UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO

WILTON NATAL MILANI

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO FERRAMENTA PARA A APRENDIZAGEM DE PROGRESSÕES ARITMÉTICAS E GEOMÉTRICAS NO ENSINO MÉDIO

Ouro Preto, MG
2011

WILTON NATAL MILANI

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO FERRAMENTA PARA A APRENDIZAGEM DE PROGRESSÕES ARITMÉTICAS E GEOMÉTRICAS NO ENSINO MÉDIO.

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Educação Matemática, oferecido pela Universidade Federal de Ouro Preto, como exigência parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Marger da Conceição Ventura Viana
(Doutora em Ciências Pedagógicas)

Ouro Preto, MG
2011

M637r Milani, Wilton Natal.

A resolução de problemas como ferramenta para a aprendizagem de progressões aritméticas e geométricas no ensino médio [manuscrito] / Wilton Natal Milani. – 2011.

xiii, 127 f.: tabs.

Orientadora: Profa. Dra. Marger da Conceição Ventura Viana.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Ouro Preto. Instituto de Ciências Exatas e Biológicas. Departamento de Matemática.

Área de concentração: Educação Matemática.

Catalogação: sisbin@sisbin.ufop.br

UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO FERRAMENTA PARA A APRENDIZAGEM DE PROGRESSÕES ARITMÉTICAS E GEOMÉTRICAS NO ENSINO MÉDIO.

Este exemplar corresponde à redação final da Dissertação defendida por Wilton Natal Milani e aprovada pela Comissão Examinadora.

Autor(a): Wilton Natal Milani

Orientador(a): Prof.ª Dr.ª Marger da Conceição Ventura Viana

Data: ____/____/______.

Assinatura____
Orientador(a)

COMISSÃO EXAMINADORA:

____
Prof(a). Dr(a). Maria do Carmo Vila (docente do programa) UFOP

____
Prof(a). Dr(a) Eliane Scheid Gazire (docente externo) PUC Minas

Ouro Preto, MG
2011

A Deus, à minha família,
aos amigos e alunos, dedico este trabalho,
pelo incentivo, credibilidade, carinho e paciência.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, pela vida, pelos ensinamentos e pelas orações.

Aos meus irmãos e cunhados pela torcida, admiração e incentivo.

Aos meus sobrinhos: Thais, Lara, Yaska, Isis, Arthur, Isabelle, Maria Clara, Caio, Sara e Pedro. Vocês são meus maiores motivos de felicidade.

À minha orientadora, Prof.ª. Dr.ª Marger, que, com dedicação, carinho e livros me ajudou nesta tarefa.

Ao meu companheiro inseparável de mestrado e afilhado Warley, pelas lições aprendidas, caronas, pela disponibilidade e parceria.

À Telma, Marcela, Daniel e Fernanda pelo apoio e ajuda. Agradeço também aos meus outros colegas de trabalho que sempre foram parceiros de caminhada.

Aos meus alunos, que fazem com que eu me sinta realizado toda vez que tenho a oportunidade de ensinar e aprender algo com eles, em especial, aos meus alunos pesquisados que tanto torceram, cobraram e vibraram com cada passo dado. Valeu galera!

Ao meu Tio Darci, pelo primeiro empurrão rumo ao professor que hoje sou.

Aos meus amigos, em especial Emerson, Léo Moreira e Rodrigo, que sempre estiveram comigo nesta caminhada.

À UFOP, pela oportunidade oferecida, em especial aos meus professores pelos ensinamentos, respeito, incentivo e preocupação.

RESUMO

As progressões aritméticas e geométricas são conteúdos de fundamental importância no Ensino Médio. Contudo, percebe-se, ao longo da experiência profissional e no contato com os colegas, que é tradicional o ensino das Progressões exclusivamente por meio de manipulação de fórmulas entregues aos alunos, muitas vezes sem as devidas demonstrações destas e também sua aplicabilidade, sendo assim empregados em exercícios tradicionais de sala de aula. Na aprendizagem da matemática, os problemas permitem ao aluno colocar-se diante de questionamentos e pensar por si próprio, possibilitando o exercício do raciocínio lógico e não apenas o uso padronizado de regras. Esta pesquisa apresenta os estudos acerca da Resolução de Problemas segundo Pozo, Schoenfeld, Lester, Onuchic, entre outros, para construir uma proposta de ensino de progressões aritméticas e geométricas. O propósito da pesquisa era responder à seguinte questão: Que contribuições, uma proposta de ensino baseada na resolução de problemas, pode trazer para a aprendizagem de progressões aritméticas e geométricas? Para isso, foi desenvolvida e implementada uma proposta de ensino de Progressões fundamentada na resolução de situações problemas e investigação em pequenos e grandes grupos em uma turma de 46 alunos do primeiro ano do Ensino Médio de uma escola particular de Ponte Nova/MG. Procurou-se apresentar aos alunos os conteúdos considerados pré-requisitos para posteriormente aplicar a metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Durante as atividades procurou-se seguir o roteiro sugerido por Onuchic (2008). A coleta de dados se deu por meio de diário de campo do pesquisador e registros produzidos pelos alunos ao longo das aulas. A análise de dados evidencia que além de envolver o pesquisado no processo de busca de seu conhecimento e oferecer-lhe oportunidade de pensar, possibilitou-lhe o desenvolvimento de habilidades como identificação do problema, seleção de estratégias de resolução, utilização de raciocínios indutivos e dedutivos; elaborar e validar conjecturas e finalmente a capacidade de argumentação.

Palavras-chave: Ensino Médio. Progressões Aritméticas e Geométricas. Resolução de Problemas.

ABSTRACT

The geometric and arithmetic progressions are contents of great importance within High School curriculum. However, it is possible to realize throughout the years of experience and contact with colleagues that the former topics are exclusively taught through the manipulation of formulas handed to the students. Most of the times the appropriate demonstrations and applicability are not exposed to students, therefore arithmetic and geometric progressions are used only in traditional classroom exercises. When it comes to Math, problem solving allows students to question the situations and think for themselves, replacing the simple use of standard rules for logical thinking. This piece of research presents the studies involving Problem Solving by Pozo, Schoenfeld, Lester, Onuchic, among others. Considering these studies the aim is to build a proposition for the teaching of arithmetic and geometric progressions. This piece of research aimed to answer the following question: What contributions could a proposal of teaching arithmetic and geometric progressions through problem solving bring to the learning process? In order to find answers a teaching strategy was developed and implemented. This strategy was based on problem solving and investigations carried out in small and large groups of a Freshman class of 46 students (first year of High School) of a private High School located in Ponte Nova/MG. The Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas (Math Teaching-Learning Evaluation through Problem Solving) methodology was carried out after students were presented with the required topics. The model suggested by Onuchic (2008) was followed during the activities. The data were collected through journals produced by the researcher and the students. The analysis of the data shows that through problem solving students had the opportunity to think and get involved in the search for their own knowledge. Improvements could also be observed in the ability to identify the problem, select strategies to solve it, use inductive and deductive thinking, as well as elaborating and validating conjectures and finally in the ability to discuss the process and results. The performances of students and their abilities to work with problem solving showed clear upturn according to the analysis of the data.

Key-words: High School. Arithmetic and Geometric Progressions. Problem Solving.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE SIGLAS

CBC – Proposta Curricular para o Ensino Médio do Estado de Minas Gerais

ENEM – Exame Nacional do Ensino Médio

GTERP – Grupo de Trabalho e Estudo sobre Resolução de Problemas

LDBEN – Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional

NCTM – *National Council of Teachers of Mathematics*

PCNEM – Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio

PUC-SP – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo

TCLE – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

UNESP – Universidade Estadual Paulista

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O desejo permanente de se tornar professor levou o pesquisador a ingressar, em 1988, no curso de Matemática da Universidade Federal de Viçosa (UFV), desejo tornado real em 1993, com a conclusão do curso.

Com a experiência de três anos na Educação Básica da Rede Estadual de Minas Gerais, encarou novos desafios, trabalhando no Amazonas e Pará em escolas da rede Pitágoras de Ensino por 8 anos, onde também atuou como Coordenador de Ensino Médio. Em seu retorno a Ponte Nova, Estado de Minas Gerais, ingressou na Rede Salesiana de Ensino e, paralelamente, cursou Especialização em Educação Matemática na Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP), onde teve seu primeiro contato com pesquisas, na área pela qual sempre se interessou: o processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

Atualmente, o professor-pesquisador, além de professor da Educação Básica da Rede Salesiana, atua como professor do Ensino Superior. Leciona disciplinas de Matemática e Didática para os cursos de Administração, Pedagogia e Matemática na Universidade Presidente Antônio Carlos, e também Matemática Básica para o curso de Farmácia e Raciocínio Lógico para Ciências Contábeis da Faculdade Dinâmica, ambas na cidade de Ponte Nova.

Com experiência em vários cenários da educação, percebe que a realidade da educação brasileira não é nada animadora, pois diariamente são noticiados fatos que comprovam esta afirmativa. Infelizmente o ensino de Matemática contribui negativamente para este quadro. Políticas públicas não têm sido suficientes e eficazes para reverter este quadro.

Na visão do pesquisador, falta à comunidade escolar tomar ciência do que o professor Moacir Gadotti (2001) relata:

> O papel da escola, que era de transmitir conhecimentos porque era um dos poucos espaços do saber elaborado, nesse momento, diante desses novos espaços de informação, a escola e o professor passam a ter uma outra característica que é

> a de gerenciar, de dar sentido ao conhecimento e a escolher o conhecimento. (GADOTTI, 2001, p.1).

Portanto, a riqueza de informações a que é possível, hoje, ter acesso, independentemente da escola, modifica o papel da educação escolar, o desafio atual é transformar informação em conhecimento e, assim, provocar a mobilidade de tais informações. Uma vez tomada a consciência desta nova função, novos procedimentos, novos métodos de ensino são implementados em prol de uma melhoria no atual quadro educacional.

Assim, após mais de 18 anos de profissão, o pesquisador observa que a aprendizagem, muitas vezes, não é alcançada a partir de métodos já assimilados pela escola, como a aula expositiva, a repetição e a cópia, tão criticados por especialistas em educação, a exemplo de Pedro Demo (1996).

A crítica não se restringe à aula expositiva, mas sim ao seu mau emprego, na maioria das vezes. Se o objetivo é apenas a apresentação de conceitos e ideias, sintetizar ou finalizar conteúdos, esta é tão boa quanto qualquer tipo de aula. Mas se o objetivo é o desenvolvimento de habilidades específicas, não seria o melhor recurso utilizado.

Atualmente, visando um maior envolvimento dos alunos na aprendizagem, pesquisadores apresentam vários procedimentos e recursos de ensino: debate, ensino com pesquisa, ensino por projetos, uso de material concreto, seminários, resolução de problemas, jogos, entre outros. Por outro lado, em geral, há um elevado número de alunos em sala de aula, recursos materiais e tempo limitados, comuns à realidade brasileira; talvez, por esse motivo, a aula expositiva continua sendo um recurso amplamente utilizado.

De fato, em todos os níveis de ensino, ainda é na aula expositiva que o professor apresenta no quadro as informações julgadas necessárias. O aluno, por sua vez, copia em seu caderno e, em seguida, faz os exercícios que muitas vezes são repetições dos modelos apresentados pelo professor. Esta prática contribui para certa compreensão da Matemática, assim descrita por Keith Devlin (2005):

> [...] ao longo dos anos a matemática tornou-se cada vez mais e mais complicada, as pessoas concentraram-se cada vez mais nos números, fórmulas, equações e métodos e perderam de vista o que aqueles números fórmulas e equações eram realmente e porque é que se desenvolveram aqueles métodos. Não conseguem entender que a matemática não é apenas manipulação de símbolos de acordo com regras arcaicas, mas sim a compreensão de padrões – padrões da natureza, padrões da vida, padrões da beleza. (DEVLIN apud VALE et al., 2005, p.14).

Além do acúmulo de fórmulas e algoritmos, que transforma a Matemática num conjunto de regras a serem seguidas, também há preocupação de professores em apresentar a maior quantidade de conteúdos e exercícios. Embora nem todos os professores ajam dessa forma, Beatriz D’Ambrósio (1989) é enfática ao criticar as aulas de Matemática, encaminhando o pensamento para a utilização de situações-problemas:

> Em nenhum momento no processo escolar, numa aula de matemática geram-se situações em que o aluno deva ser criativo, ou onde o aluno esteja motivado a solucionar um problema pela curiosidade criada pela situação em si ou pelo próprio desafio do problema. Na matemática escolar o aluno não vivencia situações de investigação, exploração e descobrimento. O processo de pesquisa matemática é reservado a poucos indivíduos que assumem a matemática como seu objeto de pesquisa. É esse processo de pesquisa que permite e incentiva a criatividade ao se trabalhar com situações problemas. (D’AMBRÓSIO, 1989, p.2).

De fato, muito se tem falado sobre a necessidade de promover nos alunos a capacidade de aprender a aprender, isto é, que adquiram habilidades e estratégias que lhes permitam adquirir, por si mesmos, novos conhecimentos, que os tornem capazes de enfrentar contextos e situações diversificadas. E, segundo Juan Ignácio Pozo (1998), uma das formas mais acessíveis para levar o aluno a aprender a aprender é a resolução de problemas.

No entanto, na literatura sobre problemas não é raro encontrar concepções diversas, e até mesmo antagônicas, sobre a distinção entre exercícios e problemas. Baseando-se em Pozo (1998), tem-se, preliminarmente, a ideia de que resolver exercícios se baseia no uso de habilidades ou de técnicas que foram transformadas em rotinas como consequência de uma prática contínua, enquanto problema é uma situação nova ou diferente do que já foi aprendido.

Como o pesquisador exerce o magistério na Educação Básica, sempre se sentiu incomodado com o processo repetitivo do ensino mecânico de fórmulas. Além disso, muitas vezes as demonstrações de tais fórmulas não têm significado para os alunos e, por isso, lhes é fornecida uma lista de exercícios e/ou situações-problemas como forma de exercitação. No entanto, é comum o debate entre professores de Matemática, se devem ou não apresentar aos alunos as demonstrações de fórmulas, uma vez que muitos deles não entendem o processo, ou mesmo não se interessam, pois sabem que no final o professor lhes cobrará apenas a aplicação destas fórmulas. Como exemplo, podem ser citadas as fórmulas da Trigonometria, da Geometria Analítica e em especial das Progressões, pois na experiência do pesquisador, os alunos, geralmente, não gostam do conteúdo Progressões, talvez pelo uso excessivo de fórmulas.

Como as sequências numéricas estão relacionadas aos processos de contagem e ao desenvolvimento dos sistemas de numeração, encontramos problemas envolvendo diversos tipos de sequências em importantes documentos de civilizações antigas. Por volta de 2000 a.C., na Babilônia, já se trabalhava com tábuas de cálculos, nas quais se encontravam sequências de quadrados e cubos de números inteiros. Na Grécia, lidavam com os números triangulares, quadrados e o crivo de Erastóstenes (EVES, 2004). Assim, encontramos farto material para trabalhar compreensivamente padrões, e até mesmo motivar o estudo, chamando a atenção dos alunos para padrões encontrados.

Além disso, as progressões aritméticas e geométricas fazem parte das sugestões dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) e da proposta curricular de ensino do Estado de Minas Gerais (CBC). Para fugir das fórmulas prontas, o pesquisador costuma trabalhar o conteúdo, iniciando os alunos na busca por padrões.

Isto se explica, por exemplo, porque o aluno que tem chance de pensar e agir em situações especialmente arquitetadas para a construção de novas ideias e de novos procedimentos matemáticos tem mais possibilidade de aprender Matemática. Neste caso, a resolução de problemas pode produzir uma situação de aprendizagem.

> A resolução de problemas é peça central para o ensino de matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está

> engajado ativamente no enfrentamento de desafios. Esta competência não se desenvolve quando propomos apenas exercícios de aplicação de conceitos e técnicas matemáticas, pois, neste caso, o que está em ação é uma simples transposição analógica: o aluno busca na memória um exercício semelhante e desenvolve passos análogos aos daquela situação, o que não garante que seja capaz de usar seus conhecimentos em situações diferentes ou mais complexas. (BRASIL, 2002, p.112).

Os exercícios mais técnicos, do tipo: "calcule", "resolva" etc. possuem seu valor, pois eles cumprem o papel do aprendizado de técnicas e propriedades, mas de forma alguma são suficientes para que o aluno desenvolva o pensar matemático, nem tampouco o prepara para que possa continuar aprendendo, ou, ainda, que construa ferramentas para intervenções no mundo à sua volta. No entanto, ler a sugestão é uma coisa, colocá-la em prática é outra.

Trabalhando com uma turma do primeiro ano do Ensino Médio de uma escola particular da cidade de Ponte Nova, o pesquisador percebeu nos alunos uma falta de interesse, comprovada pela pouca vontade deles em realizar as atividades propostas.

Incomodado e insatisfeito com os resultados que estava obtendo, ao ter que abordar o assunto Sequências Numéricas e, posteriormente, Progressões Aritméticas e Geométricas, o pesquisador decidiu buscar formas diferenciadas para trabalhar com estes conteúdos.

Decidido a mudar a metodologia de trabalho, o pesquisador, enquanto professor, buscou leituras que pudessem auxiliá-lo a propor modificações em suas aulas. Decidiu elaborar uma série de atividades para os alunos realizarem, utilizando apenas seus conhecimentos prévios sobre operações numéricas. Isto com o intuito de levá-los a uma maior familiarização com o assunto, e efetuarem os primeiros cálculos envolvendo as sequências numéricas. Com o término do trabalho, o pesquisador julgou o resultado muito satisfatório.
Desejando elaborar uma proposta dentro dos parâmetros do método científico e comprová-la nesses moldes, o professor, agora, enquanto pesquisador, decidiu elaborar um problema de investigação representado por meio da seguinte questão:

Que contribuições uma proposta de ensino baseada na resolução de problemas pode trazer para a aprendizagem de progressões aritméticas e geométricas?

O **objetivo** foi investigar as possíveis contribuições que uma proposta de ensino, baseada na resolução de problemas, pode trazer para a aprendizagem de progressões aritméticas e geométricas.

O **objeto de estudo** foi as possíveis contribuições que uma proposta de ensino baseada na resolução de problemas pode trazer para a aprendizagem de progressões aritméticas e geométricas.

Para dar resposta à pergunta de investigação e alcançar o objetivo proposto, foram realizadas as seguintes tarefas de investigação:

A principio, foi realizada uma pesquisa teórico-bibliográfica a partir da análise de livros, artigos, dissertações e teses, relacionados à resolução de problemas, progressões aritméticas e geométricas, como, por exemplo, em Isabel Vale e Tereza Pimentel (2005), Pozo (1998), Antoni Vila e María Luz Callejo (2006) e Lourdes de La Rosa Onuchic (1999), dentre outros, citados nas referências bibliográficas.

Em seguida, baseando-se nas leituras realizadas, foram levantadas hipóteses, numa perspectiva de propor uma sequência instrucional de atividades para o ensino de progressões aritméticas e geométricas, tendo como metodologia de ensino a resolução de problemas a serem solucionados pelos pesquisados.

O passo seguinte foi selecionar a população alvo: alunos do primeiro ano do Ensino Médio.

Posteriormente, foi elaborada e implementada uma proposta de ensino de progressões aritméticas e geométricas, baseada na resolução de problemas. Tal proposta fundamenta-se nas leituras realizadas. Foram formuladas questões que possibilitassem habilidades de formulação, argumentação e soluções de problemas. O aluno deveria estabelecer relações entre fatos, objetos, noções e conceitos para que assim pudesse utilizar o que aprendeu em diferentes situações.

A pesquisa de campo foi realizada no 2° semestre de 2010, com 46 alunos regularmente matriculados no 1º ano do Ensino Médio de uma escola particular, da cidade de Ponte Nova, escolhida por ser a escola na qual o pesquisador é professor.

O trabalho de campo foi realizado no horário regular das aulas da turma, a cargo do pesquisador, onde procurou manter a rotina da escola, o ambiente e o material didático, sempre que possível. Em números, foram 18 aulas de 50 minutos, durante 5 semanas.

Desta dissertação consta uma Introdução, contendo a justificativa da pesquisa, o problema a ser pesquisado, o objeto de estudo, o objetivo, a população-alvo, as tarefas e a metodologia. Um Capítulo 2, contendo um estudo teórico sobre as progressões aritméticas e geométricas. Um Capítulo 3, contendo um estudo teórico sobre a resolução de problemas e um Capítulo 4, contendo a metodologia da pesquisa. No capítulo 5 estão os dados coletados, agrupados e analisados. Em seguida vêm as Considerações Finais, contendo as conclusões e recomendações, as Referências e, finalmente, os Apêndices.

CAPÍTULO 1

PROGRESSÕES ARITMÉTICAS E PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS

Neste capítulo, é apresentada uma síntese acerca das progressões: da história aos documentos oficiais, passando por orientações, sugestões, e, finalmente, buscando destacar algumas pesquisas produzidas sobre o tema no Brasil.

1.1 História das progressões

As sequências numéricas estão relacionadas aos processos de contagem e ao desenvolvimento dos sistemas de numeração. Por esse motivo, encontramos problemas envolvendo diversos tipos de padrões e sequências em importantes documentos de civilizações antigas.

O estabelecimento de padrões fez-se necessário para os egípcios entenderem as enchentes do Rio Nilo. Para plantar na época certa, tiveram que observar os períodos de cheias e secas do rio. Acompanhando a frequência de enchentes, os egípcios criaram um calendário solar composto de 12 meses, de 30 dias e mais 5 dias de homenagens aos seus deuses. Dividiram ainda o ano em três estações: época de semear, época de crescimento e de colheita.

Segundo Eves (2004), por volta de 4700 a.C., na Babilônia, além de existir um calendário solar próprio, já se trabalhava com tábuas de cálculos nas quais se encontravam sequências de quadrados e cubos de números inteiros. A tabula do Louvre apresenta a soma da sequência de quadrados de inteiros $1 + 2 + 2^2 +... + 2^9$. Outras tabulas babilônicas apresentavam problemas envolvendo juros compostos.

O domínio da tecnologia do papiro, planta típica encontrada às margens do Rio Nilo, possibilitou o registro de informações e o conhecimento que temos hoje da matemática egípcia. No papiro de Rhind (ou Ahmes), texto matemático que data aproximadamente de

1650 a.C., há 85 problemas copiados pelo escriba Ahmes, de um trabalho mais antigo. Trata-se de uma fonte rica sobre a Matemática egípcia antiga, que contém alguns problemas a respeito de progressões aritméticas e geométricas. Ahmes apresenta o seguinte problema envolvendo uma progressão aritmética: “Divida 100 pães entre cinco pessoas; um sétimo do que recebem as três primeiras é o que recebem as duas últimas. Qual é a diferença?” (CAJORI, 2007, p.40).

Com relação à progressão geométrica, o papiro apresenta a sequência 7, 49, 343, 2401, 16807. Junto a estas potências de 7, segundo Cajori (2007), estão as palavras: desenho, gato, rato, cevada e medida. Sobre esse problema, Leonardo de Pisa em seu livro Liber Abaci, 3000 anos depois, apresentou sua versão:

> Há sete senhoras idosas na estrada de Roma. Cada senhora tem sete mulos; cada mulo transporta sete sacos; cada saco contém sete pães; com cada pão há 7 facas; para cada faca há sete bainhas. Entre mulheres, mulos, sacos, pães, facas e bainhas, quantos estão na estrada de Roma? (CAJORI , 2007, p. 40).

Segundo Eves (2004), o historiador Moritz Cantor, em 1907, deu a seguinte interpretação para o problema original do papiro de Rhind:

> Uma relação de bens consistia em sete casas; cada casa tinha sete gatos; cada gato comeu sete ratos; cada rato comeu sete espigas de trigo; e cada espiga de trigo produzia sete hecates de grãos. Casas, gatos, ratos, espigas de trigo e hecates de grãos, quanto havia disso tudo? (EVES, 2004, p. 76).

No papiro de Rhind também aparece uma progressão geométrica muito curiosa formada pelas frações 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32, 1/64 do hecate (unidade usada para medir volume de grãos). Os elementos dessa sequência são conhecidos como frações dos olhos do deus Hórus.

Segundo Eves (2004), por volta de 572 a.C., nasce Pitágoras na ilha egeia de Samos. Provável discípulo de Tales viveu em Mileto e, fugindo do poder de tiranos, fundou a famosa escola pitagórica em uma colônia grega situada ao sul da Itália. A crença de que a causa última das várias características do homem e da matéria são os números inteiros levou os pitagóricos a um estudo intenso da teoria dos números, da geometria, da música e da astronomia.

Os pitagóricos conheciam as progressões geométricas, aritméticas, as harmônicas e musicais, as proporções, os quadrados de uma soma ou de uma diferença. Através de suas observações, concluíram que os intervalos musicais se colocam de modo que admitem expressão através de progressões geométricas.

Ainda de acordo com Eves (2004), os números figurados se originaram com os membros mais antigos da escola pitagórica. Esses números, que expressam o número de pontos em certas configurações geométricas, representam um elo entre a geometria e a aritmética. Para se calcular os n-ésimos números triangulares e pentagonais, os pitagóricos utilizavam a soma da progressão aritmética.

Embora haja muita incerteza sobre datas, vida e obras, seguramente, Euclides de Alexandria produziu uma das obras mais importantes da Matemática: Os Elementos. Cajori (2007) afirma que tal obra contém bastante teoria dos números e álgebra elementar.

Os Elementos são compostos de 465 proposições, distribuídas em treze livros. O livro VIII apresenta uma ampla abordagem sobre proporções contínuas e progressões geométricas a elas relacionadas. Dada uma proporção contínua a: b = b: c = c: d, então a, b, c, d formam uma progressão geométrica.

O livro IX, último dos três sobre teoria dos números, fornece na proposição 35 uma dedução geométrica da fórmula da soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica, assim anunciada: “Se tantos números quantos quisermos estão em proporção continuada, e se subtrai do segundo e último número iguais ao primeiro, então assim como o excesso do segundo está para o primeiro, o excesso do último estará para todos os que precedem”. (EVES, 2004, p. 175).

Diofanto de Alexandria, citado pela maioria dos historiadores no século III, ocupa lugar de destaque no desenvolvimento da álgebra e exerceu, sobre os europeus, forte influência no estudo da teoria dos números. Ele escreveu três trabalhos: Aritmética, Sobre Números Poligonais e Porismas, que, segundo Pappus, seria algo entre teorema e um problema. Com uma abordagem analítica da teoria algébrica dos números, o trabalho que consagrou seu autor como gênio em seu campo foi a obra intitulada Aritmética. A parte do livro que foi preservada contém a resolução de 130 problemas, muitos deles levam a equações de primeiro e de segundo grau.

Em Aritmética, o autor, que somente admitia respostas entre os números racionais positivos, apresenta dois problemas envolvendo progressões. O problema 7 propõe: “Encontre três números em progressão aritmética, sabendo-se que a soma de dois quaisquer deles também é um quadrado”. A resposta, segundo Diofanto é 120/2, 840/2, 1560/2. Os números 81/7, 144/7 e 256/7 são a resposta para o problema 21 que anuncia: “Encontre três números em Progressão Geométrica de maneira que a diferença dentre dois quaisquer deles é um quadrado”.

Os hindus, hábeis aritméticos com contribuições significativas à álgebra, somavam progressões aritméticas e geométricas e resolviam problemas comerciais envolvendo juros simples e compostos, descontos e regras de sociedade.

O matemático hindu de maior destaque foi Bhaskara, que se crê ter vivido no século XII. Seu livro mais famoso é o Lilavati. Escrito em 278 versos, trata de vários assuntos: tabelas, o sistema de numeração, as oito operações, frações, zero, regra de três, regra de três composta, porcentagens, progressões, geometria e permutações. Um destes problemas envolve progressões e apresenta o seguinte enunciado: “Numa expedição para calcular os elefantes de seu inimigo, um rei marchou 2 yojanas (medida usada na época) no primeiro dia. Diga, calcular inteligentemente, a razão com que sua marcha diária aumentou, se ele alcançou a cidade do inimigo, a uma distância de 80 yojanas, em uma semana?”.

