MARISA DA SILVA DIAS

RETA REAL

CONCEITO IMAGEM E CONCEITO DEFINIÇÃO

Mestrado em Educação Matemática

PUC / São Paulo

2002

MARISA DA SILVA DIAS

RETA REAL

CONCEITO IMAGEM E CONCEITO DEFINIÇÃO

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de MESTRE em Educação Matemática, sob a orientação da Professora Doutora Sonia Barbosa Camargo Igliori.

PUC / São Paulo

2002

BANCA EXAMINADORA

Autorizo exclusivamente para fins acadêmicos e científicos a reprodução total ou parcial desta dissertação por processos fotocopiados ou eletrônicos.

Marisa da Silva Dias

São Paulo, fevereiro/2002.

AGRADECIMENTOS

À Professora Doutora Sonia Barbosa Camargo Igliori, minha orientadora, pela confiança e valiosa contribuição na conclusão desse trabalho.

Às Professoras Doutoras Maria Cristina Souza de Albuquerque Maranhão e Gilda de La Rocque Palis, pelas sugestões oferecidas a este estudo.

Aos professores do programa, cujas aulas proporcionaram o desenvolvimento das idéias aqui contidas. E, em especial, ao Professor Doutor Benedito Silva pelo auxílio no início desta pesquisa.

Às amigas de todas as horas Rosemary Romagnoli Possani, Cláudia C. V. Brazil e Micheline R. K. da Cunha, pela amizade e ajuda.

Aos queridos componentes do grupo de estudos GEBJC pela inspiração, pela ternura, incentivo e discussões que muito contribuíram para meu crescimento pessoal e profissional.

À CAPES, pela ajuda financeira.

Às pessoas que conheci nesta jornada que se tornaram importantes em minha vida.

Aos professores que participaram da realização deste estudo.

À Professora Ivone Borelli, pela leitura e revisão deste texto.

Dedicatória

À minha família, pelos
exemplos que me direcionaram para
que eu descobrisse a riqueza da vida.

Meu carinho

RESUMO

Esta pesquisa investigou *conceito imagem* e *conceito definição* relacionados às propriedades da reta real e, particularmente, à noção de densidade. Os sujeitos foram 45 professores de matemática do ensino fundamental e médio de São Paulo (Brasil). A hipótese foi que concepções dos professores seriam as mesmas apresentadas por estudantes, desse mesmo segmento de ensino. Para validarmos esta hipótese, desenvolvemos um teste diagnóstico e comparamos os resultados dos professores com os obtidos em pesquisas nacionais e internacionais sobre as concepções de estudantes. A investigação confirmou a hipótese e evidenciou a existência de *conceitos imagem* e *definição* não coerentes com o formal. Um grupo de quatro professores também participou de entrevistas desenvolvidas com o objetivo de criar situações nas quais *fatores de conflito potencial* tornassem *fatores de conflito cognitivo.* As reações dos professores durante essas entrevistas indicaram que essas situações possibilitam-lhes alcançar *estágios intelectuais mais elevados* em relação à reta real.

Palavras-chave: conceito imagem, conceito definição, reta real, número real.

ABSTRACT

The study investigated *concept image* and *concept definition* related to the properties of the number line, and particularly the notion of density. The subjects were 45 teachers of secondary school mathematics (students aged 11-16 years) from São Paulo (Brazil). It was hypothesised that the teachers' conceptions would match those of students in the age range that they teach. In order to validate this hypothesis, a diagnostic test was developed and the results of the teachers were compared with results obtained in both national and international studies of students' conceptions. Analysis confirmed the hypothesis and indicated that both the concept image and concept definition used by the teachers were not coherent with formal. A sub-set of four teachers also participated in interviews developed with the aim of creating situations in which *potential conflict factors* would become *cognitive conflict factors*. Teachers' reactions during these interviews indicated that these situations helped them to enhance to a *higher intellectual stages* in their reasoning about the number line.

Key words: concept image, concept definition, number line, real number.

SUMÁRIO

Introdução

Este estudo trata-se de uma pesquisa diagnóstica e fundamentada nas noções de *conceito imagem* e *conceito definição* desenvolvidas por Tall e Vinner (1981), que se relacionam aos processos cognitivos de *aquisição* e de *expressão* de um conceito pelo indivíduo. Em particular, compara a formação de conceitos cotidianos àqueles desejáveis em contextos científicos. Na vida diária, não necessitamos de definições para adquirir um conceito, mas em contextos científicos as definições exercem um papel importante, impondo diferentes hábitos de raciocínio.

O que os alunos consultam diante de um problema matemático? Tall e Vinner afirmam que, na maioria dos casos, os estudantes respondem às tarefas escolares solicitadas, utilizando seus *conceitos imagem*. Assim, podem contrariar as expectativas do professor que espera uma resposta baseada na definição formal. Então, para o processo de ensino e aprendizagem da matemática é importante considerar como os alunos expressam os conceitos.

Objetivamos investigar como as noções de Tall e Vinner, sobre a reta real, aparecem em uma população de professores de matemática. A finalidade é contribuir para a melhoria do ensino e aprendizagem da matemática, na medida que se procura investigar a relação entre os *conceitos imagem* e *definição* da reta real, dos professores pesquisados e concepções apresentadas por alunos sobre esse tema (Margolinas, 1988; Robinet, 1986; Igliori; Silva, 1998; Fischbein; Jehian; Cohen, 1996; Santos, 1995).

Procuramos encontrar idéias provenientes de outros conjuntos numéricos que se “generalizadas abusivamente” (Artigue, 1990) podem impedir a aquisição de conhecimentos sobre a reta real.

Desse modo, contribuir para a formação de professores.

1. Referencial teórico

Esta pesquisa baseou-se nas noções de *conceito imagem* e *conceito definição* que são descritas a seguir.

Vinner (1991) afirma que “Adquirir um conceito significa formar um *conceito imagem* do mesmo” (p. 69). Consideramos como *conceito imagem* o construído pelo indivíduo, a concepção que ele tem de um conceito constituído na comunidade (científica ou não). O *conceito imagem* pode ou não ser coerente com o conceito.

O *conceito imagem* é constituído na estrutura cognitiva do indivíduo, associado a um certo conceito. Essa associação contém representações mentais como: imagens de representações visuais, impressões, experiências e propriedades. Estas podem ser elaboradas pelo indivíduo por intermédio de processos de pensamento sobre as representações mentais. *Conceito imagem* pode revelar-se por palavras ou símbolos matemáticos. Por exemplo, quando o indivíduo expressa o conjunto de números reais menores que 1,25 desta forma: A={... 1,24 ..., 1,23 ..., 1,22 ...}.

O *conceito imagem* pode não ser o mesmo para toda situação. Quando o indivíduo é estimulado por uma situação, naquele momento um *conceito imagem* é evocado em sua mente, *conceito imagem evocado.* Por essa razão, o *conceito imagem* não se constitui necessariamente em um todo coerente. Nesta pesquisa, utilizamos como *conceito imagem,* o *conceito imagem evocado*.

Além disso, o *conceito imagem* pode não existir se, por exemplo, um conceito for introduzido por meio de definição, assim, o indivíduo poderá deixar de formar um *conceito imagem* desse conceito (Vinner, 1991).

As partes do *conceito imagem* podem ser conflitantes, nesse caso, caracteriza-se no indivíduo o *fator de conflito potencial,* tornando-se *fator de conflito cognitivo,* quando essas partes forem evocadas simultaneamente (Tall; Vinner, 1981).

O *conceito definição* é também formado na estrutura cognitiva do sujeito, é *a especificação* do conceito que o indivíduo expressa em forma de palavras. Pode ser apreendido por um indivíduo na escola, ou não, relacionando-se em maior ou menor grau com um conceito constituído na comunidade. Em particular na matemática, "todo conceito, exceto os primitivos, tem definição formal" (DREYFUS, 1990, p. 117). O termo conceito formal ou, simplesmente, conceito foi usado neste estudo quando nos referimos aos científicos.

O *conceito definição* pode ser uma reconstrução pessoal de uma definição formal, sem que ele e a definição do conceito tenham necessariamente significados coincidentes, ou ainda, o *conceito definição* pode ser uma descrição do *conceito imagem.*

O conceito definição é considerado inexistente quando ainda não é formado ou esquecido. O *conceito definição*, também, pode existir e ser inativo, como a memorização de uma definição.

A formação do *conceito definição* pode ocorrer no ato em que o indivíduo é questionado para explicar um conceito.

Fatores de conflito potencial e *fatores de conflito cognitivo* podem acontecer entre as partes do *conceito imagem*, ou ainda, entre a parte do *conceito imagem* com o *conceito definição*. Os *fatores de conflito cognitivo* podem ser conscientes ou inconscientes. Um conflito gerado no subconsciente pode tornar-se consciente depois de algum tempo (Tall; Vinner, 1981).

Os conflitos podem ser revelados pela divergência das respostas dadas em situações envolvendo o mesmo conceito.

Tanto o *conceito imagem* como o *conceito definição* podem ser formados independentemente; além disso, esses conceitos podem ou não interagir.

O *conceito imagem* é considerado inexistente quando "nenhum significado é associado com o nome do conceito" (Vinner, 1991, p. 70). Nesta pesquisa, ampliamos essa relação entre o nome do conceito com seu significado. Para o indivíduo ter um *conceito imagem* sobre um conceito matemático, não é necessário que o relacione com um determinado nome do conceito. Por exemplo, um indivíduo pode não formar qualquer *conceito imagem* relacionado ao nome densidade, mas sim, se questionado diretamente sobre o conhecimento próprio relativo a esse conceito matemático. Conforme a questão, esse indivíduo pode afirmar que entre dois números reais quaisquer e distintos, sempre existe um outro número real diferente deles.

As noções de *conceito imagem* e *conceito definição* foram desenvolvidas não só relativamente à formação de um conceito, mas também como elas se expressam pelo indivíduo em resolução de problemas. Nesta pesquisa, detemo-nos nessa última situação.

Em um processo de aprendizagem, em que um conceito científico é utilizado, professores esperam que o aluno ative seu *conceito definição.* No entanto, "é difícil treinar um sistema cognitivo para reagir contra sua natureza e forçá-lo a consultar definições, seja em um processo de formação de um *conceito imagem* ou de efetivação de uma tarefa cognitiva" (ibid., p.72). O que é esperado pode não ocorrer, pois, na maioria da vezes, as respostas para uma tarefa cognitiva são apresentadas via *conceito imagem*.

A relação coerente entre *conceito imagem* e conceito formal pode ser abandonada pelo indivíduo, se no processo de aprendizagem a mesma não for considerada em uma forma consistente.

O *conceito imagem* é sempre o *evocado* em uma tarefa específica em um certo momento "não afirmamos que sobre diferentes circunstâncias a mesma parte do *conceito imagem* será evocada de novo" (ibid., p. 73). É importante destacar que um indivíduo possui a capacidade de modificar seu *conceito imagem*.

2. Objetivo

Nossa pesquisa tem por objetivo contribuir com o ensino dos números reais. Temos a convicção de que o conceito de número real é fundamental para o estudo da matemática. Por intermédio dos resultados de pesquisas, foi possível avaliar as dificuldades apresentadas pelos alunos. Decidimos, então, conhecer quais concepções sobre esse conceito também apareciam para um grupo de professores de Matemática do ensino fundamental e médio, com formação proveniente de diversas faculdades. Referenciamo-nos para isso nas noções já citadas de Tall e Vinner e investigamos que *conceito imagem e definição* podem ser inferidos desses professores relativamente à reta real.

A hipótese desta pesquisa foi que não existe diferença significativa entre concepções apresentadas por estudantes, do ensino fundamental e médio, relativas à reta real, e às dos professores, sujeitos desta pesquisa, desse mesmo segmento de ensino.

Para desenvolver essa hipótese, comparamos *conceitos imagem* e *definição,* expressos pelos sujeitos, com concepções de estudantes, sobre número real (Margolinas, 1988; Robinet, 1986; Igliori; Silva, 1998; Fischbein; Jehian; Cohen, 1996; Santos, 1995).

As observações realizadas objetivavam também estimar a existência ou não de coerência entre o *conceito imagem e definição* revelado pelos *sujeitos* e o conceito formal.

3. Sujeitos de pesquisa

Os sujeitos desta pesquisa foram 45 professores de Matemática do Ensino Fundamental e Médio, em exercício, e em formação continuada.

4. FASE EXPLORATÓRIA

4.1 Procedimentos para coleta e análise de dados

Este momento constituiu-se da aplicação de um questionário compreendendo questões abertas e fechadas que foi respondido por escrito pelos 28 sujeitos que participaram desta fase.

4.1.1 Objetivo

Esta fase teve como um dos objetivos ajustar questões para a fase sistemática, na busca de termos mais apropriados para a formulação de questões. Não houve pretensão de variar exaustivamente, mas "elaborar questões que possuam o potencial para expor o *conceito imagem* do sujeito" (Vinner, 1991, p.74).

Além disso, permitiu-nos antecipar características dos *conceitos imagem* e *definição,* desses sujeitos sobre propriedades da reta real.

Nesta fase, a comparação das concepções de estudantes sobre número real com os *conceitos imagem* dos investigados, foi realizada com a intenção de fornecer indicações sobre a pertinência da hipótese da pesquisa.

4.1.2 Questionário

O questionário foi composto por três partes. A primeira constou de situações envolvendo o conceito de densidade (Anexos 1 e 2). A segunda, com questões abertas, possibilitou reflexões sobre a primeira parte (Anexo 3). A terceira foi um questionário de identificação dos sujeitos (Anexo 4).

Primeira parte do questionário

Nesta parte, as questões propostas relacionaram-se com o conceito de densidade da reta, isto é, por meio delas procuramos avaliar se os sujeitos tinham a concepção de que "dados dois reais distintos quaisquer, há entre eles infinitos racionais, irracionais e reais".

Ao elaborarmos as questões explorando o conceito de densidade, procuramos uma diversidade de situações, pois, algumas vezes, o *conceito imagem* mostra-se satisfatório somente em um contexto específico (Bezuidenhout; Oliver, 2000).

As referências utilizadas na formulação das questões e na análise das respostas foram resultados de pesquisas, de nossa experiência no sistema educacional e livros didáticos (referenciados na bibliografia).

As pesquisas tomadas como referência tinham por alvo identificar as concepções dos estudantes, em conteúdo e na faixa etária dos sujeitos de interesse desta investigação.

O objetivo descrito para cada questão norteou a inferência dos *conceitos imagem* e *definição* dos investigados.

As questões mais específicas para investigar o *conceito definição* são as do tipo direta como recomenda Vinner: "O que é uma função? O que é uma tangente?" (1991, p. 74). Além de questões desse tipo, procuramos ampliar formulando outras variações.

Esta parte do questionário foi subdividida nos grupos A (Anexo 1) e B (Anexo 2). Metade dos sujeitos respondeu às questões do grupo A e a outra metade as do B. Na elaboração das questões dos grupos, houve variação dos termos utilizados e situações, como por exemplo: Nas questões 3, do grupo A e 2 do grupo B, respectivamente, indicadas abaixo, a variação realizada foi sobre a solicitação, sendo questionado maior e menor na 3, e na 2, apenas menor. Essa variação implicou obter-se na terceira questão um corte, e na segunda, um subconjunto de irracionais.

Questão 3 Considere os conjuntos $A = \{q \in \boldsymbol{Q} \mid q^3 \leq 2\}$ e $B = \{p \in \boldsymbol{Q} \mid p^3 > 2\}$. Há algum número que seja maior que todos os elementos de A e também seja menor do que todos os elementos de B? Se houver, escreva qual (ou quais). Se não, escreva o porquê? Questão 2 Sendo o conjunto $A = \{p \in \boldsymbol{Q} \mid p^3 \leq 2\}$ e o conjunto $B = \{q \in \boldsymbol{Q} \mid q^3 > 2\}$. Há algum número que seja menor do que todos os elementos de B, mas que não pertença a A? Explique sua resposta

Dessa forma a separação dos sujeitos objetivou colher subsídios para a elaboração do questionário da fase sistemática.

<u>Segunda parte do questionário</u>

Constituiu-se de três questões dissertativas para compor as informações das: dificuldades encontradas nas questões da primeira parte, experiências possíveis de compor *conceito imagem* e reflexões sobre os conceitos envolvidos.

<u>Terceira parte do questionário</u>

Com a intenção de conhecer o perfil dos sujeitos pesquisados, elaboramos e aplicamos um questionário de identificação solicitando informações sobre: nome do curso e instituição da graduação, participação em cursos de formação continuada e ciclos que lecionam.

4.1.3 Aplicação

Os grupos A e B das questões continham três partes. Os alunos recebiam cada parte quando finalizavam a parte anterior, para garantir que a primeira fosse respondida a contento, já que era a fundamental. As demais poderiam ser respondidas fora da classe e entregues em outro momento sem prejuízo para a pesquisa. Apenas dois dos sujeitos deixaram de responder o questionário de identificação.

4.2 Objetivo e análise das questões

4.2.1 Questões e objetivos do grupo A

Questão 1

Considere os conjuntos $A=\{x\in \boldsymbol{R} \mid x<1{,}25\}$ e $B=\{y\in \boldsymbol{Q} \mid y<1{,}25\}$. O conjunto A possui um número que seja maior que todos os outros do próprio conjunto? E o conjunto B? Explique sua resposta.

A diferenciação de letras x e y foi feita para melhor avaliar as respostas dos sujeitos. O destaque na letras Q e R teve o propósito de chamar a atenção, por não ser habitual em livros didáticos a utilização de subconjuntos de Q. Este procedimento foi repetido em outras questões.

Objetivo: avaliar se no *conceito imagem* expresso pelos sujeitos há distinção entre a existência de máximo em um subconjunto, cujo universo seja R ou Q.

As referências para elaboração das questões:

Concepção de estudantes sobre a existência de "consecutivo para um número não inteiro". Exemplo, a questão proposta por Santos (1995): "qual é o sucessor de: 1000 1/2 2/3 0,5 0,0001 3,6 3,69 3,4444..." (p. 215), houve alunos que indicaram 3/3; 0,6; 3,70; respectivamente sucessores de 2/3; 0,5 e 3,69, como também 3,44444...; 3,5555 e 3,5 de 3,4444.... Os estudantes franceses declararam 2,9 e 2,999... como o maior número do intervalo [2,3[(Margolinas, 1988). e, em Igliori e Silva (1998), a existência do máximo para o conjunto $\{x \in Q | 0 < x \leq \sqrt{2}\}$.

