EUGÊNIO CESAR SILVEIRA

UMA SEQÜÊNCIA DIDÁTICA PARA AQUISIÇÃO/CONSTRUÇÃO DA NOÇÃO DE TAXA DE VARIAÇÃO MÉDIA DE UMA FUNÇÃO

Mestrado em EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PUC-SP

2001

EUGÊNIO CESAR SILVEIRA

UMA SEQÜÊNCIA DIDÁTICA PARA AQUISIÇÃO/CONSTRUÇÃO DA NOÇÃO DE TAXA DE VARIAÇÃO MÉDIA DE UMA FUNÇÃO

Dissertação apresentada como exigência parcial para obtenção do título de MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA à Comissão Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, sob orientação da Professora Doutora Tânia Maria Mendonça Campos.

PUC-SP

2001

BANCA EXAMINADORA

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação por processos fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: ________________________________ **Local e Data:** _______________

“Mestre não é só quem ensina; mas quem, de repente, aprende”

Guimarães Rosa

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter me dado forças nos momentos mais difíceis que passei no desenvolvimento deste trabalho, e pela compreensão de que sempre vale a pena concluir o que iniciamos.

À *Professora Doutora Tânia Maria Mendonça Campos*, pela competência na orientação e paciência em mostrar o melhor caminho a seguir.

À *Professora Doutora Sonia Barbosa Camargo Igliori*, pelo esforço em me oferecer condições de entrar no Programa de Pós-Graduação e poder chegar à conclusão do trabalho.

À *Professora Doutora Regina Maria Pavanello*, que aceitou fazer parte da banca examinadora e pela colaboração com sugestões enriquecedoras.

Ao *Professor Ruy Cesar Pietropaolo*, pela ajuda, atenção, dedicação e, principalmente, pela amizade construída na realização deste trabalho.

À *Faculdades Oswaldo Cruz*, pelo investimento que possibilitou uma atualização nos meus estudos e, também, por autorizar a realização desta pesquisa com seus alunos.

À *Professora Lulu Healy*, uma pessoa extremamente simpática, pela contribuição na revisão de inglês.

À *Lícia Campos*, presente nos momentos estratégicos e de descontração.

À *Professora Doutora Sandra Maria Pinto Magina*, por compartilhar sua vivência com sinceridade.

À *Professora Doutora Ana Paula Jahn*, pelo seu jeito de colocar as idéias de maneira clara e objetiva.

À *Professora-mestre Setsuko Takara Mabuchi*, pela amizade, os estudos em sua casa e pela torcida no término deste trabalho.

A *todos os professores* e colegas do Programa, que tornaram possível a conclusão deste trabalho.

Em especial, à *Silvia Sentelhas* e à *Neide Arashiro*, que contribuíram como observadoras das sessões, e à *Rosana Nogueira de Lima*, pelo apoio prestado.

À *Luiza E. Faustinoni*, pela revisão de meu trabalho, e ao amigo *Francisco Olimpio da Silva*, pela sua edição.

À minha esposa *Marion Thomson*, que suportou meus descontroles nos momentos mais difíceis, e pelas minhas preciosidades, *Carolina* e *Natalie* que, de certo modo, compreenderam a minha ausência.

O autor

À Marion, Carolina
e Natalie.

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo estudar o processo de aquisição/construção da noção de taxa de variação média de uma função, por alunos que ingressaram em um curso superior na área de exatas. A compreensão dessa noção pode favorecer a interpretação do significado da derivada como taxa de variação num ponto. Para tanto, foi elaborada uma seqüência didática inspirada nas concepções de Vergnaud (1994), que considera que o processo de ensino e aprendizagem de noções e conceitos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las. Essa seqüência foi desenvolvida por 18 duplas de alunos do 1° ano de um curso de Química, ao longo de 1.440 minutos. Os resultados obtidos revelam que houve bom aproveitamento destes alunos na construção da taxa de variação média e também no desenvolvimento de competências para a interpretação de gráficos, como a identificação de intervalos de crescimento e decrescimento e na atribuição de significados aos pontos de intersecção com os eixos coordenados.

Palavras chave: Didática da Matemática, Ensino de Função, Taxa de variação média, Educação Matemática.

ABSTRACT

The purpose of this work is to study the process by which students following a university-level course in the exact sciences acquire/construct the notion of average rate of change. An understanding of this notion could assist students in interpreting the meaning of the derivative as the average rate of change of a point. A didactic sequence was elaborated, inspired by Vergnaud (1994), who considers that the teaching and learning of mathematical notions and concepts should be approached by an exploration of problems, that is, by developing problem situations which favour new conceptualisations in their resolution. Eighteen pairs of students from a first year chemistry course worked on the sequence which lasted 1.440 minutes. The results indicated that the students advanced their understandings of average rate of change, as well as their ability to interpret graphs, for example, identifying intervals in which the function increases or decreases and describing the meaning of points where the function intersects the axes of the graph.

Key words: Didactics of Mathematics, Function teaching, Average rate of change, Mathematics Education.

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

O presente trabalho insere-se na linha de pesquisa Epistemologia e Didática da Matemática, do mestrado em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, e tem como objetivo estudar o processo de aquisição/construção da noção de taxa de variação média de uma função real num dado intervalo, por alunos ingressantes em cursos superiores de exatas de uma escola particular da cidade de São Paulo.

Em nossa experiência, desde 1986, nos cursos superiores de Química – engenharia, química industrial e licenciatura – como professor de Cálculo Diferencial e Integral, pudemos perceber que os alunos desses cursos apresentavam, em geral, dificuldades ao lidar com a leitura, a interpretação e construção de gráficos e a identificação dos intervalos de crescimento e decrescimento de uma função. Tampouco conheciam os significados de variação e de taxa de variação média de uma função em um intervalo. Percebemos também que a falta de compreensão dessas noções provocava dificuldades no processo de ensino e aprendizagem de outros conceitos matemáticos, notadamente os tratados no Cálculo Diferencial e Integral.

Recentemente, alguns livros dessa disciplina têm procurado inovar o processo de ensino e aprendizagem de Derivada, substituindo uma abordagem que se inicia pelas definições, propriedades e técnicas, para, somente então, passar às aplicações, por outra, na qual se privilegia a construção dos conceitos pelo aluno, tendo necessariamente como um de seus pontos de partida as situações-problema. Nesse contexto, o trabalho com a derivada, por meio da taxa de variação, passa a ter maior ênfase.

Constatada a dificuldade de nossos alunos, com a noção de função e com a construção e interpretação de gráficos, acreditamos ser possível proporcionar-lhes a oportunidade de desenvolver, por meio de uma seqüência de atividades, o conceito de taxa de variação média de uma função em um intervalo. Acreditamos que, por meio dessa seqüência, o aluno, poderia adquirir maior competência nos aspectos citados acima, de modo a favorecer futuramente a compreensão do significado de taxa de variação num ponto. Convém ressaltar que nosso trabalho está fundamentado nas idéias desenvolvidas no livro Noções de Cálculo, de Machado, N. (1988) e em sugestões dos PCNs.

No capítulo I, apresentamos a problemática deste trabalho e as pesquisas nas quais nos baseamos para fundamentá-lo, bem como a Metodologia utilizada para seu desenvolvimento.

No capítulo II, apresentamos o referencial teórico de nossa pesquisa, fundamentado na linha da Didática da Matemática francesa, que estuda os processos de aquisição de conteúdos matemáticos.

No capítulo III, discutimos o teste diagnóstico que aplicamos em 220 alunos ingressantes em cursos superiores de Química de uma Universidade particular da cidade de São Paulo. Esse teste nos forneceu subsídios para a elaboração da seqüência didática a ser aplicada a alunos de 1º ano de curso superior, em especial daqueles que têm como disciplina curricular o Cálculo Diferencial e Integral.

No capítulo IV, discutimos a seqüência didática elaborada a partir do exame do desempenho dos alunos no teste diagnóstico, realizando as análises “a priori” e “a posteriori” das questões. Nossa seqüência didática, inspirada nas concepções de Vergnaud, G. (1994) de que o conhecimento emerge na resolução de problemas, foi proposta para 18 duplas de alunos do 1º ano de um curso de Química, que trabalharam ao longo de 16 sessões de 90 minutos cada.

No capítulo V, apresentamos análises detalhada dos desempenhos de duas duplas que acompanhamos, bem como as considerações finais do trabalho.

CAPÍTULO I

ESTUDO DO PROBLEMA E METODOLOGIA

1) Estudo do Problema

Nossa experiência em sala de aula tem mostrado que muitos alunos não compreendem o conceito de função, que é de fundamental importância na Matemática. Essa dificuldade se revela em diversos momentos, como por exemplo, na construção e interpretação de gráficos, na identificação dos intervalos de crescimento/decrescimento de uma função, na atribuição de significado aos pontos de intersecção com os eixos coordenados, etc. Alguns dos alunos têm até dificuldade em associar gráficos de retas ou parábolas às respectivas leis. Tais dificuldades são confirmadas em resultados de pesquisa em Educação Matemática.

Para Eisenberg, T. (1992, p. 13) o processo de ensino e aprendizagem de gráficos de funções não é tranqüilo. O aluno, segundo esse pesquisador, ao se deparar com o gráfico que mostra a interdependência entre duas grandezas, geralmente tem dificuldades em atribuir significados a essa representação, e em reconhecer se a relação em questão é uma função. Ele salienta também que os alunos são relutantes quanto à iniciativa de construir gráficos.

A respeito dos gráficos, Norman, D. (1992, p.13) afirma que, por meio deles, pode-se tirar conclusões pertinentes, desde que se saiba interpretar as informações neles contidas, no entanto, muitos alunos encontram dificuldades em ler, interpretar e construir gráficos, além de nem sempre o considerarem conteúdo matemático.

Sierpinska, A. (1992, p. 25) relata as diversas dificuldades que os alunos têm a respeito de estabelecer relações entre diferentes representações de funções, tais como expressões algébricas, gráficos, tabelas, e na manipulação dos símbolos, como f(x), $x \to y$, sen(x + t). Constata também que nem sempre eles fazem distinção entre uma função f e seu valor num ponto f(x), ou seja, “f(x)” pode significar tanto o nome de uma função como o valor da função f num ponto. Afirma que, em situações espontâneas, os alunos usam diferentes símbolos e representações, como por exemplo, para dizer que o valor de uma função f no ponto 2 é 3, escreve x(2) = 3, no lugar de f(2) = 3. Além disso, segundo o autor, os alunos atribuem pouco significado aos gráficos das funções.

Outros pesquisadores também relatam dificuldades de alunos quando as situações propostas envolvem representações gráficas de funções. A pesquisa realizada por Orton, A. (1983, p. 244) aponta bom desempenho dos alunos nas tarefas algorítmicas, tais como cálculo de derivada e integral pela regra, embora esses mesmos alunos apresentem dificuldades quando representações gráficas estão envolvidas no cálculo de taxas de variação. Estes resultados também são confirmados por Villarreal, M. (1999, p.17).

As dificuldades na interpretação de gráficos de funções, por exemplo, na identificação dos intervalos de crescimento/decrescimento, podem também ser atestadas pela avaliação dos concluintes do Ensino Médio[1], realizada em 1997 pela Secretaria Estadual da Educação de São Paulo: o rendimento dos alunos em Matemática ficou em torno de 27%, sendo que em nenhum dos itens referentes às funções o índice médio de acertos ultrapassou 35%.

A Proposta Curricular para o Ensino de Matemática do 1º grau da Secretaria de Estado da Educação de São Paulo, atesta que há obstáculos na aquisição de competências a respeito desse tema. A sugestão para superar estas dificuldades é a proposição de situações-problema que envolvam a noção de função e a leitura/construção de gráficos ainda no ensino fundamental. Conforme a referida Proposta é também oportuno trabalhar com intervalos no estudo da variação de uma função, embora seja ressaltado que esse trabalho deve ter um caráter exploratório, por meio de gráficos, e não um tratamento formal nesse nível de ensino. (Proposta Curricular 1994, p.25).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para o Ensino Fundamental (PCN,1998) também destacam a importância dos gráficos.

[1] A Secretaria de Estado da Educação de São Paulo elaborou, em 1997, uma pesquisa quantitativa e qualitativa com a finalidade de promover um programa de expansão e melhoria do Ensino Médio nas escolas públicas do Estado. Essa pesquisa foi publicada em 1999 em três volumes, sendo que, as análises dos desempenhos dos alunos em Matemática estão presentes no volume 2.

> *“Convém também destacar a importância dos gráficos para o desenvolvimento de conceitos e procedimentos algébricos e para mostrar a variedade de relações possíveis entre duas variáveis. Quando uma variável aumenta, uniformemente, a outra pode permanecer constante, aumentar ou diminuir na mesma proporção da primeira, crescer ou decrescer mas não exatamente na mesma proporção, aumentar ou diminuir muito mais acentuadamente, aproximar-se mais e mais de um determinado valor, aumentar e diminuir alternadamente, aumentar ou diminuir em etapas, formando platôs”. (PCN, 1998 p. 106).*

Os documentos acima revelam, ainda, o consenso existente entre pesquisadores de que a noção de função representa um papel importante na educação dos alunos e que a construção dessa noção é demorada, podendo, portanto, ser desenvolvida desde o ensino fundamental.

Educadores como Goldenberg, E. (1992, p. 6) e Monk, G. (1992, p.13) ressaltam as dificuldades encontradas na interpretação gráfica. Por exemplo, Monk menciona que os estudantes, ao interpretarem um gráfico pontual, apenas o consideram como um instrumento de localizar pontos. Goldenberg vai mais além, e diz que, ao interpretarem gráficos, os estudantes consideram apenas pontos especiais, tais como a intersecção com os eixos. Estes educadores indicam que os estudantes parecem ter dificuldades na interpretação de funções cujos gráficos não são retas.

Neste trabalho relatamos uma pesquisa realizada para desenvolver no aluno a capacidade de comparar o crescimento e decrescimento de uma dada função em diferentes intervalos. Acreditamos que mobilizando conhecimentos anteriores e introduzindo a noção de variação de uma função e o de taxa de variação média em um dado intervalo, o aluno poderá compreender, ler e interpretar com maior facilidade outros gráficos além da reta.

É importante frisar que as noções, variação de uma função e taxa de variação média, são utilizadas como ferramenta nas aulas de Física no Ensino Médio, em especial no estudo da cinemática, ao se trabalhar velocidade média. A seguir, apresentamos um exemplo de situação-problema comum em alguns livros didáticos de Física, qual seja:

"A posição s em função do instante t de um móvel, que se desloca segundo uma trajetória retilínea, é dada por $s(t) = 2t^2 + 3$ (para "s" em metros e "t" em segundos). Determinar:

a) A posição desse móvel nos instantes t = 2s e t = 3s.
b) A velocidade média no instante no intervalo de t = 2 s a t = 3s.
c) A velocidade no instante t = 2s".

Resolvendo, temos:

a) $s(2) = 2 \cdot (2)^2 + 3 = 11m$ e $s(3) = 2 \cdot (3)^2 + 3 = 21m$

b) $v_m = \dfrac{21 - 11}{3 - 2} = 10\, m/s$

c) a solução mais encontrada nesses livros é a seguinte: como se trata de um movimento uniformemente variado, identifica-se $v_0 = 0$ e $a = 4m/s^2$ para usar, em seguida, a fórmula da velocidade instantânea $v = v_0 + at$. Assim, $v = 4t \Rightarrow v = 4 \cdot 2 \Rightarrow v = 8m/s$.

Alguns livros, antes do uso da fórmula da velocidade (que é necessária, pois os alunos ainda não sabem derivadas) sugerem que se calcule a velocidade média em intervalos de tempo cada vez menores e próximos de 2s, para que os alunos possam fazer conjecturas a respeito da velocidade no instante $t = 2s$.

É possível que os alunos encontrem dificuldades em transferir esse conhecimento trabalhado na Física para situações que envolvam outros contextos, provavelmente pela inexistência de um trabalho na sala de aula que estabeleça essas conexões. Pode-se supor que o professor de Matemática, no Ensino Médio, via de regra, não aborda essa noção ou dedica pouco tempo de suas aulas para desenvolvê-la.

Mesmo em se tratando do Ensino de Cálculo em institutos de Ensino Superior, poucos são os livros-textos que abordam o conceito de taxa de variação média de uma função antes do conceito de derivada.

No trabalho "Discurso de alguns professores de cálculo sobre taxas de variação", Silva, M. (1998) observa que os livros de Cálculo que desenvolvem essa noção, o fazem após as considerações iniciais de derivadas como uma aplicação nesse campo teórico. Esta autora reitera que a definição de taxa de variação média de uma função é dada a partir do quociente de Newton e do limite desse quociente, quando h tende a zero, o que na verdade refere-se à derivada de uma função que já foi trabalhada anteriormente.

De acordo com essa pesquisadora, alguns professores não consideram a noção de taxa de variação média como um meio potencialmente rico para desenvolver o conceito de derivada, preferindo utilizá-lo como mera aplicação. No entanto, existem trabalhos que indicam que este é um bom caminho para a compreensão da noção de derivada.

Igliori, S. e Silva, B. (1996), num estudo exploratório do conceito de derivada, elaboraram uma seqüência, composta de 6 fichas, de modo a evidenciar que "*a essência desse conceito é a medida da variação e que sua representação é a inclinação da tangente*". Os resultados dessa pesquisa mostram que a exploração da noção de razão de variação foi bastante satisfatória para a aquisição do significado de derivada.

Machado, N., em seu livro: Noções de Cálculo (1988), sugere, para a introdução ao Cálculo Diferencial e Integral, um trabalho inicial com funções que envolvam grandezas diretamente proporcionais. Quando a variação de y é diretamente proporcional à variação de x, dizemos que y e x têm variações diretamente proporcionais, e o gráfico correspondente a essas variações proporcionais é uma reta. Situações de grandezas, x e y, cujas variações não sejam proporcionais, são propostas posteriormente. Desse modo, a variação de y, por unidade de x, não é constante, isto é, a "rapidez" com que y varia em relação a x depende do ponto considerado. Por exemplo, na função $y = x^2 + 3$, a variação de y por unidade a mais de x aumenta à medida que x aumenta, ou seja, a função cresce "cada vez mais rápido" quando aumentamos x. Sendo assim, a relação de interdependência entre as grandezas envolvidas não é da forma $y = a \cdot x + b$, e consequentemente o gráfico correspondente não é uma reta.

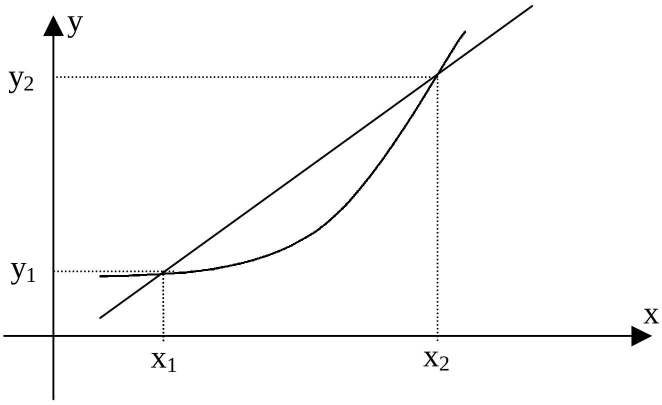
Diante desses argumentos, acreditamos que o trabalho com a taxa de variação média de uma função possa preparar o aluno para compreender o significado da taxa de variação num ponto, quando estudar derivada na disciplina Cálculo Diferencial e Integral no curso superior.

A idéia que atribuímos à taxa de variação média de uma curva entre dois pontos A e B é o da taxa de variação da reta nesse intervalo, ou seja: é como se a curva fosse “substituída” por uma reta que passa por esses dois pontos.

Assim, para uma função qualquer $y = f(x)$, chamamos taxa de variação média entre x_1 e x_2 (com $x_2 > x_1$) a taxa de variação da função $y = a \cdot x + b$ determinada pela reta que passa pelos pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2), onde $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$.

Representando a diferença $x_2 - x_1$ por Δx e $y_2 - y_1$ por Δy, temos:

$T_m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, onde T_m é taxa de variação média de $y = f(x)$ entre x_1 e x_2. A taxa de variação média corresponde, então, à variação de y por unidade de x, em média, entre x_1 e x_2.



Convém ressaltar que as situações propostas em nossa seqüência vão envolver a noção de taxa de variação média de uma função, explorando diferentes registros de representação, a saber: expressão algébrica, tabela e gráfico.

O entendimento da noção de taxa de variação média poderá ajudar o aluno na análise de aspectos de uma função, como o de comparar a “rapidez” com que uma função varia (o “quanto” cresce ou decresce) entre um intervalo e outro. A aquisição deste conceito poderá favorecer o processo de ensino/aprendizagem da derivada e integral, noções consideradas fundamentais nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral. Além disso, consideramos que os alunos terão melhores condições de, por exemplo: comparar a taxa de variação média de crescimento de uma população em períodos distintos, a variação da corrente num circuito elétrico, resolver problemas de lucros e perdas, verificar o crescimento de uma criança num certo período de tempo.

2) METODOLOGIA

A Metodologia do presente trabalho, inspira-se na Engenharia Didática em que primeiramente foi feito um estudo do problema e sua delimitação. Em seguida, foram escolhidos os referenciais teóricos e o nível de ensino em que seria aplicada a seqüência.

Posteriormente foi elaborado um teste diagnóstico com objetivo de conhecermos o ponto de partida para elaboração da seqüência. Buscamos saber o quanto os estudantes do 1° ano de um curso de exatas em uma Instituição de Ensino Superior compreendiam aspectos elementares do estudo de uma função e se eles disponibilizavam estes conhecimentos para responder sobre um conteúdo ainda não apreendido: taxa de variação e taxa de variação média. Este teste foi aplicado individualmente a um grupo de 202 alunos regulares do 1° ano dos cursos de Engenharia, Licenciatura em Química e Química Industrial. O instrumento era constituído de questões fechadas e abertas, possibilitando justificativas em linguagem natural. Para cada questão foi feito um levantamento de erros mais freqüentes.

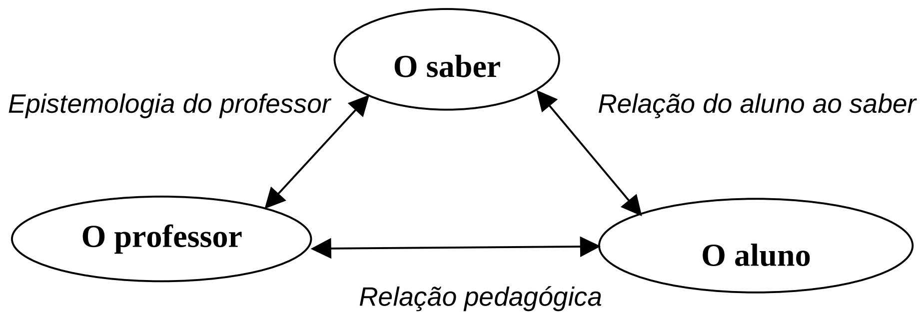
Em seguida foi elaborada uma seqüência didática a partir do estudo a priori, apresentado adiante. A seqüência, composta de questões fechadas e abertas, foi aplicada ao longo de 16 sessões de 90 minutos cada, a um grupo de 36 alunos de uma turma regular do 1° ano do curso de Licenciatura em Química numa Instituição de Ensino Superior em que o professor/pesquisador leciona. Explorando a idéia de Vigotsky (1997) sobre a Zona de Desenvolvimento Proximal, resolvemos trabalhar com duplas de alunos. De acordo com este conceito, quando os estudantes trabalham em grupo, eles estão interagindo dentro da ZDP, o que favorece a aprendizagem. A formação das duplas foi de iniciativa do grupo. Durante a aplicação do instrumento, um colaborador do professor/pesquisador observou o trabalho de duas duplas e anotou manifestações pontuais desses alunos. O trabalho se desenvolveu por meio de 4 fichas constituídas de situações-problema, apresentadas em diferentes registros de representação. Ao término de cada sessão, os resultados encontrados pelas duplas eram discutidos na sessão seguinte com a mediação do professor. Ao final dessas sessões de discussão, o professor/pesquisador tomava a si a responsabilidade de institucionalizar o saber matemático em jogo.

CAPÍTULO II

REFERENCIAL TEÓRICO

As concepções que fundamentam nosso trabalho são provenientes da linha francesa da Didática da Matemática, que estuda a transmissão e aquisição de conteúdos matemáticos. Mais precisamente, nos apoiaremos na teoria das situações, de Brousseau, G. (1997), no que se refere ao processo de ensino-aprendizagem matemática que envolve o professor, o aluno e o conhecimento matemático, e em Vergnaud, G. (1990), no sentido de que o conhecimento emerge de situações problemas.

A seqüência didática utilizada nesta pesquisa teve por objetivo a construção da noção de taxa de variação média por meio de situações-problema em variados contextos, utilizando diferentes registros de representação. Sua elaboração baseou-se no modelo teórico desenvolvido por Brousseau (1986), a teoria das situações didáticas, segundo a qual o processo de aprendizagem envolve professor, aluno e saber matemático.



O processo de ensino de matemática em sala de aula tem o intuito de realizar uma educação matemática mais significativa para o aluno, o que nos leva à reflexão sobre a maneira de apresentar ao aluno um conteúdo matemático. O significado do saber matemático escolar está diretamente ligado, pela forma didática, com o conteúdo que é apresentado ao aluno, e vai depender do envolvimento desse aluno para estruturar as atividades de aprendizagem por intermédio de uma situação didática.

Por situação, entende-se o conjunto de circunstâncias em que um indivíduo se encontra envolvido, um conjunto de elementos que caracterizam uma ação. Uma situação-problema é um exemplo de situação que demanda uma situação e uma resposta. Quando na situação se manifesta vontade de ensinar, caracterizamos uma situação didática.

Entretanto, devemos refletir sobre a diferença que há entre uma situação de ensino, caracterizada pela prática pedagógica tradicional, e a noção do nosso objeto de estudo. Orientações didáticas recomendam que o professor atribua ao aluno uma responsabilidade maior na sua produção, no seu aprendizado. Estas orientações devem transformar as situações de ensino em situações de aprendizagem. Por exemplo, determinada uma intenção de ensino através da resolução de problemas, é a presença, a valorização e a funcionalidade de situações a-didáticas no transcorrer de uma situação didática que diferenciam estas duas formas de ensinar.

Brousseau define assim uma situação didática:

> *É um conjunto de relações estabelecidas explicitamente ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, num certo meio, compreendendo eventualmente instrumentos e objetos, e um sistema educativo (o professor) com a finalidade de possibilitar a estes alunos um saber constituído ou em vias de constituição. (Brousseau, 1986 p.33-116)*

No trabalho desenvolvido com os alunos, o contrato didático estabelecido foi que eles iriam trabalhar em dupla, sem comunicação entre elas ou com o pesquisador/professor. Cada dupla deveria discutir as questões e estabelecer uma resposta de consenso. Apesar das regras terem sido colocadas de maneira objetiva por nós, nas primeiras atividades desenvolvidas pelos alunos, estes, ao encontrarem alguma dificuldade, em geral recorriam diretamente ao professor/pesquisador ao invés de discutirem com seu parceiro. Neste momento, foi novamente explicitada a renegociação do contrato tradicional, sua substituição e a necessidade de adaptação à proposta do trabalho feita pelo pesquisador.

