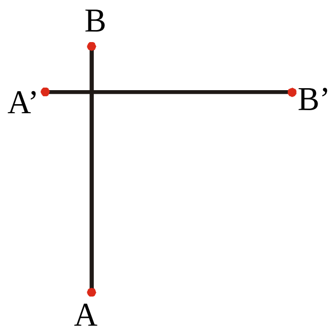
Previamos dificuldade dos sujeitos em distinguir a diferença entre as duas rotações de segmentos correspondentes às atividades 3 e 4, já que a discriminação visual entre as duas é bastante sutil.

Na escolha dos possíveis centros de rotação, na atividade 5, previamos falhas estratégicas; tínhamos certeza que alguns estudantes achariam que todos os pontos (M, N, P) fossem centros de rotação da bandeira, ao focalizar sua atenção apenas no pé da bandeira.

a) exemplos (turmas IC e IA):

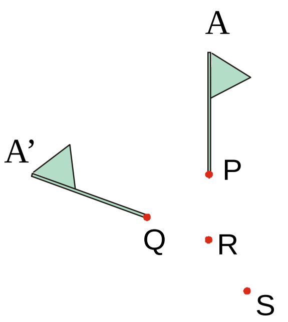
Nesta atividade, as duas mediatrizes coincidem, fato que pode ocorrer na rotação de segmentos. A saída é ver onde a reta contendo o segmento origem intercepta a mediatriz comum. No caso, o segmento AB encontra a mediatriz comum. Logo, o centro de rotação é a intersecção de AB com A’B’. Mas a localização do centro de rotação nesse caso é bastante intuitiva.

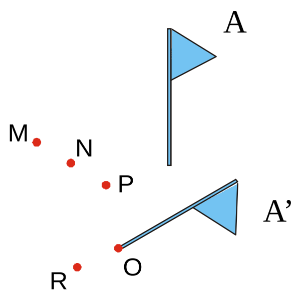
4. A'B' é a imagem de AB por uma rotação. Assinale o centro da rotação. De quantos graus é a rotação? _________ Qual é o sentido da rotação?_________________



A diferença desta situação com relação à anterior é que as mediatrizes de AA' e BB' se cortam. É importante perceber a diferença. A rotação é de 90 º também, mas o centro de rotação é outro.

5. Diga qual dos pontos vermelhos é o centro da rotação da bandeira A, com imagem A', nas duas situações a seguir:





Nesta atividade de reconhecimento, a situação da esquerda é bastante simples do ponto de vista perceptivo, já que o centro de rotação está no prolongamento do mastro da bandeira. Entretanto, à direita não basta comparar a distância do pretenso centro de rotação ao pé da bandeira. Não basta estar na mediatriz de um par de pontos correspondentes (original, imagem); é preciso estar na intersecção de pelo menos duas dessas mediatrizes e isto pode ser verificado fazendo-se a comparação da distância de dois novos pontos correspondentes. O único centro de rotação é o ponto N.

Sessão 3, folha 3 – usando a rotação como ferramenta para a resolução de problemas mais complexos

a) metas

Aqui, queríamos propor oportunidades para que a rotação pudesse ser utilizada como ferramenta na resolução de situações-problema.

Uma delas consiste em construir a noção de polígono regular por meio do desenho daqueles mais simples usando rotações. Uma vez assimilado o conceito central, o aluno poderá se convencer de que tem à mão uma ferramenta que lhe permite construir polígonos regulares quaisquer (com as limitações dos instrumentos de medidas).

Outro objetivo consistia em retomar a apropriação da noção de hierarquia de quadriláteros (paralelogramos ⊂ trapézios ⊂ quadriláteros) e de outras propriedades dos quadriláteros (losangos: lados congruentes, retângulo: ângulos congruentes, etc) e estimular o uso dessas noções e propriedades na resolução de problemas.

Outra aspiração era levar o estudante a reconhecer a rotação de 180^{o} como uma ferramenta conceitual de resolução de problemas; além disso, a conceituar, pelo menos informalmente, simetria central, explorando a sua propriedade básica (o centro de rotação é o ponto médio dos segmentos XX', onde X é o ponto original e X' é sua imagem)

TURMA IC	TURMA IA
conduzir o sujeito no desenvolvimento da estratégia para obter o pentágono (ou outros polígonos regulares): determinar o centro de rotação (duas mediatrizes) com régua e compasso; em seguida, traçar a circunferência que irá conter todos os vértices, que podem ser vistos como as imagens das rotações de um único vértice; cordas iguais determinam ângulos centrais iguais, logo os vértices podem ser determinados apenas com o compasso. usar a propriedade básica da simetria central com régua e compasso.	conduzir a estratégias envolvendo inicialmente o transpel ou dobradura, determinando-se o centro do polígono regular; com o transpel, rotacionar um lado e decalcá-lo como imagens de sucessivas rotações; reconhecer a validade de outras estratégias, como a superposição parcial de original-imagem para obter o pentágono. procurar explorar o transpel como instrumento que facilita a rotação global, tornando mais dinâmicas as configurações, o que pode sugerir soluções.

Quadro 4.9: como diferentes instrumentos podem condicionar a resolução de problemas

b) expectativas

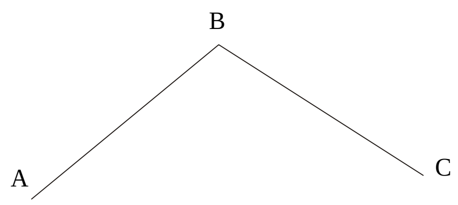
Sabíamos que alguns alunos já conheciam a noção de polígono regular e em particular o triângulo equilátero e o hexágono; então a construção do pentágono deveria ser, entre as três atividades, a mais trabalhada; as estratégias porém seriam, com certeza, as mais diversas, talvez até inapropriadas.

Não esperávamos que o problema do rio fosse resolvido da maneira clássica, provavelmente desconhecida dos alunos, envolvendo a estratégia da simetria central. Achávamos que talvez os alunos que entendessem o enunciado, iriam tentar resolvê-lo por aproximações sucessivas, com o compasso ou régua diretamente.

Apesar dos resultados do pré-teste, a construção da imagem simétrica do triângulo não deveria apresentar dificuldade a essa altura; mas a percepção de todas as propriedades da configuração não é tão imediata, o que poderia dificultar a resolução do problema associado à construção obtida.

c) exemplos (turmas IC e IA):

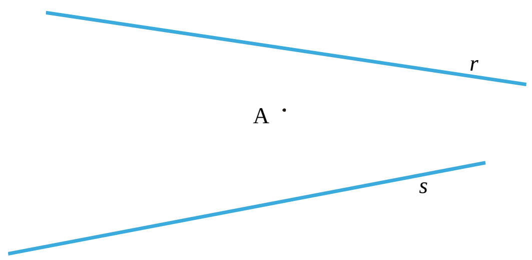
1. No desenho abaixo estão representados dois lados consecutivos de um pentágono regular ABCDE. Termine de desenhar o pentágono, usando rotação.



Esta tarefa pode ser enfrentada de várias maneiras, mas, de acordo com o enunciado, é necessário usar rotação. Para a turma IC, é essencial, antes de tudo, achar o centro de rotação O. Isso pode ser feito achando-se as mediatrizes de AB e BC (já que, com a rotação de

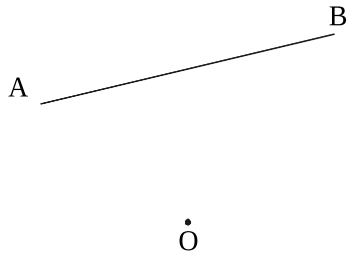
72^{o}, o vértice A é levado em B e B é levado em C. Na prática, fica mais simples desenhar a circunferência com centro em O e com o compasso, abertura AB, marcar os vértices do pentágono ABCDE sobre a circunferência. Para a turma IA também é válida essa estratégia.

2. O desenho a seguir mostra uma casa (A) entre dois rios (retas *r* e *s*). O Sr. Paulo, dono do terreno, quer construir uma estrada reta que começa num rio, passa pela casa e termina no outro rio. Além disso, ele quer que a casa fique bem no meio da estrada. Faça o desenho dessa estrada.



Na rotação de 180^{o} ou simetria central, uma reta tem como imagem uma reta paralela e à mesma distância do centro de rotação. Na situação acima, basta achar a imagem r' da reta r por uma rotação de 180^{o}; r' irá encontrar s no ponto P; traçando-se a reta PA, esta irá encontrar r em Q. Pela simetria, temos AQ = AP, ou seja, o problema está resolvido. Claro que seria obtida a mesma solução se achássemos a imagem de s.

3. Na rotação de 180^{o} (qualquer sentido), a figura e sua imagem são simétricas em relação ao centro de rotação. Desenhe o segmento CD, simétrico do segmento AB em relação ao ponto O, dados abaixo. Considere C a imagem de A e D a imagem de B.



4. Desenhe os segmentos DA e BC. Diga qual é a espécie do quadrilátero ABCD (trapézio, paralelogramo, losango, retângulo ou quadrado).

Na rotação de 180 º ou simetria central, um segmento tem como imagem um segmento paralelo, de mesmo comprimento. Portanto, o quadrilátero ABCD é trapézio e paralelogramo; não se pode afirmar que seja losango, a despeito de sua aparência.

4.3 Retrospecção

Apresentamos, nas páginas precedentes, os aspectos mais significativos das seqüências de atividades IC e IA compondo a espinha dorsal de nossa pesquisa. Numa análise retrospectiva do processo de estruturação dessas atividades, sentimos que o trabalho poderia ser aperfeiçoado. Aliás, isso sempre ocorre com tudo que fazemos. Tendo em mente alguns preceitos teóricos (Piaget e Garcia: níveis de pensamento geométrico intra e inter; Meira: a transparência dos instrumentos), a crença básica que nos norteou foi a de que as crianças aprendem quando agem de forma interessada, quando engajadas em projetos que respeitam suas características. A rotação é uma noção que tem um apelo intuitivo bastante pronunciado; e a acessibilidade das propriedades geométricas que envolve, no nível em que foi tratada, parece ser uma garantia do interesse que normalmente as crianças têm diante do novo que seja compreensível.

CAPÍTULO 5

5.1 Introdução

Neste capítulo iremos apresentar os resultados obtidos nos instrumentos diagnósticos (pré-teste e pós-teste) e os rendimentos observados no desenvolvimento das seqüências IC e IA. Nossa análise, lastreada nas teorias apresentadas no capítulo 3 e em nossas próprias concepções, irá procurar correlacionar as metas e expectativas com os rendimentos e ocorrências observados e também com os resultados do pós-teste.

Os instrumentos diagnósticos e as seqüências IC e IA demandavam dos sujeitos da nossa pesquisa uma gama bastante grande de estratégias e ações. Suas produções poderiam ser expressas:

- de forma numérica, quando se referissem a medidas de ângulos;
- de forma textual dissertativa, quando a atividade solicitava descrições de ações ou explicações sobre a estratégia adotada;
- de forma textual compacta, nos casos em que a resposta exigia palavras não numéricas;
- de forma gráfica, nas construções de imagens por rotações ou em outras atividades preparatórias;
- pela escolha da alternativa correta, onde se perguntava se a configuração estava correta ou não.

No pré e no pós-teste foram propostas várias questões com mais de um item para responder. Além disso, a avaliação do sucesso na maioria dessas questões não pode ser feita como se tivessem um único aspecto a ser considerado: muitas delas devem ser subdivididas em muitos subitens de avaliação. De forma semelhante, as atividades desenvolvidas ao longo das seqüências tinham feições semelhantes e a avaliação dos resultados nas mesmas se submete aos mesmos requisitos. Considerando a quantidade de atividades apresentadas, observamos que o número de dados é muito grande e seria enfadonho apresentar as tabelas ou gráficos com todos esses resultados. Por isso, nós os aglutinamos em conjuntos característicos, relacionados com os aspectos que julgamos mais significativos em nossa análise. Na exposição que se segue, apresentaremos os resultados condensados, na forma de gráficos de barras, acompanhados de nossas análises. Começaremos com o pré-teste, prosseguiremos com as seqüências e encerraremos com o pós-teste.

5.2 Resultados e análise do pré-teste

Para simplificar a linguagem, geralmente iremos chamar de *parâmetros* não somente os elementos que definem uma rotação (sentido, medida do ângulo e centro) mas também as propriedades decorrentes da definição (preservação da distância, ângulos, enfim, a isometria).

No pré-teste, os resultados serão apresentados resumidamente em cinco gráficos e os comentários sobre os desempenhos irão referir-se a esse resumo.

5.2.1 Resultados

Como já exposto, 40 estudantes da 4ª série fizeram o teste, composto de 21 questões. Para cada questão foi feita uma escala de acertos para cada parâmetro, quando fosse possível fazer tal separação, anotando-se o percentual de sucesso para cada uma delas. Apresentamos a seguir os gráficos de acertos por questão para os parâmetros da rotação. Nas questões com mais de um item, foi calculada a média de acertos para o parâmetro focalizado. Quando o parâmetro não foi tratado numa determinada questão, omitiu-se tal questão. Em todos os gráficos, colocamos os números das questões no eixo horizontal e o índice de acertos para o parâmetro considerado, no eixo vertical. Para examinar o pré-teste, tal como foi aplicado, consulte o anexo 1.A análise dos gráficos enfocando parâmetros isolados pode fornecer indi-

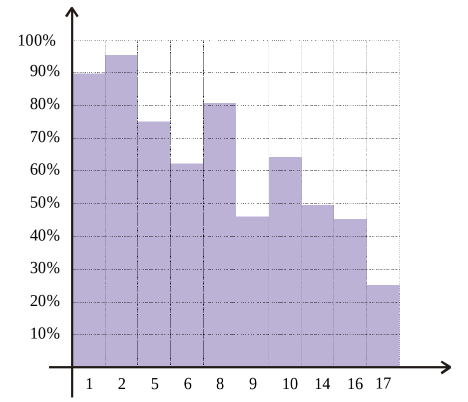


Gráfico 5.1: sentido da rotação

cações significativas, mas é necessário cuidado na interpretação desses dados. Por exemplo, o sujeito pode deixar de responder a uma questão na qual poderia ser capaz de discriminar corretamente um ou mais parâmetros, mas não todos. No gráfico 5.1, notamos que o conceito de sentido de rotação, aparentemente simples, tem índice de sucesso decrescente à medida que se avança nas questões do pré-teste, cada vez mais complexas (do ponto de vista gráfico e conceitual).

Algo semelhante ocorre com a medida do ângulo de rotação, conforme indica o gráfico 5.2. De acordo com o gráfico 5.3, abaixo, a questão do centro de rotação se mostra mais irregular, não havendo necessariamente um decréscimo constante no índice de acertos. O parâmetro conservação da forma e das dimensões, no gráfico 5.4, é tratado pelos estudantes com sucesso crescente, dando a impressão de que os sujeitos foram melhorando ao longo do teste. No decorrer do desenvolvimento de nossa aná-

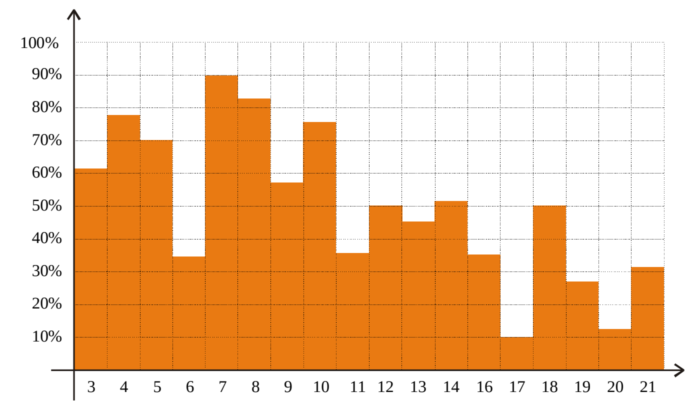


Gráfico 5.2: ângulo da rotação

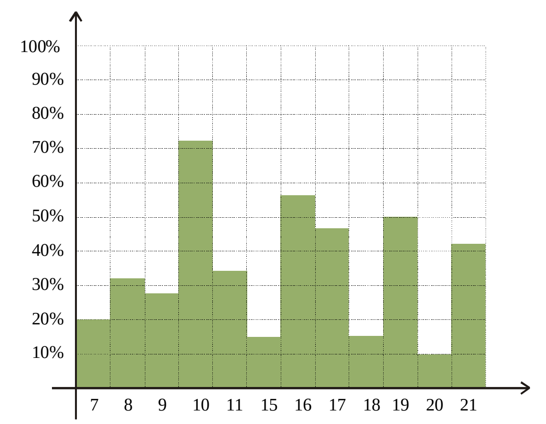


Gráfico 5.3: centro da rotação

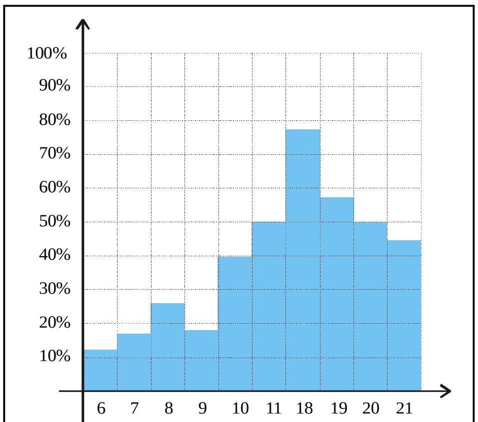


Gráfico 5.4: isometria (conservação da forma e dimensões)

lise, iremos retomar esses resultados, buscando interpretá-los em vista de nossos pressupostos.

Vamos ver agora qual foi o percentual de acerto completo para cada questão. O resultado, agora, parece pior, se olharmos para o gráfico 5.5 sem nenhum critério. Na verdade isso ocorre porque uma questão foi considerada não resolvida quando algum de seus componentes, mínimo que fosse, não foi satisfatoriamente enfrentado pelo aluno. Por exemplo, quando o sujeito fez um desenho impreciso ou à mão livre, mesmo mostrando que tinha noção de que a forma se conservava, consideramos não resolvida a questão.

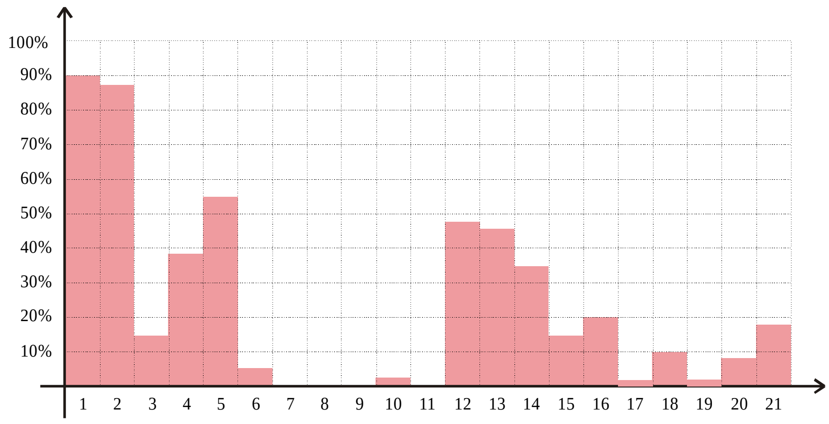


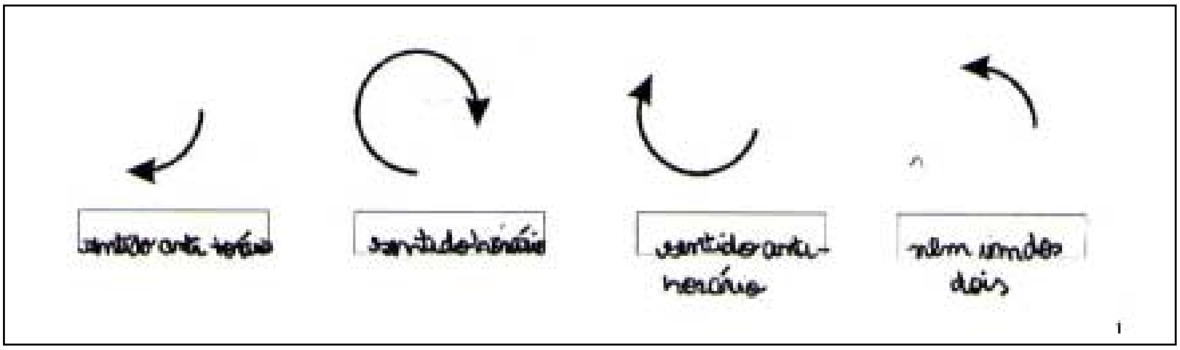
Gráfico 5.5: acerto completo de cada questão

5.2.2 Análise

Vamos analisar, agora, os resultados que julgamos mais significativos para o planejamento das atividades das seqüências, anexando, a título de ilustração, exemplos de respostas dadas pelos sujeitos da pesquisa. Lembramos que o pré-teste completo é o anexo 1.

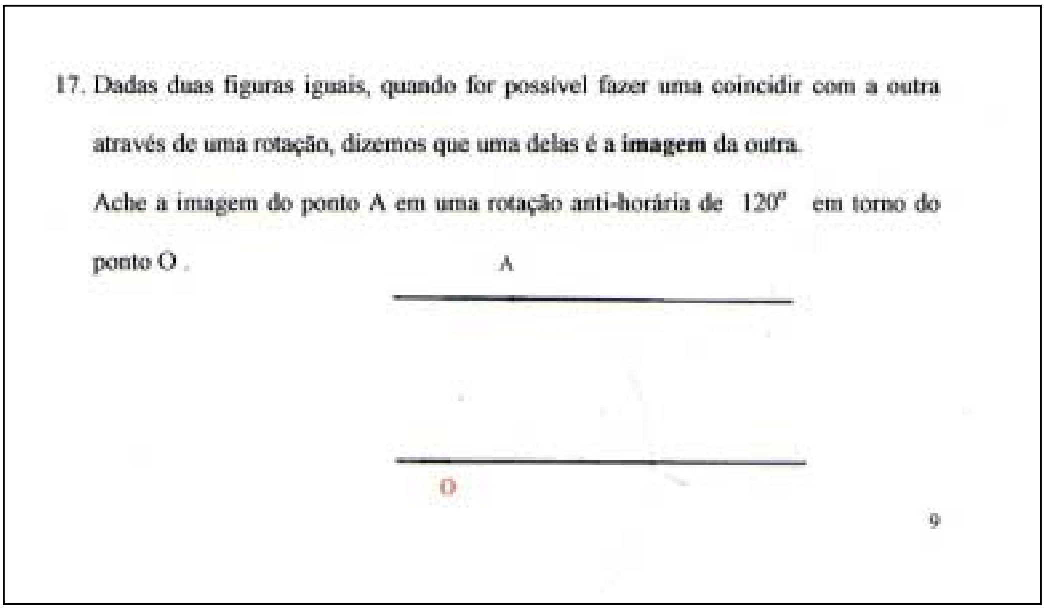
sentido da rotação

O gráfico 5.1 mostra que a maioria dos sujeitos tem a noção apropriada em situações simples (ou seja, situações contextualizadas como o relógio ou em que somente o sentido é focalizado). Há exceções, como a resposta a seguir de um dos alunos, para a questão 2:



Em situações mais complexas, mobilizando todos os parâmetros, o índice de acerto cai e em geral nas situações com construção o índice cai mais ainda; isto tem uma certa lógica, pois se o problema é complicado, o estudante pode não resolvê-lo, mesmo tendo a noção do sentido da rotação. Notamos também que a referência a objeto físico, ao nível da representação, não necessariamente auxilia no acerto do sentido de rotação

Na questão 17, com o menor índice de acerto para o sentido (gráfico 5.1), vários alunos escreveram que não entenderam. A resposta abaixo, dada por um dos alunos, é completamente inadequada (pelo menos, aparentemente):

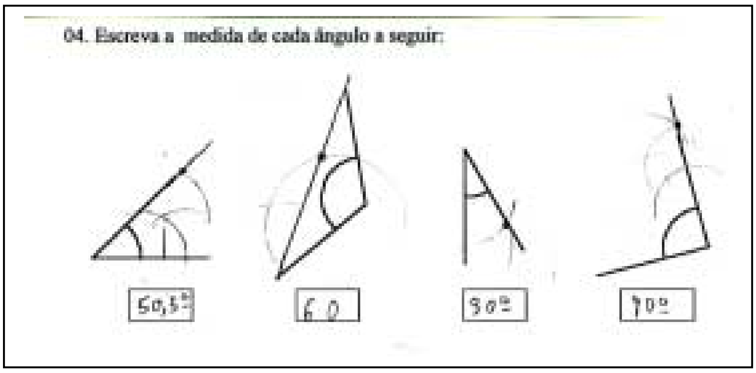

17. Dadas duas figuras iguais, quando for possível fazer uma coincidir com a outra através de uma rotação, dizemos que uma delas é a **imagem** da outra.

Ache a imagem do ponto A em uma rotação anti-horária de 120^o em torno do ponto O .

O rendimento dos estudantes na questão 17 constitui-se num indicador da dificuldade da situação: rotação de ponto e a noção de imagem. Pode ser que a noção de rotação de ponto tenha uma interpretação intrafigural, mas muitos alunos ainda não se apropriaram dos parâmetros que condicionam essa situação.

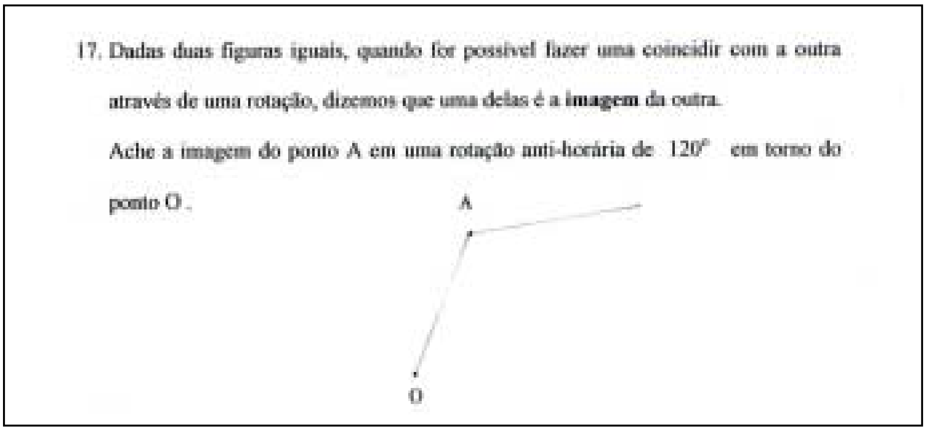
ângulo de rotação

Na medida de ângulos, vistos estaticamente (como o formado por dois palitos ou segmentos de reta), a referência a objetos físicos parece ter menos influência do que a posição e abertura dos ângulos, confirmando resultados conhecidos nas pesquisas de Küchemann (1981) e de Magina (1994). Os ângulos obtusos e os ângulos cujos lados não são horizontais ou verticais tiveram índice de acerto menor que os ângulos retos ou agudos ou com um lado horizontal. Em consonância com as idéias de Meira (1998) de que a transparência não é de fidelidade epistêmica, notamos que o transferidor de escala dupla, em vez de facilitar o trabalho do aluno, como talvez seus projetistas tenham imaginado, pode confundi-lo, conforme atestam os resultados do pré-teste, onde um erro freqüente consistiu em responder como medida a do suplementar do ângulo (veja resposta de um aluno, mais adiante). Esse tipo de dificuldade já foi apontado em pesquisas como a de Kieran (1986), no trabalho com o Logo. Observamos com o ângulo o que já havia ocorrido com o sentido, isto é, nas situações em que concorrem os três parâmetros (sentido, medida do ângulo e centro de rotação), o aluno não responde o que aparentemente já dominava. A transparência do transferidor como instrumento ainda não emergiu completamente entre os sujeitos do pré-teste, apesar de terem experiência escolar prévia de uso dessa ferramenta. Por outro lado, a resposta abaixo mostra



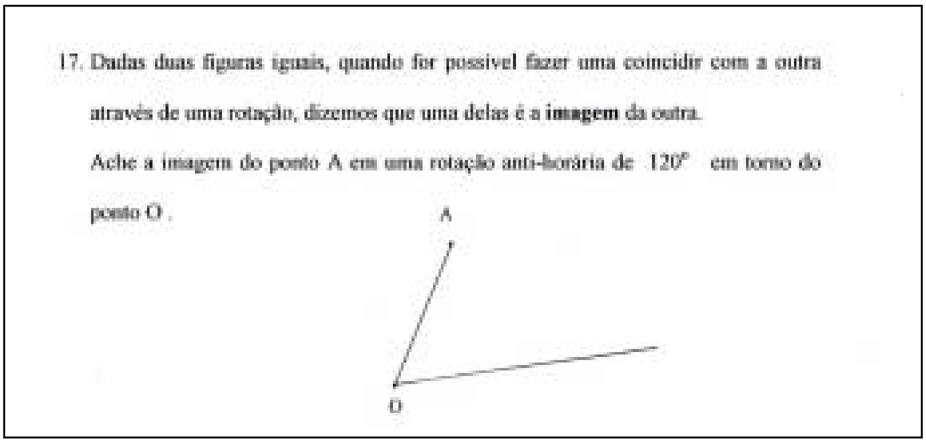
a singular estratégia de um aluno que já construiu um significado para o uso da régua e do compasso como ferramenta para medidas de ângulos, mas ainda de forma insuficiente (para 30º e 90º ele consegui fazê-lo corretamente).

Na questão 17, apresentamos duas respostas diferentes: na primeira delas a medida do ângulo está correta, mas obviamente a resposta é inadequada. Na segunda, observamos como o transferidor ainda não é transparente e nem a noção de sentido está estabelecida.



17. Dadas duas figuras iguais, quando for possível fazer uma coincidir com a outra através de uma rotação, dizemos que uma delas é a **imagem** da outra.

Ache a imagem do ponto A em uma rotação anti-horária de 120° em torno do ponto O .



17. Dadas duas figuras iguais, quando for possível fazer uma coincidir com a outra através de uma rotação, dizemos que uma delas é a **imagem** da outra.

Ache a imagem do ponto A em uma rotação anti-horária de 120° em torno do ponto O .

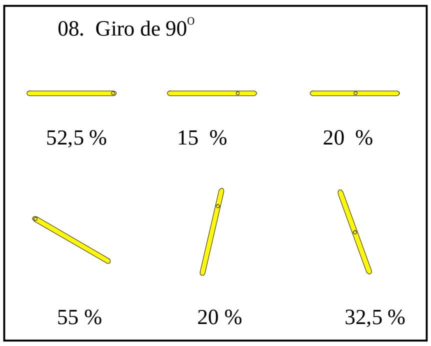
centro de rotação

Dos três parâmetros, o centro de rotação é o menos dominado pelos sujeitos da pesquisa no pré-teste, que apresentou basicamente dois tipos de questões:

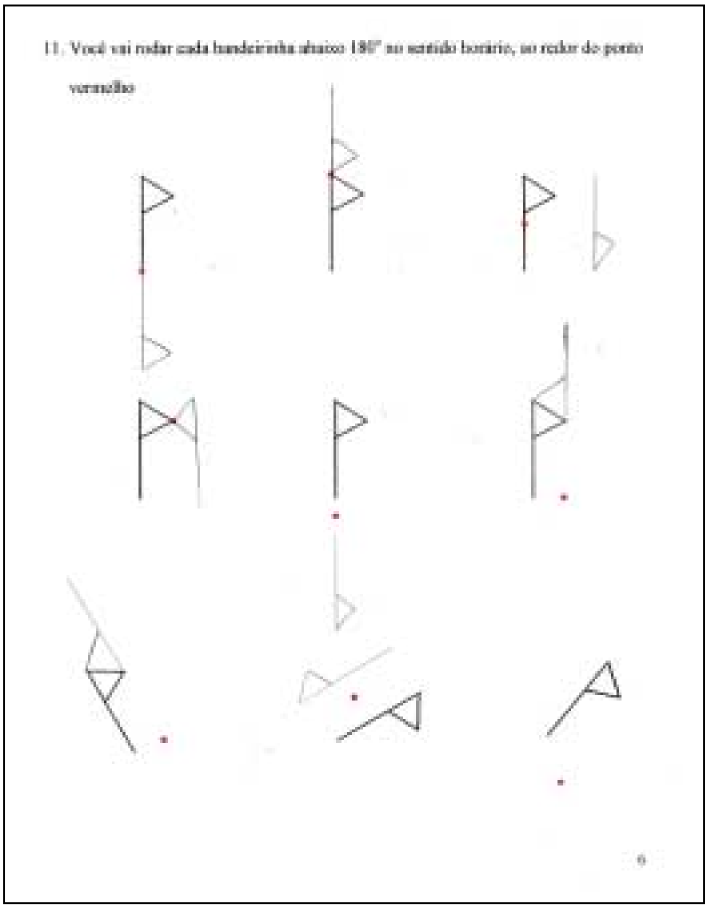
a) Identificar o centro de uma rotação, entre vários pontos dados, a partir da figura e sua imagem. O acerto é maior quando o centro de rotação se encontra no prolongamento natural do objeto (no caso, o mastro da bandeira), possivelmente porque isso facilita a imaginação intuitiva do movimento de rotação. Esse resultado está de acordo com as pesquisas de Küchemann (1981).

b) Usar apropriadamente o centro de rotação na construção da imagem. Tarefa possivelmente mais complexa, pois exige as operações adicionais do desenho, além da compreensão da situação (conceito + ação). Em algumas questões essa atividade apresenta baixo índice de acerto, como a questão 7. Muitos desenharam a imagem ao lado da figura original, evitando superpor o palito desenhado, como nos dois exemplos a seguir, mostrando que a noção de rotação que eles apresentam tem um forte componente intuitivo, que, neste caso, se um fator

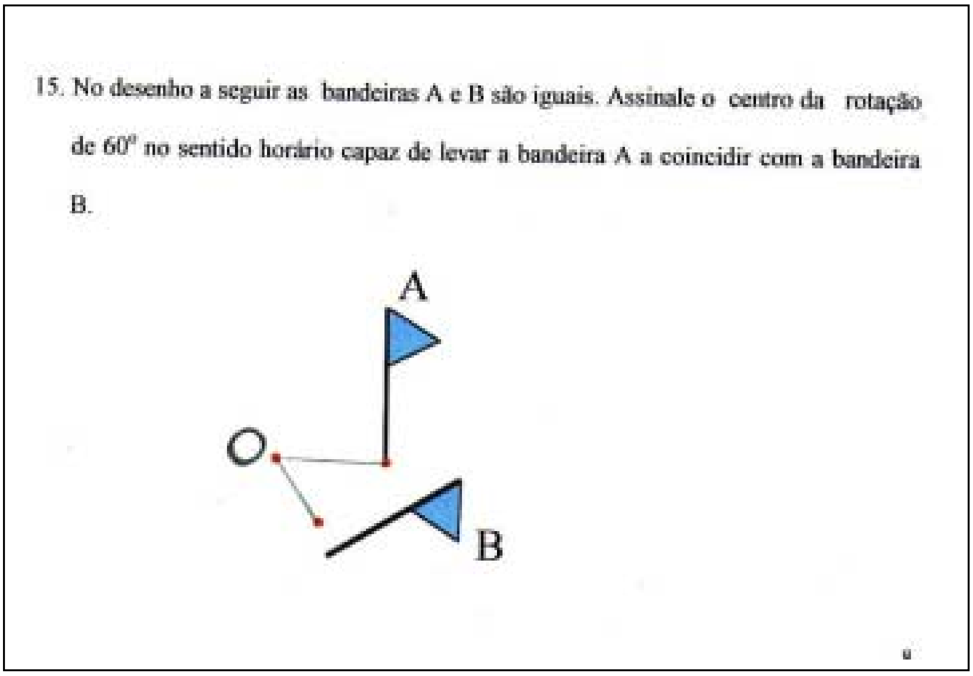
de insucesso na tarefa. Outros resultados mostram que algumas posições do centro de rotação no objeto são privilegiadas. Na questão 8, por exemplo, o índice de acerto é maior quando o centro de rotação está na extremidade, menor quando o centro está entre a extremidade e o ponto médio.



A questão 11 do pré-teste exigia um trabalho razoável de construção; os resultados confir-mam parcialmente outros resulta-dos já conhecidos Küchemann (1981), ou seja, quando o centro é exterior à figura, o índice de acer-tos cai. Vamos examinar a resposta de um aluno para esta questão. Nota-se que esse aluno confunde a rotação de 180^{o} com a reflexão em alguns casos e que ele ignora o centro de rotação, quando este está fora da figura (com exceção da penúltima, que ele acerta). A questão 15, uma das menos acertadas, trata especificamente dessa dificuldade. O aluno deveria reconhecer o ponto ao redor do qual gira a bandeira: poucos alunos têm a noção da invariância da distância de cada ponto da figura ao centro da rotação. Vejamos a resposta de

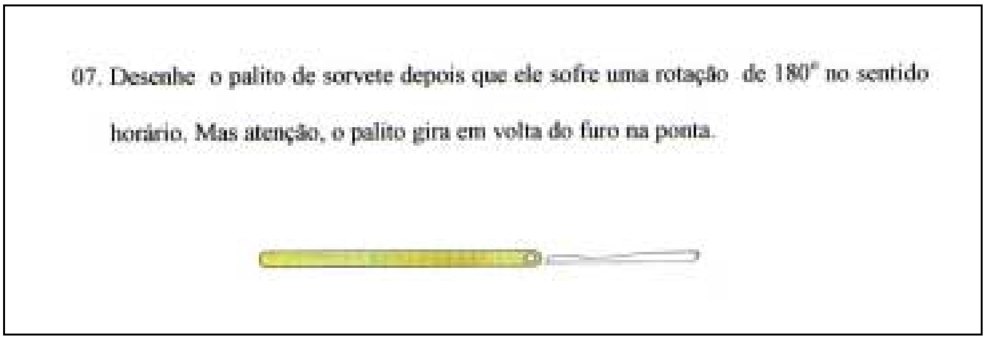


um aluno, presumivelmente correta (ele nomeou o ponto como O).



a isometria da rotação

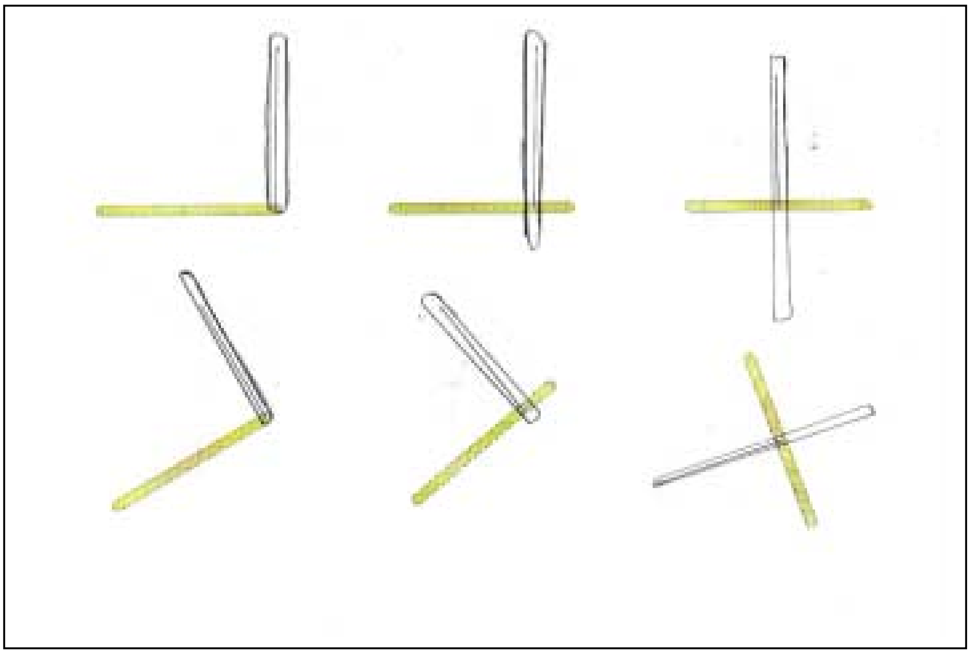
A importante propriedade da conservação da distância, acarretando invariância da forma e do tamanho das figuras transformadas, com conseqüente conservação de ângulos, distâncias ao centro de rotação, etc, parece ser um aspecto não levado em conta pelos sujeitos de nossa amostra. Podemos considerar que o trabalho exigido em construções precisas constitua o obstáculo principal e não o desconhecimento do fato de que as figuras não mudam. Na nossa classificação para os resultados, reunimos num único item forma e dimensões; na verdade, podemos considerar conservada a forma em respostas como a dada abaixo por um aluno, na questão 7 (uma das que têm menor índice de acerto nesse aspecto):



Nas questões onde era necessário fazer vários desenhos, a forma em geral foi observada, mas sistematicamente os desenhos são descuidados, simplificados ou esquematizados.

Na questão 11, com grande número de construções, para a avaliação dos resultados, consideramos forma conservada quando o aluno desenhou pelos menos um segmento e um triângulo isósceles (não exigimos que fosse equilátero, como de fato é). Vemos que os resultados são melhores quando o centro de rotação coincide com alguma extremidade do mastro, mas não no centro do mastro. Na resposta apresentada anteriormente, vemos que a forma da bandeira é conservada pelo aluno, mas o cuidado com que cada bandeira é desenhada varia de item para item (melhor quando original e imagem estão próximos).