A questão teve, assim, como intenção avaliar se para os sujeitos de nossa pesquisa a discretização de Q e de R era atributo do *conceito imagem*.

A inexistência do elemento máximo nos conjuntos A e B, justificada pela densidade de R e Q, indicaria atributos de *conceito imagem* congruentes com esse conceito.

Questão 2

Dado um segmento OP de 2cm, existe um ponto desse segmento, mais próximo de P que todos os outros? Explique sua resposta.

A expressão "mais próximo" foi utilizada de maneira informal intencionalmente, esperando respostas sujeitas à interpretação da mesma.

Objetivo: investigar o *conceito imagem* de densidade, utilizando o contexto geométrico.

Nesta questão o contexto geométrico foi usado com o propósito de avaliar, se havia impregnação de uma visão atomísta da reta no *conceito imagem* dos sujeitos. A existência dessa visão foi detectada entre estudantes franceses (Robinet, 1986).

Respostas indicando a existência de um ponto mais próximo, distinto de P, poderiam mostrar uma não congruência entre o *conceito imagem* e o conceito de densidade.

Questão 3

Considere os conjuntos A = $\{q \in \boldsymbol{Q} |\ q^3 \leq 2\}$ e B = $\{p \in \boldsymbol{Q} | p^3 > 2\}$. Há algum número que seja maior que todos os elementos de A e também seja menor do que todos os elementos de B? Se houver, escreva qual (ou quais). Se não, escreva o porquê?

No enunciado desta e de outras questões, escrevemos "número" e não "número real" para não influenciarmos a resposta.

Objetivo: investigar *conceito imagem* e *definição* de número irracional.

A definição de $\sqrt[3]{2}$ como um corte em Q foi usada na questão 3. As respostas poderiam indicar se os sujeitos reconheciam tal definição.

Questões 4, 5 e 6

As questões foram elaboradas com vistas a poder inferir o *conceito definição* do conjunto dos números reais. As perguntas não se restringiram a questões do tipo: O que é...? Como define...? pois procuramos formas que nos pareciam ampliar a série de respostas.

Questão 4

Escreva como você explicaria o que é o conjunto dos números reais para alguém que conhece o conjunto dos racionais.

Objetivo: investigar *conceito definição* de número real.

Procuramos investigar se o *conceito definição* de reais apresentava algo formal ou como $Q \cup I$, tomando como definição de irracional o que não é racional, isto é, o número irracional é aquele que não pode ser escrito como quociente de inteiros. Esse tipo de definição e outras como: número não exato, número com infinitas casas decimais, aparecem como resposta de estudantes (Fischbein; Jehian; Cohen, 1996).

As respostas formais esperadas são: axiomática; cortes de Dedekind, limite de seqüências de Cauchy ou princípio dos intervalos encaixantes.

Questão 5

Escreva como você explicaria o que é o conjunto dos números reais para alguém que conhece somente o conjunto dos inteiros.

Objetivo: investigar *conceito definição* dos reais.

Esta questão foi diversificada em relação à anterior na tentativa de apurar novos elementos. A solicitação de “explicar os reais a partir dos inteiros” foi proposta com a intenção de possibilitar que os sujeitos apresentassem respostas diferentes da clássica $R = Q \cup I$. Nossa formulação teve como intuito exigir dos sujeitos elaboração de propriedades que poderiam nos aproximar de suas representações mentais.

A indicação das propriedades de densidade e de continuidade era necessária para diferenciar os dois conjuntos.

Questão 6

Como você definiria o conjunto dos números reais?

Objetivo: Investigar o *conceito definição* de R.

Esse tipo de questão mais direta é a forma sugerida por Vinner (1991) para investigarmos o *conceito definição*.

Uma influência da prática na sala de aula poderia levar os sujeitos a apresentarem respostas como as indicadas na questão 4, o conjunto dos reais como a união dos racionais e irracionais, semelhantes a de livros didáticos.

Respostas como $R=N \cup Z \cup Q \cup I$ poderiam ser dadas. Em (Robinet, 1986) havia respostas semelhantes quando os estudantes apresentavam $R=N \cup Z \cup Q \cup D$ (D conjunto dos números decimais).

As definições admitidas como formais são as referenciadas na Questão 6.

Questão 7

Assinale V se considerar a sentença verdadeira, F se considerá-la falsa. Escreva por que considerou-a verdadeira ou falsa.

a) ( ) É possível sempre encontrar um número real que esteja entre dois números reais distintos quaisquer.

b) ( ) Sempre é possível encontrar um ponto que esteja entre dois pontos distintos de uma reta.

Objetivo: investigar o *conceito definição* de densidade do conjunto dos reais, por meio de duas representações: como conjunto de números ou de pontos de uma reta.

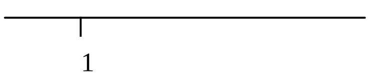
As afirmativas foram propostas para verificar se havia identificação com o nome: densidade.

As respostas poderiam revelar *conceitos imagem* como, por exemplo, de uma “reta racional”: “uma vez que o conjunto dos pontos racionais cobre a reta densamente, pode parecer que todos os pontos sobre a reta são racionais” (Courant; Robbins, 2000, p.70); ou ainda, que a reta é uma boa representação de R, sem contudo admitir a equivalência Robinet (1986).

4.2.2 Questões e objetivos do grupo B

Questão 1

Represente, na reta abaixo, o próximo número inteiro ao número dado. Justifique sua resposta.



Represente, na reta abaixo, o próximo número real ao número dado. Justifique sua resposta.

Objetivo: investigar *conceito imagem* de densidade dos reais.

A elaboração desta questão foi uma variação da Questão 2 do grupo A, com as mesmas expectativas.

Buscamos confrontar diretamente a idéia de sucessor, utilizando aqui a representação visual na reta numerada.

Questão 2

Sendo o conjunto A = $\{p \in \boldsymbol{Q} | \; p^3 \leq 2\}$ e o conjunto B = $\{q \in \boldsymbol{Q} | \; q^3 > 2\}$. Há algum número que seja menor do que todos os elementos de B, mas que não pertença a A? Explique sua resposta.

Objetivo: investigar o *conceito imagem* do conjunto de irracionais.

Esta questão foi uma variação da Questão 3 do grupo A. Aqui não se trata de um corte, temos um subconjunto de irracionais, $\{x \in I | x^3 \leq 2\}$, sendo I o conjunto dos irracionais.

Questão 3

De todos os números menores que 1, existe um que esteja mais próximo dele? Se sim, represente-o. Se não, escreva o por quê.

Objetivo: investigar *conceito imagem* de densidade nos números reais.

Essa questão foi uma variação da questão 2 do grupo A, formulada em língua natural.

Questões 4 e 5

Questão 4

Para cada um dos itens, responda: Existe algum número **racional** entre os números representados abaixo? Se existir, escreva qual (quais ou alguns)? Se não, escreva o porquê.

a) 3,14 e π?

b) $\sqrt{3}$ e $\sqrt{4}$?

c) 0,333 e 0,333... ?

d) 2/3 e 0,666... ?

e) 1/7 e 2/7?

f) $\sqrt{2}$ e 1,300301302303...? (os algarismos seguem essa lei de formação)

Em cada item, há as questões:

Quantos existem? Qual (quais ou alguns)? ou Não existe, por que...

Objetivo: investigar *conceito imagem* da densidade dos racionais sobre R.

Questão 5

Para cada um dos itens, responda: Existe algum número **irracional** entre os números representados abaixo? Se existir, escreva qual (quais ou alguns)? Se não, escreva o porquê.

Objetivo: investigar *conceito imagem* sobre a densidade dos irracionais sobre R.

a) 3,14 e π?

b) $\sqrt{3}$ e $\sqrt{4}$?

c) 0,333 e 0,333... ?

d) 2/3 e 0,666... ?

e) 1/7 e 2/7?

f) $\sqrt{2}$ e 1,300301302303...? (os algarismos seguem essa lei de formação)

Essas questões que envolvem o conceito de densidade, foram proposta utilizando um contexto numérico. Questões semelhantes encontram-se nas pesquisas de Santos (1995), Robinet (1986) e Igliori e Silva (1998). Nos enunciados de nossas questões, ampliamos o número de pares de racionais e irracionais, variando as representações, e nosso objetivo foi analisar concepções sobre a densidade dos racionais e também dos irracionais sobre os reais.

Foi esperado que os sujeitos apresentassem como respostas, exceto para o item D, que existem infinitos racionais (questão 4) e infinitos irracionais (questão 5) entre os números dados e que, ainda, pudessem exemplificar.

Para os itens A e C, os dois números foram escolhidos para avaliar o efeito da aproximação. Em Santos (1995), verificamos respostas de alunos exemplificando 0,09 e 0,080 entre 0,08 e 0,081. Em Robinet (1986), houve alunos que não consideraram a existência de decimais entre π e 3,1416, que indicaram a existência de apenas um real (3,141888...) e um decimal (3,1418) entre π e 22/7.

Nos itens B e E, escolhemos pares de números com a mesma representação. Em B, por radical e em E, fracionária. Uma concepção da existência de uma “reta racional”, foi expresso por respostas do tipo “0,1; 0,2; 0,3; 0,4; ...0,9”, “0,31; 0,32; 0,33; ...” (Santos,1995, p.131/132), quando solicitado números compreendidos entre 0 e 1. Em Igliori e Silva (1998), estudantes não consideraram a existência de números entre 3/11 e 4/11.

Em questões como a do item D, detectamos nas pesquisas, confusão entre número e representação. Nessas pesquisas, havia estudantes que consideraram como distintos um número apresentado em representações diferentes. Robinet (1986); Igliori e Silva (1998) encontraram, entre os estudantes, uma concepção da existência de números entre 0,333... e 1/3. Em nossa pesquisa, diferenciamos, o número dado no enunciado, mantendo os tipos de representações: decimal infinita e fracionária.

Para variarmos os extremos do intervalo, no item F selecionamos dois irracionais. Neste item, colocamos os números na ordem decrescente para observarmos se a ordem era um atributo que influenciaria.

Encontramos respostas de estudantes considerando como racional π; 0,121221...; $3\sqrt{8}$ (Fischbein, Jehian; Cohen,1996) e, $\sqrt{3}$; 4,21222324... em Igliori e Silva (1998). Ou ainda, como irracionais 0,555...; 34,2727...; -22/7; $\sqrt{16}$ (Fischbein; Jehian; Cohen,1996) e, 3,1416; 1,999...; 4,2121...; 0,111...; 0,33...3 (30d) (Igliori; Silva, 1998), compondo uma concepção de que um número irracional é aquele que possui representação decimal ilimitada ou é um número não exato. A escolha dos números foi norteada por esses resultados.

Questão 6

Como você ordenaria os pares de números que aparecem na questão anterior? Represente-os em uma reta.

Objetivo: investigar *conceito imagem* da relação de ordem dos reais.

Dificuldades na ordenação de reais foram demonstradas pelos estudantes, conforme Igliori e Silva (1998). Não tínhamos expectativa que os professores, sujeitos desta pesquisa também as apresentassem, mesmo porque questões de ordenação aparecem com certa freqüência em livros didáticos. Com o objetivo de confrontação, elaboramos a questão. Além disso, o conceito de ordem na reta relaciona-se com o conceito de densidade, nosso alvo principal.

Questão 7

Escreva o que significa para você o conjunto dos números reais ser ordenado.

Objetivo: Investigar *conceito definição* de ordem nos reais.

Esperava-se encontrar respostas que apresentassem exemplos, ou ainda de forma simbólica expressando-se assim: dados dois reais x e y, ou $x<y$ ou $y<x$, ou $x=y$ (livro didático) .

O desejável foi que apresentassem respostas definindo de maneira formal a relação de ordem nos reais indicando que neste conjunto a relação $x \leq y \Leftrightarrow x=y$ ou existe o número real c positivo tal que $y + c = x$ é de ordem.

Questão 8

Você conhece a expressão <u>densidade numérica</u>? Se sim, escreva o que você conhece sobre esse assunto.

Objetivo: investigar *conceito definição* de densidade

O conceito de densidade normalmente não é explorado nos livros didáticos associado a essa palavra. Encontramos em Giovanni, Giovanni JR. e Bonjorno (1998) uma referência sobre a densidade de Q.

Procuramos evitar que os sujeitos evocassem “densidade” no sentido utilizado pela Física e pela Química, referenciando-a como numérica, e sublinhamos, visto que essa expressão não é utilizada em livros.

4.2.3 Segunda parte do questionário: questões dissertativas

Aqui o objetivo, foi o de refinar a anterior com vistas a melhorar a elaboração do questionário para a fase sistemática.

Nossa intenção era poder verificar as dificuldades, dúvidas por meio de reflexões que os sujeitos pudessem explicitar. Tínhamos com isso a expectativa de efetivar antecipações que pudessem ser utilizadas na fase sistemática.

Questão 1

Após ter respondido as questões e refletido sobre elas, você teve dificuldade (ou dúvida) em algumas delas? Quais questões e quais dificuldades (ou dúvidas)?

Objetivo: investigar o entendimento das questões e seus enunciados.

Questão 2

Você conhecia questões semelhantes a essas? Quais? Onde?

Objetivo: investigar experiências possíveis de compor ou refletir *conceito imagem*.

Questão 3

O que as questões fizeram você refletir?

Objetivo: investigar opiniões sobre as questões para auxiliar no

4.2.4 Terceira parte do questionário: questões para identificação

Nesta parte, procuramos identificar os sujeitos relativamente à formação universitária, ao tempo de docência, às disciplinas que lecionaram e aos livros didáticos que utilizavam.

O nível de ensino que os sujeitos ministraram matemática e tempo de docência, interessava pois permitiria selecionar o nível para nossa pesquisa. Quanto aos dos livros didáticos, para avaliar possível interferência dos mesmos na formação do *conceito imagem/definição* dos sujeitos.

Propusemos questões referentes ao estudo sistemático dos números reais, para podermos observar a influência da definição formal no *conceito definição imagem*. Outras questões em relação a graduação: instituição, nome do curso, cidade e período, permitiram-nos compor o perfil dos sujeitos.

4.3 Resultados e Análises dos Questionários

4.3.1 Grupo A

Questão 1

Considere os conjuntos A={x∈***R*|** x<1,25} e B={y∈***Q*|** y<1,25}. O conjunto A possui um número que seja maior que todos os outros do próprio conjunto? E o conjunto B? Explique sua resposta.

Total: 14	Tipo de resposta
4	Não 1. por que existem infinitos números entre um número e outro; 2. existem infinitos que antecedem 1,25; 3. por que A e B significam: A={...1,24...,1,23...,1,22...} e B={...1,24...,1,23...}; 4. o conjunto dos números reais é infinito até nos intervalos sempre haverá mais um infinito número
3	Sim 5. um imediatamente menor; 6. 1,24
3	7. conjunto R é maior que o conjunto Q; 8. ele é um valor decrescente; 9. não ficou claro o enunciado
4	Em branco

<u>Análise das respostas de categoria “ não”</u>

A resposta 2, indica concepção de infinito potencial, sem congruência com o conceito investigado. As outras três representam *conceito imagem* com algum vínculo com a noção de densidade, ou pela simbologia que foi utilizada ou pela maneira de referir-se à infinitude.

<u>Análise das respostas de categoria “ sim”</u>

O *conceito imagem* de “antecessor de decimais” foi explicitada nas 3 respostas dadas nessa categoria. Essas respostas eram apresentadas uma única vez sem deixar claro os subconjunto referenciados. Interpretamos como a admissão dos sujeitos de existência de antecessor quer para os racionais como para os reais e um *conceito imagem* discreto para ambos. O comentário “qual a diferença?” em relação aos dois conjuntos (Anexo 5) reforça nossa interpretação.

Questão 2

Dado um segmento OP de 2cm, existe um ponto, desse segmento, mais próximo de P que todos os outros? Explique sua resposta.

Total: 14	Tipo de resposta
8	Sim 1. P; 2. 1,999999; 3. 2,999...; 4. número que antecede a P; 5. sempre existirá um valor bem próximo de P; 6. sabendo que um segmento é um conjunto de pontos finitos sempre existirá. Ex. 1,999 é mais próximo que 1,998
4	Não 7. por meio dos números incomensuráveis; 8. posso ter infinitos pontos que se aproximam de P, mas nunca é o mais próximo; 9. mesmo que exista um ponto muito próximo de P, entre esse ponto e P existem infinitos pontos; 10. não é possível diferenciar pontos de um segmento sem que tenham denominações, isto é, há infinitos pontos entre dois pontos de um segmento mesmo estando representados lado a lado
2	Não responderam

<u>Análise das respostas de categoria “ sim”</u>

Os *conceitos imagem* que são explicitados em 7/14 das respostas afirmativas estão relacionados a uma “reta racional”, por vezes, discreta como em 4 e 6.

Para a reposta 1, interpretamos que sujeito atribuiu ao termo “ mais próximo” significado matemático o que nos levou a supor que o mesmo poderia ter um *conceito imagem* congruente com o conceito de densidade.

Análise das respostas de categoria “ não”

As repostas 2 e 3, apresentam justificativas que consideramos como indicando um *conceito imagem* de densidade congruente ao conceito. A 10, interpretamos como *conceito imagem* atomístico da reta, pela utilização da expressão “lado a lado” .

Interpretamos a resposta 1 dessa categoria como indicando *conceito imagem* com algum vínculo com a densidade dos irracionais (não comensurável).

Questão 3

Considere os conjuntos $A = \{q \in \boldsymbol{Q} |\ q^3 \leq 2\}$ e $B = \{p \in \boldsymbol{Q} | p^3 > 2\}$. Há algum número que seja maior que todos os elementos de A e também seja menor do que todos os elementos de B? Se houver, escreva qual (ou quais). Se não, escreva o porquê?