O objetivo deste novo contrato era a proposição de uma situação a-didática, conforme definição dada por Brousseau (1986):

> *Quando o aluno se torna capaz de pôr em funcionamento e utilizar por si mesmo o saber que está construindo, em situação não prevista em quaisquer contextos de ensino e também na ausência de qualquer professor, está ocorrendo então o que pode ser chamado de situação a-didática.*

Esta situação se caracteriza por representar um determinado momento do processo de aprendizagem no qual o aluno deve agir, falar, refletir, evoluir de forma independente, não sofrendo nenhum tipo de interferência por parte do professor, considerado aquele que detém o conhecimento.

Por outro lado, segundo Brousseau uma “situação” (didática ou a-didática), é caracterizada por variáveis didáticas. A noção de variável didática possibilita ao professor uma reflexão sobre:

1) o cenário que ele vai escolher,
2) os critérios de escolha de questões,
3) uma renovação de questões,
4) previsões das atividades dos alunos

Essas variáveis didáticas são importantes na teoria das situações didáticas, pois podem interferir no caminho adotado pelo aluno para resolver questões propostas.

Da teoria das situações utilizaremos a tipologia de situações didáticas para analisar as principais atividades da seqüência, são elas: situação de ação, de formulação, de validação e de institucionalização.

- *Situações de ação*: que envolvem a resolução dos problemas propostos predominando o aspecto experimental do conhecimento, sem a preocupação com a explicitação de um resultado teórico que esclareça ou justifique a validade de sua resposta. A situação de ação é o processo pelo qual o aluno vai fabricar estratégias, isto é, vai “aprender” um método de resolução de seu problema.

Por exemplo, na atividade 1, ficha 1 (anexo II), foi trabalhada com os alunos a variação da altura de Natalie, comparação de “quanto” ela cresceu entre dois intervalos, acréscimo da altura ao ano e média de crescimento anual. Especificamente, na questão 4, que pedia para determinar em qual dos dois intervalos de tempo dado, Natalie cresceu mais, a estratégia que poderia ser usada pelos alunos seria de calcular a variação da altura de cada intervalo dado e comparar esses resultados. Outra estratégia era calcular o acréscimo da altura (o quanto cresceu) anual, somar esses acréscimos referentes a cada intervalo dado e comparar os dois resultados encontrados. Em qualquer uma das estratégias adotadas, o valor maior seria o intervalo de tempo em que Natalie cresceu mais.

- *<u>Situações de formulação</u>*: que envolvem a explicitação das concepções dos alunos em relação aos conceitos, ou seja, que o aluno faça uso de uma linguagem, tomando suas concepções em relação aos conceitos, de maneira que os outros compreendam.

Por exemplo, na atividade 2, ficha 1 (anexo II), era solicitada a variação da altura, de tempo, a razão da variação da altura com o tempo, qual seu significado dentro daquele contexto, uma explicação para o fato desta razão ser positiva, nula ou negativa. A partir desta atividade foi fornecido t e h, indicando a variação de tempo e altura, respectivamente. Esta, como todas as outras atividades, foram resolvidas em duplas, o que possibilitou a troca de informações, explicitações de procedimentos e noções para resolução do problema pelas duplas, para depois serem colocadas em uma discussão geral. Na sessão em que discutimos esta atividade, perguntamos para a dupla D4 como eles expressariam verbalmente a questão 4: "Você saberia dizer o significado da razão $\frac{\Delta h}{\Delta t}$?" Esta dupla respondeu: "*para obter quantos centímetros por ano Natalie cresce*". O grupo, de uma maneira geral, compreendeu o que esta dupla queria dizer com o termo "quanto cresce", pois a dupla D2, ao descrever na atividade que era "*a variação da altura sobre a variação de tempo*" (o que era claro), percebeu que não era apenas uma descrição da disposição desses termos e manifestaram-se satisfeitos e convencidos com a resposta da dupla D4.

- *<u>Situações de validação</u>*: aquelas nas quais o aluno utiliza mecanismos de prova e onde o saber é usado com esta finalidade. Por exemplo, enunciar um teorema não é só comunicar uma informação, é sempre afirmar que o que se diz é verdadeiro, num certo sistema, é estar sempre pronto para sustentar esta opinião, é dar uma demonstração. O objetivo da situação de validação é a discussão sobre a verdade das afirmações formuladas nas fases de ação e de formulação, melhor dizendo, uma situação de validação é, ela mesma, uma situação de formulação e, portanto, uma situação de ação.

Por exemplo, na questão 6, ficha 2 (anexo II), era pedido o número de habitantes em 2000, supondo que a taxa de variação média da população de 1996 a 2000 era de 2,5 milhões/ano. As justificativas a serem dadas pelas duplas requeriam não apenas a aplicação da fórmula da taxa de variação média, mas que elas compreendessem que o valor a ser determinado encontrava-se na variação da população de 1996 a 2000, variação esta inserida no cálculo da taxa de variação média. Outro modo de justificar a resposta, era multiplicar por 4 (período entre 1996 e 2000) a taxa dada e somar o valor encontrado com a população de 1996, encontrando, assim, a população de 2000.

- *Situações de institucionalização*: que visam a tornar o conhecimento uma referência universal. Este novo conhecimento, depois de construído e validado, passa a ser um patrimônio da classe, mas não ainda com característica de um saber social. O papel do professor, nesse caso, é importante, pois é ele que deve organizar esses conhecimentos para que se tornem referência universal não particularizada. Este tipo de situação se faz necessário para apoiar as práticas docentes e posterior utilização. É a situação em que:

> *"o professor vai permitir ao aluno saber que os conhecimentos utilizados na situação de ação, de formulação e depois de validação, correspondem a saberes reconhecidos que o aluno deverá reutilizar em outras ocasiões em que certamente se poderá exigir dele"* (apud Perrin-Glorian, 1994, p. 126).

Por exemplo, em nosso trabalho, ao término de cada atividade, era realizada uma plenária, em que discutiam os resultados encontrados pelos alunos. O papel do professor/pesquisador, neste caso, era de organizar esses conhecimentos, para que pudessem ser utilizados nas atividades seguintes, ou mesmo, em outras ocasiões.

Os exemplos citados acima ilustram apenas situações encontradas no decorrer de algumas das atividades. Vale ressaltar que em todas as fichas se verificavam quase todas as situações, exceto da institucionalização, que se realizava pelo professor/pesquisador nas plenárias.

O processo de ensino e aprendizagem de conceitos, idéias e métodos matemáticos, por meio de situações-problema, permitem não só o desenvolvimento de estratégias, como também colocar "em jogo" o conhecimento prévio dos alunos. Certamente, um problema não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório. Só há problema se o aluno for levado a interpretar o enunciado da questão que lhe é posta e a estruturar a situação que lhe é apresentada. Segundo Brousseau, G. "*as situações didáticas devem ser criadas de tal maneira que favoreçam um descobrimento por parte dos estudantes*" (1996, p. 48).

Outro referencial de nosso trabalho é devido a Vergnaud, G. (1982), que afirma que a aquisição de novos conceitos deve ser introduzida a partir da resolução de problemas. Mais precisamente, ele afirma:

> "*Resolver problemas é a fonte e o critério do conhecimento operacional. Precisamos ter esta idéia sempre em mente e sermos capazes de oferecer aos alunos situações que busquem estender o significado de um conceito...*'' (1982, p. 5).

Vergnaud, G. (1982), considera que o aluno constrói um campo de conceitos num campo de problemas, e não um conceito isolado em resposta a um problema particular. Assim, nesse trabalho, partimos da premissa de que um conceito matemático se constrói articulado com outros conceitos.

Considerados esses princípios, convém precisar algumas características das situações que podem ser entendidas como problemas. Entendemos que um problema matemático é uma situação que demanda a realização de uma seqüência de ações ou operações para obter um resultado. Ou seja, a solução não está disponível de início, mas é possível construí-la. Por esse motivo, em nosso trabalho, antes da questão central, introduzimos diversas questões de maneira que a reflexão e a discussão de uma possa dar, via de regra, elementos para a análise e a resolução da questão subseqüente.

Além disso, é necessário desenvolver habilidades que permitam provar os resultados encontrados, testar seus efeitos, comparar diferentes caminhos para obter a solução. Nessa forma de trabalho, a importância da resposta correta cede lugar à importância do processo de resolução.

Portanto, em nosso trabalho, os problemas propostos para a investigação serão colocados de forma que o aluno construa seu conhecimento, ou seja, que haja uma convergência natural do conhecimento que se pretende que o aluno adquira.

CAPÍTULO III

TESTE DIAGNÓSTICO

1) Considerações iniciais

Neste capítulo, apresentaremos o teste diagnóstico, seus objetivos e resultados obtidos. Esses resultados são quantitativos e os apresentaremos por meio de tabelas, com a porcentagem de acertos e erros, complementando com uma visão geral do desempenho dos alunos. Faremos também uma breve análise qualitativa do tipo de erro encontrado.

Com o teste diagnóstico, abrangeremos diferentes aspectos do estudo de funções, tais como: gráficos de funções do 1° e 2° grau, o coeficiente angular da reta, o crescimento/decrescimento de uma função em um intervalo dado e taxa de variação. A escolha deste último tema, como dissemos anteriormente, deve-se ao fato de que ele é abordado em Física e consta como aplicação do programa do Ensino Médio desta disciplina. O referido instrumento teve por objetivos verificar se o aluno:

1) Identificava, entre diversos gráficos apresentados, aquele que representava uma função polinomial do 1° grau;
2) Identificava, entre diversas funções expressas algebricamente, aquelas cujas representações gráficas são retas;
3) Determinava o coeficiente angular da reta e escrevia a expressão correspondente;
4) Era capaz de escrever a equação de uma reta a partir de seu gráfico;
5) Era capaz de identificar quando a função é crescente e/ou decrescente, num dado intervalo;
6) Dava significado ao termo variação, taxa de variação e taxa de variação média.

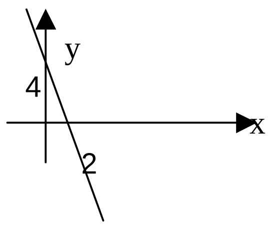
2) O Teste

É necessário ressaltar primeiramente que, embora tenhamos pedido que todas as questões fossem respondidas, observamos que uma grande parcela de alunos não responderam a algumas delas.

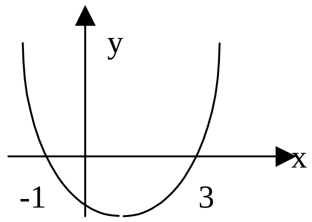
<u>1ª Questão</u>:

Indique Qual dos gráficos abaixo representa a função $y = -2x + 4$:___________

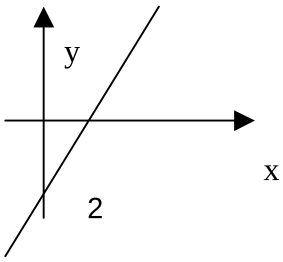
G1)



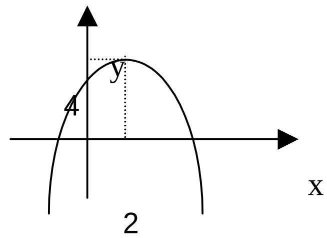
G2)



G3)



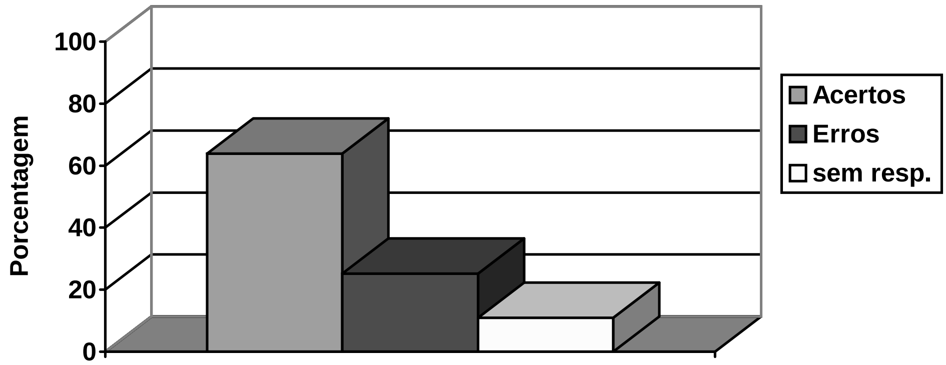
G4)



Explique a razão pela qual você fez sua escolha: _______________________

Acertos	*Erros*	*Sem resposta*	*Total*
63,9%	25,2%	10,9%	100%

Gráfico



Nesta questão, a nossa expectativa era de que os alunos percebessem que a reta seria a representação gráfica de uma função do 1º grau.

A justificativa mais freqüente dos alunos foi que, a função sendo do 1º grau, sua representação gráfica é uma reta decrescente.

Apesar de não ser solicitado na questão o coeficiente angular da reta, houve relatos escritos de alunos que, apesar de perceberem que a função era do 1º grau, erroneamente afirmaram que o coeficiente angular da reta era "- 2x".

Entre os erros freqüentes, encontramos:

- Em relação à questão direta:
  - 15% dos alunos associaram a função $y = -2x + 4$ com as parábolas representadas pelos gráficos **G2** e **G4**.
- Quanto à justificativa da escolha:
  - a variável x era tomada como parte integrante do coeficiente angular da reta.

<u>2ª Questão</u>:

Dadas as seguintes funções:

a) $y = 2^{2x+3}$ c) $y = 2x + 3$ e) $y = \log_2(x)$

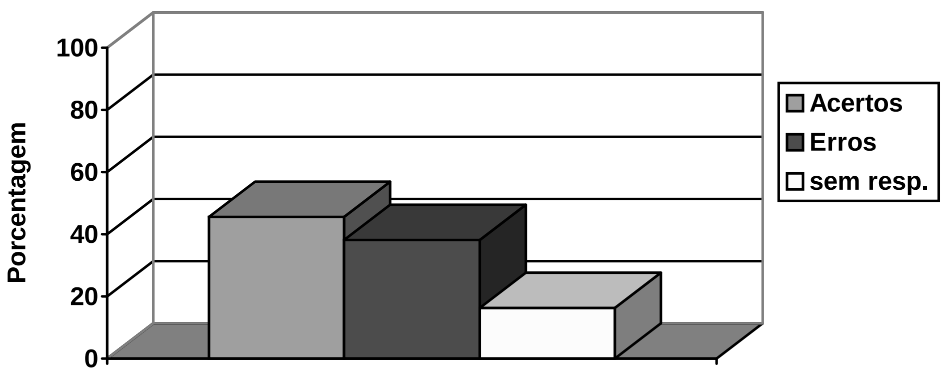
b) $y = x^2 + 3$ d) $y = x^2 - 5x + 6$

Assinale qual(is) da(s) função(ões) acima tem como gráfico uma reta: ______

Justifique sua resposta: ____

Acertos	*Erros*	*Sem resposta*	*Total*
45,6%	38,1%	16,3%	100%

Gráfico



O objetivo desta questão era saber se o aluno distinguia, entre as funções apresentadas, aquela que representa uma reta. Destaque-se que nos itens ***a*** e ***c*** desta questão, foi utilizada a mesma função ($y = 2x + 3$), com a finalidade de que no item ***a*** observassem que havia "algo mais" e, portanto, fizessem uma análise mais criteriosa ao dar a resposta da questão, e não somente se fixassem no expoente dessa exponencial.

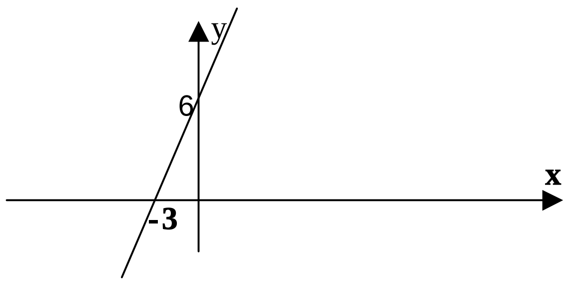
Nas justificativas dadas para os erros mais freqüentes, encontramos as seguintes:

- se o expoente da função (exponencial) for uma função de grau 1, então, a função (exponencial) tem como representação gráfica uma reta.
- a partir do momento que o 'x' não está elevado a nenhum número, então uma reta é sua representação gráfica.
- a função exponencial tem como representação gráfica uma parábola.
- quanto às funções exponencial e logarítmica, afirmaram nunca terem visto este tipo de função, portanto não a reconhecem.

No caso do item "a" desta questão, uma parcela dos alunos (32%) acredita que seu gráfico é representado por uma reta, pois o expoente desta função exponencial é uma função polinomial do 1° grau. Apesar do resultado encontrado para este item, esperávamos um índice mais elevado de acertos. Com relação às funções exponencial e logarítmica, surpreendeu-nos que os alunos não as reconhecessem, pois é um assunto abordado tradicionalmente no Ensino Médio.

3ª Questão:

O gráfico da variação de y em relação a x é dado abaixo:



Determine:

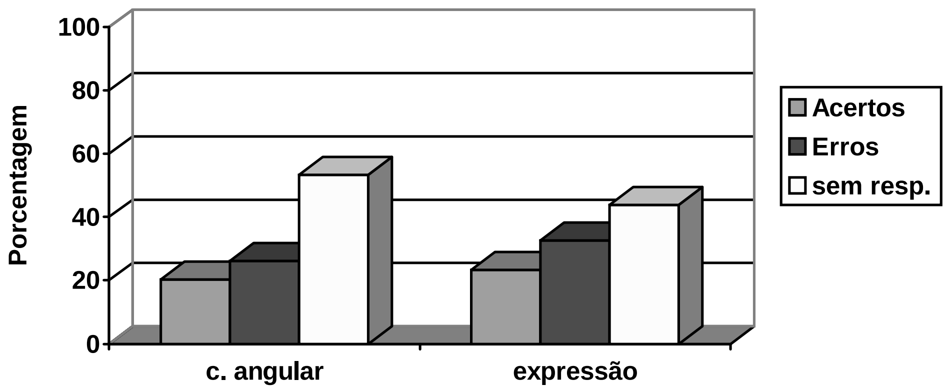
a) O coeficiente angular da reta:_______________________________

b) A expressão que relaciona y com x: ___________________________

	Acertos	Erros	Sem resposta	Total

Coef. Angular	20,3%	26,2%	53,5%	100%
Expressão	23,3%	32,7%	44%	100%

Gráfico



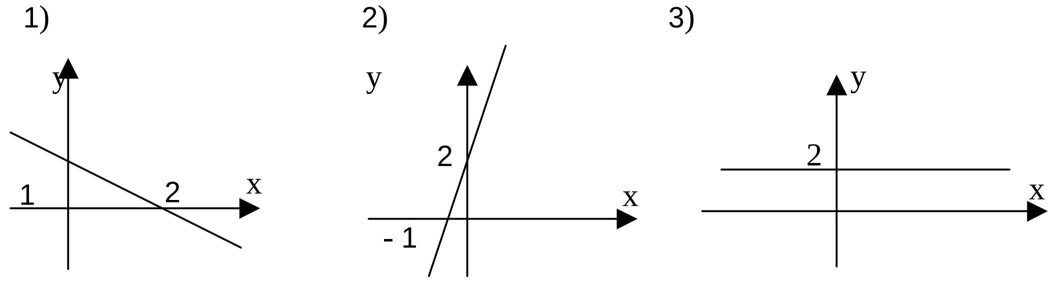
O objetivo desta questão era que o aluno calculasse o coeficiente angular pela fórmula conhecida por eles, ou seja, $(y - y_0) = a(x - x_0)$.

Erros freqüentes encontrados:

- escrever a expressão algébrica, mas não reconhecer o significado do coeficiente angular na mesma expressão.
- Os valores dados, $x = -3$ e $y = 6$, foram tomados por alguns alunos como sendo o coeficiente angular da reta.
- tomar a variável x como parte integrante do coeficiente angular.

4ª Questão:

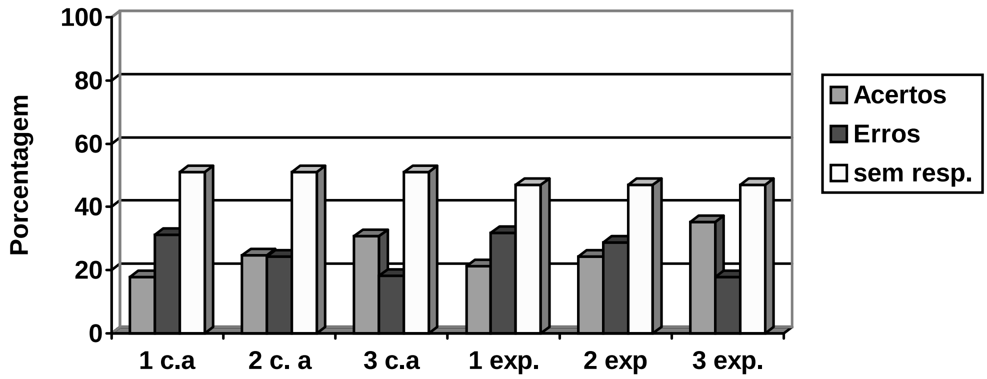
Determine o coeficiente angular de cada uma das retas abaixo e escreva a expressão que relaciona y com x:



coef. Angular ______	coef. angular ______	coef. angular _______
expressão _________	expressão _________	expressão __________

	Acertos			Erros			Sem resposta	Total
Itens	**1**	**2**	**3**	**1**	**2**	**3**		
Coef.Angular	17,8%	24,7%	30,7%	31,2%	24,3%	18,3%	51%	100%
Expressão	21,3%	24,3%	35,2%	31,7%	28,7%	17,8%	47%	100%

Gráfico



O objetivo desta questão era saber se os alunos determinavam corretamente o coeficiente angular da reta e sua expressão correspondente, não só para a reta crescente, como também para a reta decrescente e constante.

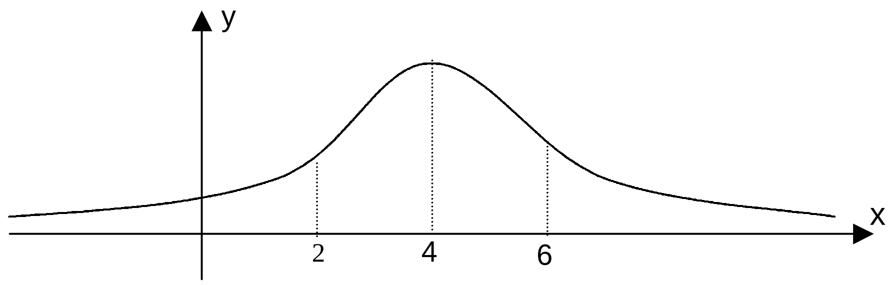
Os erros mais freqüentes encontrados foram:

- para alguns dos alunos (15% do total), o ponto em que a reta intercepta o eixo y é o coeficiente angular.
- 8% dos alunos consideraram o coeficiente angular da função constante como sendo o 2.

Verifica-se, nesta questão, um índice elevado de respostas em branco, o que provavelmente indica a falta de conhecimento no que se refere ao coeficiente angular da reta e seu significado. Reiteramos que esse assunto consta do programa do Ensino Médio.

<u>5ª Questão</u>:

Dado o gráfico da função, responda as questões abaixo:



a) no intervalo de $2 \leq x \leq 4$ a função é crescente, decrescente ou constante?

____

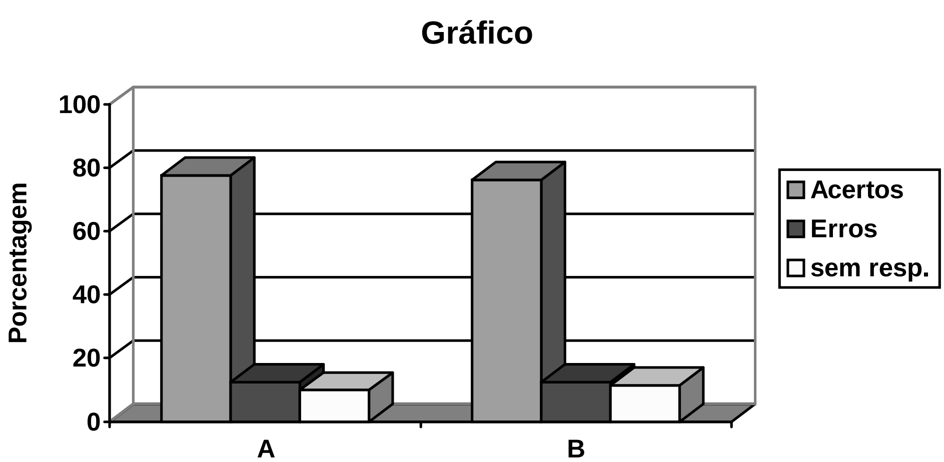
Justifique sua resposta:____________________________

b) No intervalo de $4 \leq x \leq 6$ a função é crescente, decrescente ou constante?

____

Justifique sua resposta:_____________________________

	Acertos	*Erros*	*Sem resposta*	*Total*
A	77,7%	12,4%	9,9%	100%
B	76,2%	12,4%	11,4%	100%

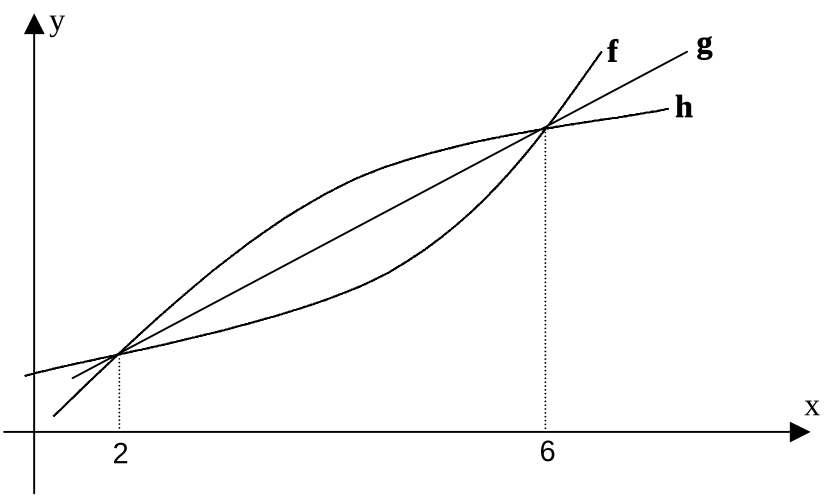


O objetivo desta questão era que o aluno identificasse pelo gráfico, no intervalo dado, o crescimento e decrescimento da função.

Observamos, nesta questão, um índice elevado de acertos, porém a maioria não justificou sua resposta. Alguns (20%) responderam que estavam usando a "intuição". Deixamos de apresentar os erros referente a esta questão, por não serem significantes para o nosso trabalho.

