Marly De Nardi Ferraz Nunes

SEQÜÊNCIAS NUMÉRICAS: UM ESTUDO DA CONVERGÊNCIA ATRAVÉS DE ATIVIDADES

Mestrado em Educação Matemática

PUC — SP
São Paulo
2001

Marly De Nardi Ferraz Nunes

SEQÜÊNCIAS NUMÉRICAS:

UM ESTUDO DA CONVERGÊNCIA

ATRAVÉS DE ATIVIDADES

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, sob a orientação do Professor Doutor Benedito Antonio da Silva.

PUC — SP
São Paulo
2001

BANCA EXAMINADORA

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação por processos fotocopiadores ou eletrônicos.

Assinatura: **Local e Data:**

RESUMO

Este trabalho relata uma pesquisa realizada por meio de atividades que privilegiam a ação dos estudantes.

O ensino e a aprendizagem dos conceitos relacionados com limites e infinito têm se mostrado árduos e, muitas vezes, com resultados insatisfatórios. Aline Robert realizou, na França, uma pesquisa com mais de 1.300 estudantes sobre a aquisição do conceito de convergência de seqüências numéricas. A pesquisadora concluiu que a aprendizagem seria mais efetiva se o ensino desse conceito fosse conduzido através de atividades realizadas pelos alunos.

Inspirados nessa pesquisa, e baseados na teoria construtivista de Piaget, desenvolvemos um trabalho de atividades com alunos de um curso de licenciatura em matemática, que não haviam ainda sido introduzidos no estudo dos limites e do cálculo infinitesimal. O objetivo desse trabalho é propiciar aos alunos a apropriação de conceitos relacionados com a convergência de seqüências.

Utilizando-nos dos princípios da Engenharia Didática, elaboramos e aplicamos uma seqüência composta de 10 atividades e um pós-teste. Nessas atividades foram trabalhados, através de problemas, os conceitos relacionados com seqüências numéricas e convergência.

A análise dos resultados nos permitiu concluir que o procedimento empregado possibilitou, em geral, o progresso do conhecimento dos alunos, e em particular a aquisição, pela maioria dos estudantes, de noções articuladas ao conceito de convergência de seqüências numéricas.

Essa experiência representou uma ruptura de nossa prática pedagógica tradicional, em favor de uma nova dinâmica, que exigiu de nós e dos alunos uma mudança de postura.

Dentre as conclusões, foram levantadas questões que poderão ser objeto de futuras pesquisas.

ABSTRACT

This study discribes research performed with the help of activities that place great emphasis upon the student's actions.

Teaching and learning the concepts connected with limits and infinite has proved a hard task, often with unsatisfactory results. In France, Aline Robert has done research with over 1.300 students on the acquisition of the concept of convergence of numerical sequences. The same researcher has concluded that the learning process would be more effective if this concept was taught by means of activities conducted by the students themselves.

Inspired by her investigations and also based on Piaget's constructivist theory, we carried out activity work with students from a Faculty of Mathematics, who had still not been introduced to the studies of limits and infinitesimal calculus. The aim of our work was to enable the students to better assimilate concepts related to the convergence of sequences.

Based on principles of Didactical Engineering, we prepared and applied a sequence composed of ten activities and one post-test. During these activities we utilized problems to work on the concepts related to numerical sequences and convergence.

From analysis of the results we concluded that the procedure described here promoted, in general, an increase in knowledge of the students and, in particular, the acquisition, by most students, of notions related to the concept of convergence of numerical sequences.

This experience represented a rupture of our traditional pedagogical practices in favor of a new dynamics, which required of ourselves and of the students a change in posture.

Among the conclusions are issues that can be the object of further studies.

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Doutor Benedito Antonio da Silva, que com extraordinária competência me orientou neste trabalho, por sua dedicação, disponibilidade e entusiasmo.

À Professora Doutora Maria Cristina S. de Albuquerque Maranhão e ao Professor Doutor José Luiz Magalhães de Freitas, que gentilmente aceitaram fazer parte da banca examinadora e que me forneceram valiosas sugestões para este trabalho.

A todos os professores e funcionários do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC – SP, que cooperaram para que este trabalho fosse realizado.

À Direção do Centro UNISAL de Lorena, pelo estímulo e colaboração prestados.

Aos meus alunos do 2º ano da turma de 2000 do curso de Ciências e Matemática do Centro UNISAL de Lorena, pela participação e envolvimento demonstrados em todas as atividades de nossa seqüência didática.

Ao meu amigo Ronaldo Nogueira Rodrigues, companheiro de jornada, e a todos os colegas do curso de Ciências e Matemática, que me auxiliaram com seu interesse e sua ajuda prestada de várias formas.

À minha amiga Márcia Benedita Torres, que com seus conhecimentos de informática, participou com dedicação e extrema competência na elaboração gráfica deste trabalho.

À minha amiga Sônia Maria Nunes Zuppi, que com seus sólidos conhecimentos da língua francesa, prestou-me decisiva ajuda em minhas pesquisas, com paciência e boa vontade.

Ao meu marido, companheiro de todas as horas, e a toda a minha família, pelo carinho que sempre me dispensaram.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

Esta dissertação resulta de uma pesquisa que teve por objetivo propiciar aos alunos de um curso de licenciatura em matemática a apropriação de conceitos relacionados com a convergência de seqüências.

Na Análise Matemática, o trabalho que envolve o ensino e a aprendizagem dos conceitos relacionados com limites e infinito tem se mostrado árduo e, muitas vezes, com resultados insatisfatórios. Parece que existe, por parte dos alunos de matemática, um bloqueio em relação à aprendizagem dos conteúdos de cunho não algébrico e não geométrico.

Como resultado de uma pesquisa realizada na França sobre a aquisição do conceito de convergência de seqüências numéricas, Aline Robert concluiu que, se o ensino desse conceito fosse conduzido através de atividades, a aprendizagem deveria ser mais efetiva. Inspirados então na teoria construtivista de Piaget e nesse trabalho de Aline Robert, resolvemos realizar uma experiência com seqüências numéricas, trabalhando os conceitos através de atividades. Escolhemos trabalhar com alunos que não haviam sido ainda introduzidos no estudo dos limites e do cálculo infinitesimal.

Este trabalho é o relato dessa experiência.

O Capítulo I, Problemática, expõe a gênese e os objetivos da pesquisa.

O Capítulo II, Fundamentação Teórica, é subdividido em duas sessões: Quadro Teórico Didático, onde é apresentado o referencial teórico didático no qual a pesquisa se apóia; e Quadro Teórico Matemático, que contém um referencial matemático sobre convergência de seqüências numéricas.

O Capítulo III, Procedimentos Metodológicos, refere-se ao princípios da Engenharia Didática e apresenta as três etapas da pesquisa, que serão analisadas nos capítulos seguintes.

O Capítulo IV, Pré-Experimentação, apresenta o problema de sondagem que deu origem à seqüência didática. A aplicação e análise dos resultados do problema são expostos nesse capítulo.

O Capítulo V, A Seqüência Didática, é de todos o mais longo. Nele são apresentadas as 10 atividades da seqüência com seus objetivos, análises a priori, aplicações, análise dos resultados e o retorno dado a cada atividade.

O Capítulo VI, Pós-Teste, apresenta a terceira etapa da pesquisa: contém o último teste, com sua análise e conclusões.

O Capítulo VII, Conclusões, expõe os resultados da pesquisa em seu aspecto de aprendizagem de conteúdos matemáticos, e analisa a participação dos alunos nessa experiência. São levantadas também questões que poderão ser objeto de futuras pesquisas.

Os Capítulos VIII e IX contêm a Bibliografia e os Anexos. O Anexo I apresenta um questionário aplicado aos alunos após o Pós-teste. Através das respostas às questões, o leitor se informa sobre o perfil desses alunos e suas opiniões sobre o trabalho do qual participaram.

****

I — PROBLEMÁTICA

Por que a escolha do tema: estudo da convergência de seqüências numéricas?

Em 1982, na França, Aline Robert apresentou sua tese de doutorado em Didática da Matemática, versando sobre a aquisição da noção de convergência das seqüências numéricas no ensino superior.

Trata-se de um extraordinário trabalho no qual a autora expõe a gênese e os resultados de uma pesquisa que envolveu mais de 1300 estudantes, e que contou com a colaboração de vários professores- pesquisadores. Aline Robert propôs um questionário aos estudantes dos quatro anos universitários, incluindo as classes preparatórias. Esses alunos tinham já estudado as seqüências convergentes. Foram preparadas doze questões, a partir do levantamento dos erros mais comuns aos alunos de dez classes de diferentes professores. Dentre as questões, dez são exercícios clássicos, e duas exigem que o aluno explicite sua concepção de convergência de seqüências: ele deverá explicar a alunos muito jovens o que é uma seqüência convergente.

Com essa pesquisa, Aline Robert tenta responder às seguintes questões:

"O que quer dizer aquisição?

Por que estudar (mesmo parcialmente) o ensino de matemática no superior? Por que essa noção de convergência das seqüências numéricas?"(1)

Mas observa, quanto às conclusões de sua pesquisa, que as respostas por ela obtidas a essas perguntas estão longe de ser completas, e que poderão mesmo tomar a forma de novas questões.

A autora da pesquisa justifica a escolha do tema afirmando que a convergência de seqüências numéricas faz parte de um campo essencial nos fundamentos da análise matemática, campo que concerne às funções numéricas, aos limites de funções, à convergência, aos números reais. As

[1] [16] - pág. 307

seqüências ocupam aí um lugar particular, porque seu domínio de definição é o conjunto IN.

Ela quer saber por que, após alguns meses de cursos e de exercícios, a convergência de seqüências numéricas não é ainda compreendida por todos os estudantes; e não acha que a resposta provenha unicamente de fatores gerais, como por exemplo, a má qualidade da comunicação e das relações entre professores e alunos. Assim, procurou estudar a aquisição da noção de convergência, visando resgatar seus caracteres específicos. A partir dos resultados obtidos em sua pesquisa, esperava realizar um estudo ulterior, que seria de "testar" as diversas formas de ensino possíveis.

Justificando a metodologia de sua pesquisa, Aline Robert apresenta sua "hipótese de continuidade":

"Para conduzir meu estudo, fiz a hipótese de continuidade; admiti, com efeito, que no ensino superior ainda a "ação" (as resoluções de problemas) é (para resumir) "fonte e critério de saber". Dito de outro modo, é a colocação em funcionamento das noções que é o critério de sua aquisição — relativo ao nível de seu funcionamento.(2)

"Nós deliberadamente escolhemos observar os estudantes a resolver seus exercícios, pois pensamos que é nessas soluções de exercícios que se pode melhor formar a noção particular que nos interessa. É precisamente sobre essa hipótese que uma aprendizagem não é uma simples justaposição de conhecimentos, mas uma reorganização conceitual permanente que só tem efeito na e pela ação, que nós nos fundamentamos".(3)

"Enfim, se a formação da noção resulta da atividade específica sobre as seqüências no 1º ano universitário, ela deve se prolongar e se aprofundar com o desenvolvimento de outros conhecimentos e a reorganização que se segue".(4)

****

[2] [16] – pág. 308
[3] [17] – pág. 48
[4] [17] – pág. 49

Há muitos anos vimos lecionando diversas disciplinas em um curso noturno de licenciatura em matemática. Sempre verificamos que alunos preferem os cálculos matemáticos aos estudos teóricos, e que têm grande dificuldade em dar significado aos conceitos. Trabalhando com Análise Matemática no 4º ano, essas dificuldades tornam-se muito evidentes. Esses estudantes empenham-se em aprender definições, em demonstrar teoremas, mas não são muito bem sucedidos na aplicação da teoria: ao tentar resolver uma situação-problema, não sabem quais propriedades utilizar, ou utilizam-nas de forma inadequada. Isso parece mostrar que não conseguiram realmente apreender, construir o conceito. Conseqüentemente, tem sido sempre elevado o número de reprovações nas disciplinas cujos conteúdos não envolvem majoritariamente cálculos algébricos ou geométricos.

Essa é uma situação muito frustrante para os professores que desejam que seus alunos compreendam a matemática que tentam ensinar. Pensamos que existem meios de se tornar mais eficaz a aprendizagem de quaisquer conceitos. Mas a questão é: que meios são esses? como obtê-los? Estamos há tanto tempo acostumados com um estilo “bourbakiano” de lecionar, que se torna para nós muito difícil uma mudança radical na nossa forma de trabalho. O reconhecimento da necessidade dessa mudança é já um primeiro passo. A seguir, é preciso saber de que modo.

Quisemos realizar, com nossos alunos, uma experiência de trabalho em moldes não tradicionais. Como o campo da Análise é muito vasto, e é difícil analisar todos os conceitos envolvidos, escolhemos trabalhar com seqüências numéricas. Decidimos trabalhar o conceito de convergência de seqüências, a partir do final do 1º ano, utilizando sugestões de Aline Robert.

Analisando a persistência dos erros cometidos pelos alunos, a pesquisadora observa que:

“... a experiência mostra que os princípios da Análise não são simples para os estudantes, não apenas em razão do caráter não algorítmico das ferramentas postas à sua disposição, e da “riqueza” do conjunto dos reais. Assim, a noção de convergência das seqüências se confirma geratriz de numerosos “erros” que, por seu número, não desaparecem ao fim do

primeiro ano. É essa persistência dos erros — e não sua simples existência, talvez até necessária — que assinala, como em outros setores, a existência de dificuldades outras que "técnicas".(5)

O estudo minucioso da pesquisa de Aline Robert foi a gênese deste trabalho. A autora sugere que é necessário mais de um ano para se adquirir a noção de convergência. Pensamos, então, que poderia ser sua aprendizagem mais bem sucedida se pudesse ser iniciada logo nos primórdios de um curso sobre funções, uma vez que as seqüências são funções cujo domínio é o conjunto dos números naturais. E a pesquisadora afirma, não apenas sugere, que essa aprendizagem deve partir de ações. Decidimos então organizar um trabalho em forma de atividades, a ter início no 2º semestre de 1999, com uma classe de 1º ano, que estudava teoria de conjuntos e iria iniciar o estudo de funções, terminando as atividades com os alunos no 1º semestre do 2º ano.

Nossa pesquisa articula-se ao redor de uma questão sobre aprendizagem:

Desenvolvendo trabalhos através de atividades, será possível a alunos iniciantes de um curso de licenciatura em matemática a apropriação de conceitos relacionados com a convergência de seqüências?

Pretendemos investigar se alunos que nunca estudaram limites e aproximações serão capazes de construir os conceitos de:

- seqüência numérica;
- seqüência monótona;
- seqüência limitada;
- subseqüência;
- seqüência convergente.

---

5 [16] pág. 311

E também investigaremos se esses alunos estabelecerão relações (e quais) entre:

- monotonicidade e convergência;
- convergência e seqüência limitada;
- convergência de seqüência e subseqüência;
- seqüência convergente e a unicidade do limite;
- conjunto infinito e conjunto ilimitado;
- conjunto infinito e conjunto com n elementos.

Como o trabalho a que nos propusemos nesta pesquisa representa um rompimento com nossa prática educativa tradicional, é também nosso objetivo estudar o comportamento dos alunos — suas reações e sua receptividade a essa ruptura.

Queremos saber:

- como se irá processar a adaptação dos alunos a um sistema de trabalho didático diferente daquele ao qual estão habituados;
- se os alunos considerarão válida a experiência;
- se os alunos que comumente apresentam desempenho bom ou ótimo no ensino tradicional obterão resultado análogo ao trabalhar com atividades; e a mesma indagação relativamente ao desempenho dos alunos que costumam apresentar dificuldades na aprendizagem de conteúdos.

Esta última questão está ligada a duas variáveis fundamentais do processo de preparação prévia por que passa o conteúdo a ser analisado: o tempo didático e o tempo de aprendizagem.

Segundo Pais [(6)]:

“ O tempo didático é aquele marcado nos programas escolares e nos livros didáticos em cumprimento a uma exigência legal. Ele prevê um caráter cumulativo e irreversível para o saber. Isso implica o pressuposto de que seja possível de alguma forma ‘enquadrar’ o saber num determinado espaço de tempo. (...)

O tempo de aprendizagem é aquele que esta mais vinculado com rupturas e conflitos do conhecimento, exigindo uma permanente

[6] [15] pág. 31

reorganização de informações, e que caracteriza toda a complexidade do ato de aprender. É o tempo necessário para o aluno superar os bloqueios e atingir uma nova posição de equilíbrio. Trata-se de um tempo que não é seqüencial e nem pode ser linear na medida em que é sempre necessário retomaras antigas concepções para poder transformá-las. Cada sujeito tem o seu próprio tempo de aprendizagem."

De acordo com o autor, a superação didática da distância entre esses dois tempos passa por uma retomada constante das noções já estudadas, nas mais variadas situações, sempre buscando novos níveis de formalização dos conceitos envolvidos.

Como o tempo didático nem sempre coincide com o tempo de aprendizagem, neste trabalho pretendemos analisar a diferença entre esses dois tempos.

****

II — FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

QUADRO TEÓRICO DIDÁTICO

Este trabalho se apóia no referencial teórico oferecido:

- pelas pesquisas de Aline Robert sobre a convergência de seqüências;
- pelo tratamento dado aos erros cometidos pelos alunos, segundo a teoria de Brousseau;
- pelo estudo de alguns dos obstáculos elencados por Anka Sierpinska, em sua análise da construção do conceito de limite;
- e por certos elementos contidos na relação professor-aluno-saber, conhecida por Contrato Didático.

Nesta pesquisa seguimos a linha construtivista, que preconiza a ação do aluno, através da resolução de problemas, como o principal fator para a construção do conhecimento.

Com efeito, Aline Robert afirma que:

"... nós pensamos, seguindo Piaget e seus discípulos, que a aprendizagem de novos conhecimentos corresponde — tanto no ensino superior como no ensino secundário e no primário — a uma modificação do conjunto das aquisições anteriores que é o resultado de elaborações (mentais) do sujeito; essas "construções" resultam dos objetos matemáticos, da atividade do sujeito sobre esses objetos e das outras pessoas engajadas com o sujeito na aprendizagem, e elas têm por resultado novas atividades do sujeito. Os "objetos matemáticos" designam aqui — em nossa concepção própria — aquilo que substitui o "mundo dos objetos materiais" que era para Piaget o suporte da construção das primeiras estruturas lógico-matemáticas da criança; eles têm um papel de "significados" na construção dos conhecimentos."(1)

[1] [17] pág. 46-47

Nas conclusões de sua pesquisa, a autora sugere que, para “enxotar” certas representações erradas, devem ser usadas seqüências didáticas bem escolhidas.

Aline Robert trabalhou particularmente sobre uma componente das concepções dos estudantes sobre a convergência de seqüências que ela chamou de “modelo expressado”. Mas esses modelos, embora possam ser postos em relação estreita com os procedimentos das diversas tarefas, não eram suficientes para explicar, em todos os problemas, a concepção que funcionou e que levou ao erro. Entre outras, foi essa dificuldade que levou a pesquisadora a se restringir, de início, a uma noção delimitada de convergência de seqüências numéricas.

Na pesquisa francesa foram observados quatro tipos de concepções de convergência:

— Modelos primitivos: descrições monótonas ou estacionárias de seqüências convergentes. Exemplos: “uma seqüência convergente é uma seqüência monótona limitada”, ou “uma seqüência cujos termos são os mesmos a partir de um certo termo”, ou “uma seqüência que não passa um certo número: seu limite”.

— Modelos dinâmicos: utilização de um verbo de evolução no tempo ou no espaço: “tende para”, ou “u_n se aproxima de seu limite”. Aline Robert chamou de “modelo dinâmico monótono” às expressões do tipo “seqüência convergente é uma seqüência que se aproxima crescendo de seu limite”.

— Modelos estáticos: tradução em língua natural da definição em (ε, IN), muitas vezes nem utilizando ε. Por exemplo: “todos os termos, a partir de um determinado termo, devem estar em uma vizinhança de L tão pequena quanto se queira”.

— Modelos mistos: utilização simultânea de expressão dinâmica e estática.

A pesquisadora aplicou seu questionário a estudantes do 1º ao 4º ano universitário, que já haviam estudado as seqüências convergentes. Os modelos acima apareceram nas definições apresentadas por aqueles alunos.

Em nossa pesquisa, não é solicitada a definição de seqüência convergente. Mesmo assim, desejamos verificar se esses modelos serão observados em nosso trabalho.

****

Bour [2] observa que é difícil isolar o conceito de seqüência da noção de seqüência convergente, na história da matemática. As seqüências aritmética e geométrica são usadas desde a antigüidade grega, e a seqüência de Fibonacci mencionada no século XIII. Mas sua utilização era ligada aos cálculos de aproximações. A convergência de seqüência só será estudada no século XVIII e início do século XIX, e assim mesmo na convergência de séries.

Não temos a intenção de apresentar aqui um estudo histórico da elaboração do conceito de convergência, mas é importante observar que as primeiras concepções registradas associam convergência com movimento e monotonicidade.

De acordo com Bour (1982), para Newton, a linguagem utilizada é a da cinemática. Newton não formulou o conceito de limite, somente se referiu às "últimas quantidades":

"... essas quantidades não são propriamente falando, (...) últimas quantidades, mas limites dos quais essas quantidades, decrescendo sem limite, se aproximam e que, embora se aproximando mais perto do que toda diferença dada, elas não podem nem ultrapassar e nem alcançar, antes que essas quantidades tenham diminuído indefinidamente."

Notamos, em Newton, a insistência com a monotonicidade e o dinamismo nas expressões: "quantidades decrescendo sem limite", e "nem ultrapassar e nem alcançar".

Também a monotonicidade e o movimento aparecem em D'Alembert, que na Enciclopédia Metódica (1784) dá a seguinte definição de <u>seqüência</u> ou <u>série</u>:

---

[2] [4] Anexo à tese de A.R.

"Se diz de uma ordem ou de uma progressão de quantidades que crescem ou decrescem seguindo alguma lei: quando a seqüência ou série vai sempre se aproximando mais e mais de alguma quantidade finita, e que, por conseqüência, os termos dessa série ou as quantidades das quais ela é composta, vão sempre diminuindo, a chamamos seqüência convergente, e se a continuamos ao infinito, ela se torna igual a essa quantidade."