Total: 14	Tipo de resposta
5	Sim 1. $\sqrt[3]{2{,}2}$, $\sqrt[3]{2{,}5}$; 2. 2 em A; 3. $q=\sqrt[3]{2}$, $p=\sqrt[3]{2}$
4	Não 4. há infinitos números que eu posso escrever; 5. não pode ser simultaneamente maior que 2 e menor ou igual a 2; 6. o menor número é 2; 7. por que o maior em A é 2 e o menor em B é 2 (desenhou intervalos reais na forma geométrica)
5	Em branco ou não responderam

Análise das respostas de categoria “ sim”

As respostas em que consideramos, em parte, um *conceito imagem* com uma coerência foram as que fizeram referência ao número $\sqrt[3]{2}$.

A resposta do tipo 1, desta categoria foi interpretada como um *conceito imagem* de reta discreta, também para resposta 1 que apresentou números com variação discreta.

O *conceito definição* de irracional não foi expresso por nenhum dos sujeitos de modo a indicar congruência com a definição formal.

Análise das respostas de categoria “ não”

As repostas desta categoria foram por nós consideradas indicando um *conceito imagem de “reta racional”*.

Questão 4

Escreva como você explicaria o que é o conjunto dos números reais para alguém que conhece o conjunto dos racionais.

Total: 14	Idéias envolvidas
10	Livros didáticos R=N∪Q∪Z∪I; 1. R tem todos os conjuntos inclusive os racionais; 2. os irracionais são números que não podem ser escritos na forma de fração; 3. o número que não se consegue escrever em forma de fração ex. √2, √3, etc ...; 4. R=Q∪Irracionais, por exemplo √2, π, 1,7835...; 5. calcularia a raiz de um número que não fosse raiz quadrada perfeita; 6. ...existem os irracionais...pois ao andarmos sobre a reta numérica dos racionais daremos pulos para chegar ao outro número, e que existe outro número entre um racional e outro
2	Outras acrescentando outros números novos; Q⊂R
1	diagrama onde I⊃Q
1	Em branco

As respostas da primeira categoria foram interpretadas como um *conceito definição* que apresentou variações de definições dadas em livros Alguns apenas exemplificaram.

A reposta 7 foi considerada como representação de um *conceito imagem* discreto da reta real. O sujeito explicitou a não densidade usando a palavra “pulo”.

Questão 5

Escreva como você explicaria o que é o conjunto dos números reais para alguém que conhece somente o conjunto dos inteiros.

Total: 14	Idéias envolvidas
9	Livros didáticos 1. $R=Z\cup Q\cup I$; 2. $R= Z\subset Q\cup I$; 3. $R=N\cup Z\cup Q\cup I$; 4. $R=Q\cup I$; 5. $Z\subset R$; 6. da mesma forma que a questão anterior
4	Outras 7. conjunto dos números racionais é aquele que envolve os números inteiros e todos aqueles que estão entre um número inteiro e outro; 8. os números não exatos que são representados em forma de fração, raiz, etc., 9. falo dos números que serão acrescentados para formar o novo conjunto; 10. demonstraria a reta com os números inteiros e subdividiria os valores entre um número até chegar no próximo (desenhou um segmento destacando os números -2, -1/2, -1, 0, 1/3, 1 e 2)
1	Teria que pensar a respeito

A resposta 7 da segunda categoria, interpretamos como um *conceito imagem* de “reta racional”. Como *conceito definição* representacional identificamos na resposta dois da dessa mesma categoria.

Questão 6

Como você definiria o conjunto dos números reais?

Total: 14	Idéias envolvidas
6	Livros didáticos 1. $R=N\cup Z\cup Q\cup I$; 2. $R=Q\cup I$; 3. (no diagrama de Venn); 4. união dos naturais, inteiros e valores intercalados entre um e outro; 5. (diagrama de Venn, com $I\supset Q$)
5	Outras 6. conjunto dos números existentes; 7. conjunto mais amplo pois contém todos os outros conjuntos; 8. são inteiros, frações, dízimas e decimais
3	Em branco ou não compreensível "R={R-A}"

Na primeira categoria o *conceito definição,* do conjunto dos números reais expressou-se como apresentado em livros didáticos: $R=Q\cup I$ ou uma variação deste $R=N\cup Z\cup Q\cup I$; em forma de diagrama de Venn, (em uma dessas com $I\supset Q$) Na resposta 4, o *conceito definição* de real era permeado pela noção de densidade ("valores intercalados entre um e outro").

As respostas 6 e 7 indicam o *conceito definição* dos reais como os únicos números existentes (conjunto amplo). O *conceito definição* de "reta racional" e encontrado na resposta 3.

Questão 7

Assinale V se considerar a sentença verdadeira, F se considerá-la falsa. Escreva o porquê considerou-a verdadeira ou falsa.

a) ( ) É possível sempre encontrar um número real que esteja entre dois números reais distintos quaisquer.

b) ( ) Sempre é possível encontrar um ponto que esteja entre dois pontos distintos de uma reta.

item	V	F	Em branco	Tipos de respostas de quem assinalou V e F
a	10	0	4	Verdadeiro entre um número real e outro estarão todos os números reais possíveis; 1. existem infinitos números entre um real e outro; 2. qualquer que seja seu valor se adicionarmos ou subtrairmos um pelo outro teremos um valor real; 3. R contém outros números
b	8	3	3	Verdadeiro 4. a reta é completa; 5. existem infinitos pontos em uma reta numérica; 6. não pode existir lacuna entre os pontos, por esse motivo podemos encontrar um ponto entre um e outro; 7. existem os números decimais. 8. Falso 9. depende do conjunto definido; 10. existem infinitos pontos, poderei encontrar apenas uma aproximação; 11. são infinitos números entre um e outro

Houve 7/14 respostas verdadeiras para os dois itens, com justificativas em 4 delas. Consideramos *conceito definição* vinculado ao conceito de densidade apenas as justificativas 1 e 2. Os outros 5 sujeitos, mobilizaram *conceitos definição* sem vínculo com o conceito de densidade (ausência de explicitação ou justificativas vagas).

A justificativa 11, categoria falso, o sujeito evocou *conceito definição* de densidade, mas não estabeleceu congruência com a definição formal.

O conceito definição de densidade apresentou-se como o de completude nas respostas 5 e 7.

Nas respostas verdadeiras para o item a e falsas para o item b, detectamos um fator de conflito ao menos potencial entre existência do número e impossibilidade de poder determiná-lo.

A equivalência entre o conjunto R e a reta real, não compôs os *conceitos definição* desses sujeitos, pois quando uma resposta indicava congruência com o conceito de densidade no item a, não se mantinha no b. Esta interpretação é reforçada na resposta: “depende do conjunto definido”.

4.3.2 Grupo B

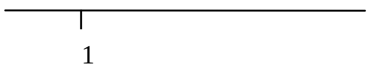
Questão 1

a) Represente, na reta abaixo, o próximo número inteiro. Justifique sua resposta.

Total: 14	Tipo de resposta
13	Sucessor
1	Em branco

Neste item, as respostas apresentaram um *conceito imagem* coerente com o conceito de sucessor.

b) Represente, na reta abaixo, o próximo número real. Justifique sua resposta.



Total: 14	Tipo de resposta
7	Não 1. impossível; 2. porque é infinitamente grande; 3. não é possível representar pois na reta real existem infinitos números entre 1 e 2; 4. R é denso e é representado na reta por intervalos; 5. não é possível representar o próximo número real na reta acima, pois podemos escrever com 5 casas decimais...
6	Sim 6. 1,1 é o próximo número real (incomensuráveis); 7. 1,01 escolhi aleatoriamente; 8. 1,0000...1 por que entre 1 e 1,1 existem infinitos números reais; 9. 1,5 quantas casas quantos zeros?; 10. o conjunto dos números reais é denso por esta razão é difícil escrever o número exato sucessor do número 1; 11. sendo o conjunto dos reais um conjunto denso poderíamos representar um ponto junto com o número 1 sem deixar nenhum espaço seria o máximo que poderíamos fazer; 12. seria quase impossível representar o número real, pois na reta real há infinitos números um muito próximo do outro
1	branco

<u>Análise das respostas de categoria “não”</u>

As resposta 3 e 4 expressaram um *conceito imagem* coerente com o conceito de densidade.

<u>Análise das respostas de categoria “sim”</u>

Os 7/14 sujeitos que representaram números decimais ou pontos, evidenciaram um *conceito imagem* “reta discreta” para esse item, vinculado a uma “sucessão de decimais”, ou apresentando como suficiente um número aproximado. Entre essas, a resposta 12 indicou um conflito, pelo menos potencial, entre a existência e a impossibilidade de determinar e representar. Nas duas respostas (10 e 11) que expressaram um *conceito imagem* relacionado com o nome “densidade”, encontramos conflito entre o conceito de densidade e uma visão discreta para R. Um no contexto geométrico, ao desenhar um ponto “grudado” ao ponto representado, apresentando uma visão atomísta da reta, outro utilizando o contexto numérico.

As respostas 5, 7 e 12, expressam associação da palavra “próximo” com significado de aproximação, consideramos esse fato na fase sistemática.

Questão 2

Sendo o conjunto A = $\{p \in \boldsymbol{Q} |\ p^3 \leq 2\}$ e o conjunto B = $\{q \in \boldsymbol{Q} |\ q^3 > 2\}$. Há algum número que seja menor do que todos os elementos de B, mas que não pertença a A? Explique sua resposta.

Total: 14	Tipo de resposta
8	1. Sim, ex. $\sqrt{2}$
1	Não 2. { }; 3. qualquer número menor que B está em A; 4. não pois $p \leq \sqrt[3]{2} < q$
5	Em branco

<u>Análise das respostas de categoria “sim”</u>

A resposta que apresentou um *conceito imagem* coerente com o conceito, confirmou a existência, mas encontrou apenas um irracional indicando-o (embora incorreto).

<u>Análise das respostas de categoria “não”</u>

Os sujeitos dessa categoria indicam um *conceito imagem* de “reta racional” ao indicarem um número, por não considerarem a existência do subconjunto de irracionais, nesse contexto.

Em respostas do tipo 4, interpretamos como um conflito no *conceito imagem* ao responder “não” e apresentarem um irracional.

Questão 3

De todos os números menores que 1 existe um que esteja mais próximo dele? Se sim represente-o. Se não, escreva o porquê.

Total: 14	Tipo de resposta
8	Sim 1. 0,9999 tendendo a 1; 2. 0,9; 3. 0,9999999...; 4. 0,999...9; 5. a dízima $0,\overline{9}$ =9/9 =1, está próximo do número 1; 6. não dá para representar (determinar); 7. qual aproximação?
2	Não 8. há infinitos; 9. não existe número específico poderia ser 0,9998, 0,99998, etc
3	10. não é possível determinar; 11. depende do conjunto numérico que está se trabalhando para se falar em antecessor; 12. se esse número for real não consigo representá-lo
1	Em branco

<u>Análise das respostas de categoria “sim”</u>

As respostas afirmativas parecem compor um *conceito imagem* de “reta racional” vinculada a uma “sucessão de decimais”, como expressos também na Questão 2 do grupo A. Além desta, outras pesquisas já citadas, também revelaram concepções de estudantes que julgam a desigualdade do tipo “0,999...<1” (Igliori; Silva, 1998, Tall; Vinner, 1981 e Margolinas, 1988).

Respostas do tipo 1 revelam um *conceito imagem* da existência de um número suficientemente próximo, mas diferente de 1, consideradas como um limite que “é muito próximo, mas nunca alcança” (Tall e Schwarzenberger, 1978)

Consideramos que as respostas do tipo 6 apresentam conflito entre a existência de um número menor que 1, mas a impossibilidade de determiná-lo, (exemplo: “sim, mas não dá para saber qual é, menos ainda para representá-lo”, “existe, mas é difícil escrevê-lo, pois esse número é infinitamente pequeno...”, “se esse número for real não consigo representá-lo”).

Análise das respostas de categoria “não”

A resposta 9 indica um *conceito imagem* relacionado com aproximação.

Apresentamos ao final desta parte uma análise comparativa desta questão com a questão 1.

Questões 4 e 5

Questão 4

Para cada um dos itens, responda: Existe algum número **racional** entre os números representados abaixo? Se existir, escreva qual (quais ou alguns)? Se não, escreva o porquê.

Questão 5

Para cada um dos itens, responda: Existe algum número **irracional** entre os números representados abaixo? Se existir, escreva qual (quais ou alguns)? Se não, escreva o porquê.

Os resultados das questões 4 e 5 foram agrupados, para sintetizar o grupo de respostas que revela o funcionamento dos *conceitos imagem* nesse contexto numérico.

A palavra “entre” do enunciado foi interpretada por alguns como “dos”, acarretando na classificação dos números em racionais e irracionais. Esta classificação também nos permitiu evidenciar o funcionamento do *conceito definição* de racionais e irracionais.

Item d: 2/3 e 0,666...?

Total: 14	Tipo de resposta
7	Nenhum 2/3=0,666...; 1. a divisão 2/3 é o próprio número 0,666...; são iguais
4	Classificaram os números sendo um incorretamente: 2/3 como irracional
1	Infinitos em 4d e nenhum em 5d
2	Em branco

Análise das respostas de categoria “não”

Dos 14 sujeitos 7 reconheceram 2/3=0,666... em ambos a itens.

Análise das respostas de categoria “sim”

Identificamos em um sujeito a presença de conflito, entre a existência ou não de números entre 2/3 e 0,666..., revelado pela oposição de respostas às questões 4 e 5.

A classificação dos números deu-se em 4 respostas, sendo uma incorretamente. Esta classificação pode ter ocorrido pelo fato da representação decimal infinita, desse número sugerir irracionalidade, como previmos.

Itens a) 3,14 e π?, b) $\sqrt{3}$ e $\sqrt{4}$?, c) 0,333 e 0,333... ?, d) 2/3 e 0,666... ?, e) 1/7 e 2/7? e f) $\sqrt{2}$ e 1,300301302303...? (os algarismos seguem essa lei de formação).

Total: 14	Tipo de resposta
4	Citaram pelo menos uma vez: alguns; vários; muitos
7	escreveram números fora do intervalo
5	Classificaram os números, sendo alguns incorretamente: 3,14 e √4 como irracionais; π; 1,300301302303... como racionais; 1/7 e 2/7 como irracionais
6	Consideraram 0,333=0,333... ; 3,14=π; √2=1,300301302303; não existe número entre 1/7 e 2/7
7	Consideraram racionais como irracionais ou irracionais como racionais

Cinco sujeitos classificaram os números do enunciado em racionais e irracionais, três o fizeram incorretamente, indicando *conceito imagem* incoerente para os racionais e irracionais.

Nove sujeitos que escreveram alguns números entre os dois números dados no enunciado, sete indicaram números fora do intervalo, evidenciando um *conceito imagem* não coerente com a relação de ordem.

As identidades do tipo 0,333=0,333... e 3,14=π, revelam a impossibilidade de considerar o conceito de densidade neste contexto. Essas igualdades poderiam estar relacionadas à classificação incorreta dos números.

Um *conceito imagem* relacionado a uma "sucessão de racionais" foi considerado pelo sujeito quando escreveu que entre 1/7 e 2/7 não existe nenhum número, e àquele que indicou existir um único número entre esses dois, citando: 0,11.

Respostas como "vários", "alguns" e "muitos" foram consideradas na entrevista da fase sistemática.

Apenas uma resposta indicou não haver nenhum número entre os dados, ao se considerar a ordem decrescente dos números no enunciado do item F.

Foram observadas respostas de sujeitos que avaliaram irracional: 3,147 (em 5a); 1,82 (em 5b); 1,111/7 (em 5e); 1,3003 (em 5f); 2/3 (em 5d); $\sqrt{4}$ (em 4b: "são números irracionais"), etc. O inverso, também ocorreu, como por exemplo: π (em 4a); $\sqrt{30825.10^{-4}}$ (em 4b); 1,300301302303... (em 4f). Como havia sido previsto, a associação da representação decimal infinita à irracionalidade foi expressa para: 3,141111... (em 5a); 0,333... (em 5c); 0,14222... (em 5e) e 1,3111... (em 5f). Com base nessas constatações, os *conceitos definição* de racionais e irracionais desses sujeitos mostraram-se insatisfatórios nas questões 4 e 5.

Questão 6

Como você ordenaria os pares de números que aparecem na questão anterior? Represente-os em uma reta.

Total: 14	Idéias envolvidas
4	Ordenaram corretamente.
5	Ordenaram corretamente, somente alguns números: - 1,300301302303... ; √2 - 0,2222; 0,3333; √2; √3 - não ordenou os números 0,333; 0,333... e 1,300301302...; - representou dois números em cada reta.
1	Ordenou incorretamente: 0,333; 0,333..., 2/3; 0,666...; 1/7; 2/7; 1,300301302303...; √2; √3; 3,14, π
5	Em branco

Apenas 4/14 dos sujeitos demonstraram um *conceito imagem* satisfatório para esta questão.

A resposta considerada como incorreta indicou um *conceito imagem* incoerente com a relação de ordem dos reais.

O fato de haver cinco ausências de respostas e apenas uma considerando outros números que, não os solicitados pela questão, foi observado na fase sistemática.

Questão 7

Escreva como você ordenaria os números reais.

Total: 14	Idéias envolvidas
4	Ordenaram alguns números: considerou 0,666... < 0,14222... (representando em uma reta); -π,... √2, ... √3, ... √4,...; {...; -√3; ...; -1,41; ...; 0; ...; √2; ...; 3, $\overline{9}$; ...}
3	Escreveram *conceito definição* de densidade
2	1º números inteiros, 2º números racionais, 3º números irracionais, 4º números reais; pela demonstração de todos os conjuntos numéricos
1	Não temos como ordená-los pois não conseguimos nem representá-los
2	É algo intuitivo, o conjunto dos números reais já é ordenado
2	Em branco

O *conceito definição* manifestado não foi coerente com o conceito formal.

As respostas 2 e 3 indicaram um *conceito definição* formado com base em um contexto numérico.

Questão 8

Você conhece a expressão <u>densidade numérica</u>? Se sim, escreva o que você conhece sobre esse assunto.

Total: 14	Idéias envolvidas
9	Não conhecem - Acredito que seja pela aproximação dos conjuntos
4	Apresentaram um *conceito definição* de densidade - o conjunto R é denso pois existem infinitos números entre dois números quaisquer; - se pegarmos um intervalo entre dois números de um conjunto numérico, acharemos infinitos valores e quanto menor o intervalo sempre teremos números entre eles, ou seja, não existe "buracos" na reta numérica; - um conjunto é denso quando para quaisquer dois números há sempre um intervalo representando infinitamente outros subintervalos
1	Não sabe se é o mesmo que conjunto denso

As 4/9 respostas expressaram *conceito definição* de densidade coerentes com o formal.