6ª Questão:

Considere os gráficos abaixo, que representam as funções f, g e h. Observe que no intervalo $x \geq 2$, as funções f, g e h são crescentes. Responda as seguintes questões:



a) Qual dessas funções você acha que cresce cada vez mais rapidamente? ______________________________

Justifique sua resposta: ______________________________

b) Qual dessas funções cresce cada vez mais lentamente? ______________

Justifique sua resposta: ______________________________

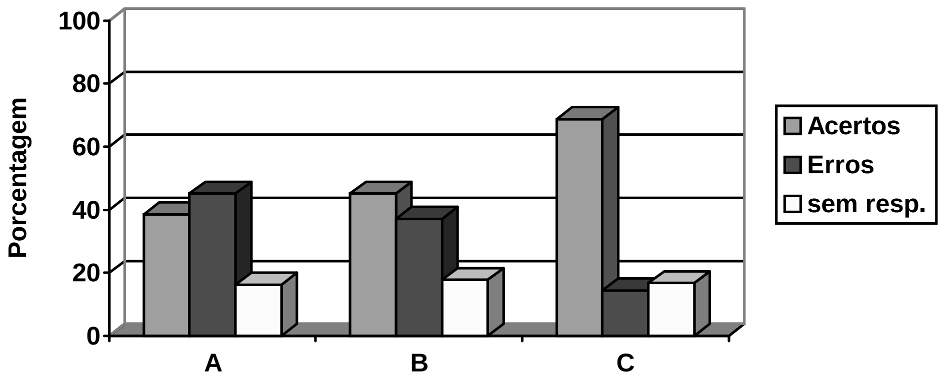
c) Alguma delas cresce com uma rapidez constante? Qual? ______________

Justifique sua resposta:___________________________________

Caso você não tenha compreendido algum termo da questão, indique qual.

	Acertos	*Erros*	*Sem resposta*	*Total*
A	38,6%	45,1%	16,3%	100%
B	45,1%	37,1%	17,8%	100%
C	68,8%	14,4%	16,8%	100%

Gráfico



O objetivo desta questão era verificar a capacidade do aluno ao comparar o gráfico das 3 funções e identificar qual delas, dentro do intervalo dado, cresce cada vez mais, cada vez menos, ou de uma forma constante.

Dentre os erros mais freqüentes, destacamos:

- dificuldade em dar significado aos termos "cresce mais lentamente/mais rapidamente/com uma rapidez constante".
- interpretação fora do intervalo dado.
- uma grande parcela (57%) dos alunos consideraram um determinado valor de x no intervalo dado, representaram corretamente as imagens das funções dadas no eixo y e fizeram a comparação dessas imagens, concluindo que a função que possui a imagem maior cresce mais rápido e a que possui imagem menor cresce mais

lentamente (não detalharam a que cresce com uma rapidez constante). Neste caso, os alunos fizeram uma análise pontual e não no intervalo solicitado.

7ª Questão:

Dada a função y = 12x + 251, determine:

a) A variação no valor de y quando x passa de 10 para 11: ______________

b) A variação no valor de y quando x passa de 1325 para 1326: __________

c) A variação no valor de y quando x passa de 20 para 22:_____________

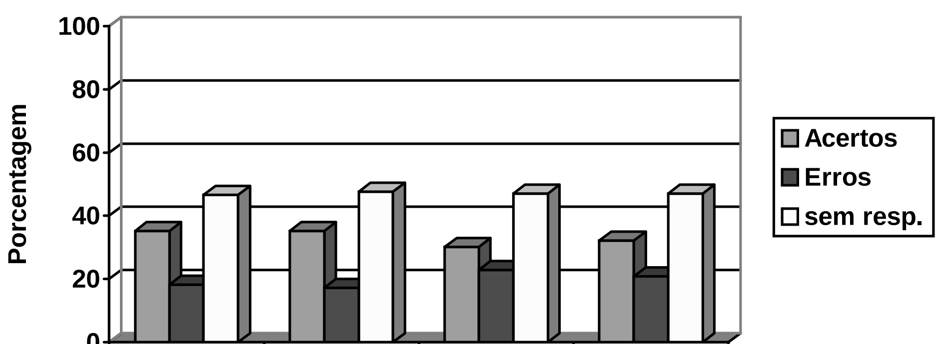
d) A variação no valor de y quando x passa de 8 para 11:_______________

Caso você não tenha compreendido a questão, indique qual foi o problema:

____

	Acertos	***Erros***	***Sem resposta***	***Total***
A	35,2%	18,3%	46,5%	100%
B	35,2%	17,3%	47,5%	100%
C	30,2%	22,8%	47%	100%
D	32,2%	20,8%	47%	100%

Gráfico



O objetivo desta questão era verificar o significado do termo variação para o aluno, mesmo intuitivamente ou na língua materna.

Os erros mais freqüentemente apresentados pelos alunos foram:

- não identificam um significado para o termo "variação";
- calcularam a variação de x acreditando ser a variação de y;
- alguns, embora tenham encontrado a imagem de y referente aos valores indicados de x, não fizeram a variação no valor de y.

8ª Questão:

Em uma corrida de taxi, é cobrada uma quantia fixa de R$ 5,00 mais R$ 2,00 por quilômetro rodado.

a) Qual a diferença no total a pagar em 2 corridas, uma de 21 km e a outra de 27 km ? ____

b) Escreva a expressão de tal situação, onde ***y*** é o valor a pagar para o taxista ao final da corrida e ***x*** é o quilômetro percorrido: ____________________

c) Com a expressão encontrada no item anterior, faça uma representação gráfica dessa situação de até 8 km percorridos pelo taxista.

d) Qual a variação de *y* quando *x* passa de 7 para 8 km: _______________

e) Qual a variação de y quando x passa de 15 para 16 km : _______________

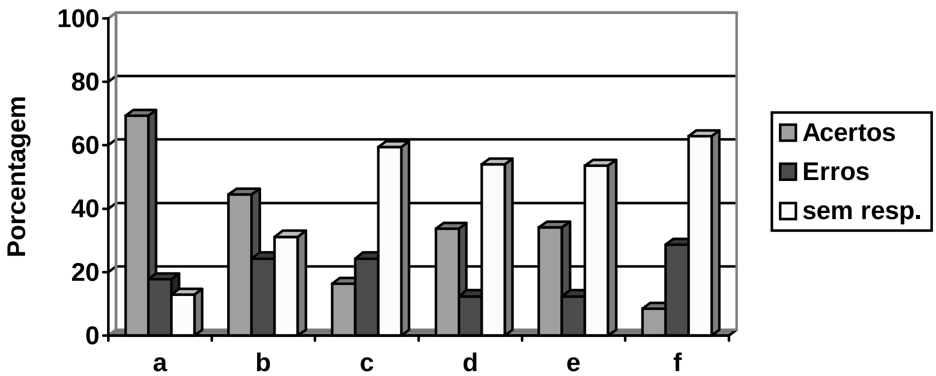
f) Determine a taxa de variação média de y em relação a x no intervalo de x = 21 a x = 27 ____

Caso você não tenha compreendido algum termo, indique qual:

____

	Acertos	*Erros*	*Sem resposta*	*Total*
A	69,3%	17,8%	12,9%	100%
B	44,5%	24,3%	31,2%	100%
C	16,3%	24,3%	59,4%	100%
D	33,7%	12,4%	53,9%	100%
E	34,1%	12,4%	53,5%	100%
F	8,4%	28,7%	62,9%	100%

Gráfico



O objetivo desta questão era verificar qual o significado do termo taxa de variação para o aluno e o que ele poderia inferir com base neste termo.

Dentre aqueles que não responderam a esta questão, encontramos um grande número de alunos (80%) que diz desconhecer o termo taxa de variação média, o que era esperado.

9ª Questão:

Seja a função y = x^2

a) Construir o gráfico cartesiano de y em função de x

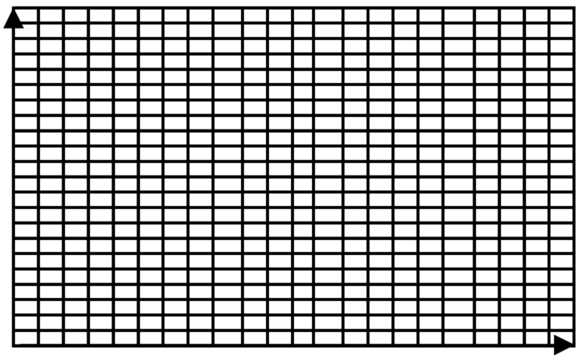
b) Determine a variação de y quando x passa de 2 para 6: __________

c) Determine a taxa de variação média de y quando x passa de 2 para 6:

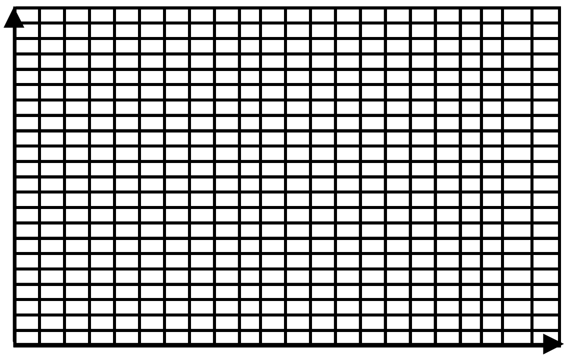
____

Espaço para resolver os itens das questões:

8 – c

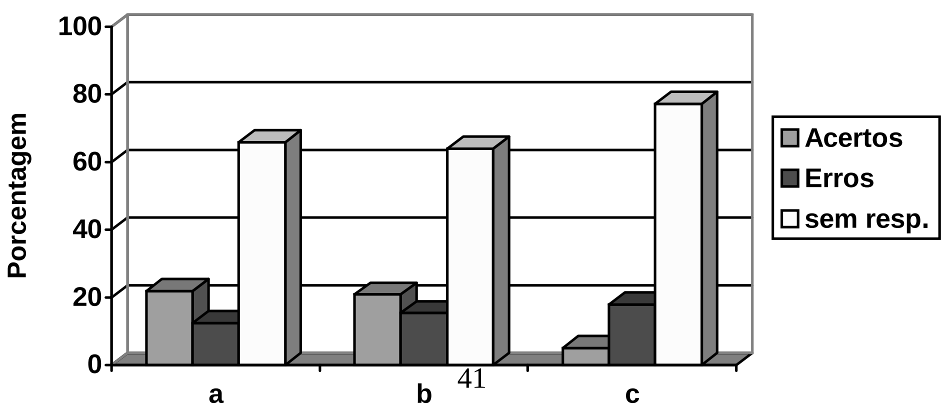


9 – a



	Acertos	*Erros*	*Sem resposta*	*Total*
A	21,8%	12,4%	65,8%	100%
B	20,8%	15,3%	63,9%	100%
C	5%	17,8%	77,2%	100%

Gráfico



Observamos o alto índice de alunos que não responderam a questão. A maioria indica desconhecer o significado de variação e de taxa de variação média de y em relação a x.

3) Os Resultados

As questões do teste diagnóstico visavam a verificar os conhecimentos dos alunos concluintes do Ensino Médio no que se refere a diferentes aspectos do estudo de uma função, tais como: gráficos de funções de 1° e 2° graus, coeficiente angular da reta, crescimento e decrescimento de uma função num dado intervalo e significado do termo variação, variação média e taxa de variação média. Para isto, baseamo-nos em dificuldades encontradas por pesquisadores quanto ao conceito de função, gráficos de funções, sua interpretação, a manipulação de símbolos e expressões e a identificação com outros registros.

Os resultados mostram, de modo geral, que os conceitos e procedimentos sobre o tema desenvolvido por estes alunos não são suficientes para a aquisição/construção de novos conceitos que são tratados no curso de Cálculo Diferencial e Integral. Constatamos, por exemplo, que os alunos tiveram dificuldades em identificar a função do 1° grau com sua representação gráfica e em determinar corretamente o coeficiente angular da reta. As dificuldades desses alunos para função do 1° grau são mais significativas para a função do 2° grau, pois os alunos, em sua maioria, não determinavam a representação gráfica. Além disso, identificaram a representação gráfica de funções exponencial e logarítmica como sendo uma reta.

Observamos também que intuitivamente tinham desempenho satisfatório quanto ao crescimento e decrescimento de uma função. No entanto, tiveram dificuldades em qualificar o crescimento/decrescimento. A maioria desconhecia os termos: variação de y, variação de x, taxa de variação média de y em relação a x. Os resultados indicam que quando esse conteúdo era abordado, o índice de respostas em branco era muito elevado.

Os resultados encontrados neste teste diagnóstico, confirmam que os alunos possuem dificuldades relacionadas ao conceito de função. Em particular, em situações espontâneas, não dão significado aos conceitos: variação, taxa de variação e taxa de variação média da função.

CAPÍTULO IV

SEQÜÊNCIA DIDÁTICA

Apresentaremos a seguir a seqüência didática elaborada por nós. Ela está fundamentada na teoria das situações de Brousseau, G. (1997) e em Vergnaud, G. (1990), segundo a qual o conhecimento emerge de situações-problema. Além disso, consideramos os resultados advindos do teste diagnóstico e dos resultados das pesquisas mencionadas no Capítulo I para eleger as variáveis didáticas que têm um papel importante na concepção da seqüência.

Assim, as variáveis didáticas que escolhemos para buscar uma melhor compreensão da construção da noção da taxa de variação média de uma função são as seguintes: problemas contextualizados e descontextualizados, tabela com números inteiros, gráficos, funções do 1° grau, do 2° grau e exponencial, resolução em dupla, cálculo da variação de y com números inteiros e fracionários, cálculo da variação de x com números inteiros.

Para cada ficha, estaremos apresentando uma análise a "priori", os resultados da aplicação e uma análise a "posteriori". Essas análises são importantes na situação didática. Na análise a "priori", o professor/pesquisador prevê aquilo que, no seu modo de ver pode ocorrer, segundo a situação criada por ele. Posteriormente esta previsão será confrontada com os resultados obtidos nas atividades desenvolvidas pelas duplas na análise a "posteriori".

A seqüência didática é composta de 4 fichas (anexo II), com o objetivo de construir o conceito de taxa de variação média a partir de: análise e interpretação de tabelas (ficha 1); leitura e interpretação de um gráfico discreto (ficha 2); leitura e interpretação de gráfico cartesiano (ficha 3) e registro algébrico (ficha 4).

Ficha 1

Esta ficha, formada por 3 atividades, tinha como objetivo desenvolver a construção do significado da taxa de variação média.

Atividade 1

Esta atividade tinha como finalidade levar o aluno a perceber que para comparar, em diferentes intervalos, o crescimento/decrescimento de uma grandeza em relação a uma outra, é necessário estabelecer razões entre as variações, para depois “conjecturar” que a razão da variação é a taxa de variação média de uma função.

Esta atividade constava de uma situação-problema com 9 itens, para cuja resolução o aluno deveria compreender e interpretar os dados de uma tabela (altura de uma pessoa e a respectiva idade), calcular a variação de uma grandeza em relação a uma outra, fazer comparações para indicar o crescimento de uma em relação a outra e concluir que a "rapidez" do crescimento (o quanto cresce), pode variar conforme consideramos diferentes intervalos.

Nesta primeira atividade, predominou uma "situação de ação" que, segundo Brousseau, se constitui num processo pelo qual o aluno vai fabricar estratégias, ou seja, um método de resolução de seu problema, evidenciando, assim, a produção de um conhecimento experimental, não explicitando nem argumentando sobre os processos utilizados. Por exemplo, nas sete primeiras questões desta atividade, os alunos procuraram uma resposta, sem a preocupação de explicitar os mecanismos utilizados, como o cálculo da variação da altura em um determinado tempo. Os alunos encontravam os valores sem que tivessem consciência do "modelo" matemático a ser empregado.

Natalie está crescendo. A tabela abaixo indica a altura de Natalie no dia em que nasceu e em cada um de seus quatorze aniversários.

Idade **(anos)**	0 (nasc)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Altura (cm)	47	70	83	90	98	105	110	118	125	132	138	144	149	154	159

1) Qual foi a variação da altura de Natalie durante os três primeiros anos de sua vida?
2) Qual foi a variação da altura de Natalie entre as idades de 3 a 6 anos?
3) Em Qual desses dois períodos Natalie mais cresceu: de 0 a 3 ou de 3 a 6 anos?
4) Natalie cresceu mais nos sete primeiros anos de vida ou nos sete anos seguintes?
5) Quantos centímetros por ano (cm / ano) Natalie cresceu, em média, nesses quatorze anos de vida?
6) Houve algum período de um ano em que o crescimento de Natalie tenha sido exatamente igual à média obtida no item anterior?
7) A altura de Natalie, ano a ano, do nascimento até 14 anos sempre aumentou?
8) O acréscimo da altura de Natalie, ano a ano, sempre aumentou? Explique.
9) Natalie estava crescendo mais depressa durante seus primeiros 4 anos de vida ou nos 10 anos seguintes? Justifique sua resposta.

Análise a Priori

- Nas questões 1 e 2 foram solicitadas a variação da altura nos intervalos de tempo considerados. Esperávamos que os alunos não encontrassem dificuldades para interpretar a tabela e fazer os cálculos necessários. Seria possível que algumas duplas, ao invés de calcularem diretamente essas variações (variação "final" menos a "inicial"), nos intervalos de tempo dados, optassem por determinar a variação da altura, ano a ano, indicando a soma dessas variações como a resposta procurada.

- Nas questões 3 e 4, seria possível que muitos alunos comparassem diretamente a variação das alturas, uma vez que os intervalos de tempo considerados tinham a mesma variação (3 anos). Seria possível também que alguns alunos utilizassem a razão $\frac{\Delta h}{\Delta t}$ para fazer a comparação.

- Na questão 5, para o cálculo da média de crescimento nos quatorze anos de vida, esperávamos que os alunos calculassem a razão entre a variação da altura (diferença entre a altura ' 'final'' e a altura ' 'inicial'') e o intervalo de tempo correspondente e não a soma das variações das alturas, ano a ano.

- Na questão 6 esperávamos que os alunos calculassem a variação da altura, ano a ano, e comparassem cada variação encontrada com o resultado da questão anterior, concluindo, assim, que teríamos dois períodos de um ano em que o crescimento é o mesmo da média obtida na questão anterior. O que desejávamos até esta questão era que o aluno percebesse a facilidade de cálculo de "variação".

- Acreditávamos que a maioria dos alunos não encontraria dificuldades em responder à questão 7, que do nascimento até 14 anos, a altura de Natalie sempre aumentou, uma vez que isto poderia ser verificado pela observação da tabela.

- Na questão 8, esperávamos que os alunos observassem que o <u>acréscimo</u> da altura, ano a ano, não aumentaria sempre, ou seja, a taxa de variação média da altura em relação ao tempo não seria constante. Provavelmente, alguns alunos deveriam ter dificuldades em responder a essa questão, por não a diferenciarem da anterior, não percebendo que na 7ª deveriam comparar a altura de um ano com a do ano seguinte, enquanto na 8ª , a comparação deveria ser feita entre as diferenças das alturas (ano a ano), ou seja, a variação da altura ano a ano.

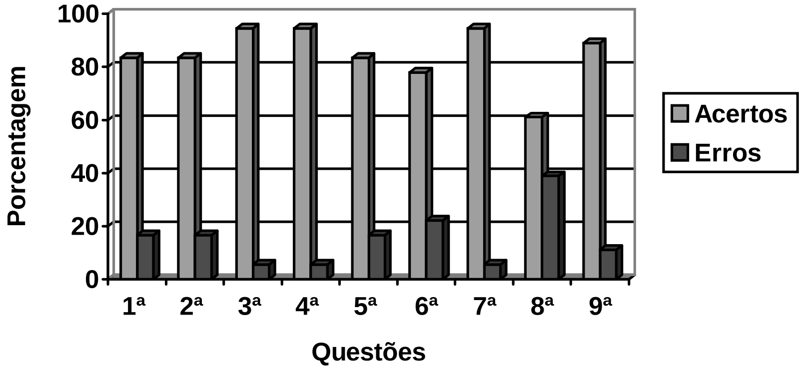
- No item 9, propusemos dois intervalos de tempos distintos, de modo que no intervalo de tempo maior, a variação da altura também seria maior que a variação da altura no intervalo de tempo menor. Com isto, poderiam aparecer respostas de que no intervalo de tempo maior, Natalie ‘ ’cresceu mais’’, ou seja, seriam comparadas somente as variações das alturas, sem a preocupação com o intervalo de tempo. Esperávamos as discussões de cada dupla durante a realização da tarefa, que levariam os alunos a reconhecer que é necessário estabelecer uma razão entre as variações das duas grandezas para resolver situações como a proposta nesse item, que é a taxa de variação média.

Análise a posteriori

Realizada a seqüência, vejamos agora o que realmente ocorreu no desenvolvimento dessa atividade. Apresentaremos, em primeiro lugar, os dados referentes ao desempenho dos sujeitos (duplas) nessa atividade.

Questões	*Acertos*	*Erros*
1ª	83,33%	16,67%
2ª	83,33%	16,67%
3ª	94,44%	5,56%
4ª	94,44%	5,56%
5ª	83,33%	16,67%
6ª	77,78%	22,22%
7ª	94,44%	5,56%
8ª	61,11%	38,89%
9ª	88,89%	11,11%

Gráfico



Nossa opção foi a de fazer uma análise de cada questão, para termos, assim, condições de verificar algumas falhas que pudessem ter ocorrido em nossa seqüência didática.

- As questões 1 e 2, sobre a variação da altura nos intervalos de tempo pedidos, foram respondidas corretamente, conforme previsto, pela maioria das duplas. Duas duplas (D2, D4), que fizeram corretamente a variação da altura no intervalo de tempo dado, acabaram, equivocadamente, dividindo a variação da altura pela variação de tempo, ou seja, acharam a razão $\frac{\Delta h}{\Delta t}$. Apenas uma dupla (D8) fez corretamente a variação da altura, ano a ano, para depois somar estas variações, procedimento previsto na análise a priori.

- Nas questões 3 e 4, quase nenhuma dupla encontrou dificuldades ao comparar as alturas, nos intervalos dados, como foi previsto. Apenas uma dupla (D2), não chegou à resposta desejada para esta questão, pois relataram que "*somando a diferença 0 a 3 e 3 a 6 deu uma variação maior entre 3 e 6*", o que de fato não ocorreu, visto que a variação da altura de 0 a 3 foi de 43 cm, e de 3 a 6 foi de 20cm. Esta dupla havia determinado a razão $\frac{\Delta h}{\Delta t}$ nas questões 1 e 2, o que era para ser feito nesta questão e, mesmo assim, a razão de "0 a 3" foi de 14,3 cm/ano e de "3 a 6" foi de 6,66 cm/ano, o que também não justifica a resposta desta dupla nem o que foi relatado por eles.

- Quanto à questão 5, o que prevíamos foi alcançado, pois os alunos fizeram a variação da altura, não mais somando-as ano a ano, como nos exercícios anteriores. Duas duplas (D11, D12) fizeram a média de crescimento nos 14 anos de vida de Natalie, dividindo a variação da altura nestes 14 anos por 15, considerando os pontos dos intervalos e não o número dos mesmos. Uma outra dupla dividiu a altura aos 14 anos de vida, pela altura do nascimento, concluindo que Natalie cresceu ' '3,4 ao ano'' sem unidades, ou seja, é possível que esta dupla tenha interpretado ' 'o quanto'' Natalie cresceu, em média, nestes quatorze anos de vida por ' 'quantas vezes'', resultando nestes 3,4 (a divisão da altura aos 14 anos pela altura do nascimento: $\frac{159}{47}$), o que não foi previsto na nossa análise a priori.

- Na questão 6, o objetivo foi alcançado, uma vez que os alunos calcularam a variação da altura, ano a ano, em cada período, compararam com a média da altura nos 14 anos de vida de Natalie e responderam, corretamente, que nos dois períodos tal fato ocorreu. Todavia, duas duplas de alunos (D14, D17) concluíram que apenas tal fato ocorrera em apenas um dos períodos citados, possivelmente em decorrência de erros nos cálculos. Outras duas (D11, D12), por terem considerado a variação de tempo igual a 15, não chegaram ao resultado correto.

- Na questão 7, a maioria das duplas de alunos (17) determinaram corretamente o que foi pedido e, conforme previsto, as duplas comentavam que Natalie estava sempre crescendo, apesar de sua altura variar, às vezes mais, às vezes menos, de um ano para o outro. Apenas uma dupla de alunos (D2), ao responder negativamente, justificou que houve variações das alturas, ano a ano, pois relataram "*um ano ela cresceu mais, outro ano ela cresceu menos*", deixando de verificar se a altura ano a ano sempre aumentou, ou seja, que ela cresceu ano a ano, não importa se mais ou menos, mas sempre cresceu ano a ano. Esta confusão na interpretação entre o aumento da altura, ano a ano, e o acréscimo da altura, ano a ano, fora previsto para a próxima questão, mas observamos que já nesta questão uma dupla de alunos a antecipou.

- A questão 8 foi aquela em que houve confusão maior, em relação ao <u>aumento</u> da altura ano a ano e ao <u>acréscimo</u> da altura ano a ano. Sete duplas responderam positivamente, pois verificaram o aumento da altura ano a ano e não o acréscimo da altura ano a ano. Dessas, que responderam sim, ou seja, que o acréscimo da altura ano a ano sempre aumentou, cinco (D1, D4, D5, D7, D10), justificaram sua resposta afirmando que sempre houve variação da altura, não observando o acréscimo da altura ano a ano. As outras restantes (D3, D15) justificaram, respectivamente, que a média sempre se manteve nos 8cm e que a cada ano Natalie estava mais alta, o que caracteriza uma forte presença da verificação da variação da altura e não o acréscimo que ocorre com Natalie ano a ano .

- Na questão 9, das 18 duplas de alunos, apenas 2 duplas responderam erroneamente. Essas duplas fizeram a comparação das variações das alturas nos períodos dados, sem se preocupar com os intervalos de tempo, como havíamos previsto. Duas duplas de alunos (D9, D12) compararam os períodos de 0 a 4 anos e de 5 a 14 anos, porém concluíram o período corretamente. Conforme observamos na análise a priori, o restante das duplas de alunos que responderam corretamente, o fizeram sem especificar que fórmulas estavam usando para o cálculo, mas implicitamente estava descrita, de primeiro momento, a taxa de variação média, pois relatavam que a variação da altura de 51 cm era apenas em 4 anos, e que a outra variação da altura, apesar de ser maior, 61 cm, era em 10 anos. Nesta questão, deixou transparecer nas respostas dos alunos, a explicitação de uma linguagem informal relativa à interação com o problema, verificando assim uma situação de formulação, em que o aluno troca informação entre uma ou várias pessoas, para depois explicitar por escrito ou oralmente as ferramentas que utilizou para determinar a solução do problema.

Atividade 2

Esta atividade tinha como objetivo introduzir símbolos matemáticos para fornecer um processo de formalização da atividade seguinte.