No inicio do século XIII, teve destaque o Matemático mais talentoso da Idade Média: Leonardo de Pisa (ou Fibonacci). Em 1202 publicou sua obra mais famosa, intitulada Liber abaci, trabalho que se ocupa de aritmética e álgebra elementares.

Os quinze capítulos do Liber abaci envolvem a notação indo-arábica, métodos de cálculo com inteiros, frações e raízes. Com uma farta coleção de problemas que serviu de fonte para outros autores, o livro apresenta o problema dos pares de coelhos: "Para tal, um indivíduo coloca um par de coelhos jovens num certo local rodeado por todos os lados por uma parede. Queremos saber quantos pares de coelhos podem ser gerados, durante um ano, por esse par, assumindo que pela sua natureza, em cada mês dão origem a um outro par de coelhos, e no segundo mês após o nascimento, cada novo par pode também gerar". Este problema deu origem à importante sequência de Fibonacci (1,1, 2, 3,5,...x, y, x+y,.....).

Em outro problema do livro, Fibonacci apresenta um problema envolvendo juros e progressões: “Um certo homem aplica 1 denário a uma taxa de juros tal que em 5 anos ele fica com 2 denários e, daí em diante, a cada 5 anos a importância acumulada dobra. Pergunto: quantos denários ele ganharia em 100 anos, a partir de seu denário inicial?”.

No século XVI, Michael Stifel publica a obra Arithmetica Íntegra, que o transforma no maior algebrista do século. A obra divide-se em 3 partes dedicadas, respectivamente, aos números racionais, números irracionais e álgebra. Segundo Eves (2004), na primeira parte do livro, Stifel ressalta as vantagens de se associar uma progressão aritmética a uma geométrica, prenunciando assim, de quase um século, a invenção dos logaritmos.

Em 1614, John Napier publicou o seu *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (Uma Descrição do Maravilhoso Cânon de Logaritmos) que continha uma descrição dos logaritmos, um conjunto de tabelas, e regras para o uso deles. Com tal feito, Napier revelou possuir completo conhecimento da correspondência entre progressões, pois o que ele chamava de tábua de logaritmos era uma tabela de duas colunas (ou de duas linhas), colocando em correspondência os termos de uma progressão geométrica (na verdade, potências de certo número) com os de uma progressão aritmética.

John Napier (1550-1617), para eliminar as longas multiplicações e divisões e fugir das longas prostaférese (palavra grega que significa “adição e subtração”), se baseia no fato de que, associando-se aos termos de uma progressão geométrica: $b, b^2, b^3, b^4,..., b^m, ..., b^n, ...$ aos da progressão aritmética: $1, 2, 3, 4, ..., m, ..., n, ...$, então o produto $b^m.b^n = b^{m+n}$ de dois termos de primeira progressão está associado à soma $m+n$ dos termos correspondentes da segunda progressão. Para manter os termos da “progressão geométrica” suficientemente próximos do modo que se possa usar interpolação para preencher as lacunas entre os termos da correspondência precedente, deve-se escolher o número b bem próximo de 1.

No século XVII, Abraham De Moivre, francês, amigo íntimo de Isaac Newton, lançou obras importantes sobre teoria das probabilidades, séries recorrentes, probabilidade e trigonometria analítica. Segundo Eves (2004), há uma lenda interessante envolvendo a morte de De Moivre. Segundo ela, De Moivre teria revelado, certa ocasião, que daí para frente teria que dormir, em cada dia, quinze minutos a mais do que no dia precedente. E quando essa “progressão aritmética” atingiu 24 horas ele de fato teria morrido.

Talvez, o principal matemático a quem se atribuiu uma grande contribuição relacionada à Progressão Aritmética seja Johann Friederich Carl Gauss. Ele nasceu em Brunswick, Alemanha, em 30 de Abril de 1777. De família humilde, mas com o incentivo de sua mãe, sua carreira foi notável. Desde os três anos de idade, Gauss sabia ler e fazer cálculos aritméticos mentalmente. Segundo Eves (2004), aos 10 anos de idade, durante uma aula de matemática seu professor pediu para que todos os alunos obtivessem a soma dos números de 1 a 100. Mal acabara de dar a ordem, Gauss se ergue, dando-lhe o resultado: 5050. O professor repreende-o, pelo que julgava ser uma brincadeira desrespeitosa (ele próprio ainda não calculara o resultado), mas a criança explica sua resposta. Tinha observado, durante a formulação da questão, que a soma de todos os números de 1 a 100 era igual a cinquenta vezes a soma do primeiro com o último (1 + 1 00 = 1 0 1), do segundo com o penúltimo (2 + 99 = 101), e assim por diante. Ora, 50 X 101 é igual a 5 050. Assim, multiplicou a constante pelo número de termos e dividiu pela metade, chegando à fórmula da soma da progressão aritmética:

$$S = \frac{(a_1 + a_n).n}{2} \tag{1}$$

Segundo Lima (2010), na doutrina de Charles Robert Darwin, biólogo famoso, também se pode encontrar as Progressões Aritméticas e Geométricas. Num dos quatro itens fundamentais de sua doutrina, encontra-se uma referência às Progressões Geométricas e Aritméticas, influência das ideias de Thomas Malthus, famoso economista. Malthus afirmou que: “As populações crescem em P.G. ao mesmo tempo em que as reservas alimentares para elas crescem apenas em P. A.”

Em consequência desse item, Darwin apud Lima (2010) afirmou que:

> [...] devido a tal desproporção, os indivíduos empenhar-se-iam numa luta pela vida, ao final da qual seriam selecionados os mais fortes ou os mais aptos – a seleção natural – de alguns indivíduos em detrimento de muitos outros. (LIMA, 2010, p. 24).

A comparação de Malthus entre o crescimento populacional e as reservas alimentares não é mais aceita atualmente, pois, apesar da maior taxa de crescimento populacional, não há uma desproporção tão grande.

1.2 Os documentos oficiais e as progressões no Ensino Médio

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, LDBEN, Lei 9.394/96 (BRASIL, 1996), propõe para o Ensino Médio a formação geral em oposição à formação específica e o desenvolvimento das habilidades de pesquisar, buscar informações, analisá-las e selecioná-las; a capacidade, enfim, de aprender, criar, formular. Dessa forma, buscou conferir uma nova identidade ao Ensino Médio por meio de uma reforma curricular, posicionando-o como a etapa final da Educação Básica, complementando o aprendizado iniciado no Ensino Fundamental.

O documento produzido foi apresentado aos Secretários de Educação das Unidades Federadas e encaminhado ao Conselho Nacional de Educação, em 7 de julho de 1997, solicitando-se o respectivo parecer.

O Conselho Nacional de Educação regulamenta os dispositivos da LDBEN, por meio das Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, Resolução n° 3 de 26 de junho de 1998 (BRASIL, 1998). Estes dispositivos, que têm força de lei, foram explicitados de forma mais detalhada e direcionados aos professores e demais responsáveis diretos pelo sistema educacional brasileiro, em 1999, quando da publicação dos Parâmetros Nacionais para o Ensino Médio, PCNEM (BRASIL, 1999). Este documento foi complementado, em 2002, por outras orientações educacionais que aprofundam os sentidos dos princípios fundamentais das reformas pretendidas e apresentadas nos documentos legais anteriormente lembrados.

A LDBEN propõe uma nova identidade para o Ensino Médio por meio de um conjunto de iniciativas do Ministério da Educação que incluem a avaliação de livros didáticos e o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). O Ensino Médio é definido como etapa final da formação básica do aluno, sendo responsável pela sua formação, integrando projeto individual ao projeto da sociedade em que está inserido, aprimoramento e preparação para o mundo do trabalho e para uma aprendizagem autônoma.

Analisando no documento elaborado (PCNEM, 1999), a concepção de currículo adotada, evidencia-se que:

> O currículo a ser elaborado deve corresponder a uma boa seleção, deve contemplar aspectos dos conteúdos e práticas que precisam ser enfatizados. Outros aspectos merecem menor ênfase e devem mesmo ser abandonados por parte dos organizadores de currículos e professores. Essa organização terá de cuidar dos conteúdos mínimos da Base Nacional Comum, assim como fazer algumas indicações sobre possíveis temas que podem compor a parte do currículo flexível, a ser organizado em cada unidade escolar, podendo ser de aprofundamento ou direcionar-se para as necessidades e interesses da escola e da comunidade em que ela está inserida. [...] Sem dúvida, os elementos essenciais de um núcleo comum devem compor uma série de temas ou tópicos em Matemática escolhidos a partir de critérios que visam ao desenvolvimento das atitudes e habilidades descritas anteriormente. (BRASIL, 1999, p. 255).

Na página os PCNEM (1999) propõem uma nova visão sobre a organização curricular, afirmando:

> O aprendizado deve ser planejado desde uma perspectiva a um só tempo multidisciplinar e interdisciplinar, ou seja, os assuntos devem ser propostos e tratados desde uma compreensão global, articulando as competências que serão desenvolvidas em cada área e no conjunto das áreas. Mesmo dentro de cada disciplina, uma perspectiva mais abrangente pode transbordar os limites disciplinares. (BRASIL, 1999, p. 211).

Ainda segundo os PCNEM (1999):

> A Matemática, por sua universalidade de quantificação e expressão, como linguagem, portanto, ocupa uma posição singular. No Ensino Médio, quando nas ciências torna-se essencial uma construção abstrata mais elaborada, os instrumentos matemáticos são especialmente importantes. Mas não é só nesse sentido que a Matemática é fundamental. Possivelmente, não existe nenhuma atividade da vida contemporânea, da música à informática, do comércio à meteorologia, da medicina à cartografia, das engenharias às comunicações, em que a Matemática não compareça de maneira insubstituível para codificar, ordenar, quantificar e interpretar compassos, taxas, dosagens, coordenadas, tensões, freqüências e quantas outras variáveis houver. A Matemática ciência, com seus processos de construção e validação de conceitos e argumentações e os procedimentos de generalizar, relacionar e concluir que lhe são característicos, permite estabelecer relações e interpretar fenômenos e informações. As formas de pensar dessa ciência possibilitam ir além da descrição da realidade e da elaboração de modelos. (BRASIL, 1999, p. 211).

A organização da Matemática, nessa etapa da Educação Básica, pretende contemplar a necessidade de inserir o aluno num mundo cheio de mudanças e contribuir para que ele, com suas múltiplas capacidades e com diferentes interesses, possa exercer sua cidadania e tomar decisões em sua vida pessoal e profissional.

Os PCNEM (1999) ainda chamam a atenção para:

> A Matemática no Ensino Médio tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, porém também desempenha um papel instrumental, pois é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas. (BRASIL, 1999, p. 251).

Mas o documento também ressalta que:

> A Matemática no Ensino Médio não possui apenas o caráter formativo ou instrumental, mas também deve ser vista como ciência, com suas características estruturais específicas. É importante que o aluno perceba que as definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos têm a função de construir novos conceitos e estruturas a partir de outros e que servem para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas. (BRASIL, 1999, p. 252).

Nesse sentido, é ressaltada a importância de os objetivos do ensino de Matemática apontarem para uma aprendizagem significativa para os alunos.

As finalidades do ensino de Matemática, no nível médio, indicam como objetivos levar o aluno a:

> Compreender os conceitos, procedimentos e estratégias Matemáticas que permitam a ele desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral;
> Aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas;
> Analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando ferramentas Matemáticas para formar uma opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas da Matemática, das outras áreas do conhecimento e da atualidade;
> Desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo;
> Utilizar com confiança procedimentos de resolução de problemas para desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos;
> Expressar-se oral escrita e graficamente em situações Matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática;
> Estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo;
> Reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados às diferentes representações;
> Promover a realização pessoa mediante o sentimento de segurança em relação às suas capacidades Matemáticas, o desenvolvimento de atitudes de autonomia e cooperação. (BRASIL, 1999, p. 254).

Do documento se depreende que aprender matemática neste nível de ensino requer um processo lento e trabalhoso, que objetiva um saber fazer matemática e um saber pensar matemático. Este processo, cujo começo deve ser uma prolongada atividade sobre resolução de problemas de diversos tipos, tem o objetivo de levar o aluno a elaborar conjecturas, estimular a busca de regularidades, a generalização de padrões e a capacidade de argumentação. Afirmam ser este o caminho para o processo de formalização do conhecimento matemático e para o desenvolvimento de habilidades essenciais à realidade do aluno.

Segundo os PCNEM (1999), as funções são um exemplo para fazer uma Matemática contextualizada e interdisciplinar. Isto significa que:

> [...] é o potencial de um permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático, ou, ainda, a relevância cultural do tema, tanto no que diz respeito às suas aplicações dentro ou fora da Matemática, como à sua importância histórica no desenvolvimento da própria ciência. (BRASIL, 1999, p. 255).

Além de ressaltar o caráter integrador do tema função e a importância de escrever e estudar os gráficos e o comportamento de certos fenômenos de áreas como Física, Geografia e Economia, destaca que "as sequências, em especial as progressões aritméticas e progressões geométricas nada mais são que particulares funções." (BRASIL, 1999, p. 255).

Após a implantação e estudo dos PCNEM, muitos pontos precisaram ser aprofundados. Em 2006, a Secretária de Educação Básica encaminhou à comunidade educativa o documento Orientações Curriculares para o Ensino Médio, com o objetivo de oferecer alternativas didático-pedagógicas para a organização do trabalho pedagógico e atender às necessidades e às expectativas das escolas e professores na estruturação do currículo para o Ensino Médio. Este documento trata de três aspectos: a escolha dos conteúdos; a forma de trabalhar os conteúdos; o projeto pedagógico e a organização curricular.

Sobre os conteúdos, o documento salienta a prioridade à qualidade do processo e não à quantidade de conteúdos a serem trabalhados. Sugere o descarte de exigências de memorização, as apresentações de "regras" desprovidas de explicações, a resolução maciça de exercícios de fixação ou a aplicação direta de fórmulas. Orienta ainda o afastamento da compartimentalização e a articulação entre os diferentes conteúdos.

Sugere, ainda, sobre progressões:

> As progressões aritmética e geométrica podem ser definidas como, respectivamente, funções afim e exponencial, em que o domínio é o conjunto dos números naturais. Não devem ser tratadas como um tópico independente, em que o aluno não as reconhece como funções já estudadas. Devem-se evitar as exaustivas coletâneas de cálculos que fazem simples uso de fórmulas (“determine a soma...”, “calcule o quinto termo...”). (BRASIL, 2006, p. 75).

Ainda sobre o Ensino Médio, a Secretaria de Estado da Educação de Minas Gerais, em sua proposta curricular para o Ensino Médio (CBC, 1995), apresenta os conteúdos básicos comuns a serem trabalhados, bem como as habilidades e competências que os alunos devem adquirir e desenvolver. Este material contém um rol de orientações para os professores, além de listar sugestões de atividades que podem ser desenvolvidas em sala de aula.

No que concerne a sequências, progressões aritméticas e geométricas, o CBC faz as seguintes sugestões:

> Relacionar o cálculo de prestações em financiamentos com a progressão geométrica; Utilizar a soma dos termos de uma Progressão Aritmética ou Progressão Geométrica para fazer estimativas; Propor exercícios de traçar o gráfico de uma Progressão Geométrica com razões maior do que um e menor do que um; Discutir problemas que envolvam crescimento populacional (Malthus) em Biologia ou de expansão de uma epidemia, usando dados concretos; Discutir problemas que envolvam a absorção de medicamentos (por exemplo, antibióticos e a necessidade do período de dosagem). (CBC, 1995, p. 70-73).

As propostas de atividades sinalizam para uma Matemática contextualizada, além de exemplificarem aplicabilidades das progressões no cotidiano. Dessa forma, se o ponto de partida é a realidade do aluno, esta também será o ponto de chegada, mas com um novo olhar e com uma nova compreensão que vai além do cotidiano, do espaço próximo do aluno.

As propostas dos documentos oficiais, em síntese, procuram acabar com a passividade do aluno, produzindo uma aprendizagem significativa e desenvolvendo o conhecimento espontâneo em direção ao conhecimento abstrato. Apenas utilizar procedimentos, conceitos e técnicas operatórias em sala de aula pouco contribuirão com a formação do aluno cidadão se o mesmo não souber onde e como aplicá-los no seu cotidiano.

1.3 Algumas pesquisas sobre o tema

Ao se trabalhar com progressões aritméticas e geométricas, o professor necessita antes propor a exploração de conceitos e atividades referentes a padrões e sequências numéricas. Embora esse conteúdo esteja presente nas propostas para o Ensino Médio, não se trata de um assunto amplamente pesquisado. Em pesquisas feitas, pode-se constatar que a PUC-SP (Pontifícia Universidade Católica de São Paulo) possui a maioria das pesquisas versando sobre o tema. Cabe, então, comentar alguns estudos que foram reunidos pelo pesquisador.

O trabalho com generalização de padrões tem sido foco de muitos pesquisadores, em destaque as portuguesas Isabel Vale e Teresa Pimentel (2005) que julgam importante a generalização, para que os alunos criem expressões algébricas ou recursos que conduzam a estas, assim, desenvolvendo as suas capacidades de raciocínio algébrico.

Segundo as autoras, os padrões ajudam os alunos a aprender uma matemática significativa, envolvem na sua aprendizagem levando-os a descobrir relações, encontrar conexões, fazer generalizações e também previsões. Para isso os alunos devem ter oportunidade de:

> Transferir padrões [...] de uma representação para outra; averiguar se uma lista de números mostra alguma regularidade; descobrir o padrão numa sequência; descrever o padrão oralmente e por escrito; continuar uma sequência; prever termos numa sequência; generalizar; construir uma sequência. (VALE e PIMENTEL, 2005, p. 16).

Para o Ensino Médio, afirmam que a resolução de problemas que recorra ao trabalho investigativo é o caminho ideal para o estudo das progressões.

Elisangela Parra Zigart Perez (2006), em sua pesquisa de Mestrado, investigou como 9 alunos de todas as séries do Ensino Médio, no interior de São Paulo, resolviam situações-problemas que envolviam generalização de padrões. Mais especificamente, buscava perceber se em 2 sessões de 60 minutos, os alunos seriam capazes de generalizar padrões numéricos e daí encontrar a regra que conduzia ao termo geral de sequências.
Na primeira sessão as atividades solicitavam a indicação do termo seguinte e o 127º termo de sequências numéricas diversas e, na segunda, a autora trabalhou uma atividade com padrão geométrico proposta por Lesley Lee (1996). A pesquisadora afirmou que os alunos resolveram as questões utilizando estratégias diversificadas, objetivo de sua pesquisa.

Como resultado, a pesquisadora relatou que, mesmo apresentando dificuldades em escrever algebricamente a regra geral das sequências, os alunos resolveram as questões e que:

> Por meio da análise de resultados, constatei que os alunos pesquisados tiveram uma imagem mais positiva da matemática, tendo oportunidade de desenvolver o conhecimento de novos conceitos. Experenciaram o poder e a utilidade dela para desenvolver o conhecimento sobre novos conceitos; evidenciar como os diferentes conhecimentos matemáticos se relacionam entre si e muitas vezes até em outras matérias e tiveram oportunidade de melhorar a compreensão do sentido da álgebra. (PEREZ, 2006, p. 114).

Já o objetivo de Andrea Gomes Nazuto Gonçalves (2007) foi investigar o aprendizado de Progressões Geométricas via fractais e suas influências sobre a construção do conhecimento deste assunto para a sua pesquisa de mestrado. Assim, desenvolveu uma sequência de ensino, apoiada na engenharia didática, constituída por 3 blocos: construção de fractais, Geometria Dinâmica para representar os fractais e finalmente as generalizações.

A pesquisadora justifica que além de trazer a tecnologia para a sala de aula, pois os recursos tecnológicos dão ao aluno a mobilidade que o lápis e papel não permitem, as progressões geométricas foram escolhidas porque permitem explorar os fractais dando a eles a relevância, fazendo com que fossem percebidos como instrumentos facilitadores para o aprendizado da Matemática.

A sequência de ensino aplicada em 6 encontros, com 22 duplas das três séries do Ensino Médio de uma escola particular em Mauá, Estado de São Paulo, tinha como objetivos específicos: favorecimento da construção das fórmulas da Progressão Geométrica via confecção de fractais de dobraduras; favorecimento da construção das fórmulas da Progressão Geométrica via Geometria Dinâmica, com a utilização dos softwares Cabri-Géomètre e iGeom; construção das fórmulas do termo geral, soma dos n primeiros termos e soma dos infinitos termos das Progressões Geométricas apresentadas nas atividades com fractais.

Como conclusão, Gonçalves (2007) afirmou que a confecção permitiu ao aluno a descoberta de propriedades inerentes aos fractais, passando a desenvolver o processo de generalização e também despertando o senso estético que age motivando o aprendizado matemático. Concluiu ainda que a auto-semelhança verificada nos fractais contribuiu para o processo de generalização das fórmulas de Progressão Geométrica, no sentido que desenvolveu no aluno a percepção dos padrões que levam à construção de conjecturas.

O pesquisador César Augusto Sverberi Carvalho (2008), em sua dissertação, buscou verificar se é possível criar condições para que alunos da 1ª série do Ensino Médio generalizassem termos de Progressões Aritméticas e, conseguinte, a fórmula para o termo geral.

Utilizando fases da engenharia didática, o autor, em 3 sessões de 90 minutos, trabalhou com 35 alunos dispostos em duplas ou trios, com atividades que contemplaram a observação de sequências e posterior investigação de uma regra de generalização dos termos de Progressões Aritméticas.

Na primeira sessão, tinha como objetivos: observar padrões através da solicitação do próximo termo da sequência; características importantes das mesmas (crescente, decrescente, ...) e elaborar mecanismos de generalização de Progressões Aritméticas. Como resultado percebeu que os alunos apresentavam dificuldades para compreender características das sequências por falta de compreensão do sentido matemático de algumas palavras e alguns alunos percebiam que suas estratégias de generalização eram insuficientes, mas não conseguiam criar uma nova estratégia.

É interessante notar que o pesquisador sentiu a necessidade de trabalhar palavras que causaram dificuldade de compreensão entre os alunos no contexto matemático. Assim, na segunda sessão, além desse trabalho, reforçou as características das progressões. Segundo o pesquisador, foi obtido grande êxito nesta sessão.

Para a terceira sessão, o pesquisador pretendia propiciar condições para que os alunos chegassem a uma fórmula algébrica para o enésimo termo de qualquer Progressão Aritmética. Observou que, após muita tentativa e erro, os alunos conseguiram generalizar os termos, mas isso não implicou na construção da fórmula do termo geral devido à dificuldade apresentada por esses alunos em relação à utilização da notação algébrica formal.

Carvalho (2008) concluiu que o maior problema não era o reconhecimento do padrão, mas sim perceber esse padrão útil algebricamente e defendeu que o trabalho com progressões deve compreender a observação deste tipo de sequência, e descoberta, por parte dos alunos, de mecanismos ou expressões algébricas que generalizem seus termos.

Diferenciando de Carvalho (2008) apenas na sequência didática, Sebastião Archilia (2008) desenvolveu a mesma metodologia em sua pesquisa.

Trabalhando com 11 alunos da 2ª série do Ensino Médio em São Paulo, o pesquisador também concluiu que, embora os alunos tivessem expressado em linguagem natural uma fórmula para o termo geral, isso não foi suficiente para converter esse resultado para uma forma simbólica algébrica.

Outro resultado destacado por Archilia (2008) foi a dificuldade dos alunos em realizarem tarefas em equipe. Afirmou que, geralmente, um aluno da dupla tentava resolver, enquanto o outro apenas registrava.

Marcelly Mingorancia de Carvalho (2010), para sua dissertação, efetivou uma pesquisa qualitativa cujo objetivo foi investigar as mudanças que ocorreram em relação ao trabalho dos professores do primeiro ano do Ensino Médio da rede estadual paulista, frente ao material sobre Progressões integrante da proposta Curricular do Estado de São Paulo, de

2008. Esse material traz um trabalho prévio com atividades de generalização de padrão antes de apresentar as progressões.

Para a coleta de dados, a autora elaborou e realizou entrevistas semiestruturadas com cinco professores da rede estadual de ensino, inspiradas na ideia da Engenharia Didática.
A autora concluiu que foi unânime a aceitação e aprovação dos professores quanto a esse material, além de ter proporcionado mudanças significativas nas aulas dos docentes. Afirmou, ainda, que os entrevistados alegaram grande participação dos alunos na realização das atividades pelo caráter desafiador, mas encontraram dificuldades em formalizar as generalizações dos padrões de forma algébrica.

As pesquisas e propostas aqui apresentadas convergem, segundo a percepção deste pesquisador, para alguns pontos comuns, que são aqui discutidos.

O caráter motivador da generalização de padrões é evidente. Além de despertar a curiosidade dos alunos, apelam intensamente para a estética e criatividade, gerando neles o entusiasmo de uma previsão e do descobrimento de uma regularidade que antes não era evidente. Cabe ressaltar que a generalização propicia momentos para o aluno argumentar, levantar hipóteses, conjecturar, testar e validar suas conjecturas. Outro contributo evidente é facilitar a busca da razão nas progressões.

Expressar padrões e termos gerais de progressões em linguagem algébrica é o maior desafio encontrado. Valle et. al. (2009) sugerem o trabalho com padrões desde as séries iniciais e afirmam que a álgebra é um sistema matemático que possibilita a generalização de algumas operações matemáticas, permitindo a substituição de números por letras ou símbolos. Assim, os padrões são a base do pensamento algébrico.

As pesquisas acima relacionadas e outras encontradas em bancos de teses focam principalmente a generalização de padrões e construção do termo geral de uma Progressão Aritmética. Percebeu-se também poucas pesquisas sobre Progressões Geométricas.

Por outro lado, em sala de aula, o professor aborda inicialmente padrões, para em seguida trabalhar com Progressões Aritméticas e, posteriormente, Progressões Geométricas, isto é, vencidas as atividades cuja operação de adição prevalece, introduz as atividades envolvendo a multiplicação; não se busca relacionar as progressões.

Dessa forma, percebeu-se uma carência de pesquisas que contemplasse todo o conteúdo a ser lecionado. O pesquisador não teve acesso a nenhuma pesquisa que tratasse padrões, sequências e progressões em um mesmo trabalho.

CAPÍTULO II

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Segundo Schoenfeld (1996), se pedirmos a sete educadores matemáticos para definir resolução de problemas será muito provável obtermos, pelo menos, nove opiniões diferentes. O autor revela através da afirmação as várias visões e concepções acerca do tema, algumas bem divergentes.

Sendo assim, inicialmente procurou-se neste capítulo definir a concepção de problema, segundo importantes pesquisadores e em seguida apresentar as principais diferenças entre exercícios e problemas. Também se faz necessário apresentar a Resolução de Problemas segundo alguns expoentes como Polya, Schoenfeld, e Lester. No Brasil, ressalta-se a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas da Professora Onuchic e seu grupo de pesquisa da UNESP (Universidade Estadual Paulista) de Rio Claro.

Finalizando o capítulo, são apresentadas as recomendações para a abordagem da Resolução de Problemas segundo os documentos oficiais brasileiros e mineiros e alguns estudos sobre o tema efetivado por outros autores.

2.1 O que é um problema?

Problemas têm ocupado um lugar de destaque nos currículos da matemática escolar desde a Antiguidade, mas apenas recentemente educadores matemáticos têm discutido a ideia de que a habilidade de resolver problemas merece atenção especial. Assim, considerando a Resolução de Problemas uma parte importante do ensino de Matemática, faz-se necessário, inicialmente, levantar concepções sobre o que é um problema matemático e sua diferenciação de outras atividades.

