ALESSANDRO JACQUES RIBEIRO

TÍTULO : Analisando o desempenho de alunos do Ensino Fundamental em Álgebra, com base em dados do SARESP

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do Título de MESTRE em Educação Matemática, sob a orientação da Profa Dra Tânia Maria Mendonça Campos

PUC/SP
2001

COMISSÃO JULGADORA

____

____

____

Agradecimentos

À Professora Dra. Tânia Maria Mendonça Campos, pela orientação e confiança depositadas em meu trabalho.

À Professor Dra Célia Maria Carolino Pires, pela ajuda inestimável e apoio desde a graduação.

À Professor Dra Paula Moreira Baltar Bellemain, pelas preciosas sugestões.

A minha família, em especial minha irmã Ilza, que sempre colaborou e incentivou-me nos momentos mais difíceis.

Aos professores do Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática, que me abriram novos horizontes.

À CAPES, que colaborou e tornou possível, com a bolsa concedida, a realização desse sonho.

À Diretoria de Ensino de Caieiras e as duas Escolas, que me abriram as portas para a realização desta pesquisa.

Aos colegas de curso, pela amizade e companherismo.

À grande amiga Carla, que esteve sempre presente colaborando para que eu me dedicasse aos estudos.

Ao amigo Adilson, pela sua colaboração e presença no momento oportuno.

Resumo

Este trabalho preocupou-se em levantar, identificar e analisar os procedimentos e estratégias que os alunos das 8as séries do Ensino Fundamental utilizam para resolver questões de Álgebra Elementar. Com base em uma análise feita nos documentos do SARESP (Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo), edição de 1.997, elaborados pela Secretaria Estadual de Educação, foram aplicadas as mesmas questões de Álgebra, que este exame trazia, em uma amostra de 20 alunos da Rede Pública Estadual de São Paulo. Num segundo momento, os alunos, em um contexto de oficina, puderam trabalhar em pequenos grupos com a participação do pesquisador, na resolução de questões abertas semelhantes àquelas aplicadas na etapa anterior, o que proporcionou a oportunidade de produzir um material rico para as análises e conclusões desta dissertação. Tomando como base os trabalhos de Kieran (1992) e Cortés & Kavafian (1999), foram apresentadas as análises feitas a respeito das estratégias utilizadas pelos alunos dessa amostra, buscando identificar possíveis causas para os erros mais freqüentes. Espera-se que este estudo possa trazer contribuições para os professores, no sentido de se pensar em novas abordagens de trabalho com este conteúdo matemático nas salas de aula.

Abstract

This research had the objective of seeking, identifying and analysing the procedures and strategies of the 8^{th} serie students of fundamental teaching utilised to solve elementary Algebra questions. Based on the analysis of SARESP (Evaluation System for School Results in São Paulo State) documents carried out, 1997 edition, elaborated by State Education Secretary, the same Algebra questions, which this examination brought, were applied, in a sample of 20 students taken from São Paulo State Schools. In the second stage, the students, in a workshop situation, could work in a small groups with the participation of a researcher, in the solving of the open questions similar to those apllied in the previous stage, which enabled the opportunity to produce a rich material to analyse and conclude this research. Based on papers by Kieran (1992) and Cortés & Kavafian (1999), the analysis carried out presented the respective strategies utilised by the students in the sample, looking to identify possible causes of the more frequent errors. It is hoped that this study can make contributions for teachers, in the sense of thinking of new approaches for teaching this mathematical content in the classroom.

Apresentação

Nosso estudo tem por objetivo levantar, identificar e analisar os procedimentos e estratégias utilizadas por alunos de 8ª série do Ensino Fundamental da Rede Pública de São Paulo para resolver questões de Álgebra Elementar.

Baseando-se em uma análise feita nos documentos do SARESP - Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo -, do ano de 1997, elaborados pela Secretaria Estadual de Educação, investigamos alguns aspectos do processo de ensino e de aprendizagem da Álgebra desse grupo de alunos.

No primeiro capítulo, apresentamos uma breve caracterização dos programas de avaliação do Sistema Educacional Brasileiro (SAEB) e do Estado de São Paulo (SARESP), tendo em vista que nossa investigação teve como ponto de partida uma das avaliações realizadas pelo SARESP. Nesse capítulo nosso propósito foi não somente o de contextualizar nosso estudo, mas também, buscar compreender melhor as finalidades e as estratégias e procedimentos utilizados por esses Sistemas.

No segundo capítulo, procuramos identificar as razões para o insucesso revelado no desempenho dos alunos em Álgebra, partindo de nossa experiência em sala de aula e ampliando nossos conhecimentos por meio da análise dos documentos do SARESP/1997 e de uma revisão bibliográfica da literatura sobre o assunto. Esperávamos encontrar respostas para aquilo que havíamos proposto como objetivo para nosso estudo.

Para buscar fundamentos para nossos estudo, fizemmos um levantamento de resultados de algumas investigações teóricas sobre a construção dos conhecimentos algébricos e, foi em Kieran (1992) e Cortés

& Kavafian (1999), que encontramos o suporte que estávamos necessitando para compreender melhor e analisar o material que tínhamos em nosso poder, além daquele que seria produzido por nossa amostra de alunos.

No terceiro capítulo apresentamos o desenvolvimento da pesquisa, justificamos a escolha da metodologia e explicitamos os procedimentos metodológicos usados ao longo do trabalho.

Dois momentos caracterizam nosso estudo. No primeiro, os alunos da amostra resolveram as mesmas questões de Álgebra que o exame do SARESP, edição de 1997 trazia, repetindo-se aí, o ambiente de avaliação que geralmente ocorre em um exame deste tipo. No segundo momento, foram propostas questões abertas, semelhantes àquelas aplicadas anteriormente; porém, desta vez, os alunos estavam trabalhando em grupo, num contexto de oficina e com a participação ativa do pesquisador. Ainda neste capítulo, apresentamos as análises, conclusões e considerações que pudemos obter com o material produzido por esses alunos e, levando em conta os trabalhos de pesquisa já existentes na área.

Por fim, deixamos registrados sugestões de pesquisas posteriores que poderão trazer contribuições futuras tanto para a Educação Matemática, bem como também para o trabalho dos professores que ensinam Álgebra em nossas salas de aula.

Sumário

Capítulo III – Nossa pesquisa com um grupo de alunos, utilizando alguns itens sobre Álgebra, da avaliação do SARESP/1997

Referências Bibliográficas

Anexos

Capítulo I

Os programas de avaliação do Sistema Educacional Brasileiro e do Estado de São Paulo

1 . Introdução

Neste capítulo, apresentaremos uma breve caracterização dos programas de avaliação do Sistema Educacional Brasileiro e do Estado de São Paulo, tendo em vista que nossa investigação toma como ponto de partida uma das avaliações realizadas no âmbito do SARESP – Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo. Para tanto, realizamos uma pesquisa bibliográfica e também consulta a sites oficiais. O propósito dessa síntese é, não apenas o de contextualizar nosso estudo, mas também de compreender melhor as finalidades desses programas e as estratégias e procedimentos por eles utilizados.

Como poderemos verificar, os programas de avaliação macro-sistêmicos são uma experiência muito recente na história da educação brasileira e que, desse modo, ainda apresentam problemas de naturezas diversas que têm motivado críticas severas de alguns segmentos educaionais.

Certamente é preciso aprofundar discussões sobre o que de fato indicam essas avaliações, se as questões propostas são ou não adequadas, se a forma de retorno desses resultados aos professores e alunos é feita de forma a produzir transformações positivas nas práticas pedagógicas.

2 . O caminho para a implantação dos programas de avaliação de sistemas educacionais no Brasil[1]

[1] **Texto extraído do Livro:** Bitar et al (1998) **- *Série Idéias – Sistemas de Avaliação Educacional*. São Paulo, FDE.**

Segundo Bitar et al (1998), na década de 90, como reflexo de uma forte preocupação existente nos educadores e especialistas em avaliação escolar, iniciou-se um processo visando a construção de instrumentos que permitissem não somente analisar o rendimento escolar como acontecia basicamente com aqueles até então existentes, mas também compreender os processos de construção da desigualdade social, tendo em vista a busca de alternativas para sua superação.

A avaliação que se preconizava por meio desses instrumentos deveria ser: útil, factível, ética e exata. Útil no sentido de possibilitar aos envolvidos em uma ação educativa o julgamento do que vai bem e do que não vai bem com um dado processo ou resultado. Factível, isto é, sem perder o rigor, garantir a utilização de procedimentos compatíveis com a situação e as condições. Ética, no sentido de comprometer-se com os direitos dos participantes e com a honradez dos resultados. Exata, para garantir o rigor na aplicação dos procedimentos e no julgamento dos resultados.

Aliado a isso, era necessário também que esses instrumentos de avaliação fossem acrescidos de eqüidade e comprometimento ou responsabilidade dos agentes educativos. Avaliar com eqüidade significa analisar se a qualidade da educação que está sendo oferecida atende igualmente a todos os setores sociais e a responsabilidade para garantir essa eqüidade é de toda a sociedade, sobretudo, dos governos, e exigindo o compromisso expresso e definitivo dos agentes do processo educacional.

Na época esta reorientação de avaliação educacional encontrou suporte nas tendências e estudos da área das Ciências Humanas que procuravam compreender as macroestruturas determinantes de uma realidade em conjugação com o desempenho dos fatores sociais que a constroem.

Nesse sentido, é tão importante avaliar como o sistema educacional condiciona a qualidade de ensino oferecido nas escolas, quanto analisar como os educadores constróem em seu cotidiano o nível de ensino que os alunos irão receber, partindo de suas representações, atuações e relações.

A implantação de programas de Avaliação de Sistemas Educacionais no Brasil, a exemplo do SAEB[2] e do SARESP[3], propôs a questão da qualidade de ensino a ser esperado em processo de escolarização e a importância do controle da eqüidade da educação em nível da macroestrutura. Neste tipo de avaliação, a proposta que orienta é a identificação dos conteúdos e habilidades dominados pelo aluno e a busca de elementos que possam dar subsídios à escola e ao professor para superar as defasagens flagrantes nos alunos, fruto de um ensino desigual, conseqüência de recursos e condições contraditórios a que os mesmos têm sido submetidos.

3 . O Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica

O Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica[4] – SAEB foi criado em 1988, com a finalidade de monitorar a qualidade do Ensino Básico ministrado no País. Além de realizar um diagnóstico sobre a educação básica, constitui-se em importante subsídio para o processo de formulação de políticas educacionais por parte dos Estados e Municípios, bem como da União, produzindo indicadores e parâmetros que identificam o nível de qualidade do ensino básico.

---

[2] SAEB – Sistema de Avaliação da Educação Básica – Coordenado pelo MEC/INEP
[3] SARESP – Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo – Coordenado pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo
[4] Informações obtidas no site do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais (disponível na Internet: (www.mec.gov.br/inep), em junho/2001

Para essa finalidade, o SAEB recolhe informações sobre um conjunto de variáveis que permite medir o grau de aprendizagem dos alunos das 4ª e 8ª séries do Ensino Fundamental e da 3ª série do Ensino Médio, além de identificar as condições em que ocorre o processo ensino/aprendizagem. Para tanto, são utilizadas provas elaboradas com um grande número de itens distribuídos em vários cadernos de provas (cerca de 169 itens por série e disciplina), o que permite uma maior validade curricular, posto que amplia a cobertura dos conteúdos e das habilidades (com seus diferentes graus de complexidade) em todas as séries e disciplinas avaliadas.

Os itens das provas são elaborados com base na “Matriz de Referência para o SAEB”, instrumento que é produto de uma ampla consulta nacional sobre os conteúdos propostos nas escolas brasileiras de Ensino Fundamental e Médio, incorporando também a reflexão de professores e especialistas sobre a produção científica em cada área objeto do conhecimento escolar.

A cada levantamento, além das provas, são aplicados também questionários que permitem conhecer as características da escola, do diretor, dos professores, da turma e dos alunos que participam da avaliação.

Depois de ter sido criado, o SAEB já realizou cinco levantamentos (1990, 1993, 1995, 1997 e 1999) e vem sendo aperfeiçoado sucessivamente a cada aplicação tanto sob o ponto de vista metodológico como dos procedimentos, operacionalização e abrangência.

Após o ciclo de 1995, foram introduzidos importantes avanços metodológicos ao incorporar modernas técnicas, avançando dos modelos da Teoria Clássica de Medidas para a Teoria de Resposta ao Item – TRI – e para o modelo de Amostragem Matricial de itens.

Do ponto de vista operacional, o SAEB também introduziu modificações se considerarmos que os primeiros levantamentos foram realizados de forma direta pelo Ministério da Educação e Cultura (MEC) e, posteriormente, sob a coordenação do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais (INEP) passaram a ser realizados por entidade externa ao Ministério, contratada por meio de licitação pública.

A cobertura também foi ampliada, expandindo-se à rede particular. A partir de 1995 foi alcançado um nível de cobertura nacional é, desde então, as 27 Unidades da Federação vêm participando dos levantamentos de dados.

4 . O Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo

Segundo Souza (1998), a implantação dos estudos para a criação do SARESP inaugura um novo e importante estágio na trajetória iniciada, em 1992, pela Secretaria de Estado da Educação de São Paulo (SEE/SP) reconhecida como urgente e necessária pelos dirigentes educacionais e pelos educadores do Estado: caminhar em direção à construção de uma política de avaliação de sua Rede de Ensino.

Este Sistema vem suceder avaliações de caráter mais pontual tal como o Programa de Avaliação Educacional da Rede Estadual, implementado em 1992. Inicialmente, o programa visava verificar se ocorreram melhorias no desempenho dos alunos como resultado da introdução, em 1991, de um novo modelo de escola que beneficiava parte das unidades escolares dessa Rede e, posteriormente foi estendido por amostragem às demais escolas estaduais.

Entre os principais antecedentes do SARESP, cabe também mencionar:

- a experiência da SEE no gerenciamento do Projeto Inovações no Ensino Básico que envolvia uma avaliação do impacto das políticas educacionais vigentes na Rede Estadual no período de 1992 a 1993 sobre o rendimento escolar dos alunos. De caráter longitudinal, os resultados alcançados constituíram importantes subsídios para pensar novos rumos para a educação paulista, além de apontarem como urgente a necessidade de se contar com um sistema de avaliação que embase a tomada de decisão das instâncias da SEE, desde as escolas até órgãos centrais.

- desde o início (1990), a participação da SEE está presente nas aferições realizadas em São Paulo no âmbito do SAEB nessas e em outras experiências similares e evidenciou a importância da avaliação, como instrumento orientador para as tomadas de decisão que visem à melhoria da qualidade do ensino oferecido em todas as escolas. Além de se constituir em um momento importante – embora não único – para a caracterização desse ensino. A avaliação educacional revela aspectos importantes do processo educativo desenvolvido nas escolas e facilita o exercício de um estilo de gerenciamento, por parte da SEE, pautado pela autonomia das Diretorias de Ensino e escolas, bem como pela maior eficiência na prestação de serviços educacionais. A avaliação educacional, em especial, a externa constituiu-se como importante instrumento para que se possa repensar o ensino e aprimorar seu padrão de qualidade.

Impôs-se, assim, a necessidade de formular e consolidar uma política de avaliação do sistema educacional no Estado. A implantação do SARESP foi a resposta da SEE a essa lacuna.

De acordo com documentos[5] da SEE/SP, o Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (SARESP), foi criado em 1996, com a finalidade de obter dados sobre o ensino por meio do rendimento escolar dos alunos dos Ensinos Fundamental e Médio. Visava-se também, com a criação desse Sistema, à conscientização das Diretorias

---

[5] **Informações obtidas no site da Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, disponível na Internet:(www.educacao.sp.gov.br) em junho/2001**

de Ensino e Escolas quanto à necessidade de se repensar os objetivos e metas a serem alcançados pelo Ensino Básico.

O Sistema de Avaliação foi criado com a intenção de gerar uma cultura de avaliação que agilizasse a tomada de decisão de melhoria e incremento na capacitação de todos os educadores e demais profissionais envolvidos.

Na proposta de origem, o SARESP propôs-se a realizar avaliações anuais, o que vem ocorrendo, desde então, com exceção de 1999, ano em que o exame não foi aplicado. Assim sendo, já se deram quatro edições: 1996 (nas 3ª e 7ª séries do Ensino Fundamental), 1997 (nas 4ª e 8ª séries do Ensino Fundamental), 1998 (nas 5ª séries do Ensino Fundamental e 1ª séries do Ensino Médio) e em 2000 (nas 5ª e 7ª séries do Ensino Fundamental e nas 3ª séries do Ensino Médio).

O SARESP tem como objetivos gerais:

- Subsidiar a Secretaria da Educação na tomada de decisões quanto à Política Educacional do Estado;
- Fornecer ao Sistema de Ensino e às Equipes técnico-pedagógicas das Diretorias de Ensino e das Escolas, informações que subsidiem:

- a capacitação dos recursos humanos do magistério;
- a orientação da proposta pedagógica desses níveis de ensino, de modo a aprimorá-la;
- a viabilização da articulação dos resultados da avaliação com o planejamento escolar, a capacitação e o estabelecimento de metas para o projeto de cada Escola, em especial, a correção do fluxo escolar.

Além dos objetivos gerais, constituem os objetivos específicos do SARESP:

- Fornecer dados que possibilitem a consolidação ou redimensionamento das decisões da Escola e o aprofundamento da reflexão em termos de suas metas e ações no ano e ao longo dos anos;

- Identificar nos componentes curriculares, dentre eles, Matemática, aspectos curriculares críticos que demandem intervenção imediata e prioritária de Professores, Escolas, Diretorias de Ensino e de todo Sistema Educacional;
- Obter informações sobre fatores intervenientes relativos ao desempenho escolar, estabelecendo relações entre eles, por exemplo, entre as características da Escola e os interesses dos alunos; de tomadas de decisões imediatas sobre alguns aspectos do currículo que exigem maior atenção; engajamento da comunidade no processo de avaliação para melhoria do ensino.

O SARESP envolve uma série de pressupostos que influenciam diretamente sua existência, bem como, sua metodologia. Estes pressupostos devem:

- Abranger todas as Escolas da Rede Estadual, pois a avaliação no SARESP diferente de outros programas trabalha, geralmente, com amostras de escolas e alunos como, por exemplo, o SAEB é do tipo censitário, ou seja, a população-alvo do SARESP é o total de Escolas da Rede Estadual de Ensino;
- Possibilitar estudos longitudinais, porque ao longo do processo, nos exames do SARESP, pode-se analisar a evolução do processo de aprendizagem dos mesmos alunos em anos seguidos: 1996, 1997, 1998 e, assim por diante, outra diferença em relação ao SAEB, pois este avalia sempre alunos das 4ª e 8ª séries do Ensino Fundamental e 3ª séries do Ensino Médio;
- Fornecer de imediato os resultados da avaliação que ficam disponíveis na Escola, uma vez que as provas são corrigidas pelos próprios professores, o que permite rapidez na análise, possibilitando aprimorar o planejamento pedagógico, bem como subsidiar na definição de metas pela Equipe da Escola;

- Possibilitar a orientação contínua do aluno, pelo fato da avaliação do SARESP ocorrer no início do ano, permitindo assim uma melhor orientação para o desenvolvimento deles, pois os problemas são logo detectados;
- Envolver os professores na elaboração das provas, que, além de imprimir maior integração entre teoria e prática, estimula a responsabilidade e o espírito de trabalho coletivo;
- Contextualizar o ensino em razão da diversidade de instrumentos de avaliação do SARESP - provas de desempenhos dos alunos, questionários de caracterização desses alunos, relatórios da Escola e Diretoria de Ensino, oferecendo uma visão global das informações obtidas na avaliação, de modo que os desempenhos dos alunos sejam analisados no contexto que foram gerados;
- Elaborar as provas com base em parâmetros definidos de avaliação, partindo das propostas curriculares da SEE/CENP. Baseado nesses parâmetros, são estabelecidos os conteúdos curriculares considerados nucleares em cada componente curricular a ser avaliado;
- Garantir a qualidade das provas do SARESP, visto que, primeiramente, elas são aplicadas numa amostra de alunos da Rede Estadual para análise estatística e de conteúdo, para que se verifique se as provas medem, realmente, aquilo que se pretende medir. Assim, as reformulações de melhoria nas provas são baseadas nessas análises.

Fundamentando-se nos pressupostos do SARESP pode-se identificar outra importante diferença entre esse exame e o SAEB. O SARESP elabora suas provas apoiado nas propostas curriculares da SEE/SP, o SAEB o faz com base na “Matriz de Referência para o SAEB”, instrumento que é produto de uma ampla consulta nacional sobre os conteúdos propostos nas Escolas Brasileiras de Ensino Fundamental e Médio.

Quais e como são obtidas as informações no SARESP

As informações oferecidas pelo SARESP são de natureza diversas, como: desempenho dos alunos em provas que avaliam diversos componentes curriculares, dentre eles, Matemática; caracterização dos alunos avaliados; opinião dos pais ou responsáveis pelos alunos; informações sobre a Escola e sua prática pedagógica; dados sobre todas as Escolas envolvidas no processo.

Antes de analisar os componentes curriculares e as séries em que a avaliação foi realizada, desde o nascimento do SARESP, é preciso compreender como se efetua a verificação do desempenho dos alunos nos conteúdos curriculares.

As provas são elaboradas fundamentadas nos conteúdos de determinadas séries; entretanto, não são os alunos dessas séries que passarão pela avaliação, e sim, os alunos das séries subseqüentes. Por exemplo, em 1997, o conteúdo da 3ª série foi avaliado com alunos da 4ª série, e o conteúdo da 7ª série nos alunos da 8ª série.

Esse procedimento é justificado, sobretudo, pelos objetivos de;

- Integrar, em ação realmente educativa, os professores das duas séries envolvidas no processo. Assim, os professores da série cujos conteúdos foram selecionados, podem promover melhorias no currículo, enquanto os professores da série na qual as provas foram aplicadas podem, logo no início do período letivo, atender às necessidades dos alunos;
- Implantar, na Escola, um trabalho educativo de caráter participativo e interdisciplinar com seus educadores.

O processo como um todo, de acordo com o que já foi visto anteriormente, é composto por diversos instrumentos que buscam avaliar e levantar dados completos do sistema educativo. Esses instrumentos de avaliação e levantamento de dados são:

• <u>Cadernos de Prova</u>: são constituídos de questões objetivas, abordando o conteúdo básico das séries avaliadas nos componentes curriculares selecionados para a avaliação. Incluem também um Questionário do Aluno, com questões voltadas para traçar seu perfil e levantar sua opinião sobre a Escola, visando estabelecer algumas correlações entre os dados coletados e a identificação de fatores intervenientes no rendimento escolar;

• <u>Questionário da Escola</u>: contém questões referentes ao projeto pedagógico da Escola, à sua infra-estrutura, formas de capacitação de professores, entre outros. Exerce fundamental importância no SARESP, uma vez que auxilia na análise e interpretação dos resultados dos desempenhos dos alunos e permite orientações para melhoria educacional;

• <u>Relatório de Observação dos Pais</u>: trata-se de um instrumento que propicia aos pais e demais responsáveis pelos alunos expressar suas opiniões sobre o processo avaliativo da Escola;

• <u>Relatório do Aplicador</u>: instrumento no qual o professor responsável pela aplicação das provas deve registrar as ocorrências durante a prova;

• <u>Relatório de Avaliação da Escola</u>: contém as orientações e o instrumento que possibilitarão à Escola elaborar seu relatório. Esse instrumento deve refletir não só o empenho e a profundidade da discussão ocorrida, após o processo de aplicação e correção das provas, como também a análise e interpretação dos resultados;

• <u>Relatório de Avaliação da Diretoria de Ensino</u>: Orienta esses órgãos para o trabalho de compilação dos resultados elaborados pela Escola e análise do processo educativo realizado em seu âmbito de atuação.

