PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

PUC-SP

Carlos Eduardo de Campos

Análise Combinatória e Proposta Curricular Paulista
Um Estudo dos Problemas de Contagem

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

São Paulo

2011

PONTÍFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

PUC-SP

Carlos Eduardo de Campos

Análise Combinatória e Proposta Curricular Paulista
Um Estudo dos Problemas de Contagem

*Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade de São Paulo, como exigência parcial para a obtenção do título de **MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA,** sob a orientação da **Professora Doutora Sonia Barbosa Camargo Igliori.***

São Paulo

2011

BANCA EXAMINADORA

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação por processos fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: ___________________________________ Local e Data: ________________

Dedico este trabalho aos meus pais, Carlos e Santina, que sempre estiveram comigo em todos os momentos, apoiando-me.

À Professora Tereza Cristina Soares de Melo e Lugoboni e ao Professor Ricardo Feital de Souza Brito que não mediram esforços para que eu pudesse chegar até aqui.

E ao Professor Ms. Jonatas Silva Romano, que me ensinou que é com empenho e dedicação que os sonhos se concretizam.

Agradecimentos

A Deus, por me mostrar, por diversos modos, que deveria confiar esse trabalho a Sua Divina Providência.

Aos meus pais, Carlos e Santina, como também às minhas irmãs, Flávia e Regiane; minhas sobrinhas Mariene e Marília e meu sobrinho Felipe, por serem eles próprios meu apoio nos caminhos que tenho trilhado.

Ao Osmar, à Tamires, ao Jader e ao Matheus, minha família, pela paciência, por compartilhar os momentos alegres e difíceis durante esse período do mestrado, e pela colaboração para com a confecção deste trabalho.

A minha orientadora Sonia Barbosa Camargo Igliori, pela preocupação e paciência para comigo, sempre dizendo a palavra certa no momento certo, principalmente naqueles em que pairavam o desânimo e a dúvida.

Aos professores do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP, em particular aos professores Benedito, Silvia, Sandra, Laurizete, Gerson e Marisa, bem como a professora Cileda, pelos encontros semanais cruciais para o amadurecimento desta pesquisa.

Aos colegas de mestrado Maria Lúcia, Adriana Thiago, André, Silvio, Márcia Regina, Eduardo, Marcelo, Lílian, Vagner, Sara, Érika, pelos momentos bons (outros não tão bons assim), pelas discussões e reflexões que compartilhamos.

À direção da Escola Estadual "Prof. Adhemar Bolina", a quem devo muito pela confiança depositada em mim durante 17 anos em que lecionei nesta unidade escolar.

À professora Teresa Cristina Soares de Melo e Lugoboni, diretora da Escola Estadual "Professor Adhemar Bolina", pela compreensão, apoio e incentivo dispensados a mim e por acreditar na capacidade deste profissional durante o tempo em que trabalhamos juntos.

Aos professores e amigos da Escola Estadual "Professor Adhemar Bolina", pela amizade e companheirismo durante o tempo em que lecionamos juntos.

À direção Colégio Gutenberg, aos coordenadores, professores e funcionários desta instituição de ensino, pela confiança, respeito e incentivo na realização desta pesquisa.

Às amigas e professoras Juliana, Andreia Coccaro e Patrícia, bem como ao amigo, professor e mestre Vanderlei Sanches Oddi, pelo incentivo no ingresso do programa de Mestrado em Educação Matemática da PUC-SP.

Ao professor Douglas Felipe de Jesus Silva, amigo e fiel escudeiro no ensino de Matemática, cuja ajuda no desenvolvimento deste trabalho foi imprescindível.

Às professoras Paula e Thais, que mui gentilmente contribuíram para a tradução em língua inglesa de partes dessa dissertação.

Ao professor Rafael Puertas de Miranda pelas preciosas dicas nas minhas lutas travadas com a língua francesa e pela disponibilidade e paciência em ler e corrigir essa dissertação.

À direção e aos coordenadores das Faculdades Unidas de Suzano – UNISUZ, pelo respeito com que tratam seus funcionários, procurando incentivar e promover o crescimento pessoal e profissional.

Aos meus alunos da rede pública e particular, pelo carinho e admiração sempre manifestados por minha pessoa, sentimentos retribuídos em igual volume.

Ao professor Ricardo Feital de Souza Brito, mestre por excelência, por me ensinar a ver a beleza da Matemática e pelo incentivo, apoio e confiança no meu trabalho, mesmo quando tive de me ausentar.

Ao professor mestre Jonatas Silva Romano, com profundo respeito, gratidão e admiração, pelo profissional e amigo que é, e por me fazer acreditar na possibilidade desse sonho concretizado.

Resumo

Esta dissertação tem por foco o ensino e a aprendizagem da Análise Combinatória ou, mais especificamente, dos Problemas de Contagem. Trata-se do relatório minucioso de pesquisa documental de análise de material didático e, sobretudo, os procedimentos metodológicos são os adequados a essa modalidade de investigação. O objetivo da investigação é avaliar os tipos de Problemas de Contagem, que figuram no Caderno do Aluno do 3º bimestre do 2º ano do Ensino Médio, da Rede Estadual Paulista de Ensino, com vistas à formação do raciocínio combinatório, levando em conta o pressuposto da Proposta Curricular em questão que entende a resolução de problemas como uma abordagem de ensino eficaz para os conceitos combinatórios.
Os problemas estudados são entendidos e classificados como simples, ou seja, aqueles que podem ser resolvidos usando somente uma operação combinatória. Os balizadores da análise de conteúdo realizada no Caderno são as variáveis de tarefa usadas por Batanero e Navarro-Pelayo: modelo combinatório implícito, operação combinatória, natureza dos elementos que se combinam e valores dados aos parâmetros m e n. Os mesmos são respaldados na Teoria dos Campos Conceituais de Verganaud, para a qual conceitos não podem ser apreendidos com a abordagem de um único tipo de problema. Nossa investigação nos levou a constatar que, mesmo com um elenco importante de problemas, muitos deles envolviam situações semelhantes. Isso se deu porque nem todas as variáveis consideradas foram encontradas nesse rol.

Palavras-chave: Análise Combinatória. Modelo Combinatório Implícito. Ensino Médio. Problemas de Contagem. Proposta Curricular do Estado de São Paulo.

Abstract

This dissertation is focused on the teaching and learning of the Combinatorial Analysis, specifically mentioning, Counting Problems. The report is about a documentary research, as a result of the analysis of the coursebook, thus the methodological procedures are the most appropriate to this kind of investigation. The aim of this research is to evaluate the types of Counting Problems, which are included in the student's book, Secondary school second grade third term from the Department of Education of the state of São Paulo, in the view of the combinatorial research, taking into account that is the presupposition of the Curriculum of the state of São Paulo, the resolution of the problems in a teaching approach for the combinatorial concepts. The studied problems are the simple ones, in other words, those which could be solved by using only one combinatorial operation. The yardsticks of the content analysis accomplished in the book are the task variables used by Batanero, Navarro-Pelayo, implicit combinatorial model, combinatorial operation, the nature of the elements to be combined and the values of the parameter m and n. They are supported by the theory of the conceptual fields developed by Vergnaud, in which those concepts couldn't be learnt with the approach of a single type of problem. Our investigation led us to the conclusion that, even working with an important list of issues, many of them involved similar situations. It is because not all the considered variables were found in this list.

Keywords: Combinatorial Analysis. Implicit Combinatorial Model. Secondary School. Counting Problems. The Curriculum of the State of São Paulo

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

Sumário

Introdução

A escolha do tema desta pesquisa está diretamente relacionada a um assunto tido por muitos como desafiador: a Análise Combinatória. Por estudarmos em um colégio técnico estadual, os conteúdos de Matemática que fizeram parte da grade curricular do nosso curso – Eletrotécnica – foram, incontestavelmente, aqueles que nos serviriam, no futuro, de suporte para o exercício profissional. Infelizmente, Análise Combinatória e Probabilidades não pertenciam a essa grade. Em razão disso, resolvemos estudar por conta própria tal conteúdo. Não demoramos a perceber que nessa área havia conceitos matemáticos diferentes de outros já estudados. O tempo passou. Ingressamos no magistério e, durante o exercício, deparamo-nos com os problemas de análise combinatória que desencadearam desafios a nós e a nossos alunos. Não foram raros os momentos de dificuldades ao interpretar e resolver tais problemas.

Como professor da rede pública estadual paulista, constatamos, ao longo de dezessete anos de trabalho, o simples fato de esse tema é constantemente deixado de lado por muitos professores, nossos colegas. As falas a respeito das dificuldades encontradas em lecionar combinatória eram comuns. Isso nos despertou a atenção e permitiu que, uma vez constatado o problema, iniciássemos uma constante reflexão sobre o que tornava tal tema difícil para alunos e professores; ao mesmo tempo em que tentávamos pensar em estratégias viáveis a fim de simplificar sua abordagem em sala de aula. E nossa preocupação, certamente, tinha fundamento.

Na condição de mestrando do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP, entramos em contato com pesquisas sobre os processos do ensino e da aprendizagem de conteúdos matemáticos, e pudemos perceber o papel singular da investigação acadêmica no enfrentamento das dificuldades surgidas durante este percurso de aquisição de conhecimento.

Tais pesquisas trazem a constituição do raciocínio combinatório, levantando os erros mais comuns na resolução de Problemas de Contagem e propondo caminhos alternativos para abordagem dos mesmos, desde as séries iniciais até o ensino superior. Em vários trabalhos a resolução de problemas é adotada como metodologia de ensino, bem como o uso do raciocínio recursivo e do diagrama de árvores.

Dessa forma, acabamos por considerar a Análise Combinatória, com suas dificuldades de ensino por parte dos professores e de apreensão por parte dos alunos, como objeto de investigação.

No ano de 2008, a Secretaria Estadual de Educação do Estado de São Paulo introduziu os cadernos de orientação para o trabalho delimitado pelas matrizes curriculares da escola básica – a Nova Proposta Curricular. Tal fato contribuiu para que professores e gestores iniciassem uma reflexão sobre a abordagem dos conteúdos integrantes das várias disciplinas. Mesmo não trabalhando mais com o segundo ano do Ensino Médio, tivemos contato com o que a Nova Proposta Curricular trazia para o ensino de Probabilidade e de Combinatória.

Uma primeira leitura levou-nos a refletir sobre a preocupação expressa pela proposta em desenvolver o raciocínio combinatório não à custa de fórmulas e de classificação de problemas em determinadas categorias, mas a partir de situações que dessem significado ao conteúdo estudado (São Paulo, 2009a). A nós nos pareceu claro que a Nova Proposta Curricular ia ao encontro daquilo que as pesquisas em Educação Matemática já haviam evidenciado.

Segundo a Nova Proposta Curricular, os problemas combinatórios se apresentam em diferentes momentos do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental. O 2º ano do Ensino Médio, série em que geralmente se aborda o tema "Análise Combinatória", é entendido pela Nova Proposta como um momento de aprofundamento e consolidação do raciocínio combinatório, uma vez que a construção do mesmo ocorrera, inicialmente, nas séries anteriores.

Sabendo disto, procuramos investigar como a Nova Proposta aborda o tema Análise Combinatória, tomando por referencial as situações de aprendizagem contidas no Caderno do Aluno que cursa o 2º ano do Ensino Médio das escolas da Rede Estadual de Educação do Estado de São Paulo.

A investigação toma por referência a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, uma teoria cognitivista que procura fornecer elementos para um estudo mais aprofundado de como ocorre o desenvolvimento e a aprendizagem de competências fundamentais para a resolução dos problemas emergentes das ciências e da tecnologia. Franchi (1999, p.157) assinala que um dos pressupostos básicos dessa teoria está na constituição e no desenvolvimento do conhecimento ao longo do tempo, graças às adaptações provenientes da interação entre o sujeito e as situações que ele experimenta.

Em outras palavras, a aquisição de um determinado conceito não pode ser reduzida a uma única situação. Ela é fruto, segundo Vergnaud (1991) da experiência vivenciada pelo sujeito em várias situações. Desse modo, ele tem a possibilidade de efetuar as construções e desconstruções exigidas de seus esquemas cognitivos em face da situação a ser resolvida. Não se pode esperar, portanto, que essa aquisição se dê num curto espaço de tempo.

Apesar de não ser uma teoria específica da Matemática, sua formulação se deu a partir dos estudos de Vergnaud sobre as estruturas aditivas, as relações número-espaço e as estruturas multiplicativas. Nessa última se inserem os Problemas de Contagem, alvo desta pesquisa, e que constituem as situações-chave na formação dos conceitos ligados à combinatória.

Nossa investigação se utiliza também dos trabalhos desenvolvidos pelo *Grupo de Investigación en Educación Estadistica* – GIEE – coordenados por Batanero da Universidad de Granada na Espanha, mais especificamente, a investigação feita a respeito do raciocínio combinatório em alunos que cursavam o nível "secundário" (que corresponde ao atual Ensino Médio no Brasil). Para isso as pesquisadoras Navarro-Pelayo et al.(1996) construíram um conjunto de 13 problemas de combinatória considerando, para cada um deles, quatro variáveis de tarefa – o modelo combinatório implícito, a operação combinatória em jogo, os elementos que se combinavam, os valores dos parâmetros *m* e *n* em que *m* é o total de elementos a serem combinados e *n* é o número de elementos de cada agrupamento – , e avaliaram a influência de cada uma delas nas estratégias e erros dos 720 alunos participantes da pesquisa. Aprofundar-no-emos, adiante, nessa pesquisa, dada a relevância ao nosso trabalho.

Ao final, as pesquisadoras concluíram que essas variáveis eram relevantes para se avaliar as capacidades e concepções dos alunos em face do raciocínio combinatório, bem como, na organização de situações visando ao ensino e à aprendizagem desses conceitos (NAVARRO-PELAYO et. al., 1996, p.10).

Considerando a importância dada por Vergnaud à diversidade de situações para a constituição de determinado conceito e assumindo as conclusões decorrentes dos estudos de Navarro-Pelayo et al. (1996) procuraremos responder às seguintes questões:

a) **Quais os tipos de problemas de combinatória que são abordados na Proposta Curricular Paulista?**

b) **Os problemas contemplam as variáveis citadas por Navarro-Pelayo et al (1996) em sua pesquisa?**

Essas duas questões fornecem subsídios para enfrentar uma questão fundamental sobre a aprendizagem da Análise Combinatória que é a seguinte: **Os problemas abordados contribuem para a formação do raciocínio combinatório?**

Esta dissertação está organizada em seis capítulos:

Capítulo 1- "Análise Combinatória e Problemas de Contagem". Nele são apresentados a Análise Combinatória como ramo da Matemática Discreta e um estudo da evolução dos Problemas de Contagem em diferentes civilizações;

Capítulo 2 – "Construindo a Problemática" onde se encontra a revisão bibliográfica e são apresentados os elementos fundamentais da problemática e problemas dessa pesquisa.

Capítulo 3 – Procedimentos Metodológicos. Neste capítulo é apresentada a metodologia de pesquisa e descritos os procedimentos metodológicos utilizados.

Capítulo 4 – "Referencial teórico e balizadores da pesquisa". Aqui abordamos a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud e também os elementos da pesquisa da Navarro-Pelayo (1996) que nortearão a análise das questões do Caderno do Aluno do 2º ano do Ensino Médio.

Capítulo 5 – "Análise dos Dados" em que descrevemos os elementos das estruturas dos Problemas de Contagem, ou seja, o alvo dessa pesquisa, sob o olhar das variáveis de tarefa já descritas por Navarro-Pelayo et al (1996).

Capítulo 6 – “Conclusão Final”. Retomamos a questão investigada e a confrontamos com os dados analisados a fim de dar uma resposta concreta ao que nos propusemos responder.