Para tanto, foi considerada a mesma tabela de valores da atividade 1, só que foram inseridas letras e símbolos matemáticos para identificar a altura, a idade, a variação da altura, variação da idade, e a unidade pedida da razão $\frac{\Delta h}{\Delta t}$ para verificar se os alunos atribuíam algum significado para o problema e também a interdependência entre altura e idade.

Considere novamente a tabela das alturas de Natalie.

Idade **(anos)**	0 (nasc)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Altura (cm)	47	70	83	90	98	105	110	118	125	132	138	144	149	154	159

Se chamarmos de h a altura de Natalie, podemos escrever Δh para indicar a variação da altura. Do mesmo modo, se t é a idade, podemos indicar Δt como a variação de sua idade.

1) No intervalo de t = 2 anos a t = 5 anos, qual é o Ät?
2) Calcule Äh no intervalo de t = 2 anos a t = 5 anos.
3) Qual o é o valor da razão $\frac{\text{Äh}}{\text{Ät}}$ para o intervalo de t = 2 a t = 5 anos?
4) Qual é a unidade do número obtido no item anterior?

5) Calcule a razão $\frac{\text{Äh}}{\text{Ät}}$ no intervalo de 0 a 4 anos e no intervalo de 4 a 8 anos.
6) Você saberia dizer o significado da razão $\frac{\text{Äh}}{\text{Ät}}$?
7) Nos cálculos que fez, você verificou que a razão $\frac{\text{Äh}}{\text{Ät}}$, apesar de não ser constante, é sempre positiva em qualquer intervalo da tabela que se considere. Procure uma explicação para esse fato.
8) No decorrer da vida de Natalie (após 14 anos) a razão $\frac{\text{Äh}}{\text{Ät}}$ poderá ser nula para

diversos intervalos de tempo que se considere? Essa razão poderá ser negativa? Explique.

9) A tabela do problema da altura de Natalie nos mostra que a altura h depende do tempo t. A relação existente entre h e t é função? Explique.

Análise a priori

- Nas questões 1 e 2, esperávamos que os alunos não encontrassem dificuldades para o cálculo das variações da idade e da altura, por ser aqui usado o mesmo raciocínio nas primeiras questões da atividade 1, apenas acrescidos de letras e símbolos para identificar cada item pedido.

- Na questão 3, também não deveriam enfrentar dificuldades para resolver tal razão, uma vez que, na questão 5 da atividade anterior, estava implícito o cálculo da razão, só que em intervalo de tempo diferente ao desta questão, sendo possível, portanto, antecipar o que era pedido na questão seguinte, e determinar a unidade correspondente de forma correta.

- Na questão 4, mesmo que a dupla não tivesse resolvido corretamente a questão 3, esperávamos que, nesta questão, a unidade pedida, correspondente ao item anterior, não trouxesse dificuldades, uma vez que as unidades já se encontravam na tabela. Esperávamos ainda que, a determinação das unidades, auxiliasse os alunos na interpretação da atividade de uma maneira mais ampla.

- Na questão 5, fazer o cálculo da razão $\frac{\text{Ä}\,h}{\text{Ä}\,t}$ não deveria representar dificuldade, já que este cálculo fora pedido em questões anteriores.

- Na questão 6, esperávamos que os alunos respondessem qual foi a variação da altura neste intervalo, ou então, a média da altura neste intervalo. Considerávamos pouco provável que os alunos respondessem que o significado da razão $\frac{\text{Ä}\,h}{\text{Ä}\,t}$ é a variação da altura por unidade de tempo, em média, entre o intervalo de tempo dado, ou que é a "rapidez" com que cresce (o quanto cresce) Natalie no dado intervalo de tempo.

- Na questão 7, esperávamos que os alunos percebessem, apenas observando a tabela dada, que os valores fornecidos, tanto da idade quanto da altura, eram sempre crescentes e, portanto, ao calcularem as variações, tanto da altura quanto do tempo, a razão dessas variações, para qualquer intervalo que se considerassem, seria sempre positiva. Esta questão retoma a questão 8 da atividade anterior, pois caso o aluno resolvesse calcular a razão $\frac{\Delta h}{\Delta t}$ para cada unidade tempo dado (e não mais em qualquer intervalo de tempo que se considerasse), provavelmente pudessem entender o acréscimo da altura de Natalie ano a ano, ou seja, que a cada ano haveria um aumento da altura, às vezes mais, às vezes menos, mas sempre um aumento e, portanto, de razão $\frac{\Delta h}{\Delta t}$ sempre positiva.

- Na questão 8, o aluno deveria concluir que num certo momento da vida, a pessoa estaciona o seu crescimento e, por este motivo, a razão $\frac{\Delta h}{\Delta t}$ seria nula, ou seja, não teríamos variação na altura. Para que esta razão fosse negativa, isto é, que num certo momento a altura estivesse diminuindo, seria necessário falar da velhice ou de doenças como a osteoporose. Mesmo sem entrar em detalhes sobre o assunto, esperávamos que alguns alunos comentassem este fato.

- Na questão 9, esperávamos que os alunos percebessem a relação de interdependência entre as grandezas envolvidas e concluísse que esta relação é uma função.

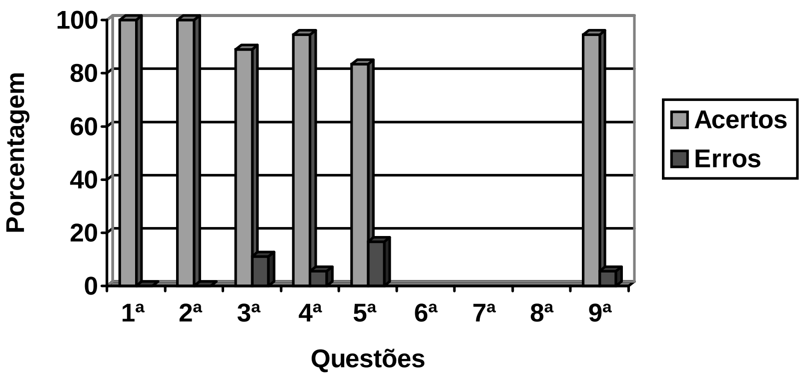
Análise a posteriori

Dados de desempenho das dezoito duplas nessa atividade.

Para as questões 6, 7 e 8 não foi realizado um levantamento dos acertos e erros, uma vez que as mesmas eram questões abertas, com diversas possibilidades de respostas consideradas corretas, das quais faremos uma análise mais adiante.

Questões	*Acertos*	*Erros*
1ª	100%	-
2ª	100%	-
3ª	88,89%	11,11%
4ª	94,44%	5,56%
5ª	83,33%	16,67%
6ª	-	-
7ª	-	-
8ª	-	-
9ª	94,44%	5,56%

Gráfico



- Nas questões 1 e 2, podemos dizer, de uma maneira geral, que todas as duplas fizeram corretamente o que foi pedido, atingindo o nosso objetivo. Apenas a dupla D14 errou nos cálculos ao determinar Δh no intervalo dado. Pode-se verificar que em algumas anotações feitas pela observadora, que os alunos, ao perceberem antes de iniciar as questões que a altura e a idade e suas respectivas variações, haviam sido formalizadas em símbolos e letras, respondiam corretamente por escrito o que se queria calcular nestas questões, ou seja, a variação da idade na 1ª questão e a variação da altura na 2ª questão. Particularmente, nessas duas questões, observou-se que as respostas dos alunos eram escritas com os símbolos fornecidos antes dos enunciados, e que procuraram justificar suas respostas com modelos teóricos mais explícitos, caracterizando, assim, uma situação de formalização.

- Na questão 3, conforme previsto, houve um número de acertos satisfatório (17 duplas), uma vez que seriam utilizadas apenas as respostas das duas questões anteriores. Somente a dupla D2 dividiu cada altura pela respectiva idade, considerando essa divisão apenas nos extremos do intervalo dado. Provavelmente, para esta dupla de alunos, haveria um mesmo significado: calcular a razão $\frac{Ä h}{Ä t}$ com o cálculo da razão $\frac{h}{t}$. Nossa expectativa de que os alunos colocariam a unidade correspondente não se confirmou, pois poucos o fizeram.
- Na questão 4, conforme previsto, as duplas, na quase totalidade, indicaram a unidade corretamente. Apenas a dupla D2, além de não colocar a unidade, determinou um valor que não fora pedido nesta questão, calculado pela razão da "soma" das alturas dos extremos do intervalo dado (da questão anterior) pela variação do tempo no mesmo intervalo, ou seja, a dupla provavelmente estava tentando calcular a razão $\frac{Ä h}{Ä t}$ nesse intervalo, não percebendo que a "soma" das alturas, calculada por eles não era a variação da altura $(Äh)$, naquele intervalo.
- O número de acertos na questão 5 foi satisfatório (15 duplas), conforme previsão da análise a priori. Não fora previsto o tipo de erro que a dupla (D2) vinha cometendo desde a questão 3 (mas com raciocínio coerente em relação às questões anteriores), a saber: a razão $\frac{h}{t}$ (divisão da altura pela respectiva idade), no intervalo. Na questão 4, porém, esta mesma dupla, não atenta ao que era pedido na questão, calculou a razão da "soma" das alturas dos extremos do intervalo dado (da questão 3), pela variação do tempo no mesmo intervalo. Provavelmente, como decorrência da estratégia utilizada, a dupla se deparou, nesta questão 5, com o seguinte problema: ‘ ’a divisão por zero’’ (pois um dos intervalos pedidos era o de 0 a 4 anos). Este fato deveria favorecer a reflexão sobre a situação, fazendo com que a dupla abandonasse a estratégia utilizada e procurasse um novo caminho. Esta, provavelmente, seria a explicação para que a dupla refizesse também as questões

anteriores. Como a dupla não se preocupou com este fato, mantendo o mesmo raciocínio desde a questão 3, então, como poderiam resolver a divisão da altura pelo de nascimento? Preferiram a divisão por zero. O resultado encontrado por eles (166) corresponde, na verdade, à somatória da divisão da altura pela idade no intervalo de 1 até 4 anos (para este cálculo, a dupla não considerou só os extremos do intervalo, como na questão 3). Analisando a resposta destes alunos, pode-se levantar a hipótese de que eles consideraram nulo o primeiro quociente (47 dividido por zero), pois explicitaram que: "*dividimos* ***todas*** *as alturas pelas idade e somamos* ***todos***[1] *os resultados*" (atividade 2, ficha 1).

- A questão 6, de uma maneira geral, foi corretamente respondida por todas as duplas, 3 delas (D4, D8, D13) responderam que a razão $\frac{\text{Ä } h}{\text{Ä } t}$ seria o "quanto" Natalie cresce ao ano, o que de certa maneira prevíamos na análise a priori, 7 duplas (D1, D6, D9, D10, D11, D15, D18) responderam que era o crescimento médio anual num intervalo de tempo, outras 6 (D2, D3, D5, D12, D16, D17) responderam que a razão era a variação da altura sobre a variação de tempo, uma dupla (D14) respondeu que era o valor médio da altura sobre o tempo referido e, por fim, uma dupla (D8) respondeu que era a razão entre a altura (h) e a idade (t). Apesar de a dupla D8 relatar qual era o significado da razão, não foram encontrados por nós, em suas respostas, erros nas questões anteriores, referentes a este mesmo assunto. Provavelmente, para esta dupla, esta razão era a variação da altura pela variação da idade, e não o que foi descrito por eles: "é a razão da altura h entre idade t de Natalie".

- Na questão 7, podemos dizer, de uma maneira geral, que as duplas corresponderam à nossa expectativa, respondendo que os valores da tabela eram crescentes. A dupla D2 não soube interpretar o que foi pedido, pois relataram: "*não, porque em algumas passagens que fizemos muitas vezes não obtemos números inteiros*". O relato desta dupla confirma que eles mantiveram as respostas anteriores e a coerência do que vinham fazendo, ou seja, a divisão da altura pela idade, mas não encontramos um significado ao "*não*" descrito por eles. Outra dupla (D3) justificou que Natalie estava em fase de crescimento e, por último, a dupla D9 relatou que estava calculando o crescimento médio anual.

[1] Enfatizado por nós

- Na questão 8, como fora previsto na análise a priori, 15 duplas responderam corretamente que a razão $\frac{\Delta h}{\Delta t}$ poderia ser nula, pois, num certo momento de sua vida, Natalie estacionou o seu crescimento e, portanto, a variação da altura era nula. Muitas dessas duplas afirmaram que ‘*a altura jamais irá decrescer*’’, e, conseqüentemente, “*a razão* $\frac{\Delta h}{\Delta t}$ *nunca será negativa*”. Prevíamos que algumas duplas pudessem declarar que a razão poderia ser negativa, pois a altura poderia diminuir e, com isso, a variação da altura ser negativa, fato que seria motivado pela velhice ou por doenças como a osteoporose, mas isto não ocorreu. Este fato veio à tona no momento da correção da atividade, em que, na discussão com as duplas, algumas fizeram comentários a respeito, dizendo que resolveram não colocar no papel, por imaginar que estaria fora da proposta do exercício.

- Na questão 9, grande parcela das duplas correspondeu à nossa expectativa e percebeu que a relação entre as grandezas envolvidas era uma função. Apenas 3 duplas (D4; D8; D15) disseram que a relação existente entre h e t não podia ser considerada uma função. D4 justificou que não é função, pois "*a variação da altura aumenta e diminui alternadamente*". Provavelmente, para esta dupla, um gráfico tipo "zigue-zague", que representa alternância da altura, não é função. D8 relatou: "*a altura não depende da idade até certa parte, pois se a altura em uma certa parte permanece constante, a idade continua aumentando, e a idade aumentando, a altura aumentará até uma faixa de idade*", evidenciando que, para esta dupla, a reta paralela ao eixo das abscissas (no nosso caso, a idade) não é função. Já para a dupla D15, a relação entre h e t não poderia ser uma função, pois: "*não existem variações exatas à altura a cada ano que passa*". A afirmação da não existência dessas "variações exatas" advinha provavelmente dos resultados obtidos em questões anteriores desta atividade, o que não justifica o fato de essa relação não ser função. Dos que relataram ser função, a dupla D10 justificou: "*poderíamos montar uma função de h dependente de t, ou seja, h(t)*", e continuou: "*este quadro pode ser admitido até uma certa idade, até a estabilização do crescimento*", isto é, raciocinou da mesma forma que a dupla D8, para a qual o gráfico de uma reta constante não é função. A dupla D9 relatou: "*é função, pois f(h) = t conforme observado na tabela*"; a questão, porém, descreve que a altura h depende do tempo t.

Atividade 3

Esta atividade tinha por objetivo dar significado à razão $\frac{\text{Ä}\,h}{\text{Ä}\,t}$ e levar os alunos a perceber que esta razão, chamada de taxa de variação média, pode fornecer informações sobre a ‘ ’rapidez’’ (o quanto cresce ou decresce), com que a função varia num intervalo.

Nesta atividade, queríamos resgatar o que fora feito nas duas primeiras destacando o ponto que norteava nossa pesquisa: que a razão $\frac{\text{Ä}\,h}{\text{Ä}\,t}$ é chamada de taxa de variação média da função. Esta atividade encerra a ficha 1, em que foi pedida praticamente a mesma coisa que nas outras atividades, só que agora com conceitos e símbolos matemáticos definidos, para que o aluno pudesse interpretar o resultado encontrado.

Por meio da leitura das alturas de Natalie mostradas na tabela, pelos cálculos feitos e pelas discussões das duplas no desenvolvimento das atividades anteriores, podemos tirar algumas conclusões antes de aplicarmos esta atividade. São elas:

- a altura de Natalie sempre cresceu com o decorrer do tempo;
- o aumento da altura de Natalie, ano a ano, não foi constante;
- Natalie cresceu mais rapidamente no início do período observado do que no fim dele;
- a razão $\frac{\text{Ä}h}{\text{Ä}t}$ no período observado é sempre positiva, pois Natalie sempre cresceu;
- a relação de interdependência entre as grandezas envolvidas é uma função;

- a razão $\frac{\Delta h}{\Delta t}$ pode dar informações da "rapidez" com que varia a altura em relação ao tempo (o quanto cresce ou decresce);

- $\frac{\Delta h}{\Delta t}$ é denominada taxa de variação média da função.

a) Calcule a taxa de variação média da altura de Natalie no intervalo t = 1 a t = 3 anos. Interprete o resultado obtido.
b) Em qual intervalo Natalie cresceu mais depressa: de t = 0 a t = 3 anos ou de t = 3 a t = 9 anos?
c) A altura de Natalie até os 14 anos é sempre crescente?
d) Represente a relação de interdependência entre h e t no plano cartesiano.

Análise a priori

- No item ‘ ’a’’, esperávamos, com o significado da razão $\frac{\Delta h}{\Delta t}$, fornecido antes, que os alunos respondessem às questões, fizessem os cálculos corretamente e interpretassem o resultado encontrado.

- No item ‘ ’b’’, os alunos poderiam chegar a uma conclusão correta e idêntica àquela das atividades anteriores. Esperávamos também que os alunos evitassem comparar apenas os intervalos dados pelas variações das alturas, uma vez que, coincidentemente, a variação da altura no intervalo de 0 a 3 anos é maior que a outra variação da altura do outro intervalo dado, gerando, assim, a mesma resposta (correta) para quem utiliza a razão $\frac{\Delta h}{\Delta t}$.

- No item ‘ ’c’’ esperávamos que os alunos respondessem, corretamente, que a altura é sempre crescente até os 14 anos de vida de Natalie, e que também não confundissem o acréscimo da altura, visto que esse termo criou confusão no entendimento da questão 8 da primeira atividade.

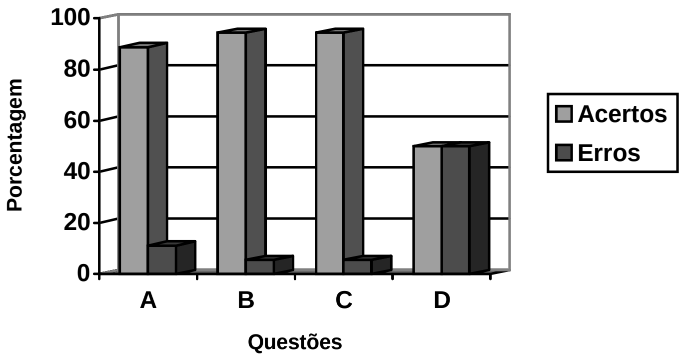
- No item ‘ ’d’’ as respostas poderiam aparecer de duas maneiras: unindo os pontos ou não, e ao colocarem estes pontos nos eixos coordenados, as duplas poderiam fornecer uma reta para sua representação gráfica ao invés de representarem uma curva com crescimento "suave". Esperávamos também que a falta de critérios para colocar os pontos nos eixos coordenados poderia induzi-los a representar o gráfico desta relação como sendo reta.

Análise a posteriori

Dados de desempenho das dezoito duplas nessa atividade:

Questões	***Acertos***	***Erros***
A	88,89%	11,11%
B	94,44%	5,56%
C	94,44%	5,56%
D	50%	50%

Gráfico



- No item ‘ ’a’’, a dupla (D2) fez apenas o cálculo da variação da idade, deixando de calcular a taxa de variação média, o que não fora previsto na nossa análise a priori. No entanto, o pesquisador havia enfatizado ser necessário que as duplas, antes de resolverem os exercícios, fizessem uma leitura do texto que antecedia as questões, pois ali estavam as conclusões das duas primeiras atividades, e a formalização da taxa de variação média. Pelo resultado deste item, podemos considerar que as duplas fizeram a leitura antes de partir para a realização das atividades e souberam interpretar o resultado encontrado, confirmando nossa previsão.
- No item b, confirmou-se aquilo que havíamos previsto, que os alunos chegariam a uma conclusão satisfatória. Apenas a dupla D2 não respondeu corretamente, pois, ao determinar o intervalo em que Natalie cresceu mais depressa, a dupla só comparou a variação da altura e, coincidentemente, a variação da altura de Natalie

no primeiro período é maior que no segundo, o que fez com que a dupla respondesse acertadamente com relação ao primeiro período. Apesar de a resposta ser a correta, a justificativa desta dupla é: *‘’porque somamos os três primeiros anos. Teve uma variação maior do que 3 a 9’’*, que mostra uma falha, pois deveriam verificar, para cada intervalo de tempo dado, a razão entre a variação da altura pelo respectivo intervalo e comparar as razões encontradas para saber qual o intervalo de tempo em que Natalie cresceu mais depressa.

- No item c, como previsto, a maioria das duplas (17) respondeu corretamente que a altura de Natalie até os 14 anos é sempre crescente, confirmando nossa análise a priori. Apenas a dupla D8 não respondeu corretamente, pois, ao invés de verificar se a altura de Natalie é crescente até os 14 anos, os alunos fizeram a análise observando o acréscimo da altura, uma vez que justificaram dessa forma: "*porque em alguns anos seu crescimento foi menor que nos anteriores*", fato este que não esperávamos na análise a priori.

- No item d, 7 duplas (D2; D3; D6; D7; D13; D17; D18) uniram os pontos formando uma reta, pois não tiveram um critério de colocar os pontos nos eixos coordenados, confirmando o que havíamos previsto na análise a priori. As duplas D2, D3 e D7 trocaram os valores dos eixos, identificando, dessa maneira, que t (idade) depende de h (altura), e não o contrário. Uma dupla (D8) não foi capaz de fazer o gráfico, pois dava impressão de falta de coordenação ao traçar a curva, além de colocar nos eixos coordenados somente alguns valores da tabela. As duplas D9 e D17 colocaram os pontos 0 (nascimento) e 47 (altura) num mesmo lugar, na origem do sistema. Provavelmente consideraram que esse par de pontos deveria permanecer junto na representação no plano cartesiano, uma vez que esses pontos se encontravam distribuídos dessa forma na tabela. As duplas restantes (10), conforme previsto, deram a representação correta, sendo que 8 duplas uniram os pontos e 2 duplas não (uniram os pontos).

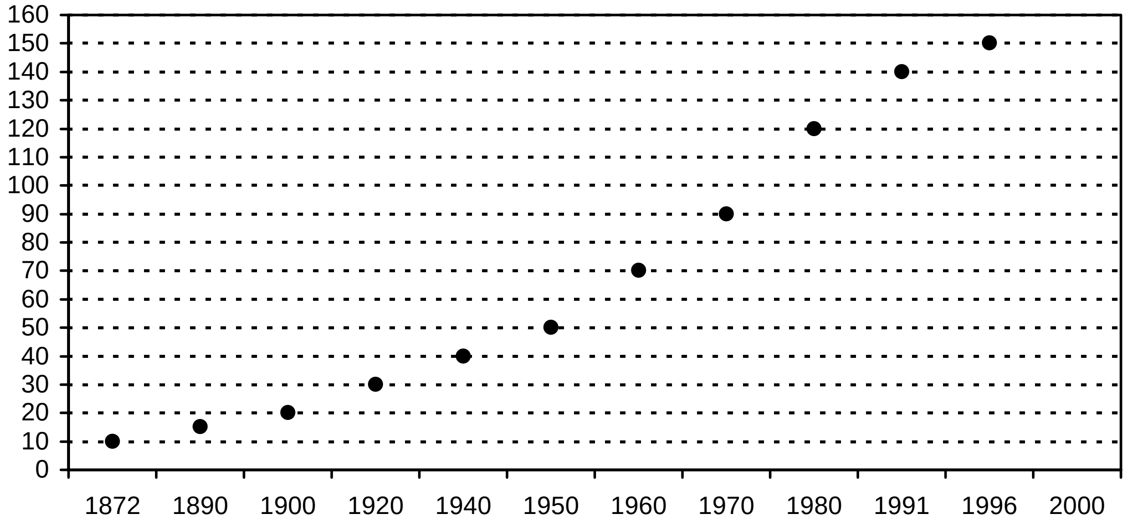
Essa ficha 1, com as 3 atividades, mostrou uma evolução das duplas ao calcular a variação das alturas em diversos intervalos de tempo e, mais especificamente, o cálculo e interpretação da taxa de variação média. Consideramos o resultado final bastante significativo, pois o nosso objetivo foi alcançado. Constatamos que os alunos procuravam respostas mais elaboradas após as discussões que se faziam ao término de cada atividade, e que as respostas relatadas nas análises a posteriori eram justificadas de forma espontânea, sem que os alunos explicitassem de maneira mais elaborada a solução do problema, caracterizando, ora uma situação de ação, ora uma situação de formalização.

Ficha 2

Essa ficha constava de uma única atividade com 9 questões e, com auxílio de outro registro de representação, no caso, um gráfico discreto, tinha por objetivo fazer uso da taxa de variação média e ler as informações contidas no gráfico.

Nela estávamos enfatizando a taxa de variação média para que os alunos tivessem a possibilidade de calcular, por exemplo, projeção da população em um determinado ano, quando fosse fornecido aos alunos tal taxa num intervalo específico.

O gráfico abaixo mostra o número de habitantes no Brasil, em valores aproximados, utilizando os resultados dos censos realizados:



1) qual era aproximadamente a população do Brasil em 1872? E em 1970?

2) qual foi a variação da população no Brasil nesses quase 100 anos?

3) qual foi a taxa de variação média da população brasileira de 1872 a 1996? Dê unidades com sua resposta e interprete o significado dessa taxa.

4) em qual intervalo o número de habitantes no Brasil cresceu mais rapidamente: de 1872 a 1920 ou de 1920 a 1970? Justifique sua resposta.

5) em qual intervalo de dois censos consecutivos ocorreu a maior taxa de variação média da população brasileira?

6) se no intervalo de 1996 a 2000 a taxa de variação média do número de habitantes no Brasil fosse 2,5 milhões/ano, qual deveria ser o total de habitantes em 2000?

7) se o número de habitantes aumentasse de 1996 a 2000 na mesma razão da maior taxa média que houve no Brasil entre dois censos consecutivos, qual deveria ser o número de habitantes em 2000?

8) qual é sua estimativa para a população do Brasil no ano 2000?

9) construa uma tabela com os dados do gráfico.

Análise a priori

- Na questão 1, esperávamos que os alunos determinassem os valores pedidos apenas observando o gráfico.
- Na questão 2, esperávamos que os alunos calculassem a variação da população, no intervalo dado da questão anterior, buscando esses valores pela leitura do gráfico.
- Na questão 3, esperávamos que os alunos fizessem uso correto da taxa de variação média, mas poderiam ocorrer erros nas unidades, como, por exemplo, que a população crescerá, em média, ‘ ’tanto’’ por ‘ ’década’’ (apesar de nem todos os censos realizados estarem por décadas).
- Na questão 4, esperávamos que os alunos percebessem que o crescimento ocorre no segundo intervalo de tempo, diferentemente do que acontecia nas atividades da ficha 1, em que o primeiro intervalo de tempo era a resposta em comparação com um outro intervalo de tempo, mas acreditávamos que, em geral, não encontrariam dificuldades em interpretá-las.

