MARCOS AGOSTINHO DE FREITAS

EQUAÇÃO DO 1º GRAU: MÉTODOS DE RESOLUÇÃO E ANÁLISE DE ERROS NO ENSINO MÉDIO.

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Pontifícia Universidade Católica
São Paulo - 2002

MARCOS AGOSTINHO DE FREITAS

EQUAÇÃO DO 1º GRAU:
MÉTODOS DE RESOLUÇÃO E ANÁLISE DE ERROS NO ENSINO MÉDIO.

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática, sob a orientação da Prof.Dra-Anna Franchi.

Pontifícia Universidade Católica
São Paulo – 2002

Comissão Julgadora

AGRADECIMENTOS

À Professora Doutora ANNA FRANCHI, por sua orientação, incentivo e dedicação para a realização deste trabalho.

Aos alunos da Escola, pelo interesse com que participaram desta pesquisa.

Ao Prof. Dr. Manoel Oriosvaldo de Moura e Prof. Dr. Benedito Antonio da Silva, por terem aceito participar da Banca Examinadora.

Às pessoas que leram e contribuíram com suas sugestões e críticas para o aperfeiçoamento deste estudo, em especial a Profa. Pola Paparelli.

Ao Centro Universitário FIEO pelo auxílio financeiro.

À minha esposa e a minha filha, pela compreensão, colaboração, apoio e incentivo ao longo desse percurso.

RESUMO

Esta pesquisa estuda aspectos relativos aos procedimentos de resolução de equações do 1º grau utilizados por alunos do primeiro ano do ensino médio de uma escola particular de São Paulo. De modo mais específico, refere-se aos erros relacionados aos aspectos conceituais e aos métodos de resolução destas equações. A pesquisa consistiu da aplicação de um instrumento investigativo contendo 24 equações do primeiro grau, com coeficiente inteiros, e entrevistas com esses alunos. A análise dos procedimentos corretos e incorretos de resolução revelou uma forte influência da mecanização de técnicas associadas à utilização de frases como: “isolar o x”, “passar e mudar o sinal”.Ao analisar os erros dos alunos, este estudo procura apontar caminhos para novas abordagens sobre os métodos de resolução de equações no ensino fundamental e médio.

ABSTRACT

This research studies the aspects related to theprocedures of the first-degree equations solution used by first-year students of a private secondary school of São Paulo. In a more specific way, it refers to the errors related to the conceptual aspects and to the solution methods of these equations. The research consisted on the application of na investigative instrument that contains 24 first-degree equations, with whole coefficients, and interviews with these students. The analysis of correct and incorrect solution procedures revealed a strong influence of the associated techniques mechanization to the use of sentences such as: “isolate the x”, “pas and change the signal”. In analyzing the students’ mistakes, this study aims to point out ways for new approaches on the primary and secondary school solution methods of equations.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

> *Uma grande descoberta envolve a solução de um grande problema, mas há uma semente de descoberta na solução de qualquer problema. Seu problema pode ser modesto; porém, se ele desafiar sua curiosidade e fizer funcionar sua capacidade inventiva, e caso você o resolva sozinho, então você poderá experimentar a tensão e o prazer do triunfo da descoberta.*
>
> **George Polya.**

O presente trabalho discute aspectos relativos à compreensão dos procedimentos nas resoluções das equações do 1º grau, com coeficientes inteiros, da forma ax=b e ax+b=cx+d, com alunos do primeiro ano do ensino médio de uma escola particular de São Paulo.

Para analisar esses aspectos elaboramos e aplicamos um instrumento investigativo, contendo estas equações, e realizamos entrevistas com esses alunos.

A escolha das equações de 1º grau como objeto desta investigação nos pareceu adequada pela sua importância na resolução de problemas, tanto matemáticos como de outras áreas. Além disso, o fato de os alunos do ensino médio já terem estudado esse tema, e certamente por terem utilizado estas equações em diferentes tópicos da matemática ensinada nas séries do ensino fundamental, acrescenta uma certa especificidade a nosso objeto de pesquisa.

Com relação aos procedimentos adotados pelos alunos nas resoluções de equações do instrumento investigativo e dos diálogos nas entrevista, pretendemos analisar os aspectos conceituais e os relacionados aos métodos de resolução.

Esses aspectos conceituais podem ser entendidos como o domínio do simbolismo algébrico sintático-semântico em que uma equação se expressa, em particular, ter um entendimento da igualdade como símbolo de equivalência entre os membros; dar significado à variável e ao valor encontrado da incógnita na equação.

Em relação aos métodos de resolução pretendemos examinar como os alunos entendem e aplicam os vários métodos de resolução nas diferentes equações.

Ao assumirmos esta classificação não estamos assumindo, como veremos nas Considerações Finais, que esses aspectos devem ser tratados isoladamente, mas pretendemos apenas organizar a exposição, tomando como ponto de partida as resoluções das equações do instrumento investigativo, os discursos dos alunos nas entrevistas e as referencias bibliográficas.

Este estudo não se trata de uma construção teórica de natureza pedagógica; também não tem a intenção de varrer toda a problemática que o professor enfrenta em sala de aula, no ensino das equações do 1º grau, mas coloca algumas perguntas a respeito dos procedimentos dos alunos nas resoluções destas equações.

Como os alunos do ensino médio se comportam frente ao processo de resolução de uma equação? O método simplificado de transposição de termos, geralmente utilizado por esses alunos, como veremos no capítulo a seguir, tem sido utilizado eficientemente e com clareza quanto aos critérios válidos de transformações de uma equação em outras equações equivalentes?

Como entender os erros dos alunos tanto os mais diretamente relacionados aos aspectos conceituais, como aqueles que podem ser vistos mais diretamente relacionados aos métodos de resolução? Como os alunos aplicam as técnicas e quais suas justificativas para estas aplicações ?

Ao responder a estas e a outras perguntas, pretendemos, com este estudo, indicar algumas direções para repensar o ensino da álgebra escolar, especificamente, as resoluções das equações do primeiro grau.

Este estudo está dividido em 6 capítulos, descritos da seguinte forma:

No capítulo 1, discutiremos a problemática e a justificativa do trabalho, apresentando as questões relacionadas à concepção de equação e os métodos de resoluções.

No capítulo 2, abordaremos as várias concepções da álgebra, analisadas por vários autores (Kieran C, Mason J, Kaput J, Booth L, Caraça B, Usiskin, e outros), e apresentaremos também as diversas pesquisas já realizadas nestas áreas sobre as equações e métodos de resolução.

No capítulo 3, será apresentada a Metodologia utilizada para a realização da pesquisa, que consistiu em: um instrumento piloto, realizado para verificar a pertinência do estudo; critérios para a elaboração das equações do instrumento; categorias de erros e formulação das entrevistas.

O capítulo 4 será dedicado à análise quantitativa dos resultados do instrumento investigativo.

No capítulo 5, apresentamos as análises das resoluções das equações do instrumento e das entrevistas, referentes à compreensão dos alunos sobre as equações, às técnicas de resoluções, e os erros cometidos.

No sexto e último capítulo, serão feitas as considerações finais a respeito deste trabalho. Nos anexos estão as transcrições das entrevistas e os extratos do instrumento investigativo de alguns alunos.

CAP. 1 - Problemática e Justificativa.

Após vários anos como professor de Matemática do ensino médio, pude constatar que os alunos, em uma grande parte, entram no 1º ano sem um conhecimento aprofundado sobre as resoluções de equações do 1º grau, ou seja, da forma $ax = b$ ou $ax + b = cx + d$. Em geral, eles resolvem essas equações utilizando um único procedimento de resolução, que consiste no método da transposição, isto é, transpor os termos de um membro para outro da igualdade.

Este método pode ser eficiente quando utilizado com significado, ou seja, com clareza quanto à validade dos procedimentos que transformam as equações em outras equivalentes; por exemplo, realizando a operação inversa ou efetuando a mesma operação em ambos os membros da equação.

Entretanto, esse procedimento de resolução, quando aplicado mecanicamente, sem a compreensão de equações equivalentes, pode levar os alunos a cometerem determinados erros.

Esses erros podem ser provenientes tanto do fato de efetuar a transposição de termos sem alterar o sinal da operação, como de alterar indevidamente o sinal do coeficiente. Isto quer dizer que os alunos efetuam a “passagem” de um coeficiente ou de um termo independente para o outro lado da equação, simplesmente alterando o sinal do número que é transposto, muitas vezes em uma seqüência de atos mecânicos, sem a percepção da operação envolvida, que é a essência desse método.

Conforme Kieran (1992), estudos nessa direção constataram que muitos estudantes aprendem a manipular equações de uma maneira mecânica, usando um algoritmo de resolução, que consiste no procedimento “Muda de lado – Muda de sinal”.

Um dos aspectos desse olhar pontual é ignorar a existência de outros métodos de resolução, além da transposição de termos, entre os quais destaco: o do encobrimento (ou esconder), de desfazer (operar ao contrário), o método da substituição por tentativa e erro e o método formal de realizar a mesma operação em ambos os termos da equação (ou das equações equivalentes).

Resolver uma equação pelo método do encobrimento, consiste em “esconder” determinado termo, a fim de encontrar uma resposta que seja satisfatória em relação à igualdade. Por exemplo, na equação 2x + 3 = 8x, se escondermos o número 3 e perguntarmos: 2x somado com quanto resulta em 8x ? A resposta seria 6x, assim 3 = 6x, conseqüentemente x igual a ½.

Apesar desse método ser limitado para equações do tipo ***ax + b = cx + d***, ele se apóia na equivalência dos termos, o que pode auxiliar nas resoluções dessas equações, com a aplicação do método formal de efetuar a mesma operação em ambos os lados da igualdade.

O método de desfazer ou efetuar a operação inversa, relaciona-se intimamente com o método de esconder, mas não é equivalente. Esse método baseia-se nas noções de inversos operacionais e na reversibilidade de um processo envolvendo um ou mais passos invertíveis.

Por exemplo, para resolver ***ax + b = c***, toma-se o resultado numérico do lado direito e, procedendo da direita para a esquerda, desfaz-se cada operação pela sua inversa. Entretanto, ele é claramente limitado às equações com uma única ocorrência do termo com a incógnita numa dada posição.

Mesmo com suas limitações, o método de desfazer é importante por estimular a reversibilidade, a análise e a resolução de problemas, e concomitantemente, fornece pré-requisitos que podem ser usados na aprendizagem do método das equações equivalentes.

O método da substituição por tentativa e erro para resolver equações, pode ser usado nas equações aritméticas[1] da forma ax = b. Por exemplo, na equação 3x = 15, o procedimento para encontrar o valor da incógnita x se resume em determinar o número que multiplicado por 3 é igual a 15, valendo-se do domínio de um repertório de resposta de produtos desse tipo (tabuada)

A tentativa e erro é um método de resolução elementar, que pode fornecer uma base intuitiva para métodos de resolução mais estruturais. Em seus estudos, Kieran (1988), relata que há evidências de que estudantes que usam o procedimento da tentativa como um expediente inicial para resolver equações, possuem uma noção mais desenvolvida do equilíbrio entre os lados esquerdo e direito de uma equação e do papel da equivalência do sinal de igual, do que aqueles que nunca a usam

Os métodos formais de resolução de equações incluem transpor ou efetuar a mesma operação em ambos os lados de uma equação. Embora muitos alunos

[1] Denominação dada às equações da forma ax = b ou ax + b = c, de acordo com Filloy e Rojano (1984)

considerem a transposição de termos uma versão resumida do procedimento de efetuar a mesma operação em ambos os lados, esses dois métodos são diferentes. Efetuar a mesma operação em ambos os lados de uma equação enfatiza a relação de equivalência das equações, e essa ênfase está ausente no procedimento de transposição.

O objetivo de discorrer sobre os métodos de resoluções das equações é possibilitar a discussão sobre as várias formas de trabalhar as operações de equilíbrio nas equações, de modo a conservar os conjuntos-soluções.

O método de resolução de equação utilizado pelos alunos se constitui em elementos de análise de seus procedimentos, pois ele mascara o verdadeiro significado das relações e operações que realizam para transformar uma equação em outra equivalente.

As questões relacionadas aos procedimentos de resoluções não são independentes da compreensão que os alunos têm da linguagem algébrica em que a equação se expressa, em particular, da compreensão do conceito de igualdade. Em muitos casos, o sinal serve apenas para indicar um resultado do cálculo aritmético que está sendo realizado.

Há muitas situações em que as notações algébricas e aritméticas têm aparência similar, porém significados diferentes. Isto torna difícil para o aluno distinguir uma da outra. No caso do sinal de igualdade, na Aritmética ele é utilizado quase sempre com caráter unidirecional; à esquerda indica-se a operação e à direita se coloca o resultado. Neste caso, o sinal de igual conecta ao problema com o resultado numérico. A utilização da igualdade para relacionar processos que dão o mesmo resultado é raramente utilizada no ensino da aritmética.

Outro aspecto que tem sido ressaltado no ensino da álgebra escolar diz respeito ao conceito de variável. Em particular, no processo de resolução em equações algébricas do tipo $ax + b = cx + d$, deve-se operar com a variável tanto da esquerda para a direita, como da direita para a esquerda e nesse caso a igualdade é vista como uma equivalência dos termos e não mais como o prenúncio de um resultado numérico.

Um critério importante para avaliar essa compreensão é a utilização da substituição do valor encontrado para validar a resolução.

O fato de os alunos usarem o método da transposição de termos como uma rotina de regras para resolver as equações, pode levá-los a uma memorização de técnicas, em detrimento da compreensão do significado de uma equação.

Nesta perspectiva, Mason (1996) afirma que a Matemática evolui na medida em que possibilita resolver determinados problemas através de uma sistematização de regras, criando assim uma rotina de procedimentos. Mas a ambivalência entre privilegiar a técnica ou o raciocínio pode criar uma tensão pedagógica nos professores, em virtude do desejo de não só obter êxito a curto prazo, através da valorização de um algoritmo, como também alcançar o conhecimento a longo prazo, com o desenvolvimento do pensamento matemático, entendido como o ato de reconhecer, relacionar, observar regularidade e generalizar.

A essência do pensamento matemático está no reconhecimento, na apreciação, na expressão e na manipulação da generalidade, e implica ao mesmo tempo, em particularizar e generalizar, assim como em conjecturar e justificar.

A partir da observação de casos particulares, as regularidades são desvendadas, as conjecturas e teorias matemáticas são formuladas. O exercício da indução e da dedução em Matemática reveste-se de importância no desenvolvimento da capacidade de resolver problemas, de formular e testar hipóteses, de induzir e de inferir dentro de determinada lógica, o que assegura um papel de relevo ao aprendizado dessa ciência em todos os níveis de ensino.(PCN)

A tensão dos professores se manifesta entre ensinar a usar determinadas técnicas para resolver os problemas em um curto espaço de tempo e o de propor e construir conexões, entender e apreciar as estruturas subjacentes e reconstruir técnicas quando for necessário, o que levaria a dispor de um tempo maior para obter os resultados desejáveis.

Acredito que essa tensão possa existir, mas o professor deve levar em consideração que um ensino calcado em técnicas, sem uma reflexão de seu significado, pode levar os alunos a cometerem determinados erros, que estão vinculados a esta concepção de ensino.

Este ensino formal introduzido com o intuito de trazer resultados rápidos, implica uma aprendizagem memorística que leva a uma utilização mecânica da matemática, em especial no estudo das equações, concorrendo para uma produção de erros sistemáticos, difíceis de serem compreendidos pelo professor e eliminados pelo aluno.

Segundo Brousseau (1988), os erros não são simples ausências de conhecimentos: expressam conhecimento mal formados que depois se tornam resistentes.

Neuza Bertoni Pinto (1998), em sua tese de doutorado, afirma que:

“*(...) o grande desafio do professor é ele identificar esses erros, perceber suas incidências e planejar situações didáticas pertinentes para provocar sua superação, evitando que se transformem em erros sistemáticos”.(p.125)*

A compreensão dos erros dos alunos e as justificativas que apresentam de seus procedimentos na resolução de equações, podem trazer subsídios para pensar alternativas de ensino sobre as equações.

A discussão já existe, o que precisamos fazer enquanto professores e pesquisadores é identificar onde está o problema e propor mudanças efetivas para saná-lo. Se o erro não for conhecido pelo professor, sem sua qualidade, ou seja, se não provocar um conflito cognitivo no professor, não haverá questionamento quanto à natureza do erro e as possibilidades de mudanças serão mínimas em relação à efetivação da aprendizagem do aluno.

Segundo Pinto, N.B. (1998), *o professor precisa assumir uma postura investigativa diante do erro do aluno, para melhor agir sobre ele. Tornar o erro um observável para o professor, para que se constitua em um observável para o aluno requer uma série de mudanças em relação às decisões sobre ensino e aprendizagem dos alunos(p.111).*

Se o professor compreende por que o aluno erra, poderá planejar um ensino eficaz. Não se trata apenas de sancionar o erro, mas sim de adotar outros tipos de intervenção, capazes de atingir todo o grupo de alunos, tendo em vista o progresso do aluno e, conseqüentemente , a superação do erro.

Partindo do pressuposto de que o erro é parte inerente ao processo de construção dos conhecimentos, e de que a sua compreensão causa significativas mudanças no processo de ensino-aprendizagem, tanto para os professores como para os alunos; compreender o erro significa poder melhorar a comunicação com seus alunos, entendê-los, e poder avaliar e planejar suas ações de modo a problematizar os erros

Pinto, N.B. (1998) argumenta que “*os erros revelam a diversidade profunda dos processos de aprendizagem dos alunos, sugerindo estratégias para atender as dificuldades específicas dos alunos e melhorando a qualidade do ensino*“*(p.17)*

Nesta pesquisa procuro realizar um diagnóstico sistemático dos principais erros e dificuldades, bem como evidenciar e inquirir sobre possíveis habilidades e atitudes implícitas nos procedimentos corretos e incorretos dos alunos estudados.

Em termos mais específicos, a problemática colocada neste trabalho refere-se às equações do 1º grau, no que tange aos métodos de resoluções, aos erros cometidos, ao entendimento do sinal da igualdade e à validação do valor encontrado. Essas questões foram analisadas no primeiro ano do ensino médio, com alunos que já estudaram esses assuntos no ensino fundamental.

O fato de muito alunos terminarem o ensino fundamental carregando essas lacunas, pode acarretar uma interrupção do desenvolvimento natural dos conteúdos estudados no ensino médio. Por exemplo: no estudo das funções do 1º grau, utiliza-se o processo de resolução de equação para encontrar a raiz da função, ou dentro dos estudos das seqüências, em particular da Progressão Aritmética, necessita-se do cálculo de resolução de equações para poder resolver os respectivos problemas; o estudo das equações exponenciais muitas vezes recai em equação do 1º grau, etc... Outros exemplos são encontrados no estudo da Física, onde se depara com diversos problemas em que a solução passa necessariamente pelas equações do 1º grau, ou em outras ciências no desenvolvimento de modelos.

Assim, é importante que o aluno saiba resolver as equações, pois além de isto ser necessário no estudo das outras ciências, também contribui para a formação do cidadão ao desenvolver metodologias que enfatizem a construção de estratégias, a comprovação e justificativa de resultados e a autonomia advinda da confiança na própria capacidade para enfrentar desafios.

Esse diagnóstico apresenta-se como uma modesta contribuição para repensar o ensino sobre as resoluções das equações tanto no curso fundamental como no médio.

Como já assinalamos, uma análise dos procedimentos corretos ou incorretos dos alunos permite formular hipóteses sobre os erros que norteiam seus procedimentos.

CAP. 2 – Fundamentação Teórica.

O presente capítulo, tem por objetivo retratar alguns aspectos da álgebra escolar, em particular os estudos sobre as equações, e apresenta, inicialmente, as várias concepções da álgebra numa perspectiva desta como uma aritmética generalizada; um estudo das funções; como estudo das estruturas abstratas e um procedimento para resolver equações.

Em seguida, apresenta um levantamento das pesquisas realizadas nessa área, abordando a igualdade, os métodos de resoluções das equações, as operações aritméticas e as dificuldades dos alunos nos procedimentos relacionados com as equações

2.1 - As várias concepções da Álgebra.

Este item aborda várias concepções da álgebra que fundamentam o estudo, sem perder de vista o enfoque sobre as resoluções das equações.

As concepções como: aritmética generalizada; o estudo das funções; estudo das estruturas abstratas e dos cálculos, e procedimentos para resolver equações, são abordadas por Kieran (1992, 1994), Usiskin (1994), James Kaput (1996) e John Mason (1996) entre outros autores.

2.1.1 - Álgebra como uma aritmética generalizada.

A álgebra muitas vezes é chamada de “aritmética generalizada”. Essa expressão sugere que as operações aritméticas podem ser generalizadas através de expressões envolvendo variáveis. Assim, expressões como 2n ou 2n + 1, são consideradas generalizações que representam os números pares ou ímpares. Outra idéia associada à aritmética generalizada diz respeito à variação e simbolização de regularidades observadas, que permitem estabelecer relações, realizar cálculos e generalizar resultados.

Para Usiskin (1994), as várias concepções da álgebra estão relacionadas com os diferentes usos das variáveis. Dessa maneira, sua concepção da álgebra como uma aritmética generalizada baseia-se no fato de pensar as variáveis como generalizadoras de modelos. Por exemplo, nas seqüências de figuras geométricas, podemos determinar uma expressão geral da seqüência observando sua regularidade. Nessa concepção, como generalizadora de modelos, não temos incógnita, pois generalizam-se as relações conhecidas entre números e assim o problema acaba quando se encontra o modelo geral. Conclui Usiskin:

“Historicamente, a invenção da notação algébrica em 1564 por François Viète teve efeitos imediatos. Em cinqüenta anos a geometria analítica foi inventada e trazida a uma forma avançada. Em cem anos surgiu o cálculo. Esse é o poder da álgebra como aritmética generalizadora”.(p.14)

Pensar a álgebra como uma aritmética generalizada significa, para Kaput (1996), relacioná-la a uma linguagem que codifica as regras gerais da aritmética, em especial as operações. Esta concepção se fundamenta nos conhecimentos aritméticos previamente adquiridos pelos estudantes, ajuda a generalizar esses conhecimentos, e também a formar uma capacidade mais ampla de generalização. Além disso, explora a estrutura intrínseca dos números inteiros, como contexto para a criação de modelos, formalizações e argumentos.

Segundo Kaput, pode-se pensar a álgebra como um raciocínio quantitativo generalizado, ou seja, sobre uma qualidade de algum aspecto ou de uma situação, passível de ser medida (por exemplo, densidade, massa, velocidade, área, taxa , etc...), por meio de alguma unidade de medida de magnitude numérica. O raciocínio quantitativo pode implicar também no uso de grandezas abstratas, como por exemplo, determinar quantas vezes o número 3 “cabe“ dentro do 15.

Kaput (1996), argumenta que o raciocínio quantitativo é superior ao aritmético pelas oportunidades que oferece para a formação de um raciocínio algébrico, e baseia-se em situações que admitem formulações matemáticas, em que as generalizações produzidas têm um forte componente semântico, além de poder orientar melhor a expressão de relação de inferência, em vez de servir somente para o cálculo de valores aritméticos. Além disso, segundo o autor, o pensamento quantitativo generalizado pode ser considerado como parte de um aspecto do estudo da álgebra , que se utiliza para representar e visualizar fenômenos de todos os tipos.

Ao pensar a álgebra como aritmética generalizada, temos que levar em conta, segundo Kaput, que a generalização não se inicia nos primeiros anos do ensino fundamental, nem se finaliza nele, mas aparece também nos níveis mais complexos do pensamento matemático, como por exemplo, na teoria dos números algébricos e na criação de modelos matemáticos avançados.

John Mason (1996), sustenta que a aritmética foi e ainda é a fonte original da álgebra como instrumento para expressar generalidades e controlar o desconhecido. Para ele, podemos ter um melhor uso da tecnologia de que dispomos, invocando o pensamento matemático dos alunos, usando o sentido da generalização e da particularidade. Para o autor, o futuro do ensino da aritmética e da álgebra reside no sentido que o professor tem dos processos de pensamento matemáticos, em particular, da generalização. A essência desse pensamento está no reconhecimento, na apreciação, na expressão e na manipulação da generalidade, e implica, ao mesmo tempo, em particularizar e generalizar, assim como em conjecturar e justificar.

2.1.2 - A Álgebra como um estudo das funções.

Relacionar a álgebra ao estudo das funções, de acordo com Kieran(1992) e devido a Freudenthal (1982), significa tratar as letras como variáveis (dependentes e independentes)[3]. Quando se escreve, por exemplo, y = x + 1, fica evidenciado o papel que x e y assumem, ou seja, a variável y fica dependendo do valor atribuído a x . Portanto, nessa relação, x não é mais uma incógnita a ser encontrada, mas sim uma variável, que a cada valor de x, define um respectivo valor de y. Nessa concepção a idéia central é a de relação entre as variáveis, ou seja, a idéia de função.

Bento Caraça (1989), define a noção de variável da seguinte maneira:

Seja (E) um conjunto qualquer de números, finito ou infinito, e convencionamos representar qualquer dos seus elementos por um símbolo, por exemplo: x. A este símbolo, representativo de qualquer dos elementos do conjunto (E), chamamos de variável.(p.127)

Segue um exemplo dessa definição, dado pelo autor:

Quando dizemos: Seja (E) o conjunto dos números reais do intervalo (0,1), e seja x a sua variável ,queremos dizer que o símbolo x, sem coincidir individualmente com nenhum dos números reais desse intervalo, é suscetível de os representar a todos.

Bento Caraça (1989),esclarece que o caráter contraditório do conceito – a variável é e não é cada um dos elementos do conjunto – deu origem a que a sua introdução na álgebra fosse relativamente recente.

A partir daí, o autor define a noção de função como uma correspondência unívoca entre as variáveis de dois conjuntos. Ele toma como exemplo desta definição, a variável ***t*** do conjunto dos tempos, ***e*** a variável do conjunto dos espaços.

[3] Segundo Kieran(1992), os livros didáticos de álgebra, em geral, tratam uma função como uma relação entre elementos de dois conjuntos (não necessariamente numéricos) ou membros do mesmo conjunto, tal que cada membro do domínio tenha apenas uma imagem.

Dessa forma a variável ***e*** é função da variável t, e escreve simbolicamente ***e*** = f(***t***). Nessa afirmação (e = f(t)), está implicado que a qualquer valor de ***t*** corresponde um valor (e um só) de ***e***. Á variável ***t*** chamaremos de independente; à variável ***e*** chamaremos de variável dependente. Assim, conclui Caraça, o conceito de função aparece no campo matemático, como o instrumento próprio para o estudo das leis.

Para Usiskin (1994), tratar a álgebra sob a ótica das funções, é estabelecer uma visão determinada pelos estudos das relações entre quantidades, em que a variável se manifesta predominantemente como argumento, isto é, representa os valores do domínio de uma função, ou como parâmetro, representando um número do qual dependem outros números.