Capítulo 1

1. A ANÁLISE COMBINATÓRIA E OS PROBLEMAS DE CONTAGEM

Neste capítulo apresentamos a Análise Combinatória e, mais especificamente, os Problemas de Contagem, assunto principal de nossa pesquisa, com inserções sobre seu ensino e aprendizagem.

Apresentamos também um estudo histórico-epistemológico desse tipo de problema que permeia o desenvolvimento do conhecimento humano, desde a Antiguidade. Nosso objetivo, com tal estudo, vai além de situar o objeto matemático Análise Combinatória no rol das construções humanas ao longo da história. Queremos, sim, estabelecer um comparativo entre as diferentes situações de contagem abordadas pelos vários povos e aquelas que se encontram no material que iremos analisar.

1.1. A Análise Combinatória

A Análise Combinatória, estudada no Ensino Médio, *visa desenvolver métodos que permitam contar o número de elementos de um conjunto, sendo esses elementos agrupamentos formados sob certas condições.*[1] O desenvolvimento de tais métodos se justifica, pois, há casos em que o número de elementos é demasiadamente grande para uma contagem um a um.

O termo "Análise Combinatória", apesar de usado na Matemática ensinada no Ensino Médio para designar problemas de contagem, traz consigo algo além das situações dessa natureza. A Análise Combinatória "é a parte da Matemática que analisa estruturas e relações discretas" (MORGADO, 1991, p.1).

Portanto, os problemas de contagem constituem uma parte dos tipos de problemas discutidos por esse ramo da Matemática. Seu objetivo é "contar e classificar

[1] HAZZAN, S. Fundamentos de Matemática Elementar. v.5. 6. ed. São Paulo. Atual. 1993.

os subconjuntos de um conjunto finito e que satisfazem certas condições dadas”[2]. Há também os chamados problemas de existência que, como o próprio nome sugere, têm por objetivo “demonstrar a existência de subconjuntos de elementos de um conjunto finito dado e que satisfazem certas condições”[3]. Aqui se inserem os Princípios de Dirichlet (ou da casa dos pombos, ou das gavetas) e de Inclusão e Exclusão.

Problemas que envolvem as funções geradoras, as relações de recorrência, o princípio da reflexão, as permutações caóticas e os lemas de Kaplansky, constituem, juntamente com os arranjos, permutações e combinações simples e com repetição; os “Problemas de Contagem”. Esses últimos, porém, são em geral os abordados em Matemática no Ensino Médio. Neste estudo a expressão *Problemas de Contagem* é restrita aos problemas de arranjo, permutações com e sem repetições e combinações simples.

---

[2]Augusto Cesar O. MORGADO, Análise Combinatória e Probabilidade, 1991, p.2
[3] Ibid, p.2

1.2. Os Problemas de Contagem

Segundo Iezzi et al (2004, p 307) a base para a resolução dos Problemas de Contagem em Análise Combinatória é o Princípio Fundamental da Contagem por ele assim definido:

> *Suponhamos que uma ação seja constituída de duas etapas sucessivas. A 1ª. etapa pode ser realizada de n maneiras distintas. Para cada uma dessas possibilidades, a 2ª. etapa pode ser realizada de m maneiras distintas. Então, o número de possibilidades de se efetuar a ação completa é dado por n x m.*

Essa definição é estendida para mais de duas etapas. Além disso, os tipos básicos de agrupamentos – arranjos, permutações e combinações simples, são assim definidos:

> *Arranjos. Dado um conjunto com n elementos distintos chama-se arranjo dos n elementos, tomados k a k, a qualquer sequência ordenada de k elementos distintos escolhidos entre os n existentes*. (idem, p 317)

> *Permutações. Dado um conjunto com n elementos distintos, chama-se permutação dos n elementos a todo arranjo desses n elementos tomados n a n.*. (idem, p.323)

> *Combinações. Dado um conjunto A com n elementos distintos, chama-se combinação dos n elementos de A, tomados k a k, a qualquer subconjunto de A formado por k elementos*.(idem, p.326)

A distinção entre os agrupamentos se dá na importância ou não da ordem de seus elementos. Em outras palavras, agrupamentos que se distinguem pela ordem de seus elementos são denominados arranjos, sendo que as permutações são casos particulares desse tipo de agrupamento. Agrupamentos que não têm a ordem como fator de distinção entre eles são chamados de combinações. Além disso, os casos de repetição de elementos nos arranjos e permutações, bem como as chamadas permutações circulares, são contemplados, em geral, nos currículos do Ensino Médio.

Os tipos de agrupamentos e a possibilidade ou não de haver repetições nesses agrupamentos são fatores levados em conta na resolução das situações-problema no âmbito desse segmento. Seu reconhecimento manifesta-se, de um modo geral, com o emprego correto da fórmula que a ela está associada. Mas é comum, nesse momento, ouvirmos os alunos se depararem com a dúvida a respeito das situações propostas: é problema de arranjo ou combinação? Que fórmula eu uso? E, na fórmula, o que significa esse *n* e esse *p*[4]? De questionamentos como esses é que surgiram várias pesquisas propondo outras formas de abordagem dos Problemas de Contagem sem que houvesse um enfoque demasiado na aplicação de fórmulas.

Em face disso propusemo-nos a fazer um estudo a cerca dos diferentes Problemas de Contagem ao longo da história, de modo a identificar em que elementos integravam os seus enunciados e estratégias de resolução incluindo-se, aqui, as representações simbólicas.

1.3. Abordagem histórica

As necessidades de sobrevivência da humanidade, desde seus ancestrais até os dias de hoje, têm na contagem um ente importante. Por não ter posses individuais o ser humano primitivo não via o porquê do uso de processos contabilísticos, mas com a sua fixação em locais favoráveis ao cultivo da terra e da criação de animais, essa história mudou. O desenvolvimento de processos de contagem, bem como de outros conhecimentos matemáticos, acompanham o desenvolvimento das técnicas de agricultura, de pecuária, de divisão das terras, de observação dos astros e a própria evolução social do ser humano.

O que passamos a descrever é resultado de uma pesquisa a cerca dos Problemas de Contagem nas civilizações egípcia, hindu, chinesa, grega, hebraica e árabe, sem, contudo, considerarmos uma ordem cronológica. São contemplados também por este estudo, os matemáticos europeus que precederam Blaise Pascal e Pierre Fermat, considerados os iniciadores da Teoria das Probabilidades.

1.3.1 Egito

[4] Essa notação é comumente usada nos livros didáticos de Matemática do Ensino Médio aqui no Brasil. Os parâmetros *n* e *p* aparecem nas fórmulas usadas para o cálculo de arranjos, permutações e combinações, em que *n* representa o número total de elementos e *p* o número de elementos de cada agrupamento. Neste trabalho, esses parâmetros serão indicados pelas letras *m* e *n*.

O famoso problema 79 do papiro de Rhind talvez seja o mais antigo registro[5] de que se tem notícia a respeito de um problema ligado à combinatória. Aparece nele o seguinte conjunto de dados (EVES, 2004, p.75):

BENS	
Casas	7
Gatos	49
Ratos	343
espigas de trigo	2401
hecates de grãos	16807
TOTAL	19607

Entendido inicialmente como uma notação simbólica usada pelo escriba para as potências de sete, viu-se, mais tarde, uma relação entre esse problema e outro semelhante a ele, apresentado no famoso *Líber Abaci* de Leonardi Fibonacci, que é enunciado da seguinte maneira:

> "Há sete senhoras idosas na estrada de Roma. Cada senhora tem sete mulos; cada mulo transporta sete sacos; cada saco contém sete pães; com cada pão há sete facas; para cada faca há sete bainhas. entre mulheres, mulos, sacos, pães, facas e bainhas, quantos estão na estrada de Roma?" (EVES, 2004, p.76).

Além de ser uma questão que envolva a ideia de sequência, do ponto vista da combinatória, o problema 79 do Papiro de Rhind evidencia a utilização do princípio multiplicativo como técnica de contagem.

1.3.2. *Em seguida passamos para a Índia*[6]

Na Índia, por volta do ano 600 a.C. surge o jainismo, uma das duas correntes em que a religião védica se separou. A palavra jainu provém do sânscrito jin que quer dizer

[5] Aproximadamente 1650 a. C.
[6] Fonte: http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/histo2b.html. Acesso em 05 de junho de 2010.

vitorioso. Esses “vitoriosos” eram aqueles que tinham conseguido a perfeição colocando seus sentidos sob controle de suas vontades, obtendo assim vitória sobre os desejos mundanos. Dentre os exercícios religiosos usados para atingir tal grau de perfeição estava a Ganitanuyoga, ou seja, a Matemática. Em razão da visão atomística de mundo que já possuíam, a Combinatória – ou Vikalpa – era um dos temas mais estudados pelos adeptos dessa religião. Para eles tudo era constituído de uma partícula indivisível e atemporal – o *parmanu* – em que cor, cheiro, sabor e textura eram as únicas mutabilidades possíveis. Os problemas consistiam exatamente em calcular as diferentes combinações entre os *parmanu*, uma vez que eles tinham 5 tipos de cor, 8 tipos de texturas, 5 gostos possíveis e 2 cheiros distintos.

Os conhecimentos referentes a problemas desse tipo e do triângulo aritmético – ou também chamado de triângulo de Pascal – foram compilados em livros dos quais, por terem sido escritos em folhas de palmeiras, pouco se tem notícia atualmente. Ressaltam-se aqui os trabalhos de Bháskara e Pingala.

Em seu livro Chanda Sutra, Pingala, cerca de 200 a.C., traz a primeira menção do triângulo de Pascal num estudo sobre as métricas musicais na versificação. Para construir o triângulo, Pingala descreve a seguinte regra: *Desenhe um quadradinho; abaixo dele desenhe dois outros, de modo que juntem-se no ponto médio da base dele; abaixo desses dois, desenhe outros três e assim por diante. A seguir, escreva 1 no primeiro quadradinho e nos da segunda linha. Na terceira linha escreva 1 nos quadradinhos dos extremos, e no do meio escreva a soma dos números acima dele. Prossiga fazendo o mesmo nas demais linhas. Nessas linhas, a segunda dá as combinações com uma sílaba; a terceira dá as combinações com duas sílabas e assim por diante.*

Já na era cristã, por volta do ano 1150, Bháskara em seu famoso tratado Lilavati propõe problemas que envolvem contagem e que se assemelham àqueles propostos nos dias de hoje pelos livros didáticos. Aqui estão alguns deles[7]:

Problemas de Combinação

Verso 122

[7] Fonte: http://www.malhatlantica.pt/mathis/india/BhaskaraII-5.htm, acesso em 05 de junho de 2010

Um rei tinha um belo palácio com oito portas. Peritos engenheiros construíram quatro reluzentes e grandes quartos (quadrados). De forma a apanhar ar, 1 porta, 2 portas, 3 portas, ... são abertas. Quantos tipos diferentes de aragem são possíveis?

Quantos tipos de sabores se podem fazer usando 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 tipos desde o doce, amargo, adstringente, amargo, salgado, e substâncias picantes.

Problemas de Permutação e de Partição

Verso 269

Diz depressa quantos números diferentes se podem formar com dois e oito, ou com três, nove e oito.

Verso 272

Diz-me depressa, ó matemático, quantos números são (formados) com os números dois, dois, um e um, e (e quanto é que é) a sua soma, e analogamente com os números quatro, oito, cinco e cinco.

Verso 274

Diz-me, caso saiba, quantos números diferentes existem com cinco dígitos, cuja soma destes seja treze.

Verso 273

Deixando de lado o 0 (zero), se os dígitos de 1 a 9 forem escritos seis de uma vez só, então descobre quantos números diferentes são formados.

Os problemas de combinatória que aparecem no Lilavati, além de envolverem uma quantidade relativamente pequena de objetos, mostram claramente a preocupação do autor em propor situações em que a obediência ou não à ordem dos elementos nos agrupamentos deva ser considerada por quem pretende resolvê-los. Isto também vale para a questão da distinção ou não dos objetos que compõem cada grupo.

1.3.3. Grécia

A Grécia, famosa pelo papel que desempenhou na construção da Geometria, trouxe também alguma contribuição no ramo da combinatória. O escritor grego Plutarco relata a tentativa do filósofo Xenócrates em calcular o número de sílabas possíveis obtidas a partir do alfabeto grego. Segundo ele, o filósofo teria chegado ao número de 1 trilhão e 2 bilhões de sílabas, empregando, para isso, conceitos do que modernamente entendemos como as permutações estudadas em Análise Combinatória.

A Arquimedes é atribuída a invenção de um quebra cabeças – o *Stomachion* – cujo objetivo, acreditava-se, era somente a formação de figuras assim como ocorre no tangran chinês. Os estudiosos, porém, não entendiam o porquê de Arquimedes demandar tanto tempo à construção desse objeto lúdico, sem aparente importância do ponto de vista matemático. Essa indagação começou a ser respondida quando, em 1998, vendeu-se, em um leilão realizado em Nova Iorque, uma coletânea de manuscritos datados da idade média pela quantia de dois milhões de dólares. Tratava-se de um livro de orações escritas por monges, mas que escondiam em suas páginas os escritos mais antigos de que se tem notícia do grande matemático Arquimedes de Siracusa. Quem arrematou tal preciosidade? Felix Oyens a pedido de um anônimo tratado somente por Mr. B que permitiu e incentivou os estudos a respeito desse documento.

Chamado de Codex C, esses manuscritos passaram a ser investigados num projeto liderado pelo professor de ciência antiga da Universidade Stanford, Reviel Netz, e pelo conservador de manuscritos e livros raros do Walters Art Museum, William Noel. Esse projeto – o Codex de Arquimedes – revelou escritos referentes aos estudos feitos sobre corpos flutuantes, método relativo aos teoremas mecânicos e o Stomachion.

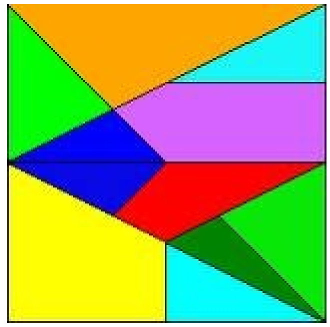


Figura 1 - Stomachion

O Stomachion é um quebra cabeças de quatorze peças formando um quadrado. A palavra stomachion era a que os gregos usavam para estômago. Alguns dizem que esse nome fora atribuído ao jogo por provocar dores no estômago a quem o jogasse em razão de seu alto grau de dificuldade.

As investigações do Codex C levaram Reviel Netz a concluir que Arquimedes não estava propriamente interessado em formar figuras de animais. Sua grande indagação era: de quantos modos diferentes se podem juntas a peças para que formem um quadrado? Ao que apontam as pesquisas esse foi um problema que desafiou Arquimedes e, apesar de seu empenho, não há provas de que ele tenha alcançado a solução. Essa solução – num total de 17.152 modos – foi encontrada em 2003 graças ao empenho de matemáticos e estatísticos e ao uso de computadores. Essa contagem levou em consideração o fato de que há 268 construções “fundamentais” e que a demais seriam obtidas por reflexões, rotações e simetrias das peças.