Visto que as provas SARESP são realizadas em todas as Escolas da Rede Estadual Pública, mais as da Rede Municipal e Particular que desejem participar do processo, pode-se perceber o tamanho da abrangência dessa avaliação. Por exemplo, em 1997, o SARESP avaliou em todo o Estado de São Paulo 981.011 alunos das três redes de ensino citadas anteriormente.

Com isso, é possível estabelecer outra importante diferença do SARESP com o SAEB, esse último, embora de abrangência nacional, avaliou em 1997, 167.196 alunos das três redes de ensino nas 27 unidades da Federação.

Como são devolvidos os resultados ao Sistema Educacional

Possivelmente, seja esse o grande ganho do SARESP, pois os dados e informações obtidas por ele, são devolvidos à Rede, além dos estudos realizados pelas próprias Escolas e Diretorias de Ensino, por meio de documentos elaborados pela SEE/CENP, levando-se em conta todos os instrumentos levantados pela avaliação.

5 . O desempenho dos alunos de 8ª série do Ensino Fundamental em Matemática e, particularmente, em Álgebra

Tendo em vista que o material elaborado pela SEE/CENP sobre o SARESP, em especial a edição de 1997, é considerada nossa maior fonte de coleta de dados e suporte para a presente pesquisa. A seguir, apresentamos o material utilizado.

A análise do desempenho dos resultados obtidos nas 30 questões que compõem a prova e mais especificamente, na parte de Álgebra permite destacar os seguintes pontos:

• A média do desempenho dos alunos da 8ª série, na prova como um todo, corresponde a 33%, sendo a mediana e a moda equivalente a 30%, bastante próximas. Pode-se constatar que houve uma grande concentração de resultados em torno da média, notando-se uma dificuldade do aluno em lidar com os tópicos abordados;

• As médias do desempenho nos blocos de conteúdos - Números, Medidas e Geometria, também ficam próximas à média geral, em torno de 30%;

• Mesmo nas questões possíveis de resolução por meio de rotinas mecânicas, cujos comandos eram curtos e, facilmente, identificáveis com os já treinados e freqüentes nos livros didáticos mais adotados, os índices de acerto ainda continuaram abaixo do razoável. Pode-se notar isso pelo baixo índice alcançado nas equações de 1º grau, um tema bastante privilegiado pelo professor em sala de aula.

Uma provável hipótese para esses resultados baseia-se em uma aprendizagem com pouca preocupação com a compreensão, construção de conceitos e exploração de situações-problema, assim, esses processos favorecem o esquecimento dessas técnicas e procedimentos que passam a ser conhecimentos isolados se forem apenas memorizados.

• Não se notam significativas diferenças entre a média dos desempenhos dos alunos nas situações-problema e a média das questões que demandam procedimentos mais mecânicos. Ainda assim, observa-se que em situações cujo contexto é significativo, mais próximo da realidade do aluno a média alcançada é um pouco mais alta e, em decorrência do quadro atual do ensino de Matemática pode ser considerada até como satisfatória.

Os índices alcançados nos itens que dependiam da compreensão por parte dos alunos de enunciados, da percepção dos conceitos envolvidos e da seleção de informações existentes foram baixos, especialmente quando acompanhados de tabelas e figuras. Isto indica que o trabalho realizado em sala de aula não dá aos alunos instrumentos para interpretar o enunciado de um problema, estabelecer relações e interpretar resultados.

- O desempenho dos alunos nos tópicos mais diretamente ligados ao cotidiano - áreas, porcentagem, proporções e cálculos com racionais - está muito abaixo do aceitável. Possivelmente isto ocorre em função da pouca atenção que os professores dão a esses conteúdos;

- A análise do desempenho em Geometria vem confirmar que o professor pouco enfatiza este tema tão fundamental da Matemática. No entanto, em algum deles, que não exigiam conhecimentos específicos, os alunos procuravam estratégias diversas para resolvê-los e as médias alcançadas foram até superiores àquelas dos temas mais presentes em sala de aula. Esse dado pode servir de estímulo a professores e alunos para investir mais no processo ensino-aprendizagem de Geometria;

- Os resultados das avaliações fortalecem a idéia de que o ensino de Matemática vem sendo muito ineficiente; se nas séries iniciais há uma produtividade pelo menos razoável na aplicação dos conteúdos matemáticos pelos alunos - ainda que bem aquém do possível - esta relativa eficiência deixa de existir nas séries finais do Ensino Fundamental.

Visto que nossa pesquisa dá-se no campo da Álgebra, é importante que se apresente aqui, a análise feita pela SEE/CENP no documento das questões da prova de Matemática que versam sobre o assunto.

Baseando-se nesse documento e, em especial, na análise elaborada pela SEE/CENP, nas quais fizemos pequenas observações, pudemos iniciar nossa pesquisa e caminhar em relação a **nossos objetivos**, quais sejam: **identificar e analisar procedimentos e estratégias de resolução das questões pelos alunos, no que se refere à Álgebra, no exame do SARESP/97**. As questões escolhidas com as respectivas análises foram retiradas, conforme já mencionado anteriormente, do material elaborado pela SEE/CENP.

1ª Questão

Objetivo: resolver expressões algébricas

Conteúdo: expressões algébricas: conceitos e operações

Nas igualdades abaixo, em que **a** e **b** representam números reais, a única verdadeira é:

a) $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ (51 %)

b) $(a + b)(a - b) = a^2 - 2ab + b^2$ (15 %)

c) $a(a + b) = a^2 + ab$ (22 %) *****

d) $\frac{a + b}{a} = b$ (12 %)

*** alternativa correta**

Análise: este item da Álgebra, solicitava que o aluno identificasse a alternativa que mostrava o uso correto de propriedades para dois números **a** e **b**.

O índice de acertos foi baixo - 22 % - o que demonstra desconhecimento por parte dos alunos de algumas das propriedades das operações. A maioria dos alunos (51%), optou pela alternativa que considerava como válida a propriedade distributiva da potenciação em relação à soma de dois números.

O professor de Matemática deverá repensar sua metodologia para ensinar Álgebra de modo a garantir que seus alunos saibam expressar generalizações de relações e as propriedades das operações aritméticas por meio de escritas algébricas.

2ª Questão

Objetivo: Traduzir problema utilizando regra de três simples

Conteúdo: Expressões algébricas: conceito e operações

Numa padaria há um **cartaz afixado** em que constam os seguintes itens:

Leite	R$ 0,70
Pão	R$ 0,12

Joana comprou uma quantidade **x** de litros de leite e uma quantidade **y** de pães. A expressão algébrica que representa essa compra é:

a) 10x + 3y (10 %)

b) 10y + 3x (15 %)

c) 0,12x + 0,70y (11 %)

d) 0,70x + 0,12y (64 %) *****

*** alternativa correta**

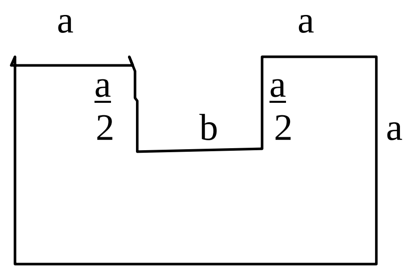
Análise: O objetivo desse item era verificar se o aluno tinha a habilidade de traduzir uma situação-problema por meio de uma expressão algébrica. O índice de acertos - 64% - foi o maior em toda a prova de Matemática. Ainda assim, esperava-se um melhor resultado, uma vez que a resolução desse item beneficiava-se, pela exclusão de duas alternativas indicadas, por não envolverem os números da tabela, restando assim, duas alternativas a serem analisadas.

3ª Questão[6]

Objetivo: Traduzir dados representados graficamente em expressões algébricas.

Conteúdo: Expressões algébricas: conceitos e operações

Escreva a expressão algébrica que representa a área da figura abaixo.



a) $2a^2 + \frac{ab}{2}$ (28 %) *

b) $2a^2 + ab$ (23 %)

c) $a^2 + \frac{ab}{2}$ (39 %)

d) $a^2 + ab$ (10 %)

*** alternativa correta**

---

[6] Acreditamos que o desenho apresentado no enunciado desta questão tenha prejudicado o desempenho dos alunos, pelo fato de estar com dimensões desproporcionais, conforme nossa opnião.

Análise: Este item solicitava que o aluno encontrasse uma expressão algébrica para indicar a área de uma figura. Uma questão que envolve alguns conceitos e procedimentos algébricos e geométricos, sendo portanto, um pouco mais complexa. De fato, o índice de acertos de 28% atesta essa afirmação; entretanto, se considerarmos a ênfase que os professores de Matemática dão ao ensino de Álgebra e se esse fosse trabalhado mais em conjunto com a geometria, uma porcentagem bem maior de alunos poderia ter acertado a questão.

4ª Questão

Objetivo: Resolver equação de 1º grau com uma incógnita

Conteúdo: Equação de 1º grau

O número natural 3 é solução da equação:

a) $2x - 8 = 1$	(9 %)
b) $\frac{x + 2}{3} = \frac{x}{5}$	(31 %)
c) $5(x - 1) = 2(x + 2)$	(33 %) *****
d) $\frac{x - 1}{3} = \frac{2}{5}$	(27 %)

*** alternativa correta**

Análise: Essa questão, muito bem elaborada, permitia verificar se o aluno tinha disponível o conceito de equação.

Ele poderia encontrar a alternativa correta, sem necessariamente resolver as quatro equações apontadas (uma em cada alternativa), já que o número 3, dado na raiz questão, poderia ser facilmente substituído nessas equações. O resultado no entanto, foi deprimente: um acerto de apenas 33%.

O trabalho com Álgebra precisa urgentemente ser repensado, mesmo em situações que demandam basicamente procedimentos mecânicos, os alunos conseguiram sucesso.

5ª Questão

Objetivo: Traduzir problema para equação de 1º grau.

Conteúdo: Equações e inequações

Se a professora der 8 balas a cada aluno, sobram-lhe 44 balas; se ela der 10 balas a cada aluno, faltam-lhe 12 balas. Nessa história, se **x** representa o número de alunos, devemos ter:

a) 8x = 10	e	x = 22	(12 %)
b) 8x + 44 = 10x	e	x = 22	(26 %)
c) 8x + 10x = 44 + 12	e	x = 28	(28 %)
d) 8x + 44 = 10x - 12	e	x = 28	(34 %) *****

*** alternativa correta**

Análise: Este item trata de uma situação-problema em que o aluno deveria traduzi-la por meio de uma equação, para depois resolvê-la. Uma questão interessante e não muito freqüente nos livros didáticos.

Os resultados não foram satisfatórios, pois apenas 34% dos alunos responderam corretamente. A incidência das respostas por alternativa indica que os alunos não dominam sequer as técnicas de resolução de uma equação, pois duas das alternativas poderiam ser rapidamente descartadas, caso os alunos resolvessem as equações nelas indicadas.

6ª Questão

Objetivo: Resolver problema abrangendo equação/inequação do 1º grau.

Conteúdo: Equações e inequações.

Um espião de guerra enviou ao seu comando a seguinte mensagem:

$5n + 25 > 5500$

$- 8n + 3501 > 210 - 5n$

O comando sabia que a letra **"n"** representa o número de foguetes do inimigo. Fazendo os cálculos, o comando descobriu que o total de foguetes era:

a) 1094	(17 %)
b) 1095	(36 %)
c) 1096	(28 %) *
d) 1097	(18 %)

*** alternativa correta**

Análise: Este item exigia que o aluno resolvesse duas inequações e encontrasse uma solução que satisfizesse a ambas, ou seja, uma questão que envolvia conhecimento de caráter procedimental.

O índice de acerto - 28% - é coerente com os resultados da prova. Considerando que o padrão médio de desempenho dos alunos nas questões que envolviam equações de 1º grau não ultrapassou os 35%, o rendimento, neste item, não é discrepante dos demais apresentados. Novamente destacamos que o ensino da Álgebra está em questão.

7ª Questão

Objetivo: Resolver problema abrangendo equação de 1º grau com uma incógnita.

Conteúdo: Equações e inequações.

Somando minha idade com a de minha mãe temos a idade de minha avó. Eu tenho um terço da idade de minha mãe e minha avó tem 72 anos. Desta forma, eu tenho:

a) 17 anos	(24 %)
b) 18 anos	(38 %) *****
c) 19 anos	(16 %)
d) 20 anos	(21 %)

*** alternativa correta**

Análise: Este item traz um problema que pode ser traduzido por uma equação do 1º grau, situação bastante freqüente nos livros didáticos, embora este caso não seja muito fácil. O índice de acerto de 38% é coerente com os demais resultados da Álgebra.

Quem acertou este problema, é bastante provável que não tenha resolvido por meio de equações, e sim, por meio de tentativas utilizando as respostas indicadas pelas alternativas.

8ª Questão

Objetivo: Determinar o valor das variáveis num sistema de equações de 1º grau.

Conteúdo: Sistema de equações de 1º grau.

A solução do sistema $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + y = 3 \end{cases}$

a) x = 1 e y = 0 (11 %)

b) x = 1 e y = 1 (14 %)

c) x = 1 e y = 2 (26 %)

d) x = 2 e y = 1 (49 %) *

*** alternativa correta**

Análise: Esta questão exigia que os alunos resolvessem um sistema de equações de 1º grau, uma questão de caráter procedimental. No entanto, vale considerar o conjunto de alunos que atingiu um padrão de acertos em torno de 49 %, significativamente superior à média de desempenho em Álgebra de 39 %.

Uma hipótese para tal resultado é a que considera que, provavelmente, os alunos resolveram o sistema pela simples substituição dos valores apontados nas alternativas. A questão que se propõe é: por que não fizeram o mesmo no item 4 ?

9ª Questão

Objetivo: Resolver problema envolvendo sistemas de equações do 1º grau.

Conteúdo: Sistema de equações do 1º grau.

Tenho 100 moedas que dão um total de R$ 60,00. Uma certa quantidade de moedas de R$ 1,00 e as restantes são moedas de R$ 0,50. A quantidade de moedas de R$ 1,00 é:

a) 20	(57 %) *****
b) 80	(22 %)
c) 15	(10 %)
d) 10	(9 %)

*** alternativa correta**

Análise: Este item tinha como objetivo verificar se o aluno era capaz de resolver uma situação-problema por meio de um sistema de equações.

O índice de acertos foi discrepante em relação ao padrão de desempenho médio do grupo de alunos: 57%. Esse relativo bom desempenho vem reiterar que em situações cujos contextos são de interesse dos alunos, estes acabam criando estratégias para resolvê-las, seja empregando conceitos matemáticos mais formais, seja por estimativa, seja por tentativa e erro.

Sendo assim, a procura de contextos significativos e adequados deve se constituir em um ponto de reflexão e ação do professor.

10ª Questão

Objetivo: Resolver problemas envolvendo sistemas de equações de 1º grau.

Conteúdo: Sistema de equações de 1º grau.

Na promoção de uma loja, uma calça e uma camiseta custam juntas R$ 55,00. Comprei 3 calças e 2 camisetas e paguei o total de R$ 140,00. O preço de cada calça e de cada camiseta, respectivamente, é:

a) R$ 35,00	e	R$ 20,00	(3 %)
b) R$ 20,00	e	R$ 35,00	(14 %)
c) R$ 25,00	e	R$ 30,00	(17 %)
d) R$ 30,00	e	R$ 25,00	(38 %) *****

*** alternativa correta**

Análise: Este item, como o anterior, trata de um problema que pode ser resolvido por meio de um sistema de equações.

O índice de 38% de acerto foi pouco superior à média da prova e, de certa forma, esse resultado é razoável porque não é uma questão que exige do aluno simples procedimentos. Também não é uma questão rotineira, embora esteja vinculada ao cotidiano.

O desempenho dos alunos nesse item vem corroborar a hipótese de que os alunos demonstram desempenho relativamente satisfatório em situações-problema cujos contextos sejam significativos.

Depois da apresentação de todo esse material e conseqüente contextualização de nosso trabalho e sua relação com o SARESP, continuamos expondo a problemática levantada e as investigações teóricas que nos fornecerão suporte para a realização da presente pesquisa.

Capítulo II
Buscando identificar as razões para o insucesso revelado no desempenho dos alunos em Álgebra

1 . Introdução

Partindo dos dados obtidos nos documentos preparados pela SEE, em relação ao SARESP/97, nossa preocupação com o ensino/aprendizagem da Álgebra ganhou ainda mais força, pois pudemos levantar que a média dos alunos em Álgebra ficou em torno dos 39%, um pouco acima da média da prova de Matemática como um todo, porém, ainda muito baixo se levarmos em consideração o quanto esse campo da Matemática é explorado no Ensino Fundamental.

É importante lembrarmos como se deu esta extrema valorização da Álgebra através dos tempos. Podemos recordar um pouco o que ocorreu com ensino da Matemática, sobretudo em relação ao ensino da Álgebra, e acabou resultando na "algebrização" da Matemática que vemos nos dias atuais.

Por volta dos anos 60, começou a repercutir no Brasil o Movimento da Matemática Moderna que, dentre outras mudanças, trouxe a substituição dos velhos textos de Álgebra, Geometria, etc., por livros didáticos para cada série do ensino secundário (ainda que inspirados em autores franceses e italianos do início do século XX).

O "Curso Moderno de Matemática " do Professor Osvaldo Sangiori, da Companhia Editora Nacional em 1966, foi o primeiro livro didático de 5ª a 8ª série com ênfase nas propriedades estruturais das operações. As operações com conjuntos são apresentadas como base para a introdução das operações em N (conjunto dos números naturais).

Do Movimento da Matemática Moderna, surgem algumas modificações a partir da década de 60 que influenciaram o ensino da Álgebra no Brasil:

- A Álgebra passa a ocupar um lugar de destaque, tornando-se elemento unificador e construtor da Matemática;

• Os conjuntos numéricos e suas propriedades são vistos como base da Aritmética e da Álgebra;

• Na tentativa de superar o caráter pragmático e não justificado da Álgebra, surge uma abordagem que enfatiza a precisão da linguagem matemática, o rigor e as justificações das transformações algébricas por meio de propriedades estruturais.

No decorrer dos anos 80 e 90, várias reformas foram feitas e implementadas em diversos países. No Brasil, mais particularmente no Estado de São Paulo, iniciou-se em 1985 a elaboração das chamadas Propostas Curriculares para o ensino de 1º e 2º graus, nas quais merece destaque a organização feita para o ensino da Matemática pelos três temas articulados: Números, Medida e Geometria, de tal forma que o conteúdo a ser ensinado fosse um veículo para o desenvolvimento de idéias fundamentais, tendo em vista a instrução e o desenvolvimento do raciocínio do educando.

A principal indicação nessa Proposta Curricular em relação à Álgebra, é feita pela seguinte reflexão: o ensino da Álgebra é substituído por tópicos como: noções de cálculo literal, o que, por intermédio de uma nova abordagem, acaba reduzindo significativamente a sua extensão, monotonia e tempo gasto para seu desenvolvimento.

Logo após, a elaboração dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) foi iniciada (1998), fato marcante e decisivo para o começo de uma unificação dos programas curriculares no Brasil.

Os PCN's (1998) para a área da Matemática no Ensino Fundamental estão pautados em princípios decorrentes de estudos, pesquisas, práticas e debates desenvolvidos nos últimos anos, cujo objetivo principal é o de adequar o trabalho escolar a uma nova realidade, marcada pela crescente presença dessa área de conhecimento em diversos campos.

Dentre outros, não menos importantes, podemos destacar aqui alguns dos objetivos constantes nesse documento no que se refere ao ensino da Matemática:

• O ensino da Matemática deve garantir o desenvolvimento de capacidades como: observação, estabelecimento de relações, comunicação (diferentes linguagens), argumentação e validação de processos e o estímulo às formas de raciocínio como intuição, indução, dedução, analogia e estimativa;

• O ensino-aprendizagem de Matemática deve ter como ponto de partida a resolução de problemas;

• Os PCN's destacam, dentre as funções da Álgebra, a importância de ser abordada a generalização de padrões e o trabalho que deve ser feito com tabelas e gráficos, durante o processo ensino/aprendizagem da Álgebra.

Diante dessa realidade, cabe a nós, professores, a preocupação com o currículo de Álgebra, a eficácia de seu ensino e a precisão de seus objetivos, além dos conhecimentos pedagógicos e didáticos referentes à Educação Matemática.

O objetivo de nossa pesquisa é estudar o desempenho dos alunos da 8ª série do Ensino Fundamental em São Paulo, fazendo o levantamento dos procedimentos e estratégias que os mesmos utilizam, para resolver questões de Álgebra Elementar, como as que aparecem no SARESP/97.

Depois de alguns anos de magistério, podemos constatar em nossa prática que os alunos, sistematicamente cometem, os mesmos erros (os quais são apresentados ainda neste capítulo), ano após ano quando estão estudando Álgebra. Esta constatação repete-se também em relatos de professores de escolas de regiões sócioeconomicamente diferentes no Estado de São Paulo.

Levando-se em conta nossa experiência em sala de aula, decidimos buscar suporte em resultados de pesquisas nacionais e internacionais sobre o tema, o que nos motivou ainda mais a estudar, e tentar compreender, o "porquê " dos alunos cometerem, tão repetidamente, os mesmos erros.

É possível ainda verificar que erros semelhantes ocorrem em outras partes do mundo como demonstram Brown et al (1988) relatando sobre os resultados da quarta avaliação matemática de estudantes americanos de sétimo e décimo primeiro graus (equivalentes à nossa 7ª série do Ensino Fundamental (13 anos de idade) e 3ª série do Ensino Médio (17 anos de idade), respectivamente, realizado pelo *National Assessment of Education Progress (NAEP)*:

"os estudantes de escolas secundárias (secundary school) geralmente parecem ter algum conhecimento de conceitos e habilidades algébricas e geométricas básicas. Todavia, os resultados dessa avaliação indicam, como também os resultados de avaliações passadas, que os estudantes freqüentemente não são capazes de aplicar esse conhecimento em situações de resolução de problemas, nem parecem entender muitas das estruturas subjacentes a esses conceitos e habilidades matemáticas".

Cabe ressaltar que nosso interesse em Álgebra parece bastante pertinente, pois, sabemos que o ensino de Álgebra, hoje, ocupa espaço maior que o de Geometria e até mesmo que Aritmética nos ensinos Fundamental e Médio. Temos consciência de que muitas vezes os conteúdos desses outros campos da Matemática acabam ficando para trás, quando o professor percebe que não será possível, por qualquer motivo, cumprir todo o programa de Álgebra.

2 . O que revelam as investigações sobre a construção dos conhecimentos algébricos

Sabemos, pelas pesquisas e mesmo em livros didáticos, o que ocorre com a Álgebra, é, na maioria das vezes, uma exagerada manipulação mecânica dos símbolos, dando ao aluno, uma falsa sensação de facilidade, mas que acaba com o passar do tempo, transformando-se em sensação de inutilidade e na falta de aplicabilidade da mesma.

Não é aceitável, nisso concordamos com Booth (1984) que se classifique ou conceba a Álgebra apenas como Aritmética generalizada, pois, certamente, ela é muito mais que isso. A Álgebra continuará sendo um dos melhores meios de resolução de determinados problemas, pois de acordo com Rojano (1995) sabemos que ela vai muito além disso, especialmente, nos dias atuais, quando os computadores são capazes e suficientes para simplificar e resolver os problemas de ordem puramente processual; a Álgebra funciona como estrutura e meio para a análise de relações.