Mas, afinal, o que é um problema? “Problema é uma situação, real ou abstrata, ainda não resolvida, em qualquer campo do conhecimento e de ação”. (D’AMBRÓSIO, 2010, p. 1). Para Onuchic (2008, p.9) problema refere-se “a tudo aquilo que não sabemos fazer, mas que estamos interessados em fazer”.

Os pesquisadores Joseph Leif e R Dezaly apud Sánchez Huete, Fernández Bravo (2006, p. 128) definem problema como “toda questão em relação à qual se indica o resultado que se quer obter e pergunta-se pelos meios para chegar a ele, ou indicam-se os meios e pergunta-se o resultado”.

Ainda sem se referir à Matemática, Frank Lester apud Bruno D’Amore (2007) afirma que:

> [...] um problema é uma tarefa e, portanto: - o indivíduo ou o grupo que o enfrenta quer ou precisa encontrar uma solução; - não há um procedimento imediatamente acessível que garanta ou determine de maneira completa as soluções; - o indivíduo ou o grupo devem fazer um esforço para encontrar uma solução. (D’AMORE, 2007, p. 292).

Segundo os PCNs, “um problema matemático é uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado. Ou seja, a solução não está disponível de início, no entanto, é possível construí-la” (BRASIL, 1997, p. 44).

Para a presente pesquisa, o significado de problema que comunga das concepções do pesquisador e, portanto, será adotada como referencial é a apresentada por Villa e Callejo (2006):

> Um problema é uma situação, proposta com finalidade educativa, que propõe uma questão matemática, cujo método de solução não é imediatamente acessível ao aluno ou ao grupo de alunos que tenta resolvê-la, porque não dispõe de um algoritmo que relaciona os dados e a incógnita ou de um processo que identifique automaticamente os dados com a conclusão e, portanto, deverá buscar, investigar, estabelecer relações e envolver suas emoções para enfrentar uma situação nova. (VILLA e CALLEJO, 2006, p. 29).

Segundo a pesquisadora Eliane Scheid Gazire (1988), uma situação pode ser encarada como problema ou não, depende da reação do sujeito frente à situação. Ela afirma que um indivíduo está frente a um problema quando ele: “1º) Compreende a situação e não encontra uma solução óbvia imediata; 2°) Reconhece que a situação exige uma ação; 3°) quer ou precisa agir sobre uma situação”. (GAZIRE, 1988, p. 10).

Portanto, um problema requer ação para que ao se encontrar numa situação de insatisfação, possa pensar e agir, modificando-a, e obter assim um resultado satisfatório.

Todas essas concepções têm algumas características em comum. O problema deve ser compreensível ao aluno e, para tal, é necessário que ele tenha um conhecimento prévio de conteúdos matemáticos necessários para chegar à sua solução, e para a qual não existe um caminho direto ou imediato; que se sinta motivado para resolvê-lo; e que possibilite o desenvolvimento de sua intuição e criatividade, levando-o a exercitar o seu pensar matemático.

2.2 Problemas e exercícios: diferenças

Muitas vezes o professor de Matemática do Ensino Básico costuma solicitar ao aluno que resolva exercícios ou problemas, os livros didáticos também contribuem, em muitos casos, na utilização desta palavra para aprender um determinado tópico da matéria. Ou seja, é preciso diferenciar problema de exercício, palavras estas muitas vezes utilizadas como equivalentes pelos professores de Matemática.

O professor Luiz Roberto Dante (2009) definindo as funções de um exercício, afirma que “[...] serve para exercitar, para praticar determinado algoritmo ou procedimento. O aluno lê o exercício e extrai as informações necessárias para praticar uma ou mais habilidades algorítmicas”. (DANTE, 2009, p. 48).

Assim, não se percebe nos exercícios a busca por um procedimento desconhecido, a investigação e as emoções num enfrentamento de novas situações, características comuns aos problemas, segundo a definição adotada.

Segundo Pozo (1998), é possível que uma mesma situação represente um problema para uma pessoa enquanto para outra não exista, pois a diferenciação de problema para exercício está no fato de que neste último, o sujeito dispõe e utiliza mecanismos que o conduz de forma imediata à solução. Ainda segundo o autor, isto depende não somente da experiência e dos conhecimentos prévios de quem executa, mas também dos objetivos que o sujeito estabelece enquanto realiza a atividade.

Assim, problema repetidamente resolvido torna-se um exercício, pois se a prática proporcionar a solução direta e eficaz de um problema, essa solução será aplicada frequentemente e, assim, a atividade servirá simplesmente para exercitar habilidades já adquiridas.

Na realidade escolar, D'Amore (2007) defende que enquanto os problemas privilegiam os processos, fazendo com que o sujeito tenha um papel produtivo, o exercício o torna um executivo, pois o que está sendo privilegiado são os produtos. O autor ainda afirma que os problemas são instrumentos de aquisição de conhecimento enquanto os exercícios são instrumentos de verificar e consolidar conhecimentos e habilidades.

Assim, o professor que, nos exercícios (normalmente são processos mecanizados e repetitivos), corrige ou avalia os produtos, nos problemas seu papel é o de acompanhar os processos.

No processo de conhecimento do aluno, o professor, perseguindo objetivos, propõe atividades matemáticas escolares que Vila e Callejo (2006, p. 154) classificam como: exercícios, questões práticas, problemas não-contextualizados, situações-problema e problemas de estratégia. Estes autores distinguem estas atividades em função da finalidade e das características operacionais.

Os pesquisadores afirmam que os *exercícios* contêm indícios de maneira satisfatória dos procedimentos que se espera que sejam empregados, são precisos e concisos, propõem a obtenção de um único nível de resposta; não são propostos de forma isolada, mas em uma lista repetitiva ou hierarquizada. Atestam ainda, que possuem a finalidade de mecanizar/automatizar determinados procedimentos apresentados em aula ou para ajudar na compreensão de determinados conceitos, podendo comportar tarefas de reconhecimento, de repetição ou de execução de algoritmos.

Sobre as *questões práticas*, Vila e Callejo (2006) dizem que são propostas estritamente relacionadas com conhecimentos matemáticos, e têm como finalidade fixar tais conhecimentos frente a uma conexão com a vida real ou com uma pseudo-aplicação da matemática. Na prática, servem como ilustração dos procedimentos matemáticos. As características apresentadas são: costumam ser verbais; apresentam indícios claros dos procedimentos que devem ser utilizados e referenciais facilmente identificáveis; são propostas durante o desenvolvimento do conteúdo em que foram apresentados os procedimentos necessários para a resolução e, em geral, imediatamente depois dessas apresentações e costumam fazer parte de listas. As questões práticas, segundo os autores, poderiam ser mal denominadas como problemas contextualizados matematicamente.

Os *problemas não contextualizados matematicamente* são propostos com a finalidade de capacitar os alunos a utilizar os conhecimentos matemáticos apresentados em aula e também para desenvolver a capacidade de resolver problemas, pois estes implicam no “uso” de um saber matemático geral. Os autores apresentam várias características: normalmente há mais de um procedimento de resolução; são propostos fora da unidade didática que desenvolve os procedimentos matemáticos que estão implicados em sua resolução ou dentro dela, mas necessitam de vários procedimentos, ou as estratégias gerais são mais importantes no processo de resolução que os próprios conhecimentos envolvidos; exigem argumentação do processo seguido, costumam ser únicos e, portanto, não aparecem em listas de atividades; e finalizam dizendo que na sua resolução, o processo e as estratégias de tipo intelectual desempenham papel transcendente.

Quando é proposta uma *situação-problema*, pretende-se que os alunos construam conhecimentos, modelos ou processos matemáticos necessários para resolvê-la. Ainda segundo Vila e Callejo (2006), aqui o problema é um instrumento para um novo campo de conhecimento ou aprofundar um já conhecido. As características de uma situação-problema, segundo esses autores, são: propostas antes das apresentações/formulações/construções dos conhecimentos matemáticos envolvidos na resolução; nunca fazem parte de uma lista e os seus enunciados costumam ser imprecisos, abertos.

Com os *problemas de estratégia,* o foco é o trabalho de elaboração de estratégias e processos que possam ser úteis em várias situações. Mais importante que o saber é a elaboração da estratégia seguida. Segundo os autores, suas características são: os alunos têm acesso aos conteúdos matemáticos para resolvê-los; a riqueza da solução está na argumentação do procedimento de resolução e não costumam fazer parte de listas e apresentam uma proposta de desafio para o aluno. (VILA e CALLEJO, 2006).

2.3 A resolução de problemas

O *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) como organização de educadores, apresentou, em 1980, suas recomendações para o programa de ações que deveriam ser consideradas para esta década. A primeira dessas recomendações era que a Resolução de Problemas deveria ser o foco do ensino da Matemática. (ONUCHIC, 2008).

Ainda hoje, se perguntados “Para que aprender Matemática?”, muitos educadores respondem que a função principal da Matemática é que o aluno aprenda a formular e resolver problemas. Fato este atestado pelo pesquisador Larry L. Hatfield (2009):

> Aprender a resolver problemas matemáticos deve ser o maior objetivo da instrução matemática. Certamente outros objetivos da matemática devem ser procurados, mesmo para atingir o objetivo da competência em resolução de problemas. Desenvolver conceitos matemáticos, princípios e algoritmos através de um conhecimento significativo e habilidoso é importante. Mas o significado principal de aprender tais conteúdos matemáticos é ser capaz de usá-los na construção das soluções das situações-problema. (HATFIELD *apud* DANTE, 2009, p. 15).

Assim, pela relevância da resolução de problemas no processo de ensino e aprendizagem de matemática, apresentar-se-á alguns estudos sobre esse tema.

2.3.1 Resolução de problemas, segundo Polya

Quem primeiro considerou importante a resolução de problemas no ensino e aprendizagem de Matemática foi o grande matemático e filósofo húngaro George Polya, que escreveu um livro sobre o assunto em 1945. Seu livro foi traduzido para várias línguas e, no Brasil, em 1978.

Com o desenvolvimento da Educação Matemática a partir do século XX, foram delineadas linhas de pesquisa, dentre elas a da Resolução de Problemas que passou a ser investigada como campo de pesquisa sob a influência de George Polya, nos Estados Unidos, nos anos 60 e, mundialmente, na década de 70. (ONUCHIC, 1999).

Uma ideia mais detalhada e mais abrangente da resolução de problemas nos currículos escolares de Matemática surgiu nos trabalhos de George Polya, que resgatou para aqueles tempos a ideia da heurística. Os professores Milton Rosa e Daniel Clark Orey (2010), confirmam:

> Na contemporaneidade, Polya (1945) resgatou a importância histórica, a eficácia, o alcance, e a legitimidade dos resultados da heurística, pois de acordo com ele, a heurística é o “estudo dos métodos e regras da descoberta e da invenção”. (ROSA & OREY, 2010, p. 10).

Para esses autores, o método heurístico é um conjunto de regras e métodos que podem conduzir a uma descoberta ou invenção e, que não utiliza suposições arbitrárias, mas aplica uma qualificada base de conceitos, modelos e hipóteses, que são necessários para o processo de resolução de problemas. Alertam ainda que tentativa e erro podem ser entendidos como um caso especial de heurística, pois a solução de um problema pode ser encontrada por tentativas, embora seja preciso testar tal solução com o rigor do método científico. (ROSA & OREY, 2010, p. 8).

Embora Polya tenha pesquisado em vários ramos da Matemática, como probabilidade e equações diferenciais parciais, sua maior contribuição está relacionada à heurística de resolução de problemas matemáticos, com vários trabalhos relacionados ao assunto, destaca-se *How to solve it* (1945), que no Brasil recebeu a tradução "A arte de resolver problemas" (1978). De fato, para Polya, o objetivo principal da Educação Matemática era a resolução de problemas. Procurando organizar o processo de resolução de problemas, Polya o dividiu em 4 fases, conforme se segue.

<u>1ª fase: compreensão do problema</u>

É necessário compreender o problema para que o aluno queira resolvê-lo e perceba o que necessita fazer. Se bem compreendido, tem condições de identificar os dados, a incógnita e a condicionante. Quando houver alguma figura relacionada, deve-se traçá-la e indicar nela os dados.

Nota-se que esta fase está profundamente ligada à afetividade, pois não basta compreender o problema, é preciso querer resolvê-lo, isto é, deve haver interesse, curiosidade e de desafio para que o aluno empreenda o trabalho.

<u>2ª fase: estabelecimento de um plano</u>

O estabelecimento do plano pode passar pela procura de problemas similares, pois o autor acredita que "As boas ideias são baseadas na experiência passada e em conhecimentos previamente adquiridos" (POLYA, 1978, p. 6). Se isso não levar ao sucesso, o aluno terá de procurar fazer variações do problema, generalizações, particularizações e recurso a analogias. O plano é apenas um roteiro geral.

3ª fase: execução do plano

Esta etapa é o momento de efetivamente trabalhar o plano concebido. Se as etapas anteriores foram bem desenvolvidas, esta será possivelmente a etapa mais fácil do processo. Para que o aluno obtenha êxito, deve ser estimulado a realizar cada procedimento com muita atenção, permanecendo atento a cada ação desenvolvida, verificando cada passo. O aluno também deve ser estimulado a mostrar que cada procedimento realizado está correto, permitindo a afirmação de seu aprendizado e a comunicação de sua produção.

4ª fase: retrospecto

A revisão é um momento muito especial, pois propicia uma depuração e uma abstração da solução do problema. A depuração tem por finalidade verificar os procedimentos utilizados, procurando simplificá-los ou buscar outras maneiras de resolver o problema de forma mais simples. A abstração tem por objetivo refletir sobre o processo realizado, procurando desvendar a importância do problema e do método empregado para resolvê-lo, para que permita uma transposição do aprendizado adquirido neste trabalho para a resolução de outros problemas.

Sobre a utilização das 4 fases, de acordo com Gazire (1988, p. 56),

> Polya acreditava que, se os professores observassem essas fases ao trabalharem com Resolução de Problemas, favoreceriam o desenvolvimento de uma atitude mental mais clara e produtiva de seus alunos. (GAZIRE, 1988, p. 56).

Prosseguindo, Rosa e Orey (2010) citam algumas heurísticas propostas por Polya, que devem ser observadas na resolução de problemas:

> Se existe alguma dificuldade para o entendimento de um problema, tente desenhar um diagrama. - Se a solução para o problema não puder ser facilmente encontrada, suponha que o problema possua uma solução e trabalhe com esta solução para trás, isto é, com a utilização do procedimento regressivo, para verificar quais outras soluções podem ser encontradas. - Se o problema é abstrato, procure examinar um problema similar que ofereça um exemplo concreto. - Primeiramente, tente resolver um problema mais geral. Este aspecto é conhecido como o "paradoxo do inventor", isto é, quanto mais ambicioso for o plano, existem mais chances para o sucesso na resolução do problema. (ROSA & OREY, 2010, p. 9).

Assim, as heurísticas de Polya, sinalizam que a solução de um problema pode não ser encontrada na primeira tentativa, e utiliza do raciocínio *para trás* a fim de solucionar o problema e o raciocínio *para frente* para validar e provar a solução. (ROSA & OREY, 2010).

Embora seja reconhecida a influência positiva de Polya com a abordagem que privilegiou os aspectos práticos no trabalho com problemas, há críticas de que as estratégias e os procedimentos não desfazem as barreiras da aprendizagem na resolução de problemas. Segundo a pesquisadora Maria Aparecida Vilela M. P. Coelho (2005), professores e alunos pesquisados sobre o assunto não apresentaram grandes progressos na performance ao resolver problemas.

2.3.2 Resolução de problemas, segundo Schoenfeld

Alan Schoenfeld (1996), Matemático e importante pesquisador na área de educação e desenvolvimento cognitivo relacionado à Matemática, defende a ideia de que a compreensão e o ensino da Matemática devem ser abordados como um domínio de resolução de problemas.

Ao fazer um histórico da resolução de problemas, Schoenfeld afirma que nos anos 80, o trabalho era muito superficial, reduzia a resolução de problemas a truques ou em métodos rotineiros para problemas elementares. Além disso, afirma:

> Tais práticas podem ser mais valiosas que o exercício e a prática da tabuada, mas não muito mais. Há muito mais na resolução de problemas do que isso – e muito mais na Matemática do que a resolução de problemas que outras pessoas te dão para resolver. (SCHOENFELD, 1996, p. 4).

Segundo Schoenfeld apud Costa (2008), para um aluno ter êxito no processo de resolução de problemas, deve-se levar em conta quatro categorias de conhecimentos ou habilidades. São elas:

a) recursos: conhecimento de procedimentos e questões da Matemática;
b) heurísticas: estratégias e técnicas para resolução de problemas, tais como trabalhar o que foi ensinado, ou desenhar figuras;
c) controle: decisões sobre quando e quais recursos usar;
d) convicções: uma visão matemática do mundo, que determina como alguém aborda um problema.

Assim, de acordo com Schoenfeld, o educando deve ter um bom fundamento dos conhecimentos matemáticos, ou seja, os conhecimentos prévios, o contexto real e as experiências de aprendizagem que possuem e a forma que as utilizam. Uma vez que o estudante tenha os recursos, precisa de procedimentos simples e objetivos que deem sugestões gerais no processo de compreensão do problema e na obtenção de passos que conduzam a uma solução e serem empregados de forma geral aos problemas propostos.

É necessário também um controle de procedimentos e de respostas aos problemas. O controle refere-se às decisões que devem ser tomadas sobre quando e quais os recursos usar no processo de seleção dos conhecimentos e das estratégias heurísticas.

No processo de consecução desse controle é fundamental que o aluno registre todas as estratégias usadas na procura por determinada solução e serão estes registros que facilitarão a visão do processo de resolução, além da verificação e validação de uma resposta a um problema.

Na última categoria, o aluno deve ter a certeza de que empregou corretamente os procedimentos heurísticos e de controle confiáveis na obtenção de resultados.

Contudo, Schoenfeld (1996) não deseja apenas ensinar o aluno a resolver problemas, especialmente problemas de outras pessoas, mas ajudá-lo a pensar matematicamente. E, assim, explica o que é pensar matematicamente em sua perspectiva:

> [...] (a) ver o mundo de um ponto de vista matemático (tendo predileção por matematizar: modelar, simbolizar, abstrair, e aplicar ideias matemáticas a uma larga gama de situações), e (b) ter as ferramentas do ofício para matematizar com sucesso. (SCHOENFELD, 1996, p. 8).

Afirma, ainda, que em suas aulas, quando as coisas funcionam de forma satisfatória, estas servem como lugares onde os alunos são membros de uma comunidade matemática que faz Matemática. Assim, a resolução de problemas permite que o professor possa ir além da introdução de novos conceitos matemáticos, promovendo a criação de um ambiente onde a Matemática seja o ponto de partida e o ponto de chegada da atividade, dessa forma, o aluno estará envolvido em situações de aprendizagem.

Para que a resolução de problemas seja um meio de acesso para o pensamento matemático, Schoenfeld (1996) indica uma *estética dos problemas*, traduzida por quatro propriedades. A primeira propriedade é a de relevância, que destaca o acesso à compreensão, sem excessos de vocabulários e formalismos de cálculo, que o autor chama de *maquinarias*.

A segunda propriedade destaca os problemas com múltiplas soluções. De acordo com o autor, estes problemas levam o aluno a se desvencilhar da crença de que há apenas uma maneira de resolver um problema, bem como de aceitar a ideia de que a importância da resolução não está em obter uma resposta, mas as ligações que dela podem surgir. Assim, as novas ligações possibilitam aproximações com os processos de resolução; por conseguinte, permitem novas ações e tomadas de decisão.

Finalmente, os problemas *open-ended*, extensíveis e generalizáveis, que, quando bem explorados, funcionam como problemas que conduzem a mais problemas e ao domínio do fazer matemática.

Desse conjunto de propriedades, Schoenfeld (1996) ressalta a importância da escolha de problemas, de forma a estabelecer uma situação propícia para o envolvimento intelectual do aluno, capaz de empurrar as fronteiras do seu próprio conhecimento. A resolução de problemas, em sua perspectiva, é o caminho que conduz o aluno a aprender a pensar.

Pensar este que, segundo Schoenfeld (1996), só é possível com atividades com sentido matemático, isto é, atividades que levem o aluno a modelar e simbolizar, comunicar, analisar, explorar, conjecturar e provar.

Sobre as aulas com ênfase em resolução de problemas, Schoenfeld apud Costa (2008) afirma que podem ser feitas de duas formas:

a) <u>discussão</u>: o professor conduz o aluno através do processo de resolução do problema, usando suas sugestões e treinando-o para usar as estratégias;
b) <u>pequeno grupo de abordagem</u>: grupos de quatro ou cinco alunos trabalham juntos em dois ou três problemas por cerca de vinte minutos e o professor ajuda somente quando for absolutamente necessário. Quando os problemas estiverem resolvidos, ou há progresso satisfatório, a turma retorna para a discussão.

Compreende-se então, que a resolução de problemas, na perspectiva de Schoenfeld, é o caminho propício para o aluno aprender a pensar.

2.3.3. Resolução de problemas, segundo Frank Lester

Frank Lester e Charles Randall (1982) consideram que uma situação pode ser caracterizada como um problema quando o aluno não dispõe de um método imediato de resolução e, também, é fundamental o empenho (por desejo ou necessidade) na busca dessa solução. Assim, para o ensino da Matemática importa salientar que só há problema se um indivíduo o quiser resolver.

Segundo esses autores, há uma grande variedade de situações nos programas escolares. Assim, eles apresentam seis situações:

a) <u>exercícios de treino</u>: permitem aos alunos praticarem o uso de um algoritmo;
b) <u>problema de tradução simples</u>: a solução envolve transformar as palavras em uma expressão matemática, e tem como objetivo reforçar a compreensão de conceitos matemáticos e ajudar a manter a eficiência dos alunos nas operações;
c) <u>problema de tradução complexa</u>: embora similar ao segundo, este problema é de um tipo mais complexo, pois envolve pelo menos dois passos e, geralmente, mais de uma equação;
d) <u>problema processo</u>: problema cuja solução necessita do uso de processos de pensamento como, por exemplo, planejamento, estimativa, conjecturas, buscas de padrões;
e) <u>problema de aplicação</u>: permite que o aluno utilize uma variedade de técnicas, situação realística e, assim, o torna consciente do valor e da utilidade da Matemática em situações do dia-a-dia;
f) <u>problema de quebra-cabeça</u>**:** permite que o aluno se envolva com a Matemática de recreação, potencialmente enriquecedora e mostra a importância da flexibilidade no enfrentamento de problemas e o valor de se olhar os problemas de diversas maneiras. (CHARLES e LESTER, 1982).

Charles e Lester demonstram preocupação com a questão individual do aluno ao resolver problemas. Assim, apresentam três tipos de fatores relacionados aos processos mentais de resolução de problemas de matemática:

> 1- Fatores afetivos (pressão, motivação, interesse, resistência aos bloqueios prematuros, perseverança, stress); 2- Fatores relacionados com a experiência (familiaridade com o contexto e o conteúdo dos problemas, idade, familiaridade com estratégias de resolução de problemas); (3) Fatores cognitivos (capacidade espacial, capacidades computacionais, capacidade lógica, capacidade de leitura). (CHARLES e LESTER, 1982, p. 11).

Vale ressaltar que para Charles e Lester (1982), é necessário o desejo do aluno em resolver um problema e, segundo eles, o que mais contribui para dificultar a solução é a falta de interesse e motivação. Além da questão motivacional, os pesquisadores apresentam quatro categorias de variáveis implicadas na resolução de problemas: o problema, o sujeito, o processo de resolução de problemas e o ambiente de resolução de problemas.

Segundo Lester (1982) para os estudantes que desejam aprender a solucionar problemas, a dificuldade causada pela complexidade da resolução é agravada pelo fato de que muitos deles não recebem instrução adequada e, infelizmente, não há métodos facilmente implementados que os ajudem a melhorar a sua capacidade de resolução de problemas.

A resolução de problemas é um processo de aplicação de conhecimentos prévios para situações novas e desconhecidas, principal razão para se estudar Matemática. Resolver problemas supõe apresentar questões, analisar situações, discutir resultados, refutar provas e erros.

Segundo Onuchic (2008), os pesquisadores Schroeder e Lester (1989) apresentam três caminhos diferentes de abordar a Resolução de Problemas:

> [...] teorizar sobre resolução de problemas (ensino sobre a resolução de problemas); ensinar Matemática para resolver problemas (ensino para a resolução de problemas); e ensinar Matemática através da Resolução de Problemas (ensino via resolução de problemas). (ONUCHIC, 2008, p. 7).

A seguir apresentam-se, em breves detalhes, os caminhos sugeridos por Schroeder e Lester (1989) para a abordagem da Resolução de Problemas.

2.3.3.1 Ensino sobre resolução de problemas

Ensinar sobre Resolução de Problemas denota trabalhar esse assunto como um novo conteúdo, adicionando a esse trabalho muitas heurísticas ou estratégias. Enfim, transformando a Resolução de Problemas em uma teoria. O professor que ensina sobre resolução de problemas destaca o modelo de Resolução de Problemas de Polya ou alguma variação dele. Esse modelo propõe um conjunto de quatro fases no processo de resolução de problemas matemáticos: compreender o problema; revisar um plano; levar o plano adiante; e olhar de volta ao problema original, com a intenção de analisar a validade da solução. Aos estudantes, dentro dessa ideia, são ensinadas claramente as fases que, segundo Polya, um bom aluno utiliza quando está resolvendo problemas matemáticos, e ele é encorajado a tomar conhecimento de seu próprio progresso, através dessas fases, enquanto resolve o problema.

Ao ensinar sobre resolução de problemas, o professor deverá sempre fazer comentários a respeito do processo de resolução: fases do processo, estratégias utilizadas, quais atitudes se deve ter para conseguir resolver os problemas.

2.3.3.2 Ensino para a resolução de problemas

Quando o professor ensina para resolver problemas, ele se concentra na maneira como a Matemática é ensinada e o que dela pode ser aplicada. Dá-se importância ao uso do conhecimento adquirido anteriormente em problemas rotineiros e não rotineiros.

Embora a obtenção do conhecimento matemático seja muito importante, a maior finalidade para aprender matemática é a de ser capaz de usá-la. Assim, devem ser dados muitos exemplos de conceitos e operações aos estudantes e diversas oportunidades em aplicar essa matemática na resolução de problema. Além disso, o professor que ensina para resolver problemas está muito preocupado sobre a habilidade dos estudantes em transferir aquilo que eles já aprenderam no contexto de um problema para outros. Uma forte justificativa dessa abordagem é a de que a única razão para aprender Matemática é a de ser capaz de usar o conhecimento obtido em sala de aula para resolver problemas e transpô-los para outros contextos.

2.3.3.3 Ensino via resolução de problemas

Segundo ONUCHIC (2008), em 1989 os pesquisadores começaram a discutir as perspectivas didático-pedagógicas da resolução de problemas e assim, passa a ser discutida como uma metodologia, ponto de partida e um meio de ensinar Matemática.

Consequentemente, o NCTM 2000 passa a recomendar o ensino através da Resolução de Problemas como um processo de ensino de Matemática.

Nessa metodologia o problema é encarado como um elemento que pode disparar um processo de construção do conhecimento. O ensino está centrado no aluno, que constrói os conceitos matemáticos durante a resolução de um problema, sendo a seguir formalizados pelo professor. Assim, os problemas são caminho para se ensinar Matemática e não apenas para se ensinar a resolver problemas. Além disso, este aspecto se diferencia do ensino tradicional, comum na maioria das aulas.

> O ponto central de nosso interesse em trabalhar o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas baseia-se na crença de que a razão mais importante para esse tipo de ensino é a de ajudar os alunos a compreenderem os conceitos, os processos e as técnicas operatórias necessárias dentro do trabalho feito em cada unidade temática. (ONUCHIC, 1999, p. 208).