De maneira geral, podemos considerar as dimensões (comprimento, largura) conservadas ou não, dependendo do critério de precisão adotado. Se considerarmos a medida real com tolerância de 20%, chegamos aos resultados obtidos nas questões 6, 7 e 8 do pré-teste, com índices abaixo de 30% nesse quesito. Nas concepções prévias dos sujeitos da pesquisa, a preocupação com a precisão na reprodução da imagem parece não existir. Acreditamos que isso somente irá ocorrer mediante contrato explícito com os alunos no decorrer das atividades das seqüências. A resposta abaixo à questão 8, dada por um aluno com resultado geral bom, ilustra esse ponto:

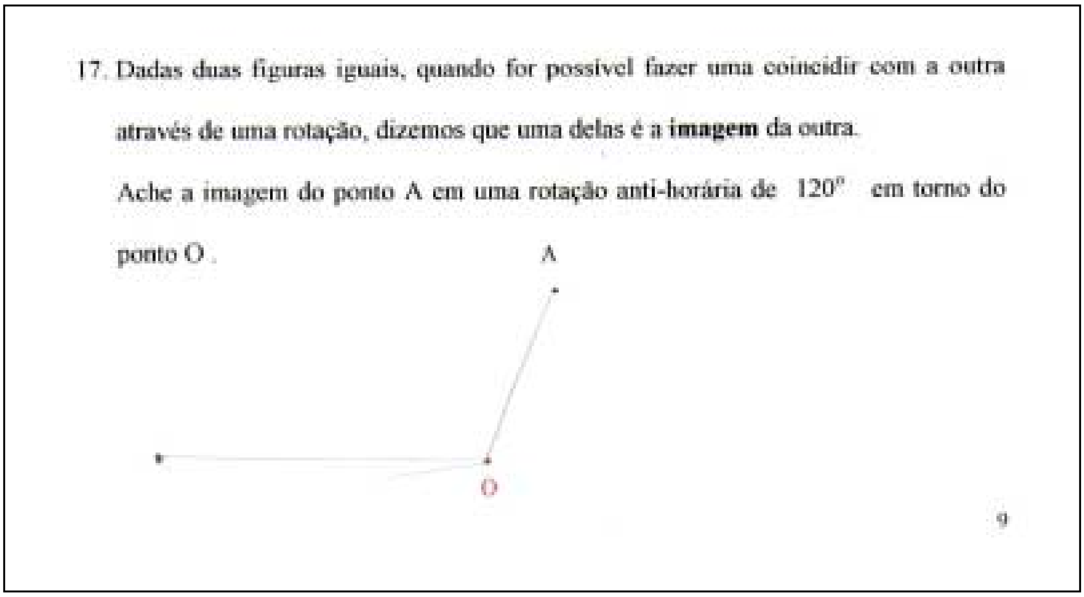


outras propriedades da rotação

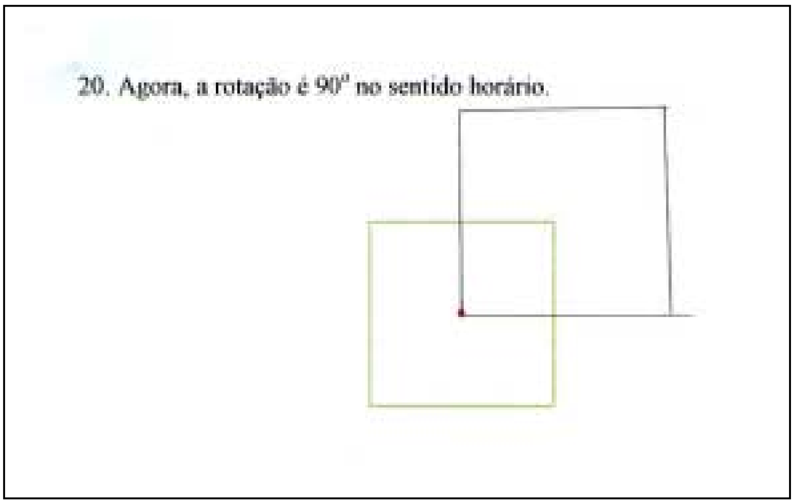
Uma maneira muito simples de definir isometria é dizer que mantém distâncias. A partir daí pode-se inferir que as dimensões e formas das figuras são preservadas nas transformações isométricas. Entretanto, uma grande quantidade de outras propriedades podem ser focalizadas. Dentre aquelas que podem ser úteis como ferramentas, podemos mencionar:

- a conservação da distância de um ponto P ao centro O de rotação, ou seja, a imagem P' e o ponto original P estão à mesma distância do centro de rotação. Isso permite que localizemos P e P' sempre sobre um mesmo arco de circunferência com centro em O.
- as medidas angulares de pontos correspondentes se mantêm. Por exemplo, se A' é imagem de A e B' é imagem de B, na rotação de centro O, então AÔA'≅ BÔB'.

Tais propriedades não parecem ser do domínio da maioria dos sujeitos. Há casos esparsos de sucessos, que eventualmente poderiam ser imputados a mecanismos do tipo teorema em ação. Mas a maioria ainda não tem consciência, por exemplo, de que AO = A'O, como na resposta abaixo:

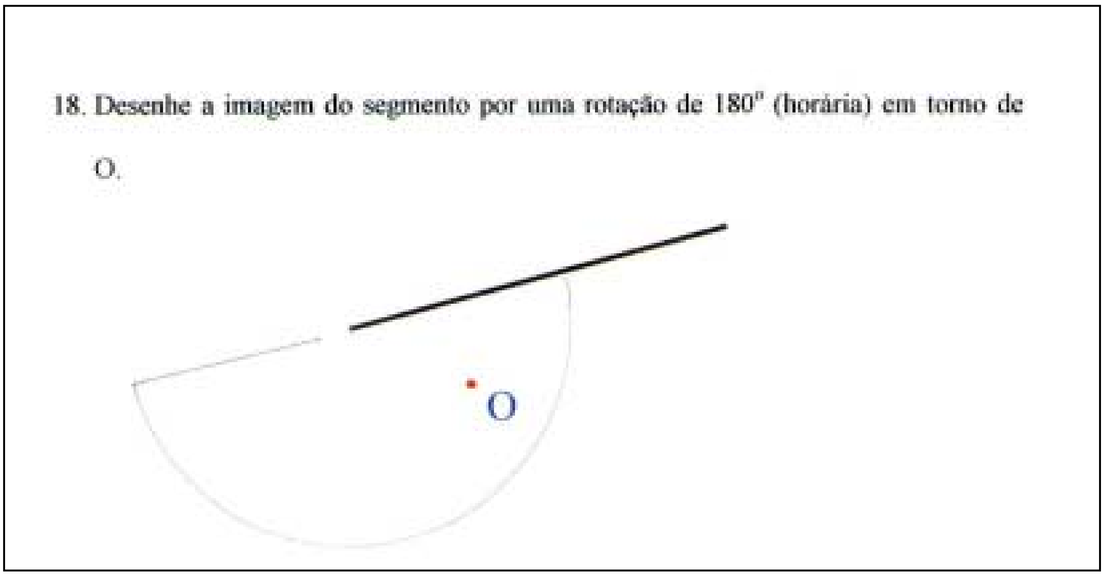


A simetria central ou rotação de 180° tem uma propriedade que facilita enormemente a construção das imagens com régua e compasso: o ponto original e sua imagem formam um segmento cujo ponto médio é o centro de rotação. Isso dispensa o uso do transferidor nas construções. Tal propriedade não consta das concepções prévias dos estudantes. A simetria de rotação também é algo que está fora do universo de conceitos dos estudantes. O quadrado, por exemplo, tem simetria de rotação de 90°, fácil de perceber para quem tem familiaridade com esse conceito, mas parece que o aluno não aceita o fato de que nada irá mudar após uma rotação, como se o movimento implicasse sempre alguma mudança. Veja, por exemplo, a resposta abaixo, que pode ser interpretada como uma rotação seguida de uma translação:



uso dos instrumentos de Desenho Geométrico

Foram disponibilizados aos sujeitos régua, compasso, esquadro, transferidor. Na aplicação do pré-teste foi dito aos mesmos que poderiam utilizá-los quando quisessem. Observamos que grande parte dos sujeitos, na maioria das situações, usou a régua para traçar segmentos e, em alguns casos, para medir, sem grandes dificuldades. Entretanto, o uso do transferidor apresentou dificuldades, já mencionadas. O esquadro e o compasso tiveram utilização reduzida, mesmo quando o seu uso era de compreensão imediata. O uso de régua e compasso para o desenvolvimento das operações usuais de Desenho Geométrico foi praticamente inexistente (apenas um ou dois sujeitos expressaram algum domínio dessa competência). As soluções apresentadas pelas crianças tendem a confirmar a tese de Meira (1998), de que a transparência de um instrumento não tem necessariamente fidelidade epistêmica. Especificamente, no caso da questão 18, uma combinação do uso da régua (para traçar reta suporte) e do compasso (para obter distâncias iguais) poderia parecer evidente. Entretanto, os significados de que os instrumentos podem se revestir vão depender das oportunidades (pessoais e sociais, como a interação com os colegas, com o professor, etc). Vemos claramente, na resposta a seguir, que o sujeito ainda não se apropriou dos significados usuais do uso associado da régua e do compasso:



5.2.3 - Síntese

Com relação ao que denominamos neste estudo *parâmetros de rotação*, podemos concluir que o *sentido* da rotação e a medida do *ângulo* de rotação são dominados pela maioria dos estudantes em situações simples em que elas podem ser consideradas isoladamente. Em situações nas quais concorrem dois ou mais parâmetros, o seu controle pelos sujeitos diminui. O parâmetro *centro* de rotação oferece maior dificuldade que os outros dois, na maioria das situações observadas. A propriedade da isometria é aparentemente observada, talvez porque a maneira intuitiva como o problema da rotação é apresentado pressuponha essa concepção. Em outras palavras, quando começamos a falar em rotação para as crianças, costumamos nos referir a situações concretas: rodamos tal coisa, giramos aquela roda, etc e a rigidez dos corpos sólidos é uma noção já integrada ao conhecimento da criança. Por isso, pode ser que não ache estranho quando pedimos para desenhar a imagem com a mesma forma e o mesmo tamanho. Vemos que, mesmo quando o sujeito erra no tratamento dos demais parâmetros, a forma é conservada, a despeito de uma certa negligência com que é considerado esse aspecto. Por exemplo, figuras alongadas por vezes se transformam em segmentos. As medidas são largamente desprezadas. Propriedades específicas da rotação, tipicamente ferramentas de construção, foram raramente utilizadas (pelo menos de forma explícita). Apenas dois alunos demonstraram objetivamente que as percebiam a ponto de utilizá-las como ferramentas. A contextualização, que classificamos em três níveis (objetos físicos, representações de objetos físicos e figuras geométricas), parece não exercer influência direta nas respostas. Porém devemos considerar que não houve situações em que se privilegiou a observação de objetos físicos, exceto na questão em que o estudante deveria considerar a rotação de um lápis, tendo um lápis em sua mão, o que limita nossa capacidade de conjeturar a esse respeito. Com relação à simetria de rotação, não há evidências da apropriação desse conceito pelos estudantes em geral. Na rotação de 180^{o} (em que há simetria central), apenas dois sujeitos demonstraram perceber que o centro de rotação é o ponto médio do segmento ligando ponto e imagem, utilizando esse fato para simplificar a construção da imagem. Um dos resultados parece sugerir que há uma certa confusão entre a reflexão central com a reflexão na reta e mesmo com a translação. Os sujeitos não parecem saber o que são figuras simétricas por rotação.Mais da metade das questões do pré-teste (1 a 12) estão no nível intrafigural do pensamento geométrico, pois tratam de rotações de um mesmo objeto. As questões seguintes relacionam uma figura e sua imagem, assumindo mais o aspecto interfigural. O gráfico 5.5 mostra que o intrafigural não é necessariamente mais acessível que o interfigural.

A respeito da utilização do material colocado à disposição dos sujeitos no teste, observamos que as características do material, numa análise prévia, podem não deixar transparecer os significados que os estudantes possam construir através do uso em contextos socioculturais específicos (Meira, 1998). Por exemplo, os esquadros foram mais usados para traçar segmentos que para traçar perpendiculares ou paralelas (em conjunto com a régua) e o transferidor não foi usado adequadamente pelos alunos. O compasso, pelo que se depreende dos resultados, foi muito pouco utilizado, seja como transporte de distância, seja como ferramenta das operações elementares do Desenho Geométrico (traçar circunferências e arcos de circunferência, como conjuntos de pontos com certas propriedades).

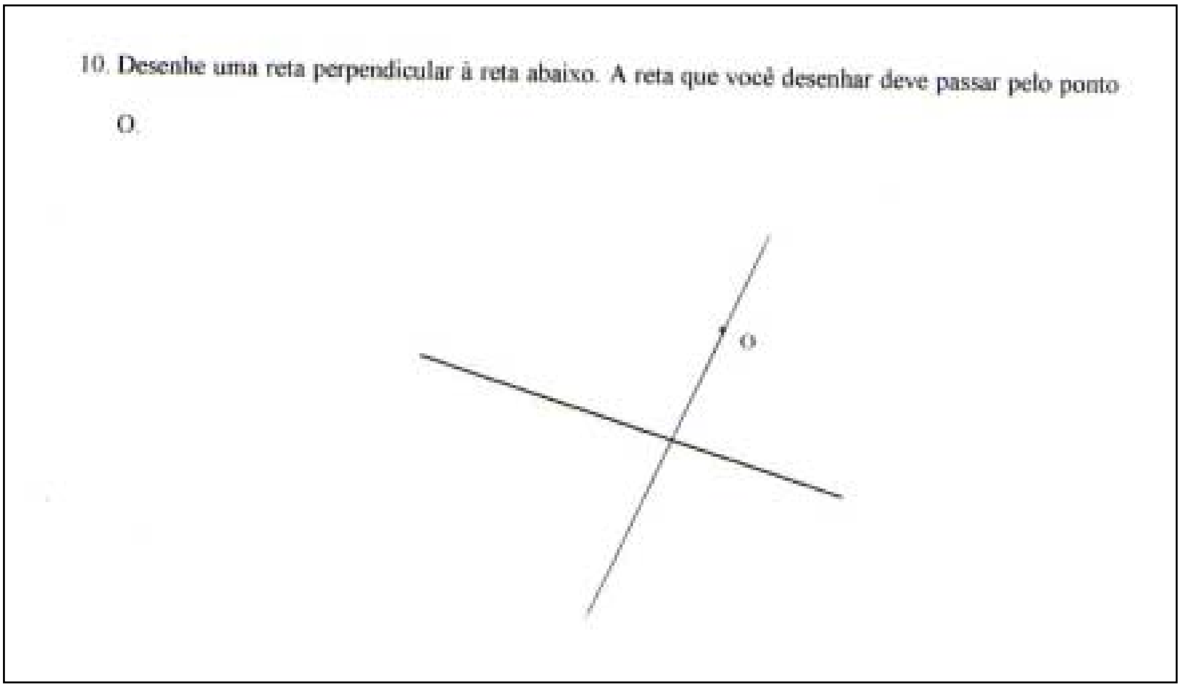
5.3 Resultados observados nas seqüências

Antes de apresentarmos o rendimento dos sujeitos ao longo do desenvolvimento das atividades e das análises referentes às dificuldades encontradas, vamos resumir as principais diferenças entre as duas seqüências. A seqüência IC foi aplicada aos 19 estudantes que poderiam utilizar como ferramentas somente a régua (da qual foi apagada a escala), o compasso, o transferidor e o esquadro de 30^o, do qual não foi suprimida a escala; a seqüência IA foi aplicada aos 16 estudantes que poderiam utilizar, além dos instrumentos de Desenho Geométrico, outros materiais e ferramentas: palitos de fósforos, palitos de sorvete com furos nas extremidades ou no meio, linha, botão, papel vegetal liso, papel vegetal com medida de ângulos, cuja escala varia de 5^o em 5^o, apresentada de 0^o a 180^o no sentido anti-horário em azul e 0^o a 180^o no sentido horário em laranja. Chamamos este dispositivo de *transpel* (transferidor de papel), apresentado no anexo 5. Este material foi criado porque não conseguimos imaginar como o estudante poderia utilizar o papel vegetal como o plano que gira ao redor de um ponto com uma magnitude determinada. Seria necessária uma ação complicada para girar o papel e controlar simultaneamente o ângulo de rotação com um transferidor. Ao planejar este dispositivo, tínhamos consciência de que nossa crença a respeito de sua transparência estaria na dependência do uso que os alunos dele fariam, segundo as considerações teóricas de Meira (1998).

Para não estender demasiadamente nossa exposição, vamos apresentar somente os resultados que apontam fatos relevantes para nosso estudo, ou seja, as dificuldades encontradas para uma determinada tarefa, no interior do grupo ou em comparação com o outro grupo (caso o leitor queira examinar a tarefa, irá encontrá-la no anexo 2 ou 3). Para melhor visualização, utilizamos gráficos de barras representando o índice de sucesso (acerto ou aproximação aceitável) das atividades comuns às duas turmas: em azul representamos os resultados da turma IC, em amarelo os resultados obtidos na turma IA. Depois de cada gráfico, acrescentamos os comentários que julgamos relevantes, considerando metas, expectativas e desempenhos. Por exemplo, resultados maiores ou iguais a 70% indicam que a tarefa foi cumprida satisfatoriamente por mais de 2/3 dos sujeitos; decidimos que tais resultados não mereceriam comentários, a não ser em situações especiais. Nos casos de atividades específicas para cada turma, iremos nos restringir apenas às situações cujos resultados possam ter-se desviado de nossas expectativas. Lembramos que os estudantes desenvolveram seus estudos individualmente ou em duplas e que as intervenções do pesquisador/professor foram bastante reduzidas. Não houve, intencionalmente, oportunidade para que os sujeitos corrigissem seus resultados, evitando-se, dentro do possível, que as dificuldades encontradas fossem mascaradas por alguma influência do professor.

manipulações dos instrumentos (sessão 1, folhas 1 e 2)

No primeiro encontro, quando se aplicou a folha 1, destinada à preparação e exercício no uso dos instrumentos, a seqüência IC apresentava 11 atividades e a seqüência IA apresentava 9. Essas atividades têm um caráter predominantemente intrafigural e, de acordo com Piaget e Garcia (1983), não deveriam oferecer obstáculos aos sujeitos de nossa pesquisa. De fato, o desempenho dos alunos foi bastante satisfatório, com índices acima de 80% de sucesso para todas as atividades, com exceção da atividade 10, do grupo IC, que teve apenas 47% de acerto, contrariando nossas expectativas. Vejamos a resposta de um aluno (IC):



Cinco estudantes traçaram corretamente a perpendicular usando o esquadro (eles desenharam uma semi-reta, na verdade), três estudantes usaram régua e esquadro, traçando corretamente a perpendicular e um estudante apenas usou o compasso e a régua, numa clara demonstração do domínio das ferramentas nessa operação. Os nove demais estudantes traçaram a reta passando pelo ponto, mas sem formar um ângulo de 90º, como no exemplo acima; quando interpelados oralmente, demonstraram conhecer a noção de retas perpendiculares, fato que sugere que o esquadro e o transferidor, à disposição desses estudantes, por si mesmos não têm necessariamente os significados que nós, professores, vemos neles, como se fossem atributos dos materiais (transparência epistêmica, de acordo com Meira, 1998). Por outro lado, não se pode negar que há alguma correlação entre os atributos do material e o acesso ao conhecimento; de certa maneira, esperávamos dificuldade no manejo do transpel, mas na turma IA, o índice de acerto para a mesma questão foi de 88% dos participantes. É possível que o maior desempenho da turma IA se deva ao fato de que o transpel facilite a visão das retas perpendiculares como duas retas formando ângulos de 90º; é interessante observar que três estudantes desse grupo usaram o esquadro e régua, traçando corretamente a perpendicular, em apoio à tese de Meira (1998) de que a transparência está relacionada com o uso (régua e esquadro são utilizados no contexto escolar).

Nas atividades envolvendo medidas de ângulos, esperávamos dificuldades relacionadas com a manipulação dos instrumentos de leitura, um pouco mais acentuadas no caso do transpel, cuja transparência como instrumento de medida de ângulo provavelmente ainda não tinha se realizado pelo uso. De fato, observando o gráfico 5.6, que compara a produção na atividade 1 (turma IC) e atividade 4 (turma IA), vemos que os usuários do transpel erraram um pouco mais as medidas dos ângulos. A despeito do caráter intrafigural da medida do ângulo, vemos que os resultados nessa atividade estão piores do que no pré-teste. Isso provavelmente se explica pelo fato de que cada item da tarefa era tido como realizado somente quando a estimativa do ângulo coincidia com sua medida real. Em particular, o ângulo de 150^o foi o que apresentou maior dificuldade.

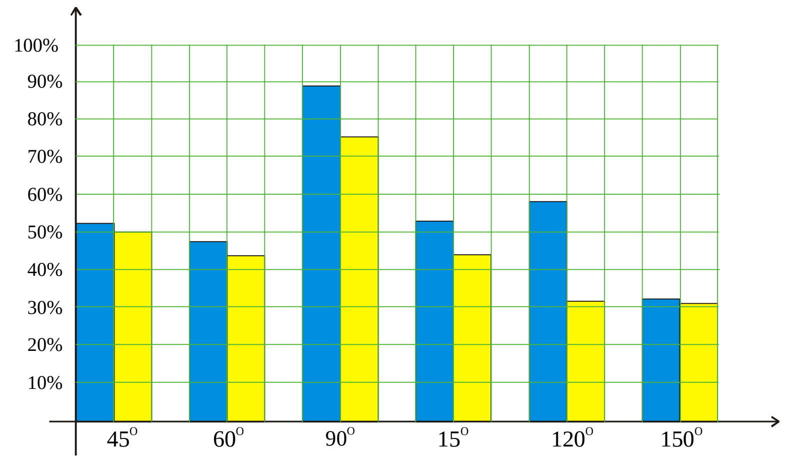
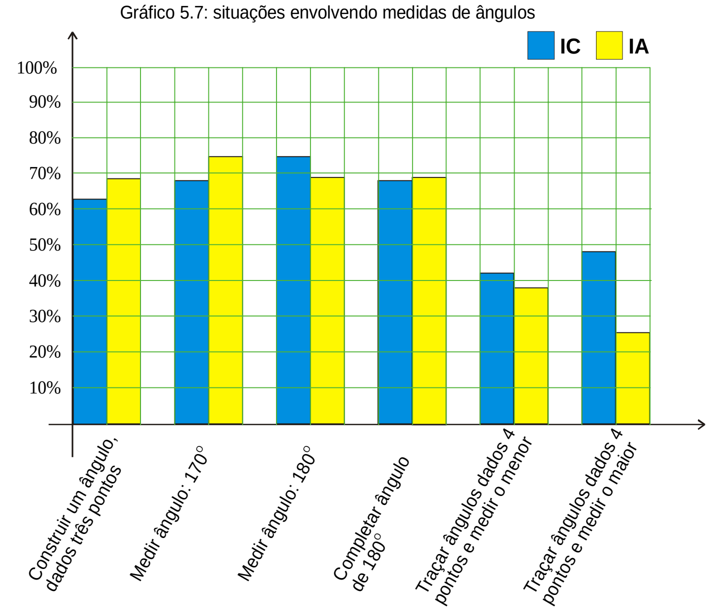


Gráfico 5.6: medidas de ângulos

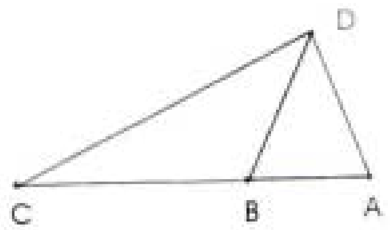
O gráfico ao lado compara os rendimentos nas demais atividades comuns aos dois grupos na folha 2.

Gráfico 5.7: situações envolvendo medidas de ângulos



Digno de nota é o fato de que o índice de acerto foi significativamente baixo nas duas turmas em relação à última atividade, que apresentava dois itens. A situação mobiliza vários conceitos e habilidades (notação e nomenclatura formal de ângulos, ângulo de 180^o, avaliação visual de ângulo, percepção de partes em relação com o todo, consideração de várias possibilidades), trazendo dificuldades adicionais para a turma IA. O ângulo de 180^{o}, que os alunos demonstram conhecer na atividade anterior, não é percebido nesta situação mais complexa. Um aluno (IA) respondeu assim:

9. Temos, abaixo, quatro pontos. Você vai traçar todos os segmentos possíveis que ligam dois desses pontos. Considere todos os ângulos formados por dois segmentos.



Qual é a medida do menor ângulo? Resposta: 25°

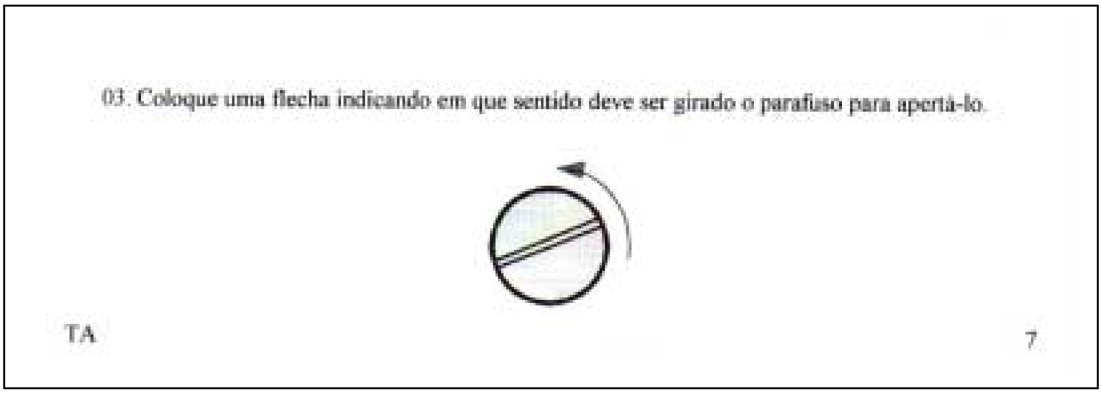
Qual é a medida do maior ângulo? Resposta: 65°

É bem possível que o transpel ainda traga dificuldade pelo fato de o aluno não ter se apropriado do pleno uso desse instrumento e que o fato de colocar o transpel sobre a figura possa ter influído na percepção visual do ângulo maior (ele nem percebeu que $D\hat{B}C$ é maior que $D\hat{B}A$).

A próxima sessão, a segunda, inicia o trabalho com os parâmetros de rotação. No princípio procurou-se estudar cada parâmetro isoladamente, mantendo-se fixos os demais. Vejamos alguns resultados, lembrando que os alunos trabalharam em duplas.

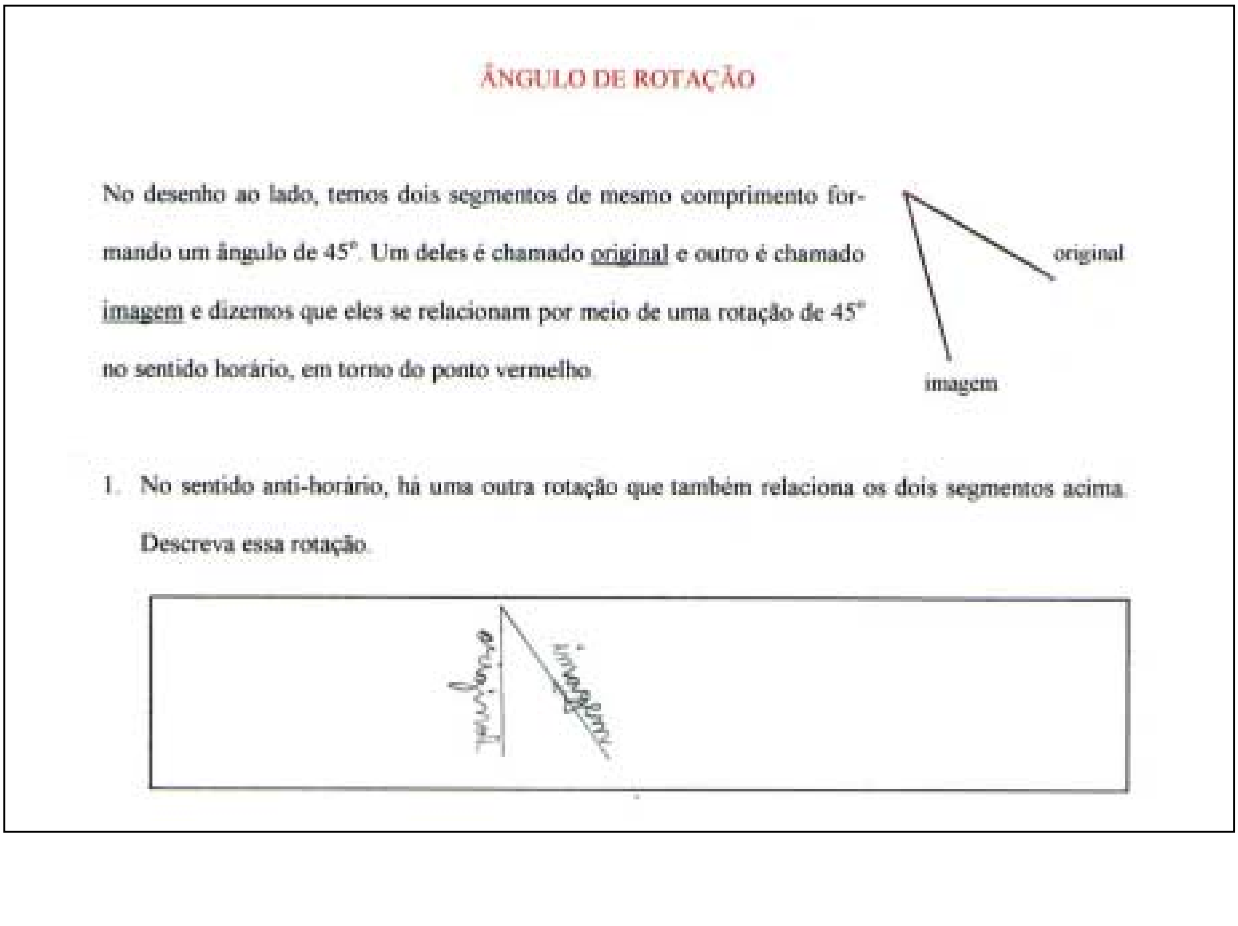
sentido de rotação (sessão 2, folha 1)

Na sessão 2, folha 1, explorando o conceito de sentido da rotação, não houve resultados surpreendentes. É possível que isso tenha ocorrido porque não houve necessidade de usar instrumentos nessa atividade; não há operação de medida envolvida no estudo desse parâmetro, quando visto isoladamente. O índice de acerto esteve acima de 80% nas três atividades e nas duas turmas, mesmo quando se aplica a noção no nível interfigural, como é o caso da atividade 2, relativa a duas engrenagens. O menor índice foi obtido pela turma IC, na atividade 3, totalmente contextualizada. Apresentamos abaixo a resposta (errada) discutida por uma dupla desse grupo:



ângulo de rotação (sessão 2, folha 2)

Nesta folha, além do estudo do parâmetro representado pela medida do ângulo de rotação, por razões já apresentadas, vimo-nos na contingência de definir os termos *original* e *imagem*. Chama a atenção a grande diferença nos resultados de alguns itens para as duas turmas, tendo o grupo IC se saído melhor. Atribuímos isso ao fato de que a tentativa de contextualização da rotação envolvendo as noções de original e imagem, em que se procurava dar um caráter interfigural à noção, acabou dificultando o entendimento do conceito como um todo. A estratégia adotada de colocar um palito sobre o outro, para discernir imagem de original, visando fazer evoluir o conceito de movimento de objetos físicos para o de relação entre duas figuras no plano, ficou muito longa e acabou prejudicando os alunos da turma IA; houve várias perguntas sobre o que fazer, que tiveram de ser respondidas pelo pesquisador. Nessa parte da seqüência também houve necessidade da intervenção do pesquisador na sondagem de conhecimento prévio, na discussão coletiva e na institucionalização da noção de medidas de ângulos maiores que 180^{o} e menores ou iguais a 360^{o}. Tais medidas não aparecem na escala do transferidor usado pelos sujeitos da turma IC nem no transpel da turma IA; entretanto, usando a relação $360^o - \alpha$ é sempre possível obter a medida do replementar de α e isso foi discutido com todos os sujeitos. Não foram utilizados instrumentos com escalas maiores do que 180^o porque a única situação que envolve tais medidas em nosso estudo é a que se coloca quando falamos da convenção que nos leva a escolher o menor ângulo para definir a rotação. A atividade 1 foi realizada satisfatoriamente pelo grupo IC quanto ao resultado numérico (90% de acerto). Entretanto, houve respostas indicando que o conceito não estava claro para todos. Na resposta abaixo, a dupla (IC) inverteu a posição das figuras imagem e original, em vez de inverter o sentido de rotação (talvez os alunos não vejam isso como característico de *outra* rotação).



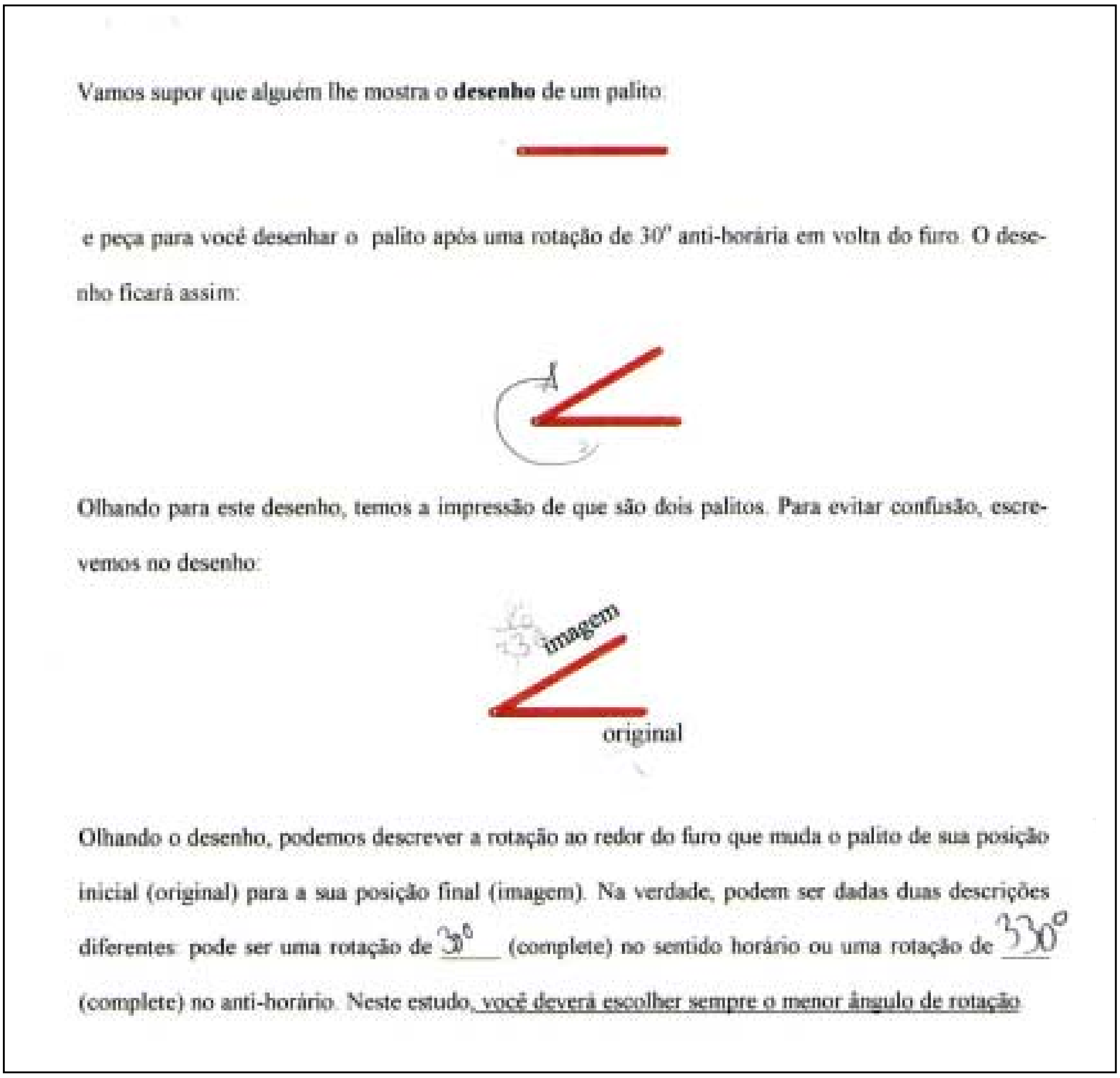
ÂNGULO DE ROTAÇÃO

No desenho ao lado, temos dois segmentos de mesmo comprimento formando um ângulo de 45°. Um deles é chamado original e outro é chamado imagem e dizemos que eles se relacionam por meio de uma rotação de 45° no sentido horário, em torno do ponto vermelho.

1. No sentido anti-horário, há uma outra rotação que também relaciona os dois segmentos acima. Descreva essa rotação.

Comparando com a turma IC, a turma IA foi mal, pois para o sentido horário apenas 38% responderam 330^o (30% responderam que era de 30^o) e para o sentido anti-horário somente 56% responderam 30° (os que haviam respondido 30° agora disseram que era 330° ou 150°).

Esses resultados mostram possíveis falhas no *design* dessas atividades iniciais para a turma IA: talvez a contextualização tenha sido inapropriada, ou o texto tenha sido longo e prolixo ou, ainda, a estratégia adotada tenha causado dificuldades de ordem cognitivas maiores do que as encontradas nas atividades da turma IC. Apresentamos abaixo a resposta dada por um elemento de uma dupla (IA), na parte final da atividade, comparável com a da outra turma:



Vamos supor que alguém lhe mostra o **desenho** de um palito.

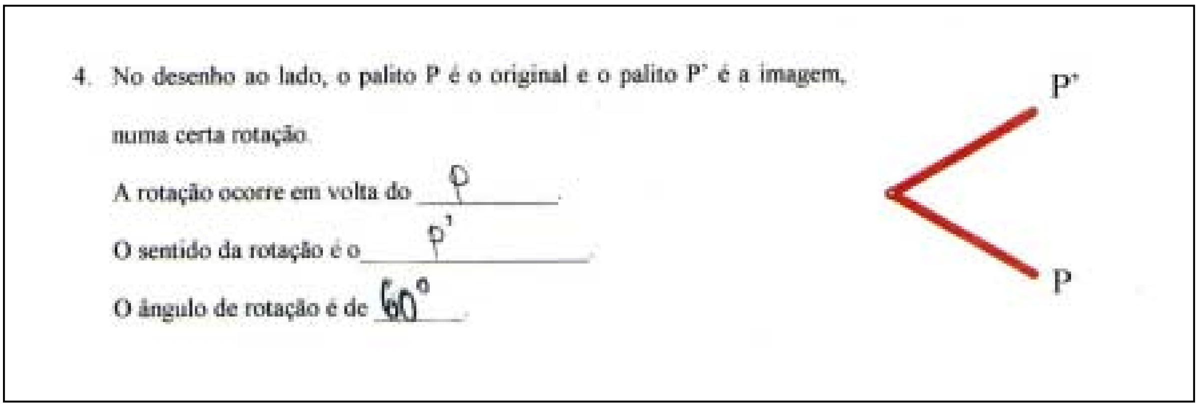
e peça para você desenhar o palito após uma rotação de 30° anti-horária em volta do furo. O desenho ficará assim:

Olhando para este desenho, temos a impressão de que são dois palitos. Para evitar confusão, escrevemos no desenho:

Olhando o desenho, podemos descrever a rotação ao redor do furo que muda o palito de sua posição inicial (original) para a sua posição final (imagem). Na verdade, podem ser dadas duas descrições diferentes: pode ser uma rotação de 30° (complete) no sentido horário ou uma rotação de 330° (complete) no anti-horário. Neste estudo, você deverá escolher sempre o menor ângulo de rotação.

O aluno faz a flecha indicando corretamente o sentido da rotação, mas permuta os ângulos; parece que a confusão está no nível da linguagem (significado de *horário* e *anti-horário*) ou no uso do transpel, pois ao girar num sentido, o estudante pode focalizar o original, que, relativamente falando, parece girar no sentido contrário (movimento relativo).

A partir da atividade 4, os problemas propostos se tornaram equivalentes (às vezes com variações nos enunciados). Abaixo, o problema e a resposta dada por dupla do grupo IA.

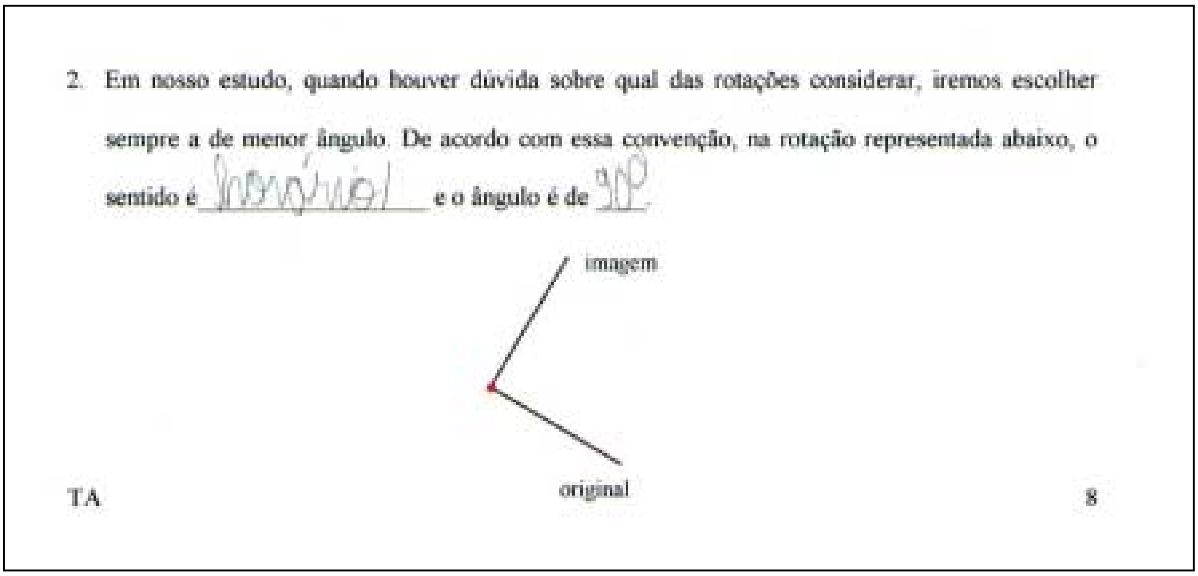

4. No desenho ao lado, o palito P é o original e o palito P' é a imagem, numa certa rotação.

A rotação ocorre em volta do P.

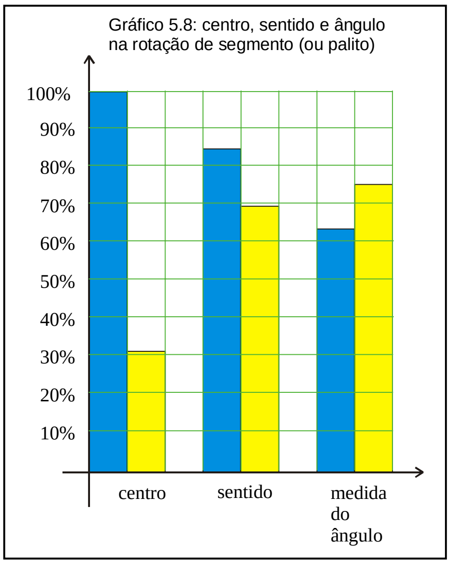
O sentido da rotação é o P'.

O ângulo de rotação é de 60°.

Abaixo, o problema e a resposta dada por uma dupla do grupo IC:

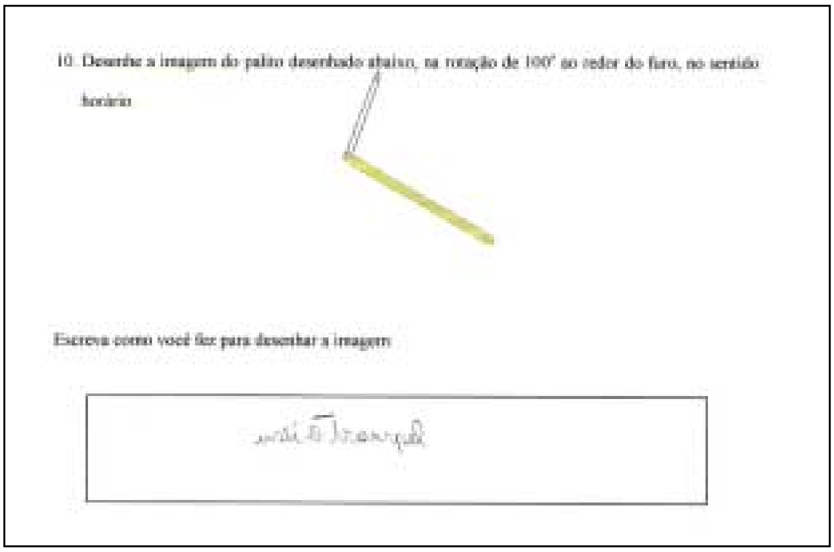

2. Em nosso estudo, quando houver dúvida sobre qual das rotações considerar, iremos escolher sempre a de menor ângulo. De acordo com essa convenção, na rotação representada abaixo, o sentido é horário e o ângulo é de 90°.