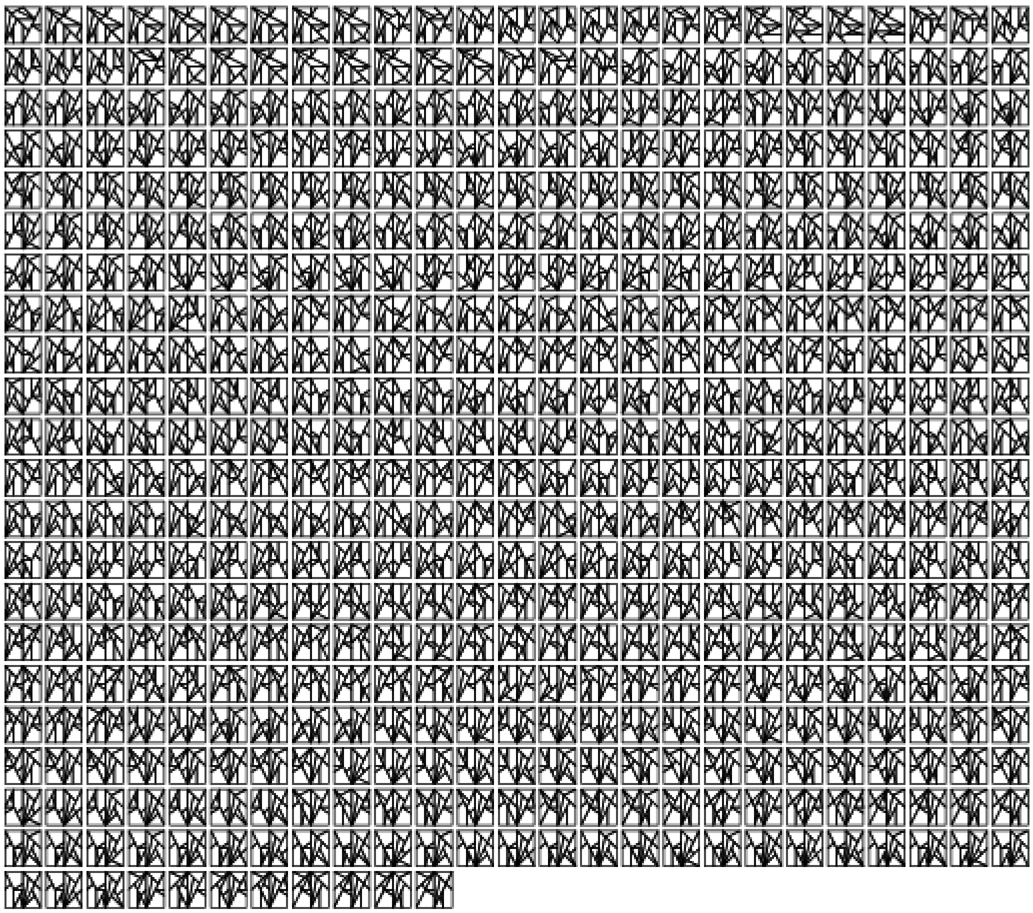


Figura 2 . Representação de algumas das soluções fundamentais do Stomachion.

1.3.4. *Chineses*

Também os chineses, por volta do ano 100 ou 200 d.C já conheciam as propriedades do triângulo aritmético de Pascal e o usavam no cálculo de raízes quadradas e cúbicas.

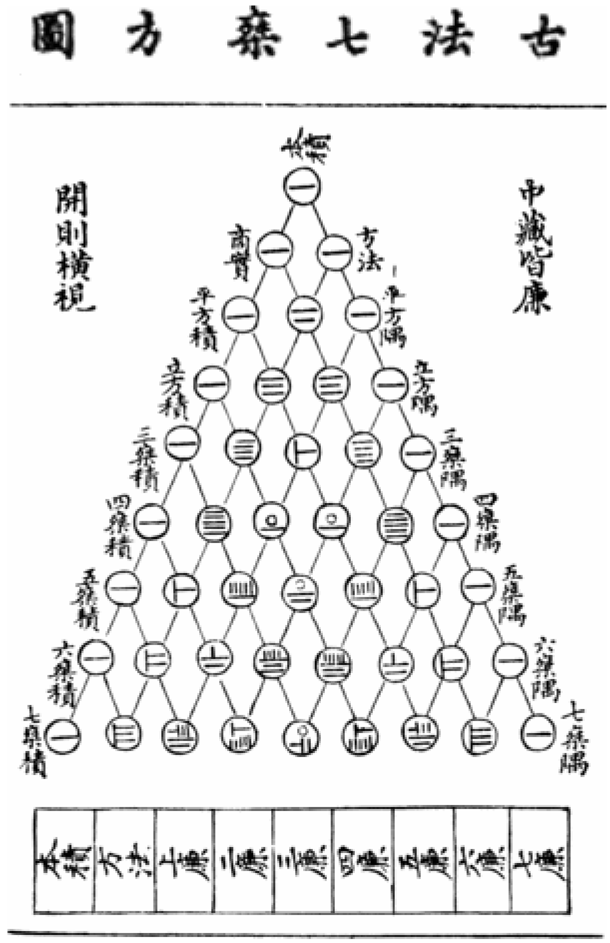


Figura 3 O triângulo aritmético de Pascal da maneira como foi desenhado em 1303 por Chu Shi´-kié.

Esse povo usava um manual de Matemática denominado Jiuzhang Suanshu – Os nove capítulos da Arte Matemática – que traz no seu quarto capítulo procedimentos e técnicas para resolver os problemas que envolviam a extração de raízes quadradas e cúbicas. Eis alguns deles:

Agora, dada uma área de 55 225 *bu* [quadrados].Diz: qual é o valor do lado do quadrado?

Solução: 235 *bu*

Dada de novo uma área de 3 972 150 625 *bu* [quadrados]. Diz: qual é o valor do lado do quadrado?

Solução: 159 *bu*

Dado um campo circular de 1518¾ *bu* [quadrados]. Diz: qual é o perímetro? **Solução:** 135 *bu*

Agora, dado um volume 1 860 867 *chi* [cúbico]. Diz: qual é o lado do cubo? **Solução:** 123 *chi*

Agora, dado um volume 1953 1/8 *chi* [cúbico]. Diz: qual é o lado do cubo? **Solução:** 12 1/2 *chi*

1.3.5. Continuando pelos Hebreus

Alguns resultados em combinatória desprovidos de demonstração aparecem nos trabalho de Sefer Yetzarah, escritos na Palestina, antes do terceiro século da era cristã. O texto, “O Livro das Formações” envolve as letras do alfabeto hebraico.

> “Ele fixou vinte e duas letras sobre a esfera como um muro com duzentas e trinta e uma portas... Mas como isso foi feito? Ele combinou... a letra א (alef) com todas as outras letras numa sucessão, e todas as outras letras novamente com ג ;ב (bet) com todas e todas com ב, e então a série inteira de letras. Assim segue-se que há duzentas e trinta e uma formações.
>
> Duas pedras constroem duas casas, três pedras constroem seis casas, quatro pedras constroem vinte e quatro casas, cinco constroem cento e vinte casa, e seis constroem setecentos e vinte casas, e sete constroem cinco mil e quarenta casas. A partir daí vai prosseguindo até que a boca não possa mais expressar e o ouvido não possa mais escutar.” (KATZ, p. 100, tradução nossa)

Calculando o número possível de palavras formadas a partir de 2, 3, 4, 5, 6 e 7 letras, Sefer Yatzihat o faz a partir do que chamamos atualmente de permutação. Essa regra foi estendida por Saadia Gaonco como mostramos a seguir:

> “Se alguém quer saber quantas palavras podem ser construídas a partir de um número maior do que esse (o sete), por exemplo, 8, 9, 10... a regra é que um deve multiplicar o resultado do primeiro produto pelos números seguintes e, portanto o que se obtém é a soma total” (KATZ, p. 100, tradução nossa)

Saadia, então, calculou o número de permutações da maior palavra contida nas Escrituras, palavra essa composta de 11 letras. Ele chegou ao número de 39.916.800 permutações.

Shebbetai Dommolo (913 – 970), que viveu no sudeste da Itália, colocou de modo mais explícito a regra do fatorial. Ele observou que, se usadas todas as 22 letras do alfabeto e rearranjadas de várias maneiras, poder-se-ia obter todas as palavras de todas as línguas do planeta. Mas ele adverte que esse número é muito grande para que alguém o possa calcular.

A astrologia também foi um campo explorado a partir do ponto de vista da combinatória. Abraham ibn Ezra (1090-1167), um rabino que vivia no sul da França, ao estudar o número de conjunções possíveis entre sete "planetas" – Sol, Lua, Mercúrio, Vênus, Marte, Júpiter e Saturno, deu uma derivação detalhada das regras do número de combinações possíveis. Em outras palavras ele mostrou como calcular $C_{7,k}$ fazendo k variar de 2 a 7 e notou que o total dessas combinações era 120.

Um estudo, porém, mais sistemático do assunto é atribuído a Levi ben Gerson, que viveu entre os séculos décimo terceiro e décimo quarto no sul da França de onde nunca saiu desde seu nascimento. Em um de seus manuscritos – Maaseh Hoslev – aparece a fórmula para o cálculo do número de arranjos simples e, particularmente, para o número de permutações. Levi também enunciou regras para o que modernamente denota-se deste modo:

$$\binom{n}{p} = \frac{A_{n,p}}{p!} \quad \text{e} \quad \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

1.3.6. Mundo Árabe

Curiosamente, no mundo árabe, um dos primeiros autores a considerar as permutações também as enxergou a partir das letras do alfabeto, mas neste caso, do alfabeto árabe. Foi al-Khalil ibn Ahmad (717-791), que calculou o número de palavras possíveis tomando 2, 3, 4 ou 5 letras do alfabeto árabe que é composto de 28 letras. Outros autores islâmicos como Thabit ibn Qurra (830-890) e Abu Kamil ibn Aslam (850-

930) buscaram dar resposta a problemas de permutações e combinações que envolviam pequenos conjuntos de objetos. Não havia, porém, nenhuma preocupação com a demonstração dos resultados nem com a criação de regras para sua obtenção.

Entre o final do século XII e início do século XIII, o matemático Ahmad al-Ab´dari Ibn Mun´in dedicou-se ao mesmo problema relacionado ao número possível de palavras formadas a partir das letras do alfabeto árabe. Antes, porém, considerou o seguinte problema: quantos diferentes pacotes de cores podem ser feitos de dez cores diferentes de seda? Ele os calculou cuidadosamente.

Primeiramente, ele percebeu que, com somente uma cor, há 10 possibilidades, ou seja, $C_{10,1} = 10$. Para calcular as possibilidades para duas cores, Ibn Mun´in listou os pares em ordem:

$$(c_2,c_1); (c_3,c_1); (c_3,c_2); \dots ; (c_{10},c_1); (c_{10},c_2); \dots; (c_{10},c_9)$$

E então observou que:

$$\begin{aligned} C_{10,2} &= 1 + 2 + \dots + 9 \\ &= C_{1,1} + C_{2,1} + \dots + C_{9,1} \\ &= 45. \end{aligned}$$

O mesmo procedimento é usado de modo similar para grupos com menos de 10 elementos. Para simplificar seus cálculos Ibn Mun´in organizou seus resultados numa tabela cujos resultados da primeira linha são 1, 2, ... 10 ($=C_{1,1}$, $C_{2,1}$, ..., $C_{10,1}$) e da segunda linha são 1, 3, 6, ..., 36 ($=C_{2,2}$, $C_{3,2}$, $C_{4,2}$, ..., $C_{9,2}$). Essa tabela é o que conhecemos hoje por triângulo de Pascal.

For a tassel of 10 colors										1	1
For a tassel of 9 colors									1	9	10
For a tassel of 8 colors								1	8	36	45
For a tassel of 7 colors							1	7	28	84	120
For a tassel of 6 colors						1	6	21	56	126	210
For a tassel of 5 colors					1	5	15	35	70	126	252
For a tassel of 4 colors				1	4	10	20	35	56	84	210
For a tassel of 3 colors			1	3	6	10	15	21	28	36	120
For a tassel of 2 colors		1	2	3	4	5	6	7	8	9	45
For a tassel of 1 color	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10
	using color #1	using color #2 (& earlier)	using color #3 (& earlier)	using color #4 (& earlier)	using color #5 (& earlier)	using color #6 (& earlier)	using color #7 (& earlier)	using color #8 (& earlier)	using color #9 (& earlier)	using color #10 (& earlier)	Total no. of tassels

Figura 4. Triângulo aritmético de Ibn Mun´im e uma adaptação desse mesmo triângulo.

Embora tenha fixado sua tabela em n = 10, Ibn Mun´im discutiu algumas importantes propriedades dos números binomiais ($C_{n,p}$) em seu processo de construção. Além disso, seus manuscritos tratam também das questões de permutação concluindo que não importa quão grande é a palavra, pois o número de permutações de suas letras é encontrado multiplicando-se um por dois por três por quatro, etc, até o número total de letras da palavra.

Ibn Mun´im buscou resolver vários outros problemas, incluindo permutações com repetições, antes de lidar com questões relativas à pronúncia e aos símbolos das vogais.

1.3.7. *Chegamos à Europa*

Outros estudos em combinatória se originaram com o missionário e poeta catalão Ramón Lull de Mallorca, ao ensinar em suas obras Ars maior (1273) e Ars brevis (1308) que o conhecimento pode ser aumentado, explorando combinações de pares de determinadas categorias. Enquanto ele mesmo contribuíra pouco para a teoria combinatória, os adeptos ao “Lulismo”, que floresceu no século XVII, publicaram numerosos e consistentes livros a respeito desse assunto. Esses estudantes tiveram pouca ou quase nada de influência matemática, pois não eram matemáticos. As regras por ele oferecidas não continham provas e demonstrações.

Apesar de não terem sido alvo da atenção dos matemáticos, seus estudos evidenciam um profundo conhecimento em combinatória, que seria somente ultrapassado por James Bernoulli no final do século XVII. O mais importante autor dentre eles era Marin Mersenne que publicou seis relevantes trabalhos entre 1623 e 1647. Ele foi fortemente influenciado pelo lulista alemão Athanasiu Kircher (Musurgi universalis, 1650; Ars magna sciendi, 1669), e seu discípulo Kaspar Schott (Magia universalis, Vol. 3. 1658) e Kaspar Knittel (Via regia ad omnes scientias et artes, 1682). Os lulistas espanhóis Sebatian Izquierdo e Juan Caramuel de Lobkowitz lançaram seus trabalhos no mesmo período.

Muitos problemas e regras para cálculos combinatórios foram apresentados em diversos livros e textos de aritmética da época da Renascença, porém a maioria não apresenta nenhuma demonstração. Isso se aplica, por exemplo, a autores como Luca Pacioli (Summa de arithmetica geometria proportioni et proportionalita, 1494), Girolamo Cardano (De subtilitate, 1550; Opus novum de proportionibus, 1570), Niccolò Tartaglia (General trattato di numeri et misure, 1556). Jean Butteo (Borrel) (Logística, 1559) e William Buckley (Aritmética memorativa, 1567).

O que se produziu até então sobre Análise Combinatória era implicitamente ou explicitamente repetido não somente pelos lulistas, como também por muitos matemáticos como Pierre Hérigone (Cursus mathematicus, Vol. 2. 1634) e Gottfried Wilhelm Leibniz (Dissertatio de arte combinatória, 1666).

No século XVII, os estudos em Análise Combinatória chegaram completamente a um novo nível matemático. Matemáticos como Bernard Frénicle de Bessy (1605-1675), Thomas Strode (1642-1688) e John Wallis (1616-1703) discutiram esse tema intensamente.