Vale relembrar, entretanto, que Kieran (1992) constatou em sua pesquisa, o fato de alguns professores, em especial os novatos tentarem integrar a abordagem da resolução de problemas ao ensino da Álgebra. Nesta pesquisa, eles se utilizam de problemas totalmente fora do chamado "mundo real", ficando assim difícil de se descontextualizar e formalizar conceitos ao final de atividade com este objetivo.

Com o intuito de esclarecer o que se entende por caráter processual ou operacional, e caráter estrutural da Álgebra, recorremos a Sfard (1991), que se refere:

" Há um profundo hiato ontológico entre concepções operacionais e estruturais... Ver uma entidade matemática como um objeto significa ser capaz de referir-se a ele como se fosse uma coisa real - uma estrutura estática, existindo em algum lugar no espaço e no tempo. Significa também ser capaz de reconhecer a idéia "à primeira vista", e manipulá-la como um processo implica olhá-la como um potencial em vez de uma entidade real, que vem à existência quando solicitada em uma seqüência de ações. Assim, enquanto que a concepção estrutural é estática, instantânea e interrogativa, a operacional é dinâmica, seqüencial e detalhada".

Mais que esclarecer, gostaríamos de apresentar o que se entende por aspecto estrutural e processual da Álgebra, recorrendo a Kieran (1992), para deixar claro como utilizaremos essa teoria nas análises dos resultados de nossa pesquisa.

Quando estamos nos referimos ao aspecto processual da Álgebra, estamos considerando as operações aritméticas que são realizadas com números que produzirão como resultado também números. Podemos citar alguns exemplos para ilustrar.

Se tomarmos a expressão algébrica $5x - 2y$ e substituirmos x e y por 3 e 5, respectivamente, o resultado será 5. Um outro exemplo envolve a equação $3x + 2 = 8$, podemos resolvê-la substituindo vários valores para x até que o correto seja encontrado.

Nos dois exemplos anteriores, aparentemente algébricos, os objetos trabalhados não foram em momento algum as expressões algébricas, mas sim, suas instâncias numéricas. Vimos que as operações que foram realizadas nesses números são computacionais, ou seja, produzem um resultado numérico.

Sendo assim, observamos que esses exemplos escondem uma falsa impressão de estar trabalhando com as estruturas da Álgebra, nada mais são do que exemplos que ilustram uma perspetiva processual da Álgebra.

Por outro lado, ao nos referirmos ao aspecto estrutural da Álgebra estamos levando em conta um conjunto diferente de operações que serão levadas a efeito, não sobre os números, mas sim, sobre as expressões algébricas propriamente ditas.

Mais uma vez podemos citar alguns tipos de exercícios que podem nos auxiliar na compreensão desta perspectiva. Se tomarmos a expressão algébrica $7z + 4w - z$, veremos que essa pode ser simplificada para $6z + 4w$, ou podemos ainda multiplicar a expressão por w, e teremos $6zw + 4w^2$.

Algumas equações, tipo $6x + 5y = 3x + 2$, podem ser resolvidas subtraindo-se 3x de ambos os lados da equação para se obter $6x + 5y - 3x = 3x + 2 - 3x$ que posteriormente pode ser simplificada para $3x + 5y = 2$.

Nos exemplos anteriores, vimos que os objetos que foram trabalhados foram as expressões algébricas e não alguma instância numérica. As operações que foram realizadas não são computacionais, além de que os resultados obtidos ainda continuaram sendo expressões algébricas.

Kieran (1992) considera que o desenvolvimento da Álgebra é feito como um ciclo processual-estrutural; quando nos referimos à Álgebra que deve ser ensinada na escola, podemos interpretá-la como sendo uma série de ajustes processual-estruturais que os alunos devem fazer para vir a entender o aspecto estrutural da Álgebra.

Para sermos mais objetivos, lembramos rapidamente as adaptações que os alunos devem fazer quando começam a estudar expressões e equações algébricas. Devemos sempre tomar o devido cuidado para que eles não fiquem por muito tempo interpretando essas entidades como operações aritméticas sobre algum número, mas sim, que consigam, rapidamente, percebê-las como objetos por si próprios, sobre os quais é perfeitamente possível realizar diversas operações.

Sendo assim, eles poderão notar que os objetos trabalhados são as expressões/equações algébricas, e não, os números. Além disso, podem vir a perceber que as operações efetuadas sobre esses objetos são as de simplificar, fatorar, racionalizar o denominador, entre outras, mais do que simplesmente adicionar, subtrair, multiplicar e dividir como se fazia, basicamente, em Aritmética.

Outro fator importante dentro do aspecto estrutural da Álgebra, em particular, com a representação simbólica de relações numéricas diz respeito à tradução de situações-problema em equações algébricas. Essas equações são representações estruturais que envolvem uma perspectiva não aritmética, não só quanto à natureza das operações que são representadas, mas também quanto ao uso do sinal de igualdade. Nota-se que ao passar de uma perspectiva aritmética para uma algébrica, podemos estar nos movimentando de uma concepção processual para uma estrutural.

Quando nos utilizamos de uma abordagem por meio de problemas, para nos movimentarmos da concepção processual para a estrutural da Álgebra, podemos citar, como exemplo, a pesquisa de Filloy e Rojano (1984), em que elas enfatizam que a ruptura entre Aritmética e Álgebra, nessa situação, ocorre quando da utilização de problemas que possam ser modelados com equações do tipo $ax \pm b = cx \pm d$, pois é com esse tipo de problema que os alunos normalmente deixam de confiar nas abordagens que utilizavam na Aritmética.

Nesse tipo de problema, os alunos precisam não somente começar a pensar em termos de operações antecipadas para poder modelá-los com equações, mas também, usar procedimentos de resolução que possam ser operados em ambos os lados da equação, ou seja, um processo que opere sobre um objeto algébrico.

Sendo assim, acreditamos ser importante aos alunos no estudo de Álgebra, que eles não só tratem as representações simbólicas como objetos matemáticos, mas operem sobre eles sem a preocupação de encontrar soluções numéricas. Além de saber resolverem situações-problema utilizando-se de estruturas algébricas.

Com isso, pretendemos utilizar como pontos de vista de análise em nossos resultados, se o aluno é capaz de:

- tratar as representações simbólicas como objetos matemáticos;
- saber operar sobre as estruturas algébricas;
- saber modelar situações-problema em estruturas algébricas.

Mas por que será que tantos alunos, em diversas partes do mundo, cometem os mesmos erros em Álgebra ? Quais seriam os erros mais comuns ? Em razão de que será que eles ocorrem tão sistematicamente ?

Fomos buscar suporte na literatura e encontramos em Cortés & Kavafian (1999), uma pesquisa que pode nos auxiliar na classificação e em nossas constatações referentes à persistência de tais erros.

O referido estudo levanta por intermédio de uma pesquisa empírica, os erros cometidos por alunos da *4éme et 5éme* na França (7ª e 8ª séries no Brasil), quando da resolução de equações. Esses erros são classificados em cinco categorias, que foram construídas baseadas na utilização incorreta de determinadas propriedades matemáticas.

Os autores utilizam-se do quadro teórico *Invariantes Operacionais*, de Gérard Vergnaud (1990) para a elaboração, aplicação e análise da pesquisa.

Foram propostas aos alunos cinco tipos de tarefas, que, segundo os autores, são a origem dos erros na aprendizagem da Álgebra:

- tarefas envolvendo transformações algébricas com números/coeficientes negativos;
- tarefas envolvendo cálculo numérico com números negativos;
- tarefas envolvendo fatoração e redução de termos semelhantes;
- tarefas envolvendo o tratamento de produto de fatores;
- tarefas envolvendo a passagem dos termos algébricos, de um membro para outro da equação (na resolução de equações do tipo ax+b = cx+d).

Os autores acreditam, nisso concordamos com eles, que a passagem por um erro durante a aprendizagem da resolução de equações algébricas, é quase necessário para o aluno, sobretudo, quando ele se depara com uma situação nova como por exemplo, equações com incógnitas nos dois membros ou quando as equações envolvem produto de fatores.

Na pesquisa, os autores consideram por um lado erros conceituais, como aqueles que são provenientes da utilização de uma propriedade matemática falsa, e por outro, erros originados pela falta de atenção durante a resolução das atividades.

Os erros são analisados e classificados de acordo com a propriedade matemática que foi desrespeitada independente da forma visual do mesmo.

Para classificar esses erros, são utilizadas cinco categorias:

- erros decorrentes da utilização do conceito de equação e incógnita;
- erros de transformações algébricas idênticas nos dois membros das equações;
- erros decorrentes da escolha da operação prioritária;
- erros na escrita de uma nova equação: falta de atenção;
- erros de cálculos numéricos.

1 - Erros decorrentes da utilização do conceito de equação e incógnita:

Os conceitos de equação e incógnita são explorados pelos alunos logo nas primeiras atividades da pesquisa.

Para grande parte dos alunos, a incógnita é vista como um número desconhecido. O conceito de equação é abordado com base na resolução de problemas do "mundo real", nos quais eles escrevem a equação e aprendem que o sinal de igual pode ser visto como equivalência de dois membros.

1.a – quando a equação e a incógnita são dadas, um tipo muito comum de erro é:

-w = 10,66 (incógnita precedida de -)

w = - 10,66 (não é escrito por boa parte dos alunos)

Os alunos não percebem que um número é diferente de seu oposto ($7 \neq -7$), portanto, boa parte deles assume – w com a incógnita da equação.

1.b – quando é dado um problema em linguagem natural, aparecem muitos erros na escrita da equação e na identificação da incógnita, erros esses, na maior parte das vezes, conceituais em relação à equação e ou incógnita. Os conceitos de equação e incógnita são essenciais para a compreensão das transformações algébricas.

2 - Erros de transformações algébricas idênticas nos dois membros das equações:

A aplicação de uma transformação algébrica em uma equação do 1º grau conduz a uma nova equação (equação equivalente), que possui a mesma solução (ou o mesmo conjunto de soluções). Duas regras de transformações foram propostas aos alunos:

- somar ou subtrair o mesmo número em ambos os membros da equação (obtendo equações equivalentes):

ex: 5t –50 = 125 ; 5t –50 +50 = 125+50-50 ; ...

- multiplicar ou dividir por um mesmo número, ambos os membros da equação (obtendo novamente equações equivalente):

ex: 3x = 21 ; 3x/3 = 21/3 ; x = 7

O critério de classificação desta classe de erros é a conservação da igualdade, em que é verificado se as transformações feitas em ambos os membros mantêm a igualdade. Do ponto de vista cognitivo, esse princípio de conservação da igualdade é a propriedade majoritária no processo de resolução de equações.

2.a – erros nas transformações aditivas:

2.a .1 – transformar somente um membro da equação:

- no tratamento de termos numéricos (na maioria das vezes negativos), o aluno faz:

5t-50 = 125 ; 5t-50**+50** = 125 ; 5t = 125 ; …

- no tratamento de termos literais, ele faz:

17z+45 = 5z+21 ; 17z+45 = 5z**-5z**+21 ; 17z+45 = 21 ; ...

Esses tipos de erros demonstram uma dificuldade conceitual durante a aprendizagem, o que acabam por constituir no aluno uma falsa regra no processo de resolução de equações.

2.a .2 – transformações diferentes em cada membro da equação (por exemplo, soma-se de um lado e subtrai-se do outro):

- no tratamento de termos numéricos negativos:

78,6 = 26,2x-44 ; 78,6**-44** = 26,2-44**+44** ; ...

- no tratamento de termos numéricos positivos:

-37 = 6v+65 ; -37**+65** = 6v+65**-65**

- no tratamento de termos literais:

11x = 14x-30 ; **14x**-11x = 14x-14x-30 ; ...

De modo geral, esse tipo de erro reforça a idéia de que o resultado de uma transformação é um número menos o outro, e com um <u>resultado positivo.</u>

Alguns outros erros cometidos pela falta de atenção:

- o sinal da transformação não é previsto corretamente:

4y+49 = 93 ; **93**+4y+49 = 93**-93** ; ...

- o "sinal de menos" é confundido do termo literal para o numérico:

78-m = 33 ; 78-m**+78** = 33**+78** ; ...

- dificuldade na leitura da equação:

6w+32 = -32 ; 32**-32**+6w = -32**+32** ; 6w = 0

2.a .3 – as transformações aditivas nem sempre são explicitadas, não ocorre mudança de sinal quando um termo é transferido de um lado para o outro da igualdade:

- no tratamento dos termos numéricos negativos:

95 = 55,7x-150 ; **-150**+95 = 55,7x ; ...

- no tratamento de termos numéricos positivos:

-37 = 6v+65 ; -37**+65** = 6v ; ...

- quando os alunos efetuam várias transformações ao passar de uma equação para outra:

5t-50 = 125 ; $t = \frac{125\mathbf{-50}}{5}$

2.b – erros nas transformações multiplicativas: o número de erros que ocorre nessas transformações é bem menor que nas aditivas e, também pode ser conceitual ou por falta de atenção.

2.b.1 – quando os alunos dividem somente um termo da equação

$11x+30 = 14x$; $\mathbf{\frac{11x}{3}}+30 = 14x$; ...

Neste tipo de situação, os alunos deparam-se com incógnitas nos dois membros da igualdade e querem isolá-las em somente um dos lados, levando-os a cometer um erro conceitual, pois eles não mantêm o princípio da igualdade.

2.b.2 – quando os alunos efetuam transformações diferentes em cada membro da equação

I) $45 = \frac{3}{2}y$; $\mathbf{\frac{3/2}{45}} = \frac{3/2}{3/2}y$; $\mathbf{\frac{3}{2}} \cdot 45 = y$; ...

A dificuldade em operar com frações é a origem deste tipo de erro.

II) $-3x = 86$; $\frac{-3x}{-3} = \frac{86}{\mathbf{3}}$; $x = 86$

Erros envolvendo “sinal de - ” são muito freqüentes ora conceituais, ora por falta de atenção.

III) $-9y = 99$; $y = 99/\mathbf{9}$ ou $-9y = 99$; $-y = 99/\mathbf{-9}$

Estes tipos de erros demonstram que os alunos generalizam a regra das transformações aditivas (“mudança de + para -, quando passa de um lado para o outro da igualdade”).

3 – Erros decorrentes da escolha da operação prioritária:

Erros envolvendo a escolha da operação prioritária, geralmente estão ligados, segundo consta na literatura internacional, a uma impossibilidade dos alunos de ler (em voz alta) a notação algébrica, ou ainda, pelo desconhecimento das prioridades das operações.

3.a – erros ocorridos em razão do desconhecimento da prioridade da multiplicação em relação à adição ou subtração:

- muitas vezes, eles somam o coeficiente da incógnita a um termo independente:

5t-50 = 125 ; **-45t** = 125 ; ... ou 40 = **5t+22** ; 40 = **27t** ; ...

3.a .1 – na resolução de equações contendo um produto de fatores, alguns alunos tratam um dos termos situados dentro dos parênteses, como sendo um termo independente:

3(2x+22)+34 = 110 ; 3(2x**+22-22**)+34 = 110**-22** ; 3(2x)+34 = 88 ; ...

3.a .2 – um produto de fatores é tratado com as mesmas propriedades da adição de termos:

5t-50 = 125 ; 5t-**5**-50 = 125**-5** ; t-50 = 120 ; ...

3.b – erros ocorridos por causa do desrespeito da prioridade da adição/subtração sobre a multiplicação:

3.b.1 – o aluno utiliza-se de um determinada regra incorreta durante o desenvolvimento do produto de fatores: multiplica somente um dos termos:

3(2x-2+24)+34 = 110 ; **3.2x**+22+34 = 110 ; ...

3.b.2 – alguns alunos efetuam transformações multiplicativas errôneas, pois multiplicam por um determinado número somente um termo de cada membro da equação:

$57 = \frac{3}{2} y + 12 \; ; \; \frac{2}{3} . 57 = \frac{3}{2} y . \frac{2}{3} + 12 \; ; \; ...$

3.b.3 – a fatoração nem sempre é reconhecida:

- os alunos sentem dificuldade em reconhecer quando uma adição, por exemplo, mesmo estando fatorada, é permitida e prioritária sobre a multiplicação:

(-4) (3-6x)+30 = x(3-3,5+2,5)+100 ; ... = **3x-3,5x+2,5x**+100 ; ... = **2x**+100 ; ... = ...

3.c – erros ocorridos pelo desrespeito da prioridade da divisão sobre a adição ou subtração:

- erros do tipo: $\frac{1}{3} = \frac{1}{x} + \frac{1}{7}$; $3 = \mathbf{x+7}$; ...

obs: outros erros semelhantes aparecem com freqüência entre alunos de classes mais avançadas, porém, não se mostram aqui, pois não fazem parte do programa dessas séries.

3.d – erros ocorridos por causa do desrespeito da prioridade da adição e subtração sobre a divisão:

- efetuam a divisão por um número somente com um dos membros da equação:

3.d.1 - na resolução das equações do tipo ax+b = c:

$-4z+z = -76$; $\frac{-4}{\mathbf{4}} z + z = \frac{-76}{\mathbf{4}}$; ...

3.d.2 - na resolução das equações nas quais as incógnitas aparecem em ambos os membros da equação:

$109y = 25y-35$; $\frac{109}{\mathbf{25}} y = \frac{25}{\mathbf{25}} y - 35$; ...

3.d.3 – na resolução de equações que contém um produto de fatores:

$60 = (-4)(-9m)+90$; $\frac{60}{\mathbf{(-4)}} = \frac{(-4)}{\mathbf{(-4)}}(-9m)+90$; ...

<u>4 – Erros decorrentes da escrita de uma nova equação: falta de atenção</u>

Estes tipos de erros aparecem na escrita de uma nova equação, geralmente, por distração do aluno, pois as novas equações (equações eqüivalentes) são escritas baseadas nas anteriores, efetuando-se transformações algébricas sucessivas até se chegar à resolução das mesmas.

4.a – erros decorrentes da omissão ou escrita incorreta de um termo da nova equação:

- um termo é omitido ou copiado de modo incorreto:

57 = $\frac{3}{2}$ y **+ 12** ; 27 = 1,5 y ; ... ou **-37** = 6v=65 ; 6v+65 = -65 ; ...

4.b – erros decorrentes da omissão do sinal de " **-** " na escrita da nova equação:

• este tipo de erro é tão freqüente, que merece uma análise detalhada:

4.b.1 – um termo é reescrito na nova equação, mas o sinal de – é esquecido:

39-39**-3x** = 125-39 ; **3x** = 86 ; ...

Este tipo de erro demonstra claramente a dificuldade dos alunos em trabalhar com o sinal de - , pois eles acham que ele sempre representa a subtração entre dois termos.

Outro erro cometido com bastante freqüência pelos alunos, é passar o sinal para o outro membro da equação:

39-3x = 125 ; **3x** = 125**-**39 ; ...

4.b.2 – omissão do sinal de – na escrita de uma nova equação resultado da adição de números relativos:

- na adição de termos numéricos:

-37-65 = 6v+65-65 ; **102** = 6v ; ... ou 40-40-5t = **22-40** ; -5t = **18** ; ...

- na adição dos coeficientes das incógnitas:

109y-109y+35 = **25y-109y** ; 35 = **84y** ; ...

4.b.3 – omissão do sinal de – na escrita do resultado de uma divisão:

- na simplificação dos coeficientes das incógnitas:

$\frac{\mathbf{-3}}{\mathbf{3}}$ **x** = 86 ; **x** = $\frac{86}{3}$; ...

- nas divisões não triviais:

$\frac{-3}{-3}$ x = $\frac{86}{-3}$; x = **28,6** ; ...

obs: é muito comum também, os alunos assumirem a falsa regra: "o coeficiente passa para o outro lado com o sinal trocado", por exemplo:

-3x = 86 ; x = 86/**3**

4.c – erros decorrentes da introdução arbitrária do sinal de “ – ” na nova equação:

-9y = **99** ; y = $\frac{\mathbf{-99}}{-9}$; ...   ou   109y-25y transforma-se em **–84y**

5 – Erros envolvendo cálculo numérico:

Grande parte dos alunos costuma cometer esse tipo de erro. Alguns são conceituais, mas outros, ocorrem por falta de atenção.

5.a – erros envolvendo números relativos:

5.a . 1 – adição de números relativos:

-56-20 = **-36**   ou   -6t-2t = **-4t**

obs: este tipo de erro é o mais freqüente, e em alguns alunos são conceituais, mas para outros, ocorrem por falta de atenção.

5.a.2 – multiplicação de números relativos:

60 = (-4) (-9m)+90 ; 60 = **-36m**+90 ; ...

obs: este tipo também é bastante freqüente entre os alunos, podendo, da mesma forma que o tipo anterior ser conceitual, por falta de atenção ou pela utilização de alguma regra falsa.

- erros semelhantes ocorrem, envolvendo o produto de fatores:

(-4) (-3x+6) ; **-12x+24**   ou   (-4) (-3x+6) ; 12x**+24**

ou   (-4) (3-6x) ; -12**-24x**

5.a. 3 – divisão de números relativos: -18/-5 ; **-3,6**

obs: este é outro tipo de erro que também aparece com muita freqüência entre os alunos, aparentemente, o que importa para os alunos, é somente o sinal do numerador da fração.

5.b – erros envolvendo cálculo mental:

5.b.1 – o resultado da divisão difere-se ligeiramente do correto:

99/-9 ; **-10**   ou   44/4 ; **10**

Os erros ocorridos por cálculo mental acontecem com uma freqüência muito grande, aparentemente, são cometidos por falta de atenção.

5.b.2 – o resultado da adição de números relativos difere do resultado correto:

125-39 ; **96** ou 29x-7,8x ; **11,2x** ou -48-12 ; **-68**

A base deste tipo de erro envolve a falta de organização de cálculo mental.

Assim, é de grande importância fazer o levantamento das estratégias que os alunos utilizam para resolver questões semelhantes às propostas no estudo acima, para que possamos constatar até que ponto esses erros influenciam no desenvolvimento dos aspetos processuais e estruturais da Álgebra, segundo Kieran (1992).

Um dos principais pontos a serem enfatizados em nosso trabalho, recai sobre o fato de que os alunos tão logo se apropriam de um método formal para resolver equações por exemplo, deixam de lado todo e qualquer outro tipo de raciocínio que os conduza a resolvê-las, sem necessariamente, utilizar um método "mais mecanizado", como destaca Kieran (1985).

Essa mecanização da Álgebra que foi ressaltada por Kieran e, erros tão freqüentemente presentes, como todos esses que vimos acima, nos levaram a estudar o ensino da Álgebra Elementar no Estado de São Paulo e verificar como está o desempenho dos alunos no resultado do seu Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar (SARESP), no ano de 1.997, e nos dias atuais, em relação a nossa amostra.

Para nos auxiliar ainda mais, no cumprimento de nosso objetivo, fomos buscar na Proposta Curricular de Matemática vigente do Estado de São Paulo (1986), quais indicações para uma reflexão sobre esse ensino, encontramos, dentre outras, as seguintes sugestões:

- que esse estudo seja vinculado ao estudo das propriedades das operações e regras de simplificação no cálculo com potências;
- que o estudo ocorre com ênfase apenas na terminologia básica, estritamente, necessária;
- que se abandone o trabalho com polinômios com muitos termos e com mais de duas variáveis;
- que as expressões algébricas sejam estudadas para generalizar operações e propriedades dos números já estudados;
- que regras de fatoração sejam introduzidas apenas antes do estudo das equações de 2º grau, portanto na 8ª série;
- que o uso do recurso geométrico e a interpretação geométrica sejam utilizados nos cálculos algébricos.