Examinando os enunciados com cuidado, vemos que a turma IC foi favorecida em relação ao primeiro item, pois tem apenas que escrever a letra A, enquanto que a turma IA tem que entender o que se pede e fazer uma descrição: “furo dos palitos”. Isso talvez explique a grande diferença de desempenho entre os dois grupos nesse item, conforme dados do gráfico 5.8. Por outro lado, a turma IA se sai melhor no terceiro item, manifestando-se mais uma vez a dificuldade da leitura da medida de ângulos com o transferidor. De fato, 7 alunos do grupo IC responderam que a medida do ângulo era 130° em vez de 50°.



As atividades de 5 a 9, em ambas as turmas, consistiam no reconhecimento de incorreções, se houvesse, de representações de rotações: o sujeito deveria apontar os erros encontrados nessas representações (medida errada, não conservação da forma ou tamanho, não observação do centro de rotação). Em todas elas o rendimento esteve acima de 80%, com exceção do item relativo à justificativa na atividade 8 da turma IC (63%).

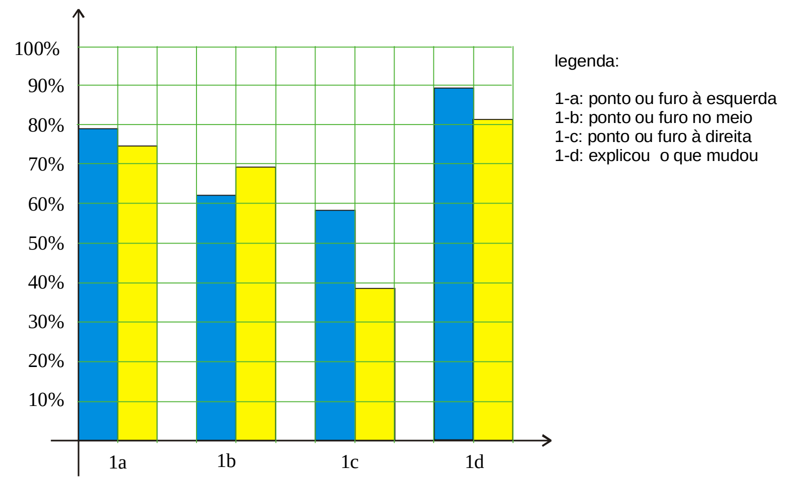
A última atividade dessa folha ainda trata da rotação de segmento (ou palito de sorvete, na turma IA), algo mais complexa, pois se trata de uma construção. O resultado foi mais favorável à turma IC. Concordamos com as idéias teóricas de Meira (1998) com relação à transparência dos instrumentos; por outro lado, o próprio autor reconhece que "alguma análise formal da fidelidade epistêmica é necessária no desenho e uso de artefatos instrucionais" (p. 140) e, considerando esse aspecto, tínhamos a expectativa de que o transpel favorecesse a construção de imagens mais elaboradas nas rotações. A resposta acima mostra que nem todos os sujeitos ainda haviam se apropriado do uso do transpel, nesta altura da seqüência.

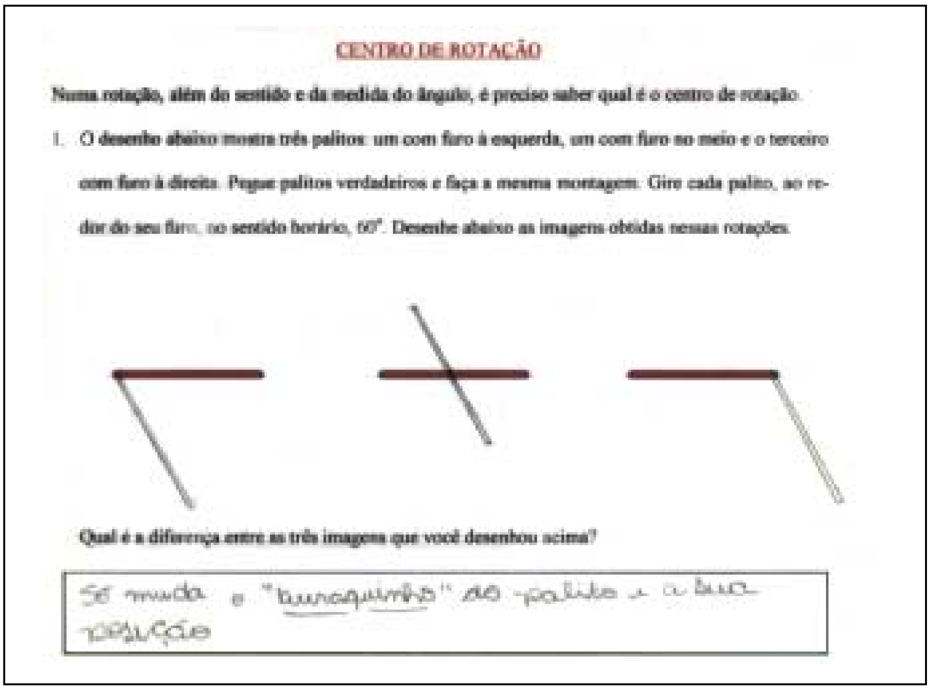


centro de rotação – início do estudo (sessão 2, folha 3)

A primeira atividade dessa folha procurou evidenciar o efeito da mudança da posição do centro de rotação de um segmento (palito, na turma IA), conservados fixos os parâmetros sentido e medida do ângulo de rotação. Mantivemos ainda a contextualização na turma IA, solicitando que os estudantes trabalhassem com palitos de verdade e reproduzissem na folha de atividades o que estavam vendo. O gráfico 5.9 apresenta os resultados. Vemos que os estudantes tiveram uma razoável compreensão do que variou na situação apresentada (item 1d). Os erros de construção da imagem aumentam quando a posição do centro de rotação passa para o meio e depois para a extremidade da direita, principalmente na turma IA. A combinação de palitos com transpel se mostrou particularmente difícil no caso do palito à direita, erro cometido por 30% dos alunos IA e 15% dos alunos IC, ilustrado abaixo (aluno IA):

Gráfico 5.9: Construção da imagem, com o centro em três posições diferentes, fixas os demais parâmetros.





CENTRO DE ROTAÇÃO

Numa rotação, além do sentido e da medida do ângulo, é preciso saber qual é o centro de rotação.

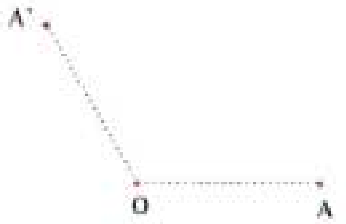
1. O desenho abaixo mostra três palitos: um com furo à esquerda, um com furo no meio e o terceiro com furo à direita. Pegue palitos verdadeiros e faça a mesma montagem. Gire cada palito, ao redor do seu furo, no sentido horário, 60°. Desenhe abaixo as imagens obtidas nessas rotações.

Qual é a diferença entre as três imagens que você desenhou acima?

Só muda o "buraquinho" do palito e a sua rotação

No terceiro item da atividade que trata da rotação de um ponto (ou botão, para a turma IA) houve uma grande discrepância, que pode ser explicada pela maneira como foi proposta para cada turma. Vamos exemplificar com duas respostas (uma do grupo IC, outra do grupo IA, nesta ordem).

3. A figura ao lado mostra a rotação de um ponto A em torno de O, de 120° sentido anti-horário. O ponto imagem, por convenção, é representado por A'. Diga se



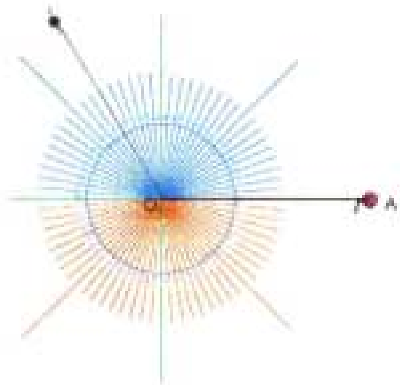
☒ distância OA = distância OA' ou se

☐ distância OA ≠ distância OA'

Escreva como chegou à conclusão acima.

Porque as medidas são as mesmas, mesmo quando o ponto gira.

3. Podemos girar apenas um ponto. Para ver como isso funciona, pegue o botão preso à linha e a prenda com a ponta do dedo, no ponto O, sobre o transpel; puxe o botão deixando a linha esticada, na posição A, como mostra a figura ao lado. Desenhe esse botão após um giro de 120° no sentido anti-horário. Chame essa nova posição de A'. Marque com um X a resposta certa:



☒ distância AO = distância AO' ☐ distância AO ≠ distância AO'

Escreva como você chegou essa conclusão.

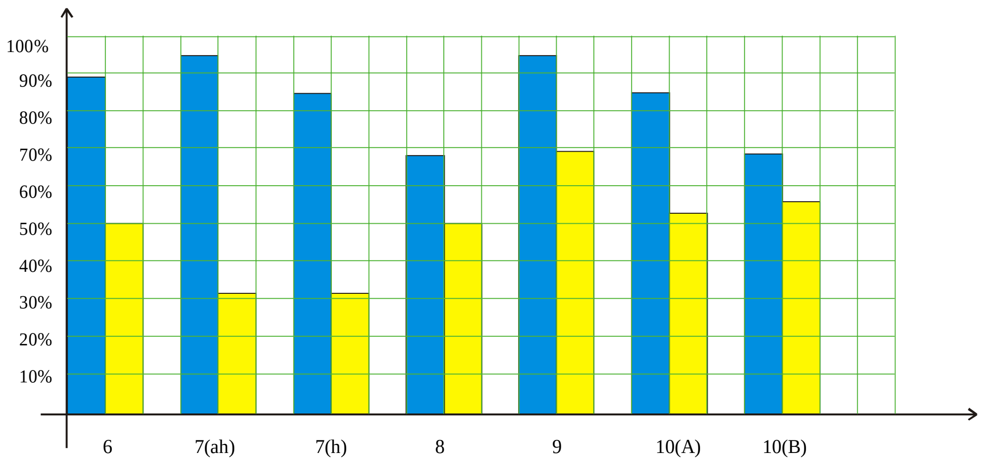
Girando a linha com o botão no sentido anti-horário

A turma IC teve 100% de acerto nos dois quesitos (AO =A'O e justificativa). A turma IA, que tinha a tarefa adicional de fazer um desenho, não se saiu mal, já que o índice de sucesso foi de 75% para o desenho e 81% para a igualdade das distâncias. O problema foi a comunicação: não souberam explicar como chegaram à conclusão 50% dos integrantes do grupo. Talvez explicações sobre fatos físicos sejam mais difíceis do que para fatos puramente geométricos (referentes à mesma situação conceitual), estando presente aí a questão da transparência do dispositivo físico.

Na atividade 5, de reconhecimento de erros, havia dois erros: 90% dos estudantes apontaram um erro, mas menos de 45% apontaram dois erros. Parece que os alunos pressupõem uma espécie de regra impondo apenas um erro.

Apresentamos abaixo as atividades 6 a 9, comuns às duas turmas e em seguida o gráfico comparativo dos resultados. Em nossa análise a priori da seqüência, havíamos previsto dificuldades no tratamento do ângulo de 180^{o}; entretanto, os resultados estiveram abaixo do que esperávamos.

Gráfico 5.10: rotações de 180^{o} de um ponto e rotações de pontos isolados

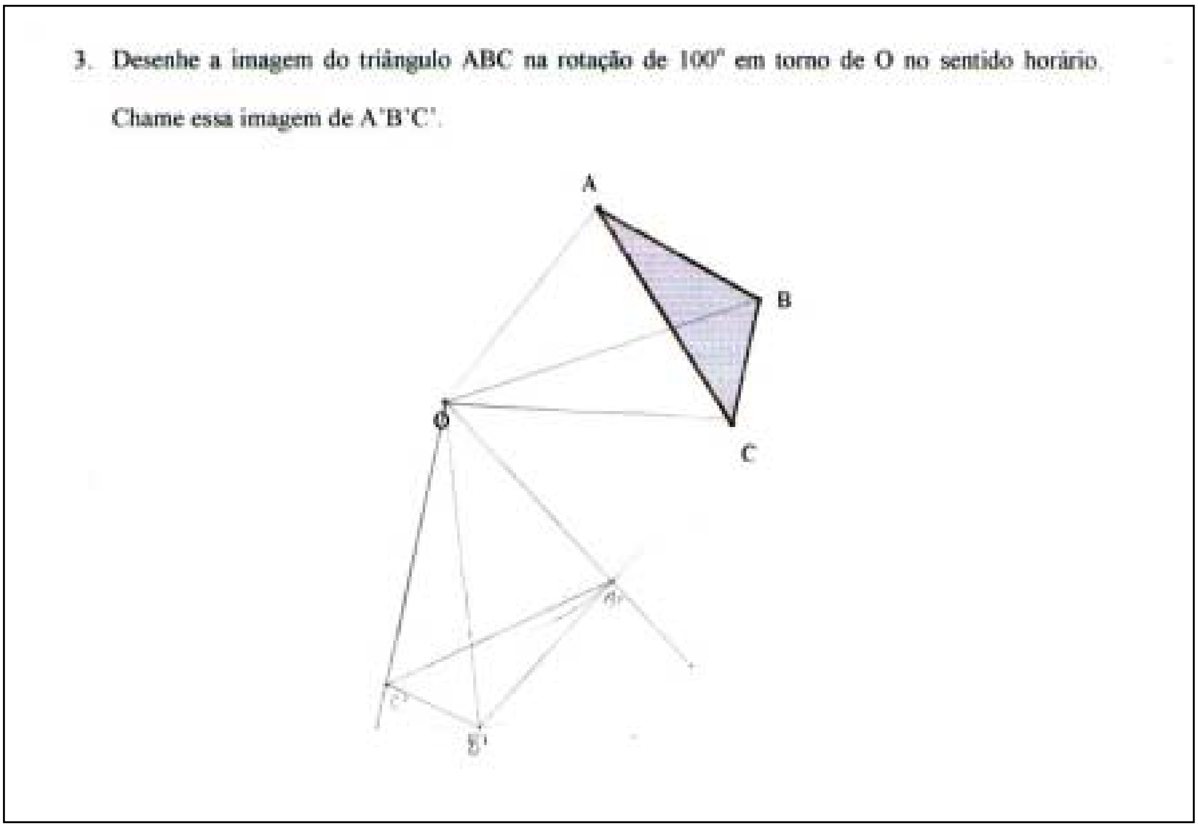


O ponto médio do segmento foi denominado por alguns alunos (2 do grupo IC e 5 do grupo IA), de “centro” do segmento, respostas não consideradas como corretas. Na atividade em que se pedia para *achar* a imagem da rotação de 180^{o} de um ponto nos dois sentidos, suspeitamos que os alunos da turma IA, ao girar o ponto de 180^{o} no transpel, não viam necessidade de desenhá-lo, já que deixaram a resposta em branco; talvez não se trate aqui da questão da transparência do transpel, mas da ênfase no que se deseja como resultado nessa atividade. Na conclusão, onde o aluno deveria responder que o sentido não importa na rotação de

180^o, os resultados não foram bons para nenhuma das duas turmas. Na descrição da estratégia, a turma IC saiu-se melhor, demonstrando inclusive ter utilizado a propriedade do ponto médio para achar imagem na rotação de 180^o. Na atividade 10, cujos resultados não estão no gráfico acima, sobre a rotação solidária de dois pontos A e B, a turma IC esteve melhor (70%) e o ponto A, talvez pela sua posição mais privilegiada, mais acertado (85%); na turma IA, o transpel garantiu igualdade de resultados para ambos os pontos (55%), pois os dois são rotacionados simultaneamente. Talvez o aspecto semi-pontual do problema favoreça os alunos do grupo IC, que se vêem obrigados a achar a imagem de cada ponto por vez, enquanto que os alunos do grupo IA giram o transpel para levar os dois pontos simultaneamente, como se fosse uma figura única, global.

rotações de segmentos, triângulos e circunferências com centros fora de seus contornos - (sessão 2, folha 4)

Aqui vemos uma certa alternância nos resultados entre as duas turmas. De uma forma geral, os resultados foram bons, pois todos os itens têm índices de acerto acima de 75%. A folha 4 envolve atividades de construção de imagens de figuras simples (segmentos, triângulos, circunferências) bem como a capacidade de comunicar as estratégias adotadas nas várias situações. Algumas atividades medem explicitamente a apropriação das propriedades que decorrem dos conceitos dos parâmetros envolvidos nas rotações. Segundo nossa concepção, este conjunto de atividades é um dos mais significativos dentre todos os propostos nas duas seqüências. A questão sobre a simetria rotacional da circunferência, em que o aluno deve aceitar o fato de que imagem e original coincidem, teve índice de sucesso em torno de 90%, indicando um progresso bastante grande dos alunos nesse aspecto, que o pré-teste mostrava ser bastante falho. Os resultados mostram que os alunos IA foram melhor, o que talvez se explique pela transparência emergente pelo uso do transpel, facilitando atividades de rotações globais. Reproduzimos abaixo a resposta de um estudante do grupo IC, mostrando como utiliza a estratégia semi-pontual da transformação:

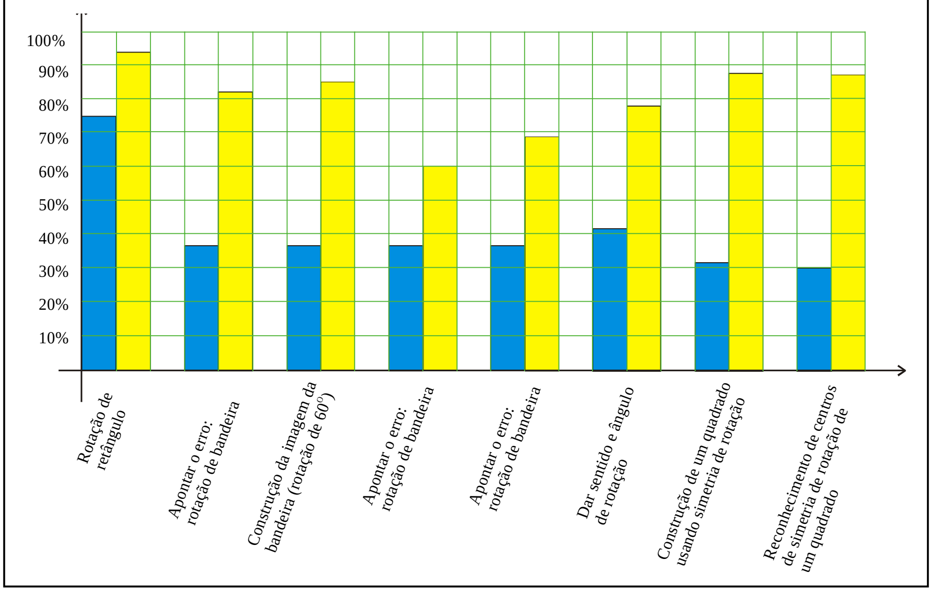


Vários alunos do grupo IA, indiretamente, utilizam também o raciocínio semi-pontual, pelo menos no nível intrafigural: em vez de decalcar totalmente a figura, eles decalcam apenas os pontos que definem a figura (ou seja, os vértices, no caso de polígonos). Cumpre observar que essa estratégia é espontânea em alguns casos; em outros, foi sugerida por nós, no início das atividades, para alguns alunos do grupo IA que perguntavam como iriam passar a figura do transpel para a sua folha de atividades.

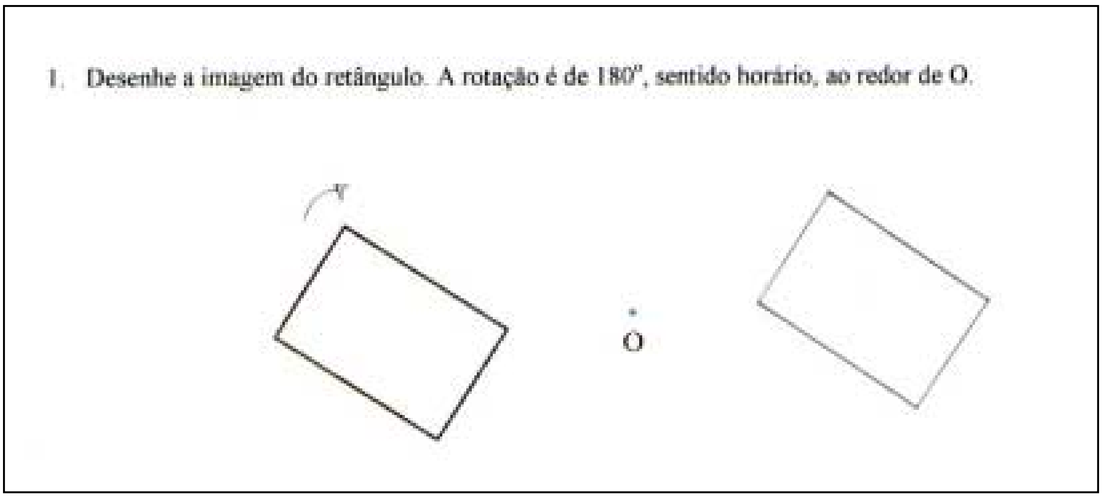
rotações de figuras mais complexas com centros fora de seus contornos - (sessão 2, folha 5)

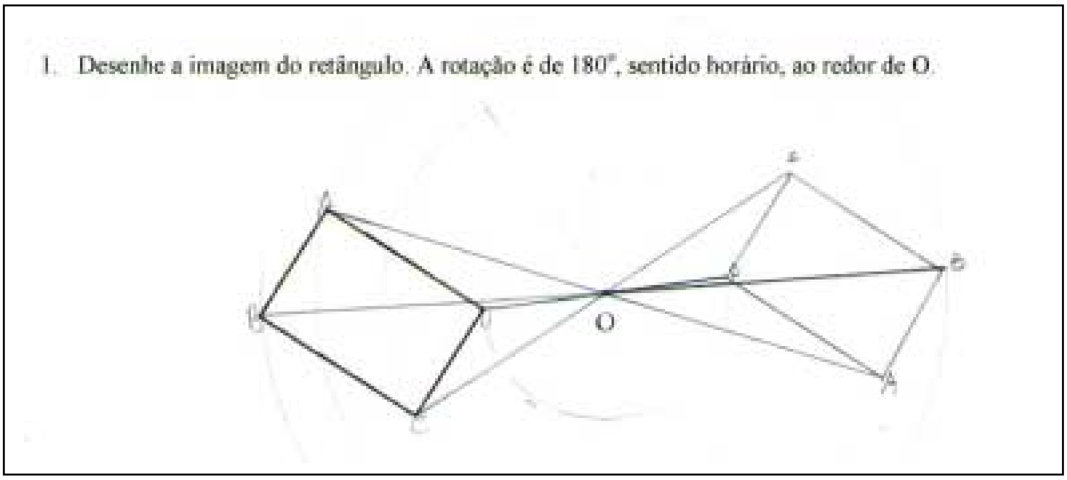
Nossa meta inicial era fazer, em média, uma folha por encontro, para não prolongar demasiadamente o tempo de aplicação da seqüência. Entretanto, no início da folha 5 já havia uma certa defasagem temporal entre os dois grupos, com o grupo IA um pouco mais adiantado. No desenrolar das atividades desta folha, o grupo IA começou a se distanciar. As atividades dessa folha são, na maioria, de estudo de configurações, mas as atividades 1, 3 e 7, trabalhadas com régua e compasso, consomem muito mais tempo. O transpel, deslocando globalmente a figura, economiza tempo à turma IA. Com efeito, parece que o baixo índice de sucesso da turma IC não se deve explicitamente a erros, mas à ausência de respostas. Optamos por recolher a folha ao final do encontro, para não atrasar o cronograma da seqüência, mesmo sabendo que isso provocaria uma desigualdade de resultados, conforme atesta o gráfico a seguir. Nossa decisão se justifica pelo fato de que o tempo de aprendizagem é um aspecto a ser considerado quando se elabora uma estratégia de ensino.

Gráfico 5.11: rotações de figuras com centros exteriores



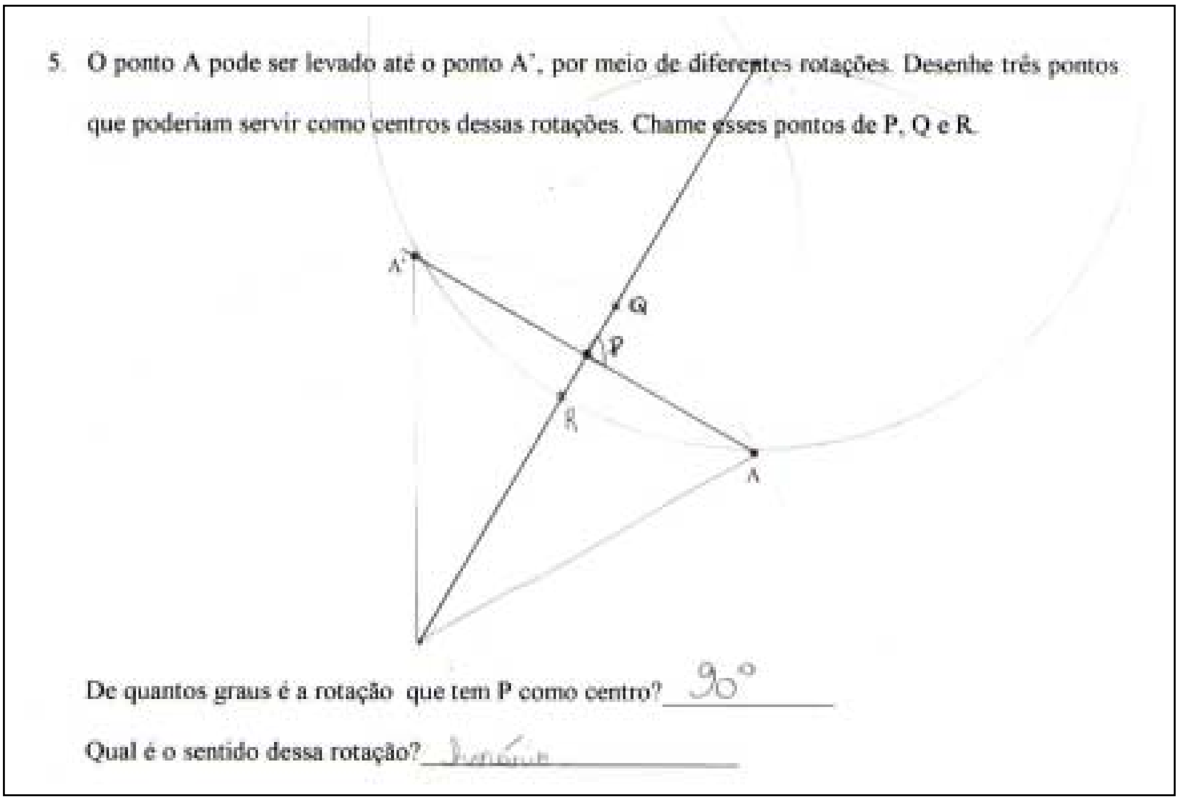
Compare o trabalho feito por dois alunos, o primeiro do grupo IA e o segundo, do grupo IC.





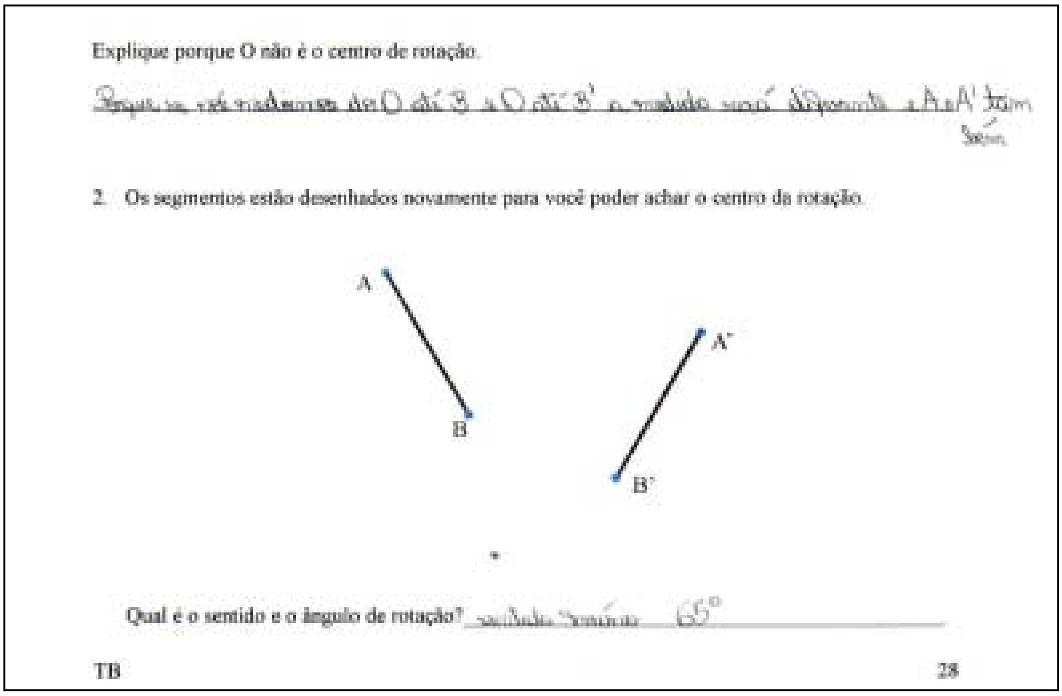
localizando o centro de rotação – conceito fundamental (sessão 3, folha 1)

A sessão 3 trabalha, nas duas primeiras folhas, com a questão mais complicada da determinação do centro de rotação. A idéia central que justifica as construções, tanto da turma que usa régua e compasso, como da outra, que usa dobras no papel, é a de que o centro de rotação de ponto pertence à mediatriz do segmento que liga o ponto à sua imagem. Como as figuras têm mais de um ponto, teríamos que achar as mediatrizes dos pares de pontos (X,X') tais que X é ponto da figura original e X' é ponto da imagem. Entretanto, se o ponto de rotação é único, basta achar a intersecção de duas mediatrizes. Esta estratégia falha no caso de rotação de retas (ou segmentos) em que a rotação se identifica com uma reflexão singular, pois as mediatrizes irão coincidir. Dada a complexidade que pode assumir esta situação, não seria de se esperar grandes resultados. Entretanto, os dados mostram que os alunos se desincumbiram de forma satisfatória dessa tarefa: ambas as turmas obtiveram índices acima de 70% em quase todas elas. Como foi visto no capítulo 3, a mediatriz de um segmento tem um caráter predominantemente interfigural, pois supõe uma organização do plano, segundo Piaget e Garcia (1983). Por outro lado, o uso adequado de instrumentos como o compasso ou procedimentos como a dobradura, repousam sobre a transparência desses dispositivos, na visão de Meira (1998); nada garante que o estudante se apropria do significado que achamos evidente quando traçamos arcos de circunferência como pontos que têm uma propriedade especial e, pior ainda, quando dobramos o papel, levando um ponto sobre o outro e afirmamos que o vinco é a mediatriz do segmento cujas extremidades são esses pontos. No decorrer da seqüências, foram necessárias explicações para os estudantes que não conseguiram, sozinhos, interpretar os textos que discutem essas estratégias. Não obstante o bom resultado geral obtido nessas folhas, podemos apontar respostas que denunciam algumas confusões, não necessariamente conceituais, mas talvez de percepção. A resposta a seguir, parcialmente errada, é a de um aluno do grupo IA, que usou o compasso e não a dobradura para obter a mediatriz. É de se conjeturar que a dobradura ainda não tenha o mesmo sentido para ele que o compasso.

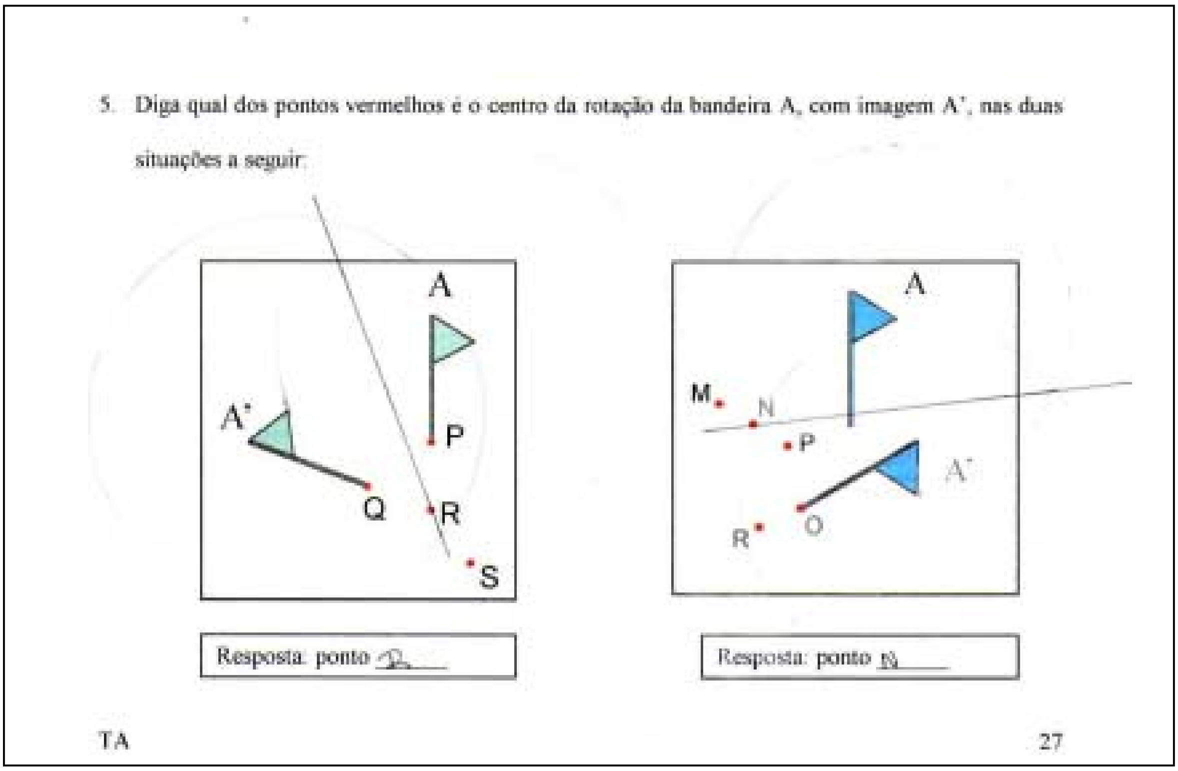


localizando o centro de rotação – aplicações (sessão 3, folha 2)

Propomos nesta folha a determinação do centro em situações variadas de rotação de segmentos, mobilizadoras da estratégia da intersecção das mediatrizes ou do caso especial que se confunde com a reflexão. Não prosseguimos com figuras mais complexas, para não estender as atividades; considerando que figuras contêm pelo menos dois pontos, a apropriação do conceito que permite a determinação do centro de rotação para segmentos é a chave para a compreensão de todas as situações mais complexas. Nos casos de reconhecimento de centros de rotação, onde não é necessária nenhuma construção, apresentamos o caso da rotação de uma bandeira. Verificamos nesta folha uma queda de rendimento, principalmente pela turma IC. Entre as possíveis causas, poderíamos apontar a questão do tempo, pois a turma IA apresenta melhores resultados, possivelmente porque o transpel e as dobraduras no papel vegetal abreviaram o tempo das operações de construção das mediatrizes. Mostramos, abaixo, com dobradura não visível na reprodução, a resolução correta de uma aluna do grupo IA para a atividade 2:

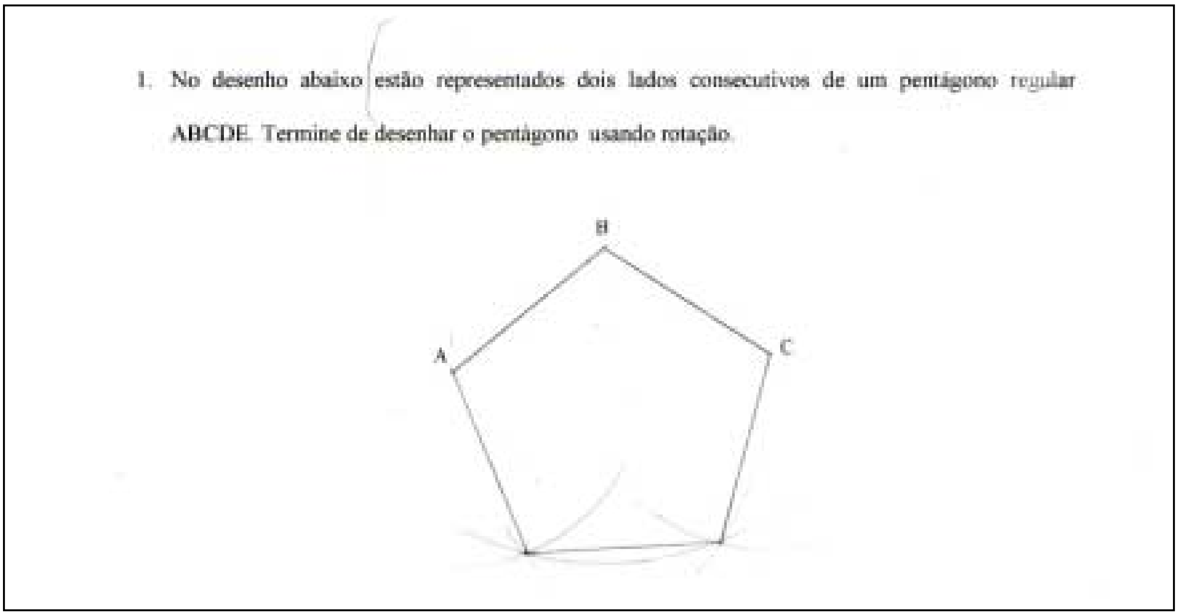


Algumas dificuldades previstas se manifestaram, não necessariamente da forma esperada. Por exemplo, os alunos foram capazes de encontrar o centro de rotação nas atividades 2, 3 e 4, mas muitos se confundiram na hora de medir o ângulo de rotação, na turma IC. A rotação global (transpel) se mostrou mais eficiente. Na atividade 5, contrariando um pouco nossas expectativas, somente alguns alunos erraram ao considerar os três pontos (M, N, P) como possíveis centros de rotação. Isso sugere que a propriedade interfigural da distância do centro aos pontos correspondentes X e X', quaisquer que sejam eles na figura original e na imagem, respectivamente, foi assimilada pela maioria dos sujeitos (cerca de 70%). É interessante observar que certas estratégias podem nos surpreender. A resposta que reproduzimos, a seguir, mostra uma resolução que acabou se revelando mais econômica, pois a aluna (do grupo IC) não achou a mediatriz do pé das bandeiras, o que a obrigaria a traçar outra mediatriz, mas escolheu as pontas das bandeiras, o que leva a uma resposta imediata. Pura sorte ou insight?



resolvendo problemas usando a rotação como ferramenta (sessão 3, folha 3)

Para encerrar nosso conjunto de atividades, apresentamos aos alunos mais adiantados a folha contendo os problemas mais desafiantes. Muito se fala nas transformações como ferramentas para a resolução de problemas. Se o conceito de ferramenta é razoavelmente preciso, o de problema é mais elástico. Se, por exemplo, considerarmos que medir um ângulo numa rotação é um problema, e certamente isso é válido em certos contextos, então já resolvemos muitos problemas ao longo de nossas seqüências. Entretanto, há problemas muito difíceis em Geometria, até para o matemático profissional, que podem ser resolvidos de maneira extremamente elegante com o uso de transformações. Ao leitor interessado nesses problemas, recomendamos a coleção de Yagloom, mencionada na bibliografia. Ocorre que nesses problemas, que são problemas de Geometria, nem sempre está claro que estratégia utilizar; em geral, podem ser resolvidos com outros métodos, como o da Geometria Analítica ou Trigonometria. Somente com o domínio conceitual e prático das transformações é que seremos capazes de utilizá-las eficientemente como ferramentas. Dada a curta duração de nossas atividades, não seria de esperar que os alunos enfrentassem todos os problemas nesta folha com sucesso absoluto. Nossa intenção chegou a ser a de não propor essas questões, dado que o pré-teste indicava que os estudantes possivelmente não a enfrentassem com êxito. Acabamos decidindo aplicá-la, para ocupar os alunos que estavam adiantados em relação a outros colegas. Achamos interessante agregar esses resultados, mas deve ficar claro que alguns dos sujeitos (8 alunos da turma IC contra 1 aluno da turma IA), não chegaram sequer a pegar a folha. Note-se aí a desafasagem entre as duas turmas. Examinando o trabalho dos estudantes, observamos que eles mobilizam estratégias, métodos e ferramentas que não estão necessariamente ligados ao conceito de rotação mas a outras concepções prévias ou que talvez tenham se desenvolvido durante as atividades realizadas. Por exemplo, na primeira atividade, que seria a obtenção dos três lados restantes do pentágono, para usar a rotação, o primeiro passo seria achar o centro da mesma (compasso ou dobra). O passo seguinte seria determinar o ângulo de rotação, ou seja 72^{o} – na verdade, como há uma simetria de rotação, basta transportar o ângulo sem saber quanto vale e a melhor forma de fazer isso é traçar a circunferência com centro no centro de rotação e passando por um vértice e, em seguida, transportar os lados (com régua e compasso). Com o transpel, basta girar um lado até que um extremo seja levado no outro.Aqui há uma interação muito forte entre os conceitos de rotação, congruência, simetria, ângulo central de polígono regular e outras propriedades geométricas. Quatro alunos do grupo IC e um do grupo IA valeram-se de uma propriedade bastante específica do pentágono regular (diagonais congruentes) para fazer sua construção com régua e compasso – é uma solução criativa que não utiliza a rotação. Parece que, para o aluno do grupo IA, certamente o transpel ainda não adquiriu transparência, que ele encontrou na régua e compasso. Apresentamos a seguir uma dessas soluções, feita por um aluno do grupo IC.



Houve dois alunos que desenharam um losango com régua e compasso a partir do desenho dado e daí determinaram os vértices do pentágono. Um desses alunos era do grupo IA! Curiosamente, uma aluna do grupo IC usou dobra para achar o centro da circunferência circunscrita! Achamos que está em jogo aqui a questão da transparência decorrente do uso e da interação socio-cultural: enquanto que a aluna pode ter ouvido um colega dizer que a mediatriz pode ser construída com dobradura, o outro ainda não se apropriou do uso do transpel.

O problema do rio pode ser resolvido, rigorosamente, com uma rotação de 180^{o} e nenhuma solução dessa natureza foi apresentada. Alguns alunos que entenderam o problema (houve vários pedidos de explicação do enunciado) acharam que o resolveram por tentativa e erro; de fato eles acharam soluções aproximadas. Poucos estudantes foram bem sucedidos na questão da classificação do quadrilátero obtido, que, sendo um paralelogramo, logicamente também é trapézio, na atividade 4. Quatro alunos (dois IC e dois IA) responderam que era losango, conclusão indevida, pois se baseia apenas na visualização.A classificação dos quadriláteros a partir das propriedades de lados e ângulos traz dificuldades aos alunos.