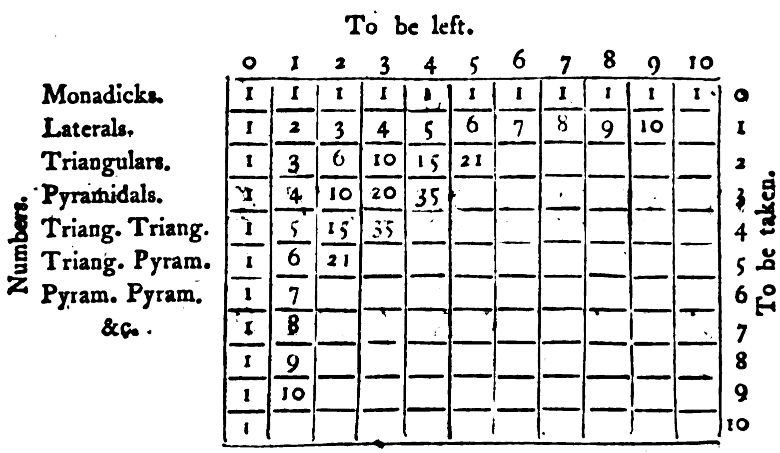
Thomas Strode, por exemplo, discutia seus métodos de cálculos de “variações” (o que corresponde ao que chamamos de “arranjos”) a partir de uma série de exemplos cotidianos como descobrir o número de palavras de três letras que poderiam ser formadas a partir do alfabeto latino, composto de 24 letras. Para isso, usava o seguinte método[8]:

$$\binom{24}{3} P_3 = 2024 \times 6 = 12144$$

Usava também a ideias do triângulo aritmético de Pascal sem, no entanto, conhecê-lo. No cálculo do número de conjunções dos sete planetas (presumidamente incluindo a Terra e a Lua), ele procedia do seguinte modo:

$$\binom{7}{2}+\binom{7}{3}+\binom{7}{4}+\binom{7}{5}+\binom{7}{6}+\binom{7}{7} = 2^7 - 7 - 1 = 120$$

Nos trabalhos de John Wallis aparece uma versão do famoso triângulo aritmético de Pascal.



To be left.

Numbers.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	To be taken.
Monadicks.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
Laterals.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		1
Triangulars.	1	3	6	10	15	21						2
Pyramidals.	1	4	10	20	35							3
Triang. Triang.	1	5	15	35								4
Triang. Pyram.	1	6	21									5
Pyram. Pyram.	1	7										6
&c.	1	8										7
	1	9										8
	1	10										9
	1											10

Figura 5. Triângulo aritmético usado pro John Wallis em seu “A discourse of Combinations, Alternations and Aliquots Parts”.

Publicado em 1665 e escrito por Blaise Bascal dois anos antes, o Traité du

[8] Esse cálculo corresponde a um arranjo de 24 letras tomadas 3 a 3

Triangle Arithmétique apresenta o famoso triângulo que leva seu nome. Essa, no entanto, não foi a primeira publicação impressa em que ele aparece. Em 1527, Petrus Apriams o usa como na capa de seu livro *Rechnung*. Mas Pascal teve o mérito de estudar detalhadamente o triângulo e demonstrar, pelo método da indução finita, suas propriedades.

Com os matemáticos europeus, a Análise Combinatória começa a ganhar um aspecto mais formal, fazendo dela um importante instrumento que permitiria o avanço em áreas como a Probabilidade, a Estatística e mais recentemente, a Teoria dos Grafos.

Ao olharmos os diferentes Problemas de Contagem, ao longo do tempo e nas diferentes sociedades, percebemos que muitos deles empregam elementos ligados à linguística, à astrologia, à música. Nesse contexto, assim como naqueles que envolvem numerais, naturalmente a ordem deveria ser considerada, pois a formação de palavras, a conjunção astrológica e as notas musicais seriam obtidas por arranjos ou permutações de letras, planetas e notas, respectivamente. Essa foi uma temática comum entre povos que influenciaram sobremaneira a Matemática: Hindus, Árabes, Gregos.

A presença do triângulo aritmético em outros povos nos chamou a atenção. Ele era usado como um instrumento para o cálculo de combinações e no desenvolvimento de expressões do que conhecemos por Binômio de Newton, empregadas no cálculo de raízes quadradas, cúbicas, quartas, etc. O uso do triângulo aritmético por vários povos sugere a troca de conhecimentos entre eles em razão da expansão comercial e das invasões territoriais. Apesar de seu uso recorrente não havia, ao que parece, uma preocupação nas demonstrações das propriedades desse triângulo, bem como, das regras que se usavam para os cálculos dos outros agrupamentos.

Apesar da evidente importância que o triângulo aritmético teve para algumas civilizações, preferimos deixar um estudo minucioso para trabalhos futuros.

Capítulo 2

2. Construindo a Problemática

Neste capítulo apresentamos alguns estudos relacionados ao nosso tema e a questão motivadora de nossa pesquisa.

Começamos por apresentar algumas pesquisas brasileiras sobre o ensino da Análise Combinatória. A seguir, apresentamos os estudos que antecederam as pesquisas do grupo de Batanero. Faremos, logo após, uma explanação da pesquisa de Navarro-Pelayo et. al. (1996) e de outras que a sucederam e que nela se inspiraram.

Por fim, delimitamos o problema de pesquisa a fim de levantarmos as primeiras hipóteses e traçarmos os objetivos de nossa investigação.

2.1 As pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem da Análise Combinatória

O ensino e a aprendizagem da Análise Combinatória vêm ganhando espaço como tema das pesquisas em Educação Matemática. Dos trabalhos sobre Análise Combinatória encontrados no banco de teses da CAPES[9] dezoito deles abordavam as questões referentes às realidades de sala de aula e cerca de 2/3 destes discutiam os problemas de combinatória. Essas discussões, em geral, estão centradas principalmente no uso de estratégias alternativas na resolução de problemas de contagem. Assim, dá-se ênfase a soluções a partir do diagrama de árvores, do raciocínio recursivo com uso dos princípios multiplicativo e aditivo, desmembramento de um problema em problemas menores, enumeração sistemática, etc.

Nossa primeira pesquisa é a de Pinheiro (2008) que procurou investigar a possibilidade de uma sequência de ensino tendo por ponto de partida a resolução de problemas. Mais especificamente, se essa sequência de ensino pode ser um caminho

[9] CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior ligada ao Ministério da Educação e Cultura.

que objetiva favorecer a consolidação dos conceitos básicos de Análise Combinatória.

Para responder seu questionamento, Pinheiro (2008) propõe uma sequência de ensino nos moldes da metodologia da Engenharia Didática de Michele Artigue, com situações embasadas na Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau. Além de Brousseau, o autor assume também as ideias de Sá (2005) a respeito das concepções sobre resolução de problemas nas aulas de Matemática.

Segundo Sá (2005, apud Pinheiro, 2008), levando em conta certos limites, o professor deve acreditar na possibilidade de resolução de problemas por parte dos alunos mesmo que estes estejam desprovidos do domínio de determinadas operações e conceitos.

Baseado nisso, Pinheiro (2008) constrói situações didáticas em que figuram, além de problemas, alguns jogos de aprofundamento. Seu objetivo é proporcionar condições para a construção dos conceitos ligados ao Princípio Fundamental da Contagem, Permutação, Arranjo e Combinação. Foram ao todo 7 encontros com 15 alunos da uma turma de segunda série do Ensino Médio de uma escola pública de Belém do Pará.

A investigação validou a hipótese inicialmente levantada pelo pesquisador de que é viável construir uma sequência de ensino visando à introdução dos conceitos básicos de Análise Combinatória, tendo a resolução de problemas como ponto de partida (Pinheiro, 2008)

Estas condições favoráveis residem na importância que se deve dar a aulas de aprofundamento bem planejadas, com objetivos bem definidos, de modo que o tema dos problemas de contagem seja explorado na sua totalidade.

Pinheiro (2008) demonstra também, em sua pesquisa, sua preocupação com a formação inicial do professor em relação à Análise Combinatória, porém destaca que seu trabalho fez emergir a importância que se deve dar "a uma aula bem planejada, apoiada num campo teórico e desenvolvida com a participação intensa dos alunos" (Ibid, p. 144).

Por intermédio desta preocupação, quanto à formação do professor frente à

Análise Combinatória, Costa (2003) propõe-se a investigar “como o professor de Matemática está instrumentalizado para ensinar Combinatória no Ensino Fundamental, quais são as concepções que influenciam sua prática e como uma formação continuada pode alterar ou reforçar tais concepções” (Ibid, p. 5).

Seu trabalho se inicia com um estudo sobre a transposição didática da Análise Combinatória para o ensino fundamental. Seguiu-se, então, a análise da Proposta Curricular do Estado de São Paulo para o Ensino de Matemática[10], dos Parâmetros Curriculares Nacionais e dos livros didáticos usados na rede estadual paulista de educação. Essa análise tinha por objetivo verificar como os professores estavam sendo subsidiados.

O trabalho seguiu, tomando por sujeitos de pesquisa professores que participavam de um projeto de formação continuada, num convênio firmado entre a Secretaria de Educação do Estado de São Paulo e a Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, no ano de 2002. Esse grupo de professores foi convidado a responder um questionário cujo objetivo era diagnosticar suas concepções sobre Análise Combinatória. Tal diagnóstico se deu por meio das respostas dadas por eles a respeito de estratégias usadas nas soluções de problemas por alunos fictícios. O autor entende que desse modo pôde avaliar as concepções dos participantes sem que se sentissem constrangidos.

Costa (2008) concluiu que apesar de haver um material rico, capaz de dar um bom subsídio ao professor, este não os conhece de modo suficiente, além de possuir uma formação deficitária em Análise Combinatória. Afirma o pesquisador:

> O professor não conhece o objeto matemático (Análise Combinatória) o suficiente para que possa ensiná-lo aos seus alunos, seja por meio de Modelagem ou não. (COSTA, 2008, p.116)

Das dificuldades constatadas por Costa (2008) figuram aquelas já descritas em outros trabalhos como os de Batanero (1994), Navarro-Pelayo et. al. (1996) e Roa (2000): falta de procedimento sistemático que leve a formulação de todas as possibilidades, resposta não justificadas e consequentemente erradas, construção

[10] Este documento antecedeu a Nova Proposta Curricular na Rede Estadual Paulista de Educação de 1986 a 2008, ano da implantação da Nova Proposta Curricular.

inadequada ou não construção da árvore de possibilidades, dificuldades em perceber a importância ou não da ordem nos agrupamentos.

Num outro trabalho que visava à discussão do ensino e a aprendizagem da Combinatória no Ensino Médio, Almeida (2010) procurou investigar as contribuições de uma proposta de ensino com ênfase na Comunicação Matemática em uma turma do 2º ano do Ensino Médio de uma escola pública de Itabirito, MG.

Para tanto, traçou como objetivos a serem alcançados: “avaliar a mobilização dos conhecimentos combinatórios ao longo da proposta; identificar as principais estratégias utilizadas; analisar o desenvolvimento dos argumentos utilizados pelos alunos ao longo do estudo; investigar o papel das discussões em pequenos e grandes grupos; identificar como os estudos avaliaram a proposta de ensino” (ALMEIDA, 2010, p.16).

A pesquisadora procurou um aporte teórico que focasse no “tipo de interação discursiva que se estabelecia na sala de aula, ou seja, no tipo de comunicação” (ibid, p.16). Encontrou-o nos trabalhos de Martinho e Ponte (2007) e de outros autores que privilegiaram a ideia de comunicação em sala de aula e, mais especificamente, a comunicação durante a aula de Matemática.

Assim sendo, Almeida (2010) propôs atividades a serem desenvolvidas em grupos de quatro alunos nas aulas de Matemática de uma turma noturna do 2º ano do Ensino Médio. Além de investigar o processo de aprendizagem dos conceitos ligados à combinatória, a pesquisadora procurou analisar como se dava a comunicação entre os alunos, sobretudo a argumentação, durante o processo de resolução de problemas.

Ao final de seu trabalho, a pesquisadora observou que as estratégias de resolução dos problemas se mostraram mais elaboradas do que aquelas do início da pesquisa. Também notou que uma parcela significativa dos alunos usava o princípio fundamental da contagem nas resoluções e outras estratégias, levando em conta a questão da importância ou não da ordem nos agrupamentos.

Quanto à questão da comunicação, Almeida (2010) observou a negociação dos significados e a construção do próprio conhecimento feita pelos estudantes durante a busca pelo convencimento uns dos outros. E mais ainda:

> Ao final, os alunos ainda apresentavam dificuldades em argumentar apresentando suas ideias, mas já eram capazes, em alguma medida, de estabelecer analogia e observar criticamente as respostas e resoluções apresentadas pelos colegas (ALMEIDA, 2010, p. 140).

A pesquisa desenvolvida por Sturm (1999), realizada junto a alunos também do 2º ano noturno do Ensino Médio de uma escola pública de Paulínia, SP, busca investigar as possibilidades pedagógicas de um ensino de Análise Combinatória sob uma abordagem alternativa. O autor esclarece:

> Características como abertura à participação dos alunos e à relevância do pensamento combinatório ao invés da ênfase às fórmulas seriam elementos presentes no transcorrer da proposta que estaria estudando. Estas características eram diferentes das que encontrei quando aluno e sendo assim, considerei a proposta como alternativa. (STURM, 1999, p. 6).

Esse pesquisador procurou implementar e analisar uma proposta de ensino de Análise Combinatória partindo da sua própria prática, identificando as possibilidades e limitações dessa nova abordagem com vistas a contribuir para que os professores de Matemática aprimorem sua formação no processo ensino-aprendizagem de Análise Combinatória e a alavancar futuras investigações sobre o tema.

As bases metodológicas dessa pesquisa eram a pesquisa-ação e a ciência social interpretativa. O autor relata sua dificuldade em manter o distanciamento entre pesquisador e professor, típico nesse tipo de pesquisa:

> [...] algumas vezes parecia que estava sendo crítico demais, só percebendo falhas ou incoerências; outras vezes, temia estar sendo benevolente demais ao avaliar o trabalho realizado. (STURM, 1999, p.11)

A proposta de trabalho do pesquisador era constituída de quatro fases:

- *Familiarização com problemas de contagem em geral*, cujo objetivo era levar os alunos a terem os primeiros contatos com os problemas de contagem e pudesse estabelecer estratégias iniciais de resolução a partir da enumeração de todos os casos possíveis, do diagrama de árvores e do princípio multiplicativo.

- *Uso da notação fatorial*, como consequência natural da percepção por parte dos alunos de que o princípio multiplicativo tem um papel relevante na resolução dos problemas de contagem. Aqui, ela foi adotada com o objetivo de “possibilitar aos alunos alguma familiaridade com exercícios cujos cálculos poderiam ser representados com o uso desta notação” (STURM, 1999, p.42)
- *Levantamento e observação das características dos problemas que determinam seu modo de resolução*, assim consideradas por Sturm (1999): a aplicabilidade do diagrama de árvores, a questão da importância dada à ordenação ou não dos elementos, a aplicação direta do princípio multiplicativo.
- *Relação das características (modo de resolver) com os temas em si e formalização dos conceitos / temas*, em que se esperava, nessa fase, que o aluno fosse capaz de reconhecer e diferenciar os problemas de contagem, levando em conta a importância ou não da ordem e possibilitando o uso de generalizações expressas nas fórmulas.

Ao fazer as considerações finais, o autor enfatiza o ganho que obteve ao introduzir estratégias diferenciadas de resolução dos problemas de combinatória como a enumeração sistemática e o uso de diagramas de árvores. Sturm (1999) salienta, no entanto, que as estratégicas poderiam ser melhores exploradas e cita autores como Roa, Batanero, Godinho e Cañizares[11] para argumentar que elas são pouco utilizadas pelos alunos.

O pesquisador considera que os problemas que estavam no elenco de sua proposta eram tradicionais, mas ressalta o seguinte aspecto:

> [...] a proposta se diferencia da maioria da prática vigente, no sentido de se experimentar uma mudança na relação do professor e do aluno com a Análise Combinatória, mais precisamente no modo como aquele apresenta e discute cada tema (Arranjo, Permutação e Combinação), primeiramente apresentando exercícios para depois chegar às sistematizações. (STURM, 1999, p. 81)

[11] ROA, R BATANERO, C., GODINHO, J. D.CAÑIZARES, M. J. Estrategias em la Resolución de Problemas Combinatorios por Estudintes com Preparación Matemática Avanzada. Epsilon. 36. 1996

Ainda sobre os problemas tradicionais o autor entende que eles foram, de certo modo, uma barreira para que os alunos enfrentassem outros desafios como a confecção pelos próprios alunos de enunciados para determinado tipo de problema, sendo este um recurso para se avaliar sua compreensão a respeito do tema.