Segundo Sierpinska[3], para Cauchy:

"Quando os valores sucessivamente atribuídos a uma mesma variável se aproximam indefinidamente de um valor fixo, de maneira a terminar por diferir tão pouco dele quanto se queira, este último é chamado o limite de todos os outros".

Como se pode observar, a definição de Cauchy apela fortemente para a idéia de movimento. O que é "aproximar-se indefinidamente"?...

Bour (1982), analisando a condição necessária de Cauchy para a convergência de séries, observa aí embutido o apelo à monotonicidade:

"... o termo geral x_n decresce indefinidamente sempre que n aumenta."

De acordo com Bour, para Cauchy isso significa que o termo geral u_n tende a zero, e lembra que Cauchy não estudou apenas as seqüências monótonas; mas comenta que a utilização do termo "decresce" não é acidental e nem independente da gênese da noção de convergência de séries.

Lembrando que a noção de função não era ainda precisa antes do fim do século XVIII, Bour assinala que o "modelo dinâmico monótono" parece predominar até o início do século XIX. Somente após um século é que vai se firmar o "modelo funcional".

****

[3] [19] pág. 49

Nesta pesquisa, foi dada uma especial atenção à análise dos erros cometidos pelos alunos. De acordo com a concepção construtivista, é fundamental o tratamento dado ao erro na aprendizagem.

Referindo-se à problemática do erro, Aline Robert diz que a história da matemática mostra que certos progressos decisivos só se fizeram depois que obstáculos sérios paralisaram os sábios; e muitas vezes, para que haja aprendizagem, é preciso que erros sejam cometidos, para que sejam em seguida superados.

De acordo com Brousseau (1983), o erro é a expressão ou a manifestação explícita de um conjunto de concepções espontâneas ou reconstruídas, integradas numa rede coerente de representações cognitivas, que se tornam um obstáculo à aquisição e dominação de novos conceitos. A superação desses obstáculos seria então o projeto do ensino, e o erro a passagem obrigatória.

Dentre os obstáculos identificados em didática, Brousseau distingue os de origem epistemológica.

Para o pesquisador, obstáculos epistemológicos são aqueles

" ... que tiveram um papel importante no desenvolvimento histórico dos conhecimentos e cuja rejeição precisou ser integrada explicitamente no saber transmitido".

Para Igliori[(4)]:

"Um obstáculo de origem epistemológica é verdadeiramente constitutivo do conhecimento, é aquele do qual não se pode escapar, e que se pode em princípio encontrar na história do conceito."

Igliori ressalta o ponto de vista de Michèle Artigue (1990) para quem "*o que fundamenta, de alguma maneira, o obstáculo epistemológico é mais a aparição e a resistência na história de certos conceitos, bem como a observação de concepções análogas entre os alunos, do que a constatação da resistência a estes conceitos entre os estudantes da atualidade*".

---

[4] [10] pág. 97

Na construção do conceito de convergência de seqüências, podemos então (de acordo com Bour) classificar a monotonicidade e a idéia de movimento como obstáculos epistemológicos. Outros, elencados por Sierpinska no estudo dos limites de funções, também se constituíram em obstáculos epistemológicos à apropriação do conceito de convergência.

A partir de um estudo do desenvolvimento histórico do conceito de limite, e da análise de uma experiência feita com alunos, a pesquisadora propõe uma lista de obstáculos relativos à noção de limite:

1. "Horror ao infinito".
2. Obstáculos ligados à noção de função.
3. Obstáculos geométricos.
4. Obstáculos lógicos.
5. O obstáculo do símbolo.

Neste trabalho somente usaremos os dois primeiros como ferramenta de análise dos resultados. Os demais obstáculos não se relacionam com o estudo das seqüências.

Para Sierpinska o primeiro obstáculo parece ser o mais importante.

1. "Horror ao infinito" —

Segundo a autora, a expressão deve-se a Georg Cantor (1932): "*O horror do infinito é uma forma de miopia que impede de ver o infinito atual, ainda que em sua forma superior esse infinito nos criou e nos mantém, e em suas formas secundárias transformadas ele se manifesta de todos os nossos lados e vai até o habitar nossos espíritos*."([5])

Como uma variante desse obstáculo, Sierpinska aponta aquele que consiste em associar a passagem ao limite a um movimento físico, a uma aproximação: "aproxima-se indefinidamente" ou "aproxima-se mais e mais".

[5] [19] pág 39

Em nossa prática didática, temos observado que freqüentemente os alunos confundem conjunto infinito com ilimitado, e também com um conjunto de n elementos. Nesta pesquisa, um de nossos objetivos é trabalhar essas diferenças.

2. Obstáculos ligados à noção de função —

De acordo com Sierpinska, dois aspectos desse obstáculo aparecem com muita freqüência no estudo das seqüências:

1º) Redução às funções monótonas: por muito tempo, na história da matemática, as concepções de limites só se aplicavam às funções monótonas.

Muitos alunos associam convergência com monotonicidade.

2º) Confundir a função com o conjunto de seus valores.

Segundo Sierpinska, "... *isso é particularmente difícil quando se fala das seqüências, pois se uma função é uma seqüência, a atenção está voltada antes de tudo para o conjunto de seus valores, os argumentos ficam na sombra. (...) É preciso torna r claro que, por exemplo, a seqüência (1, 1, 1, ...) tem um número infinito de termos e não só um termo, e que ela não é um conjunto onde 1 é o único elemento*".[6]

****

Neste trabalho, foi dada especial atenção a uma peculiar relação professor-aluno-saber que se convencionou chamar de contrato didático. Trata-se de uma relação, subordinada a regras, geralmente não explícitas que funcionam como cláusulas de um contrato.

De acordo com Silva, citando Brousseau (1986):

"Chama-se contrato didático o conjunto de comportamentos do professor que são esperados pelos alunos e o conjunto de comportamentos do

[6] [19] pág. 51

aluno que são esperados pelo professor... Esse contrato é o conjunto de regras que determinam, uma pequena parte explicitamente mas sobretudo implicitamente, o que cada parceiro da relação didática deverá gerir e aquilo que, de uma maneira ou de outra, ele terá de prestar conta perante o outro.”([7])

Torna-se evidente o contrato didático principalmente quando há uma ruptura, quando é transgredido por um dos parceiros da relação didática.

Durante a aplicação da seqüência didática, pretendemos romper com nossa prática educativa anterior. Um dos objetivos de nossa pesquisa é verificar os efeitos da ruptura do contrato didático nos resultados das atividades e também na análise da relação professor-aluno.

****

[7] [20] pág. 43

QUADRO TEÓRICO MATEMÁTICO

Segundo Bour, é difícil separar o conceito de seqüência convergente da noção de seqüência. Os dois conceitos costumam aparecer interligados. Como pretendemos desenvolver com os alunos um trabalho sobre a convergência de seqüências numéricas, será necessária uma abordagem dos conceitos diretamente a elas relacionados.

No decorrer desta pesquisa trabalharemos com os seguintes conceitos:

- Seqüência de números reais: é uma função $x : IN \to IR$

  $n \mapsto x_n$

  Notação: (x_n) ou $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$, onde os x_i são denominados termos da seqüência e x_n é chamado termo geral.

- Imagem da seqüência: é o conjunto dos termos da seqüência.

- Seqüência constante: é a seqüência cujos termos são todos iguais, isto é, $(k, k, k, \ldots)$.

- Seqüência crescente: se $i < j \Rightarrow x_i < x_j$, dizemos que a seqüência $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ é crescente.

- Seqüência decrescente: se $i < j \Rightarrow x_i > x_j$, dizemos que a seqüência $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ é decrescente.

  As seqüências constantes, as crescentes e as decrescentes são chamadas seqüências monótonas.

- Seqüência limitada: é a seqüência cujo conjunto-imagem é limitado, isto é, está contido em um intervalo fechado $[a, b]$.

  Se o conjunto-imagem de uma seqüência não é limitado, dizemos que a seqüência é não limitada ou ilimitada.

- Subseqüência: Dada uma seqüência (x_n), chama-se subseqüência de (x_n) uma restrição da função-seqüência a um subconjunto infinito e ordenado IN' de IN. Notação: (x_{n_i}), $n_i \in$ IN'.

- Seqüência Convergente: Uma seqüência (x_n) converge para um número real a se e só se todo intervalo aberto ($a - \varepsilon$, $a + \varepsilon$), para todo $\varepsilon > 0$, contém “quase todos” os termos da seqüência.

  “Quase todos” significa: todos, exceto um número infinito de termos.

  Se (x_n) converge para a, dizemos que a é o limite da seqüência (x_n), quando n tende a infinito e escrevemos: $\lim_{n \to \infty} x_n = a$ ou $\lim x_n = a$ ou $x_n \to a$ (lê-se x_n tende a a).

  Uma seqüência que não é convergente é chamada divergente.

O alvo central deste trabalho é construir o conceito de seqüência convergente e intuir algumas de suas características. Almejamos que os alunos formalizem os seguintes resultados (teoremas):

- Unicidade do limite. Se (x_n) é uma seqüência convergente, então seu limite é único.

- Toda seqüência convergente é limitada.
  A recíproca não é válida, como se pode observar no seguinte exemplo:
  (1, -1, 1, -1, 1, -1, ...), que é limitada mas não converge.

- Toda seqüência monótona e limitada é convergente.

- Se $x_n \to a$, então toda subseqüência de (x_n) também converge para a.
  A recíproca não é válida, como no exemplo: (1, -1, 1, -1, 1, -1, ...)
  Esta seqüência não converge, mas possui duas subseqüências convergentes
  (1, 1, 1, 1, ...), que converge para 1.
  (-1, -1, -1, -1, ...), que converge para –1.

****

III — PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Esse trabalho se apóia nos princípios da Engenharia Didática, termo empregado em pesquisas de Didática da Matemática, e que Michèle Artigue (1988) compara com o trabalho do engenheiro que, para realizar um projeto preciso, se apóia em conhecimentos científicos de seu domínio.

Ao tentar realizar esse projeto, o engenheiro pode constatar que ele não se aplica a todas as situações desejadas. Nesse caso, ele retoma o trabalho, reformula-o e o reaplica. Nesse processo, pode descobrir muitas indicações para tal reformulação, de modo a tornar o projeto mais exeqüível e eficiente.

De acordo com Machado (1)

"Na realidade pelo termo engenharia didática entende-se tanto uma metodologia de pesquisa específica quanto o que Douady (1993) tão bem explicitou como sendo:

> *... uma seqüência de aula(s) concebida(s), organizada(s) e articulada(s) no tempo, de forma coerente, por um professor-engenheiro para realizar um projeto de aprendizagem para uma certa população de alunos. No decurso das trocas entre professor e alunos, o projeto evolui sob as reações dos alunos e em função das escolhas e decisões do professor."*

Uma engenharia didática se compõe de quatro fases:

- <u>Análises preliminares</u>: aí são sondadas as concepções envolvidas; é nessa fase que são pesquisados os quadros teóricos que vão orientar o processo.

- <u>Concepção e análise a priori</u>: nessa fase são determinadas as variáveis pertinentes ao problema da pesquisa, e feitas algumas previsões sobre o desempenho do aluno.

- <u>Experimentação</u>: é nessa fase que é realizado o trabalho com os alunos escolhidos; é aí também que ocorre a institucionalização dos conceitos que foram trabalhados.

---

[1] [13] pág. 198

Segundo Freitas(2):

“ ... faz-se necessário uma fase de institucionalização do saber que deve ser conduzida pelo professor. Esta fase visa dar o ‘acabamento’ ao conhecimento elaborado pelo aluno ou mesmo trabalhar no sentido de descartar possíveis aspectos não valorizados na perspectiva do saber socialmente formalizado”.

- Análise a posteriori: é a análise dos resultados obtidos através da experimentação.

****

Nossa pesquisa foi iniciada com uma turma de 27 alunos no final do 2º semestre do 1º ano do Curso de Ciências e Matemática do Centro UNISAL — Lorena – SP, em 1999. O trabalho só foi concluído ao término do 1º semestre de 2000, com os alunos já no 2º ano.

O curso é anual, funcionando em período noturno, com aulas aos sábados no período da manhã. A turma é composta por alunos que, em sua maioria, pagam seu próprio estudo e vieram de escolas públicas. 10 deles terminaram o 2º grau a mais de dez anos. Quase todos (exceto 4) trabalham, com média semanal superior a 30 horas. Nove alunos já lecionam em escolas.

No quarto bimestre do 1º ano (1999) os alunos iniciaram o estudo das funções. Nessa ocasião foi introduzido o conceito de seqüência como um caso particular de função com domínio IN. Em 2000, demos prosseguimento ao estudo das funções. A turma continuou com 27 alunos, mas 10 destes eram novos no grupo, não tendo feito parte da turma inicial. Até o final das atividades, não tinha a classe ainda iniciado o estudo dos limites.

****

A pesquisa foi organizada da seguinte forma:

---

2 [9] pág. 76

- No final de 1999 elaboramos e aplicamos um problema de pesquisa visando à sondagem das concepções dos alunos em relação ao infinito.
- No 1º semestre de 2000 foi aplicada a seqüência didática, constando de dez atividades. Nessas atividades foram sendo trabalhados, sempre através de problemas, os conceitos de seqüências limitadas, monotonicidade, subseqüências e, finalmente, convergência. Após cada sessão, era realizada uma plenária para discutir os resultados. No final desta, eram institucionalizados os conceitos trabalhados.
- Encerradas as atividades foi aplicado um pós-teste.

Queremos observar que, durante o período de aplicação do problema de sondagem e das atividades, freqüentemente houve necessidade de entrevistarmos diversos alunos, para que nos explicassem melhor suas colocações. Os resultados dessas entrevistas muitas vezes serão citados no decorrer de nosso trabalho.

Na semana seguinte ao pós-teste, aplicamos um questionário, que foi respondido por quase todos os alunos (25). Este questionário foi elaborado com dois objetivos:

- caracterizar a clientela com a qual trabalhamos;
- procurar saber a opinião de cada aluno sobre o trabalho realizado.

Essas questões e a análise das respostas encontram-se no Anexo, no final desta obra.

****

As três etapas de nossa pesquisa serão analisadas detalhadamente nos capítulos seguintes. Contudo serão apresentados aqui alguns comentários sobre a seqüência didática.

A aplicação da seqüência didática foi iniciada em março de 2000. A fim de propiciar aos alunos a construção do conceito de sucessão convergente, elaboramos uma seqüência de dez atividades, para serem executadas individualmente. Em cada uma delas foi enfocado um tema objetivando o trabalho com determinada noção. Na sessão seguida à aplicação da atividade, o assunto era debatido e, nessa ocasião, alguns conceitos eram institucionalizados.

As sessões de aplicação das atividades tiveram duração média de trinta minutos em cada semana. O procedimento para cada atividade pouco variou de uma sessão para outra: objetivos, análise prévia, aplicação e análise dos resultados. E de acordo com esses resultados era preparada a atividade seguinte.

Queremos observar que nenhuma seqüência numérica apresentada em uma atividade da pesquisa se repetiu na seguinte, a não ser quando tal procedimento se mostrou necessário. E também tivemos o cuidado, quando de nosso trabalho em sala de aula, de não dar exemplos que depois fossem apresentados em futuras atividades.

Quisemos evitar que ocorresse o fenômeno que Brousseau (1986) denomina de "efeito Topázio", em que os alunos são levados a dar a resposta esperada pelo professor.

Segundo Silva(3):

"Esse nome provém da peça de teatro homônima, cuja primeira cena se passa em uma sala de um colégio interno. Seu protagonista, Topázio, faz um ditado a um aluno, que demonstra muita dificuldade em executar a tarefa. Ele não pode aceitar um excesso de erros grosseiros, mas também não deve dizer abertamente ao aluno qual é a ortografia correta. Começa, então, a sugerir-lhe a resposta, dissimulando-a sob códigos didáticos cada vez mais transparentes. Aqui e em outras situações de ensino, tais códigos evidenciam que "a resposta que o aluno deve dar já está determinada de antemão: o professor escolhe as questões às quais essa resposta pode ser dada"."

Seguindo a linha construtivista, que preconiza a ação do aluno, e de acordo com Aline Robert (que sugere a observação do aluno a resolver exercícios), durante as sessões de aplicação das atividades, procuramos não intervir no trabalho dos estudantes. Mas, algumas vezes, essa intervenção foi necessária.

Maranhão(4), referindo-se à dialética ferramenta-objeto (teoria desenvolvida por Régine Douady) aconselha:

"No decurso (...), o professor ou o pesquisador podem se dar conta de que a situação corre o risco de bloquear-se. Mesmo que o professor não

3 [20] pág. 55-56
4 [14] pág. 117-118

perceba isso a tempo e haja bloqueio, deve-se tomar uma decisão sobre o que fazer e, segundo a análise da situação, o professor pode explicitar algo, esclarecer certas noções aos alunos. Caso os alunos apresentem uma visão distorcida desses novos conhecimentos, pode até introduzir alguns. Deve-se escolher o momento e a forma de intervenção, sempre respeitando a liberdade dos alunos."

Desde o início da aplicação da seqüência didática, decidimos que a avaliação das atividades deveria ter um certo peso nas notas bimestrais dos alunos. Isso evitou o desinteresse que muitas vezes acompanha os trabalhos que "não valem nota". Esse descaso por parte de alguns alunos foi observado quando da aplicação do pós-teste, em 1999. Naquela ocasião, o trabalho não teve peso na média bimestral. Os alunos foram previamente informados a respeito desse critério; e alguns dentre eles não se empenharam em tentar resolver o problema proposto.

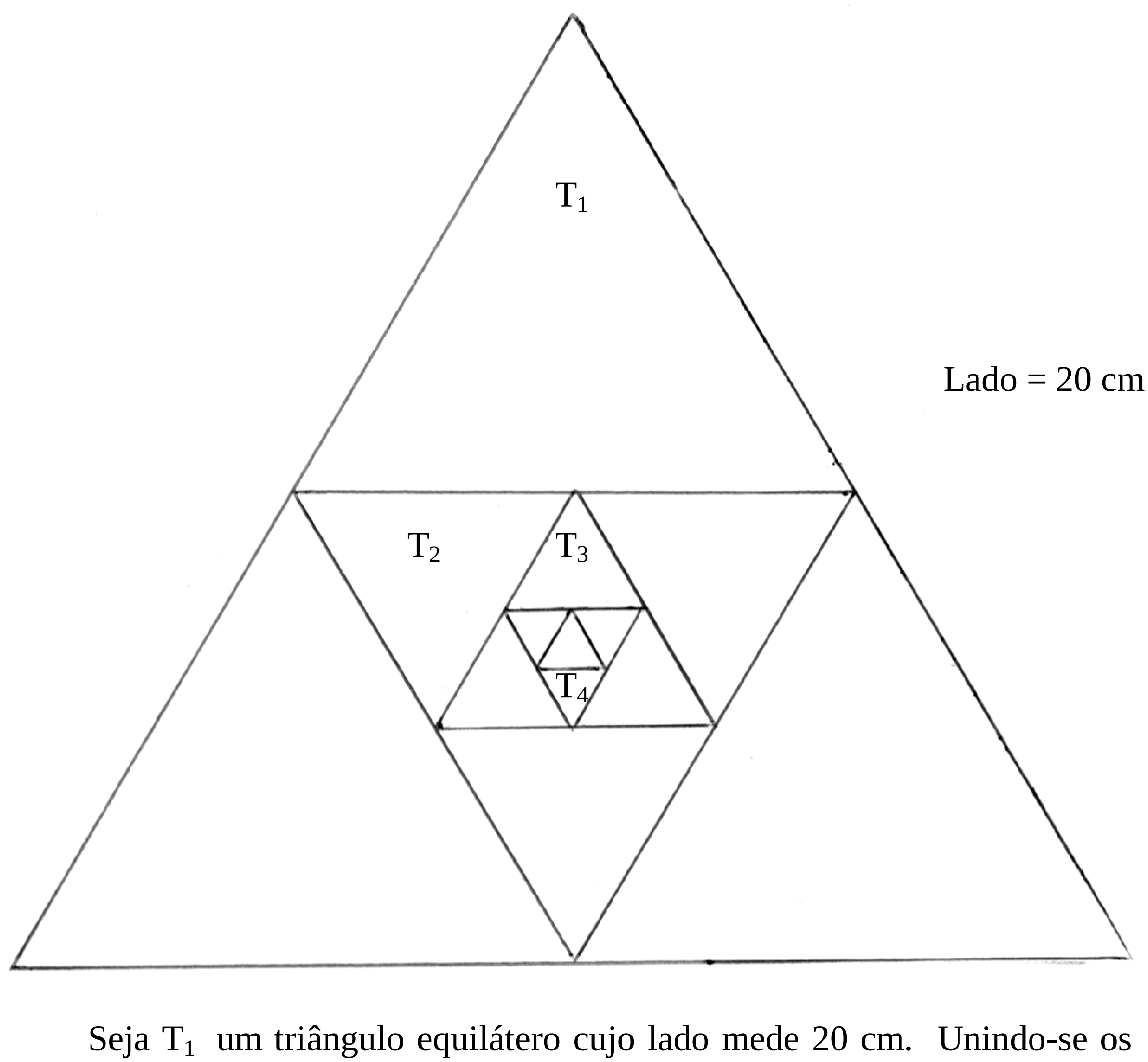
É importante observar novamente que, dentre os 27 alunos que participaram da aplicação da seqüência didática, há 10 que não estavam na turma do ano anterior. Estes não participaram do trabalho de introdução ao estudo das seqüências, realizado naquela ocasião.

****

IV — PRÉ-EXPERIMENTAÇÃO — PROBLEMA DE SONDAGEM

A pré-experimentação consta da atividade seguinte.

Foi dada a figura abaixo e elaboradas as questões:



Seja T_1 um triângulo equilátero cujo lado mede 20 cm. Unindo-se os pontos médios de seus lados, obtém-se um triângulo equilátero T_2. Unindo-se os pontos médios de T_2 obtém-se T_3, e assim sucessivamente. Considere a seqüência de triângulos T_1, T_2, T_3, ...