- Na questão 5, esperávamos que o cálculo da taxa de variação média para cada intervalo de tempo consecutivo não traria dificuldades na determinação desses valores, além de favorecer, num primeiro momento, a leitura gráfica pelo aluno, ou seja, perceberem que a população a cada intervalo de censo consecutivo tinha uma determinada taxa média de crescimento populacional.

- Na questão 6, esperávamos que os alunos utilizassem a expressão do cálculo da taxa de variação média para determinar o número de habitantes em 2000. A questão poderia trazer dificuldades no momento em que o aluno necessitasse do cálculo da variação da população no intervalo de tempo dado, pois nesta variação que deveria encontrar a resposta para a questão, ou seja, a variação da população entre 1996 e 2000 deveria ser escrita da seguinte maneira: a população de 2000, representada por uma incógnita (por exemplo, x) "menos" a população de 1996, fornecida pelo gráfico. É provável também que os alunos interpretem essa questão, multiplicando o valor da taxa fornecida por 4 (pois é o período de 1996 até 2000, e também porque fora especificado que era a média de crescimento por ano), e somado com a população de 1996 para determinar a população de 2000.

- Na questão 7, com as informações da questão 5, seria possível que os alunos utilizassem o desenvolvimento da questão anterior e determinassem, desta vez corretamente, com o auxílio da taxa de variação média, o que fora pedido. Outra possibilidade seria multiplicar por 4 (variação de tempo entre 1996 e 2000) a taxa de variação média, encontrada na questão 5, e somar com a população de 1996, para determinar a população de 2000.

- Na questão 8, esperávamos diversas respostas, pois os alunos poderiam utilizar a taxa de variação média descrita nas questões 6 ou 7, multiplicar por 4 (variação entre 1996 e 2000), e adicionar este resultado à população de 1996, para determinar a população de 2000, ou então fazer um cálculo da taxa de variação média de 1872 até 1996 (taxa esta calculada na questão 3) e, com o resultado desta taxa, projetar a população de 2000, procedendo da mesma forma como fora descrito na questão 6. Poderia ocorrer também que alguns alunos fizessem o cálculo da taxa de variação média da população dos 2, 3 ou 4 últimos censos, até

1996, e, com o valor da taxa encontrada, colocar em pratica o que fora descrito anteriormente, ou seja, o uso da razão $\frac{\Delta P}{\Delta t}$ (taxa de variação média), ou multiplicar

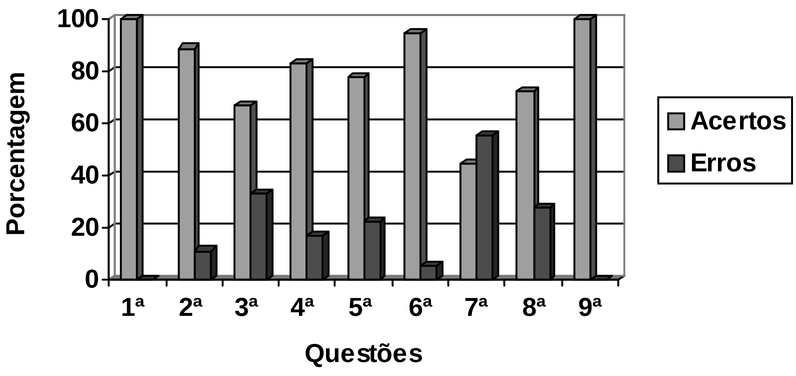
- por 4 (variação de 1996 até 2000) a taxa encontrada e adicionar com a população de 1996 para projetar a população de 2000.
- Na questão 9, esperávamos que a leitura dos valores fornecidos no gráfico não viesse a representar dificuldades para a elaboração da tabela.

Análise a posteriori

Dados de desempenho das dezoito duplas nesta atividade:

Questões	***Acertos***	***Erros***
1ª	100%	-
2ª	88,89%	11,11%
3ª	66,67%	33,33%
4ª	83,33%	16,67%
5ª	77,78%	22,22%
6ª	94,44%	5,56%
7ª	44,44%	55,56%
8ª	72,22%	27,78%
9ª	100%	-

Gráfico



- Todas as duplas responderam corretamente à questão 1, pela simples observação do gráfico, confirmando nosso prognóstico.

- Das 6 duplas (D2, D3, D4, D8, D17, D18) que não responderam corretamente à questão 2, 3 delas (D3, D4, D18) não interpretaram a questão conforme fora pedido, pois, para o cálculo da variação da população no período de 100 anos, não perceberam que era entre 1872 e 1970, e deram como resposta a variação da população até 1996, fato não previsto em nossa análise a priori. A dupla D2 dividiu o tempo pela população (a razão do tempo pela população), raciocínio coerente, porém errado, decorrente das atividades anteriores. A dupla D17, não atenta ao problema, pois se tratava da população de um país, deu como resposta "*10 habitantes por ano*", e a dupla D8 respondeu "quantas vezes" a população cresceu no período, e relataram: "*a variação da população é de 9 vezes mais*", o que não fora previsto na nossa análise a priori.

- O que foi previsto na nossa análise a priori para a questão 3 não ocorreu, no que se referia à unidade a ser determinada, como também não previamos que as duplas D7 e D16 observassem a variação da população no período dado, acreditando ser esta a taxa de variação média, pois relataram: "*a taxa de variação média é de 140 milhões em 124 anos*". Outras duas dupla (D3, D12), ao calcularem a taxa de variação média, dividiram a variação da população do período dado pela quantidade de censos do mesmo período (11 censos realizados). A dupla D6, ao calcular a somatória da taxa de variação média entre cada censo consecutivo até 1996, dividiu este resultado pela variação do tempo entre 1872 e 1996, sendo que deveria dividir pela quantidade de censos realizados no mesmo período (11 no total). A dupla D2 escreveu: "*não conseguimos responder*", não sendo, portanto, possível analisar a dificuldade. O restante das duplas correspondeu à nossa expectativa.

- Na questão 4, nosso objetivo foi alcançado, pois mais de 80% das duplas responderam corretamente ao que foi pedido. Embora de maneira incorreta, ao dividir a variação da população pela quantidade de censos no período dado, a dupla D12 respondeu de forma coerente com a questão 3. A dupla D2, que considerou a média de crescimento da população nos dois períodos incorretamente (5 milhões para o primeiro período e 10 milhões para o segundo período), e não especificou de que maneira encontrou tal valor, provavelmente o fez com base em uma leitura direta do gráfico do crescimento da população entre cada censo dos períodos dados. Apesar disso, essas duplas concluíram corretamente o período em que a população cresceu mais rapidamente (o quanto cresceu ao ano).

- Na questão 5, a maioria (mais de 70%) respondeu corretamente ao que fora pedido. As duplas D3 e D11 não responderam qual era o intervalo de tempo de dois censos consecutivos em que ocorreu a maior taxa (70 - 80). Consideraram dois intervalos de tempos consecutivos (60 - 70 e 70 - 80), respondendo que ocorrera de 60 - 80, o que provavelmente levou essas duplas a interpretarem o enunciado erroneamente, considerando 2 intervalos de tempo consecutivos, e não 2 censos consecutivos. A dupla D8 justificou, usando termos sem significado para a questão (x‘ e y + x‘ para os dois censos consecutivos), e sem especificar quais eram esses censos.

- Na questão 6, não ocorreu o previsto, pois a quase totalidade das duplas encontrou a resposta corretamente, fazendo uso também da taxa de variação média da população no intervalo dado. Entretanto, vale ressaltar que a dupla D3, ao tentar responder a questão, descreveu que a razão entre x (total de habitantes) e 150 (população em 1996) era igual a 2,5 milhões, chegando ao resultado de x = 375 milhões, não atenta ao "salto" que teria sofrido a população nesses 4 anos (de 150 milhões, em 1996, para 375 milhões, em 2000).

- Na questão 7, também não ocorreu o que previamos, visto que 8 duplas responderam corretamente ao pedido. As duplas que não utilizaram a taxa de variação média (D2; D6; D9; D12), fizeram cálculos para projetar a população do ano 2000, usando a maior variação da população do censo (30 milhões de habitantes de um censo para o seguinte), resultado este considerado por eles como sendo variação anual. Multiplicaram este valor por 4 (que é a variação do período de 1996 a 2000), e o adicionaram ao da população de 1996, determinando a de 2000, não percebendo que a população teria saltado para um número muito elevado com esta interpretação (270 milhões). As duplas D1, D7, D16 e D17 consideraram a variação da população entre 1970 - 1980 e adicionaram este valor ao da população de 1996 para determinar a de 2000, ou seja, consideraram esta variação como sendo a variação média do período (diferentemente das outras duplas citadas antes, que consideraram esta variação como sendo anual). A dupla

D3 considerou a taxa de variação média com sendo a razão da população de 1980 com a de 1960, ou seja, dividiu a população de 1980 pela de 1960.

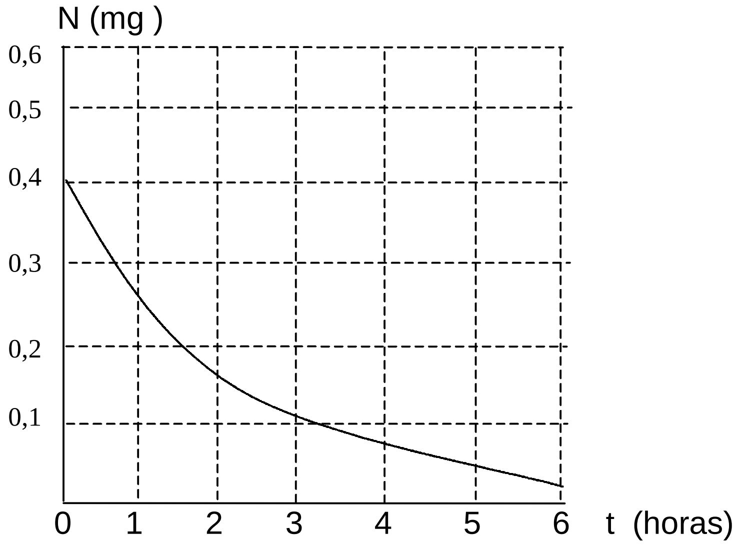
- Na questão 8, confirmou-se o que fora previsto na análise a priori, porém a dupla D17, ao projetar a população de 2000, adicionou a população de 1996, à variação da população entre os censos de 1970 a 1980. As duplas D9 e D12 utilizaram uma taxa de variação média calculada indevidamente, pois, conforme a dupla D9 relatou: "*a taxa de variação média é de 12,72 milhões de habitantes, porque somando as diferenças em 1872 a 1996 e dividindo por 10 é igual a 12,72 milhões*". Multiplicaram esse resultado por 4 (variação de 1996 a 2000) e somaram com a população de 1996 para estimar a população de 2000. Essa divisão por 10, que a dupla D9 relatou, era na verdade a quantidade de censos de 1872 a 1996 que corresponderia a 11. O resultado encontrado por eles (12,72) era a razão entre 140 e 11 (variação da população pelo número de censos do período), fato este repetido pela dupla D12 na questão 3. A dupla D3 relatou: "*baseado no gráfico e na questão 6, acreditamos que a população será de 375 milhões, pois os dados obtidos nos dão total certeza nesta questão*". Provavelmente, essa dupla acredita que a variação média calculada por eles na questão 6 é a correta.
- Na questão 9, não foram encontradas dificuldades entre as duplas para construir a tabela.

Ficha 3

Esta ficha, que também constava de uma única atividade com 9 questões, tinha por objetivo o uso da taxa de variação média com um novo tipo de registro, um gráfico cartesiano.

Queríamos trabalhar, além da interpretação gráfica, com uma taxa de variação negativa, o que ocorre quando o gráfico apresentado na atividade intercepta o eixo das abscissas e o das ordenadas.

O gráfico, a seguir, mostra a quantidade de nicotina em miligramas (mg) na corrente sangüínea de uma pessoa, como função do tempo t, em horas (h), depois que uma pessoa acabou de fumar.



1) Esse gráfico revela que o teor da nicotina N é uma função do tempo t, ou seja, N = f(t). Comente sobre esta relação.
2) A função é crescente ou decrescente? Explique.
3) Avalie o teor da nicotina no instante t =3h, ou seja, aproxime um valor para f(3).
4) Determine a variação do teor da nicotina no intervalo de t = 1h e t = 4h, ou seja, o ΔN nesse intervalo.
5) Quantas horas depois de ter fumado um cigarro, o teor da nicotina em uma pessoa passa a ser 0,08mg?
6) Qual é o significado do ponto em que a curva intercepta o eixo das ordenadas?
7) Se o gráfico interceptasse o eixo das abscissas, qual seria o significado desse ponto?
8) Em Qual intervalo é mais rápida a diminuição da nicotina de t = 0 a t = 2h ou de t = 3h a t = 6h?
9) Determine a taxa de variação média da nicotina no intervalo de 0 a 6 horas. Dê as

unidades e interprete o resultado.

Análise a priori

- Na questão 1, esperávamos que os alunos comentassem as grandezas envolvidas e percebessem que o teor de nicotina na corrente sangüínea diminui à medida que o tempo avança.
- Na questão 2, acreditávamos que os alunos não encontrariam dificuldades em determinar o decrescimento da função, pois imaginávamos que a curva representada no plano cartesiano favorecesse esta conclusão.
- Com a questão 3 esperávamos que os alunos percebessem que a imagem da função num determinado ponto tem significado dentro de um contexto, neste caso, a imagem da função em $t = 3$ é aproximadamente 0,13 mg ($f(3) = 0,13$), ou seja, passadas 3 horas, depois que a pessoa acabou de fumar, o teor de nicotina na corrente sangüínea desta pessoa é aproximadamente 0,13 mg.
- Na questão 4, os alunos estariam familiarizados com o termo variação e não deveriam ter dificuldades em resolvê-lo.
- Na questão 5, esperávamos que os alunos determinariam a resposta correta, observando o gráfico.
- Na questão 6, as respostas dos alunos poderiam não ser satisfatórias, no que se refere ao fato de que, quando um ponto intercepta um dos eixos, o seu par tem valor nulo. Neste problema contextualizado, provavelmente o aluno poderia dar um significado para este ponto.
- Na questão 7, deveria ocorrer o mesmo que na questão 6.
- Na questão 8, esperávamos que, com o desenvolvimento das fichas anteriores em que se questionava a "rapidez" com que uma função cresce (o quanto cresce), num determinado intervalo, os alunos interpretassem corretamente o que estava sendo pedido e percebessem que a taxa de variação média, neste caso, é negativa.

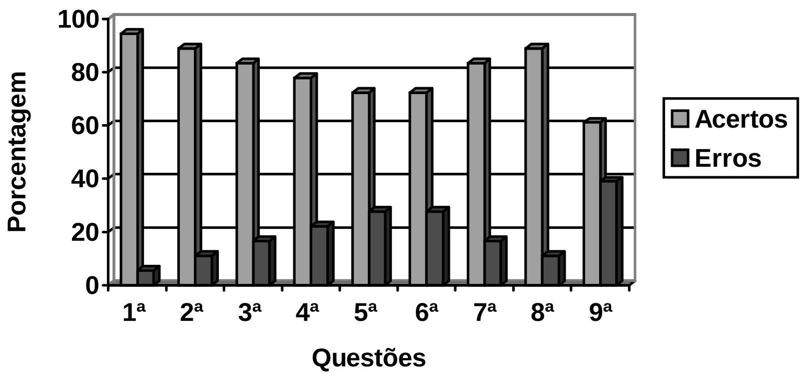
- Na questão 9, acreditávamos que, neste estágio de desenvolvimento, os alunos determinariam corretamente o valor pedido e a unidade correspondente, e atentos ao sinal da taxa de variação média, verificassem que a quantidade de nicotina no sangue "diminui", em média, por unidade de hora.

Análise a posteriori

Dados de desempenho das dezoito duplas nesta atividade:

Questões	*Acertos*	*Erros*
1ª	94,44%	5,56%
2ª	88,89%	11,11%
3ª	83,33%	16,67%
4ª	77,78%	22,22%
5ª	72,22%	27,78%
6ª	72,22%	27,78%
7ª	83,33%	16,67%
8ª	88,89%	11,11%
9ª	61,11%	38,89%

Gráfico



- Na questão 1, a quase totalidade das duplas não teve dificuldades ao comentar que "a quantidade de nicotina é determinada em função do tempo", ou que, "para cada valor de N, temos um valor de t ". Observa-se, pelas respostas dadas pelas duplas, que N estava em função do tempo t, ou seja, N = f(t). A dupla D17 não soube interpretar o que fora pedido para esta questão, pois descreveu: N = f(t) em seguida 0,4 = f(6) e daí f = $\frac{6}{0,4}$, o que deixa transparecer que consideraram o último valor de t, dado no gráfico, e o penúltimo valor dado para N, pois a curva intercepta este valor de N. Estes valores não têm significado algum para o que pedíamos. Também interpretaram que f(t) é o mesmo que f "vezes" t.

- Conforme previsto, na questão 2, as duplas não encontraram dificuldades em observar que o gráfico da função era decrescente. Apenas as duplas D2 e D3 concluíram, erroneamente, que a função era crescente, pois, para D2, o "*aumento das horas aumenta a quantidade de nicotina*", e para D3, "*o teor de nicotina sofre sempre um aumento com relação às horas....*". Provavelmente, essas duplas fizeram a leitura observando os valores de um dos eixos, deixando de observar o outro eixo.

- Na questão 3, o que prevíamos foi alcançado, pois 15 duplas responderam corretamente, dando um valor aproximado para f(3) ($0,1< f(3) < 0,2$). É importante destacar, no entanto, que a dupla D5 interpretou f(t) como sendo ‘ ‘ f vezes t’’, ou seja, multiplicou f por t. Uma outra dupla (D10) fez o seguinte cálculo: f(3) = 0,4 daí f = $\frac{0,4}{3}$, uma interpretação equivalente à da dupla D5, ou seja, que f(3) é o mesmo que ‘ ‘ f vezes 3 ’’, fato este já ocorrido também com a dupla D17 na questão 1.

- Na questão 4, de uma maneira geral, o resultado foi satisfatório, mas 4 duplas (D2; D5; D8; D17) determinaram as imagens, aproximadas, dos pontos dados e não calcularam ΔN. Vale ressaltar que, nesta questão (apesar de as duplas terem respondido corretamente que a função era decrescente na questão 2), das 14 duplas que acertaram o cálculo da variação do teor de nicotina, apenas 3 responderam que esta variação era negativa. Percebeu-se que os alunos não estavam acostumados a fazer cálculos de uma variação que resultasse em valor negativo, pois ao fazer a variação, consideravam o valor "maior" menos o valor "menor", e não o valor "final" menos o valor "inicial".

- Na questão 5, das 18 duplas envolvidas, 13 acertaram, fazendo a observação pelo gráfico. Duas duplas (D2, D3) não souberam interpretar o que fora pedido, pois D2 dividiu 0,08 por 6, o que mostra a divisão do teor de nicotina pelas 6 horas dadas no gráfico, ou seja, o enunciado não foi compreendido por essa dupla. A dupla D3 raciocinou que, se em 6 horas ele "consumiu" 0,4, então em 1 hora consumirá 0,1. Como 0,08 é menor que 0,1, concluiu que o indivíduo fumou, em poucos minutos, a quantidade dada. Essa dupla provavelmente confundiu consumo de cigarro com o teor de nicotina no sangue, e mostrou falha na leitura do enunciado. Outras duas duplas (D8 e D12) não leram corretamente o valor no gráfico, pois relataram mais de 6 horas, e a dupla D10 tornou a repetir o mesmo raciocínio da questão 3, ou seja, interpretou f(t) como f ‘ ‘ vezes’’ t.

- Na questão 6, nossa expectativa foi confirmada, pois 13 duplas souberam interpretar o significado do ponto no eixo das ordenadas, enquanto 5 duplas (D2; D3; D8; D15; D18) deram interpretações incorretas ao ponto. D2 afirmou que "*é o encontro das coordenadas de x e y*". D3, "*que o teor de nicotina está aumentando gradativamente*". D8, "*que a quantidade de nicotina é zero*". D15, "*a quantidade de nicotina começou antes de terminar de fumar*". D18, "*é o ponto que a curva corta o eixo dos y*". Essas duplas tentaram dar um significado para o ponto, porém não perceberam o que estava descrito no enunciado, que o gráfico mostra a quantidade de nicotina a partir do momento que uma pessoa acabou de fumar.

- Na questão 7, ocorreu como fora previsto na análise a priori, 15 duplas não tiveram dificuldades em dar significado ao ponto. As duplas D2; D3; D8 não souberam dar-lhe um significado, pois D2 relatou "*não entendemos*", D3, "*era impossível fazer os cálculos*" e D8, "*quantidade de t = 0*".

- Na questão 8, confirmou-se o previsto: 16 duplas acertaram, sendo que dessas, 6 (D2, D8, D9, D10, D12, D14) se basearam na observação do gráfico, o que significa dizer que observaram o comportamento da curva para chegar ao resultado correto. Os alunos demonstram não perceber que, quando a função é decrescente, a variação da função deve ter um valor negativo, pois 2 duplas (D15, D18), ao calcularem a variação da nicotina, observaram que o valor encontrado era um número negativo. Duas duplas não obtiveram sucesso, pois fizeram a leitura do gráfico, não observando o quanto a curva decresce no intervalo dado, e, deixando de calcular, portanto, a taxa de variação média nos intervalos dados.

- Na questão 9, não se confirmou o previsto, uma vez que 6 duplas não utilizaram a taxa de variação média corretamente. Das 12 duplas que acertaram, metade não observou o sinal e, por isso, na interpretação do resultado, deixaram de verificar que o teor de nicotina ‘ ‘ diminui’’, em média, 0,06mg/h

Ficha 4

Esta ficha, que era formada por 3 atividades e na qual se utilizava um outro registro de representação, no caso, registros algébricos, tinha por objetivo dar um destaque importante para taxa de variação média, bem como uma interpretação para seus valores.

Atividade 1

Nesta atividade, tínhamos por objetivo possibilitar a contribuição da taxa de variação média para a interpretação de problemas contextualizados como já estávamos fazendo desde a primeira atividade.

Nela, íamos trabalhar com outro enfoque, a imagem da função, o valor da variável, quando a função assume um determinado número, o nome que é dado na Física à taxa de variação média, neste tipo de problema.

A posição “s” de um corpo que se movimenta sobre uma trajetória retilínea em relação à origem pode ser determinada em dado instante “t”, por meio da expressão $s(t) = t^2 + 1$. As unidades “s” e “t” são dadas, respectivamente, em metros e em segundos.

1) Determine o valor de s(4) e interprete seu significado neste contexto.
2) Determine a posição do corpo no instante t = 3s.
3) Determine a variação da posição do corpo nos 3 primeiros segundos e a variação no intervalo de t = 3s a t = 5s.
4) Determine o instante em que o móvel passa pela posição s = 26m.
5) Determine a taxa de variação média da posição do móvel em relação ao tempo no

intervalo de t = 0 a t = 3s. Dê as unidades de sua resposta e interprete o resultado.

6) A taxa de variação média, nesse caso, tem um nome especial? Qual é esse nome?

7) Esboçar o gráfico de s em função de t.

8) A função s(t) é crescente? Explique.

9) Em qual intervalo o corpo se desloca mais depressa, de t = 0 a t = 3s ou de t = 3s a t = 6s? Explique sua resposta.

10) Em qual intervalo o corpo se desloca mais depressa, de t = 1s a t = 3s ou de t = 3s a t = 4s? Explique sua resposta.

Análise a priori

- Na questão 1, o valor a ser encontrado seria de fácil resolução, mas sua interpretação poderia ocasionar respostas dentro de conceitos matemáticos, deixando de lado a interpretação no contexto do problema, ou seja, os alunos poderiam responder que a imagem do ponto 4 é 17 (s(4) = 17), em vez de responderem que, no instante t = 4s, o corpo se encontra a 17 metros em relação ao solo.
- Na questão 2, esperávamos que os alunos percebessem ser possível responder à questão da mesma forma que deveriam responder (corretamente) à questão anterior, fazendo uma "ponte" entre as duas questões.
- Na questão 3, esperávamos que os alunos percebessem que podemos pedir a variação de s sobre t, mesmo não havendo tabelas ou representações gráficas, ou seja, calcular a variação entre duas grandezas, fornecendo a lei de correspondência dessas grandezas.

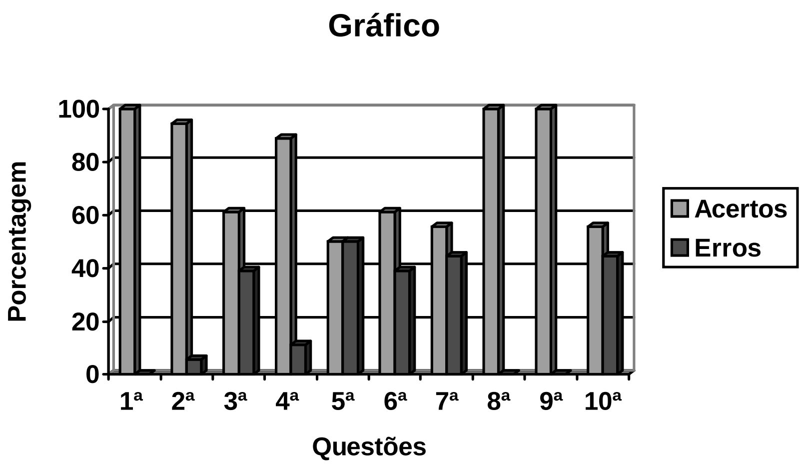
- Na questão 4, os alunos deveriam dar, provavelmente, como resposta também o valor t = - 4, e deixar de colocar a unidade correspondente.
- Na questão 5, esperávamos que o valor da taxa de variação média fosse determinado corretamente, assim como a unidade e interpretação do resultado encontrado, evitando os erros cometidos em atividades anteriores no cálculo da referida taxa.
- Na questão 6, tendo em vista os termos utilizados, o aluno poderia relacionar corretamente o problema com a Física, ou fazer alguma menção a ela, ou então relaciona-lo com algum aspecto da matemática.
- Na questão 7, alguns alunos provavelmente colocariam como representação gráfica uma reta, uma vez que era possível que os alunos não posicionassem adequadamente os valores nos eixos coordenados.
- Mesmo considerando que alguns alunos pudessem não responder corretamente à questão anterior, na questão 8, eles deveriam perceber que a função é crescente, visto que as unidades fornecidas deveriam ser para valores positivos, e que a função s(t) dada significava "espaço em função do tempo".
- Na questão 9, esperávamos que os alunos justificassem corretamente a questão, enfatizando o uso da taxa de variação média.
- Na questão 10, deveria ocorrer o mesmo em relação à questão anterior.

Análise a posteriori

Dados de desempenho das dezoito duplas nesta atividade:

Questões	***Acertos***	***Erros***
1ª	100%	-
2ª	94,44%	5,56%
3ª	61,11%	38,89%
4ª	88,89%	11,11%

5ª	50%	50%
6ª	61,11%	38,89%
7ª	55,56%	44,44%
8ª	100%	-
9ª	100%	-
10ª	55,56%	44,44%



- Na questão 1, as duplas não tiveram dificuldades de encontrar o resultado, mas 8 delas (D2; D3; D5; D8; D9; D12; D14; D17) deixaram de dar uma interpretação, como fora pedido. Dessas, 3 (D5; D12; D14) deixaram subentendido que, tendo colocado o resultado seguido da unidade, não haveria mais necessidade de dar um significado para o resultado encontrado.