A utilização de tal metodologia poderá beneficiar o aluno na construção do seu próprio conhecimento por meio de situações em que ele o seja capaz de criar e ampliar sua capacidade de resolver problemas. Para tanto, é importante que o professor crie, em sua sala de aula, um ambiente motivador e que instigue o aluno a interpretar tais situações. Com tal propósito, ONUCHIC (1999) recomenda:

> O desenvolvimento de processos de pensamento de alto nível deve ser promovido através de experiências em resolução de problemas, e o trabalho de ensino de matemática deve acontecer numa atmosfera de investigação orientada em resolução de problemas. (ONUCHIC, 1999, p. 207-208).

Assim, segundo a autora, os alunos devem ser desafiados a resolver um problema e devem desejar fazê-lo. O problema deve conduzi-los a utilizar seus conhecimentos anteriores. Por outro lado, o problema deverá exigir que busquem novas alternativas, novos recursos, novos conhecimentos para obter a solução, caso contrário não será para os alunos um problema. E assim, afirma que:

> Ao se ensinar matemática através da resolução de problemas, os problemas são importantes não somente como um propósito de se aprender matemática, mas, também, como um primeiro passo para se fazer isso. O ensino-aprendizagem de um tópico matemático começa com uma situação-problema que expressa aspectos-chave desse tópico e são desenvolvidas técnicas matemáticas como respostas razoáveis para problemas razoáveis. Um objetivo de se aprender matemática é o de poder transformar certos problemas não rotineiros em rotineiros. O aprendizado, deste modo, pode ser visto como um movimento do concreto (um problema do mundo real que serve como exemplo do conceito ou da técnica operatória) para o abstrato (uma representação simbólica de uma classe de problemas e técnicas para operar com esses símbolos). (ONUCHIC, 1999, p. 207).

Nessa perspectiva, o problema é gerador do processo de ensino-aprendizagem. Gazire (1988) apresenta a principal característica dessa perspectiva: “Se todo conteúdo a ser aprendido for iniciado numa situação de aprendizagem, através de um problema desafio, ocorrerá uma construção interiorizada do conhecimento a ser adquirido”. (p. 124).

Com relação ao entendimento da Resolução de Problemas como metodologia de ensino, Van de Walle apud Onuchi e Alevatto (2009), coloca que é preciso entender que ensinar Matemática através da Resolução de Problemas não significa, simplesmente, apresentar um problema, sentar-se e esperar que uma mágica aconteça. Pelo contrário, pressupõe todo um rigor metodológico, no qual o professor, além de intermediador entre o conhecimento e o aluno, é responsável pela criação e manutenção de um ambiente matemático motivador e estimulante, em que a aula deve transcorrer. Para obter isso, toda aula deve compreender três partes importantes: antes, durante e depois. Para a primeira parte, o professor deve garantir que os alunos estejam mentalmente prontos para receber a tarefa e garantir que todas as expectativas estejam claras. Na fase “durante”, os alunos trabalham e o professor avalia esse trabalho. Na terceira, “depois”, o professor aceita a solução dos alunos sem avaliá-las e conduz a discussão, enquanto os alunos justificam e avaliam seus resultados e métodos. Então, o professor formaliza os novos conceitos e novos conteúdos matemáticos construídos. Portanto, a Resolução de Problemas requer um processo de avaliação constante por parte do professor.

2.3.4 A metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas

A Professora Dra. Lourdes de La Rosa Onuchic tem trabalhado na UNESP – Rio Claro como professora colaboradora e orientadora de Mestrados e Doutorados no Curso de Pós-Graduação em Educação, tendo criado, em 1992, o GTERP – Grupo de Trabalho e Estudo sobre Resolução de Problemas. O grupo tem como objetivo desenvolver pesquisas que efetivamente atinjam a sala de aula e para tal adota a metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

A pesquisadora Célia Barros Nunes (2010) apresenta a ideia central desta Metodologia:

> [...] o ensino e a aprendizagem deviam ocorrer simultaneamente, durante e através da resolução de problemas, tendo o professor como guia e os alunos como co-construtores do conhecimento. A avaliação contínua devia estar integrada ao ensino-aprendizagem, no intuito de acompanhar o crescimento dos alunos e reorientar as práticas da sala de aula dos professores quando necessárias. (NUNES, 2010, p. 89).

Assim, a Resolução de Problemas permite que os alunos, depois da aquisição de certos conceitos, adquiram novo conhecimento, como atesta ONUCHIC (2008):

> Trata-se de um trabalho onde um problema é ponto de partida e orientação para a aprendizagem, e a construção do conhecimento far-se-á através de sua resolução. Professor e alunos, juntos, desenvolvem esse trabalho e a aprendizagem se realiza de modo colaborativo em sala de aula. (ONUCHIC, 2008, p. 8).

Portanto, o problema é apenas o primeiro passo no processo de construção de conhecimento. Onuchic (1999), concordando com os PCN, defende que o ponto de partida das atividades matemáticas é o problema, e não a definição de conceitos; que o problema não é um exercício no qual o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou uma determinada técnica operatória; que a resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas como orientação para a aprendizagem. Essa atividade matemática escolar é somente olhar para as coisas prontas e definitivas para a construção e apropriação, pelo aluno, de um conhecimento que serviria para compreender e transformar a realidade.

Ao se trabalhar com essa metodologia o caráter colaborativo entre professor e alunos em sala de aula é reforçado, modificando assim muitas crenças do professor e a sua forma de trabalhar. A professora Onuchic (1999) destaca uma forte atividade de investigação por parte do professor e também do aluno. Com relação ao professor, afirma que:

> O professor pesquisa quando escolhe ou cria problemas adequados à construção de novo conhecimento sobre um determinado tópico do programa, daquela determinada série; quando seleciona, entre muitas, as estratégias mais adequadas à resolução daquele problema; quando planeja as questões-chave para conduzir os alunos, numa reunião plenária com a classe toda, na análise dos resultados apresentados e chega ao consenso sobre os resultados obtidos; ele pesquisa quando prepara a melhor formalização dos novos conceitos e novos conteúdos construídos a partir do problema dado. (ONUCHIC, 2008, p. 82).

Com vistas à mudança na sala de aula e em uma forma prática de o trabalho com o Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, Onuchic redigiu, com o auxílio de um grupo de professores de um Curso de Educação Continuada, um roteiro de atividades que pode servir como orientação aos interessados em trabalhar com essa metodologia. O roteiro apresenta as seguintes etapas:

1ª etapa: formar grupos – entregar uma atividade (um problema)

É mais fácil trabalhar com pequenos grupos do que uma turma com 40 alunos separadamente. Notar que, no mundo real, aprender é, muitas vezes, um processo compartilhado e, assim, caminhar rumo a um objetivo vem através de esforços combinados de muita gente. Os estudantes precisam experimentar esse processo cooperativo e deve-se propiciar, a eles, oportunidade de aprender uns com os outros. Deve-se organizar os alunos em pequenos grupos e muito da aprendizagem, em sala de aula, será feita no contexto desses grupos.

2ª etapa: o papel do professor:

Dentro desse trabalho, o papel do professor muda de comunicador de conhecimento para o de observador, organizador, consultor, mediador, interventor, controlador, incentivador da aprendizagem. O professor lança questões desafiadoras e ajuda os alunos a se apoiarem, uns nos outros, para atravessar as dificuldades. O professor faz a intermediação, leva os alunos a pensar, dá tempo para isso, acompanha suas explorações e resolve, quando necessário, problemas secundários.

3ª etapa: resultados na lousa

Após o término do trabalho dos alunos, o professor anota na lousa os resultados obtidos pelos diferentes grupos e, posteriormente, agrupa tais resultados.

4ª etapa: plenária

Chama os alunos todos, para uma assembleia plena. Como todos trabalharam sobre o problema dado, podem participar na discussão dos resultados.

5ª etapa: análise dos resultados

Nesta fase, as dificuldades encontradas pelos alunos são trabalhadas. Nesse trabalho surgem, outra vez, problemas secundários que, se não resolvidos, poderão impedir o avançar, assim o aspecto exploração é o ponto forte nesta análise.

6ª etapa: consenso

Após a análise feita, com a devida retirada das dúvidas, busca-se um consenso sobre o resultado almejado.

7ª etapa: formalização

Em um trabalho conjunto, professor e alunos fazem uma síntese do que se buscava aprender a partir do problema ou situação-problema dada e, formalmente, são apresentadas, pelo professor, as devidas definições, as propriedades e as demonstrações.

Resumidamente ao adotar essa metodologia:

> Compreender os dados de um problema, tomar decisões para resolvê-lo, estabelecer relações, saber comunicar resultados e ser capaz de usar técnicas conhecidas são aspectos que devem ser estimulados em um processo de aprendizagem através da resolução de problemas. No decorrer desse processo, a formalização, o simbolismo e as técnicas precisas são introduzidas depois da resolução trabalhada, dando-se liberdade aos alunos, evitando-se direcioná-los para "o que pensar" ou "o que fazer", conduzindo-os somente em casos de maiores dificuldades, ou seja, quando eles não sabem como agir. (ZUFFI & ONUCHIC, 2007, p. 83).

A maneira de implementar esta metodologia depende do envolvimento e do entusiasmo do professor. Onuchic (2008) ressalta que o professor deve escolher e preparar com muito cuidado os problemas. Podem ser retirados ou adaptados de livros didáticos, mas devem ser desconhecidos pelos alunos.

Ainda sobre a escolha dos problemas a serem propostos, Nunes (2010) relata que Onuchic, em 1998, elaborou algumas questões que poderão ajudar o professor a refletir sobre elas e a bem escolher os problemas com os quais irá trabalhar. São elas:

> 1. Isso é um problema? Por quê?
> 2. Que tópicos de Matemática podem ser iniciados com esse problema?
> 3. Haverá necessidade de se considerar problemas menores (secundários) associados a ele?
> 4. Para que séries acredita ser este problema adequado?
> 5. Que caminhos poderiam ser percorridos para se chegar à sua solução?
> 6. Como observar a razoabilidade das respostas obtidas?
> 7. Como professor, você teria dificuldade em trabalhar esse problema?
> 8. Que grau de dificuldade acredita que seu aluno possa ter diante desse problema?
> 9. Como relacionar o problema dado com aspectos sociais e culturais? (NUNES, 2010, p. 94).

Assim, um professor que adota este conjunto de questões na escolha dos problemas, demonstra preocupação com o seu desenvolvimento de sua aula.

Indubitavelmente, o interesse e o envolvimento dos alunos na execução de uma tarefa são de fundamental importância, sendo assim, o problema deve ser bem selecionado e planejado. Como gerador de novos conceitos e conteúdos matemáticos, o problema deve ser desafiador para envolver o aluno, mas com um nível de dificuldade que não o desencoraje a resolver.

Assim, retomando o caráter de investigação citado anteriormente, sobre os alunos ONUCHIC (2008) afirma que:

> Os alunos investigam quando buscam, usando seus conhecimentos já construídos, descobrir caminhos e decidir quais devem tomar para resolver o problema, trabalhando colaborativamente, relacionando idéias e discutindo o que deve ser feito para chegar à solução. (ONUCHIC, 2008, p. 83).

Importante ressaltar que a professora ONUCHIC (2008) afirma que as experiências com alunos e professores utilizando a metodologia Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas têm apresentado significativos avanços na compreensão de conceitos e conteúdos matemáticos e no aprimoramento da prática docente do professor.

2.4 Resolução de problemas nos documentos oficiais brasileiros

Os PCNEM destacam a importância da resolução de problemas dentro da área:

> Em seu papel formativo, a Matemática contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e a aquisição de atitudes, cuja utilidade e alcance transcendem o âmbito da própria Matemática, podendo formar no aluno a capacidade de resolver problemas genuínos, gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propiciando a formação de uma visão ampla e científica da realidade, a percepção da beleza e da harmonia, o desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais. (BRASIL,1999, p. 251).

Quanto às competências e habilidades a serem desenvolvidas em Matemática, temos um item “investigação e compreensão”, assim destacado:

> Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões, etc.); Procurar selecionar e interpretar informações relativas aos problemas; Formular hipóteses e prever resultados; Selecionar estratégias de resolução de problemas; interpretar e criticar resultados numa situação concreta; distinguir e utilizar raciocínios dedutivos e indutivos; fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades; discutir ideias e produzir argumentos convincentes. (BRASIL, 1999, p. 259).

O documento oficial enfatiza também a resolução de problemas como uma importante estratégia de ensino, afirmando que:

> Os alunos, confrontados com situações-problema novas, mas compatíveis com os instrumentos que já possuem ou que possam adquirir no processo, aprendem a desenvolver estratégia de enfrentamento, planejando etapas, estabelecendo relações, verificando regularidades, fazendo uso dos próprios erros cometidos para buscar novas alternativas; adquirem espírito de pesquisa, aprendendo a consultar, a experimentar, a organizar dados, a sistematizar resultados, a validar soluções; desenvolvem sua capacidade de raciocínio, adquirem autoconfiança e sentido de responsabilidade; e, finalmente, ampliam sua autonomia e capacidade de comunicação e de argumentação. (BRASIL, 1999, p. 266).

A utilização de situações-problema pode contribuir para a aprendizagem de diversos conteúdos, mas cabe ressaltar que somente aprender a resolver os problemas construindo suas próprias estratégias não é o suficiente para tornar esta aprendizagem eficaz.

Em Minas Gerais, a Proposta Curricular para o Ensino Médio (CBC), destaca a importância de desenvolver habilidades para a solução de problemas em situações contextualizadas ou não. Inicia procurando atentar o envolvimento do aluno:

> [...] problemas interessantes, que despertam a curiosidade dos estudantes, podem surgir dentro do próprio contexto matemático, em que novas situações podem ser exploradas e o conhecimento aprofundado, num exercício contínuo da imaginação. (MINAS GERAIS, 1995, p. 38).

O documento ressalta que a resolução de problemas deve ser explorada para motivar o aluno ou para introduzir novos conceitos e ideias ou também nas aplicações dos conteúdos estudados.

No desenvolvimento de habilidades para a resolução de problemas, o CBC ressalta que as estratégias a seguir devem se tornar hábito para o aluno:

> Usar figuras, diagramas e gráficos, tanto de forma analítica quanto intuitiva; expressar oralmente ou por escrito, com suas próprias palavras, propriedades matemáticas, atribuindo significado aos conceitos abstratos e formulando por meio do uso da linguagem simbólica, questões expressas verbalmente. 3- Perceber padrões em situações aparentemente diversas. 4- Estudar casos especiais mais simples usando-os para elaborar estratégias de resolução de casos mais complexos ou gerais.
> • Fazer uso do método de tentativa e erro, elaborando novas estratégias de solução a partir da análise crítica dos erros.
> • Usar a simbologia matemática (sentenças) com variáveis e equações.
> • Usar a analogia como ferramenta de trabalho, recorrendo a métodos já utilizados e adaptando-os para a resolução de novos problemas.
> • Trabalhar de trás para diante, supondo conhecida a solução de um problema e deduzir suas propriedades para obter um caminho para encontrá-la.
> • Compartilhar e discutir observações e estratégias de outros estudantes, adquirindo assim experiência e novos “insights” para abordar um problema. (MINAS GERAIS, 1995, p. 38-39).

A proposta sobre a resolução de problemas é encerrada ressaltando a importância de adotar uma ampla variedade de problemas para que desenvolva no aluno a capacidade de abstração, a atribuição de significados de conceitos abstratos além de privilegiar a diversidade em oposição à repetição e à quantidade.

Em contato com os dois documentos analisados percebe-se que a Resolução de Problemas é uma realidade nos documentos oficiais para a educação brasileira, assim é aconselhável que seja seguida. E para isso deve-se tornar conhecida dos professores.

2.5 A resolução de problemas segundo outros autores

Em concordância com Lester (1999) sobre a resolução de problemas, Juan Ignacio Pozo (1998) no livro "A solução de Problemas", do qual é organizador e um dos autores, sugere como melhor opção ensinar através da resolução de problemas, onde ressalta que o objetivo final da aprendizagem é fazer com que o aluno adquira o hábito de propor problemas e de resolvê-los como forma de aprender.

O autor ainda utiliza como sua referência a definição de Lester sobre problema: "uma situação que um indivíduo ou um grupo quer ou precisa resolver e para a qual não dispõe de um caminho rápido e direto que o leve à solução." (LESTER apud POZO, 1998, p. 15). Afirma ainda que para resolver tal situação necessita-se de um processo de reflexão e uma tomada de decisões sobre a sequência de passos a serem seguidos. Estes fatos diferenciam um verdadeiro problema de situações semelhantes, como os exercícios, por exemplo.

Para Pozo (1998, p. 17), "a solução de problemas e a realização de exercícios constituem um *continuum* educacional cujos limites nem sempre são fáceis de estabelecer", isto é, uma situação que significa um problema para um aluno pode não ser um problema para outro, seja por falta de interesse ou por que possui os recursos cognitivos necessários para reduzi-la a um exercício. E mais: um problema repetidamente resolvido torna-se exercício e assim a exigência de tarefas que exigem algo mais, típicas de uma solução de problemas, deixam de ser contempladas.

Com o objetivo de facilitar aos alunos a compreensão de um problema matemático, Pozo (1998, p. 59) enumera algumas etapas a serem seguidas:

a) expressar o problema com outras palavras;
b) explicar aos colegas em que consiste o problema;
c) representar o problema com outro formato (gráficos, desenhos, diagramas, etc.);
d) indicar qual é a meta do problema;
e) apontar onde reside a dificuldade da tarefa;
f) separar os dados relevantes dos não relevantes;
g) indicar os dados com os quais contamos para resolver a tarefa;
h) indicar quais os dados que não estão presentes, mas que são necessários para resolver a tarefa;
i) procurar um problema semelhante que já tenhamos resolvido;
j) analisar inicialmente alguns exemplos concretos, quando o problema é muito geral;
k) procurar diferentes situações (cenários, contextos, tarefas, etc.) nas quais esse problema possa ter lugar.

O autor salienta que as etapas têm objetivo de estimular o aluno a refletir antes de agir e planejar o seu próprio processo de solução, pois é comum a iniciantes a execução de tarefas sem um período de reflexão prévia.

Avançando, Pozo classifica como estratégias ou procedimentos heurísticos os planos e metas estabelecidos pelos alunos na busca da solução dos problemas, já os procedimentos requeridos por estes planos e metas são denominados regras, algoritmos ou operações.

Aos passos de Polya, indispensáveis para resolver um problema, são acrescentados alguns procedimentos heurísticos (p.25). São eles:

a) realizar tentativas por meio de ensaio e erro;
b) aplicar a análise meios-fins;
c) dividir o problema em subproblemas;
d) estabelecer submetas;
e) decompor o problema;
f) procurar problemas análogos;
g) ir do conhecido até o desconhecido.

Ao adotar as estratégias, depois de resolvido o problema e avaliada a solução, o aluno torna-se consciente dos procedimentos e regras empregados e, dessa forma, é capaz de melhorar sua capacidade heurística.

Quando se propõe problemas aos alunos, o professor pode atingir vários objetivos. Vila e Callejo (2006) distinguem duas classes de objetivos: 1ª. aprender a resolver problemas: desenvolver estratégias e processos gerais ou específicos do pensamento matemático; 2ª. aprender resolvendo problemas: motivar e dar significado a introdução de uma noção. Ainda segundo os autores, os objetivos se relacionam com a sequência didática, assim os problemas podem ser atividades de introdução, de desenvolvimento, de recapitulação ou de aplicação de conteúdos.

Como atividades de introdução, a motivação para a aprendizagem partirá de uma situação-problema que deverá criar um conflito cognitivo para introduzir novos conhecimentos ou para despertar interrogações. Outra possibilidade seria a problematização de um tema por meio de indagações que serão respondidas durante o desenvolvimento do processo. Em qualquer possibilidade é importante que os alunos tomem consciência de que não possuem conhecimento bastante para responderem às questões propostas e despertem o desejo de incorporar novos conhecimentos e reestruturar aqueles que já possuem.

Vila e Callejo (2006) afirmam ainda que os problemas podem ser atividades de síntese que ajudam a recapitular conhecimentos ou desenvolvimento da unidade estudada, cuja função seria ajudar o aluno a assimilar conteúdos, aprofundá-los, verificar a utilidade e a possibilidade de aplicá-los em situações semelhantes ou novas.

Embora tenha iniciado o capítulo discorrendo sobre a diversidade de conceituações de problema, constata-se pelas leituras realizadas, que há consenso sobre sua utilidade para impulsionar o aluno a pensar, agir e até construir conhecimentos, em alguns casos.

De Polya (1978) aos pesquisadores atuais, todos sinalizam algumas etapas inevitáveis para se resolver um problema: inicia-se com a compreensão do problema e a coleta dos dados, avançando para a seleção e execução de estratégias e finaliza com a validação dos resultados. Assim, torna-se muito importante o trabalho do professor, não só na elaboração e escolha dos problemas, mas na condução do processo em sala de aula.

CAPÍTULO III

A PESQUISA

No presente capítulo é descrito o caminho percorrido para a realização da pesquisa: local, população alvo, instrumentos de coleta de dados e como foi realizada. Finalmente são apresentadas as aulas (conteúdos e objetivos) na qual a pesquisa se insere.

Pretende-se com este trabalho contribuir com professores e alunos do Ensino Médio, apresentando a resolução de problemas como uma oportunidade de aprendizagem de Progressões Aritméticas e Geométricas.

Com esse objetivo, a partir de estudos realizados sobre Progressões, alguns resultados de pesquisas sobre o tema, a Resolução de Problemas segundo alguns pesquisadores e as recomendações dos documentos oficiais para o Ensino Médio e para a Resolução de Problemas foi elaborada a proposta de Ensino.

Com isso, foram apresentados aos alunos problemas acerca do assunto para que os mesmos, utilizando seus conhecimentos prévios, pudessem resolvê-los. E, dessa forma, promover uma oportunidade diferenciada de aprendizagem sobre as Progressões Aritméticas e Geométricas.

Em suma, buscou-se responder à questão: **Que contribuições uma proposta de ensino baseada na resolução de problemas podem trazer para a aprendizagem de progressões aritméticas e geométricas?**

Os dados coletados foram analisados com base nas ideias de Onuchic (1999, 2008), Vila e Callejo (2006), Pozo (1998), Lester (1982) e, também, nas recomendações dos PCN's (Brasil, 1999), além de outros autores que também pesquisaram estes temas.

Assim, procurou-se proporcionar aos alunos a vivência de situações de investigação, exploração e descobrimento para desenvolver a aprendizagem do conteúdo em estudo.

3.1 Local da pesquisa

3.1.1 A cidade de Ponte Nova

A pesquisa foi realizada na cidade de Ponte Nova, que está localizada no Estado de Minas Gerais, a 180 km da capital, Belo Horizonte, e pertence à Zona da Mata, sendo banhada pelo Rio Piranga. Tem 70.344 habitantes (população estimada em 2006). A economia está baseada na Suinocultura, Comércio Atacadista e Serviços, sendo este último o setor preponderante, com destaque para o setor de saúde. (BRASIL, IBGE, 2007).

Ponte Nova faz parte da 34ª Superintendência Regional de Ensino, e, com relação ao Ensino Fundamental e Médio, a cidade conta atualmente com 9 escolas estaduais de Ensino Fundamental e Médio, na sede do município e mais 1 escola em um distrito. Tem ainda 13 escolas da rede privada, 17 escolas municipais e 7 creches, também mantidas pelo município (MINAS GERAIS, 2007). De acordo com o censo escolar de 2010, Ponte Nova tinha 722 alunos matriculados em creches, 1338 na pré-escola, 4717 nos anos iniciais do Ensino Fundamental, 3917 nos anos finais, 2553 no Ensino Médio, 306 no Ensino Técnico e 1523 na Educação de Jovens e Adultos. (INEP, 2009).

4.1.2 O local da pesquisa

A pesquisa foi realizada numa escola da rede particular de ensino, localizada no bairro Palmeiras, principal bairro da cidade. Atende aos alunos de todos os bairros e cidades vizinhas. Conta com uma bela estrutura física e por estar integrada a uma rede nacional, além do ensino, possui obras assistenciais atendendo cerca de 150 crianças e jovens nos fins de semana. Em suas dependências funciona também a TV Educar que, além de gerar a programação da Rede Minas, produz seus próprios programas, muitos deles com a participação dos alunos da própria escola e de escolas da rede pública.

A escola foi selecionada por ser aquela na qual o pesquisador trabalha e, por esse motivo, facilitaria a aceitação do trabalho de pesquisa pela direção da escola, pais e alunos. Cabe ressaltar que, feita a solicitação, a direção da escola não só aprovou como apoiou com materiais didáticos e divulgação do trabalho.

A escola selecionada para a pesquisa funciona em 2 turnos, tendo, no ano de 2010, 4 turmas do Ensino Fundamental, com 140 alunos matriculados, e 3 turmas do Ensino Médio, com 117 alunos matriculados, no turno matutino. No turno vespertino, havia 5 turmas do Ensino Fundamental, com 105 alunos matriculados, e 3 turmas do Ensino Infantil, com 69 alunos matriculados. Assim, em, 2010 a escola contava com 431 discentes matriculados.

A escola conta com ótimas instalações, amplas salas de aulas, quadras de esportes, campo de futebol. Algumas melhorias estão em curso. A biblioteca, por exemplo, necessita de atualização e melhoria no acervo. Os Laboratórios de Química, Física e Biologia, embora existentes, necessitam de equipamentos e utilização mais frequente durante as aulas. O Laboratório de Informática é um diferencial, muito bem equipado e com todos os computadores em perfeito funcionamento.

3.2 População alvo

A pesquisa foi realizada na turma em que o pesquisador atua como professor. Trabalhou-se com toda a turma, num total de 46 alunos que estavam cursando a primeira série do Ensino Médio do referido estabelecimento de ensino, no período matutino.

Dos 46 alunos, a turma era composta por 25 alunos do sexo masculino e 21 do sexo feminino. Embora a idade dos alunos variasse entre 15 e 18 anos, a média de idade era de 16 anos. Apenas 2 alunos cursavam a série pela segunda vez.

Algumas características da turma devem ser detalhadas. Os alunos da escola são de classe média. Em consequência disso, os alunos cursam o Ensino Fundamental na escola pública e buscando uma melhor preparação para vestibulares, apenas no Ensino Médio buscam uma escola particular. Este foi o caso de 23 alunos da referida turma.

Outro detalhe que vale ressaltar é o desempenho. Somente 5 alunos possuíam notas superiores a 80% antes da efetivação da pesquisa e 15 alunos tinham notas inferiores a 60%. Isto é, uma turma heterogênea sem muito interesse ou facilidade em relação à Matemática. Como agravante tem-se o fato de os alunos de bom rendimento possuírem o perfil de não serem participativos nas atividades, serem tímidos e de pouco falar em sala de aula.

Como era importante a participação de todos os alunos na pesquisa, foi efetivado o convite e esclarecido que se eventualmente algum aluno desejasse não participar no estudo, faria outras atividades correspondentes ao assunto, antecipadamente planejadas pelo professor e encaminhadas a esse grupo de alunos pela supervisora da escola. O convite efetivado cerca de 20 dias antes de sua implementação, não somente foi aceito por todos os alunos como cobraram insistentemente o seu início.

Para garantir o sigilo dos participantes, foi estabelecido um código para se referir a cada um deles. Cada um foi mencionado como Sujeito 1, Sujeito 2, 3 e assim sucessivamente.

Assim, a pesquisa foi desenvolvida em horário normal da aula de Matemática, e o assunto da pesquisa não provocou mudança no programa da disciplina, pois este já constava do planejamento da série, no segundo semestre. O conteúdo Progressões, presente em todo currículo do Ensino Médio, diverge quanto à série a ser trabalhado. Há livros didáticos que o apresenta na segunda série, outros na primeira, como é o caso da escola alvo da pesquisa.

3.3 O caminho seguido na pesquisa

Após realizar a revisão da literatura pertinente, foi elaborada uma proposta de atividades baseada na resolução de problemas com a finalidade de verificar suas contribuições para o processo de aprendizagem de Progressões.