1) Calcule os perímetros de T_1, T_2, T_3 e T_4.

2) Calcule a soma dos perímetros dos quatro primeiros triângulos.
3) Calcule a soma dos perímetros dos seis primeiros.
4) Calcule a soma dos oito primeiros perímetros, dos nove, dos dez, dos onze e dos doze primeiros perímetros.
5) Quantos triângulos você acha necessários para atingir uma soma de perímetros igual a 120 cm? Justifique sua resposta.

Obs.: Perímetro de um polígono é a soma das medidas de seus lados.

Análise a priori:

Esta atividade tem por objetivo fazer uma sondagem das concepções dos alunos a respeito do infinito. Esses alunos não foram ainda introduzidos no estudo dos limites e aproximações.

As quatro primeiras questões foram elaboradas com o intuito de encaminhar o aluno à questão principal: a quinta, que tem por objetivo verificar sua percepção em relação à convergência da soma para 120 cm.

Poderão ocorrer dificuldades em relação ao desempenho dos alunos, tais como:

— Situação de apreensão do aluno em relação ao julgamento da professora. Por outro lado, como a avaliação não é levada em conta para a obtenção da média bimestral na disciplina, o aluno pode desinteressar-se em apresentar um bom desempenho.

— O aluno submete-se a uma avaliação de assunto não pertinente à série que está cursando, e que não foi explicado em sala de aula.

— A maioria dos alunos não estudou as progressões geométricas no ensino médio (já tínhamos este dado, em razão de nosso trabalho regular com a classe). Portanto esses alunos não haviam ainda efetuado uma soma infinita dos termos de uma P.G. convergente. Pensamos que estes terão maior dificuldade em relação à questão 5.

De acordo com essas colocações, não temos elementos suficientes para fazer previsões sobre acertos ou erros.

Aplicação:

A atividade foi aplicada em 16 de agosto de 1999 a 27 alunos do 1º ano, a menos de uma hora do término das aulas. Foram eles informados de que se tratava de uma pesquisa, e que os resultados dessa atividade não seriam levados em consideração para efeito da avaliação regular de seu rendimento no curso. Foi-lhes permitido o uso da calculadora.

Análise dos resultados:

Praticamente todos os alunos acertaram as quatro primeiras questões. Assim analisaremos apenas os resultados da questão 5.

Foram considerados corretos os trabalhos nos quais os alunos mostram perceber que a soma dos perímetros jamais atingirá 120 cm.

De acordo com os resultados apresentados, classificamos os alunos em 3 grupos, chamados G1, G2 e G3.

Grupo G1 — formado pelos alunos que acertaram o problema. Apenas 2 alunos perceberam que a soma dos perímetros não atinge os 120 cm.

Grupo G2 — constituído por 16 alunos que apresentaram, como resposta à questão 5, um determinado número de triângulos para obter soma 120 cm.

Esse grupo foi subdividido em dois outros:

G2A — formado por 10 alunos que formularam sua resposta baseando-se nas questões 1 a 4.

Esses alunos perceberam, de uma certa forma, que a soma se aproxima de 120 cm, e apresentaram um número de triângulos que julgaram conveniente. Posteriormente foram entrevistados em relação às suas respostas. As considerações a esse respeito estão apresentadas após a análise dos demais grupos.

G2B — grupo de 6 alunos que deram respostas desconectadas com o problema.

Por exemplo:
— 2 alunos responderam que seriam necessários 2 triângulos de 60 cm;
— outro sugeriu 4 triângulos de 30 cm;
— 2 alunos usaram regra de três simples;
— 1 aluno usou fórmula de P.A.;
— outro tentou chegar à resposta utilizando uma fórmula exponencial.

Obs.: O procedimento dos últimos quatro alunos citados ilustra bem um dos efeitos do "contrato didático". Muitos estudantes têm a convicção de que, em matemática, para todo problema existe uma fórmula resolutiva. Esses quatro alunos foram posteriormente entrevistados para que justificassem suas colocações; com poucas variações, as respostas coincidiram:

"Eu queria descobrir a fórmula para resolver a questão."

Grupo G3 — constituído por 9 alunos que nem chegaram à questão 5.

Parece que a pressa em sair mais cedo pode ter contribuído para um certo desinteresse em terminar o trabalho. Ilustrando: entre os nove classificados no grupo G3 estava um aluno considerado excelente por todos os professores dessa turma.

Na semana seguinte, foi pedido aos alunos dos grupos G2 e G3 que refizessem o exercício.

— Os alunos do grupo G2 deveriam refazer a questão 5. Teriam que somar todos os perímetros dos triângulos que julgaram necessários (quando da primeira aplicação do problema) para atingir a soma igual a 120 cm. Por exemplo: se o aluno havia respondido que seriam necessários 18 triângulos, ele deveria somar os 18 perímetros, e analisar a soma obtida.

— Os alunos que efetuaram cálculos com erros, ou com menos de cinco algarismos decimais, teriam que refazer seus cálculos.

— E aos alunos do grupo G3 foi pedido que terminassem o exercício.

Após a reaplicação do problema, houve um remanejamento dos alunos nos grupos, em função das modificações nas respostas:

— grupo G1 - passou de 2 a 9 alunos;
— grupo G2A - passou de 10 a 13 alunos;
— grupo G2B - diminuiu para 5 alunos;
— grupo G3 - nenhum aluno.

Na semana seguinte entrevistamos todos os alunos do grupo G2 (que apresentaram um número finito de triângulos) e também os alunos do grupo G3, que concluíram a atividade.

Observamos que muitos deles, embora tenham apresentado respostas numéricas (18, 20, 23, 30 triângulos, etc.), na entrevista disseram que esse valor era aproximado. E sete dentre estes mostraram perceber que o valor 120 cm nunca seria atingido.

"...na verdade, eu acho que a soma nunca vai chegar a 120 cm, mas esse valor (...) é o que eu acho mais próximo."

(depoimento de aluno)

Observa-se que existe, em diversos casos, uma acentuada discrepância entre o que pensam (segundo seus depoimentos) e o que escrevem. Alguns alunos têm muita dificuldade em colocar no papel suas idéias. Também é notável sua ansiedade em "dar a resposta certa" que é esperada pelo professor.

Essa atitude nos remete novamente à questão do "contrato didático": os alunos têm que "acertar", têm que satisfazer o professor. E é por isso que tentam, sem bem saber como, "descobrir" o número certo de triângulos necessários, embora nem sempre acreditem no resultado. Após terem refeito a atividade, mais quatro alunos tentaram chegar a uma fórmula. Questionados sobre esse procedimento, de um modo geral se explicaram dizendo:

"...eu achei que esta fórmula poderia servir, embora na verdade eu não veja muito sentido nisto."

Silva [1] enfatiza:

"Esse comportamento por parte dos alunos revela que existem regras vigentes, ainda que implícitas, completamente internalizadas por eles, regras essas que, quando aplicadas, conduzem a uma grande quantidade de erros dos alunos e a incoerências no tratamento desses erros pelos professores. Retomando a análise de Chevallard (1988), vejamos algumas dessas regras:

. sempre há uma resposta a uma questão matemática e o professor a conhece. Deve-se sempre dar uma resposta que eventualmente será corrigida;

. para resolver um problema é preciso encontrar os dados no seu enunciado. Nele devem constar todos os dados necessários e não deve haver nada de supérfluo;

. em matemática resolve-se um problema efetuando-se operações. A tarefa é encontrar a boa operação e efetuá-la corretamente. Certas palavras-chave contidas no enunciado permitem que se adivinhe qual é ela."

De fato, como a questão 5 é: "Quantos triângulos você acha necessários para atingir uma soma de perímetros igual a 120 cm?", os alunos inferem que deve existir esse número e que eles têm que descobri-lo.

Encerrando esta análise, parece oportuno considerar o uso, nem sempre adequado, das calculadoras. No caso do problema dado, o arredondamento das somas efetuadas pela calculadora "mascara" as aproximações, pois o número de dígitos é limitado.

Sierpinska[2] chama a atenção para esse fato:

"A maneira pela qual os alunos se servem das calculadoras é muito ingênua e mostra que a questão dos cálculos aproximados é completamente negligenciada no ensino. Não parece portanto inútil lembrar o valor formativo que pode ter a prática dos cálculos aproximados para o ensino dos inícios da Análise."

Após a discussão da atividade, nossa afirmação de que a soma com número infinito de parcelas não ultrapassa (e nem alcança) o número 120

---

[1] [20] pág. 51
[2] [19] pág. 58

causou estranheza a diversos alunos, conforme suas declarações. Tentando esclarecê-los, exemplificamos e discutimos as duas naturezas do infinito: o infinito potencial, como em IN, e o infinito atual, como no intervalo [a,b], com $a<b$.

****

Considerações:

Após a pré-experimentação, iniciamos no 1º ano de Matemática o estudo formal das funções. Como as seqüências de números reais são funções de IN em IR, achamos conveniente introduzir o tema como um caso particular dentro do assunto funções.

Nos dois meses seguintes, foram estudadas as noções introdutórias: conceito de função, representação, notações, domínio, imagem, funções monótonas e não monótonas, gráficos, raízes de funções reais.

Em novembro foram apresentados mais alguns exemplos e contraexemplos de funções. A seguir definimos seqüência como uma função de IN em IR. Foram apresentados diversos exemplos, chamando a atenção dos alunos para a notação $(x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...)$ mas de forma alguma nos referimos à convergência ou divergência.

Assim, o assunto foi abordado nas duas últimas questões (7 e 8) da 4ª prova bimestral, em 22 de novembro.

As duas questões são as apresentadas abaixo:

7) Complete as seguintes tabelas:

a)

n	x_n
1	1
2	4
3	7
4	10
5	
6	
⋮	⋮
n	
⋮	⋮

b)

n	x_n
1	1
2	4
3	9
4	
5	
⋮	⋮
n	
⋮	⋮

c)

n	1	2	3	4	5	....	n
x_n	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$			....	

d)

n	1	2	3	4	5		n	....
x_n	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4}$					....

e)

n	1	2	3	4	5	6	7	...	n	...
x_n	32	16	8	4				...		

f)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	....	n	....
x_n	2	3	5	7	11	13				....		

g)

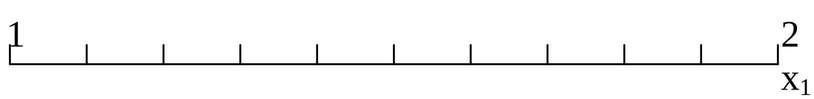
n	x_n
1	-1
2	$\frac{1}{2}$
3	$-\frac{1}{3}$
4	$\frac{1}{4}$
$\vdots$	$\vdots$
n	
$\vdots$	$\vdots$

h)

n	1	2	3	4	5	6	....	n	...
x_n	0	$\sqrt{5}$	0	$\sqrt{5}$	0	$\sqrt{5}$	....		

Assinale as seqüências monótonas e verifique de que tipos: crescentes, decrescentes ou constantes.

8) Considere a seqüência cujo termo geral é $x_n = \dfrac{n+1}{n}$



a) Represente, no segmento de reta acima, os 6 primeiros termos dessa seqüência.
b) Você acha que esse segmento de reta pode conter todos os termos da seqüência? Explique.

Resultados:

30 alunos fizeram a prova.

Questão 7 — 19 alunos praticamente nada fizeram;
— 9 alunos conseguiram acertar cerca de 50% da questão;
— 2 alunos acertaram todos os termos gerais.

Questão 8 — somente 4 alunos representaram corretamente os seis primeiros termos na reta (item a);
— somente 12 alunos responderam o item b, sendo que 8 deram resposta afirmativa, embora demonstrassem dificuldades em escrever as explicações.

Mesmo com o baixo envolvimento por parte dos alunos, esses resultados nos ofereceram subsídios para a elaboração e aplicação da seqüência didática.

****

V — A SEQÜÊNCIA DIDÁTICA

A seqüência didática é composta de 10 atividades, que foram aplicadas no primeiro semestre do 2º ano.

****

ATIVIDADE 1

Nosso objetivo, nesta atividade, é analisar as concepções dos alunos em relação às diferenças entre conjuntos infinitos e conjuntos com n elementos, a fim de dar significado ao conceito de seqüência.

A atividade:

1) 1. Escreva os 3 primeiros números naturais
   2. Escreva os 7 primeiros números naturais
   3. Escreva os n primeiros números naturais
   4. Escreva todos os números naturais
   Resp. : 1.
   2.
   3.
   4.

2) 1. Na questão 1) 2. há mais ou menos números que na 1) 3.?
   Resp.:
   2. E na questão 1) 3. com 1) 4.?
   Resp.:

3) 1.Quantos elementos tem cada um dos conjuntos?
   A={1,2,3,4} e B={1,2,3,4,...}
   Resp.:

C={1,2,3,...,15} e D={1,2,3,...,15,...}
Resp.:
E={1,2,3,4,...,n} e F={1,2,3,4,...,n,...}
Resp.:

2. Há diferença entre os conjuntos C e D?
Resp.:

3. Há diferença entre os conjuntos E e F?
Resp.:

4) Complete a tabela::

1	1
2	3
3	5
4	
5	⋮
⋮	
n	
⋮	⋮

1. Quantos números tem a 1^a coluna?
   E a 2^a?
2. Que tipo de números figuram na 1^a?
   E na 2^a coluna?
3. A cada elemento da 1^a coluna quantos correspondem na 2^a?
4. A tabela representa uma ________________ cujo domínio é ___________,
   cujo contradomínio é ______________, e cujo conjunto-imagem é _______.

Análise a priori:

Os números naturais são conteúdos que têm sido regularmente trabalhados nessa classe; assim, são esperados acertos nas questões a eles relacionadas : 1.1 e 1.2. O mesmo não deve ocorrer em relação às questões 1.3 e 1.4, por envolverem a variável n e "todos os números naturais". O trato com a variável n tem sistematicamente apresentado dificuldades. Parece que n, para muitos alunos, tem a conotação de infinito: tal poderá ocorrer na questão 2.1, onde devem comparar 7 com n .

O pré-teste aplicado no semestre anterior apontou dificuldades em relação às concepções de infinito. Assim imaginamos que ocorram erros na questão 2.2, na qual são comparados n e "todos" os números naturais.

Por esse mesmo motivo, em relação à questão 3, pensamos que os alunos terão maior facilidade em comparar os conjuntos A, B, C e D, do que os conjuntos E e F. Nas respostas aos ítens 3.2 e 3.3 poderemos melhor analisar as concepções dos alunos em relação a conjuntos infinitos nos quais, na designação dos elementos, aparece ou não a variável n.

Na questão 4 procuramos verificar se os alunos percebem a lei de formação da seqüência, sendo capazes de completar a tabela. Não se esperam muitos acertos, pois na última avaliação do semestre anterior os alunos não acertaram o termo geral da seqüência. E nada parece apontar para um resultado diferente, uma vez que esse conteúdo não foi ainda trabalhado. No entanto, a questão foi colocada para suscitar uma discussão.

Através dos itens 4.1 e 4.2, procuramos verificar se os alunos reconhecem os números naturais. Pensamos que não haverá dificuldades.

Nos itens 3 e 4 da questão 4, verificaremos se os alunos reconhecem como função (e, melhor ainda, como seqüência) a correspondência entre os elementos das duas colunas da tabela; e, nesse caso, se identificam domínio e conjunto-imagem. A questão 4 poderá favorecer proveitosas discussões.

Aplicação:

A atividade foi aplicada na segunda semana de aula deste ano: 15 de fevereiro de 2000. Havia 25 alunos presentes, sendo que 9 deles não faziam parte dessa turma no ano passado. Esses alunos não haviam sido introduzidos no estudo das seqüências.

Após uma breve recapitulação de conjuntos numéricos e funções (sem referência às seqüências), foi explicado aos alunos que , neste ano, desenvolveríamos um trabalho diferente: tentaríamos trabalhar alguns assuntos (não especificamos quais) em forma de atividades. Queríamos verificar se tal procedimento traria benefícios à aprendizagem. Foi-lhes dito, nessa ocasião, que essas atividades deveriam ter algum peso nas avaliações bimestrais.

Os alunos se mostraram extremamente interessados na experiência, mas temerosos quanto à avaliação. Contudo, manifestaram boa vontade em relação ao novo procedimento.

Foram então distribuídas as folhas com a primeira atividade. Os alunos demoraram por volta de vinte minutos para entregar suas questões resolvidas.

Análise dos resultados:

Os números abaixo se referem à quantidade de respostas corretas em cada questão.

Questão 1) 1.1 — 24; 1.2 — 24; 1.3 — 15; 1.4 — 17.

Questão 2) 2.1 — 7; 2.2 — 14 respostas corretas, sendo 7 justificadas (lembremo-nos de que não havia sido solicitada a justificativa das respostas, nesta questão).

Questão 3) 3.1 — Conjuntos A e B: 20 acertos;
Conjuntos C e D: 21 acertos;
Conjuntos E e F: 16 acertos.
3.2 — 21; 3.2 — 16 acertos.

Questão 4) Tabela — respostas corretas: 2
respostas erradas: 7
em branco: 16.
4.1 — 15; 4.2 — 19; 4.3 — 16;
4.4 — 22 alunos responderam que a tabela representa uma função, sendo que 7 dentre estes especificaram tratar-se de uma seqüência; 10 acertaram o domínio, e 6 o conjunto imagem.

A análise :

De um modo geral, confirmaram-se os resultados esperados.

Questão 1 — Apenas um aluno errou os itens 1 e 2 desta questão, que se referem a quantidades finitas explicitadas em números. Contudo, 10 alunos erraram os n primeiros números, e 8 não souberam como escrever "todos" os números naturais.

Nesta questão, quase todos os alunos escreveram os conjuntos desses números, embora tal não tenha sido solicitado. Isso parece mostrar que os alunos pensam em números sempre na forma de conjuntos. Por outro lado, também podem ter sido influenciados pela apresentação da questão 3.

Questão 2.1 — Apenas 7 alunos responderam, de certo modo, que a comparação entre os números depende do valor de n.

Exemplos: "...pode ser mais ou menos, depende de n."

"...não tem como afirmar, pois n pode ser maior ou menor do que 7."

Questão 2.2 — Apenas 7 respostas corretas e justificadas; outros 7 alunos responderam que em 1.3 há menos números do que em 1.4, mas sem apresentar explicações; assim, embora estes também tenham acertado a questão, não é possível saber se realmente têm convicção de sua resposta. Também pode ocorrer que estejam convictos, mas não tenham sabido justificá-la, ou que não tenham considerado necessário fazê-lo, já que não havia sido solicitada a justificativa da resposta.

12 alunos de alguma forma confundem n com "número infinito"

Exemplo: "Há mais números em 1.3 porque n é infinito".

Esse tipo de resposta confirma nossa expectativa sobre a concepção dos alunos em relação à variável n.

Questão 3 — Confirmando o que foi observado na questão 2, os alunos pouco erram quando comparam conjuntos constituídos apenas de números, sem a variável n, mesmo que sejam conjuntos infinitos: somente 5 e 4 alunos respectivamente erraram as comparações entre o número de elementos de A e B, e de C e D. Por outro lado, 9 alunos erraram em relação aos conjuntos E e F, nos quais aparece n.

Questão 4 — Em relação ao preenchimento da tabela, verificou-se o esperado na análise a priori: somente 2 alunos foram capazes de completá-la corretamente.

Questão 4.1 — 10 alunos não foram capazes de responder corretamente quantos são os elementos de cada coluna; novamente se atrapalharam com a variável n.

Questão 4.2 — Os números naturais na primeira coluna, e os naturais ímpares na segunda foram reconhecidos por 19 alunos.

Questão 4.3 — 9 alunos erraram em identificar a correspondência entre elementos da primeira e da segunda colunas; parece que não percebem como as duas colunas se relacionam.

Questão 4.4 — Apesar dos 9 alunos que erraram a questão anterior, pelo menos 6 destes reconhecem função, mesmo em um contexto com o qual não estão familiarizados. De fato, 22 alunos responderam tratar-se de função, e 7 destes chegaram a identificar seqüência.

Mas apenas 10 alunos acertaram o domínio IN, quase todos deixaram em branco o item contradomínio, e somente 6 acertaram o conjunto imagem.

Parece que os alunos não pensam em domínio, contradomínio e imagem como conjuntos. São freqüentes respostas como:

> "...o conjunto imagem é uma P.A."
> "domínio = números naturais"
> "domínio = 1, 2, 3, ..."

Na semana seguinte, a atividade foi discutida com os alunos, tendo sido ressaltados os pontos essenciais: a natureza da variável n, o infinito, função, domínio, conjunto-imagem de função e a diferença entre conjunto infinito e conjunto com n elementos. Embora, estes conteúdos já tenham sido trabalhados no curso sobre funções, foram nessa ocasião aprofundados; e reafirmarmos que um conjunto com n elementos é finito.

Os resultados desta atividade nos forneceram subsídios para a elaboração das seguintes.

****

ATIVIDADE 2

Esta atividade tem por objetivo verificar se os alunos identificam seqüências, quando apresentadas em registros diversos. Foram utilizados quatro diferentes modos: tabelas horizontais, tabelas verticais, notação de termos entre parênteses, notação de função.

A atividade:

Verifique, dentre os seguintes exemplos, quais representam seqüências.
Justifique cada resposta.

1)

x	y
1	-7
2	-5
3	-3
4	-1
5	1
⋮	⋮

Resposta:

2)

x	y
⋮	⋮
-2	-6
-1	-3
0	0
1	3
2	6
3	9
⋮	⋮

Resposta:

3) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$n \mapsto f(n) = 2n - 1$

Resposta:

4) $g: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$

$z \mapsto g(z) = 2z - 1$

Resposta:

5) $x: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$n \mapsto x_n = \sqrt{7}$

Resposta:

6) (-1, 0, -1, 0, -1, 0,...)

Resposta:

7) (1, 3, 5, 7, 9)

Resposta:

8) (2/5, 3/7, 4/9, 5/11, 6/13, ...)

Resposta:

9) (..., -7, -4, -1, 2, 5, 8,...)