Na pesquisa de Placha (2006) o que se propõe é investigar os processos de aprendizagem das relações multiplicativas de produto de medidas de crianças da 3ª. Série do Ensino Fundamental, sob a intervenção do professor.

Para isso, ela procurou caracterizar as soluções notacionais (entendido pela autora como os registros escritos), as soluções verbais e as interpretações das crianças, quando se encontram diante de problemas referentes ao produto de medidas. A caracterização se deu conforme os níveis de raciocínio combinatório em jogo nesses problemas. A pesquisadora procurou também descrever as formas de intervenção que ela, no papel de professora, julgou necessárias para orientação adequada dos alunos.

Sua pesquisa, descrita por ela como um "estudo exploratório de natureza qualitativa", teve por referencial teórico a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud e consistiu na simulação de uma situação de aprendizagem de sala de aula com o objetivo de descrever a natureza das alterações das soluções notacionais, das soluções verbais e das interpretações expressas pelas crianças durante a solução dos problemas de medidas" (PLACHA, 2006, p.56)

Foram selecionadas cinco crianças da 3ª. Série do Ensino Fundamental com idades entre 9 anos e 9 anos e 9 meses, sorteadas aleatoriamente, de uma escola pública municipal de Curitiba. A cada uma delas foram propostos oito problemas envolvendo o raciocínio multiplicativo do tipo produto de medidas, separados em duas sessões com quatro problemas. Esses problemas foram elaborados a partir da classificação das estruturas multiplicativas de Vergnaud (1983)[12].

Na análise das soluções dadas pelos participantes foram identificados por Placha (2006) os seguintes níveis de raciocínio combinatório: respostas contextualizadas sem indícios de combinação; soluções que se aproximam à solução combinatória; soluções que obtêm algumas combinações; soluções com presença de solução combinatória.

[12] VERGNAUD, G. Multiplicative Structures. In: RESH, R. e LANDAU, M. **Acquisition of mathematics concepts and processes**. p.127-174. New York, Academic Press, 1983,.

As intervenções da professora se deram por meio da orientação e reorientação, da instigação e do questionamento feito aos alunos durante o processo de resolução dos problemas. Essas ações não se deram todas de uma única vez, mas foram mudando à medida que as relações entre o aluno e o problema se modificavam.

Placha (2006) destaca também que a aprendizagem das estruturas multiplicativas de produto de medidas tinha ligação com o tipo de problema e, mais especificamente, com as dificuldades que esses proporcionavam. A pesquisadora observa que:

> [...] os problemas que apresentavam duas variáveis, sobretudo com valores baixos para essas variáveis, possibilitaram a utilização de uma variedade maior de soluções notacionais pelas crianças: registros pictóricos, cálculos aditivos, cálculos multiplicativos, “arvore” de possibilidades, escrita alfabética e numérica. (PLACHA, 2006, p.268)

A autora cita Brito, Alves e Neves (2003)[13] para justificar que valores mais altos para as variáveis inviabilizam o uso de representações diversas na resolução de Problemas de Contagem exigindo do aluno a utilização de recursos formais.

As pesquisas citadas aqui apontam para importância de um ensino de Análise Combinatória baseado no enfrentamento de situações de aprendizagem, por parte dos alunos. Tais situações devem mobilizar estratégias de resolução que vão além do reconhecimento de agrupamentos e aplicação de fórmulas. Elas têm por objetivo maior o efetivo desenvolvimento do raciocínio combinatório.

Neste sentido nossa pesquisa se insere no rol desta e de tantas outras com o objetivo de analisar uma peça importante na engrenagem da construção do raciocínio combinatório: os Problemas de Contagem.

---

[13] BRITO, M. R. F., ALVES, E. V. e NEVES, L. F. A solução de problemas de estrutura multiplicativa. In: **Anais do IX Congresso Brasileiro de Psicologia do Desenvolvimento.** João Pessoa. SBPD/UFPB, 2003, p. 105.

2.2 As investigações de Piaget e Inhelder sobre os conceitos de acaso e probabilidade

Piaget e Inhelder (1951) estudaram a formação dos conceitos de acaso e probabilidade na criança, acentuando que essa formação depende, de modo muito estreito, da evolução dos esquemas combinatórios. Segundo eles, o raciocínio probabilístico depende da capacidade de raciocínio combinatório e observam que falhas nessa capacidade podem comprometer a aplicação de conceitos de probabilidade até nas situações consideradas mais simples ou de fácil enumeração.

Os pesquisadores, ao proporem a crianças tarefas combinatórias com materiais concretos e também por meio de entrevistas, procuram traçar um perfil de como se dá o desenvolvimento psicogenético das operações combinatórias.

Por meio de suas pesquisas, Piaget e Inhelder (1951) observaram que crianças no estágio pré-operatório, em idade de pré-escola constroem, empiricamente, combinações, permutações e arranjos sem, contudo, se preocuparem em estabelecer um método que esgote todas as possibilidades. Aquelas que já se encontram no estágio das operações concretas, buscam maneiras de se fazer um levantamento de todas as combinações, permutações e arranjos possíveis, desde que o número de elementos seja pequeno. O procedimento mais usado aqui é a tentativa e erro. É na etapa das operações formais que se manifesta a capacidade de se fazer um levantamento de todas as permutações, combinações e arranjos possíveis graças a um procedimento sistemático.

Por exemplo, nas tarefas que exploravam as combinações, as crianças deveriam selecionar pares de fichas de cores diferentes, tomadas dentre montes de cores diferentes. Elas foram organizando os pares aleatoriamente, sem a busca de um procedimento sistemático que possibilitasse a construção de todos os pares. Essa busca predominou nas crianças em idades de 8 a 11 anos aproximadamente, embora esses procedimentos nem sempre conduzissem a resultados satisfatórios. As crianças do terceiro estágio – entre 11 e 12 anos aproximadamente – contaram com relativo êxito na busca pelos procedimentos sistemáticos, integrando as operações de seriação e correspondência numa só operação, de modo a conseguir todas as combinações possíveis de elementos de um agrupamento tomados dois a dois.

Então, de acordo com Piaget e Inhelder (1951), a aquisição de procedimentos sistemáticos – esquemas combinatórios – para a obtenção de combinações, permutações e arranjos (chamadas de operações combinatórias), está ligada ao desenvolvimento cognitivo do indivíduo que se encontra estruturada no estágio das operações formais.

Roa (2000, p.9), ao citar Piaget e Inhelder, destaca que:

> [...] o raciocínio hipotético dedutivo opera por meio das operações combinatórias que se aplicam sobre um conjunto de possibilidades que se devem examinar e enumerar até chegar a uma conclusão. Alcançado o período das operações formais os adolescentes descobrem procedimentos sistemáticos de enumeração e de contagem combinatória ao que seriam capazes de resolver problemas combinatórios simples sem ajuda de instrução.

2.3 **A instrução e o raciocínio combinatório na visão de Fischbein**

Fischbein (1975) considera também a importância dos esquemas combinatórios como *esquema operacional*[14] fundamental para a "dinâmica e potência criativa do raciocínio lógico em geral"[15] do indivíduo. Ele os compara, em nível de esquema mental, aos da proporcionalidade e da correlação.

Segundo Fischibein (1975), teoricamente, a construção dos esquemas combinatórios não se completa antes do estágio das operações formais. Seus estudos, porém, mostraram que estes esquemas são adquiridos ao longo de vários anos, mesmo após os 12 anos de idade. Deste modo, ele procurou respostas para o seguinte problema: *é possível que uma instrução sistemática possa acelerar essa aquisição?* (FISCHIBEIN, 1975, p.107, tradução nossa)

Ao estudar o raciocínio combinatório, com jovens de 10 a 15 anos, Fischbein et al. (1970) propôs, inicialmente, problemas de permutações cujas soluções deveriam ser estimadas sem qualquer intervenção didática. As respostas dos jovens eram dadas "cegamente sem nenhum método para estimar o número de permutações de n

[14] O termo esquema é usado no sentido dado por Jean Piaget, segundo o qual esquema é aquilo que, numa ação é "transponível, generalizável ou diferenciável de uma situação a seguinte, ou seja, o que há de comum nas diversas repetições ou aplicações da mesma ação" (Cf. Piaget, J, em *Biologia e Conhecimento, Petropolis: Editora Vozes, 1996,* pag 16)

[15] Cf. Batanero, C., Godino, J. D. y Navarro-Pelayo, V.. ***Razonamiento combinatorio***. Madrid: Síntesis. 1994

elementos” (ROA, 2000, p.13). Essa estimativa se aproximava das respostas corretas entre os jovens de idade mais avançada. Com o propósito de observar os resultados após uma intervenção didática, Fischbein et al. (1970) orientou os alunos no uso de diagramas de árvores para a resolução de problemas de arranjos com repetição e de permutações com relativo sucesso, embora poucos deles tenham deduzido, espontaneamente, a fórmula para o cálculo dessas operações combinatórias.

Em outra pesquisa, Fischbein e Gazit (1988), estudaram como se dá o desenvolvimento das competências combinatórias em jovens de 11 a 14 anos após uma intervenção didática e para isso consideraram como variáveis, além da faixa estaria dos participantes, o tipo de operação combinatória (arranjo, permutação ou combinação) e a natureza dos elementos componentes dos problemas (concreta ou abstrata). Baseados em suas pesquisas anteriores[16] organizaram os problemas de arranjos com repetição, permutação, arranjos e combinações e pediram que os alunos construíssem o diagrama de árvores, contassem os agrupamentos obtidos e deduzissem uma expressão algébrica para cada situação.

Os pesquisadores concluíram que, com o uso do diagrama de árvores, a construção da expressão algébrica torna-se mais simples e tem maior significado para o sujeito, por ser o diagrama desenvolvido a partir da sua própria intuição. Fischbein (1975, p.117) chama de intuição “os processos cognitivos que intervém diretamente nas ações práticas ou mentais, em razão de suas características de imediatismo, globalidade, capacidade extrapolatória, estruturabilidade e auto-evidência”, podendo ser esse imediatismo traduzido como ações que não precisam ser argumentadas e, por isso mesmo, ocorrem espontaneamente.

2.4. Dubois, Navarro-Pelayo e os Modelos Combinatórios Implícitos

Em um projeto que visava permitir um ensino mais racional e significativo da Análise Combinatória, Dubois (1984) propôs uma classificação das configurações dos problemas simples de contagem em tipos de modelos combinatórios. Ele denominou tal

[16] As pesquisas de 1970 e 1975 em que concluíram que a permutação não é uma operação combinatória de emergência intuitiva no sujeito e que o diagrama de árvores tem, em seu uso, uma série de restrições que necessita, primeiramente, dos arranjos com repetição (ROA, 2000, p.13)

classificação de Sistematização das Configurações Combinatórias e que, mais tarde, Navarro-Pelayo et al. (1996) chamou de Modelo Combinatório Implícito. A proposta de Dubois (1984) era a de organizar as configurações combinatórias correspondentes a cada problema elementar de contagem, num sistema bem estruturado num esforço de promover a compreensão da contagem elementar.

Deste modo, as configurações foram classificadas de acordo com os seguintes modelos: “seleção”, “distribuição”, “separações em grupos” e “partições em inteiros”. Navarro Pelayo et al. (1996) optaram por agruparem as separações em grupos e as partições em inteiros num único modelo – “partições” – visto que se tratam de casos particulares desse modelo. Passaremos agora a expor o seriam cada um desses modelos:

2.4.1. Modelo de Seleção

Neste modelo, de um conjunto de *m* elementos (quase sempre distintos) é considerada uma amostra de *n* objetos que deve ser retirada. O problema seguinte procura ilustrar isso.

Numa caixa há 4 bolas numeradas (com os dígitos 2, 4, 7, 9). Escolhemos uma das bolas e anotamos seu número. Então, colocamos a bola de volta na caixa. Repetimos o procedimento até formarmos um número de três dígitos. Quantos números diferentes de três dígitos são possíveis de se obter? Por exemplo, podemos obter o número 222. (Godino et. al, 2005, p.8, tradução nossa)

O verbo “escolher” que aparece no problema é a palavra-chave para se identificar esse tipo de configuração. Outros verbos como “selecionar”, “pegar”, “extrair” e “coletar” se referem à ideia de amostra e seleção.

Na seleção de elementos para uma amostra, deve-se considerar a possibilidade de repetição de um ou mais elementos e se a ordem em que a amostra é extraída é ou não é relevante. De acordo com estas características obtemos as quatro operações combinatórias básicas apresentadas na tabela a seguir:

	Amostra ordenada	*Amostra não ordenada*
Repetidos	Arranjo com repetição $(AR)_{m,n}$	Combinação com repetição $(CR)_{m,n}$
Não-repetidos	Arranjo Simples $A_{m,n}$	Combinações Ordinárias $C_{m,n}$

Quadro 1 Operações básicas segundo o modelo de seleção.

2.4.2 Modelo de Distribuição

No modelo de distribuição, pretende-se distribuições um conjunto de *m* objetos em *n* caselas, como acontece no problema a seguir:

> Supondo que temos três cartas idênticas e que queremos colocá-las em quatro diferentes envelopes coloridos: amarelo, azul, vermelho e verde. Só é possível introduzir uma carta em cada um dos envelopes diferentes. De quantas maneiras as três cartas idênticas podem os três ser colocadas em quatro envelopes diferentes? Por exemplo, poderíamos introduzir uma carta dentro do envelope amarelo, outra dentro do envelope azul e a última dentro do envelope verde. (Godino et. al, 2005, p.8, tradução nossa)

Neste caso, dois grupos diferentes de objetos intervêm (cartas e envelopes) não sendo fácil aplicar a regra do *ordenado* ou *não-ordenado*. Para resolver esse problema podemos considerar que, apesar de não haver possibilidade de ordenação das cartas por serem objetos indistinguíveis, os envelopes são distinguíveis pela cor.

Godino et. al (2005) expõe que a solução deste problema é obtida por $C_{4,3}$, mas existem possibilidades neste modelo, considerando-se as seguintes características:

- se os objetos a serem distribuídos são idênticos ou não;
- se as caselas são idênticas ou não;
- se as caselas são ordenáveis ou não (no caso de recipientes diferentes);
- se devemos considerar a ordem dos objetos dentro das caselas;
- as condições que se agregam à distribuição, como o número máximo de objetos em cada casela ou a possibilidade de ter caselas vazias, e assim por diante.

Segundo Godino et al. (2005) , nos problemas de distribuição um conjunto composto de *m* objetos e outro conjunto de *n* caselas são colocados em correpondência. Logo, algumas destas distribuições podem ser formalizadas em termos matemáticos como de aplicações que podem ser injetoras, sobrejetoras ou bijetoras.

De volta ao problema proposto, ao olharmos do ponto de vista dos envelopes podemos traduzi-lo do modelo de distribuição para um o de seleção. Isso porque distribuir três cartas idênticas em quatro envelopes de cores diferentes equivale a calcular todas as amostras possíveis de três envelopes a partir dos quatro envelopes distintos disponíveis

2.4.3 Modelo de Partição

Neste modelo estamos interessados em dividir um conjunto de *m* elementos em *n* subconjuntos, em outras palavras e como o proprio nome sugere, queremos efetuar partições em um conjunto, como no problema seguinte:

João e Maria têm quatro figurinhas numeradas de 1 a 4. Eles decidem repartir suas figurinhas, ficando cada um com duas. Por exemplo, Maria poderia ficar com as figurinhas 1 e 2, e João com as figurinhas 3 e 4. De quantos modos eles podem repartir as figurinhas entre si, desta forma?