3.3.1 A proposta de atividades

A Proposta elaborada foi apresentada à direção da escola, que autorizou a realização da pesquisa com seus alunos (o termo de autorização encontra-se no apêndice). Os pais e alunos foram informados, oralmente e por escrito, a respeito do projeto a ser desenvolvido (características, justificativa, duração, natureza das atividades) e dos instrumentos utilizados.

É importante ressaltar que ao final da pesquisa somente foram analisados os dados dos sujeitos da pesquisa que participaram de todos os encontros. Também é importante deixar claro que esses alunos não foram dispensados ou ignorados se faltaram a algum encontro, pois, embora não mais pudessem ser contados como sujeitos da pesquisa, demonstraram interesse em participar dela.

Após todas as informações serem transmitidas para os envolvidos, conseguiu-se destes a autorização formal para a realização da pesquisa, através da assinatura dos termos de consentimento e esclarecimento (A, B, C e D) pelos pais e alunos.

Após a entrega do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE - apêndice E) para os alunos e do recebimento dos TCLE’s previamente enviados aos pais para que assinassem (apêndice), foi marcada a data da primeira aula, com uma semana de antecedência, para que todos os participantes estivessem presentes.

3.3.2 Instrumentos utilizados na pesquisa

Como já foi exposto, o objetivo era investigar as possíveis contribuições que uma proposta de ensino baseada na resolução de problemas pode trazer para a aprendizagem de progressões aritméticas e geométricas. Assim, foi necessário desenvolver uma proposta de ensino cujo foco não se concentrasse na apresentação ou dedução das fórmulas pelo professor e posterior execução de atividades. Portanto, procurou-se apresentar situações que se mostrassem interessantes e desafiadoras para os alunos, e fossem baseadas na resolução de problemas.

Outro detalhe importante foi o nível de dificuldade das atividades. Buscou-se alternar atividades com grau de complexidade diferente em determinadas ocasiões, mas pela experiência do professor com a turma, prevaleceu a busca por aquelas que tivessem uma graduação crescente de dificuldade, pois era importante manter a motivação e o interesse dos alunos.

As atividades foram realizadas individualmente, em duplas ou em grupos de 3 ou 4 alunos. O objetivo de agrupá-los foi proporcionar-lhes a oportunidade de discutir as questões entre si, para que assim desenvolvessem a habilidade de argumentação e socialização do raciocínio empregado. Aos dois alunos repetentes da série foi pedido que trabalhassem sempre em dupla, fato aceito e concretizado por eles. Todas as situações-problema resolvidas e discutidas pelos pequenos grupos foram posteriormente apresentadas e discutidas com a turma ora pelo professor, ora pelos alunos.

Por dificuldade de expressão de suas ideias ou comodismo é comum no trabalho em grupo alguns alunos não se envolverem ou deixarem de executar suas tarefas. No presente trabalho buscou-se efetivar a participação de todos, tendo sido acompanhando de perto o trabalho dos grupos e feitas intervenções através de indagações direcionadas a determinados alunos.

As atividades em folhas ou propostas no quadro de giz utilizaram apenas materiais usuais de sala de aula, como lápis, borracha e caneta e, em algumas oportunidades, calculadora.

Cabe salientar que os alunos possuem livro didático da rede de ensino à qual a escola pertence; quando as atividades propostas pelo livro atendiam aos objetivos da pesquisa, o pesquisador procurou utilizá-las. É filosofia da escola, valorizar tal material didático, por acreditar no seu potencial pedagógico e também pelo investimento financeiro feito pelos pais.

Durante o desenvolvimento da pesquisa, o professor procurou estimular os alunos a trabalharem em equipe, interpretar as questões, criar estratégias, argumentar e expressar suas ideias de modo objetivo e claro. Procurou incentivar e valorizar as ideias como forma de motivá-los e evitar o desânimo frente aos problemas que, por ventura, pudessem aparecer.

3.3.3 Instrumentos utilizados na coleta de dados

Para um melhor registro de todos os acontecimentos ocorridos durante a pesquisa, foram utilizados os seguintes instrumentos:

i) diário de campo do pesquisador;

ii) registros escritos dos alunos sobre as atividades desenvolvidas;

iii) opinião escrita dos alunos sobre a pesquisa;

iv) resultados de avaliação.

3.3.4 A coleta de dados

Durante o período de aplicação da pesquisa, todos os acontecimentos da sala de aula e observações foram registrados em um diário de campo.

Nas discussões internas dos grupos, o pesquisador adotou a figura de um aluno relator do grupo. Isto é, cabia a cada grupo escolher um aluno para relatar de forma escrita ou oral, a participação e principais falas de todos os membros.

Na discussão de todos os alunos com o pesquisador, além do diário de campo, os alunos de bom desempenho e os alunos repetentes da série foram convidados para serem relatores das discussões acontecidas.

Após cada atividade foram coletados todos os registros escritos dos alunos, identificados como citado anteriormente através do número de chamada.

Ao final da pesquisa, foi solicitado aos alunos que escrevessem suas impressões sobre o trabalho efetivado com o objetivo de avaliarem a proposta, a participação e seu interesse pelo trabalho realizado.

Durante a execução das atividades, os registros dos alunos eram tomados como um diagnóstico, cujo objetivo era analisar como os conceitos estavam sendo assimilados pelos participantes. Segundo Viana (2006), um diagnóstico bem conduzido revela avanços, retrocessos, dificuldades, facilidades, as possíveis causas ou natureza dos sucessos ou insucessos no alcance dos objetivos propostos. Isto conduz ao conhecimento do estágio do desenvolvimento individual e grupal dos educandos, e é por este motivo que esta função de diagnóstico é importante no processo de avaliação.

3.3.5 O processo vivido

O trabalho de campo iniciou-se após a aprovação da direção, orientação e pais, e aconteceu nos meses de setembro e outubro de 2010. Os alunos estavam ansiosos para saberem como funcionaria a pesquisa de mestrado a ser realizada com eles. Foi esclarecido que não haveria mudança na rotina das aulas, mas sim nas atividades. Foi solicitada a presença de todos uma vez que o conteúdo Progressões se iniciaria numa segunda feira às 7 horas da manhã.

Durante esses dois meses procurou-se apresentar aos alunos os conteúdos considerados pré-requisitos para, posteriormente, aplicar a metodologia de Ensino-Aprendizagem-

Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Durante as atividades procurou-se seguir o roteiro sugerido por Onuchic (2008) detalhado no capítulo III.

No Quadro 1, a seguir, são apresentados os conteúdos estudados em cada aula, bem como o objetivo traçado pelo professor.

AULAS	ASSUNTOS	OBJETIVO
1ª	- Sequências Numéricas - Padrão	Apresentar uma sequência numérica e detectar os padrões em cada uma delas.
2ª e 3ª:	Termo geral de uma sequência numérica	Com o conhecimento dos 3 primeiros termos, construir o termo geral de sequências
4ª	Cálculo de termos de uma PA e PG	Calcular termos desconhecidos de PA e PG sem conhecimento de fórmulas.
5ª:	Termo geral da PA	Deduzir a fórmula do termo geral de uma PA.
6ª:	Termo geral da PG	Deduzir a fórmula do termo geral de uma PG
7ª e 8ª:	Termo geral da PA e PG	Através de situações problemas, calcular primeiro termo, razão, n° de termos ou termo geral de PA e PG.
9ª e 10ª:	Termo geral da PA e PG	Resolução de atividades do livro didático.
11ª:	Soma dos termos de uma PA.	Deduzir a fórmula da somados termos de uma PA e resolver situações problemas.
12ª	Soma dos termos de uma PA.	Resolução de situações problemas.
13ª e 14ª	Soma dos termos de uma PG finita	Através da demonstração existente no livro, reconhecer a fórmula da soma dos termos de uma PG finita e resolver situações problemas.
15ª e 16ª	Soma dos termos de uma PG infinita.	Através da demonstração existente no livro, reconhecer a fórmula da soma dos termos de uma PG .
17ª e 18ª	Interpolação de termos	Resolução de situações problemas.

Quadro 1: Distribuição dos conteúdos por aula
Fonte: Dados do pesquisador

É importante ressaltar que na maioria das aulas procurou-se trabalhar, sempre que possível, com situações-problema, porém, para a pesquisa, foram selecionadas apenas algumas atividades que seguiam as recomendações dos pesquisadores estudados.

3.4 Sobre as atividades

A partir dos estudos realizados foi elaborada a proposta de atividades a ser adotada pelo pesquisador.

As atividades desenvolvidas nesta pesquisa foram elaboradas procurando seguir as orientações dos PCNEM: motivação, introdução de novos conceitos e ideias. Procurou-se, sobretudo, seguir as orientações de Onuchic (1999, 2008) e Gazire (1988), que sugerem a utilização de situações-problema como geradoras do processo de ensino-aprendizagem.

Assim, buscou-se associar os conhecimentos prévios dos sujeitos da pesquisa à construção dos conhecimentos almejados pelo pesquisador, levando o educando a levantar hipóteses, comunicar ideias e estabelecer relações; desenvolvendo interesse e confiança no seu próprio modo de pensar, porém novas descobertas e novos problemas podem surgir, pois tal fato é comum na Resolução de Problemas.

Foram implementadas 5 situações-problema que contemplaram os seguintes conteúdos: termo geral da sequência, termo geral da PA, termo geral da PG e soma dos termos de uma PA.

CAPÍTULO IV

DESCRIÇÃO DA PROPOSTA E ANÁLISE DAS ATIVIDADES

Neste capítulo há a apresentação das atividades, o relato dos acontecimentos em sala de aula, algumas descrições de resoluções e posterior análise dos dados coletados, procurando identificar os avanços e as dificuldades encontradas ao longo do desenvolvimento da proposta. As respostas encontradas foram trabalhadas segundo as propostas de trabalho de ONUCHIC e analisadas segundo as propostas dos PCNEM apresentadas no capítulo III e ressaltadas neste capítulo: identificação do problema, seleção de informações e de estratégias de resolução, utilização de raciocínio dedutivo e/ou indutivo, validação, discussão de ideias e produção de argumentos convincentes.

Ressalta-se que tais propostas não aparecem em todas as atividades.

4.1 Situação problema 1

SITUAÇÃO PROBLEMA 1
A lei matemática que permite determinar os termos de uma sequência é chamada termo geral. Exemplo: $a_n = 2n$ é o termo geral da sequência dos números pares. Assim temos: a1= 2; a15= 30 e a26= 52. I) Você decide economizar dinheiro da seguinte forma: no primeiro mês, guarda R$20,00. Nos meses seguintes, guarda sempre R$20,00 a mais que no mês anterior. Qual o termo geral da sequência? II) Descubra agora o termo geral das sequências numéricas abaixo: a) (1, 4, 7, 10, 13, ...) b) (3, 7, 11, 15, 19, 23, ...)

Quadro 2: Situação problema 1
Fonte: Dados do pesquisador

4.1.1 Objetivo

Construção do termo geral de uma sequência numérica dada, uma vez que os alunos tinham conhecimento sobre sequências numéricas, a representação de seus termos e padrões.

4.1.2 Desenvolvimento da atividade em sala de aula

O encontro foi iniciado com os alunos formando duplas por afinidade. Foi estipulado um tempo de 25 minutos para que as 23 duplas realizassem as atividades propostas. Inicialmente houve certo desconforto com relação à atividade, pois os alunos esperavam um exercício, isto é, questões que comumente resolviam após a explicação do professor.

Então, o professor-pesquisador explicou para a turma que as atividades a serem realizadas durante a pesquisa seriam diferentes daquelas que estavam acostumados a resolver, motivo pelo qual a participação de todos seria fundamental.

Esclarecidas as dúvidas quanto ao tipo de atividade que seria proposta, uma das duplas perguntou:

> Suj23.: O que tem que fazer nesse exercício? Não entendi.
> Professor: Leiam com atenção o enunciado e tentem entender o que está sendo pedido, retirando os dados do problema.

Outras duplas não se sentiram confiantes nas respostas que encontravam, pois essas fugiam do padrão a que estavam acostumados e, constantemente, solicitavam a presença do professor procurando a afirmativa se estavam fazendo corretamente a atividade.

Para ajudá-los, o pesquisador procurou instigá-los, estimulando-os a trocar ideias, até chegarem às respostas, sempre observando de que maneira estavam trabalhando e se todos estavam participando.

Passado o desconforto inicial, todas as duplas se empenharam na solução do problema, trocando informações com duplas vizinhas.

4.1.3 Algumas soluções apresentadas pelos grupos

No problema I, todos os grupos encontraram a resposta esperada (a_n= 20n). Importante ressaltar que 20 duplas iniciaram a atividade descrevendo os termos da sequência, posteriormente, partiram para a formalização do termo geral.

Um fato que chamou a atenção foi a escrita do termo geral. Alguns grupos construíram o termo geral da seguinte forma: $a_n = 2n.10$.

Abaixo são apresentadas três soluções que resumem as soluções apresentadas. Solução apresentada por Suj.19 e Suj.21 (FIG. 1):

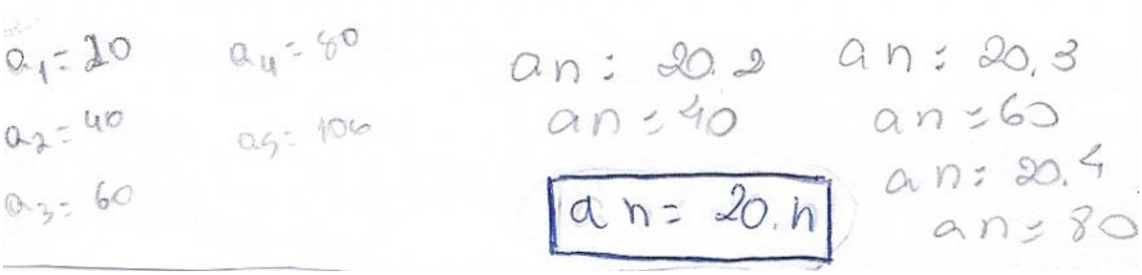


Figura 1: Solução Suj.19 e Suj.21
Fonte: Dados do pesquisador

Percebe-se que a dupla testou os valores antes de expressarem o termo geral, procedimento oposto ao da dupla Suj.44 e Suj.24 que encontraram um termo geral e posteriormente testaram a sua validade (FIG. 2).

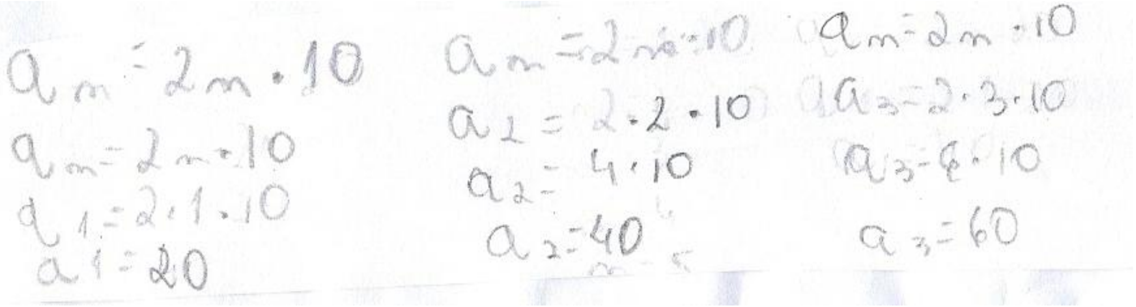


Figura 2: Solução Suj.44 e Suj.24
Fonte: Dados do pesquisador

A dupla foi umas das 6 duplas que apresentaram o termo geral na forma $a_n = 2n.10$. A atividade que apresentava baixo grau de dificuldade na resolução também apresentou soluções bem simples como assim fez os Suj.2 e Suj.12 (FIG. 3):

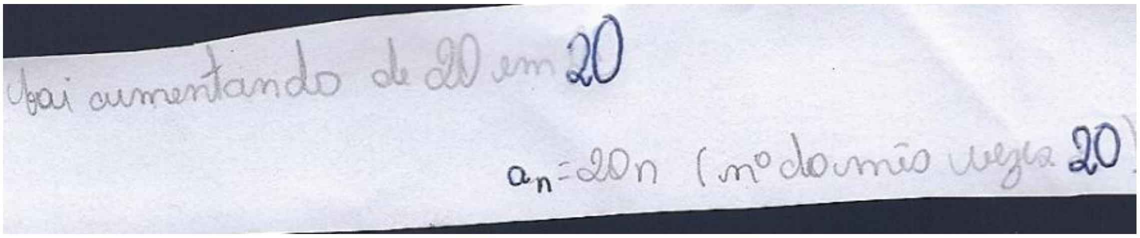


Figura 3: Solução Suj.2 e Suj.12
Fonte: Dados do pesquisador

Para problemas apresentados na atividade II, as pesquisas de Carvalho (2008) e Archilia (2008), relatadas no capítulo 2, ressaltam a dificuldade dos alunos de apresentarem o termo geral de forma correta. Na presente pesquisa, 6 das 23 duplas não conseguiram apresentar uma solução e 3 duplas chegaram a uma solução errada.

Um fato importante é que as duplas que não conseguiram chegar à resposta correta apresentaram o padrão da sequência, como fizeram os Suj.3 e Suj.23 (FIG. 4):

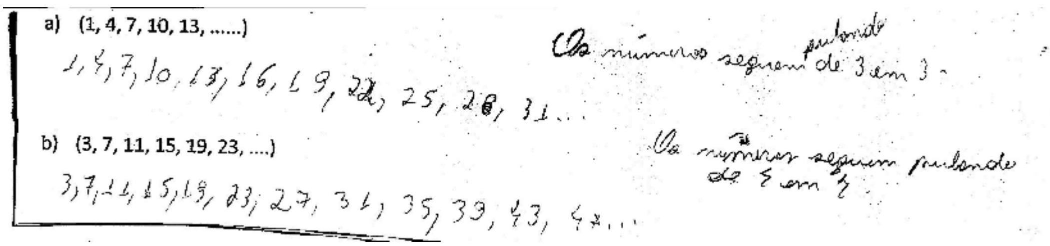


Figura 4: Solução Suj.3 e Suj.23
Fonte: Dados do pesquisador

A dupla formada por Suj.22 e Suj.28, além de confundir a posição do termo com o próprio termo para tentar validar a resposta, ao descobrir o padrão o transformou em sentença matemática (FIG 5):

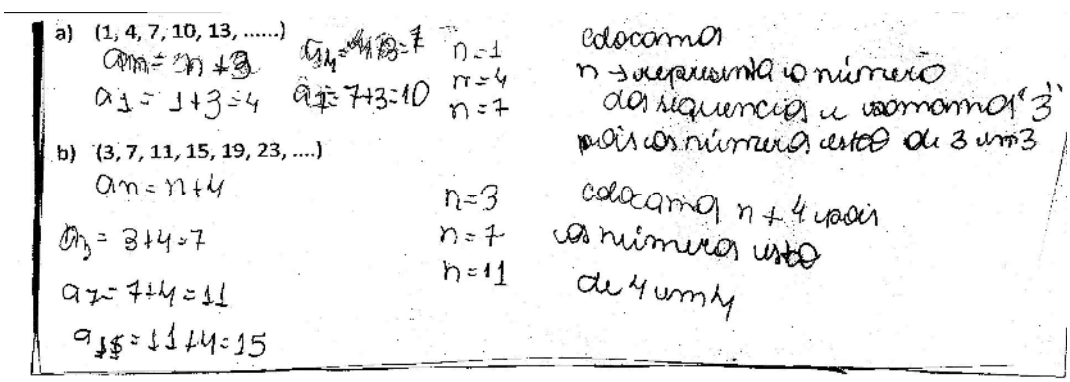


Figura 5: Solução Suj.22 e Suj.28
Fonte: Dados do pesquisador

Das 14 soluções corretas, fica evidente que, de posse do padrão, as duplas foram testando fórmulas, como foi bem relatado por Suj.36 e Suj.37 (FIG. 6):

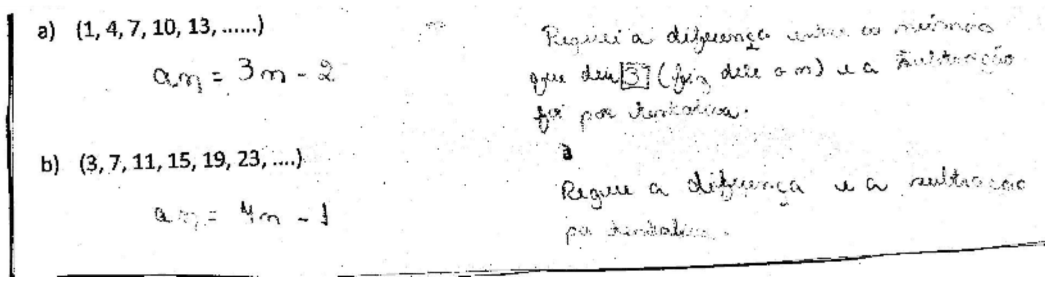


Figura 6: Solução Suj.36 e Suj.37
Fonte: Dados do pesquisador

Embora a maioria das duplas tenha apresentado solução correta para os problemas, percebeu-se um descontentamento com os problemas. Alegaram ser uma atividade difícil, pois não possuíam uma forma única de como resolvê-la, isto é, cada padrão requer novas conjecturas.

Em consonância com Archilia (2008) embora os alunos conseguissem expressar em linguagem natural uma fórmula pra o termo geral, isso não foi suficiente para escrevê-la na forma simbólica algébrica.

4.1.4 Plenária

Para a realização da primeira plenária, foi solicitado que uma dupla fosse até o quadro apresentar a sua solução para que todos pudessem comparar as respostas e as diferentes formas de resolução, bem como oportunizar possíveis questionamentos quanto ao resultado desejado.

Diante da solução do problema I, apresentada pelo Suj.45, uma aluna questionou:

> Suj.36: professor, nós colocamos a_n = 2n.10, tá errado?
> Professor: Que vocês acham?
> Suj.5: A ordem dos fatores não altera o produto, então 2n.10 = 20n
> Professor: Muito bem, mas por que vocês escreveram assim?
> Suj.37: Até a aula de ontem, o termo gera escrito, por exemplo, a_n = 2n + 3 então achamos que tinha que escrever sempre assim.

> Professor: Não tem problema, mas aconselho escrever o termo geral de forma mais simplificada possível.

Encerrado o assunto, o problema II foi apresentado, e quando foi solicitada a resolução no quadro, o Suj.39 argumentou: “professor, não tem o que escrever, o negócio é testar, testar até ver a que dá certo”.

A turma, em geral, concordou com o aluno, assim o pesquisador pediu que alguma dupla apresentasse o seu pensamento. O Suj.36 apresentou o raciocínio da dupla: “descobrimos o padrão: 3 em 3, 4 em 4 e daí multiplicamos este padrão por n e aí fomos fazendo tentativa para descobrir o primeiro termo e o termo geral.”

Alguns alunos manifestaram interesse pela forma encontrada pela dupla. Então, após a solução ser novamente apresentada no quadro pelo Suj.36, nenhuma outra dupla quis apresentar seu raciocínio.

4.1.5 Análise

Nestas situações-problema que foram resolvidas pelos alunos, as dificuldades de interpretação, resolução e validação do resultado, enfrentadas por eles ao se depararem com atividades de construção de termo geral de sequências numéricas, ficaram evidentes.

Percebeu-se, ainda, que alguns alunos esperaram a resposta do professor, o que ele não deu, pois o papel deste foi de incentivador, questionando os grupos para o levantamento de dados e hipóteses, permitindo-lhes refletir sobre as situações-problema e, inclusive, errar.

Com relação às habilidades propostas pelos PCNEM, pôde-se contatar que os alunos no problema I, <u>identificaram o problema</u> e <u>interpretaram informações</u>, pois todos apresentaram solução para a atividade. Ao enumerarem elementos da sequência, puderam <u>formular hipóteses</u> e <u>selecionar estratégias</u>, e através do <u>raciocínio dedutivo</u> encontraram a solução correta.

Com relação ao problema II, doze alunos (Suj.13, Suj.10, Suj.46, Suj.43, Suj.15, suj40, Suj.27. Suj.42, Suj.35, Suj.44, Suj.24 e Suj.6) não apresentaram solução, portanto não avançaram mais que a identificação do problema. Os seis alunos (Suj.3, Suj.11, Suj.22, Suj.23, Suj.28 e Suj.45) que apresentaram solução errada falharam no raciocínio dedutivo e validação de suas conjecturas.

Embora os alunos argumentem que no problema II, ao descobrirem o padrão, a saída foi a de testar possíveis soluções, fica evidente que através da experimentação, souberam validar suas conjecturas.

Com a realização da plenária, a turma pôde discutir ideias e também produzir argumentos convincentes.

Pode-se afirmar que, baseado em Villa e Callejo (2006), a atividade proposta ajudou o aluno a assimilar conteúdos, aprofundá-los e aplicá-los em situações diversificadas.

4.2 Situação Problema 2

SITUAÇÃO PROBLEMA 2

Dada a tabela abaixo, calcule (sem enumerar) todos os elementos:

a) O elemento da 3ª coluna na 15ª linha.

b) O elemento da 2ª coluna na 58ª linha.

c) O elemento da 1ª coluna na 100ª linha.

3	5	7	9
11	13	15	17
19	21	23	25
...	...	...	...

Quadro 3: Situação problema 2

Fonte: Dados do pesquisador

4.2.1 Objetivo

Calcular os termos de uma Progressão Aritmética sem a enumeração dos elementos e sem o conhecimento da fórmula do termo geral da PA.

5.2.2 Desenvolvimento da atividade em sala de aula

Temendo encontrar dificuldades, os alunos pediram a formação de grupos maiores. Assim, foram formados dez trios e quatro quartetos para resolverem em 30 minutos o problema proposto.

O pesquisador apenas ressaltou o desejo de que os alunos criassem estratégias de resolução do problema que não envolvessem a simples enumeração dos elementos.

Durante a resolução do problema, percebeu-se um envolvimento geral da turma. Um trio (Suj.11, Suj.22 e Suj.45) insistiu com o professor na facilidade de descobrir o resultado se os mesmos enumerassem os elementos da tabela. O pesquisador apenas lembrou que o objetivo da atividade era o uso de estratégias mais elaboradas, isto é, o professor queria que os alunos pensassem e o procedimento deles de enumerar todos os elementos da tabela requeria um tempo que os mesmos não possuíam.

Outra observação importante foi o fato de três trios e um quarteto, após resolverem a atividade, enumerarem os elementos da tabela para certificarem se estavam corretas as suas soluções.

4.2.3 Algumas soluções apresentadas pelos grupos

Percebeu-se, nas resoluções entregues ao professor, o uso de variadas estratégias de resolução e também que a estratégia adotada no primeiro cálculo foi repetida para os outros e assim, como consequência, os alunos acertaram todas as soluções ou erraram todas. Assim, dos catorze grupos formados, cinco trios apresentaram soluções erradas.

As estratégias adotadas nas resoluções resumem-se em 2: os grupos encontraram o termo geral da sequência composta por todos os elementos da tabela ($a_n= 2n +1$) ou perceberam uma sequência numérica em cada coluna e assim calcularam o termo geral para cada coluna ($a_n= 8n – 5$; $a_n = 8n – 3$; $a_n = 8n – 1$ e $a_n= 8n+1$).