5.3.1 Considerações adicionais sobre as atividades desenvolvidas durante as seqüências

Com relação às metas e expectativas que apresentamos para cada conjunto de atividades, os resultados obtidos, como seria natural pressupor, não se cumpriram de modo uniforme e, algumas vezes, se apresentaram de forma inesperada e não prevista. Entretanto, se compararmos o índice de sucessos dos alunos com as metas propostas e o índice de sucesso de nossa parte com relação às expectativas que se concretizaram, podemos afirmar que as seqüências se desenvolveram de forma produtiva. Os dados colhidos e sua análise podem ressaltar aspectos que levem à melhoria do ensino e da aprendizagem da Geometria sob a perspectativa das transformações, como iremos ver adiante. É bom lembrar que as atividades transcorreram na presença mais do pesquisador que do professor, tendo sido seu papel interferir apenas nos momentos em que os estudantes solicitavam esclarecimentos com relação à interpretação de textos, vocabulário, definições de conceitos novos e procedimentos com relação ao uso do material. Em vários encontros foi necessário chamar a atenção para o uso adequado do compasso, para o posicionamento correto do transferidor, para o posicionamento correto do transpel, para as estratégias de cópia de figuras por meio do vegetal e para a técnica da dobra do papel, na obtenção da mediatriz. Como já dissemos, houve uma situação em que o pesquisador expôs verbalmente um conceito e verificou, através de perguntas ao grupo, se a noção havia sido compreendida: foi quando se tratou do problema das medidas de ângulos maiores do que 180^{o}. Nas várias situações de clara incompreensão por parte do aluno, a interferência se restringiu a sugestões ou indicações de pistas – em nenhum momento o pesquisador deu respostas prontas. No início das seqüências, foi falado aos estudantes que eles deveriam ler as folhas e trabalhar individualmente ou em dupla (quando explicitado) e que o pesquisador e seu auxiliar iriam apenas o observar o desenvolvimento do estudo, esclarecendo dúvidas conforme descrito acima.

5.3.2 Resumo dos resultados obtidos nas seqüências e sua análise

As seqüências IC e IA são praticamente iguais em seu conteúdo, conforme já exposto no capítulo anterior. Entretanto, elas têm algumas diferenças fundamentais: uma dessas diferenças está na formulação de algumas atividades, na forma de apresentar alguns conceitos e, essencialmente, na utilização de instrumentos diferentes. A turma IC usou unicamente instrumentos do Desenho Geométrico usual (sem os rigores da tradição clássica, pois era permitido o uso de esquadro e transferidor) e a turma IA foi encorajada a utilizar outros instrumentos como palitos, fios, papel transparente para dobraduras e o transpel (veja modelo no anexo 5), além da régua para traçar segmentos e compasso para desenhar circunferências.

A ordem de apresentação do conteúdo procurou se adequar à teoria psicogenética de Piaget e Garcia (1983) relacionada aos níveis intra, inter e transfigural do desenvolvimento do pensamento geométrico da criança. Lembramos que neste estudo não se objetivou tratar do nível transfigural, por razões já discutidas. A sessão 1, em que se procurou familiarizar o aluno com o uso dos instrumentos, bem como fazê-lo retomar idéias geométricas elementares, tem um caráter predominantemente intrafigural. As atividades iniciais, de traçados de figuras geométricas elementares usando os instrumentos disponibilizados para cada turma, não ofereceram dificuldade; entretanto, no tratamento da medida de ângulos, surgiu uma grande dificuldade que o pré-teste fazia antever. Aqui se torna oportuna a teoria da transparência dos instrumentos utilizados no ensino e aprendizagem da Matemática, de Meira (1998). De acordo com ela, o fazer sentido matemático, por parte da crianças, quando utilizam instrumentos físicos, é um processo mediado pelo desenvolvimento de atividades e pela participação dos usuários (do instrumento) nas contínuas práticas socioculturais. Ora, as atividades escolares prévias dos sujeitos desta pesquisa incluem o uso informal de instrumentos de Desenho Geométrico: régua (graduada), compasso, transferidor, esquadros. O uso do transferidor para medir ângulos em graus é praticado nas séries imediatamente anteriores. A julgar pelos resultados apresentados, os alunos ainda não desenvolveram os significados matemáticos relacionados com as medidas de ângulos utilizando transferidor. Por outro lado, não se deve negar totalmente o valor da análise formal da fidelidade epistêmica no projeto e no uso de um instrumento, segundo Meira (1998, p. 140); por isso, na nossa opinião, o desenho dos transferidores que os sujeitos desta pesquisa utilizaram, muito comum no mercado, não é adequado: a dupla escala e a falta de guias para o centro do transferidor provocam dificuldade no seu uso. O transpel, que projetamos para ser utilizado pelo grupo IA, entre outras coisas, deveria servir como instrumento para medida de ângulos, sem os problemas que encontramos nos transferidores comuns. A desvantagem seria a sua novidade para os alunos, que nunca o haviam manuseado. Os resultados da seqüência, na sessão 1, mostram que os alunos desse grupo também encontraram dificuldades nas medidas de ângulos. A referência a objetos físicos (como lápis que giram ou palitos que formam ângulos) não parece ter melhorado o rendimento desse grupo em comparação com o outro, no que diz respeito à medida de ângulos.

A sessão 2 das seqüências foi projetada para introduzir os conceitos básicos das rotações, através da apresentação dos parâmetros sentido, ângulo e centro, isoladamente, depois combinados dois a dois e, por fim, os três parâmetros simultâneamente. É importante sublinhar que, na realidade, é impossível considerar apenas um parâmetro e ignorar os demais, mas é possível enfocar um ou dois de cada vez. Aqui, as duas turmas tiveram abordagens distintas. No grupo IC, as atividades diziam respeito a figuras geométricas e a rotação foi introduzida de forma não contextualizada, de forma que as construções fossem compatíveis com o uso exclusivo da régua e do compasso. O desenvolvimento da sessão 2 vai demandando o uso crescente do pensamento geométrico no nível interfigural, iniciado com a construção de significado para os termos *original* e *imagem*. Na turma IA, essa introdução é mais gradual, passando-se primeiro pela consideração do movimento de objetos físicos, que tem um carácter intrafigural (segundo Piaget e Garcia, os movimentos de objetos físicos passam a ter uma característica interfigural a partir do momento que se consideram movimentos compostos, o que não é o nosso caso). Mostrou-se particularmente difícil a transição entre a consideração de objetos físicos e a abstração que representa a rotação de objetos geométricos, conforme atestam resultados da folha 2 e folha 3. Na folha 4, as atividades se igualam (mesmo enunciado para todas as tarefas) e os resultados se alternam entre as duas turmas, sendo que a obtenção da imagem na rotação de segmentos foi melhor trabalhada pela turma IA, indicando que o transpel, no transporte de figuras rotacionadas simples (segmentos e triângulos), se mostra mais produtivo que a régua e o compasso. No trabalho em duplas, durante os encontros da sessão 2, observou-se o que Meira (1998) registrou em seu trabalho: os estudantes discutiam, às vezes veementemente, o uso do transpel no transporte de figuras; com o grupo IC, essas trocas de idéias não se registraram com tanta freqüência com relação ao uso da régua e do compasso. As atividades referentes à rotação da circunferência foram muito bem conduzidas pelos alunos, registrando-se aí as melhores desempenhos da seqüência, possivelmente justificada pelo fato de que o traçado de circunferências esteja intrinsecamente ligada à estrutura do compasso (fidelidade epistêmica) e o transpel, tendo adquirido significado instrumental (transparência emergente), realmente facilita a compreensão da rotação global de figuras geométricas. A folha 5 teve resultados desastrosos para a turma IC, já que as construções mais elaboradas de rotações, usando régua e compasso, demandam muito mais tempo que as rotações globais facilitadas pelo transpel. A turma IA produziu muito mais, no período de tempo mais ou menos previsto para essa folha de atividades.

Na sessão 3, onde se exploram as noções relacionadas com o centro de rotação, envolvendo o raciocínio interfigural mais elaborado, as duas turmas começaram relativamente bem, com ligeiro predomínio do grupo IA. Na segunda folha, onde se exploram situações de rotação de segmentos e determinação dos centros, a turma IA esteve bastante à frente da turma IC. A dobradura para obtenção das mediatrizes parece ter dado um significado maior à atividade da obtenção do centro; é possível que isso tenha ocorrido no seio das discussões e atividades na sala, pois mesmo não estando mais em duplas, houve interações entre os estudantes da turma IA. Isto ocorreu em menor grau na turma IC, que supostamente dominava o uso do compasso, visto como o instrumento ideal para o transporte de distâncias. Esses dois últimos fatos suportam a teoria de Meira (1998). Finalmente, a última atividade da seqüência, aberta apenas aos estudantes mais adiantados, também foi enfrentada com maior desempenho pela turma IA, privilegiada pelo uso do transpel na obtenção das imagens por rotações. Acreditamos que essas atividades estejam num nível bastante elevado do pensamento interfigural, em conexão com a competência no uso dos dispositivos físicos à disposição.

5.4 Resultados e análise do pós-teste

O pós-teste compôs-se de 23 questões, das quais algumas iguais, parecidas ou conceitualmente equivalentes a questões do pré-teste (questões 4, 5, 12, 15 e 21) ou das seqüências IC ou IA (questões de 1 a 3, 9 a 10, 14, 16 a 20, 22). As demais questões, não obstante tratarem de situações ou conceitos vistos nas seqüências, tinham formatos diferentes (questões 6 a 8, 11, 13, 23). As questões do pós-teste foram exatamente as mesmas para as duas turmas (veja anexo 4). Recordamos que o pós-teste foi realizado após 40 dias do último encontro realizado com os sujeitos.

Para não estender demasiadamente nossa exposição, iremos exibir e interpretar apenas os resultados que nos parecerem relevantes, agrupados segundo o parâmetro ou parâmetros a que se referem, sempre que possível. Por exemplo, se o rendimento no pós-teste foi superior a 70%, mas em atividades semelhantes ou no pré-teste isso não ocorreu, achamos pertinente fazer referência a esse fato, revelador da aprendizagem em algum momento do desenvolvimento das seqüências. Somente em situações especiais iremos apresentar resultados acima de 70% obtidos em atividades equivalentes nas seqüências e no pós-teste, a não ser que sejam indicadoras de algum fato relevante para nossa pesquisa.

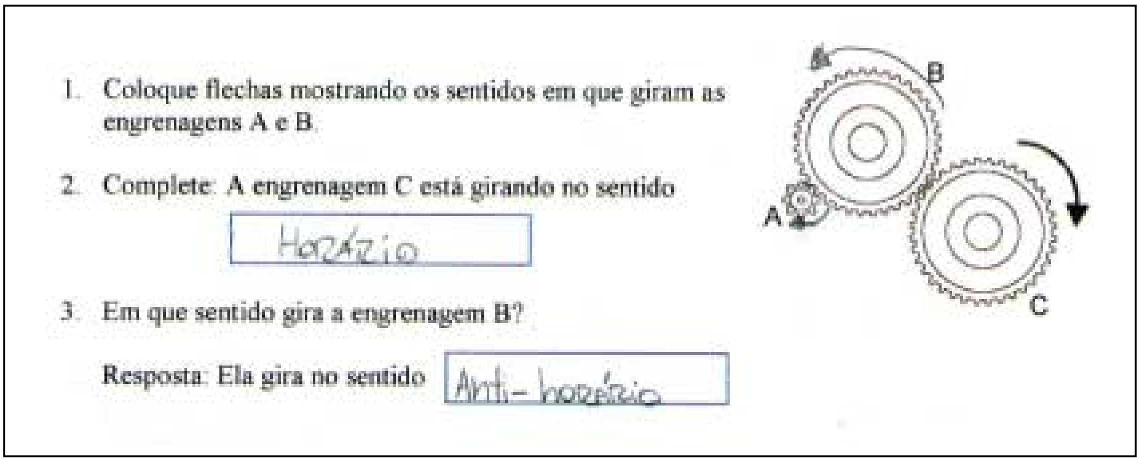
Nos gráficos comparativos a seguir, adotamos a seguinte convenção:

- resultados do pré-teste: colunas marrons;
- resultados do pós-teste: colunas azuis (IC) e colunas amarelas (IA);
- resultados da seqüência: colunas verdes (IC) e colunas vermelhas (IA).

Somente alguns desses gráficos apresentarão os três tipos de resultados.

sentido da rotação

O sentido da rotação, como um aspecto isolado do conceito de rotação e relacionado com o movimento de objetos físicos, como os dos ponteiros de relógios ou de engrenagens separadas ou acopladas, é uma noção interfigural e não exige nenhuma ferramenta física para ser trabalho. No pós-teste, dificultamos um pouco a situação em que o conceito intervinha. Eis a resposta de um aluno (IA):


1. Coloque flechas mostrando os sentidos em que giram as engrenagens A e B.
2. Complete: A engrenagem C está girando no sentido Horázio
3. Em que sentido gira a engrenagem B?

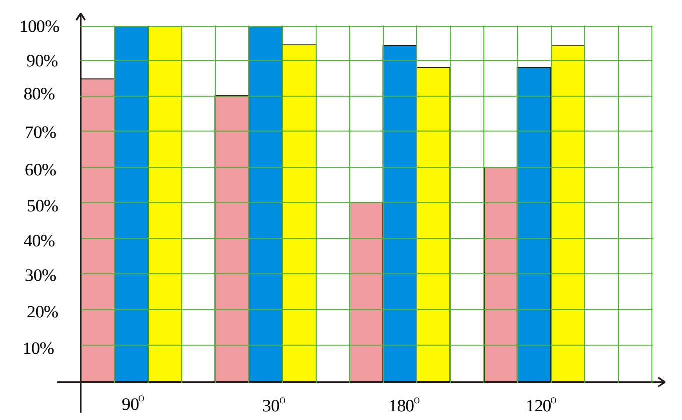
Resposta: Ela gira no sentido Anti-horário

O índice de sucesso para as questões acima foi superior a 75%, sendo o do grupo IA maior do que 85%, invertendo a situação observada no desenvolvimento das seqüências, onde a turma IC tinha sido um pouco melhor. Recordamos que, nas seqüências, o índice de sucesso esteve acima de 70%.

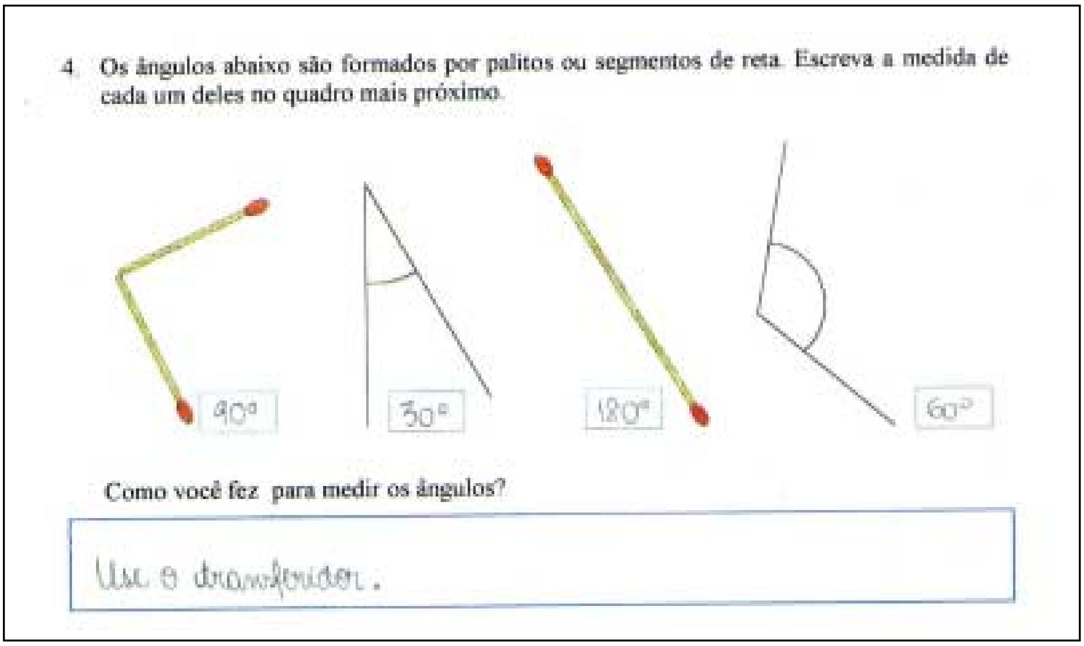
medida de ângulos

A questão 4 do pós-teste foi proposta para verificar se a habilidade de medir ângulos estáticos, com o uso do transferidor (IC) ou transpel (IA), havia melhorado em comparação com as insuficiências observadas no pré-teste e mesmo durante as seqüências. Observando o gráfico, podemos concluir que houve progresso, particularmente no que tange à medida de ângulos obtusos.

Gráfico 5-12: medida do ângulo no pré e no pós-teste



Entretanto, o transferidor, mais que o transpel, oferece ainda dificuldade para ângulos obtusos (não o raso), conforme resposta abaixo:



sentido e medida de ângulo: rotação de um objeto físico e figura geométrica

Obedecendo à ordem em que os conceitos foram sendo introduzidos, na questão 5 pede-se para imaginar o giro de um lápis no sentido anti-horário e mostrar sua posição antes e depois do giro (pensamento intrafigural). No pré-teste há uma questão parecida, onde não se menciona o sentido e então a intenção era verificar se os sujeitos poderiam considerar a medida de 270^{o}, o que não ocorreu; 55% dos estudantes acertaram a questão, considerando apenas o ângulo reto. No pós-teste, o sentido é pré-estabelecido e a resposta só pode ser 90^{o}. É interessante verificar que três alunos da turma IC escreveram 270^{o}, mesmo contrariando a informação do enunciado, mostrando que, em dadas situações, um maior "conhecimento" pode favorecer a ocorrência de erros. Outros três estudantes, da mesma turma, responderam 180^{o}, dando a impressão de que não pensaram em rotação. O índice de acerto da turma IC foi de apenas 53%. Por outro lado, a turma IA teve 100% de acerto. É possível que o tratamento de situações análogas na seqüência IA (rotações de figuras representando lápis) tenha favorecido esse resultado.

Esse maior rendimento, talvez por razão análoga, se repete na questão 7, em que se pede o ângulo e o sentido da rotação de um palito (100% nos dois itens na turma IA, 94% e 88%, respectivamente, na turma IC).

o centro de rotação no giro de um objeto físico

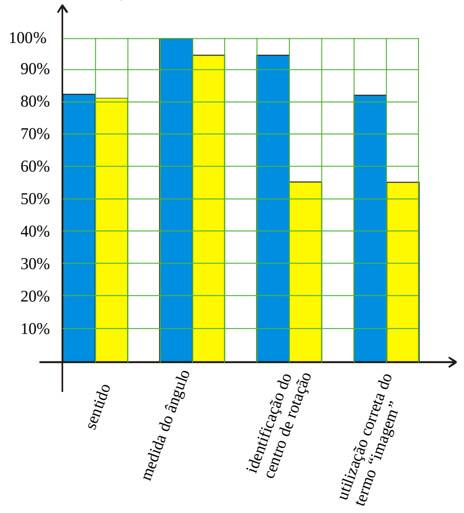
A questão 6 é contextualizada e se refere ao giro de um palito sobre outro, onde o parâmetro em destaque é o centro de rotação. A turma IA teve contato com atividades envolvendo situação parecida na seqüência, mas a turma IC não. Entretanto, os índices de acerto foram de 88% para ambas as turmas!

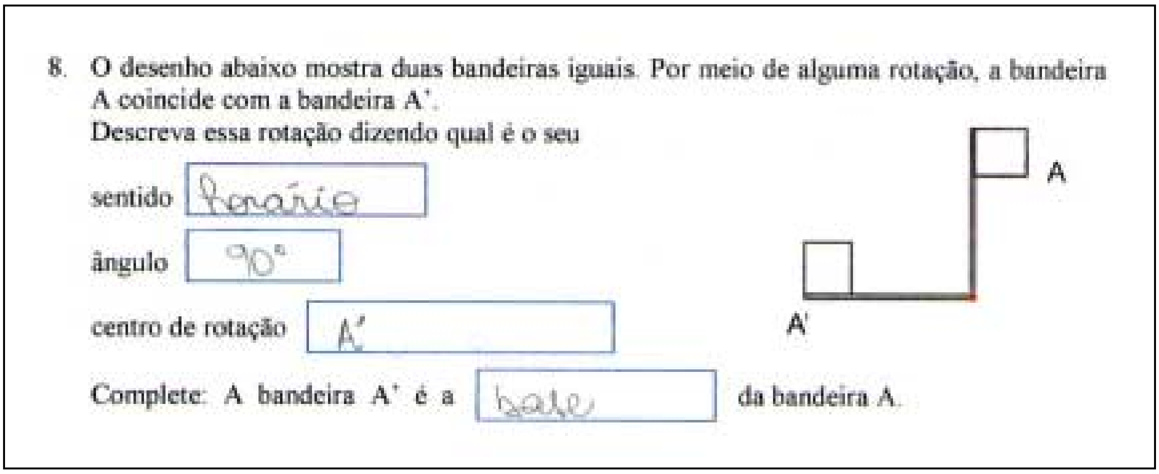
análise de configurações envolvendo sentido, ângulo e centro

As atividades com rotações geométricas, em nosso estudo, que não sejam de construções, podem ser, grosso modo, divididas em três tipos: a) aquelas em que se apresenta a figura original e a figura imagem, numa rotação, sendo o desenho suficiente para que se determinem os parâmetros sentido, ângulo e centro, notando-se que se o desenho estiver correto, não há o que falar sobre a congruência das duas figuras: ela é necessária; b) aquelas em que se apresentam os parâmetros juntamente com a representação completa da rotação, e se solicita do aluno que verifique se as informações são compatíveis, justificando suas conclusões; c) e as atividades em que o aluno deve escolher, entre vários possíveis, os elementos que se ajustam a uma rotação determinada. Em geral, nessas atividades, algum parâmetro do enunciado não se verifica no desenho, mas é possível apresentar situações em que o próprio desenho não pode representar uma rotação (por exemplo, figura original e figura imagem não congruentes).

A questão 8, do tipo a), representa a rotação de uma bandeira, que pode ser considerada um objeto físico ou uma figura geométrica. Ao examinar os resultados ao lado, fica patente que a identificação do centro de rotação apresentou dificuldade para a turma IA. Alguns alunos responderam *A* ou *A'* e um aluno escreveu "ponto". Também apresentou dificuldade para esse grupo o item que verificava a denominação utilizada largamente nas seqüências para nomear a figura resultante de uma rotação (no sentido intuitivo), ou seja, a imagem. Observe uma resposta de um aluno (IA):

Gráfico 5.13: discriminação de sentido, ângulo e centro; emprego do termo "imagem", na rotação de uma bandeira.





8. O desenho abaixo mostra duas bandeiras iguais. Por meio de alguma rotação, a bandeira A coincide com a bandeira A'.
Descreva essa rotação dizendo qual é o seu

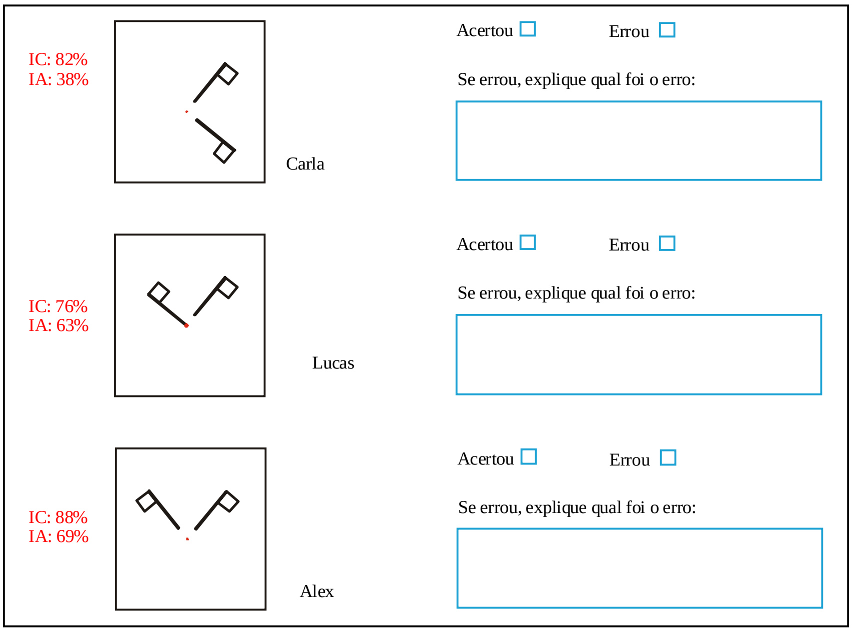
sentido horário

ângulo 90°

centro de rotação A'

Complete: A bandeira A' é a bale da bandeira A.

A questão 9, do pós-teste, pode ser classificada como uma atividade do tipo b). Nela se apresenta a figura original e os parâmetros: sentido, medida, centro. Em seguida, apresentam-se seis configurações completas supostamente representativas dessa rotação, nas quais, exceto uma, existem incorreções. O trabalho do estudante, levando em conta as informações do problema, consiste em apontar os erros e justificar sua resposta. A turma IC teve desempenho satisfatório, mas a turma IA não foi bem em todos os itens, conforme indicado na ilustração a seguir:



O baixo índice de acerto da turma IA no item relativo ao sentido de rotação talvez tenha sido causado pelo uso desnecessário do transpel, que pode ter induzido ao erro em função da relatividade do movimento. A outra situação em que a turma IA também não teve um bom desempenho é a aquela em que o erro está no centro de rotação; talvez, devido ao tamanho da figura, o transpel possa ter atrapalhado a discriminação visual do estudante. O terceiro item, que envolve o discernimento entre rotação e reflexão, bem como a de medida do ângulo (portanto, com dois erros) foi considerado certo pelos estudantes que apontaram pelo menos um dos dois erros; na verdade, apenas dois alunos, da turma IC, apontaram os dois erros: 30% deles viram o erro na medida do ângulo e 41% viram na orientação da bandeira (reflexão); dos alunos da turma IA, 19% anotaram a medida do ângulo e 50% apontaram a reflexão – proporcionalmente, são mais sensíveis ao aspecto visual da figura, algo que o transpel privilegia. A problemática da transparência dos manipulativos aparece claramente neste teste.

A questão 10 é do tipo a) e trata da rotação de um único ponto (portanto, mais intrafigural que interfigural). A turma IC esteve abaixo da meta e isso somente pode ser explicado pela não aquisição completa do uso do transferidor (em situações mais complexas): 6 estudantes da turma IC escreveram 30^{o} na medida do ângulo de rotação do ponto, onde deveriam ter escrito 150^{o}. Na turma IA, apenas um estudante errou a medida do ângulo (ele escreveu 120^{o}). Em ambas as turmas, a discriminação do sentido de rotação teve resultados abaixo do que se poderia esperar – 6 alunos da turma IC e 5 da turma IA disseram que o sentido era anti-horário! – fato que reforça a hipótese de que conceitos supostamente dominados em situações simples, não o são em situações complexas e que a transparência dos instrumentos utilizados é algo que exige tempo de uso significativo.

Na questão 11, do tipo c), a turma IC (59%) encontrou maior dificuldade do que a turma IA (75%) e tratava da escolha, entre vários pontos dados, de um que servisse como centro para uma dada rotação de um ponto M (todos os pontos pertenciam à mediatriz de MM'). Cinco alunos deixaram esta questão sem responder, levantando a suspeita de que o enunciado poderia ter oferecido dificuldade adicional.

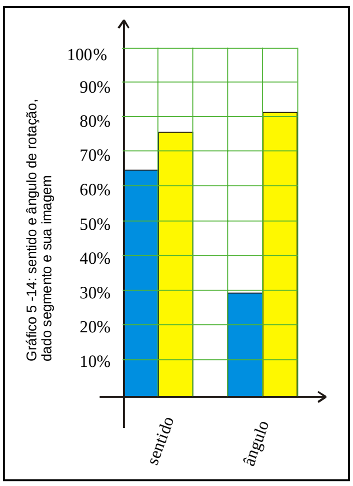
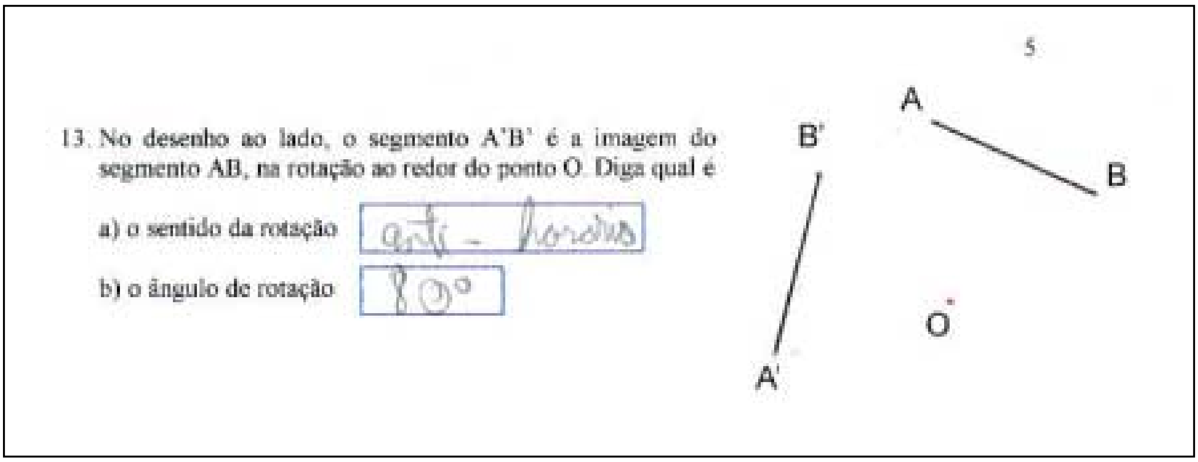


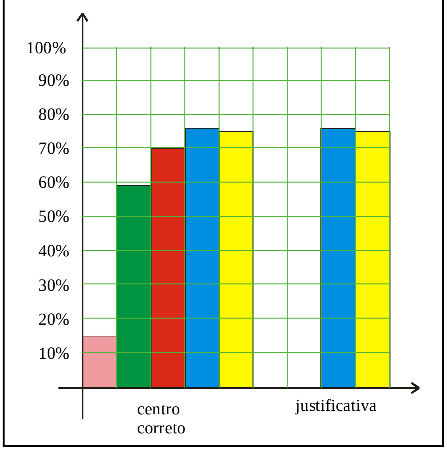
Gráfico 5 -14: sentido e ângulo de rotação, dado segmento e sua imagem

Na questão 13, do tipo a), os resultados para cada turma são muito discrepantes no item referente à medida do ângulo de rotação (gráfico ao lado). Onde se pedia o sentido da rotação de um segmento, dados centro, segmento e imagem, o índice foi razoável. A turma IC errou muito o item em se que pedia o ângulo de rotação, mas o problema não era necessariamente conceitual: 5 alunos responderam 80^o, o que mostra novamente a questão da dificuldade da leitura do transferidor (a rotação era de 100^o). Quatro estudantes dessa turma confundiram-se, respondendo 20^o ou 60^o (mediram partes não correspondentes de pontos e imagens). Na turma IA, três estudantes demonstraram confusões parecidas, ou seja, mediram, tendo o centro de rotação como vértice, ângulos formados por segmentos com extremidades que não se correspondiam na rotação. Mostramos a seguir a resposta de um aluno IC:

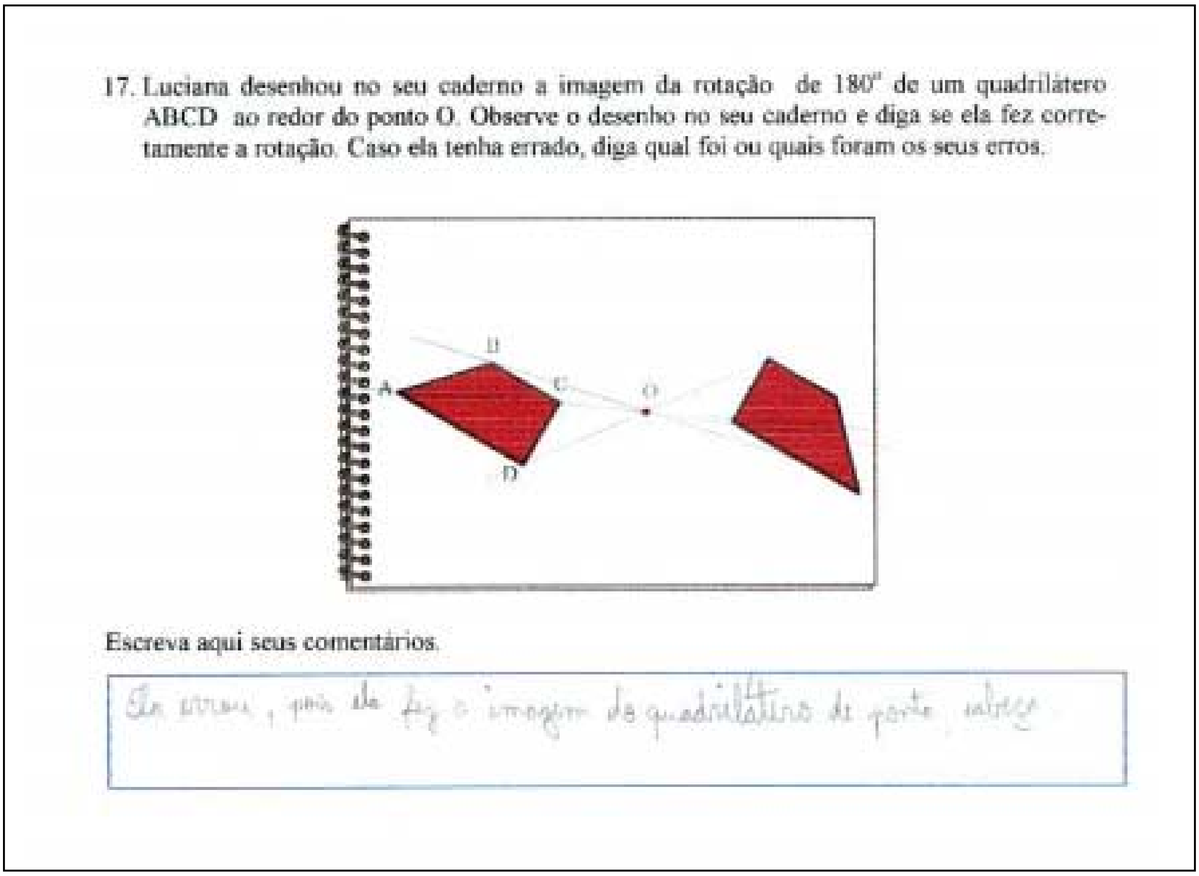


A questão 15, do tipo c) assemelha-se a uma atividade das seqüências e tem uma equivalente no pré-teste. Examinando o gráfico de resultados (convenção de cores na página 159), convencemo-nos de que os estudantes progrediram, não obstante alguns terem deixado de responder ou feito alguma confusão. O importante é que todos os que acertaram justificaram corretamente sua ação.

Gráfico 5.15: escolha, entre vários pontos, do centro correto de rotação da bandeira.



A questão 17 opera com o conceito de rotação de 180^o e simetria central. Desejávamos avaliar se o aluno tinha desenvolvido habilidade suficiente para, com uma simples inspeção visual, determinar se a configuração se trata ou não de simetria central. A justificativa exige uma elaboração maior. Observando os resultados notamos a vantagem do uso do transpel neste tipo de situação (100% dos alunos IA acertaram, contra 70% dos alunos IC). Apresentamos a resposta correta de um aluno IC, abaixo:


17. Luciana desenhou no seu caderno a imagem da rotação de 180° de um quadrilátero ABCD ao redor do ponto O. Observe o desenho no seu caderno e diga se ela fez corretamente a rotação. Caso ela tenha errado, diga qual foi ou quais foram os seus erros.

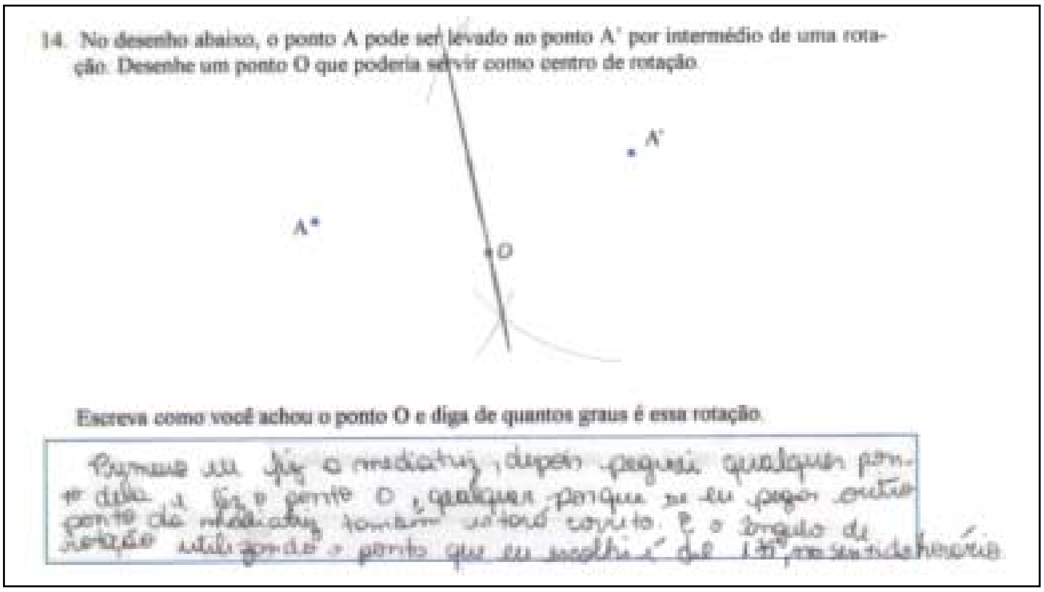
Escreva aqui seus comentários.

Ela errou, pois ela fez a imagem do quadrilátero de ponto, talvez

sentido, ângulo, centro e congruência nas situações de construção de imagens

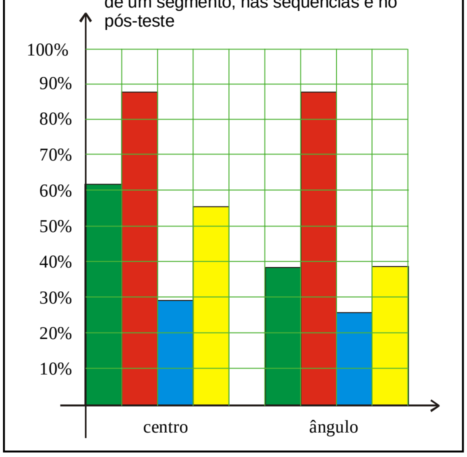
A primeira questão do pós-teste dessa natureza (questão 12) é semelhante à questão do pré-teste que se refere à rotação de um único ponto, entrando em jogo os três parâmetros: sentido, ângulo e centro de rotação. Deve ser levada em conta, quando a resposta do aluno não dá margem a dúvidas, a não observação da propriedade AO = A'O. Os resultados, acima de 80% para a turma IC e acima de 75% para a turma IA, traduzem o progresso obtido pelos sujeitos, principalmente no que diz respeito à consideração do centro de rotação e à propriedade mencionada acima.

A questão 14 consistia na escolha de um centro de rotação, dados um ponto A e sua imagem. Essa questão foi resolvida por todos os estudantes, que acharam um ou mais pontos, mostrando que a noção da mediatriz como um lg de possíveis centro de rotação, de caráter interfigural, foi devidamente apropriada. Mas, na segunda parte, onde o aluno deveria justificar sua construção e medir o ângulo da rotação que tinha inventado, os resultados caíram: 59% para a turma IC e 63% para a turma IA. Eis a resposta correta de um aluno do grupo IC:



A questão 16 teve índices de acertos muito baixos: 30% (IC) e 45% (IA).Observando

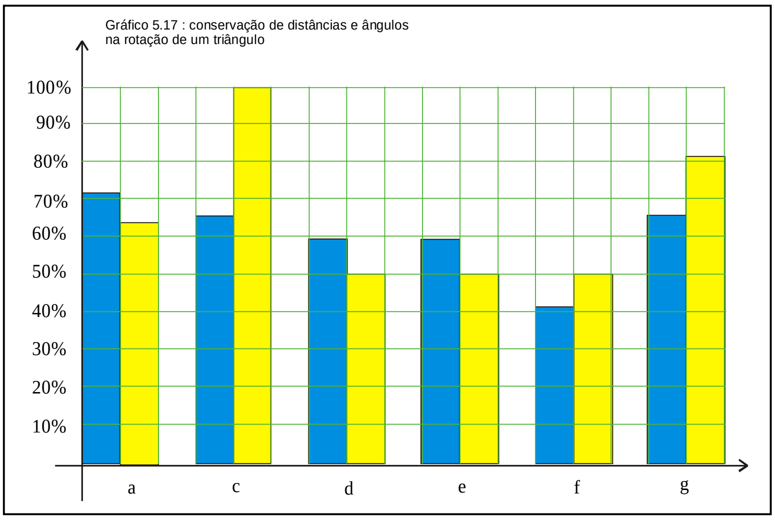
Gráfico 5.16: determinação do centro de rotação e medida do ângulo de rotação de um segmento, nas seqüências e no pós-teste



as construções dos alunos, verificamos que houve confusão no momento de desenhar as mediatrizes que interessavam (ou de fazer a dobra, no caso dos alunos da turma IA), pois vários ligaram os pontos errados, obtendo retas que não poderiam dar o centro de rotação. Este tipo de dificuldade já tinha se manifestado nas seqüências. O gráfico mostra os resultados nas duas situações. As dificuldades parecem relacionar-se com o caráter interfigural do problema, incluindo a questão da rotação global ou semi-pontual, juntamente com a transparência do material: o transpel facilitou um pouco mais que o transferidor, mas, ainda assim, os resultados são deficientes.

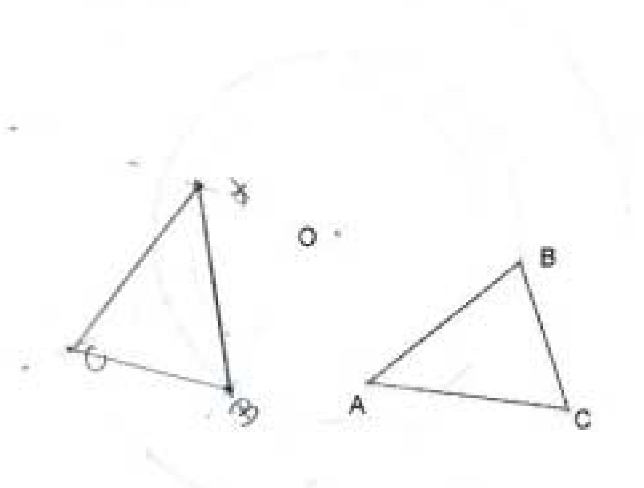
Na questão 18, que trata da construção da imagem da rotação de um triângulo, o trabalho da turma IC é maior, pois os alunos devem obter imagens por rotação de três pontos, para depois desenhar o triângulo; à turma IA basta decalcar e girar três pontos no transpel. Os resultados foram analisados com relação aos seguintes aspectos da rotação: sentido (horário), medida do ângulo de rotação (120^o), centro de rotação (as distâncias XO, X'O devem ser iguais) e isometria (congruência de ABC e A'B'C'). Essa questão é muito parecida com uma das atividades desenvolvidas nas seqüências; em ambas as atividades, o desempenho das duas turmas foi satisfatório, acima de 75% (com exceção do item relacionado com o sentido de rotação, para a turma IC, com índice de 65%).

O teste 19, parecido com o das seqüências, envolve um grau razoável de atenção, domínio da linguagem simbólica e, certamente, apropriação do conceito de rotação e todas suas propriedades, nos níveis de pensamento intrafigural e interfigural. Existe uma certa oscilação na posição entre os dois grupos, conforme observamos no gráfico abaixo:



Entretanto, as diferenças realmente significativas ocorrem somente no item c, que se refere à congruência dos lados correspondentes AB e A'B' do triângulo original e sua imagem. Parece que essa diferença está ligada à maior percepção da figura global que o transpel favorece. No gráfico de resultados, eliminamos o item b, cujo índice de acerto esteve acima de 75% nos dois grupos. Digno de nota é o menor rendimento nos itens d,e,f por ambas as turmas. No item d parece que a palavra “diferente” causou a dificuldade; nos itens e,f talvez os alunos tenham se atrapalhado com a linguagem (representação de ângulo, a palavra “congruente”) ou realmente a dificuldade seja a visualização e a correspondente medida de cada um dos ângulos referidos. Vejamos a resposta de um aluno para ambas as questões:

18. No desenho abaixo está representado o triângulo ABC e um ponto O. Desenhe o triângulo A'B'C', imagem do triângulo ABC na rotação de 120° ao redor do ponto O no sentido horário. Faça seu desenho de forma que A' seja imagem de A, B' seja imagem de B e C', a imagem de C.