Para Kaput, o estudo da concepção de função e de suas representações (geométrica, aritmética e algébrica), pode simplificar e organizar o estudo da álgebra. Como um produto da generalização, a idéia de função tem suas raízes na relação e na variação conjunta de suas variáveis.

2.1.3 - A álgebra como estudo das estruturas abstratas e dos cálculos.

Neste aspecto da álgebra, Kaput considera que a generalização e a abstração dão lugar ao formalismo que admite cálculos sintáticos que, ao mesmo tempo, podem ser vistos como estruturas em si mesmas, normalmente baseadas em suas origens específicas. Como exemplos, ele cita as representações matriciais de movimentos sobre o plano, as simetrias das figuras geométricas, ou ainda, as manipulações das letras nas palavras. Essas estruturas, segundo o autor, parecem ter três propósitos:

enriquecer a compreensão dos sistemas em que se realizam as abstrações; proporcionar estruturas intrinsecamente úteis para os cálculos e proporcionar a base para conseguir níveis mais avançados de abstração e formalização.

Esse aspecto da álgebra é entendido por Usiskin como o estudo das propriedades que se atribuem às operações com números reais e polinômios. Quando se pede para fatorar um determinado polinômio, $ax^2 + bx + c$, em multiplicação de dois fatores, esse procedimento não trata de nenhuma função ou relação, nem se deseja encontrar nenhum valor de x, e também não há nenhum modelo aritmético a ser generalizado.

Nessa concepção, a variável tornou-se um objeto arbitrário de uma estrutura estabelecida por certas propriedades. Segundo Usiskin, já não cabe classificar a álgebra apenas como aritmética generalizada, e nem como sendo só um veículo de resoluções de equações. Ela também fornece meios para analisar e comparar relações além de ser a chave para a caracterização e a compreensão das estruturas matemáticas.

2.1.4 - A álgebra como um estudo de procedimentos para resolver equações.

A álgebra pode ser entendida como o ramo da Matemática que trata da simbolização de relações numéricas, das estruturas matemáticas e das operações sobre essas estruturas. Isto significa tratar a álgebra através das propriedades dos números reais, da resolução de equações de primeiro e segundo graus, das simplificações de expressões polinomiais e racionais, da idéia das funções e gráficos, como também das seqüências e das séries.

Neste rol, tratar a álgebra como procedimento para resolver equações, na visão de Kieran (1994), significa, entre outras coisas, pensar nos símbolos operatórios de uma outra maneira, além daquela utilizada na aritmética. Os símbolos operatórios de uma equação não indicam necessariamente as operações a serem efetuadas. Por exemplo, na equação 2x + 3 = 10, o símbolo de adição não significa que os termos numéricos dados no primeiro membro, 2 e 3, devam ser somados; este símbolo indica que, se somar o resultado da multiplicação do 2 por um determinado número, com o número 3, este valor tem que ser igual a 10, ou se pensarmos na operação inversa, o símbolo da adição significa subtrair 3 de 10.

Assim, a principal diferença entre a aritmética e a álgebra é essa distinção entre as operações utilizadas no processo de resolver equações e as operações indicadas nessas equações.

Esse aspecto da álgebra, como procedimento para resolver equações, pode gerar, segundo Kieran (1994), duas abordagens diferentes. Uma abordagem aritmética, focalizada nas operações dadas, que tem como base de procedimentos a resolução por tentativa e erro; e a abordagem algébrica centrada nas operações inversas, que se caracteriza pelo procedimento de resolução das equações por transposição de termos para o outro membro.

Para Mason (1996),a abordagem aritmética para resolver equações está baseada em algoritmos aritméticos tais como as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de números inteiros, fracionários e decimais. Trata das soluções de problemas em que é possível proceder mediante uma série de cálculos e fórmulas, tais como o algoritmo euclidiano, a regra de três, e as regras da falsa posição. O enfoque da álgebra na resolução de equações, deriva do uso da incógnita para expressar cálculos e relações em problemas, que tratam de valores desconhecidos mediante a manipulação de símbolos como se fossem aritméticos; da manipulação de expressões simbólicas, tais como os polinômios, e da expressão de fórmulas para resolver certos tipos de problemas. Suspenso entre a aritmética e a álgebra, está o mundo dos problemas que podem ser resolvidos aritmeticamente quando possível, ou através da álgebra.

Usiskin (1994) relaciona a álgebra a uma simplificação dos procedimentos para que seja realizada a resolução, ou seja, para resolver determinadas equações, recorremos a determinados procedimentos para escrever outras equações equivalentes, porém simplificadas. As variáveis são incógnitas que devem ser descobertas. Por exemplo, para resolver 2x – 3 = 5, devemos escrever uma equação equivalente a esta, somando (3) a ambos os membros, obtendo uma outra mais simples da forma (2x = 8) daí obteríamos x = 4. A verificação do resultado é feita pela substituição do valor encontrado na incógnita da equação.

Para Kaput, pensar a álgebra como um processo para resolver equação, implica em realizar manipulação guiada pela sintaxe e também pela semântica. Neste aspecto, as regras sintáticas são usadas para manipular ou modificar sua forma. Por exemplo, na resolução da equação 2x – 3 = 5 o enfoque sintático considera o símbolo como um ente ou objeto em si mesmo e o sistema de regras relaciona-se ao sistema de símbolo e não ao que este representa. Neste caso se aplica uma regra para somar 3 a ambos os lados da equação, para conseguir 2x = 8, continuando, dividem-se ambos os termos por 2 para chegar em x = 4. Com freqüência, estas regras acabam dando aos símbolos uma referência de objetos físicos ou seja, passa-se o 2 para a direita e muda o sinal. Esse procedimento pode resultar numa rotina de passos, que pode levar a uma mecanização desse algoritmo.

Por outro lado, é possível atuar semanticamente sobre o formalismo. Isto quer dizer que podemos, por exemplo, resolver a mesma equação (2x – 3 = 5), tendo uma base semântica, pensada sobre um sistema conceitual numérico, representado pela equação formal. Se resta 3 do dobro de um número igual a 5, então duas vezes esse número deve ser igual a 8, e se o dobro de um número é igual a oito, então o número em questão é 4.

Para Mason(1996), pensar a álgebra como um procedimento de resolução de equação pode criar nos professores uma tensão, resultante da ambivalência entre as aplicações de técnicas e rotinas para se obter êxito a curto prazo e propor situações para que os estudantes alcancem o conhecimento a longo prazo. A tensão central está entre ensinar as técnicas para se obter êxito nos exames e construir conexões, entender e apreciar as estruturas subjacentes para ser capaz de reconstruir as técnicas, quando necessário.

Para ele, a sistematização de rotinas proporciona uma memorização de técnicas, em detrimento do desenvolvimento do raciocínio matemático. Dessa forma, a escolha entre o incentivo ao uso da técnica e a proposição de situações para o desenvolvimento do raciocínio matemático leva a uma determinada ambigüidade de postura do professor em relação a sua rotina de trabalho, que pode gerar uma tensão pedagógica. Ela é manifestada pela procura de resultados imediatos alcançados pela rotina de aplicação direta de algoritmos, em contraste com o desenvolvimento do raciocínio, e essa tensão certamente é um dos fatores responsáveis para que seja privilegiado como ensino um determinado método de resolução de equações em detrimento de outro.

A questão colocada para os professores é saber como efetuar, de maneira sensata, a passagem do nível de desempenho rápido de resolução para a organização das idéias de equações equivalentes, sem que a técnica se sobreponha em relação ao entendimento do sinal da igualdade e da estrutura da equação.

Dentre as concepções da álgebra abordadas neste capítulo, vamos tratá-la neste trabalho como um procedimento de resolução de equações do 1º grau, e avaliar as hipóteses que tem sido levantadas para entender o erro no que diz respeito aos aspectos de escrever e reconhecer a expressão simbólica da equação; ter um entendimento da igualdade como símbolo de equivalência entre os termos; dar significado para o valor encontrado da equação, através da validação; compreender o simbolismo algébrico de *ax (a multiplicado por x)* e interpretar o zero na equação, como solução e em equação sem solução.

Dentre as técnicas de resolução de equações, vamos analisar como os alunos entendem e aplicam o método da transposição de termos, quais seus erros e se esses erros têm relação com o método aplicado.

No item a seguir faremos um levantamento das pesquisas sobre os erros e as dificuldades dos alunos, relacionados como esse trabalho.

2.2 – Pesquisas sobre os procedimentos e os erros dos alunos em equações .

Entre as investigações sobre as questões algébricas encontram-se os estudos a respeito dos erros e dos procedimentos dos alunos nas resoluções das equações do 1º grau.

Dentre esses estudos, cabe mencionar o de Kieram (1992), em que são analisadas muitas pesquisas, de vários autores, que procuraram evidenciar a compreensão dos alunos, de diferentes níveis de escolaridade, em relação ao sinal de igualdade, à utilização de letras para escrever relações, à sintaxe do simbolismo algébrico, à idéia de variável e aos métodos de resolução de equações.

Em relação à compreensão do sinal de igualdade manifestada pelos alunos, as pesquisas têm revelado diferenças de interpretação, dependendo da faixa escolar em que o aluno se encontra. Kieran (1981) realizou uma experiência de ensino com seis estudantes de 12 e 13 anos, com o intuito de ampliar o entendimento dos estudantes sobre a igualdade e de ajudá-los a construir um sentido para as equações algébricas do tipo ax + b = cx + d.

Neste estudo, ficou evidenciado que os alunos descrevem o sinal de igualdade em termos de uma resposta, ou seja, o sinal representa um resultado e não uma relação de equivalência. Segundo ela, muitas abordagens didáticas supõem que a criança, ao perceber que 3 + 6 e 4 + 5 são diferentes maneiras de se dizer o número 9, pode desenvolver a idéia de equivalência, comparando essas expressões na forma 3 + 6 = 4 + 5. Porém, alguns estudos mostraram uma resposta típica de alunos diante dessa questão: *"depois do sinal de igual deve vir o resultado e não outro problema" (Kieran, 1981)*

Entre os métodos formais de resoluções de equações, que incluem transpor ou efetuar a mesma operação em ambos os lados de uma equação, Kieran (1994) afirma que:

"(...) embora a transposição seja freqüentemente considerada pelos alunos como uma versão abreviada do procedimento de efetuar a mesma operação nos

dois membros, esses dois procedimentos são bem diferentes. O método de efetuar nos dois membros de uma equação uma operação que é a inversa de uma das operações dadas explicita o equilíbrio primeiro membro e segundo membro da equação. Além disso, a justificativa para se efetuar a mesma operação nos dois membros é precisamente manter a equação em equilíbrio e a solução inalterada ao longo de todo o processo de resolução. Ademais, esse procedimento envolve também a simplificação do primeiro e do segundo membros da equação, e não apenas de um dos membros, o que ocorre quando se transpõem termos para outro membro. Essa ênfase no equilíbrio primeiro-segundo membros está ausente no procedimento de transposição"(p.108,109).

Em seus estudos, Kieran (1994),constatou um tipo de erro, que ela classificou como supergeneralização do procedimento de transposição de termos em equações com incógnitas no primeiro membro. Ela fornece o seguinte exemplo desse erro:

"*quando se perguntava como achar o valor de a em 3a + 3 + 4a = 24, diziam: 24 dividido por 4, menos 3, menos, humm... ,não, dividido por 3 Essa supergeneralização levara a um dilema. Depois de dividir por 4 e subtrair 3, eles não sabiam se em seguida deveriam subtrair o 3 restante ou dividir por ele. Isto é, restavam duas operações para inverter, mas apenas um termo numérico.(p.107)*

A supergeneralização da estratégia de resolução também ocorria, segundo a autora, em equações com múltiplas operações contendo uma incógnita em cada membro, como em 2x + 5 = 1x + 8. Novamente surgia o problema de não saber que operação inverter

È importante notar, salienta Kieran (1994), que o procedimento supergeneralizado de começar com o número do final do segundo membro e então caminhar do segundo para o primeiro membro, tomando as operações inversas à medida que elas se sucedem, evidentemente atribui bem pouco significado ao papel do sinal de igualdade no processo de resolução de equações.

A existência dessa abordagem levanta algumas questões sérias com respeito ao grau da ênfase que se deveria dar, na escola, à utilização da transposição como procedimento para a resolução de equações.

Conforme Kieran (1992), a efetividade de modelos concretos para o ensino de procedimentos formais de resolução de equações foi pesquisado por Filloy e Rojano (1984, 1985). Em seus estudos, trabalharam com equações da forma $ax + b = cx$ e $ax + b = cx + d$,e suas abordagens para modelar equações dessa forma foram a geométrica e as balanças

A abordagem geométrica envolveu uma contextualização , acompanhada por desenhos, como no exemplo:

“Uma pessoa tem um terreno de dimensões A por x. Em seguida ela compra um terreno adjacente com uma área de B metros quadrados. Uma segunda pessoa propõe trocar esse terreno por um outro na mesma rua tendo a mesma área total e a mesma altura do primeiro mas com uma forma melhor. Qual a medida da altura para que a troca seja justa?”(p 402)

Obs. Anexar a figura....

Filloy e Rojano desenvolveram pesquisas para verificar a ocorrência de erros no período de transição das equações aritméticas para as algébricas, consideradas por eles como o período de corte didático.

Realizaram entrevistas com três classes de estudantes de 12 e 13 anos que já sabiam resolver equações da forma $x + b = c$ ou $ax = b$, e não conheciam ainda equações algébricas do tipo $ax + b = cx + d$.

As entrevistas revelaram que o uso desses modelos concretos (geométricos e balanças) não aumentou significativamente a habilidade da maioria dos estudantes de trabalhar com as equações algébricas. Nesse estudo também ficou evidenciado o conhecido erro de somar constantes com coeficientes. Outra constatação foi que muitos alunos tendiam a fixar-se nos modelos e pareciam incapazes de ver as ligações entre as operações efetuadas com o modelo e as correspondentes operações algébricas. Como resultado; os estudantes permaneciam dependentes do modelo mesmo quando ele não era mais útil, eles estavam tão concentrados no procedimento modelado concretamente, que pareciam esquecer os métodos que usavam previamente, além disso, o procedimento de efetuar a mesma operação em ambos os lados do sinal de igual, por meio do qual os estudantes operam explicitamente sobre a equação não é facilmente adquirido.

Outros estudos procuraram investigar as dificuldades dos alunos em relação às interpretações frente à notação algébrica. De acordo com Booth (1994), os alunos têm certa dificuldade de interpretar uma expressão algébrica como solução de problemas, em virtude do sinal de igualdade não representar um resultado. Isto se reflete em erros comuns dos alunos, por exemplo, quando eles escrevem 2x + 3y como 5xy. Outras constatações de Booth referem-se à experiência escolar como forte fator de influência na forma como os alunos compreendem os objetos matemáticos. Para eles a idéia de adição está implícita em notações como nas frações mistas, onde 3 + ½ pode ser representado como $3\frac{1}{2}$, ou em situações relacionadas com a posição dos números, por exemplo 30 + 5 pode ser escrito como 35, dessa forma essas notações podem induzir os alunos a cometerem certos tipos de erros ao escreverem a+b como ab.

Booth(1994), pesquisou como os alunos se relacionam com a noção de variável. Segundo o autor, um dos aspectos mais importantes da álgebra talvez seja a própria idéia de variável. Quando os alunos interpretam as letras como representações de números, há uma forte tendência a considerar que as letras representam valores específicos únicos, como por exemplo x + 3 = 8, e não números genéricos ou variáveis como em x + y = y + x.

Na aritmética, realça Booth, os símbolos que representam quantidades sempre significam valores únicos. Há pouca escolha, por exemplo, quanto ao valor representado pelo símbolo “3”. Portanto, conclui o autor, talvez não seja de estranhar que os alunos tratem esses novos símbolos da mesma maneira como se representassem quantidades.

Um dos problemas decorrentes dessa visão das letras é que os estudantes muitas vezes assumem que letras diferentes devem necessariamente representar valores numéricos diferentes.

Abaixo segue uma das entrevistas que ele fez com um aluno de 15 anos, a respeito da equação: x + y + z = x + p + z

Pergunta-se: "Esta afirmação é verdadeira ?

Sempre/ Nunca/ Às vezes, quando...

Aluno: Não será verdadeira nunca.

Entrevistador: Nunca ?

Aluno: Nunca, porque ela terá valores diferentes... porque **p** *tem de ter um valor diferente do valor de* ***y*** *e dos outros valores, então nunca será verdadeira.*

Entrevistador: Quer dizer que **p** *tem de ter um valor diferente... por que você diz isto ?*

Aluno: Bem, se não tivesse um valor diferente, então não se colocaria p, mas sim y. Veja, usa-se uma letra diferente para cada valor diferente.

(Booth, 1994, p.32)

Mesmo que o autor tenha preparado uma armadilha para o aluno, o que se pode esperar de sua resposta, é que ele relacionasse essa equação a outras já vistas, como por exemplo a função linear y = x, e neste caso, as letras representam variáveis.

Outro fator de dificuldade dos alunos em aprender álgebra deve-se a uma incompatibilidade entre os métodos informais utilizados por eles para resolver problemas e os métodos formais da álgebra. Segue uma citação de Booth a esse respeito.

O uso de métodos informais em aritmética pode também ter implicações na habilidade do aluno para estabelecer (compreender) afirmações gerais em álgebra. Por exemplo, se um aluno geralmente não determina o número total de elementos *de dois conjuntos de, digamos, 35 e 19 elementos, utilizando a noção de adição, como 35 + 19, mas resolve o problema, utilizando o processo de contagem, então é pouco provável que o número total de elementos de dois conjuntos de x e y elementos seja prontamente representado por x + y. (Booth, 1994, p. 35)*

Neste caso, conclui Booth, a dificuldade não está tanto em generalizar a partir do exemplo aritmético, mas de ter um procedimento adequado, e uma representação desse procedimento em aritmética, para a partir dele fazer uma generalização inicial.

Conforme Brun e outros (1993),o trabalho de Matz (1980) se propõe a explicar a surpreendente uniformidade dos erros cometidos pelos estudantes ao resolver problemas algébricos. Sua investigação demonstra que certas classes de erros são resultados de uma adaptação sistemática de conhecimentos anteriores que se têm generalizado e extrapolado de forma inadequada. Dois tipos principais de erros são então definidos: 1º - os erros correspondentes a ausência de mudanças conceituais e, 2º - os erros ligados às técnicas de extrapolação.

A compreensão dos primeiros erros reflete as relações entre saberes aritméticos e algébricos, sob o ângulo da passagem aritmética-algébrica. Esta passagem efetua-se pela construção da noção de valor simbólico e pela extensão da relação de igualdade.

Matz classifica na primeira categoria os erros de concatenação que, segundo seu quadro teórico, restabelecem conhecimentos simples, falsos ou incompletos do simbolismo e das operações em álgebra, por exemplo escrever 3 + x como 3x. Estes erros são conhecidos por sintáticos. Para esta justificativa, o autor dá a seguinte explicação: em Aritmética a escrita dos números se dá pela concatenação dos algarismos, isto é, apela-se para a noção de valor de posição para distinguir dois números, além disso, na representação dos racionais, a justaposição de um número e de uma fração implica uma adição (frações mistas). Assim, as respostas freqüentes dos alunos à 1ª questão: “ se x = 6, calcule 4x “ são 46 ou 10. A primeira resposta faz referência aos conhecimentos sobre o valor de posição e a segunda, aos conhecimentos sobre a soma.

A segunda categoria definida como os erros ligados às técnicas de extrapolação trata essencialmente de uma teorização psicológica sobre os processos de elaboração de conhecimentos. Assim, confrontado a uma nova situação, o aluno dispõe de dois modos para tratar esta situação: se ele conhece a regra para aplicar, ele pode então ter recursos das técnicas de extrapolação.

Estas técnicas são utilizações inapropriadas de regras corretas, porém aplicadas a outros contextos distintos daqueles em que ela é válida, ou seja, é ampliar o âmbito de aplicação de uma lei, de uma concepção, estendendo-a um campo na qual não é definida.

Gallardo e Rojano (1988) realizaram um estudo clínico sobre os fenômenos da transição do pensamento aritmético e algébrico para três gerações de alunos com 12 e 13 anos de idade, considerados de baixo nível de aproveitamento.

Os resultados mais relevantes nestes estudos foram, segundo eles, a identificação de áreas comuns de dificuldades na aprendizagem da álgebra, em particular, a extrema dificuldade que apresentam os números negativos no âmbito das equações lineares. Além dessa questão, eles identificaram outras áreas comuns de dificuldades na aprendizagem da álgebra elementar. Dentre essas áreas, Filloy e Rojano (1988), destacam as seguintes:

1. – Operações;
2. – Natureza dos números;
3. – Métodos primitivos: a estratégia da tentativa;
4. – Métodos escolarizados: o esquema;
5. – Interação entre a semântica e sintaxe da álgebra elementar:
6. – O corte didático no estudo das equações lineares.

1 – Operações :

1.1 - Dualidade da operação: A noção aritmética de fazer uma operação se transforma em como denotar o resultado. Por outro lado, uma operação algébrica não é aceita como resultado, mas como execução de uma ação.

1.2 - Inversão de Operações: Freqüentemente se observa que a noção de operação inversa não está consolidada nos estudantes, na passagem da aritmética para a álgebra. Na resolução da equação 13x = 39, muitos alunos respondem que para encontrar o valor de x, é preciso 13 entre 39.

1.3 - Natureza dual da igualdade: Em aritmética o sinal de igualdade é usado fundamentalmente para relacionar um problema com sua resposta numérica, isto é, como uma relação entre um processo e o resultado de sua execução. Em álgebra, o sinal de igualdade tem um caráter duplo: como resultado de uma operação e como equivalência (caráter simétrico da igualdade).

Na série de cancelamento há diferentes interpretações da igualdade:

- Igualdade Aritmética: Em x + a = b + a , os termos (b + a) são lidos como um só número;

- Igualdade dos Membros: Na equação (x + a = b + a) cada membro é visto como um todo, que desencadeia uma leitura visual em que se ignora, às vezes, a expressão envolvida

2 – Natureza dos Números:

2.1 - Inteiros Positivos: No campo dos inteiros positivos, destacam-se como números especiais, o 0 e o 1. Eles aparecem no contexto das regras de identidades, como A.1 = A ou A + 0 = A , Os tipos de erros com esses números, ocorrem em situações do tipo: A.0 = A ou em situações em que o zero (0) é solução e os alunos não aceitam, afirmando que o zero é ausência de valor. Outra situação difícil dos alunos aceitarem é a identidade 1.x = x

2.2 - Inteiros Negativos: Em relação ao seu ensino, existe uma assimetria entre os números inteiros positivos e os negativos. Diferentemente dos números positivos, que têm uma relação com atividades de medição e portanto pode-se operar com eles, os negativos são secundários, introduzidos como resultado das operações, e isto acaba provocando nos estudantes dificuldades para compreendê-los e aceitá-los.

3 - Métodos Primitivos - A estratégia da tentativa e erro.

A maioria dos estudantes resolvem os problemas algébricos utilizando métodos com os quais tiveram êxito na aritmética e que lhes são familiares. Em seus estudos Filloy, observou duas estratégias de resolução. A primeira recorrendo ao ensaio e erro e a segunda a uma tentativa mais sistematizada. No primeiro caso, o uso da calculadora para resolver a equação $6x = 37434$, com tentativas dos números 175, 365, 465, 563, 633, que levam a produtos com ordem de grandeza entre 1000 e 3800 e portanto distante da ordem da magnitude desejada. Na segunda, sem utilizar calculadora no primeiro momento, o aluno sugere que o número poderia ser da ordem de 6.100, e com a calculadora ele chega ao resultado correto de 6239, efetuando a divisão. Neste caso o estudante percebe a ordem de grandeza do número procurado.

4 – Métodos Escolarizados – O uso do esquema.

Nesse método recorre-se a uma representação por diagramas, denominada esquema. Ensina-se primeiro aos estudantes a resolução de equações mais simples, da forma: $x \pm a = b$ e $ax = b$, por meio do esquema da inversão:

INSERIR OS DIAGRAMAS.

Depois continua-se com as equações da forma $ax \pm b = c$ e $a(x \pm b) = c$, utilizando o mesmo recurso:

INSERIR OS DIAGRAMAS.

Finalmente , estuda-se a solução de equações do tipo $ax + b = cx$, em que é necessário operar com a incógnita para obter a solução e não é mais possível utilizar os esquemas anteriores. O que acontece com freqüência é que os estudantes levam a cabo uma leitura da linguagem natural do esquema, não percebendo a diferença com a linguagem algébrica da equação. O sinal da igualdade não aparece explicitamente na representação esquemática, o que leva os alunos a cometerem determinados tipos de erros.

5 – Interação entre a Semântica e a Sintaxe da Álgebra Elementar.

Nos casos estudados, a interação semântica-sintaxe é analisada através do processo de inventar um problema a partir da equação dada. Por exemplo, “Invente um problema que se resolve com a equação x + 4 = 28”. O aluno encontra a solução, mas não é capaz de formular uma pergunta com a solução encontrada.

6 – O corte didático no estudo das equações lineares.

Reportando-se a pesquisa realizada, “Operação da Incógnita”, Filloy e Rojano, argumentam que existe um corte didático na linha de evolução da aritmética para a álgebra. No teórico, este corte surge da necessidade de operar a incógnita na resolução de equações com ocorrência da incógnita “x” em ambos os membros da equação (ax + b= cx + d).

Muitos estudantes, classificados por eles como de baixo nível, não encontram diferença entre as equações aritméticas e as algébricas. Isto se deve, fundamentalmente, a não dar conta da troca de concepção entre a aritmética e a álgebra, permanecendo no campo puramente aritmético. Chegam inclusive a buscar mecanismos que permitem interpretar as novas equações com as ocorrências da incógnita como equações em que x aparece somente uma vez. Por exemplo, 5x = 2x + 3, o estudante responde: a “5x é igual 2 vezes um, 2 mais 3, igual a 5”. Assim, ao realizar a ação em um só membro da equação, como somar 2x mais 3, uma vez que x tem um valor assinalado, o aluno reduz as ocorrências da incógnita a uma.

Esses estudos, desenvolvidos por Filloy e Rojano, evidenciaram as áreas de dificuldades no tratamento com a álgebra escolar e levantaram outras questões, como por exemplo a tendência à generalização falsa; e consequentemente a criação falsas extras.

Outras pesquisas realizadas a respeito do ensino da álgebra evidenciaram a necessidade do conhecimento aritmético como uma ferramenta para a aprendizagem algébrica. Entre essas pesquisas, vale ressaltar os trabalhos de Molly

MacGregor e Kaye Stacey, realizados com alunos de escolas secundárias australianas com idades entre 11 e 16 anos. As análises desses estudos apontam que uma das causas das dificuldades dos alunos na aprendizagem da álgebra reside nos conhecimentos deficientes da aritmética, ou seja,. não compreendem de modo suficiente as propriedades operatórias dos números

MacGregor (1996) enfoca cinco aspectos do conhecimento aritmético que, segundo ela, são necessários para adquirir uma aprendizagem algébrica:

1º - Capacidade de se concentrar no procedimento e não apenas na resposta;

2º - Compreensão das relações existentes entre as operações;

3º - Conhecimento das diversas interpretações do sinal de igual;

4º - Conhecimento das propriedades operatórias dos números;

5º - Capacidade de trabalhar no sistema dos números reais.