Navarro-Pelayo et al (1996) chamam atenção ao fato que uma distribuição de *m* objetos em *n* caselas pode ser traduzida como uma partição de um conjunto de m elementos em *n* subconjuntos. Há, portanto, uma correspondência biunívca entre os modelos partição e de distribuição que para o aluno pode não ser tão evidente.

Alguns verbos chaves como dividir, repartir, decompor, separar podem ser associados à ideia de partição facilitando, assim, seu reconhecimento.

Dubois (1984) afirma ser esta sistematização uma fonte de situações simples e concretas que podem ser resolvidas mediante a mobilização de procedimentos de intuição, representação, abstração, generalização e formalização, em que são instrumentalizados conceitos de aplicação, produto cartesiano, relação de ordem e de equivalência, entre outros.

Com relação às fórmulas, Dubois (ibid) entende que seu trabalho favorece a exploração de diversos caminhos possíveis para deduzi-las, induzi-las e demonstrá-las. Contudo, até o presente, não encontramos trabalhos científicos que relatem a utilização desta sistematização, ou seja, o uso dos Modelos Combinatórios Implícito para este fim.

Ele observa que, além das possibilidades de abordagem descritas anteriormente, tal sistematização seria uma ferramenta útil ao professor que ensina Análise Combinatória na preparação de atividades didáticas e unidades de ensino visando a uma melhor articulação e exploração do raciocínio combinatório. O autor pontua a importância na elaboração das situações de combinatória, lembrando que "os problemas de contagem continuam sendo a espinha dorsal do ensino de Análise Combinatória no nível pré-universitário" (DUBOIS, 1984, p.54, tradução nossa).

Ainda sobre os problemas de contagem, Dubois (ibid) lamenta o fato de que *pseudos problemas realistas* sejam usados com o intuito de tornar o ensino de Análise Combinatória significativo para o aluno. Na sua opinião, tais problemas são falhos na construção de caminhos sistemáticos que permitam ao aluno um reconhecimento mais fácil de métodos apropriados na resolução de problemas combinatórios. Além disso, ele considera não haver um repertório suficiente de problemas contextualizados fora das Probabilidades, ou seja, situações ligadas ao cotidiano e a outras áreas como as das Ciências, das Tecnologias e das Artes.

Além de aplicações no ensino e na aprendizagem em Análise Combinatória, o autor sinaliza que esta sistematização pode servir de base para investigações no campo da Educação Matemática e para aqueles interessados na gênese de esquemas cognitivos, citando os trabalhos realizados por Piaget e Inhelder.

2.5 O Grupo de Investigación sobre Educación Estadísticas e as pesquisas sobre o raciocínio combinatório

Na investigação sobre Educação Matemática e, mais especificamente, sobre Educação Estatística, merecem grande destaque os trabalhos do Grupo de "Investigación sobre Educación Estadística"[17] – GEEUG – da Universidade de Granada, na Espanha, sob a coordenação da pesquisadora Carmén Batanero.

Em 1991 teve início o projeto de investigação a respeito do raciocínio combinatório em alunos de níveis médio e superior. Esse projeto inicialmente de caráter diagnóstico, visa investigar a capacidade combinatória de alunos espanhóis e mostrar sua melhora por meio de uma intervenção didática (NAVARRO-PELAYO et al., 1996). Passamos a descrever esses estudos.

2.5.1. A pesquisa de Navarro-Pelayo et. al. (1996)

A pesquisa de Navarro-Pelayo et. al. (1996) teve por objetivo perscrutar o raciocínio combinatório dos alunos que cursavam o Ensino Secundário espanhol (equivalente ao nosso ensino médio), buscando respostas a algumas perguntas:

- Que papel a Análise Combinatória desempenha na Probabilidade e na Matemática Discreta?
- O raciocínio combinatório é somente um instrumento matemático ou é um componente fundamental do raciocínio lógico?
- Existem variáveis de tarefas que afetam os procedimentos e erros dos alunos na resolução de problemas combinatórios?

[17] http://www.ugr.es/~batanero/index.htm

- Como deveríamos considerar essas variáveis no ensino e na avalição deste conteúdo?

A pesquisa foi realizada com setecentos e vinte alunos, entre 14 e 15 anos, de nove institutos de Granada e Córdoba, dos quais 352 haviam sidos instruídos previamente em Análise Combinatória e os demais não receberam nenhuma instrução.

A estes 720 alunos foi pedido que respondessem a um questionário com 13 problemas simples em que figurava somente uma operação combinatória, selecionados a partir de outras pesquisas já realizadas sobre o ensino deste conteúdo (Análise Combinatória) e, também, de sugestões feitas por alunos e professores a respeito dos enunciados e dos seus respectivos níveis de dificuldade.

Como variáveis de tarefas na confecção dos problemas, foram considerados:

- Os Modelos Combinatórios Implícitos:

  Problemas de seleção, de distribuição e de partição, segundo a classificação de Dubois (1984);

- Tipo de operação combinatória:

  Arranjos e permutações simples ou sem repetição e as combinações simples;

- Tipo de elementos que se combinam:

  Letras, números, pessoas ou objetos. Em agrupamentos em que aparecem letras e números fica mais evidente a importância da ordem (Roa, 2000, p.40);

- Valor dado aos parâmetros *m* e *n*:

  As estratégias de resolução usando recursos como diagramas de árvores, organização em tabelas, enumeração não sistemática, são melhores empregadas se os parâmetros aumentarem gradativamente, de modo a facilitar o desenvolvimento do raciocínio combinatório.

A pesquisa revelou que ambos os grupos apresentaram dificuldades em resolver os problemas propostos mesmo tendo estes uma única operação combinatória. Além disso, eles demonstraram falta de raciocínio recursivo quando da resolução de problemas que envolviam valores altos dos parâmetros *m* e *n*.

Os alunos dispensados de instrução prévia a respeito do conteúdo não sentiram, segundo a pesquisadora, grande diferença entre os três tipos de modelos implícitos (seleção, distribuição e partição), tendo um desempenho abaixo dos 25% de acertos. Para aqueles que receberam instrução prévia, houve melhora significativa – atingindo a casa dos 81% aproximadamente – tendo sido notada uma redução geral das dificuldades em problemas de seleção e nos de arranjos, permutações e permutações com repetição, como também uma melhora nos problemas de distribuição. Segundo os autores, as definições usadas pelos livros didáticos para introduzir as operações combinatórias estão baseadas principalmente na ideia de mostra, ou seja, no modelo de seleção, ao qual se acrescentam, em alguns deles, os modelos de distribuição para os arranjos e permutações.

Os pesquisadores defendem, então, que se considere o modelo combinatório implícito nos futuros desenvolvimentos curriculares em relação à Análise Combinatória, dado sua forte influência nas dificuldades dos problemas e nos tipos de erros.

Foram também elencados os principais tipos de erros cometidos pelos alunos, sendo, os erros, posteriormente categorizados em dois grupos:

I) Erros comuns aos diferentes modelos de seleção, distribuição e partição.

- Troca do tipo de modelo matemático no enunciado do problema:

  O aluno usa um modelo de seleção quando se trata, por exemplo, de um modelo de distribuição;

- Erro em relação à relevância ou não da ordem:

  O aluno não consegue distinguir se o problema é de arranjo ou combinação, por exemplo;

- Erro em relação à relevância ou não da repetição:

  O aluno não aventa a possibilidade de repetir os elementos quando isto é possível e repete os elementos quando não é possível;

- Confusão quanto ao tipo de objeto:

  Considerar objetos idênticos quando são distintos e vice-versa;

- Enumeração não sistemática:

  Resolver o problema proposto por tentativa e erro, enumerando todos os agrupamentos possíveis sem o uso, assim, de um raciocínio recursivo;

- Resposta intuitiva errônea:

  O aluno dá a solução intuitivamente e de modo errado sem que haja uma justificativa de sua resposta;

- Não identificar a fórmula correta para uma operação combinatória que tenha sido identificada corretamente;

- Não se lembrar do significado dos parâmetros nas fórmulas;

- Interpretação equivocada do diagrama de árvore.

II) Erros adicionais, específicos dos problemas de distribuição e partição.

- Confusão em relação ao tipo de subconjuntos:

  O aluno toma subconjuntos idênticos como distintos e vice-versa;

- Erros nos agrupamentos formados a partir das partições:

  O aluno constrói agrupamentos que, ao serem reunidos, não contém todos os elementos do conjunto total. Ou ainda, o aluno se esquece de alguns tipos possíveis de agrupamentos.

Esses erros observados pela pesquisadora não se distribuíram aleatoriamente.

Dentre o grupo que não recebeu instrução prévia, o maior tipo de erro cometido foi o de enumeração não sistemática, ou seja, os alunos sentiram dificuldade em resolver alguns problemas por não possuir ferramentas para enumeração sistemática (como o raciocínio recursivo, por exemplo). Já entre os alunos que detinham instrução sobre Análise Combinatória, os principais erros foram os de ordem e de repetição, bem como aqueles de utilização incorreta da fórmula e interpretação incorreta do diagrama de árvore.

Os erros de ordem estavam mais ligados às combinações, embora tenham eventualmente aparecido em problemas de arranjos. Aqueles outros de repetição e de tipo de objetos estavam mais associados aos arranjos e permutações, ambos com repetição. Houve, também, uma incidência maior de erros nos problemas que envolviam arranjos com repetição, no qual o parâmetro m (número total de elementos no conjunto) era menor que o parâmetro n, além de ser o modelo combinatório de partição ou distribuição.

As variáveis de tarefa usadas para a construção do questionário se mostraram fundamentais para uma avaliação satisfatória do raciocínio combinatório dos alunos pesquisados, levando em conta as dificuldades e facilidades que emergiram. Assim, como os pesquisadores, entendemos que tais variáveis devem ser consideradas caso queiramos ter uma ideia clara das capacidades e compreensões dos alunos do ponto de vista da combinatória, e defendemos seu uso na organização didática dos problemas de contagem, valorizando, deste modo, outras maneiras de se pensar e resolver estes problemas, que não aquelas unicamente calcadas em algoritmos e definições da Análise Combinatória.

2.5.2 A pesquisa de Roa (2000)

A investigação de Roa (2000) esteve centrada, por sua vez, na caracterização das estratégias e dificuldades dos estudantes com preparação matemática avançada em resolver problemas combinatórios.

Num primeiro momento ele fez uso dos mesmos trezes problemas da pesquisa de Navarro-Pelayo (1994) numa amostra composta de 27 alunos e, aqui, seu trabalho se restringe ao estudo dos índices de dificuldade de cada problema e na comparação com os resultados obtidos pela primeira pesquisadora.

Em seguida, após uma revisão dos treze problemas usados com os 27 alunos e sua consequente adequação, com a exclusão de duas questões com menores índices de dificuldade e a inclusão de dois problemas combinatórios compostos[18], houve uma

[18] Problemas combinatórios compostos são aqueles que envolvem mais de uma operação combinatória em sua resolução. No caso dos problemas de ROA (2000), foram usados aqueles que continham duas operações.

nova aplicação numa amostra constituída de 29 alunos. Visto, então, que o novo conjunto de problemas estava de acordo com os objetivos delimitados para seu trabalho, o pesquisador decidiu usá-lo até o final de seu estudo. Foram consideradas nestes problemas as seguintes variáveis de tarefas:

- Número de operações combinatórias, considerando problemas combinatórios simples e problemas combinatórios compostos;
- Tipos de operações combinatórias: arranjo e permutação simples e com repetição e combinações;
- Esquema combinatório equivalente ao modelo combinatório implícito descrito nos trabalho de Navarro-Pelayo et. al. (1996);
- Natureza dos elementos que formam as configurações combinatórias, considerados como objetos, pessoas, números ou letras;
- Tamanho da solução. O conjunto de problemas tinha por solução números de configurações, resultado de sua continuação, que poderiam ser pequenos ou grandes. Quando o número de resultados era pequeno dava margem ao uso de tentativa e erro como estratégia de resolução em detrimento ao uso do raciocínio recursivo, preferido no caso de soluções com grande número de configurações.

Diante dos resultados obtidos nessa primeira fase e a partir de pressupostos teóricos[19], o autor seguiu descrevendo os possíveis raciocínios requeridos para a resolução desse conjunto de problemas. Isso porque, num primeiro instante, eles pareciam não precisar de conhecimentos matemáticos aprofundados para seu enfrentamento. Depois, porém, quando aplicadas a estudantes de diferentes níveis de aprendizado, tais dificuldades foram se revelando (Roa, 2000). O pesquisador

[19] GODINO, J. D. Un modelo semiótico para el análisis de la actividad y la instrucción matemática. **VIII Congreso Internacional de la Asociación Española de Semiótica**. Granada.1998.
GODINO, J. D. y RECIO, A. M. A semiotic model for analysing the relationship between thought, language and context in mathematics education. En A. Olivier y K. Newstead (Eds.), **Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for he Psychology of Mathematics Education** (v. 3, pp. 1-8). University of Stellenbosch, South Africa.1998
GODINO, J. D. y BATANERO, C. Funciones semióticas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En I. Vale y J. Portela (Ed.), **Actas do IX Seminário de Investigação em Educação Matemática** (pp. 25-46). Guimarães: Associação de Professores de Matemática. 1999

argumenta que:

> Uma possível explicação é que a resolução destes problemas exige o conhecimento de uma série de elementos, não apenas conceituais, mas de técnicas e habilidades, de uso apropriado de notação [...], de capacidade de argumentação e de aplicação em relação a determinados problemas e outros derivados. (ROA, 2000, p.44)

Para a descrição do raciocínio requerido Roa (ibid) considerou as situações em que o aluno recordava dos conceitos combinatórios, ou seja, lembrava-se do que era arranjo, permutação, combinação e de suas respectivas fórmulas, e aquelas em que o aluno não se recordava desses conceitos. Tanto para um quanto para outro caso foram pontuados os conhecimentos em si e os tipos de conhecimentos postos em jogo em cada problema.

Numa próxima fase, Roa (2000) reformulou seus pressupostos iniciais e estabeleceu hipóteses a serem estudadas nas fases seguintes:

Hipótese 1 – Os problemas combinatórios simples apresentam um grau de dificuldade considerável para alunos com preparação matemática avançada;

Hipótese 2 – O esquema combinatório implícito no enunciado dos problemas combinatórios simples não tem um efeito significativo sobre a dificuldade dos problemas para alunos universitários;

Hipótese 3 – A operação combinatória que proporciona a solução do problema tem um efeito significativo sobre as dificuldades dos problemas combinatórios simples para os alunos universitários;

Hipótese 4 – O tamanho da solução tem um efeito significativo sobre a dificuldade dos problemas combinatórios simples para os alunos universitários;

Hipótese 5 – São poucos os alunos que usam estratégias básicas de resolução de problemas combinatórios, tais como traduzir o problema para outro equivalente, dividir o problema em partes ou fixar uma variável;

Hipótese 6 – Uma parte dos alunos da amostra não possui capacidade de enumeração sistemática ou então não são capazes de generalizar corretamente uma *enumeração sistemática do tipo parcial.*

Na penúltima etapa, de cunho quantitativo, o pesquisador aplicou o segundo questionário a uma amostra de 91 alunos, fazendo um confronto entre as hipóteses e as estimações formais do efeito das diferentes variáveis de tarefa sobre a dificuldade dos problemas combinatórios.

Finalmente, Roa (2000) fez um estudo qualitativo dos protocolos de quatro alunos por meio de seus registros na resolução dos problemas e de entrevistas.