Uma resposta mostrou um *conceito definição* de densidade permeado pela noção de continuidade: "...não existe "buracos" na reta numérica".

O *conceito definição* apresentou-se inexistente para 8/14 dos sujeitos.

Resultados comparativos para questões do grupo B

Coerentes		Conflitantes	
Questão 1	Questão 3	Questão 1	Questão 3
... com 5 casas decimais, 6, etc	Não existe um específico, ex. 0,998; 0,99998 etc.	Não existe o próximo número real	0,999...9
Com quantas casas?	Qual aproximação?	Impossível	Sim, mas não dá para saber qual é
Não podemos representar o próximo número real	Se este número for real, não consigo representar	Fica difícil representar..., poderíamos representar um ponto junto com nº 1	Não é possível determiná-lo (neste caso talvez não haja conflito, pois pode ser que a existência do antecessor de 1 esteja implícita).
1,1	0,9		
1,000000...1	0,9999...9		

Comparamos as respostas dadas do mesmo sujeito nas questões indicadas na tabela acima. Os *conceitos imagem* que se apresentaram coerentes para ambas questões foram:

- vincular a idéia de consecutivo com aproximação decimal;
- associar a existência de Q como uma "sucessão de decimais", eventualmente, configurando uma "reta racional";
- admitir a existência, porém a impossibilidade de representar um sucessor em R;

As três concepções podem aparecer em um mesmo sujeito, o que não significa que diante de outra situação, elas não revelem conflito.

Respostas conflitantes, pelo menos potencialmente, foram evidenciadas entre:

- a existência ou não de sucessor em R;
- a existência e a impossibilidade de determinar um sucessor em R.
- Segunda parte: dissertativas

4.3.3 Resultado e análise das questões dissertativas

Questão 1

Após ter respondido as questões e refletido sobre elas, você teve dificuldade (ou dúvida) em algumas delas? Quais questões e quais dificuldades (ou dúvidas)?

Grupo A	Grupo B
Todas	- Em quase todas tive dificuldades, - Sim
Questões: 1(3)* , 2(2), 3(5), 4, 5	Questões: 2(2), 3, 5(3), 6, 7 e 8
Por que estavam genéricas	As representações do conjunto R na reta numérica
Sim, questões muito parecidas	Classificar em racionais e irracionais
	saber exatamente quanto vale numericamente alguns elementos que estão representados em forma de fração ou raiz (sugeriu calculadora)
6 em branco	1 em branco

O grupo A apresentou mais dificuldades que o B, considerando as quantidades de citações e as ausências de respostas.

Das questões citadas, 1 e 2 do grupo A e, 3 e 5 do grupo B, o *conceito imagem* insuficiente pode ter sido o motivo o causador da dificuldade.

Podemos apontar que as questões: 3 do grupo A, 2 e 5 do grupo B; a classificação, como também, as afirmativas verbalizadas enquanto os sujeitos respondiam o questionário, evidenciaram dificuldades no tratamento com os números irracionais, tanto operacional como conceitualmente.

O motivo pelo qual alguns sujeitos mencionaram dificuldade na questão 1 dessa parte, nas questões 4 e 5 grupo A e 7 e 8 do grupo B, pode ter sido em razão da formulação dessas questões.

---

* os números entre parênteses representaram a quantidade de menções da referida questão, a ausência significa uma única menção.

A última citação do grupo B: “saber exatamente quanto vale numericamente alguns elementos que estão representados em forma de fração ou raiz” pareceu compor um *conceito imagem* de número somente àquele representado pelo decimal finito.

Questão 2

Você conhecia questões semelhantes a essas? Quais? Onde?

Grupo A	Grupo B
3 responderam não	6 responderam não
4 responderam sim: questão 2 (a qual respondeu incorretamente); várias no curso...	7 responderam sim: as questões 1, 2, 4, 5, 6. Algumas delas costumo discutir com os alunos durante o estudo dos reais (considerou: a existência de antecessor em R, $\sqrt{2} < \sqrt[3]{2}$ e classificou os números nas questões 4 e 5); tirando 7 e 8 as restantes em livros didáticos (considerou: 0,999...9 antecessor de 1, na questão 3), no curso ...
7 em branco	1 em branco

Quase a metade, dentre os sujeitos que responderam, nos dois grupos, conheciam questões como essas. Poucos mencionaram seus números. As fontes de experiências com questões semelhantes a do questionário mais referidas foram cursos e livros didáticos. Mesmo assim, revelaram um *conceito imagem* insatisfatório.

Houve uma, em relação à abordagem de algumas questões em sala de aula. O que evidencia possíveis reflexos do *conceito imagem* na prática docente.

Questão 3

O que as questões fizeram você refletir?

Grupo A	Grupo B
todas	sobre conceitos de conjuntos numéricos, comparação de maior ou menor, e principalmente localização na reta numérica
importância da noção de conjunto numérico	que não tenho e não tive conhecimento em números racionais e irracionais
ligação entre geometria e álgebra	alguns conceitos são tão intuitivos que fica difícil descrever, ... e muitas vezes não paramos para pensar, será que conseguimos passar de forma clara para os alunos?
quais números estão em um intervalo	conhecimento numérico e suas representações
	há muitas coisas em relação a números racionais e irracionais que eu tenho dúvidas
	a definição de número irracional
6 em branco	2 respostas em branco

As reflexões apareceram em torno das dificuldades em relação à estrutura dos conjuntos: ordem, densidade, definições de número racional e irracional e o próprio conceito de número e suas representações.

Uma resposta destacou a preocupação dos reflexos no ensino de suas próprias concepções.

As citações permitiram confirmar interpretações de *conceitos imagem* inadequados.

Nesta questão, as respostas apontadas podem significar uma tomada de consciência da insuficiência de seus *conceitos imagem* sobre a reta real, que é considerada possível pela estrutura da formulação das questões.

4.3.4 Resultado e análise das questões para identificação

De 28 sujeitos, tivemos 26 que responderam essa parte.

Quantificação de alguns itens:

Graduação em matemática	Instituição		Graduação		Ano de conclusão
	particular	federal	licenciatura	Somente bacharelado	
Total 26	25	1	25	1	1973 a 2000

Aulas de análise real	Não	Sim	Não lembram
Total 25	13	7	5

Docência em matemática	Ensino			Escola		Ano de início
	Fundamental	Médio	Superior	Pública	Particular	
Total 25	23	21	0	25	6	1973 a 2000

Utilizam livros didáticos	Sim	Não
Total 25	18	7

Locais que lecionaram	Grande São Paulo[1]	Interior
Total 26	26	1

[1]Fonte: Diretoria Regional de São Paulo, ECT Correios e Telégrafos

Com exceção de um sujeito, todos os outros se licenciaram em instituições particulares, sendo de 12 distintas

Houve 7 sujeitos que declararam cursar aulas de análise real, mas não obtivemos nenhum que definisse número real formalmente. Todos citaram, pelo menos, um curso relativo a formação à continuada.

Todos lecionaram em escola pública da Grande São Paulo no ensino fundamental e médio.

Os livros didáticos mais citados nos permitiram confirmar algumas previsões de respostas.

4.3.5 Síntese

Para a maioria dos sujeitos, o *conceito definição* de R trata-se da união dos conjuntos dos racionais com os irracionais, ou ainda, de um conjunto amplo. Os irracionais foram definidos pela impossibilidade de representação na forma fracionária e não sendo percebido em algumas questões, expressando um *conceito imagem* de “reta racional”. Assim esses *conceitos definição* mostraram-se insuficientes, mesmo em questões de contexto numérico, apresentando semelhança com as concepções encontradas em estudantes, segundo as pesquisas de referência.

O *conceito imagem* de “reta racional” foi expresso por sujeitos que indicaram a existência de um antecessor/sucessor no sentido de um limite que “é muito próximo, mas nunca alcança” (Tall e Schwarzenberger, 1978).

Alunos franceses também apresentaram respostas como: “0,999...9” e “1,000...1” indicando antecessor/sucessor do número 1 (Margolinas, 1988).

A presença de *conceito imagem* “discreto para R”, foi relacionado à existência de um sucessor em R e à consideração de número máximo, ou a aceitação de um número próximo, como atributo de R. Essa concepção também foi verificada em estudantes das pesquisas de referência. O mesmo *conceito imagem* foi apresentado por meio da inexistência, ou existência de um número finito, entre dois reais distintos. Concepção essa notada também por Igliori e Silva (1998).

Os sujeitos que consideraram a igualdade de um número irracional ou de um racional não decimal, com uma aproximação decimal, assemelharam-se às concepções de estudantes.

O *conceito definição* de densidade mostrou-se inexistente para a maioria dos sujeitos, os que expressaram, vincularam com a bijeção de R com a reta. O *conceito imagem* de densidade revelou-se vago em respostas que afirmaram a existência de “vários”, “alguns” e “muitos” números entre dois números dados em R.

O contexto numérico das questões 4 e 5 (grupo B) favoreceu a expressão do *conceito imagem*.

Nesta fase pudemos observar conflito entre a possibilidade de representar (ou determinar) e a existência de “antecessor/sucessor” em R. Esse conflito sugeriu a possibilidade, se evocado cognitivamente, mostrar um procedimento capaz de viabilizar aprendizagem.

A segunda parte do questionário indicou que a maioria dos sujeitos teve dificuldade com as questões, mesmo sendo tipo de questões conhecidas por 11/28.

5. FASE SISTEMÁTICA

5.1 Procedimentos para coleta e análise de dados

Esta fase constituiu-se da aplicação de um questionário respondido por escrito por 19 sujeitos e, de entrevista, por quatro desses sujeitos.

Os sujeitos não foram os mesmos da fase exploratória, mas apresentaram o mesmo perfil, constituíam-se de professores do Ensino Fundamental e Médio da Grande São Paulo em formação continuada.

5.1.1 Objetivo

A reelaboração das questões, tomou por base subsídios obtidos, com o intuito de refinar os resultados da fase exploratória. O acréscimo de mais um procedimento de pesquisa: a entrevista. Estes procedimentos tiveram o objetivo de ampliar a confiabilidade dos dados, possibilitando-nos melhor averiguar a validade de nossa hipótese de pesquisa, qual seja a existência de concepções assemelhadas entre as dos estudantes e as dos sujeitos deste estudo.

A inclusão da entrevista na fase sistemática foi resultado da indicação, pela fase exploratória, de que um questionário respondido por escrito pode revelar *fatores de conflito potencial*, mas, dificilmente, revela *fatores de conflito cognitivo*. O procedimento de entrevista favorece a observação de tais *fatores*.

5.1.2 Questionário

O questionário foi composto de duas partes, uma para identificação (Anexo 6) e outra com questões envolvendo conceitos relativos às propriedades da reta real relacionados à densidade (Anexo 7).

5.1.3 Entrevista

A entrevista foi realizada com duas duplas, formadas por meio de sorteio entre os sujeitos. Cada dupla discutiu as respostas dadas por escrito no questionário em momentos distintos.

5.1.4 Aplicação

Os 19 sujeitos receberam as duas partes do questionário simultaneamente. Na fase exploratória, entregamos cada parte, à medida que os professores finalizavam a anterior por razão de tempo. Na fase sistemática, não procedemos da mesma maneira pois, pudemos estimar o tempo de resolução. Ambas as partes foram entregues por todos os participantes do estudo.

A entrevista foi realizada uma semana após a aplicação do questionário. As questões e as respostas dadas pelos entrevistados foram apresentadas, e cada dupla debateu o que havia apresentado como resposta às questões selecionadas.

Para a dupla, composta pelos sujeitos referenciados por M e N, selecionamos as questões: 4, 6, 7b e 8b. E, para a dupla Y e G, 4, 6, 7c e 8c.

Questão 4

Dado um segmento OP de 2cm, existe um ponto, desse segmento, mais próximo de P que todos os outros? Explique sua resposta.

Questão 6

Existe um maior elemento em cada conjunto explicitado abaixo? Explique sua resposta em cada caso:

a) $\{x \in \boldsymbol{R} \mid x < 1{,}25\}$

b) $\{x \in \boldsymbol{Q} \mid x < 1{,}25\}$

c) $\{x \in \boldsymbol{I} \mid x \leq 1{,}25\}$ (I é o conjunto dos irracionais)

Questão 7

Para cada um dos itens, responda: Existe algum número **<u>racional</u>** entre os números representados abaixo? Se existir, escreva qual (quais ou cite alguns). Se não, escreva o por quê.

b) $\sqrt{3}$ e $\sqrt{4}$?	d) 0,333 e 0,333...
Quantos existem?	Quantos existem?
Qual (quais ou cite alguns):	Qual (quais ou cite alguns):
Não existe, por que...	Não existe, por que...

Questão 8

Para cada um dos itens, responda: Existe algum número **<u>irracional</u>** entre os números representados abaixo? Se existir, escreva qual (quais ou cite alguns). Se não, escreva o porquê.

b) $\sqrt{3}$ e $\sqrt{4}$?	d) 0,333 e 0,333...
Quantos existem?	Quantos existem?
Qual (quais ou cite alguns):	Qual (quais ou cite alguns):
Não existe, por que...	Não existe, por que...

A entrevistadora procurou não interferir na discussão, apenas utilizou a observação como um recurso da existência de possíveis *fatores conflito cognitivo* como também do funcionamento dos *conceitos imagem* e *definição*.

5.2 Formulação das questões

- Questões excluídas

Questões 4 e 5 (grupo A)

> Questão 4
>
> Escreva como você explicaria o que é o conjunto dos números reais para alguém que conhece o conjunto dos racionais.
>
> Questão 5
>
> Escreva como você explicaria o que é o conjunto dos números reais para alguém que conhece o conjunto dos inteiros.

As respostas obtidas para ambas as questões, na sua maioria, repetiam as da questão 6 desse mesmo grupo (exemplo: “R=N∪Q∪Z∪I”; “R tem todos os conjuntos inclusive os racionais” (Questão 4); “R=Z∪Q∪I”; “da mesma forma que a questão anterior” (Questão 5); “R=N∪Z∪Q∪I”, “são inteiros, frações, dízimas e decimais” (Questão 6)).

Questão 7 (grupo A)

> Assinale V se considerar a sentença verdadeira, F se considerá-la falsa. Escreva o porquê considerou-a verdadeira ou falsa.
>
> a) ( ) É possível sempre encontrar um número real que esteja entre dois números reais distintos quaisquer.
>
> b) ( ) Sempre é possível encontrar um ponto que esteja entre dois pontos distintos de uma reta.

As respostas apresentadas não favoreceram inferir relação com a o nome: densidade.

Questão 7 (grupo B)

> Escreva o que significa para você o conjunto dos números reais ser ordenado.

As respostas apresentadas não favoreceram inferir relação com o conceito formal (exemplo: “é algo intuitivo, o conjunto dos números reais já é ordenado”, “1º números inteiros, 2º números racionais, 3º números irracionais, 4º números reais”).

- Questões reformuladas

Questão da fase exploratória

> Represente, na reta abaixo, o próximo número inteiro ao número dado. Justifique sua resposta.
>
> 1
>
> Represente na reta abaixo o próximo número real ao número dado. Justifique sua resposta.
>
> 1

Questão modificada

> Represente na reta abaixo o número inteiro concecutivo ao número dado. Justifique sua resposta.
>
> 1
>
> Represente na reta abaixo o número real concecutivo ao número dado. Justifique sua resposta.
>
> 1

Mudamos para consecutivo para evitar a associação de "próximo" com aproximação, possibilitando refinar a inferência dos *conceitos imagem* evocados. (exemplo: "1,5 quantas casas quantos zeros?", "... há infinitos números um muito próximo do outro").

Questões da fase exploratória

> (Grupo A)
>
> Considere os conjuntos $A = \{q \in Q | q^3 \leq 2\}$ e $B = \{p \in Q | p^3 > 2\}$. Há algum número que seja maior que todos os elementos de A e também seja menor do que todos os elementos de B? Se houver, escreva qual (ou quais). Se não, escreva o porquê?
>
> (Grupo B)
>
> Sendo o conjunto $A = \{p \in Q |\ p^3 \leq 2\}$ e o conjunto $B = \{q \in Q |\ q^3 > 2\}$. Há algum número que seja menor do que todos os elementos de B, mas que não pertença a A? Explique sua resposta.

Questão modificada

> Sendo o conjunto $A = \{p \in Q |\ p \leq 2\}$ e o conjunto $B = \{q \in Q |\ q > 2\}$. Há algum número que seja menor do que todos os elementos de B, mas que não pertença a A? Explique sua resposta.

Os resultados da fase exploratória revelaram algumas dificuldades no reconhecimento dos elementos dos conjuntos, em parte, em razão das potências

p^3 e q^3 (exemplo: “2 em A”, “não pode ser simultaneamente maior que 2 e menor ou igual a 2”).

A formulação, aqui apresentada, foi por não termos encontrado nas respostas a identificação de um irracional com um corte em Q, na questão do grupo A.

Questão da fase exploratória

Como você ordenaria os pares de números que aparecem na questão anterior? Represente-os em uma reta.

Questão modificada

Ordene os números do menor para o maior: $\frac{3}{10}$; -2; π; 0; -1,999...; 3,1415; $\sqrt{3}$.

Formulamos um enunciado mais direto para facilitar a compreensão do solicitado, entendendo ser esse o motivo de ter havido aproximadamente 36% de respostas em branco (como verbalizados, Anexo 5). A escolha dos números foi feita tomando por base números que apresentaram tanto nas pesquisas de referência, como na fase exploratória, dificuldades em relação à ordenação.

Questão da fase exploratória

Considere os conjuntos A={x∈***R***| x<1,25} e B={y∈***Q***| y<1,25}. O conjunto A possui um número que seja maior que todos os outros do próprio conjunto? E o conjunto B? Explique sua resposta.