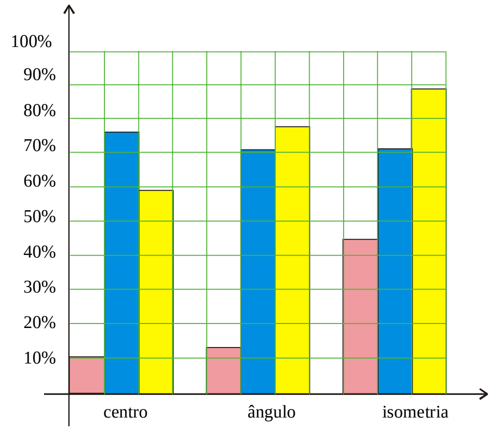
19. Coloque V ou F entre parênteses, conforme a afirmação seja verdadeira ou falsa. As afirmações referem-se à rotação acima.

a) A distância OB é igual à distância OB'. (V)
b) A distância OB é igual à distância OA. (F)
c) A distância AB é igual à distância A'B'. (V)
d) A distância OA é diferente da distância OA'. (V)
e) O ângulo AÔA' é congruente ao ângulo BÔB'. (V)
f) O ângulo BÂC não é congruente ao ângulo B'Â'C'. (V)
g) Se o triângulo ABC girar 120° ao redor de O no sentido horário, então irá coincidir com o triângulo A'B'C'. (V)

A questão 20, referente à rotação de uma circunferência ao redor de um ponto exterior à mesma, já foi apresentada nas seqüências. Nestas, o rendimento foi bastante alto e no pós-teste, apesar de menor, foi bastante satisfatório também, com exceção do item relacionado à medida do ângulo de rotação, que, no grupo IC teve um índice de 59% de acerto, apenas. No grupo IA o índice foi de 94%, o que parece indicar que o transpel favorece a medida de ângulos no momento de construir imagens por rotação.

A questão 21 do pós-teste é igual à parte B da questão 20 do pré-teste e consiste na construção da imagem de um quadrado, quando a rotação é simétrica (simetria de rotação de 90º). O gráfico 5.18 mostra os resultados obtidos nos itens centro, ângulo, isometria e construção final no pré-teste e no pós-teste. Notamos aqui um progresso bastante grande por parte dos estudantes com relação ao fato de, após uma rotação, a *figura poder ficar no mesmo lugar*, ou em termos mais técnicos, a imagem coincidir com o original; vários estudantes colocaram outras letras para se referir aos pontos imagens.

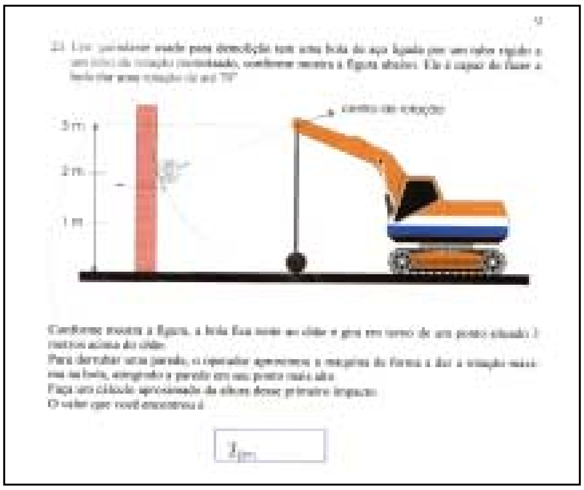
Gráfico 5.18: construção do simétrico de um quadrado por rotação de 90º



A questão 22, referente à construção de um hexágono regular, deixou de ser resolvida por apenas um aluno da turma IC, no que diz respeito à forma. Quanto à congruência da figura, 3 alunos da turma IC e 1 aluno da turma IA desenharam lados ou ângulos com tamanhos visivelmente diferentes.

A questão 23 explora vários conceitos e habilidades. Na verdade, o enunciado apresenta uma quantidade de dados maior do que o necessário para o aluno resolver a questão. Por exemplo, a medida de 70º para a rotação máxima poderia ter sido omitida, pois a rotação supostamente termina no momento que a bola toca a parede. Nós mantivemos os três dados (sentido, centro, medida) para fixar as parâmetros de rotação.

Apesar do aspecto contextualizado e aparentemente complexo da situação, os alunos tiveram bom desempenho; 71% da turma IC e 81% da turma IA deram respostas numa faixa aceitável (entre 1,8 e 2,5 metros). Na turma IC, um aluno não fez, outro deu resposta 3 metros (o que não era possível), outro respondeu “horário” (demonstrando que não entendeu a pergunta) e outro respondeu “90º”, resposta também inadmissível. Na turma IA, um aluno fez um segmento ligando a bola no chão até a bola na altura de 3 metros, outro desenhou certo mas escreveu erradamente a resposta (1,5 metros) e outro simplesmente escreveu uma resposta aceitável (2,5 metros) mas não deixou nada desenhado. Reproduzimos as respostas dadas por dois alunos dos grupos IA (à esquerda) e IC, respectivamente.



5.4.1 Resumo dos resultados e análise do pós-teste

Vamos fazer uma síntese dos resultados, de forma que se possa comparar o desempenho das turmas IC e IA no domínio de cada um dos parâmetros da rotação (sentido, ângulo, centro) e na observação da congruência.

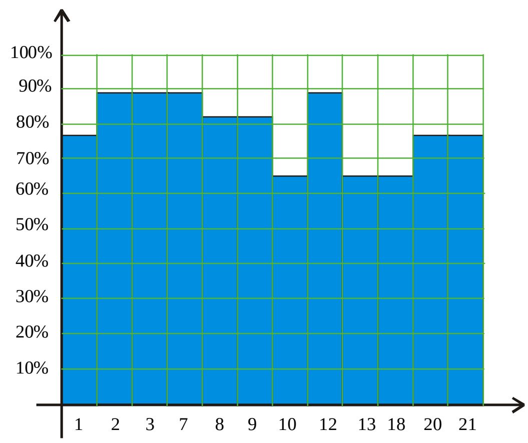


Gráfico 5.19: sentido da rotação - turma IC

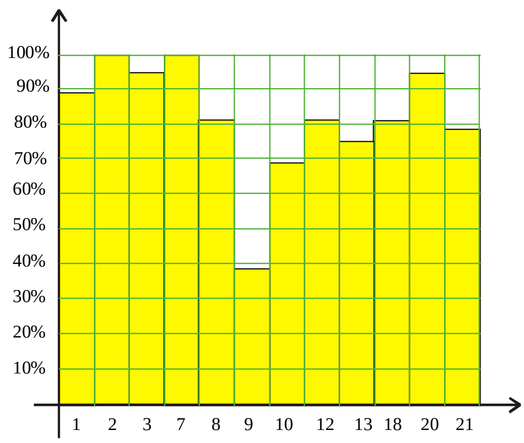


Gráfico 5.20: sentido da rotação - turma IA

O sentido da rotação é uma noção dominada pelos sujeitos (observe os gráficos 5.19 e 5.20), se a considerarmos separadamente, sem levar em conta os outros parâmetros. O único resultado que contrariou esta constatação foi o baixo índice obtido pela turma IA na questão 9, onde o uso desnecessário do transpel talvez tivesse confundido o aluno pela relatividade do movimento: o transpel deveria girar no sentido anti-horário, mas se o fixaramos e fizermos a folha com o original girar, o sentido será contrário (56% dos sujeitos acharam que a configuração estava correta!). Este fato chama a atenção para a questão da fidelidade epistêmica dos instrumentos (isto é, aquela diretamente relacionada com as qualidades intrínsecas dos instrumentos): é possível que uma análise a priori dos atributos de um dispositivo não consiga prever eventuais desvios que o ambiente e a ação do usuário possa imprimir à ferramenta.

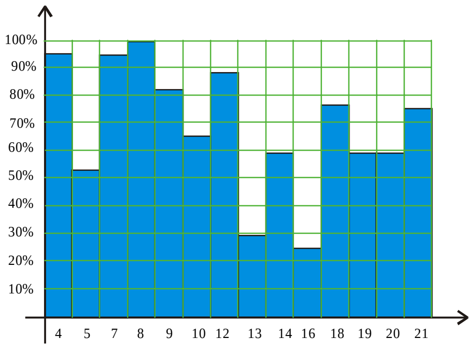


Gráfico 5.21: medida do ângulo de rotação - turma IC

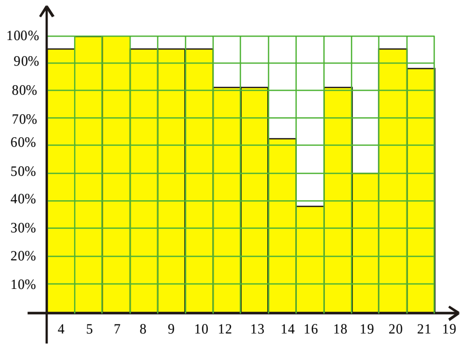


Gráfico 5.22: medida do ângulo de rotação - turma IA

A medida de ângulos ainda oferece alguma dificuldade (gráficos acima), principalmente nas atividades referentes à rotação de segmentos (questões 13 e 16). É interessante observar que as medidas dos ângulos de rotações de pontos (questões 10 e 12) tiveram índice de acerto consideravelmente superior ao das medidas em rotações de segmentos. Uma possibilidade a considerar é que a configuração na rotação de ponto talvez possa ter uma interpretação intrafigural (mede-se um único ângulo, definido pelos três pontos), enquanto que a rotação de segmentos, como relação interfigural, talvez traga dificuldades adicionais. Do ponto de vista da fidelidade epistêmica, seria de se esperar que o transferidor fosse o instrumento mais adequado para medir ângulos, pois é a ferramenta projetada para isso. Se concordarmos com Meira (1998), que a transparência emerge no contexto das atividades socioculturais das crianças, como é o caso das atividades na sala de aula, também seria de esperar que os alunos do grupo IC não tivessem muitos problemas com o uso do transferidor. Entretanto, observando os resultados acima, observamos o melhor desempenho da turma IA neste tipo de atividade. É possível que a transparência na fidelidade epistêmica e a transparência como um índice de acesso ao conhecimento e atividades (Meira, 1998) não se excluam mutuamente: ao projetar o transpel, tínhamos uma certa expectativa de que o mesmo, pelas suas caraterísticas, pudesse facilitar a ação de medir ângulos, uma vez que os sujeitos tivessem aprendido a usá-lo. De fato, como vimos na análise das seqüências, os primeiros momentos de uso do transpel causaram dificuldades, mas, aos poucos, principalmente nas discussões em duplas, os sujeitos foram se tornando habilitados no seu uso, embora, ocasionalmente, o seu uso tenha mostrado-se inadequado em situações posteriores.

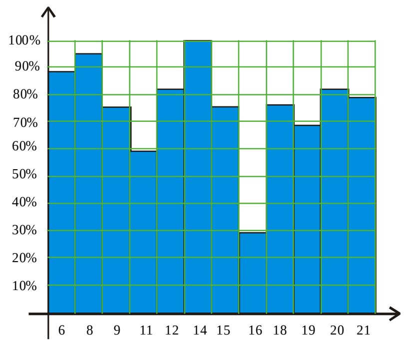


Gráfico 5.23: centro de rotação - turma IC

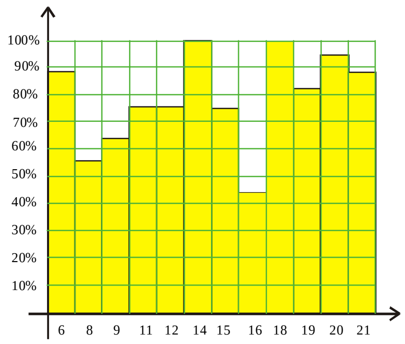


Gráfico 5.24: centro de rotação - turma IA

De acordo com Piaget e Garcia, 1983, a apropriação da noção de mediatriz de um segmento pressupõe que o aluno tenha atingido o nível interfigural; em comparação com outras atividades envolvendo o nível intrafigural, poderíamos esperar maior dificuldade dos estudantes nas atividades que envolvessem, de alguma maneira, a determinação do centro numa rotação; de fato, os resultados do pré-teste apoiam essas idéias, mas no desenvolvimento das seqüências isso foi muito atenuado. Observando os gráficos acima, vemos que as duas turmas mostraram-se competentes em relação à noção na maioria das situações apresentadas, com sucesso até maior do que no tratamento da medida de ângulos. Entretanto, alguns desvios significativos se apresentam. A questão 16, da determinação do centro de rotação de segmentos, envolve diretamente o problema da mediatriz como lugar geométrico e a intersecção de duas mediatrizes como o ponto, quando existe um único, que soluciona o problema. Nessa questão, apenas 29% dos alunos da turma IC lograram êxito, enquanto que o índice de acerto para a turma IA foi de 44%. Isso nos faz pensar que a transparência como fidelidade epistêmica deve ser realmente vista com cuidado, já que o compasso, pelas suas propriedades intrínsecas, deveria privilegiar esta noção da mediatriz como um conjunto de pontos com uma propriedade bastante clara de distância. Nossa expectativa era de que o grupo IC pudesse adquirir maior competência ao enfrentar as situações propostas de determinação dos centros de rotação. Por outro lado, não devemos apressadamente concluir que o grupo IA, ao usar dobradura, pudesse ter dado um maior significado a essa manipulação, fazendo emergir sua transparência, pois dos 7 estudantes que acertaram, 4 usaram dobradura mas 3 usaram régua e compasso. Na verdade, este fato não contradiz a tese de Meira (1998), já que o compasso faz parte das atividades escolares usuais desses sujeitos e pode, para eles, ter adquirido alguma transparência anteriormente. O mais prudente talvez seja considerar que os diferentes indivíduos têm diferentes ritmos de aprendizagem e diferentes formas de construir significados.

Ainda com relação ao problema do centro de rotação, observamos resultados diferentes na questão 11, onde a turma IC esteve abaixo do desejável, ao contrário da turma IA que teve um desempenho razoável. É possível que o transpel facilite este tipo de atividade, pois ele favorece um posicionamento mais rápido do ângulo formado pelos três pontos (M, M' e O) e isto é uma qualidade intrínseca da ferramenta. Uma grande discrepância entre os resultados das turmas IC e IA se revela na questão 8, pois quase todos da IC determinaram o centro de rotação e somente metade dos alunos da IA o fizeram.Uma hipótese plausível seria a de que o transpel, posicionado sobre a configuração, ocultasse o ponto vermelho, representando o pé da bandeira original e de sua imagem, provocando alguma confusão; alguns alunos da turma IA, por exemplo, responderam que o centro da rotação é A (letra usada para representar a bandeira original).

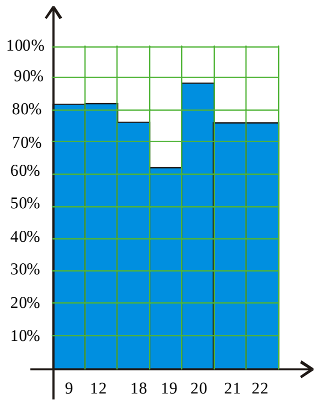


Gráfico 5.25: isometria - congruência das figuras original e imagem - turma IC

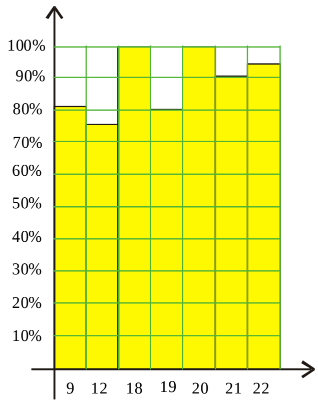


Gráfico 5.26: isometria - congruência das figuras original e imagem - turma IA

No pós-teste, a avaliação da noção de isometria da rotação somente pode ser feita nas atividades que envolvem a construção da imagem de uma rotação ou então naquelas que exploram configurações dadas, onde o sujeito deve apontar falhas, entre as quais pode estar a não congruência entre original e imagem. De uma maneira geral, conforme atestam os gráficos acima, os estudantes estavam conscientes da necessidade da congruência. Como podemos verificar, o menor índice, ocorrido na turma IC, está mais ligado a um problema de linguagem do que propriamente a uma não aquisição do conceito de isometria. E, conforme considerações prévias, o transpel parece ser um pouco mais eficiente que a régua e o compasso nas produções que dependem dessa noção.

A tabela a seguir pode auxiliar numa síntese quantitativa dos dados apresentados nos gráficos de 5.21 a 5.26. Ela apresenta as médias dos índices de sucesso calculadas para cada parâmetro e cada turma.

	médias percentuais	
	turma IC	turma IA
sentido	79	82
ângulo	69	83
centro	76	80
isometria	78	89

Como se vê, os resultados globais são muito próximos, com a maior diferença recaindo nas atividades envolvendo medidas de ângulos. Desse resumo, pode-se inferir ligeira vantagem dos alunos do grupo IA no desempenho no pós-teste, em todas as categorias de competências e habilidades que estabelecemos para nosso estudo. No pré-teste, onde não havia a divisão em duas turmas, a tabela correspondente apresenta os seguintes valores:

	médias percentu-ais
sentido	63
ângulo	47
centro	35
isometria	39

O maior progresso verificado diz respeito ao centro de rotação e à congruência da figura original e da imagem, conceitos mais distantes dos conhecimentos prévios dos alunos (a congruência, no sentido de que a rotação preserva tamanho e forma).

CAPÍTULO 6

6.1 Respostas às questões da investigação e algumas conclusões

No final do capítulo 3 apresentamos seis perguntas, relacionadas com a questão maior de que se ocupou esta investigação. Vamos reformular as considerações feitas naquele momento, à luz do resultados e análises desenvolvidos ao longo deste trabalho.

As três primeiras questões eram:

1. Existem evidências ou argumentos que apóiem o estudo das transformações no Ensino Fundamental (3º e 4º ciclos), conforme sugerem os PCNs e alguns livros didáticos mais recentes no Brasil?
2. Admitindo-se que se deva estudar transformações geométricas no Ensino Fundamental, existe uma abordagem mais adequada da Geometria a ser adotada, dentre as perspectivas apresentadas na seção 1.2?
3. Quais transformações devem ser estudadas no Ensino Fundamental?

As respostas a essas questões podem ser integradas, combinadas e resumidas da seguinte maneira: há indícios objetivos, apresentados pelas pesquisas e por diversas concepções e práticas educacionais, mencionados neste trabalho, de que as transformações geométricas que preservam a forma e o tamanho (isometrias) devem ser ensinadas às crianças desde os primeiros anos do Ensino Fundamental, como uma parte da Geometria, inicialmente de uma forma intuitiva e contextualizada e, mais tarde, a partir da 5ª série, de uma maneira mais formalizada.

A questão seguinte era:

4. As transformações devem ser enfocadas sob um ponto de vista “dinâmico”(movimento de figuras globais) ou sob o ponto de vista funcional (aplicações do plano nele mesmo, onde todos os pontos se transformam e as figuras são vistas como subconjuntos do plano, constituídas de pontos)?

A resposta à questão 4 está intimamente ligada ao problema do grau de formalização que desejamos (e podemos) dar ao ensino das transformações no 3º e 4º ciclos. Está claro que esse nível deve ser compatível com os dos demais assuntos estudados em Matemática:

seria insensato apresentar a esses alunos sentenças do tipo $R^{-1}(O,\alpha) = R(O,-\alpha)$, já que eles não dominam a linguagem algébrica da notação de funções (para dizer o mínimo). Nosso estudo mostra que podemos ir além do movimento de figuras globais e tornar o estudo das rotações um pouco mais formalizado, no sentido de que as figuras transformadas sejam figuras geométricas que se relacionam de uma forma que “lembra” um movimento, sendo tal relação perfeitamente definida por critérios puramente matemáticos. O estudo mostra também que a rotação pode atingir um nível intermediário entre o movimento de figuras globais e a função que relaciona pontos de um plano nele mesmo: é o caso das rotações em que os estudantes dão um tratamento semi-pontual, no sentido de Jahn (1998).

Ao considerarmos a questão da formalização das isometrias na 5ª série ou 6ª série, tomava corpo uma outra questão: as três (ou quatro, se incluirmos a reflexão com deslizamento) isometrias devem ser apresentadas simultaneamente ou separadamente? Se formos levar em conta as características de cada uma dessas transformações e o número de propriedades que cada uma delas apresenta, bem como as abordagens existentes nos sistemas escolares que pesquisamos, não é difícil escolher: elas devem ser dadas uma de cada vez e, se assim for, resta ainda decidir por qual começar. Aparentemente, a translação é a mais simples. Entretanto, se quisermos formalizar o conceito de translação, deveremos introduzir o conceito de vetor e a linguagem simbólica associada a esse conceito, provocando, talvez, dificuldades adicionais nesse início. Outra possibilidade seria começar pela reflexão, mas um número razoável de pesquisas tem apontado várias dificuldades na apropriação do conceito e suas propriedades (Küchemann, 1981, pp.141-145; Mabuchi, 2000, pp. 33-58). E como terceira alternativa, poderíamos começar pela rotação. Nosso trabalho nos leva a concluir que esta é uma opção possível, não obstante a opinião de pesquisadores, como Moyer (1978), de que a rotação é a transformação que apresenta maiores dificuldades. Esta conclusão decorre da consideração de que os sujeitos de nossa pesquisa apresentaram desempenho aceitável nas atividades que lhes foram propostas envolvendo o estudo das rotações de figuras planas, demonstrando, no instrumento diagnóstico final, terem se apropriado das propriedades essenciais dessa transformação, mostrando-se capazes de mobilizá-las nas mais variadas situações-problema apresentadas.

Finalmente, as duas últimas questões eram:

5. Que recursos didáticos podem ser mobilizados no estudo das rotações?
6. Quais dificuldades podem ser apontadas no ensino/aprendizagem das rotações?

As questões 5 e 6, como vimos, foram reformuladas e vinculadas à problemática central de nossa pesquisa, ou seja:

No âmbito do conjunto das atividades planejadas e dos dois tipos de material empregados, em que medida cada um deles influencia o desempenho dos alunos?

Para dar essa resposta, devemos esclarecer os termos empregados na pergunta. Em nosso trabalho, o conjunto de atividades programadas foi definido pelas folhas de trabalho, com noções apresentadas numa ordem previamente estabelecida pelas concepções do pesquisador, em parte baseadas em seu conhecimento do conteúdo matemático tratado e sua experiência como professor e, em parte, nas idéias teóricas de Piaget e Garcia (1983). Para que o estudante possa representar a imagem da rotação de uma figura geométrica, dados o sentido, o ângulo e o centro dessa rotação, são mobilizados vários conhecimentos da Geometria elementar, que vão desde as concepções de várias figuras geométricas (ponto, reta, segmento de reta, orientação, ângulos, polígonos e circunferência) até a noção, ainda que informal, de lugar geométrico e do papel que representam os pontos de intersecção dos lugares geométricos. Da teoria de Piaget (1983) podemos inferir que as crianças de 10-11 anos já superaram o estágio intrafigural do pensamento geométrico e que, em nível de representação, era válido esperar que os sujeitos de nossa pesquisa não tivessem dificuldade nas concepções das figuras geométricas tratadas nas seqüências, vistas no início como entidades independentes. Está claro que Piaget se refere a um conhecimento relativo, como aliás todo conhecimento é, no sentido de que nunca esgotamos todas as afirmações que podemos fazer sobre um objeto. O chamado estágio interfigural do desenvolvimento do pensamento geométrico da criança, na teoria de Piaget (1983), é posterior ao estágio intrafigural e diz respeito às relações entre duas figuras que não possam ser classificadas de intrafigurais – por exemplo, ao dizer que dois triângulos são congruentes pelo caso LAL de congruência, podemos estar mobilizando apenas a análise intrafigural, mas ao dizer que a imagem na rotação de um triângulo é outro triângulo congruente ao original, estamos empregando um raciocínio de nível interfigural (Jahn, 1988, p. 59). Às vezes, é muito difícil distinguir intrafigural de interfigural de uma dada situação, não obstante todo o esforço de Piaget em exemplificar essas diferenças (1983, pp. 132-137). O último estágio do desenvolvimento do pensamento geométrico, que se inicia por volta dos 11-12 anos, segundo Piaget e Garcia, é o transfigural, que, conforme já exposto, não investigamos em nosso estudo.

O material instrucional foi estruturado de modo que os estudantes explorassem inicialmente as situações intrafigurais, ao mesmo tempo em que pudessem desenvolver suas habilidades no uso dos instrumentos. Em seguida, os sujeitos trabalharam com situações de rotações (de representações de objetos físicos ou figuras geométricas), de forma que o papel de cada parâmetro fosse introduzido separadamente, a partir do nível intrafigural (enquanto referência ao movimento de giro de objeto ou figura) até o nível interfigural (quando foram discutidos os conceitos de original e imagem), culminando com as situações completas (onde se apresenta a figura original, a figura imagem e os três parâmetros são dados explicitamente). As atividades se limitaram ao tratamento das representações das figuras geométricas simples citadas acima, exceto nos casos de contextualização e, nesses casos, evitamos situações em que o sujeito tivesse que desenhar figuras rebuscadas.

Considerando o desempenho dos alunos, nas condições já exaustivamente citadas, podemos concluir que o desenho das seqüências foi adequado; mas é bom ter em mente que somente a experimentação continuada pode aperfeiçoar um projeto novo. As duas seqüências foram desenhadas para serem equivalentes, mas, como vimos, o material utilizado influenciou diferentemente o desempenho dos alunos. Uma possível pesquisa nessa área poderia contemplar a comparação de projetos de instrução, com diferentes metodologias e materiais.

Além do texto contendo dados, apresentação de conceitos, atividades de reconhecimento, medidas e construção, acompanhadas de situações-problema, os sujeitos tinham à sua disposição duas classes de ferramentas, segundo o grupo a que pertenciam: o grupo IC trabalhou com lápis, borracha, régua sem escala, compasso, esquadro e transferidor e o grupo IA trabalhou com lápis, borracha, régua sem escala, transpel, palitos de sorvete, palitos de fósforo, botão, fio de linha e folhas de papel vegetal retangulares. Como se vê, o material utilizado é bastante simples, sem recursos tecnológicos sofisticados (calculadoras, computadores, sensores eletrônicos, etc). Além de existir várias pesquisas investigando o uso da tecnologia dos computadores no ensino das transformações, conforme já mencionado, achamos que o uso de materiais mais simples e baratos poderia ter maior alcance em nossas escolas.

Antes de focalizarmos nosso experimento, achamos oportuno discutir um pouco a problemática do uso de manipulativos no ensino e aprendizagem da Matemática e, em nosso caso particular, da rotação. Segundo Meira (1998), “os pesquisadores em Educação têm mostrado um interesse crescente no exame da aprendizagem de Matemática das crianças, em situações que envolvem a manipulação de objetos físicos e eventos”. Na verdade, há os que recomendam e os que criticam ou mesmo se opõem ao uso de tais materiais. A pesquisa de Meira tem uma perspectiva um pouco diferente e se propõe a estudar “como dispositivos físicos são realmente usados e transformados pelos estudantes em atividade e o que caracteriza tais dispositivos como instrumentos de acesso ao conhecimento, atividades e práticas na sala de aula”.

Em nosso estudo, pudemos verificar, em parte, as hipóteses sustentadas por esse autor. A comparação do desempenho dos dois grupos da pesquisa ao trabalhar nas atividades propostas, geralmente equivalentes nas duas seqüências, mostra que as vantagens e desvantagens dos dois conjuntos de ferramentas se alternam, algumas vezes contrariando nossas expectativas a respeito da eficiência dos instrumentos empregados. Por exemplo, nas atividades de construção que dependessem de propriedades geométricas que parecem naturalmente ligadas ao uso da régua e do compasso, como traçados de circunferências e arcos, segmentos de reta, ângulos construtíveis com esses instrumentos, paralelas e perpendiculares, etc, nossa expectativa era de que os alunos do grupo IC superassem significativamente os alunos do grupo IA. Isso nem sempre ocorreu, como por exemplo, na questão 13 do pós-teste, onde o uso da régua e do compasso é supostamente mais transparente ao grupo IC, do que as dobraduras (ou mesmo régua e compasso) para o grupo IA: mas foi este grupo que teve melhor rendimento (78% contra 47%). Por outro lado, houve atividades em que o transpel, numa análise a priori, seria um instrumento mais adequado, mas em que o grupo IC saiu-se melhor, como na questão 12 do pós-teste (88% contra 81%).

Com relação à questão da transparência do instrumento, o resultado mais significativo diz respeito à medida de ângulos ao longo das atividades da seqüência: os transferidores, instrumentos clássicos e consagrados de medidas de ângulos, de uso corriqueiro nas escolas, sempre produziram mais erros que o transpel, projetado para a finalidade mais abrangente do transporte de figuras nas rotações.

Há que se acrescentar a ocorrência de variáveis didáticas não previstas, como a questão do tempo maior que os instrumentos de Desenho Geométrico demandam e que, na nossa pesquisa, pela premência da agenda, acabou prejudicando o desempenho do grupo IC nas atividades da folha 5, sessão 2. No pós-teste, verificamos uma pequena vantagem do material alternativo com relação à medida do ângulo de rotação e da congruência da figura original e sua imagem (capítulo 5, pp.171-175). Nas construções de imagens, o grupo IC saiu-se melhor no caso de um ponto e o grupo IA saiu-se melhor nos demais casos, resultados que confirmam nossas expectativas com relação ao uso do transpel. Na questão referente à rotação de um objeto físico, o grupo IA esteve bem melhor que o grupo IC, resultado que não surpreende, pois as atividades desse grupo tiveram um nível maior de contextualização.

Da análise dos resultados observados nas seqüências e no pós-teste (capítulo 5), é natural concluir que o uso de manipulativos (material de Desenho Geométrico e alternativos) no ensino da rotação é produtivo, mas de efeitos que nem sempre se conformam às previsões feitas no planejamento das atividades, já que não é possível, a priori, determinar completamente a transparência dos dispositivos físicos utilizados.

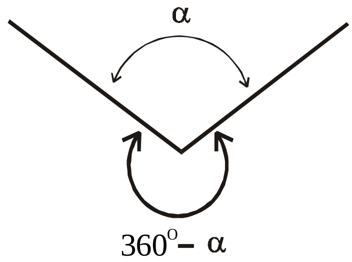
6.2 Recomendações para o ensino decorrentes das conclusões

As recomendações que se seguem dizem respeito unicamente à situação de ensino e aprendizagem em condições compatíveis com as desta pesquisa. Algumas recomendações se fundamentam no sucesso ou no insucesso dos sujeitos de pesquisa e, outras, nas falhas observadas no desenho e no gerenciamento das atividades. Por exemplo, não deve haver falta de tempo para os alunos desenvolverem suas atividades, diante de situações complexas. Dentre as várias sugestões que poderiam ser oferecidas, apresentamos as seguintes:

a) com relação ao conteúdo a ser ensinado

O primeiro passo, certamente, é conhecer o assunto um pouco além do que possa estar nos livros didáticos adotados para os alunos. Acreditamos que o nível da teoria, conforme exemplificado em rotações, no capítulo 1, seja suficiente para o professor poder planejar suas atividades de ensino e aprendizagem das transformações no Ensino Médio e Fundamental. O leitor poderá encontrar, na bibliografia, alguns livros que tratam dessa teoria (e exercícios correspondentes), como: *Construções Geométricas*, *Isometrias*, *Um Estudo Geométrico das Transformações Elementares*, *Geometric Transformations I* (com muitos exercícios e problemas).

Em termos de conhecimentos prévios dos alunos, a pesquisa mostra, em vista da grande ocorrência de erros, que a noção de ângulo e sua medida em graus é fundamental; é claro que a seqüência, bem conduzida, leva ao aprofundamento dessa noção, conforme indicam os resultados no pré-teste e no pós-teste. Mas são desejáveis também as noções básicas de ponto, segmento de reta, reta, retas paralelas e retas perpendiculares, triângulo (vértices, lados e ângulos internos), circunferência (centro e raio). Com relação aos quadriláteros (quadrado, losango, retângulo, paralelogramo, trapézio) o estudante deve saber, por exemplo, que no quadrado os lados são congruentes, os ângulos são congruentes e retos, etc. A representação simbólica das figuras geométricas (por exemplo, o segmento de extremidades *A* e *B* pode ser representado por $\overline{AB}$) deve estar bem estabelecida.



Ensinar ângulos maiores do que 180°, mostrando que sua medida é $360^{o} - \alpha$, onde α é a medida do ângulo que estão acostumados a medir. Esta estratégia foi bem aceita entre os sujeitos da pesquisa (na turma IC, após uma única explicação, 90% dos alunos responderam 315° para um ângulo de rotação, na atividade 1, da folha 2, sessão 2, fazendo exatamente esta conta; na turma IA os resultados foram ruins por outros motivos, explicados no capítulo 5, página 138).

O professor deve estar atento para o sentido que as noções apresentadas podem ter para seus alunos, analisando suas respostas e suas ações; uma seqüência de atividades pode ser bem planejada, com base em teorias aceitas universalmente, como o construtivismo de Piaget, mas devemos ter em mente que as ciências humanas não são determinísticas e imprevistos podem ocorrer a qualquer momento.

b) com relação à metodologia de ensino e aprendizagem

Dentro das disponibilidades, o processo de ensino e aprendizagem deve ser ativo, isto é, com autonomia dos estudantes e mediação do professor; obviamente, isto não exclui a ação do professor como o elemento que irá apresentar os problemas, promover as discussões, incentivar as ações e institucionalizar as conclusões. Numa seqüência de atividades, parecida, por exemplo, com as desta investigação, o papel do professor deve ser mais ativo do que foi o do pesquisador. Isso porque a discussão coletiva, mediada pelo professor, pode ser mais econômica que uma discussão completamente livre, além de deixar os alunos mais seguros com relação aos resultados obtidos.

Ao ensinar rotações para estudantes da 5ª série, segundo os resultados analisados no capítulo 5 e de acordo com outros pesquisadores (Moyer, 1978), parece realmente ser interessante associar o movimento físico de objetos às rotações de figuras geométricas e fazer esse apelo mesmo quando se tratam de situações mais formalizadas. Por exemplo, na rotação de um segmento com centro fora do mesmo, na atividade 1, da folha 4, sessão 2, foi necessário, para três duplas do grupo IC, o pesquisador mostrar como ficaria, mais ou menos, a imagem, usando o movimento de rotação de uma régua, sobre a carteira. Nas atividades 8 e 9, da mesma folha, diante de várias perguntas, o pesquisador exemplificou com um CD de um aluno o movimento de rotação da circunferência.

Caso sejam adotadas as ferramentas utilizadas nesta pesquisa, recomendamos alternar o uso de instrumentos de Desenho Geométrico com os outros materiais, procurando empregar esses últimos quando a compreensão do problema estiver particularmente difícil (por exemplo, rotação de segmento com centro fora do mesmo) ou a figura a ser rotacionada complicada ou, ainda, quando se deseja minimizar o tempo destinado à construção da imagem. O material alternativo também cumpre a função de dinamizar as aulas.

Deve-se variar bastante os parâmetros da rotação: sentido, medida de ângulos (usar ângulos agudo, reto e obtuso, variando as medidas) e centro (no interior da figura, no perímetro e no exterior), evitando que se criem “bias”.

É interessante propor diferentes tipos de atividades individuais e em grupos:

- construções de imagens, dada a figura original e os parâmetros; construção da figura original, dada a imagem e os parâmetros;
- reconhecer o parâmetro correto de uma dada configuração, na presença de várias alternativas possíveis;
- descobrir o erro em configurações dadas;
- identificar os parâmetros em configurações dadas;
- resolver problemas de geometria usando a rotação;

Deve-se explicitar e explorar as propriedades da rotação em diferentes atividades, revisitando-as sempre:

- as distâncias do ponto original e do ponto imagem ao centro de rotação são iguais;
- a figura original coincide com sua imagem (imagem de ponto é ponto, imagem de reta é reta, imagem de segmento é segmento de mesmo tamanho, imagem de circunferência é circunferência de mesmo raio);
- o centro de rotação está na mediatriz do segmento ligando ponto origem com ponto imagem;

c) com relação ao material e ferramentas

Promover situações de uso do transferidor, incluindo algumas em que os estudantes trocam idéias e discutem resultados, procurando escolher modelos que não apresentam as duas escalas simultâneamente e sejam inteiriços (sem o buraco no meio, que interrompe as guias apontando para o vértice do ângulo a ser medido). O pré-teste havia mostrado que alunos confundiam a escala horária com a anti-horária, nos transferidores com duas escalas nas bordas; além disso, nos transferidores vazados, observou-se a dificuldade na leitura de ângulos de lados pequenos, obrigando o aluno a colocar uma régua, para prolongar esses lados até a borda). Por isso, o transpel foi projetado de forma a apresentar uma única escala na borda e todas as linhas-guias partindo da borda até o centro.

Discutir estratégias da utilização de material alternativo, tais como o uso do decalque no papel vegetal para transportar figuras, como dobrar o papel para obter paralelas, perpendiculares, mediatrizes e bissetrizes, etc. No transporte de figuras simples, como pontos, segmentos e triângulos, usar régua e compasso; no transporte de figuras mais complexas, usar o transpel ou equivalente (papel vegetal), para que possa ser visualizado o movimento; pode-se combinar o uso dos dois materiais (o transpel para localizar visualmente, o material de desenho para melhorar a representação gráfica).

Na determinação de centro de rotação, fazer a explicação com régua e compasso e também usar dobradura, quase que simultaneamente, explicando a equivalência dos dois processos.

A rotação de pontos oferece dificuldades. A utilização de modelo físico (botão preso por um fio) deve ser feita pelo professor, na lousa ou tela e os alunos devem reproduzir o desenho; em seguida, os alunos devem passar para a representação de ponto, em algumas situações diferentes (mudar sentido, ângulo, centro). Se o aluno estiver trabalhando apenas com régua e compasso, uma simulação do movimento fisico com algum objeto, a régua por exemplo, pode ajudá-lo na antecipação do resultado final de sua construção, ajudando-o a discriminar os elementos para a obtenção da imagem (esta estratégia foi utilizada na aplicação da seqüência IC para alguns dos sujeitos que estavam com maior dificuldade em compreender a rotação de segmentos).

O professor deve estar atento para o uso que as crianças estão fazendo dos manipulativos, em vista das discussões apresentadas relativamente à transparência dos mesmos: é preciso ter em mente que o significado de um instrumento para o professor, ou para o seu projetista, pode estar bastante distanciado do sentido que faz para cada um dos alunos.

6.3 Sugestões para pesquisas futuras

A idéia de que cada ponto de uma figura vai se transformar num ponto de outra figura poderia eventualmente ser explorada para introduzir o conceito de função para os estudantes do Ensino Fundamental. Na nossa opinião, é um assunto interessante para a pesquisa.

Seria necessário pesquisar a utilização de manipulativos no ensino e aprendizagem da transformação envolvendo o conceito de semelhança, central para o conhecimento de Geometria.

As dobraduras podem ser uma ferramenta interessante no ensino da Geometria e, em particular, das transformações; entretanto, não conhecemos nenhum trabalho referente a esse assunto em Educação Matemática. Achamos que a parte teórica, envolvendo a Matemática relacionada com as dobraduras, também não está bem estabelecida. Esse é outro problema a ser pesquisado.

Existem muitos problemas interessantes envolvendo as isometrias, muitos deles propostos em olimpíadas de Matemática. Em geral, os problemas de olimpíadas são considerados muito difíceis e existe razoável controvérsia a respeito da validade desse evento. Achamos que pesquisas sobre o papel educacional das olimpíadas em nosso meio educacional, por exemplo, seriam necessárias. Quando analisamos as respostas que os alunos deram para os problemas da folha 3, sessão 3, em particular o que se referia à construção do hexágono, encontramos várias estratégias diferentes, algumas imprevisíveis. Isto nos levou a pensar que o estudo das respostas para um único problema, bem escolhido, pode fornecer matéria prima para investigações produtivas.

Bibliografia

AL-ADHAMI, Munder. *On the framework of school Geometry*. Tese de mestrado, departamento de Educação Matemática, King´s College, Universidade de Londres, 1988.

ALVES, Sérgio e GALVÃO, Maria Elisa. *Um estudo geométrico das transformações elementares*. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, 1996.

ANTIBI, André e MALAVAL, Joël. *Nouveau Transmath 6^{e}*.Paris: Nathan, 1996.

ARAÚJO, Abrãao Juvêncio. *Simetria de rotação: uma seqüência didática com o Cabri-Géomètre*. Dissertação de mestrado, Centro de Educação, Universidade Federal do Pernambuco, 2000.

BILLSTEIN,Rick, LIBESKIND, Shlomo e LOTT, Johnny. *A problem solving approach to Mathematics*. Menlo Park:Addison-Wesley, 1997.

BONNEFOND, Gérard, DAVIAUD Daniel e REVRANCHE, Bernard. *Mathématiques classe de 6*e. Paris: Hatier, 1995.

BONSALL, Judy et al. *Geometry 1 – Symmetry and trigonometry*. Londres: Cambridge University Press, 1977.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. *Parâmetros curriculares nacionais*. Brasília: SEF, 1998.

CARVALHO, Benjamim. *Desenho Geométrico*. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1986.

CATUNDA, Omar et al. *As transformações geométricas e o ensino da Geometria*. Salvador: Centro Editorial e Didático da UFBA, 1990.

CLEMENTS, Douglas e BATTISTA, Michael. Geometry and spatial reasoning, in *Hand-*

book of research on mathematics teaching and learning. Nova Iorque: Macmillan Publishing Company, 1972, pp.420-461.

CLOSE, Gillian Susan. *Children's understanding of angle at the primary/secondary transfer stage*. Dissertação de mestrado. Londres: Department of Mathematical Sciences and Computing, 1982.

COLETTE, Jean Paul. *Historia de las matemáticas II*. Madrid: Siglo Veintiuno, 1985.

COXETER, H.S.M. *The Real Projective Plane*. Londres: Cambridge University Press, 1961.

DELACHET, André. *A Geometria Contemporânea*. Tradução: Gita Ghinzberg. São Paulo: Difusão Européia do Livro, 1962.

DELORD, Robert et al. *Mathématiques 4^{e}* . Paris: Hachette Éducation, 1992.

DICKSON, Linda, BROWN, Margareth e GIBSON, Olwen. *Children Learning Mathematics*. Oxford: Schools Council Publications, 1984.

DUBINSKY, Ed. Comments on James Kaput´s Chapter, in SCHOENFELD, Alan (ed). *Mathematical Thinking and Problem Solving*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates, 1994.

EDWARDS, Laurie. A Logo Microworld for Transformation Geometry, in HOYLES, Celia e NOSS, Richard (ed.). *Learning Mathematics and Logo*. Cambridge MA: MIT, 1992.

EDWARDS, Laurie e ZAZKIS, Rina. Transformation Geometry: Naive Ideas and Formal Embodiments. *Journal of Computers in Mathematics and Sciences Teaching*, pp. 121-145, 1993.

FREUDENTHAL, Hans. *Mathematics as Educational Task*. Dordrecht: Reidel, 1973.