Importante para uma melhor análise e um trabalho coerente com o referido Exame do SARESP que também façamos uma reflexão sobre os objetivos apontados nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's), no que se referem à Álgebra no Ensino Fundamental.

Considerando que, dentre as finalidades do ensino de Matemática está a construção da cidadania, um dos pontos principais dos PCN's, mais especificamente no campo da Álgebra. Esse estudo deve levar o aluno a:
- fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos da realidade, estabelecendo inter-relações entre eles, utilizando o conhecimento matemático (aritmético, métrico, algébrico, estatístico, combinatório, probabilístico);
- resolver situações-problema, sabendo validar estratégias e resultados, desenvolvendo formas de raciocínio e processos, como intuição, indução, dedução, analogia, estimativa e utilizar conceitos e procedimentos matemáticos, bem como instrumentos tecnológicos disponíveis;
- estabelecer conexões entre temas matemáticos de diferentes campos e entre esses temas e conhecimentos de outras áreas curriculares.

Com todos esses indicadores em mãos, tentaremos por intermédio de nossa pesquisa, encontrar resposta para a seguinte questão:

- **De quais estratégias, os alunos se utilizam para resolver questões de Álgebra Elementar como as que aparecem no SARESP/97?**

No próximo capítulo desenvolveremos a pesquisa, relatando detalhadamente como a mesma ocorreu.

Capítulo III
Nossa pesquisa com um grupo de alunos, utilizando alguns dos itens sobre Álgebra, da avaliação do SARESP/1997

1 . Introdução

Consideramos que pesquisas em Educação Matemática podem oferecer contribuições para o aperfeiçoamento dos programas de avaliação, na medida que utilizem indicadores revelados por essas avaliações sistêmicas e os tratem de forma mais detalhada. Assim, essas pesquisas podem identificar, por exemplo, como os alunos procedem ao resolver as questões propostas, que dificuldades são ocasionadas pela própria formulação dos itens, que problemas são decorrentes da escolha didática de seus professores, etc. Com esta convicção, organizamos nosso trabalho no que se segue.

2. Nossa metodologia e os procedimentos metodológicos

2.1) A escolha de nossa metodologia

Optamos em nossa pesquisa pela abordagem qualitativa, utilizando complementarmente alguns procedimentos quantitativos. Achamos importante destacar aqui, uma citação de Borgan & Biklen (1982), pesquisadores experientes na área que apresentam cinco características básicas da pesquisa qualitativa:

- *tem o ambiente natural como sua fonte direta de dados e o pesquisador como seu principal instrumento. Como os problemas são estudados no ambiente em que ocorrem, naturalmente, sem qualquer manipulação intencional do pesquisador, este tipo de estudo é também chamado de "naturalístico;*
- *os dados coletados são predominantemente descritivos. Todos os dados da realidade são importantes. Um aspecto supostamente trivial pode ser essencial para melhor compreensão;*
- *a preocupação com o processo é muito maior que a do produto;*

• *o “significado” que as pessoas dão às coisas e à sua vida são focos de atenção especial;*
• *a análise dos dados tende a seguir um processo indutivo.*

2.2) Os procedimentos

Nossa pesquisa foi dividida em duas partes: na primeira delas, reaplicamos as questões de Álgebra do SARESP/97, organizando-as em forma de um teste para ser respondido pelos alunos de 8ª séries da Rede Pública do Estado de São Paulo.

No teste que aplicamos, era solicitado aos alunos que, além de assinalar a alternativa correta, justificassem de alguma forma o porquê chegaram a tal resposta, para que assim pudéssemos analisar seus procedimentos e estratégias de resolução, parte primordial de nossa pesquisa.

Escolhemos a Diretoria de Ensino de Caieiras em razão do fato de minha carreira como professor ter se iniciado na mesma, além da predisposição da referida D.E. em participar de projetos de nossa Universidade.

O teste foi aplicado em 20 alunos de duas escolas distintas da D.E. de Caieiras, as quais foram indicadas por possuírem as seguintes características:

• a escola que nomearemos de **Escola 1**, não havia alcançado bons índices nesse componente curricular nas últimas edições do SARESP;
• a escola que nomearemos de **Escola 2**, diferentemente da anterior, havia obtido um dos melhores resultados em Matemática nas últimas edições do SARESP.

O pesquisador solicitou aos professores das respectivas escolas, que escolhessem os alunos de forma aleatória, levando em conta somente o fato de que seria necessário que os mesmos fossem comprometidos e gostassem de participar de atividades extra-classes. Foi deixado claro aos professores que não seria interessante à pesquisa que fossem escolhidos alunos com desempenho diferenciado em Matemática.

Para essa primeira etapa de nossa pesquisa, utilizamos quatro sessões de 60 minutos cada, as duas primeiras para apresentação da proposta à Direção das Escolas, professores e alunos e as duas últimas para a aplicação propriamente dita. A aplicação do teste ocorreu em uma das dependências das U.Es., onde o pesquisador e os alunos permaneceram para resolução do teste.

Foi amplamente divulgado aos alunos pelo pesquisador, a necessidade e importância da explanação da justificativa pela escolha da alternativa assinalada, pois somente, assim, seríamos capazes de obter as informações que estávamos buscando para nosso trabalho.

Durante aplicação do teste, o pesquisador procurou deixar os alunos resolverem os exercícios individualmente, sem nenhuma interferência, somente lhes relembrando que se utilizassem de qualquer forma de justificativa, mesmo quando não tivessem disponível nenhuma “mais formal” para a questão.

Na segunda etapa de nossa pesquisa, optamos, após os resultados obtidos na etapa anterior, por reaplicar as questões que haviam apresentado ou índices muito baixos, ou índices muito elevados de aproveitamento, ou ainda, aquelas que nos permitissem colher mais dados e obter maiores referências para nossas análises.

Sendo assim, propusemo-lhes questões sem as alternativas, para que essas não influenciassem na resposta por eles apresentadas e pudessem nos esclarecer algumas dúvidas que ficaram com os testes, em relação aos procedimentos e estratégias empregadas pelos alunos.

Essa etapa de nossa pesquisa contou com a presença de 18 dos 20 alunos que participaram anteriormente. Utilizamos oito sessões de 50 minutos cada, nas quais os alunos reuniram-se em dupla ou trio para a discussão e resolução das questões propostas.

Essa etapa diferenciou-se da primeira, pelo fato do pesquisador estar mais participativo com os alunos durante as sessões, trabalhando com eles em forma de oficina, para que o contexto de avaliação fosse deixado de lado.

Com isso, além dos alunos terem possibilidade de discutirem entre si, e com o pesquisador, sobre quais procedimentos ou estratégias usariam para resolver as questões, o pesquisador pôde entrevistá-los durante as sessões.

2.3) Caracterização dos alunos e seus professores

Pudemos levantar, por meio de um questionário respondido pelos professores que atualmente trabalham com esses alunos, alguns dados referentes às suas caracterizações[7].

Durante as etapas que constituíram nossa pesquisa, procuramos levantar alguns dados de caracterização dos alunos que participaram das atividades. O pesquisador, durante a entrevista realizada na segunda etapa

---

[7] **Dois professores são do sexo masculino e um do sexo feminino; a idade dos três está em torno dos 30 anos; um deles possui dez anos de magistério, outro cinco anos e o para 3º deles esse é o seu primeiro ano de magistério; dois deles possuem formação em Matemática obtida pela Deliberação 2/97 e o outro ainda é aluno da Licenciatura em Matemática. Nenhum deles possui Pós-Graduação na área da Educação; dois deles freqüentaram cursos de Educação Continuada, um na área de Matemática e o outro em Informática.**

da pesquisa, aplicou algumas questões, que apresentaram os seguintes resultados:

• à idade dos alunos:

Idade	13	14	15	16	17
%	25	55	10	5	5

• ao desempenho deles em Matemática nas séries anteriores:

Ótimo	Bom	Regular	Fraco
11%	28%	44%	17%

• à afinidade deles com a Matemática:

Muita	Média	Pouca	Nenhuma
6%	61%	22%	11%

• à importância da Matemática no cotidiano deles:

Muita	Média	Pouca	Nenhuma
0%	72%	28%	0%

• à dificuldade em aprender Matemática:

Muita	Média	Pouca	Nenhuma
28%	55%	17%	0%

• à dificuldade que encontraram ao resolver as atividades de nossa pesquisa:

Muita	Média	Pouca	Nenhuma
22%	56%	22%	0%

2.4) Análise a-priori das questões abertas:

Foi feita uma análise *"a-priori"* das questões abertas que foram aplicadas durante as entrevistas realizadas na segunda etapa de nossa pesquisa.

Essa análise foi composta por três etapas: objetivo da questão, conteúdo da questão e estratégias possíveis de resolução.

As referidas questões são apresentadas com a análise *"a-priori"*, com a finalidade de facilitar a compreensão das observações que foram levantadas.

1ª Questão:

Numa padaria há um **cartaz afixado** em que constam os seguintes itens:

Leite	R$ 0,70
Pão	R$ 0,12

Joana comprou uma quantidade **x** de pães e uma quantidade **y** de litros de leite. Escreva a expressão algébrica que representa essa compra.

Objetivo: Verificar se o aluno é capaz de traduzir uma situação-problema em uma expressão algébrica.

Conteúdo: - Problemas de contextualização: interpretação e tradução em expressões algébricas;

- Expressões algébricas: conceitos e operações.

Estratégias de Resolução: Levantamos duas estratégias de resolução:

- estratégia 1: - escrever a expressão multiplicando x por 0,12 e y por 0,70;
- estratégia 2: - escrever a expressão multiplicando y por 0,70 e x por 0,12.

Procuramos inverter a posição dos dados no enunciado da questão, utilizando x para representar o número de pães e y para leites, pois na 1ª etapa da pesquisa, essas informações apareceram invertidas, o que nos trouxe uma dúvida em relação ao fato do aluno poder, mecanicamente, naquela situação, multiplicar o primeiro dado numérico pela primeira variável (x) e, em seguida, fazer o mesmo para y, encontrando assim a resposta certa, sem necessariamente, ter compreendido o problema de modelização.

2ª Questão:

O número 3 é solução da equação $\frac{x+2}{3} = \frac{x}{5}$?

Mostre como você chegou a essa resposta.

Objetivo: - Verificar se o aluno tem disponível o conceito de um número ser solução de uma equação;

- Verificar se o aluno utiliza o aspecto processual da Álgebra para solucionar a questão;

- Verificar se o aluno utiliza o aspecto estrutural da Álgebra para solucionar a questão.

Conteúdo: - Equação de 1º grau

Estratégias de Resolução: Levantamos três estratégias de resolução:

- estratégia 1: - Utilizando o aspecto processual da Álgebra, fazendo a substituição do 3 no lugar do x, verificando se a igualdade é verdadeira:

$\frac{3+2}{5} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{5}{3} = \frac{3}{5}$ (F) $\therefore$ 3 não é solução da equação dada

• estratégia 2: - Utilizando o aspecto estrutural da Álgebra para resolver a equação, operando com as estruturas algébricas da seguinte forma:

$\frac{x+2}{3} = \frac{x}{5} \Rightarrow 5(x + 2) = 3x \Rightarrow 5x + 10 = 3x \Rightarrow 5x\text{-}3x = -10 \Rightarrow 2x = -10 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = -10/2 \Rightarrow x = -5 \therefore$ 3 não é solução da equação dada

• estratégia 3: - Utilizando o aspecto estrutural da Álgebra para resolver a equação, operando com as estruturas algébricas da seguinte forma:

$\frac{x+2}{3} = \frac{x}{5} \Rightarrow \frac{5(x+2)}{15} = \frac{3x}{15} \Rightarrow 5x + 10 = 3x \Rightarrow 5x\text{-}3x = -10 \Rightarrow 2x = -10 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = -10/2 \Rightarrow x = -5 \therefore$ 3 não é solução da equação dada

Procuramos implementar a questão que deu origem a esta e a próxima questão desta fase da pesquisa, com o principal intuito de verificar se o aluno tinha disponível o conceito de um número ser solução de uma equação. Com isso, ele poderia resolver a questão, simplesmente, pela substituição do 3 no lugar do x.

Por outro lado, sabemos que muitos alunos, embora não possuam, imediatamente esse conceito em mãos, são capazes de encontrar a solução pela resolução algébrica e verificar se a mesma é ou não verdadeira.

3ª Questão:

Resolva a seguinte equação:

5(x - 1) = 2(x + 2)

Objetivo: - Verificar se o aluno utiliza o aspecto estrutural da Álgebra para resolver a equação de 1º grau.

Conteúdo: - Equação de 1º grau

Estratégias de Resolução: - Levantamos uma estratégia de resolução, utilizando o aspecto estrutural da Álgebra, operando com as estruturas algébricas da seguinte forma:

$5(x - 1) = 2(x + 2) \Rightarrow 5x – 5 = 2x + 4 \Rightarrow 5x - 2x = 4 + 5 \Rightarrow 3x = 9 \Rightarrow$

$x = 9/3 \Rightarrow x = 3$

Como já citamos na questão anterior, optamos por dividir a questão 4 da primeira fase da pesquisa em duas partes. Diferentemente da questão anterior, nesta queríamos, realmente, verificar se o aluno reconhece as estruturas algébricas e sabe operar com elas.

4ª Questão:

Um espião de guerra enviou ao seu comando a seguinte mensagem:

$5n + 25 > 5500$

$- 8n + 3501 > 210 - 5n$

O comando sabia que a letra **“n”** representava o número de foguetes do inimigo. Encontre o total de foguetes representado pela mensagem enviada ao comando.

Objetivo: - Verificar se o aluno sabe interpretar um problema traduzido por um sistema de inequações de 1º grau;

- Verificar se o aluno utiliza o aspecto estrutural da Álgebra para encontrar a solução do sistema.

Conteúdo: - Sistema de inequações de 1º grau.

Estratégias de Resolução: - Levantamos duas estratégias (bastante semelhantes) de resolução envolvendo o aspecto estrutural da Álgebra, operando com as estruturas da Álgebra das seguintes formas:

• estratégia 1:

$5n + 25 > 5500 \Rightarrow 5n > 5500 - 25 \Rightarrow 5n > 5475 \Rightarrow\ \ n > 5475/5 \Rightarrow \underline{n > 1095}$

$- 8n + 3501 > 210 - 5n \Rightarrow -8n + 5n > 210 – 3501 \Rightarrow -3n > - 3291\ .\ (-1)$

$\Rightarrow 3n < 3291 \Rightarrow n < 3291/3 \Rightarrow \underline{n < 1097}$

$\underline{n > 1095}$ e $\underline{n < 1097}$ $\therefore$ $\mathbf{n = 1096}$

• estratégia 2:

$5n + 25 > 5500 \Rightarrow 5n > 5500 - 25 \Rightarrow 5n > 5475 \Rightarrow\ \ n > 5475/5 \Rightarrow \underline{n > 1095}$

$- 8n + 3501 > 210 - 5n \Rightarrow 3501 – 210 > 8n – 5n \Rightarrow 3291 > 3n \Rightarrow 3291/3 > n$

$1097 > n$

$\underline{n > 1095}$ e $\underline{n < 1097}$ $\therefore$ $\mathbf{n = 1096}$

Trata-se de uma questão que, embora contemple sobretudo as técnicas algébricas, os alunos devem sentir dificuldades em razão da mesma apresentar duas inequações para serem resolvidas, com o agravante da segunda possuir coeficiente negativo na incógnita.

5ª Questão:

Somando minha idade com a de minha mãe temos a idade de minha avó. Eu tenho um terço da idade de minha mãe e minha avó tem 72 anos. Desta forma, quantos anos eu tenho?

Objetivo: - Verificar se o aluno é capaz de traduzir um problema em um sistema de equações de 1º grau;

- Verificar se o aluno utiliza o aspecto processual da Álgebra para resolver o problema;

- Verificar se o aluno utiliza o aspecto estrutural da Álgebra para resolver o problema.

Conteúdo: Sistema de equações de 1º grau.

Estratégias de Resolução: - Levantamos três estratégias de resolução para a questão, sendo uma pelo aspecto processual e duas pelo estrutural.

- estratégia 1: - Utilizando o aspecto processual, o aluno pode ir testando números que satisfaçam as duas condições fornecidas no enunciado da questão, ou seja, que a soma de dois números seja igual a 72, que um seja o triplo do outro;

- estratégia 2: - Utilizando o aspecto estrutural, operando com as estruturas algébricas da seguinte forma:

$x + y = 72$ (I)

$x = y/3$ (II)

- subst (II) em (I), temos: $y/3 + y = 72 \Rightarrow y/3 + 3y/3 = 216/3 \Rightarrow 4y = 216 \Rightarrow y = 216/4 \Rightarrow y = 54$;

- subst $y = 54$ em (II), temos: $x = 54/3 \Rightarrow x = 18 \therefore$ Resposta: 18 anos.

- estratégia 3: - Utilizando o aspecto estrutural, operando com as estruturas algébricas da seguinte forma:

$x + y = 72$ (I)

$y = 3x$ (II)

- subst (II) em (I), temos: $x + 3x = 72 \Rightarrow 4x = 72 \Rightarrow x = 72/4 \Rightarrow x = 18 \therefore$

Resposta: 18 anos

Esta questão é bastante interessante pelo fato de poder ser resolvida tanto pelo aspecto processual como pelo estrutural. É uma questão que exige do aluno, além do domínio de técnicas algébricas, a criatividade e a capacidade para encontrar a solução mais rápida, prática e econômica.

3 . Apresentação e Análise dos Resultados

3.1) Análise quantitativa dos resultados da primeira parte da pesquisa:

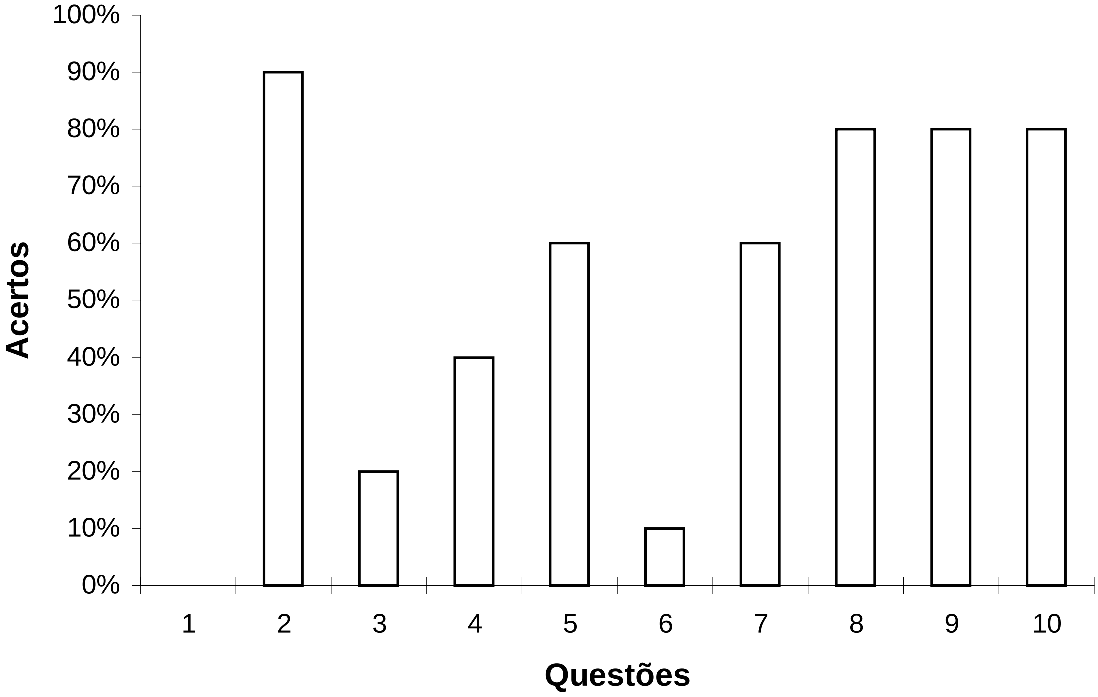
Inicialmente, apresentaremos os resultados quantitativos da primeira etapa de nossa pesquisa. Levamos em conta somente as alternativas assinaladas, sem considerar os procedimentos e estratégias utilizados pelos alunos durante a resolução das atividades, que foram, posteriormente, incluídas dentro da análise qualitativa feita.

Com esses resultados, levantamos alguns dados estatísticos, que nos ajudaram no desenvolvimento da pesquisa e na análise qualitativa, tanto da primeira quanto da segunda etapas de nosso trabalho.

A seguir, algumas tabelas e gráficos foram construídos com base nos dados colhidos da correção dos testes aplicados, até então, nos alunos.

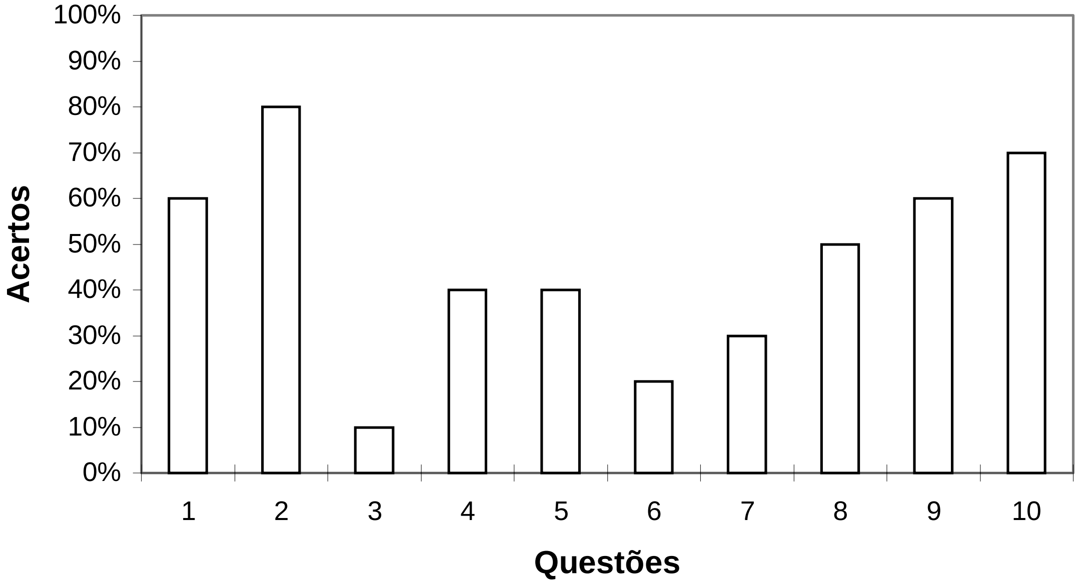
ESCOLA 1

Questões	%
1	0%
2	90%
3	20%
4	40%
5	60%
6	10%
7	60%
8	80%
9	80%
10	80%
Média	52%



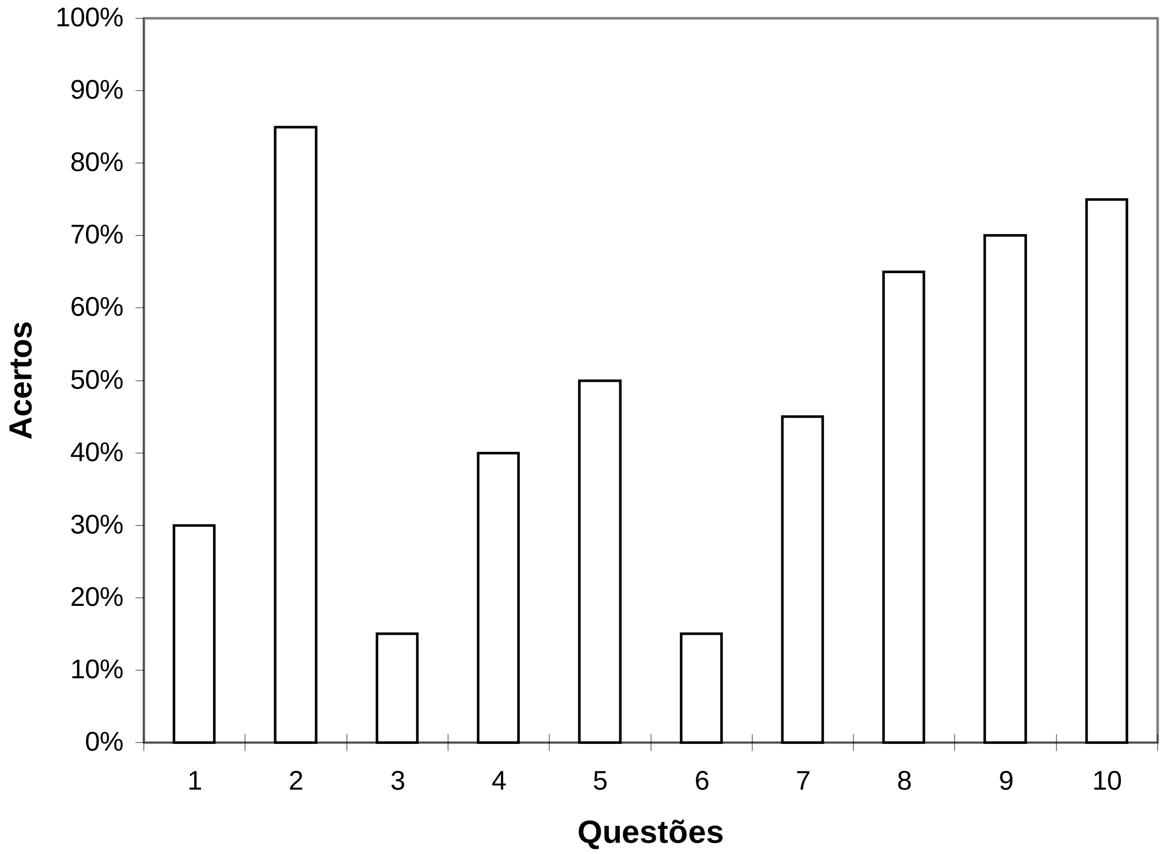
ESCOLA 2

Questões	%
1	60%
2	80%
3	10%
4	40%
5	40%
6	20%
7	30%
8	50%
9	60%
10	70%
Média	46%



Desempenho Geral

Questões	%
1	30%
2	85%
3	15%
4	40%
5	50%
6	15%
7	45%
8	65%
9	70%
10	75%
Média	**49%**



Baseados nos quadros anteriores, lembrando que estamos considerando por enquanto somente os dados quantitativos, podemos estabelecer algumas comparações entre os resultados obtidos pelos alunos em nosso teste e os resultados obtidos no SARESP/97 nas mesmas questões.