Questão modificada

Existe um maior elemento em cada conjunto explicitado abaixo? Explique sua resposta em cada caso: a) {x∈***R***| x<1,25} b) {x∈***Q***| x<1,25} c) {x∈***I***| x≤1,25} (I é o conjunto dos irracionais)

Incluímos o item c, pois as respostas que indicavam concepções da reta real como “reta racional” poderiam ser desestabilizadas com essa inclusão. A separação em itens teve o objetivo de facilitar a análise, visto que, na fase anterior, as respostas nem sempre distinguiam os subconjuntos (exemplo: “um imediatamente menor”, “existem infinitos que antecedem 1,25”).

Questões da fase exploratória

> Para cada um dos itens, responda: Existe algum número **racional** entre os números representados abaixo? Se existir, escreva qual (quais ou alguns)? Se não, escreva o porquê.
>
> f) $\sqrt{2}$ e 1,300301302303...? (os algarismos seguem essa lei de formação)
> Quantos existem?
> Qual (quais ou alguns)?
> Não existe, por que...

> Para cada um dos itens, responda: Existe algum número **irracional** entre os números representados abaixo? Se existir, escreva qual (quais ou alguns)? Se não, escreva o porquê.
>
> f) $\sqrt{2}$ e 1,300301302303...? (os algarismos seguem essa lei de formação)
> Quantos existem?
> Qual (quais ou alguns)?
> Não existe, por que...

Questões modificadas

> Para cada um dos itens, responda: Existe algum número **racional** entre os números representados abaixo? Se existir, escreva qual (quais ou cite alguns). Se não, escreva o por quê.
>
> f) $\sqrt{2}$ e 1,500501502503...? (os algarismos seguem essa lei de formação)
> Quantos existem?
> Qual (quais ou cite alguns):
> Não existe, por que...

> Para cada um dos itens, responda: Existe algum número **irracional** entre os números representados abaixo? Se existir, escreva qual (quais ou cite alguns). Se não, escreva o por quê.
> f) $\sqrt{2}$ e 1,500501502503...? (os algarismos seguem essa lei de formação)
> Quantos existem?
> Qual (quais ou cite alguns):
> Não existe, por que...

Introduzimos a palavra “cite” no enunciado e em todos os itens para evitar ausências de respostas e interpretações como: “se há muitos ou infinitos não é possível escrever todos”. O item f foi reformulado. Antes tínhamos apresentado os números na ordem decrescente. Isto porque essa forma de apresentação, interferiu em uma resposta (“nenhum considerando essa ordem”).

Questão da fase exploratória

> Você conhece a expressão densidade numérica? Se sim, escreva o que você conhece sobre esse assunto.

Questão modificada

> Escreva o que você conhece sobre densidade numérica.

Optamos por uma formulação mais direta, para torná-la mais clara.

5.3 Resultados e Análises dos Questionários

5.3.1 Questões de identificação

Graduação em matemática	Instituição	Graduação	Ano de conclusão
	Particular	licenciatura	
Total 19	19	19	1975 a 1999

Aulas de análise real	Não	Não lembram
Total 19	8	11

Docência em matemática	Ensino			Escola		Ano de início
	Fundamental	Médio	Superior	Pública	Particular	
Total 19	19	17	0	19	7	1973 a 2000

Utilizam livros didáticos	Sim	Não
Total 18	16	2

Locais que lecionaram	Grande São Paulo[1]	Interior
Total 19	19	1

[1]Fonte: Diretoria Regional de São Paulo, ECT Correios e Telégrafos

O perfil dos sujeitos, submetidos à fase sistemática, assemelhou-se ao da fase exploratória.

Todos os sujeitos licenciaram-se em instituições particulares, sendo 16 distintas, concluindo no período de 1975 a 1999, não diferindo dos da fase anterior.

Nenhum desses sujeitos tiveram, ou lembraram, aulas de análise real, diferindo quantitativamente dos sujeitos da fase exploratória. Mas como observamos, este fato não refletiu nos tipos de respostas dadas.

Todos os sujeitos lecionaram em escola pública da Grande São Paulo no segmento do ensino fundamental e médio.

A utilização de livro didático foi declarada por 16 dos 19 sujeitos. Permitindo-nos, como na fase anterior, algumas inferências sobre sua influência.

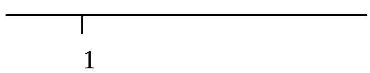
5.3.2 Questões envolvendo o conceito de densidade

Para a maioria das questões desta fase, os resultados foram divididos, na tabela, nas categorias: "mais" coerente, "menos" e não considerada na análise (ou "branco"). A "mais" coerência aqui utilizada não foi incativa sempre de *conceito imagem/definição* apropriado plenamente com o conceito, mas que possuíam elementos que interpretamos coerentes em relação à cada questão.

Para todas as questões notamos que a reformulação feita para essa fase, em relação à fase anterior, permitu um refinamento nas interpretações das respostas.

Questão 1

a) Represente o número inteiro consecutivo na reta abaixo. Justifique sua resposta.



Total: 19	Tipo de resposta
18	Representaram o número 2 é o inteiro consecutivo/sucessor após um número sempre tem outro
1	Não representou

b) Represente o número real consecutivo na reta abaixo. Justifique sua resposta.

Total: 19	Categoria
12	"menos" coerente 1. 1,1; 2; 4/3; -2; 1,5; 1,01; 2. número real consecutivo 1,000...1; 3. se n é um número real seu consecutivo é n+1; 4. 4/3 $\in$ R e é consecutivo de 1
4	"mais" coerente 5. porque 2 $\in$ R; 6. não, porque R é denso; 7. não é possível representar porque existem infinitos; 8. não é possível dizer porque sempre existe um menor; 9. não é possível determinar porque R é uma seqüência contínua
3	Em branco suponho que estão no plano cartesiano

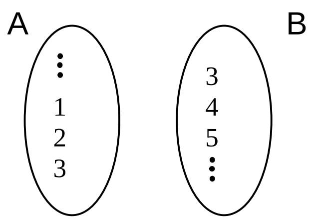
As respostas da primeira categoria identificamos como um *conceito imagem* de "reta discreta", provavelmente, formado por uma *generalização abusiva* da discretização dos naturais para os reais.

Para segunda categoria consideramos um *conceito imagem* com vínculo ao conceito de densidade.

A resposta 9 indica um fator de conflito ao utilizar as palavras “seqüência” e “contínua”.

Questão 2

Sendo o conjunto A = {p∈**Q|** p ≤ 2} e o conjunto B = {q∈**Q|** q > 2}. Há algum número que seja menor que qualquer elemento de B e não pertença a A? Explique sua resposta.

Total: 19	Categoria
15	“menos” coerente 1. não existe nenhum número inteiro menor que os elementos de B que não pertença a A; 2. não, pois os números menores que 2 pertencem ao conjunto A (representaram A e B em intervalos reais na forma geométrica); 3. número 1; 4. está difícil concluir, pois A = {0, 1, 2} e B = {2, 4 ...}; 5. todos os números menores que qualquer elemento de B, pertencem a A porque A é infinito, A = {..., -2, -1, 0, 1, 2}, B={3,4,5,6...}; 6. A = {2, 1, 0, -1...}, B = {3, 4, 5...}; 7. A = {2, 3/2, 1...}, B = {3, 7/2, 8/2...}; 8. não, pois os números menores que não estão escritos no conjunto B, estão descritos no conjunto A (representou A={..., -2, -1, 0, 1, 2}, B={3, 4, 5, 6...}); 9. sim, A = {2, 3, 4, ...}, B = {... -2, -1, 0, 1, 2} 10. os racionais entre 2 e 3 (representou no diagrama de Venn: 
4	“mais” coerente 11. existem infinitos números reais e racionais menores que 2, que não pertencem a A. Porque R é denso; 12. os irracionais √2 e -√2; 13. epresentou A e B em intervalos reais, na forma geométrica 14. sim, o valor que tende a 2 (representou A e B em intervalos reais, na forma geométrica);

A categoria “menos” coerente indica um *conceito imagem* de “reta racional” (inteira). Temos aqui respostas que sugerem uma *generalização abusiva* dos naturais, para os racionais.

Na outra categoria, a resposta 12 apresentou irracionais considerando apenas dois.

Questão 3

De todos os números menores que 1 existe um que esteja mais próximo dele? Se sim represente-o. Se não, escreva o porquê.

Total: 19	Categoria
12	“menos” coerente 1. 0,999... ; 0,999; 0,99; 0; 2. 9/10 (representaram na reta os números 9/10 e 1); 3. sim, representam na reta: -2, -1, 0, 1 e {1, 0, -1}; 4. se real, existe mas é impossível representar; 5. existe porque o número é infinito (representou na reta os números 0 e 1); 6. existe, porém, seria impossível representar esse número considerando os números reais; 7. zero é o mais próximo de 1;
6	“mais” coerente Não 8. existe no conjunto dos inteiros é o zero 9. não, porque depois da vírgula temos infinitos números exemplo: 1>0,999... 10. não, porque se pegarmos um número decimal, entre esse e o número 1 haverá outro, e assim sucessivamente 11. não, porque entre 2 valores inteiros existem infinitos números 12. não, pois há infinitos números
1	Em branco

O *conceito imagem* de um R discreto foi manifestado em 13/19 das respostas (“menos” coerente), sugerindo uma *generalização abusiva* da discretização dos inteiros, para os reais, revelado ora pela representação simbólica de um número, ora pela língua natural. Houve quem contemplou “todos os números” do enunciado, somente os inteiros.

O *conceito imagem* de “reta racional”, ou até “decimal”, pareceu evidenciado pelas justificativas 9 e 10.

Questão 4

Dado um segmento OP de 2cm, existe um ponto, desse segmento, mais próximo de P que todos os outros? Explique sua resposta.

Total: 19	Categoria
12	“menos” coerente 1. é o seu antecessor; 2. PA com 2,1cm; 3. 1,999...; 4. 1,99; 5. sim mas não é possível determiná-lo; 6. sim, não vai ser P mas tende a estar muito próximo; 7. sim, entre os números naturais existem infinitos números; 8. ponto que tende a 2 ou seja 1,999...; 9. 1,9999999 que se aproxima bastante de P; 10. 1,99 considerando o sistema métrico decimal
3	“mais” coerente 11. não, o número é infinito; 12. não, entre um ponto e outro pode haver infinitos pontos; 13. não, porque sempre existirá pontos que se aproximam de P
4	Em branco, Somente desenharam o segmento OP

Como já foi detectado na fase exploratória e também na questão anterior, um *conceito imagem* discreto para R, foi evidenciado aqui para 12/19 sujeitos, expressando a existência de um ponto mais próximo de P (diferente de P) que todos (“menos” coerente)

A resposta 3 indica a não identificação ente 1,999... e 2 (pesquisas de referência e fase exploratória).

Na resposta 10, o sujeito evoca um *conceito imagem* de “reta racional” apresentando um conflito potencial entre número e medida.

Nenhum dos sujeitos da fase sistemática tomou o P como resposta (um na fase exploratória).

Questão 5

Ordene os números do menor para o maior: $\frac{3}{10}$; -2; π; 0; -1,999...; 3,1415; $\sqrt{3}$.

Total: 19	Idéias envolvidas
11	Ordem não correta (um único erro, tomar -2 < -1,999...)
8	Tipos de erros: 1. Não incluir π na ordenação; 2. Considerar 3/10 o maior número; 3. Não incluiu o zero na ordenação 4. Considerar $\pi < 3{,}1415$ 5. tomar 1,999... = -1,99 ou -1,999... = -1,999

Consideramos caso de conflito em que o sujeito escreve π=3,14 (rascunho) e apresenta resposta correta.

Nenhum dos sujeitos identificou a igualdade dos números -2 e -1,999.... (Tall.; Schwarzenberger, 1978 entre outras).

A identificação de π com 3,1415 pode ser um dos fatores da não inclusão de π na ordenação.

Na resposta 3 o zero foi um fator de conflito expresso pelo sujeito por "O que faço com o zero?".

Todas as respostas apresentaram concepções não coerentes com o conceito formal e que, também foram detectadas em pesquisas de referência.

Números racionais foram identificados com decimais (denominador potência de dez) nas concepções de estudantes franceses verificadas por Robinet (1986). Essa concepção foi revelada na resposta do tipo 5, pois os sujeitos ao apresentarem a resposta de ordenação, desconsideraram as reticências do número -1,999..., como também em anotações de $\sqrt{3}$ = 1,73 (rascunho) em que o sujeito apresenta um irracional como decimal.

Questão 6

Existe um maior elemento em cada conjunto explicitado abaixo? Explique sua resposta em cada caso:

Questão 6a

{x∈ **R|** x<1,25}

Total: 19	categorias
5	"mais" coerente 1. não é possível saber porque tende ao infinito; 2. não, por que R é denso; 3. não, existem infinitos menores que 1,25 4. não, porque é sempre possível encontrar um número ainda maior e muito próximo de 1,25
10	"menos" coerente 5. porque o número que antecede é infinito exemplo: 1,24999...; 6. porque pode aparecer dízimas; 7. a condição não permite 8. A = {1,24; 1,23 ...}; 9. 1,24; 10. 1,25 os outros são menores; 11. 1,249 este conjunto não impede que tenha um maior; 12. um que esteja muito próximo; 13. 1,256 uma casa a mais depois da vírgula não altera muito o valor, mas no conjunto dos reais não temos números decimais
4	R e Q são iguais; Em branco

Questão 6b

{x∈ **Q**| x<1,25}

Total: 19	categorias
4	“mais” coerente 1. porque tende ao infinito; 2. sim, um racional que pode ser sempre maior que o anterior; 3. não, os números são infinitos, portanto não posso dizer qual é o número maior desse conjunto; 4. não, porque entre dois racionais sempre existe um racional, não dá para saber o maior
8	“menos” coerente 5. 125/100; 6. não, pode aparecer dízimas; 7. o número é infinito, possui infinitos dígitos exemplo: 1,24999...; 8. o próprio 1,25 os outros são menores Q = {1,24; 1,23; 1,22...}
7	Outras respostas R e Q são iguais; Esta afirmação está de acordo com o conjunto Em branco

Questão 6c

{x∈ **I**| x≤1,25} (I é o conjunto dos irracionais)

Total: 19	Categoria
4	“mais” coerente 1. existe um irracional, vai ser maior que o anterior; 2. não é possível saber o número maior, pois tende ao infinito; 3. não, porque pode aparecer dízimas;
7	“menos” coerente 4. 1/√2; 5. 1,25 ; 6. não, os números são infinitos; 7. não, os irracionais são infinitos; 8. sim, esse é maior; 9. não, dentro da condição menor ou igual (representou I = {1,25; 1,24;...}) 10. o antecessor a ele é um número infinito que não possui representação, ex: 1,24999...
8	Não sei responder Em branco

Conceito imagem discreto para os: reais, racionais e irracionais, apareceu nas respostas 4, 8, 9, 11, 13 (item a), 7, 8 (item b), 4, 5, 10 (item c).

Respostas como 5, 6, 8 (item a) reforçam a presença de *conceito imagem* de uma “reta racional”. O *conceito imagem* de um sujeito expresso no item a, “por que R é denso” não se adaptou para os irracionais no item c, evidenciando *conceito imagem* não coerente com o formal no caso de I.

Respostas relacionadas com infinito como: 3 (item a), 3 (item b), 6 e 7 (item c), sugerem um infinito potencial. Ou ainda, estariam se referindo a infinitas casas decimais em relação a representação decimal: respostas 1, 6 (item a) e 7 (item b).

Para as questões 7 e 8, houve, como na fase exploratória, sujeitos que interpretaram “entre” no sentido de escolha de uma alternativa, acarretando na classificação de números em racionais ou irracionais. Anotamos as respostas dadas na terceira categoria.

Questão 7

Para cada um dos itens, responda: Existe algum número **racional** entre os números representados abaixo? Se existir, escreva qual (quais ou cite alguns). Se não, escreva o porquê.

Questão 7a

3,14 e π ?
Quantos existem?
Qual (quais ou cite alguns):
Não existe, por que...

Total: 19	Idéias envolvidas
8	“mais” coerente infinitos: 3,141; 3,142; 3,143 vários : 3,147 muitos : 3,14; 3,41; 3,1415
8	“menos” coerente o próprio π; 3,14; 3,149; 3,148 ambos tem o mesmo valor; porque 3,14 é o valor dado a π; não, os existentes são irracionais; porque pertencem a conjuntos numéricos diferentes; não, está entre um decimal e um irracional;
3	3,14

Questão 7b

$\sqrt{3}$ e $\sqrt{4}$?

Quantos existem?

Qual (quais ou cite alguns):

Não existe, por que...

Total: 19	Categoria
9	“mais” coerente infinitos: 1,745; 1,1746; 1,747; infinitos: 1,74; 1,75; vários: 1,8; 1,9; infinitos: 1,5; 1,6; 1,7; vários:1,599; 1,999; infinitos: 1,42; 1,5;
5	“menos” coerente um, √4 = 2; três (não especificou quais); nenhum porque √4 = 2 é inteiro e √3 não pode ser escritos da forma fracionária não, está entre um irracional e um inteiro; não, porque pertencem a conjuntos numéricos diferentes
4	√3 e √4; são números que podemos representar na forma fracionária
1	Em branco

Questão 7c

0,333 e 0,333... ?

Quantos existem?

Qual (quais ou cite alguns):

Não existe, por que...

Total: 19	Categoria
8	“mais” coerente Sim infinitos: 0,3333; vários: 0,33333; infinitos: 0,3331; 0,3332; alguns: 3333/10000; muitos: 0,3; 0,33; 0,333; 0,3333;
6	“menos” coerente Não são iguais, são irracionais infinitos: 0,3333... ; 0,33333... não sei dizer quais; porque são os mesmos valores; porque 0,333 é conseqüência de uma dízima periódica simples
3	0,333; 0,333 é racional, porque 0,333 é dízima periódica;
2	Em branco

Questão 7d

2/3 e 0,666... ?

Quantos existem?

Qual (quais ou cite alguns):

Não existe, por que...

Total: 19	Categoria
12	“mais” coerente são iguais; são representações do mesmo número; fazendo a divisão 2/3 o valor encontrado será o mesmo 0,666... um, pois 2/3 e o 0,666... são os mesmos; nenhum, porque os dois são dízimas periódicas e estão representando o mesmo número, mas olhando apenas a representação 2/3 é um número racional
3	“menos” coerente são semelhantes; porque não são exatos, são infinitos; 2/3 porque o número 0,666... não pode ser escrito na forma de fração; 2/3 e 0,666... são racionais, sendo assim possível encontrar alguns
4	Em branco

Questão 7e

1/7 e 2/7?
Quantos existem?
Qual (quais ou cite alguns):
Não existe, por que...