- Na questão 2, a quase totalidade das duplas acertou e completou corretamente a resposta, ou seja, disseram que o objeto se encontrava a 10 metros do solo quando t = 3s. Apenas a dupla D2 considerou o valor dado como sendo s = 3 e não t = 3s.

- O desempenho das duplas na questão 3 foi satisfatório, conforme previsto na nossa análise a priori. 4 duplas (D2; D3; D15; D17), porém, não souberam interpretar o que foi pedido, calculando somente a variação do tempo (Δt), deixando de fazer a variação da posição do corpo (Δs). Ao interpretarem a variação da posição do corpo nos “3 primeiros segundos”, as duplas D1; D4; D5; D7; D8; D9; D12; D13; D14; D16 consideraram de t = 1s até t = 3s, e não de t = 0s até t = 3s.

- Na questão 4, o que prevíamos não se confirmou. Apenas 2 duplas não souberam dar uma interpretação para o exercício, sendo que a dupla D2 fez a divisão da posição do corpo (26m) pelo tempo t = 3,6s (justificando para este “t” que a hora tem 3.600 segundos), resultando, assim, em 7,2s. Quanto à dupla D3, raciocinou que, se $s(t) = t^2 + 1$, então $t = 26$, pois determinaram $s(26) = 26^2 + 1$, resultando em s= 677s, relatando ‘*ele passa pela posição 26m no instante 677s*’’, - o que fica categorizado como incoerência, pelo fato de escreverem s = 677s.

- Na questão 5, também não se confirmou a análise a priori, pois, das 18 duplas envolvidas, apenas 10 responderam corretamente. Duas duplas (D2, D8) fizeram o cálculo da posição do corpo nos extremos do intervalo t dado, ou seja, determinaram as imagens dos extremos de t dado, e outras duas (D9, D14) fizeram o cálculo da média aritmética das imagens de t inteiro no intervalo de tempo dado, enquanto a dupla D5 omitiu o valor de t = 1 e fez o restante como D9 e D14. Provavelmente, essas duplas relacionaram o cálculo da taxa de variação média com o cálculo da média aritmética.

- Na questão 6, nossa expectativa se confirmou, pois metade das duplas identificou corretamente que, neste caso, a taxa de variação média é a velocidade média do corpo. Outras 5 duplas (D5, D9, D14, D16, D17), apesar de não terem respondido corretamente, fizeram uma referência à Física. Duas duplas (D2, D15) não fizeram relação com outro campo de conhecimento e outras duas (D1, D3) disseram que se tratava de uma função do 1° grau.

- Conforme previsto na análise a priori, nesta questão 7, quatro duplas (D7, D8, D16, D17) representaram o gráfico da função como sendo reta, mas a D16 não adotou a escala para e posição do corpo (s) corretamente. Três duplas (D2, D3, D14) não identificaram nenhum tipo de gráfico. A dupla D1 concluiu que não se poderia esboçar o gráfico, pois "*só obteve velocidade média*".

- Na questão 8, conforme previsto, quase todas as duplas responderam corretamente à questão. Apenas a dupla D3 sugeriu que ‘*a função é decrescente, pois existiram variações no intervalo da posição (s) em relação ao tempo (t)*’’, porém não identificou quais eram essas variações.

- Na questão 9, apesar de todas as duplas responderem corretamente à questão, apenas 7 (D1; D6; D7; D10; D11; D13; D18) fizeram uso da taxa de variação média; 8 duplas compararam o deslocamento do corpo pelo tempo dado. Duas duplas (D2;D14) não convenceram na justificativa, pois a primeira relatou ser devido ao intervalo maior e a segunda justificou que no intervalo de t =3 a t = 6 o deslocamento médio foi de 17,66m (número não identificado por nós), portanto maior que o primeiro intervalo. Apesar das justificativas, eles acertaram o que foi pedido.

- Na questão 10, embora se repetisse o pedido na questão anterior, o número de acertos foi menor. Apenas 10 duplas responderam corretamente, sendo que 3 delas (D4; D5; D17) fizeram a comparação do deslocamento do corpo (Δs) pelo tempo dado, sem especificar a taxa de variação média, e as 7 restantes (D1; D6; D7; D10; D11; D15; D18)usaram a taxa de variação média para concluir o intervalo em que o corpo se desloca mais rapidamente. Outras 2 duplas (D2; D3) não souberam dar uma interpretação para a questão, por não observarem que a pergunta era a mesma da questão anterior, apenas com os intervalos de tempo diferentes. D3 fez a variação de tempo entre t = 3s e t = 5s, substituiu este resultado na função e encontrou s = 5s. A D2 relatou "*não conseguimos entender*". O restante das duplas, ao compararem os intervalos de tempo, verificaram apenas a variação do corpo (Δs), não se preocupando com a variação do tempo (Δt), concluindo, erroneamente, que o primeiro intervalo era o correto, pois "*o corpo se desloca mais depressa*".

Atividade 2

Com esta atividade tínhamos o objetivo de mostrar que a taxa de variação média, qualquer que seja o intervalo que se considere, é sempre a mesma.

Nela trabalhamos com uma reta decrescente, com variação negativa e diferentes cálculos da taxa de variação média.

A relação entre duas grandezas x e y pode ser representada por $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} = 1$.

1) Justifique por que a relação descrita é uma função. Coloque y = f (x).

2) Qual tipo de curva representa graficamente os pontos do plano cartesiano que satisfazem a essa relação?

3) Determine a variação de y no intervalo de x = 1 a x = 3.

4) Determine a taxa de variação média de y no intervalo de x = 1 a x = 3.

5) Calcule Äy e $\frac{\text{Äy}}{\text{Äx}}$ no intervalo de x = 2 a x = 5.

6) Calcule a taxa de variação média de y no intervalo x = - 3 e x = 10.

7) Calcule a taxa de variação média de y no intervalo x = 1 e x = 1,01.

8) O que você pode dizer, neste problema, a respeito da taxa de variação média de y em relação a x?

9) Determine uma função que permite calcular a taxa de variação média de y em relação a x.

Análise a priori

- Na questão 1, esperávamos que os alunos respondessem corretamente, por terem adquirido os conceitos.
- Na questão 2, acreditávamos que podiam surgir parábolas e retas crescentes.
- Provavelmente, os alunos poderiam encontrar dificuldades na questão 3, no que se refere ao sinal da variação, insistindo em dar como resposta um valor positivo.
- Na questão 4, o aluno possivelmente poderia ficar convencido de que pode ocorrer um valor negativo para a taxa de variação média.
- Na questão 5, acreditávamos que o resultado encontrado faria com que o aluno começasse a investigar a razão pela qual o valor coincide com o da questão 4.

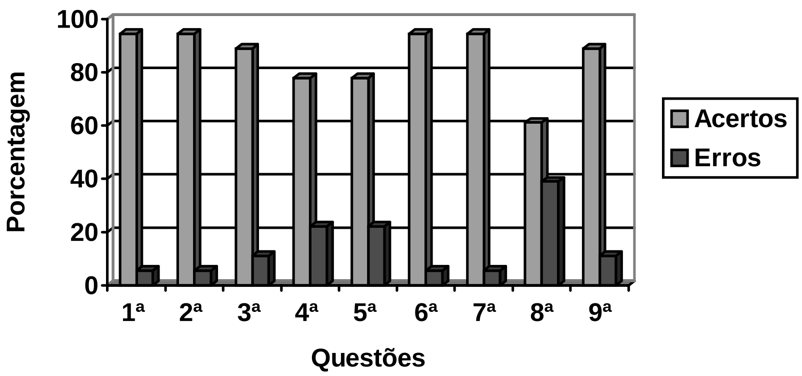
- Na questão 6, esperávamos que o aluno ficasse convencido de que, para qualquer intervalo considerado, a taxa de variação média será sempre a mesma.
- Acreditávamos que na questão 7, embora introduzíssemos um número decimal no intervalo, o aluno possivelmente chegaria ao mesmo resultado que nas questões anteriores.
- Na questão 8, esperávamos que os alunos, em sua maioria, chegassem corretamente à conclusão esperada.
- Na questão 9, possivelmente deveria aparecer um grande número de exemplos referente à função de grau 1.

Análise a posteriori

Dados de desempenho das dezoito duplas nesta atividade:

Questões	*Acertos*	*Erros*
1ª	94,44%	5,56%
2ª	94,44%	5,56%
3ª	88,89%	11,11%
4ª	77,78%	22,22%
5ª	77,78%	22,22%
6ª	94,44%	5,56%
7ª	94,44%	5,56%
8ª	61,11%	38,89%
9ª	88,89%	11,11%

Gráfico



- Na questão 1, todas as duplas escreveram a função f(x), não encontrando dificuldades em escrever y = f(x). Das 18 duplas, 7 delas (D4; D5; D9; D12; D15; D16; D18) não justificaram porque razão a relação descrita no exercício é função. A dupla D2 confundiu os termos equação e função, e relataram: "*isolamos o y e caímos em uma equação*".

- Na questão 2, não se confirmou o que havíamos previsto em nossa análise a priori. Todas as duplas corresponderam à nossa expectativa, porém a dupla D1 justificou que "*para obter um tipo de curva, precisamos antes obter um coeficiente angular através de uma função*". Outra dificuldade encontrada pelos alunos se refere à palavra ' 'curva'', pois algumas duplas relataram que a representação gráfica ' 'é uma reta e não uma curva''.

- Na questão 3, também não se confirmou a nossa análise a priori, pois os alunos encontraram para variação de y, um valor negativo, o que realmente deveria acontecer neste exercício. Somente a dupla D2 calculou as imagens de y nos extremos de x dado, e a dupla D12 encontrou a variação positiva de y.

- Na questão 4, as duplas que calcularam corretamente a variação de y no intervalo dado na questão anterior não encontraram dificuldades em determinar que a taxa de variação média, neste exercício, é um valor negativo. As duplas D5 e D9 voltaram a calcular a taxa de variação média como sendo a média aritmética de y no intervalo x dado (x = 1, x = 2, x = 3). D8 calculou as imagens dos extremos do intervalo dado e D12 determinou a taxa de variação média positiva, mantendo a coerência em relação ao exercício anterior.

- Na questão 5, conforme análise a priori, as duplas começaram a perceber que o resultado encontrado para a taxa de variação média é o mesmo valor que o encontrado na questão anterior. Aqui, ainda ocorreu que as duplas (D5, D8, D9) determinaram as imagens dos valores de x , x inteiro, no intervalo dado e calcularam a média aritmética dessas imagens como sendo a taxa de variação média, pois todos descreveram a razão $\frac{\text{Ä } y}{\text{Ä } x}$.

- Nossa expectativa na questão 6 se confirmou, conforme nossa análise a priori. A dupla D12, mantendo o raciocínio das questões anteriores, não percebeu que a taxa de variação média neste problema é negativa.

- Na questão 7, não foi previsto que, calculando tanto a variação da função como a variação do intervalo dado, a dupla D7 encontraria dificuldades com o cálculo dessa razão composta de números decimais. O restante das duplas correspondeu à nossa expectativa, determinando o valor da taxa com seu respectivo sinal corretamente.

- Na questão 8, as duplas que encontraram o mesmo valor para a taxa de variação média, desde o exercício 4, ficaram mais seguras em afirmar, neste exercício, que o valor encontrado da taxa de variação média coincide com o coeficiente angular da função dada. As duplas que não corresponderam à nossa expectativa (D3, D5, D8, D9, D12, D14, D18) justificaram *que "quanto maior o x, o y será menor*", por acreditarem que a variação de x é negativa e a variação de y é positiva.

- Quase todas as duplas, nesta questão 9, referiram-se à função do 1° grau. Duas duplas (D8, D12) não determinaram uma função, especificando a razão $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Atividade 3

Esta atividade tinha por objetivo fazer uso da taxa de variação média com valores racionais, através de uma função exponencial.

Nela iríamos trabalhar com um problema descontextualizado, com números fracionários, taxa de variação média em diversos intervalos e a "rapidez" com que a função varia no intervalo (o quanto cresce ou decresce).

Considere a função $y = 2^x$.

1) Determine a variação de y no intervalo:

a) x = - 1 a x = 1

b) x = - 4 a x = 2

2) Determine a taxa de variação média de y nos seguintes intervalos:

a) $x = -1$ a $x = 1$

b) $x = -4$ a $x = 2$

c) $x = 0$ a $x = 3$

3) Determine uma expressão que permite calcular a taxa de variação média de y em relação a x, em qualquer intervalo de seu domínio.

4) Em qual intervalo de x a "rapidez" de y é maior (o quanto ela cresce) de $x = -5$ a $x = 0$ ou de $x = 4$ a $x = 5$?

5) Represente graficamente a função.

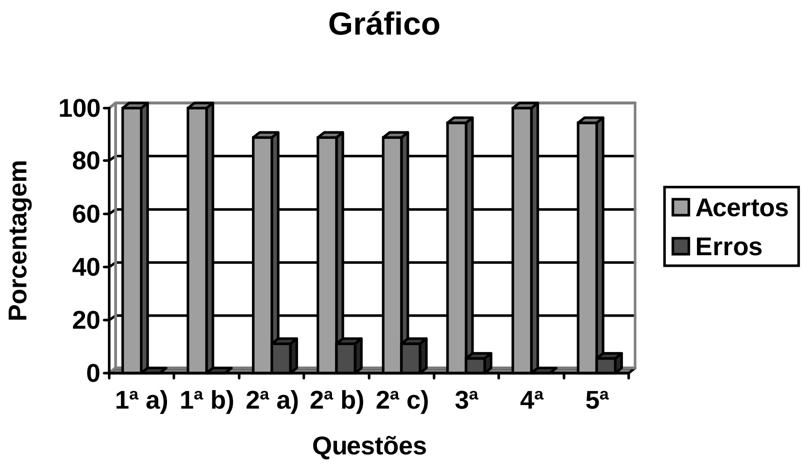
Análise a priori

- Na questão 1, esperávamos que os alunos percebessem que a variação da função não era necessariamente um número inteiro, como vinha ocorrendo até o momento.
- Na questão 2, acreditávamos que os alunos estariam convencidos de que as taxas encontradas poderiam ser números racionais.
- Na questão 3, esperávamos encontrar vários tipos de expressão, até na forma discursiva.
- Na questão 4, os alunos provavelmente responderiam corretamente sobre o intervalo, fazendo uso da taxa de variação média.
- Na questão 5, deveriam surgir gráficos muito próximos da função exponencial, podendo ocorrer erros ao graduar os eixos coordenados, ocasionando provavelmente alguns gráficos em retas.

Análise a posteriori

Dados de desempenho das dezoito duplas nesta atividade:

Questões	*Acertos*	*Erros*
1ª a	100%	-
1ª b	100%	-
2ª a	88,89%	11,11%
2ª b	88,89%	11,11%
2ª c	88,89%	11,11%
3ª	94,44%	5,56%
4ª	100%	-
5ª	94,44%	5,56%



- Na questão 1, nenhuma dupla apresentou dificuldades em determinar a variação da função nos intervalos considerados.
- Na questão 2, encontrar um número racional não representou dificuldade, pois a maioria calculou a taxa de variação média corretamente. A dupla D9 calculou apenas a variação da função, no intervalo dado, deixando de calcular a variação de x e, conseqüentemente, não encontrou a taxa de variação média. J á a dupla D13, em todos os itens desta questão, apesar de determinar corretamente a variação da função, no intervalo considerado, dividiu este resultado por 2 para encontrar a taxa de variação média, pois acreditavam que a variação de x era sempre 2 (os dois extremos do intervalo).

- Na questão 3, diversas respostas foram dadas pelas duplas. Foi dado, por exemplo, o quociente entre a variação da função e a variação de x, referências à Física. Apenas a dupla D13, continuando com o mesmo raciocínio da questão anterior, afirmou que a taxa de variação média é a razão entre a variação da função e o número 2 (pois sempre considerou os dois extremos do intervalo).
- Na questão 4, as duplas D7 e D13 compararam em qual intervalo dado a função cresce mais rapidamente, observando apenas a variação da função, deixando de calcular a variação de x e conseqüentemente a taxa de variação média. A maioria das duplas, ao comparar a rapidez da função nos intervalos dados, fez uso da taxa de variação média para responder à questão.
- Na questão 5, confirmou-se o que prevíamos na análise a priori. No entanto, as duplas D2 e D13 graduaram os eixos em proporções diferentes, sendo que para a dupla D13, a representação gráfica resultou em uma reta.

CAPÍTULO V

ANÁLISES E CONCLUSÕES

1) O Desempenho das Duplas D2 e D12

Para aprofundar a análise do desenvolvimento das atividades propostas, decidimos observar mais detalhadamente o trabalho de duas duplas (D2 e D12).

Apresentaremos, assim, um estudo dos desempenhos dessas duplas, analisando suas justificativas, seus erros, as estratégias utilizadas, a linguagem matemática, a identificação dos pontos de dificuldades. Para esse fim, selecionamos todas as questões das 4 fichas que tratam do cálculo de taxa de variação média de uma função, uma vez que é este o tema de nosso trabalho. É importante ressaltar que esta análise não envolve a comparação de desempenhos entre essas duplas.

A tabela seguinte mostra acertos e erros (em fundo branco) das referidas duplas, envolvendo apenas questões sobre taxa de variação média.

	FICHA 1						***FICHA 2***		
	ATIV. 1		**ATIV. 2**		**ATIV. 3**		**ATIV. ÚNICA**		
	Q5	Q9	Q3	Q5	A	B	Q3	Q4	Q5
D2						•			•
D12		•	•	•	•	•			•

	FICHA 3		***FICHA 4***								
	AT. ÚNICA		**ATIV. 1**			**ATIV. 2**				**ATIV. 3**	
	Q8	Q9	Q5	Q9	Q10	Q4	Q5	Q6	Q7	Q2	Q4
D2	•			•		•	•	•	•		•
D12	•	•		•					•	•	•

acertos: • erros:

Dupla D2

Na atividade 1, ficha 1, questão 5, era solicitada a média de crescimento de Natalie nos 14 anos de vida. Essa dupla encontrou o valor de 3,4 ($\frac{159}{47}$), ou seja, o quociente entre a medida da altura aos 14 anos e medida da altura no nascimento). A dupla pode ter interpretado que a média de crescimento significa “quantas vezes” a criança cresceu desde o nascimento até os 14 anos (quase “três vezes e meia”), e não a taxa de variação média.

Na questão 9 - “*Natalie estava crescendo mais depressa durante seus primeiros 4 anos de vida ou nos 10 anos seguintes?*” Essa dupla não calculou a taxa de variação média. É provável que não tenha respondido corretamente a este item por ter apenas comparado as variações das alturas nos intervalos de tempo solicitados, sem se preocupar com a variação de tempo. É possível dizer, assim, que a dupla ainda não dominava a noção da taxa de variação média, uma vez que os intervalos de tempo não foram significantes para eles.

A atividade 2, ficha 1, questão 3, pedia para calcular a razão $\frac{\text{Ä h}}{\text{Ä t}}$ num determinado intervalo. Esta dupla calculou a razão $\frac{h}{t}$ (e não $\frac{\text{Ä h}}{\text{Ä t}}$), o que caracteriza falta de significado aos termos Δh e Δt.

Na questão 5, mantiveram o mesmo raciocínio que na questão 3, fazendo a razão $\frac{h}{t}$, só que substituindo t por todos os números inteiros do intervalo e respectivas alturas, para mais tarde determinar a soma desses quocientes. Essa estratégia levou-os a considerar uma divisão por zero (divisão da altura pela idade: 47 $\div$ 0). A dupla poderia questionar a estratégia utilizada ao se deparar com uma divisão por zero, mas não se preocupou com tal fato, pois atribuíram zero como o quociente. Para eles, o conceito de taxa de variação média não estava claro.

Na atividade 3, ficha 1, questão “a”, ao calcular a taxa de variação média no intervalo de t = 1 a t = 3, esta dupla calculou somente Δt , o que mostra que ainda encontram dificuldades na interpretação da razão $\frac{\text{Ä}\,h}{\text{Ä}\,t}$.

Na questão b, que pedia para determinar o intervalo de tempo em que Natalie cresceu mais depressa, a dupla novamente o fez pela variação da altura e não pela taxa de variação média, pois não levaram em conta o intervalo de tempo.

Pudemos perceber, assim, que a dupla, naquele momento, não havia compreendido o significado dessa noção.

A resposta na ficha 2, questão 3, revela que esta dupla ainda não dominava o significado da taxa de variação média, pois relataram “*não conseguimos responder*”. Tampouco as estratégias utilizadas pela dupla foram eficientes no que se refere à apreensão deste conceito.

Para a questão 4, continuaram com o mesmo raciocínio das questões anteriores, o de calcular a variação da população entre dois intervalos de tempo (nesta atividade, entre dois censos), deixando de fazer pela taxa de variação média. Talvez a discussão desse conceito e respectiva formalização não tenha sido suficiente para esta dupla (sessão 8) resolver adequadamente os itens propostos, visto que as estratégias utilizadas por eles eram ainda as mesmas das sessões anteriores: cálculo de uma das variações (Δh ou Δt), ou a razão $\frac{h}{t}$, e não a razão $\frac{\text{Ä}\,h}{\text{Ä}\,t}$, configurando-se aqui um erro sistemático.

Na questão 5, que pedia o intervalo de dois censos consecutivos em que ocorreu a maior taxa de variação, essa dupla não especificou na folha de respostas o motivo pelo qual indicou o período de 1970 – 1980. Mais tarde, ao questionarmos a resposta, disseram “*observamos pelo gráfico, que de um ponto para o outro, este período tinha um salto maior em relação aos outros que observamos*”.

Assim, as atividades desenvolvidas da ficha 2 e as respectivas sessões de institucionalização não foram suficientes para que essa dupla utilizasse a noção da taxa de variação média como um meio para resolver as situações propostas. Apesar disso, pudemos perceber que houve alguns avanços quanto à leitura de gráficos, pois os alunos souberam dar uma interpretação correta para a questão 5.

Na ficha 3, questão 8, a dupla usou a estratégia de visualizar o gráfico e concluir que o intervalo t = 0 a t = 2 é o período em que a diminuição da nicotina é mais rápida, deixando, portanto, de utilizar a taxa de variação média. Para esta dupla, neste caso, a interpretação gráfica facilitou o entendimento para saber em qual intervalo de tempo é mais rápida a diminuição da nicotina, não se confirmando, nestas condições, os resultados encontrados sobre interpretação de gráficos por Monk, G. e Eisenberg, T. (1992, p.13). Talvez o trabalho desenvolvido até aqui tenha contribuído para o êxito da dupla.

Na questão 9 - que pedia a taxa de variação média da nicotina no intervalo de 0 a 6 horas - a dupla continuou não dando um significado para a taxa de variação média, pois relataram; "*não entendemos*".

Na atividade 1, ficha 4, questão 5, que pedia a taxa de variação média em um intervalo, a dupla se limitou a calcular as imagens da expressão dada, quando t = 0 e t = 3, não calculando a variação do espaço (Δs) nem a do tempo (Δt).

Na questão 9 – que pedia o intervalo (t = 0 a t = 3 ou t = 3 a t = 6) em que o corpo se desloca mais depressa, pela incapacidade de dar um significado à taxa de variação média, a resposta dada por esta dupla, apesar de correta (t = 3 a t = 6), não foi satisfatória, pois eles justificaram ser devido ao intervalo de tempo maior, o que não ocorre, pois os dois intervalos dados (t = 0 a t = 3 e t = 3 a t = 6), possuem a mesma variação de tempo.

A questão 10 pedia o mesmo que a questão anterior, só que em intervalos diferentes (t = 1 a t = 3 ou t = 3 a t = 4). O não entendimento da taxa de variação média fez com que esta dupla não desenvolvesse a questão. As estratégias utilizadas por eles até o momento eram satisfatórias apenas na leitura de gráfico, para saber onde ocorre tal "rapidez" entre dois intervalos.

Era visível que esta dupla ainda não dominava o conceito de taxa de variação média, o seu significado e, principalmente, como desenvolver para determinar o valor desta taxa e interpretá-lo. Observada a dificuldade encontrada pela dupla na compreensão deste conceito, resolvemos, na sessão 12, retomar o significado desta taxa, discutindo as atividades anteriores. Para cada questão que envolvia a taxa de variação média foi realizada uma análise mais detalhada. Tentamos extrair das próprias palavras dos alunos, o significado da taxa. O trabalho tinha como meta a compreensão deste conceito. Foi a partir desta retomada que eles puderam desenvolver as atividades seguintes sobre a taxa de variação média.

Na atividade 2, ficha 4, questão 4, o cálculo da taxa de variação média no intervalo dado foi realizado satisfatoriamente por eles, especificando de que forma o

valor foi encontrado. A mudança que observamos nessa dupla provavelmente foi devida à discussão na sessão 12. Como dissemos anteriormente, ao percebermos que esta dupla vinha com falhas no cálculo e interpretação da taxa de variação média, resolvemos fazer mais uma discussão a respeito do conceito.

As questões seguintes, 5; 6 e 7 foram resolvidas corretamente.

O objetivo das questões 4, 5, 6 e 7, nesta atividade, era que os alunos percebessem a invariância da taxa de variação média, qualquer que fosse o intervalo considerado. Ao responder à questão 8, a dupla concluiu que a taxa de variação média foi sempre a mesma (resultado este encontrado nas questões 4, 5, 6 e 7), e também manifestou que este valor é o coeficiente angular da reta considerada.

Na atividade 3, ficha 4, questão 2 – que pedia a taxa de variação média em diversos intervalos de tempo - a dupla correspondeu (corretamente) ao que foi pedido, usando termos adequados, e observou-se, pela resposta dada e pelos debates realizados na última sessão, que eles adquiriram o conceito de taxa de variação média, e o objetivo da seqüência foi alcançado.

Vale ressaltar que este resultado é bastante significativo, uma vez que o desempenho inicial desta dupla foi insatisfatório.

Dupla D12

Na atividade 1, ficha 1, questão 5, a dupla determinou a taxa de variação média incorretamente, visto que a variação de tempo foi $\Delta t = 15$ (e não 14), pois consideraram todos os pontos do intervalo, que correspondiam a números inteiros, desde o nascimento até os 14 anos.

Na atividade 2, ficha 1, as questões 3 e 5 - que pedem o cálculo da razão $\frac{\Delta h}{\Delta t}$ em diferentes intervalos - foram realizadas sem dificuldades, pois seu desenvolvimento e os valores encontrados estavam coerentes.

Na atividade 3, ficha 1, questão “a”, a taxa de variação média encontrada pela dupla no intervalo de t = 1 a t = 3 foi desenvolvida corretamente, como também foi identificada a respectiva unidade.