Nota-se que as soluções erradas devem-se ao fato dos alunos não calcularem de forma correta a posição do número na tabela. As soluções apresentadas pelo trio composto por Suj.6, Suj.28 e Suj.30, ilustram bem o erro, também cometido por outros trios (FIG. 7):

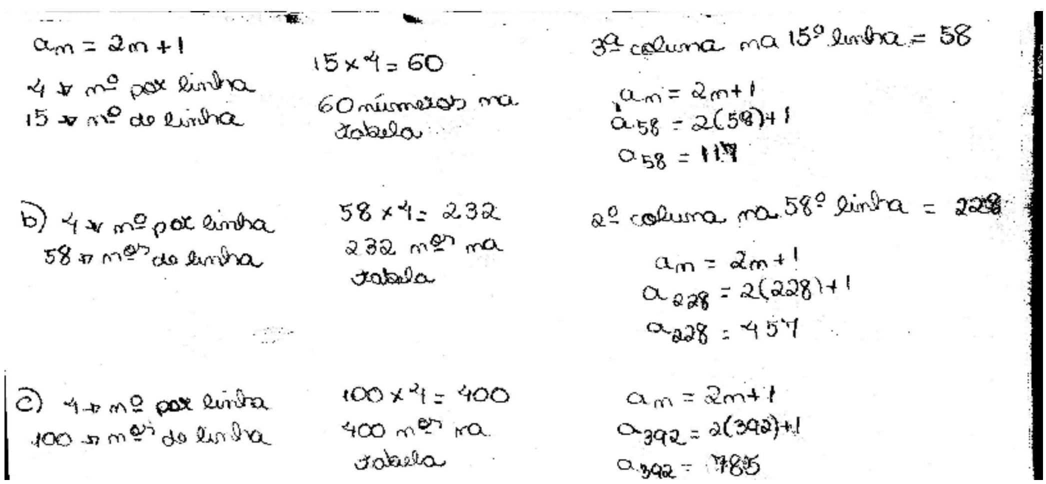


Figura 7: Solução Suj.6, Suj.28 e Suj.30
Fonte: Dados do pesquisador

Assim, embora tenham encontrado de forma correta a fórmula $a_n= 2n +1$ para a sequência, não calcularam os termos a_{59}, a_{230} e o a_{397}, que foram os termos solicitados. Os alunos Suj.1, Suj.38 e Suj.39 usaram o mesmo raciocínio, mas efetuaram todos os cálculos com sucesso (FIG. 8):

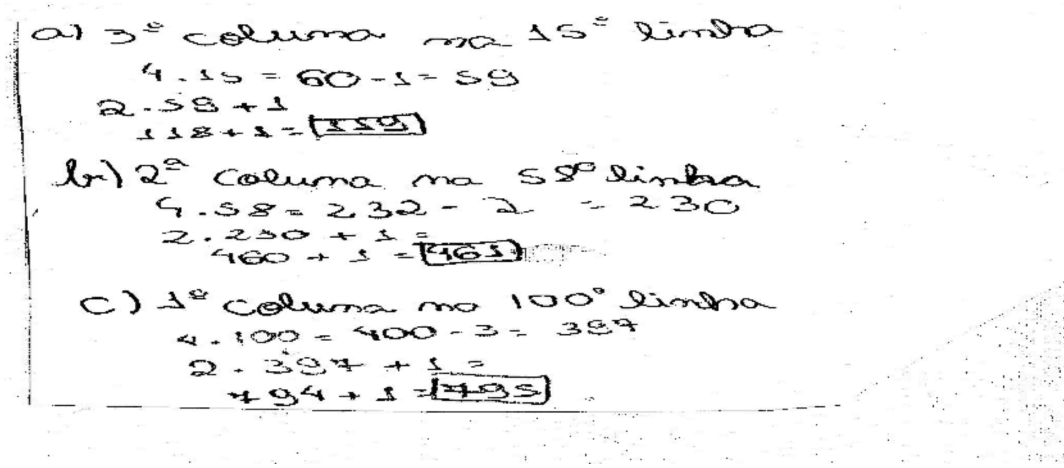


Figura 8: Solução Suj.1, Suj.38 e Suj.39
Fonte: Dados do pesquisador

O quarteto composto por Suj.3, Suj.25, Suj.26 e Suj.27 adotou a estratégia de adotar cada coluna como sequência e após encontrarem cada termo geral, não encontrou problema em calcular cada termo solicitado (FIG. 9):

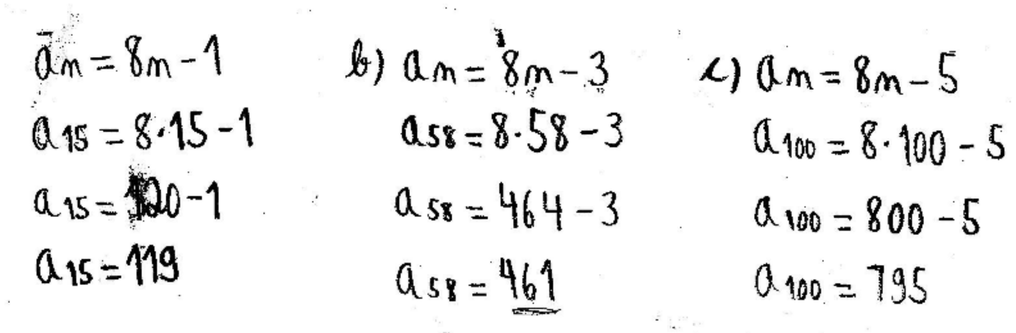


Figura 9: Solução Suj.3, Suj.25, Suj.26 e Suj.27
Fonte: Dados do pesquisador

Ao entregarem as atividades para o professor, alguns alunos manifestaram o contentamento em resolver a atividade, assim expressou o Suj.37: “Problema gostoso de resolver, é só pensar e fazer conta”.

4.2.4 Plenária

Para a realização da plenária, o professor optou por ele mesmo escrever no quadro as soluções relatadas pelos alunos e daí explorar as situações que aparecessem e assim chamou a turma para discutir as resoluções:

> Professor: Quem vai dizer como resolveu os exercícios?
> Suj.44: Achei o termo geral 2n + 1, calcular qual termo tava pedindo e aí substituir no n.
> Professor: Alguém fez diferente?
> Suj.34: Nós. Nós vimos que a razão de cada coluna é de oito em oito e você deu o a_3.
> Professor: E aí?
> Suj.34: Como pediu o a15, multipliquei o 8 por 12 e somamos 23 (a_3).
> Professor: porque vocês multiplicaram o 8 por 12?
> Suj.34: uai, porque 15 – 3 =12.
> Professor: Todo mundo entendeu? Alguém fez parecido com eles?
> Suj.30: Nossa dupla pegou o primeiro termo. Multiplicamos 14 por 8 e somamos com 7(a_1).
> Professor: Resumindo, algumas duplas usaram o a_3 e outros o a_1, precisamos fazer tudo mundo igual. Que tal usarmos apenas o ai?

Prosseguindo o diálogo, o professor explorou a atividade a partir das soluções apresentadas, reforçando a utilização do primeiro termo e, posteriormente, generalizou para PA com razão r e, ao final, os alunos já respondiam que $a_{15} = 14r + a_1$; $a_{58} = 57r + a_1$ e $a_{100} = 99r + a_1$.

Aproveitando o envolvimento dos alunos, o pesquisador resolveu abordar a PG. Estabeleceu-se, então, o diálogo:

> Professor: Vamos abandonar por hora a PA e vamos pensar agora numa PG.
> Suj.42: Já?
> Professor: Sim. Agora pensem numa PG em que $a_1 = 3$ e razão q = 2. Como calculo o a2?
> Suj.44: 3 x 2
> Professor: E o a_3?
> Suj.44: 6 x 2
> Professor : E o a_4?
> Turma: 12 x 2.
> Professor : E o a_n?

(Silêncio total)
Suj.42: Seria 3.n? ou 3 q?
Professor: Antes de responder a colega, posso sugerir uma saída?
Turma: Sim.
Professor: Escrevam o a_2 que vocês calcularam utilizando os termos de uma PG.
Suj.42: Como assim?
Professor: 6 = a_1. q? Como escrever o 12?
Suj.37: 12 é a_1.q.q.
Professor: (escrevendo no quadro) Muito bem! $a_3 = a_1$. q.q. E o a_4 = 24?
Suj.37: $a_4 = a_1$.q.q.q
Professor: (escrevendo no quadro) Muito bem! $a_4 = a_1$.q.q.q. Que vocês podem perceber?
Suj.17: Que você multiplicou a razão duas vezes pra achar o a_3 e três vezes pra para achar o a_4.
Suj.37: Já sei! $a_3 = a_1.q^2$ e $a_4 = a_1.q^3$
Professor; Excelente! Como calcular então o a_{100}?
Suj.37: $a_{100} = a_1.q^{99}$.

Prosseguindo, o professor sugeriu que calculassem o vigésimo termo para PA e PG em que o primeiro termo é 5 e a razão igual a 3.

4.2.5 Análise

Embora a atividade apresentasse uma resolução óbvia imediata, ao requerer uma estratégia diferenciada da simples enumeração dos elementos, o pesquisador, segundo GAZIRE (1998), apresentou um problema, pois, houve a compreensão da situação, exigia ação e houve o interesse geral em agir sobre a situação.

Ainda, baseado em ONUCHIC (2008), percebe-se o caráter de investigação, pois os alunos utilizaram seus conhecimentos, descobriram caminhos, tomaram decisões e trabalharam em conjunto, ajudando-se mutuamente na solução do problema.

Durante o trabalho, percebeu-se uma <u>discussão de ideias</u> e <u>produção de argumentos</u> e assim, nas soluções apresentadas, os grupos procuraram <u>selecionar a melhor estratégia de resolução</u>, ora trabalhando os números da tabela como uma única sequência, ora separando-os em quatro sequências diferentes.

Os grupos que apresentaram soluções erradas, embora tenham selecionado uma estratégia correta, não souberam criticar e validar os resultados. Ações estas, bem executadas pelos alunos que procuraram enumerar os elementos no tempo restante para execução da atividade.

Procurou-se na atividade, propiciar uma situação onde o problema fosse encarado como um elemento que disparasse um processo de construção do conhecimento, isto é, centrar o ensino, permitindo que construísse os conceitos matemáticos durante a resolução do problema, sendo a seguir formalizados pelo professor. Assim, além do termo geral da PA, foi possível explorar o termo geral da PG também.

Como recomenda Castro (2004), os processos de procurar regularidades, formular, testar e generalizar foram contemplados e outro avanço significativo: nenhum ato de indisciplina, intervenção somente quando alguns falavam paralelamente; o envolvimento de alunos que pouco se interessavam por aulas expositivas e que já se consideravam reprovados e o mais impactante: a turma que sempre foi apática apresentava uma enorme participação e discussão das atividades.

4.3 Situação Problema 3

SITUAÇÃO PROBLEMA 3
A corrida de São Silvestre é disputada tradicionalmente no dia 31 de dezembro na cidade de São Paulo. São 15 quilômetros de percurso, muitas vezes sob forte calor. E se você decidisse participar da São Silvestre? Para chegar a correr 15 quilômetros, seria prudente fazer um programa de treinamento: começar correndo uma distância pequena e depois ir aos poucos aumentando o percurso até completar os 15 km. Poderíamos pensar no seguinte programa: 1ª semana: correr 600 metros por dia. 2ª semana: correr 1000 metros por dia 3ª semana: correr 1400 metros por dia e assim por diante. a) Quantos quilômetros você estaria correndo na 12ª semana? b) Quantos quilômetros você estaria correndo na 30ª semana? c) Em que semana você atingiria os 15 000 metros do percurso?

Quadro 4: Situação problema 3
Fonte: Dados do pesquisador

4.3.1 Objetivo

Calcular os termos e também o número de termos da Progressão Aritmética, pois os alunos já sabiam encontrar o termo geral de uma sequência numérica.

4.3.2 Desenvolvimento da atividade em sala de aula

O encontro foi iniciado com os alunos formando duplas por afinidade. Foi estipulado um tempo de 20 minutos para que as 22 duplas resolvessem o problema.

Percebeu-se que a maioria dos alunos procurou escrever o termo geral valendo-se do primeiro termo e preocupados com o cálculo correto, solicitaram o uso de calculadora, o que foi permitido pelo pesquisador.

A atividade transcorreu em um clima tranquilo e pela primeira vez, durante a pesquisa, não houve troca de informações entre grupos, nem para simples conferência de resultados, prática comum entre eles.

4.3.3 Algumas soluções apresentadas pelos grupos

A primeira questão, considerada simples, teve um alto índice de acertos, apenas dois alunos (Suj.30 e Suj.28) apresentaram erro, isto é, resolveram as operações de forma incorreta (FIG. 10):

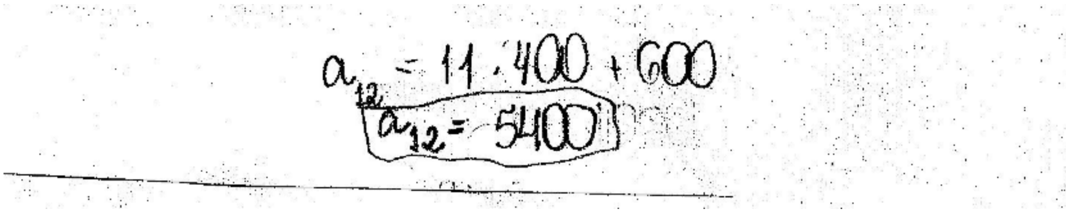


Figura 10: Solução Suj.30 e Suj.28
Fonte: Dados do pesquisador

A dupla formada por Suj.36 e Suj.37 valeu-se de ilustração para a compreensão e desenvolvimento do problema (FIG. 11):

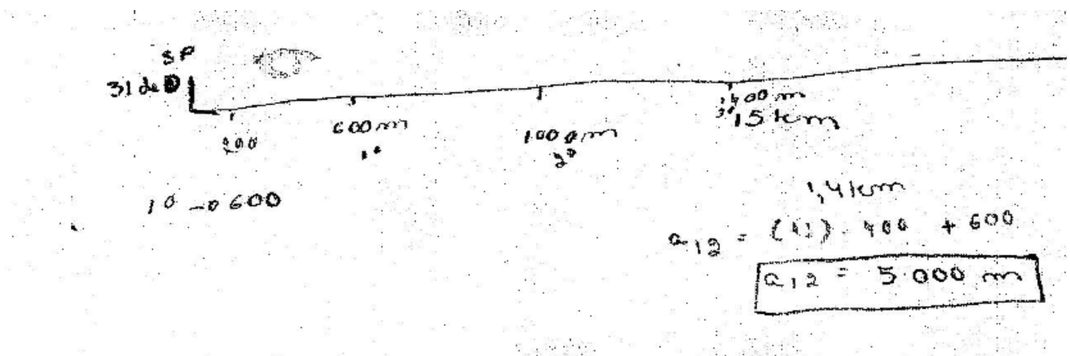


Figura 11: Solução Suj.36 e Suj.37
Fonte: Dados do pesquisador

Importante salientar que todos os alunos perceberam que deveriam calcular o 12° termo de uma PA e escreveram a fórmula correta.

A segunda questão, como a anterior, considerada simples, teve um alto índice de acertos, apenas outros dois alunos (Suj.43 e Suj.23) apresentaram erro, isto é, resolveram a multiplicação de forma incorreta (FIG. 12):

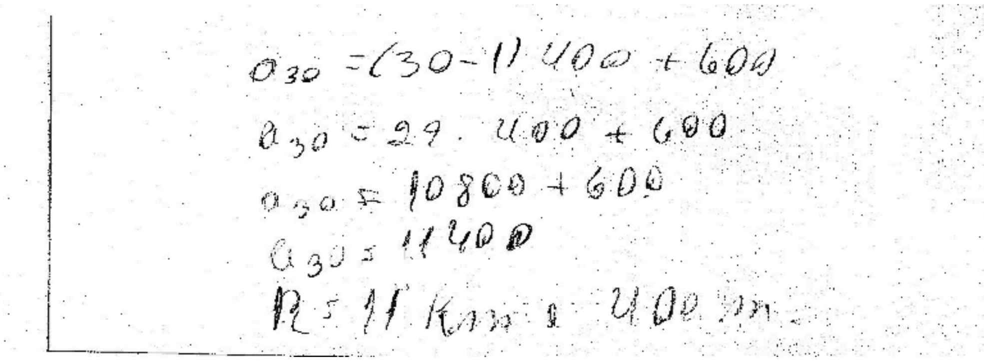

$a_{30} = (30-1) \cdot 400 + 600$
$a_{30} = 29 \cdot 400 + 600$
$a_{30} = 10800 + 600$
$a_{30} = 11400$
R = 11 Km e 400 m.

Figura 12: Solução Suj.43 e Suj.23
Fonte: Dados do pesquisador

Novamente todos os alunos perceberam que deveriam calcular o 30° termo de uma PA e escreveram a fórmula correta.

A atividade proposta foi a primeira questão que não solicitava que o aluno calculasse o termo geral, portanto apresentava um grau de dificuldade mais elevado. Dos 44 alunos que resolveram a atividade, a dupla formada por Suj.38 e Suj.46 não soube resolver e deixaram as atividades em branco. Outros 6 alunos não resolveram o problema de forma correta. Destes, Suj.18 e Suj. 33 não aplicaram de forma correta a propriedade distributiva (FIG. 13):

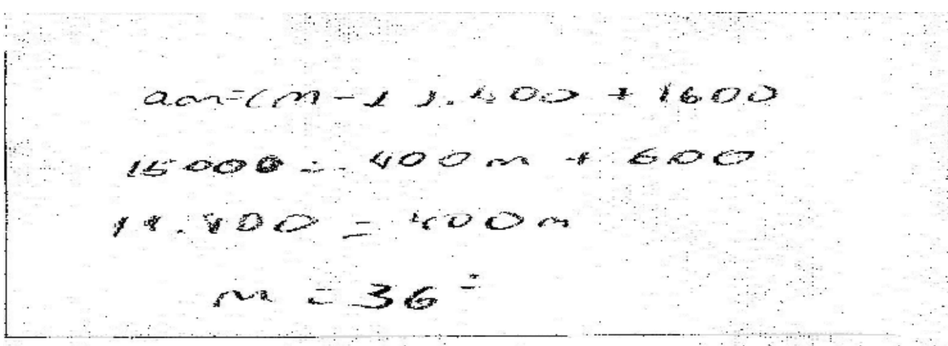
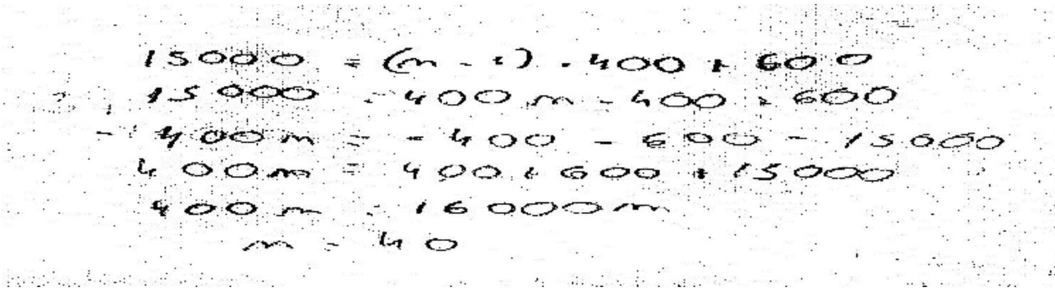

$a_n = (n-1) \cdot 400 + 1600$
$15000 = 400n + 600$
$14.400 = 400n$
$n = 36$

Figura 13: Solução Suj.18 e Suj.33
Fonte: Dados do pesquisador

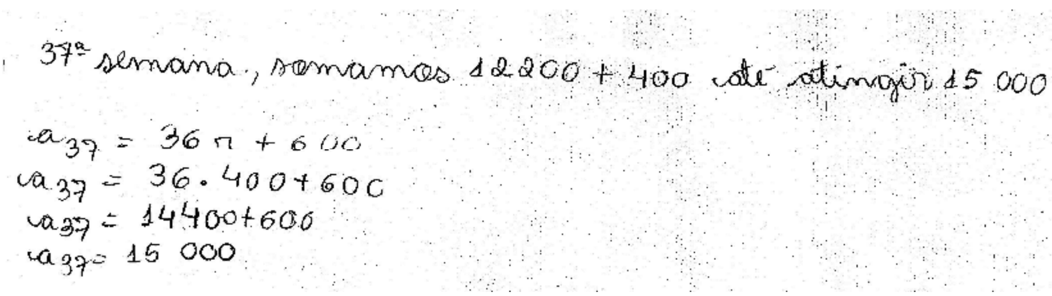
Os Suj. 24 e Suj. 34 erraram sinais (FIG. 14):



$15000 = (n-1) \cdot 400 + 600$
$15\,000 = 400n - 400 + 600$
$-400n = -400 - 600 - 15000$
$400n = 400 + 600 + 15000$
$400n = 16000$
$n = 40$

Figura 14: Solução Suj.24 e Suj.34
Fonte: Dados do pesquisador

É importante salientar que alguns alunos se valeram da resposta da questão anterior (12200 metros) e somaram 600 metros até obterem 15 000 metros, chegando assim à resposta certa (37 semanas). Assim, os Suj.35 e Suj.42 justificaram a resolução (FIG. 15):



37ª semana, somamos 12200 + 400 até atingir 15 000
$a_{37} = 36n + 600$
$a_{37} = 36 \cdot 400 + 600$
$a_{37} = 14400 + 600$
$a_{37} = 15\,000$

Figura 15: Solução Suj.35 e Suj.42
Fonte: Dados do pesquisador

Coincidentemente uma dupla (Suj. 23 e Suj.43) que errou a questão anterior valeu-se do mesmo recurso: somar o resultado da questão b e obviamente também apresentou resposta errada (FIG. 16). Assim:

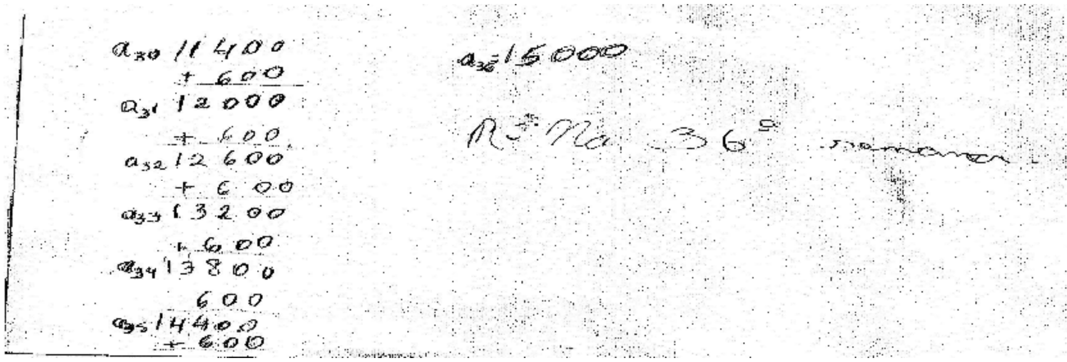


Figura 16: Solução Suj.23 e Suj.43
Fonte: Dados do pesquisador

4.3.4 Plenária

Uma dupla, convicta de ter acertado as respostas do problema, pediu para escrever suas resoluções no quadro, o que foi consentido pelo professor.

Como a dupla resolveu a atividade de forma correta, valendo-se do termo geral, a maioria concordou que também tinha acertado. Mas como alguns alunos não se manifestaram, o professor questionou:

> Professor: Todo mundo acertou tudo?
> Suj.32: Nós não usamos calculadora e aí erramos na conta.
> Professor: Mas sabiam resolver o problema?
> Suj.32: Sabia, apenas erramos 400 x 11.
> Professor: Mais alguém errou?
> Suj.33: Eu fiz errado a conta (n-1).600
> Professor : Suj.33 era só aplicar a propriedade distributiva, ok?
> (o professor resolve no quadro)
> Suj.33: Sim, agora é tarde.
> Professor: mais alguma dúvida? Alguém não soube resolver?
> Suj.38: Nós não fizemos agente não sabia o que tinha que calcular
> Professor: E agora? Viram que o n é o número de semanas?
> Suj.38: Sim, mas é difícil isso.

Assim, o professor refez o problema no quadro com a turma, detalhando e explicando cada passa da resolução.

4.3.5 Análise

O problema, baseado nas ideias de Vila e Callejo (2006), foi proposto como atividade de síntese para ajudar a recapitular conhecimentos ou desenvolvimento da unidade estudada e assim, ajudar o aluno a assimilar conteúdos, aprofundá-los, verificar a possibilidade de aplicá-los em situações semelhantes ou novas.

Também se procurou ajudar os alunos a compreenderem os conceitos, os processos e as técnicas operatórias necessárias dentro do trabalho feito em cada unidade temática, conforme sugere ONUCHIC (1999).

Numa primeira análise percebeu-se que houve emprego correto da fórmula de termo geral da PA pela maioria dos alunos, o que aponta que houve a aprendizagem esperada. Fato este atestado quando se analisa as habilidades propostas pelos PCNEM.

Pôde-se constatar que os alunos <u>identificaram o problema</u> e <u>interpretaram informações</u>, pois apresentaram solução para o problema. A única exceção foram os Suj.38 e Suj.46, que não souberam identificar o problema <u>c</u> e, com isso, não apresentaram resolução alguma.

Outro ponto forte foi <u>seleção de estratégia de resolução</u>. Assim, quase todos os grupos souberam identificar e utilizar os termos que os problemas exigiam. As respostas erradas foram causadas por erros de cálculos.

Algumas das resoluções apresentadas em 5.3.3 comprovam a <u>utilização dos raciocínios dedutivos e indutivos</u> no problema <u>c</u>.

4.4. Situação Problema 4

SITUAÇÃO PROBLEMA 4
1- Uma pessoa compra um carro, devendo pagá-lo, em prestações mensais, durante 6 anos. As prestações pagas em um mesmo ano são iguais, sendo de R$ 500,00 o valor da primeira prestação, paga em janeiro. A cada ano, a prestação sofre um aumento de 10%, em relação à do ano anterior. Sendo assim, calcule o valor da prestação mensal, no último ano. 2 - Certa epidemia causada por um vírus atingiu uma cidade. No primeiro dia foram registrados 60 casos; no segundo dia, 180 novos casos; no terceiro 540, e nos dias subsequentes o número de novos casos se manteve na mesma progressão. Em que dia a estimativa atingiria 14 580 novos casos?

Quadro 5: Situação problema 4
Fonte: Dados do pesquisador

4.4.1 Objetivo

Calcular os termos e também o número de termos da Progressão Geométrica.

4.4.2 Desenvolvimento da atividade em sala de aula.

O encontro foi iniciado com os alunos formando duplas por afinidade. Foi estipulado um tempo de 25 minutos para que as 23 duplas resolvessem os dois problemas.

Alguns alunos deixaram claro seu descontentamento por se tratar de PG. Segundo eles, as operações envolvendo PG são mais trabalhosas e difíceis. Para resolver o impasse, o pesquisador concordou com o empréstimo da calculadora para os grupos que não a possuíam.

Vencida a resistência inicial, os alunos se concentraram na resolução dos problemas, mas o pesquisador percebeu que dois alunos (Suj.42 e Suj.38) apenas leram as atividades e não tentaram resolvê-las. Interrogados sobre tal atitude, eles alegaram que os problemas eram chatos e estavam com preguiça de pensar. O pesquisador lamentou a atitude e pediu-lhes que permanecessem em silêncio sem atrapalhar o restante da turma.

Ao término da atividade houve muita discussão entre os grupos, comparando os resultados e suas resoluções.

4.4.3 Algumas soluções apresentadas pelos grupos

O primeiro problema exigia cálculos mais trabalhosos que os empregados na PA: o cálculo da razão e, posteriormente, a quinta potência desta razão. Assim, três duplas, além da dupla que não realizou a atividade, não conseguiram calcular a razão, deixando a atividade em branco.