O primeiro aspecto é que os estudantes deveriam se preocupar mais com os procedimentos que levariam à resolução do que simplesmente com a resposta do problema. No que se refere à resolução de uma equação, esse aspecto pode ser interpretado por reconhecer e explicitar a seqüência de operações selecionadas, para se chegar ao valor da incógnita, ou seja, por uma reflexão sobre os procedimentos de resolução utilizados.

O segundo aspecto, que complementa o primeiro, refere-se a conhecer as operações básicas, além da adição. Por exemplo, a diferença entre dois números geralmente é associada a uma operação de adição, isto é, se $a - b = x$, o valor de a é dado por $a = b + x$; a multiplicação é interpretada como uma soma repetida, 5 vezes 3 é dado como $5 + 5 + 5$, o que acarreta dificuldade para expressar 5 vezes x como 5x e na divisão, 6 dividido por 2, é igual a 3, pois $3 + 3 = 6$. Esta interpretação pode prejudicar o entendimento de x dividido por 2.

O terceiro aspecto, de vital importância nas resoluções de equações, refere-se à interpretação do sinal de igual.

Os alunos utilizam o sinal de igual para indicar um resultado, e usam o verbo dar para denotar este resultado. Por exemplo, na soma de 4 + 3 = 7 , eles lêem 4 mais 3 dá 7. Isto é, percebem que este sinal (=) vincula a pergunta à uma resposta. Depois empregam de maneira informal a igualdade para unir partes de um cálculo, como no caso de 5 + 3 = 8 x 9 = 72

Na Álgebra o sinal de igualdade deve ser utilizado para vincular expressões equivalentes. A partir de uma afirmação de igualdade, o raciocínio dedutivo (dentro de procedimentos corretos) produz uma cadeia de afirmações logicamente equivalentes, que conduz a uma solução. Os alunos devem interpretar o sinal de igualdade como símbolo lógico e não somente para escrever uma resposta.

O quarto aspecto, relacionado com as propriedades dos números, indica que os alunos deveriam saber como funcionam as propriedades numéricas para poder entender as propriedades algébricas. Por exemplo, para compreender as propriedades das operações das frações algébricas do tipo: $\frac{2x}{3}+\frac{x}{2}=\frac{7x}{6}$, os alunos deveriam saber fazer a soma numérica $\frac{2}{3}+\frac{1}{2}$

O último aspecto levanta a necessidade de os alunos conhecerem os números reais. Em geral os estudantes carecem da experiência de utilizar números que não sejam inteiros. Mesmo conhecendo a propriedade comutativa da multiplicação entre dois inteiros, por exemplo, 3.5 = 5.3, muitas vezes não conseguem transferir essa mesma propriedade para os números decimais. Em geral para mostrar que 3,56 . 5,37 = 5,37 . 3,56, eles efetuam o cálculo separadamente. Uma outra situação é em relação à divisão e multiplicação de números inteiros. A maioria dos alunos sabem que essas operações são uma a inversa da outra, mas nem sempre sabem que essas operações se estendem a todos os números.

Para a autora, a maioria dos alunos efetuam os cálculos de um modo muito distinto para os números inteiros e racionais, não reconhecendo que as propriedades operatórias dos números inteiros se aplicam a todos os demais tipos de números.

Como a Álgebra requer que os alunos sejam capazes de trabalhar com uma gama grande de números, que incluem os fracionários, os decimais, os negativos e os irracionais, é necessário que os professores trabalhem com todos os tipos de números e não somente com os inteiros positivos.

Outros relatos de pesquisas a respeito das dificuldades dos alunos, na aprendizagem da resolução de equações, foram feitos pelo Grupo Azarquiel (1993). O Grupo apontou distintos aspectos das dificuldades dos alunos nos procedimentos relacionados com as equações, em particular quando se utilizam dos métodos formais de resolução.

Além das dificuldades anteriores tais como o sentido unidirecional do sinal de igual indicando resultado, o Grupo enfatiza outras relacionadas com os números inteiros negativos, com os racionais e com a relação entre uma operação e sua inversa, baseada na técnica da transposição de termos.

Kieran (1985), já tinha apontado que mesmo os alunos com maior conhecimento em resolução de equações algébricas, cometem os mesmos tipos de erros ao agrupar, multiplicar e transpor termos, que os alunos iniciantes em álgebra. Segundo ela, esses erros estão muitos ligados ao método de resolução que tenha sido usado, em geral a aplicação do método formal da transposição dos termos.

Ela afirma que os alunos que utilizam métodos intuitivos vêem as letras como números, submetidos a uma relação de equilíbrio, ao contrário dos que utilizam a transposição de termos, que consideram as letras carentes de significados depois que encontram seu valor.

Investigações já realizadas a respeito das aplicações dos métodos formais de resoluções de equações apontam que é necessário que os alunos utilizem métodos informais e formais de resolução. Para o Grupo Azarquiel, e devido a Whitmam (1976) os estudantes que aprendiam a resolver equações intuitivamente, resolviam melhor do que aqueles que aprendiam os métodos em período de tempo muito próximo.

Para o Grupo Azarquiel, o trabalho com equações deve incluir tanto os métodos informais como métodos formais, iniciando com os métodos informais e através de um contexto adequado ir passando, paulatinamente, aos métodos mais formalizados.

Booth (1994) aponta na mesma direção, quando diz:

“(...) se os alunos têm de aprender a usar os procedimentos mais formais, primeiro devem perceber a necessidade deles. Isso requer (a) que os professor reconheça que os alunos podem dispor de um método informal para um dado tipo de problema; (b) que o valor desse método informal para a resolução de problemas simples seja reconhecido e discutido; e (c) que as possíveis limitações do método sejam consideradas, simplesmente tentando-se usá-lo em problemas da mesma espécie, porém mais difíceis. Desse modo o aluno poderá chegar a reconhecer a necessidade de um procedimento mais geral”. (p. 35)

É fundamental, qualquer que seja o método praticado, que os alunos se acostumem a comprovar sempre o valor encontrado na equação proposta, pois isto irá reforçar as concepções de equação e solução e irá ajudar a adquirir o hábito da autocorreção.

Dessa forma, esta pesquisa busca evidenciar as hipóteses que levam os alunos do 1º ano do ensino médio a cometerem determinados erros nas resoluções das equações aritméticas e algébricas.

Esta investigação consiste na análise quantitativa e qualitativa dos problemas enfrentados pelos alunos nas resoluções das equações aritméticas e algébricas. Ou seja, a observação da produção dos alunos (instrumento provisório, o instrumento investigativo e as entrevistas),não se dá apenas em relação à quantidade de seus desempenhos. Procura-se interpretar, nas análises, o que pensaram os alunos ao produzirem diferentes resoluções das equações, quais as dificuldades e como vêem seus próprios erros.

Cap. 3 – Aspectos Metodológicos

A natureza da problemática, o nível escolar, o locus selecionado das investigações, e as reflexões teóricas indicaram as direções para as opções metodológicas assumidas.

Uma opção possível seria propor atividades de natureza didática para diagnosticar as dificuldades manifestadas pelos alunos. Entretanto, dadas as restrições de natureza institucional optamos pela aplicação de um instrumento-diagnóstico seguido da realização de entrevistas.

Para avaliar a pertinência do problema de pesquisa proposto, realizamos um "estudo piloto" que consistiu na aplicação de um instrumento provisório para o levantamento dos erros. Este estudo constatou dificuldades importante manifestadas pelos alunos e orientou a realização do instrumento definitivo.

Como ponto de partida para a investigação dos erros, assumimos a posição descrita (retratada) na fundamentação teórica.

Neste capítulo caracterizamos o locus de investigação e discutilremos as etapas acima mencionadas.

3.1 – Perfil da escola e dos alunos que participaram da pesquisa.

A pesquisa desenvolveu-se em uma Escola Particular, do bairro Butantã, Zona Oeste de São Paulo. O funcionamento da escola se faz em dois períodos, um matutino com nove classes, sendo três classes do 1º ano do ensino médio, três do 2º ano e três do 3ª ano do ensino médio. O período vespertino é destinado ao ensino fundamental da 5ª a 8ª séries, com uma classe de cada série.

O currículo da escola possibilita aos alunos, ao longo de sua formação, o aprendizado de conceitos e conteúdos, favorecendo o desenvolvimento das diferentes formas de organização do seu pensamento.

Desde as séries iniciais, os alunos aprendem que estudar é buscar respostas a problemas, com método, e que o conhecimento não é um conjunto de verdades prontas e acabadas “escondidas” com o professor. A instituição privilegia as situações de construções do conhecimento, através de questões problematizadoras, com ênfase em projetos de campo.

Esses projetos propostos em cada série constituem-se em atividades interdisciplinares de pesquisa e investigação que atendem às necessidades curriculares de formação dos alunos.

Na sétima série, por exemplo, os alunos estudam as atividades portuárias, da pesca, do turismo e as condições de vida e saúde da população de São Sebastião. Na oitava, entram em contato com as “cidades mortas” da região do Vale do Paraíba, buscando no presente os vestígios do passado.

No primeiro ano do ensino médio, o objeto de estudo é constituído pelas relações entre ciência, tecnologia e política, no estudo da agroindústria da cana de açúcar na região de Ribeirão Preto. No segundo ano, o cenário é o processo de industrialização e suas conseqüências sócio-ambientais na região de Cubatão, tendo como conceito nucleador o trabalho humano.

A monografia, realizada pelos alunos do terceiro ano, é o projeto que permite sintetizar o processo de aprendizagem, num estudo que mobiliza as principais competências de estudo e investigação desenvolvidas ao longo do percurso. Além das disciplinas normais do terceiro ano, há os cursos temáticos, que substituem a antiga organização que dividia as opções dos terceiros anos em exatas, humanas e biológicas. Eles permitem um aprofundamento teórico e metodológico que se ajusta melhor ao interesse dos alunos durante o curso e em possíveis escolhas profissionais.

Uma das características dos cursos temáticos é a sua multidisciplinaridade, procurando responder a alguma questão nucleadora que tenha surgido dos conteúdos das disciplinas.

Os alunos escolhem dois cursos por semestre, cada um deles com duas horas de aula semanais, o que favorece a utilização de estratégias diferenciadas como palestras com especialistas, professores convidados de outras áreas, seminários, filmes e saídas a campo. Em 1999, os cursos trabalharam os seguintes temas: ciência e conhecimento, acústica, energia e desenvolvimento, cálculo avançado, teoria literária, indústria cultural, arte e representação e São Paulo – cidade global..

O nível social dos alunos é, em sua grande maioria, da classe média.

O instrumento provisório foi realizado no 2º ano do ensino médio, no segundo semestre de 1999, e o instrumento investigativo no primeiro semestre de 2000, nas três salas do 1º ano do ensino médio, perfazendo um total de 104 alunos.

A formação das classes do 1º ano é heterogênea, composta de um terço dos alunos provenientes da 8ª série e de dois terços que vieram do ensino fundamental de outras escolas particulares de São Paulo, totalizando 31 escolas.

O fato de receber alunos de um número muito grande de outras escolas foi um dos critérios para a escolha desta escola, pois, de certa forma, ela representa uma pequena amostra das escolas particulares em relação ao ensino fundamental.

Além disso, por ser professor dessa instituição no ensino médio e ter contato direto com esses alunos, permitiu-se uma presença integrada no grupo envolvido e possibilitou-se uma inserção maior, que torna o professor-investigador parceiro interessado, confidente e comprometido com as atividades propostas nas investigação.

De acordo com Ludke e André “(...) a perspectiva dos participantes, isto é, a maneira como (...) encaram as questões que estão sendo focalizadas, (...) os diferentes pontos de vistas (...), o dinamismo interno das situações, geralmente é inacessível ao observador externo”(1986,p.12)

3.2 – Entrevistas.

Segundo Lüdke e André (1986), a entrevista representa um dos instrumentos básicos para a coleta de dados, pois permite a captação imediata e corrente da informação desejada. Além disso, afirmam as autoras, a entrevista permite correções, esclarecimentos e adaptações que a tornam eficaz na obtenção das informações desejadas.

Elas colocam algumas condições necessárias para a execução de uma entrevista.

“ Há uma série de exigências e de cuidados requeridos por qualquer tipo de entrevista. Em primeiro lugar, um respeito muito grande pelo entrevistado. Esse respeito envolve desde um local e horário marcados e cumpridos de acordo com sua conveniência até a perfeita garantia do sigilo e anonimato em relação ao informante” (Ludke eAndré,1986.p.35) .

As entrevistas foram realizadas à tarde, fora do horário de aula, na própria escola, num total de oito. Elas foram gravadas em fita cassete e estão transcritas no anexo 1.

As perguntas foram elaboradas a partir das dificuldades observadas nas resoluções das equações do instrumento. Apesar de ter sido feito um roteiro para guiar a entrevista através dos tópicos principais, tais como o significado do sinal de igualdade; o processo de validação do resultado encontrado; o significado do método da transposição de termos; as diferenças sintáticas das equações etc..., foi adotada uma entrevista semi-estruturada, isto é, que se desenrola a partir de um esquema básico, porém não aplicado rigidamente, permitindo que o entrevistador faça as necessárias adaptações. Além das alterações que surgem no transcorrer das entrevistas, há outras considerações relevantes a respeito da flexibilidade do roteiro, segundo Lüdke e Andre (1986)

O entrevistador precisa estar atento não apenas (e não rigidamente, sobretudo) ao roteiro preestabelecido e às respostas verbais que vai obtendo ao longo da interação. Há toda uma gama de gestos, expressões, entonações, sinais não verbais, hesitações, alterações de ritmo, enfim, toda uma comunicação não verbal cuja captação é muito importante para a compreensão e a validação do que foi efetivamente dito. (p. 36)

As escolhas dos alunos para as entrevistas ocorreram de modo a garantir que se discutissem os vários tipos de erros apontados nas resoluções das equações, levando-se em conta a freqüência. Foi escolhido também um aluno que acertou todas as questões, efetuando a mesma operação em ambos os termos das equações.

Para a análise dos dados obtidos durante as entrevistas, procurou-se compreender como os alunos resolvem as equações do 1º grau. As discussões realizadas nas entrevistas revelaram uma certa heterogeneidade no desempenho dos alunos nos aspectos conceituais e nas escolhas dos procedimentos de cálculo. Esses dados estão apresentados no capítulo 5, nas seções denominadas análises dos resultados.

3.3 – O instrumento provisório

Para avaliar a pertinência da problemática desse trabalho, e para subsidiar o instrumento investigativo referente às resoluções das equações do 1º grau, pelos alunos do ensino médio, foi aplicado um instrumento provisório contendo 15 equações (aritméticas e algébricas) do 1º grau, a 80 alunos do 2º ano do ensino médio.

Seguem as equações utilizadas neste instrumento ,cujos critérios de seleção estão apresentados no instrumento investigativo, e algumas resoluções dos alunos.

a) $-5x + 2 = 13$	b) $8 - 6x = 2$	c) $-1 = -x + 1$
d) $10 = 5x + 5$	e) $5 = -3 - 2x$	f) $2x - 3 = -x$
g) $3x - 1 = 3x$	h) $2x + 5 = -3x - 1$	i) $x - 3x = x$
j) $\frac{3x+2}{2} = 4$	k) $\frac{8-4x}{3} = 6$	l) $\frac{x}{2} + \frac{1}{2} = 3$
m) $\frac{x-1}{2} + x = 2$	n) $\frac{5}{2} + 1 = \frac{10}{4} + x$	o) $2 - 4x = x$

Alguns resultados do instrumento

Foram escolhidas algumas resoluções dos alunos, com o intuito de avaliar como eles resolvem as equações.

Na equação –5x + 2 = 13, selecionei três resoluções, com tipos diferentes de erros, que demonstram certos problemas de entendimento dos métodos de resoluções.

–5x + 2 = 13		
$-\ 5x = 13 - 2$ $-\ 5x = 11$ $x = \frac{11}{5}$	$-5x = 13 - 2$ $-5x = 11$ $-x = \frac{11}{5}$	$x = 13 + 2 - 5$ $x = 10$

No primeiro caso, o aluno, ao transpor o coeficiente de x para o segundo membro, altera o sinal de negativo para positivo. No segundo, a observação recai sobre a maneira incompleta com que o aluno apresentou a solução do problema, ou seja, com o sinal negativo para a incógnita x, e no terceiro caso, o procedimento incorreto de transpor o coeficiente e o número 2.

Para a equação 8 –6x = 2, escolhi também três resoluções diferentes

8 – 6x = 2

A) -6x = 2 – 8 x = 2 – 8 + 6 x = 0	B) -6x = 2 – 8 -6x = - 6 $x = \frac{-6}{6} = -1$	C) - 6x = 2 + 8 -6x= 10 $x= \frac{-10}{6} = \frac{5}{3}$

Em A o aluno troca a operação de multiplicação do –6, pela soma; em B ocorre a alteração do sinal do –6 na passagem da divisão e em C o aluno não efetua a alteração do sinal do número 8.

No quadro abaixo, há três equações algébricas diferentes, que além dos erros anteriores, ainda apresentam erros ligados ao conceito de solução e da relação de igualdade.

A) 2 – 4x = x 2 = - 3x $\frac{2}{3} = x$	B) x – 3x = x 2x = x $x = \frac{x}{2}$	C) 3x – 1 = 3x 3x – 3x = 1 0 = 1

Na parte A o aluno comete dois erros consecutivos, o primeiro na transposição do –4x sem efetuar a operação inversa ou sem alterar o sinal, e o outro na divisão por 3 alterando seu sinal; em B ocorre um problema relacionado com a operação dos números inteiros, além de não explicitar o valor da incógnita e por fim em C a relação de igualdade não é respeitada.

Esses exemplos do instrumento provisório revelam a problemática que envolve as resoluções das equações por parte dos alunos.

A partir desses resultados, constatei a pertinência desta pesquisa, para tentar entender melhor as dificuldades que os alunos apresentam nas resoluções das equações do 1º grau.

3.4 - Critério de seleção das equações.

Os critérios para a seleção das equações aplicadas aos alunos foram extraídos da Fundamentação Teórica, considerando-se aqueles aspectos que encontraram ressonância em minha experiência profissional. Na apresentação da Fundamentação foram ressaltadas as pesquisas realizadas sobre as resoluções das equações, em particular, sobre as dificuldades que os alunos apresentam na aplicação do método de transposição de termos, tanto na resolução das equações aritméticas da forma $ax = b$, como nas algébricas da forma $ax + b = cx + d$.

Outra questão importante nas escolhas das equações foi o fato de considerarmos somente coeficientes inteiros .Esse fato foi proposital para garantir a discussão restrita aos métodos de resolução e ao conceito de equação, pois caso contrário, a discussão teria que entrar no mérito dos problemas relacionados com as operações no conjunto dos números racionais, como por exemplo as frações equivalentes, o que estaria fora do foco da problemática original.

Foram escolhidas 24 equações, divididas em dois grupos; o primeiro contendo 08 equações aritméticas e o segundo 16 algébricas, todas do 1º grau.

A divisão entre equações aritméticas e algébricas foi pensada para podermos analisar as resoluções dos alunos em cada tipo e dessa forma, subsidiar a discussão a respeito da transição da aritmética para a álgebra, definida por Filloy e Rojano (1985) como um período de corte didático

Uma observação importante a respeito das equações selecionadas, é que em todas as equações há a preocupação de verificar se os alunos validam o resultado encontrado.

Seguem os tipos de equações escolhidas e o que se pretende analisar em cada tipo.

As equações do tipo **ax = b** ou **b = ax** foram selecionadas com o intuito de verificar:

- Se os alunos trocam o sinal do coeficiente de x quando utilizam método da transposição de termos;
- Como os alunos "enxergam" o sinal de igualdade, isto é, se eles resolvem as equações, a partir do significado da igualdade, sem aplicar o algoritmo da transposição de termos (por estimativa) ;
- Se eles percebem o zero (0) como solução da equação, ou se reconhecem equação sem solução;
- Como os alunos operam com a incógnita à direita da igualdade.

As equações utilizadas no questionário foram:

a) – 4 x = - 8	b) 2x = 0
c) 0x = 1	d) – 20 = 4x

Nas equações do tipo: **ax + b = c** ou **c = b + ax**, pretendeu-se observar:

- Se os alunos operam com a incógnita no lado direito da igualdade;
- Se há dificuldades em trabalhar com coeficientes negativos;
- Se os alunos operam o termo independente com o coeficiente de x ;

As equações utilizadas foram:

e) x + 5 = 8

f) 1 = 5 + 2x

g) 2 – 4x = 3

h) 2x – 2 = 0

Nas equações do tipo: $ax \pm bx = c$ pretendeu-se observar:

- De que maneira os alunos operam com os termos em x.

As equações escolhidas para essa finalidade foram:

i) 2x – 3x = 3

j) 2x – 3x = 0

k) – x + 4x = 6

l) 3x + 5x = - 4

Nas equações $ax \pm b = cx$ ou $b \pm ax = cx$, o que se pretendeu analisar é:

- se a incógnita permanece no primeiro membro ou no segundo;
- se os alunos efetuam o cálculo mental dos valores dos termos em x ou se usam o procedimento da transposição de termos;
- se os alunos reconhecem uma equação sem solução.

As equações escolhidas foram:

m) 3 + 4x = 2x

n) –5x – 2 = x

o) 6 – 4x = 3x

p) x + 1 = x

Nas equações $ax \pm b = cx \pm d$, as seleções foram feitas para tentar entender como os alunos:

- Efetuam as operações entre os termos independentes e os termos em x;

- Consideram a propriedade simétrica da igualdade;
- Aplicam o método da transposição dos termos independentes, ou em x;
- Procedem para "isolar" a incógnita x.

As equações foram:

q) $x + 3 = 2x + 4$	r) $-3x + 5 = 2x - 5$
s) $2x + 2 = 2x + 2$	t) $-8 - 7x = -5 - 4x$

As escolhas das equações: $a \pm bx \pm c = dx \pm ex \pm f$ foram feitas para verificar:

- Se os alunos utilizam a opção da escolha de qual o membro em que ficará a incógnita,como um facilitador da resolução, ou se o termo em x ficará sempre do lado esquerdo.

As equações escolhidas para esse fim, foram.

u) $5 + 2x - 3 = 4x$	v) $4 - x + 2 = x$
w) $2 + 4 = 3 + 6 + x$	z) $3 + x + 5 = x - 2x - 2$

3.5 – As categorias dos erros.

Após a correção do instrumento e a constatação de vários tipos de erros apresentados, foram consideradas para este trabalho 06 categorias, levando em conta a freqüência e os tipos de erros.

Segue uma descrição das categorias, vinculadas às equações para realçar os procedimentos utilizados pelos alunos.

Categorias de erros.

1ª- Alteração do sinal do coeficiente, na divisão do termo independente:

ax = b $\Rightarrow$ **x =** $\dfrac{b}{-a}$

2ª - Transformação de ax = b em x = b – a

3ª - Trocar a posição do coeficiente de x pela do termo independente na divisão:

ax = b $\Rightarrow$ $x = \dfrac{a}{b}$

4ª - Efetuar a transposição de termos independentes sem alterar o sinal:

ax + b = c $\Rightarrow$ ax = b + c

5ª - Efetuar a transposição de termos em x sem alterar o sinal

ax = bx + c $\Rightarrow ax + bx = c$

6ª - O zero como um complicador em equações em que é solução, e nas equações sem solução.

a.x = 0 ou 0.x= b, (b $\neq$ 0)

Para exemplificar cada categoria de erro, apresentamos algumas resoluções dos alunos:

1ª Categoria: **ax = b** $\Rightarrow$ **x =** $\dfrac{b}{-a}$

- Solução apresentada pelo aluno nº 20 do 1º C para a equação: – 4x = 8

$$- 4x = 8 \Rightarrow x = \frac{8}{4}.$$

O sinal do coeficiente (-4) foi alterado para positivo, na passagem para o segundo membro com a divisão.

- Resolução do aluno nº 20 do 1º B na equação: 3x + 5x = -4

$3x + 5x = - 4$

$8x = - 4$

$$x = \frac{-4}{-8}$$

Nesta resolução, o sinal do coeficiente (8) mudou para negativo na passagem da divisão.

2ª Categoria. ax = b $\Rightarrow$ x = b – a

- Resolução dada pelo aluno nº 34 do 1ºC à equação: -20 = 4x

$- 20 = 4x$

$- 20 - 4 = x$

$-24 = x$

Transposição do coeficiente 4 pela operação de subtração

3ª Categoria. ax = b $\Rightarrow x = \frac{a}{b}$

- Resolução do aluno nº 20 do 1º A à equação: 6 - 4x = 3x

$6 - 4x = 3x$

$4x - 3x = -6$

$- 7x = -6$

$$x = \frac{7}{6}$$

Troca da posição do coeficiente 7 na divisão.

4ª Categoria: **$ax + b = c \Longrightarrow ax = b + c$**

- Resolução apresentada pelo aluno nº11 do 1ºA. para a equação: 5 + 2x – 3 = 4x

$5 + 2x \mathbf{-3} = 4x$

$2x - 4x = \mathbf{-3} - 5$

$-2x = -8$

$2x = 8$

$x = 4$

Não houve a alteração do sinal na passagem do –3 do 1º para o 2º membro.

5ª Categoria: **$ax = bx + c \Rightarrow ax + bx = c$**

- Resolução do aluno nº 15 do 1º C, na equação: - 5x – 2 = x .

$-5x - 2 = \mathbf{x}$

$-5x \mathbf{+ x} = 2$

$-4x = 2$

$x = -\frac{1}{2}$

Não houve alteração do sinal de x na passagem do 2º para o 1º membro.

6ª - Categoria. **$a.x = 0$ ou $0.x = b$, ($b \neq o$)**

- Resolução do Aluno nº 5 do 1ºA . para a equação: 2x = 0

$2x = 0$

$x = \frac{0}{2}$, não existe.

A divisão de zero por 2 não é definida para este aluno.

- Resolução do Aluno nº 20 do 1º B .

$0x = 1$

$x = \frac{1}{0}$

$x = 1$

O aluno efetua a divisão por zero e encontra como resultado x = 1.

Cap. 4 – Análise Quantitativa dos Resultados

Neste capítulo iremos analisar os resultados do instrumento considerando o número e os tipos de erros efetuados pelos alunos, nas resoluções das equações aritméticas (ax = b) e algébricas (ax + b = cx + d).