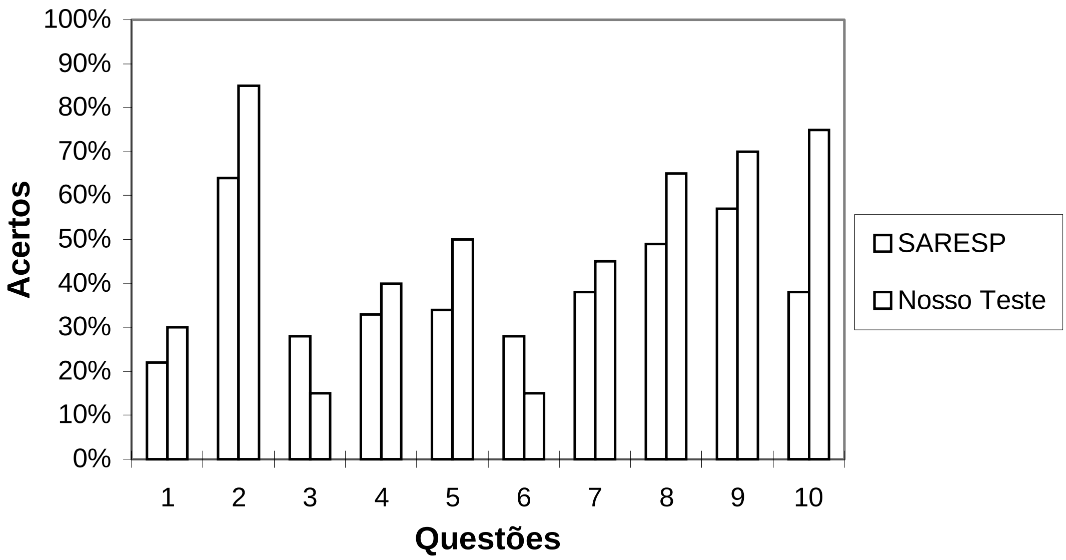
Vejamos o seguinte quadro:

Quadro Comparativo de Acertos

1	*22%*	30%

2	*64%*	85%
3	*28%*	15%
4	*33%*	40%
5	*34%*	50%
6	*28%*	15%
7	*38%*	45%
8	*49%*	65%
9	*57%*	70%
10	*38%*	75%
Média	*39%*	49%

OBS: *em itálico, resultados do SARESP*



Podemos destacar, com base nos quadros anteriores as seguintes observações:

• a média de acerto no SARESP foi de 39% e em nosso teste essa média foi de 49%;

• o melhor desempenho alcançado pelos alunos tanto em nosso teste como no SARESP, ocorreu na mesma questão, a 2;

• porém, os três piores desempenhos também ocorreram nas mesmas questões, 1,3 e 6, cabendo aqui algumas conclusões, ainda que preliminares:

→ na questão 1, acreditamos que o índice de acertos foi muito baixo, sobretudo na escola 1, em razão da mesma tratar-se de uma questão em que é preciso a aplicação correta das propriedades para dois números reais **a** e **b**;

→ na questão 3, o baixo índice de acertos em ambas as escolas, pode ter se dado pelo fato da questão envolver tantos conceitos algébricos como geométricos, além de que o desenho apresentado no enunciado pode ter dificultado ainda mais a resolução da mesma;

→ na questão 6, pode-se atribuir o baixo índice de acertos ao fato da mesma apresentar duas inequações, eles teriam de encontrar uma solução que satisfizesse a ambas.

• cabe uma observação à questão 4: embora seja uma questão bastante simples, pois poderia ter sido resolvida por tentativa e erro, apresentou um baixo índice de acertos em ambas as escolas.

3.2) Análise quantitativa dos resultados da segunda parte da pesquisa:

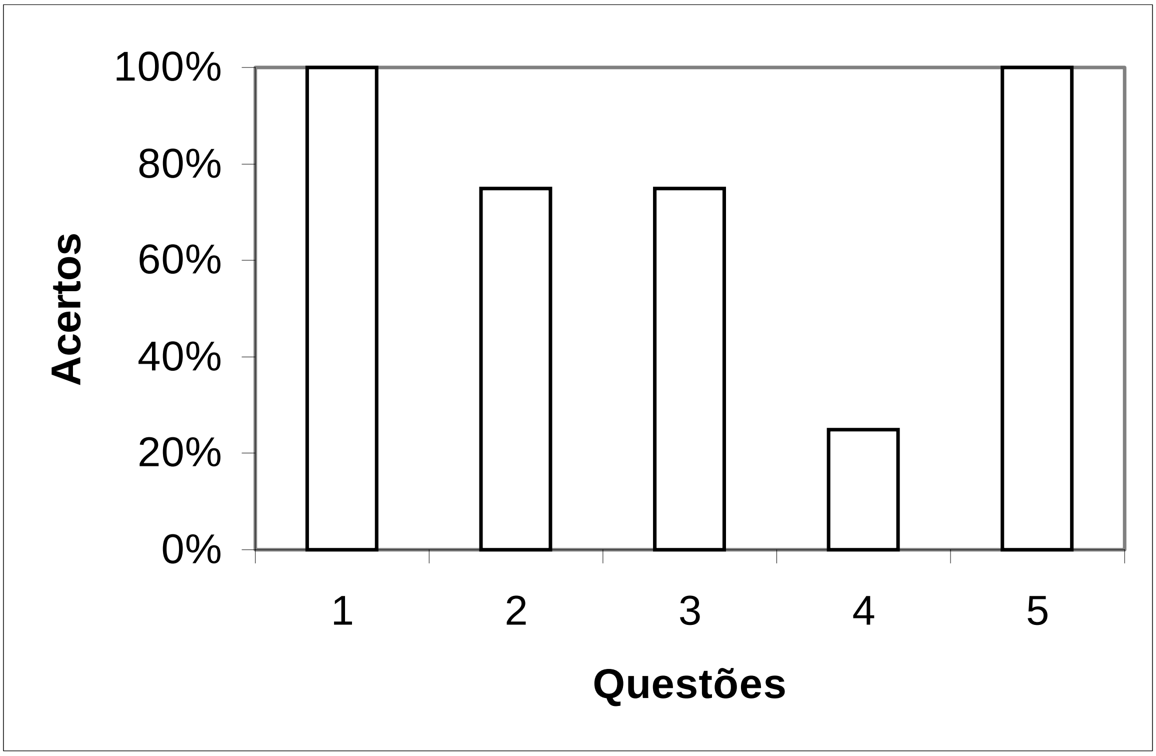
Apresentamos agora os resultados quantitativos da segunda etapa de nossa pesquisa. Procuramos levar em conta somente a resolução completa das questões abertas, analisando se as mesmas estavam ou não completamente corretas, sem considerar os procedimentos e estratégias utilizados pelos alunos durante a resolução das atividades, que foram posteriormente incluídas dentro da análise qualitativa feita.

Em razão dos procedimentos metodológicos que utilizamos para a aplicação da segunda etapa de nossa pesquisa, o que aliás acreditamos ter influenciado no desempenho dos alunos, fato que discutiremos mais a frente, registramos um aumento no percentual de acertos em todas as questões, se comparadas àquelas aplicadas no teste da primeira etapa.

Nas páginas seguintes, aparecem os quadros e gráficos que traduzem as informações colhidas nesta análise por nós.

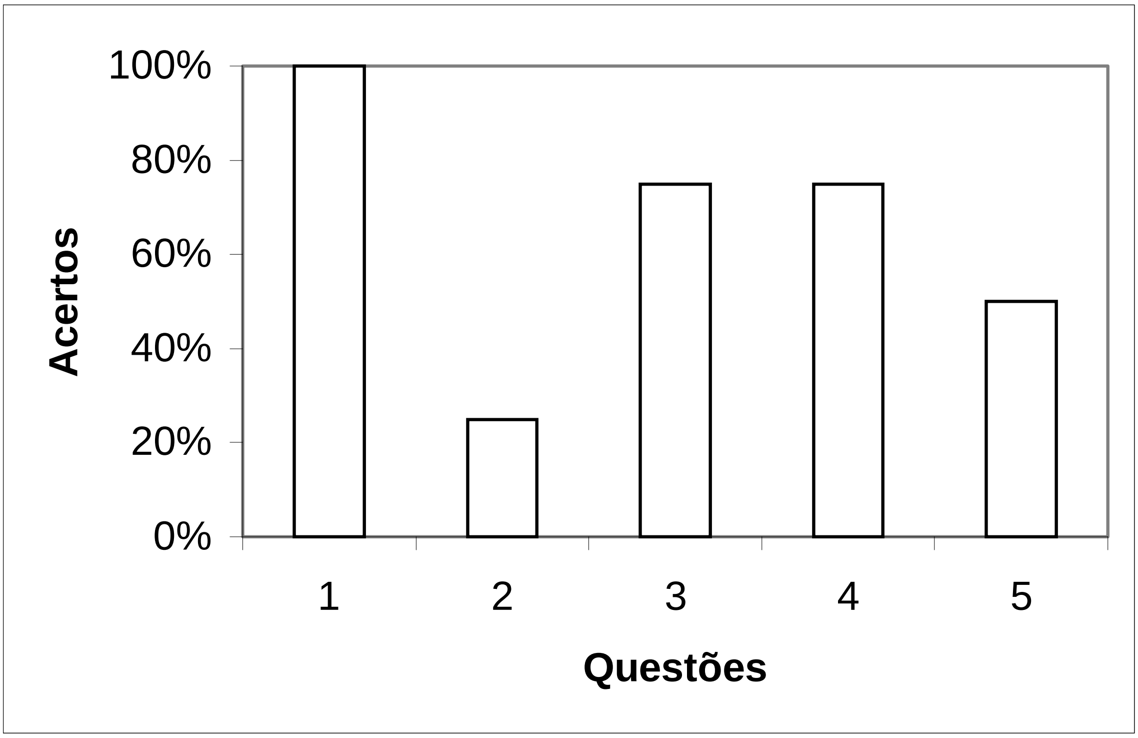
ESCOLA 1

Questões	%
1	100%
2	75%
3	75%
4	25%
5	100%
Média	75%



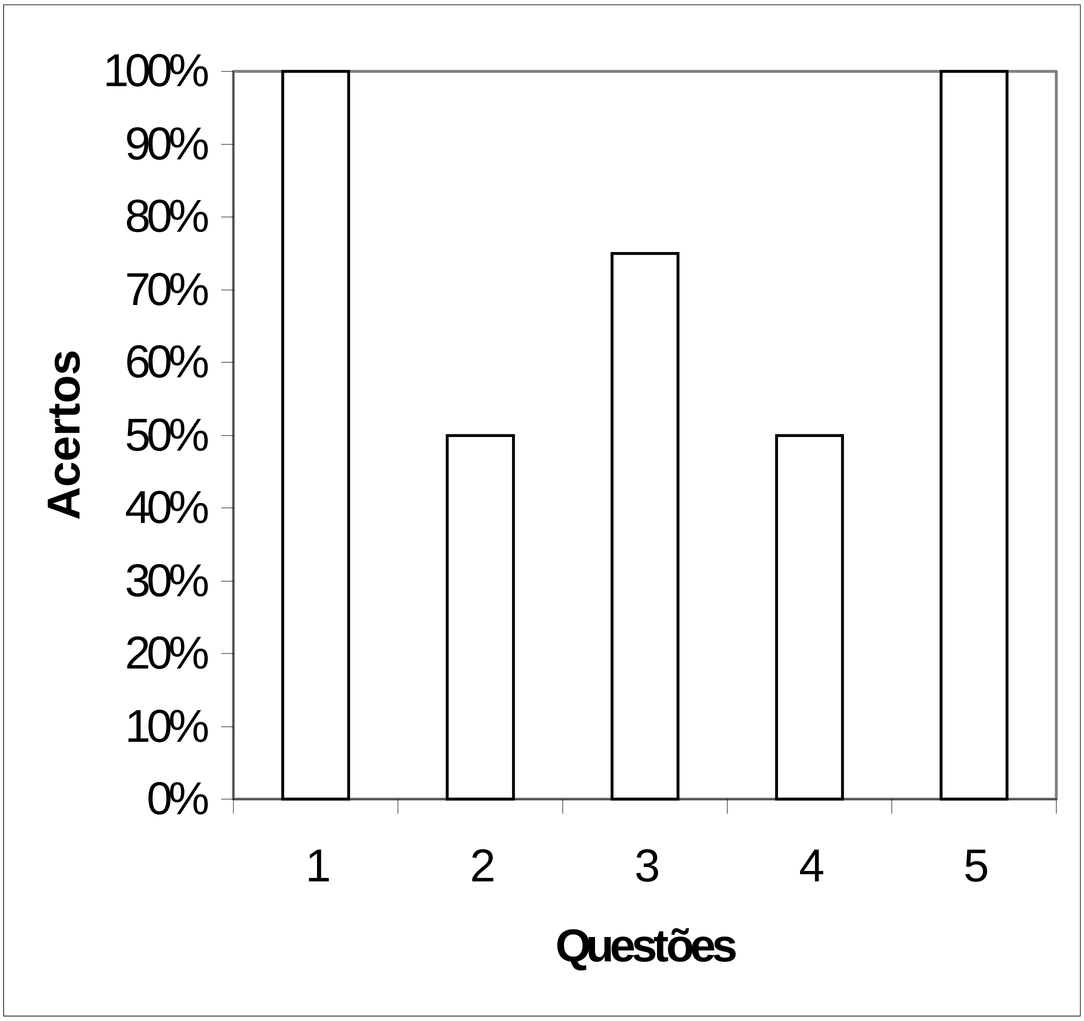
ESCOLA 2

Questões	%
1	100%
2	25%
3	75%
4	75%
5	50%
Média	65%



Desempenho Geral

Questões	%
1	100%
2	50%
3	75%
4	50%
5	75%
Média	70%



3.3) Analise qualitativa dos resultados da primeira etapa da pesquisa:

Considerando-se a análise quantitativa feita anteriormente, selecionamos algumas das questões de nosso teste para fazermos uma análise baseada nos aspectos estrutural e processual, segundo Kieran (1992). Pretendemos, também, utilizar os pontos de vista que levantamos em nossa fundamentação teórica:

- verificar se o aluno é capaz de tratar as representações simbólicas como objetos matemáticos;
- verificar se o aluno é capaz de operar sobre as estruturas algébricas;

• verificar se o aluno é capaz de modelar situações-problema em estruturas algébricas.

As questões escolhidas por nós, foram as que apresentaram rendimento inferior a 50 % em nosso teste, além de apresentarem um rendimento muito próximo ao alcançado no SARESP.

Em nossa análise, procuramos classificar a questão pelo modo que a mesma poderia ser resolvida, levando-se em conta, como já citado anteriormente, os aspetos processual e estrutural da Álgebra. Procuramos, também, identificar os procedimentos utilizados pelos alunos para resolução das mesmas.

As questões escolhidas foram as seguintes:

1ª Questão:

Nas igualdades abaixo, em que **a** e **b** representam números reais, a única verdadeira é :

a) $(a + b)^2 = a^2 + b^2$

b) $(a + b)(a - b) = a^2 - 2ab + b^2$

c) $a(a + b) = a^2 + ab$

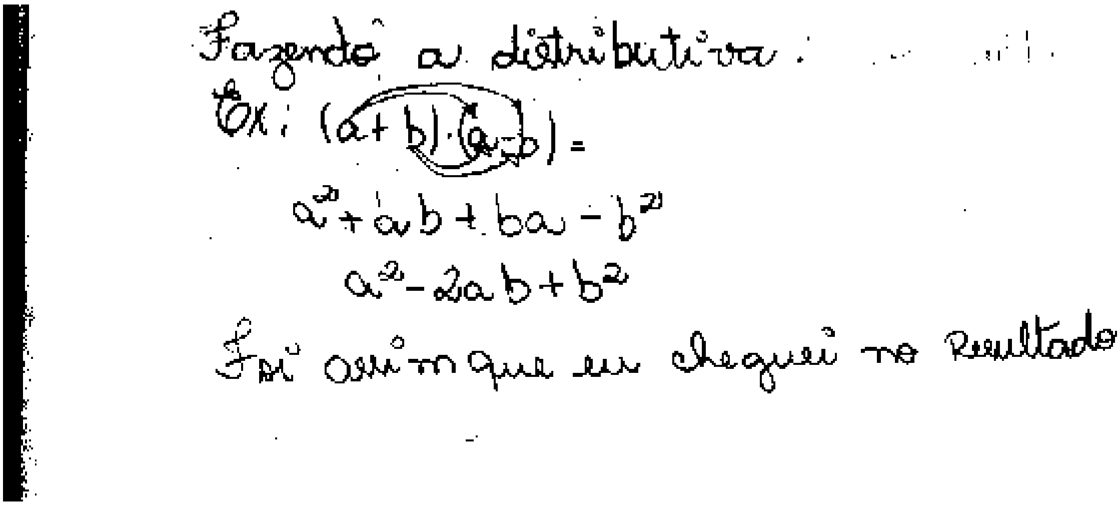
d) $\frac{a + b}{a} = b$

Trata-se de uma questão de aspecto estrutural que por meio da análise das alternativas, os alunos poderiam verificar qual apresenta um desenvolvimento algébrico correto, sendo **a** e **b** dois números reais quaisquer, não nulos.

Essa questão obteve um índice de 30 % de acertos entre nossos alunos, um desempenho melhor que o obtido no SARESP (22%); porém, de acordo com as estratégias aqui levantadas, podemos citar que somente três alunos (15%), conseguiram acertar a questão utilizando uma estratégia matematicamente correta.

Conseguimos identificar cinco estratégias distintas, são elas:

• três alunos que acertaram, resolveram a questão aplicando corretamente a propriedade distributiva **(estratégia 1)**;



Fazendo a distributiva:

Ex: $(a+b)\cdot(a-b) =$

$a^2 + ab + ba - b^2$

$a^2 - 2ab + b^2$

Foi assim que eu cheguei no Resultado

• dois alunos que acertaram, resolveram a questão aplicando incorretamente a propriedade distributiva **(estratégia 2)**;

• um aluno que acertou a questão, não soube justificar;

• dois alunos que erraram, resolveram a questão aplicando incorretamente a propriedade distributiva **(estratégia 2)**;

• seis alunos que erraram, resolveram a questão utilizando: $(a + b)^2 = a^2 + b^2$, **(estratégia 3)**, fato que também se repetiu em 51% dos alunos no resultado do SARESP;

• um aluno que errou, resolveu a questão apresentando a seguinte justificativa: “ *pela lógica* ” **(estratégia 4)**;

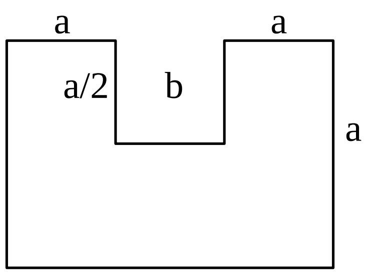
• um aluno que errou, resolveu a questão apresentando a seguinte justificativa: “ *é a única que bate a resposta* ” **(estratégia 5)**;

• dois alunos que erraram a questão, não souberam justificar;

• dois alunos deixaram a questão em branco.

3ª Questão:

Escreva a expressão algébrica que representa a área da figura abaixo.



a) $2a^2 + \frac{ab}{2}$

b) $2a^2 + ab$

c) $a^2 + \frac{ab}{2}$

d) $a^2 + ab$

Trata-se de uma questão de aspecto estrutural que necessita de procedimentos e conceitos algébricos e geométricos para poder ser resolvida.

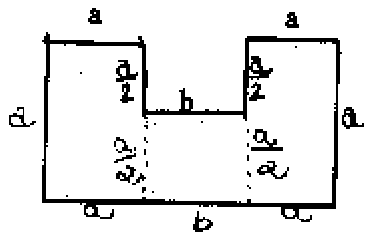
Acreditamos que o desenho apresentado no enunciado da questão pode ter dificultado sua compreensão e resolução, pois o mesmo está com dimensões desproporcionais.

Essa questão obteve um índice de 15 % de acertos entre nossos alunos, um desempenho pior que o obtido no SARESP (28%); porém, verificamos que nenhum aluno utilizou uma estratégia correta para resolver a questão.

Conseguimos identificar seis estratégias distintas, são elas:

- um aluno que acertou, resolveu a questão dividindo a figura de maneira incorreta e nem fez os cálculos **(estratégia 1)**;
- um aluno que acertou, resolveu a questão usando a seguinte justificativa: *"porque os números 'combinam' com a expressão 2 a^2 e ab"***(estratégia 2)**;
- um aluno que acertou a questão, não soube justificar;

• um aluno que errou, resolveu a questão dividindo a figura em quadrados e retângulos, calculou corretamente a área dos mesmos, porém, desconsiderou ou esqueceu uma parte da figura **(estratégia 3)**;



Eu dividi a figura em partes e multipliquei para saber a área.