A dupla composta por Suj.26 e Suj.27 teve o cuidado de listar os dados e detalhar o cálculo da razão antes da resolução (FIG. 17):

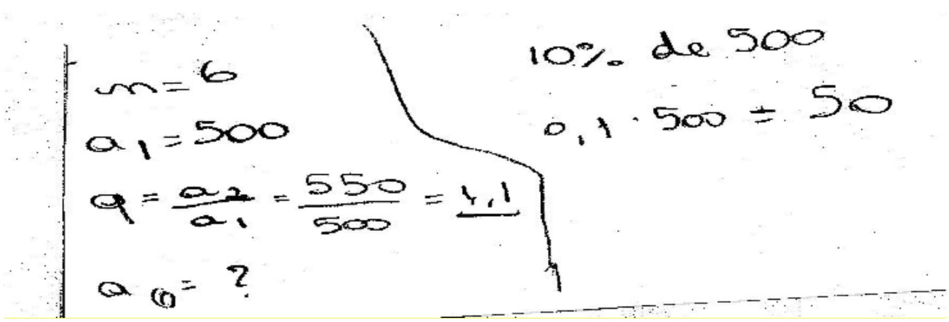


Figura 17: Solução Suj.26 e Suj.27
Fonte: Dados do pesquisador

Percebeu-se um erro na fórmula do sexto termo da PG, cometido pelos Suj.40 e Suj.43. Pode-se atribuir este erro à falta de atenção na resolução e ausência de validação da resposta, pois a dupla calculou a razão ($q=1,1$) corretamente e empregou $q = 0,9$ na resolução (FIG. 18):

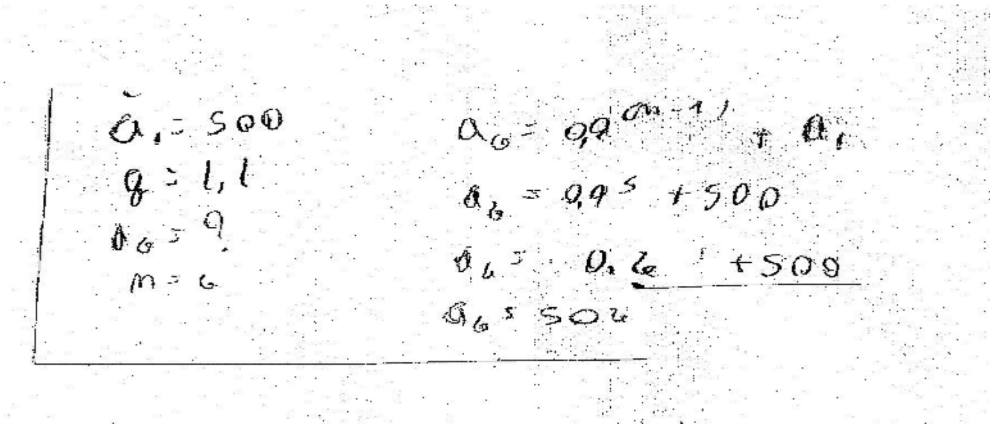


Figura 18: Solução Suj.40 e Suj.43
Fonte: Dados do pesquisador

Outra demonstração de desatenção foi dada pela dupla formada pelos Suj.3 e Suj.7 que calcularam o quinto termo ao invés do sexto e efetuaram a multiplicação de forma errada (FIG. 19):

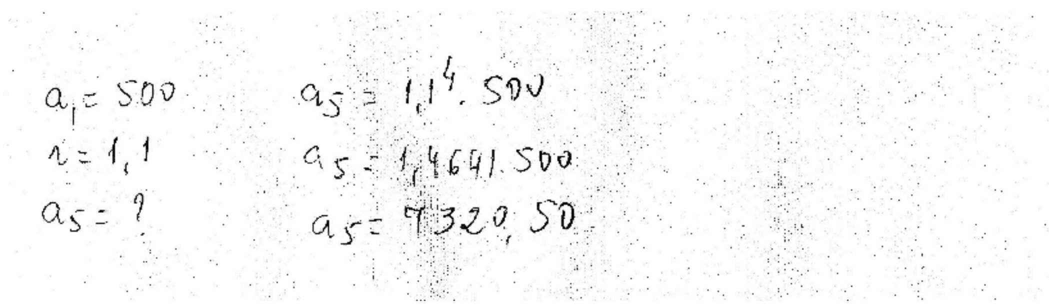


Figura 19: Solução Suj.3 e Suj.7
Fonte: Dados do pesquisador

As outras duplas apresentaram resolução semelhante à apresentada pelos Suj.22 e Suj.25 (FIG. 20):

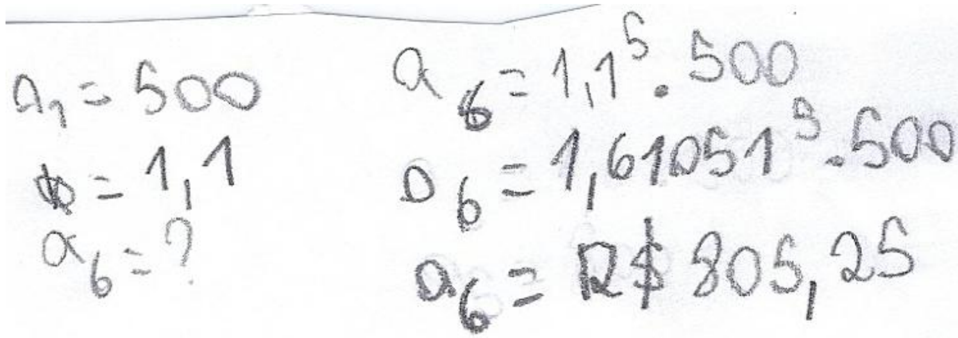


Figura 20: Solução Suj.22 e Suj.25
Fonte: Dados do pesquisador

Percebeu-se também que alguns alunos, como Suj.11 e Suj.45, optaram pelo arredondamento da potência calculada (Fig. 21):

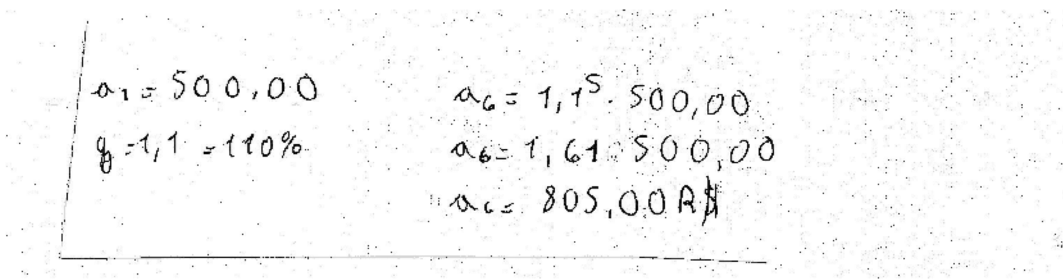


Figura 21: Solução Suj.11 e Suj.45
Fonte: Dados do pesquisador

O segundo problema também apresentava certo grau de complexidade devido ao fato de empregar equação exponencial na sua resolução.

Além de duas duplas que não resolveram a atividade, outras duas duplas (Suj.36, Suj.37 e Suj.35, Suj.24) armaram o problema corretamente: $14580 = 3^{(n-1)}. 60$, mas não desenvolveram a equação.

Outras três duplas (Suj.10, Suj.13; Suj.18, Suj.33 e Suj.22, Suj.44) não souberam desenvolver a equação exponencial até o final (FIG. 22):

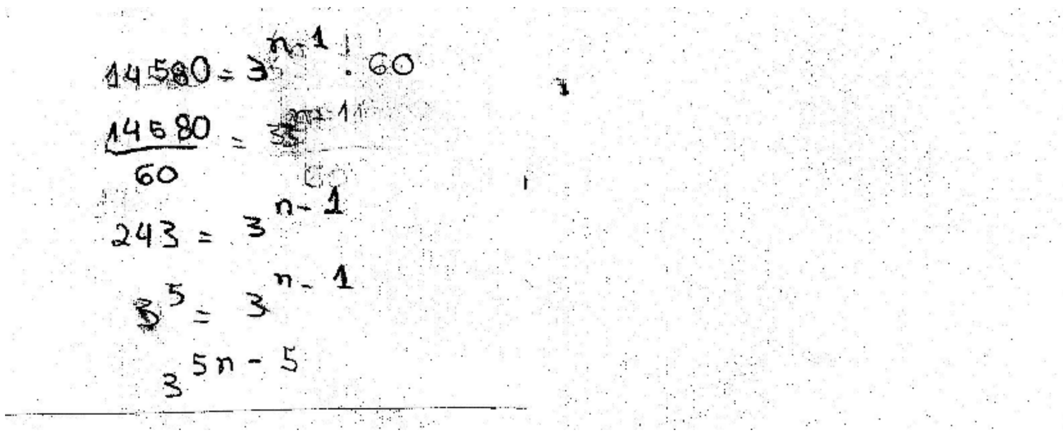


Figura 22: Solução Suj.10, Suj.13, Suj.18, Suj.33, Suj.22 e Suj.44
Fonte: Dados do pesquisador

A maioria das duplas resolveu o problema de forma semelhante à apresentada pela dupla composta pelos Suj.6 e Suj.30 (FIG. 23):

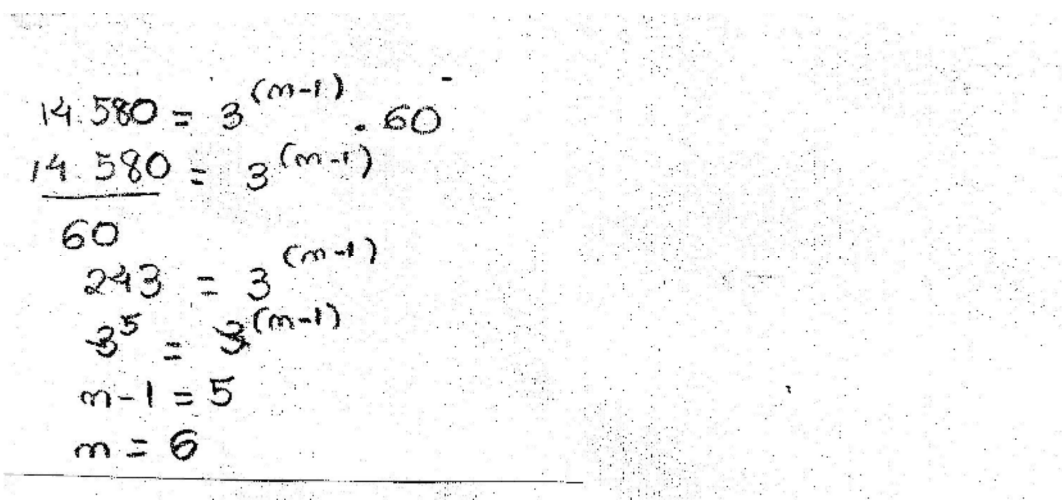


Figura 23: Solução Suj.6 e Suj.30
Fonte: Dados do pesquisador

Das resoluções corretas, destaca-se a opção da dupla Suj.3 e Suj.39 por cálculos mais elaborados (FIG. 24):

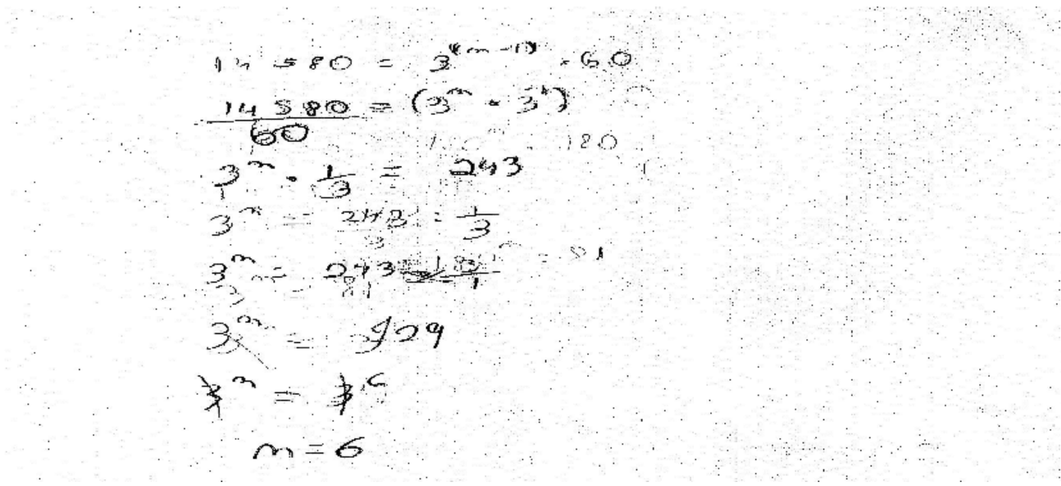


Figura 24: Solução Suj.3 e Suj.39
Fonte: Dados do pesquisador

4.4.4 Plenária

Para a realização da plenária, o pesquisador decidiu que os voluntários somente deveriam apresentar no quadro as resoluções após a discussão dos passos seguidos. Isto devido ao descontentamento da turma com PG e, também, por causa do grau de complexidade dos problemas.

> Professor: Turma, qual o primeiro passo para a resolução do problema?
> Suj.26: Calcular o segundo termo.
> Professor: Para que calcular o segundo termo Suj.26?
> Suj.26: Pra calcular a razão.
> Professor: Suj.26 resolva o problema no quadro?
> (após a resolução apresentada no quadro)
> Professor: Alguém fez diferente?
> Suj.3: Nós vimos que se o aumento é 10%, a razão é 110%.
> Professor: Mas vocês usaram q = 110?
> Suj.3: Não, 110% = 1,1, usei q = 1,1
> Professor: Muito bem! E depois?
> Suj.22: Depois foi só calcular o a_6.
> Professor: Apresenta pra nós a resolução de vocês, Suj.22?
> (após a resolução no quadro)
> Professor: Alguma dúvida? Alguém fez diferente?
> Suj.3: Ih! Calculei o a_5.
> Professor: Mais alguém?
> Suj.45: Professor, nós arredondamos a potência, tá errado?
> Professor: Não, tudo bem, vocês apenas encontraram um valor aproximado daquele que está no quadro, não foi?

Como nenhum outro aluno se manifestou, o professor passou imediatamente para o problema 2.

> Professor: O que o problema estava pedindo?
> Suj.27: O número de dias.
> Professor: Mas qual variável representa o número de dias?
> Suj.30: O n.
> Professor: Todo mundo concorda que estávamos procurando o n?
> Turma: Sim.
> Suj.12: Mas aí caiu numa equação exponencial.
> Professor: E que tem isso? Nós já aprendemos a resolver equação exponencial, não é Suj.12?
> Suj.12: Sim, mas não lembrava mais.
> Professor: Um voluntário para resolver o problema no quadro?
> (após o Suj.30 apresentar sua resolução no quadro)
> Professor: E aí? Alguma dúvida?
> Suj.33: Nós não resolvemos certo. Chegamos na potência e não saímos do lugar.
> Professor: E agora? Tudo bem? Mais alguma dúvida?

Como o fato de nenhum aluno resolver questionar e nem opinar, o professor deu por encerrada a plenária e pediu que os alunos resolvessem duas atividades semelhantes do livro didático.

4.4.5 Análise

Os problemas, assim como na atividade anterior, foram propostos para ajudar os alunos na compreensão de conceitos, processos e também as técnicas operatórias, ou seja, proporcionar aos alunos uma atividade de síntese do termo geral de PG.

Embora a pesquisa até este ponto contasse com apenas duas fórmulas, a atividade requeria habilidades além da simples manipulação destas. Tal atividade reforçou o avanço dos alunos em conjecturar e construir seus próprios conhecimentos. Outra característica relevante é a comunicação estabelecida em sala de aula. Embora sejam comuns aos jovens algumas brincadeiras durante as aulas, a turma permaneceu centrada, dialogando, trocando ideias e impressões em clima de harmonia.

Importante ressaltar que para a dupla Suj.42 e Suj.38 a atividade não representou um problema, pois segundo GAZIRE (1998), para ser problema o aluno quer ou precisa agir sobre a situação e os sujeitos se recusaram a fazer qualquer coisa na direção de resolvê-lo.

Com relação às habilidades propostas pelos PCNEM, pode-se contatar que mais de 80% dos alunos, identificou os problemas e interpretou as informações, pois coletaram os dados e esboçaram uma equação para os problemas.

Assim, embora formulassem hipóteses e selecionaram estratégias, alguns alunos não souberam recorrer a modelos e técnicas operatórias adequadas. Fato este, conseguido pela maioria, pois cerca de 70% dos alunos apresentaram resolução correta.

Como citado anteriormente, percebeu-se na turma um avanço na discussão das ideias e argumentação bem fundamentada em suas convicções e conhecimentos.

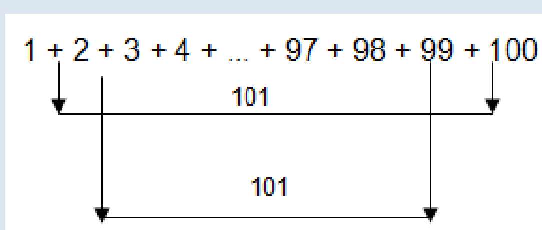
4.5 Situação Problema 5

SITUAÇAO PROBLEMA 5

Conta-se que por volta de 1790, numa aldeia alemã, um professor estava tão irritado com a bagunça feita por seus alunos que lhes passou um castigo: todos deveriam calcular a soma dos números naturais de 1 a 100. (1 + 2 + 3 + 4 + ... + 97 + 98 + 99 + 100)

Certo de que os alunos ficariam quietos realizando a tarefa, o professor acabou tendo uma surpresa. Instantes após a solicitação, Gauss, um menino de 10 anos, apresentou o resultado correto: 5050.

O professor ficou muito intrigado e foi logo perguntando como ele tinha encontrado a resposta com tanta rapidez. O menino explicou:



(continua)

(conclusão)

SITUAÇAO PROBLEMA 5
Existem 100 números de 1 a 100. Agrupando-os de dois em dois como o esquema acima, obteremos 50 parcelas de 101. Então bastou multiplicar 101 por 50 = 5050. • Utilize o que você aprendeu com o texto para resolver o seguinte problema: Na compra de um terreno, foi combinado que o pagamento da primeira parcela seria efetuado um mês após a compra e teria o valor de R$300,00. A partir da segunda parcela o comprador pagaria R$35,00 a mais que a parcela anterior. Qual o total pago por um cliente que comprou o imóvel em 25 parcelas?

Quadro 6: Situação problema 5
Fonte: Dados do pesquisador

4.5.1 Objetivo

Calcular a soma dos termos da Progressão Aritmética.

4.5.2 Desenvolvimento da atividade em sala de aula

O encontro foi iniciado com os alunos formando duplas por afinidade. Foi estipulado um tempo de 30 minutos para que as 22 duplas resolvessem o problema.

Após reclamações de alguns alunos pela extensão da atividade, o professor pediu à turma que lesse com atenção e que todos gostariam da história. Assim, as duplas fizeram a leitura e, ao término, muitos expressavam surpresa e admiração pelo fato do Gauss ter uma saída tão geniosa aos 10 anos de idade.

O professor orientou a turma que, assim como Gauss, todos deveriam procurar resolver a questão de forma mais elaborada, procurando não escrever todas as parcelas.

Assim, percebeu-se que, pela primeira vez, os alunos não tiveram pressa na resolução, havia muito dialogo entre as duplas, procurando escolher a melhor estratégia de resolução.

Quando a atividade foi recolhida, todas as duplas fizeram entre si, comparação de resolução e resultados.

4.5.3 Algumas soluções apresentadas pelos grupos

Percebeu-se nas resoluções entregues ao professor o uso de diferentes estratégias para resolver a questão.

Sete duplas, contrariando o pedido do professor e na falta de imaginação para elaborar outra estratégia de resolução, optaram por enumerar todas as parcelas a serem pagas.

Das tais sete duplas, duas delas (Suj.7, Suj.15 e Suj.35, Suj.42) enumeraram as parcelas, mas, sem calculadora desistiram de efetuar a soma de todas elas, parando por ai.

Outras duas duplas (Suj.6, Suj.46 e Suj.29, Suj.43) efetuaram a soma das parcelas e erraram nos cálculos, embora tenham escrito todas as parcelas corretamente.

As duplas (Suj.8, Suj.45 e Suj.20 e Suj.27), com auxílio da calculadora, apresentaram resolução semelhante à dupla composta pelos Suj.32 e Suj.33 (FIG. 25a e 25b):

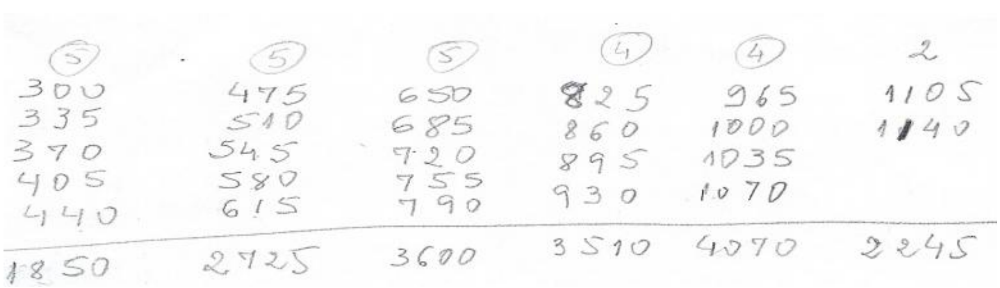


Figura 25a: Solução Suj.32 e Suj.33
Fonte: Dados do pesquisador

Figura 25b: Solução Suj.32 e Suj.33
Fonte: Dados do pesquisador

Nove duplas procuraram seguir o raciocínio apresentado na atividade e resolveram de forma semelhante à apresentada pela dupla dos Suj.34 e Suj.44:

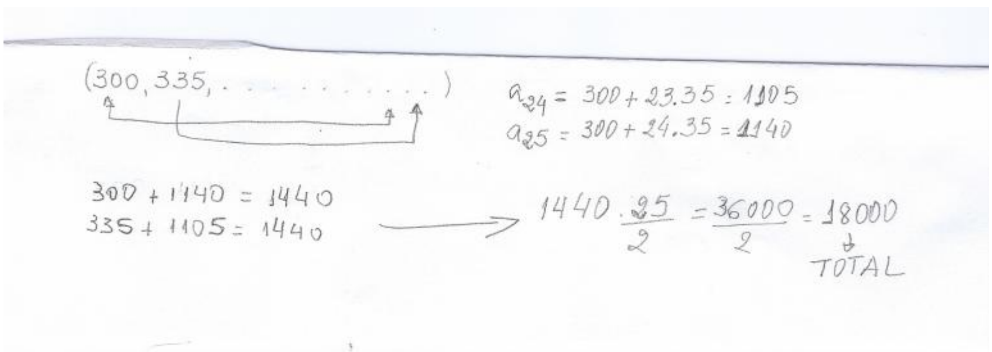


Figura 26: Solução Suj.34 e Suj.44
Fonte: Dados do pesquisador

As outras duplas resolveram o problema valendo-se, de forma simplificada, das operações essenciais, assim como a dupla (Suj.5 e Suj.39) fez:

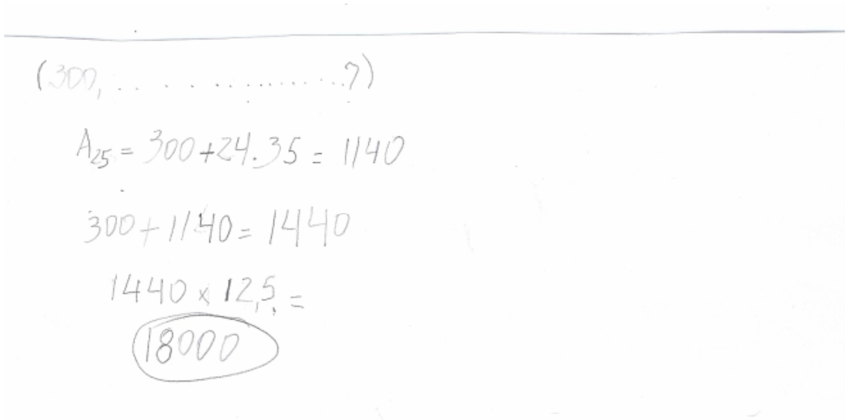


Figura 27: Solução Suj.5 e Suj.39
Fonte: Dados do pesquisador

4.5.4 Plenária

Para a realização da plenária, foi solicitado que uma dupla que resolveu a atividade bem detalhada a reproduzisse no quadro.

Diante da solução apresentada pelo Suj.39, o professor resolveu questionar:

> Professor: Todos entenderam como Gauss resolveu a soma dada pelo professor?
> Suj.35: Entender nós entendemos, mas ele sabia todos os números que tinha que somar, né professor?
> Professor: Sim, mas ele precisava de todos?
> Suj.34: Não, só os dois últimos.
> Suj.31: Nem isso, só o um, ou melhor, o último resolvia o problema.
> Professor: Muito bem, então Suj.35 o que era preciso para resolver o problema?
> Suj.35: Ainda não entendi.
> Suj.31: Como era pra calcular 25 parcelas, era só calcular o a_{25}.
> Professor: Assim, Suj.35, todos os termos eqüidistantes somados dão 1440. Que mais turma?
> Suj.3: Era só pegar o 1440 e multiplicar pela metade de 25 parcelas.
> Professor: Exatamente. Entendeu Suj.35? Podemos avançar?
> Turma: Sim.
> Professor: Agora vamos voltar ao problema do Gauss para tentarmos encontrar uma fórmula para a soma dos termos da PA?
> Suj.35: Lá vem mais fórmula.
> Professor: Sim, Suj.35. Qual foi a primeira coisa que o Gauss fez?
> Suj.37: Somou 1 com 100.
> Professor: Tá, mas se fosse uma PA de n termos.
> Suj.37: Ia somar o primeiro termo com o a_n.
> Professor: Muito bem! E o que ele fez depois?
> Suj.37: Multiplicou por 50.

> Professor: E se fosse n termos?
> Suj.3: Multiplicaria por n/2.
> Professor: Muito bem, é simples, resumindo.....
> Suj.3: É só somar a_1 com a_n e multiplicar por n/2.
> Professor: Perfeito! Vocês acabam de descobrir a soma dos n termos da PA.

Após algumas exclamações de admiração pelo Gauss, o professor pediu que os alunos resolvessem o problema para 30 parcelas.

4.5.5 Análise

O problema foi proposto para disparar um processo de construção do conhecimento pelo aluno. E, segundo Gazire (1988), a atividade, de fato, constituiu-se num problema, pois além dos alunos compreenderem a situação, houve interesse e ação.

Com relação às habilidades, pôde-se constatar que <u>identificaram o problema</u> e <u>interpretaram informações</u>, pois todas as duplas esboçaram alguma resolução.

Percebeu-se também que através do raciocínio dedutivo, as 15 duplas que acertaram o problema, <u>formularam hipóteses</u> e <u>selecionaram uma estratégia</u> eficiente. As duplas que enumeraram as parcelas não souberam elaborar uma estratégia e também se percebeu a ausência de <u>validação</u> de suas respostas.

Com a realização da plenária, a turma pôde através do <u>raciocínio indutivo</u>, <u>conjecturar</u> e <u>discutir ideias</u>.

Por outro lado, baseando-se em Villa e Callejo (2006), pode-se afirmar que o problema ajudou a turma a assimilar o conteúdo e aplicá-lo numa situação diferenciada.

4.6 Algumas considerações sobre o desempenho da turma

Como foi dito ao longo deste trabalho, a pesquisa de campo foi realizada no 2° semestre de 2010, com os 46 alunos regularmente matriculados no 1º ano do Ensino Médio da escola onde o pesquisador é professor. Assim, o trabalho de campo foi realizado no horário regular das aulas da turma, a cargo do pesquisador, onde procurou manter a rotina da escola e o programa da disciplina, pois este já constava do planejamento da série, no segundo semestre.

Portanto, fazia parte da rotina, também, avaliar o desempenho dos alunos individualmente. Com este intuito, procurou-se, no final da pesquisa, elaborar uma atividade contendo cinco problemas contemplando o conteúdo sobre Progressões.

O Quadro 7 apresenta o desempenho dos alunos por problema.