Para essas análises foram elaboradas várias tabelas, em que se procurou comparar, num primeiro momento, o número de erros efetuados nas resoluções das equações algébricas do tipo **ax + b = cx** ou **ax + b = cx + d**, referentes à transposição dos termos independentes e dos termos em x, e no segundo momento, o número e os tipos de erros efetuados a partir da resolução da equação equivalente **ax = b**.

Esta comparação, na própria equação, deve verificar se a maioria dos erros ocorrem na transposição dos termos em x ou dos termos independentes, ou se eles acontecem na etapa final de resolução, quando o aluno tem que decidir qual será o próximo passo para determinar o valor de **x** na equação **ax = b.**

Dentre os procedimentos verificados nas equações **ax + b = cx + d**, em relação à transposição de termos, foram analisados no primeiro momento a transposição do termo independente, e no segundo, a transposição do termo em **x**. Esta outra divisão é para poder certificar se o maior número de erros ocorre com a transposição do termo em **x** ou com o termo independente.

Nas equações equivalentes da forma **ax = b**, ou seja, a partir da equação algébrica (ax + b = cx + d),os erros foram divididos por categorias.

Em comparação com as equações algébricas, analisaremos também o número e os tipos de erros apresentados nas equações <u>já escritas</u> na forma ax = b

Para a confecção das tabelas foram computados como n.º de erros, os efetuados por aluno, isto é, se um aluno cometeu mais de um do mesmo tipo, foi considerado para efeito desse estudo somente um erro.

Seguem as várias tabelas com a denominação de cada uma.

Tabela 1: Freqüência total do número de alunos que erraram a transposição de termos na equação ax + b = cx + d

Erros relacionados à transposição:	Nºde alunos-erros	Alunos-erros / total alunos	%
Termos Independentes	19	$\frac{19}{104}$	18,27
Termos em x	24	$\frac{24}{104}$	23,08
Ambos os termos	12	$\frac{12}{104}$	11,54
Total	55	$\frac{55}{104}$	52,88

Por esta tabela podemos observar que a porcentagem total do número de erros em cada uma das categorias diverge com uma pequena diferença em torno de 5%.(18,27% para os termos em independentes. e 23,08% para os termos em x). Essa diferença oferece uma primeira indicação de que os alunos não apresentaram uma dificuldade mais acentuada em transpor termos em x, do que os termos independentes.

Entretanto, a porcentagem total de erros, da ordem de 53% (55 em relação a 104), pode indicar que os alunos simplesmente executam o procedimento de transposição, sem nenhum critério.

O cruzamento destes dados com as explicações fornecidas pelos alunos na justificativa de seus procedimentos nos permite avançar em interpretações a respeito dessa conjectura.

A tabela abaixo mostra o número de alunos que cometeram determinados erros, nas resoluções das equações algébricas do tipo ax + b= cx ou ax + b = cx + d, porém, relacionados com as **equações equivalentes da forma ax = b,** classificados nas categorias.

Tabela 2: Freqüência total do número de alunos com erros na equação equivalente ax=b

Tipos de erros	N.º de alunos-erros	Alunos-erros / total alunos	%
$x=\frac{b}{-a}$	36	$\frac{36}{104}$	34,621
x= b-a	16	$\frac{16}{104}$	15,38
$x=\frac{a}{b}$	07	$\frac{07}{104}$	6,73
Total	59	$\frac{59}{104}$	56,73

Podemos perceber nesses resultados que a maioria dos alunos também não conseguem resolver de maneira correta as equações aritméticas da forma ax =b. Dentre os erros, o de maior incidência é o da alteração do sinal do coeficiente, na transposição pela divisão.

A tabela 3, mostra os números e os tipos de erros que os alunos cometeram nas resoluções das equações **já escritas na forma ax = b**

Tabela 3: Freqüência total do número de alunos-erros na equação ax = b

Tipos de erros	Nº de alunos-erros	Alunos-erros / total alunos	%
$x=\frac{b}{-a}$	38	$\frac{38}{104}$	36,54
x= b - a	30	$\frac{30}{104}$	28,85
$x=\frac{b}{a}$	03	$\frac{03}{104}$	2,88
total	71	$\frac{71}{104}$	68,27

O resultado que a tabela 3 apresenta mostra que o problema maior que os alunos enfrentam nas resoluções das equações do 1º grau do tipo ax = b, está em decidir qual a operação que deve ser realizada, a fim de encontrar o valor da incógnita

O fato de 68% não conseguirem realizar a operação correta na resolução da equação aritmética ax = b, evidencia que, para esses alunos, essas equações não são nem mais fáceis e nem mais simples do que as equações algébricas.

Esta indicação orientou as questões formuladas nas entrevistas para uma investigação dos fatores que provocam esses erros. Consideramos como uma possibilidade a ausência da compreensão de problemas aritméticos e da notação de ax como ***a*** multiplicado por ***x***

A tabela 04 classifica os tipos de erros por tipo de equação, efetuados em cada uma e estão divididos, inicialmente, em dois tipos: o primeiro relacionado à transposição de termos independentes e em x, nas equações ax + b = cx + d, e o segundo aos erros cometidos na resolução da equação equivalente ax = b.

Para o procedimento da transposição, foi considerado separadamente o erro ligado ao termo independente e ao termo em x. Os erros efetuados a partir da equação equivalente ax = b, estão divididos por categorias

Toda essa divisão tem por finalidade ressaltar as equações que mais induziram aos erros, e quais foram os tipos.

Tabela 4 . Freqüência do nº de erros por equação algébrica, em 104 alunos.

Equações	total de erros	Erros de transposição de termos até chegar na equação equivalente ax=b Total = 140			Erros efetuados a partir da equação equivalente ax =b total = 167			
		termos indepen.	termos em x	outros	x = $\frac{b}{-a}$	x =b - a	x = $\frac{a}{b}$	outros
3+4 x= 2x	29	09	02	04	13	0	01	0
-5x –2 = x	48	0	10	07	24	01	03	03
6 - 4x = 3x	38	07	06	02	14	0	07	02
X +3 = 2x + 4	24	02	07	02	04	02	0	07
3x+5 =2x - 5	33	08	04	02	12	01		06
-8-7x =5 - 4x	31	04	05	02	17	0	01	03
5+2x - 3 = 4x	26	05	03	03	10	01	0	04
4 – x + 2 = x	38	04	17	08	12	0	0	07
3+x+5=x-2x-2	40	05	05	07	09	02		12
total	307	44	59	37	115	07	12	41

A maior incidência de erro (total de 115) ocorre na resolução da equação aritmética ax = b, na transposição, com a mudança do sinal do coeficiente de x.

Das equações dadas, **- 5x – 2 = x**, foi a que mais teve erros, totalizando 48, sendo que desse total, a metade dos erros está relacionada à aplicação indevida da regra da transposição, ou seja, ax = b, segue que x = $\frac{b}{-a}$, sendo também a equação que teve mais erros na transposição do termo em x. Isto evidencia que uma parte dos alunos não opera corretamente o método da transposição de termos.

Outro dado dessa tabela refere-se à equação **–8 – 7x = 5 – 4x**, em que constatamos um número praticamente igual de erros de transposição do termo independente (04) e termos em x (05), e um número bem maior de erros (17) na resolução da equação ax = b, o que mostra que não há maior incidência de erros na transposição dos termos em x, e sim na resolução da equação ax = b, com predominância da mudança do sinal do coeficiente de x.

Comparando só o total dos erros de transposição de termos independentes e em x com os erros na resolução da equação ax = b, dada por x = $\frac{b}{-a}$, é possível notar que o número de erros é praticamente igual, 103 no primeiro caso e 115 no segundo, o que indica que a maioria dos alunos não conhecem o algoritmo da transposição de termos.

A tabela 5 apresenta duas equações com os mesmo termos em x, porém com termos independentes diferentes, sendo uma com o número zero, e as várias formas de resoluções dos alunos, com o número de erro em cada uma.

Tabela 5 - Freqüência dos resultados nas equações algébricas da forma ax + bx = c, em um total de 104 alunos

Equação	N.º total de erros	Tipos e números de erros apresentados.						
2x – 3x = 3		-1x = 3 x = 3	x = 3	-x= 3	1x = 3 x = 3/1	-x = 3 x = 3+1	Oper. em Z	Outro
	36	05	05	14	05	01	05	01
2x – 3x =0		-1x = 0 x = 1		- x = 0		-x = 0, não existe		outros
	44	6		23		7		9
Total	80			37				

Nessa tabela podemos perceber que o resultado apresentado com maior freqüência (14) para a primeira equação (2x – 3x = 3), é dado por (– x = 3). Embora esse valor encontrado não esteja incorreto, o procedimento de resolução está incompleto, pois quando resolvemos uma equação, buscamos encontrar o valor de x, e não de – x, de tal maneira que quando substituído encontra-se uma identidade.

Em relação à outra equação (2x – 3x = 0), ocorre o mesmo problema, o resultado da equação dado com maior freqüência (23) é.(-x = 0). Além disso, em relação a esta mesma resposta (-x = 0), encontramos sete como –x =0, não existe. Este fato levanta a questão da problemática que o zero apresenta nas resoluções das equações.

Tabela 6 – Freqüência de erros nas equações aritméticas **ax=b,** em um total de 104 alunos.

Equações	Números de erros	Tipos de erros

		$x = \frac{b}{-a}$	x = b - a	$x = \frac{a}{b}$	Op.em Z	Transp. em x
-4x = 8	36	28	05	01	02	
-20 = 4x	24	12	04	01	04	03
Total	60	40	09	02	06	03

Nesta tabela percebemos que tanto para a primeira equação (-4x = 8) como para a segunda (-20 = 4x) a maior incidência de erro está associada à técnica de transpor o coeficiente, alterando seu sinal.

A equação – 4x = 8, foi a que mais apresentou erro, totalizando 36 (mesmo comparando com as equações algébricas dadas na tabela 04). Este dado é significativo, pois mostra que um dos maiores problemas dos alunos nas resoluções das equações do 1º grau, não está ligado, necessariamente, às equações algébricas e sim à técnica aplicada em suas resoluções

Tabela 7– Freqüência de erros nas equações **ax= 0 e 0x=b**, em um total de 104 alunos.

Equação	total de erros	Tipos de erros

2x = 0		x= 0/2	x=- 2	x = 2	x = 0/-2	x = 0/2 x = 2	x = 0/2 ; ϕ, não existe
N.º de erros	37	08	13	07	03	02	04
0x = 1		x = 1	x = 0	x=1/ 0 x= 0	x = 1 / 0 x = 1	x = 1 / 0	Não existe
N.º de erros	58	23	05	14	09	04	02

Na equação 2x = 0, o maior número de erros (13) ocorre no valor encontrado x = -2 (esse tipo de erro será analisado no capítulo 5), e na equação 0x = 1, a maior incidência de erros (23) está no resultado encontrado para x = 1, o que mostra a problemática da presença do número zero na equação. Outro dado relevante da tabela é o fato de os alunos escreverem para 0x = 1 como $x = \frac{1}{0}$ (analisado no cap. 5)

Tabela 8– Erros efetuados na equação sem solução da forma **x+1 = x**

Equação	n.º de erros	termo Indep.	termo em x	outros				outros 0=1
x+1=x	44	12	05	01	0	0		26

O dado interessante dessa tabela está no elevado número (26) de resultados dados para a equação (x+1 = x) como 0 = 1.

Cap.5 - Análise dos resultados.

Neste capítulo vamos proceder à análise dos erros e das dificuldades manifestadas pelos alunos na população selecionada para essa investigação, considerando os dados obtidos na resolução das equações (instrumento investigativo), o discurso do aluno nas entrevistas e as contribuições teóricas enunciadas nos capítulos 1 e 2.

Neste trabalho consideramos os erros como sintomas, como sinais da presença ou da existência de dificuldades.

Utilizaremos, para organizar essa análise, os pressupostos descritos por Lemoyne, Conne e Brun (1993), conforme Matz (1980) e sua proposta para uma tipologia de erros em álgebra.

Matz considera dois principais tipos de erros:

- Erros correspondentes aos aspectos conceituais;
- Erros relacionados às técnicas de resolução de equações.

Ao assumirmos esta classificação não estamos assumindo, como veremos no capítulo seguinte, nas Considerações Finais, que esses erros devem ser tratados isoladamente, mas pretendemos apenas organizar a exposição para analisarmos os erros, tomando como ponto de partida as conclusões dos estudos apresentados na fundamentação teórica.

Veremos que as reflexões da análise nos encaminham para as interpretações dos erros que não confirmam as dificuldades encontradas nas pesquisas.

5.1 - Aspectos Conceituais.

5.1.1 - Representação simbólica de uma equação do 1º grau.

Em geral, os alunos conhecem a forma sintática de escrever uma equação do 1º grau, mas vamos perceber, em algumas entrevistas, que os alunos, quando solicitados a escrever a equação, não formulavam uma sentença matemática aberta, formada por duas expressões ligadas pelo sinal de igual.

Nas entrevistas que se seguem, indico o entrevistador pela letra E e o aluno pela inicial de seu nome.

Temos na entrevista da aluna Mo. do 1º A, uma situação em que ela não explicita a representação correta de uma equação do 1º grau:

E: Escreva uma equação do 1º grau, qualquer uma.

Mo: (escreve): 1x + 3

E: Um vezes x mais 3, representa uma equação ?

Mo: Acho que sim.

A maneira como a aluna escreveu e a afirmação de que representava uma equação, revela que ela não diferencia uma expressão algébrica de uma equação. Não há o sinal de igual entre termos, e apesar de não representar erro escrever 1x ao invés de x, no entanto denota que ela não identifica o número 1 como neutro multiplicativo ou seja: $1.x = x$ para todo $x \in R$.

Após a pergunta do entrevistador, ela escreve a equação corretamente.

E: O que significa: um vezes x mais 3 ?

Mo: Ah! está faltando alguma coisa aqui, um vezes x mais 3 é igual a alguma coisa.

Mo: (escreve): 1x + 3 = 4

Mo: Não sei quanto vai dar isso.

A fala *"não sei quanto vai dar isso"* evidencia que a aluna tem dificuldade para atribuir significado à equação, ou seja, não percebe que x representa um número que multiplicado por 1 e somado a 3 é igual a 4. Esta dificuldade em atribuir significado pode estar ligada à abordagem com que ela trabalha com a equação, isto é, sem uma base semântica.

Na entrevista com a aluna Be. do 1º B., vamos perceber que ela confunde uma equação do 1º grau com a do 2º grau.

E: Escreva um equação do primeiro grau.

Be: (escreve) $2x^2 + x + 2 = 0$

E: Mas essa equação é do segundo grau. Você sabe qual a diferença entre ser do primeiro grau e do segundo grau ?

Be: Ah! ... (pensa) não sei...é por causa do dois ?

E: Isso. É o maior expoente que determina o grau da equação.

E: Escreva uma equação que seja do primeiro grau.

Be: (escreve) $2x + 3 = 0$

Apesar de a aluna ter escrito, no final da discussão, uma equação do 1º grau correta, o fato de ela ter escrito inicialmente uma equação do 2º, pode evidenciar um tipo de erro que está ligado ao não entendimento da expressão "equação do primeiro grau", ou seja, o significado de "primeiro grau". Isto pode ser uma dificuldade relacionada à transferência da linguagem natural para a linguagem algébrica.

Além dessas equações que foram escritas de maneira incorreta, as entrevistas também mostraram que muitos alunos têm pleno domínio da forma assumida por uma equação do 1º grau. Seguem algumas equações escritas por eles, quando solicitados a escrever as equações:

Aluna Fl. (escreve a equação): $4x + 2 = x - 3$.

Aluno Y: (escreve): $x + 2 = 3$

Aluno Fe. $2x = 4$

Aluna Mr: $-3x - 2x = 1x$

5.1.2 – O sinal de igualdade.

No capítulo 2 apresentamos os resultados de pesquisas que enfatizam as dificuldades dos alunos em tratar o sinal de igual como uma relação de equivalência. De um modo geral, essas pesquisas ressaltam que as operações aritméticas são interpretadas como uma ação a ser realizada entre os dois termos dados, tendo como conseqüência um resultado.

Desta forma, o sinal de igual passa a ser visto como uma relação entre uma ação e seu resultado, em uma perspectiva unidirecional ou sintaticamente como prenúncio de um resultado. Assim, quando os alunos se deparam com dois membros de uma equação, em que nenhum dos dois é o resultado numérico da operação, eles têm dificuldades em aceitar a idéia de igualdade como um equilíbrio, que se mantém para um determinado valor da incógnita.

Na mesma direção, os trabalhos desenvolvidos por Gallardo e Rojano (1988), realçam que a dificuldade dos alunos em relação ao sinal de igualdade, está vinculada ao caráter duplo da igualdade: às vezes ele representa o resultado de uma operação e em outras situações, como nas equações, representa a equivalência entre os dois membros da equação.

Kieram (1981) verificou que a maioria dos alunos descreveu o sinal de igualdade em termos de uma resposta e que se limitaram a exemplos envolvendo uma operação do lado esquerdo e o resultado do lado direito.

Para Booth (1994), a idéia de que o símbolo de adição possa indicar tanto o resultado de uma adição como a ação, ou de que o sinal de igualdade possa ser visto como indicador de uma relação de equivalência em vez de um símbolo para “escreva a resposta”, não é percebida de imediato pelo aluno, mas é necessária para a compreensão algébrica da equação.

Na entrevista com a aluna Mr do 1º C, podemos perceber sua dificuldade em relacionar a igualdade ao significado de equivalência.

E: Escreva uma equação do primeiro grau.

Mr: (escreve)... – 3x – 2x = 1x

E: Muito bem... qual o significado do sinal de igual ?

Mr: Ah! não sei.... o resultado...

Esta resposta pode ser interpretada de duas maneiras: quando ela afirma “ah! nãos sei” parece que ela não percebe a igualdade da equação como uma relação de equivalência entre o primeiro e o segundo membros, e quando diz “o resultado “ela deixa clara a relação do sinal com o resultado de uma operação a ser efetuada no 1º membro da equação.

No entanto, há alunos que já superaram essa dificuldade, como na entrevista com a aluna Fl. do 1º B em que a relação entre o sinal de igual com o resultado não aparece.

E: Escreva uma equação do 1º grau.

Fl: (escreve) : 4x + 2 = x – 3

E: Qual o significado do sinal de igual ?

Fl: 4x + 2 é a mesma coisa que x – 3

A aluna mostrou maturidade quanto à interpretação do significado do sinal de igual ao dizer que o primeiro membro “é a mesma coisa” que o segundo, ou seja, a igualdade não tem o significado estritamente relacionado às operações aritméticas, conforme antes citado.

Da mesma maneira que a aluna Fl, o aluno Fe também relaciona a igualdade aos dois membros da equação.

E: Escreva uma equação do 1º grau.

Fe: Qualquer uma ?

E: É, qualquer uma.

Fe: (escreve) 2x = 4

E: O que representa o sinal de igual na equação ?

Fe: É....(pensa)... que esse lado vai ser igual a este .

E: Como assim ?

Fe: Aqui (mostra o 2x) vai ter que ser igual a 4.

O aluno responde corretamente a pergunta formulada, mas da mesma forma que a aluna Fl, ele não menciona a solução da equação com o significado da igualdade.

Talvez a pergunta não deixe muito claro a intenção do entrevistador, que era perceber se os alunos tinham clareza da estreita relação entre o significado da igualdade e o valor encontrado para a incógnita. Ou seja, se o valor encontrado não for a solução da equação, então para este resultado a relação de igualdade não se estabelece.

Entretanto, em ambos os casos os alunos ultrapassaram a visão do sinal da igualdade relacionada à aritmética

Nos estudo realizados por MacGregor (1996), a respeito do sinal de igualdade, ela evidencia que o sinal de igualdade deve ser utilizado para vincular expressões equivalentes, a partir de um raciocínio dedutivo, produzindo assim uma cadeia de afirmações logicamente equivalentes, que conduzirá a uma solução.

Apesar desta constatação, em relação ao significado da igualdade, o que podemos observar em algumas resoluções dos alunos e nas suas respostas é que esse raciocínio dedutivo quase não aparece, e os procedimentos adotados nem sempre levam à solução da equação.

Vamos analisar a resolução da equação -5x – 2 = x, realizada pelo aluno Pe.

E: Resolva esta equação: “menos cinco x menos 2 é igual a x “

Pe: (escreve) $-5x - 2 = x$

$$7x = x$$

$$7 = \frac{x}{x}$$

7 = 1

Nessa resolução podemos perceber que o aluno comete vários tipos de erros: soma o coeficiente de x com o termo independente, não consegue explicitar o valor da incógnita, além de não entender o significado do sinal de igual 7 = 1 (!).

Após a pergunta do entrevistador, o aluno percebe que o procedimento de resolução estava errado.

E: Bom, chegou em 7 igual a um , qual a conclusão?

Pe: Ah! Está errado !!!

E: Onde esta o erro ?

Pe: Não sei....

Para analisar as interações do aluno com os erros, é importante conhecer o pensamento do aluno. Em sua representação, ele tem diferentes origens; pode ser um erro conceitual, ou um mau uso de técnicas algorítmicas, mas em geral está relacionado aos dois aspectos.

E: Vamos analisar a sua resolução, me fale como você pensou...

Pe: Eu fiz... menos 5 com menos 2 e deu menos 7 x

Conforme já mencionado, em aritmética os símbolos como **+,-** e **=** são interpretados geralmente em termos de ações a serem efetuadas, de maneira que + significa efetivamente realizar a operação e = significa escrever a resposta.

Ao analisar sua resolução, Pe afirma *"eu fiz menos 5 com menos 2 e deu menos 7x";* essa fala revela que ele pode ter interpretado a expressão – 5x –2 como uma ação a ser executada, sem levar em consideração a incógnita.

Após a pergunta sugestiva do entrevistador, o aluno percebe o erro.

E: Mas, vamos pensar juntos... aqui você tem –5x e – 2 , posso somar o – 5 com o –2 ?

Pe: (pensa e responde)...Ah! é !!!... aqui que está errado....

Algumas resoluções do instrumento investigativo envolvendo o sinal de igualdade.

Aluna J. do 1º A ao resolver a equação 4 – x + 2= x

4 + 2 = x – x

6 = 0

Aluna nº 23 do 1ºB resolvendo a equação: x +1 = x

x – x = -1

0 = -1

Resolução do aluno nº 07 do 1º B, para a mesma equação:(x + 1 = x)

1 = x – x

1 = 0

Nestes três casos, os alunos não interpretam a igualdade com o significado de simetria.

Apesar desta equação x + 1 = x ser diferente das demais por não ter solução, os números apresentados no cap. 4, da tabela 8, indicam um dado relevante relacionado com a igualdade, ou seja, o elevado número – 26 em um total de 44 erros - de resultados dados como 0 = 1, em que se percebe que os alunos parecem não entender o significado do sinal de igual.

5.1.3 – Transformar **ax = b em x = b – a**

O fato de os alunos apresentarem, em muitas situações, o valor de x da equação ax = b por x = b – a, revela um certo desconhecimento do simbolismo algébrico da representação **ax** como **a** multiplicado por **x.**

Possíveis interpretações desses erros são dadas por Matz (1980), conforme Lemoyne e outros (1993).Estes correspondem a conhecimentos simples, falsos ou incompletos do simbolismo e das operações em álgebra, chamados de erros sintáticos. Um exemplo dessa situação é interpretar *3x* como *3 + x. O*utra interpretação, segundo Matz, pode estar ligada à concatenação dos algarismos, isto é, 3x é visto como a concatenação de 3 com a incógnita x.

Booth (1994), vai na mesma direção quando afirma que a maneira de representar a multiplicação em álgebra por justaposição , como 3x, leva os alunos a verem 3x como soma em vez de produto (ou como representação do valor posicional).

Na resolução da equação 3 + 4x = 2x, apresentada pelo aluno do 1º B, no instrumento investigativo, parece que ele não percebe a multiplicação entre o coeficiente 2 e a variável x.

$$3 + 4x = 2x$$

$$3 + 4x - 2x = 0$$

$$3 + 2x = 0$$

$$3 + 2 = -x$$

$$5 = -x$$

O erro do aluno, caracterizado pela transposição da incógnita x para o segundo membro, nos leva a crer que ele transformou o termo (2x) em (2 + x) , ou seja, em um erro que pode ser interpretado como sintático.

Na resolução da equação: *-20 = 4x, o aluno* transpõe o 4 para o primeiro membro, alterando seu sinal para negativo.

$$-20 = 4x$$

$$-20 - 4 = x$$

$$24 = x$$

Este erro leva a supor que ele não interpretou 4x como 4 multiplicado por x, e indica que ele simplesmente efetuou a passagem do coeficiente de x para o 1º membro alterando seu sinal, numa referência ao método da transposição de termos.

Essa referência ao método da transposição de termos, com alteração do sinal, pode ser uma justificativa que os alunos usam para explicar seus procedimentos.

Um exemplo dessa situação é mostrado na entrevista abaixo com a aluna Be.

E: Escreva uma equação que seja do 1º grau.

Be: (escreve) 2x + 3 = 0

E: Como a gente resolve essa equação?

Be: (escreve) 2x + 3 = 0

x = 3 –2

x = 1

Podemos perceber que a aluna cometeu dois erros: o primeiro na transposição do número 3 para o segundo membro sem alterar a operação e o outro na “passagem” do coeficiente 2 para o segundo membro, aí neste caso alterando o sinal do número.

Na seqüência da entrevista, a aluna justifica sua resolução da seguinte maneira:

Be: Eu isolei o x e passei o 2 para o outro lado.

E: Mas como são feitas essas passagens?

Be: Passei o dois e mudei o sinal.

A fala *“isolar o x”,* usada como um procedimento de resolução, não se traduz em operações que expressam relações equivalentes que levem à solução correta, mas sim reflete uma ação de transposição dos termos, sem nenhum critério, pois ao transpor o número, ela não muda o sinal da operação e altera o sinal do 2 (“*passei para o outro lado e mudei o sinal”).*

Um outro exemplo desse tipo de erro pode ser verificado na resolução da equação: - 4x = 8, feita por um aluno no instrumento investigativo.

- 4x = 8

x = 8 + 4

x = 12

Nessa resolução, o que se nota é que este aluno efetua a passagem do coeficiente – 4 para + 4, novamente evidenciando a transposição com a alteração do sinal do número, sem se dar conta de que o –4 está multiplicado por x.

5.1.4 – Trocar a posição do coeficiente de x pela do termo independente na divisão.

ax = b $\Rightarrow \quad x = \frac{a}{b}$

O erro caracterizado por determinar x em ax = b escrevendo x= $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$,foi analisado em um estudo de caso, realizado por Gallardo e Rojano (1988) que foi denominado “Regra da Leitura Invertida da Operação”.

A equação em estudo, proposta por eles foi 13x = 39.

Ao verbalizar a solução o aluno fala “13 dividido por 39”; o entrevistador escreve a equação de outra forma 13 x X = 39 e 13x = 39. O estudante repete a mesma frase “13 dividido por 39 “.O entrevistador apresenta uma equação mais simples: 3x = 6, a resposta é novamente 3 dividido por 6.