$a \cdot a + \frac{a}{2} \cdot b = a^2 + \frac{ab}{2}$

• um aluno que errou, resolveu a questão dividindo corretamente a figura, calculou as áreas, porém, "cortou" o denominador do número (a/2), que representa o lado da figura **(estratégia 4)**;

• um aluno que errou, resolveu a questão utilizando a seguinte justificativa: *"pois existem **2** a^2 e **1** ab "* **(estratégia 5)**;

• um aluno que errou, resolveu a questão utilizando a seguinte justificativa: *" **2** frações, coloca-se 2 a^2 e o **a** e **b** junta-se (ab)"* **(estratégia 6)**;

• sete alunos que erraram a questão, não souberam justificar;

• seis alunos deixaram a questão em branco.

4ª Questão:

O número natural 3 é solução da equação:

a) 2x - 8 = 1

b) x + 2 = x

3 5

c) 5(x - 1) = 2(x + 2)

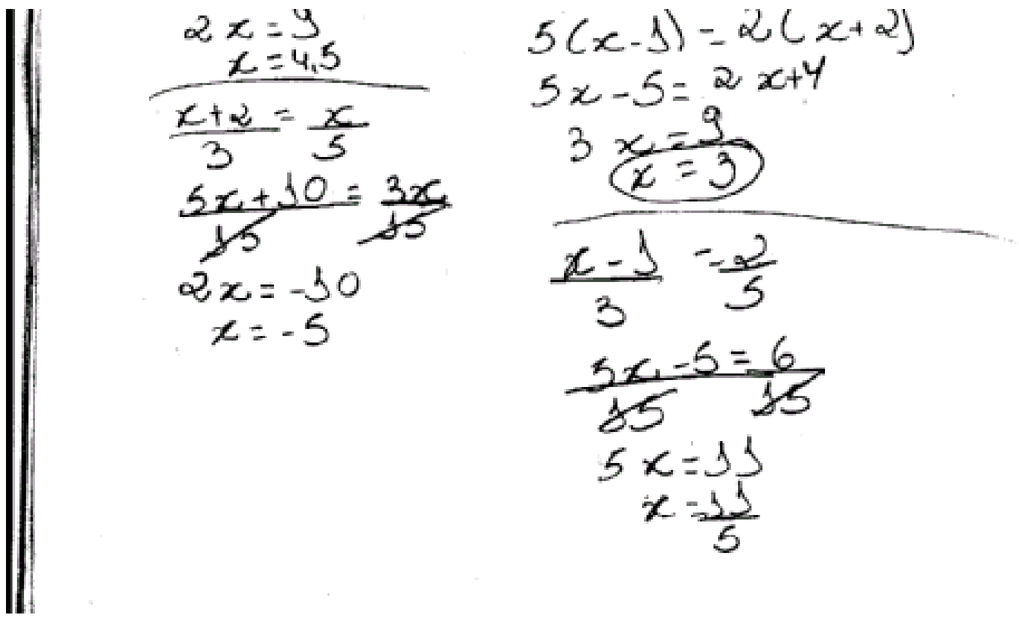
d) $\frac{x - 1}{3} = \frac{2}{5}$

Essa questão pode ser classificada tanto como uma questão processual, se resolvida por meio da substituição do 3 (que consta no enunciado da questão) nas equações fornecidas nas alternativas, como estrutural, se resolvida cada equação separadamente e encontrada sua raiz.

Obtivemos um índice de 40 % de acertos entre nossos alunos, um desempenho um pouco melhor do que o alcançado no SARESP (33%); cabe ressaltar que a maioria daqueles que acertaram a resposta, utilizaram estratégias dentro do aspecto estrutural da Álgebra.

Conseguimos identificar cinco estratégias distintas, são elas:

- cinco alunos que acertaram, resolveram a questão encontrando as raízes das equações (aspecto estrutural), e três deles, mesmo cometendo pequenos erros de cálculos, ainda assim assinalaram a alternativa correta **(estratégia 1)**;



- um aluno que acertou, resolveu a questão pela substituição do 3 nas equações dadas nas alternativas (aspecto processual) **(estratégia 2)**;
- um aluno que acertou, resolveu a questão justificando da seguinte maneira: *"no caso x valeria **3** e o resultado da conta vale **3**"*, aparentemente ele utilizou-se do aspecto estrutural da Álgebra, resolvendo a equação (**conta**) e encontrando o valor de **x (estratégia 3)**;
- um aluno que acertou, não soube justificar;
- três alunos que erraram, resolveram a questão através da substituição do 3 nas equações dadas nas alternativas (aspecto processual), **(estratégia 2)**;
- um aluno que errou, resolveu a questão justificando da seguinte maneira: " $\frac{x - 1}{3} = x = -3$ " **(estratégia 4)** ;
- um aluno que errou, resolveu justificando da seguinte maneira: " *somei todos os parênteses* " **(estratégia 5)**;
- quatro alunos que erraram a questão, não souberam justificar;
- três alunos deixaram a questão em branco.

6ª Questão:

Um espião de guerra enviou ao seu comando a seguinte mensagem:

$5n + 25 > 5500$

$- 8n + 3501 > 210 - 5n$

O comando sabia que a letra **"n"** representava o número de foguetes do inimigo. Fazendo os cálculos, o comando descobriu que o total de foguetes era:

a) 1094

b) 1095

c) 1096

d) 1097

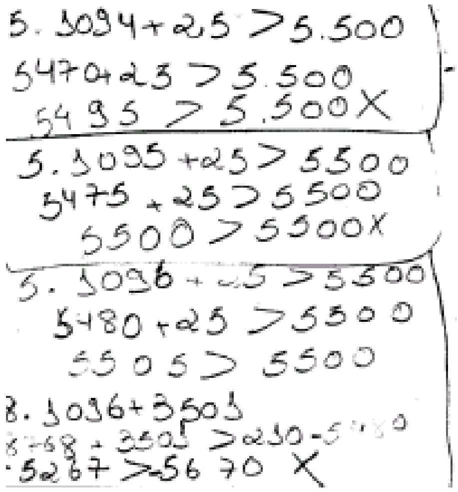
Esta questão também pode ser classificada utilizando os dois aspectos, processual, se resolvida por meio de tentativas, usando as alternativas, e estrutural, se forem resolvidas as inequações e verificada qual solução que satisfaz a ambas.

Foi obtido um índice de 15 % de acertos entre nossos alunos, índice esse que, com a questão 3, foram os piores de nosso teste. Repetiu-se também o fato de que, mais uma vez com a questão 3, nossos alunos tiveram rendimento pior que o do SARESP, que foi de 28%.

Conseguimos identificar três estratégias distintas nos testes, porém, verificamos que nenhum deles, dentre os que acertaram, resolveu de maneira completamente correta.

As estratégias encontradas são:

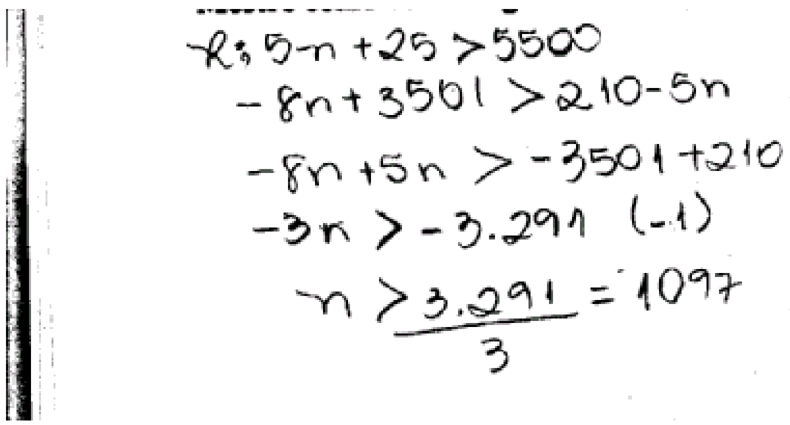
- um aluno que acertou, resolveu a questão processualmente, porém fez as substituições em somente uma das duas inequações que constam do enunciado, pois quando estava substituindo os valores fornecidos nas alternativas, considerou como errada a desigualdade: “ $-5267 > -5270$ ” , o que permitiu que o aluno concluísse, prematuramente a questão **(estratégia 1)**;



• um aluno que acertou a questão, o fez, segundo ele próprio, por “chute”;

• um aluno que acertou a questão, não soube justificar;

• três alunos que erraram, resolveram a questão empregando o aspecto estrutural, porém, não conseguiram desenvolver algebricamente as inequações **(estratégia 2)**;



• um aluno que errou, iniciou a resolução da questão utilizando o aspecto processual, porém, não soube dar continuidade aos cálculos após ter feito as devidas substituições **(estratégia 3)**;

• cinco alunos que erram a questão, não souberam justificar;

• oito alunos deixaram a questão em branco.

7ª Questão:

Somando minha idade com a de minha mãe temos a idade de minha avó. Eu tenho um terço da idade de minha mãe e minha avó tem 72 anos. Desta forma, eu tenho:

a) 17 anos
b) 18 anos
c) 19 anos
d) 20 anos

Mais uma questão que pode ser classificada como processual, se resolvida por meio de tentativas, substituindo os valores dados nas alternativas, no enunciado da questão, ou estrutural, traduzindo o problema por meio de um sistema de equações de 1º grau e resolvendo-o em seguida.

Nesta questão obtivemos um rendimento de 45% de acertos entre nossos alunos, contra 38% de acertos obtidos no SARESP, observamos que 8 alunos utilizaram o aspecto processual para tentar resolver a questão.

Conseguimos identificar seis estratégias de resolução, são elas:

- três alunos que acertaram, resolveram a questão utilizando o aspecto estrutural:

→ um aluno: *“ x + 1/3 x = 72 , e depois achou a idade do filho, dividindo x (54) por 3”* **(estratégia 1)**;

$$3x + x = 72$$
$$4x = 72$$
$$x = \frac{72}{4}$$
$$72 \div 4 = 18$$

→ dois alunos: *“ 3x + x = 72, encontrando x = 18 ”* **(estratégia 2)**;

• três alunos que acertaram, resolveram a questão utilizando o aspecto processual, sendo que 1 deles fez: *“ 72 - 18 = 54, mas não ‘mostrou’ que 18 é 1/3 de 54 ”* **(estratégia 3)**;

$$72 - 18 = 54 \qquad 18 \times 3 = 54$$

• dois alunos que acertaram, resolveram a questão utilizando a seguinte justificativa: *“ avó = 72, mãe = 36 , filho = 18 ”* **(estratégia 4)**;

• um aluno que errou, resolveu a questão justificando da seguinte maneira: *“somei todos os valores”* **(estratégia 5)**;

• dois alunos que erraram a questão, justificaram da seguinte maneira: “ *tem que ser mais nova que a mãe e a avó* ” **(estratégia 6)**;

• um aluno que errou a questão, disse que “ chutou” a resposta;

• um aluno que errou a questão, não soube justificar;

• três alunos deixaram a questão em branco, um deles, começou a resolvê-la.

3.4) Análise qualitativa dos resultados da segunda etapa da pesquisa:

Levando-se em conta a análise quantitativa feita anteriormente, neste momento foi realizada uma análise detalhada das questões abertas aplicadas durante a entrevista com os alunos. Apresentamos a análise "*a-posteriori*" das questões abertas, os protocolos das resoluções desenvolvidas por eles, os registros das entrevistas, além de toda a reflexão que nos proporcionou todo esse material.

Para fazermos essa análise, baseamo-nos mais uma vez nos aspectos estrutural e processual, segundo Kieran (1992), além da categorização dos erros cometidos pelos alunos, segundo Cortés & Kavafian (1999). Também utilizamos os pontos de vista que já havíamos levantado anteriormente:

• verificar se o aluno é capaz de tratar as representações simbólicas como objetos matemáticos;

• verificar se o aluno é capaz de operar sobre as estruturas algébricas;

• verificar se o aluno é capaz de modelar situações-problema em estruturas algébricas.

Apresentamos os procedimentos e estratégias identificados por nós, bem como os protocolos e registros que pudemos colher durante as entrevistas. Esse material produzido nos forneceu condições para avaliar e compreender se estão, e como estão presentes em nossos alunos, os aspectos identificados nos trabalhos de Kieran (1992) e de Cortés & Kavafian (1999).

Procuramos apresentar durante a análise qualitativa das questões, os objetivos e possíveis estratégias de resolução das mesmas, sempre tendo como norteadores os aspectos processual e estrutural, bem como a categorização dos erros, levantados em nossa fundamentação teórica.

Durante a segunda etapa de nossa pesquisa, como já registramos anteriormente, o pesquisador, que identificaremos por **P** nos registros que feitos, participou ativamente das atividades no sentido de proporcionar aos alunos, que identificaremos por **A**, condições de resolver pequenos entraves que poderiam e podem mesmo atrapalhar na resolução das questões.

As questões aplicadas foram as seguintes:

1ª Questão:

Numa padaria há um **cartaz afixado** em que constam os seguintes itens:

Leite	R$ 0,70
Pão	R$ 0,12

Joana comprou uma quantidade **x** de pães de litros de leite e uma quantidade **y** de litros de leite. Escreva a expressão algébrica que representa essa compra.

Esta questão não apresentou grandes dificuldades aos alunos, pois como na fase anterior, eles obtiveram índices elevados de acerto.

Nesta fase da pesquisa, optamos por inverter as variáveis **x** para **leites** e **y** para **pães**, com o objetivo de verificar se o elevado índice de acertos na primeira etapa, havia se dado pelo fato de que eles poderiam estar fazendo a relação direta do primeiro número da tabela com a primeira variável, porém, nossa hipótese não se confirmou, pois o índice de acertos subiu de 85%, na primeira etapa, para 100% na segunda.

Vejamos alguns registros que os próprios alunos escreveram durante a realização da entrevista, visto que o pesquisador questionava o porquê deles apresentarem tais soluções:

- equipe 1:

$x \cdot 0{,}12 + y \cdot 0{,}70$

Porque foi multiplicado a quantidade de pães vezes o seu valor, e a quantidade de leite por seu valor.

- equipe 4:

$0{,}12x + 0{,}70y$

se nós multiplicarmos o resultado da expressão com o número de pães e leite. E fazemos a soma para obtermos o gasto de Joana

Portanto, temos condições de concluir que os alunos foram capazes de modelar uma situação-problema em uma expressão algébrica. Acreditamos que o fato de se tratar de uma situação do cotidiano e da realidade dos alunos, aliada ao trabalho em grupo desenvolvido nesta fase da pesquisa contribuíram para o sucesso que foi alcançado.

Em todas as equipes de ambas as escolas, o pesquisador pôde notar, por meio de suas intervenções e questionamentos certa facilidade na resolução da questão. Os alunos logo se colocavam na situação de Joana, imaginando que eles estavam indo à padaria e iriam fazer a compra.

2ª Questão:

O número 3 é solução da equação $\frac{x+2}{3} = \frac{x}{5}$?

Mostre como você chegou a essa resposta.

Elaboramos esta questão, com o intuito de verificar se os alunos compreendem o que significa um número ser solução de uma equação.

Para isso, dividimos a questão 4 da primeira fase da pesquisa em duas partes. A primeira delas é esta, cujo objetivo acabamos de mencionar acima, e a segunda parte, realmente procura identificar se o aluno domina as técnicas algébricas de resolução de equação de 1º grau.

É possível identificar, claramente, ao menos duas estratégias de resolução para esta questão.

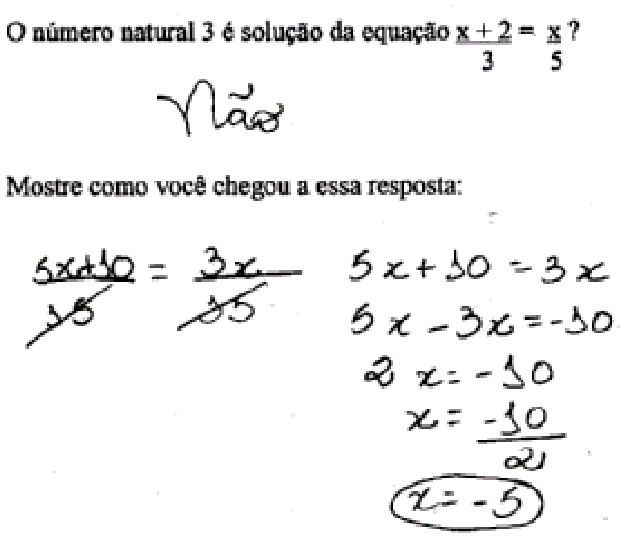
A primeira delas, que podemos classificar como processual, recorreria a substituição do 3 no lugar da incógnita x, e a posterior verificação da conservação da igualdade. Acreditamos e comprovamos pelas falas dos alunos que essa estratégia é utilizada por aqueles alunos que tinham mais nitidamente formado o conceito que pretendíamos verificar com esta questão, de saber ou não o que é um número ser solução da equação.

A segunda estratégia que podemos classificar como estrutural, levaria em conta o desenvolvimento algébrico da equação e verificação se o valor encontrado para a incógnita, era o mesmo enunciado do problema.

Nesta questão, o índice de acertos entre as equipes foi 50%, contra 40% de acertos na questão original da primeira etapa da pesquisa. Das quatro equipes que acertaram a questão, três delas utilizaram a estratégia processual. Já entre as equipes que não conseguiram concluir a resolução da questão, somente uma delas utilizou-se do aspecto processual para tentar resolver.

Vejamos os registros e protocolos dos alunos, para podermos enriquecer e aprofundarmos nossa discussão:

• <u>equipe 1:</u>



O número natural 3 é solução da equação $\frac{x+2}{3} = \frac{x}{5}$?

Não

Mostre como você chegou a essa resposta:

$\frac{5x+10}{\cancel{15}} = \frac{3x}{\cancel{15}}$

$5x+10 = 3x$

$5x - 3x = -10$

$2x = -10$

$x = \frac{-10}{2}$

$x = -5$

Verificamos que a os alunos dessa equipe, dominam a técnica algébrica de resolução de equação de 1º grau, porém não têm disponível, pelo menos de imediato, o conceito de um número ser solução de uma equação, pois ao serem questionados pelo pesquisador como eles poderiam iniciar a resolução desta questão, responderam rapidamente:

A: *"nós iremos resolver a equação, começando por encontrar o MMC e depois fazendo as contas"*

Esta foi a única equipe que utilizou uma estratégia estrutural e conseguir encontrar a solução correta para questão.

• <u>equipe 2:</u>

Iniciaram a resolução usando a substituição do 3 no lugar da incógnita, porém não tinham disponível o conceito um número ser solução de uma equação, quando o pesquisador questionou o porquê de iniciar a resolução por este modo, os alunos responderam:

A: "não sabemos e não conseguimos";

P: "mas por que substituíram o 3 no lugar do x?"

A: “para começar, mas daqui pra frente não sabemos mais.”

Percebemos aqui a presença da quinta categoria de erros de Cortés & Kavafian (1999), ficando evidente que os alunos não sabem lidar com o cálculo numérico envolvendo frações.

• equipe 3:

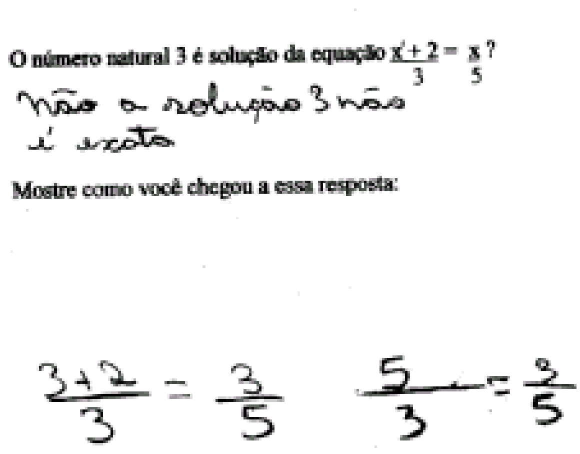
Resolveu corretamente a questão utilizando o aspecto processual e respondeu ao pesquisador:

P: *“Como vocês vão resolver essa questão?”*

A: *“Vamos substituir o 3 no lugar do x, e ver se dá certo?”*

P: *“Como assim? Dar certo?”*

A: *“Se o 3 for solução, a conta vai dar certinho.”*



O número natural 3 é solução da equação $\frac{x+2}{3} = \frac{x}{5}$?

não a solução 3 não é exata

Mostre como você chegou a essa resposta:

$\frac{3+2}{3} = \frac{3}{5}$ $\frac{5}{3} = \frac{3}{5}$

Vemos que os alunos percebem que se o número é solução da equação, ele torna a sentença verdadeira.

• equipe 4:

Outra equipe que se utiliza do aspecto processual para resolver a questão e sabe o significado de um número ser solução de uma equação, pois respondeu:

P: *"Como vocês vão resolver a questão?"*

A: *"Vamos substituir o x pelo 3."*

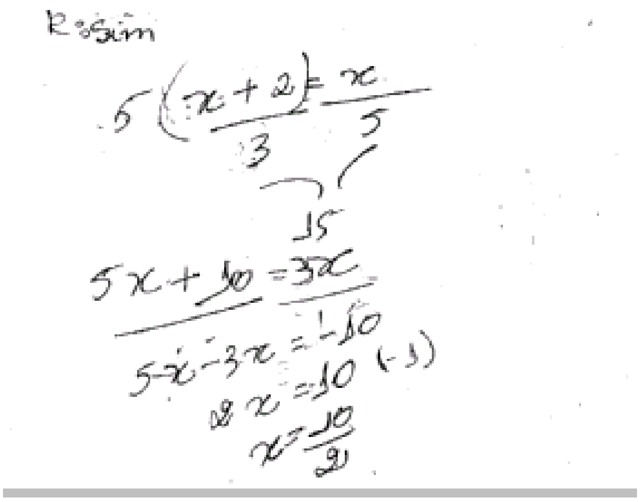
P: *"Por que?"*

A: *"Para ver se a conta dá exata?"*

P: *"Como assim?"*

A: *"Se o der certo a conta dos dois lados, o 3 é solução."*

• equipe 5:



Esta equipe utilizou o aspecto estrutural para a resolução da questão, porém, não terminou o desenvolvimento do exercício, pois concluiu que o "resultado" era solução. Vejamos os registros:

P: *"Por que vocês responderam sim à questão?"*

A: *"Porque resolvemos a equação e encontramos o valor de x."*

P: *"Encontram? E qual é?"*

A: *"É 3."*

Notamos que, além dos alunos não possuírem o conceito de um número ser solução de uma equação, também cometem erros que podemos encontrar em nossa embasamento teórico, como:

- erro do 4º tipo, pois omitem o sinal de – de um dos membros da igualdade;
- erro do 5º tipo, ao realizarem o cálculo mental “10/2”, e verificarem que é 3, tornando verdadeira a pergunta do enunciado.

• <u>equipes 6 e 7:</u>

Estas equipes não conseguiram resolver a questão, pois não tinham disponível nem o conceito de um número ser solução de uma equação, porque não se utilizam da substituição do 3 no lugar do x, mesmo quando questionadas pelo pesquisador, se não tinham “nada que se poderia fazer com o 3”; nem o domínio da técnica de resolução de equação fracionária do 1º grau, respondem ao pesquisador, que não sabiam resolver equações desse tipo.

• <u>equipe 8:</u>

Resolveram corretamente a questão utilizando a substituição do 3 no lugar da incógnita e, conforme suas respostas, pudemos concluir que eles também dominam o conceito de um número ser solução de uma equação.