Resposta:

10)

x	1	2	3	4	5
y	10	20	30	40	50

Resposta:

11)

x	1	2	3	4	5
y	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{5}$

Resposta:

12)

x	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	...
y	-2	-3	-4	-5	...

Resposta:

Análise a priori:

Na primeira semana de aulas deste ano, fazendo revisão de funções, detivemo-nos um pouco em seqüências. Na primeira atividade desta seqüência didática o assunto não foi abordado; contudo, 7 alunos perceberam que a tabela da questão 4 daquela atividade representava uma seqüência. Não sabemos se estes a reconheceriam em outro contexto.

Pensamos que os alunos serão capazes de acertar nos casos em que o domínio IN aparece de forma explícita; supomos também que as tabelas verticais deverão ser melhor interpretadas, pois é nessa forma que aparecem geralmente nos livros didáticos.

Achamos que haverá erros em relação às seqüências cujos termos são representados entre parênteses, pois os alunos não estão acostumados com essa notação; é o caso das questões 6 e 8.

Quanto às representações em que o domínio é um subconjunto finito de IN, é possível que os alunos as confundam com seqüências. Diversos autores de livros didáticos de matemática, voltados para o ensino médio, referem-se a

“P.A. finita” e “P.G. finita”. As questões 7, 10 e 11 poderão ser úteis para suscitar discussão sobre o assunto.

Aplicação: 1ª.

A atividade 2 foi aplicada duas vezes. A primeira foi em 22 de março, para 24 alunos, dos quais 7 eram novos na classe e não haviam estudado seqüências. O tempo de aplicação foi de 20 minutos.

Análise dos resultados:

Os resultados da atividade mostraram que os alunos ainda não tinham conhecimentos suficientes a respeito de seqüência. Somente 3 as distinguiram em todos os registros apresentados.

Diversos alunos tentaram encontrar a lei de formação das funções não definidas por fórmulas. É comum associarem seqüência somente aos exemplos que sejam P.A. ou P.G. (mesmo que também errem nessa classificação).   Exemplos:

> “...sim, pois formam uma P.A.”
> “...não, porque não é P.A.”
> “...sim, porque os termos se repetem de dois em dois...”

Mesmo entre os alunos que mostraram ter uma melhor noção do assunto, houve muitos erros em relação às questões 7 e 10, que eles consideram “seqüências finitas”; Aline Robert já havia observado esse mesmo erro entre os estudantes franceses por ela pesquisados.

Em vista desses resultados, pensamos que deveríamos retomar o trabalho sobre o conceito de seqüência. Resolvemos então, após comentários e discussões, reaplicar a atividade 2 na aula da semana seguinte, mas sem que os alunos fossem avisados.

Reaplicação:

A atividade 2, aplicada na semana anterior, não foi devolvida aos alunos em 29 de março. Nesse dia. após discussões, foi institucionalizado que seqüência é uma função cujo domínio é o conjunto IN, e que esta é a única condição para que a função seja ou não uma seqüência (mas nada comentamos a respeito de refazer a atividade).

Comentamos, então, que a atividade da semana passada não seria considerada para efeito de atribuição de notas, mas que seria refeita (os alunos consideraram muito justo o nosso critério).

Havia 27 alunos na classe nesse dia, sendo que três deles eram recém-chegados.

2ª Aplicação: Análise dos resultados:

— 3 alunos devolveram as folhas em branco (os alunos recém-chegados).

— 23 alunos responderam corretamente às questões 1, 2, 3, 4, 11 e 12, embora com explicações por vezes confusas; alguns confundem <u>domínio</u> com <u>elementos</u>. Por exemplo: "...é uma seqüência porque o domínio é (sic) os números naturais." Mas parece claro que entenderam que só é seqüência se o domínio é IN.

— 20 alunos acertaram a questão 5, e 3 a erraram; ainda se confundem com a seqüência constante.

— 19 alunos erraram as questões 6, 7, 8 e 9; parece não reconhecerem a notação ($x_1, x_2, x_3, \dots$), o que é razoável, pois não foi trabalhada.

— 17 alunos erraram a questão 10, não reconhecendo as implicações de um domínio finito.

Esta é uma questão de conceito que precisa ser muito trabalhada; esse erro já havia sido previsto (Aline Robert também já o apontara). Diversos autores de livros didáticos de matemática, voltados para o ensino médio, referem-se a “P.A. finita” e “P.G. finita”.

No nosso caso, desses 17 alunos que erraram a questão, 10 acertaram a 4ª, dizendo que “não é uma seqüência, porque o domínio é o conjunto **Z**”.

— Apenas 6 alunos acertaram essa questão 10, mas 3 deles justificaram suas respostas do seguinte modo:

“...não é seqüência, porque o domínio é <u>limitado</u>” (2 alunos).
“...não é seqüência, pois o domínio é <u>fechado</u>” (1 aluno); em uma entrevista posterior, esse aluno disse que pretendia escrever “limitado”.

Para dirimir essas dúvidas, também deverão ser muito trabalhados os conceitos de conjunto finito e conjunto limitado.

Em 14 de março, os alunos receberam seus protocolos, cujos erros e acertos foram discutidos. Os conceitos de conjunto finito e conjunto limitado (que já haviam sido estudados no curso regular) retornaram à discussão; foram apresentados muitos exemplos e contraexemplos. Mais tarde foi aplicada a 3ª atividade.

****

ATIVIDADE 3

Nosso objetivo, nesta atividade, é introduzir a noção de monotonicidade de seqüências, apresentando algumas crescentes, decrescentes, constantes e duas não monótonas. Faremos, também, uma sondagem das concepções dos alunos em relação à convergência.

A atividade:

Considere as seguintes seqüências:

a)

x	1	2	3	4	5	6	....
y	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	....

b)

x	1	2	3	4	5	6	7	...
y	4	4	4	4	4	4	4	...

c) f: lN $\rightarrow$ lR

$n \mapsto f(n)=n^2-6n+8$

d) g: lN $\longrightarrow$ lR

$n \mapsto g(n) = \frac{n}{n+1}$

e) x: lN $\longrightarrow$ lR

$$n \mapsto x_n = \begin{cases} -\frac{1}{n} & \text{, se n é ímpar} \\ \frac{1}{n} & \text{, se n é par} \end{cases}$$

1) Represente cada seqüência na reta lR:

a) ____

b) ____

c) ____

d) ____

e) ____

2) Complete o quadro, marcando com X.

2.1) As seqüências crescentes, as decrescentes, as constantes e as não monótonas (se houver)

2.2) As seqüências cujos termos “se aproximam” de algum número (não é preciso determiná-lo)

	a	b	c	d	e
monótona crescente					
monótona decrescente					
monótona constante					
não monótona					
seus termos “se aproximam” de um n°					

Análise a priori:

Queremos fazer uma sondagem sobre a forma como os alunos representam os termos de seqüências sobre uma reta. Mas essa representação não foi ainda trabalhada, o que nos faz supor que haverá poucos acertos na questão 1. Mas a abordagem das seqüências através do registro geométrico poderá ser retomada quando do retorno da atividade.

Como os alunos já estudaram as funções monótonas (mas não as seqüências monótonas), pensamos que há possibilidade de analisarem corretamente a monotonicidade das seqüências na questão 2.1.

Nesta atividade pretendemos também verificar se os alunos percebem que, em algumas seqüências, seus termos “se aproximam” de um determinado número, sem referência explícita à convergência. Como esse conceito não foi ainda trabalhado, não é possível se fazer uma estimativa do desempenho dos alunos, quanto a esse tópico.

Aplicação:

A atividade foi aplicada em 14 de março a 27 alunos, sendo que um deles havia ido à aula pela primeira vez.

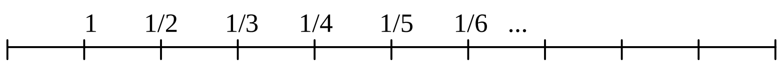
Os alunos não tinham idéia de como resolver a questão 1. Foi-lhes dito, então, que tentassem representar os pontos da maneira que achassem possível.

O trabalho de resolução das questões teve duração média de 20 minutos.

Análise dos resultados:

Questão 1 — Confirmou-se a previsão: apenas 7 alunos apresentaram alguns acertos na representação dos pontos na reta; 5 alunos tentaram representá-los em duas dimensões, mas com gráfico contínuo; 9 alunos erraram a questão — ignoraram totalmente a escala e/ou não obedeceram a ordenação dos pontos na reta.

Por exemplo:



Seis alunos deixaram em branco esta questão.

Questão 2 — Para análise dos resultados desta questão, escrevemos na tabela abaixo os números referentes ao total de respostas corretas verificadas em cada item:

	a	b	c	d	e
monótona crescente				20	
monótona decrescente	26				
monótona constante		25			
não monótona			17		13
seus termos “se aproximam” de um n°	20	2	22	16	13

Questão 2.1 — Embora não tenha sido ainda estudada a monotonicidade de seqüências, os alunos mostraram capacidade de transferir seus conhecimentos sobre funções monótonas para o caso particular das seqüências: reconheceram

as crescentes, as decrescentes e as constantes. Mas o mesmo não ocorreu em relação às não monótonas.: somente 13 alunos acertaram a não monotonicidade da seqüência (x_n), embora seus termos alternem o sinal.

As seqüências não monótonas deverão ser mais trabalhadas quando a atividade for discutida com os alunos.

Questão 2.2 — Os acertos em relação às seqüências dos itens (a), (c) e (d) nos sugerem que os alunos têm uma boa noção de aproximação, embora esse assunto não tenha sido sequer mencionado; isto parece claro quando 22 alunos responderam que a seqüência do item (c) não tem seus termos se aproximando de nenhum número (não foram computadas 4 respostas em branco); esses 22 alunos responderam aos outros itens.

Observamos que 4 alunos responderam à questão 2.2 colocando os limites das seqüências, o que não havia sido solicitado. Isto parece mostrar que os alunos se comportam com relativa independência, e que pensam que não há regras restritas em relação à resolução das questões.

Quanto à seqüência constante, embora praticamente todos a reconheçam, como é natural não a relacionam com a idéia de aproximação — foram somente 2 acertos. Tal comportamento nos sugere que os alunos têm uma noção de limite como sendo um número que jamais é atingido.

Na semana seguinte, a atividade foi discutida com os alunos. A seguir, foram institucionalizados os conceitos de monotonicidade de seqüências: foram definidas as seqüências monótonas crescentes, as decrescentes e as constantes. Nessa ocasião, não nos referimos às seqüências não-crescentess e as não-decrescentes.

Nesse dia não foi realizada nenhuma outra atividade.

****

ATIVIDADE 4

Esta atividade tem por objetivo verificar se os alunos são capazes de escrever corretamente os termos de uma seqüência, a partir de seu termo geral, e se diferenciam os registros de seqüência e do conjunto-imagem.

A atividade:

Considere as seqüências abaixo, definidas por seu termo geral:

a) $x_n = \frac{1}{n}$ b) $a_n = 2n$ c) $u_n = (-1)^n$

d) $y_n = \frac{3}{7}$ e) $v_n = \frac{-n}{n+1}$ f) $c_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$

g) $b_n = \begin{cases} 1, & \text{se n é ímpar} \\ \frac{1}{n^2}, & \text{se n é par} \end{cases}$ h) $z_n = \begin{cases} n+1, & \text{se } n \leq 3 \\ 4, & \text{se } n > 3 \end{cases}$

1) Escreva cada seqüência designando seus termos (no mínimo os 6 primeiros).

2) Escreva o conjunto-imagem de cada seqüência.

3) Verifique quais seqüências têm o conjunto imagem limitado.

Análise a priori:

Com esta atividade, pretendemos encaminhar o aluno para o conceito de seqüência limitada. Para tal, começamos a trabalhar a noção de conjunto-imagem limitado. Assim, escolhemos seqüências que possuam conjuntos-imagem de diversos tipos: finitos, infinitos limitados, infinitos ilimitados e um conjunto unitário.

Os alunos já haviam estudado os conjuntos limitados.

Questão 1 — A construção de seqüências a partir do termo geral tem sido trabalhada em sala de aula. Contudo pensamos que aparecerão algumas respostas em forma de conjunto, pois diversos alunos se confundem ainda com a notação $(a_1, a_2, a_3, ...)$. Não foram vistas em aula as seqüências definidas por mais de uma sentença aberta; assim as seqüências (b_n) e (z_n) representam um desafio.

Acreditamos que os alunos não terão dificuldades em escrever corretamente os termos das outras seqüências.

Questão 2 — Os alunos estudaram conjunto-imagem de funções, mas não especificamente de seqüências. Sierpinska observou, em seu estudo dos obstáculos ligados à noção de função, que os alunos confundem a seqüência com o conjunto de seus valores.

Como o assunto aparece pela primeira vez nesta questão, poderemos verificar se ocorrerá ou não o mesmo com nossos alunos.

Questão 3 — Mesmo que acertem o conjunto-imagem, acreditamos que a tendência é mais para respostas erradas, pois os alunos confundem os conjuntos infinitos com conjuntos ilimitados.

A partir da discussão sobre conjunto-imagem de seqüência, talvez já possamos iniciar o estudo das seqüências limitadas.

Aplicação:

A atividade 4 foi aplicada a 27 alunos em 28 de março, para ser entregue em 20 minutos.

Análise dos resultados:

O quadro seguinte representa o número de respostas corretas das duas primeiras questões, e de erros, acertos e respostas em branco da terceira questão:

		seqüência	imagem	imagem limitada		
				certo	errado	branco
a	$x_n = \frac{1}{n}$	23	11	8	8	11
b	$a_n = 2n$	20	13	14	2	11
c	$u_n = (-1)^n$	22	16	18	4	5
d	$y_n = \frac{3}{7}$	14	13	14	4	9
e	$v_n = \frac{-n}{n+1}$	21	10	7	9	11
f	$c_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$	20	10	8	7	12
g	$b_n = \begin{cases} 1, \text{ se n é ímpar} \\ \frac{1}{n^2}, \text{ se n é par} \end{cases}$	15	6	5	8	14
h	$z_n = \begin{cases} n+1, \text{ se } n \leq 3 \\ 4, \text{ se } n > 3 \end{cases}$	18	12	14	5	8

A análise:

Questão 1 — De acordo com o esperado, a maioria dos alunos acertou a primeira questão. Confirmou-se a nossa expectativa em relação às seqüências (b_n) e (z_n); contávamos com dificuldades em relação a estas, mas não esperávamos determinadas respostas como:

- em (b_n): (1, 1/4, 1/9, 1/16, ...) ao invés de (1, 1/4, 1, 1/16, 1, 1/36, ...)
- em (z_n): (2, 3, 4) ao invés de (2, 3, 4, 4, 4, ...).

Estas representações nos sugerem que os alunos ainda não interpretam n como a variável independente de uma função com domínio IN.

Também não eram esperados tantos erros em relação à representação da seqüência constante — muitos alunos não sabem como escrever seus termos; escrevem apenas y_n **=** 3/7**,** ou { 3/7 }, ou (3/7), ao invés de (3/7, 3/7, 3/7, 3/7, ...).

Embora fossem esperadas muitas respostas em forma de conjunto, somente dois alunos cometeram esse erro.

Questão 2 — Com diversos alunos ocorreu o mesmo erro que havia sido observado por Sierpinska: trocam a imagem pelo conjunto dos termos da seqüência. Apareceram alguns conjuntos escritos do seguinte modo:

{ 2, 3, 4, 4, 4, ...}; {-1, 1, -1, 1, ...}.

O número de acertos nesta questão foi baixo. Os conjuntos-imagem finitos aparecem com maior número de acertos, como também a imagem da seqüência (2, 4, 6, 8, ...), talvez por se tratar do conjunto dos números naturais pares. Os alunos cometeram erros em relação aos conjuntos infinitos limitados (itens (a), (e), (f) e (g)).

Ao elaborarmos esta atividade previmos que poderiam aparecer os erros observados por Sierpinska. Mas foram assinalados também, em várias provas, três outros tipos:

- Ao escrever o conjunto-imagem, o aluno repete exatamente a representação da seqüência.

- O aluno apresenta um conjunto finito com os mesmos termos que colocou na seqüência (este erro foi muito comum).
  Por exemplo: na questão 1.a) escreveu (1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, ...)
  na questão 2.a) Im = { 1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6 }

- Ao invés de escrever o conjunto-imagem, o aluno escreve o menor intervalo que o contém (erro muito freqüente).
  Por exemplo: na questão 1.a) escreveu (1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, ...)
  na questão 2.a) Im = (0, 1]
  na questão 1.c) escreveu (-1, 1, -1, 1, -1, 1, ...)
  na questão 2.c) Im = [-1, 1].

Posteriormente entrevistados, esses alunos nos explicaram que erraram “por distração”. Isto pode revelar um certo pudor em admitir erros por desconhecimento do assunto; eles preferem passar por distraídos.

Pensamos, quanto ao segundo tipo de erro apontado, que é possível que os alunos confundam conjunto-imagem finito com “não repetir os termos da seqüência”. Mesmo assim, no caso da primeira seqüência esta explicação não se aplica. Teremos que pesquisar o porquê desse procedimento.

Quanto ao terceiro tipo de erro, parece-nos que talvez os alunos se tenham influenciado pela terceira questão (o conjunto-imagem é limitado?). De um modo geral, os alunos que escreveram o conjunto-imagem em forma de intervalo limitado, acertaram a questão 3.

Por exemplo: o conjunto-imagem da primeira seqüência é limitado porque está contido no intervalo (0, 1]. Então, o aluno escreve esse intervalo como imagem. Esta é uma possibilidade.

Questão 3 — Esta questão depende da anterior. Então, a quantidade maior de acertos ocorreu em relação aos conjuntos finitos e ao conjunto dos números pares. Mas é curioso observar que os acertos superaram os da questão 2; isto pode significar que, mesmo errando o conjunto-imagem, o aluno percebe que o conjunto é limitado. Em relação aos conjuntos infinitos limitados, os erros foram em grande número, e muitos alunos deixaram estes itens em branco. Seis alunos relacionaram diretamente conjunto finito com conjunto limitado.

A atividade 4 foi discutida com os alunos em 4 de abril. Nessa ocasião, foram rediscutidos diversos conceitos, enfatizando imagem de função e conjuntos limitados.

A atividade 5 foi aplicada nesse mesmo dia.

****

ATIVIDADE 5

Esta atividade tem por objetivo retomar os conceitos que se mostraram mais problemáticos na atividade anterior: diferença entre a seqüência e seu conjunto-imagem, e o reconhecimento dos conjuntos infinitos limitados.

A atividade:

1) Considere as seqüências (a_n), (b_n), (c_n) e (d_n) definidas abaixo. Para cada uma delas:

a) escreva seus 6 primeiros termos;
b) escreva seu conjunto-imagem;
c) verifique se seus termos "cabem" ou não no intervalo [0,2].

$a_n = \frac{2}{n}$

a)
b)
c)

$b_n = -\frac{1}{6}$

a)
b)
c)

$c_n = \begin{cases} 2 & \text{, se n é par} \\ \frac{1}{2^n} & \text{, se n é ímpar} \end{cases}$

a)
b)
c)

$d_n = \frac{2n}{n+2}$

a)
b)
c)

2) Coloque V(Verdadeiro) ou F(Falso)

( ) {1, 3, 5, 7, 9, ...} é ilimitado e infinito

( ) [$\sqrt{2}$, 58) é limitado e infinito

( ) a seqüência (4, 3, 2, 4, 3, 2, 4, 3, 2, ...) tem conjunto-imagem limitado e infinito.

( ) {64, 32, 16, 8, 4, 2, ...} é infinito e limitado

( ) $\left\{ \frac{1}{5}, \frac{3}{7}, \frac{5}{9}, \frac{7}{11}, \ldots \right\}$ é ilimitado e infinito

Análise a priori:

Os resultados da última atividade mostraram que os conceitos de conjunto-imagem de seqüência e de conjunto limitado precisam ser mais trabalhados. Com essa finalidade, foram nesta apresentadas quatro seqüências: uma seqüência constante e três outras limitadas, mas com os conjuntos-imagem infinitos.

No item (c) da primeira questão procuramos averiguar a compreensão do conceito de conjunto limitado, sem utilizar esse termo (que os alunos têm, muitas vezes, considerado sinônimo de conjunto finito). Como um conjunto limitado está contido em um intervalo fechado, preferimos perguntar se os termos das seqüências "cabem" ou não no intervalo.

Questão 1 —

Item (a) — Em vista das discussões realizadas no retorno da atividade 4, pensamos que os alunos terão agora menores dificuldades na representação das seqüências; talvez um pouco mais quanto à seqüência (c_n), que é definida por duas sentenças.

Item (b) — Considerando o trabalho realizado em classe com as imagens de conjuntos, esperamos que nesta atividade os alunos escrevam corretamente o conjunto-imagem.

Item (c) — Embora a compreensão do conceito de conjunto limitado venha se mostrando difícil no caso dos conjuntos infinitos, pensamos que a maioria dos alunos será capaz de entender a diferença entre conjunto limitado e ilimitado, devido ao modo como a questão foi reformulada.

Questão 2 — Esta questão foi colocada na atividade com o intuito de proporcionar discussão quando do retorno dos trabalhos.

Aplicação:

Esta atividade foi aplicada no dia 4 de abril a 28 alunos. Nessa semana, começou a freqüentar o curso uma aluna da turma de 1999, tendo participado apenas desta atividade. Preferimos mantê-la no cômputo dos resultados porque, curiosamente, suas respostas estavam quase todas corretas.

A aplicação levou por volta de 20 minutos.

Análise dos resultados:

O quadro abaixo representa o número de respostas corretas na primeira e segunda questões:

Questão 1 —

(a_n) — (a) – 20	(b_n) — (a) – 20	(c_n) — (a) – 19	(d_n) — (a) – 23
(b) – 18	(b) – 24	(b) – 16	(b) – 20
(c) – 27	(c) – 25	(c) – 25	(c) – 25

Questão 2 —

1ª asserção – 26
2ª asserção – 23
3ª asserção – 20
4ª asserção – 12
5ª asserção – 14

A análise:

Questão 1 — No item (a), confirmou-se nossa previsão quanto à construção das seqüências: o número de erros foi relativamente pequeno; mesmo a seqüência (c_n) foi escrita corretamente pela maioria dos alunos. Diminuíram bastante os casos de troca de parênteses por chaves. Parece-nos que as análises de acertos e erros com os alunos têm dado bons resultados.