Por fim o entrevistador pede ao aluno para ele sugerir um problema associado à equação, através do seguinte diálogo:

E : Pode inventar um pergunta com 3x = 6 ?

A: Um problema ?

E : Sim, um problema.

A .Ter que saber a superfície de um retângulo.(A desenha um retângulo)

A : Este mede 3 metros, este não se sabe quanto mede. O que se sabe é que o resultado é 6.

E: O resultado do quê ?

A: Da superfície do todo.

E: O que não se sabe ?

A: O valor do lado maior.

E: O que temos que encontrar ?

A: O valor do lado.

E: Sim.

A: O valor dessa parte aqui (o aluno se refere ao lado x do retângulo)

E: Então, como resolveremos este problema ?

A: Tem que dividir. Como o contrário de multiplicar é dividir, tem que dividir o 6 por 3.

E: E quanto é 6 por 3 ?

A: (usa a calculadora) 2.

E: Está certo ? resolveu o problema ?

A: Pode ser.

E: Por quê ?

A: Porque já se sabe que este lado mede 3, multiplica, 3 vezes 2 dá 6.

(p. 182-183)

Esse diálogo, segundo os autores, mostra que o aluno transita dos modelos à equação e vice-versa sem nenhuma dificuldade e que a invenção da falsa regra da leitura invertida da operação não foi devido à grandeza dos números envolvidos na equação, mas sim a uma leitura puramente sintática do problema proposto.

Vamos analisar uma entrevista em que o aluno (Pe) comete o mesmo tipo de erro, apesar da equação ser diferente da proposta de Filloy, por envolver o número zero.

E: Escreva aí: dois x igual a zero

Pe: (escreve) 2x = 0

$$x = \frac{2}{0}$$

E: Quanto deu ?

Pe: x igual a 2 !!!

Nesta resolução apresentada, podemos notar dois erros consecutivos: o primeiro na divisão do 2 por 0, e o segundo o resultado da divisão ser igual a 2. Ao ser perguntado sobre o procedimento utilizado para se chegar a este resultado, Pe afirmou:

Pe: Eu isolei o x ...

E: Como você isolou o x ?

Pe: Ah! eu dividi o 2, que está multiplicando, pelo zero.

Após a pergunta do entrevistador, o aluno percebe o erro e corrige.

E: Então você "passou" o zero dividindo o dois ?

P: Ah! é... está certo... (escreve) x = 0 / 2

Para se certificar de que o erro na equação anterior foi só uma distração, apresentei outra: – 5x – 2 = x.

O aluno transpõe corretamente (-5x) para o segundo membro obtendo: *-2 = 6x, e* na seqüência da resolução escreve:

$$x= \frac{6}{-2}$$

x= -3

E: Ok. Como você faz para saber se está correto

Pe: É só substituir... (escreve) -5 (-3) –2 = -3........ 13 = -3

Pe: Ih! está errado...

O aluno conhece o processo da validação do resultado ao verificar o valor encontrado. Na explicação do procedimento adotado para a resolução, o aluno refere-se à troca do sinal na passagem do termo em x para o segundo membro, chegando a – 2 = 6x

Pe: Continuei... ficou menos dois igual a seis x, aí isolei o x.

E: Como você isolou o x, o que significa isolar o x ?

Pe: Vou pegar o x, e dividir o valor dele....(pensa) ... o valor dele não...é...(pensa)... a quantidade de x..., não sei,... e dividir pelo menos 2.

E: E aí?

Pe: Ficou x igual a menos 3.

Na discussão a respeito da frase " isolar o x ",o aluno não conseguiu explicar o procedimento, mas tentou justificar o significado da regra "isolar o x" através de uma fala diferente de "passei para o outro lado e mudei o sinal", frase muito utilizada pelos alunos.

As explicações do aluno a respeito de "isolar o x" podem ser observadas nessas falas: "*vou pegar o x, e dividir o valor dele....(pensa) ... o valor dele não...é...(pensa)... a quantidade de x... , não sei,... e dividir pelo menos 2",* e sugere que ele teve a idéia de "pegar" o valor do coeficiente de x e dividir o termo em x por esse valor, talvez numa referência ao processo de obter 1x, ou seja, buscando o valor de x pela "redução à unidade", mas essa questão não foi verificada na entrevista.

No entanto, ficou clara a dificuldade desse aluno para encontrar o valor x na equação da forma ax + b = cx. Diante dessa dificuldade, propus-lhe outra equação em que a incógnita foi colocada no primeiro membro, e o coeficiente ***"a"*** como um divisor do termo independente ***"b"***.

E: Resolva esta equação: (-4x = 8) como você faz ?

Pe: (escreve) $x = \frac{8}{-4}$ *............... x = -2*

E: Me fale como você pensou.

Explicando como pensou, o aluno repete as frases como as anteriores.

E: O que significa isolar o x?

Pe: Então...eu ...peguei...e...para quantos valores...não...

Pe: (fala) menos 4x igual a oito... x igual a oito sobre menos 4 ...

E: Por que o menos 4 passou dividindo o oito ?

Pe: Porque aqui ele está multiplicando o x...

O aluno reconhece ***ax*** como **a** multiplicado por ***x.***

Após a discussão sobre essa equação (-4x = 8), voltamos à equação anterior (-2 = 6x), para que ele pudesse resolvê-la de maneira correta, mesmo considerando as equações diferentes em relação à posição da incógnita.

E: Ótimo ! então vamos voltar aqui (-2 = 6x). Como está aqui ?

Pe: (fala) o seis está multiplicando o x... teria que ser...

(escreve) $x = \frac{-2}{-6}$ *é isso ?*

Podemos observar nessa entrevista que o aluno, após comparar o procedimento adotado na resolução da equação (-4x = 8) com a anterior (-2 = 6x), consegue efetuar a operação, apesar de ter alterado o sinal do coeficiente 6. (Este tipo de erro será discutido oportunamente)

Ainda não convencido da segurança do aluno para resolver equação aritmética da forma c = b + ax, ou seja com a incógnita no segundo membro, propus-lhe outra para ser resolvida 1 = 5 + 2x

Pe: (escreve) $1 = 5 + 2x$

$-2x = -1 + 5$

$-2x = 4$

$x = -\frac{2}{4}$

Se os erros cometidos nas equações anteriores ocorreram primeiramente em virtude da presença do número zero na equação e depois em função da incógnita estar no segundo membro, no momento em que o aluno transpôs a incógnita para o primeiro membro, a equação ficou da forma ax = b, (-2x = 4), e mesmo assim ele trocou a posição do coeficiente de x na resolução.

A partir daí podemos deduzir que a dificuldade não está no tipo de equação apresentada, mas no entendimento do significado da frase utilizada pelo aluno, “isolar o x”.

Ao retomar a discussão a respeito de sua resolução, utilizei o mesmo argumento que o aluno usou ao explicar o procedimento na equação (-4x = 8), quando ele disse que passou o –4 dividindo o 8, porque estava multiplicando.

E: Vamos analisar sua resolução... a partir daqui (-2x = 4)

E: Você escreveu que x é igual a –2 dividido por 4...,ou seja, você passou o 4 dividindo o 2 ?. Qual é a operação que o 2 está realizando em relação ao x ?

Pe: de vezes...

E: então... se o –2 está multiplicando o x....

Pe: o - 2 teria que estar dividindo.

Após essa discussão com o aluno Pe, cabe uma pergunta: o erro desse aluno foi de mesma natureza que o erro analisado por Gallardo e Rojano, em que é atribuído à uma leitura sintática da equação ?

A resposta talvez seja não, considerando que o erro deste aluno foi diferente: primeiro pelo fato de as equações serem diferentes daquela utilizada por eles, e segundo pelas falas do aluno, revelando uma preocupação com o aspecto semântico, uma vez que ele refere a quantidade de x, ao valor de x através da unidade.

Vamos analisar a entrevista com a aluna Fl, a respeito da resolução da equação proposta: 4x + 2 = x – 3

E: Qual o procedimento de resolução?.

Fl: (escreve) 4x –x = -3 –2
3x = -5

Fl: É 3 sobre –5 ou –5 sobre 3 ?

Podemos observar, nesta resolução, que a aluna manifesta sua dúvida exatamente no momento em que se depara com a equação aritmética da forma (ax = b). Sabe-se que deve utilizar uma operação, mas não sabe a posição relativa desse números. Outra constatação importante dessa pergunta é que a operação de divisão não é mencionada no discurso da aluna, reduzindo-se a –5 sobre 3 ou 3 sobre –5.

Não saber a diferença entre uma operação e outra revela que sua dúvida repousa sobre uma ação a ser executada, através da transposição do número 3 ou do número 5, sem se dar conta do aspecto sintático-semântico da equação 3x=-5

E: Não sei. Qual é a diferença ?

F: (fica calada pensando e não responde)

E: Faça da maneira que você achar correta.

F: (escreve) $x = \frac{3}{-5}$

Podemos observar que a aluna não tem clareza do procedimento correto para encontrar o valor da incógnita x. Se a incógnita à esquerda da igualdade talvez ajude o aluno a perceber qual operação deva ser realizada para encontrar o valor da incógnita, este fato não ajudou em nada, pois a pergunta da aluna deixa clara sua dúvida.

Já na entrevista com a Mr. do 1.º C, ela explica a regra da transposição através da frase “se está multiplicando, passa dividindo”, mas troca a posição do coeficiente de x.

E: Resolva a equação: um é igual a cinco mais dois x

M: (escreve) 1 = 5 + 2x

-4 = 2x

$$x = \frac{2}{-4} = \frac{1}{2}$$

E: Vamos analisar as etapas que você fez. Como que você fez essa passagem da 2ª linha para a 3ª

M: É....(pensa)... esse que está multiplicando veio dividindo...

A regra a que a aluna se refere "está multiplicando veio dividindo" sugere que ela conhece a frase que explica o procedimento da transposição de termos, mas não sabe interpretar o significado que esta representa.

Isto pode ser um indício de que ao resolver equação através da utilização de frases mal interpretadas, os alunos são levados a cometerem determinados erros.

Seguem algumas resoluções do instrumento investigativo, referentes a essa categoria.

Aluno n.º 36 do 1º A, resolvendo a equação: 6 – 4x = 3x

$6 - 4x = 3x$

$-4x + 3x =- 6$

$- 7x = - 6$

$x = \frac{7}{6}$

Nesta resolução , apesar de o aluno cometer vários erros (passagem do termo 3x para o 1º membro sem alterar seu sinal , operação entre os inteiros relativos), a ênfase está na troca do coeficiente de x.

O fato de a incógnita estar do lado direito da igualdade, pode induzir os alunos a cometerem esse tipo de erro, pois como as equações são escritas geralmente na forma ($ax = b$) com a incógnita à esquerda, e a solução desta equação é dada por $x = b/a$, isto é transpondo o número da esquerda efetuando a operação de divisão, talvez esse procedimento leve o aluno a fazer a mesma coisa quando a equação é dada por $b = ax$

Vejamos duas situações do instrumento onde isso ocorreu

Na resolução da equação – 20 = 4x , o aluno n.º 31 muda a posição da incógnita x, escrevendo-a do lado esquerdo e ao mesmo tempo transpõe o número –20 efetuando a divisão.

$-20 = 4x$

$x = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$

$x = \frac{1}{5}$

Nesta outra resolução (2 – 4x = 3), o aluno do 1ºA resolve com a incógnita à direita e comete o mesmo tipo de erro da situação acima.

$2 - 4x = 3$

$2 - 3 = 4x$

$-1 = 4x$

$x = \frac{4}{1}$

Porém na resolução da equação 6 – 4x = 3x, o aluno mantém a incógnita à esquerda, mas no momento de dividir acaba trocando as posições dos números.

- $4x - 3x = -6$
- $7x = -6$

$x = \frac{7}{6}$

5.1.5 - O zero como um complicador nas equações em que é solução, e nas equações sem solução.

$a.x = 0, (a \neq 0)$ ou $0.x = b, (b \neq 0)$

Nessa categoria, foram agrupados os tipos de erros provenientes do não reconhecimento do zero como solução da equação ax = 0 e também erros relacionados às equações sem soluções do tipo 0.x = b

Nas entrevistas, pode-se verificar que para os alunos o zero traz certas dificuldades para relacioná-lo à solução de uma equação. Em geral a dificuldade aparece na divisão, ou do número zero por um outro número ou o contrário, um número dividido por zero.

Essas dificuldades dos alunos para trabalhar com o zero, foram relatadas nos trabalhos de Gallardo e Rojano (1988), através da identificação de áreas comuns de dificuldades na aprendizagem em álgebra. Dentre essas, há a relacionada com a natureza dos números, em que os tipos de erros ocorrem em situações como ax = 0, **$a \neq 0$,** em que o zero (0) é a solução e os alunos não aceitam, afirmando que o zero é ausência de valor, ou nas equações sem solução da forma 0.x = b, com $b \neq$ **0.** Outra situação difícil de os alunos aceitarem é a identidade 1.x = x

Na entrevista (3ª) com a aluna Be. do 1º A, esta dificuldade fica realçada.

E: Resolva essa equação: dois x é igual a zero.

Be: (escreve): 2x = 0

x = - 2

Be: Ah! Eu fiz errado.... é assim.. x = $\frac{0}{2}$

A aluna percebe o erro e corrige, mas não consegue dar um sentido para a divisão do zero por 2

B.: Só que aí, não existe x !!!

E: Não existe ?

B.: Ah! Sei lá ... dá zero.

Observa-se que a aluna não reconhece a divisão do número zero por 2, ou não existe, ou dá zero, o que para a aluna parece ser a mesma coisa.

Para a mesma equação (2x = 0), o aluno Pe. ao resolvê-la, escreveu $x = \frac{2}{0}$ e falou que *x* valia 2

Após o entrevistador chamar a atenção para a resolução apresentada, o aluno corrige e afirma:

Pe: Ah! é... está certo... (escreve) x = 0 / 2

E: Quanto dá zero dividido por dois ?

Pe: Dá nada !!!

Como essa resposta não traduz o entendimento da divisão de zero por 2, provoquei o aluno para que esclarecesse qual o significado do termo "nada"

E: É zero ? vazio ? ou não existe ?
Pe: Depende do que se está dividindo !!!
E: Muito bem !!! aqui x é igual a zero sobre dois.

Pe: x é igual a zero.

*E*mbora a resposta do aluno fosse intrigante, aceitei-a e remeti-lhe para outra equação, para certificar-me se ele estava seguro de sua resposta

Pe: (escreve) 2x – 3x = 0 .... (pensa)
Pe: Pode ser menos x igual a zero ?

E: Como que fica ?

Pe: (escreve) –x = 0 e acho que dá, se substituir, dá certo ...!!!

E: E qual é a solução ?

Pe: x igual a zero .

E: E como que se passa de menos x igual a zero para x igual a zero?

Pe: Você ...(pensa).... não sei também...

O fato de o aluno apresentar a solução –x = 0 e não conseguir explicar a conclusão de x ser igual a zero, mostra que ele tem dificuldade em operar e interpretar o zero na equação

Nesta entrevista, com o aluno Fe, a discussão girou em torno também da equação 2x = 0, cuja solução ele apresentou como x = -2:

Para provocar uma discussão a esse respeito foi proposta outra equação para ser resolvida.

E: Como você resolve a equação: dois mais x igual a zero ?
Fe: (escreve) 2 + x = 0 ... vou fazer a mesma coisa... x = -2

E: Qual a diferença dessa equação para a anterior ?

Fe: Aqui (a primeira) é multiplicação

Nesse momento da entrevista o entrevistador tenta explicar, a partir do vocabulário do aluno, a diferença entre as equações.

E: Então, quando eu tenho 2 vezes x igual a zero é um procedimento de resolução e quando a gente tem 2 mais x é outro procedimento. Na primeira quero descobrir que número vezes dois é igual a zero e na outra que número somado a dois que é igual a zero.

F: Certo, então aqui da (escreve) x = $\frac{0}{2}$

E: E quanto é zero divido por dois ?

F: é....(pensa)... dá um .... (pensa)... da zero (!!!)

Podemos observar que a dificuldade do aluno em efetuar a divisão de zero por 2, fica clara quando ele fala que é igual a 1, e parece que o zero não é aceito como solução.

Como o aluno mostrou dificuldades no tratamento com o zero, foi proposta outra equação, envolvendo o zero.

E: Resolver a equação: zero vezes x igual a 1.

Fe: (escreve) 0x=1....(pensa) x igual a 1 (escreve) x = 1

Como esta resposta poderia ser dada, ou ignorando a multiplicação por zero, ou efetuando a divisão, solicitei que explicasse o resultado.

F: como voce fez ?

F :Ah ... é (escreve) $x = \frac{1}{0}$

E: E quanto é ?

F: um (!!!)

Este valor apresentado evidencia a dificuldade que este aluno tem na divisão por zero, ou seja, o aluno não reconhece a indeterminação da divisão por zero.

Abaixo seguem outras resoluções apresentadas no instrumento investigativo.

Na equação (2x=0) o aluno do 1ºA não consegue explicitar o valor da divisão de zero por 2.

$2x = 0$

$x = \frac{0}{2}$ *não existe* !!!

Apesar de o aluno ter feito a transposição corretamente, ele não soube interpretar a solução, ou seja, ele não soube distinguir o zero dividido por 2 e a não definição de um número dividido por zero.

Resolução apresentada pelo aluno nº 20 do 1º B à equação: 0x = 1

$0.x = 1$

$x = \frac{1}{0}$

$x = 1$

Novamente observamos que o aluno não reconhece a indeterminação da divisão por zero

O aluno (n.º 11 do 1º C) para esta mesma equação, mostra que a divisão por zero é feita sem nenhum problema.

$0.x=1$

$x = \frac{1}{0}$

$x = 0$

Na mesma questão , o aluno 16 do 1º C , deu a seguinte solução

$0.x = 1$

$x = 1$

Estes resultados apresentados nos levam a crer que o aluno não reconhece o produto de zero por x , e não conhece a indeterminação da divisão de qualquer número pelo número zero.

O que se observou nas entrevistas e nas resoluções das equações do instrumento, referentes a esse erros, foi que o zero não é encarado como uma solução natural de uma equação.

As resoluções apresentadas nos remetem a pensar que o zero acaba sendo um complicador para os alunos, pois eles não têm o entendimento de uma equação, principalmente por resolvê-las através da aplicação do método da transposição, sem fazer inicialmente uma análise da presença do zero, e do significado da igualdade, que é a essência da equação.

Apesar das constatações sobre a problemática de operar com o número zero, neste trabalho não aprofundamos as reais dificuldades que o zero apresenta, pois para isso necessitaríamos de um longo estudo a seu respeito, o que fugiria do tema proposto.

5.1.6 – Validação do valor encontrado na resolução da equação.

Vamos observar, nas entrevistas que se seguem, que em geral os alunos não têm conhecimento de como verificar se um determinado valor está ou não correto. Muitas vezes, para verificar o resultado, eles refazem os cálculos, e em outras situações, eles explicam a validade através dos procedimentos adotados ou simplesmente afirmam que não sabem como verificar.

Na seqüência da entrevista com a aluna Be esta situação fica bem clara.

E: Como a gente resolve essa equação: dois x mais três igual a zero:

Be: (escreve) $2x + 3 = 0$

$x = 3 - 2$

$x = 1$

E: Deu um ? como você sabe que está certo ?

B: Ah! não sei... vou fazer de novo.

Nesta resposta, ela não tem clareza do significado do valor encontrado, ou seja, da validação do resultado. Ao invés de substituir o valor na equação, ela tenta fazer novamente a resolução.

Esta maneira de verificar o resultado, através de nova resolução da equação, foi descrita por Kieran (1992), conforme Greeno (1982), em que os alunos não sabem como mostrar que um resultado está incorreto, exceto se resolverem de novo a equação dada.

Para o autor, parece que os alunos não têm consciência de que um valor incorreto para a incógnita, quando substituído na equação original, produzirá valores diferentes para os lados esquerdo e direito da equação. Além disso, eles não percebem que só a solução originará valores iguais para as duas expressões em qualquer equação equivalente.

Na entrevista com a aluna Fl, fica claro que ela não sabe justificar se o resultado está correto, e nem o significado desse valor encontrado.

E: Resolva esta equação: x + 3 = 2x + 4

Fl: (escreve) : -2x + x = -3 + 4

-x = 1

x= -1

E: Como você faz para saber se esse resultado está correto ?

Fl: Ah! Não sei.

E: O que significa encontrar o valor de x ?

Fl: Ah! Não sei. Acho que é para saber quanto ele vale .

Apesar de a aluna ter resolvido a equação corretamente, ela não sabia justificar se o valor encontrado para a incógnita “x” estava correto e nem o seu significado. Nesses casos a igualdade não tem nenhum significado na equação.

A aluna Mr do 1º C. justifica a validação do resultado através da explicação do procedimento adotado para sua resolução.

E: Escreva essa equação : menos quatro x igual a oito .

Mr: (escreve) – 4x = 8

x = 8 / 4

x = 2

E: Como que você sabe que está certo ?

Mr: É... (pensa)... porque... aqui está multiplicando e passa dividindo e está menos passa mais.

Há um aspecto importante relacionado com a validação do valor encontrado, ou seja, só saber que a verificação ocorre na substituição do resultado na equação não significa necessariamente que o aluno consiga afirmar que o valor está correto. Fica dependendo de o aluno acertar os cálculos da verificação.

Vamos apresentar duas entrevista relacionadas a esse aspecto.

Na primeira, a aluna Mr , resolveu corretamente a equação dada, mas no momento de verificar, ela errou nos cálculos.

E: Resolva a equação ... menos 4 mais x é igual a 2
M: (escreve) - 4 + x = 2

4+ 2 = x

x = 6

E: Como a gente faz para saber se está correto ?

M: Menos 4 mais seis da menos 10 que é igual a 2 (!!!)

E: Como .. não entendi...como você fez a operação (-4 + 6) ?

M: Menos 2... (pensa). Mais 2

Na outra situação o aluno verificou um resultado que não se confirmou, e afirmou que o erro estava nos cálculos da validação.

Segue a continuação da entrevista com o aluno Fe.

E: Uma outra equação: 5 + 2x –3 = 4x

Fe: (escreve) 2x – 4x = -5 + 3

2x = -2

$$x = \frac{-2}{2} = 1$$

E: Como você fez para chegar nesse resultado ?

Fe: Menos 2 dividido por 2.... (pensa)...

E: Quanto dá essa divisão ?

Fe: (pensa)..... um...

E: Como é a regra dos sinais ?

Fe: Positivo com negativo... negativo com positivo... (pensa)...menos com mais da .... menos . (escreve – 1)

E: Será que está certo ?

Fe: (escreve) 5 +2.-1 –3 = 4 –1

5 + (-2) –3 = -4

0 = -4

Fe: Está errado...

E: Onde você acha que está o erro....?

Fe: (pensa)... está aqui (aponta para a verificação) ... e refaz..

5 –2 –3 = -4

0 = -4

5.2 – Aspectos relacionados às técnicas de resoluções de equações.

5.2.1 – Métodos de resolução de equações.

Descrevemos, no capítulo 1, os vários métodos de resolução de uma equação. Neste item nos restringiremos aos dois métodos utilizados pelos alunos na resolução da equação. quais sejam. o da transposição de termos e o de efetuar a mesma operação em ambos os termos da equação.

Ilustraremos inicialmente o método de efetuar a mesma operação, descrito acima. Um dado interessante a salientar é o de que de todas as resoluções apresentadas no instrumento investigativo, Y foi o único aluno que utilizou este método nas suas resoluções. A seguir temos a entrevista.:

E: Escreva uma equação do 1º grau

Y: (escreve) x + 2 = 3

E: Como você resolve ?

Y: (escreve) x = 1

E: Como você pensou ?

Y: Tem um igual, então tem que fazer a mesma operação dos dois lados, tirei dois daqui (1º membro) e dois daqui (2º membro).

E: Ok. vamos resolver outra.

Podemos observar, nas "falas" do aluno, primeiro que ele percebe o sinal de igual como um fator que explicita o equilíbrio primeiro membro e segundo membro de uma equação, e segundo que o cálculo mental para se chegar ao resultado é justificado pelo método de efetuar a mesma operação em ambos os lados da igualdade.

Para me certificar se o procedimento de resolução adotado por Y era o mesmo para outras equações, propus uma segunda equação

E: Escreva “menos 4 x é igual a oito“

Y: (escreve) - 4x = 8

$$\frac{-4x}{4} = \frac{8}{4}$$

$- \quad x = 2$

$- \quad x = -2$

E: Como você pensou ?

Y: Dividi os dois termos por 4 e multipliquei o resultado por – 1

E: Tem necessidade de multiplicar por –1 ?

Y: Ah! não... é só dividir por menos 4

E: Ok. Vamos para a próxima.

O método utilizado pelo aluno de efetuar nos dois membros de uma equação uma mesma operação, utilizando a propriedade do oposto aditivo e do inverso multiplicativo para obter equações equivalentes, explicita o equilíbrio entre os termos.

Para analisar como o aluno se comportava diante de uma equação com o zero no segundo membro, apresentei uma terceira equação:

E: Resolva a equação: dois x é igual a zero

Y: (escreve) 2x = 0

E: Quanto dá ?

Y: Dá zero .

E: Por quê ?

Y: Zero divido por dois , dá zero !

E: Ok.

Nesta última equação, percebemos que aluno efetuou mentalmente a divisão de 0 por 2, e neste caso não utilizou a mesma operação em ambos os termos, o que evidencia que este aluno atingiu elevado grau de compreensão a respeito da resolução das equação do 1º grau, pois mostrou que não usa somente um determinado método de resolução.

Os demais alunos utilizaram o método da transposição.

Como observa Kieran (1994):

"Embora a transposição seja freqüentemente considerada como uma versão abreviada do procedimento de efetuar a mesma operação nos dois membros, esses dois procedimentos podem ser vistos de maneira muito diferente pelos alunos. O método de efetuar aos dois membros de uma equação uma operação que é a inversa de uma das operações dadas explicita o equilíbrio primeiro e segundo membros da equação. Além disso, a justificativa para se efetuar a mesma operação nos dois membros é precisamente manter a equação em equilíbrio e a solução inalterada ao longo de todo o processo de resolução.

Ademais, esse procedimento envolve também a simplificação do primeiro e do segundo membros da equação, e não apenas de um dos membros, o que ocorre quando se transpõem termos para outro membro. Essa ênfase no equilíbrio primeiro membro – segundo membro está ausente no procedimento de transposição".(p.108,109)

A entrevista do aluno Fe exemplifica a utilização do método da transposição:

E: Escreva uma equação do 1º grau.

Fe: Qualquer uma ?

E: É,... qualquer uma

Fe: (escreve) 2x = 4

E: Como você resolve essa equação ?

Fe: Separa o x .... igual a 4 e passa o 2 para ca (escreve)

$$x= \frac{4}{2} = 2$$

E: E como passa esse 2 ?

Fe: Ele está multiplicando e passa para cá dividindo.