Total: 19	Categoria
7	"mais" coerente várias: 0,156; 0,186; infinitos: 0,16; 0,17; infinitos: 0,201; 0,202; infinitos: 0,15...; 0,16...; 0,17...; 0,18...
3	"menos" coerente porque 2/7 é consecutivo de 1/7 (dentro da concepção de arredondamento); não são exatos, são infinitos
3	1/7 e 2/7 1/7 e 2/7 observando apenas a representação
6	Em branco

Questão 7f

$\sqrt{2}$ e 1,500501502503...? (os algarismos seguem essa lei de formação)
Quantos existem?
Qual (quais ou cite alguns):
Não existe, por que...

Total: 19	Categoria
7	"mais" coerente infinitos: 1,42; 1,43; 1,499...; vários: 1,5; 1,45; 1,49; infinitos: 1,42; 1,421; 1,422 etc; infinitos: 1,42; 1,43; 1,44;
6	"menos" coerente 4 algarismos não, são números irracionais; acredito não conseguir encontrar números entre ou próximo dos irracionais; não, $\sqrt{2}$ é aproximadamente o valor 1,500...; não, porque não é possível colocar na forma racional; não, porque não são exatos, são infinitos
2	$\sqrt{2}$; os dois são infinitos e não tem como representa-los como racionais
4	Em branco

Questão 8

Para os mesmos itens da questão anterior, responda: Existe algum número **irracional** entre eles? Se existir, qual (quais ou cite alguns). Se não, escreva o porquê.

Questão 8a

3,14 e π?

Quantos existem?

Qual (quais ou cite alguns):

Não existe, por que...

Total: 19	Categoria
5	"mais" coerente infinitos: 3,141... ; 3,1411...; infinitos: 3,1401... ; 3,1402...; vários: 3,141414...;
7	"menos" coerente um: 3,1444...; não, porque π é irracional e 3,14 é racional; fazem parte dos números reais; não, porque é possível colocar na forma fracionária; porque o número irracional anterior a π é $\sqrt{2}$ e é menor que 3,14
4	não sei dizer π; π e 3,14
3	Em branco

Questão 8b

$\sqrt{3}$ e $\sqrt{4}$?

Quantos existem?

Qual (quais ou cite alguns):

Não existe, por que...

Total: 19	Categoria
6	"mais" coerente infinitos: 1,56712...; 1,6060...; alguns: $\sqrt{\frac{31}{10}}$, $\sqrt{\frac{32}{10}}$; infinitos:1,8; 1,9; infinitos: 1,99...; vários: 1,888...; 1,999...; 1,777...
5	"menos" coerente um: √3; sim: 1,73 e 1,79; o próximo número irracional maior que √3 é √5
5	√3
3	Em branco

Questão 8c

0,333 e 0,333... ?

Quantos existem?

Qual (quais ou cite alguns):

Não existe, por que...

Total: 19	Categoria
5	"mais" coerente infinitos: 0,33301; 0,33302; infinitos: 0,3331...; 0,3332...; vários: 0,33311111...; infinitos: 0,333215...; infinitos: 0,33312...; 0,33331...;
5	"menos" coerente um: 0,333; 0,3939; 0,16 porque é possível colocar em forma fracionária; o próprio número irracional será o 0,333...; porque o primeiro irracional maior que zero é √2 > 0,333...; não saberia dizer
5	0,333...
4	Em branco

Questão 8d

2/3 e 0,666... ?

Quantos existem?

Qual (quais ou cite alguns):

Não existe, por que...

Total: 19	Categoria
5	"mais" coerente são iguais; são representações do mesmo número;
5	"menos" coerente Classificaram como irracionais são semelhantes; assumem valores iguais porém representados dentro de conjuntos numéricos diferentes o próprio número irracional será o 0,666...;
4	0,666...; 2/3 e 0,666; 0,666; existe 2/3
5	Em branco

Questão 8e

1/7 e 2/7?

Quantos existem?

Qual (quais ou cite alguns):

Não existe, por que...

Total: 19	Categoria
5	"mais" coerente vários: 0,143...; 0,144...; infinitos: 0,14...; 0,21...; infinitos: 0,1616...; 0,1717...; infinitos: 0,123408...; infinitos: 0,1518...; 0,256...
3	"menos" coerente um: 0,2222...; porque o primeiro irracional maior que zero é $\sqrt{2} > 2/7$; porque os números 1/7 e 2/7 são irracionais
5	1/7 e 2/7; 1/7
6	Em branco

Questão 8f

$\sqrt{2}$ e 1,500501502503...? (os algarismos seguem essa lei de formação)

Quantos existem?

Qual (quais ou alguns):

Não existe, por que...

Total: 19	Categoria
5	“mais” coerente infinitos: 1,456...; 1,498; infinitos: 1,4143...; infinitos: 1; 43958; vários: 1,500402502...; infinitos: 1,5005015025031...; 1,5005015025032...; alguns, $\sqrt{\frac{21}{10}}$
5	“menos” coerente 1,4235...; 1,4325; 1,500000...; existem quatro; Porque o irracional maior que √2 é √3 que é menor que 1,500501...; porque os números são irracionais
5	√2 e 1,500501502
4	Em branco

Questões 7 e 8

Para essas questões apresentamos as tabelas para cada item, mas analisamos em conjunto, como na fase exploratória, para melhor observarmos o funcionamento do *conceito imagem*.

Relacionamos abaixo caracterizações de alguns *conceitos imagem* apresentados nestas questões, exemplificando por expressões dos sujeitos.

1. *Conceito imagem* discreto para Q, I e R:

- porque o número irracional anterior a π é √2;
- porque o número irracional anterior a π é √2;

- "porque 2/7 é consecutivo de 1/7";
- a existência um único número entre 3,14 e π: 3,1444...;
- "existem quatro
- porque não são exatos, são infinitos

2. *Conceito imagem* de "reta racional":
   - que sugeriu as citações do tipo: 0,201; 0,202;

     1,777...; 1,888...; 1,999...;

     0,3; 0,33; 0,333; 0,3333;
   - acredito não conseguir encontrar números entre ou próximo dos irracionais;
3. *Conceito imagem* de infinitude de números significando infinitas casas decimais:
   - infinitos: 0,3333... ; 0,33333...;
4. *Conceito imagem* de identificação de número e uma aproximação:
   - ambos tem o mesmo valor (para π e 3,14);
   - porque são os mesmos valores" (para 0,333 e 0,333...);
5. *Conceito imagem* da não-densidade dos racionais e dos irracionais sobre R:
   - porque pertencem a conjuntos numéricos diferentes;
   - está entre um irracional e um inteiro;
   - os existentes (entre π e 3,14) são irracionais;

Por vezes, concepções como essas são geradas por *generalização abusiva* e são capazes de entravar a aquisição de conhecimentos novos.

O *conceito imagem* de densidade de R também se tornou distante do formal, em virtude de desconsideração da ordem, pois obtivemos exemplos fora do intervalo.

Os *conceitos definição* de racionais e irracionais não se mostraram coerentes com a definição formal, pois consideraram irracionais: 0,33301; 0,3333;

0,666...; 0,222...; 0,333...; 3,141414...; 3,14; 1,888...; 1,73; 1,79; 1/7; 2/7, etc. e como racionais: π, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$.

Na questão 7 em que se solicitava citar racionais entre dois números dados, a maioria apresentou como exemplo números na representação decimal finita indicando um *conceito imagem* de racionais como decimal. Na questão 8, em que se solicitava citar irracionais entre os dois números dados, a maioria utilizou a representação decimal infinita, apresentando *conceito imagem* de irracional vinculado a esse tipo de representação (periódica ou não). Apesar da representação de número irracional na forma de radicais ser mais explorada em livro didático, essa representação apareceu em poucas respostas.

A representação decimal infinita pareceu não ter significado para alguns que admitiram 0,666...=0,666 e 1,501502503...=1,501502.

Questão 9

Escreva o que você conhece sobre densidade numérica.

Total: 19	Idéias envolvidas
10	Não conhecem
3	1. quantidade de números de um determinado conjunto; 2. conjunto numérico amplo;
2	3. A cada ponto da reta corresponde um número real. A cada número real corresponde um ponto na reta numérica. Entre dois números sempre há mais um número. 4. algo que seja “denso” com números
4	Em branco

As respostas 2 e 4 indicam conceito de densidade vinculados a um sentido de “que tem muito...” (sentido não matemático), como previmos na fase exploratória.

Apenas resposta 3 apresentou *conceito imagem* “mais” coerente com o formal, sendo permeado pela bijeção de R com a reta.

Questão 10

Como você definiria o conjunto dos números reais?

Total: 19	Categoria
10	Livro didático 1. R = N∪Z∪Q∪I; 2. R = Q∪I; 3. conjunto amplo no qual é possível a solução de várias situações numéricas, exceto nos casos de raízes quadradas de números negativos; 4. é formado por todos os conjuntos numéricos menos o conjunto dos imaginários 5. conjunto de algarismos formado por números inteiros, fracionários, decimais, naturais e irracionais; 6. Todos os números inteiros, racionais, irracionais, positivos e negativos
8	7. conjunto de todos os números existentes; 8. todos os números imagináveis; 9. engloba todas as representações de conjuntos numéricos; 10. são os números que são representados em forma de fração; 11. todos os inteiros
1	Em branco

Como previsto, obtivemos *conceito definição* do conjunto dos números reais como os apresentados na fase exploratória: a união dos racionais com irracionais, ou uma variação desta.

Um dos componentes do *conceito definição* foi a identificação entre número e representação (respostas 5 e 9), outro, coincidindo real com inteiro (resposta 11).

O *conceito definição* caracterizado por um “conjunto amplo”, presente na fase exploratória, também foi revelado por esses sujeitos (respostas 7 e 8)

5.3.3 5.3.3 Entrevista (Anexo 8)

O primeiro critério para a escolha de questões era que as respostas dos sujeitos da duplo fosse diferentes. O segundo critério foi escolher questões que variassem o contexto. Foram formadas duas duplas: M e N que discutiram as questões 4, 6, 7b e 8b, e G e Y, 4, 6, 7d e 8b.

A análise da entrevista foi feita para cada sujeito, possibilitando a observação do funcionamento do *conceito.*

Questão 4

Dado um segmento OP de 2cm, existe um ponto, desse segmento, mais próximo de P que todos os outros? Explique sua resposta.

Questão 6

Existe um maior elemento em cada conjunto explicitado abaixo? Explique sua resposta em cada caso:

a) $\{x \in \boldsymbol{R} \mid x < 1{,}25\}$
b) $\{x \in \boldsymbol{Q} \mid x < 1{,}25\}$
c) $\{x \in \boldsymbol{I} \mid x \leq 1{,}25\}$ (I é o conjunto dos irracionais)

Questão 7

Para cada um dos itens, responda: Existe algum número **racional** entre os números representados abaixo? Se existir, escreva qual (quais ou cite alguns). Se não, escreva o por quê.

b) $\sqrt{3}$ e $\sqrt{4}$?	d) 0,333 e 0,333...
Quantos existem?	Quantos existem?
Qual (quais ou cite alguns):	Qual (quais ou cite alguns):
Não existe, por que...	Não existe, por que...

Questão 8

Para cada um dos itens, responda: Existe algum número **irracional** entre os números representados abaixo? Se existir, escreva qual (quais ou cite alguns). Se não, escreva o porquê.

b) $\sqrt{3}$ e $\sqrt{4}$?	d) 0,333 e 0,333...
Quantos existem?	Quantos existem?
Qual (quais ou cite alguns):	Qual (quais ou cite alguns):
Não existe, por que...	Não existe, por que...

M:

Antes da discussão, M refletiu sobre sua resposta atribuída à questão 4:

- *Não existe nada menor que o centímetro? Existe, né?*

Na procura de outra solução, evocou o *fator de conflito cognitivo*, entre a existência e a impossibilidade de determinar um ponto mais próximo de P que todos os outros:

- *esse não é o ponto mais próximo, o 1,99. E nem sei se dá para definir esse valor. Agora já não concordo com o valor que eu coloquei.*

- *se você colocar que existe, você tem que definir esse ponto não tem?*

Admitindo algumas vezes a existência de um máximo:

- *ele é indefinido mas ele existe, porque sempre vai ter alguma coisa próxima a outra.*

Introduziu como justificativa da existência, um valor aproximado, um limite:

- *Eu acho que esse ponto deve existir, mas dizer qual é, impossível. Eu acho estranho você dizer que existe, mas não consegue determinar. Seria um valor aproximado...?*

- *Seria assim um limite?*

Na questão 6, a discussão retomou em torno do conflito entre a existência e a impossibilidade de representar. Aqui, M argumentou mais claramente, evocando o *conceito definição* de densidade, apresentando uma resposta sobre a inexistência do maior elemento.

- *É aquela idéia que o conjunto real é denso, entre dois números sempre vai existir mais um, no conjunto dos números reais... Então não vai existir, você não pode dizer qual é o maior, vai existir um valor aproximado...*

Referindo-se ao enunciado:

- *Mas ele diz um maior elemento, então está querendo a definição desse um, não é?*

Retomou a questão discutida, anteriormente e comparou ambas:

- *Na resposta anterior (questão 4) eu acabei concordando com N* (existe mas não dá para determinar). *Mas ele vai ser aproximado não vai ser o valor. No anterior era ponto, aqui é elemento. Apesar de que ponto e elemento... porque na reta também representamos os números reais. É a mesma idéia. Então não dá para determinar esse um.*

Concluiu não ser possível determinar o maior elemento em nenhum dos itens da questão 6, para isso apresentou o argumento:

- *Eu coloquei também tudo igual* (itens a, b e c).

- *Porque sempre vai ter mais um, então, não dá para determinar*

Pareceu-nos que o *conceito definição* da densidade de R pode também ser estendido aos irracionais.

Em relação à questão 7 item b, não percebeu que o número exemplificado por N não estava entre os números dados.

Em 8b, M sentiu a necessidade de representar um número irracional na forma decimal, apresentando a dúvida:

- *Mas esse período tem um limite? por exemplo, em período com duas casas, ou com três... teria um limite para identificar?*

Relacionou com sua prática em sala de aula na qual trabalha com os irracionais na forma de radicais. Embora tenha se questionado, durante a discussão, sobre como representar um irracional entre $\sqrt{3}$ e $\sqrt{4}$, não encontrou nenhum, o que evidenciou um funcionamento insuficiente do *conceito imagem/definição* de irracionais.

N:

O *conceito imagem* sobre a existência e a impossibilidade de determinar um "antecessor em R" foi notado durante a discussão das questões 4 e 6.

O argumento que permeou a defesa dessa idéia foi em torno de um número aproximado, evocado ao discutir a questão 4:

- *Não dá para dizer exatamente qual é esse valor.*

- *É um valor aproximado.*

Até esse momento a discussão não desestabilizou a idéia de que existe um maior número, que não se pode determinar.

- *Qualquer número compreendido entre 0 e 2... que seja maior que 0 mas diferente de 2... O mais próximo de 2.*

N identificou que na questão 6 era a mesma situação da 4. Os contextos diferentes destas não interferiram na concepção de que existia um número maior mas que não poderia se indicar. O argumento de “número aproximado” foi apresentado como o requerido pela questão:

- *mas eu acho que o valor que ele quer é o valor aproximado...*

Como na fase exploratória, essa concepção também pareceu ser uma das causas para impedir a compreensão da densidade.

Em um certo momento, N admitiu haver infinitos números próximos de 1,25 e, por esse motivo, não seria possível definir qual seria o mais próximo de todos os outros. No momento seguinte, reafirmou a existência do mais próximo:

- *... existem infinitos valores, mas o maior não dá para definir*

- *... O maior valor, o mais aproximado de 1,25.*

Durante a discussão, N verbalizou, dizendo para si mesmo:

- *Você não pode determinar o consecutivo de um real.*

Argumentos do parceiro (“entre dois números existe um”), contrapondo as suas idéias, sugeriu-nos, a evidência de um *fator de conflito cognitivo*:

- *É, é isso. Eu concordo. Não tenho mais argumento.*

Em relação à questão 7b, o número escolhido (1,42) entre $\sqrt{3}$ e $\sqrt{4}$ não foi observado por nenhum dos integrantes da dupla.

Na Questão 8b, N verificou que o número respondido, 1,99... não era irracional. Ao ver a resposta de M, (1,91...) iniciou-se uma discussão sobre como representar um número irracional. Alguns argumentos foram verbalizados, mas nenhum pareceu-lhe satisfatório:

- *Eu poderia ter colocado 1,934038... e aí você não saberia qual o número depois do 8.*

- *Você tem que observar a seqüência que os números apareceram nesse caso (1,91...) o próximo seria 1 . A lógica seria 1.*

Finalizou a discussão citando que:

- *coloca a fração geratriz se for racional e não coloca se for irracional.*

Como previsto pela fase anterior, o *conceito imagem* sobre os irracionais manifestou-se no campo das representações, mesmo neste, a entrevista possibilitou identificar conflitos.

G:

A existência de um ponto mais próximo de P que todos os outros, na questão 4, foi identificada por uma idéia do “limite suficientemente próximo, mas nunca alcança”:

- *Entendi que tinha um valor que poderia estar próximo de P e não seria P. Tinha que estar mais próximo que todos os outros.*

Essa idéia foi reafirmada em relação à questão 6, que apresentou como resposta um valor próximo de 1,25, mas não o especificando:

- *Eu coloquei sim você vai ter sempre um valor racional ou irracional que se aproxima de 1,25 dentro do conjunto dos reais.*

A discussão mais duradoura foi em torno do item c (questão 6) no qual utilizou o *conceito definição* de irracional para justificar que 1,25 não era o maior elemento do conjunto:

- *O conceito de número irracional é o quê? Aquele que não pode ser escrito na forma de p sobre q ..., então, x não pode ser 1,25.*

Alguns irracionais foram ditos na tentativa de encontrar o máximo do conjunto:

- $\sqrt{\pi}$ *não...* $\pi/2$.

Neste momento, a incoerência com o *conceito definição* de número irracional foi percebida pelo sujeito.