Dentre os resultados parciais observados por Roa (2000), destacamos que cerca de metade dos problemas propostos foram resolvidos corretamente pelos alunos da terceira mostra (a de 91 alunos).

Além disso, comprovou-se estatisticamente que os esquemas combinatórios implícitos não têm um efeito sobre a dificuldade dos problemas combinatórios simples, porém, partindo de uma análise qualitativa, verificou-se que a maioria dos erros de interpretação do enunciado se deu nos problemas de partição. Observou-se, também, que as “traduções” que eram feitas pelos alunos visando à simplificação da resolução das situações eram praticamente elaboradas em esquemas de seleção.

2.6 Outras pesquisas

Outras investigações inspiradas nos trabalhos do Grupo de Pesquisa da Prof. Dr. Carmén Batanero procuraram estudar o raciocínio combinatório em estudantes da Educação Básica considerando, ora parcialmente, ora na plenitude, as variáveis de tarefas que foram elencadas nos trabalhos do citado grupo de pesquisa.

Correia e Fernandes (2007) estudaram o potencial das estratégias intuitivas em alunos do 9º. Ano de uma escola secundária do 3º. Ciclo, localizada em uma cidade do distrito de Braga (Portugal), com idade variando entre 13 e 17 anos. Para esse estudo foram organizados testes individuais em que foram observadas as estratégias utilizadas na resolução dos problemas e os fatores que influenciaram o desempenho dos alunos nos testes propostos.

Essa pesquisa diagnosticou as estratégias utilizadas pelos alunos: a enumeração (sistemática), seguida do diagrama de árvores, do uso das fórmulas e de operações numéricas (princípio aditivo e multiplicativo). Também foi observado que um número considerável de respostas articulou duas estratégias concretamente, a saber: diagrama de árvores e operações, e enumeração e operações. No tocante aos fatores que influenciaram o desempenho dos alunos, os pesquisadores destacaram o tipo de operação combinatória, o número de elementos envolvidos e o desempenho dos alunos em Matemática.

Os estudos confirmaram as pesquisas do grupo espanhol em que o aumento do número de elementos envolvidos nos problemas oferece maior dificuldade ao uso de estratégias intuitivas. Os autores citam Fischbein, Pamput e Minzat (1970), Silva Fernandes e Soares (2004) que em suas pesquisam já tinham chegado a essa conclusão.

Quanto ao tipo de operação combinatória, os pesquisadores destacam que:

> A estratégia “operação” numérica, fundamentalmente do tipo multiplicativo, mostrou-se mais eficaz quando a resposta correta resultava de uma operação binária, envolvendo dois operando como acontecia em várias questões de arranjos simples e com repetição. No caso das permutações, esta estratégia foi menos usada e nas combinações simples conduziu sempre a uma resposta erra. (CORREIA E FERNANDES, 2007, p. 1266)

Os autores consideram que, devido ao sucesso obtido, os estudos envolvendo as operações combinatórias devam se iniciar com os arranjos com repetição, seguidos dos arranjos simples, permutações e, por último, das combinações, assim como sugeriram Fischbein, Pamput e Minzat (1970).

Outro estudo, usando agora os Modelos Combinatórios Implícitos, foi realizado por Rudat (2007). Nele, procurou-se investigar os efeitos relacionados à semântica dos enunciados sobre os procedimentos e os processos de resolução de problemas de contagem de alunos que cursavam o “4$^{\text{ème}}$” de uma escola francesa (equivalente ao 9º. ano do Ensino Fundamental II, aqui no Brasil). Mais especificamente, a pesquisadora se preocupou em estudar se os enunciados dos problemas de contagem podem trazer consigo elementos facilitadores ou não para sua resolução e, consequentemente, para o desenvolvimento do raciocínio combinatório.

A amostra era constituída de 319 alunos do “4^{éme}”, com idades entre 13 e 14 anos de diferentes colégios de Paris, arredores da metrópole e da região de Montpellier, que não tiveram instrução sobre procedimentos de contagem combinatória, ou seja, as fórmulas lhes eram desconhecidas, uma vez que esse conteúdo é trabalhado no final do segundo ciclo do ensino secundário francês.

Rudat (2007) se baseou, em seus estudos sobre a semântica dos enunciados, nas respostas dadas as situações propostas. Essas situações foram organizadas a partir dos Modelos Combinatórios Implícitos de Dubois (1984). A pesquisadora observa que dois elementos devem ser considerados num problema combinatório: por um lado a interpretação do aluno baseada no conjunto de significações que possui frente a um contexto material e social; por outro, as relações lógico-matemáticas que organizam a disposição desse contexto. E conclui:

> A adequação e consistência da resposta estão fortemente relacionadas à qualidade da relação da representação que o aluno estabelece com a realidade (Rudat, 2007, p.245-246, *tradução nossa*)[20]

2.7 Delimitação do problema

Nos trabalhos que acabamos de elencar a respeito do ensino e da aprendizagem de Análise Combinatória, constatamos que existem ideias que, por assim dizer, permeiam todos eles:

- a observação sistemática dos erros cometidos pelos alunos, como fonte para avaliação do raciocínio combinatório;
- o interesse por uma abordagem alternativa dos problemas de contagem, desde as séries iniciais até o ensino superior, em que o uso de fórmulas não é o foco principal;
- o uso de estratégias baseadas no princípio multiplicativo e em representações semióticas como diagramas de árvores e tabelas;

[20] La pertinence et la cohérence de la réponse sont donc fortement liées à la qualité de la relation que la représentation de l.élève établit avec la réalité.

- a preocupação em se propor situações propícias à mobilização de estratégias diversas de resolução, com vistas à formação e avaliação do raciocínio combinatório.

Nossa pesquisa se aproxima destes dois últimos itens por considerar que a valorização do princípio multiplicativo e o emprego das variáveis de tarefa utilizadas Navarro-Pelayo (1996) e outros pesquisadores são elementos importantes na organização de situações envolvendo contagem. Assumindo essa posição nos propusemos a investigar as situações e – mais especificamente – os problemas de contagem são abordados nas diferentes séries da educação básica.

Escolhemos, para tanto, os problemas propostos no Caderno do Aluno do 2º. ano do Ensino Médio da Rede Estadual Paulista de Educação. O assunto Análise Combinatória é estudado no 3º. bimestre conjuntamente com as Probabilidades. Nosso olhar sobre esse material visa responder às seguintes questões:

.a) **Quais os tipos de problemas de combinatória que são abordados na Proposta Curricular Paulista?**

b) **Os problemas contemplam as variáveis citadas por Batanero, Navarro-Pelayo e outros em suas pesquisas?**

No intuito de responder a essa questão, procuramos analisar a situação que consta do material selecionado, usando, para isso, a metodologia da Análise de Conteúdo sob a lente da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1991).

Nos próximos capítulos serão apresentados os procedimentos metodológicos e o referencial teórico sobre o qual nos apoiamos nessa pesquisa.

Capítulo 3

3. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo apresentamos a metodologia de pesquisa e os procedimentos metodológicos utilizados na análise de material didático. A escolha da metodologia foi efetivada pelo tipo de pesquisa, na qual investigamos os Cadernos do Aluno da Rede Pública Estadual Paulista, especificadamente, aquele Caderno empregado no terceiro bimestre do segundo ano do Ensino Médio e que contempla o estudo de Problemas de Contagem. Portanto, trata-se de pesquisa qualitativa apoiada na metodologia da análise de conteúdo.

3.1 A ANÁLISE DE CONTEÚDO

Na busca por uma metodologia que pudesse atender às necessidades de investigação de elementos que, embora presentes no texto, não se revelam total e explicitamente, encontramos na *análise de conteúdo* um caminho seguro para esse fim.

De acordo com Oliveira et al. (2003, p.6), a análise de conteúdo desempenha papel importante por ajudar o educador a "retirar do texto escrito seu conteúdo manifesto e latente". Esse texto escrito pode ser a transcrição de entrevistas, questionários, livros, textos literário, documentos oficiais, artigos de jornais, entre outros.

Bardin (1977, p. 42) resume assim essa metodologia:

> Um conjunto de técnicas de análise das comunicações visando obter, por procedimentos, sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens, indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção (variáveis inferidas) destas mensagens.

Segundo Oliveira et al. (2003), a finalidade da análise de conteúdo está na explicação e sistematização do conteúdo de uma mensagem e de seu significado, a partir de técnicas parciais e complementares entre si. Para tanto, têm-se como parâmetros sua origem (o emissor), o contexto ou os efeitos da mensagem.

De acordo com Bardin (1977), esta metodologia contempla três fases separadas entre si cronologicamente:

- a pré-análise;
- a exploração do material;
- o tratamento dos resultados, a inferência e a interpretação.

3.1.1 A Pré-Análise

Esta fase se inicia com a escolha e organização dos materiais ou documentos que constituirão o *corpus* a ser analisado.

Bardin (1977) propõe, para esse fim, o que chama de "leitura flutuante", ou seja, uma primeira leitura do material visando à formulação de hipóteses e questões que servirão de norte para sua análise e interpretação.

Uma vez escolhidos e organizados os materiais, faz-se necessária a constituição propriamente dita do *corpus*, ou seja, do "conjunto de documentos tidos em conta para serem submetidos aos procedimentos analíticos" (Bardin, 1977, p.96). Essa constituição obedece a algumas regras:

I. *Exaustividade*: contemplam-se todos os elementos sem desconsiderar nenhum, salvo aqueles casos justificáveis pelo rigor metodológico.

II. *Representatividade*: caso a análise se dê por meio de uma amostra, esta deve ser representativa, ou seja, deve possuir as características imprescindíveis do universo a que se refere.

III. *Homogeneidade*: a escolha dos documentos deve obedecer aos mesmos critérios de escolha, sem que haja peculiaridades próprias de cada um deles em demasia.

IV. *Pertinência*: os documentos devem estar em consonância com os objetivos traçados da análise.

Segue-se então a formulação de hipóteses e a determinação dos objetivos da análise que se pretende fazer. Bardin (1977, p.98) faz a seguinte distinção entre hipótese e objetivo:

> Uma hipótese é uma afirmação provisória que nos propomos a verificar (confirmar ou infirmar), recorrendo aos procedimentos de análise. Trata-se de uma suposição cuja origem é a intuição e que permanece em suspenso enquanto não for submetida à prova de dados segundos. O objetivo é a finalidade geral a que nos propomos (ou que é fornecida por uma instância exterior), o quadro teórico e/ou pragmático, no qual os resultados obtidos serão analisados.

Segundo a autora, nem sempre há necessidade de um "corpus de hipótese" para que a análise seja feita, pois é possível fazê-la sem que para isso haja uma ideia pré-concebida.

A pré-análise se encerra com a referenciação dos índices e elaboração de indicadores, bem como, com a preparação do material a ser analisado.

3.1.2 A Exploração do Material

Esta é uma fase que demanda tempo e por isso mesmo é a mais cansativa. Ela "consiste essencialmente de operações de codificação, desconto ou enumeração, em função das regras previamente formuladas" (Bardin, 1977, p.101).

O. R. Holsti[21] citado por Bardin (1977, p.103-104) define a codificação como:

> [...] o processo pelo qual os dados brutos são transformados sistematicamente e agregados em unidades, as quais permitem uma descrição exata das características pertinentes do conteúdo.

Estão envolvidos nessa operação de codificação:

- o recorte do texto tomando por base a(s) unidade(s) de registro escolhidas. Uma palavra, um tema, uma frase podem ser tomadas por unidade de registro.
- a enumeração (seleção de regras de contagem).
- e a classificação e agregação (seleção das categorias).

3.1.3 O Tratamento dos Resultados, a Inferência e a Interpretação.

[21] HOLSTI, O. R. **Content Analysis for the Social Sciences and Humanities**. Adilson-Wesley Publishing Company. 1969.

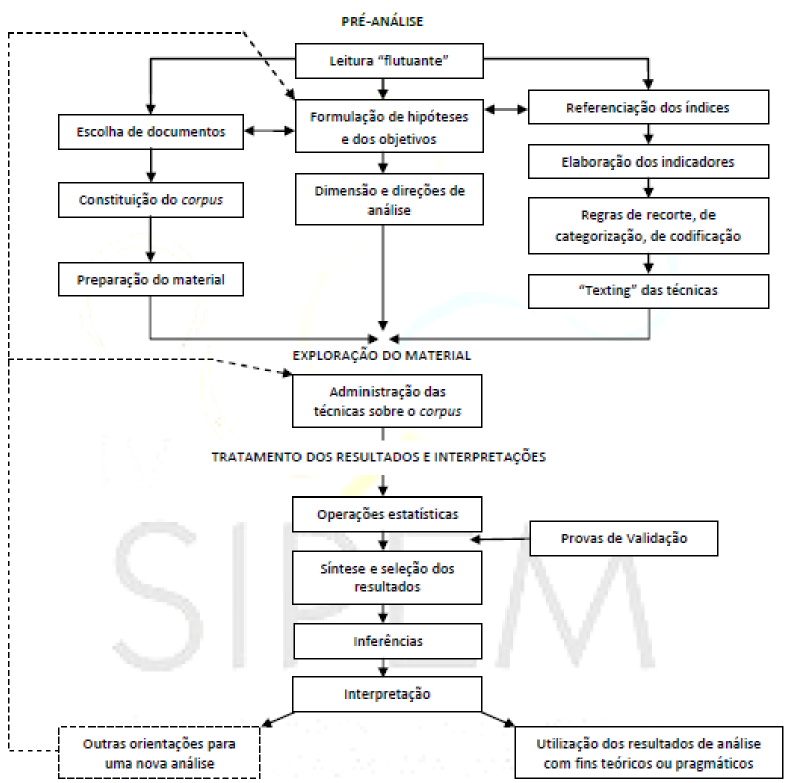
Nesta fase os dados obtidos passam por tratamentos simples ou complexos a fim de se estabelecer quadros comparativos, diagramas, figuras, modelos de modo a evidenciar a informação trazida pela análise.

Sobre esta fase, Bardin (1977, p.101) escreve:

> O analista, tendo a sua disposição resultados significativos e fiéis, pode propor inferências e adiantar interpretações a propósito dos objetivos previstos, ou que digam respeito a outras descobertas inesperadas.

Além disso, o analista, tendo em vista as inferências e interpretações a que chegou, pode sugerir que se façam novos estudos para uma nova análise, a partir de outros pressupostos teóricos.

O esquema abaixo[22] mostra o desenvolvimento da análise segundo Bardin (1977, p. 102):



Quadro 2. Desenvolvimento da análise de conteúdo segundo Bardin

22 RAMOS, R. C S. S. SALVI, R. F.. Análise de Conteúdo e Análise do Discurso em Educação Matemática – um olhar sobre a produção em periódicos Quali A1 e A2. In: IV Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. Anais:... Brasilia. 2009. Disponível em http://www.uel.br/grupo-pesquisa/ifhiecem/arquivos/9GT94689598053.pdf; acesso em 24 de agosto de 2011.

3.2 DESCRIÇÃO DOS DOCUMENTOS

Definida a metodologia, começamos a fazer o levantamento dos documentos que compõem o *corpus* a ser analisado: é a pré-análise.

Nosso alvo eram os Problemas de Contagem que são abordados no Ensino Médio, mais precisamente no 2º ano. Poderíamos ter escolhidos alguns livros didáticos, dentre muitos que trazem esse tipo de problemas. Mas optamos por analisar os da Proposta Curricular do Estado de São Paulo, tendo em vista a introdução do Caderno do Aluno e do Professor na Rede Estadual Paulista de Educação, a maior rede de ensino público estadual do país[23].