Embora o aluno saiba que ***ax*** significa ***a*** multiplicado por ***x***, e que para encontrar o valor de x ele deve efetuar uma divisão, sua fala não deixa de expressar um forte componente automático, quando utiliza as expressões: "*Separa o x (...),.. passa o 2 para cá, (...), está multiplicando e passa para cá dividindo"*

Este automatismo fica mais evidente quando os alunos utilizam, para explicar o método da transposição de termos, a frase "**Passa e Muda o Sinal",** independente do tipo de equação, sem clareza quanto às operações e propriedades que legitimam essa passagem.

Vamos analisar a entrevista da aluna Fl a esse respeito retomando a entrevista em que a aluna está resolvendo a equação: $4x + 2 = x - 3$, chegando à equivalente: $3x = -5$

Fl: (escreve) $x = \frac{3}{-5}$

E: Vamos voltar e analisar a resolução, explique como você pensou a resolução.

Fl: Coloquei termos semelhantes juntos e passei o x para esse lado do igual e o 2 para o outro.

E: Como você fez a passagem ?

Fl: Você passa e muda o sinal.

Para obter maiores indicações sobre o entendimento que a aluna tem da frase "passa e muda o sinal", para a determinação da incógnita em $ax = b$, propus em continuação da entrevista a equação: $2x=0$, mesmo considerando que esta equação tem um agravante a mais, o número zero no 2º membro.

E: Resolva esta equação: $2x = 0$

Fl: (escreve) $x = 0 – 2$

E: Explique como você pensou .

Fl: Você passa o 2 para o outro lado e muda o sinal.

A aluna altera a regra anterior, ao transpor o 2 para o segundo membro. Esse comportamento pode ter sido em função da presença do zero (já discutido em um item específico)

Ainda tentando entender melhor o sentido da frase para a aluna, e para checar qual o sinal a que a aluna está se referindo, apresentei duas equações com os mesmos coeficientes, diferenciadas apenas pela operação realizada no primeiro membro: uma de adição e outra de multiplicação

Nas duas, a aluna resolve da mesma maneira sem saber justificar o que essas diferenças implicavam nas resoluções.

E: Resolva estas duas equações: $2 + x = 8$ e $2x = 8$

F: (escreve para a 1ª equação) : $x = 8 – 2 = 6$

F: (escreve para a 2ª equação) : $x = 8 –2 = 6$

E: Quer dizer que as duas equações são iguais ?

F: Não, essa 1ª é de soma e a 2ª é de vezes.

E: Mas você resolveu as duas da mesma forma .

F: Ah! está errado, mas eu não sei.

Apesar de a aluna reconhecer as diferenças entre as equações, ela não tem clareza do que significa passar um número para o outro lado da igualdade, e não percebe que o sinal a que se refere está ligado a uma determinada operação e não ao sinal algébrico do número

Na entrevista com a aluna Mo, percebe-se que ela conhece a regra da transposição de termos

E: Como é feita a passagem dos números para o outro lado da igualdade?

Qual é a regra que determina essa passagem ?

Mo: Se é positivo, quando ele passa para o outro lado fica negativo. Se ele está multiplicando, quando ele vai para o outro lado, vai dividindo

Apesar do entrevistador ter dado ênfase à regra, quando da pergunta *"qual é a regra que determina essa passagem"* a idéia foi tentar perceber como a aluna entendia e aplicava esta regra, que é simplesmente uma frase que, geralmente, os alunos não interpretam corretamente. Além disso, esperava que ela pudesse dar uma outra resposta como por exemplo que a regra era estabelecida pelas operações inversas e não pelos sinais dos números (positivos ou negativos), ou ainda ela podia relacionar a regra à obtenção de equações equivalentes.

Para verificar como a aluna aplica essa técnica da "passagem" de um membro para outro, coloquei a seguinte equação para ser resolvida.

E: Escreva essa equação: menos quatro x é igual a oito.

Mo. (escreve) : $- 4x = 8$ esta é fácil !!!

E: Facílima !

Mo. (escreve) : $x = \frac{8}{4}$

$x = 2$

Como podemos perceber, a aluna tinha dito a frase que explicava a regra mas no momento de efetuar a resolução, ela aplicou simultaneamente as duas regras, inverteu o sinal do número e da operação.

E: Deu dois ?

Mo: É, aí vai dar certo.

E: Como você sabe ?

Mo: Não deu, (substituiu) deu menos oito.

E: Então vamos analisar a resolução. A passagem do 4 do primeiro membro para o segundo, você mudou o sinal. Toda vez que mudar um número de lado, muda o sinal ?

Mo: Ah! Eu fiz.... , calma aí .... eu... neguei o que eu tinha feito aqui antes, que eu não mudei o sinal .

(mostra a resolução anterior – 4 = 2x segue $\frac{-4}{2} = x$*)*

Mo: Teria que ser negativo aqui ? é isso ?

E: Então, queria saber como você pensa sobre o procedimento dessa resolução

Mo: é... eu vou passando... e de vez em quando eu erro o sinal. ...

Essa “fala” *“eu vou passando”* denota uma seqüência mecânica de ações sem entendimento do que elas representam *(“de vez em quando eu erro o sinal”).*

Na continuação da entrevista, ocorre uma situação não prevista, a participação de uma outra aluna, a ***Ma*** da mesma sala, o que foi interessante pois aconteceu uma discussão entre elas a respeito do procedimento de passar uma número de um membro para outro da igualdade.

E: Fala Ma, como um número passa para o outro lado ?

Ma: Ah! não é assim,... tem um número e passa para o outro lado .... tem uma operação aí envolvida....

M: Mas ele passa para o lado de lá, qual é o problema, é o verbo?

A intervenção da aluna Ma. reflete que ela relaciona as passagens dos números a uma operação. E é exatamente a falta dessa relação que observamos em várias entrevistas. A passagem dos números é feita através de um ato mecânico que não reflete nem a idéia de equivalência entre os termos, no fato de realizar a mesma operação, nem o uso da operação inversa. Todo o método da transposição fica relacionado à simples regra de passar e mudar o sinal do número que está sendo transposto.

A pergunta da aluna em relação ao verbo passar é muito interessante, pois na resolução o número aparece do outro lado da igualdade, o que faz crer que ele adquire movimento, mas o problema não está no verbo e sim no ato mecânico da passagem.

Segundo Kieran (1988, 1989), há evidências que sugerem que muitos alunos que usam a transposição não estão trabalhando com as equações como objetos matemáticos, mas aplicando cegamente a regra Muda de Lado- Muda de Sinal.

Na entrevista abaixo, podemos observar que a aluna justifica o procedimento de resolução através da regra de mudança de lado, o que confirma as evidências levantadas por Kieran.

E: Resolva a equação : menos quatro x é igual a oito .

Be: (escreve) $-4x = 8$

$$x = \frac{8}{4} = \frac{4}{2} = 2$$

$x= 2$

A aluna testa o valor encontrado, e verifica que está errado; solicito a explicação do método.

Be: É ... o menos quatro está multiplicando passei dividindo

E: Mas aqui (mostro a equação) você tem menos 4 e aqui você escreveu quatro positivo, por que mudou o sinal ?

Be: Porque... mudou de lado

E: Mas a mudança do sinal do número ocorre sempre que ele mudar de lado? ‘

Be: Ah!... não sei... foi assim que aprendi...

Podemos observar, na “fala” da aluna que o sinal a que ela se refere, está ligado ao sinal do número, isto é, se ele é positivo ou negativo, e não à operação envolvida.

A última frase *“foi assim que aprendi”,* não revela exatamente como foi a aprendizagem da aluna, mas indica uma posição passiva, sem questionamento da validade das regras e transfere para o professor toda a responsabilidade da aprendizagem.

Na entrevista com o aluno Fe, a discussão gira em torno da regra da passagem de um número para o outro lado da igualdade, e novamente nos deparamos com a frase da mudança de lado com a alteração do sinal.

E: Resolva a equação: dois x igual a zero .

Fe: (escreve) 2x = 0...(pensa)... bom...fica x igual a 2

(escreve) x = 2

E: Como é que você fez ?

Fe: Bom...o x fica aqui (mostra o 1º membro) e o 2 passa para lá....ah!... mas fica menos (escreve x = -2)... agora não sei ... bom eu sei que tem que passar o número para cá !!!

A fala do aluno, *“eu sei que tem que passar o número para cá“,* reflete uma ação ligada ao método da transposição, porém sem vínculo com a equação dada, ou seja, ele não entende como e porquê ocorre a passagem do número do 1º para o 2º membro da equação.

Da mesma maneira que a aluna Be. da entrevista anterior, o aluno Fe. também relaciona a mudança do sinal a uma regra ligada ao número que é transposto. Podemos observar esta questão na fala final da entrevista.

E: Supondo que esteja certo.... por que você mudou o sinal ?

Fe: Por que a regra é essa.... é uma regra, né ?

Você passa o número para cá e inverte o sinal.

5.2.2 - Alteração do sinal do coeficiente na divisão do termo independente.

a.x = b $\Longrightarrow$ **x =** $\frac{b}{-a}$

Este item poderia estar contido no anterior, mas como o número de erros relacionados a ele foi muito grande, da ordem de 36% (cap.4, tab 3), consideramos analisá-lo separadamente. Além desse fator, a análise restrita desse procedimento subsidia a discussão sobre a comparação dos procedimentos adotados nas equações algébricas e aritméticas .

A alteração do sinal do coeficiente na transposição pela divisão, pode ser resultado de uma interpretação mal feita do significado de transpor um termo de um membro para outro.

Na resolução da equação do 1º grau da forma a + x = b , um método de resolução é o da transposição do termo independente ***a***, com a mudança do sinal da operação, ou seja, a solução e x = b – a.

Os alunos observam que, ao transpor o termo independente ***a**,* ocorre alteração do seu sinal, isto é, ele passa de positivo para negativo, ou vice-versa. Ao resolver a equação ax = b, eles transpõem o coeficiente ***a*** corretamente pela divisão, mas como o coeficiente passou do 1º para o 2º membro, ou seja, houve uma mudança do lado esquerdo para o direito da igualdade, os alunos, apoiados na observação da resolução anterior, procedem da mesma maneira, alterando o sinal do coeficiente.

Vamos analisar algumas resoluções dos alunos, juntamente com as entrevistas, para podermos entender melhor esse procedimento de alterar o sinal do coeficiente

Vamos analisar a entrevista da aluna Mr (1º C) para a resolução da equação:

E: Resolva essa equação : menos quatro x igual a oito .

Mr: (escreve) $-4x = 8$

$$x = \frac{8}{4}$$

$$x = 2$$

E: como você sabe que está certo ?

Mr: É... (pensa)... porque... aqui está multiplicando e passa dividindo e está menos passa mais.

Podemos perceber que ela justifica o método de resolução através da transposição pela operação inversa *(“está multiplicando e passa dividindo”)*, e a alteração do sinal do coeficiente -2 é justificada pelo fato do –2 ter “passado” do 1º para o 2º membro da equação.

Essa explicação (“está menos passa mais”), utilizada pela aluna, pode estar associada ao não entendimento da resolução da equação $a + x = b$, que pode ser interpretada, simplesmente, como “passa o ***a*** para o outro lado e muda seu sinal” ,assim a solução dessa equação aparece como x= b – a

Esta forma de pensar pode estar relacionada a uma não identificação do significado de transpor um termo, o que leva a um ato mecânico de transpor os termos e alterar, sem nenhuma propriedade, seu sinal.

Na seqüência da entrevista da página 98, com a aluna Be, para a resolução da mesma equação (- 4x = 8), aparece novamente a justificativa da alteração do sinal do coeficiente pelo fato de transpor o número.

E: Resolva a equação: menos quatro x é igual a oito .

B: (escreve) $-4x = 8$

$$x = \frac{8}{4} = \frac{4}{2} = 2$$

$$x = 2$$

Ao ser solicitada para verificar se a solução estava correta, a aluna concluiu que x = 2 não é solução da equação e justificou sua resolução da seguinte maneira:

Be: É ... o menos quatro está multiplicando passei dividindo .

E: Mas aqui (mostro a equação) você tem menos 4 e aqui você escreveu quatro positivo, por que mudou o sinal ?

Be: Porque... mudou de lado

Percebe-se claramente que o aluno associa a transposição à mudança do sinal do coeficiente, numa referencia à regra “muda-se , muda-se o sinal“

Ao resolver a equação –8 – 7x = 5 – 4x, do instrumento investigativo, a aluna R, escreveu:

$- 8 - 7x = 5 - 4x$

$-7x + 4x = + 8 + 5$

$-3x = 13$

$x= \frac{13}{3}$

Nessa resolução, a aluna aplicou o método da transposição dos termos (-4x) e (- 8) corretamente, porém, no momento em que transpõe o número (-3), ela o faz alterando o sinal, seguindo o mesmo raciocínio efetuado em relação aos termos (-4x) e (- 8).

A alteração do sinal do coeficiente, na transposição de um membro para outro, ocorre com mais freqüência quando o coeficiente de x é negativo, mas há situações em que o aluno inverte o sinal do coeficiente positivo, como na resolução apresentada pelo aluno nº 20 do 1º B na equação: 3x + 5x = - 4.

$8x = - 4$

$$x = \frac{-4}{-8}$$

Outra resolução com a alteração do coeficiente positivo para negativo é vista no procedimento da aluna n.º 27 do 1º B, para a equação: 1 = 5 + 2x

$$1 = 5 + 2x$$
$$1 - 5 = 2x$$
$$-4 = 2x$$
$$\frac{-4}{-2} = x$$
$$2 = x$$

Esta resolução traz algumas situações interessantes de análise: primeiro a aluna efetua a transposição do número 5 para a esquerda, alterando o sinal e deixando a incógnita do lado direito (o que não é comum), depois o fato de escrever a incógnita à direita da igualdade até a solução final, reflete que ela tem um entendimento do sinal de igualdade como equivalência dos termos. Porém, mostra que ela utiliza o mesmo procedimento da transposição do 5 para o coeficiente 2, alterando seu sinal.

Na resolução da equação: - 20 = 4x, o aluno nª 6 do 1º C, escreve:

$$20 = -4x$$
$$4x = -20$$
$$x = \frac{-20}{-4}$$
$$x = \frac{5}{1}$$
$$x = 5$$

Nessa resolução, o fato de o aluno ter feito primeiro a inversão dos termos, ou seja, o termo em x à esquerda e o resultado à direita alterando os sinais, evidencia o hábito de escrever a incógnita à esquerda do igual, e ao transpor o 4 alterando seu sinal, mostra novamente o uso indevido da regra na transposição do termos.

Vamos acompanhar a resolução do aluno n.º 6 do 1º C para a equação:

$$2x - 3x = 3$$

-1x = 3

$$x = \frac{3}{1}$$

x = 3

Nessa resolução, dois fatos são relevantes: primeiro, o aluno não reconhece –1x como –x, depois a transposição do – 1 com a inversão do sinal mostra a aplicação mecânica do método da transposição com a alteração do sinal

Vejamos a resolução de uma equação algébrica, contendo vários termos em x e termos independentes., resolvida através da transposição dos termos.

3 + x + 5 = x – 2x – 2

x – x + 2x = - 2 – 3 – 5

2x = -10

$$x = \frac{-10}{-2}$$

Podemos perceber, nessa resolução que o aluno não apresenta nenhum problema para transpor os termos, tanto os independentes como em x, mas utiliza o mesmo procedimento para transpor o coeficiente 2 de x. .

Esta maneira de resolver a equação sugere que o aluno executa as operações de forma mecânica.

Esses atos mecânicos podem ser observados na resolução e na entrevista com o aluno Fe. do 1º B, ao resolver a equação: 6 – 4x = 3x

Fe: (escreve)   *6 – 4x = 3x*

-4x –3x = - 6

-7x = -6

$$x = \frac{-6}{7}$$

E: Muito bem... como você fez ?

Fe: Passei o 3x para ca e o seis para lá mudando o sinal, deu –7x igual a –6 e passei o sete dividindo.

A fala do aluno reflete bem como ele realiza a resolução: “passa” os termos e altera o sinal, numa seqüência de procedimentos automáticos, que culmina com a transposição do coeficiente, alterando também seu sinal. O sinal a que ele se refere está associado ao fato do número ser positivo ou negativo, como o –7 é negativo, então na transposição pela divisão ele teria que ser positivo.

5.2.3.-.Não efetuar a alteração do sinal na transposição dos termos.

Na análise quantitativa (cap. 4 na tabela 04) o número de erros na transposição dos termos de uma equação para determinar a equação equivalente ax =b, foi computado em duas diferentes categorias: termos independentes e termos em x.

Os estudos teóricos anteriormente apresentados têm apontado para a existência de dificuldades na passagem da resolução das equações aritméticas para as algébricas. Relembramos que estas se caracterizam pela existência de mais de uma ocorrência da incógnita na expressão simbólica da equação, ou seja, da forma: ax + b = cx + d

Entretanto, a análise da tabela revela casos em que a diferença entre o número de erros nestas duas categorias é pouco significativa. Assim, nas equações: (-8 – 7x = 5 – 4x e 3 + x + 5 = x – 2x – 2)

A incidência de erros na transposição de termos parece depender de outros fatores que não o acima mencionado. Não aprofundamos esta análise, pois isto exigiria um estudo específico abrangendo cada uma das equações propostas, tendo em vista sua especificidade quanto aos sinais dos termos independentes e em x, sua posição no primeiro membro ou segundo, e outros fatores.

Entretanto para compreender as dificuldades que conduziram aos erros de transposição, quer dos termos em x, quer de termos independentes de x realizamos as análises do instrumento e as entrevistas com a finalidade de captar se as justificativas apresentadas pelos alunos revelam dificuldades de naturezas diferentes em cada um destes casos. Como decorrência, apresentamos a análise em dois casos:

Caso 1 – Não efetuar a alteração do sinal na transposição dos termos independentes.

$$ax + b = c \Longrightarrow ax = b + c$$

Nesta categoria, foram agrupados os erros provenientes da passagem de termos independentes, para o primeiro ou segundo membro da equação sem efetuar a mudança do sinal.

Esse tipo de erro reflete um dado interessante de análise, pois ao efetuar a passagem de um termo sem alterar seu sinal, o aluno vai contra a fala corrente "muda de lado e muda o sinal". Neste caso o aluno, fala a frase mas não efetua a mudança do sinal.

Essa situação pode ser observada na entrevista com o aluno Fe. (1º B):

E: Resolva: Quatro menos x mais dois, igual a x

Fe: (escreve) 4 - x + 2 = x

-x + x = -4 +2

x = -2

é isso ? tá certo ?

Podemos perceber que o aluno se atrapalha nas transposições, o termo em x do segundo membro "vem" para o primeiro sem alterar o sinal, da mesma forma que o 2 "vai" para o segundo membro também sem alterar seu sinal. Esta mudança de membros aleatória nos indica que ele não tem critérios nas transposições. Ao ser indagado sobre os procedimentos, ele percebe os erros.

E: Você consegue analisar as passagens?

Fe: Aqui o x é negativo... continuou... ah! aqui muda o sinal (escreve – x) ih! aqui também... (escreve – 2)

E: Como que ficou ?

Fe: Escreve .... –2x = -6

$$x = \frac{-6}{-2} = -3$$

E: Quando você divide números de sinais iguais, qual o resultado ?

Fe: Ah! é..... menos com menos dá mais.

Após a intervenção, sugerindo analisar as passagens, o aluno consegue resolver a equação. Mas, além do erro referente aos sinais dos termos transpostos, o aluno simplesmente ignora a operação do 1º membro que seria –x + x = -2, o que resultaria em zero igual a -2

Nas resoluções das equações do instrumento, esses erros aconteceram com muita freqüência.

Resolução apresentada pelo aluno nº11 do 1º A à equação:

5 + 2x – 3 = 4x

5 + 2x – 3 = 4x

2x – 4x = - 3 – 5

- 2x = - 8

2x = 8

x = 4

Nesta resolução percebe-se que o aluno muda o sinal de 4x e o sinal do 5 mas não muda o sinal do –3 ao passar para o 2º membro. Isto pode caracterizar que o aluno efetua uma troca aleatória de sinais. Num momento ele faz a mudança e em outro não.

Uma outra resolução que exemplifica esse erro é a apresentada pelo aluno n.º 14 do 1ª A à equação: 3 + 4x = 2x

3 + 4x = 2x

$3 + 2x = 0$

$2x = 3$

$x = \frac{3}{2}$

Neste caso, o aluno efetua a troca do (2x) mas não muda o sinal do 3 na passagem para o 2º membro. Isso reflete que a passagem de termos com a alteração do sinal é um modelo não muito claro para os alunos. Há situações em que eles a executam e há outras que não.

Podemos ver, na resolução dada pela aluna 36 do 1º A, à equação –3x + 5 = 2x – 5, que ela não tem nenhum problema em relação ao sinal de igualdade, no sentido de trabalhar com a incógnita no 2º membro:

$- 3x + 5 = 2x – 5$

$5 – 5 = 2x + 3x$

$0 = 5x$

$0 = x$

Por outro lado, percebe-se que esta aluna não entende todo o processo da transposição de termos, pois em determinado momento ele não o executa da mesma forma.

Caso -.2 - Não efetuar a alteração do sinal na transposição dos termos em x

ax = bx + c $\Rightarrow ax + bx = c$

A essa situação vamos observar as resoluções de algumas equações, realizadas no instrumento investigativo.

Nesta resolução, o aluno do 1ºC efetua a troca do sinal do termo independente mas não o faz com o coeficiente de x na equação. – 5x – 2 = x

- 5x – 2 = x

- 5x + x = 2

- 4x = 2 $\Rightarrow$ $x = \frac{2}{-4} = \frac{-1}{2}$

Novamente percebemos que os alunos, apesar de saberem a frase referente ao método da transposição, não a aplicam de modo correto e coerente, isto é, em determinadas situações o método é aplicado, mas em outras ele é ignorado.

Para a equação 4 – x + 2 = x ,três alunos apresentaram procedimentos diferentes nas resoluções, mas todos com o mesmo tipo de erro: transporem o termo em x, sem alterar o sinal da operação.

Vejamos as resoluções:

Resolução do aluno nº 32 do 1ºB

4 – x + 2 = x

4 + 2 = x – x

6 = 0x

É interessante notar que para esse aluno, trabalhar com a variável x à direita da igualdade também não representou nenhum problema, porém ao transpor a variável x para o 2º membro ele não alterou o sinal, e não explicitou o valor de x, talvez pela presença do zero na equação final (item já discutido)

Resolução do aluno nº 13.

4 – x + 2 = x

-x + x = - 4 - 2

0x = - 6

Nessa resolução, diferentemente da anterior, com a variável à esquerda da igualdade, ele transpõe corretamente os termos independentes, mas ao transpor a variável não efetua a alteração do sinal da operação, e também como no caso anterior, não apresenta a solução para a equação.

Resolução do aluno nº 17 do 1º A

$$4 - x + 2 = x$$

$$4+2 = x - x$$

$$6 = 0$$

Nessa resolução, o aluno não apresenta resistência ao operar com a variável à direita da igualdade, mas ao transpor a variável x do 1º para o 2º membro, ele não altera o sinal da operação, e além disso, ao escrever que seis é igual a zero, este aluno deixa claro que não interpreta o significado do sinal de igual (já discutido no item 5.1).

Na resolução da equação do instrumento, $3 + 4x = 2x$, ocorre uma junção dos dois casos. O aluno transpõe a variável e o termo independente. sem alterar os sinais.

$$3 + 4x = 2x$$

$$3 + 4x + 2x = 0$$

$$6x = 3$$

$$x = \frac{3}{6}$$

As resoluções apresentadas trazem dados interessantes. O fato da variável x ter coeficiente positivo ou negativo não foi um fator determinante no erro. Outro dado refere-se a que os alunos erram a transposição tanto dos termos independentes como em x, o que indica que a dificuldade não está no tipo de termos transpostos. Além disso, os itens anteriores mostraram que os alunos não têm critério para a transposição; ora transpõem e alteram indevidamente o sinal, e não o fazem em outras situações em que deveriam alterar o sinal.

Portanto, pelos resultados apresentados nos itens 5.1 e 5.2 respectivamente aos erros conceituais e às técnicas de resoluções, podemos concluir que os erros cometidos estão relacionados tanto às equações aritméticas, como às algébricas. Além disso, como já dissemos no inicio desse capítulo, os erros não estão ligados a um aspecto conceitual ou das técnicas, mas sim como conseqüência da inter-relação desses dois aspectos.

No capítulo a seguir, discutiremos essas conseqüências.

CAP. 6 – Considerações Finais

Neste trabalho procuramos revelar qual a compreensão que alunos do ensino médio têm sobre o processo de resolução de uma equação de primeiro grau, que métodos de resolução utilizam, como utilizam esses métodos e os erros cometidos. Apresenta conclusões sobre as quais considero importante apresentar uma síntese aprofundando as reflexões anteriormente feitas.

Em primeiro lugar, lembramos que as equações propostas são todas do primeiro grau, com coeficientes inteiros, ou seja, são equações simples, possíveis de serem resolvidas pelos métodos informais (apresentado**s** no cap. 1). Abrange um grande número de equações (24 equações, sendo 8 aritméticas e 16 algébricas), especificadas no cap. 3.

Obtivemos um grande número de erros, na ordem de 68% nas equações aritméticas (cap.3, tab.3) e 52% nas equações algébricas (cap.3, tab.1).Esses dados são relevantes, considerando a formação matemática do aluno, esperada no ensino médio.

Um estudo sobre os erros dos alunos na manipulação de expressões algébricas e, no caso deste estudo, na manipulação envolvida na resolução de equações, é geralmente seguido por proposições e recomendações visando a prevenção ou a correção desses erros

A esse respeito faremos inicialmente algumas considerações baseadas naquelas desenvolvidas por Lemoyne, Conne e Brun (1993 p.341-343) sobre os erros devidos às técnicas de extrapolação.

Seria melhor evidenciar de modo mais eficiente essas técnicas por uma apresentação de exercícios ou de situações perspicazes e intencionais ? Não seria igualmente conveniente repensar o ensino da álgebra encontrando situações que permitam ao aluno operar as mudanças conceituais necessárias?

Como observa Brun, Conne e Retchitki (1988) "*o tratamento didático dos erros evitando (...) os aspectos conceituais subjacentes não faz senão recentrar o aluno no funcionamento de seu cálculo*" (apud. Lemoyne e outros, p.342)

Se concordarmos com os autores que as perspectivas didáticas devem enfatizar as relações entre os conhecimentos, mais do que os conhecimentos em si mesmo, então podemos duvidar de um ensino que vise pontualmente aspectos relativos a cada um dos erros isoladamente. Há a necessidade de considerar os erros devidos a utilização de falsas regras conjuntamente com os aspectos conceituais.