O *conceito imagem* de existência de um número finito de números entre os dois dados na questão 7, foi contra-argumentado pelo parceiro, não surtindo efeito:

- *E qual seria o próximo?*

Em 9c, tentou apresentar o número 0,3334 descartando-o em seguida, por ter, provavelmente, percebido que não era irracional. A discussão girou em torno da existência ou não de irracional entre 0,333 e 0,333.... G foi resistente em afirmar:

- *Eu não consegui enxergar essa situação para número irracional .*

A apresentação por escrito do número 3,33301579321... pelo parceiro, explicando que os pontos de reticências não significavam periodicidade, não foi suficiente para considerá-lo irracional:

- *Eu entendi que esse número pode ser colocado na forma fracionária.*

- (Y contrapôs) *Então coloca!*

Embora não tenha conseguido colocar na forma de fração, mesmo assim não admitiu a irracionalidade:

- *Dentro desse intervalo aqui não entendo que teria um irracional*

A existência de “alguns” entre dois racionais não foi refutada, quando o parceiro disse existir infinitos (entre os números dados), sugerindo, até então, uma concepção resistente de uma “reta racional” (discreta).

A partir da contra-argumentação do parceiro, exemplificando com π entre os racionais 3,14 e 3,15, é que pareceu ter levado G a um fator de conflito cognitivo:

- *Gostei dessa questão preciso pesquisar sobre números irracionais.*

Y:

A existência do número 1,25 como o maior, na questão 4, não se apresentou resistente, pois os argumentos do parceiro de um limite “muito próximo que nunca alcança” foram aceitos.

Na questão 6, focalizou suas argumentações em torno dos sinais $<$ e $\leq$, isolando a situação dada:

- *Eu fiquei mais na parte do igual.*

- *Eu continuo pensando no menor igual eu cismei com esse igual.*

- *Eu coloquei sim nos dois (itens a e b), 1,25. E no item c, nenhum por causa do igual, pensei nesse sentido, porque ele influiu, não é?*

Explicitou que 1,25 pertenceria ao conjunto $\{x \in I \mid x \leq 1{,}25\}$, não levando em conta o conjunto universo, o qual foi argumentado pelo parceiro. A partir desse momento, houve uma discussão em relação à racionalidade de 1,25:

- *No item c, coloquei nenhum, porque diz menor ou igual. Então, ele entra o 1,25.*

- *(parceiro) ... Mas tem um porém, é no conjunto dos números irracionais, 1,25 é um número racional.*

Embora tenha concordado que 1,25 é racional, a discussão não foi suficiente para que Y refutasse sua resposta, não considerando o conjunto universo.

Em relação a questão 8c, refutou a própria resposta dada anteriormente, confirmando nossa previsão de que houve um *fator de conflito cognitivo* ao responder o questionário.

- *Eu coloquei nenhum, mas tem.*

- *Eu coloquei nenhum, mas tem. Fiquei pensando em casa, têm vários, tem bastante, infinitos.*

- *Eu acho que têm infinitos.*

Refutou também, na questão 9c, sua resposta anterior, reformulando o *conceito imagem,* expondo um número irracional:

- *por exemplo, 0,33301579321...*

6. Conclusão

Segundo o referencial teórico desta pesquisa um sujeito forma e expressa *conceito imagem* e *conceito definição* de um conceito científico. Nesse referencial, os estudantes resolvem problemas matemáticos por meio de seus *conceitos imagem* quando muitas vezes, é esperado por professores que utilizem a definição formal.

Procuramos mostrar *conceitos imagem* que necessitam ser levados em consideração, quando se pretende abordar o conceito de número real, seja no ensino fundamental e médio, seja no superior.

Um fato importante que pudemos constatar foi que a ausência de *conceito definição* relacionado com o nome densidade, para a maioria dos sujeitos, não impediu a revelação do *conceito imagem*.

Um *conceito imagem* quase discreto para os reais revelou-se nesta pesquisa, por meio de considerações subjacentes à inexistência ou à finitude de números, entre dois reais distintos. Como também, pela existência de um número máximo como atributo dos reais e de uma “sucessão de decimais”, e até de irracionais. Assim, interpretamos esses *conceitos imagem* como uma *generalização abusiva* da discretização do conjunto dos inteiros.

A identificação de números distintos pela igualdade de um número com uma aproximação deste, e a dificuldade relativa à ordem encontradas nesta pesquisa, podem interferir em uma elaboração de um *conceito imagem* incoerente com o conceito formal de densidade.

Parte de imagens, aqui reveladas, pareceu-nos advindas de um conhecimento vago dos irracionais, proporcionado por uma *generalização abusiva* dos racionais para os reais, constituindo um *conceito imagem* de “reta racional”.

Dentre os poucos sujeitos que manifestaram *conceito definição*, encontramos o conceito de densidade permeado pela existência da bijeção entre o conjunto dos reais e a reta.

Procuramos tornar *fatores de conflito potencial* em *fator de conflito cognitivo* para, ao menos iniciar, uma reformulação dos *conceitos imagem e definição*. A entrevista constituiu-se em uma das formas para uma desestabilização, possibilitando um processo de elevação nos estágios intelectuais. Esse procedimento também permitiu acompanhar o funcionamento do *conceito imagem* que podem encontrar-se resistentes.

Conceito definição próximo ao formal, apresentado na entrevista, mostrou-se decisivo para o sujeito resolver uma situação duvidosa, conflitante com *conceito imagem*. Enquanto que outro sujeito, sentiu necessidade de reformular seu *conceito definição,* quando este apresentou-se insuficiente, em certa situação.

A revelação de *fatores de conflito potencial*, como o fizemos por meio das respostas dadas ao questionário, bem como do próprio *conceito imagem*, depende, muitas vezes, da escolha de situações. Consideramos essa importância, quando buscamos termos mais apropriados, sem uma variação exaustiva, porém com um potencial de evocar partes do *conceito imagem* relacionadas ao conceito.

A hipótese desta pesquisa, de que concepções encontradas em estudantes, do ensino fundamental e médio, também são as dos professores, desse mesmo segmento de ensino, foi validada por meio das indicações de semelhança dos *conceitos imagem* revelados pelos sujeitos, com as concepções de estudantes (pesquisas de referência). Destacamos ainda, que além dessa comprovação, observamos que muitos termos expressos pelos professores eram idênticos aos que os estudantes apresentavam nas pesquisas, tomadas como referência.

Desse modo, é possível sugerir que o *conceito imagem* do professor reflita em sua prática docente, repercutindo em seus alunos.

Com base nos resultados acima expostos, visamos mostrar a importância dos *conceitos imagem e definição evocados* de densidade, para o processo de ensino e aprendizagem dos números reais.

7. Bibliografia

9.1 Referências

ARTIGUE, M. Épistémologie et didactique. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, Genoble, v. 10, n. 2.3, p. 241-286, 1990.

BACHELARD, G. *A formação do espírito científico.* São Paulo: Contraponto,1996.

BEZUIDENHOUT, J.; OLIVIER, A. Students' conceptions of the integral. In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 24., 2000, Hiroshima. *Anais*. v. 2, p. 73-80.

COURANT, R.; ROBBINS, H. *O que é a matemática?* Uma abordagem elementar de métodos e conceitos. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000.

DREYFUS, T. et al. Advanced Mathematical Thinking. In: NESHER, P.; KILPATRICK, J. (Ed.). *A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, ICMI Study Series Mathematics and Cognition. Cambridge: Cambridge University Press, 1990, p. 113-134.

FISCHBEIN, E.; JEHIAN, R.; COHEN, D. Il concetto di numero irrazionale in studenti di scuola superiore ed in futuri insegnanti. *La matematica e la sua didattica.* Bologna, n. 3, 1996.

GIOVANNI, J.R.; GIOVANNI JR., J.R; BONJORNO, J.R. *Matemática Fundamental*, 2º grau, volume único, São Paulo: FTD, 1994.

IGLIORI, S. B. C.; SILVA, B. Conhecimento de concepções prévias sobre números reais: um suporte para a melhoria do ensino/aprendizagem. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 21., 1998, Caxambu.

MARGOLINAS, C. Une étude sur les difficultés d'enseignement des nombres réels. "*Petit x*", Genoble, p. 51-66, 1988.

ROBINET, J. Les réels: Quels modèles en ont les élèves?. *Educational Studies in Mathematics*, Dordrecht, n. 17, p. 359-386, 1986.

SANTOS, V. de M. *Infinito: concepções e conseqüências pedagógicas*. São Paulo, 1995. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo.

TALL, D. O.; SCHWARZENBERGER R. L. E. Conflicts in the learning of real numbers and limits. *Mathematics Teaching*, Derby, v. 82, p. 44-49, 1978.

TALL, D. O. & VINNER, S. Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics*, Dordrecht, v. 12, p. 151-169, 1981.

VINNER, S. Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, Loughborough, v.14, n. 3, p. 293-305, 1983.

VINNER, S. The role of definitions in the teaching and learning of mathematics, In: Tall D. O. (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991. p. 65-81.

9.2 Obras Consultadas

ARTIGUE, M. La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. In: Gómez, P. (Ed.). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. México: Grupo editorial Iberoamérica S. A., 1995. p. 97-140.

BALACHEFF, N. *Conception, connaissance, concept* - Eléments pour un cours, version du novembre 1998a. Disponível em <http://www-eiah.imag.fr/EIAH/Balacheff/CoursConception/Textes/4ConceptionDef.html> Acesso em: 10 fev. 2000.

BALACHEFF, N. *Conception, connaissance, concept* - Eléments pour un cours, version du novembre 1998b. Disponível em <http://www-eiah.imag.fr/EIAH/Balacheff/CoursConception/Textes/4ConceptionForm.html> Acesso em: 10 fev. 2000.

BROLEZZI, A. C. *A tensão entre o discreto e o contínuo na história da matemática e no ensino de matemática*. São Paulo, 1996. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo.

DANTZIG, T. Número*: A linguagem da ciência*. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1970.

GIOVANNI, J. R.; GIOVANNI JR., J. R; CASTRUCCI, B*. A Conquista da Matemática*, sétima série, São Paulo: FTD, 1998.

GIOVANNI, J. R.; GIOVANNI JR., J. R; CASTRUCCI, B*. A Conquista da Matemática*, oitava série, São Paulo: FTD, 1998.

IMENES, L. M.; LELLIS, M. Matemática 8, São Paulo: Scipione, 1999.

JAQUES, M.; MAURICE-NOVILLE, D. *Piaget ou a inteligência em evolução.* Porto Alegre: ArtMed, 1994.

SILVA, J. D.; FERNANDES V. dos S. *Matemática*, Coleção Horizontes, sétima série, São Paulo: IBEP - Instituto brasileiro de Edições Pedagógicas, s/data.

SILVA, J. D.; FERNANDES V. dos S. *Matemática*, Coleção Horizontes, oitava série, São Paulo: IBEP - Instituto brasileiro de Edições Pedagógicas, s/data.

SILVA, J. D.; FERNANDES V. dos S. *Matemática*, Coleção Horizontes, Curso Completo, São Paulo: IBEP - Instituto brasileiro de Edições Pedagógicas, s/data.

VERGNAUD, G. Problem solving and concept development in the learning of mathematics. Tübingen: E.A.R.L.I. Second Meeting, 1987.

ANEXO 1 - Questões do grupo A

Solicitamos sua colaboração para nossa pesquisa respondendo as questões abaixo.
Nome: ___________________________________

1. Considere os conjuntos $A=\{x \in R|\ x<1,25\}$ e $B=\{y \in Q|\ y<1,25\}$. O conjunto A possui um número que seja maior que todos os outros do próprio conjunto? E o conjunto B? Explique sua resposta.

2. Dado um segmento OP de 2cm, existe um ponto, desse segmento, mais próximo de P que todos os outros? Explique sua resposta.

3. Considere os conjuntos $A = \{q \in Q|\ q^3 \leq 2\}$ e $B = \{p \in Q|p^3 > 2\}$. Há algum número que seja maior que todos os elementos de A e também seja menor do que todos os elementos de B? Se houver, escreva qual (ou quais). Se não, escreva o porquê.

4. Escreva como você explicaria o que é o conjunto dos números reais para alguém que conhece o conjunto dos racionais.

5. Escreva como você explicaria o que é o conjunto dos números reais para alguém que conhece somente o conjunto dos inteiros.

6. Como você definiria o conjunto dos números reais?

7. Assinale V se considerar a sentença verdadeira, F se considerá-la falsa. Escreva por que considerou-a verdadeira ou falsa.

a. (   ) É possível sempre encontrar um número real que esteja entre dois números reais distintos quaisquer.

Porque...

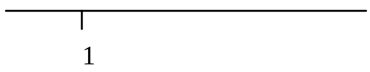
b. (   ) Para cada número racional podemos fazer corresponder um ponto na reta.

Porque...

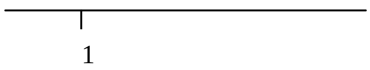
ANEXO 2 - Questões do grupo B

Solicitamos sua colaboração para nossa pesquisa respondendo as questões abaixo.
Nome: ____________________________________

1. Represente, na reta abaixo, o próximo número inteiro ao número dado. Justifique sua resposta.



Represente, na reta abaixo, o próximo número real ao número dado. Justifique sua resposta.



2. Sendo o conjunto A = {p∈Q| p3 ≤ 2} e o conjunto B = {q∈Q| q3 > 2}. Há algum número que seja menor do que todos os elementos de B, mas que não pertença a A? Explique sua resposta.

3. De todos os números menores que 1 existe um que esteja mais próximo dele? Se sim represente-o. Se não, escreva por quê.

4. Para cada um dos itens, responda: Existe algum número **racional** entre os números representados abaixo? Se existir, escreva qual (quais ou alguns)? Se não, escreva o porquê.

a) 3,14 e π ?
Quantos existem?
Qual (quais ou alguns):
Não existe, por que...

b) $\sqrt{3}$ e $\sqrt{4}$?

Quantos existem?

Qual (quais ou alguns):

Não existe, por que...

c) 0,333 e 0,333... ?

Quantos existem?

Qual (quais ou alguns):

Não existe, por que...

d) 2/3 e 0,666... ?

Quantos existem?

Qual (quais ou alguns):

Não existe, por que...

e) 1/7 e 2/7?

Quantos existem?

Qual (quais ou alguns):

Não existe, por que...

f) $\sqrt{2}$ e 1,300301302303...? (os algarismos seguem essa lei de formação)

Quantos existem?

Qual (quais ou alguns):

Não existe, por que...

5. Para os mesmos itens da questão anterior, responda: Existe algum número **irracional** entre eles? Se existir, qual (quais ou alguns)? Se não, escreva o porquê.

   a) 3,14 e π?

Quantos existem?

Qual (quais ou alguns):

Não existe, por que...

b) $\sqrt{3}$ e $\sqrt{4}$?

Quantos existem?

Qual (quais ou alguns):

Não existe, por que...

c) 0,333 e 0,333... ?

Quantos existem?

Qual (quais ou alguns):

Não existe, por que...

d) 2/3 e 0,666... ?

Quantos existem?

Qual (quais ou alguns):

Não existe, por que...

e) 1/7 e 2/7?

Quantos existem?

Qual (quais ou alguns):

Não existe, por que...

f) $\sqrt{2}$ e 1,300301302303...? (os algarismos seguem essa lei de formação)

Quantos existem?

Qual (quais ou alguns):

Não existe, por que...

6. Como você ordenaria os pares de números que aparecem na questão anterior? Represente-os numa reta.

7. Escreva o que significa para você o conjunto dos números reais ser ordenado.

8. Você conhece a expressão densidade numérica? Se sim, escreva o que você conhece sobre esse assunto.

ANEXO 3 - Questões dissertativas

Nome: ___________________________________

1. Após ter respondido as questões e refletido sobre elas, você teve dificuldade (ou dúvida) em algumas delas? Quais questões e quais dificuldades (ou dúvidas)?

2. Você conhecia questões semelhantes a essas? Quais? Onde?

3. O que as questões fizeram você refletir?

ANEXO 4 - Questões para identificação

Solicitamos sua colaboração para nossa pesquisa respondendo as questões abaixo.
Nome: ________________________________

I. Em relação ao seu curso de graduação:

a. Concluiu ( ) está cursando ( )

b. Em instituição: ( ) particular ( ) estadual ( ) outros. Qual? ___________

c. Tipo do curso:
( ) licenciatura plena ( ) licenciatura curta ( ) bacharelado
( ) outro. Qual ________________________

d. Em: ( ) Matemática ( ) Física ( ) Ciências ( ) Outro? Qual? ________

e. Nome da instituição____

f. Cidade/Estado: ____

g. Período: ano de início: ______ ano de término: ______

h. Durante seu curso, teve aulas de análise real?
( ) sim ( ) não ( ) não lembra

II. Em relação outros cursos:
Se você fez (ou faz) cursos (pós-graduação, especialização, etc.), relacione-os.

Nome do curso	Nome da instituição	Período

III. Em relação a sua profissão:

a. Ano de início da docência: ______

b. Disciplinas que leciona ou lecionou:
( ) Matemática ( ) Física ( ) Des. Geométrico ( ) Outros:__________________

c. Cidades em que leciona ou lecionou matemática:
____

d. Séries em que leciona ou lecionou matemática:
( ) anteriores a 7ª série ( ) 7ª série ( ) 8ª série ( ) Ensino Médio ( ) Ensino Superior

e. Séries em que mais freqüentemente leciona matemática:
( ) anteriores a 7ª série ( ) 7ª série ( ) 8ª série ( ) Ensino Médio ( ) Ensino Superior

f. Escolas que leciona ou lecionou matemática:
( ) estadual ( ) municipal ( ) particular

g. Utiliza freqüentemente livro didático? ( ) sim ( ) não Cite alguns:
____
____
____

ANEXO 5 - Comentários verbalizados na fase exploratória

Relacionamos abaixo questões e comentários verbalizados durante a aplicação.

- Na questão: “Considere os conjuntos A = {q∈***Q***| $q^3 \leq 2$} e B = {p∈***Q***|$p^3 > 2$}. Há algum número ...” É qualquer número?

- Na questão “Considere os conjuntos A={x∈***R***| x<1,25} e B={y∈***Q***| y<1,25}... não entendi esta questão, não está claro”. Posteriormente, o mesmo indivíduo comentou com o colega, “qual a diferença?... eu não vou escrever errado”.