Quanto ao item (b), os alunos continuam confundindo os elementos do conjunto-imagem com os termos da seqüência. Esse obstáculo (destacado por Sierpinska) realmente é muito forte.

Mas a imagem da seqüência constante parece ter sido agora compreendida, talvez em função dos exemplos dados no retorno da atividade anterior.

Quase todos os alunos acertaram o item (c), o que sugere que poderão entender melhor a questão dos conjuntos limitados, com o enfoque dado (os termos da seqüência "cabem" no intervalo fechado?).

Questão 2 — As questões contidas nos dois primeiros enunciados tiveram respectivamente 26 e 23 respostas corretas (em 28); parece que os alunos reconhecem agora mais facilmente os conjuntos infinitos e ilimitados, bem como os intervalos limitados. O mesmo não ocorre em relação aos conjuntos infinitos limitados e discretos: apenas metade dos alunos acertou a última asserção, na qual deveriam analisar um conjunto desse tipo. Talvez a compreensão quanto aos intervalos se deva à própria classificação destes: a maioria dos livros didáticos costuma classificá-los em limitados e ilimitados.

Em relação à seqüência (4, 3, 2, 4, 3, 2, ...) houve 9 erros; continua a ocorrer dificuldade em relação a seu conjunto-imagem; esses alunos o consideram um conjunto infinito, com seus elementos se repetindo (outra vez Sierpinska).

Dezesseis alunos erraram a quarta asserção. Em vista desse resultado, entrevistamos esses alunos em relação às suas conclusões quanto ao conjunto { 64, 32, 16, 8, 4, 2, ... }. Nós lhes perguntamos: "Por que você achou que esse conjunto é ilimitado?", e lhes pedimos que escrevessem a resposta.

As respostas foram as seguintes:

"Não prestei atenção..." (duas respostas)

"Não consegui enxergar que os números iam tender a zero."

"Achei que ele não ia caber em um intervalo fechado."

"Pensei que o conjunto tendia (sic) para números reais negativos, sendo assim ilimitado."

"Pensei que era ilimitado..." (?). Três alunos deram esta resposta.

"Foi pura falta de atenção e de pensar mais um pouco, confundi o lado da reta." (?).

Esta explicação nos sugere que o aluno tenta pensar nos elementos do conjunto colocando-os em uma reta, para verificar se o conjunto é limitado.

"... equívoco quanto à interpretação..."

"Não tinha enxergado (...) e não dei continuidade ao conjunto-imagem da seqüência (...). Errei por excesso de confiança."

"... me confundi com as reticências."

"Realmente eu me confundi com ilimitado e infinito."

Na aula seguinte à aplicação da atividade, discutimos todos os acertos e erros, e alguns alunos responderam à pergunta sobre a 2ª questão (cujas respostas estão na análise anterior).

Nessa ocasião, institucionalizamos o conceito de seqüência limitada, como sendo aquela cujo conjunto-imagem é limitado.

Na atividade 3, nos referimos, de passagem, à "aproximação" dos termos das seqüências. Naquela ocasião, o número de respostas certas foi bastante elevado (exceto quanto à seqüência constante): 50% a 74%, conforme a seqüência dada.

Estimando que os alunos estejam agora já "maduros" para esse conceito, trabalhamos a noção intuitiva de seqüência convergente. Foi dado o exemplo da seqüência $x_n = 1/n$, inclusive com representação gráfica, mostrando que "quase todos" os seus termos pertencem a um intervalo aberto centrado no zero, por menor que seja a sua amplitude.

****

ATIVIDADE 6

Esta atividade tem por objetivo verificar se os alunos, tendo à sua disposição papel milimetrado com escalas já graduadas, são capazes de representar os primeiros termos de cinco seqüências, e a partir dessa representação, analisar algumas características.

A atividade:

Considere as seguintes seqüencias:

$(a_n) = (0;\ 0{,}25;\ 0{,}50;\ 0{,}75;\ 1{,}00;\ 1{,}25;\ ...)$

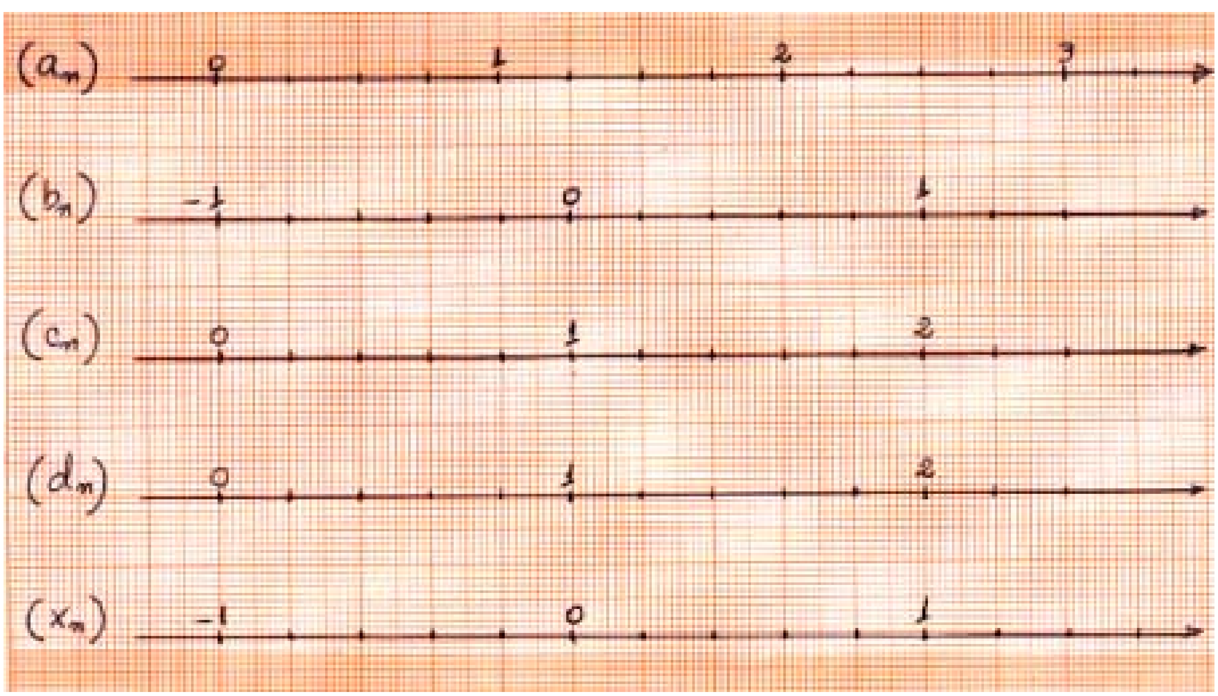
$(b_n) = \left(0,\ -\frac{1}{2},\ -\frac{2}{3},\ -\frac{3}{4},\ -\frac{4}{5},\ -\frac{5}{6},\ ...\right)$

$(c_n) = \left(1,\ \frac{3}{2},\ 1,\ \frac{5}{4},\ 1,\ \frac{7}{6},\ ...\right)$

$(d_n) = \left(1,\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{3},\ \frac{7}{4},\ \frac{9}{5},\ \frac{11}{6},\ \frac{13}{7},\ ...\right)$

$(x_n) = \left(-\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ -\frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ -\frac{5}{6},\ \frac{6}{7},\ ...\right)$

1) Represente cada seqüência na reta lR, de acordo com a escala dada.



2) Complete o quadro. Marque com X a resposta.

Características	a_n	b_n	c_n	d_n	x_n
crescente					
decrescente					
não monótona					
limitada					
ilimitada					
convergente					

Análise a priori:

Para trabalhar os conceitos de monotonicidade, convergência e limitação, nesta atividade foram apresentadas 5 seqüências, sendo: 3 monótonas, 4 limitadas e 3 convergentes. Verificaremos se os alunos analisam com o mesmo grau de facilidade a convergência das seqüências monótonas e das não monótonas.

Questão 1 —

Pensamos que se um aluno consegue representar corretamente os primeiros termos de uma seqüência na reta, essa representação lhe fornecerá informações importantes sobre determinadas características da seqüência: monotonicidade, limitação e convergência.

Questão análoga já havia sido colocada na atividade 3, com número muito pequeno de acertos. Naquela ocasião, as retas apresentadas não foram graduadas, o que pode ter sido uma das causas de erros.

Nesta atividade 6, o assunto é reapresentado, mas de outra forma: as retas são representadas em papel milimetrado, com as escalas marcadas, e com fácil subdivisão. E como os alunos já estão agora mais familiarizados com os termos das seqüências, esperamos que sejam capazes de fazer a representação correta.

Questão 2 —

- <u>Monotonicidade</u>

Parece-nos que, a esta altura de nosso trabalho, os alunos já identificam facilmente as seqüências monótonas. Quanto às não monótonas, talvez o reconhecimento não seja ainda tão fácil, o que trará dificuldades também à análise da convergência e limitação destas seqüências.

- <u>Limitação</u>

As atividades 4 e 5 apresentaram questões nas quais foi abordado o conceito de conjunto limitado. Mas, até então, nada havia sido colocado a respeito de seqüência limitada. Contudo, os resultados da atividade 5 mostraram que os alunos, embora muitas vezes errando o conjunto-imagem da seqüência, são capazes de perceber que seus termos "cabem" em um intervalo [a, b].

Esperamos que o trabalho realizado nas atividades 4 e 5; e também das discussões em sala de aula, resultem nessa percepção intuitiva. Propositalmente, nesta atividade não são pedidas as imagens das seqüências, mas perguntamos se são limitadas.

Nossa expectativa é de que os alunos tenham já percebido que, se os termos de uma seqüência "cabem" em um intervalo fechado, então ela é limitada. Neste caso, deverão ser capazes de assinalar corretamente as seqüências limitadas e as não limitadas.

- <u>Convergência</u>

Em relação ao conceito de convergência, também deve ser observado que essa noção foi tratada de forma intuitiva, quando foram discutidos com a classe os resultados da atividade 5. Esperamos assim que os alunos identifiquem as seqüências convergentes: (b_n), (c_n) e (d_n).

Pensamos também que verificarão que a seqüência (a_n) não converge, pois não é limitada (embora nunca tenhamos feito referência a isso).

A seqüência (x_n), divergente e limitada, é apresentada nesta atividade visando a futuras discussões. Deve ser a seqüência a suscitar mais dúvidas nos alunos, em relação à convergência.

Aplicação:

A atividade foi aplicada a 27 alunos, no dia 25 de abril.

Desta vez, o tempo utilizado foi aproximadamente 30 minutos. Os alunos demoraram-se mais, em virtude da representação geométrica (questão 1). Agora pareceu não haver dúvidas quanto à 1ª questão (os alunos não fizeram perguntas).

Análise dos resultados:

Características	a_n	b_n	c_n	d_n	x_n
crescente	25 C	2 E	1 E	20 C	2 E
decrescente	1 E	24 C	3 E	1 E	-
não monótona	1 E	1 E	16 C	3 E	25 C
limitada	5 E	21 C	20 C	22 C	11 C
ilimitada	21 C	4 E	3 E	5 E	6 E
convergente	2 E	21 C	10 C	22 C	9 E

No quadro acima, referente à questão 2, além da colocação dos números de respostas certas (C), colocamos também o número das erradas (E). Parece-nos um dado importante para a análise dos resultados, em relação à monotonicidade e à limitação.

O número de respostas em branco pode ser facilmente deduzido, a partir dos erros e acertos. Basta lembrar que a atividade foi aplicada a 27 alunos.

Por exemplo: na seqüência (x_n) 11 alunos assinalaram corretamente que a seqüência é limitada, e 6 erraram, respondendo que é ilimitada; neste caso, 10 alunos não souberam responder, pois em suas folhas deixaram em branco os espaços reservados às duas alternativas.

<u>A análise:</u>

Questão 1 —

O número de acertos não confirmou a expectativa, a não ser em relação à seqüência (a_n). Quanto às demais, os erros que foram cometidos referem-se, em sua maior parte, a uma má colocação dos termos nas retas.

Pretendíamos que, representando corretamente na reta os termos da seqüência, o aluno obtivesse subsídios para facilitar sua análise quanto à monotonicidade, limitação e convergência.

Contudo, parece-nos que os erros cometidos pelos alunos nesta questão não interferiram em seu desempenho quanto aos demais itens.

De fato, por exemplo: somente 15 alunos acertaram a representação de (b_n); mas houve 24 acertos em relação à monotonicidade, 21 quanto à limitação e 21 quanto à convergência.

Questão 2 —

O quadro de erros e acertos apresentado atrás é bastante expressivo. Três características das seqüências foram analisadas:

- Monotonicidade

O número de respostas certas nos permite supor que os alunos distinguem bastante bem as seqüências monótonas; e também as não-monótonas, quando seus termos mudam de sinal (25 acertos na seqüência (x_n)). Mas não ocorre o mesmo quando a seqüência não-monótona tem seus termos com o mesmo sinal. Por exemplo, para a seqüência (c_n), houve 4 respostas erradas e 7 em branco.

- Seqüências Limitadas

Como era esperado, parece ter melhorado a percepção dos alunos em relação a esse conceito: 20 a 22 acertos (em 27) nas quatro primeiras seqüências. Entretanto são muitas as dúvidas em relação à seqüência (x_n), que não é monótona: 6 respostas erradas e 10 em branco. Entrevistados depois sobre esse item, os alunos em geral disseram que se atrapalharam com o sinal, ou que "não conseguiram enxergar", etc..

Se por um lado a alternância do sinal de seus termos torna mais fácil perceber que a seqüência não é monótona, por outro lado, quanto à percepção de sua limitação, as dificuldades parecem aumentar. Este é um tópico que precisa ser mais trabalhado.

- Convergência

Queremos destacar aqui um importante resultado. Embora não tenhamos dito aos alunos que toda seqüência monótona e limitada converge, e nem que uma seqüência não limitada não converge — tais implicações nem sequer foram sugeridas — a análise desta questão parece mostrar que esses resultados foram intuitivamente assimilados.

De fato: 25 alunos responderam corretamente que a seqüência (a_n) — não limitada — não converge. Quanto às seqüências (b_n) e (d_n), que são monótonas e limitadas, 21 e 22 alunos respectivamente disseram que são convergentes. Mas não ocorre o mesmo em relação às seqüências não-monótonas — nesse caso parece haver muitas dúvidas em relação à convergência. Somente 10 alunos acertaram a resposta sobre a seqüência (c_n), que não é monótona (embora 20 percebessem que é limitada); foram 17 em branco. E quanto à seqüência (x_n), embora quase todos (25) percebessem que não é monótona (mas somente 11 disseram que é limitada), 9 alunos erraram respondendo que a seqüência converge.

Não sabemos dizer quantos alunos deixariam em branco este item (convergência), porque não colocamos outra alternativa no quadro de respostas. Por exemplo: dos 27 alunos, 9 erraram afirmando que a seqüência (x_n) converge; mas ignoramos o que os outros 18, que não assinalaram X no quadro "convergente", pensam a esse respeito: se os 18 acham que a seqüência é divergente, ou se alguns deixariam em branco a questão.

Essa foi uma falha na confecção do quadro de respostas. Na próxima atividade deveremos escrever, além da alternativa "convergente", a oposta: "não-convergente".

A atividade 6 foi discutida com os alunos na semana seguinte, e refeitas as questões que apresentaram maior número de erros. Nessa ocasião, insistimos na representação geométrica da seqüência.

A seguir, foi aplicada a atividade 7.

****

ATIVIDADE 7

O objetivo desta atividade é aprofundar a pesquisa sobre os conhecimentos dos alunos em relação a certas características das seqüências: monotonicidade, limitação e convergência.

A atividade:

Considere as seguintes seqüências:

$(a_n) = (1,\ 2,\ 3,\ 1,\ 2,\ 3,\ 1,\ 2,\ 3, \dots)$

$(b_n) = (1,\ \frac{3}{2},\ \frac{7}{4},\ \frac{15}{8},\ \frac{31}{16},\ \frac{63}{32},\ \dots)$

$(c_n) = (0, -1,\ 1,\ -2,\ 2,\ -3,\ 3, \dots)$

$(d_n) = (-2,\ -\frac{3}{6},\ -\frac{4}{3},\ -\frac{5}{4},\ -\frac{6}{5},\ \dots)$

$(e_n) = (3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ 18,\ \dots)$

$(f_n) = (-1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ -\frac{1}{16},\ \frac{1}{32},\ \dots)$

$(g_n) = (20,\ 10,\ 5,\ \frac{5}{2},\ \frac{5}{4},\ \frac{5}{8},\ \dots)$

$(h_n) = (1,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{36},\ \frac{1}{7},\ \dots)$

$(i_n) = (1,\ 2,\ 3,\ 2,\ 5,\ 2,\ 7,\ 2, \dots)$

$(j_n) = (\frac{1}{4},\ 0,\ \frac{1}{16},\ 0,\ \frac{1}{36},\ 0,\ \frac{1}{64}, \dots)$

Complete o quadro abaixo, marcando com X as respostas corretas.

Características	(a_n)	(b_n)	(c_n)	(d_n)	(e_n)	(f_n)	(g_n)	(h_n)	(i_n)	(j_n)
crescente										
decrescente										
não monótona										
limitada										
ilimitada										
convergente										
não convergente										

Análise a priori:

A questão da convergência e monotonicidade já havia sido abordada na atividade 6. Naquela ocasião constatamos que diversos alunos tinham dificuldades em analisar a convergência das seqüências não-monótonas.

Na atividade 7 são apresentadas 10 seqüências: são 4 monótonas e 6 não-monótonas; 7 limitadas e 3 não limitadas; 6 convergentes e 4 divergentes.

Queremos verificar se agora estão mais claras as concepções dos alunos em relação a essas seqüências.

Nesta atividade, o quadro de respostas traz mais uma linha abaixo da característica "convergente" — "não-convergente" — esta última alternativa nos permitirá analisar se o aluno acha ou não que a seqüência converge, ou se deixa a questão em branco.

- <u>Monotonicidade</u>

Já notamos, quando da análise da atividade 6, que as seqüências monótonas têm sido reconhecidas pelos alunos. Mesmo assim, apresentamos agora quatro seqüências monótonas, sendo três delas limitadas: (b_n), (d_n) e (g_n); e uma ilimitada: (e_n), com o propósito de verificar se os alunos estão relacionando corretamente (ou não) monotonicidade e limitação com a convergência.

Quanto às não-monótonas, pensamos que não terão dificuldades em relação às seqüências (a_n), porque tem conjunto-imagem finito, e (c_n) e (f_n), porque seus termos têm alternância de sinais.

Mas as três últimas são seqüências não-monótonas, de termos não negativos e conjunto-imagem infinito. Parece-nos que, em relação a essas seqüências, alguns alunos poderão ter dúvidas.

- Limitação

Esse tema vem sendo trabalhado a partir da 4ª atividade, e também em sala de aula, através de discussões, exemplos e contraexemplos. Devido a relação convergência/limitação, é novamente formulada uma questão relativa à seqüência limitada.

Pensamos que devido ao trabalho até agora realizado, a maioria dos alunos seja capaz de diferenciar corretamente os dois casos: as limitadas e as não limitadas.

- Convergência

Como foi observado pelos resultados da atividade 6, parece que os alunos já perceberam que as seqüências monótonas e limitadas convergem; e que as ilimitadas são divergentes. Assim supondo que os alunos acertem as outras características, as dificuldades de análise da convergência devem surgir mais em relação às seqüências que são limitadas e não-monótonas: (f_n), (h_n) e (j_n).

Aplicação:

A atividade 7 foi aplicada a 27 alunos, no dia 2 de maio, após análise e discussão da atividade 6. Os alunos levaram em média 30 minutos para fazê-la.

Análise dos resultados:

O quadro abaixo apresenta os números de respostas certas (C) e de erradas (E) dadas à atividade 7:

Características	(a_n)	(b_n)	(c_n)	(d_n)	(e_n)	(f_n)	(g_n)	(h_n)	(i_n)	(j_n)
crescente	1 E	26C	-	18C	27C	1 E	-	1 E	3 E	-
decrescente	-	1 E	-	7 E	-	2 E	27C	6 E	-	3 E
não monótona	22C	-	26C	1 E	-	23C	-	16C	20C	21C
limitada	25C	19C	5 E	24C	2 E	20C	21C	19C	3 E	18C
ilimitada	1 E	7 E	21C	3 E	25C	8 E	5 E	8 E	23C	9 E
convergente	2 E	23C	-	25C	-	17C	23C	15C	-	18C
não convergente	24C	3 E	25C	1 E	26C	10E	3 E	11E	25C	8 E

A análise:

- Monotonicidade

Na análise das seqüências monótonas, para três delas, (b_n), (e_n) e (g_n), confirmou-se plenamente a nossa previsão de acertos: só 1 erro na primeira, e nenhum nas outras duas; entretanto, somente 18 acertos na seqüência (d_n) — que é crescente, porém de termos fracionários e negativos. Dentre os 9 que não a acertaram, 7 alunos escreveram que é decrescente. Entrevistados depois, disseram que se atrapalharam com o sinal negativo, ou que não prestaram atenção. Parece haver muita dificuldade na comparação de números negativos.

Em relação às seqüências não-monótonas, o índice de erros diminuiu em comparação com o observado nas atividades anteriores. Foi na seqüência (h_n) que se registrou o menor número de acertos: 16. Parece também que há dificuldade na comparação entre frações de mesmo numerador.

- Limitação

Nossa expectativa confirmou-se em relação a três das seqüências monótonas. Mas os alunos apresentam dificuldades com as não-monótonas. Os maiores números de erros apareceram na análise das seqüências (f_n), (h_n) e (j_n), todas não-monótonas. Nas seqüências (a_n), (c_n) e (i_n), foram verificados mais acertos, embora não sejam monótonas. Note-se que estas são constituídas por números inteiros, o que parece tornar mais fácil sua análise por parte dos alunos.