GAY, David. *Geometry by Discovery*. Nova Iorque: John Wiley & Sons,1998.

GREENBERG, Marvin Jay. *Euclidean and Non-Euclidean Geometries – Development and History*. Nova Iorque: W.H.Freeman, 1997.

GRENIER, Denise. Construction et Étude d´Un Processus d´Enseignement de La Symétrie Orthogonale: Éléments d´Analyse du Fonctionnement de La Théorie de Situations, in *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol.10, nº 1, pp. 5-60. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1990.

GUELLI, Oscar. *Matemática, uma Aventura do Pensamento*. 5ª a 8ª séries. São Paulo: Ática, 1997.

HADLOCK, C.R. *Field Theory and its Classical Problems*. Cambridge: MAA, 1978.

HEWITT, Dave. Asking Pupils to Work Geometrically. *Mathematics Teaching*, nº 129, pp. 20-29, 1989.

IEZZI, Gélson et al. *Matemática*. 1ª a 3ª séries. São Paulo: Atual, 1981.

IEZZI, Gélson, DOLCE; Osvaldo e MACHADO, Antônio. *Matemática e Realidade*. 5ª a 8ª séries. São Paulo: Atual, 1997.

IMENES, Luís Márcio e LELLIS, Marcelo. *Matemática*. 5ª a 8ª séries. São Paulo: Atual, 1997.

JAHN, Ana Paula. *Des transformations des figures aux transformations ponctuelles: étude d'une séquence d'enseignement avec Cabri-géomètre*. Tese de doutorado, Universidade Joseph Fourier. Grenoble: IMAG, 1998.

JEGER, MAX. *Transformation Geometry*. Nova Iorque: American Elsevier Publishing Company Inc, 1969.

KAPUT, J.J. Democratizing Acess to Calculus: New Roots to Old Roots, in *Mathematical Thinking and Problem Solving*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates, 1994.

KILPATRICK, J. A History of Research in Mathematics Education *in Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, NCTM. Nova Iorque: Macmillan Publishing Company, 1992.

KLEIN, Felix. *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint – Geometry*. USA: Dover, 1939.
______ , *Le Programme d´Erlangen*. Sceaux: Jacques Gabay, 1991.

KÜCHEMANN, Dorothy. Reflection and Rotation, in HART, Kathleen (ed). C*hildren's Understanding of Mathematics: 11-16*. Londres: John Murray, pp. 137-157, 1981.

LIMA, Elon Lage. *Isometrias*. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 1995.

MABUCHI, Setsuko. *Transformações Geométricas*. Dissertação de mestrado. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2000.

MAGINA, Sandra. *Investigating the Factors which Influence the Child´s Conception of Angle*. Tese de doutorado. University of London, 1994.

MARISTAS, Irmãos. *Geometria Elementar*. São Paulo: FTD, 1957.

MARMO, Carlos. *Curso de Desenho*. São Paulo: Moderna, 1965.

MEIRA, Luciano. Making Sense of Instructional Devices: The Emergence of Transparency in Mathematical Activity. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29.2, pp.121-142, 1998.

MOYER, John. The Relationship between the Mathematical Structure of Euclidean Transformations and the Spontaneously Developed Cognitive Structures of Young Children. *Journal for Research in Mathematics Education*, 9.2, pp.83-92, 1978.

NCTM, *Principles and Standards for School Mathematics*, National Council of Teachers of Mathematics, USA, 2000.

PIAGET, Jean e GARCIA, Roland. *Psychogenèse et Histoires des Sciences*. Paris: Flammarion, 1983.

PIAGET, Jean. *Abstração Reflexionante*.Artmed: Porto Alegre, 1995.

SAUVY, Jean e Simone. L*'Enfant et Les Géométries*. Tournai: Casterman, 1974.

SCHOENFELD, Alan. On Having and Using Geometric Knowledge, in *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics*. HIEBERT, James (ed.). Londres: Lawrence Erlbaum Associates, 1986.

SCHULTZ, Karen e AUSTIN, Joe Dan. Directional Effects in Transformation Tasks. *Journal for Research in Mathematics Education*, 14.2, pp. 95-101, 1983.

WAGNER, Eduardo e CARNEIRO, José Paulo. *Construções Geométricas*. Rio de Janeiro: IMPA, 1993.

WILLSON, William. *Geometry in The Mathematics Curriculum*. Londres: Blackie and Son Limited,1977.

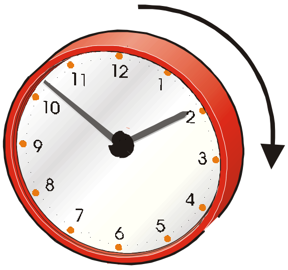
YAGLOM,I.M. *Geometric Transformations* I. Nova Iorque: Random House, 1962.

ANEXO 1 – PRÉ-TESTE

Nome :_____________

- duração: 1 hora

01. Normalmente, os ponteiros de um relógio giram no sentido indicado pela flechinha curva

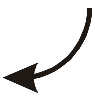


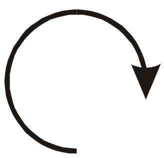
sentido horário

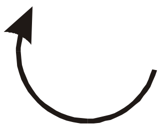
Para atrasar o relógio, podemos rodar os ponteiros ao contrário. Desenhe, na figura abaixo, uma flechinha curva mostrando como giraram os ponteiros.

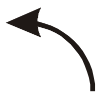
sentido anti-horário

02. Escreva, abaixo de cada flechinha, se ela representa o sentido horário ou o sentido anti-horário.

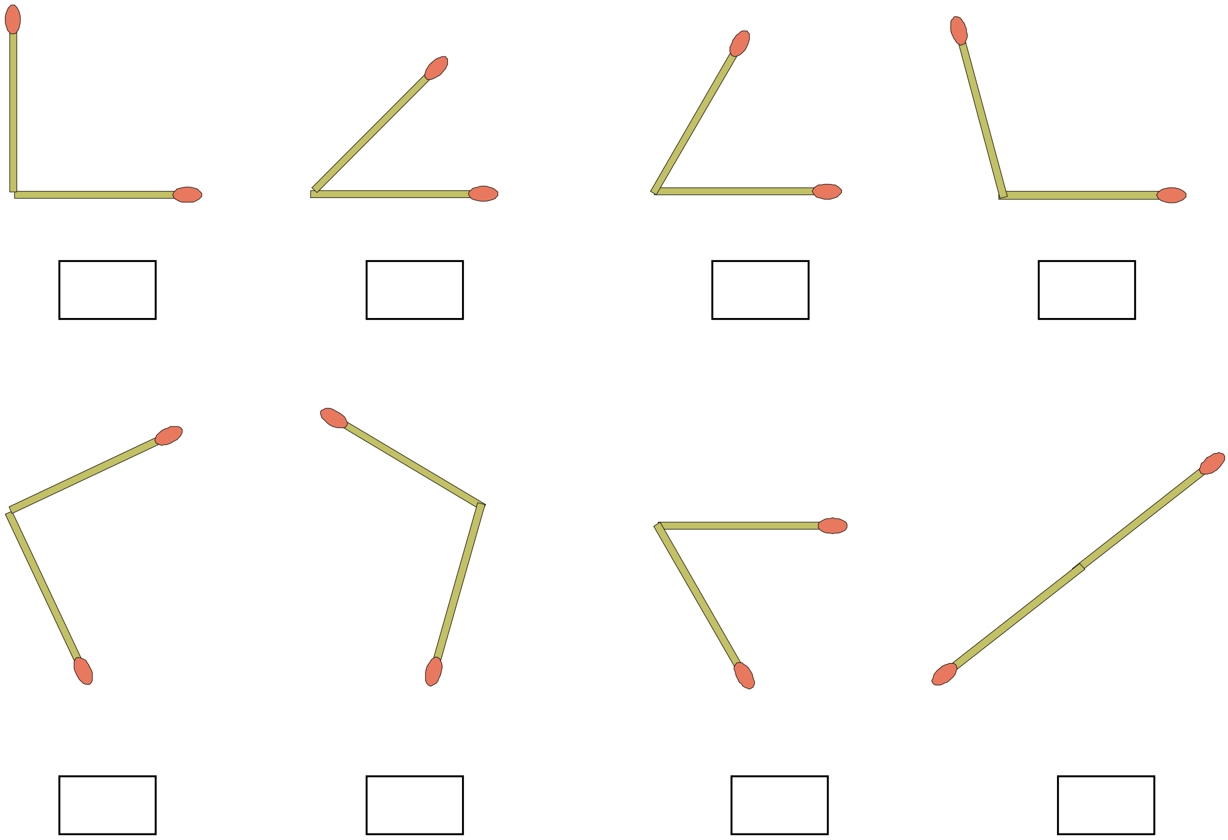




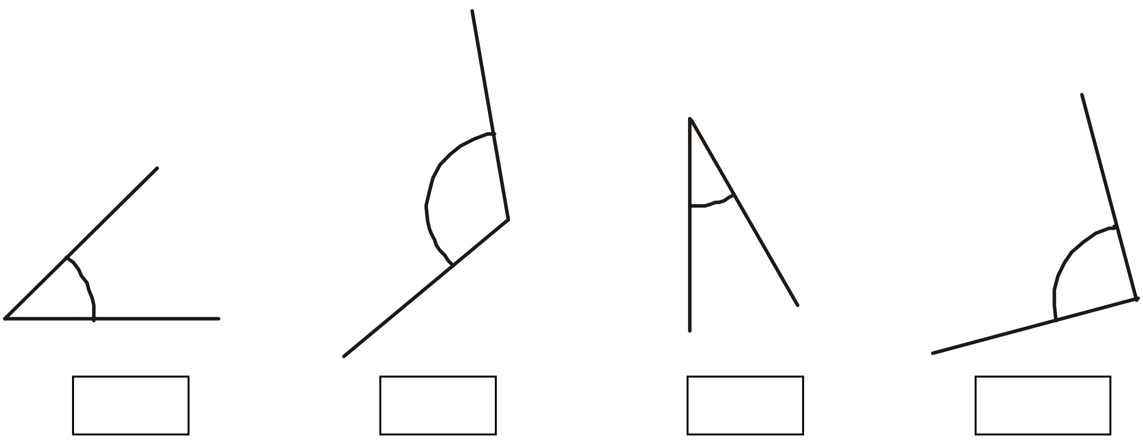




03. Brincando com palitos de fósforos, podemos formar ângulos. Coloque a medida do ângulo formado pelos dois palitos nas oito situações abaixo.



04. Escreva a medida de cada ângulo a seguir:



05. Um lápis estava na seguinte posição:

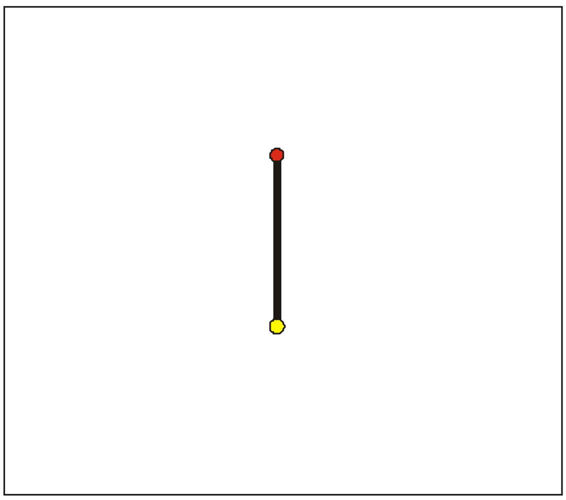
Carlinhos girou o lápis em volta da ponta e o lápis ficou assim:

Diga de quantos graus foi o giro. Diga também qual foi o sentido do giro.

Resposta:

giro de ☐ sentido ☐

06. No quadro abaixo temos um segmento de reta. Desenhe o segmento após uma rotação (giro) de 60^{o} no sentido anti-horário.

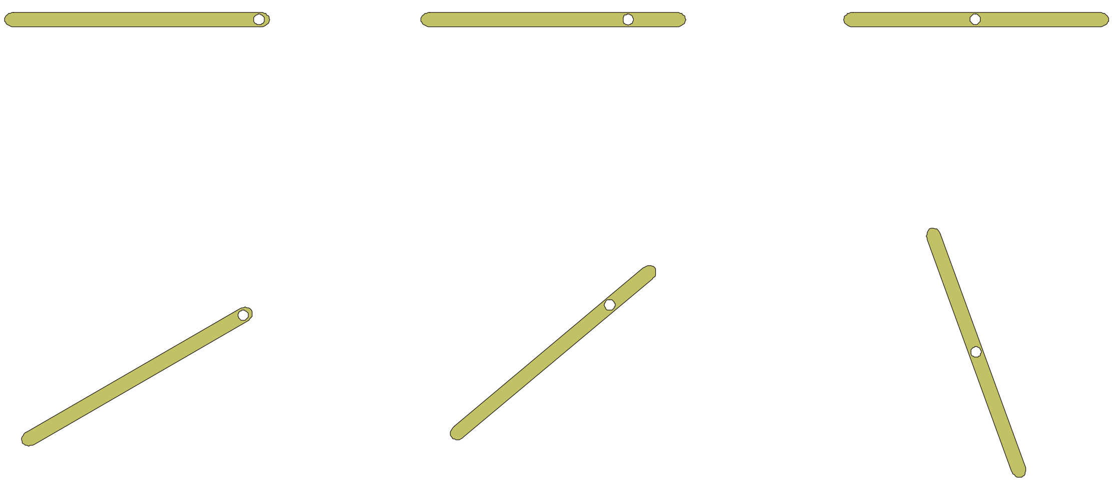


07. Desenhe o palito de sorvete depois que ele sofre uma rotação de 180^{o} no sentido horário. Mas atenção, o palito gira em volta do furo na ponta.

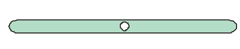
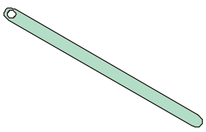
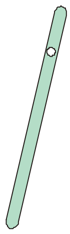
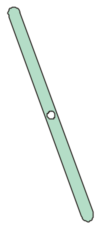
Como ficaria o palito se a rotação fosse no sentido anti-horário?

Resposta:

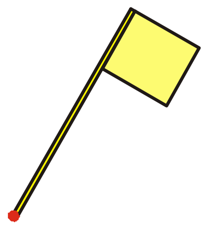
08. Desenhe o palito depois que ele girar 90^{o} em volta do furo, no sentido horário, nas seis situações a seguir:



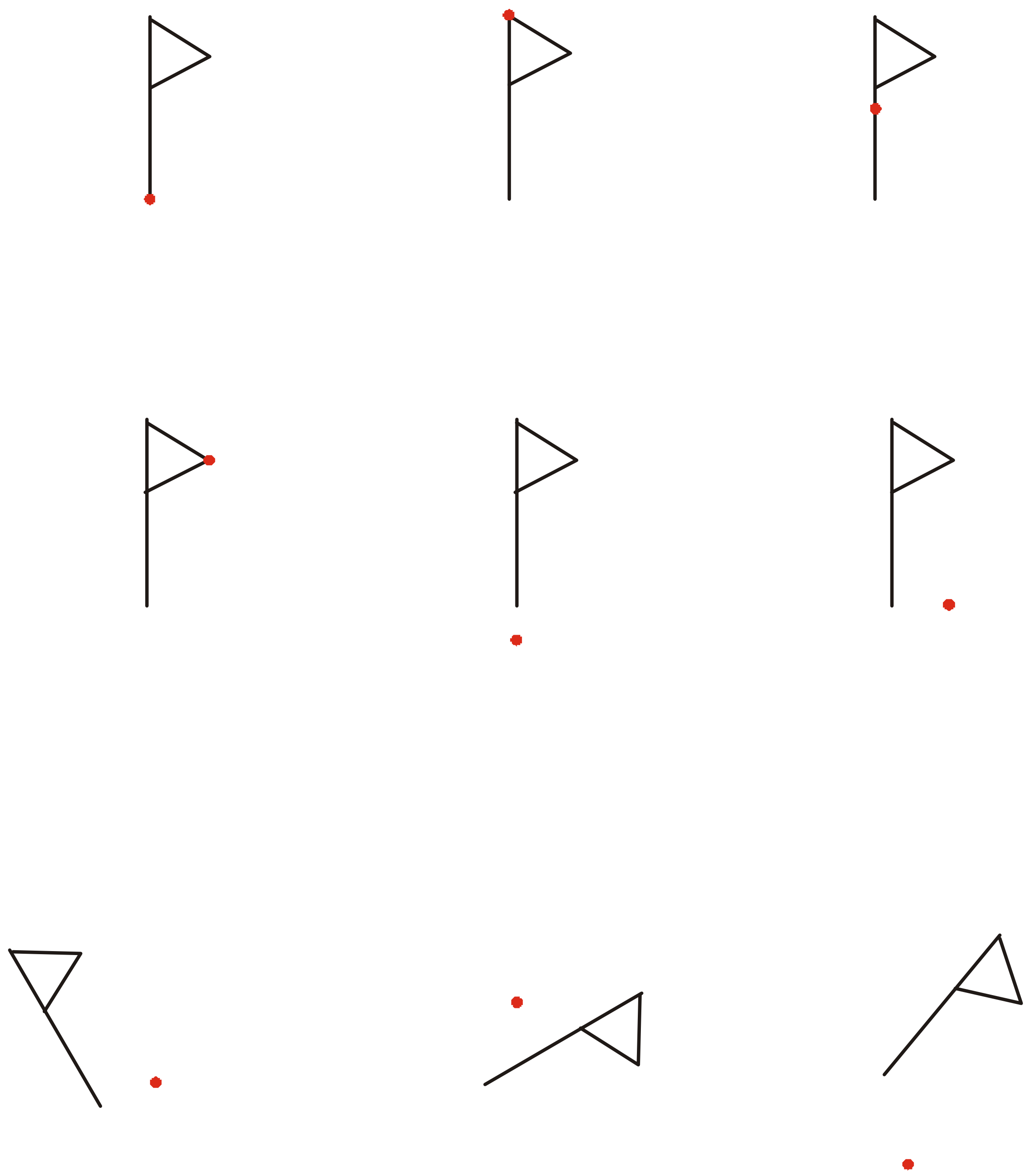
09. Os seis palitos giram ângulos diferentes no sentido anti-horário, ao redor dos furos. Desenhe-os depois das rotações:

		
		
30^{O}	45^{O}	60^{O}

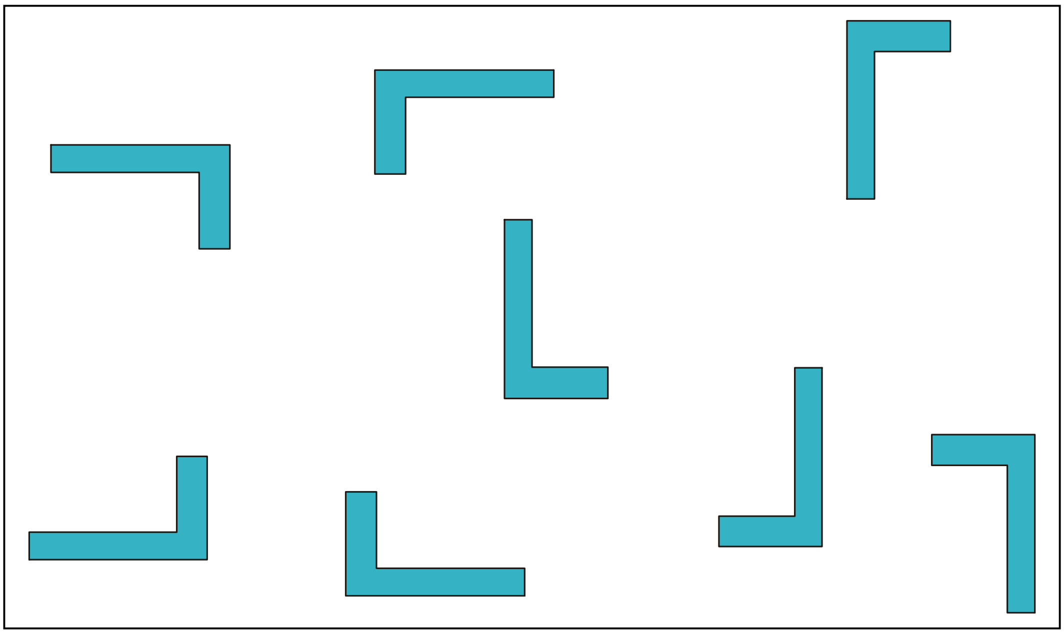
10. Desenhe a bandeira depois que ela sofre uma rotação de 90^{o} ao redor de seu pé (ponto vermelho). O sentido da rotação é o horário.



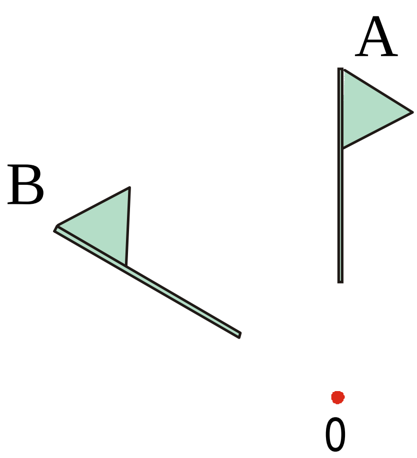
11. Você vai rodar cada bandeirinha abaixo 180º no sentido horário, ao redor do ponto vermelho



12. A figura ao lado sofre uma rotação de 180°. Um dos desenhos abaixo representa a figura, após a rotação. Marque com um X essa figura.

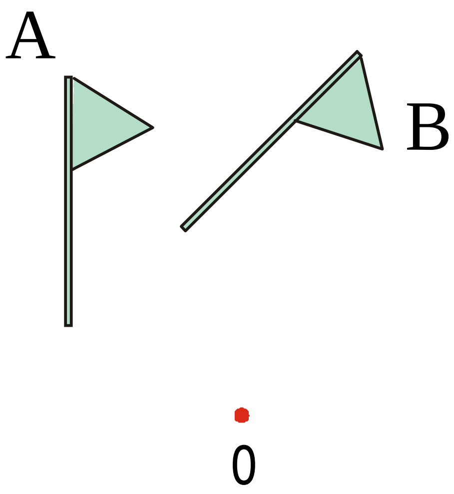


13. No desenho a seguir as bandeiras A e B são iguais. Diga de quantos graus no sentido anti-horário seria a rotação capaz de levar a bandeira A a coincidir com a bandeira B. O ponto O é o centro dessa rotação.



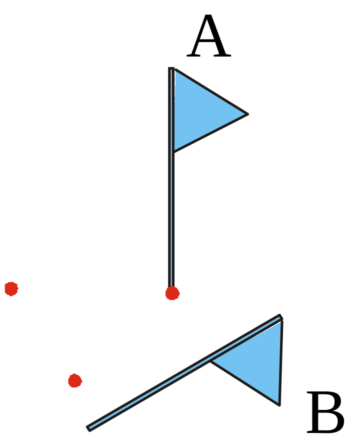
Resposta:

14. No desenho a seguir as bandeiras A e B são iguais. Diga de quantos graus e qual o sentido da menor rotação capaz de levar a bandeira A a coincidir com a bandeira B. O ponto O é o centro dessa rotação.

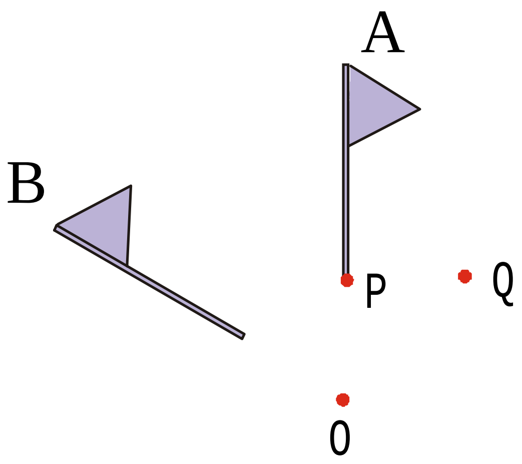


Resposta:

15. No desenho a seguir as bandeiras A e B são iguais. Assinale o centro da rotação de 60^{o} no sentido horário capaz de levar a bandeira A a coincidir com a bandeira B.



16. Diga qual o sentido, o ângulo (em graus) e o centro da rotação que levaria a bandeira A a coincidir com a bandeira B no desenho abaixo.



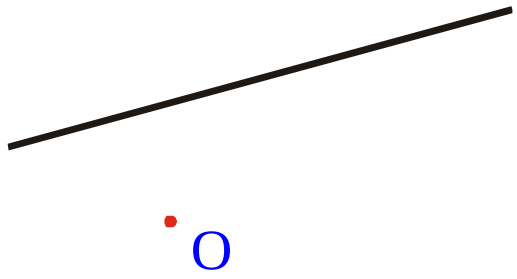
Sentido

Ângulo

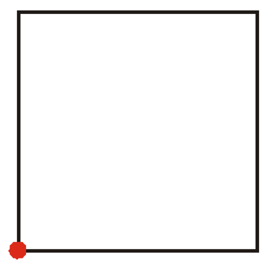
Centro da rotação

17. Dadas duas figuras iguais, quando for possível fazer uma coincidir com a outra através de uma rotação, dizemos que uma delas é a **imagem** da outra. Ache a imagem do ponto A em uma rotação anti-horária de 120^o em torno do ponto O .

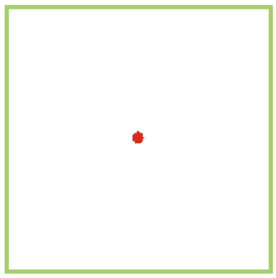
18. Desenhe a imagem do segmento por uma rotação de 180^o (horária) em torno de O.



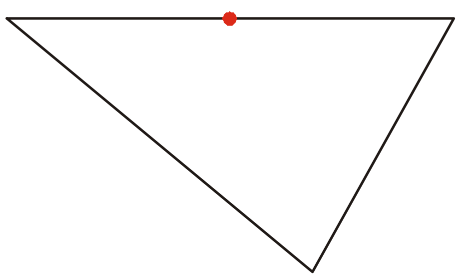
19. Desenhe a imagem do quadrado abaixo obtida por uma rotação de 180^o no sentido horário em redor do ponto vermelho:



20. Agora, a rotação é 90^o no sentido horário.



21. Desenhe a imagem do triângulo depois que ele sofrer uma rotação de 180^o ao redor do ponto vermelho

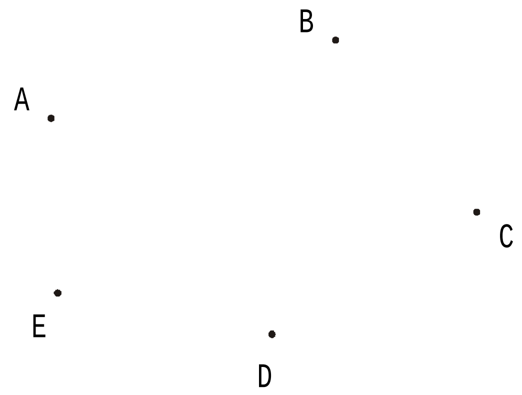


ANEXO 2 – SEQÜÊNCIA IC

FOLHA 1 – SESSÃO 1

Nome:____

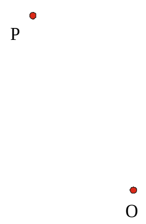
1. Você deverá traçar todos os segmentos de reta cujas extremidades são dois dos pontos mostrados abaixo. Capriche!



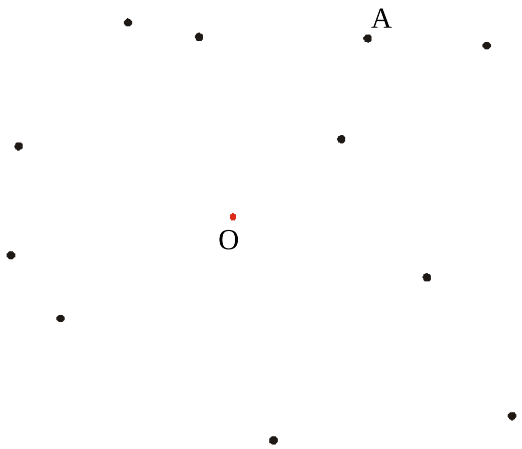
2. Quantos segmentos você desenhou? Resposta:_______________________
3. Qual é o menor segmento? Resposta:__________
4. Usando sua régua ou régua e compasso, desenhe no espaço abaixo um segmento que tem o mesmo comprimento que o segmento EC.

5. Desenhe um segmento que tem a mesma medida, ou seja, o mesmo comprimento, que o maior segmento que você desenhou acima.

6. Desenhe a circunferência que tem como centro o ponto O e que passa pelo ponto P.

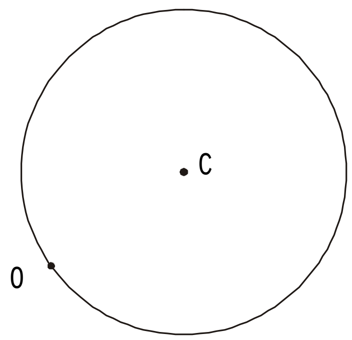


7. O ponto A está a uma certa distância do ponto O. Há outros pontos que estão a essa mesma distância do ponto O. Ache todos eles e diga quantos são.

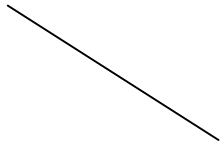


Resposta:________

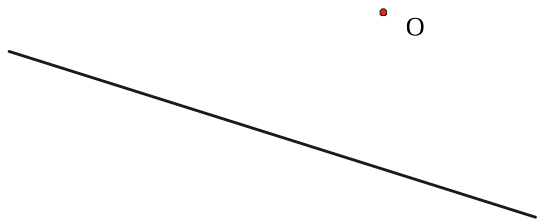
8. Desenhe a circunferência com centro no ponto O e que passa pelo centro C da circunferência desenhada abaixo.



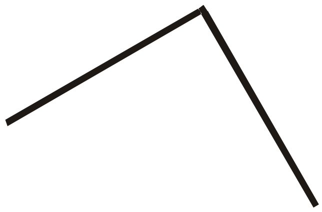
9. **Com o esquadro**, termine de desenhar um ângulo reto:



10. Desenhe uma reta perpendicular à reta abaixo. A reta que você desenhar deve passar pelo ponto O.



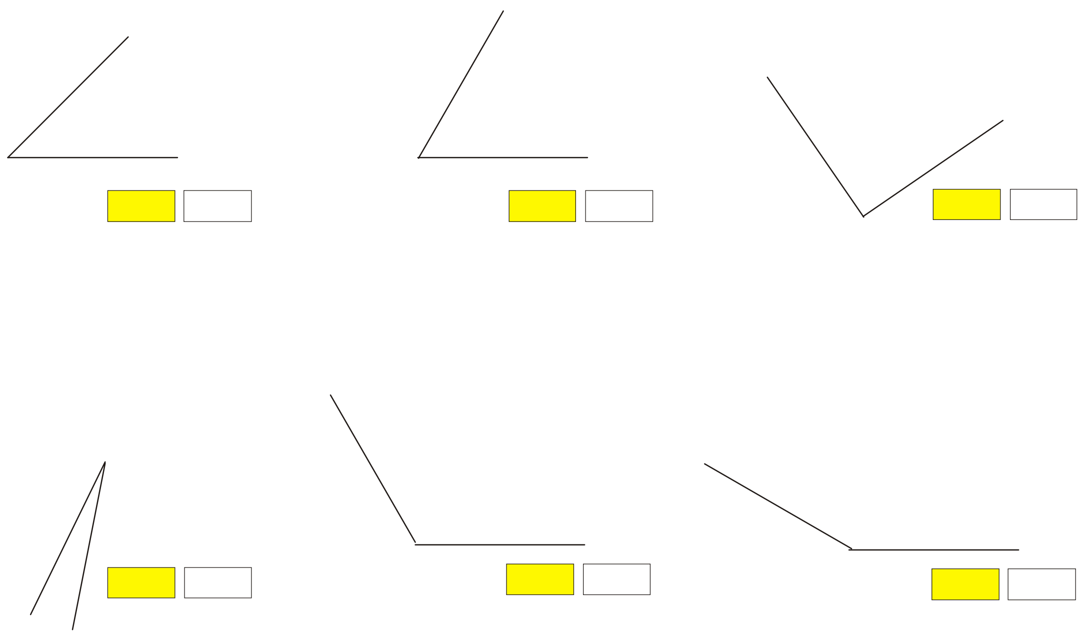
11. Termine de desenhar o quadrado:



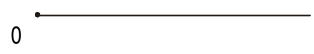
FOLHA 2 – SESSÃO 1

Nome:____

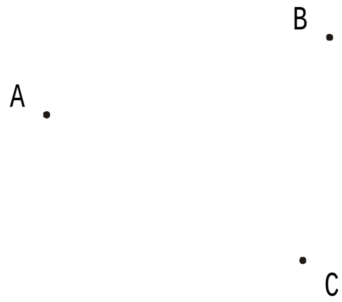
1. Tente “adivinhar” a medida de cada um dos ângulos abaixo, escrevendo o que você imaginou nos quadros amarelos. Em seguida, use o transferidor para medir cada um deles e escreva o resultado ao lado. Você está bom para avaliar ângulos?



2. Usando seu transferidor e sua régua, termine de desenhar o ângulo de vértice O e medida 60^{o} .

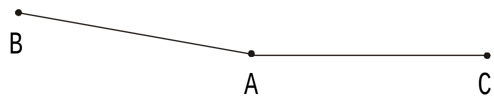


3. São dados três pontos abaixo. Com sua régua, desenhe o ângulo de vértice C e lados CA e CB.



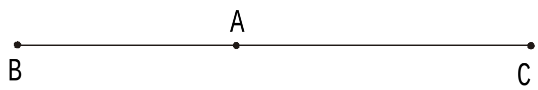
Medida do ângulo $A\hat{C}B$:__________

4. Na figura abaixo, os segmentos AB e AC formam um ângulo. Qual é a medida desse ângulo?



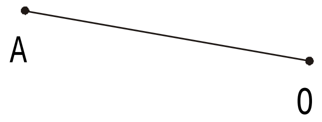
Resposta:__________

5. O ângulo abaixo tem vértice A e lados AB e AC. Qual é sua medida?

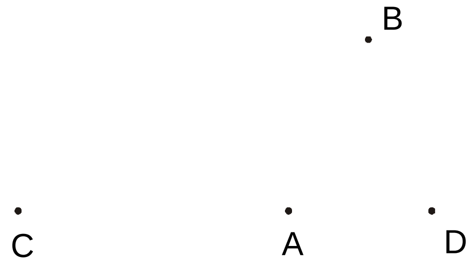


Resposta:___________

6. Abaixo está desenhado um lado de um ângulo de 180^o . O vértice é o ponto O. Desenhe o outro lado, usando sua régua e seu compasso.



7. Temos, abaixo, alguns pontos. Trace todos os ângulos que têm vértice A.



Qual é a medida do menor ângulo? Resposta:________________

Qual é a medida do maior ângulo? Resposta:________________

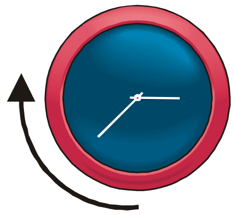
FOLHA 1 – SESSÃO 2

Nome:____

Nome do(a) companheiro (a) de dupla:____

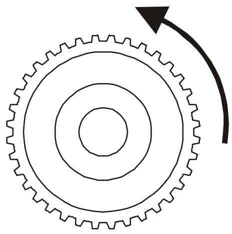
SENTIDO DA ROTAÇÃO

01. Dizemos que os ponteiros de um relógio giram no sentido horário e indicamos o sentido da rotação com uma flecha curva, como na figura ao lado.

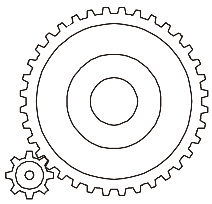


Diga em que sentido está girando a engrenagem desenhada ao lado

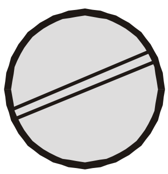
Resposta:____________



02. No desenho abaixo, temos duas engrenagens. A maior gira no sentido anti-horário. Coloque flechas indicando o sentido da rotação de cada engrenagem



03. Coloque uma flecha indicando em que sentido deve ser girado o parafuso para apertá-lo.

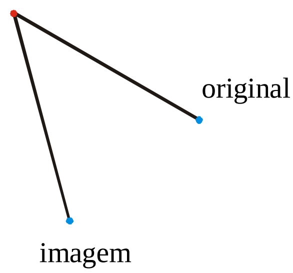


Nome:____

Nome do(a) companheiro(a) de dupla:____

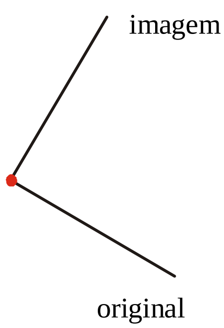
ÂNGULO DE ROTAÇÃO

No desenho ao lado, temos dois segmentos de mesmo comprimento formando um ângulo de 45^{o}. Um deles é chamado <u>original</u> e outro é chamado <u>imagem</u> e dizemos que eles se relacionam por meio de uma rotação de 45^{o} no sentido horário, em torno do ponto vermelho.

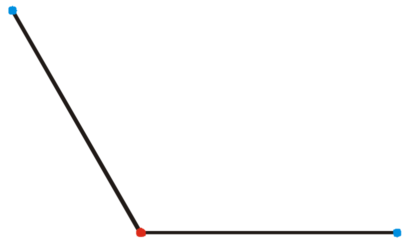


1. No sentido anti-horário, há uma outra rotação que também relaciona os dois segmentos acima. Descreva essa rotação.

2. Em nosso estudo, quando houver dúvida sobre qual das rotações considerar, iremos escolher sempre a de menor ângulo. De acordo com essa convenção, na rotação representada abaixo, o sentido é____________________ e o ângulo é de _____.



3. O desenho abaixo representa uma rotação, ao redor do ponto vermelho, sendo o segmento horizontal a figura original e o segmento inclinado, a imagem.



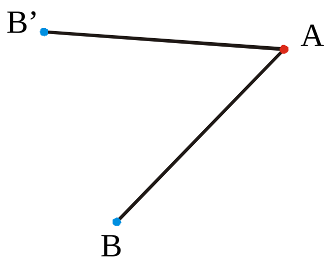
Diga de quantos graus é a rotação:__________ E qual o sentido?__________________________

4. No desenho ao lado, o segmento AB é o original e o segmento AB’ é a imagem, numa certa rotação.

   A rotação ocorre em volta do ponto ______.

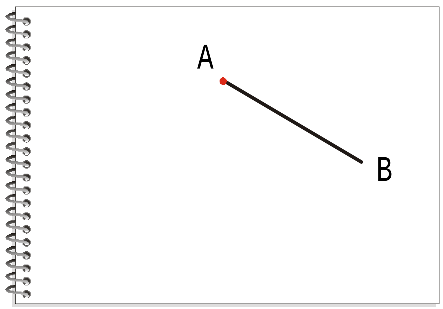
   O sentido da rotação é o _____________________.

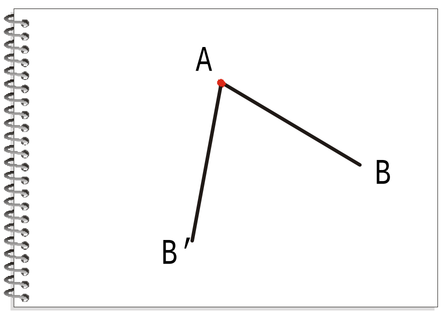
   O ângulo de rotação é de ____________.



5. Joana tinha um segmento AB desenhado no seu caderno, como mostra a figura ao lado. Ela desenhou a imagem da rotação desse segmento em torno do ponto A, de 80^{o} no sentido horário.

   Seu desenho ficou assim:



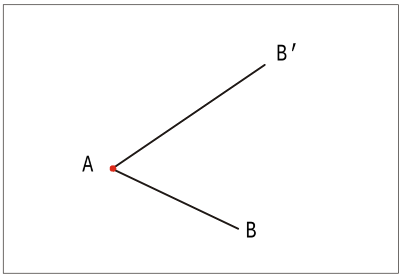


Você acha que está está certo ou errado?___________

Por quê?

Diga se cada um dos quadros abaixo representa uma rotação ou não. Se for rotação, descreva-a. Se não for, explique por que não é rotação.

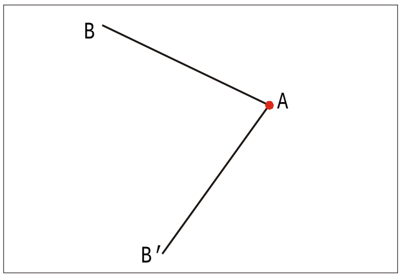
6.



É rotação? ☐ sim ☐ não

Descrição ou explicação:

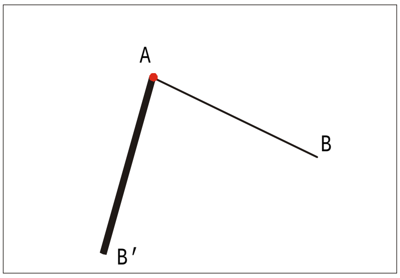
7.



É rotação? ☐ sim ☐ não

Descrição ou explicação:

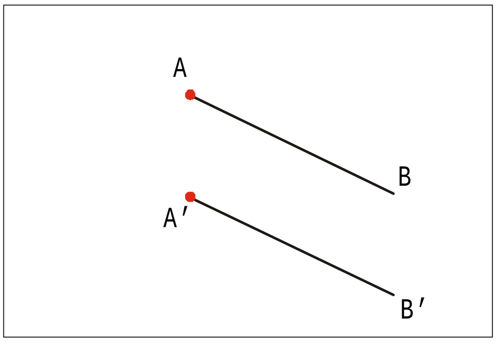
8.



É rotação? ☐ sim ☐ não

Descrição ou explicação:

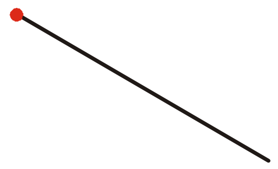
9.



É rotação? ☐ sim ☐ não

Descrição ou explicação:

10. Desenhe a imagem do segmento desenhado abaixo, na rotação de 100^{o} ao redor do ponto vermelho, no sentido horário.



Escreva como você fez para desenhar a imagem:

FOLHA 3 – SESSÃO 2

Nome:____

Nome do(a) companheiro(a) de dupla:____

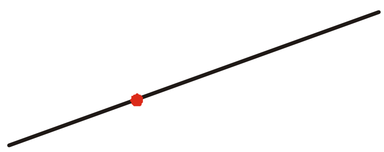
CENTRO DE ROTAÇÃO

Numa rotação, além do sentido e da medida do ângulo, é preciso saber qual é o centro de rotação.

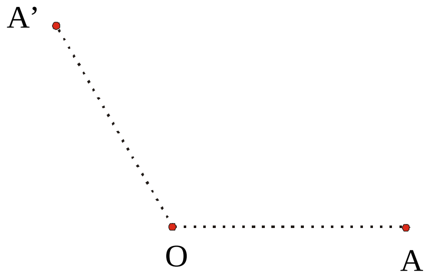
1. Na figura abaixo, há três segmentos de mesmo tamanho. Desenhe a imagem da rotação de 60^o de cada um deles no sentido horário. O centro de rotação é o ponto vermelho.

Qual é a diferença entre as três imagens que você desenhou acima?