- Na questão: “Como você definiria o conjunto dos números reais?”, baseado nos números que apareceram nas questões ou geral?

- Na questão: “Como você ordenaria os pares de números que aparecem na questão anterior? Represente-os numa reta, é para representar respeitando a ordem?”. Outras pessoas em relação a mesma questão: “com precisão?”, “quais itens para ordenar?”.

- Não entendeu a questão: “Escreva como você ordenaria os números reais. Como assim?”

- “Tem perguntas inteligentes. Você virá depois resolver? Fiquei em dúvida nessa: Existe algum número racional entre os números 0,333 e 0,333...”

ANEXO 6 - Questões para identificação da fase sistemática

Solicitamos sua colaboração para nossa pesquisa respondendo as questões abaixo.

NÚMERO: ___________

I. Em relação ao seu curso de graduação:

a. Concluiu ( ) está cursando ( )

b. Em instituição: ( ) particular ( ) estadual ( ) federal ( ) outros.

Qual? _____________

c. Tipo do curso: ( ) licenciatura plena ( ) licenciatura curta ( ) bacharelado

( ) outro. Qual ________________________

d. Em: ( ) Matemática ( ) Física ( ) Ciências ( )Outro?

Qual? _____________________

e. Nome da instituição:

____

f. Cidade/Estado: ____

g. Período: ano de início: ______ ano de término: ______

h. Durante seu curso, teve aulas de análise real?

( ) sim ( ) não ( ) não lembra

II. Em relação a outros cursos:

Se você fez (ou faz) cursos (pós-graduação, especialização, etc.), relacione-os.

Nome do curso	Nome da instituição	Período

III. Em relação a sua profissão:

a. Ano de início da docência: ______

b. Disciplinas que leciona ou lecionou:

( ) Matemática ( ) Física ( ) Des. Geométrico

( ) Outras:____

c. Cidades em que leciona ou lecionou matemática:

____

d. Séries em que leciona ou lecionou matemática:

( ) anteriores a 7ª série ( ) 7ª série ( ) 8ª série ( ) Ensino Médio ( ) Ensino Superior

e. Séries em que mais freqüentemente leciona matemática:

( ) anteriores a 7ª série ( ) 7ª série ( ) 8ª série ( ) Ensino Médio ( ) Ensino Superior

f. Escolas que leciona ou lecionou matemática:

( ) estadual ( ) municipal ( ) federal ( ) particular

g. Utiliza freqüentemente livro didático? ( ) sim ( ) não Cite alguns:

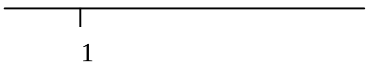
____

____

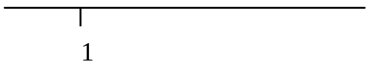
____

ANEXO 7 - Questões da fase sistemática

1. Represente o número inteiro consecutivo na reta abaixo. Justifique sua resposta.



Represente o número real consecutivo na reta abaixo. Justifique sua resposta.



2. Sendo o conjunto A = {p∈Q| p ≤ 2} e o conjunto B = {q∈Q| q > 2}. Há algum número que seja menor que qualquer elemento de B e não pertença a A? Explique sua resposta.

3. De todos os números menores que 1 existe um que esteja mais próximo dele? Se sim represente-o. Se não, escreva por quê.

4. Dado um segmento OP de 2cm, existe um ponto, desse segmento, mais próximo de P que todos os outros? Explique sua resposta.

5. Ordene os números do menor para o maior: $\frac{3}{10}$; -2; π; 0; -1,999...; 3,1415; $\sqrt{3}$

6. Existe um maior elemento em cada conjunto explicitado abaixo? Explique sua resposta em cada caso:

a) {x∈R| x<1,25}

b) {x∈Q| x<1,25}

c) {x∈I| x≤1,25} (I é o conjunto dos irracionais)

7. Para cada um dos itens, responda: Existe algum número **racional** entre os números representados abaixo? Se existir, escreva qual (quais ou cite alguns). Se não, escreva o porquê.

a) 3,14 e π ?
Quantos existem?
Qual (quais ou cite alguns):
Não existe, por que...

b) $\sqrt{3}$ e $\sqrt{4}$?
Quantos existem?
Qual (quais ou cite alguns):
Não existe, por que...

c) 0,333 e 0,333... ?
Quantos existem?
Qual (quais ou cite alguns):
Não existe, por que...

d) 2/3 e 0,666... ?
Quantos existem?
Qual (quais ou cite alguns):
Não existe, por que...

e) 1/7 e 2/7?
Quantos existem?
Qual (quais ou cite alguns):
Não existe, por que...

f) $\sqrt{2}$ e 1,500501502503...? (os algarismos seguem essa lei de formação)
Quantos existem?
Qual (quais ou cite alguns):
Não existe, por que...

8. Para os mesmos itens da questão anterior, responda: Existe algum número **irracional** entre eles? Se existir, qual (quais ou cite alguns). Se não, escreva o porquê.

a) 3,14 e π?
Quantos existem?
Qual (quais ou cite alguns):
Não existe, por que...

b) $\sqrt{3}$ e $\sqrt{4}$?
Quantos existem?
Qual (quais ou cite alguns):
Não existe, por que...

c) 0,333 e 0,333... ?
Quantos existem?
Qual (quais ou cite alguns):
Não existe, por que...

d) 2/3 e 0,666... ?
Quantos existem?
Qual (quais ou cite alguns):
Não existe, por que...

e) 1/7 e 2/7?
Quantos existem?
Qual (quais ou cite alguns):
Não existe, por que...

f) $\sqrt{2}$ e 1,500501502503...? (os algarismos seguem essa lei de formação)
Quantos existem?
Qual (quais ou alguns):
Não existe, por que...

9. Escreva o que você conhece sobre densidade numérica.

10. Como você definiria o conjunto dos números reais?

ANEXO 8 - Descrição da entrevista

Entrevista 1

M: Depois que eu estava num certo ponto eu voltei. Aqui eu coloquei sim, o ponto 1,99 cm considerando o nosso sistema métrico decimal. Mas agora já estou em dúvida. Isso se a gente fosse considerar o centímetro. Não existe nada menor que o centímetro? Existe né?
N: Existe
M: Existe. Esse não é o ponto mais próximo, 0 1,99. E nem sei se dá para definir esse valor. Agora já não concordo com o valor que eu coloquei
N: Eu coloquei que sim, mas que não é possível determiná-lo. Eu pensei como os reais mesmo
M: Se não é possível determinar, como a gente vai colocar sim
N: Não dá para dizer exatamente qual é esse valor. Você colocou 1,99. Tem um valor mais próximo do 2 que não é 1,99. Põe mais um 9, mais um 9... acho que aproxima mais, não é?
M: Já que é infinito acho melhor colocar sim
N: Não, se existe...
M: Existe um ponto se você colocar que existe, você tem que definir esse ponto, não tem?
N: Eu acho que não. Acho que existe mas você não é capaz de definir
M: Porque sempre vai ter mais um... mais um..., mais um... então?
N: Então? Não é possível determinar
M: Então não é possível dizer quem é esse ponto
N: É eu acho que não dá para dizer quem é o ponto, mas existe esse mais próximo
M: Ele é indefinido mas ele existe, porque sempre vai ter alguma coisa próxima a outra
N: Por que se o segmento vale 2 então o valor mais próximo está compreendido entre 0 e 2. Qualquer número compreendido entre 0 e 2... que seja maior que 0 mas diferente de 2... O mais próximo de 2.
M: Eu acho que esse ponto deve existir, mas dizer qual é, impossível. Eu acho estranho você dizer que existe mas não consegue determinar. Seria o que um valor aproximado...?
N: É um valor aproximado
M: Seria assim um limite?
N: Está bem aproximado né, desse valor 2. É difícil você dizer porque deve existir algum cálculo que aproxima esse valor... você vai trabalhar com valor aproximado. Se está nesse limite, vai ser algum ponto próximo. Como não dá para definir... Como eu disse não dá para definir, mas existe. Não, ele pode existir mas é difícil definir... então é um valor aproximado.
N: Acho que eu não tinha entendido a pergunta. É o mesmo caso do anterior né? Seria o mais próximo de 1,25. Ele quer saber se existe um valor mais próximo desse 1,25... é a mesma coisa... existe infinitos valores mas o maior não dá para definir.
M: Estou com a mesma idéia do anterior, sempre vai existir o mais um. É aquela idéia que o conjunto real é denso, entre dois números sempre vai existir mais 1, no conjunto dos números reais... Então não vai existir, você não pode dizer qual é o maior, vai existir um valor aproximado... Ele mesmo ser definido não dá porque

sempre vai existir mais um no meio... não dá para parar, então vai ser sempre um valor aproximado
N: Nas eu acho que o valor que ele quer é o valor aproximado. O maior valor, o mais próximo de 1,25
M: Um maior elemento, então está querendo a definição desse um, não é?
N: É... ele quer o valor mais próximo, o maior valor desse conjunto que seja próximo, o mais próximo de 1,25. Eu também acho que existe mas não dá para determinar esse valor mais próximo, não tem como.
M: Eu acho que se é infinito não dá para você colocar...
N: É, se é reais não dá
M: Quem é esse maior valor?
N: Você não pode determinar o consecutivo de um real
M: Então você acaba caindo naquilo sempre tem mais 1. Como você vai determinar... é infinito. Não dá para dizer o elemento...Eu acho que não existe esse elemento, o maior. Como fala que sempre existe um entre dois então não dá para determinar
N: É, é isso. Eu concordo. Não tenho mais argumento.
M: Na resposta anterior (questão 5) eu acabei concordando com N. Mas ele vai ser aproximado não vai ser o valor. Aqui falando o maior elemento... No anterior era ponto aqui é elemento. Apesar que ponto e elemento, porque na reta também representa o conjunto os números reais. É a mesma idéia. Então não dá para determinar esse um.
N: Existe mas não dá para determinar... identificar
N: Tudo igual, se tivesse os naturais aqui tudo bem
M: Eu coloquei também tudo igual a mesma resposta
N: Eu acho que nos três casos não dá para determinar esse elemento mais próximo. Se fosse os naturais daria para identificar, mas aqui não dá.
M: Porque sempre vai ter mais um então não dá para determinar
N: Eu pensei $\sqrt{3}$ é 1,42 aproximadamente. A $\sqrt{3}$ é irracional, poderia existir 1,42; 1,5 que seriam racionais
M: Eu coloquei valores mais próximos de 2
N: Eu acho que respondemos igual. Aqui se pegarmos decimal entre os dois... decimal... é decimal exato ou dízima periódica, vai ser racional.
N: É a mesma coisa, infinitos valores. Ele pediu exemplo de irracionais eu coloquei 1,99... que seria um... não peraí... não aí é uma dízima... já vi que está errado
M: Eu coloquei 1,91...
N: Ah, mas também está errado, ai no seu caso vai dar uma dízima periódica também, mas uma dízima periódica composta.
M: Teriam que colocar mais casas para identificar que é número irracional. Aqui parece que o período é 91.
N: Não aí identifica com se fosse o 1 que tivesse repetindo: 1,9111... Eu também coloquei 1,999... também uma dízima.
M: Mas mesmo assim pode ser um período longo. Como vou identificar que o número é irracional? Por exemplo eu coloco 9 casas aqui, essas casas podem repetir novamente?
N: Se fica confuso, você pode colocar uma barra em cima para identificar que aquela seqüência se repete
M: Mas isso quando é dizima e quando eu quero mostrar que não é?
N: Aí você fica na dúvida

M: Nós estamos acostumados a trabalhar com números irracionais, na forma de radical. E ante essa √3 e √4 qual seria o número irracional e como representá-lo?
N: Aqui eu coloquei 1,99... eu poderia ter colocado 1,934028 e reticências e daí você não saberia qual o número depois do 8.
M: Mas esse período tem um limite para repetição?, por exemplo... tem quantos algarismos? Por exemplo tem o período com duas casas, com três... existe esse limite para identificar?
N: Eu acho que... não sei
M: Eu nunca pensei nisso. Aqui foram duas casas quem garante que não vai ter repetição depois.
N: Você teria que observar a seqüência que os números apareceram nesse caso (1,91...) o próximo seria o 1 . A lógica seria 1
M: Então, mas e para colocarmos o irracional?
N: Mas aí, mas se você quiser identificar o período...
M: Não, queremos o contrário. Nós queremos provar que é irracional. Eu fiquei na dúvida com essa questão do período. Quantos algarismos pode ter para provar que não é período. Põe nove diferentes, mas também pode porque só tem nove algarismos. 1,2,3... até 9
N: Mas aí você está tentando determinar a fração geratriz, eu acho ... a fração que vai dar origem a essa dizima. Coloca a fração geratriz se for racional e não coloque se for irracional.

Entrevista 2

G: Não vai ser P, seria 1,999...
Y: Pensei nisso também, mas depois coloquei 1,99.
G: Eu nem pus valor eu pensei mais... dentro desse segmento você sempre tem um valor que nunca vai ser P. Mas vai estar sempre próximo de P
Y: Cada hora pensava de um jeito, aí coloquei 1,99
G: Eu analisei assim não vai ser o 2... mas vai estar próximo. Eu pensei em limite... aquelas variações, imaginei isso mas nem cheguei a colocar limite porque aí iria entrar na parte algébrica. Entendi que tinha um valor que poderia estar próximo de P e não seria o P. Tinha que estar mais próximo que todos os outros.
Y: Eu acho aceitável essa resposta
Y: Se é menor que 1,25 existe
G: Você analisando como sentença, aqui você não está especificando o valor. Então se o x pode assumir qualquer posição. Eu coloquei sim você vai ter sempre um valor racional ou irracional que aproxima-se de 1,25 dentro do conjunto dos reais
Y: Eu como fala menor que 1,25... fala menor, coloquei 1,25 eu pensei na hora
G: 1,24?
Y: É... não pus 1,25 porque fala menor. No item c coloquei nenhum porque diz menor ou igual. Então ele entra o 1,25
G: Mas o I aqui é o conjunto dos números irracionais
Y: É por isso que coloquei nenhum
G: Eu coloquei sim, mas eu acho que no final eu ia colocar...
Y: O igual, aí vai ter nenhum, porque é igual, qual que vai ser? Nenhum
G: Mas o maior elemento pode ser 1,25, vai ser o maior elemento possível. Mas tem um porém, é no conjunto dos números irracionais. 1,25 é um número racional

Y: É, racional
G: Um valor irracional, pode ter um valor sim, que não seria 1,25...o irracional, eu teria ainda um valor estaria próximo do 1,25 e seria irracional
Y: E seria irracional?
G: E seria irracional
Y: Acho que não, iria ficar um e para os outros sim mas esse aqui não...
G: Ah, a questão do igual
Y: É os outros dois não tem
G: Eu analisei pensando no número irracional
Y: Eu fiquei mais mas na parte do igual
G: Eu levei em conta 1,25 por ser, colocar se fora racional eu tratei o x como sendo o valor irracional porque por exemplo: x igual a 1,25? 1,25 é racional. Só que o x tem que ser irracional, porque aqui x está no conjunto dos irracionais. Então o igual aqui não vai entrar porque não vai ter um valor irracional que seja igual aqui... o conceito de número irracional é o que? aquele que não pode ser escrito na forma de p sobre q... Então entrou na parte algébrica. Logo se ele não pode ser colocado na forma p sobre q, então x não pode ser 1,25. Então o item b ele pode ser um número racional que pode ser sempre maior que o anterior. Aqui no c, o irracional tem essa peculiaridade não pode ser escrito como p sobre q.
Y: Menor ou igual, o número irracional... não sei
G: 1,25 um número irracional... não teria como, raiz de número, raiz de número irracional?... $\sqrt{\pi}$ não... $\pi/2$, nem tem como
Y: Não, não dá...
G: Raiz de um número irracional?
Y: Eu continuo pensando no menor igual eu cismei com esse igual
G: Por causa do igual... eu levei para o caso do irracional. Existiria sempre um racional que seria maior que o anterior e menor que 1,25. (item b)
Y: Eu coloquei sim nos dois (itens a e b) 1,25 e no item c nenhum por causa do igual, pensei nesse sentido porque ele influiu, não é?
G: Eu não pus valor
Y: Pensei nele mesmo por causa do menor
G: Eu analisei mais a parte do conjunto dentro do conjunto tenho essa situação
Y: Eu coloquei nenhum, mas tem
G: Citei o exemplo 3333/10000 seria um racional e seria maior que 0,333
Y: Eu coloquei nenhum, mas tem fiquei pensando em casa, tem vários, tem bastante, infinitos
G: Eu coloquei alguns
Y: Eu acho que tem infinitos
Y: Igual no outro tem infinitos para mim tem infinitos
G: Aqui não poderia ser por exemplo 0,3334
Y: Porque por exemplo 0,3330 vai aumentando não pula mais uma casa? Para mim é infinito
G: E qual seria o próximo?
Y: Coloca 0,33301 vai aumentando as casas
G: Mas número irracional? Eu entendi não porque 0,333... é uma dizima
Y: Mas e o π? 3,1415... não está entre 3,14 e 3,15?
G: Mas nesse caso eu entendi que não eu não consegui enxergar essa situação para número irracional
Y: Olhe, por exemplo 0,333 para chegar no outro 3, quarta casa decimal, não têm infinitos? Para colocar um irracional, 0,33301 não está entre? Porque para chegar

nesse próximo 3 não existe outros? Existe outros por exemplo 0,33302 aí vai aumentando quando chegar 9 aqui você não vai aumentar um

G: Mas aí seria esse 0,2999... para chegar no 0,3

Y: Então existe outros porque se o π é 3,14159... não está entre um e outro? Por exemplo 0,33301579321... e vai embora, é um irracional

G: Eu não consegui enxergar. Eu entendi que esse número pode colocar na forma fracionária

Y: Então coloca?

G: Dentro desse intervalo aqui não entendo que teria um irracional

Y: Vou pelo π , um exemplo paralelo. Não está entre um e outro? Entre um e outro não existe infinitos números irracionais?

G: Mas dentro desse (item c) não entendi que tenha

Y: Mas pensa no π, não está no meio de 3,14 e 3,15? Deu para entender?

G: Ë..., mas no outro...mas agora...gostei vou pesquisar sobre números irracionais (pediu que recomendasse um livro).