Dentre as monótonas, somente foi expressivo o número de erros (1 em branco e 7 erros) em relação à seqüência (b_n), que é crescente. Observamos que nos casos em que se registraram mais respostas erradas, os termos das seqüências aparecem em forma de frações. Pensamos que os alunos têm dificuldade com os números fracionários.

- Convergência

Confirmou-se plenamente a análise a priori, quanto ao aspecto da convergência. Somente 17, 15 e 18 alunos acertaram, respectivamente, as seqüências (f_n), (h_n) e (j_n), todas não-monótonas.

Bour já havia assinalado, na história da elaboração do conceito de convergência, a insistência com a monotonicidade. Nessa pesquisa, podemos observar que esse obstáculo persiste.

Assim, questões relacionadas com esses obstáculos deverão ser formuladas nas próximas atividades.

A atividade foi comentada com a classe na aula seguinte.

Em vista do número de erros na análise da convergência, resolvemos fazer uma abordagem do conceito de seqüência convergente, compatível com os conhecimentos dos alunos na fase atual.

Como eles já haviam estudado no 1º ano os intervalos de números reais, decidimos conceituar seqüência convergente utilizando intervalos.

Após discussões, institucionalizamos que “ uma seqüência converge para um número real *a* (que é o *limite* da seqüência) se e só se todo intervalo aberto (a - ε, a + ε), por menor que seja ε, contém ‘quase todos’ os termos da seqüência”, conforme consta no quadro teórico matemático.

A definição ajudou-os a compreender a convergência das seqüências constantes. Como pensavam em limite (mesmo não utilizando esse termo) apenas como uma “aproximação”, era-lhes difícil aceitar que os termos de uma seqüência (a, a, a, ...) “se aproximem” de a.

Em seguida, foi aplicada a atividade 8.

****

ATIVIDADE 8

Esta atividade foi elaborada com o objetivo de introduzir, intuitivamente, o conceito de subseqüência.

A atividade:

Considere as seguintes seqüências. "Extraia" de cada uma delas, duas seqüências diferentes.

$(a_n) = (1, \; 2, \; 3, \; 2, \; 5, \; 2, \; 7, \; 2, ...)$

$(a_{n_i}) =$

$(a_{n_j}) =$

$(b_n) = (\frac{1}{4}, \; 0, \; \frac{1}{16}, \; 0, \; \frac{1}{36}, \; 0, \; \frac{1}{64}, \; 0, ...)$

$(b_{n_i}) =$

$(b_{n_j}) =$

$(c_n) = (3, \; 6, \; 9, \; 12, \; 15, \; 18, ...)$

$(c_{n_i}) =$

$(c_{n_j}) =$

$(d_n) = (-\frac{1}{2}, \; \frac{2}{3}, \; -\frac{3}{4}, \; \frac{4}{5}, \; -\frac{5}{6}, \; \frac{6}{7}, ...)$

$(d_{n_i}) =$

$(d_{n_j}) =$

Análise a priori:

Os resultados das atividades 6 e 7 mostraram que os alunos continuam com dificuldades em relação à convergência de seqüências não-monótonas.

Pensamos, então, em trabalhá-las através do estudo de suas subseqüências. Esperamos que, analisando exemplos de seqüências que possuam subseqüências convergindo para diferentes limites (ou com subseqüências divergentes), os alunos compreendam melhor o conceito de convergência.

Esse assunto não foi ainda de forma alguma abordado nas aulas. A partir dos resultados obtidos, será organizada a atividade seguinte. As seqüências (a_n), (b_n) e (c_n) já haviam aparecido na atividade 7, mas em outro contexto. Pretendemos analisar alguns aspectos anteriormente vistos, a partir do estudo de suas subseqüências.

A atividade 8 propõe uma experiência diferente das anteriores, mas pensamos que os alunos serão capazes de realizá-la.

Como não sabemos se entenderão ou não o que se espera que façam, é para nós difícil, agora, aventar qualquer hipótese em relação aos resultados.

Aplicação:

A atividade 8 foi aplicada a 27 alunos no dia 9 de maio, após a discussão da atividade anterior.

Os alunos demoraram cerca de 20 minutos para entregar os exercícios resolvidos.

Análise dos resultados:

- <u>Trabalhos inteiramente corretos</u> — 14

  Dentre estes, 11 alunos apresentaram as subseqüências mais óbvias de (a_n), (b_n) e (d_n): nos dois primeiros casos, separando as subseqüências constantes das não constantes; e, na seqüência (d_n), separando subseqüências de termos positivos e negativos.

  Dos outros 3 alunos, um escreveu uma subseqüência de (b_n) utilizando os mesmos termos, a partir do 5º; outro aluno "pulou" alguns termos; e o terceiro construiu todas as subseqüências usando o mesmo critério: copiando a seqüência original, a partir de dois termos de ordem diferente. Por exemplo: a primeira subseqüência foi copiada iniciando no 3º termo de (x_n); e a segunda, a partir do 5º termo.

- Trabalhos com alguns erros — 13

Os erros registrados são dos seguintes tipos:

- Repetir termos que aparecem apenas uma vez na seqüência original: 10 alunos. Exemplo: em relação à seqüência (b_n), um aluno apresentou como exemplo: (0, 1/36, 0, 1/36, 0, 1/36, ...) ;
- Escrever termos que não são da seqüência original: 6 alunos;
- Escrever termos fora da ordem original: 4 alunos.

Apesar dos quatorze exercícios sem erros, não estamos seguros de que esses alunos tenham uma correta concepção de subseqüência, e que não sejam capazes de cometer os erros apresentados pelos outros treze. O fato de um aluno apresentar um exemplo certo não significa necessariamente que ele reconheça os errados.

Entre os alunos que cometeram erros, há seis que se destacaram nas atividades anteriores pelo número mínimo de falhas e pela aparente compreensão do assunto tratado. Entrevistados depois em relação a seus exemplos, suas respostas em geral coincidiram: a princípio, pensaram em dar os exemplos mais óbvios (os que os outros alunos deram), mas quiseram apresentar subseqüências “diferentes”. Assim, poderiam ter acertado, mas tentaram respostas mais sofisticadas.

Então, e os que acertaram, será que também não poderiam ter errado?...

A atividade 8 foi entregue aos alunos e com eles discutida.

Nessa ocasião foi trabalhado o conceito de subseqüência, inicialmente a partir de exemplos e contraexemplos. Em seguida, foi institucionalizado o conceito de subseqüência como sendo uma restrição da função-seqüência a um subconjunto infinito e ordenado de lN.

Esse trabalho ocupou todo o tempo da aula e, em conseqüência, não foi aplicada outra atividade.

****

ATIVIDADE 9

Esta atividade tem por objetivo continuar trabalhando as subseqüências e, através de exemplos dados, verificar se os alunos intuem que se uma seqüência (x_n) converge para a, então toda subseqüência de (x_n) também converge para a.

A atividade:

Considere as seqüências abaixo e suas respectivas subseqüências:

$(a_n) = (1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots)$

$(a_{n_i}) = (1, 1, 1, 1, 1, \dots)$

$(a_{n_j}) = (-1, -1, -1, -1, \dots)$

$(b_n) = (-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots)$

$(b_{n_i}) = (-1, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{16}, -\frac{1}{64}, \dots)$

$(b_{n_j}) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{32}, \frac{1}{128}, \dots)$

$(c_n) = (\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \frac{5}{6}, -\frac{6}{7}, \dots)$

$(c_{n_i}) = (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \dots)$

$(c_{n_j}) = (-\frac{2}{3}, -\frac{4}{5}, -\frac{6}{7}, -\frac{8}{9}, \dots)$

$(d_n) = (0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{6}, 0, \frac{1}{8}, 0, \dots)$

$(d_{n_i}) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \dots)$

$(d_{n_j}) = (0, 0, 0, 0, \dots)$

$(d_{n_r}) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{12}, \frac{1}{16}, \frac{1}{20}, \dots)$

Complete o quadro, marcando com X as respostas corretas.

características	a_n	a_{n_i}	a_{n_j}	b_n	b_{n_i}	b_{n_j}	c_n	c_{n_i}	c_{n_j}	d_n	d_{n_i}	d_{n_j}	d_{n_r}
crescente													
decrescente													
não monótona													
limitada													
ilimitada													
convergente													
divergente													

Análise a priori:

Parece que alguns importantes resultados — teoremas — relacionados ao estudo da convergência foram percebidos pelos alunos, através das atividades anteriores. São eles:

- Uma seqüência não limitada não converge.

A partir desse reconhecimento, foi mais fácil deduzir a contraposição: Toda seqüência convergente é limitada.

- Se uma seqüência é monótona e limitada, então ela é convergente.

Contudo, permanecem as dificuldades em relação às seqüências limitadas e não-monótonas. Pensamos, então, em trabalhar esse problema através das subseqüências. Sua noção foi introduzida, intuitivamente, na atividade 8, e depois discutida com os alunos.

Neste ponto de nosso trabalho, esperamos que os alunos percebam outro importante resultado:

- Se x_n tende a *a*, então toda subseqüência de (x_n) também converge para *a*.

Como não é possível chegar a esta conclusão por meio de exemplos, pretendemos que os alunos tirem conclusões da contrapositiva: se uma seqüência (x_n) possui subseqüências, nem todas convergindo para *a*, então (x_n) não converge.

Com esse propósito, foi elaborada esta atividade 9. Nela os alunos deverão analisar quatro seqüências e algumas subseqüências. Apresentamos duas subseqüências para cada uma das três primeiras; e três para a seqüência (d_n), a fim de que os estudantes não fiquem com a falsa idéia de que cada seqüência só possui duas subseqüências.

Das quatro seqüências apresentadas, duas convergem e duas são divergentes; estas têm suas subseqüências convergindo para limites diferentes.

Todas as seqüências são limitadas (pois parece haver poucas dúvidas quanto à não convergência das seqüências não limitadas).

Em relação à análise da monotonicidade e da limitação, pensamos que agora haverá poucas dúvidas.

Não fazemos o mesmo prognóstico para a convergência das seqüências não-monótonas.

Aplicação:

A atividade foi aplicada a 26 alunos.

O trabalho a ser realizado é bastante parecido com o da atividade 7. Talvez por esse motivo os alunos não fizeram perguntas.

Foram gastos em média 30 minutos até a devolução das atividades resolvidas.

Análise dos resultados:

O quadro seguinte apresenta os números de respostas certas (C) e de erradas (E) dadas à atividade 9:

características	a_n	a_{n_i}	a_{n_j}	b_n	b_{n_i}	b_{n_j}	c_n	c_{n_i}	c_{n_j}	d_n	d_{n_i}	d_{n_j}	d_{n_r}
crescente	-	1 E	-	-	19C	3 E	-	26C	2 E	-	2 E	-	2 E
decrescente	-	-	1 E	-	8 E	23C	1 E	-	24C	-	24C	-	24C
não monótona	24C	1 E	1 E	25C	-	-	25C	-	-	23C	-	3 E	-
limitada	23C	23C	24C	18C	24C	22C	13C	21C	21C	14C	23C	23C	23C
ilimitada	3 E	3 E	2 E	6 E	1 E	4 E	9 E	4 E	5 E	12E	3 E	2 E	3 E
convergente	1 E	26C	25C	7C	23C	23C	1 E	22C	21C	7C	24C	26C	23C
divergente	24C	-	1 E	16E	1 E	1 E	22C	3 E	3 E	18E	1 E	-	1 E

A análise:

- Monotonicidade

  Parecem mais claras as concepções dos alunos quanto à diferenciação entre seqüências monótonas e não-monótonas. Contudo persistem erros quanto ao crescimento das seqüências de termos negativos (8 erros na seqüência (b_{n_i})).

  Entrevistando depois os alunos sobre esses erros, soubemos que eles usavam a calculadora para a comparação das frações, esquecendo-se do sinal negativo.

- Limitação

  Parece que os alunos têm ainda dificuldades em analisar seqüências cujos termos mudam de sinal. Também muitos erros (12) na seqüência (d_n). Entrevistamos depois os alunos que erraram esse tópico; em sua maioria disseram que confundiam seqüência ilimitada com não-monótona. Parece que essas noções ainda não foram bem apreendidas.

- Convergência

  Praticamente não pairam dúvidas quanto às seqüências divergentes: (a_n) e (c_n). Mas as convergentes e não-monótonas — (b_n) e (d_n) — não foram facilmente reconhecidas: 16 erros quanto a (b_n) e 18 em relação a (d_n). Inquiridos sobre seus erros, os alunos disseram que se atrapalharam com o sinal em (b_n), ou que estavam distraídos, ou que responderam com pressa, etc. ... Supomos que a maioria não tem convicção de suas respostas, e não sabe explicar porque as apresentou.

  Parece-nos que essas dificuldades com a convergência das seqüências não monótonas representam um obstáculo epistemológico, que já havia sido observado por Bour: associar a convergência à monotonicidade.

Devido ao elevado número de erros relativos à convergência, resolvemos repetir a análise das seqüências (a_n) e (b_n) na próxima atividade, mas com tratamento diferente. Assim, a atividade 10 será aplicada antes de que esta seja devolvida ou comentada.

ATIVIDADE 10

Nosso objetivo, nesta atividade é verificar se:

- Analisando subseqüências com o mesmo limite, os alunos serão capazes de "intuir" a convergência de uma seqüência.
- Analisando subseqüências com limites diferentes, perceberão que uma seqüência é divergente.

A atividade:

Considere as seqüências seguintes e suas subseqüências:

1) $(a_n) = (1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1, \ldots)$

$(a_{n_i}) = (1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1, \ldots)$

$(a_{n_j}) = (-1,\ -1,\ -1,\ -1, \ldots)$

2) $(b_n) = \left(-1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ -\frac{1}{16},\ \frac{1}{32}, \ldots\right)$

$(b_{n_i}) = \left(-1,\ -\frac{1}{4},\ -\frac{1}{16},\ -\frac{1}{64}, \ldots\right)$

$(b_{n_j}) = \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{32},\ \frac{1}{128}, \ldots\right)$

3) $(c_n) = \left(1,\ \frac{1}{2},\ 3,\ \frac{1}{4},\ 5,\ \frac{1}{6},\ 7,\ \frac{1}{8}, \ldots\right)$

$(c_{n_i}) = (1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9, \ldots)$

$(c_{n_j}) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \ldots\right)$

4) $(d_n) = \left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{3}{4},\ \frac{5}{4},\ \frac{5}{6},\ \frac{7}{6},\ \frac{7}{8}, \ldots\right)$

$(d_{n_i}) = \left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{4},\ \frac{5}{6},\ \frac{7}{8},\ \frac{9}{10}, \ldots\right)$

$(d_{n_j}) = \left(\frac{3}{2},\ \frac{5}{4},\ \frac{7}{6},\ \frac{9}{8}, \ldots\right)$

Complete o quadro, com as respostas corretas:

	const.	crescente	decrescente	ñ monótona	converge p/ n°	ñ converge
(a_{n_i})						
(a_{n_j})						
(a_n)						
(b_{n_i})						
(b_{n_j})						
(b_n)						
(c_{n_i})						
(c_{n_j})						
(c_n)						
(d_{n_i})						
(d_{n_j})						
(d_n)						

Análise a priori:

Devido à permanência, entre os alunos, das dúvidas quanto à convergência das seqüências não-monótonas, resolvemos recolocar a questão, mas de outro modo: ao invés de pedir ao aluno que simplesmente responda se a seqüência converge ou não, nós lhe pedimos para determinar o número para o qual converge, se for o caso.

Para tal, são apresentadas quatro seqüências não-monótonas: duas convergentes e duas divergentes. Dentre estas últimas, uma possui duas subseqüências convergindo para limites diferentes, e outra tem uma subseqüência convergente e outra divergente.

As duas primeiras seqüências — (a_n) e (b_n) — já haviam sido analisadas na atividade anterior. Queremos verificar se permanecem os acertos na primeira, e se diminuem os erros na segunda. Por esse motivo, esta atividade será aplicada sem que a anterior seja devolvida e nem comentada. Queremos evitar que se configure o "efeito Topazio".

Nesta atividade, modificamos a forma de apresentação do quadro de respostas. Vários alunos comentaram que preenchiam o quadro de respostas de um modo que não nos ocorrera: ao invés de se fixarem em uma seqüência e analisarem suas características (que era o que imaginávamos que todos fizessem), eles se fixavam em cada característica e, a partir dela, procuravam as seqüências correspondentes. Imaginamos que assim tenham procedido porque as características apareciam na primeira coluna do quadro.

Assim, resolvemos inverter a posição dos elementos no quadro, colocando as seqüências na primeira coluna, e as características na primeira linha.

Também escrevemos, ao contrário da atividade anterior, em primeiro lugar as subseqüências, e em seguida a seqüência que lhes deu origem. Esperamos que, nesta ordem, os alunos percebam melhor as implicações.

Parece que os alunos já compreenderam que as seqüências ilimitadas não convergem. Para que não usem essa premissa ao analisar a convergência, mas se atenham mais ao comportamento das subseqüências, propositadamente não pedimos a análise da limitação.

Esperamos que o novo enfoque proporcione melhores condições para a compreensão da convergência.

Aplicação:

A atividade 10 foi aplicada a 26 alunos no dia 30 de maio. Os alunos levaram aproximadamente 30 minutos para devolver as folhas.

Análise dos resultados:

No quadro seguinte escrevemos os números de acertos (C) e de erros (E) verificados:

	const.	crescente	decrescente	ñ monótona	converge p/ n°	ñ converge
(a_{n_i})	26 C	-	-	2 E	21C – 1E	3 E
(a_{n_j})	26 C	-	-	2 E	21C – 1E	2 E
(a_n)	4 E	-	1 E	21 C	3 E	22 C
(b_{n_i})	-	23 C	3 E	-	25 C	-
(b_{n_j})	-	3 E	23 C	-	25 C	-
(b_n)	-	1 E	-	25 C	15 C	3 E
(c_{n_i})	-	25 C	-	-	-	26 C
(c_{n_j})	-	1 E	25 C	-	25 C	1 E
(c_n)	-	1 E	1 E	22 C	-	26 C
(d_{n_i})	-	25 C	-	-	25 C	-
(d_{n_j})	-	4 E	22 C	-	16C – 5E	2 E
(d_n)	-	1 E	-	23 C	8C – 2E	15 E

A análise:

- Monotonicidade

Em relação a este aspecto, foram poucos os erros — parece que os alunos já quase não têm dúvidas a esse respeito. Mas dois alunos responderam que a seqüência constante não é monótona; eles achavam que as funções monótonas são apenas as crescentes e as decrescentes, conforme nos explicaram em entrevista posterior.

- Convergência

Neste caso, foi alto o índice de acertos quanto às seqüências divergentes. Mas, em relação às convergentes não-monótonas ainda apareceram erros. Contudo, em menor número do que na atividade anterior.

A seqüência (b_n) foi trabalhada em ambas as atividades: na primeira houve 7 acertos, 16 erros e 3 em branco; desta vez, foram 15 acertos, 3 erros e 8 em branco.

Analisando as folhas de respostas, constatamos que 8 alunos, que haviam anteriormente dado resposta errada, modificaram sua conclusão nesta atividade.

Entrevistados depois, disseram-nos que agora haviam percebido que a seqüência converge. Talvez esta percepção tenha resultado da reformulação do quadro de respostas.

Constatamos muitos erros no caso da seqüência (d_n) — apenas 10 alunos responderam que é convergente, sendo ainda que 2 erraram o limite — embora suas características sejam as mesmas da seqüência (b_n): não monótona, com uma subseqüência crescente e outra decrescente. A única diferença entre ambas está no sinal: em (b_n) os termos alternam os sinais, enquanto que a seqüência (d_n) tem todos os seus termos positivos.

Na semana seguinte as atividades 9 e 10 foram devolvidas e discutidas.

Procuramos, através de exemplos e contraexemplos, revisar alguns pontos que pareciam obscuros aos alunos, como a convergência ou divergência de seqüências não monótonas. Mas nenhum conceito foi institucionalizado nessa ocasião.

Em seguida, foi aplicado o pós-teste.

****

VI — PÓS-TESTE

O pós-teste:

1) Represente as seqüências abaixo, escrevendo os seus 6 primeiros termos:

a) $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

b) $b_n = \begin{cases} n & \text{, se n é número ímpar} \\ \frac{n}{n+1} & \text{, se n é número} \end{cases}$

c) $c_n = \begin{cases} 1 & \text{, se } n \leq 3 \\ \frac{1}{n} & \text{, se } n > 3 \end{cases}$

d) $d_n = 2(-1)^n$

e) $e_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{, se n é número par} \\ \frac{1}{n^2} & \text{, se n é número ímpar} \end{cases}$

2) Dê exemplo, se existir, de uma seqüência de cada um dos seguintes tipos:

(a) seqüência limitada e convergente
(b) seqüência não limitada e convergente
(c) seqüência limitada e divergente
(d) seqüência monótona limitada
(e) seqüência não monótona limitada
(f) seqüência não monótona e não limitada
(g) seqüência de termos positivos, não monótona, convergindo para zero.

3) Coloque V(Verdade) ou F(Falso):

( ) Toda seqüência que converge é limitada.

( ) Toda seqüência limitada é convergente.
( ) Toda seqüência convergente é monótona.
( ) Toda seqüência monótona é convergente.
( ) Toda seqüência monótona e limitada converge.
( ) Toda seqüência constante converge.
( ) Uma seqüência pode ter dois limites diferentes.
( )Toda seqüência que possui uma subseqüência convergente é convergente.
( ) Se (x_n) converge para a, então toda subseqüência de (x_n) também converge para a .
( ) Seqüência de números reais é uma função de lN em lR.

Objetivo e análise a priori:

O objetivo desse pós-teste é proceder a uma avaliação geral dos resultados obtidos com esse trabalho.

Com essa finalidade foram elaboradas três questões aparentemente diferentes, mas de tal modo que, se o aluno tiver acuidade, poderá utilizar umas na análise de outras.

1ª Questão — Os alunos deverão representar cinco seqüências, a partir do termo geral dado. São elas dos seguintes tipos:

- uma convergente e não-monótona, com termos de sinais alternados;
- uma não-monótona, divergente e ilimitada;
- uma convergente e não crescente;
- uma não-monótona, divergente e limitada;
- uma não-monótona, limitada, com termos positivos convergindo para zero.