Remetendo-nos ao capítulo 2, item 2.1.4, lembremo-nos com Kaput (1996,p.91) que se falamos de formalismos algébricos, "nos fixamos nos símbolos ou regras sintáticas para manipulá-los. No entanto, é possível atuar semanticamente sobre os formalismos: as ações se orientam pelo significado que se atribui aos símbolos."

Estas considerações apela pela necessidade de refletir sobre as diferentes dimensões da compreensão.

Inspirando–se em Brousseau (1987,*p.49*), *Franchi A. (1995,p.24-25)* distingue três componentes da compreensão.

> *"O primeiro se exprime em termos de necessidades sintáticas (......) seu léxico e regras de construção das expressões; o segundo se exprime em termos de necessidade semântica, ou seja da atribuição de significados a elementos, relações, procedimentos de uma situação, ou pela própria construção do conhecimento do sistema conceitual da matemática e de seu domínio de validade (....)*[1]*. Deve-se ainda considerar um terceiro componente ou seja o aspecto pragmático,(...) isto é, a aprendizagem se dá em classe sob a forma de atividades discursivas, intrinsecamente relacionadas ao processo de produção desses conhecimentos".*

No caso do ensino da álgebra essa dimensão pragmática remete às atividades

[1] Brousseau distingue "ao menos dois componentes da compreensão: necessidades lógicas ou matemáticas ou de modo mais geral sintáticas e outra que se expressa em termos semanticos.p.49

discursivas e práticas ligadas às produção de expressões numéricas e literais relacionadas a uma equação.

Nas perspectivas acima descrita faremos uma síntese da análise apresentada no capítulo anterior assinalando pontos importantes, para pensarmos o ensino da álgebra e em particular o ensino das equações do 1º grau, no nível Fundamental e Médio.

Primeiro: A respeito das equações aritméticas em relação às equações algébricas.

Foram apontadas dificuldades relativas às resoluções das equações algébricas, relacionadas às técnicas de transposições dos termos em x e dos termos independentes Em geral, os erros cometidos pelos alunos estão associados à transposição desses termos, sem a alteração do sinal, e o número de erros em transpor os termos em x foi praticamente igual aos cometidos na transposição dos termos independentes, o que evidencia que não há grandes diferenças entre essas transposições. Isto contradiz a hipótese inicial que atribui as dificuldades dos alunos na resolução de equações, à passagem da aritmética para a álgebra, ou seja, no período de transição das equações aritméticas para as algébricas.

É inquietante constatar que a ordem dada pela frase “muda-se de lado – muda-se o sinal“, citada constantemente como justificativa para a transposição dos termos de um para outro membro, não é exercida de modo eficiente. Haja vista a alta porcentagem de erros de transposição, conforme apresentado no capítulo 4 , tabela 1.

No entanto, para um grande número de alunos, não existe essa dificuldade, ou seja, eles já absorveram a técnica de transpor e mudar o sinal, efetuando essas ações mecanicamente, conforme podemos observar nas entrevistas.

Nas resoluções das equações aritméticas $ax = b$, quer das que foram propostas no instrumento, quer das obtidas pelas transformações das equações da forma $ax + b = cx + d$, constatamos um número de erros maior que os realizados nas equações algébricas (Cap.4, tabelas 1, 2, e 3). Além disso, esses erros são de diferentes naturezas, como veremos a seguir.

Por que ocorrem estes erros? Esta equação não se configura como uma equação aritmética, de fácil resolução?

Uma possibilidade de resposta a essas perguntas seria a de que os procedimentos adotados pelos alunos, nas sucessivas transformações de uma equação em outra equivalente, baseados nas frases: ‘isola-se a incógnita (x) e muda-se de lado, muda-se o sinal”, instauram uma rotina que acaba por descaracterizar o significado das operações realizadas. Essa rotina não satisfaz as condições de resolução das equações da forma ax=b.

No momento em que o aluno se depara com a equação ax = b, em que ele tem que decidir qual a operação a ser realizada para poder encontrar o valor da incógnita, ocorrem várias situações: ou ele escreve o valor de x como x = $\frac{b}{-a}$, numa referencia à técnica da transposição de termos, utilizada nas equações algébricas, isto é, transpõe e muda o sinal do número; ou escreve x = b – a, e neste caso o aluno não reconhece o termo ***ax***., como sendo ***a*** multiplicado por ***x;*** ou ainda escreve o valor para x como sendo x = $\frac{a}{b}$, trocando a posição do coeficiente de x pela do termo independente.

As dificuldades neste caso, não estariam, segundo os estudos realizados com os principiantes em álgebra anteriormente citados, na passagem destas equações (ax=b) para as que envolvem transposição de termos em ”x” ou independentes. Ao contrário do que se refere a utilização da técnica de resolução, conforme os moldes descritos no capítulo anterior, as dificuldades situam-se no momento de resolução de ax=b para a obtenção do valor da incógnita “x”. É importante lembrar que em uma equação com coeficientes reais, a obtenção da equação equivalente na forma ax=b (a≠0), pelo método formal, se faz pela aplicação dos princípios aditivo e multiplicativo da igualdade. Neste caso, a ênfase seria deslocada para a aplicação de princípios que garantem a manutenção da igualdade e “isolam o x” pela aplicação de regras formais relativas a aplicação do princípio da existência do elemento do oposto aditivo ou do inverso multiplicativo, garantindo uma certa coerência no processo de resolução como um todo.

A partir dessas considerações pode–se concluir que a maior dificuldade, para essa população, está presente não no tipo de equação, mas sim na instauração de uma rotina vinculada à uma falta de compreensão do conceito do que seja uma equação, e de como encontrar sua solução.

Em seu estudo sobre "*situações multiplicativas elementares"* Franchi, A (1995) aponta para dificuldades dos alunos *em "reorganizar seus conhecimentos em termos das relações quantitativas expressas por (a x b = c) e (c÷ b = a) bem com do inter-relacionamento entre elas."* Podemos pensar essa relações quantitativas em termos das proposições sobre o pensamento quantitativo formuladas por Kaput (1996), apresentadas no cap.2. Em síntese, trata-se de operar sobre uma qualidade mensurável de um aspecto de uma situação ou sobre magnitude abstratas. Nessa perspectiva pode-se considerar que a compreensão da equação ax = b, ou da relação entre a multiplicação e a divisão, "*é favorecida quando alicerçada sobre a compreensão do significado do multiplicando e do multiplicador. Ou seja, essa inter-relação não pode reduzir-se, (...), à aplicação de regras formais da linguagem matemática, o que revela a interdependência, no ensino, das dimensões semântica, sintática e pragmática da compreensão.(Franchi, A.1995,p.172)*

Segundo: O aspecto relacionado ao método de resolução.

Neste segundo ponto, vamos enfatizar que, com exceção do aluno Y (já discutido), todos os demais alunos utilizaram o mesmo método nas resoluções das equações aritméticas e algébricas, ou seja, o método de transposição de termos, sem aplicação explícita dos princípios aditivo e multiplicativo da igualdade.

Os problemas levantados pela utilização desse método de resolução, como já anunciado na introdução deste item, está na utilização e memorização de uma frase, já muito discutida neste trabalho, que é "passa e muda o sinal".

Isto significa que os alunos utilizam esta frase como um algoritmo, independente do tipo de equação a ser resolvida, e o que é mais complicado ainda, sem o devido entendimento do que ela significa, enquanto método de resolução.

Mostramos, ao longo desse trabalho, exemplos dessas situações, em que os alunos ao resolverem a equação $-4x = 8$, cometeram erros nas suas resoluções, escrevendo o valor de x como sendo, $x = \frac{8}{4}$, $x = 2$.

A referência para esse procedimento era justamente a da frase citada.

Se o incentivo à utilização de regras ou a memorização de frases, é justificado em função de obter resultados imediatos, por outro lado acaba por provocar sérios erros de entendimento do real significado de se resolver uma equação. Ou seja, leva-nos a interrogar com. Lemoyne, e outros (1993) sobre a influência da rotina escolar na constituição das falsas regras utilizadas pela alunos.

Não seriam as regras falsas "*(...), representações que são produto de conhecimentos elaborados por meio de séries intermináveis de tarefas?. Agir sobre os erros ignorando as condições de realização dos conhecimentos nos parece amputar esses erros de suas ligações de sua significações essenciais (p.342)*

Isto significa que devemos olhar para o método não visando pontualmente a cada um dos erros de modo isolado, mas através de um outro prisma, não nos esquecendo de que aspectos conceituais e de técnicas devem ser tratados conjuntamente. Ou seja, devemos, no processo de ensino, prever momentos em que os elementos constitutivos de uma equação bem como seu método de resolução sejam re-significados por meio de diferentes atividades, ou, segundo Lemoyne (1993).as perspectivas didáticas devem enfatizar as relações entre os conhecimentos, mais do que os conhecimentos em si mesmo.

Por exemplo, na resolução da primeira equação do instrumento $-4x = 8$, podemos analisar a equação sob a dimensão sintático-semântica, ou seja, que a solução tem que ser necessariamente um número negativo, pois o resultado é um número positivo, além disso, tem que ser um determinado número que multiplicado por - 4 seja igual ao número 8. Para encontrar a solução, uma maneira seria comparar os números, – 4 e 8 , e perceber que 8 é o dobro de 4 e assim chegar à solução x = -2.

Outra forma de resolução seria efetuar a mesma operação em ambos os termos da equação, o que significa dividir os dois termos por –4, para obter a unidade. Essas operações podem ser simplificadas através da transposição do –4 para o segundo membro, com a divisão, referindo-se à operação inversa da multiplicação

Em uma outra equação do instrumento, por exemplo 1 = 5 + 2x, podemos fazer inicialmente a análise semântica da equação destacando o significado da igualdade, isto é, se o número 1 é igual ao número 5 mais um determinado valor, então este valor representado por 2x deve ser necessariamente igual a –4, daí resultando em 2x = -4. Novamente teremos a análise de que esta solução deve ser um número negativo que multiplicado por 2 seja igual a –4, portanto, x é igual a –2.

A partir dessa discussão, poderemos mostrar que esse resultado pode ser obtido através da realização da mesma operação de subtrair o 5 nos dois membros da equação, obtendo –4 = 2x e a partir dessa equação equivalente, dividir os dois membros por 2, encontrando assim o valor de x igual a –2. Esta forma de resolução enfatiza a simetria da igualdade, o que em geral é pouco discutido. Mesmo assim, ainda poderemos apresentar o método formal de transpor os termos através das operações inversas, efetuando a transposição do número 5 para o primeiro membro, pela operação inversa da adição (subtração) e novamente chegar a –4 = 2x e transpor novamente o número 2 pela operação inversa da multiplicação (divisão).

Portanto, independentemente do método utilizado para a resolução de uma equação, o que é importante nos procedimentos a serem adotados para encontrar a solução, é dar significado para as técnicas através de sua compreensão, integrando aspectos semânticos e sintáticos.

Não podemos nos esquecer de que uma maneira de trabalhar com o significado das técnicas é utilizar a resolução de problemas de matemática.

Sobre este tema, Polya (1997) afirma que:

“Resolver um problema é encontrar os meios desconhecidos para um fim nitidamente imaginado. Se o fim por si só não sugere de imediato os meios, se por isso temos de procurá.los refletindo conscientemente sobre como alcançar o fim, temos de resolver um problema. Resolver um problema é encontrar um caminho onde nenhum outro é conhecido de antemão”.(p.1)

Na mesma direção, Mason (1996) argumenta que os problemas matemáticos constituem um rico recurso para provocar nos alunos a passagem do pensamento aritmético ao algébrico e vice-versa. Afirma o autor: *“Suspenso entre a aritmética e a álgebra está o mundo de problemas. As vezes podem ser resolvidos aritmeticamente, em outras usando a álgebra”(p.09).*

Terceiro: A utilização de frases ou expressões verbais redutoras.

Este terceiro ponto revela os problemas que as frases ou expressões – utilizadas pelos alunos, tais como: “isolar o x”; ou “se está multiplicando, passa dividindo”; e “passa e muda o sinal”; para justificarem os procedimentos de resoluções - provocam no domínio de entendimento dos alunos em relação aos métodos de resoluções.

Em geral, quando o aluno utiliza a expressão “isolar o x” para justificar as transformações que faz sobre as equações, ele não tem clareza sobre os critérios que permitem distinguir os procedimentos corretos que podem ser usados para, de fato, isolar a incógnita x. O aluno simplesmente “isola” a incógnita realizando qualquer operação.

Vamos retomar duas entrevistas realizadas com os alunos Pe e Be , para exemplificar essa problemática.

O aluno Pe estava resolvendo a equação $-5x - 2 = x$ e chegou à equação equivalente $-2 = 6x$. continuando a resolução, ele escreveu: $x = \frac{6}{-2}$.Ao ser indagado sobre o processo de resolução Pe afirmou:“...*ficou menos dois igual a seis x, aí* ***isolei o x***”. Podemos perceber que realmente o x ficou isolado, mas de modo incorreto. Na outra entrevista Be estava resolvendo a equação 2x + 3 =0 e chegou ao seguinte resultado:

x = 3 – 2, segue x = 1. Ao explicar seu procedimento a aluna afirmou: “***isolei o x*** *e passei o dois para o outro lado*”.

Esses exemplos mostram, de alguma maneira, que a utilização dessa expressão não leva à compreensão do significado de como isolar a incógnita para obter seu valor.

A utilização da frase: “se está multiplicando, passa dividindo”, também leva o aluno a efetuar determinadas operações em que ele não compreende seu significado. Vamos recortar uma entrevista a esse respeito para poder exemplificar essa problemática: A aluna Mr estava resolvendo a equação –4 = 2x e encontrou o seguinte resultado: x = $\frac{2}{-4}$. Ao explicar seu procedimento falou*: “é...esse que está multiplicando veio dividindo*”. O que percebemos dessa situação é que a aluna repete uma frase que nesta resolução deixa claro que ela não compreende seu significado.

A resolução da equação fica mais complicada quando o aluno relaciona as duas frases: “se está multiplicando, passa dividindo” junto com “passa e muda o sinal”. Neste caso ele realizada a primeira ação e complementa com a segunda.

Vamos perceber essa situação na entrevista com a aluna Be na resolução da equação –4x = 8. A aluna escreveu: x = $\frac{8}{4} = 2$.Ao ser indagada do procedimento ela respondeu: *“é...o menos quatro está multiplicando, passei dividindo”* e ao responder da mudança do sinal do 4, disse *“porque mudou de lado”.*

Esses extratos mostram o quanto as expressões utilizadas nesses exemplos são vagas e ambíguas, não orientando a seleção das transformações a serem efetuadas sobre as equações e, portanto não contribuindo para tornar significativos os procedimentos de “passar e mudar o sinal” ou “isolar” a incógnita em um membro da equação para, em função da expressão algébrica obtida no segundo membro, determinar o valor dessa incógnita.

Quarto: Igualdade e validação.

O sinal de igual não é entendido como uma equivalência entre os membros de uma equação e isto pode indicar que os alunos não sentem necessidade de operar em ambos os termos da equação. Em virtude de não atribuir significado ao algoritmo que aplicam (transposição dos termos), os alunos, em geral, não conseguem interpretar se o valor obtido é solução da equação, e quando solicitados a comprovar este valor, ou eles tentam refazer os cálculos, ou justificam o resultado encontrado através da explicação das regras que utilizaram.

Por outro lado, o processo de validação poderia favorecer a compreensão das equações equivalentes, bem como do significado da igualdade.

No entanto, é interessante salientar que entre os alunos entrevistados, alguns , quando interrogados sobre o resultado apresentado, substituíam o valor encontrado para x na equação inicial. Ao depararem com igualdades tais como 7 = 1 (aluno Pe.), logo exclamam “ ah! está errado” e retomam a resolução da equação.

Quinto: A presença do número zero na equação.

O zero é um problema para os alunos, tanto nas equações onde ele é solução ($ax = 0$) , como nas equações sem solução ($0x = b$, $b \neq 0$).Isto está relacionado ao problema da divisão do número zero por um outro número e da indeterminação da divisão por zero.

Apesar desta constatação, relacionada ao número zero, neste trabalho não aprofundamos este aspecto pois isto fugiria, de alguma forma, à problemática desse estudo que é compreender a natureza dos erros relacionados às equações do 1º grau.

Esta pesquisa incide sobre uma população de 104 alunos de apenas uma escola particular do ensino médio, com algumas características próprias conforme especificado nos aspectos metodológicos (cap. 3) Apesar das limitações decorrentes desse fator, esperamos ter trazido uma contribuição, embora modesta, para a melhoria do ensino da álgebra escolar no ensino fundamental e médio.

Assim, ao procurar entender como e porquê os alunos erram as resoluções dessas equações esperamos apontar caminhos para novas abordagens sobre o ensino de equações, em particular sobre seus métodos de resolução, buscando contribuir para a superação das dificuldades de compreensão dos alunos. Paralelamente, apontamos para a necessidade de estudos longitudinais de longo prazo que atentem para as condições de ensino da álgebra escolar nos níveis de ensino acima referidos e na realidade educacional brasileira. Estes deveriam complementar os estudos sobre as dificuldades dos alunos na passagem da aritmética para a álgebra, buscando uma via que fizesse o caminho inverso, ou seja o da “passagem” da álgebra para a aritmética ou, em termos mais precisos, do estabelecimento de inter-relações, conjunções e disjunções entre os domínios conceituais e procedimentos aritméticos e algébricos.

BIBLIOGRAFIA

AZARQUIEL – *Ideas y actividades para ensernãr algebra.* – Madri: Editorial Sintesis, 1993.

BOOTH, Lesley. R. *Equations revisited*. In J. C. Bergeron, N. Herscovics, & C. Kieran(Eds). Proceedings of the Eleventh Internacional Conference for the Psychology of Mathematics Education (Vol 1 p.282-288). Montréal, Quebec, Canada: Université de Montréal, 1987.

BOOTH, Lesley. R. COOK, J. *Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra*. As idéias da álgebra. Org. Arthur F. Coxford, Alberto P. Shulte. N:C:T:M. (1988).Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994.

BROUSSEAU, G. *Représentation et didactique de sens de la division. Actes du colloque de Sévres.* Recherches en Didactique des Mathématiques. p.47-64, 1987.

CARAÇA, Bento J. *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Livraria Sá da Costa Editora: LISBOA, 1989.

CHEVALLARD, Y., BOSCH, M., GASCÓN, J. *Estudar matemáticas: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem*. Trad. Daisy Vaz de Moraes- Porto Alegre: Artmed. Editora, 2001.

FILLOY, E. *Teaching Strategies for Elementary Algebra and the Interrelations between the development of syntactic and semantic*. Proceeding 8º P.M.E, 1986.

FILLOY, E. *Modelling and the teaching of algebra*. Proceeeding 11º P.M.E, 1987.

FILLOY, E., & ROJANO, T.*Obstructions to the acquisition of elemental algebric concepts and teaching strategies*. In L.Streefland (Ed.) Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education (p. 154-158).Utrecht. The Netherlands: State University of Utrecht, 1985a.

FILLOY, E., & ROJANO, T. *Operating on the unknown and nodels of teaching*. In.S.K. Damarin & M.Shelton (Ed.) Proceedings of the Seventh Annual Meeting of PME-NA (p.75-79)Colombus: Ohio State University, 1985b.

FRANCHI, A. *Compreensão das situações multiplicativas elementares.* Tese de Doutorado. PUC- São Paulo, 1995.

GALLARDO, R., & ROJANO, T. *Areas de dificultades en la adquisicion del Lenguaje aritmetico-algebraico*. Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 9, nº 2.p.155-188, 1988.

KIERAN, C. *The Interpretation of the equal sign: symbol for na equivalence relation vs. an opertor symbol*. In R. K. L. Hall (Ed.) Proceedings of the Fourth Internacional Conference for the P:M.E. (p. 163-169) Berkeley, California, 1980.

KIERAN, C. *Concepts associated with the equality symbol*. Educational Studies in Mathematics, 1981.

KIERAN, C. *A comparison between novice and more-expert algebra students on tasks dealing with the equivalence of equations*. In. J.M. Moser (Ed.) Proceedings of the sixth annual meeting of P.M.E. (p. 83-91) Madison: University of Wisconsin, . 1984.

KIERAN, C. *The early learning of algebra: A structural perspective*. Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra. Wagner and Kieran editors. N.C.T.M. 1989.

KIERAN, C. *The Learning and Teaching of School Algebra*.Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (NCTM-cap. 17º). Université du Québec: Montreal, 1992.

KIERAN, C. *Duas abordagens diferentes entre os principiantes em álgebra*. As idéias da álgebra. Org. Arthur F. Coxford e Alberto P. Shulte. N:C:T:M. (1988) Trad. Hygino H. domingues. São Paulo: Atual, 1994.

KAPUT, James. J. *Una línea de investigación que sustente la reforma del álgebra*. UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas, Nº 9 (p. 85-97). Barcelona, 1996.

LEMOYNE, G., CONNE, F., BRUN, J. *Du traitement des formes a celui des contenus d'ecritures letterales: Une perspective d'enseignement introductif de l'algebre*.Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol.13, nº 3, p.333-384. Éditions La Pennsée Sauvage, 1993.

MACGREGOR, M. *Aspectos curriculares en las materias aritméticas y álgebra*. UNO – Revista de Didáctica de las Matemáticas, nº 9, (p. 65-70) Barcelona, 1996.

MASON, J. *El futuro de la aritmética y del álgebra: utilizar el sentido de generalidad*. UNO – Revista de Didáctica de las Matemáticas, nº 9 (p.15-22). Barcelona, 1996.

NEVES, Paulo. S.O*. Um estudo sobre o significado, o ensino e a aprendizagem da álgebra*. Dissertação de Mestrado. USP.- Fac. de Educação. São Paulo, 1995

PADOVAN, Daniela,M.F. *Números Decimais: O erro como caminho.* Dissertação de Mestrado. USP – Fac. de Educação. São Paulo, 2000.

PINTO, Neusa. B. *O erro como estratégia didática no ensino da Matemática elementar*. Tese de doutorado. USP - Fac. de Educação.. São Paulo, 1998.

POLYA, G. *Sobre a resolução de problemas de matemáticas na high school.* A resolução de problemas na matemática escolar. *(org.)* Stephen Krulik, Robert E.Reys.: tradução: Higyno H. Domingues, Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1997.

USISKIN, Z. *Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis*. As idéias da Álgebra. (org.) Arthur F. Coxford e Alberto P. Shulte. N:C:T:M. (1988) tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994

PRIMEIRA ENTREVISTA.

Aluna. Fl. 1º ano do ensino médio (1º B)
Entrevistador : E

E: Escreva uma equação do 1º grau.
F (escreve) : 4x + 2 = x – 3
E: qual o significado do sinal de igual ?
F: 4x + 2 é a mesma coisa que x – 3
E: qual o procedimento de resolução.
F: (escreve) 4x –x = -3 –2
3x = -5
F: É 3 sobre –5 ou –5 sobre 3 ?
E: Não sei. Qual é a diferença ?
F: (fica calada pensando e não responde)
E: Faça da maneira que você achar correta.
F: (escreve) $x = \frac{3}{-5}$
E: Vamos voltar e analisar a resolução.Explique como você pensou a resolução.
F: Coloquei termos semelhantes juntos e passei o x para esse lado do igual e o 2 para o outro.
E: Como você fez a passagem ?
F: Você passa e muda o sinal.

Segunda questão

E: F. resolva esta equação: 2x = 0
F: (escreve) x = 0 – 2
E: Me explique como você pensou .
F: você passa o 2 para o outro lado e muda o sinal.
E: Resolva estas duas equações: 2 + x = 8 e 2x = 8
F. (escreve para a 1ª equação) : x = 8 – 2 = 6
F. (escreve para a 2ª equação) : x = 8 –2 = 6
E. : Quer dizer que as duas equações são iguais ?
F. : Não, essa 1ª é de soma e a 2ª é de vezes.
E. : Mas você resolveu as duas da mesma forma .
F. : Ah! Tá errado, mas eu não sei.

Terceira questão:

E: resolva esta equação: x + 3 = 2x + 4
F. (escreve) : -2x + x = -3 + 4
-x = 1
X= -1
E: Como você faz para saber se este valor está correto ?
F: Ah! Não sei.
E: O que significa encontrar o valor de x ?
F: Ah! Não sei. Acho que é para saber quanto ele vale .
E: Se você substituir esse valor encontrado para x,na equação, o que acontece ?
F: (escreve) : -1 + 3 = 2.-1 + 4
3 = 2 + 4 – 3 = 3

SEGUNDA ENTREVISTA.

Aluna. Mo. do 1º ano do ensino médio. (1º A)
Entrevistador: E

Questão 01.

E: Mo. escreve uma equação do 1º grau, qualquer uma.
M. (escreve): 1x + 3
E : um vezes x mais 3, representa uma equação ?
M. : Acho que sim.
E: O que significa: um vezes x mais 3 ?
M. Ah! Está faltando alguma coisa aqui, um vezes x mais 3 é igual a alguma coisa. .
M. (escreve): 1x + 3 = 4
M.: Não sei quanto vai dar isso.
E: Como você resolve essa equação ?
M.: Tem que isolar o x
E: Como você faz isso ?
M. (escreve) : 1x = 4 – 3

$$X = \frac{4-3}{1}$$

$$X = 1$$

E: ok, muito bem !

Questão 02.

E: Resolva esta equação: um é igual a 5 mais dois x.
M.: (escreve) : 1 = 5 + 2x
E. Qual seria o processo de resolução ?
M. (escreve) : 1 – 5 = 2x

$$\frac{-4}{2} = x$$

$$2 = x$$

E: Como que é feito a passagem dos números para o outro lado da igualdade ? qual é a regra que determina essa passagem ?
M.: Se é positivo, quando ele passa para o outro lado fica negativo. Se ele está multiplicando, quando ele vai para o outro lado, vai dividindo
E: Ok ! . Então vamos analisar sua resolução.
E : O cinco está positivo, passou para o primeiro termo negativo. Quando o 2 veio para o primeiro termo, ele é positivo, veio positivo, aqui ele não muda de sinal ?
M.: Ah! Não sei. Acho que não, sei lá !
E: Como que verifico que 2 igual a x está certo ?
M.: Colocando o x aqui (mostra na equação).
M.: Não vai dar um .

M. (Escreve): 5 + 2.2 = 1
5 + 4 = 1
M.: cinco mais quatro não é um.
E : e daí ?
M.: tem alguma coisa errada .
E : como que a gente faz para saber ?
M.: .... (pensa ....) não sei.

E: Então vamos analisar sua resolução.
E: Você tem , menos quatro dividido por 2, Quanto dá essa conta ?
M.: dois.
E : Aí, você substitui e não deu certo.
M. : Está errado aí, alguma coisa.
E: Quando você divide um número negativo por outro positivo, qual o sinal que tem que dar
M.: Ah! Tá, tem que dar negativo . aí da certo !

Questão 03.