Contudo isso, acreditamos que a questão conseguiu atingir seu objetivo, pois foi possível verificar a disponibilidade de um conceito extremamente importante, quando se está estudando equações de um modo geral. Vimos que das oito equipes, a metade utilizou-se do aspecto processual para resolvê-la e três delas conseguiram demonstrar o domínio sobre o conceito em questão.

Sob nosso ponto de vista, questões deste tipo devem estar mais presentes entre os alunos, pois as mesmas não têm como preocupação principal a verificação das técnicas de resolução algébrica de equações, mas sim, a verificação do conhecimento de conceitos básicos, bem como a capacidade dos alunos em encontrarem soluções econômicas e práticas para questões aparentemente complexas.

3ª Questão:

Resolva a seguinte equação:

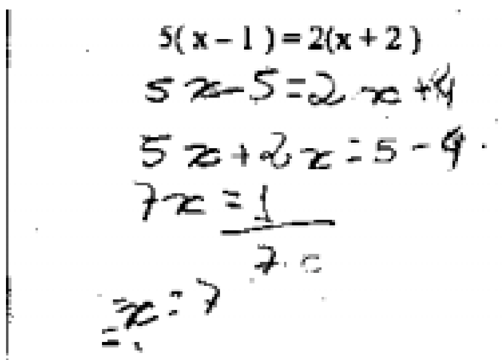
5(x - 1) = 2(x + 2)

Esta é uma equação estrutural, pois tem como objetivo verificar se o aluno é capaz de manipular corretamente as estruturas algébricas e encontrar a solução da equação.

Como foi citado na questão anterior, resolvemos dividir a 4ª questão da primeira etapa de nossa pesquisa em duas partes, sendo esta a segunda parte dela.

Nessa fase, os índices de acerto nessa fase ficaram em 75%, estando bem acima daqueles obtidos na primeira fase (40%), e também em relação a 3ª questão dessa fase (50%).

Acreditamos que isso ocorreu pelo fato da questão ser bem simples, apesar do produto de fatores e da presença de incógnitas em ambos os membros da equação. Todas as equipes iniciaram a resolução da questão, aplicando técnicas algébricas, contudo, é interessante observar os erros que algumas cometem durante seu desenvolvimento. • equipe 2:



Observamos que os alunos cometem erros que, segundo nosso embasamento teórico podem ser classificados em:

- erro por falta de atenção na passagem de uma equação a outra:

5x-5 = **2x**+4 ; 5x**+2**x = 5+4 ; ...

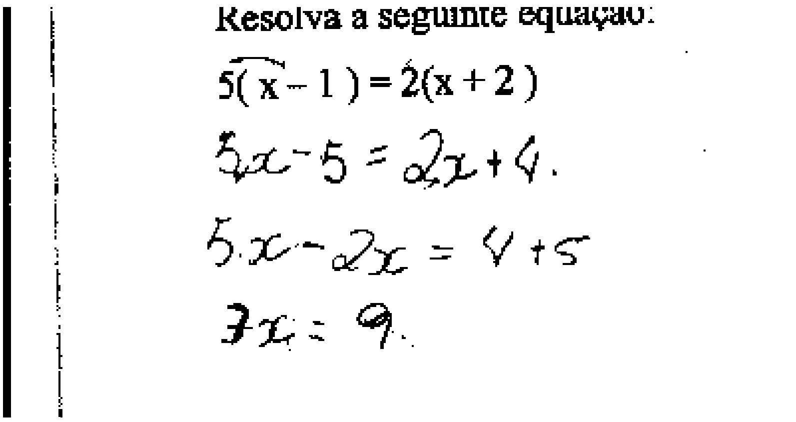
Os alunos mantêm o sinal do termo literal (2x) ao transportá-lo de um membro a outro da igualdade, mas efetuam o transporte corretamente quando se trata do termo independente (-5).

- erro de cálculo numérico:

1/7 = 7

Os alunos cometem o erro, provavelmente, por efetuarem a divisão mais conveniente e usual, 7:1. Um tipo de erro muito presente também entre os alunos pesquisados por Cortés & Kavafian (1999).

<u>• equipe 8:</u>


Resolva a seguinte equação:

$5(x - 1) = 2(x + 2)$

$5x - 5 = 2x + 4.$

$5x - 2x = 4 + 5$

$3x = 9.$

Verificamos que esta equipe resolveu corretamente a questão, mas por falta de atenção, ou por não imaginar que a equação ainda não havia sido concluída, não encontraram a solução, e ao ser questionada pelo pesquisador, respondeu:

P: *“Vocês já terminaram?”*

A: *“Sim, já sabemos qual é o valor de x.”*

P: *“Já sabem? E qual é?”*

A: *“O x vale 3.”*

Baseados nessa resposta, podemos aproveitar para destacar o como a formalização de alguns procedimentos é importante, pois, embora, eles estejam corretos em suas respostas, é necessário que se trabalhe também com nossos alunos, a formalização e o rigor que a Álgebra, assim como a Matemática como um todo possuem.

É fundamental que eles, além de serem capazes de efetuar cálculos e desenvolverem técnicas algébricas, sejam capazes de escrever e manipular corretamente as estruturas, como também respeitar o formalismo e rigor matemático.

4ª Questão:

Um espião de guerra enviou ao seu comando a seguinte mensagem:

$5n + 25 > 5500$

$- 8n + 3501 > 210 - 5n$

O comando sabia que a letra **"n"** representava o número de foguetes do inimigo. Encontre o total de foguetes representado pela mensagem enviada ao comando.

Na primeira etapa da pesquisa, era possível resolver esta questão usando o aspecto processual, visto que estavam presentes as alternativas, porém, agora, seria muito complicado ficar testando números até encontrar um que satisfizesse ambas as inequações ao mesmo tempo.

Portanto, nesta fase podemos classificar esta questão como sendo estrutural, uma vez que é necessário resolver algebricamente ambas as inequações e verificar se a solução encontrada satisfaz as duas simultaneamente.

O índice de acertos aumentou significativamente em uma das escolas, porém, no geral, este não aumentou tanto, apesar de ter subido de 15% na primeira etapa, para 50% nesta.

Ao perceber o sucesso e relativa facilidade que, os alunos da escola que obteve o alto índice de acertos, estavam encontrando para resolver a questão, o pesquisador achou por bem questioná-los quanto ao estudo do conteúdo envolvido na questão, eles responderam que já haviam estudado o assunto, e o professor havia feito, recentemente, um novo trabalho sobre inequações com eles.

Fazendo o mesmo questionamento na outra escola, os alunos disseram que já haviam estudado “algo” sobre inequações, mas não estavam lembrados de como resolvê-las.

Ao analisarmos os protocolos dos alunos, percebemos que as dificuldades encontradas por eles iniciam-se no desconhecimento do conceito de inequação, pois vários ao serem entrevistados pelo pesquisador, desconheciam o sinal de desigualdade e não sabiam que se tratava de inequações.

Vejamos os protocolos e registros de entrevistas:

- <u>equipe 1:</u>

$5n > 5600 - 25$
$5n > 5475$
$n > \frac{5475}{5}$
$n > 1095$

$3501 - 210 > -5 + 8n$
$3285 > +3n$
$\frac{3291}{3} \geq n$
$1097 > n$

Total de foguetes
1096

$$\begin{array}{r} 3501 \\ -\ 210 \\ \hline 3291 \end{array} \qquad 3291 \div 3 = 1097$$

Esta equipe conseguiu resolver corretamente a questão, o pesquisador desenvolveu o seguinte diálogo com eles:

P: *"Como vocês pretendem iniciar a resolução?"*

A: *"A gente pode resolver como se fosse uma equação?"*

...

A: *"Na 2ª inequação, podemos passar o –8n pro outro lado pra ficar positivo?"*

...

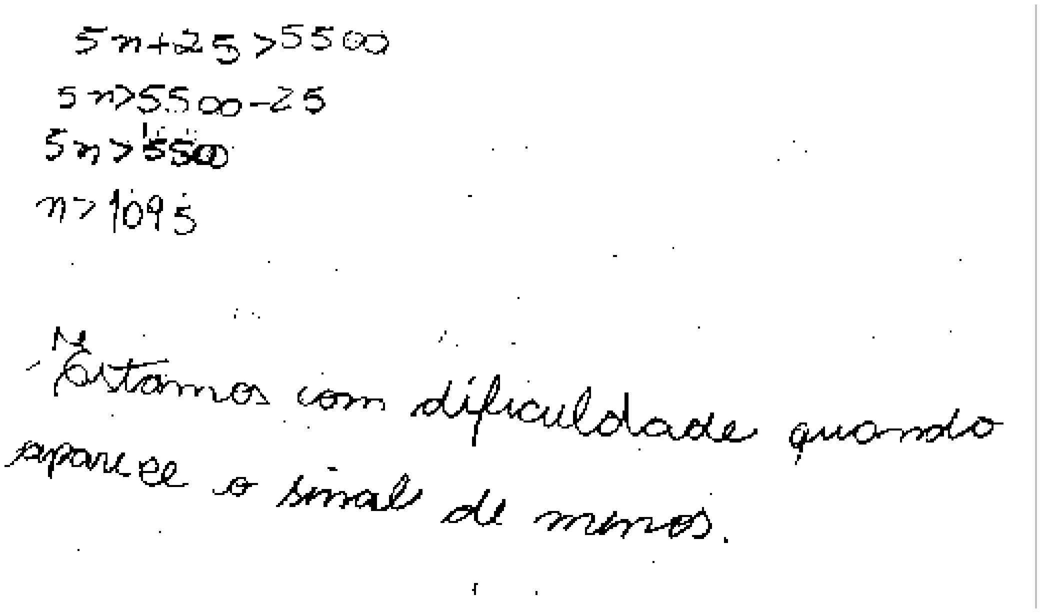
P: *"Como vocês vão me dar uma única resposta? O número de foguetes."*

A: *"Ele tem que ser um número maior que 1095 e menor que 1097. Só pode ser o 1096."*

Percebemos que eles dominam a técnica algébrica, com o esclarecimento de pequenas dúvidas por parte do pesquisador foram capazes de encontrar a solução correta para a questão.

Vimos aí a importância do trabalho em grupo e, no contexto de oficina, pois foi assim que os alunos sentiram segurança e conseguiram desenvolver uma questão não tão simples, sobretudo pelo fato de se tratar de uma questão com duas inequações, onde a 2ª, inclusive, continha um sinal negativo em sua incógnita.

• equipe 2:



$5n+25 > 5500$

$5n > 5500-25$

$5n > 5500$

$n > 1095$

Estamos com dificuldade quando aparece o sinal de menos.

Nesta equipe, percebemos a presença de um entrave relacionado ao sinal de – que aparece na 2ª inequação.

Mesmo o pesquisador incentivando e auxiliando os alunos, eles não conseguiram prosseguir no desenvolvimento da resolução, pois insistiam em dizer que não sabiam o que fazer em razão da presença do referido sinal.

O pesquisador pediu que eles tentassem mesmo assim dar continuidade a resolução, para verificar se eles poderiam, mesmo cometendo erros de cálculos, chegar a alguma conclusão em relação ao número de foguetes, porém, isso acabou não ocorrendo.

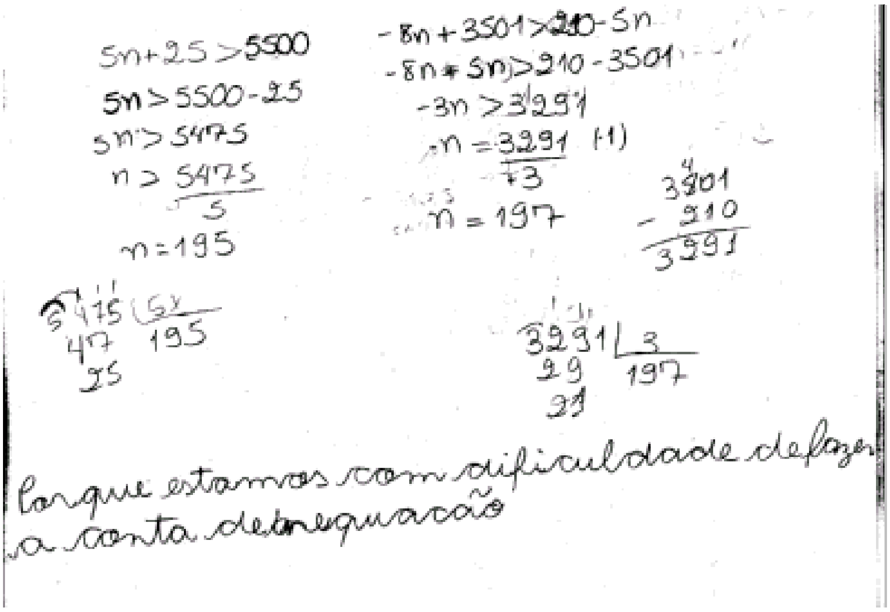
• equipe 3:

Nesta equipe encontramos erros conceituais e erros de cálculos, segundo Cortés & Kavafian (1999), os alunos confundem os conceitos de equação com inequação, ao mudarem o sinal da desigualdade para o da igualdade e ao serem questionados pelo pesquisador sobre o fato, responderam:

P: *“Por que vocês trocaram o sinal de > pelo de = ?”*

A: *“Pra podermos chegar a uma resposta.”*

Em relação ao erro de cálculo, os alunos estavam apresentando uma grande dificuldade para efetuar a divisão de 5475/5 e 3291/3, o que, aliado à dificuldade anterior, acabou por lhes não permitir que concluíssem a questão.



• <u>equipes 4 e 8:</u>

Estas duas equipes não tinham disponíveis o conceito de inequação, pois mesmo com a intervenção do pesquisador não conseguiram desenvolver a questão. Não sabiam por onde começar nem foram capazes de interpretar o enunciado do problema.

• <u>equipes 5, 6 e 7:</u>

As três equipes conseguiram desenvolver a questão e encontrar a resposta à pergunta do enunciado. Todas tiveram somente uma pequena dificuldade na interpretação das duas resposta obtidas, após a resolução das inequações.

Ao receberem auxílio do pesquisador no sentido de interpretar o que havia ocorrido e a necessidade do número representado por **n** satisfazer as duas respostas ao mesmo tempo, conseguiram encontrar a resposta rapidamente.

Conforme o protocolo de apenas uma das equipes, percebemos que o procedimento de resolução foi praticamente o mesmo para todas.

$$5N < 25 - 5500$$
$$5N < 25 - 5500$$
$$5N < 5475$$
$$n > 1095$$

$$210 + 3503 > 8N - 5N$$
$$3291 > 3N$$
$$1097 > n$$

R: O total de pacotes é 1096

Com todos esses dados em mãos, pudemos perceber a dificuldade que os alunos, mesmo aqueles que obtiveram sucesso, encontram em trabalhar com inequações. As maiores dúvidas que eles apresentam, estão relacionadas a:

- como proceder quando aparece o sinal de desigualdade;
- poder ou não utilizar as mesmas técnicas algébricas de resolução das equações;

- o que fazer quando a incógnita que está presente no 1º membro da inequação possui sinal negativo;
- que resposta dar, visto que em uma inequação a resposta não é direta e nem está prontamente concluída ao final da resolução algébrica (cálculos), mas sim precisa de uma interpretação do intervalo compreendido, especialmente nesta questão, onde aparecem duas inequações.

Sendo assim, acreditamos ser de vital importância que esse assunto seja desenvolvido em sala de aula, inclusive contando com situações contextualizadas e, com a devida atenção e ênfase que o mesmo necessita.

5ª Questão:

Somando minha idade com a de minha mãe temos a idade de minha avó. Eu tenho um terço da idade de minha mãe e minha avó tem 72 anos. Desta forma, quantos anos eu tenho?

Há aqui uma questão que pode ser resolvida pelo aspecto processual, utilizando-se somente dos números e informações fornecidas pelo enunciado, fazendo-se tentativas para encontrar os números que satisfazem as condições informadas. Das quatro equipes que se utilizaram deste aspecto para resolver a questão, duas obtiveram sucesso e as outras duas acabaram errando a questão.

Esta questão também pode ser classificada como estrutural, visto que os alunos podem traduzir as informações do enunciado em um sistema de equações e desenvolvê-lo algebricamente. Das quatro equipes que se utilizaram deste aspecto, todas acertaram a questão, porém, como vemos nos protocolos, uma delas acabou utilizou-se do aspecto processual para finalizar a questão.

Nesta fase o índice de acertos foi maior que na primeira, 75% contra 45%.

Vejamos os protocolos das equipes:

• equipes 1,5 e 8:

As três equipes desenvolveram a questão de modo semelhante, até mesmo, todas fizeram um questionamento muito importante e inteligente ao pesquisador, vejamos:

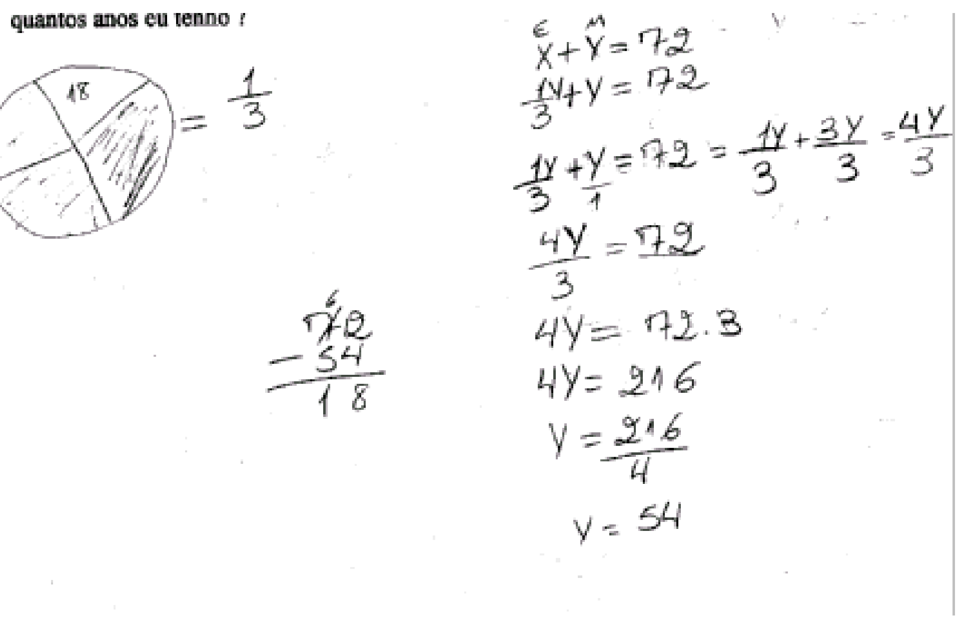
A: *“Nós podemos usar o triplo ao invés de 1/3?”*
P: *“Sim, mas por quê?”*
A: *“Porque fica mais fácil para fazer as contas, porque não vai aparecer fração.”*

$3x + x = 72$
$4x = 72$
minha idade é $x = 18$ minha mãe tem 54 anos

Porque, como eu não sei a minha idade representei-a pela incógnita 'x'. Como expressei que a idade de minha mãe é 3x maior que a minha, ou seja, eu tenho um terço da idade de minha mãe. Somadas as idades dá 72, então, eu conclui que tenho 18 anos.

Com os questionamentos feitos pelas equipes e também com a resolução desenvolvida, percebemos o quanto é importante trabalhar com situações que propiciem aos alunos mais que um modo para desenvolver a questão, até mesmo, empregando-se questões que permitam que eles demonstrem sua criatividade e desenvoltura para solucionar problemas de desafio.

• <u>equipe 3:</u>



Esta equipe utilizou-se do aspecto estrutural para encontrar o valor de y (idade da mãe), porém, achou mais prático usar o aspecto processual para encontrar o valor de x (minha idade). Ao ser questionada sobre o desenho usado para compreender o exercício respondeu:

A: *"A minha idade é 1/3, mas no total é ¼."*

• <u>equipes 2 e 4:</u>

Ambas empregaram com sucesso o aspecto processual para encontrar a solução, pois procuraram um número que somado com seu triplo daria 72, mais uma vez deu-se a presença do triplo ao invés do 1/3, para facilitar os cálculos.

Vejamos o protocolo da equipe 4 que anotou um comentário bastante interessante na própria atividade.

$$\begin{array}{r} 18 \\ 3 \\ \hline 54 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 54 \\ +18 \\ \hline 72 \end{array}$$

para chegarmos a resposta tivemos que usar o método de aproximação para satisfazer os dois lados.

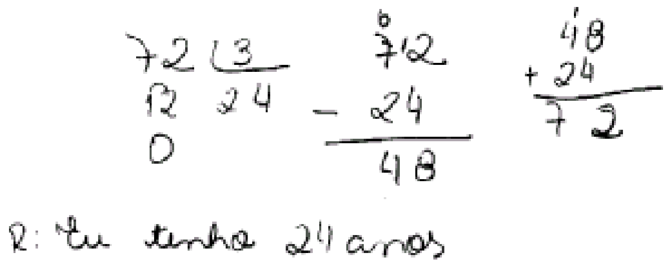
Ao notar o comentário que eles haviam feito no material, o pesquisador os questionou:

P: *"O que significa método da aproximação?"*
A: *"É que nós procuramos um número que somando com o seu triplo desse 72."*

<u>• equipes 6 e 7:</u>

Essas duas equipes utilizaram-se do aspecto processual para a resolução da questão, porém as duas cometeram erros semelhantes, pois como notaram a presença de 1/3 no enunciado da questão, concluíram que bastava dividir por 3 o valor da idade da avó (72), que encontrariam a resposta do que havia sido perguntado.

Vejamos um dos protocolos:



Observa-se com este procedimento que, além dos alunos procurarem utilizar somente os dados (números) que aparecem no enunciado, sem interpretá-los ou verificar o contexto todo, eles não perceberam que 24 não é um terço de 48, mas sim, de 72.

Mais uma vez notamos a importância de se trabalhar com questões que enfatizem situações do “mundo real” e que provoquem desafios aos alunos. Assim, quando eles se sentem em situações que necessitem de outros elementos que não técnicas de cálculo somente, eles podem desenvolver e demonstrar sua criatividade e capacidade de encontrar soluções inteligentes e econômicas.

4 . Nossas conclusões e considerações finais

Cabem aqui, algumas conclusões e considerações finais sobre nossa pesquisa, embora já tenhamos apresentado e discutido boa parte delas, enquanto elaborávamos a análise deste estudo.

1 – Relação entre a prova do SARESP e o desempenho dos alunos

Pudemos perceber na primeira etapa de nossa pesquisa, em que apareciam questões fechadas, com alternativas, que, inclusive, nem sempre eram as mais convenientes, o desempenho dos alunos foi bastante insuficiente. Aliado ao fato de as questões serem fechadas estava presente o contexto de avaliação, como acontece na aplicação dos exames do SARESP.

Sabe-se que em avaliações deste tipo o que se obtém é uma visão global do desempenho dos alunos e, não uma análise mais fina dos erros cometidos e dos procedimentos utilizados por eles. Aí está o motivo pelo qual resolvemos caminhar em direção a segunda etapa de nossa pesquisa.

Nesta etapa, momento em que as questões eram abertas, e os alunos estavam trabalhando no contexto de oficina e em grupo, realmente pudemos constatar que os resultados foram bem mais satisfatórios e, dando-nos condições de levantar e analisar os procedimentos e estratégias utilizados por eles.

Estavam presentes nas questões aplicadas nesta etapa, por meio dos procedimentos que eram possíveis de serem utilizados para a resolução das mesmas, indícios do trabalho de Kieran (1992), que foi utilizado como parte de nosso embasamento teórico.