Nesta questão verificaremos se os alunos:

- determinam corretamente os termos da seqüência;
- usam parênteses ou chaves na sua representação;
- usam corretamente as reticências.

Pensamos que haverá poucos erros (talvez alguns por distração) porque esse tipo de questão foi muito trabalhado na seqüência didática.

2ª Questão — Os alunos deverão dar exemplos de seqüências que tenham determinadas características. Se forem atentos, poderão reutilizar as seqüências da primeira questão (algumas em mais de um exemplo). Entre os exemplos, pedimos uma seqüência não-limitada e convergente — desejamos verificar, especialmente nesse caso, que resposta será dada.

O último exemplo solicitado — seqüência não-monótona, de termos positivos, convergindo para zero — é um exemplo clássico, considerado "difícil"; notemos que é exatamente o caso da seqüência (e_n) da primeira questão. Verificaremos se os alunos aproveitarão essa seqüência (ou se construirão outra análoga).

3ª Questão — Esta é, para nós, a questão mais importante. Através dela sondaremos as concepções dos alunos acerca dos principais resultados.

Também aqui as primeiras questões poderão ser utilizadas na análise de algumas afirmações. É o caso, por exemplo, da terceira asserção — toda seqüência convergente é monótona — basta utilizar as seqüências (a_n) ou (e_n) da primeira questão para se concluir que a sentença é falsa.

Aplicação:

O teste foi aplicado a 26 alunos no dia 6 de junho. Os alunos gastaram em média uma hora nesse trabalho.

Análise dos resultados:

- <u>Questão 1</u>

Observamos que três alunos erraram todas as seqüências, embora acertassem os termos, porque utilizaram chaves ao invés de parênteses. Desse modo, o número de acertos pode ser considerado em relação a 23 alunos.

(a) = (-1/2, 1/4, -1/8, 1/16, -1/32, 1/64, ...) — 21 acertos

(b) = (1, 2/3, 3, 4/5, 5, 6/7, ...) — 17

(c) = (1, 1, 1, 1/4, 1/5, 1/6, ...) — 16 acertos

(d) = (-2, 2, -2, 2, -2, 2, ...) — 21

(e) = (1, 1/2, 1/9, 1/4, 1/25, 1/6, ...) — 18

Parece que os erros que foram assinalados devem-se, em geral, à falta de atenção: algum cálculo errado, "pular" um termo, etc. Nenhum aluno deixou de colocar reticências.

- Questão 2

Número de acertos nos exemplos:
(a)- 25   (b)- 21   (c)- 15   (d)- 24   (e)- 19   (f)- 14   (g)- 9

(a) Muitos alunos utilizaram a seqüência do exemplo (1) da primeira questão; e diversos construíram uma seqüência monótona e a repetiram no item (d).
(b) 21 alunos responderam que não existe seqüência não-limitada convergente. Esse resultado reforça nossas observações sobre a compreensão dos alunos em relação a esse teorema.
(c) A seqüência (d_n) da primeira questão foi muito usada; a maior parte dos exemplos foi do mesmo tipo.
(d) Diversos exemplos iguais ao exemplo do item (a); mas também apareceram 10 com seqüências constantes, o que é interessante, já que não foi apresentado esse tipo de seqüência na primeira questão.
(e) Foi muito usada a seqüência (d_n) da primeira questão.
(f) Vários exemplos com a seqüência (b_n)
(g) Somente 9 acertos; quase todos iguais à seqüência (e_n) (ou com variações), o que já era esperado.

- Questão 3

1 - (V) Toda seqüência que converge é limitada. — 23 acertos
2 - (F) Toda seqüência limitada é convergente. — 20
3 - (F) Toda seqüência convergente é monótona. — 17

4 - (F) Toda seqüência monótona é convergente. — 18 acertos
5 - (V) Toda seqüência monótona e limitada converge. — 20
6 - (V) Toda seqüência constante converge. — 25
7 - (F) Uma seqüência pode ter dois limites diferentes. — 12
8- (F) Toda seqüência que possui uma subseqüência convergente é convergente. — 21
9 - (V) Se (x_n) converge para a, então toda subseqüência de (x_n) também converge para a . — 11
10 - (V) Seqüência de números reais é uma função de lN em lR. — 24

Excetuando-se as asserções 7 e 9, as demais parecem mostrar que a maioria dos alunos entende que:

- Seqüência de números reais é função de lN em lR. – item 10
- Toda seqüência convergente é limitada, mas não vale a recíproca. – 1 e 2.
- Uma seqüência convergente nem sempre é monótona; e uma monótona pode ser divergente. – 3 e 4
- Toda seqüência monótona e limitada converge. – 5
- Toda seqüência constante é convergente. – 6
- Uma seqüência divergente pode possuir subseqüências convergentes. – 8

Por outro lado, 14 alunos acham que uma seqüência pode ter dois limites diferentes. – (asserção 9)

Entrevistando depois esses alunos, pudemos verificar que eles concebem limite de seqüência como qualquer limite de subseqüência (isto é, como um valor de aderência, expressão que desconhecem).

As respostas ao item 9 do pós-teste parecem mostrar que não foi totalmente atingido um objetivo proposto na atividade 9: os alunos deveriam deduzir que, se (x_n) converge a a, então toda subseqüência de (x_n) também converge para a. Apenas 11 alunos responderam afirmativamente.

VII — CONCLUSÕES

Ao iniciarmos este trabalho, nos propusemos investigar se alunos que nunca haviam estudado limites e aproximações seriam capazes de, por meio de atividades, construir conceitos relacionados com a convergência de seqüências, e de estabelecer determinadas relações entre eles.

Procedendo a essa investigação organizamos uma seqüência didática, composta de dez atividades, nas quais foram sendo trabalhados, através de problemas, os conceitos relacionados com a convergência de seqüências.

A análise dos resultados das atividades, as discussões de erros e acertos durante as sessões de retorno dos trabalhos, as entrevistas individuais com os alunos e as respostas ao pós-teste nos permitiram chegar às conclusões que agora serão apresentadas.

Quanto ao objeto matemático, os resultados indicam que a maioria dos alunos entendeu que:

- Seqüência de números reais é função de lN em lR.
- Toda seqüência convergente é limitada, mas não vale a recíproca.
- Uma seqüência convergente nem sempre é monótona; e uma monótona pode ser divergente.
- Toda seqüência monótona e limitada converge.
- Toda seqüência constante é convergente.
- Uma seqüência divergente pode possuir subseqüências convergentes.

Contudo, muitos alunos continuam com a concepção de que uma seqüência pode ter limites diferentes. Isto mostra que o objetivo relacionado com a percepção da unicidade do limite não foi plenamente alcançado. Parece que os alunos concebem limite de seqüência como qualquer limite de subseqüência. Este é um obstáculo que precisa ser mais trabalhado.

****

Nossa pesquisa permitiu-nos também outras conclusões.

Aline Robert, em sua análise das concepções de convergência destacou quatro modelos de representação de seqüência. Em nosso trabalho, embora não tivéssemos solicitado aos alunos uma definição de seqüência convergente, pudemos observar que é muito presente o modelo "dinâmico monótono", que relaciona convergência com monotonicidade e movimento. Por exemplo, inicialmente os alunos supunham que uma seqüência constante não converge, porque seus termos "não se aproximam de nenhum número".

A relação monotonicidade/convergência é uma dificuldade muito presente nos trabalhos: os alunos cometeram erros quanto à convergência das seqüências não-monótonas; freqüentemente associaram convergência à monotonicidade.

Esta dificuldade foi assinalada também por Bour, em sua análise epistemológica, e por Sierpinska ao pesquisar os obstáculos relativos à noção de limite. Dentre estes, Sierpinska observa o erro que consiste em confundir a seqüência com sua imagem. Essa troca foi freqüente em nossas atividades.

Também o "horror ao infinito", assinalado por esta pesquisadora, é um obstáculo que foi registrado em várias atividades. Uma de suas manifestações consiste em considerar todo conjunto infinito como ilimitado. Este erro apareceu freqüentemente nas atividades iniciais.

Outro erro: considerar o infinito como um número desconhecido. Por exemplo: na atividade 1, à questão "qual conjunto tem mais elementos: {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} ou {1, 2, ..., n }?", diversos alunos responderam: "o segundo tem mais elementos, porque n é infinito". Este erro desapareceu no decorrer das atividades.

Queremos observar que a análise de acertos e erros parece ter dado bons resultados. Este trabalho mostra a importância de serem feitas discussões para analisar os erros. E mais: as entrevistas com os alunos mostraram que nem sempre o aluno que acerta tem convicções firmes sobre sua resposta, isto é, não está convicto de como seriam as respostas erradas. Os resultados da atividade 8 mostraram que o aluno poderia ter dado a resposta certa, mas errou ao tentar "sofisticá-la".

Certos erros sistematicamente apareceram em diversos trabalhos, e os anotamos aqui, sugerindo sua análise como tema de futuras pesquisas:

- Dificuldades na comparação de números negativos.

- Dificuldades no trato com números fracionários.

- Para uma grande parte dos alunos conjunto infinito é conjunto ilimitado.

- No problema de sondagem apresentado na pré-experimentação, o arredondamento das somas efetuadas pela calculadora, “mascarou” as aproximações, devido ao número limitado de dígitos. Parece-nos interessante uma pesquisa sobre a oportunidade (ou não) do uso das calculadoras em certos problemas.

- Parece que os alunos não concebem domínio, contradomínio e imagem de função como conjuntos. Na atividade 1 apareceram afirmações como:

  “... o conjunto-imagem é uma P.A. ”
  “domínio = 1, 2, 3, ... ”
  “domínio = números naturais ”

- No início da pesquisa, os alunos referiam-se à seqüência “finita”.
  Diziam que (1, 3, 5, 7, 9) é uma seqüência com 5 termos.
  Na atividade 2, dezessete alunos (em 27) cometeram este erro.

O fato sugere uma análise dos livros didáticos voltados para o ensino médio, investigando:

como são definidas as seqüências?
o domínio é IN ?
como justificam a P.A. finita?
dá-se ênfase ao estudo das seqüências, ou apenas à P.A. e à P.G.?

Observamos, quando da aplicação da atividade 2, que diversos alunos associavam seqüência apenas aos exemplos de P.A. ou P.G.:

“... não é seqüência pois não é P.A.”
“... sim, pois formam uma P.A....”
“... sim, porque os temos se repetem de dois em dois...”
“... não é P.A. nem P.G. ...”

A experiência que realizamos representou uma ruptura de nossa prática pedagógica tradicional, em favor de uma nova dinâmica, o que exigiu de nós e dos alunos uma mudança de postura. Em nossa prática tradicional, os conceitos são trabalhados geralmente na seguinte ordem: definições, exemplos, propriedades, teoremas, exercícios de aplicação. Na experiência que realizamos, essa ordem foi totalmente invertida: as definições (institucionalizações) só eram apresentadas ao final dos trabalhos.

Não há dúvidas quanto às dificuldades que esse novo processo ocasionou, no início, tanto para nós quanto para os alunos. Mas essas dúvidas foram rapidamente dissipadas. Logo os alunos se mostraram interessados em participar da experiência (embora temerosos quanto à avaliação). Contudo manifestaram boa vontade em relação ao novo procedimento.

O questionário anexo mostra que, dos 25 alunos entrevistados, 23 consideram válida a experiência, e 17 acham possível trabalhar dessa forma em outras disciplinas.

Quanto ao nosso trabalho, nós o consideramos muito estimulante, quando começamos a perceber suas possibilidades. Acreditamos que é possível desenvolver outras seqüências desse tipo em um curso de licenciatura.

Durante a aplicação da seqüência tivemos o cuidado de nos conduzir de modo a evitar a ocorrência do efeito Topázio: procuramos não induzir o aluno em seu trabalho. Pensamos ter sido bem sucedidos neste sentido.

Também observamos que nossos alunos, após essa experiência, demonstram agora maior desenvoltura no trato de conceitos do que as turmas anteriores.

É interessante observar que nem todos os alunos considerados "ótimos" tiveram o melhor desempenho. E, por outro lado, diversos alunos considerados "fracos" apresentaram desempenho excelente. Pensamos que esses resultados estão ligados ao tempo didático e tempo de aprendizagem, que, conforme constatamos, nesta experiência não coincidem.

Finalizando, transcrevemos o depoimento de uma aluna dessa turma, a respeito de nossa experiência:

> *"É um aprendizado mais lento, a cada dia aprendemos um novo conceito e reafirmamos o anterior, portanto, é um aprendizado sólido. Aprendemos com o erro, e assim conseguimos entender o conceito correto."*

****

VIII - BIBLIOGRAFIA

[1] ALMOULOUD, S. A.. *Fundamentos da Didática da Matemática e Metodologia de Pesquisa*. Vol III. CEMA - PUC-SP, São Paulo, 1997.

[2] ARTIGUE, M. *Ingénierie didactique in Recherches en Didactique des Mathématiques*, vo1.9, n° 3. Grenoble, 1988.

[3] Á VILA, G.. *Introdução à Análise Matemática*. Ed. Edgard Bltícher Ltda - São Paulo, 1993.

[4] BOUR, M. C.. *PapierIREM*, n° 4. Ed. IREM de Paris Sud, 1980 (Anexo à tese de Aline Robert).

[5] BROUSSEAU, G. *Fondements et méthodes de Ia didactique des mathématiques*. Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 7, n° 2. Grenoble, 1986.

[6] CHEV ALLARD, Y. *Sur l'analyse didactique: deux études sur les notions de contract et de situation*. Publication de l'IREM d' Aix Marseille, 14,1988.

[7] DOUADY, R. *Jeux des cadres et dialéctique outil-objet*. RDM, VII. Grenoble, 1986.

[8] DOUADY, R. *L'ingeniérie didactique: un moyen pour l'enseignant d' organiser les rapports entre l'enseignement et l'apprentissage.* Cahier de DIDlREM. Paris, Université Paris VII, nº 19 1. Janeiro, 1993.

[9] FREITAS, J. L. M.. *Situações Didáticas* in *Educação Matemática: Uma Introdução.* Ed. Educ. São Paulo, 1999.

[10] IGLIORI, S. H. C.. *A Noção de "Obstáculo Epistemológico" e a Educação Matemática* in *Educação Matemática: Uma Introdução.* Ed. Educ. São Paulo, 1999.

[11] LIMA, E. L. de. *Análise Real* – Vol 1 - IMPA - Rio de Janeiro, 1989.

[12] LUNA, S. V ..*Planejamento de Pesquisa: Uma Introdução.* Ed. Educ. São Paulo, 1999.

[13] MACHADO, S. D. A.. *Engenharia Didática* in *Educação Matemática: Uma Introdução.* Ed. Educ. São Paulo, 1999

[14] MARANHÃO, M. C. S. A. .*Dialética Ferramenta-Objeto* in *Educação Matemática: Uma Introdução.* Ed. Educ. São Paulo, 1999.

[15] PAIS, L.C.. *Transposição Didática* in *Educação Matemática: Uma Introdução.* Ed. Educ. São Paulo, 1999.

[16] ROHERT, A.. *L'Acquisition de La Notion de Convergence Des Suites Numeriques Dans L'Enseignement Superieur. Recherches en Didactique des Mathématiques.* Vo1 3. n° 3,1982.

[17] ROHERT, A.. *These deDoctoratD'Etat.* Universite Paris VII, 1982.

[18] SEVERINO, A. J.. *Metodologia do Trabalho Científico.* Ed. Cortez. São Paulo, 2000.

[19] SIERPINSKA, A.. *Obstacles épistémologiques relatifs à Ia notion de limite*. RDM, vol. 6, 1985.

[20] SILVA, H. A.. *Contrato Didático* in *Educação Matemática*. Ed. Educ. São Paulo, 1999.

****

IX — ANEXOS

Anexo 1 — QUESTIONÁRIO

1) Em que ano você terminou o 2º grau?

9 alunos terminaram o 2º grau há mais de 10 anos, sendo que 8 destes o fizeram há mais de 15 anos.

2) Você fez o 2º grau em escola pública ou particular?

Escola pública: 18 alunos com média de 3,17 anos
Escola particular: 9 alunos com média de 2,78.
Obs. : Alguns alunos cursaram a escola pública e a particular.

3) Você freqüentou o 2º grau em qual período?

diurno: 18 alunos - média de 3,13 anos
noturno: 8 alunos - média de 2,13 anos
integral: 3 alunos - média de 3,00 anos.
Obs. : Alguns alunos cursaram o 2º grau em períodos diferentes.

4) Você freqüentou outro curso superior?

não: 19 alunos

sim: 6 alunos
- 1 – Geologia – completo
- 2 - Engenharia
- 1 - Matemática
- 1 - Arquitetura
- 1 - Ciências Contábeis

(Engenharia, Matemática, Arquitetura, Ciências Contábeis:) incompleto (no máximo 2 anos)

5) Em que cidade você mora?

Aparecida do Norte	– 3	Guaratinguetá	- 6
Cachoeira Paulista	- 3	Lorena	- 8
Cruzeiro	- 1	Penedo (RJ)	- 1
Cunha	- 1	Pindamonhangaba	- 1
		Piquete	- 1

Obs.: $\frac{2}{3}$ dos alunos moram em outras cidades.

6) Quanto tempo você gasta em locomoção de sua casa ao Centro UNISAL (ida e volta) ?

Para 25 alunos, o tempo variou de 20 minutos a 4 horas, com média de 80 minutos; mas 9 alunos gastam 40 minutos ou menos.

7) Você trabalha? Em quê? Quantas horas semanais?

4 alunos não trabalham;

21 alunos trabalham de 4 a 51 horas semanais; um deles trabalha 105 horas ;

Média (excluído o aluno das 105 horas) : 30,59 horas semanais.

Destes: 9 lecionam em escolas;
2 são funcionários federais;
2 são bancários;
6 têm empregos diversos;
2 não declararam.

8) Quem financia seus estudos?

o próprio aluno: 18
seus pais: 6
seu cônjuge: 1
outros: 1
(Um aluno citou mais de uma fonte.)

9) Por que você resolveu cursar matemática?

Gosta de matemática: 22 alunos
Gosta de matemática, embora tenha dificuldade: 1 aluno
Quer lecionar: 3 alunos
Quer aprofundar seus conhecimentos: 2 alunos
Por necessidade do trabalho: 1 aluno
A mãe é professora de matemática: 1 aluno
Não conseguiu entrar no curso de sua escolha: 1 aluno
Acha que "a matemática evidencia alto nível intelectual de quem a domina": 1 aluno
Por ouvir elogios ao curso: 1 aluno
Quer fazer mestrado em matemática, apesar da idade: 1 aluno.
(Alguns alunos citaram mais de um motivo.)

10) Você leciona matemática?

Não: 16 alunos

Sim: 9 alunos $\begin{cases} 1^{\circ} \text{ grau: } 9 \\ 2^{\circ} \text{ grau: } 3 \end{cases}$

11) Você estuda fora do horário de aulas?
- diariamente: 6 alunos
- nos finais de semana: 8 alunos
- de vez em quando: 6 alunos
- só para as provas: 5 alunos.

12) Você dispõe de quantas horas para estudar, fora do horário de aulas?

Média: 5,9 horas semanais.

(Alguns alunos não dispõem de nenhum tempo livre; estudam durante a noite, em época de provas.)

13) Você gosta do curso que está fazendo?
- Sim: 21 alunos
- Mais ou menos: 4 alunos
- Não: —

14) Você tem preferência por alguma disciplina?
- Não: 10 alunos
- Sim: 15 alunos

Geometria: 5	Desenho: 2
Álgebra: 4	Química: 2
Física: 3	Trigonometria: 2
Lógica: 3	Cálc. Dif. Int.-I: 1
Geom. Analítica: 2	Todas as disc. de matemática: 1

15) Em matemática você prefere:
- Efetuar cálculos: 21 alunos
- Estudar conceitos: 4

16) Você cursa outras disciplinas além daquelas do segundo ano?

Não: 21 alunos   Sim: 4 alunos.

17) Você cursou Álgebra I no Centro UNISAL ?

Não: 4 alunos	Sim: 21 alunos
	em 1997: 1
	em 1998: 8
	em 1999: 17

Observações:

1) Alguns alunos cursaram a disciplina em mais de um ano.

2) O objetivo desta questão é saber quem estudou (ou não) Álgebra I em 1999. Nessa ocasião foi iniciado este trabalho.

18) Atribua notas de 1 a 10 aos assuntos que você considera mais difíceis (notas mais baixas) e aos mais fáceis (notas mais altas).

(7,0) domínio de funções
(7,4) conjunto-imagem de funções
(8,0) funções monótonas
(6,9) conjuntos limitados
(6,8) seqüências limitadas
(7,9) seqüências monótonas
(7,9) seqüências não monótonas
(6,9) seqüências convergentes
(7,0) subseqüências.

O objetivo desta questão é tentar estabelecer uma relação entre os conteúdos onde foram verificadas as maiores dificuldades, e as notas que os alunos lhes atribuem. É significativo que a média mais baixa seja a de seqüências limitadas, e a mais alta a atribuída às funções monótonas.

19) Você já havia anteriormente estudado as seqüências de números reais?

Não: 21 alunos
Sim: 4 alunos (no 2° grau, no estudo de P.A. e P.G.)

20) Você acha que é válido trabalhar alguns conceitos da forma como estamos trabalhando as seqüências? Por quê?

Não: 2 alunos.

Motivos:

- "Pode ser mais difícil."
- "Tive muita dificuldade no começo, pois nunca tinha visto e demorei para entender que se tratava de um assunto fácil, e tive nota prejudicada nesse período."

Obs.: Essa resposta é de um aluno que respondeu sim e não, justificando ambos.

Sim: 23 alunos.