CONTEÚDO	PORCENTAGEM DE ACERTOS
Termo geral da Progressão Aritmética	0,72
Soma dos termos da Progressão Aritmética	0,72
Termo geral da Progressão Geométrica	0,72
Soma dos termos da Progressão Geométrica finita.	0,65
Soma dos termos da Progressão Geométrica infinita.	0,6

Quadro 7: Desempenho dos alunos por problema, segundo o conteúdo nele contemplado
Fonte: Dados do pesquisador

É importante salientar que 43% dos alunos, antes da efetivação da pesquisa, apresentavam rendimento inferior a 60% e alguns deles já não acreditavam numa melhora deste desempenho. Assim, pôde-se perceber que o envolvimento deles na realização das atividades provocou uma melhora no rendimento escolar dos alunos.

Outro fator importante a considerar foi o fato de cada problema ter provocado algum desenvolvimento, isto é, houve a identificação do problema e uso de estratégia de resolução. Os erros encontrados ocorreram por escolha de estratégia equivocada e/ou erros de cálculo.

A frequência da resolução de problemas também permitiu uma maior familiaridade dos sujeitos da pesquisa com os mesmos. Se antes da implementação da pesquisa, problemas eram vistos como algo difícil, durante a realização das atividades, nenhum aluno reclamou da presença deles.

4.7 Ponto de vista de alguns pesquisados em relação à proposta realizada

Ao final das atividades, foi solicitado aos alunos que redigissem um parágrafo narrando suas impressões sobre as aulas, sobre as atividades realizadas. O intuito era avaliar o nível de satisfação dos alunos e se consideravam a proposta de trabalho eficiente.

Algumas destas opiniões estão registradas a seguir:

Suj.29: *"Achei muito interessante o método utilizado, pois ele induz maior participação e questionamento dos alunos, o que aumentou o interesse dos mesmos e até mesmo o rendimento, que pôde ser observado pelas notas das avaliações e o aprendizado".*

Suj.31: *"O trabalho foi legal, mas meu rendimento não foi bom. Tive que pensar muito e errei muito também".*

Suj.3: *"O trabalho utilizado foi bastante eficaz, pois conseguiu envolver até os alunos que não costumavam participar das atividades, a discussão dos alunos fazia todos chegar a uma mesma opinião e à resolução de determinadas questões".*

Suj.45: *"Para mim a aula foi uma aula diferente em que interagia mais com os alunos forçando eles a pensar, deixando eles curiosos não só passando a fórmula e pronto, não foi só decoreba".*

Suj.37: *"Eu particularmente gosto de matemática, quero que a conta tenha fim, quero chegar ao resultado, porém nessas aulas eu pude notar que não só o de chegar no resultado é saber onde ir, o porque de ir e ainda mais você percebendo que pode fazer sozinho dá uma força muito maior pra sempre conseguir".*

Suj.39: *"As aulas começaram com coisas que para mim não faziam sentido, mas fui vendo que as coisas começaram a se encaixar e no fim percebi o porquê de tudo. Tive vontade de aprender, de saber mais, acho que foi melhor para mim, mas não sei pra se todos".*

Suj.25: *"É interessante o modo como algo teoricamente difícil passo a passo se torna simples e as fórmulas não são complicadas. Adorei o trabalho embora o aprendizado poderia ser mais rápido se tivesse passado a matéria em vez de buscá-la. Porém assim ajudaria a minoria e com o trabalho ajudou a todos e despertou interesse e alunos começaram a participar".*

Suj.44: *"A experiência inovadora na matéria de PA e PG foi muito interessante e eu tive uma melhora expressiva na minha nota, consegui entender a matéria com facilidade. Foi uma matéria até mesmo 'gostosa' de se aprender e estudar. O mais interessante nas aulas é pelo fato de que o professor estimulou os alunos a de certa forma descobrir as fórmulas e assim todos tiraram dúvidas e aprendiam na sala".*

Para dar resposta à questão de pesquisa, foram oferecidas aos alunos atividades que proporcionavam oportunidades diferentes para a aprendizagem, isto é, que pudessem pensar, agir e discutir suas ideias para a construção do conhecimento. De fato, para Schoenfeld (1996), é preciso fazer das aulas situações em que os alunos se sintam membros de uma comunidade matemática, envolvidos em situações de aprendizagem.

Conforme D'Amore (2007), os problemas privilegiam os processos fazendo com que o sujeito tenha um papel produtivo. Além disso, são instrumentos de aquisição de conhecimento. Pelos depoimentos dos sujeitos da pesquisa, as atividades propostas e realizadas possibilitaram que eles deixassem a função de executores de tarefas para a de produtores de conhecimento, ao aceitarem o convite para pensar e descobrir.

As opiniões dos sujeitos também evidenciaram a mudança de postura do professor, assim como salienta Onuchic (2008), dentro desse trabalho, o papel do professor muda de comunicador de conhecimento para o de observador, organizador, consultor, mediador, interventor, controlador e incentivador da aprendizagem.

Os depoimentos, além de sinalizarem uma melhoria no desempenho e mudanças de comportamentos em sala de aula, apontaram que a proposta de ensino, elaborada pelo pesquisador e realizada pelos sujeitos da pesquisa, conseguiu dar significado ao conteúdo, pois ao resolverem os problemas eles não sentiram necessidade de saber onde se aplicava tal conteúdo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Na presente pesquisa, de acordo com o referencial teórico construído, buscou-se apresentar a metodologia de Resolução de Problemas na concepção de vários pesquisadores, em especial de Onuchic (1999, 2007, 2008 e 2009) e também as propostas oficiais dos PCNEM (1999), com o objetivo de dar resposta à seguinte questão de investigação:

Que contribuições uma proposta de ensino baseada na resolução de problemas pode trazer para a aprendizagem de progressões aritméticas e geométricas?

Para obtenção da resposta foi elaborada uma proposta de ensino baseada na resolução de problemas e realizada por uma turma do primeiro ano do Ensino Médio. A proposta constava de atividades visando a aprendizagem de Progressões Aritméticas (PA) e Progressões Geométricas (PG). Os resultados apontaram que a Resolução de Problemas pôde levar o aluno a pensar e construir seu próprio conhecimento.

Os registros produzidos durante a realização da pesquisa evidenciaram que a proposta de ensino contribuiu efetivamente para a aprendizagem de PA e PG da maioria dos sujeitos que participaram.

De fato, do trabalho com progressões fazem parte a procura e identificação de padrões. Isto propicia a exploração, investigação, conjectura e prova, exigidos na resolução de problemas, pois estas ações desafiam os alunos a recorrerem às suas habilidades de pensamento superior. (VALE e PIMENTEL, 2005, p. 15).

Como o pesquisador é também professor da referida turma, pôde observar avanços significativos nos sujeitos da pesquisa em dois campos específicos: nas atitudes e no desempenho escolar.

Durante o desenvolvimento das atividades, percebeu-se que eles se sentiram motivados a agir. Embora algumas brincadeiras durante as aulas sejam comuns aos jovens, a turma permaneceu centrada, dialogando, trocando ideias e impressões. Assim, nenhum ato de indisciplina foi notado, não sendo necessária intervenção alguma do professor, nesse sentido. Um ponto importante a ser apontado foi o envolvimento de todos os sujeitos, com destaque para aqueles que, anteriormente, pouco se interessavam pelas aulas e se consideravam “fracos” em Matemática.

Assim, pode-se afirmar que a proposta de ensino empregada provocou nos sujeitos uma mudança de atitude, antes acostumados à passividade com a exposição de conteúdos, passaram a participar ativamente da organização dos conhecimentos antigos e na construção de novos. Houve responsabilidade na organização dos registros e na busca de informações para a resolução dos problemas e validação de suas conjecturas e respostas.

Trabalhando coletivamente, cada sujeito da pesquisa teve que cooperar com o seu par e chegar a um consenso nas soluções encontradas. Para isso, foi necessário saber explicitar o próprio pensamento e compreender o pensamento do colega; discutir as dúvidas e persistir nas ações.

Durante a realização das plenárias percebeu-se o interesse dos pesquisados não apenas em esclarecer dúvidas, mas também de expor as conjecturas próprias. Ao perceberem que o professor desejava provocar debates, eles confrontaram hipóteses e resultados, socializaram informações e produziram argumentos fundamentados.

Portanto, observou-se a consolidação de hábitos e atitudes como: confiança, flexibilidade de pensamento, perseverança e cooperação.

Quanto à aprendizagem matemática, esta ocorre com a interpretação e internalização dos fundamentos da Matemática. Assim, os sujeitos reconheceram que a solução de um problema pode se tornar ponto de partida para encontrar soluções e generalizações de outros.

Uma vez que aprender também significa estabelecer relações, a resolução de problemas contribuiu efetivamente para a aprendizagem de habilidades, algoritmos e procedimentos heurísticos, pois permitiram aos sujeitos da pesquisa o uso do que aprenderam em outros contextos.

Sobre habilidades propostas pelos PCNEM: identificação do problema, seleção de informações e de estratégias de resolução, utilização de raciocínio dedutivo e/ou indutivo, validação, discussão de ideias e produção de argumentos convincentes; percebeu-se que foram desenvolvidas com o desenrolar das atividades constantes da proposta de ensino.

Embora os pesquisados não tivessem perfil de leitores assíduos e apresentassem deficiências de leitura e escrita, por meio de sua produção notou-se o uso de esquemas, coleta de dados e busca por um caminho para a resolução do problema. Com isso, evidenciou-se a consecução de habilidades de identificação de problemas, seleção e interpretação de informações relativas aos mesmos.

Ainda é possível afirmar que foi promovida nos sujeitos da pesquisa a capacidade de comunicação oral e escrita, evidenciado através da elaboração de registros e discussão coletiva dos processos usados.

Uma vez identificado o problema, se ele não fosse solucionado não haveria avanço. Conforme evidenciado pelas análises feitas, os sujeitos da pesquisa, em sua maioria, apresentaram solução, corretas ou não, para os problemas propostos, evidenciando assim a habilidade de seleção de estratégias de resolução; para isso as discussões nos pequenos e grandes grupos foram fundamentais.

O uso de problemas como gerador do conhecimento de um conteúdo obrigou os sujeitos da pesquisa a modificarem sua estrutura cognitiva mediante uma série de ações: experimentando, interrogando, particularizando situações, generalizando resultados e encontrando contra-exemplos.

Assim, durante a realização da pesquisa, observou-se habilidades de utilização dos raciocínios indutivos e dedutivos na busca de soluções e mais fortemente na validação das conjecturas feitas durante o processo de resolução.

Como relatado em outras oportunidades, os pesquisados, anteriormente, não apresentavam um rendimento satisfatório em Matemática. A realização da proposta de ensino com a

Resolução de Problemas resultou numa melhora em seu desempenho, principalmente daqueles que já se julgavam reprovados na disciplina.

É comum, frente a um exercício, e até mesmo numa situação problema, o desejo de resolvê-la com a aplicação direta de um algoritmo. No entanto, no decorrer da pesquisa, observou-se uma mudança de postura dos pesquisados: o foco foi das operações matemáticas rumo à resolução dos problemas propostos, isto é, eles perceberam que as operações faziam parte de um processo maior: as resoluções.

As opiniões de alguns pesquisados sobre as atividades propostas evidenciaram a mudança de postura do professor, assim como salienta Onuchic (2008), na proposta de ensino utilizada na pesquisa, o papel do professor mudou de comunicador de conhecimento para observador, quando procurou perceber todos os acontecimentos; organizador, quando propôs os problemas e as condições de resoluções; consultor, quando forneceu informações necessárias que o aluno não tinha condições de obter sozinho; mediador, quando promoveu a confrontação das propostas; controlador, quando estabeleceu as condições para a realização das atividades e, finalmente, incentivador da aprendizagem, sendo aquele que estimulou a cooperação e encorajou os pesquisados em suas ações.

Em suma, os resultados da pesquisa possibilitaram dar resposta à questão de investigação. Ao abordar as progressões empregando a metodologia de Resolução de Problemas, além de envolver o pesquisado no processo de busca de seu conhecimento e oferecer-lhe oportunidade de pensar, possibilitou-lhe o desenvolvimento de habilidades como identificação do problema, seleção de estratégias de resolução, utilização de raciocínios indutivos e dedutivos; elaborar e validar conjecturas e, finalmente, a capacidade de argumentação.

Há que se destacar ainda, conforme Onuchic e Alevatto (2009), que a Resolução de Problemas permitiu ao aluno dar sentido ao conteúdo Progressões.

Como sugestão para pesquisas futuras relacionadas a esse tema, destaca-se a possibilidade de pesquisar a Resolução de Problemas aplicada a outros conteúdos e em outras séries da Educação Básica.

REFERÊNCIAS

ARCHILIA, S. **Construção do termo geral da progressão aritmética pela observação e generalização de padrões.** 2008. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6023:** informação e documentação: referências: elaboração. Rio de Janeiro: ABNT, 2002.

______. **NBR 6024:** numeração progressiva das seções de um documento escrito: apresentação. Rio de Janeiro: ABNT, 2003.

______. **NBR 6027:** informação e documentação: sumário: apresentação. Rio de Janeiro: ABNT, 2003.

______. **NBR 6028:** informação e documentação: resumo: apresentação. Rio de Janeiro: ABNT, 2003.

______. **NBR 10520:** informação e documentação: citações em documentos: apresentação. Rio de Janeiro: ABNT, 2002.

______. **NBR 14724:** informação e documentação: trabalhos acadêmicos: apresentação. 2. ed. Rio de Janeiro: ABNT, 2005.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Orientações curriculares do Ensino Médio:** ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/Semtec, 2006.

______. Secretaria de Educação Fundamental. **PCN + Ensino Médio:** orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: MEC/Semtec, 2002.

______. Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. Disponível em: <http://www. ibge.gov.br>. Acesso em: 05 mar. 2011.

______. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Disponível em: <http://www.inep.gov.br>. Acesso em: 05 mar. 2011.

______. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Ensino Médio. Brasília: Ministério da Educação, 1999.

______. Ministério de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** matemática. Brasília: Ministério da Educação, 1997.

CAJORI, Florian. **Uma história da matemática.** Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2007.

CARVALHO, C. A. S. **O aluno do Ensino Médio e a criação de uma fórmula para o termo geral da progressão aritmética.** 2008. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

CARVALHO, M. M. **"São Paulo faz escola":** muda a abordagem de progressões na sala de aula?. 2010. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.

COELHO, Maria A.V.M.P. **A resolução de problemas:** da dimensão técnica a uma dimensão problematizadora. 2005. Dissertação (Mestrado em Educação: Educação Matemática) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2005.

COSTA, Claudio F. da. **Por que resolver problemas na educação matemática?:** uma contribuição da escola da Gestalt. 2008. Tese (Doutorado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

D'AMBRÓSIO, U. **Algumas reflexões sobre a resolução de problemas.** Disponível em <http://issonaoeproblemaseu.blogspot.com/2010/09/algumas-reflexoes-sobre-resolucao-de.html>. Acesso em: 25 jul. 2010.

D'AMORE, B. **Elementos de didática da matemática.** Tradução Maria Cristina Bonami. São Paulo: Editora e Livraria da Física, 2007.

D'AMBROSIO, Beatriz S. Como ensinar matemática hoje? **Temas e Debates.** SBEM, Brasília, DF: ano II, n. 2, p. 15-19, 1989.

DANTE, Luiz Roberto. **Formulação e resolução de problemas de matemática:** teoria e prática. 1. ed. São Paulo: Ática, 2009.

DEMO, P. **Educação e qualidade.** Campinas: Papirus, 1996.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática.** Tradução Hygino H. Domingues. Campinas: Unicamp, 2007.

GADOTTI, M. **Alguém que amou a terra.** Disponível em: <http://www.midiamix.com.br/eb/exe/texto.asp?id=424>. Acesso em: 25 mai. 2011.

GAZIRE, Eliane Scheid. **Perspectivas da resolução de problemas em educação matemática.** 1988. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 1988.

GONÇALVES, A. G. N. **Uma sequência de ensino para o estudo de progressões geométricas via fractais.** 2007. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

ISHIHARA, Cristiane A.; SANTOS, Neide A. Pessoa dos. **Matemática:** Ensino Médio, 1ª série. 1. ed. Brasília: CIB-Cisbrasil, 2004.

LESTER, F. O que aconteceu à investigação em resolução de problemas de Matemática? A situação nos Estados Unidos. In: D. Fernandes, A. Borralho, & G. Amaro (Eds.). **Resolução de problemas:** processos cognitivos, concepções de professores e desenvolvimento curricular. Lisboa: IIE, 1992. p. 13-34.

LESTER, F; CHARLES, R. **Teaching problem solving:** what, whyand how. New York: Dale Seymur Publications, 1982.

LIMA, V. S. at al. **Progressões aritméticas e geométricas:** história, conceitos e aplicações. Disponível em: <http://pdfhere.com/conceitos-pdf/>. Acesso em: 24 mar. 2010.

MINAS GERAIS. Secretaria de Estado da Educação. **Lista de escolas.** Disponível em: <https://www.educacao.mg.gov.br/escolas/lista-de-escolas>. Acesso em: 05 mar. 2011.

MINAS GERAIS. Secretaria de Estado da Educação. **Proposta Curricular (CBC):** Matemática, Ensinos Fundamental e Médio. Belo Horizonte: SEE/MG, 1995.

MOURA, Maria Auxiliadora Lage. **Investigando Padrões em PA e PG.** Disponível em: <www.sare.unianhanguera.edu.br/index.php/rtcom/article/.../1021/654>. Acesso em: 24 mar. 2010.

NUNES, C. B. **O processo ensino-aprendizagem-avaliação de geometria através da resolução de problemas:** perspectivas didático-matemáticas na formação inicial de professores de matemática. 2010. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2010.

ONUCHIC, L. de La R. Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, Maria A. V. (org.). **Pesquisa em educação matemática:** concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999. p.199-218.

ONUCHIC, L. R. **Uma história da resolução de problemas no brasil e no mundo.** Disponível em: <http://www.rc.unesp.br//serp/trabalhos_completos/completo3.pdf>. Acesso em: 25 JUL. 2010.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S.G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, Maria A. V.; BORBA, M. C (Org). **Educação matemática:** pesquisa em movimento. 2. ed. São Paulo: Cortez, 2009.

ONUCHIC, L.L.R. & ZUFFI, E. M. O ensino-aprendizagem de matemática através da Resolução de Problemas e os processos cognitivos superiores. **Revista Iberoamericana de Matemática,** San Cristobal de La Laguna, ano 2007, v. 11, n. 11, p. 79- 97, 2007.

PEREZ, E. P. Z. **Alunos do ensino médio e a generalização de padrão.** 2006. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

POLYA, G. A. **A arte de resolver problemas.** Tradução Heitor Lisboa de Araújo. São Paulo: Interciência, 1978.

POZO, J. I. **A solução de problemas:** aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: Artmed, 1998. 173p.

ROSA, M.; OREY, D. C. **De Pappus a Polya:** da heurística à resolução de problemas. Disponível em: <http://csus.academia.edu/DanielOrey/Papers/299440>. Acesso em: 25 mai. 2011.

SÁNCHEZ HUETE, J. C.; FERNÁNDEZ BRAVO, José A. **O ensino da matemática:** fundamentos teóricos e bases psicopedagógicas. Tradução Ernani Rosa. Porto Alegre: Artmed, 2006. 232p.

SCHOENFELD, A. Porque toda esta agitação acerca da resolução de problemas? In: ABRANTES, P., LEAL, L. C. & PONTE, J. P. (Eds.). **Investigar para aprender matemática.** Lisboa: APM e Projecto MPT, 1996. p. 61-72.

STANIC, G. M. A.; KILPATRICK, J. Historical Perspectives on Problem Solving in the Mathematics Curriculum. In: CHARLES, R. I.; SILVER, E. A. (Eds.). **The teaching and assessing of mathematical problem solving.** Reston: NCTM, p. 1-22, 1990.

VALE, I.; PALHARES, P.; CABRITA, I.; BORRALHO,A. Os padrões no ensino e aprendizagem da álgebra. **Actas do XIV Encontro de Investigação em Educação Matemática da SPCE,** 2005. Disponível em: <http://www.spce.org.pt/sem/13iv.pdf>. Acesso em: 24 mar. 2010.

VALE, I.; PIMENTEL,T. Padrões: um tema transversal no currículo. **Revista Educação e Matemática,** Lisboa, Portugal, n. 85, p. 14-20. Lisboa: APM, nov./dez., 2005.

VIANA, M. C. V. **Avaliação da aprendizagem na sala de aula de Matemática.** Ouro Preto: Instituto de Ciências Exatas e Biológicas da Universidade Federal de Ouro Preto, 2006, 10 p. (texto didático).

VILA, Antoni; CALLEJO María Luz. **Matemática para aprender a pensar:** o papel das crenças na resolução de problemas. Tradução Ernani Rosa. Porto Alegre: Artmed, 2006. 212p.

ZAMPIROLLO, M. J. C. V. **Matemática:** projeto escola e cidadania para todos. 1. ed. São Paulo: Editora do Brasil, 2004.

APÊNDICE

APÊNDICE A - JUSTIFICATIVA

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO
Universidade Federal de Ouro Preto

Mestrado Profissional em Educação Matemática

Departamento de Matemática – ICEB / UFOP

Projeto de Pesquisa: **A Resolução de Problemas como ferramenta para o ensino e a aprendizagem de Progressões Aritméticas e Geométricas no Ensino Médio.**

Orientando: Wilton Natal Milani

Orientador: Prof. Dra. Marger da Conceição Ventura Viana

Justificativa

O presente projeto se justifica por ser desenvolvido na **Linha de Pesquisa 2** –Formação de Professores de Matemática, Cultura e Ensino-aprendizagem de Matemática do **Mestrado Profissional em Educação Matemática da UFOP** e por se constituir numa oportunidade de contribuição para melhoria do processo de ensino/aprendizagem de Progressões Aritméticas e Geométricas dos alunos do Ensino Médio.

Campus Universitário – Morro do Cruzeiro – 35.400-000 – Ouro Preto – MG – Brasil

Homepage: http://www.ppgedmat.ufop.br – e-mail: ppgedmat@ufop.br – Fone: 55(31)3559-1724

Universidade Federal de Ouro Preto

APÊNDICE B – TERMO DE AUTORIZAÇÃO

Termo de Autorização

Autorizo os Professores Wilton Natal Milani **-** Orientando e Marger da Conceição Ventura Viana – Orientadora do Mestrado Profissional em Educação Matemática a realizarem sua pesquisa intitulada "**A Resolução de Problemas como ferramenta para o ensino e a aprendizagem de Progressões Aritméticas e Geométricas no Ensino Médio.** ", com os alunos do Primeiro Ano do Ensino Médio desta Instituição, de acordo com as tarefas previstas no projeto de pesquisa, dentro da disciplina Matemática.

Ponte Nova, 29 de março de 2010

Telma de Oliveira Vidigal

Diretora do Colégio Salesiano Dom Helvécio

Av. Francisco Vieira Martins,480 – Bairro Palmeiras – Ponte Nova - MG

CEP: 35430-000- Tel. (31) 3817-1801

APÊNDICE C - TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO PARA OS ALUNOSAPÊNDICE F - TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO PARA OS ALUNOS

Mestrado Profissional em Educação Matemática - 2009

Projeto de Pesquisa: A Resolução de Problemas como ferramenta para o ensino e a aprendizagem de Progressões Aritméticas e Geométricas no Ensino Médio.

Termo de Consentimento Livre e Esclarecido para os alunos

Prezados alunos,

Você está convidado (a) a participar da pesquisa **A Resolução de Problemas como ferramenta para o ensino e a aprendizagem de Progressões Aritméticas e Geométricas no Ensino Médio.** . Esta pesquisa tem os objetivos:

1. Planejar, implementar e avaliar atividades para o processo de ensino e aprendizagem Progressões Aritméticas e Geométricas através da metodologia de Resolução de Problemas.
2. Investigar as possíveis contribuições da utilização de atividades de investigação/exploração tendo como metodologia a Resolução de Problemas no processo de ensino e aprendizagem dos conceitos de Progressões Aritméticas e Geométricas, na Primeira Série do Ensino Médio. Desenvolvendo um sequência de atividades que possam ser utilizadas, no processo de ensino e aprendizagem de tal conteúdo.

A participação na pesquisa ocorrerá através da participação nas atividades do projeto e de respostas a um questionário, aplicado no início da pesquisa. A colaboração para o desenvolvimento desta pesquisa é totalmente voluntária. Você pode escolher não responder a qualquer uma das perguntas apresentadas no questionário e poderá, a qualquer momento, desistir de participar da mesma, bem como não se deixar gravar ou filmar durante a execução das atividades. Terá seu anonimato garantido e as informações que fornecer não serão associadas ao seu nome em nenhum documento, relatório e/ou artigo que resulte desta pesquisa. Cada aluno terá em mãos uma cópia deste termo e poderá tirar dúvidas, quando necessário, juntamente à pesquisadora responsável.

____

Prof[a]. Dra. Marger da Conceição Ventura Viana
Departamento de Matemática – ICEB / UFOP
Fones: (31) 3559-1700 ou 3559-1724 / e-mail: margerv@terra.com.br

Para ser preenchido pelo(a) aluno(a)

Eu, ____, declaro que entendi os objetivos e os termos de minha colaboração para o desenvolvimento da pesquisa e concordo em participar da mesma.

__________________ , ___ de _________ de 2010.

____

Assinatura do(a) participante

Comitê de Ética em Pesquisa (CEP/UFOP)

Campus Universitário – Morro do Cruzeiro – 35.400-000 – Ouro Preto – MG – Brasil
Homepage: http://www.propp.ufop.br – e-mail: cep@propp.ufop.br – Fone: 55(31)3559-1368

APÊNDICE D – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO PARA OS PAIS

Mestrado Profissional em Educação Matemática - 2009

Projeto de Pesquisa: A Resolução de Problemas como ferramenta para o ensino e a aprendizagem de Progressões Aritméticas e Geométricas no Ensino Médio.

Termo de Consentimento Livre e Esclarecido para os pais

Prezados Senhores Pais

Seu (sua) filho (a) está convidado (a) a participar da pesquisa **A Resolução de Problemas como ferramenta para o ensino e a aprendizagem de Progressões Aritméticas e Geométricas no Ensino Médio.** . Esta pesquisa tem os objetivos:

1. Planejar, implementar e avaliar atividades para o processo de ensino e aprendizagem Progressões Aritméticas e Geométricas através da metodologia de Resolução de Problemas.
2. Investigar as possíveis contribuições da utilização de atividades de investigação/exploração tendo como metodologia a Resolução de Problemas no processo de ensino e aprendizagem dos conceitos de Progressões Aritméticas e Geométricas, na Primeira Série do Ensino Médio. Desenvolvendo um sequência de atividades que possam ser utilizadas, no processo de ensino e aprendizagem de tal conteúdo.

A participação na pesquisa ocorrerá através da participação nas atividades do projeto e de respostas a um questionário, aplicado no início da pesquisa. A colaboração para o desenvolvimento desta pesquisa é totalmente voluntária. O (A) aluno (a) pode escolher não responder a qualquer uma das perguntas apresentadas no questionário e poderá, a qualquer momento, desistir de participar da mesma bem como não se deixar gravar ou filmar durante a execução das atividades. Terá seu anonimato garantido e as informações que fornecer não serão associadas ao seu nome em nenhum documento, relatório e/ou artigo que resulte desta pesquisa. Cada aluno terá em mãos uma cópia deste termo e poderá tirar dúvidas, quando necessário, juntamente à pesquisadora responsável.

____

Prof[a]. Dra. Marger da Conceição Ventura Viana
Departamento de Matemática – ICEB / UFOP
Fones: (31) 3559-1700 ou 3559-1724 / e-mail: margerv@terra.com.br

Para ser preenchido por um dos pais do(a) aluno(a)

Eu, ____, autorizo meu (minha) filho(a) a participar da pesquisa.

__________________ , ___ de __________ de 2010.

____

Assinatura do (a) responsável

Comitê de Ética em Pesquisa (CEP/UFOP)
Campus Universitário – Morro do Cruzeiro – 35.400-000 – Ouro Preto – MG – Brasil
Homepage: http://www.propp.ufop.br – e-mail: cep@propp.ufop.br – Fone: 55(31)3559-1368