Em seu trabalho essa autora destaca a necessidade de se utilizar os dois aspectos da Álgebra, o processual e o estrutural para desenvolver nos alunos a capacidade de: tratar as representações simbólicas como objetos matemáticos, saber operar sobre as estruturas algébricas e saber modelar situações-problema em estruturas algébricas.

Isso tornou-se mais visível , principalmente nesta segunda etapa da pesquisa, quando as questões escolhidas por nós para a composição das entrevistas com os alunos, contemplavam esses dois aspectos, muitas vezes na mesma questão, estimulando o aluno a trabalhar nesses dois sentidos.

Ainda em relação às questões e a prova e seus efeitos no desempenho dos alunos, constatamos que o trabalho com questões que abordem a aplicação imediata de conceitos matemáticos, como uma das que incluímos nesta etapa da pesquisa, nos dá a condição de perceber se os alunos tem não facilidade de aplicar o conceito em questão, e encontrar em poucas linhas a resposta para o que está sendo perguntado.

Finalizando essa primeira parte de nossas conclusões, cabe destacar a importância da utilização de questões que abordem os dois aspectos da Álgebra. Isso se faz, essencialmente, no sentido de desenvolver nos alunos a capacidade de reconhecer diferentes operações possíveis com as estruturas algébricas, como: simplificação, fatoração, racionalização de denominadores, entre outras, além daquelas já usuais na Aritmética.

Baseado nos resultados de nossa pesquisa e em diversas outras que apresentamos em nosso trabalho, como em Filoy e Rojano (1984), é imprescindível que utilizemos, por exemplo, problemas que possam ser modelados em equações do tipo $ax+b = cx+d$, pois é a partir dessas situações que os alunos começam a confiar na utilização da Álgebra, uma vez que problemas deste tipo não são facilmente resolvido pela Aritmética, e a perceber a necessidade de se operar com as estruturas algébricas.

A partir de problemas modelados com equações desse tipo, eles começam também a pensar em termos de operações antecipadas que precisarão efetuar em ambos os lados da igualdade para encontrar a solução, e a perceber que a Aritmética não é mais suficiente para a resolução de tais problemas por exemplo.

2 - Relação ao tipo de ensino e o desempenho dos alunos

Detectamos a grande diferença que faz o tipo de ensino utilizado por nós e nossa postura em sala de aula, no resultado do desempenho dos alunos.

Afirmamos isso com uma relativa segurança, devido à metodologia que utilizamos na realização de nossa pesquisa, pois na primeira etapa, em que a situação de avaliação esteve bastante presente, e o pesquisador/professor não participou de maneira alguma das atividades, os resultados não foram muito diferentes em relação ao SARESP.

Já na segunda etapa de nossa etapa de nossa pesquisa, como mostram os índices e os resultados das análises apresentadas, o quadro mudou e a situação tornou-se bem mais animadora, pois foi nesse momento que o pesquisador/professor iniciou sua participação ativa na aplicação das atividades, esclarecendo e intervindo em momentos onde as dúvidas começavam a surgir entre os alunos.

Além da postura em sala de aula e do tipo de aula que desenvolvemos com nossos alunos em sala, precisamos nos alertar também ao tipo de ensino que estamos utilizando com eles.

É do conhecimento de todos, que a Matemática, e mais particularmente a Álgebra ensinada em nossas escolas, está fundamentalmente voltada para o treino de habilidades, a mecanização de algoritmos e a simples memorização de técnicas e regras. Ainda assim, podemos verificar através dos resultados aqui apresentados por nós que, mesmo em situações que demandem somente este tipo de conhecimento, o aluno não consegue um rendimento satisfatório.

Acreditamos que, nesse sentido, uma aprendizagem que tenha pouco preocupação com a construção do conhecimento e compreensão dos significados, acaba por tornar-se ineficiente e rapidamente esquecida pelos alunos.

Aliás, outro ponto importantíssimo quando estamos trabalhando com a Álgebra, está ligado ao formalismo e o rigor que ela, como a Matemática toda exige. É evidente que não iniciaremos a introdução de um conceito por exemplo, já preocupados e evidenciando estes aspectos, mas é necessário sim, que trabalhemos com questões que contemplem isso e que possam nos propiciar ao final do estudo, a identificação se esse aspecto está ou não presente entre o que foi assimilado pelo aluno.

3 - Relação entre os erros identificados e seus efeitos no desempenho dos alunos

É importante conseguirmos identificar os erros cometidos pelos alunos e saber como o trabalho com estes erros podem fornecer-nos condições de intervir no desempenho de nossos alunos.

Alguns erros do tipo: **- 2x – 5x = 7x** (onde o aluno soma os coeficientes numéricos e aplica a “regra de sinais” da multiplicação obtendo o resultado positivo); **2y – 4y = 2y** (onde o aluno efetua a subtração no “sentido do maior para o menor” número, sem considerar o valor relativo do mesmo); entre outros, são erros muito presentes em várias partes do mundo, e em diferentes épocas da história.

Pudemos constatar tais erros, por exemplo, no trabalho de Cortés & Kavafian (1999), que levantam, analisam e classificam erros desses e de outros tipos.

Outros tipos de erros, porém , podem ser evitados levando-se em conta o tipo de atividade e a metodologia que os nós, professores, utilizamos em sala.

Em nossa pesquisa, percebemos a diferença que estes aspectos fazem quando na aplicação da segunda etapa, pois foi neste momento que o professor/pesquisador pôde intervir e esclarecer dúvidas que, certamente, levaria os alunos a entraves na resolução de uma questão.

Um exemplo disto ocorreu quando os alunos depararam-se com a seguinte inequação: **- 8n + 3501 > 210 – 5n**, ao desenvolverem esta inequação, muitos cometeram o seguinte erro: **- 8n + 5n > 210 – 3501 ; - 3n > - 3291 ; n > - 3291/-3 ; n > 1097** (nesse momento foi necessária a intervenção do pesquisador, pois os alunos não sabiam como trabalhar com “sinal de -” na incógnita quando da resolução de inequações).

Baseado nestas, e em diversas outras situações que apresentamos e analisamos no desenrolar da pesquisa, podemos concluir que é de suma importância o professor trabalhar os, e com os, erros dos alunos, podendo intervir com atitudes como as que citamos acima, no sucesso a ser atingido pelos alunos.

4 - Algumas considerações finais

Gostaríamos de deixar registradas aqui, algumas sugestões e contribuições para o trabalho do professor no seu dia-a-dia em sala de aula.

É importante se destacar aqui algumas atitudes e procedimentos que nós, professores, podemos pensar em adotar com o intuito de melhorar a qualidade da aprendizagem da Álgebra em nossas escolas, visto que os primeiros resultados apresentados, não são nem um pouco animadores.

Podemos trabalhar para mudar esse quadro sim, aliás, não só podemos como devemos trabalhar nesse sentido. Mas como fazer isso? Como desenvolver em nossos alunos a compreensão e a construção de novos conceitos? Como tornar possível que eles tenham esse conhecimento disponível e sejam capazes de transferi-los para situações diferentes?

Em nossa pesquisa, acreditamos ter encontrado um caminho que poderá nos levar ao início de uma mudança na perspectiva do ensino da Álgebra.

Poderíamos iniciar esse percurso com o trabalho em equipe, no qual a participação ativa do professor, como encorajador e mediador no sentido de esclarecer dúvidas, intervir com provocações que estimulem os alunos a usarem toda sua criatividade e seguirem ao encontro de uma solução ou raciocínio que esteja prestes a se desencadear, poderá, certamente, fazer a diferença nos resultados obtidos no processo de ensino/aprendizagem da Álgebra.

Portanto, está na hora de nos mobilizarmos no sentido de tornar nossas aulas mais participativas, desafiadoras e interativas. Afinal, nossa preocupação maior está, certamente, no sucesso que nossos alunos poderão alcançar quando colocados em situações-problema que demandem mais que técnicas e algoritmos para resolução, e sim, interpretação e aplicação de enunciados e resultados.

Por outro lado, não basta somente o trabalho em grupo, em oficinas ou em situações desafiadoras, precisamos nos preocupar com o tipo de atividades que desenvolvemos com nossos alunos. Isso também fará a diferença entre o sucesso ou não por parte deles.

Acreditamos que, nem sempre trabalhar com o aspecto estrutural da Álgebra, significa demonstrar maior ou menor habilidade em lidar com as estruturas algébricas, pois em diversas situações a resolução pelo aspecto processual torna a solução mais rápida e econômica. Outro fator que devemos trabalhar em nossos alunos, pois estaremos contribuindo para cumprir um dos papéis da Matemática, que é o de desenvolver o raciocínio lógico e a agilidade na determinação de soluções para problemas.

Aproveitando o ensejo, é muito importante também que trabalhemos em nossos alunos essa economia e agilidade em resolver problemas, visto que, nos dias atuais, a rapidez com que as coisas acontecem e mudam é inacreditável e, nós, na qualidade de educadores, também precisamos preparar nossos alunos para o exercício de diversas atividades profissionais que estão cada vez mais dominadas pela desenvoltura de uma sociedade altamente tecnológica.

Sabemos que, nos dias atuais, a utilização de situações-problema ou problemas contextualizados está em alta no processo de ensino/aprendizagem, contudo devemos tomar bastante cuidado com esse tipo de abordagem, pois não podemos nos prender em problemas totalmente fora do “mundo real” dos alunos, porque fica difícil de se descontextualizar e formalizar os conceitos que nos propusemos ao final de uma atividade com este objetivo.

Sabemos que não são necessárias somente um reavaliação do conteúdo, da metodologia ou das estratégias que nós, professores, utilizamos em nossas aulas. Faz-se preciso uma profunda mudança também em nossa formação, pois, na maioria das vezes, ensinamos da forma como aprendemos e não estamos capacitados para, por exemplo, mudar nossas abordagens de ensino.

Muitos professores, que gostariam de mudar essas abordagens, acabam não encontrando orientação para tal nos livros didáticos, vão, muitas vezes, procurá-las em outros lugares. Nem sempre, porém, essas informações estão prontamente acessíveis. Seria importante que os professores pudessem aprender, a partir dos resultados de pesquisas na área, como poderiam ser aplicadas essas orientações em sala de aula.

Apesar de algumas publicações em Educação Matemática terem como finalidade disseminar esses resultados e discutir suas aplicações no processo de ensino/aprendizagem, muitas vezes, esses artigos parecem que são escritos, sobretudo, para outros pesquisadores, ficando assim difícil para aquele professor que não está habituado a este tipo de leitura, conseguir extrair a essência do trabalho.

Agrava-se o fato de que a grande maioria dos professores tenha muito pouco tempo para procurar nas bibliotecas das universidades esses resultados, embora seja muito importante aos professores criarem sua autonomia para isso.

Nesse sentido, acreditamos ser importante os cursos de capacitação em ensino da Álgebra para os professores, nos quais pudessem ser utilizadas e discutidas com eles outras abordagens que valem a pena ser utilizadas em sala de aula, quando está se ensinando Álgebra.

Sabendo que muitos de nós, professores, ensinam fundamentalmente aquilo que está nos livros didáticos, conforme temos constatado em nossas próprias práticas em sala de aula e no convívio com os colegas, um grande passo a dar em direção a assegurar a presença dessas outras abordagens no ensino/aprendizagem da Álgebra em nosso dia-a-dia, seria a presença dessas reflexões nos livros didáticos, com a finalidade de oferecer o suporte que os professores precisam para encorajar-se a utilizá-las.

É fato que, embora alguns sinais de mudança nesse sentido já estejam se pronunciando há bastante tempo, ainda existe muito a ser feito no sentido de rever todo o conteúdo e forma com que este aparece nos livros didáticos, para que novas abordagens possam ser trabalhadas em sala de aula.

Por último, deixamos como sugestão àqueles que estejam dispostos a contribuir de maneira efetiva para um crescimento na qualidade do processo de ensino/aprendizagem da Álgebra, procurarem desenvolver pesquisas relacionadas a isto, visto que, pesquisas a respeito de como os professores de Matemática que trabalham com Álgebra, interpretam e ensinam este conteúdo são escassas. Acreditamos ser este um dos maiores vácuos e, possivelmente, uma das áreas de maior necessidade de atenção em nossas pesquisas.

Referências Bibliográficas

• Almouloud, S. A . (1997). *Fundamentos da Didática da Matemática e Metodologia de Pesquisa*. Caderno de Educação Matemática, PUC/SP.

• André, M. E.D.A . (1995). *Etnografia da prática escolar*. Campinas, Editora Papirus.

• Azevedo, F. (1976). *A transmissão da cultura: parte 3 da 5ª edição da obra A Cultura Brasileira*. São Paulo, Melhoramentos, 9-46.

• Bednarz, N., Kieran, C., Lee, L. (1996). *Approaches to algebra: perspectives for research and teaching*. Approaches to algebra, Kluwer Academic Publishers, Holanda, 3-12.

• Bitar, H.A . de F. et al (1998). *Série Idéias – Sistemas de Avaliação Educacional*. São Paulo, FDE, Diretoria de Projetos Especiais, 9-21.

• Bogdan, R. & Biklen, S.K. (1982). Qualitative research for education. Boston, Allyn and Bacon Inc.

• Booth, L.R. (1984). *Algebra: Children's strategies and errors*. Windsor, Berkshire: NEFR - Nelson.

• Brasília, (Governo Federal), Ministério da Educação e Cultura - Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília, MEC/SEF. 1998.

• Brown,C. A ., Carpenter,T. P., Kouba, V.L., Lindquist, M.M., Silver, E.A., & Swafford, J.O . (1988). *Secundary school results for the fourth NAEP mathematics assessment: Algebra, geometry, mathematical methods, and atttitudes*. Mathematics Teacher, 81, 337-347.

• Cortés, A, Kavafian N. (1999*). Les principes Qui guident la pensée dans la résolution des équations*. ESA 7021, Cognition et activés finalisées CNPS, Université Paris 8.

• Cunha, L. A . (1986). *A Universidade temporã*. Rio de Janeiro, Francisco Alves.

• Filloy, E., Rojano, T. (1984). *From na arithmetical to na algebraic thought*. In J.M. Moser (Ed), Proceedings of the Sixth Annual Meeting of PME-NA . Madison: University of Wisconsin, 51-56.

• Gallardo, A ., Rojano, T. (1988). *Areas de dificuldades en la aquisicion del lenguaje aritmetico-algebrico*. Recherches en Didactique des Mathématiques, v 9 , n 2, 155-188.

• Haidar, M. L. M. (1972). *O ensino secundário no Império Brasileiro*. São Paulo, EDUSP/Grijalbo, 47-94.

• Kieran, C. *The early learning of algebra: A structural perspective*. Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra. Ed. NCTN - Hillsdall, N.J.

___________ (1985). *Use of substitution procedure in learning algebric equation-solving*. In S.K. Damarian & M. Shelton (Eds.), Proceddings of the Seventh Annual Meeting of PME-NA, Columbus, OH: Ohio State University, 145-152.

____________ (1992). *The learnig and teaching of school algebra*. Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.

_____________ (1995). A new look at school algebra - past, present and future. Journal of Mathematical Behavior. V 14, 7-12.

• Kieran, C. & Sfard A . (1999). *Seeing through symbols: The case of equivalent expressions*. Focus on Learning Problems in Mathematics, v. 21, nº 1.

• Ludke, M. & André, M. E. D. A . (1986). *Pesquisa em Educação: abordagens qualitativas*. São Paulo, EPU.

• Luna, S. V. de (1996). *Planejamento de pesquisa - uma introdução*. São Paulo, EDUC.

• Neves, P. S. de O . (1995*). Um estudo sobre o significado, o ensino e a aprendizagem da Álgebra*. USP, Dissertação de Mestrado.

• Nunes, M. T. (1962). *Ensino secundário e sociedade brasileira*. Rio de Janeiro, ISEB, 63-81.

• Perroti, A . R. (1999). *O estudo da reta a partir de grandezas diretamente proporcionais: uma proposta alternativa de ensino*. Dissertação de Mestrado. PUC/SP.

• Rojano, T. (1995). Problem Solving: From the development of algebric ideas to algebric thinking. Centro de Investigacoin y Estudios Avanzados del IPN, México.

• Sangiori, O . (1966). Matemática: 1º grau. Nova Série, São Paulo, Cia Editora Nacional.

• São Paulo, (Estado), Secretaria da Educação - Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. *Proposta Curricular para o Ensino da Matemática: 1º grau*. São Paulo, SE/CENP. 1986.

• Serrão, A . (1938). *Lições de Álgebra Elementar* (do prefácio).

• Sfard, A . (1991). *On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on process and objects as different sides of the same coin.* Educational Studies in Mathematics, 22, 1-36.

__________ (1995). *The development of algebra: confronting historical and physhological perspectives*. Journal of Mathematical Behavior, v 14, 15-39.

• Souza, C. P. de (1998). *Série Idéias – Sistemas de Avaliação Educacional*. São Paulo, FDE, Diretoria de Projetos Especiais, 161- 175.

A N E X O S

A N E X O I

Questionário de Caracterização dos Professores

Professor ______

Sexo:_________________

Idade:________________

Anos de Magistério: ________________________

Escola: ____

D. E. : ____

Formação Acadêmica:

Graduação : _______________________________________

(   )   concluída   (   ) estudante

concluiu cursos na Deliberação 2/97?   ( ) sim   (   ) não

Pós - Graduação : ___________________________________

Freqüentou Cursos de Educação Continuada? ( ) sim ( ) não

Quais cursos?_______________________________________

____

Qual Universidade responsável?_______________________

Quando?____

A N E X O II

Questionário de Caracterização dos Alunos

1 – Como foi o seu desempenho em Matemática nas séries anteriores?

( )ótimo ( ) bom ( ) regular ( ) fraco

2 – O "quanto" você gosta de Matemática?

( ) muito ( ) médio ( ) pouco ( ) não gosta

3 – O "quanto" você acha importante o estudo da Matemática para a sua vida diária?

( ) muito ( ) médio ( ) pouco ( ) não acha importante

4 – Qual o seu grau de dificuldade para aprender a Matemática?

( ) grande ( ) médio ( ) pequeno ( ) não tenho dificuldade

5 – Qual o grau de dificuldade você encontrou para resolver as atividades de nossa pesquisa?

( ) grande ( ) médio ( ) pequeno ( ) não encontrei dificuldade

A N E X O III

Teste aplicado nos alunos

1ª Etapa

NOME:____

SÉRIE: _______________ **IDADE:**_____________

1^a Questão

Nas igualdades abaixo, em que **a** e **b** representam números reais, a única verdadeira é :

a) $(a + b)^2 = a^2 + b^2$

b) $(a + b)(a - b) = a^2 - 2ab + b^2$

c) $a(a + b) = a^2 + ab$

d) $\frac{a + b}{a} = b$

Mostre como você chegou à sua resposta:

2ª Questão

Numa padaria há um **cartaz afixado** em que constam os seguintes itens:

Leite	R$ 0,70
Pão	R$ 0,12

Joana comprou uma quantidade **x** de litros de leite e uma quantidade **y** de pães. A expressão algébrica que representa essa compra é:

a) 10x + 3y

b) 10y + 3x

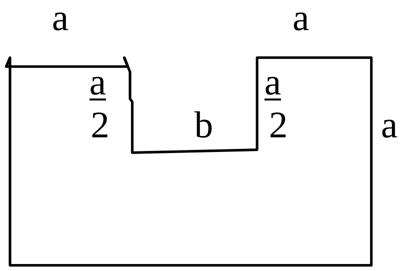
c) 0,12x + 0,70y

d) 0,70x + 0,12y

Mostre como você chegou à sua resposta:

3ª Questão

Escreva a expressão algébrica que representa a área da figura abaixo.



a) $2a^2 + \frac{ab}{2}$

b) $2a^2 + ab$

c) $a^2 + \frac{ab}{2}$

d) $a^2 + ab$

Mostre como você chegou à sua resposta:

4ª Questão

O número natural 3 é solução da equação:

a) $2x - 8 = 1$

b) $\frac{x + 2}{3} = \frac{x}{5}$

c) $5(x - 1) = 2(x + 2)$

d) $\frac{x - 1}{3} = \frac{2}{5}$

Mostre como você chegou à sua resposta:

5ª Questão

Se a professora der 8 balas a cada aluno, sobram-lhe 44 balas; se ela der 10 balas a cada aluno, faltam-lhe 12 balas. Nessa história, se **x** representa o número de alunos, devemos ter:

a) $8x = 10$	e	$x = 22$
b) $8x + 44 = 10x$	e	$x = 22$
c) $8x + 10x = 44 + 12$	e	$x = 28$
d) $8x + 44 = 10x - 12$	e	$x = 28$

Mostre como você chegou à sua resposta:

6ª Questão

Um espião de guerra enviou ao seu comando a seguinte mensagem:

$5n + 25 > 5500$

$- 8n + 3501 > 210 - 5n$

O comando sabia que a letra **“ n ”** representava o número de foguetes do inimigo. Fazendo os cálculos, o comando descobriu que o total de foguetes era:

a) 1094

b) 1095

c) 1096

d) 1097

Mostre como você chegou à sua resposta:

7ª Questão

Somando minha idade com a de minha mãe temos a idade de minha avó. Eu tenho um terço da idade de minha mãe e minha avó tem 72 anos. Desta forma, eu tenho:

a) 17 anos
b) 18 anos
c) 19 anos
d) 20 anos

Mostre como você chegou à sua resposta:

8ª Questão

A solução do sistema
$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

a) $x = 1$ e $y = 0$

b) $x = 1$ e $y = 1$

c) $x = 1$ e $y = 2$

d) $x = 2$ e $y = 1$

Mostre como você chegou à sua resposta:

9ª Questão

Tenho 100 moedas que dão um total de R$ 60,00. Uma certa quantidade de moedas de R$ 1,00 e as restantes são moedas de R$ 0,50. A quantidade de moedas de R$ 1,00 é:

a) 20

b) 80

c) 15

d) 10

Mostre como você chegou à sua resposta:

10ª Questão

Na promoção de uma loja, uma calça e uma camiseta custam juntas R$ 55,00. Comprei 3 calças e 2 camisetas e peguei o total de R$ 140,00. O preço de cada calça e de cada camiseta, respectivamente, é:

a) R$ 35,00 e R$ 20,00
b) R$ 20,00 e R$ 35,00
c) R$ 25,00 e R$ 30,00
d) R$ 30,00 e R$ 25,00

Mostre como você chegou à sua resposta:

A N E X O IV

Questões Abertas

2ª Etapa

Nome:____ - Idade:________

Nome:____ - Idade:________

1ª Questão:

Numa padaria há um **cartaz afixado** em que constam os seguintes itens:

Leite	R$ 0,70
Pão	R$ 0,12

Joana comprou uma quantidade **x** de pães de litros de leite e uma quantidade **y** de litros de leite. Escreva a expressão algébrica que representa essa compra.

2ª Questão:

O número 3 é solução da equação $\frac{x+2}{3} = \frac{x}{5}$?

Mostre como você chegou a essa resposta.

3ª Questão:

Resolva a seguinte equação:

$5(x - 1) = 2(x + 2)$

4ª Questão:

Um espião de guerra enviou ao seu comando a seguinte mensagem:

$5n + 25 > 5500$

$- 8n + 3501 > 210 - 5n$

O comando sabia que a letra **“n”** representava o número de foguetes do inimigo. Encontre o total de foguetes representado pela mensagem enviada ao comando.

5ª Questão:

Somando minha idade com a de minha mãe temos a idade de minha avó. Eu tenho um terço da idade de minha mãe e minha avó tem 72 anos. Desta forma, quantos anos eu tenho?