Motivos:

- "Para aprofundar e abordar o assunto de maneira mais completa"

- “Essas atividades ajudaram muito a memorizar a matéria.”
- “Aumenta o aprendizado.”
- “Conforme os erros, facilita a compreensão e a aprendizagem.”
- “Conseguimos entender melhor.”
- “Colocamos nos testes o que pensamos sem ter visto, para depois sabermos o certo ou errado.”
- “Com esse trabalho, vamos guardando e sempre tirando as dúvidas que temos.”
- “Torna o aprendizado mais fácil e abrangente.”
- “É muito mais fácil guardar as informações.”
- “Trabalhar conceitos em forma de atividades de aplicação é a melhor forma de aprender.”
- “Temos a oportunidade de corrigir nossos conceitos.”
- “Para mim foi muito bom, pois entendi realmente. Não houve um acúmulo da matéria, porque todas as semanas estávamos estudando seqüências.”
- “Aprendi muito mais.”
- “Ajudou-me a aprender bem, só não gostei de valer nota.”
- “É um aprendizado mais lento, a cada dia aprendemos um novo conceito e reafirmamos o anterior, portanto, é um aprendizado sólido. Aprendemos com o erro, e assim conseguimos entender o conceito correto.”
- “Força indiretamente o aluno a estudar todos os dias.”

Obs.: Alguns alunos não justificaram sua resposta, e diversos apresentaram respostas semelhantes.

É interessante observar o número de alunos que acharam válido o trabalho, considerando que, no 1° bimestre, 13 dos 26 alunos tiveram notas mais baixas nas atividades do que na prova bimestral; e no 2° bimestre, 12 alunos tiveram suas médias diminuídas em função das notas mais baixas nas atividades.

21) Como você classificaria este estudo das seqüências comparativamente com as outras disciplinas da área de exatas do Curso de Ciências e Matemática?

seqüências são mais fáceis: 14 alunos
seqüências são mais difíceis: —
seqüências são tão fáceis (ou tão difíceis) quanto: 9 alunos.

22) Você acha que é possível trabalhar outros assuntos dessa mesma forma?

não: 6 alunos

não sei: 1 aluno

sim: 17 alunos. Quais?

Limites: 3

Funções: 3

Geometria Analítica: 2

Grupos: 1

Lógica: 1

Cálc. Dif. Integral: 1

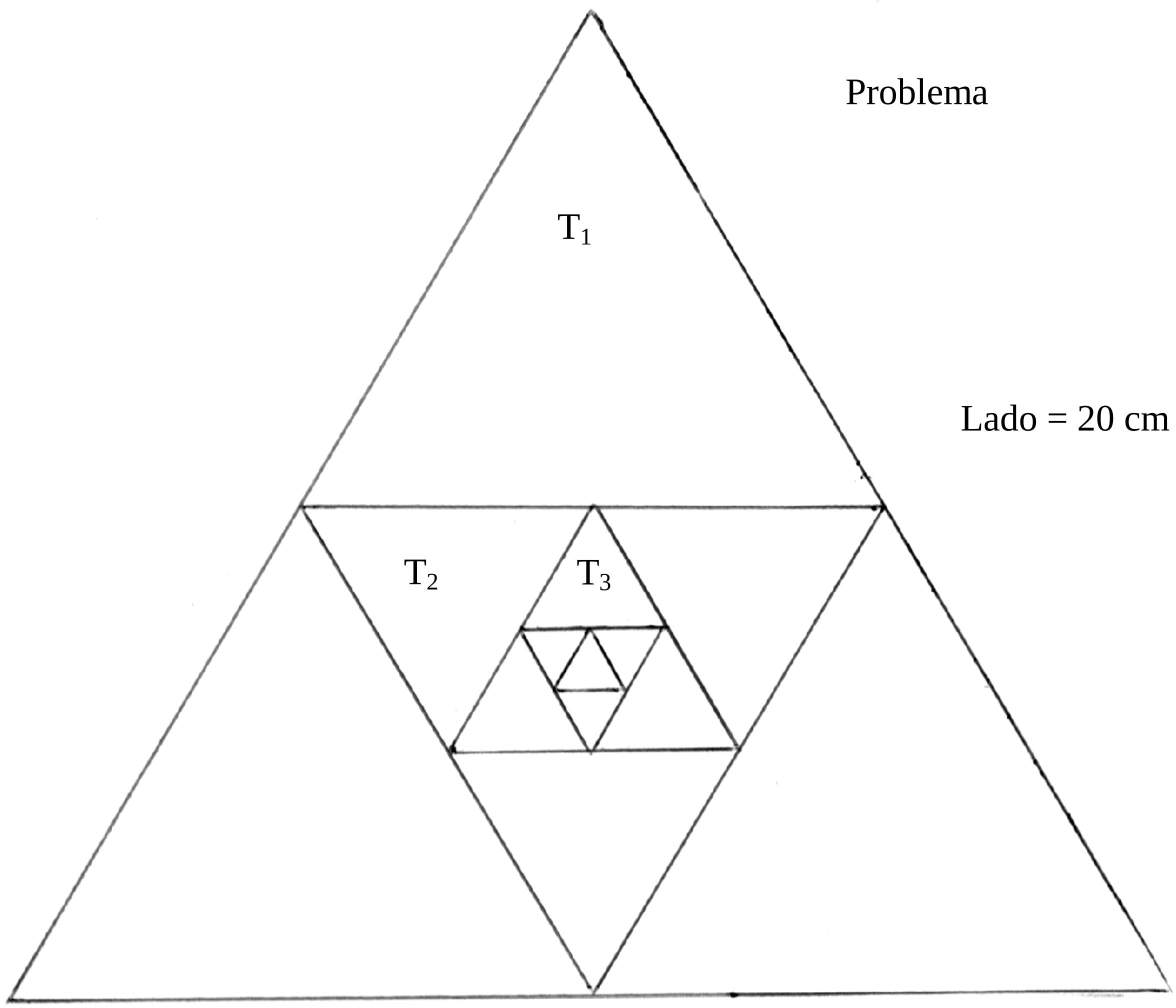
Geometria Plana e Espacial: 1

Conjuntos: 1

qualquer assunto: 3

****

Anexo 2 — PRÉ-EXPERIMENTAÇÃO



Seja T_1 um triângulo equilátero cujo lado mede 20 cm. Unindo-se os pontos médios de seus lados, obtém-se um triângulo equilátero T_2. Unindo-se os pontos médios de T_2 obtém-se T_3, e assim sucessivamente. considere a seqüência de triângulos T_1, T_2, T_3, ...

1) Calcule os perímetros de T_1, T_2, T_3 e T_4.

2) Calcule a soma dos perímetros dos quatro primeiros triângulos.
3) Calcule a soma dos perímetros dos seis primeiros.
4) Calcule a soma dos oito primeiros perímetros, dos nove, dos dez, dos onze e dos doze primeiros perímetros.
5) Quantos triângulos você acha necessários para atingir uma soma de perímetros igual a 120 cm? Justifique sua resposta.

Obs.: Perímetro de um polígono é a soma das medidas de seus lados.

****

Anexo 3 — A SEQÜÊNCIA DIDÁTICA

ATIVIDADE 1

1) 1. Escreva os 3 primeiros números naturais
   2. Escreva os 7 primeiros números naturais
   3. Escreva os n primeiros números naturais
   4. Escreva todos os números naturais
   Resp. : 1.
   2.
   3.
   4.

2) 1. Na questão 1) 2. há mais ou menos números que na 1) 3.?
   Resp.:

   2. E na questão 1) 3. com 1) 4.?
   Resp.:

3) 1.Quantos elementos tem cada um dos conjuntos?
   A={1,2,3,4} e B={1,2,3,4,...}
   Resp.:

   C={1,2,3,...,15} e D={1,2,3,...,15,...}
   Resp.:

   E={1,2,3,4,...,n} e F={1,2,3,4,...,n,...}
   Resp.:

   2. Há diferença entre os conjuntos C e D?
   Resp.:

   3. Há diferença entre os conjuntos E e F?
   Resp.:

4) Complete a tabela::

1	1
2	3
3	5
4	
5	⋮
⋮	
n	
⋮	⋮

1. Quantos números tem a 1^a coluna?
   E a 2^a ?
2. Que tipo de números figuram na 1^a ?
   E na 2^a coluna?
3. A cada elemento da 1^a coluna quantos correspondem na 2^a ?
4. A tabela representa uma __________________ cujo domínio é ____________,
   cujo contradomínio é _______________, e cujo conjunto-imagem é ________.

****

ATIVIDADE 2

Verifique, dentre os seguintes exemplos, quais representam seqüências. Justifique cada resposta.

1)

x	y
1	-7
2	-5
3	-3
4	-1
5	1
⋮	⋮

Resposta:

2)

x	y
⋮	⋮
-2	-6
-1	-3
0	0
1	3
2	6
3	9
⋮	⋮

Resposta:

3) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$n \mapsto f(n) = 2n - 1$

Resposta:

4) $g: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$

$z \mapsto g(z) = 2z - 1$

Resposta:

5) $x: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$n \mapsto x_n = \sqrt{7}$

Resposta:

6) (-1, 0, -1, 0, -1, 0,...)

Resposta:

7) (1, 3, 5, 7, 9)

Resposta:

8) (2/5, 3/7, 4/9, 5/11, 6/13, ...)

Resposta:

9) (..., -7, -4, -1, 2, 5, 8,...)

Resposta:

10)

x	1	2	3	4	5
y	10	20	30	40	50

Resposta:

11)

x	1	2	3	4	5
y	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{5}$

Resposta:

12)

x	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	...
y	-2	-3	-4	-5	...

Resposta:

****

ATIVIDADE 3

Considere as seguintes seqüências:

a)

x	1	2	3	4	5	6	....
y	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	....

c) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$n \mapsto f(n)=n^2-6n+8$

b)

x	1	2	3	4	5	6	7	...
y	4	4	4	4	4	4	4	...

d) $g: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$n \mapsto g(n) = \frac{n}{n+1}$

e) $x: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$$n \mapsto x_n = \begin{cases} -\frac{1}{n} & \text{, se n é ímpar} \\ \frac{1}{n} & \text{, se n é par} \end{cases}$$

1) Represente cada seqüência na reta lR:

a) ______________________________

b) ______________________________

c) ______________________________

d) ______________________________

e) ______________________________

2) Complete o quadro, marcando com X.

2.1) As seqüências crescentes, as decrescentes, as constantes e as não monótonas (se houver)
2.2) As seqüências cujos termos “se aproximam” de algum número (não é preciso determiná-lo)

	a	b	c	d	e
monótona crescente					
monótona decrescente					
monótona constante					
não monótona					
seus termos “se aproximam” de um n°					

****

ATIVIDADE 4

Considere as seqüências abaixo, definidas por seu termo geral:

a) $x_n = \dfrac{1}{n}$ b) $a_n = 2n$ c) $u_n = (-1)^n$

d) $y_n = \dfrac{3}{7}$ e) $v_n = \dfrac{-n}{n+1}$ f) $c_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

g) $b_n = \begin{cases} 1, & \text{se n é ímpar} \\ \dfrac{1}{n^2}, & \text{se n é par} \end{cases}$ h) $z_n = \begin{cases} n+1, & \text{se } n \leq 3 \\ 4, & \text{se } n > 3 \end{cases}$

1) Escreva cada seqüência designando seus termos (no mínimo os 6 primeiros).

2) Escreva o conjunto-imagem de cada seqüência.

3) Verifique quais seqüências têm o conjunto imagem limitado.

****

ATIVIDADE 5

1) Considere as seqüências (a_n), (b_n), (c_n) e (d_n) definidas abaixo. Para cada uma delas:
a) escreva seus 6 primeiros termos;
b) escreva seu conjunto-imagem;
c) verifique se seus termos “cabem” ou não no intervalo [0,2].

$a_n = \frac{2}{n}$

a)
b)
c)

$b_n = -\frac{1}{6}$

a)
b)
c)

$$c_n = \begin{cases} 2 & \text{, se n é par} \\ \frac{1}{2^n} & \text{, se n é ímpar} \end{cases}$$

a)
b)
c)

$d_n = \frac{2n}{n+2}$

a)
b)
c)

2) Coloque V(Verdadeiro) ou F(Falso)

( ) {1,3,5,7,9,...} é ilimitado e infinito

( ) [$\sqrt{2}$,58) é limitado e infinito

( ) a seqüência (4,3,2,4,3,2,4,3,2,...) tem conjunto imagem limitado e infinito.

( ) {64, 32, 16, 8, 4, 2, ...} é infinito e limitado

( ) $\left\{ \frac{1}{5}, \frac{3}{7}, \frac{5}{9}, \frac{7}{11}, \ldots \right\}$ é ilimitado e infinito

ATIVIDADE 6

Considere as seguintes seqüencias:

$(a_n) = (0; 0{,}25; 0{,}50; 0{,}75; 1{,}00; 1{,}25; ...)$

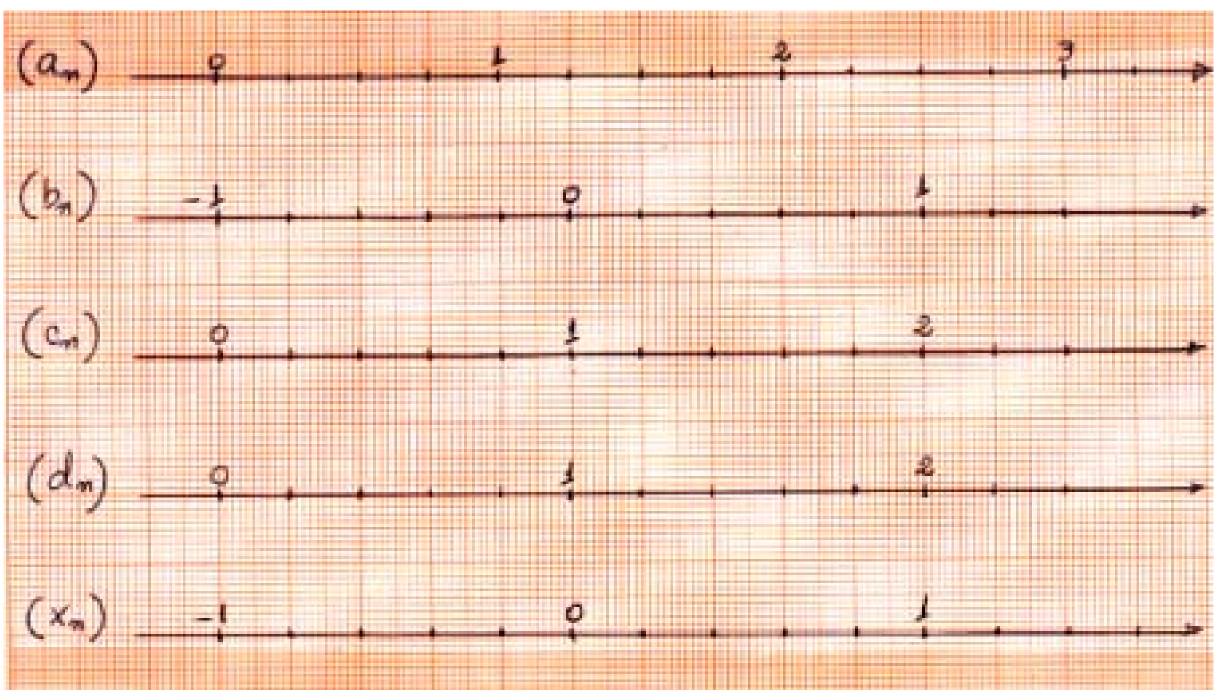
$(b_n) = (0, -\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, -\frac{5}{6}, ...)$

$(c_n) = (1, \frac{3}{2}, 1, \frac{5}{4}, 1, \frac{7}{6}, ...)$

$(d_n) = (1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{9}{5}, \frac{11}{6}, \frac{13}{7}, ...)$

$(x_n) = (-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, -\frac{5}{6}, \frac{6}{7}, ...)$

1) Represente cada seqüência na reta lR, de acordo com a escala dada.



2) Complete o quadro. Marque com X a resposta.

Características	a_n	b_n	c_n	d_n	x_n
crescente					
decrescente					
não monótona					
limitada					
ilimitada					
convergente					

****

ATIVIDADE 7

Considere as seguintes seqüências:

$(a_n) = (1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, ...)$

$(b_n) = (1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{15}{8}, \frac{31}{16}, \frac{63}{32}, ...)$

$(c_n) = (0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, ...)$

$(d_n) = (-2, -\frac{3}{6}, -\frac{4}{3}, -\frac{5}{4}, -\frac{6}{5}, ...)$

$(e_n) = (3, 6, 9, 12, 15, 18, ...)$

$(f_n) = (-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \frac{1}{32}, ...)$

$(g_n) = (20, 10, 5, \frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{8}, ...)$

$(h_n) = (1, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{16}, \frac{1}{5}, \frac{1}{36}, \frac{1}{7}, ...)$

$(i_n) = (1, 2, 3, 2, 5, 2, 7, 2, ...)$

$(j_n) = (\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{16}, 0, \frac{1}{36}, 0, \frac{1}{64}, ...)$

Complete o quadro abaixo, marcando com X as respostas corretas.

Características	(a_n)	(b_n)	(c_n)	(d_n)	(e_n)	(f_n)	(g_n)	(h_n)	(i_n)	(j_n)
crescente										
decrescente										
não monótona										
limitada										
ilimitada										
convergente										
não convergente										

ATIVIDADE 8

Considere as seguintes seqüências. "Extraia" de cada uma delas, duas seqüências diferentes.

$(a_n) = (1, 2, 3, 2, 5, 2, 7, 2, ...)$
$(a_{n_i}) =$
$(a_{n_j}) =$

$(b_n) = (\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{16}, 0, \frac{1}{36}, 0, \frac{1}{64}, 0, ...)$
$(b_{n_i}) =$
$(b_{n_j}) =$

$(c_n) = (3, 6, 9, 12, 15, 18, ...)$
$(c_{n_i}) =$
$(c_{n_j}) =$

$(d_n) = (-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, -\frac{5}{6}, \frac{6}{7}, ...)$
$(d_{n_i}) =$
$(d_{n_j}) =$

****

ATIVIDADE 9

Considere as seqüências abaixo e suas respectivas subseqüências:

$(a_n) = (1, -1, 1, -1, 1, -1, ...)$
$(a_{n_i}) = (1, 1, 1, 1, 1, ...)$
$(a_{n_j}) = (-1, -1, -1, -1, ...)$

$(b_n) = (-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \frac{1}{32}, ...)$
$(b_{n_i}) = (-1, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{16}, -\frac{1}{64}, ...)$
$(b_{n_j}) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{32}, \frac{1}{128}, ...)$

$(c_n) = (\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \frac{5}{6}, -\frac{6}{7}, ...)$
$(c_{n_i}) = (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, ...)$
$(c_{n_j}) = (-\frac{2}{3}, -\frac{4}{5}, -\frac{6}{7}, -\frac{8}{9}, ...)$

$(0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{6}, 0, \frac{1}{8}, 0, ...) = (d_n)$
$(d_{n_i}) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, ...)$
$(d_{n_j}) = (0, 0, 0, 0, ...)$
$(d_{n_r}) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{12}, \frac{1}{16}, \frac{1}{20}, ...)$

Complete o quadro, marcando com X as respostas corretas.

características	a_n	a_{n_i}	a_{n_j}	b_n	b_{n_i}	b_{n_j}	c_n	c_{n_i}	c_{n_j}	d_n	d_{n_i}	d_{n_j}	d_{n_r}
crescente													
decrescente													
não monótona													
limitada													
ilimitada													
convergente													
divergente													

ATIVIDADE 10

Considere as seqüências seguintes e suas subseqüências:

1) $(a_n) = (1, -1, 1, -1, 1, -1, ...)$

$(a_{n_i}) = (1, 1, 1, 1, 1, ...)$

$(a_{n_j}) = (-1, -1, -1, -1, ...)$

2) $(b_n) = (-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \frac{1}{32}, ...)$

$(b_{n_i}) = (-1, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{16}, -\frac{1}{64}, ...)$

$(b_{n_j}) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{32}, \frac{1}{128}, ...)$

3) $(c_n) = (1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{6}, 7, \frac{1}{8}, ...)$

$(c_{n_i}) = (1, 3, 5, 7, 9, ...)$

$(c_{n_j}) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, ...)$

4) $(d_n) = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{6}, \frac{7}{8}, ...)$

$(d_{n_i}) = (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \frac{9}{10}, ...)$

$(d_{n_j}) = (\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{6}, \frac{9}{8}, ...)$

Complete o quadro, com as respostas corretas:

	const.	crescente	decrescente	ñ monótona	converge p/ n°	ñ converge
(a_{n_i})						
(a_{n_j})						
(a_n)						
(b_{n_i})						
(b_{n_j})						
(b_n)						
(c_{n_i})						
(c_{n_j})						
(c_n)						
(d_{n_i})						
(d_{n_j})						
(d_n)						

Anexo 4 — PÓS-TESTE

1) Represente as seqüências abaixo, escrevendo os seus 6 primeiros termos:

a) $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

b) $b_n = \begin{cases} n & \text{, se n é número ímpar} \\ \frac{n}{n+1} & \text{, se n é número} \end{cases}$

c) $c_n = \begin{cases} 1 & \text{, se } n \leq 3 \\ \frac{1}{n} & \text{, se } n > 3 \end{cases}$

d) $d_n = 2(-1)^n$

e) $e_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{, se n é número par} \\ \frac{1}{n^2} & \text{, se n é número} \end{cases}$

2) Dê exemplo, se existir, de uma seqüência de cada um dos seguintes tipos:

(a) seqüência limitada e convergente
(b) seqüência não limitada e convergente
(c) seqüência limitada e divergente
(d) seqüência monótona limitada
(e) seqüência não monótona limitada
(f) seqüência não monótona e não limitada
(g) seqüência de termos positivos, não monótona, convergindo para zero.

3) Coloque V(Verdade) ou F(Falso):
( ) Toda seqüência que converge é limitada.
( ) Toda seqüência limitada é convergente.
( ) Toda seqüência convergente é monótona.
( ) Toda seqüência monótona é convergente.
( ) Toda seqüência monótona e limitada converge.
( ) Toda seqüência constante converge.

( ) Uma seqüência pode ter dois limites diferentes.

( ) Toda seqüência que possui uma subseqüência convergente é convergente.

( ) Se (x_n) converge para a, então toda subseqüência de (x_n) também converge para a .

( ) Seqüência de números reais é uma função de lN em lR.

4) Como você explicaria a um aluno de 15 anos o que é uma seqüência convergente?