2. Desenhe a imagem: rotação de 45^o, sentido anti-horário, ao redor do ponto vermelho. Use seu compasso.



3. A figura ao lado mostra a rotação de um ponto A em torno de O, de 120^o sentido anti-horário. O ponto imagem, por convenção, é representado por A'. Diga se



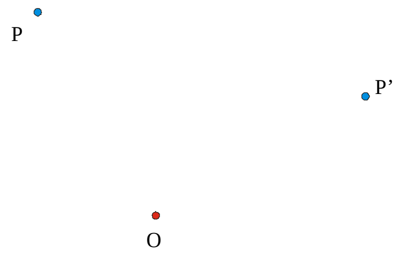
☐ distância OA = distância OA' ou se

☐ distância OA ≠ distância OA'

Escreva como chegou à conclusão acima.

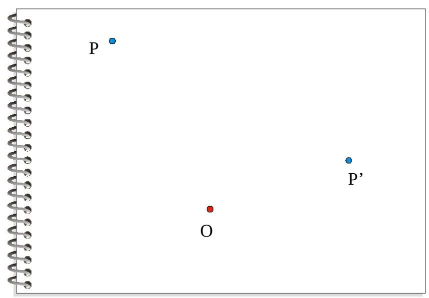
4. Na figura ao lado, podemos afirmar que P' é a imagem de P por uma rotação de 100^o no sentido horário ao redor de O?

Sim   Não   Explique sua resposta no quadro abaixo:



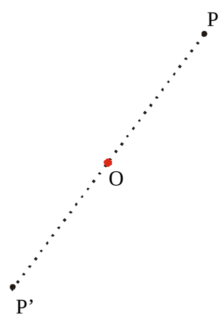
5. Gabriela desenhou no seu caderno o ponto P', dizendo que ele é a imagem do ponto P na rotação de 90^o no sentido horário ao redor de O. que ela fez está

certo? ou   errado?



Explique:

6. Nas rotações de 180^o , um ponto P e sua imagem P' ficam na mesma reta que passa pelo centro de rotação O. Neste caso, dizemos que o ponto O é o _____________________________ do segmento PP'.



7. Ache a imagem do ponto A na rotação de 180^o em volta de O, nos dois sentidos:

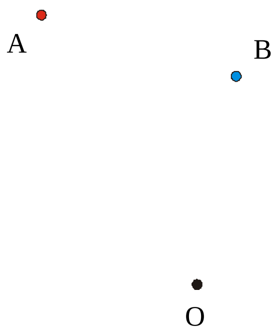
anti-horária

horária

8. Que conclusão você pode tirar a respeito do sentido na rotação de 180^o ?

9. Como você fez para achar a imagem do ponto A, nas duas situações?

10. Ache a imagem do ponto A e imagem do ponto B, ambos desenhados abaixo, na rotação de 90^o ao redor de O, no sentido horário.

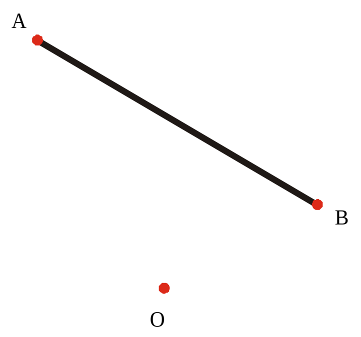


FOLHA 4 – SESSÃO 2

Nome:____

Nome do(a) companheiro(a) de dupla:____

1. Já vimos como achar a imagem da rotação de um segmento quando o centro de rotação está no segmento. E se o centro de rotação estiver fora do segmento? Ache a imagem A'B' do segmento AB, na rotação de 120^o de centro O, sentido horário, no desenho abaixo:

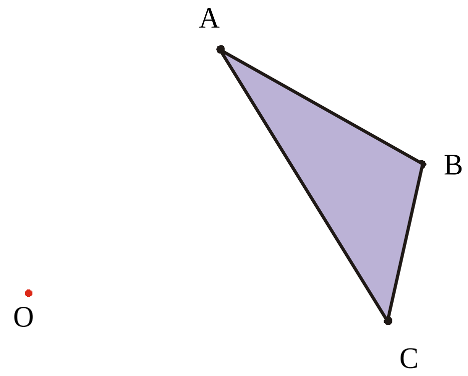


Escreva como você fez para desenhar a imagem:

Os segmentos AB e A'B' são congruentes ou têm comprimentos diferentes?	

2. Desenhe a imagem da rotação do segmento AB de 90^o no sentido anti-horário em torno de O:

3. Desenhe a imagem do triângulo ABC na rotação de 100^o em torno de O no sentido horário. Chame essa imagem de A’B’C’.



4. Complete, a partir da situação acima:

   A medida do ângulo AÔA’ é ___________.
   A medida do ângulo BÔB’ é ___________.
   A medida do ângulo CÔC’ é ___________.

   Complete com o símbolo = ou o símbolo ≠ :
   AO____ A’O BO____B’O CO____C’O
   AO____BO AO____C’O

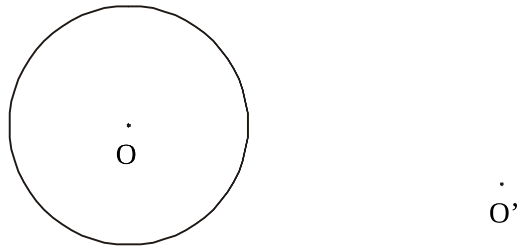
5. Escreva V (verdadeiro) ou F (falso), sobre a rotação do triângulo acima:

☐ AB = A’B’ ☐ AC = A’C’ ☐ BC = B’C’

Podemos afirmar que o triângulo ABC (original) e o triângulo A’B’C’ (imagem) são triângulos:

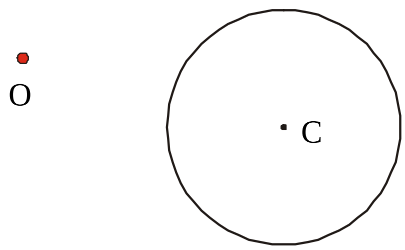
☐

6. Copie a circunferência de centro O, de forma que a cópia tenha centro O'.

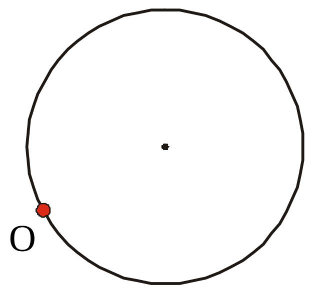


Diga como você copiou a circunferência:

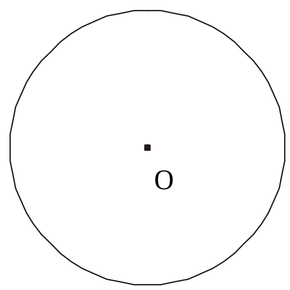
7. Desenhe a imagem da circunferência abaixo na rotação de 120^o, sentido horário. O ponto O é o centro de rotação e o ponto C é o centro da circunferência.



8. Determine a imagem da rotação de 90^o em torno de O, sentido anti-horário, da circunferência abaixo:



9. A circunferência tem centro O. Ela gira 75^o ao redor desse centro, no sentido anti-horário. Desenhe a imagem dessa rotação.



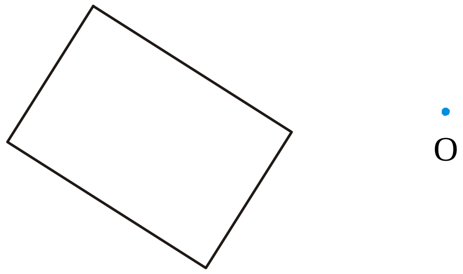
O que você pode afirmar a respeito da imagem dessa rotação?

FOLHA 5 – SESSÃO 2

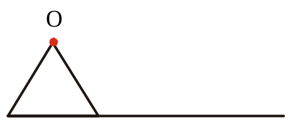
Nome:____

Nome do(a) companheiro(a) de dupla:____

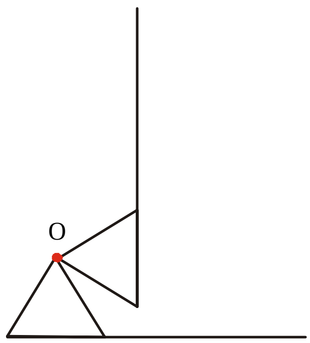
1. Desenhe a imagem do retângulo. A rotação é de 180^o, sentido horário, ao redor de O.



2. A professora de Carlos pediu para ele desenhar a imagem da bandeira ao lado, numa rotação de 90^o no sentido horário, ao redor do ponto O.



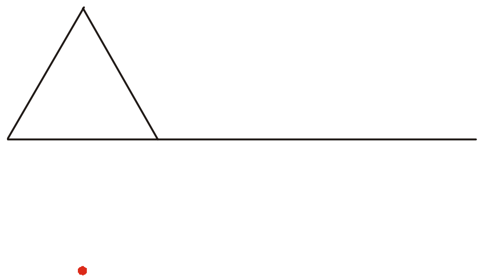
Depois que Carlos fez o desenho, a figura ficou assim:



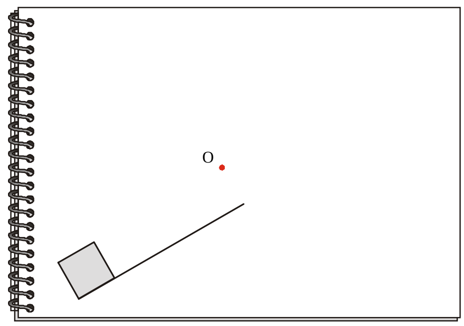
Você acha que está certo?____________ Por que você acha isso?_____________________

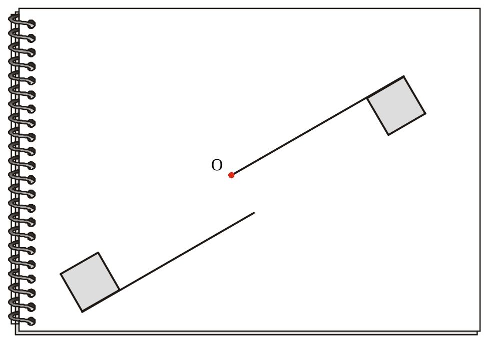
____

3. Desenhe a imagem da bandeira a seguir , na rotação horária de 60^o ao redor do ponto vermelho :

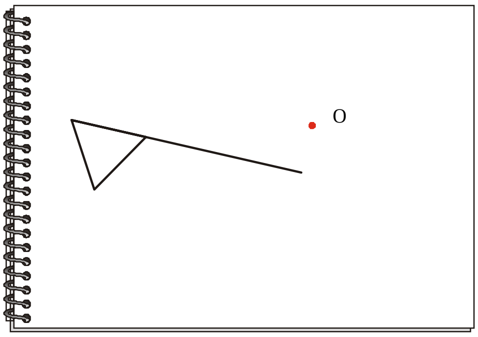


4. Janaína tinha uma bandeira desenhada no seu caderno. Então ela desenhou a imagem dessa bandeira na rotação de 180^{o} no sentido anti-horário ao redor do ponto O. Seu desenho, junto com a bandeira original, ficou assim (veja abaixo):

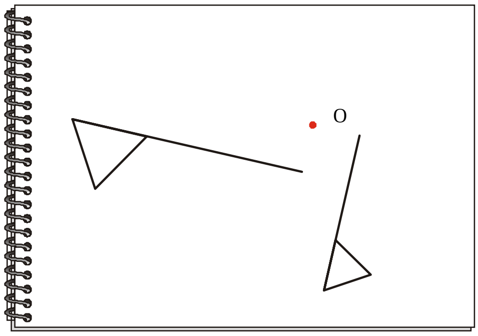




Você acha que está certo ou errado? Explique por quê.

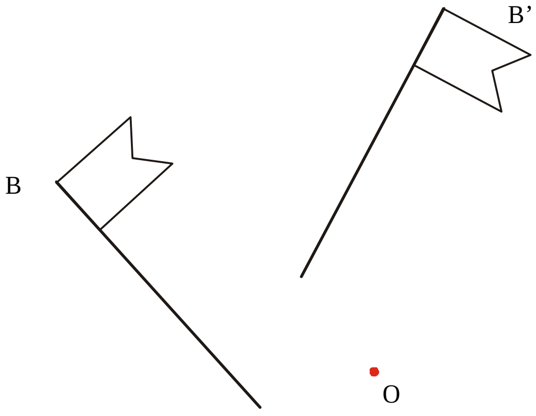


5. Um menino desenhou a imagem da rotação da bandeira à esquerda. A rotação é de 90^o no sentido anti-horário e o centro de rotação é o ponto O. Depois que ele acabou seu desenho, a bandeira e sua imagem ficaram assim:



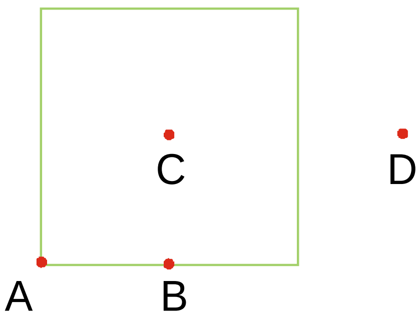
Você tem alguma crítica a fazer ao trabalho do menino? Explique.

6. Na figura abaixo, a bandeira B’ é a imagem da bandeira B por uma rotação ao redor de O. Qual foi o sentido da rotação ?______________________ De quantos graus foi a rotação? ________



7. No desenho abaixo temos o vértice A de um quadrado e o seu centro O. Usando rotação, ache os demais vértices e desenhe o quadrado.

8. Uma menina fez a rotação do quadrado abaixo e desenhou a imagem na mesma posição que estava o quadrado original.



Você acha que:

a) a rotação pode ter sido de 90^o ?____________ Se você acha isso, qual dos pontos acima foi centro de rotação?___________

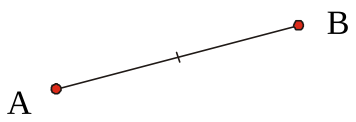
b) a rotação pode ter sido de 180^o ?____________ Se sim, qual foi o centro de rotação?_______

c) a rotação pode ter sido de 360^o ? ____________Se sim, qual foi o centro de rotação?____

FOLHA 1 – SESSÃO 3

Nome:____

1. O desenho ao lado mostra o segmento AB. Desenhe uma reta perpendicular a esse segmento e que passa pelo seu ponto médio (indicado na figura). Essa reta é chamada <u>mediatriz</u> do segmento AB.



2. Escolha um ponto dessa reta. Compare as distâncias desse ponto até as extremidades do segmento. Elas são iguais ou diferentes ? ______________________________________

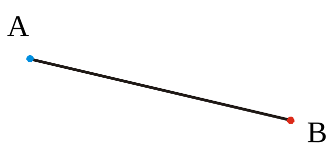
   Escolha outro ponto e compare novamente as distâncias. Qual é a sua conclusão?_____________________________ Se você pegar um outro ponto e comparar as distâncias, o que você acha que irá acontecer? ___________________________________

3. O que você fez para comparar as distâncias? ___________________________________

____

4. Desenhe a mediatriz do segmento de reta representado ao lado.

   Diga o que você fez para desenhar essa mediatriz.

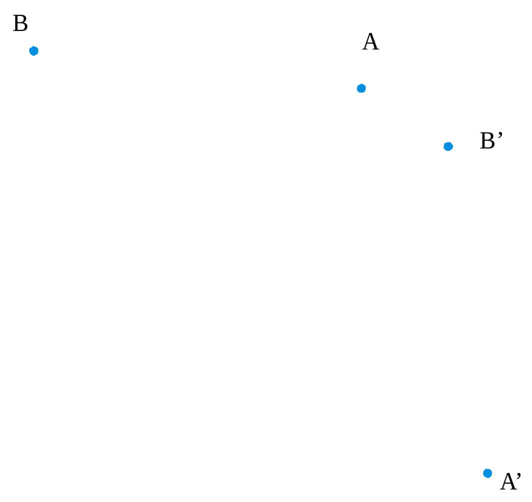


5. ponto A pode ser levado até o ponto A’, por meio de diferentes rotações. Desenhe três pontos que poderiam servir como centros dessas rotações. Chame esses pontos de P, Q e R.

De quantos graus é a rotação que tem P como centro?_____________

Qual é o sentido dessa rotação?________________________

6. Desenhe a reta que contém os centros de rotação que levam A em A’; em seguida, desenhe a reta contendo os centros de rotação que levam B em B’.

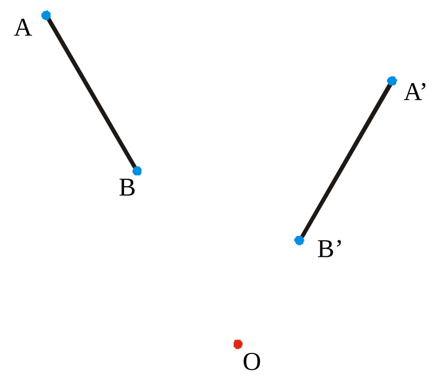


As duas retas desenhadas por você cruzam-se num único ponto. O que você pode dizer a respeito desse ponto?____

FOLHA 2 – SESSÃO 3

Nome:____

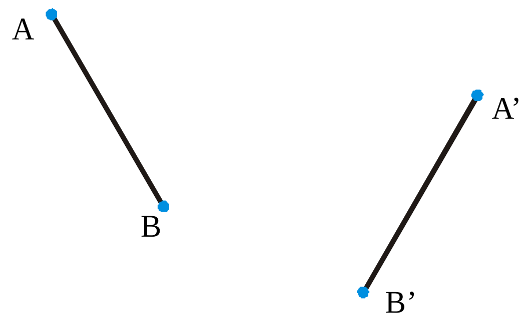
1. Alguém olhou a figura abaixo e disse incorretamente que o ponto O é o centro da rotação que leva o segmento AB no segmento A’B’.



Explique por que O não é o centro de rotação.

____

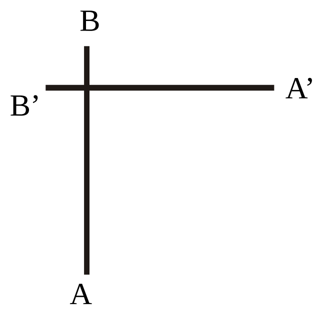
2. Os segmentos estão novamente desenhados para você poder achar o centro da rotação.

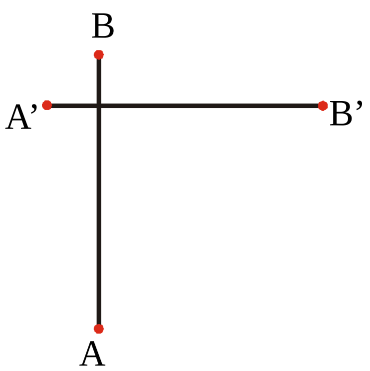


Qual é o sentido e o ângulo de rotação?____

3. No desenho ao lado temos o segmento AB e sua imagem A’B’ por uma rotação.

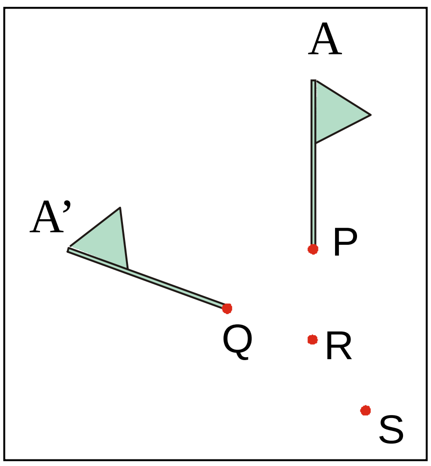
   Assinale o centro da rotação. De quantos graus é a rotação?__________ Qual é o sentido da rotação?__________________

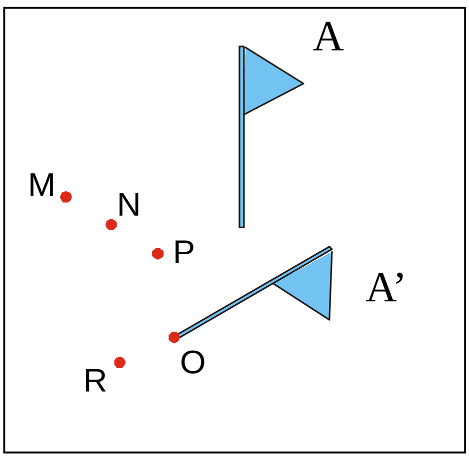




4. A’B’ é a imagem de AB por uma rotação. Assinale o centro da rotação. De quantos graus é a rotação? __________ Qual é o sentido da rotação?__________________

5. Diga qual dos pontos vermelhos é o centro da rotação da bandeira A, com imagem A’, nas duas situações a seguir:





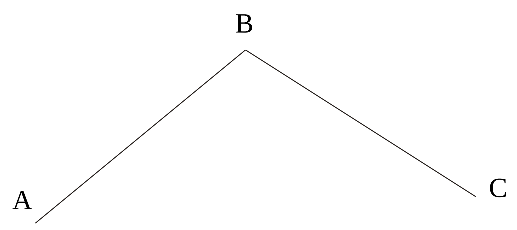
Resposta: ponto _______

Resposta: ponto _______

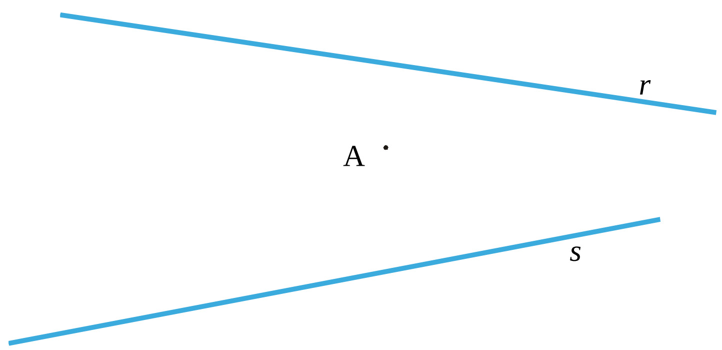
FOLHA 3 – SESSÃO 3

Nome:____

1. No desenho abaixo estão representados dois lados consecutivos de um pentágono regular ABCDE. Termine de desenhar o pentágono usando rotação.

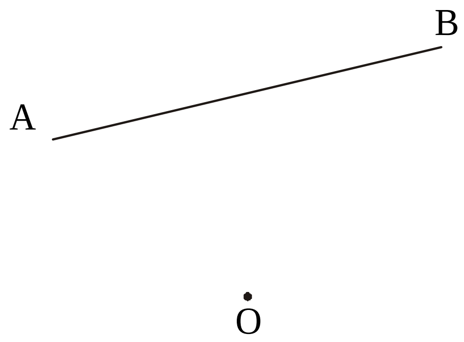


2. O desenho a seguir mostra uma casa (A) entre dois rios (retas *r* e *s*). O sr. Paulo, dono do terreno, quer construir uma estrada reta que começa num rio, passa pela casa e termina no outro rio. Além disso, ele quer que a casa fique bem no meio da estrada. Faça o desenho dessa estrada.



ANEXO 2 – SEQÜÊNCIA IC

3. Na rotação de 180^o (qualquer sentido), a figura e sua imagem são simétricas em relação ao centro de rotação. Desenhe o segmento CD, simétrico do segmento AB em relação ao ponto O, abaixo. Considere C a imagem de A e D a imagem de B.



4. Desenhe os segmentos AD e BC. Diga qual é a espécie do quadrilátero ABCD (trapézio, paralelogramo, losango, retângulo ou quadrado)

Dica – considere as seguintes propriedades dos quadriláteros:

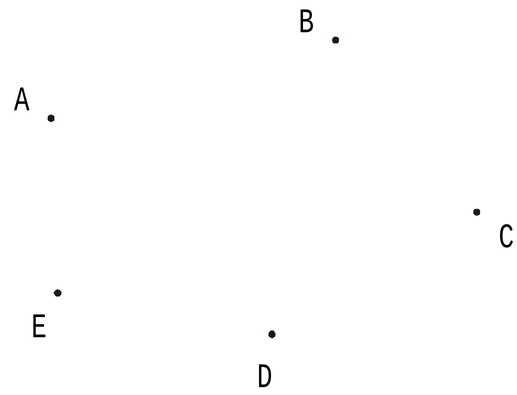
- trapézios: dois lados paralelos
- paralelogramos: lados opostos paralelos
- losangos: lados congruentes (mesma medida)
- retângulos: ângulos internos congruentes (mesma medida)

ANEXO 3 – SEQÜÊNCIA IA

FOLHA 1 – SESSÃO 1

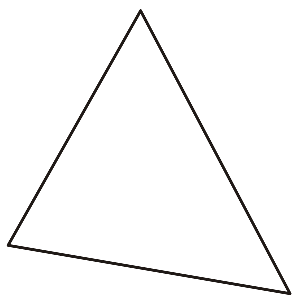
Nome:____

1. Você deverá traçar todos os segmentos de reta cujas extremidades são dois dos pontos mostrados abaixo. Capriche!

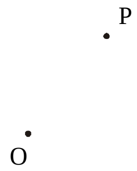


2. Usando régua e o papel vegetal, copie o segmento de reta abaixo no quadro à direita.

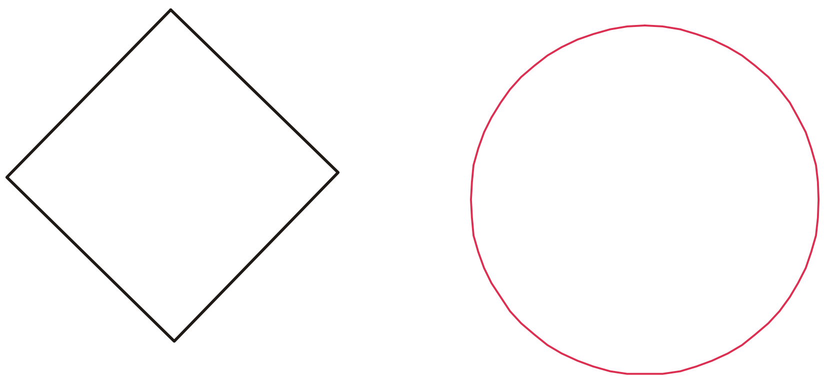
3. Usando seu material, copie o triângulo abaixo dentro do quadro à direita.



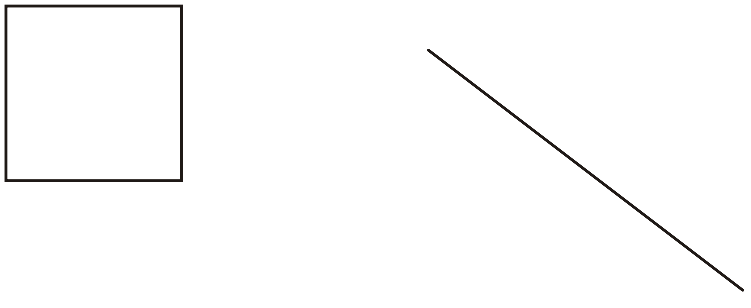
4. Desenhe a circunferência que tem como centro o ponto O e que passa pelo ponto P.



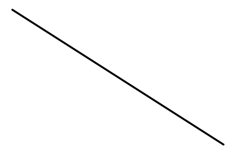
5. Faça uma cópia do quadrado abaixo dentro da circunferência desenhada ao lado. Atenção: o quadrado que você vai desenhar não pode tocar na circunferência.



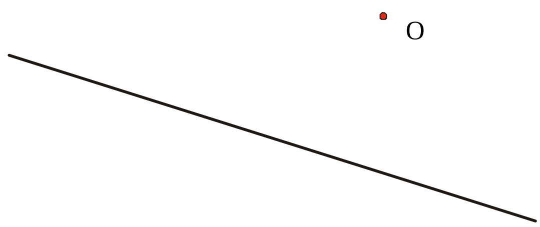
6. O canto de um quadrado forma um ângulo reto. Use o quadrado da esquerda para terminar de desenhar um ângulo reto que já tem um lado desenhado à direita.



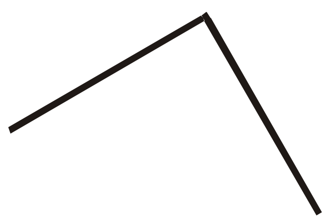
7. **Com o transpel**, termine de desenhar um ângulo reto:



8. Desenhe uma reta perpendicular à reta abaixo. A reta que você desenhar deve passar pelo ponto O.



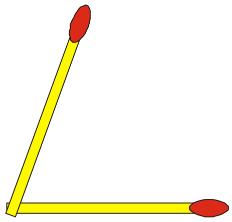
9. Termine de desenhar o quadrado:



FOLHA 2 – SESSÃO 1

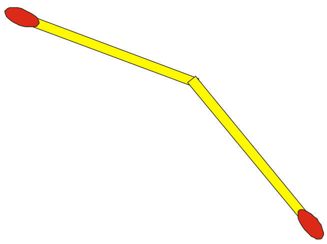
Nome:____

1. Dois palitos de fósforo formam um ângulo. Diga qual é a medida do ângulo formado por eles no desenho abaixo:



Resposta:_______

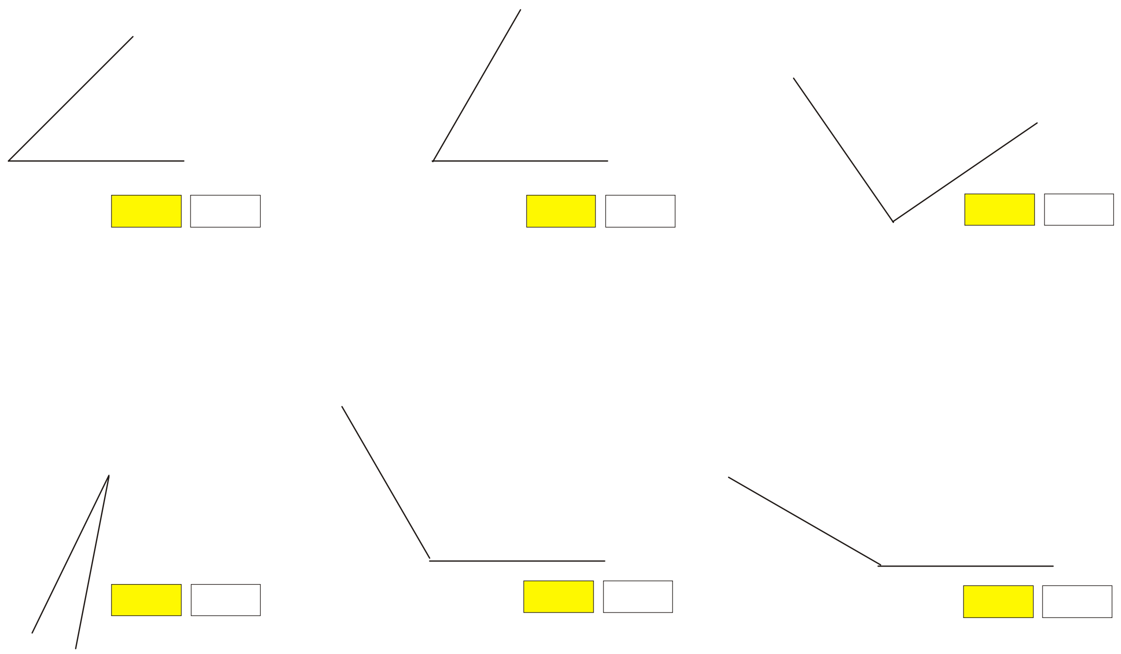
2. Qual é a medida do ângulo abaixo?



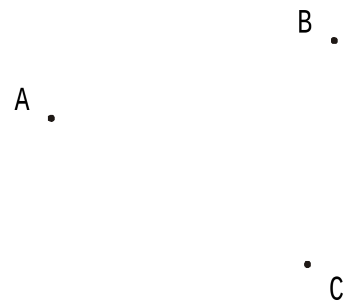
Resposta:_____________

3. Tome seus palitos de fósforo e faça com eles um ângulo de 30^{o} . Copie no quadro abaixo, com cuidado, o ângulo de palitos que você construiu.

4. Tente “adivinhar” a medida de cada um dos ângulos abaixo, escrevendo o que você imaginou nos quadros amarelos. Em seguida, use o transpel para medir cada um deles e escreva o resultado ao lado. Você está bom para avaliar ângulos?

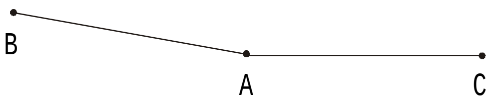


5. São dados três pontos abaixo. Com sua régua, desenhe o ângulo de vértice C e lados CA e CB.



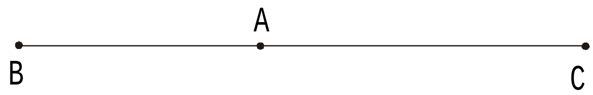
Medida do ângulo AĈB:___________

6. Na figura abaixo, os segmentos AB e AC formam um ângulo. Qual é a medida desse ângulo?



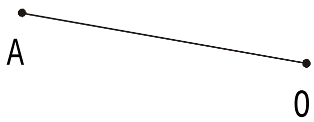
Resposta:___________

7. O ângulo abaixo tem vértice A e lados AB e AC. Qual é sua medida?

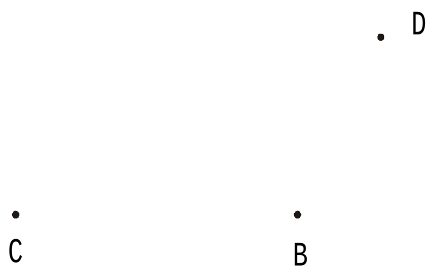


Resposta:____________

8. Abaixo está desenhado um lado de um ângulo de 180^{o} . O vértice é o ponto O. Desenhe o outro lado.



9. Temos, abaixo, quatro pontos. Você vai traçar todos os segmentos possíveis que ligam dois desses pontos. Considere todos os ângulos formados por dois segmentos.



Qual é a medida do menor ângulo? Resposta:_________________

Qual é a medida do maior ângulo? Resposta:_________________

FOLHA 1 – SESSÃO 2

Nome:____

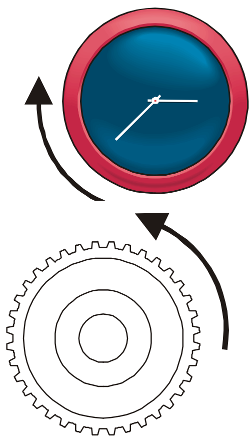
Nome do(a) companheiro (a) de dupla:___________________________________

SENTIDO DA ROTAÇÃO

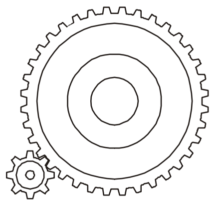
1. Dizemos que os ponteiros de um relógio giram no sentido horário e indicamos o sentido da rotação com uma flecha curva, como na figura ao lado.

   Diga em que sentido está girando a engrenagem desenhada ao lado.

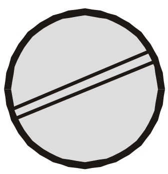
   Resposta:__________



2. No desenho abaixo, temos duas engrenagens. A maior gira no sentido anti-horário. Coloque flechas indicando o sentido da rotação de cada engrenagem



3. Coloque uma flecha indicando em que sentido deve ser girado o parafuso para apertá-lo.



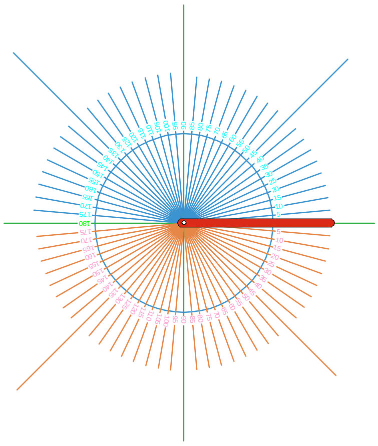
FOLHA 2 – SESSÃO 2

Nome:____

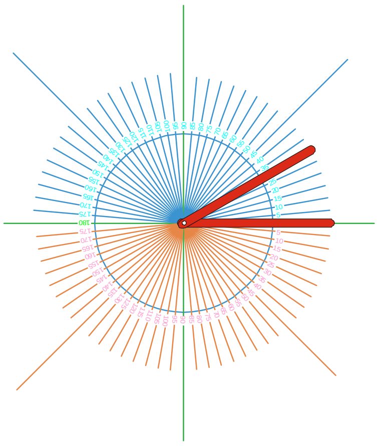
Nome do(a) companheiro (a) de dupla:____

ÂNGULO DE ROTAÇÃO

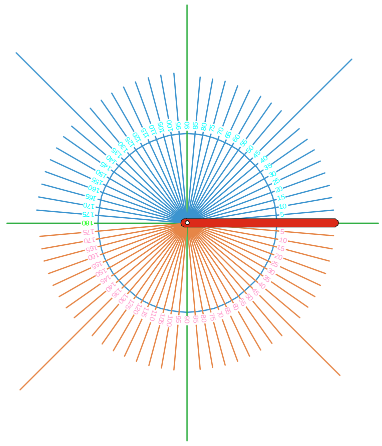
1. Para saber como é uma rotação, precisamos conhecer outras coisas além do sentido em que se dá o giro. É preciso saber de quanto é esse giro, ou seja, qual é a medida do ângulo de rotação. Coloque dois palitos de sorvete empilhados com o furo sobre o transpel, conforme figura abaixo:



Segure o palito de baixo e faça o de cima girar em volta do furo até a marca de 30^o (sentido anti-horário). Você deverá chegar à seguinte situação:

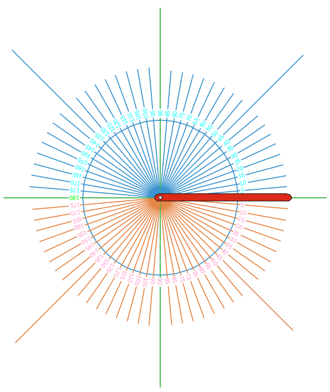


Complete a figura abaixo, sabendo que o giro do palito de cima é 60^o no sentido anti-horário:

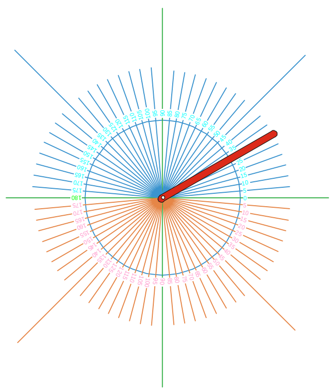


2. Como antes, coloque dois palitos sobre o transpel. Desenhe, no quadro abaixo, os dois palitos quando o de cima gira 120^o no sentido anti-horário (não desenhe o transpel):

3. Se você colocar apenas um palito no transpel conforme a figura abaixo e girar 30^o no sentido horário, você observará o seguinte:



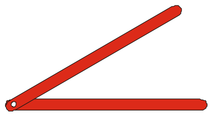
Antes



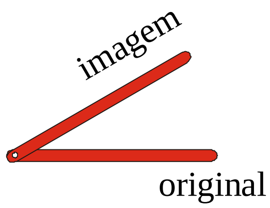
Depois

Vamos supor que alguém lhe mostra o **desenho** de um palito:

e peça para você desenhar o palito após uma rotação de 30^o anti-horária em volta do furo. O desenho ficará assim:



Olhando para este desenho, temos a impressão de que são dois palitos. Para evitar confusão, escrevemos no desenho:



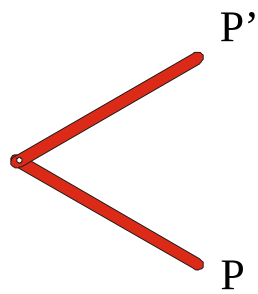
Olhando o desenho, podemos descrever a rotação ao redor do furo que muda o palito de sua posição inicial (original) para a sua posição final (imagem). Na verdade, podem ser dadas duas descrições diferentes: pode ser uma rotação de _____ (complete) no sentido horário ou uma rotação de ____ (complete) no sentido anti-horário. Neste estudo, <u>você deverá escolher sempre o menor ângulo de rotação</u>.

4. No desenho ao lado, o palito P é o original e o palito P’ é a imagem, numa certa rotação.

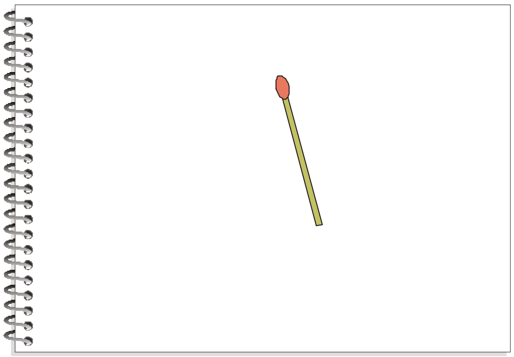
   A rotação ocorre em volta do ___________.

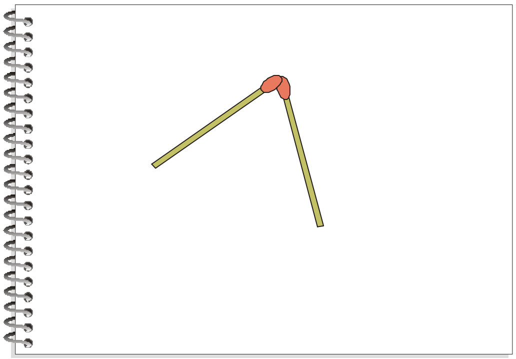
   O sentido da rotação é o__________________.

   O ângulo de rotação é de _______.



5. Gabriela tinha um palito de fósforo desenhado em seu caderno, como mostra a figura ao lado. Ela imaginou uma rotação do palito de 80^o no sentido horário, ao redor da cabeça do palito. O desenho no seu caderno ficou assim:





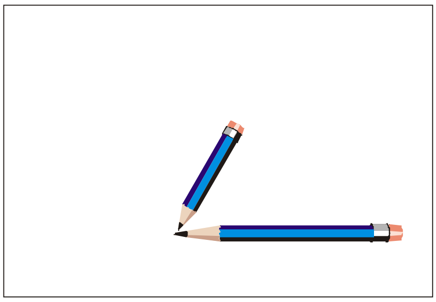
Você acha que está certo ou errado? ______________________________

Por quê?

Temos a seguir o desenho de um lápis.

Diga se cada quadro a seguir representa a rotação desse lápis ao redor de sua ponta ou não. Se for rotação, descreva-a. Se não for, explique por que não é rotação.

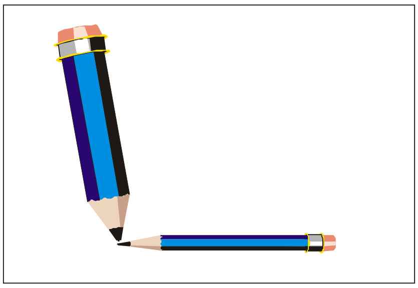
6.



É rotação? ☐ Sim ☐ Não

Descrição ou explicação:

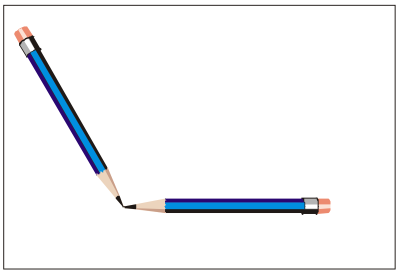
7.



É rotação? ☐ Sim ☐ Não

Descrição ou explicação:

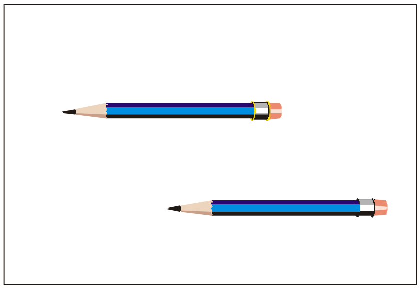
8.



É rotação? ☐ Sim ☐ Não

Descrição ou explicação:

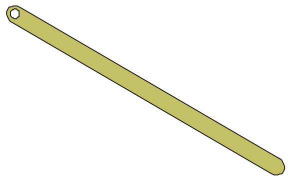
9.