Na questão “b”, que pede para determinar em qual intervalo de tempo Natalie cresceu mais depressa (t=0 a t=3 ou t=3 a t=9), esta dupla determinou o intervalo t=0 a t=3. Apesar do resultado correto, ao comparar os dois intervalos, esta dupla adotou a estratégia de fazê-lo pela taxa de variação média, porém, ao calcular Δh (variação da altura), considerou o intervalo t=1 a t=3, ao invés de t=0 a t=3, e no cálculo do Δt (variação de tempo) do intervalo t=3 a t=9, respondeu que esta variação era 3 (e não 6). Isto retrata que a dupla não esteve atenta aos valores descritos na questão e na operação a ser efetuada para o Δt.

Na ficha 2, questão 3, a dupla, ao calcular a taxa de variação média da população de 1872 a 1996, dividiu a variação da população pelo número de censos do período (11), em vez de dividir pela variação de tempo (124 anos). Assim, essa dupla não percebeu que, entre os pontos que indicam dois censos consecutivos, há um intervalo de tempo decorrido. Provavelmente não compreenderam a representação utilizada.

Na questão 4, apesar da conclusão correta, que o período de maior crescimento foi de 1920 a 1970, essa dupla, ao calcular a variação de tempo, manteve o mesmo raciocínio da questão anterior, considerando o número de censos no período em vez da variação de tempo.

Na questão 5, ao calcular a taxa de variação média da população entre dois intervalos de censos consecutivos, essa dupla efetuou apenas o cálculo da variação da população, pois a variação de tempo era igual a 1 (neste caso, para eles, a variação de tempo era a variação de dois censos consecutivos).

Nesta ficha, pudemos perceber que a dupla tinha adquirido competências no cálculo da razão da taxa de variação média, ainda que tenham confundido a interpretação da variação de tempo com a variação entre dois censos.

Na ficha 3, questão 8, a dupla não utilizou o cálculo da taxa de variação média para responder que, no intervalo de t = 0 a t = 2, a diminuição de nicotina no sangue é mais rápida, mas, sim, fazendo a observação pelo gráfico, confirmando Norman, D. (1992, p. 13)

Na questão 9, apesar de ter concluído que a taxa de variação média é negativa, a dupla não escreveu que o valor encontrado significa que, em média, a nicotina no sangue diminui.

Na atividade 1, ficha 4, a questão 5 pedia para calcular a taxa de variação média no intervalo de t=0 a t=3. Essa dupla efetuou apenas a variação da posição do móvel (Δs) e, mesmo assim, calculou para t = 0, s(0) = 0m e não s(0) = 1m.

Na questão 9, que pedia em qual dos intervalos dados o móvel se desloca mais depressa, essa dupla calculou Δs dos dois intervalos de tempo, mas não calculou Δt, provavelmente por notarem que estas duas variações possuíam o mesmo valor. Para esta questão, a dupla manteve o que fizera anteriormente na questão 5, ou seja, s(0) = 0m. A conclusão correta a que a dupla chegou foi realizada pela comparação dos valores de Δs.

Na questão 10, que pedia em qual dos intervalos de tempo dado o móvel se deslocava mais depressa, essa dupla apenas comparou os valores de Δs calculados. A estratégia que os alunos desenvolveram para a questão anterior não foi eficiente para esta questão, uma vez que as variações de tempo não eram iguais e, portanto, não seria correto determinar qual intervalo de tempo ocorre com mais "rapidez", apenas verificando os valores de Δs.

Na atividade 2, ficha 4, questões 4, 5, 6 e 7, o objetivo era que o aluno percebesse que, para qualquer intervalo que se considerasse, a taxa de variação média é constante, e que esse valor é o coeficiente angular da reta dada. Verificamos que essas questões possibilitaram para a dupla melhor compreensão de que a taxa de variação média é obtida por meio de uma razão $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, e não apenas pelo Δy, como fizeram nas atividades anteriores. Apesar dessa percepção, foi observado que, no cálculo do Δy (variação da função), a dupla não levou em conta a ordem para efetuar a diferença entre um valor e outro, visto que os resultados encontrados foram positivos (com exceção da questão 7). A dupla concluiu corretamente que "as variações encontradas são proporcionais", porém não reconheceu que a taxa de variação média é o coeficiente angular da reta, e que, neste caso, a taxa é negativa. Uma possível explicação para este fato é que a dupla encontrou sinais diferentes para o valor da taxa nos diferentes intervalos dados.

Na atividade 3, ficha 4, questões 2 e 4, o cálculo da taxa de variação média foi efetuado corretamente, para determinar em qual dos dois intervalos dados a função cresce "mais rápido". Percebemos que a dupla adquiriu competências na interpretação do valor da taxa de variação média, pois justificou, na questão 4, o seguinte: "no segundo intervalo, em apenas uma unidade de x ela varia 16, enquanto no primeiro intervalo, ela varia $\frac{31}{160}$ para cada unidade de x".

Esta dupla mostrou um melhor desempenho nesta última atividade, provavelmente devido à discussão na sessão anterior, em que novamente foi realizada a formalização da taxa de variação média de uma função. Isto já havido sido realizado em outras sessões, mas, de um modo geral, não surtira os efeitos positivos notados para esta última atividade.

2) Considerações Finais

O objetivo deste trabalho foi estudar o processo de aquisição/construção da noção de taxa de variação média de uma função por alunos ingressantes em um curso superior. Era também, proporcionar ao aluno a revisão de conceitos relacionados ao tema funções, como leitura de gráficos (intervalos de crescimento e decrescimento, intersecção com os eixos coordenados), determinação do domínio e do conjunto imagem. É possível ainda que, por meio de um trabalho como esse, os alunos possam aperfeiçoar habilidades nos referidos aspectos, adquirindo maior competência para estudar alguns tópicos iniciais do Cálculo Diferencial e Integral.

Os resultados apresentados e os relatos na análise a posteriori revelam que a seqüência didática foi adequada aos objetivos propostos para esta amostra. Contribuiu para que os alunos dessem um salto qualitativo e, conseqüentemente, permitiu um avanço nas concepções sobre taxa de variação média de uma função e no conceito de função, no sentido de perceberem que o valor da taxa indica o comportamento da função num determinado intervalo.

Entre os aspectos positivos no desenvolvimento deste trabalho, citamos:

- No trabalho em duplas, os alunos participaram ativamente na aquisição/construção da noção da taxa de variação média de uma função, discutindo com o parceiro cada atividade proposta.
- Perceberam que uma tabela ou um gráfico de uma situação do cotidiano pode representar uma função, mesmo não conhecendo sua representação algébrica.
- Construíram gráficos de funções sem a utilização do papel quadriculado.

Embora os resultados apresentados constituam um indicador de que as escolhas para elaboração da seqüência foram adequados, conseguimos detectar dificuldades na aplicação da seqüência didática, uma vez que os alunos, ao contrário do que supúnhamos, não dominavam determinados conceitos, noções e procedimentos, tais como:

- Expressar por escrito o que era solicitado;
- Interpretar corretamente os enunciados;
- Calcular o valor numérico e efetuar operações com expressões algébricas utilizando propriedades conhecidas;
- Obter expressões equivalentes a uma expressão algébrica, por meio de fatorações e simplificações;
- Interpretar o significado das raízes;
- Localizar pontos nos gráficos apresentados;
- Utilizar escala adequada para dispor os pontos no plano cartesiano;
- Identificar a reta como sendo a representação gráfica da função do 1º grau;
- Interpretar o resultado obtido;
- Dar significados à intersecção dos gráficos construídos com os eixos coordenados, que representavam as funções dadas.

Algumas dessas dificuldades não faziam parte do nosso objeto de estudo, mas interferiram no ritmo de nosso trabalho. Contudo, o processo de aquisição/construção da noção de taxa de variação média de uma função, apesar de bem-sucedido não foi tranqüilo, motivado pela falta de algumas competências citadas acima.

Constatamos que o índice de acerto foi maior nas situações em que os dados estavam disponíveis em uma tabela, do que nas situações em que era fornecida a lei da função.

Um dos aspectos que poderíamos ter explorado com mais ênfase refere-se à taxa de variação média negativa. Nela poderíamos dar uma maior atenção na relação desse sinal negativo com a representação da curva (decrescente) no plano cartesiano.

Pelos resultados obtidos, podemos afirmar que a seqüência didática foi uma boa contribuição para o processo de ensino e aprendizagem do conceito de taxa de variação média de uma função e para revisitar conceitos, procedimentos e atitudes relativos ao tema funções.

BIBLIOGRAFIA

BARBOSA, A. S. *Prática pedagógica na Universidade Federal de Viçosa. Análise de um caso: Cálculo I*. Ciências e Cultura, 39(4), pp. 371–378, 1997.

BROUSSEAU, G. *Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. Recherches en Didactiques des Mathématiques*. (7.2), pp. 33-116. Grenoble, 1986.

__________. *Theory of didatical situations in Mathematics*, p. 297.Londres: Kluver 1997.

DAMM, R. F. *Registros de representação, In: Educação Matemática – uma Introdução,* MACHADO, S. pp. 135-153. São Paulo: Educ, 1999.

EISENBERG, T. A. *On the Development of a Sense for Functions, In: The Concept of Function – Aspects of Epistemology and Pedagogy*, Harel, G.e Dubinsky, Ed. (Eds.), Vol. 25, pp. 153-174. Washington, DC, 1992.

GOLDENBERG, E. P. *Dynamic Representation and the Development of a Process Understanding of Function, In: The Concept of Function – Aspects of Epistemology and Pedagogy, Harel, G.e Dubinsky, Ed. (Eds.)*, Vol. 25, pp. 235-260. Washington, DC, 1992.

MACHADO, N. J .*Matemática por assunto – Noções de Cálculo*, pp.13-24. São Paulo: Scipione,1988.

MOYSÉS, L. *Aplicações de Vygotsky à Educação Matemática, In: Coleção Magistério: Formação e Trabalho Pedagógico*, pp. 32-35, Campinas, S. P., Papirus,1997.

MONK, G. S. *Students' Understanding of a Function Given by a Physical Model, In: The Concept of Function – Aspects of Epistemology and Pedagogy*, Harel, G. e Dubinsky, Ed. (Eds.), Vol. 25, pp.175-193. Washington, DC, 1992.

NORMAN, D. A. *Teachers' Mathematical Knowledge of the Concept of Function, In: The Concept of Function – Aspects of Epistemology and Pedagogy,* Harel, G. e Dubinsky, Ed. (Eds.), Vol. 25, pp.215-232. Washington, DC, 1992.

ORTON, A. *Students understandings of differentiation, Educational Studies in Mathematics*, Vol. 14, pp. 235-250. Dordrecht, 1983.

PERRIN-GLORIAN, M.-J . *Théorie des situations didactiques: naissence, développement, perspective. In: Vingtans de didactique des mathématiques en France*. RDM, La Pensée Sauvage Editions, 1994.

PIETROPAOLO, R. – *Notas de Curso de Especialização*. PUC/SP - SEESP - FAPESP - CAPES, 1999.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. *Pesquisa quantitativa e qualitativa do programa de expansão e melhoria do Ensino Médio nas escolas públicas do Estado - as análises dos desempenhos dos alunos em Matemática*, Vol. 2, 1997.

SIERPINSKA, A. *On understanding the notion of function, In: The Concept of Function – Aspects of Epistemology and Pedagogy*, Harel, G. e Dubinsky, Ed. (Eds.), Vol. 25, pp. 25-58. Washington, DC, 1992.

SILVA, B. e IGLIORI, S. *Um estudo exploratório sobre o conceito de Derivada*. *Anais IV Encontro Paulista de Educação Matemática*, PUC-SP, janeiro de 1996.

SILVA, M. R. G. *Discurso de alguns professores de Cálculo sobre taxa de variação, In: Quadrante – Revista Teórica e de Investigação*, (7.1), pp. 55-75. Lisboa, 1998.

VILLARREAL, M. E. *O pensamento matemático de estudantes universitários de Cálculo e tecnologias informáticas. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto* *de Geociências e Ciências Exatas*, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1999.

VERGNAUD, G. *La théorie des champs conceptuels. Recherces en didactique des mathématiques*, (10.23), pp. 133-170, Paris, 1990.

__________. *Psicologia cognitiva e do desenvolvimento e pesquisas em educação matemática: algumas questões teóricas e metodológicas, In: Queen´s university*, Kingston. Canadá, junho 1982.

__________. *L'enfant , la mathematique et la realite: problemes de l'enseignement des mathematique a l'ecole elementaire, Peter Lang, 5ª ed.* Bern, Suiça, 1994.

VIGOTSKY, L. S. *Psicologia e pedagogia. Bases psicológicas da aprendizagem e do desenvolvimento*. São Paulo: Moraes, 1991a.

___________. *Et al. Linguagem, Desenvolvimento e Aprendizagem*. São Paulo: Ï cone, 1988.

Anexo I

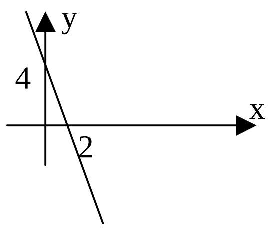
Teste Diagnóstico

Teste Diagnóstico

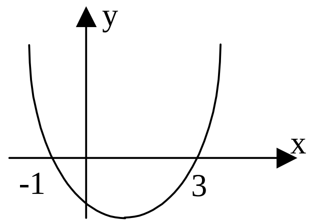
Nome ____

1) Indique qual dos gráficos abaixo representa a função y = - 2x + 4 :__________

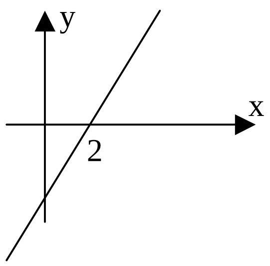
G1)



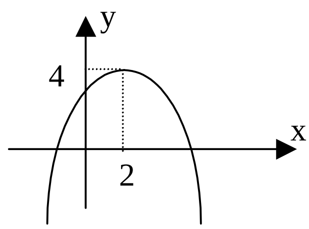
G2)



G3)



G4)



2) Explique a razão pela qual você fez sua escolha : ______________________

Dadas as seguintes funções:

a) $y = 2^{2x+3}$ c) $y = 2x + 3$ e) $y = \log_2(x)$

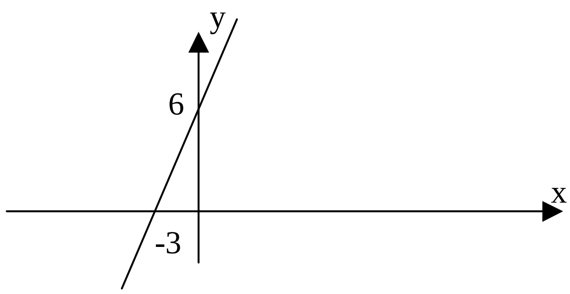
b) $y = x^2 + 3$ d) $y = x^2 - 5x + 6$

Assinale qual(is) da(s) função(ões) acima tem como gráfico uma reta: ______

Justifique sua resposta: ____

____

3) O gráfico da variação de y em relação a x é dado abaixo:

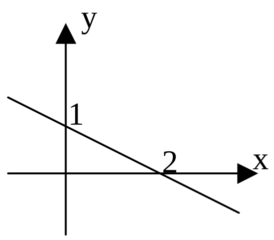


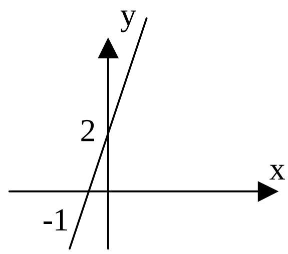
Determine:

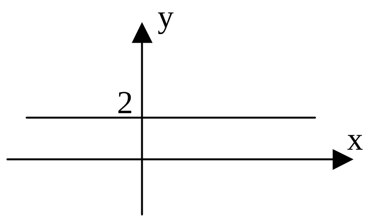
a) O coeficiente angular da reta:_______________________________

b) A expressão que relaciona y com x __________________________

4) Determine o coeficiente angular de cada uma das retas abaixo e escreva a expressão que relaciona y com x:



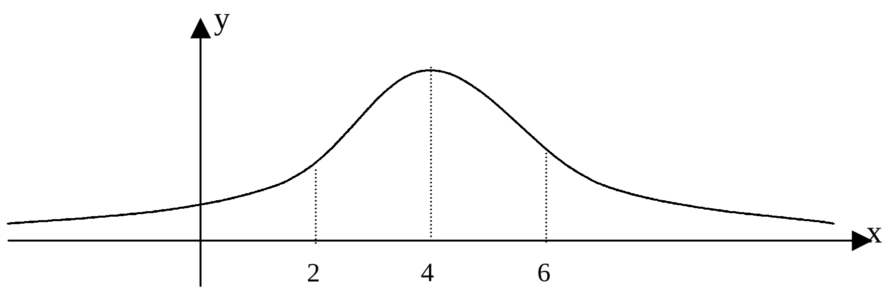




coef. angular _______ coef. angular _______ coef. angular ________

expressão _________ expressão _________ expressão __________

5) Dado o gráfico da função, responda às questões abaixo:



a) no intervalo de $2 \leq x \leq 4$ a função é crescente, decrescente ou constante?

____

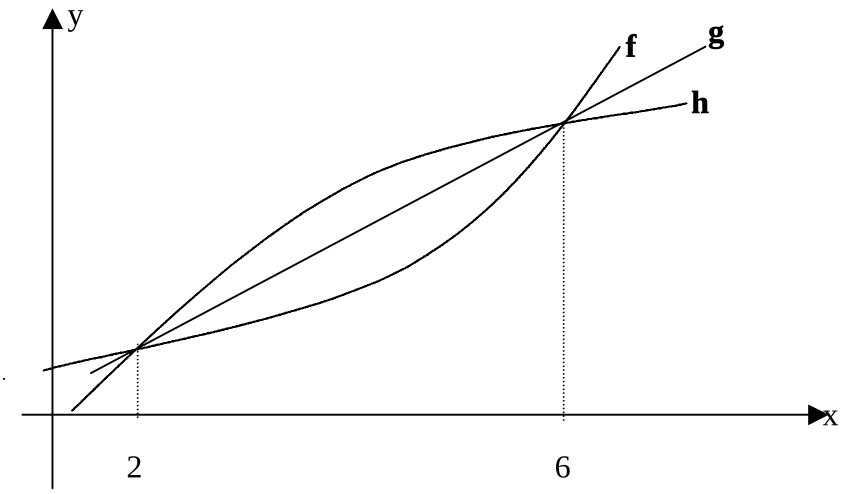
Justifique sua resposta:____________________________________

b) No intervalo de $4 \leq x \leq 6$ a função é crescente, decrescente ou constante?

____

Justifique sua resposta:____________________________________

6) Considere os gráficos abaixo, que representam as funções f, g e h. Observe que no intervalo $x \geq 2$, as funções f, g e h são crescentes. Responda às seguintes questões:



a) Qual dessas funções você acha que cresce cada vez mais rapidamente?

____

Justifique sua resposta: _______________________________________

b) Qual dessas funções cresce cada vez mais lentamente? _______________

Justifique sua resposta:____

c) Alguma delas cresce com uma rapidez constante? Qual?_______________

Justifique sua resposta:______________________________________

Caso você não tenha compreendido algum termo da questão, indique qual:

____

7) Dada a função y = 12x + 251, determine:

a) A variação no valor de y quando x passa de 10 para 11: ______________

b) A variação no valor de y quando x passa de 1325 para 1326: ___________

c) A variação no valor de y quando x passa de 20 para 22:_______________

d) A variação no valor de y quando x passa de 8 para 11:_______________

Caso você não tenha compreendido a questão, indique qual foi o problema:

____

8) Em uma corrida de taxi, é cobrada uma quantia fixa de R$ 5,00 mais R$ 2,00 por quilômetro rodado.

a) Qual a diferença no total a pagar em 2 corridas, uma de 21 km e a outra de 27 km ?

____

b) Escreva a expressão de tal situação, onde ***y*** é o valor a pagar para o taxista ao final da corrida e ***x*** é o quilômetro percorrido: _______________________

c) Com a expressão encontrada no item anterior, faça uma representação gráfica dessa situação de até 8 km percorridos pelo taxista.

d) Qual a variação de y quando x passa de 7 para 8 km : __________________

e) Qual a variação de y quando x passa de 15 para 16 km : _________________

f) Determine a taxa de variação média de y em relação a x no intervalo de $x = 21$ a $x = 27$ ____

Caso você não tenha compreendido algum termo, indique qual :

____

9) Seja a função $y = x^2$

a) Construir o gráfico cartesiano de y em função de x

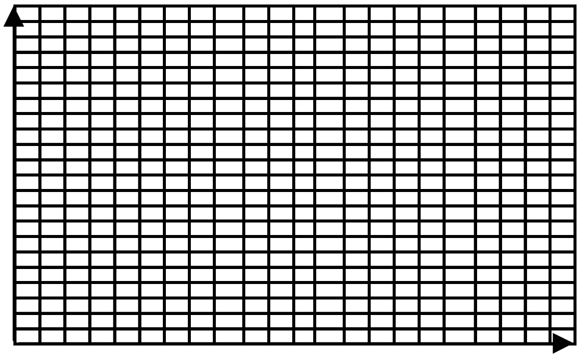
b) Determine a variação de y quando x passa de 2 para 6 : ______________

c) Determine a taxa de variação média de y quando x passa de 2 para 6:

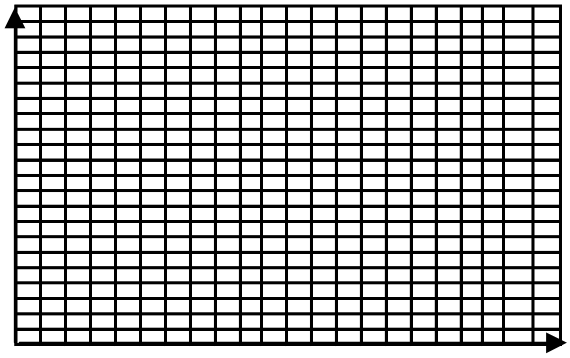
____

Espaço para resolver os itens das questões:

8 – c



9 – a



Anexo II

Atividades da seqüência didática

Ficha 1 - Atividade 1

Natalie está crescendo. A tabela abaixo indica a altura de Natalie no dia em que nasceu e em cada um de seus quatorze aniversários.

Idade **(anos)**	0 (nasc)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Altura (cm)	47	70	83	90	98	105	110	118	125	132	138	144	149	154	159

1) Qual foi a variação da altura de Natalie durante os três primeiros anos de sua vida?
2) Qual foi a variação da altura de Natalie entre as idades de 3 a 6 anos?
3) Em qual desses dois períodos Natalie mais cresceu: de 0 a 3 ou de 3 a 6 anos?
4) Natalie cresceu mais nos sete primeiros anos de vida ou nos sete anos seguintes?
5) Quantos centímetros por ano (cm / ano) Natalie cresceu, em média, nesses quatorze anos de vida?
6) Houve algum período de um ano em que o crescimento de Natalie tenha sido exatamente igual à média obtida no item anterior?
7) A altura de Natalie, ano a ano, do nascimento até 14 anos sempre aumentou?
8) O acréscimo da altura de Natalie, ano a ano, sempre aumentou? Explique.
9) Natalie estava crescendo mais depressa durante seus primeiros 4 anos de vida ou nos 10 anos seguintes? Justifique sua resposta.

Ficha 1 – Atividade 2

Considere novamente a tabela das alturas de Natalie.

Idade **(anos)**	0 (nasc)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Altura (cm)	47	70	83	90	98	105	110	118	125	132	138	144	149	154	159

Se chamarmos de h a altura de Natalie, podemos escrever Δh para indicar a variação da altura. Do mesmo modo, se t é a idade, podemos indicar Δt como a variação de sua idade.

1) No intervalo de t = 2 anos a t = 5 anos, qual é o Ät?

2) Calcule Äh no intervalo de t = 2 anos a t = 5 anos.

3) Qual o é o valor da razão $\frac{\text{Äh}}{\text{Ät}}$ para o intervalo de t = 2 a t = 5 anos?

4) Qual é a unidade do número obtido no item anterior?

5) Calcule a razão $\frac{\text{Äh}}{\text{Ät}}$ no intervalo de 0 a 4 anos e no intervalo de 4 a 8 anos.

6) Você saberia dizer o significado da razão $\frac{\text{Äh}}{\text{Ät}}$?

7) Nos cálculos que fez, você verificou que a razão $\frac{\text{Äh}}{\text{Ät}}$, apesar de não ser constante, é sempre positiva em qualquer intervalo da tabela que se considere. Procure uma explicação para esse fato.

8) No decorrer da vida de Natalie (após 14 anos) a razão $\frac{\text{Äh}}{\text{Ät}}$ poderá ser nula para diversos intervalos de tempo que se considere? Essa razão poderá ser negativa? Explique.

9) A tabela do problema da altura de Natalie nos mostra que a altura h depende do tempo t. A relação existente entre h e t é função? Explique.

Ficha 1 – Atividade 3

Por meio da leitura das alturas de Natalie mostradas na tabela, pelos cálculos feitos e pelas discussões das duplas no desenvolvimento das atividades anteriores, podemos tirar algumas conclusões antes de aplicarmos esta atividade. São elas:

- a altura de Natalie sempre cresceu com o decorrer do tempo;.
- o aumento da altura de Natalie, ano a ano, não foi constante;
- Natalie cresceu mais rapidamente no início do período observado do que no fim dele;
- a razão $\frac{\text{Äh}}{\text{Ät}}$ no período observado é sempre positiva, pois Natalie sempre cresceu;
- a relação de interdependência entre as grandezas envolvidas é uma função;
- a razão $\frac{\text{Äh}}{\text{Ät}}$ pode dar informações da "rapidez" com que varia a altura em relação ao tempo (o quanto cresce ou decresce);
- $\frac{\text{Äh}}{\text{Ät}}$ é denominada taxa de variação média da função.

a) Calcule a taxa de variação média da altura de Natalie no intervalo t = 1 a t = 3 anos. Interprete o resultado obtido.