E: Escreva essa equação: menos quatro x é igual a oito.
M. (escreve) : - 4x = 8 (esta é fácil !!!)
E: Facílima !
M. (escreve) : x = $\frac{8}{4}$

x = 2
E: Deu dois ?
M. : é, aí vai dar certo.
E: Como você sabe ?
M. : Não deu, (substituiu) deu menos oito.
E: Então vamos analisar a resolução. A passagem do 4 do primeiro membro para o segundo, você mudou o sinal. Toda vez que mudar um número de lado, muda o sinal ?
M.: Ah! Eu fiz.... , calma aí .... eu... neguei o que eu tinha feito aqui antes, (mostra a resolução anterior) que eu não mudei o sinal .
M.: Teria que ser negativo aqui ? é isso ?
E : Então, queria saber como você pensa sobre o procedimento dessa resolução ?
M.: é... eu vou passando... e de vez em quando eu erro o sinal ...
E: Quando que a gente muda o sinal, ou quando que a gente não muda ? que sinal é esse que altera ?
M.: Ah! Tá... deve ter alguma regra, se eu soubesse eu não teria errado.....!!!!

Discussão entre: Mo. Ma. e Be. todas alunas do 1º A, a respeito da passagem de um número para o outro lado da igualdade.

E: Fala Ma, como que um número passa para o outro lado ?
Ma.: Ah! Não é assim...., tem um número e passa para o outro lado ...tem uma operação aí envolvida....
M. : Mas ele passa para o lado de lá...qual é o problema... é o verbo?
E: Be. e você, como resolveria essa equação (-4 x = 8) ?
B.: Ah! Eu isolaria o x e passaria o quatro dividindo acho que faria a mesma coisa que a M.
M. : Iria errar também ?
B.: Ah! ... ele passa negativo.

TERCEIRA ENTREVISTA.

Be. Aluna do 1º ano do ensino médio (1º A)

Questão 01.

E:. Resolve essa equação: dois x é igual a zero.
B. (escreve): 2x = 0
X = - 2
E: Está certo ?
B. Ah! não sei ...
E: Vamos analisar a equação.
B.: Está multiplicando.... ah! Eu fiz errado.... é assim.. x = $\frac{0}{2}$
B.: Só que aí, não existe x !!!
E: Não existe ?
B.: Ah! Sei lá ... dá zero.
E: supondo que esteja certo, como você verifica se está certo ?
B.: Não sei.

QUARTA ENTREVISTA:

Aluno: Pe. – 1º ano do ensino médio: (1º C)
Entrevistador: E

Questão 01. (-5x –2 = x)

E: Resolva esta equação: “ menos cinco x menos 2 é igual a x “
P: (escreve)
$-5x - 2 = x$
$7x = x$
$7 = \frac{x}{x}$
$7 = 1$
E: Bom, chegou em 7 igual a um , qual a conclusão.
P. Ah! Está errado !!!
E. onde esta o erro ?
P. Não sei....
E: Vamos analisar a sua resolução.
E: Me fale como voce pensou...
P: eu fiz... menos cinco com menos 2 e deu menos 7 x
E: Mas, vamos pensar juntos...
aqui voce tem –5x e – 2 , posso somar o – 5 com o –2 ?
P: (pensa e responde)...ah! é !!!... aqui que esta errado....
E: ok. Então resolve novamente...
P: (escreve) $-2 = 5x + x$
$-2 = 6x$
$x = \frac{6}{-2}$
$x = -3$
E: ok. Como voce faz para saber se está correto
P: é só substituir.... (escreve) $-5(-3) - 2 = -3$
$13 = -3$
P: Ih! está errado...
E: então me explique como voce fez ?
P: é... eu passei os números que tinham x para lá .(?)
E: como é feita essa passagem, daqui para ca (1º membro para o 2º)
P: trocando o sinal dele... estava menos cinco e passei positivo...
E: e aí ?
P: continuei... ficou menos dois igual a seis x, aí isolei o x...
E: como voce isolou o x (o que significa isolar o x ?)
P: vou pegar o x, e dividir o valor dele....(pensa) ... o valor dele não...é...
(pensa)... a quantidade de x... , não sei,... e dividir pelo menos 2
E: e aí
P: ficou x igual a menos 3.
E: Vamos analisar o critério da passagem de um número para o outro lado da igualdade...
E: resolve esta equação:... (-4x = 8) como voce faz ?
P: (escreve) $x = \frac{8}{-4}$ .... $x = -2$
E: me fale como voce pensou.
P: é... eu isolei o x....
E: o que significa isolar o x
P: então...eu...peguei... e...pra quantos valores... não, ...
E: qual é a passagem que voce realizou, qual a operação que voce fez ?
P: (fala) menos 4x igual a oito... x igual a oito sobre menos 4 ...

E: porque o menos 4 passou dividindo o oito ?
P: Por que aqui ele está multiplicando o x...
E: ótimo ! então vamos voltar aqui (-2 = 6x). Como está aqui ?
P: (fala) o seis está multiplicando o x... teria que ser...

(escreve) x = $-\frac{-2}{-6}$ é isso ?

E: O sinal do seis mudou para negativo... , quando ele muda de lado seu sinal é alterado...?
P: alterou..
E: Altera ? Então vamos voltar aqui na equação (-4x = 8)
E: Quando que altera ? e quando que não altera ? qual é a regra da alteração do sinal ?
P: A gente passa, quando quer descobrir o valor de x ?
E: Mas como que é a passagem do número para o outro lado da igualdade?
P: O que eu tinha na cabeça era que toda vez que passa ... muda

Questão 02.

E: resolva a equação : " um é igual a 5 mais dois x "
P: (escreve) 1 = 5 + 2x

-2x = -1 + 5
-2x = 4

x = $-\frac{2}{4}$

E: De novo, vou te perguntar... como você fez as devidas passagens?
P: Aqui eu alterei o sinal do 2x para este lado (1º membro) e o um para o outro lado . Aí quando fui isolar o x eu não alterei o sinal ...e dividi pelo 4...
E: Vamos analisar sua resolução... a partir daqui (-2x = 4)
E: Você escreveu que x é igual a –2 dividido por 4...,ou seja, você passou o 4 dividindo o 2 ?. Qual é a operação que o 2 esta realizando em relação ao x ?
P: de vezes...
E: então... se o –2 está multiplicando o x....
P: o 2 teria que estar dividindo...
E: muito bem...nesse caso tem alguma coisa errada aqui....!!! vamos fazer de novo...
P: (escreve) –2x = 4

$\frac{-2x}{4} =$

-2x = 4

$\frac{4}{-2x} =$

x= $\frac{4}{-2}$

x= $\frac{1}{2}$

E: Bom... então veja se está correto...
P: (escreve) 1= 5 + 2(1/2)

1 = 5 + 1

1 = 6

P: continua tendo alguma coisa errada...!!!
E. volta e analisa sua resolução e veja se consegue descobrir o erro ..
P: aqui esta certo... (pensa).... não sei... eu fiz a passagem certa... não alterei o sinal...

E: aqui (4 / -2x) você não isolou o x ?
P: é teria que isolar...
E: isso, isolar significa o que ?
P: descobrir o valor de x....
E: e como se faz isso , uma coisa é a gente falar e outra é escrever o que se esta falando...!!!
P: (escreve) x = $\dfrac{4}{-2}$
E : e o resultado é quanto... 2 ou – 2 ???
P: (responde) – 2
E: ok. Muito bem... então vamos testar a solução.
P: (escreve) 1 = 5 + 2 (-2)
1 = 5 + 4
E: esse resultado (o produto do 2 pelo –2) esta certo ? o sinal se mantém positivo ou inverte o sinal ?
P: ...(pensa)... aqui se mantém...
E: e quando se inverte ?
P: acho que é quando o menos multiplica o positivo ...!!!
E: então se fosse - 2 vezes 2 daria quanto ?
P:-4
E: você acha que esses resultados são diferentes ? (– 2 vezes 2) e (2 vezes – 2) ???
P: não
P: (escreve) 1 = 5 – 4
E: ok. Vamos resolver mais uma equação.

Questão 03.

E: escreve aí: dois x igual a zero
P: (escreve) 2x = 0
X = 2/0
E: quanto deu ?
P: x igual a 2 !!!
E: como você fez ?
P: eu isolei o x ...
E: como que você isolou o x ?
P: ah! eu dividi o 2 , que esta multiplicando, pelo zero...
E: então você passou o zero dividindo o dois ?
P: ah! é... esta certo... (escreve) x = 0 / 2
E: quanto dá zero dividido por dois ?
P: da nada !!!
E: é zero ? vazio ? ou não existe ?
P: depende do que se esta dividindo !!!
E: muito bem !!! aqui. x é igual a zero sobre dois .
P: x é igual a zero :
E: OK. Vamos para próxima questão.

Questão 04.

E: dois x menos três x é igual a zero...
P: (escreve) 2x – 3x = 0 .... (pensa)
P: pode ser menos x igual a zero ?
E: como que fica ?
P: (escreve) –x = 0 e acho que dá .... se substituir....da certo ...!!!
E: e qual é a solução ?
P: x igual a zero .
E: e como que passa de menos x igual a zero para x igual a zero ?
P: ... você ...(pensa).... não sei também...

Questão 05.

E: escreva x mais um igual a x
P: (escreve) 1x + 1 = x ....(pensa).... x = 1 / -1

E: e quanto deu ?
P: x igual a 1
E: como você pensou...
P: eu pensei... bom ...aqui é 1 né ?, x esta sozinho (!!!) ... aí eu isolei de novo... peguei o x e fiz esse 1 sendo divido por esse 1 (!!!)
E: e esse x do lado de ca, no 2º membro ?
P: ah! tá.... fica ... (escreve) ... –x = -1 / 1x ....não sei...
E: vamos ver o processo de resolução...
P: isolei o x ...
E: como é que isola o x ?
P: eu peguei o valor dele ...que é 1...
E: mas o valor dele já é 1 ?
P: o valor dele não...a quantidade de x... e peguei e dividi pela quantidade de x...
E: mas nesse caso... tem x dos dois lados da igualdade.... ele não esta isolado !!!
E: como é o processo da passagem de termos....
P: (escreve) ... 1x + 1 = x
1 = -1x + 1x ....um é igual a zero x...
E: então escreve.
P: 1 = 0x
E: e daí ?
P: ... (pensa)... - x = -1
E: como chegou nesse resultado...?
P: eu passei o x para ca... e o um para o outro lado....
E: vamos pensar na equação...(X + 1 = X) “ x mais um igual a ele mesmo ” é possível um número somado a ele e dar o mesmo resultado ?
P: não pode... essa equação é impossível...
P: ah! seria sempre um número ser igual ao ... como é que chama ?
E: posterior...

QUINTA ENTREVISTA.

Aluno : Y – 1º ano do ensino médio (1º A)
Entrevistador: E

Questão 01.
E: escreva uma equação do 1º grau.
Y: (escreve) x + 2 = 3
E: como você resolve ?
Y: (escreve) x = 1
E: como você pensou ?
Y: tem um igual, então tem que fazer a mesma operação dos dois lados ..., tirei dois daqui (1º membro) e dois daqui (2º membro).
E: ok. Vamos resolver outra.

Questão 02.

E: escreva “ menos 4 x é igual a oito “
Y: (escreve) - 4x = 8

$$\frac{-4x}{4} = \frac{8}{4}$$

-x = 2
x = - 2

E: como você pensou ?
Y : dividi os dois termos por 4 e multipliquei o resultado por –1
E: tem necessidade de multiplicar por –1 ?
Y: Ah! não... é só dividir por menos 4
E: ok. Vamos para a próxima.

Questão 03.

E: resolva a equação: dois x é igual a zero
Y: (escreve) 2x = 0
E: quanto dá ?
Y: da zero .
E: por que ?
Y: zero divido por dois , da zero !
E: ok.

Questão 04.

E: um é igual a cinco mais dois x .
Y: (escreve) 1 = 5 + 2x

$$\frac{-4}{2} = \frac{2x}{2}$$

-2 = x

E: como você faz para saber se x igual a menos 2 está correto ?
Y: ah! é só substituir o –2 na equação ! (escreve) 1 = 5 +2.-2
1= 5 –4......
E: ok.

SEXTA ENTREVISTA.

Aluno: Fe – 1º B
Entrevistador: E

Questão 01.

E: escreva uma equação do 1º grau.
F: qualquer uma ?
E: é qualquer uma
F: (escreve) 2x = 4
E: o que representa o sinal de igual na equação ?
F: é.... que esse lado vai que ser igual a este .
E: como assim ?
F: aqui (mostra o 2x) vai Ter que ser igual a 4.
E: Como você resolve essa equação ?
F: separa o x .... igual a 4 e passa o 2 para ca (escreve) x= $\frac{4}{2} = 2$
E: e como que passa esse 2 ?
F: ele está multiplicando e passa para ca dividindo
E: e o que significa passar o 2 para lá ?
F: bom... você está deixando a incógnita sozinha...... tem que separar os termos... aqui é o x... e aqui é só os números.
E: e como a gente sabe que esta solução está certa ?
F: a gente substitui o x... por exemplo...o x agora passa a ser 2... (escreve)
2.2 = 4

E: Teria uma outra maneira de resolver...sem ter que passar o 2 para lá ?
F: (risos...) bom.. aí tem que ir testando...
E. ok. Vamos ver uma outra equação.

Questão 2.

E: resolva a equação: dois x igual a zero .
F: (escreve) 2x = 0.... (pensa)... bom...fica x igual a 2 (escreve) x = 2
E: como é que você fez ?
F: bom. o x fica aqui (mostra o 1º membro) e o 2 passa para lá...ah!.. mas fica menos (escreve x = -2)... agora não sei ... bom eu sei que tem que passar o número para ca (!!!)
E. supondo que esteja certo.... porque você mudou o sinal ?
F: por que a regra é essa.... é uma regra né ? você passa o número para ca e inverte o sinal
E: como que você sabe que o resultado está certo ?
F: (escreve) 2.(-2) = 0
E: qual a conclusão ?
F: é... seria zero .
E: e como que a gente verifica aonde que está o erro ?
F: fazendo as contas de novo.
E: mas não dá para analisar o processo que você fez, sem Ter que refazer?
F: dá... eu passei o 2
E: mas como que você passou o 2 para o outro lado ?
F: ah ! ... pela regra
E: e como que funciona essa regra ?
F:ah!... é que na multiplicação é diferente...
E: como que você lê esse primeiro membro ?
F: duas vezes x
E: ok. Vamos analisar uma outra situação depois a gente volta nessa equação
E: como você resolve a equação : dois mais x igual a zero ?
F: (escreve) 2 + x = 0 ... vou fazer a mesma coisa... x = -2
E: qual a diferença dessa equação para a anterior ?
F: aqui (a primeira) é multiplicação
E: então, quando eu tenho 2 vezes x igual a zero é um procedimento de resolução e quando a gente tem 2 mais x é outro procedimento. Na primeira quero descobrir que número vezes dois dá zero e na outra que número somado a dois que da zero...Usando a regra, a mudança se dá pela operação inversa, ou seja, se o número está multiplicando ele passa dividindo e se está somando ele vai subtraindo.
F: certo, então aqui da (escreve) $x = \frac{0}{2}$
E: e quanto dá zero divido por dois ?
F: é....(pensa)... dá um .... (pensa)... da zero (!!!)

E: portando, quando a gente tem dois vezes um determinado número igual a zero tenho que pensar que estou multiplicando dois por um numero e o resultado tem que dar zero.

Questão 03.

E: resolver a equação. Zero vezes x igual a 1.
F: (escreve) 0x=1....(pensa) x igual a 1 (escreve) x = 1
E: verifica.
F: (escreve) 0.1 =1
E: quanto é zero vezes um ?
F: zero
E: e aí ?
F: tá errado .
E: como você fez ?
F:Ah ... é (escreve) $x = \frac{1}{0}$

E: e quanto é ?
F: um (!!!)

E: bom... se for um...então x é igual a um ?
F: ah! mas aí vai dar de novo aquele resultado...
E: então quanto dá a divisão de um por zero ?
F: .... (pensa)... não sei.
E: a divisão por zero não é definida, ou seja qualquer número vezes zero vai dar sempre zero e nunca um. Nesse caso essa equação não tem solução. Então antes da gente aplicar os algoritmos de resolução precisamos analisar a equação.
F: é a gente vai fazendo pela regra....

E: ok. Vamos resolver mais uma.

Questão 04.

E: resolva a equação: Um é igual a cinco mais dois x.
F: (escreve) 1 = 5 + 2x

$$-2X = 5 - 1$$
$$-2X = 4$$
$$X = \frac{4}{2} = 2$$

E: x igual a dois ?
F: não é menos ? (escreve o sinal na frente do 2)
E: não sei. Como é que a gente resolve essa questão ?
F: multiplica por menos um para inverter ?
E: pode.
F: não pode ficar negativo em baixo (mostra o denominador)
E: por que ?
F: ... não sei...
E: vamos voltar na primeira equação: (2x = 4) como você me explicou a resolução ?
F: tem que isolar o x
E: então, pensando da mesma forma...
F: isola o x...
E: e como seria para isolar o x ?
F: aqui está multiplicando e passei dividindo...
E: mas você tinha menos dois vezes x e passou o dois... o sinal não acompanha o número ?
F: acompanha.... mas eu acho que tem aquela coisa do menos um, porque o sinal tem que ficar em cima (mostra o 4 no numerador)
E: então a gente não pode dividir por um número negativo ?
F: ... (pensa)..... (pensa).... é não sei, acho que não.
E: ok. Vamos pensar numa outra equação.

Questão 05.

E: resolva: menos 4x igual a oito .
F: -4x = 8

$$(-1)\ -4x = 8\ (-1)$$
$$X = \frac{-8}{4} = -2$$

E: você não poderia passar o –2 dois dividindo o 8, teria o mesmo resultado.
F: é mais o sinal teria que estar lá (no 8)
E: não necessariamente... isto significa que estamos dividindo os dois termos da equação por (-4). Não tem nenhum problema dividir um número por outro negativo.

Questão 06.

E: vamos pensar nessa equação: 6 – 4x = 3x
F: (escreve) 6 – 4x = 3x

$$-4x - 3x = -6$$
$$-7x = -6$$
$$x = \frac{-6}{7}$$

E: muito bem... como você fez ?
F: passei o 3x para ca e o seis para lá mudando o sinal... deu –7x igual a –6 e passei o sete dividindo .

E: mas na passagem do 7 houve inversão do sinal ?
F: ah! não (escreve o sinal de menos no sete)
F: não poderia colocar só um sinal de menos na frente ($x = -\frac{6}{7}$)
E: não. pois aí mudaria o número, ele tornaria negativo.

Questão ’07.

E: uma outra equação: 5 + 2x –3 = 4x
F: (escreve) 2x – 4x = -5 + 3

$$2x = -2$$
$$x = \frac{-2}{2} = 1$$

E: como você fez para chegar nesse resultado ?
F: menos 2 dividido por 2.... (pensa)...
E: quanto da essa divisão ?
F: (pensa)..... um...
E: como que é a regra dos sinais ?
F: positivo com negativo... negativo com positivo... (pensa)...menos com mais da menos (escreve – 1)
E: será que está certo ?
F: (escreve) 5 +2.-1 –3 = 4 –1

$$5 + (-2) - 3 = -4$$
$$0 = -4$$

está errado...
E: aonde você acha que está o erro....?
F: ... (pensa)... está aqui (aponta para a verificação) ... e refaz.-.

$$5 - 2 - 3 = -4$$
$$0 = -4$$

bom então está aqui (aponta para a resolução)
E: analise cada passagem e vê se consegue perceber o erro .
F: bom.. separei o x... aqui...os números... (pensa)... ah! está aqui.. aponta para o sinal do menos dois x.
E: isso... 2x menos 4x é igual a menos dois x...
E: você tem um problema relacionado com os sinais, além dos procedimentos de resolução..

Questão 08.

E: resolva: 4 –x +2 = x
F: (escreve) 4-x + 2 = x

$$-x + x = -4 + 2$$
$$x = -2$$

é isso ? tá certo ?
E: você consegue analisar as passagens preliminar..

F: aqui o x é negativo... continuou... ah! aqui muda o sinal .. (escreve – x) ... ih! aqui também... (escreve – 2)
E: como que ficou ?
F: escreve .... –2x = -6

$$x = \frac{-6}{-2} = -3$$

E: quando você divide números de sinais iguais, qual o resultado ?
F: ah! é..... menos com menos dá mais .

SÉTIMA ENTREVISTAS.

Mr: aluna do 1º C
E. entrevistador.

E: escreve uma equação do primeiro grau .
M: (escreve)... – 3x – 2x = 1x
E: muito bem... qual o significado do sinal de igual ?
M: ah! não sei.... o resultado...
E: como você resolveria esta equação ?
M: como assim... é que estou acostumada com $3x^2 - 2x - 2 = 0$
E: mas esta é uma equação do 2º grau... a gente está discutindo equação do 1º , onde a potência do x é 1
E: então o que significa resolver uma equação ?
M: ah!... como é que fala ?...é...sei lá

E: significa encontrar um determinado valor de x, que torne verdadeira a equação, ou seja, é um valor de x que faz com que os dois lados da igualdade sejam os mesmos. certo ?
E: agora, como resolver uma equação do 1º grau... isto é uma outra questão,
M: são as etapas ?
E: Isso... as etapas.
M: ah!... primeiro você vê o que tem em comum...fica ..três menos 2 igual a 1
E: então escreve isso que você falou
M: ah! eu não sei explicar. (!!!)

E: ok... então vamos ver uma outra equação .

Questão 02.

E: escreva essa equação : menos quatro x igual a oito .
M: (escreve) – 4x = 8
x = 8/4
x = 2
E: como você sabe que está certo ?
M: é... (pensa)... porque... aqui está multiplicando e passa dividindo e está menos passa mais.

E: e como você sabe que esse processo está certo ?
M: ah !... não sei, vou multiplicando por isso (aponta o 2)
E: então vou falar de outra maneira. Como que a gente verifica se um valor está correto ?
M: é... não é substituindo ?
E: isso... como que faz ?
M: ... não sei... como substituir ? x é igual a 2.
E: se vou substituir... então vou colocar no lugar do x, o valor encontrado... e vou ver se os dois valores são iguais, se não forem... qual conclusão ?
M: está errado.
E: então vamos fazer.. –4 vezes 2 é igual a quanto ?
M : oito
E: se multiplico um número negativo por um positivo, qual o sinal do resultado ?
M: negativo...
E: então vai dar –8 ... igual a 8 ...pode ser ?

M: é menos 2.
E: e como que a gente chega nesse número ?
M: sei lá.. é ...quando está multiplicando passa dividindo e não muda o sinal?
E; então,... essa passagem... de um número para outro lado da igualdade,, como é que funciona ?
M: ah! não sei... esqueci
E: então vamos analisar outra questão.

Questão 03

E: resolva a equação ... menos 4 mais x é igual a 2
M : (escreve) - 4 + x = 2
4+ 2 = x
x = 6
E: como que a gente testa para saber se está correto ?
M: menos 4 mais seis da menos 10 que é igual a 2 (!!!)

E: como .. não entendi...como você fez a operação (-4 + 6) ?
M: menos 2... (pensa). Mais 2

E: então vamos analisar os processos.. dessa equação e da anterior
E: aqui você passou o menos 4 com sinal contrário e na anterior
(-4x=8) a gente manteve o sinal do menos 4 , como que a gente poderia justificar esse procedimento ?
M: Por causa da divisão...
E: e aqui (2º caso) ?
M: é... operação de soma.
E: então ... nessas passagens o que altera é o sinal da operação, ou seja a gente realiza a operação inversa. ok. vamos analisar mais uma.

Questão 04.

E: escreva a equação: um é igual a cinco mais dois x
M: (escreve) 1 = 5 + 2x
-4 = 2x

$$x= \frac{2}{-4} = \frac{1}{2}$$

E: vamos analisar as etapas que você fez, como que você fez essa passagem da 2ª linha para a 3ª
M: é....(pensa) ... esse que está multiplicando veio dividindo...
E: mas quem é que está multiplicando ‘
M: o dois
E: então... o 2 que está multiplicando o x... e você quer saber o valor de x ... poderia te dizer numa outra linguagem que seria isolar o x.
M: você ... deixando o x do outro lado... fazendo ele valer um valor….
E: então, como que a gente faz essas passagens ?
E: vamos analisar a expressão... (–4 = 2x), que número vez 2 da –4?
M: - 2
E: portanto, quando a equação é simples... a gente pode resolver só analisando as possibilidades. Ok.

OITAVA ENTREVISTA.

Bi: aluna do 1º B
E: entrevistador

E: escreva um equação do 1º grau.

B: (escreve) $2x^2 + x + 2 = 0$
E: mas essa equação é do 2º grau. Voce sabe qual a diferença entre ser do 1º grau e do 2º grau ?
B: ah! ...(pensa) não sei...é por causa do 2
E: isso, é a maior potência que determina o grau da equação.
E: escreva uma equação que seja do 1º grau.
B: (escreve) $2x + 3 = 0$
E: como que a gente resolve essa equação ?
B: (escreve) $2x + 3 = 0$

$$X= 3 - 2$$
$$X = 1$$

E: deu um ? como que você sabe que está certo ?
B= ah! não sei... vou fazer de novo.

E: calma... o que significa encontrar a solução de uma equação ?
B: encontrar o valor de x ?
E: é ...determinar um valor de x, tal que os dois termos sejam iguais.
E: então ... verifica se para x igual a um os dois termos ficam iguais ?
B: (escreve) $2.1 + 3 =0$

$$2 + 3 = 0$$
$$5 = 0$$

E: e aí ? ... qual a conclusão ?
B: está errado.
E: e aonde que você acha que está o erro ? vamos analisar as etapas. Me explique como você pensou ?
B: isolei o x e passei o 2 para o outro lado .
E: mas como que é feito essas passagens?
B: passei o dois e mudei o sinal...
E: como que você lê essa equação ?
B: dois x mais 3 igual a 2
E: o que significa o termo 2x ?
B: duas vezes x .
E. então...a equação... é dois vezes x somado com 3 tem que dar zero .
E: como que a gente faz a passagem de um número para outro lado da igualdade...
B: ah! ... se esta multiplicando passa dividindo...
E. então... olha a equação que você escreveu e veja a solução que você deu.
B: ah! é... (escreve) $2x = -3$

$$X=\frac{-3}{2}$$

E: ok. Vamos analisar uma outra equação.

Questão 02.

E: resolva a equação : menos quatro x é igual a oito .
B: (escreve) $-4x = 8$

$$X = \frac{8}{4} = \frac{4}{2} = 2$$

X= 2

E: verifica se a solução está correta.
B: (escreve) –4.2 = -8
E: e aí... quanto deu ?
B: menos oito... , está errado .
E: me explique como você resolveu
B: é ... o menos quatro está multiplicando passei dividindo .
E: mas aqui (mostro a equação) você tem menos 4 e aqui você escreveu quatro positivo, por que mudou o sinal ?
B: porque... mudou de lado
E: mas a mudança do sinal do número ocorre sempre que ele mudar de lado ‘
B: ah!... não sei... foi assim que aprendi...