É rotação? ☐ Sim ☐ Não

Descrição ou explicação:

10. Desenhe a imagem do palito desenhado abaixo, na rotação de 100º ao redor do furo, no sentido horário.



Escreva como você fez para desenhar a imagem:

FOLHA 3 – SESSÃO 2

Nome:____

Nome do(a) companheiro (a) de dupla:____

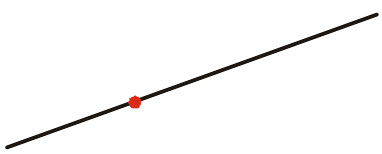
CENTRO DE ROTAÇÃO

Numa rotação, além do sentido e da medida do ângulo, é preciso saber qual é o centro de rotação.

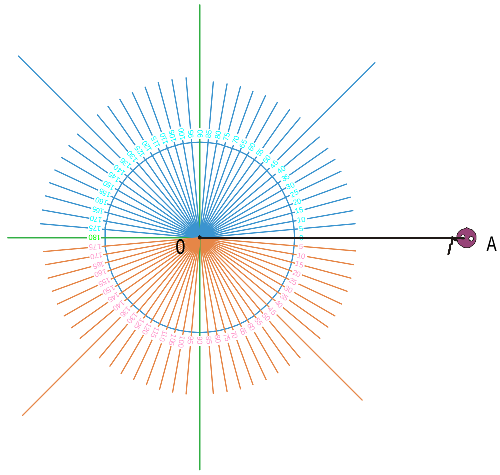
1. O desenho abaixo mosta três palitos: um com furo à esquerda, um com furo no meio e o terceiro com furo à direita. Você pode pegar palitos verdadeiros e fazer a mesma montagem. Depois, desenhe a imagem da rotação de cada um deles no sentido horário de 60^{o} ao redor do furo.

Qual é a diferença entre as três imagens que você desenhou acima?

2. Em vez de palitos, às vezes trabalhamos com segmentos de reta. Desenhe a imagem do segmento de reta abaixo, através da rotação de 45^{o} no sentido anti-horário ao redor do ponto vermelho (centro de rotação).



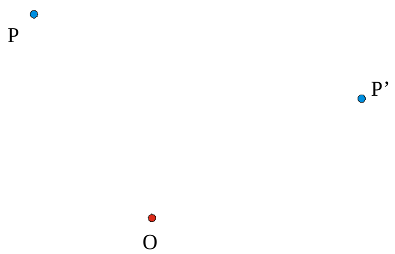
3. Podemos girar apenas um ponto. Para ver como isso funciona, pegue o botão preso à linha e a prenda com a ponta do dedo, no ponto O, sobre o transpel; puxe o botão deixando a linha esticada, na posição A, como mostra a figura ao lado. Desenhe esse botão após um giro de 120^{o} no sentido anti-horário. Chame essa nova posição de A'. Marque com um X a resposta certa:



- [ ] distância AO = distância AO' ou se
- [ ] distância AO ≠ distância AO'

Escreva como você chegou essa conclusão.

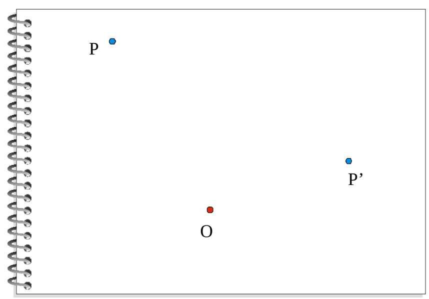
4. Em vez de botões, podemos pensar em pontos. Na figura ao lado, podemos afirmar que P' é a imagem de P por uma rotação de 100^{o} no sentido horário ao redor de O?



Sim Não Explique sua resposta no quadro abaixo:

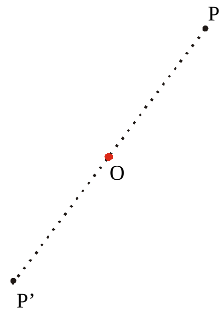
Gabriela desenhou no seu caderno o botão P', dizendo que ele é a imagem do botão P na rotação de 90^{o} no sentido horário ao redor de O. O que ela fez está

certo? ou errado?



Explique:

5. Nas rotações de 180^o, um ponto P e sua imagem P' ficam na mesma reta que passa pelo centro de rotação O. Neste caso, dizemos que o ponto O é o ______________________________ do segmento PP'.



6. Ache a imagem do ponto A na rotação de 180^o em volta de O, nos dois sentidos:

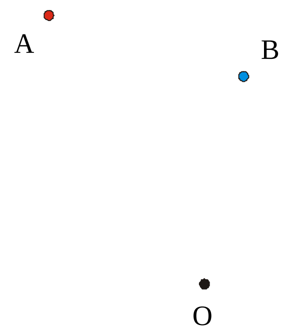
anti-horária

horária

7. Que conclusão você pode tirar a respeito do sentido na rotação de 180^o ?

8. Como você fez para achar a imagem do ponto A, nas duas situações?

9. Ache a imagem do ponto A e imagem do ponto B, ambos desenhados abaixo, na rotação de 90° ao redor de O, no sentido horário.



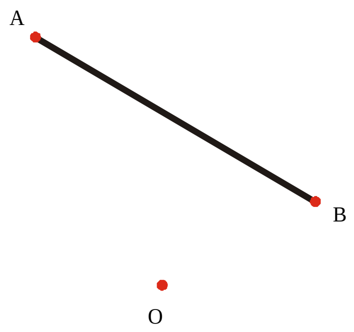
ANEXO 3 – SEQÜÊNCIA IA

FOLHA 4 – SESSÃO 2

Nome:____

Nome do(a) companheiro(a) de dupla:____

1. Já vimos como achar a imagem da rotação de um segmento quando o centro de rotação está no segmento. E se o centro de rotação estiver fora do segmento? Ache a imagem A’B’ do segmento AB, na rotação de 120^o de centro O, sentido horário, no desenho abaixo:

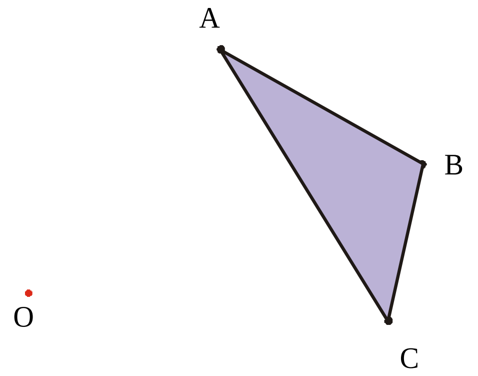


Escreva como você fez para desenhar a imagem:

Os segmentos AB e A’B’ são congruentes ou têm comprimentos diferentes?

2. Desenhe a imagem da rotação do segmento AB de 90^o no sentido anti-horário em torno de O:

3. Desenhe a imagem do triângulo ABC na rotação de 100^o em torno de O no sentido horário. Chame essa imagem de A’B’C’.



4. Complete, a partir da situação acima:

A medida do ângulo AÔA’ é ___________.
A medida do ângulo BÔB’ é ___________.
A medida do ângulo CÔC’ é ___________.

Complete com o símbolo = ou o símbolo ≠ :

AO____ A’O   BO____B’O   CO____C’O
AO____BO   AO____C’O

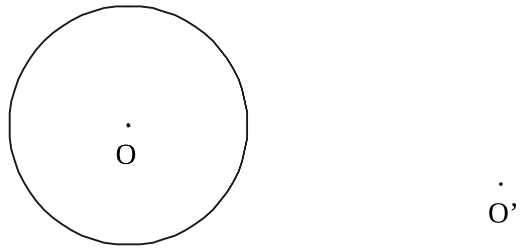
5. Escreva V (verdadeiro) ou F (falso), sobre a rotação do triângulo acima:

☐ AB = A’B’   ☐ AC = A’C’   ☐ BC = B’C’

Podemos afirmar que o triângulo ABC (original) e o triângulo A’B’C’ (imagem) são triângulos:

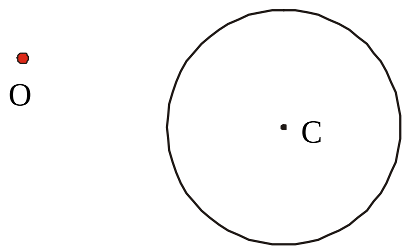
☐

6. Copie a circunferência de centro O, de forma que a cópia tenha centro O'.

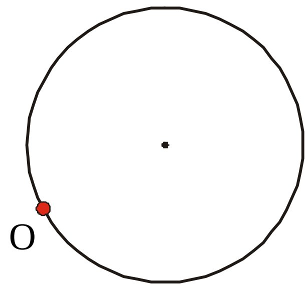


Diga como você copiou a circunferência:

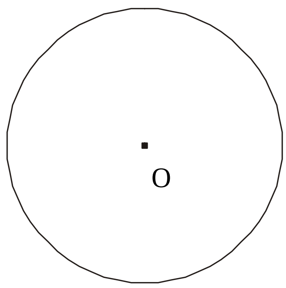
7. Desenhe a imagem da circunferência abaixo na rotação de 120°, sentido horário. O ponto O é o centro de rotação e o ponto C é o centro da circunferência.



8. Determine a imagem da rotação de 90^{o} em torno de O, sentido anti-horário, da circunferência abaixo:



9. A circunferência tem centro O. Ela gira 75^{o} ao redor desse centro, no sentido anti-horário. Desenhe a imagem dessa rotação.



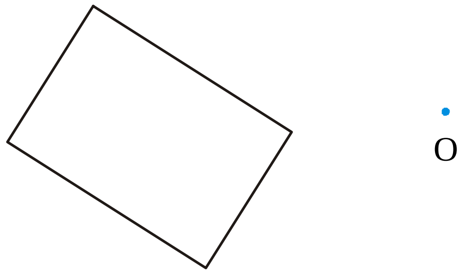
O que você pode afirmar a respeito da imagem dessa rotação?

FOLHA 5 – SESSÃO 2

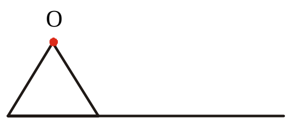
Nome:____

Nome do(a) companheiro(a) de dupla:____

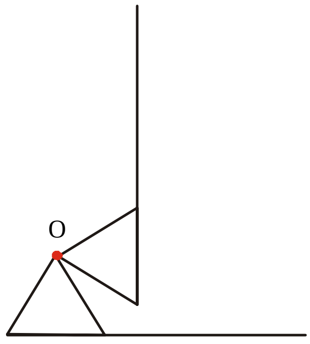
1. Desenhe a imagem do retângulo. A rotação é de 180^o, sentido horário, ao redor de O.



2. A professora de Carlos pediu para ele desenhar a imagem da bandeira ao lado, numa rotação de 90^o no sentido horário, ao redor do ponto O.



Depois que Carlos fez o desenho, a figura ficou assim:

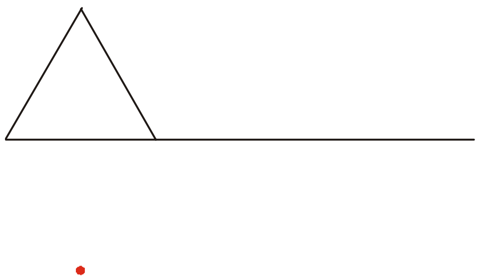


Você acha que está certo?____________ Por que você acha isso?_____________________

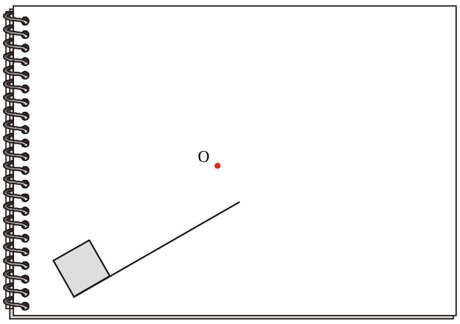
____

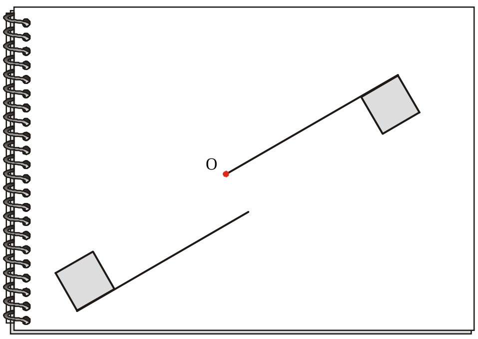
____

3. Desenhe a imagem da bandeira a seguir , na rotação horária de 60^o ao redor do ponto vermelho :

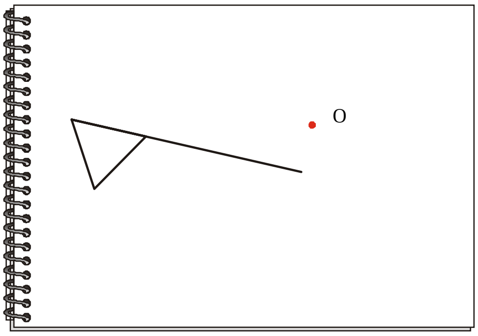


4. Janaína tinha uma bandeira desenhada no seu caderno. Então ela desenhou a imagem dessa bandeira na rotação de 180^o no sentido anti-horário ao redor do ponto O. Seu desenho, junto com a bandeira original, ficou assim (veja abaixo):

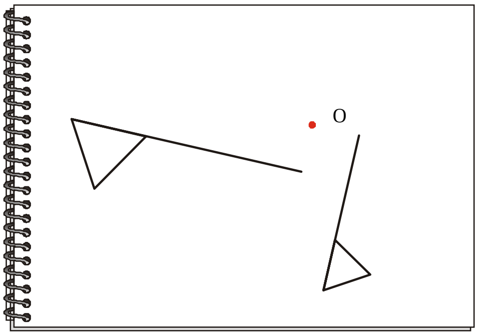




Você acha que está certo ou errado? Explique por quê.

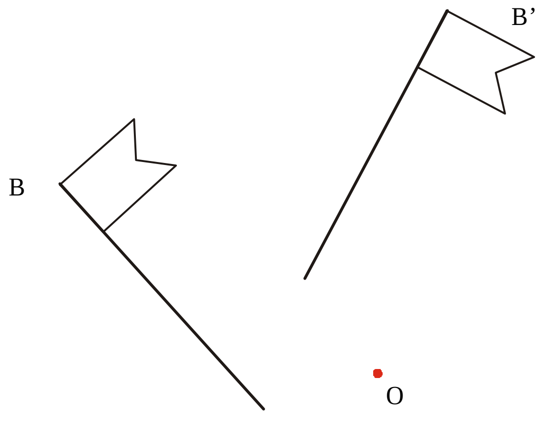


5. Um menino desenhou a imagem da rotação da bandeira à esquerda. A rotação é de 90^o no sentido anti-horário e o centro de rotação é o ponto O. Depois que ele acabou seu desenho, a bandeira e sua imagem ficaram assim:



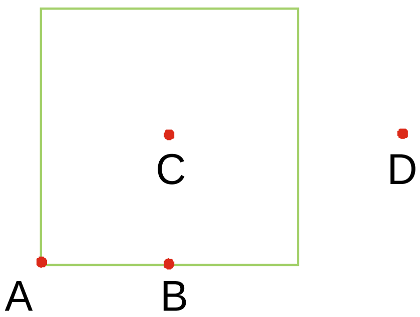
Você tem alguma crítica a fazer ao trabalho do menino? Explique.

6. Na figura abaixo, a bandeira B’ é a imagem da bandeira B por uma rotação ao redor de O. Qual foi o sentido da rotação ?______________________ De quantos graus foi a rotação? ________



7. No desenho abaixo temos o vértice A de um quadrado e o seu centro O. Usando rotação, ache os demais vértices e desenhe o quadrado.

8. Uma menina fez a rotação do quadrado abaixo e desenhou a imagem na mesma posição que estava o quadrado original.



Você acha que:

a) a rotação pode ter sido de 90^o ?____________ Se você acha isso, qual dos pontos acima foi centro de rotação?___________

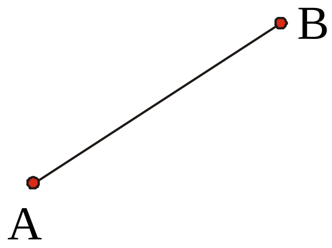
b) a rotação pode ter sido de 180^o ?____________ Se sim, qual foi o centro de rotação?______

c) a rotação pode ter sido de 360^o ? ____________Se sim, qual foi o centro de rotação?___________________________

FOLHA 1 – SESSÃO 3

Nome:____

1. O desenho ao lado mostra o segmento AB. Dobrando o papel, faça os pontos A e B coincidirem. Alise bem a dobra. Abra a folha de papel e desenhe a reta representada pelo vinco. Essa reta é perpendicular ao segmento AB e passa pelo seu ponto médio. Ela é chamada <u>mediatriz</u> do segmento AB.

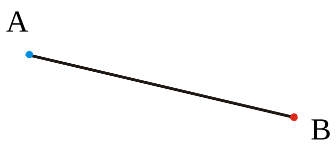


2. Escolha um ponto dessa reta. Compare as distâncias desse ponto até as extremidades do segmento. Elas são iguais ou diferentes ? ________________________________. Escolha outro ponto dessa reta e compare novamente as distâncias. Qual é a sua conclusão?____ Se você pegar um outro ponto da mediatriz e comparar as distâncias, o que você acha que irá acontecer? __________________________

3. O que você fez para comparar as distâncias?________________________________

____

4. Desenhe a mediatriz do segmento de reta representado ao lado. Diga como você fez para desenhar essa mediatriz.

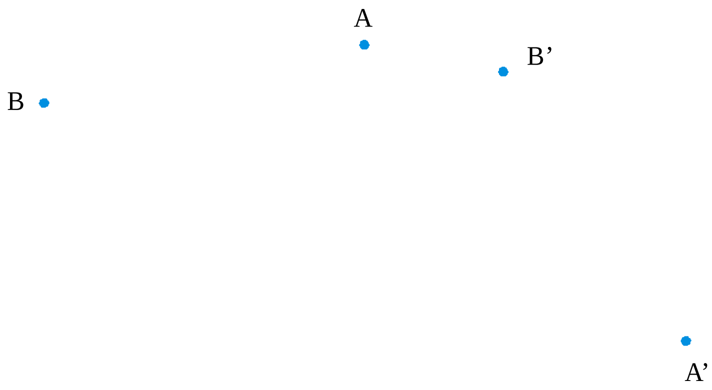


5. O ponto A pode ser levado até o ponto A’, por meio de diferentes rotações. Desenhe três pontos que poderiam servir como centros dessas rotações. Chame esses pontos de P, Q e R.

De quantos graus é a rotação que tem P como centro?_____________

Qual é o sentido dessa rotação?________________________

6. Desenhe a reta que contém os centros de rotação que levam A em A’; em seguida, desenhe a reta contendo os centros de rotação que levam B em B’.

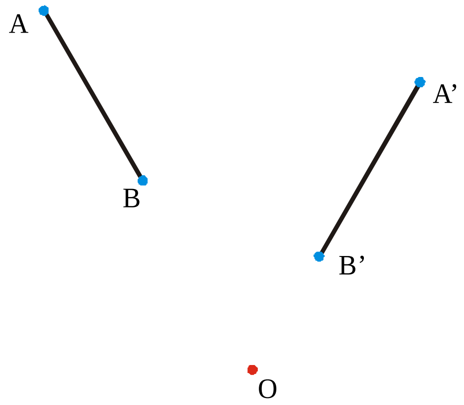


As duas retas que você desenhou cruzam-se num único ponto. O que você pode dizer a respeito desse ponto?____

FOLHA 2 – SESSÃO 3

Nome:____

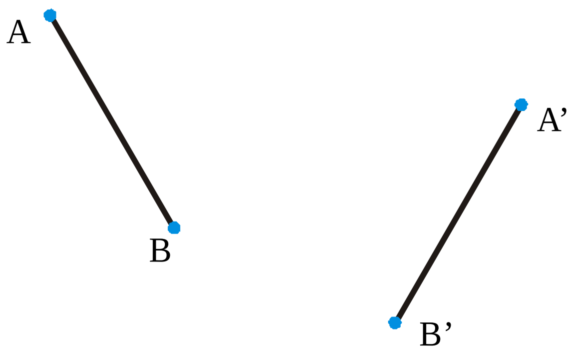
1. Alguém olhou a figura abaixo e disse incorretamente que o ponto O é o centro da rotação que leva o segmento AB no segmento A’B’.



Explique por que O não é o centro de rotação.

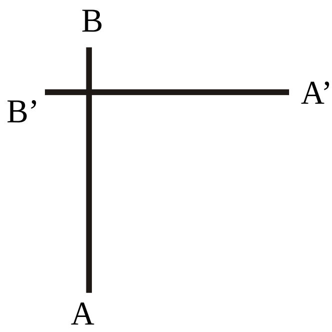
____

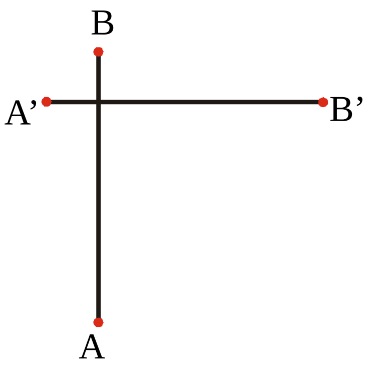
2. Os segmentos estão desenhados novamente para você poder achar o centro da rotação.



Qual é o sentido e o ângulo de rotação?____________________________________

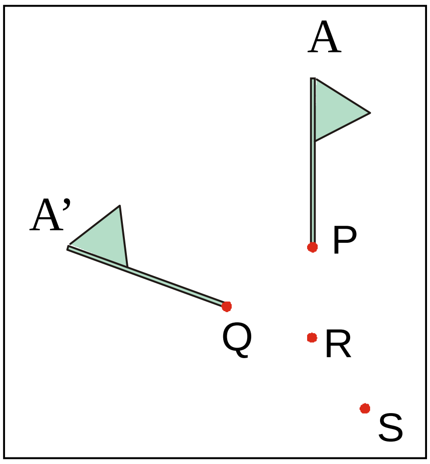
3. No desenho ao lado temos o segmento AB e sua imagem A'B' por uma rotação. Assinale o centro da rotação. De quantos graus é a rotação?_________ Qual é o sentido da rotação?________________________

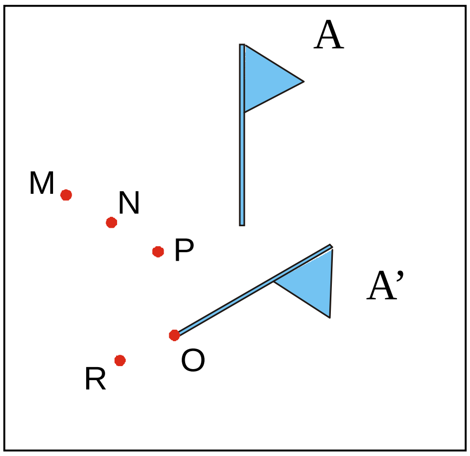




4. A'B' é a imagem de AB por uma rotação. Assinale o centro da rotação. De quantos graus é a rotação? _________ Qual é o sentido da rotação?__________________

5. Diga qual dos pontos vermelhos é o centro da rotação da bandeira A, com imagem A', nas duas situações a seguir:





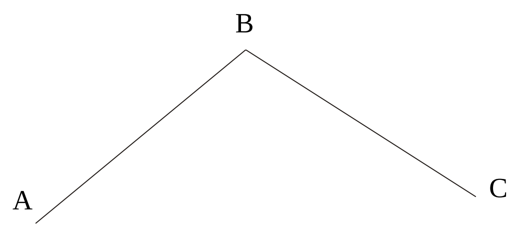
Resposta: ponto ______

Resposta: ponto ______

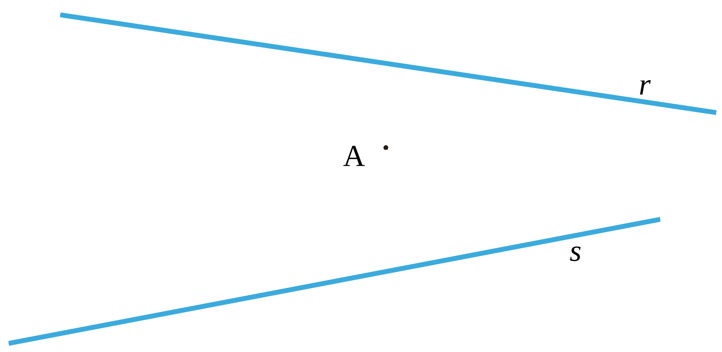
FOLHA 3 – SESSÃO 3

Nome:____

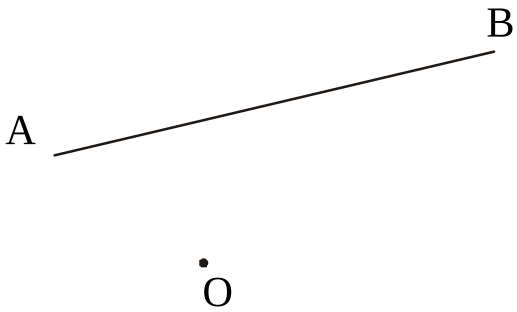
1. No desenho abaixo estão representados dois lados consecutivos de um pentágono regular ABCDE. Termine de desenhar o pentágono usando rotação.



2. O desenho a seguir mostra uma casa (A) entre dois rios (retas *r* e *s*). O sr. Paulo, dono do terreno, quer construir uma estrada reta que começa num rio, passa pela casa e termina no outro rio. Além disso, ele quer que a casa fique bem no meio da estrada. Faça o desenho dessa estrada.



3. Na rotação de 180º (qualquer sentido), a figura e sua imagem são simétricas em relação ao centro de rotação. Desenhe o segmento CD, simétrico do segmento AB em relação ao ponto O, dados abaixo. Considere C a imagem de A e D a imagem de B.



4. Desenhe os segmentos AD e BC. Diga qual é a espécie do quadrilátero ABCD (trapézio, paralelogramo, losango, retângulo ou quadrado)

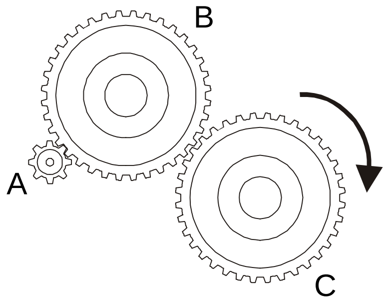
Dica – considere as seguintes propriedades dos quadriláteros:

- trapézios: dois lados paralelos
- paralelogramos: lados opostos paralelos
- losangos: lados congruentes (mesma medida)
- retângulos: ângulos internos congruentes (mesma medida)

ANEXO 4 – PÓS-TESTE

Nome:____ Tempo: 1h 30min

Data: 8/11/2 000 Turma (cor da pasta):____________________________



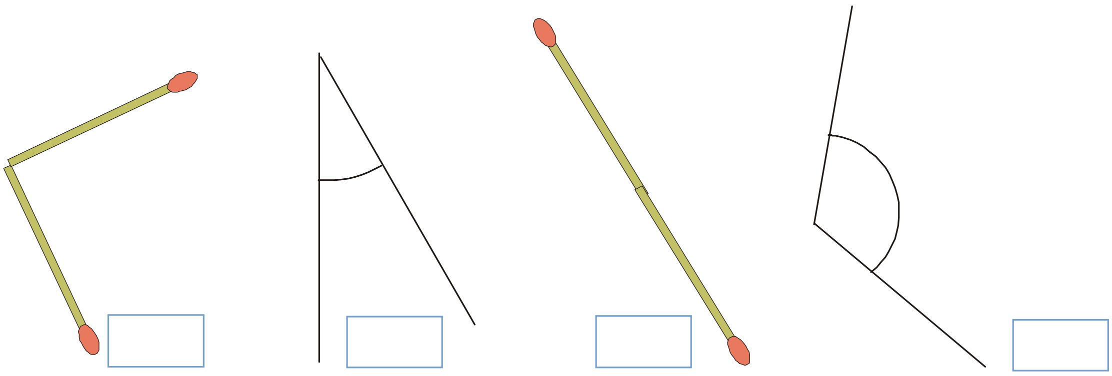
1. Coloque flechas mostrando os sentidos em que giram as engrenagens A e B.

2. Complete: A engrenagem C está girando no sentido

3. Em que sentido gira a engrenagem B?

   Resposta: Ela gira no sentido

4. Os ângulos abaixo são formados por palitos ou segmentos de reta. Escreva a medida de cada um deles no quadro mais próximo.

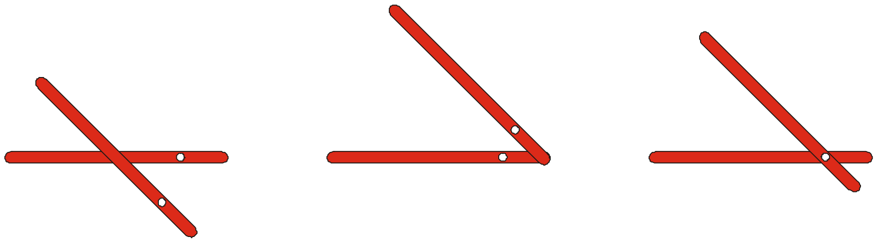


Como você fez para medir os ângulos?

5. Um lápis estava na posição mostrada no desenho à esquerda. O lápis foi girado no sentido anti-horário, ficando na posição indicada no desenho abaixo à direita.

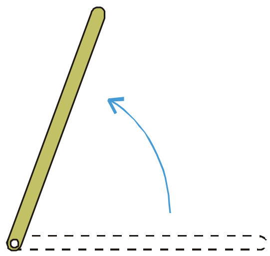
De quantos graus foi o giro do lápis?

6. No desenho ao lado há dois palitos iguais, um sobre o outro. O palito de cima gira um certo ângulo ao redor do furo. Escolha, marcando com um X entre os parênteses, a figura que mostra os dois palitos após o movimento.



( ) ( ) ( )

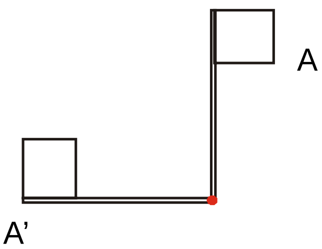
7. Um palito de sorvete tem um furo numa ponta. Ele girou em volta desse furo, conforme mostra o desenho abaixo.



De quantos graus foi o giro?

Em que sentido se deu o giro?

8. O desenho abaixo mostra duas bandeiras iguais. Por meio de alguma rotação, a bandeira A coincide com a bandeira A'.
Descreva essa rotação dizendo qual é o seu



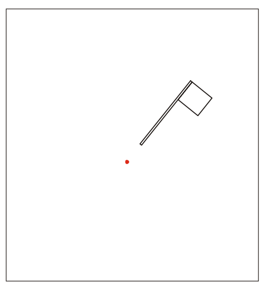
sentido

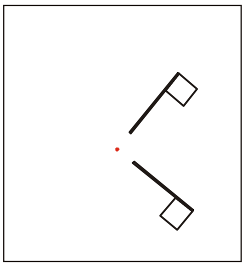
ângulo

centro de rotação

Complete: A bandeira A' é a da bandeira A.

9. Seis crianças receberam uma folha com o mesmo desenho ao lado. A professora pediu que todas as crianças desenhassem a imagem da bandeira, obtida pela rotação de 90^{o} no sentido anti-horário, ao redor do ponto. Descubra os erros cometidos e diga que erros foram esses.

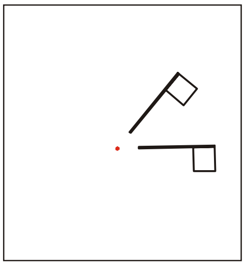




Carla

Acertou ☐ Errou ☐

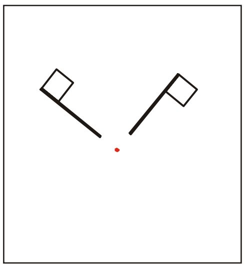
Se errou, explique qual foi o erro:



Rodrigo

Acertou ☐ Errou ☐

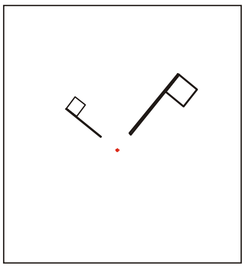
Se errou, explique qual foi o erro:



Juliana

Acertou ☐ Errou ☐

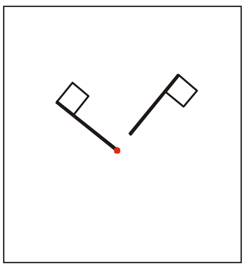
Se errou, explique qual foi o erro:



Denise

Acertou ☐ Errou ☐

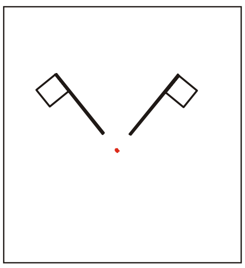
Se errou, explique qual foi o erro:



Lucas

Acertou ☐ Errou ☐

Se errou, explique qual foi o erro:



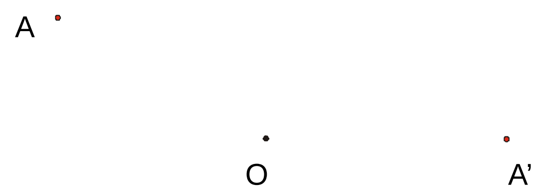
Alex

Acertou ☐ Errou ☐

Se errou, explique qual foi o erro:

ANEXO 4 – PÓS-TESTE

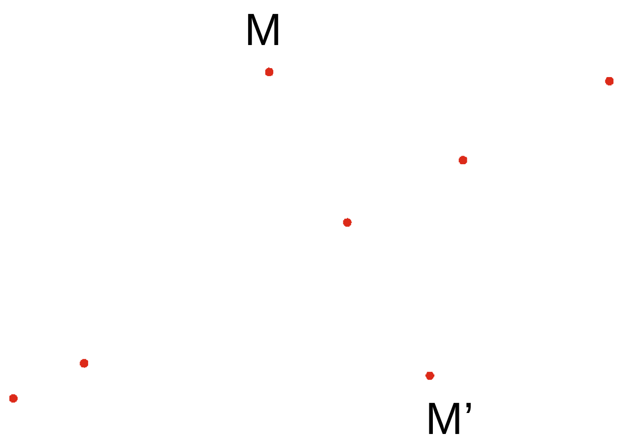
10. No desenho abaixo, o ponto A’ é a imagem do ponto A, na rotação em torno do ponto O.



De quantos graus foi a rotação?

Qual foi o sentido da rotação?

11. O ponto M’ é imagem do ponto M, numa rotação horária de 60^o, conforme indicado na ilustração abaixo. Faça um círculo em volta do ponto que você acha que foi o centro dessa rotação.

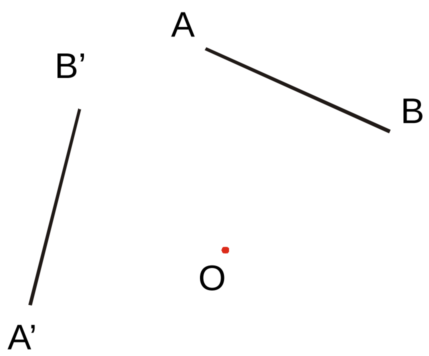


12. Dados os pontos A e O, desenhe a imagem de A na rotação de 80^o no sentido horário ao redor de O.

13. No desenho ao lado, o segmento A’B’ é a imagem do segmento AB, na rotação ao redor do ponto O. Diga qual é

a) o sentido da rotação

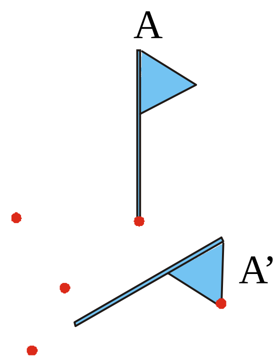
b) o ângulo de rotação



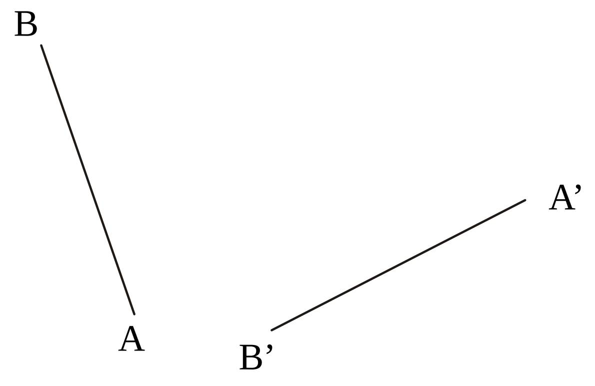
14. No desenho abaixo, o ponto A pode ser levado ao ponto A’ por intermédio de uma rotação. Desenhe um ponto O que poderia servir como centro de rotação.

Escreva como você achou o ponto O e diga de quantos graus é essa rotação.

15. No desenho ao lado, a bandeira A’ é a imagem da bandeira A por uma rotação. Há também cinco pontos vermelhos. Faça um círculo ao redor do ponto que é o centro dessa rotação. Explique, no quadro abaixo, como você escolheu o ponto.

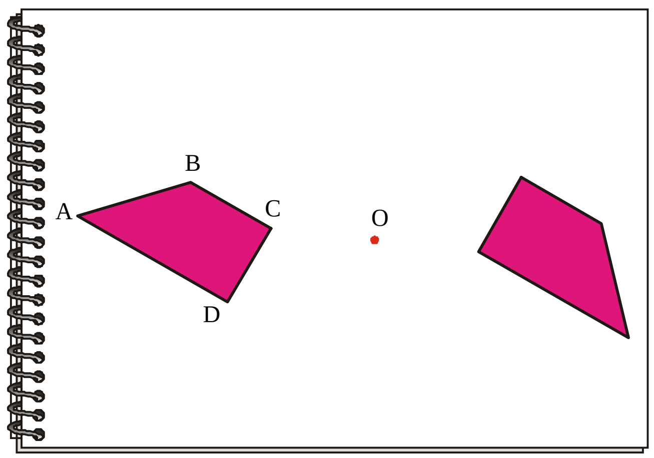


16. Localize o centro da rotação que faz o segmento A'B' ser a imagem do segmento AB, no desenho abaixo.



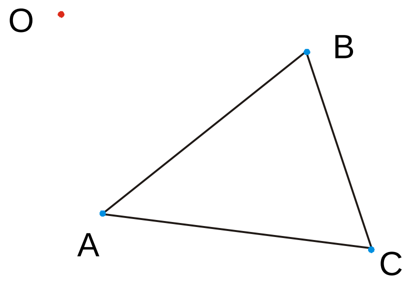
Explique como você fez para achar o centro de rotação. Diga também qual é o ângulo da rotação.

17. Luciana desenhou no seu caderno a imagem da rotação de 180^o de um quadrilátero ABCD ao redor do ponto O. Observe o desenho no seu caderno e diga se ela fez corretamente a rotação. Caso ela tenha errado, diga qual foi ou quais foram os seus erros.



Escreva aqui seus comentários.

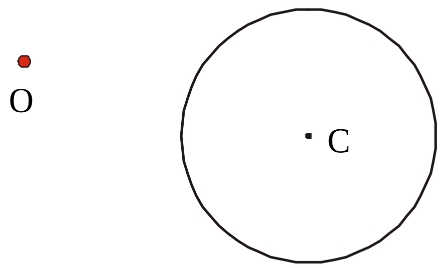
18. No desenho abaixo está representado o triângulo ABC e um ponto O. Desenhe o triângulo A'B'C', imagem do triângulo ABC na rotação de 120^o ao redor do ponto O no sentido horário. Faça seu desenho de forma que A'seja imagem de A, B' seja imagem de B e C', a imagem de C.



19. Coloque V ou F entre parênteses, conforme a afirmação seja verdadeira ou falsa. As afirmações referem-se à rotação acima.

a) A distância OB é igual à distância OB'. ( )
b) A distância OB é igual à distância OA. ( )
c) A distância AB é igual à distância A'B'. ( )
d) A distância OA é diferente da distância OA´. ( )
e) O ângulo AÔA' é congruente ao ângulo BÔB'. ( )
f) O ângulo BÂC não é congruente ao ângulo B'Â'C´. ( )
g) Se o triângulo ABC girar 120^o ao redor de O no sentido horário, então irá coincidir com o triângulo A'B'C'. ( )

20. Desenhe a imagem da circunferência abaixo, na rotação de 70^o no sentido horário ao redor do ponto O. Note que o ponto C é o centro da circunferência.



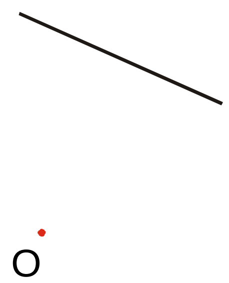
21. Os quadrados ABCD e MNPQ sofrem ambos rotações de 90^o ao redor de um ponto vermelho (pontos A e O, respectivamente), no sentido anti-horário. Desenhe a imagem de cada um deles.

Que instrumentos você usou para desenhar as imagens?

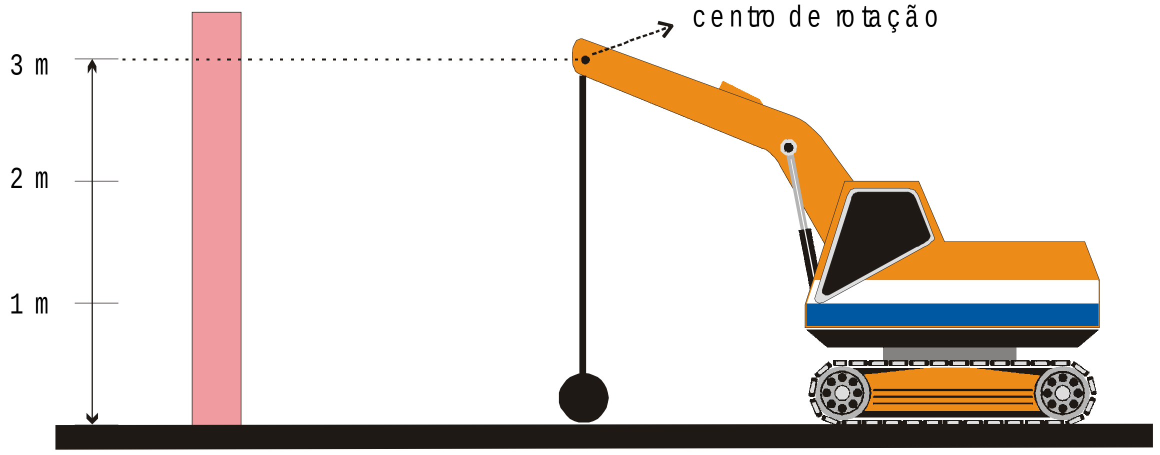
Que espécie de figura forma o quadrado ABCD junto com sua imagem A'B'C'D' ?

Como se chama a figura formada pelo quadrado MNPQ e pela sua imagem M'N'P'Q' ?

22. No desenho abaixo é dado um lado de um hexágono regular e o seu centro O. Usando rotações ao redor desse centro, termine de desenhar o hexágono.



23. Um guindaste usado para demolição tem uma bola de aço ligada por um tubo rígido a um eixo de rotação motorizado, conforme mostra a figura abaixo. Ele é capaz de fazer a bola dar uma rotação de até 70^o.



Conforme mostra a figura, a bola fica rente ao chão e gira em torno de um ponto situado 3 metros acima do chão.
Para derrubar uma parede, o operador aproximou a máquina de forma a dar a rotação máxima na bola, atingindo a parede em seu ponto mais alto.
Faça um cálculo aproximado da altura desse primeiro impacto.
O valor que você encontrou é:

ANEXO 5 - TRANSPEL