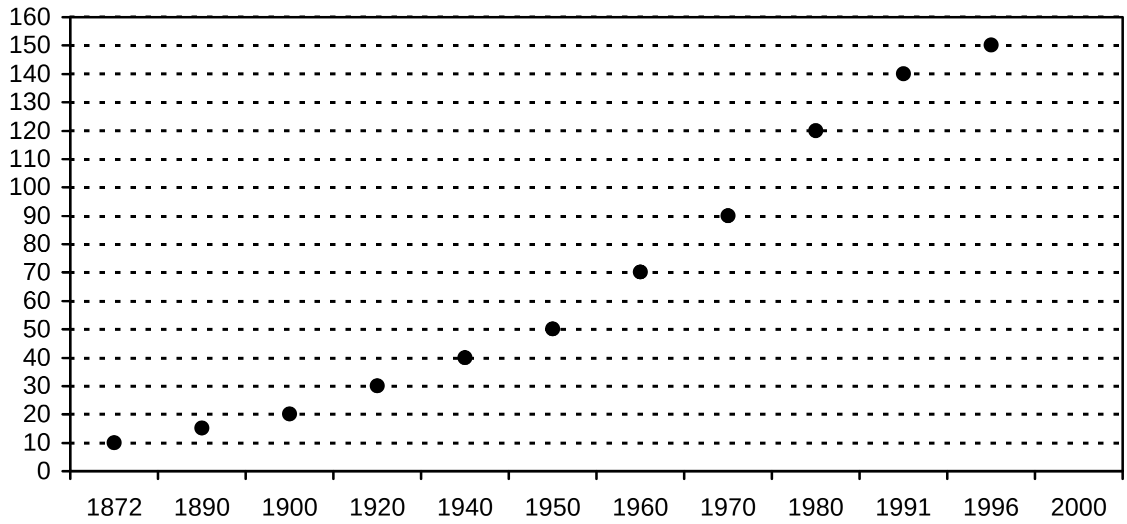
b) Em qual intervalo Natalie cresceu mais depressa: de t = 0 a t = 3 anos ou de t = 3 a t = 9 anos?

c) A altura de Natalie até os 14 anos é sempre crescente?

d) Represente a relação de interdependência entre h e t no plano cartesiano.

Ficha 2

O gráfico abaixo mostra o número de habitantes no Brasil, em valores aproximados, utilizando os resultados dos censos realizados:



1) qual era aproximadamente a população do Brasil em 1872? E em 1970?

2) qual foi a variação da população no Brasil nesses quase 100 anos?

3) qual foi a taxa de variação média da população brasileira de 1872 a 1996? Dê unidades com sua resposta e interprete o significado dessa taxa.

4) em qual intervalo o número de habitantes no Brasil cresceu mais rapidamente: de 1872 a 1920 ou de 1920 a 1970? Justifique sua resposta.

5) em qual intervalo de dois censos consecutivos ocorreu a maior taxa de variação média da população brasileira?

6) se no intervalo de 1996 a 2000 a taxa de variação média do número de habitantes no Brasil fosse 2,5 milhões / ano, qual deveria ser o total de habitantes em 2000?

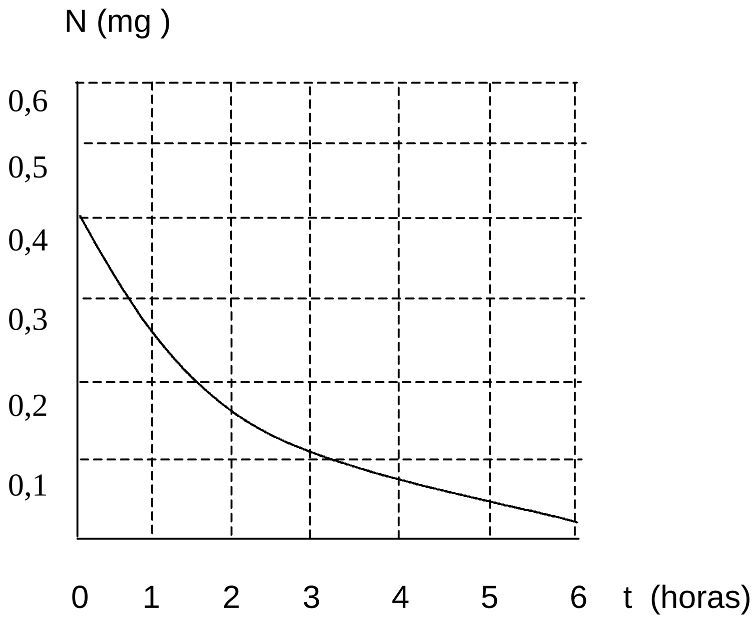
7) se o número de habitantes aumentasse de 1996 a 2000 na mesma razão da maior taxa média que houve no Brasil entre dois censos consecutivos, qual deveria ser o número de habitantes em 2000?

8) qual é sua estimativa para a população do Brasil no ano 2000?

9) construa uma tabela com os dados do gráfico.

Ficha 3

O gráfico a seguir mostra a quantidade de nicotina em miligramas (mg) na corrente sangüínea de uma pessoa como função do tempo t, em horas (h), depois que uma pessoa acabou de fumar.



1) Esse gráfico revela que o teor da nicotina N é uma função do tempo t, ou seja, N = f(t). Comente sobre esta relação.
2) A função é crescente ou decrescente? Explique.
3) Avalie o teor da nicotina no instante t= 3h, ou seja, aproxime um valor para f(3).
4) Determine a variação do teor da nicotina no intervalo de t = 1h e t = 4h, ou seja, o ΔN nesse intervalo.
5) Quantas horas depois de ter fumado um cigarro, o teor da nicotina em uma pessoa passa a ser 0,08mg?
6) Qual é o significado do ponto em que a curva intercepta o eixo das ordenadas?
7) Se o gráfico interceptasse o eixo das abscissas, qual seria o significado desse ponto?
8) Em qual intervalo é mais rápida a diminuição da nicotina de t = 0 a t = 2h ou de t = 3h a t = 6h?
9) Determine a taxa de variação média da nicotina no intervalo de 0 a 6 horas. Dê as unidades e interprete o resultado.

Ficha 4 – Atividade 1

A posição "s" de um corpo que se movimenta sobre uma trajetória retilínea em relação à origem pode ser determinada em dado instante "t", por meio da expressão $s(t) = t^2 + 1$. As unidades "s" e "t" são dadas, respectivamente, em metros e em segundos.

1) Determine o valor de s(4) e interprete seu significado neste contexto.
2) Determine a posição do corpo no instante t = 3s.
3) Determine a variação da posição do corpo nos 3 primeiros segundos e a variação no intervalo de t = 3s a t = 5s.
4) Determine o instante em que o móvel passa pela posição s = 26m.
5) Determine a taxa de variação média da posição do móvel em relação ao tempo no intervalo de t = 0 a t = 3s. Dê as unidades de sua resposta e interprete o resultado.
6) A taxa de variação média, nesse caso, tem um nome especial? Qual é esse nome?
7) Esboçar o gráfico de s em função de t.
8) A função s(t) é crescente? Explique.
9) Em qual intervalo o corpo se desloca mais depressa, de t = 0 a t = 3s ou de t = 3s a t = 6s? Explique sua resposta.
10) Em qual intervalo o corpo se desloca mais depressa, de t = 1s a t = 3s ou de t = 3s a t = 4s? Explique sua resposta.

Ficha 4 – Atividade 2

A relação entre duas grandezas x e y pode ser representada por $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} = 1$.

1) Justifique por que a relação descrita é uma função. Coloque y = f (x).

2) Qual tipo de curva representa graficamente os pontos do plano cartesiano que satisfazem a essa relação?

3) Determine a variação de y no intervalo de x = 1 a x = 3.

4) Determine a taxa de variação média de y no intervalo de x = 1 a x = 3.

5) Calcule Äy e $\frac{\text{Äy}}{\text{Äx}}$ no intervalo de x = 2 a x = 5.

6) Calcule a taxa de variação média de y no intervalo x = - 3 e x = 10.

7) Calcule a taxa de variação média de y no intervalo x = 1 e x = 1,01.

8) O que você pode dizer, neste problema, a respeito da taxa de variação média de y em relação a x?

9) Determine uma função que permite calcular a taxa de variação média de y em relação a x.

Ficha 4 – Atividade 3

Considere a função $y = 2^x$.

1) Determine a variação de y no intervalo:

a) x = - 1 a x = 1

b) x = - 4 a x = 2

2) Determine a taxa de variação média de y nos seguintes intervalos:

a) x = - 1 a x = 1

b) x = - 4 a x = 2

c) x = 0 a x = 3

3) Determine uma expressão que permite calcular a taxa de variação média de y em relação a x, em qualquer intervalo de seu domínio.

4) Em qual intervalo de x a "rapidez" de y é maior (o quanto ela cresce) de x = - 5 a x = 0 ou de x = 4 a x = 5?

5) Represente graficamente a função.

Anexo III

Produção de alunos

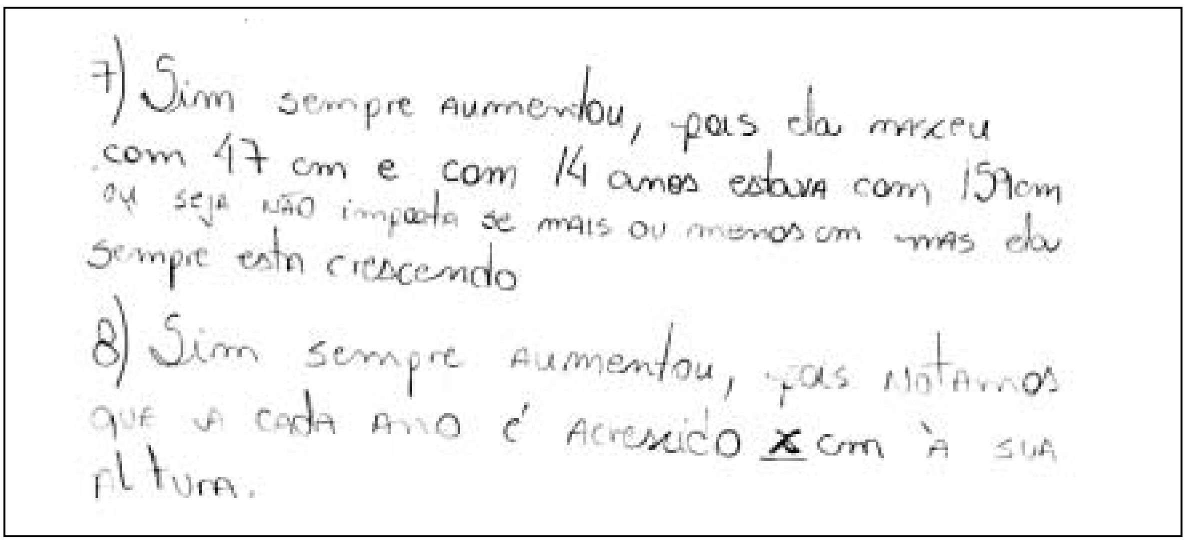
Apresentamos algumas produções de duplas de alunos como exemplo de respostas com erros e acertos citados no corpo da dissertação.

Ficha 1 – Atividade 1

7) A altura de Natalie, ano a ano, do nascimento até 14 anos sempre aumentou?

8) O acréscimo da altura de Natalie, ano a ano, sempre aumentou? Explique.

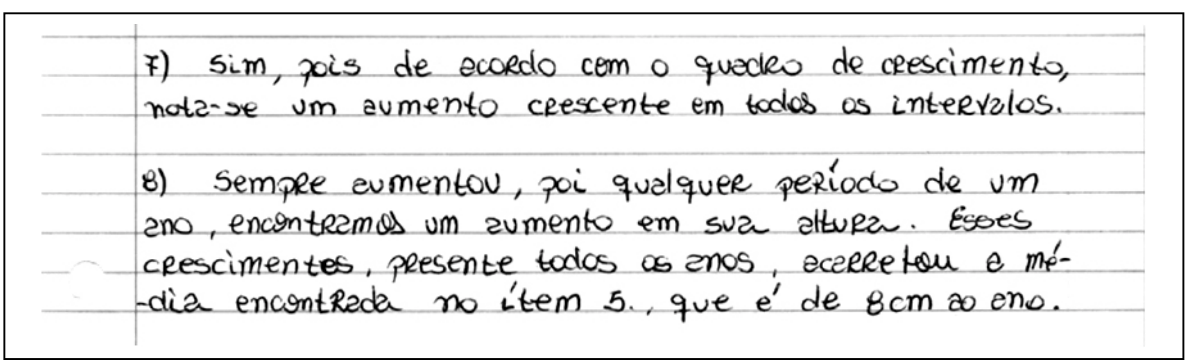
D1



7) Sim sempre aumentou, pois ela nasceu com 47 cm e com 14 anos estava com 159cm ou seja não importa se mais ou menos cm mas ela sempre esta crescendo

8) Sim sempre aumentou, pois notamos que a cada ano é acrescido x cm à sua altura.

D10



7) Sim, pois de acordo com o quadro de crescimento, nota-se um aumento crescente em todos os intervalos.

8) Sempre aumentou, poi qualquer período de um ano, encontramos um aumento em sua altura. Esses crescimentos, presente todos os anos, acerretou a mé-dia encontrada no ítem 5., que é de 8cm ao ano.

Ficha 1 – Atividade 2

5) Calcule a razão $\frac{Äh}{Ät}$ no intervalo de 0 a 4 anos e no intervalo de 4 a 8 anos.

D1

5) A razão no intervalo de 0 a 4 seria $\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{51}{4} = 12,75$ cm/ano

A razão no intervalo de 4 a 8 seria $\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{27}{4} = 6,75$ cm/ano

D2

Questão nº5

R= de 0,4 => 1,66 e de 4,8 => 96,4 dividimos todas as alturas pelas idade e somamos todos os resultados

D9

5) Δh => VARIAÇÃO DE 0 À 4 = 47 à 98 cm

Δh => VARIAÇÃO DE 4 À 8 = 98 À 125 cm

Δt => VARIAÇÃO DE 0 A 4 = 4 (porque 4-0 = 4)

Δt => VARIAÇÃO DE 4 A 8 = 4 (porque 8-4 = 4)

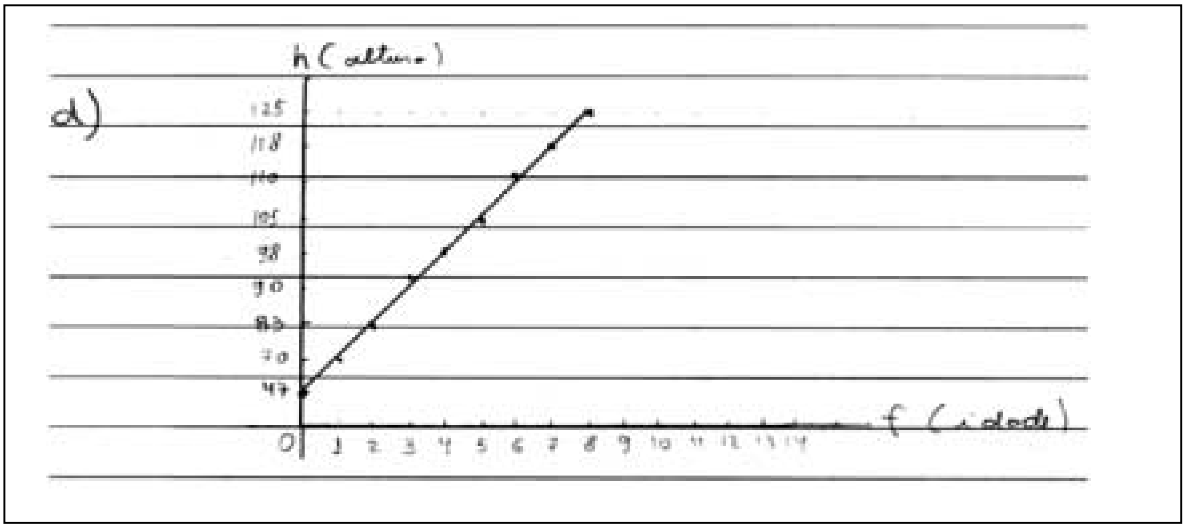
A RAZÃO entre 0 À 4 ANOS É DE 12,75, porque 51 ÷ 4 = 12,75

A RAZÃO entre 4 A 8 ANOS É DE 6,75, porque 27 ÷ 4 = 6,75

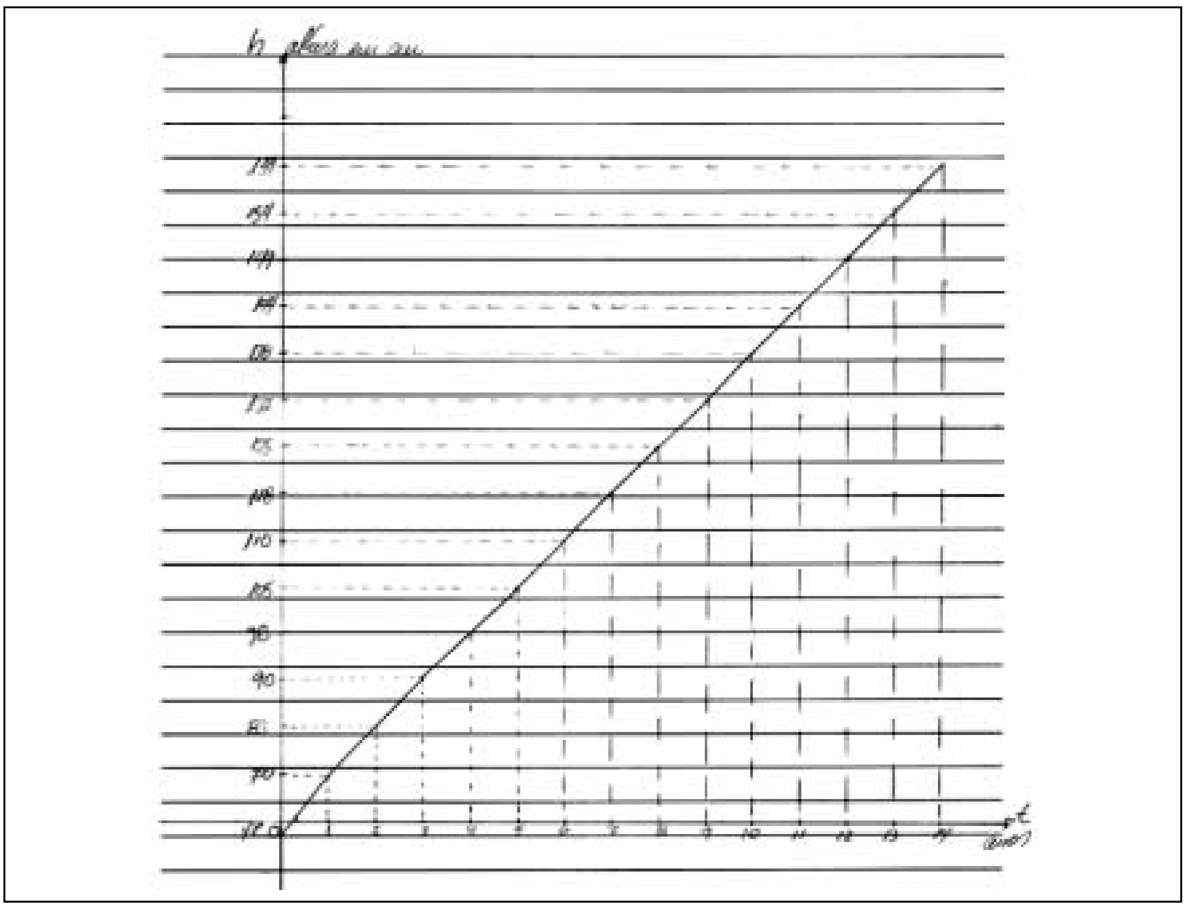
Ficha 1 – Atividade 3

d) Represente a relação de interdependência entre h e t no plano cartesiano.

D6



D17



Ficha 2

5) em qual intervalo de dois censos consecutivos ocorreu a maior taxa de variação média da população brasileira?

6) se no intervalo de 1996 a 2000 a taxa de variação média do número de habitantes no Brasil fosse 2,5 milhões / ano, qual deveria ser o total de habitantes em 2000?

D1

5) Foi maior o crescimento entre os censos de 1970 a 1980 (40 milhões)

— Verificamos estes dados através da tabela, pois a inclinação neste periodo foi maior comparado aos outros

6) Neste periodo seriam 4 anos sendo que cresceria 2,5 milhões/ano o total em 4 anos seria 10 milhões, sendo assim em 2000 o total de habitantes seria 160 milhões habitantes

D12

5. De 1970 a 1980 = 120 − 90 = 30 milhões de pessoas.
Este foi o maior intervalo

6. Se fosse 2,5 milhões/ano o total deveria ser 2,5 x 4 = 10 milhões, portanto em 2000 a média seria de 160 milhões de pessoas, em 1996 é = 150 milhões + 10 milhões = 160 milhões.

D16

(5) Ocorreu a maior taxa de variação da população brasileira no intervalo de 1970 a 1980 onde a variação foi de 30 milhões de habitantes.

(6) O total de habitantes em 2000 estima-se 160 milhões, pois em 1996 havia 150 milhões e houve um acrescimo de 2,5 milhões/ano que corresponde a 10 milhões de habitantes.

Ficha 3

1) Esse gráfico revela que o teor da nicotina N é uma função do tempo t, ou seja, N = f(t). Comente sobre esta relação.

3) Avalie o teor da nicotina no instante t =3h, ou seja, aproxime um valor para f(3).

D17

① $N = f(t)$

$0{,}4 = f(6)$

$f = \frac{6}{0{,}4} = 15\,mg/horas$

Percebemos que após 3 horas de ter fumado havia ainda 15mg/minutos.

D5

3) $N = f(T)$

$N = 0{,}15 \cdot 3$

$N = 0{,}45$

D10

③ sabemos que no instante t = 0h N = 0,4 logo:

$N = f(t)$ $\quad 0{,}4 = f(3)$ $\quad f = \frac{0{,}4}{3}$ $\quad f = 1{,}333\ldots$

Resposta: O teor de nicotina no instante t = 3h é 1,333... mg.

Ficha 4 – Atividade 1

5) Determine a taxa de variação média da posição do móvel em relação ao tempo no intervalo de t = 0 a t = 3s. Dê as unidades de sua resposta e interprete o resultado.

D5

5) $S(T) = 0^2+1$ $\qquad$ $S(2) = 2^2+1$ $\qquad$ $S(3) = 3^2+1$

$S(T) = 1$ $\qquad$ $S(2) = 5$ $\qquad$ $S(3) = 10$

$T = 1+5+10 = 16 \div 3 = 5{,}333$ m

$T = 5{,}333$ m

D9

5) $S(0) = 0^2 + 1 = 1$

$S(1) = 1^2 + 1 = 2$

$S(2) = 2^2 + 1 = 5$

$S(3) = 3^2 + 1 = 10$

A TAXA de VARIAÇÃO média do móvel é igual a 4,5 porque

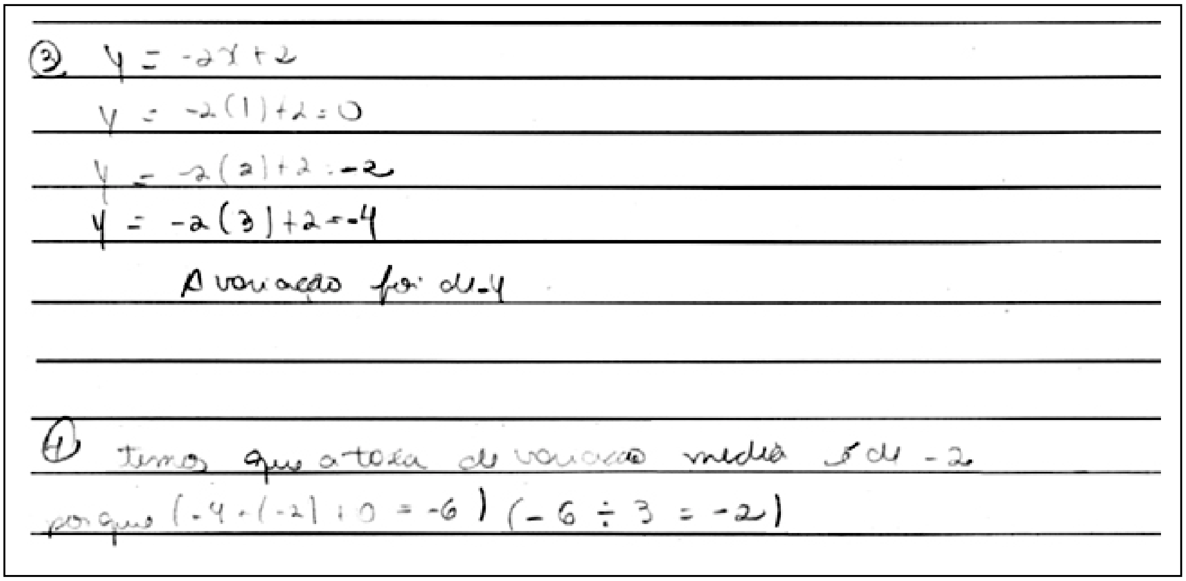
$1+2+5+10 = 18 \div 4 = 4{,}5$

Ficha 4 – Atividade 2

3) Determine a variação de y no intervalo de x = 1 a x = 3.

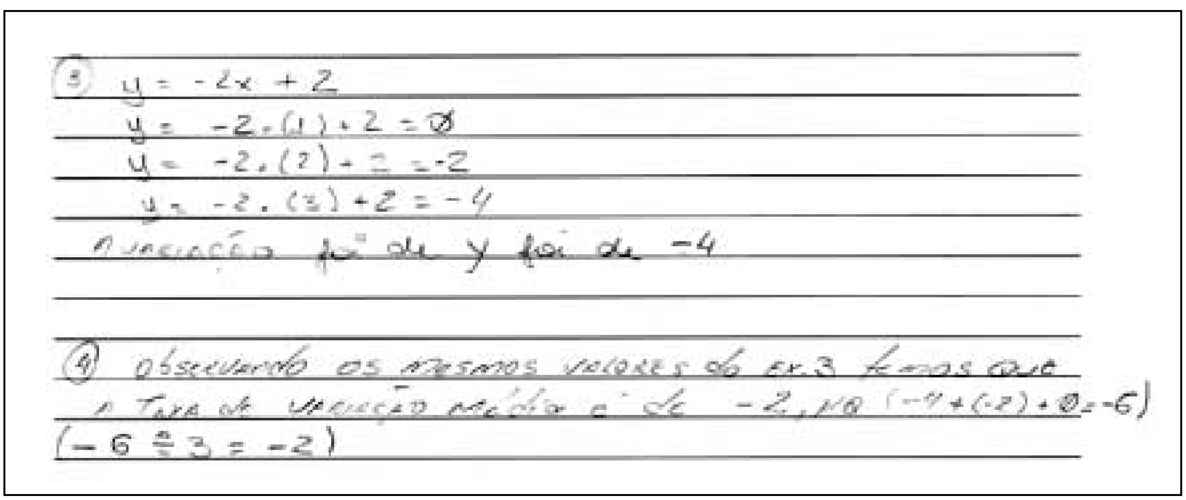
4) Determine a taxa de variação média de y no intervalo de x = 1 a x = 3.

D5


③ $y = -2x + 2$
$y = -2(1)+2 = 0$
$y = -2(2)+2 = -2$
$y = -2(3)+2 = -4$
A variação foi de -4

④ temos que a taxa de variação média é de -2
porque $(-4 + (-2) + 0 = -6)$ $(-6 \div 3 = -2)$

D9


③ $y = -2x + 2$
$y = -2.(1)+2 = \varnothing$
$y = -2.(2)+2 = -2$
$y = -2.(3)+2 = -4$
A variação foi de y foi de -4

④ observando os mesmos valores do ex.3 temos que a taxa de variação média é de -2, no $(-4+(-2)+0 = -6)$
$(-6 \div 3 = -2)$