Passamos à descrição dos documentos alvo da pesquisa. São eles: a Proposta Curricular do Estado de São Paulo, inserida na rede estadual de ensino em 2008; a Proposta da área de Matemática – e nela, a Análise Combinatória – no que tange ao ensino e à aprendizagem de acordo com os pressupostos estabelecidos; o caderno do aluno do 2º ano do Ensino Médio.

3.2.1 A (Nova) Proposta Curricular do Estado de São Paulo

A Proposta Curricular do Estado de São Paulo, que chamaremos de Nova Proposta, foi implantada na Rede Estadual Paulista de Educação no início do ano de 2008 em substituição à Proposta Curricular em vigor desde 1986. Ela tem por objetivo maior oferecer uma educação que atenda às necessidades e soluções dos desafios contemporâneos. Na sua apresentação, é ressaltada a importância da qualidade de

[23] Segundo o IBGE, em 2009, o Estado de São Paulo apresentava pouco mais 6 milhões de matrículas no Ensino Fundamental e por volta de 1,7 milhões de matrículas no Ensino Médio. Do total de matriculados no Ensino Fundamental do Estado de São Paulo, 44,9% pertenciam à rede pública estadual. Esse número sobe para 84,9%, quando observamos os dados relativos ao Ensino Médio. Fonte: http://www.ibge.com.br/estadosat/temas.php?sigla=sp&tema=educacao2009, acesso em 24 de agosto de 2011.

ensino como diferencial para a inserção do cidadão num mundo produtivo e solidário, bem como fazer da escola um lugar privilegiado para que o aluno possa realizar o trânsito para a vida adulta e profissional (SÃO PAULO, 2008a, p.5).

Além disso, a Nova Proposta ressalta que:

> Outro elemento relevante hoje para pensarmos o conteúdo e o sentido da escola é a complexidade da ambiência cultural, das dimensões sociais, econômicas e políticas, a presença maciça de produtos científicos e tecnológicos e a multiplicidade de códigos no cotidiano. Apropriar-se ou não desses conhecimentos pode ser um instrumento da ampliação das liberdades ou mais um fator de exclusão. (SÃO PAULO, 2008a, p.6)

Desse modo, a Nova Proposta elenca como elementos centrais, tidos como princípios norteadores:

- a escola que aprende;
- o currículo como espaço de cultura;
- as competências como eixo de aprendizagem;
- a prioridade da competência de leitura e escrita;
- a articulação das competências para aprender;
- a contextualização no mundo do trabalho.

Com o início do ano letivo em fevereiro de 2008, houve um período de *recuperação inicial*, de modo que os alunos pudessem "consolidar habilidades de leitura, produção de texto, habilidades instrumentais de matemática, para que o aluno pudesse dar continuidade aos estudos" (Oddi, 2009, p.56). Para isso, foram distribuídos exemplares do Jornal "São Paulo faz escola" a alunos e professores e que trazia consigo atividades dos componentes curriculares do Ensino Fundamental II e do Ensino Médio comuns a todas a escolas da rede estadual.

Terminado esse período, foram distribuídos os "Cadernos de Atividades" do aluno e do professor, juntamente com a revista "São Paulo faz escola", esta última destinada exclusivamente ao professor. Esses "Cadernos de Atividades" continuaram a ser distribuídos nos anos de 2009, 2010 e 2011, e, como o próprio nome sugere, traz consigo atividades a serem desenvolvidas em sala de aula e em casa pelos alunos. O caderno destinado ao professor vem com orientações pedagógicas e sugestões de como abordar os temas e conteúdos a serem “ensinados”, bem como, procedimentos de avaliação e recuperação. Esse material é entregue a professores e alunos bimestralmente.

3.2.2 A Nova Proposta e o Ensino de Matemática

A Nova Proposta Curricular, assim como a proposta curricular anterior a ela, mantém a Matemática como uma área específica do conhecimento, diferentemente do que faz os PCN, que aproximou a Matemática da área de Ciências Naturais. Para balizar essa escolha são apresentados três argumentos:

- A inclusão à área de Linguagem e Códigos e suas Tecnologias (Língua Portuguesa, Língua Estrangeira Moderna, Arte e Educação Física) poderia descaracterizar a precisão de linguagem inerente a ela.
- A inclusão à área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias (Ciências, Física, Química e Biologia) poderia distorcer o fato de que a Matemática, mesmo sendo uma linguagem instrumental para essa área, possui conhecimentos específicos que não podem ser deixadas de lado.
- A constituição de uma área específica para a Matemática facilita a “incorporação crítica dos inúmeros recursos tecnológicos de que dispomos para a representação de dados e o tratamento das informações, na busca da transformação da informação em conhecimento” (SÃO PAULO, 2008b, p.39).

A proposta curricular de Matemática, assim como as demais disciplinas, tem por objetivo maior o desenvolvimento das competências pessoais dos alunos elencados a partir de três pares de eixos complementares: o eixo expressão/compreensão, o eixo argumentação/decisão e o eixo contextualização/abstração.

Especificamente a Matemática, segundo a Nova Proposta, assume papel de destaque em cada um desses eixos: primeiramente ela é tida como instrumento de expressão e de compreensão da realidade que nos cerca a partir dos objetos que lhe são próprios – números, formas, relações, gráficos, etc; em segundo lugar, a Matemática é vista como instrumento de desenvolvimento do pensamento lógico-formal e da análise racional visando ao poder de síntese e à tomada de decisões; finalmente, ela é admitida uma instância privilegiada para a distinção e articulação entre abstrações e a realidade concreta, embora os objetos matemáticos sejam considerados especialmente abstratos (SÃO PAULO, 2008b, p.43).

A Nova Proposta apresenta, então, a área de Matemática como um "conjunto simbólico" em constante articulação e diálogo com as diferentes linguagens e representações da realidade e reitera sua importância no desenvolvimento das competências básicas exigidas ao cidadão de hoje.

Os conteúdos que são abordados em Matemática ao longo dos Ensinos Fundamental e Médio estão divididos em quatro grandes blocos temáticos: números, geometria, grandezas e medidas, e tratamento de informações. A Análise Combinatória, objeto matemático contemplado nessa pesquisa, encontra-se no bloco temático *Tratamento de Informações*. Esse bloco é visto como um espaço privilegiado para o desenvolvimento das competências ligadas ao eixo argumentação/decisão e que vai além da simples coleta, organização e análise de dados, que figuram geralmente no Ensino Fundamental.

> Numa perspectiva curricular que se estenda ao Ensino Médio, podem compor esse eixo o estudo das matrizes, amplamente usado na programação de computadores, o planejamento de uma pesquisa estatística que utilize técnicas de elaboração de questionários e amostragem, a investigação de temas de estatística descritiva e de inferência estatística, *o estudo de estratégias de contagem* e do cálculo de probabilidade, etc. (SÃO PAULO, 2008b, p.47, *grifo nosso*).

A Proposta Curricular distribui os conteúdos de Matemática de modo parecido ao que é feito em outros sistemas de ensino e, em razão das peculiaridades dos diversos contextos escolares da rede estadual de educação, orienta que os professores desenvolvam seu trabalho de modo a atender satisfatoriamente às necessidades de seus discentes. Em outras palavras, o professor tem autonomia para decidir sobre o grau de profundidade, o desenvolvimento e qual o tempo necessário para a abordagem de determinado conteúdo. Ela destaca, para tanto, o planejamento como momento ideal para que essas ações sejam traçadas.

3.2.3 O Caderno do Professor

Bimestralmente os professores das diferentes matrizes curriculares recebem o Caderno do Professor com as orientações didáticas para o desenvolvimento de cada assunto a partir das chamadas Situações de Aprendizagem – conjunto de situações-problema propostas no Caderno do Aluno.

Para cada assunto, os autores[24] responsáveis pelo material de Matemática levantam algumas questões sobre o seu ensino, seu aprendizado e traçam um roteiro – orientações didático-pedagógicas – para a aplicação das Situações de Aprendizagem que abordam esse assunto. Juntamente com o roteiro há um quadro onde figuram o tempo previsto, os conteúdos e temas, as competências e habilidades, e as estratégias usadas.

Ao final de cada Situação de Aprendizagem são expostas algumas considerações sobre a avaliação bem como, orientações sobre recuperação e uma seção intitulada “Recursos para ampliar a perspectiva do professor e do aluno para a compreensão do tema”.

3.2.4 O Caderno do Aluno

No Caderno do Aluno cada Situação de Aprendizagem é iniciada com a seção “Você Aprendeu?” cujo título sugere uma retomada de conceitos estudados anteriormente. Esta seção é composta por Atividades numeradas de acordo com a ordem em que vão sendo propostas (Atividade 1, Atividade 2, etc) e delas fazem parte leituras de textos, problemas, jogos.

Constam também nesse Caderno uma seção intitulada “Lição de Casa”, com

[24] São autores do material para a área de Matemática da Nova Proposta os professores: Nilson José Machado, Carlos Eduardo de Souza Campos Granja, José Luiz Pastore Mello, Roberto Péricles Moisés, Rogério Ferreira da Fonseca, Ruy César Pietropaolo e Walter Spinelli.

problemas propostos para essa finalidade; e um espaço final chamado “O que aprendi...”, onde o aluno deve registrar aquilo que foi apreendido na Situação de Aprendizagem aplicada (estudada).

3.2.5 A Análise Combinatória na Proposta de Matemática

A Análise Combinatória e também as Probabilidades são os temas do terceiro bimestre do segundo ano do Ensino Médio, segundo a Proposta Curricular Paulista. Nesse bimestre são quatro as Situações de Aprendizagem consideradas e que são abordadas nessa ordem:

1. Situação de Aprendizagem 1. *Probabilidade e Proporcionalidade: no início era jogo...*
2. Situação de Aprendizagem 2. *Análise Combinatória: raciocínios aditivo e multiplicativo*
3. Situação de Aprendizagem 3. *Probabilidade e Raciocínio Combinatório*
4. Situação de Aprendizagem 4. *Probabilidade e Raciocínio Combinatório: O Binômio de Newton e o Triângulo de Pascal.*

A opção didática em se iniciar pelo cálculo de Probabilidades é assumida pelos autores com base na seguinte hipótese:

> O raciocínio combinatório e o cálculo de probabilidades são conceitos apresentados aos alunos desde as séries iniciais do segundo ciclo do Ensino Fundamental, etapa em que tais conceitos não costumam gerar qualquer dificuldade além das habituais para esse segmento de ensino. Dessa maneira, trata-se agora, no Ensino Médio, de partir dos conhecimentos e das habilidades anteriormente construídos e promover os aprofundamentos necessários. (SÃO PAULO, 2009a, p. 9)

Deste modo, o trabalho inicial do cálculo de Probabilidades é feito com situações que não exigem, do aluno, um raciocínio combinatório, num primeiro momento.

> Cremos, portanto, que os alunos trazem na 2ª. série do Ensino Médio o terreno preparado para o estudo formalizado das probabilidades, desde que os casos a eles apresentados não envolvam, inicialmente, raciocínio combinatório. (SÃO PAULO, 2009a, p. 10)

Os autores admitem que a Análise Combinatória seja o tipo de conteúdo matemático que costuma gerar desconforto para alunos e professores, embora com problemas que, na sua maioria, envolvem somente “as quatro operações com números naturais e de uma das principais ideias da fração: a de comparação entre parte e todo” (SÃO PAULO, 2009a, p.9). A culpa, segundo eles, é atribuída ao tratamento que é dado tradicionalmente a esse tema com a classificação dos problemas em grupos – arranjos, permutações e combinações – e consequente aplicação de fórmulas por entenderem que isso “dificulta o enfrentamento de *situações-problema reais*, com contextos e dificuldades inéditas” (SÃO PAULO, 2009a, p. 9, grifo nosso).

Para a resolução dos problemas propostos no Caderno do Aluno, os autores dão grande enfoque às representações das estratégias de resolução baseadas em desenhos, diagrama, tabelas, sobretudo na chamada **árvore de possibilidades (ou diagrama de árvores)** e sugerem que os professores explorem bastante esse recurso nas aulas.

Como cada problema de Análise Combinatória, ressaltam os autores, tem caráter muito peculiar, a tentativa de associá-los a problemas análogos já resolvidos anteriormente se mostra praticamente sem efeito, visto que:

> [...] a diversidade de critérios de agrupamento é tão grande que muitas vezes é impossível associar uma situação-problema atual a alguma categoria anteriormente construída. (SÃO PAULO, 2009a, p. 24)

Apesar de o tema “Análise Combinatória” constar de três das quatro Situações de Aprendizagem do material do terceiro bimestre, nossa pesquisa se restringirá em analisar as “Situações de Aprendizagem 2. Análise Combinatória: Raciocínio Aditivo e Multiplicativo”, uma vez que as demais a apresentam conjuntamente com Probabilidades.

Neste capítulo vamos analisar as questões selecionadas das ***Situações de Aprendizagem 2 “Análise Combinatória: Raciocínios Aditivo e Multiplicativo”***.

No Caderno do Professor, ao iniciar cada Situação de Aprendizagem, há um *quadro resumo* com o tempo previsto para o desenvolvimento da atividade, conteúdos e temas envolvidos, as competências e habilidades envolvidas e as estratégias sugeridas. Para a **Situação de Aprendizagem 2** temos:

Tempos previsto: 3 semanas **Conteúdos e temas:** casos de agrupamento. **Competências e habilidades:** identificar em diferentes agrupamentos a necessidade ou não da ordenação entre seus elementos; interpretar informações fornecidas por intermédio de diferentes linguagens, com o objetivo de calcular e associar um valor de probabilidade a uma situação-problema. **Estratégias:** resolução de situações-problema exemplares.

A *Atividade 1 – Construindo árvores de possibilidades*, como o próprio nome da atividade sugere, estimula o uso da árvore de possibilidade ou diagrama de árvores como estratégia de resolução dos problemas de contagem, principalmente naqueles em que os alunos sentirem maiores dificuldades (São Paulo, 2009a, p. 24).

Assim sendo, são apresentados problemas que envolvem o princípio multiplicativo a partir de uma primeira situação-problema, situação essa já resolvida por meio de multiplicação e do uso do diagrama de árvores.

Na *Atividade 2 – Formação de filas sem e com elementos repetidos*, o que está em jogo são os agrupamentos ordenados. Os problemas propostos têm por objetivo reforçar a mobilização do raciocínio multiplicativo e apresentar o número fatorial (n!) que deve ser apresentado após algumas situações que trabalham com os anagramas.

Finalmente a *Atividade 3 – Formação de grupos com elementos de uma ou mais categorias* tem por objetivo mostrar situações em que a troca da ordem dos elementos não gera agrupamentos distintos.

Estudando o caso do cálculo da quantidade de ordenações diferentes em uma fila com a introdução do fatorial do fatorial, trataremos agora de analisar o caso da formação dos grupos não ordenáveis, partindo do cálculo de

> quantidade de grupos ordenáveis. (SÃO PAULO, 2009a, p.28)

3.3 Considerações sobre a pré-análise, hipóteses e objetivos

Tomando as orientações presentes no *quadro resumo* da **Situação de Aprendizagem 2** gostaríamos de salientar dois aspectos que nos chamaram atenção. Primeiramente, os casos de agrupamento foram pontuados como conteúdos. Como competências e habilidades, estabeleceu-se a identificação de agrupamentos distintos a partir da ordem para seu consequente uso em situações-problema de probabilidades. Isto nos leva a pensar que a preocupação com o desenvolvimento de técnicas de contagem, ao que parece, está limitada a sua aplicação em problemas de probabilidades e que serão abordados na Situação de Aprendizagem 3 – Probabilidade e Raciocínio Combinatório.

Outro aspecto que a nós não se mostra muito claro, diz respeito às chamadas "Estratégias". A *resolução de situações-problema exemplares* como estratégia de aula pode dar a impressão de que serão propostos alguns problemas como modelos e os demais serão semelhantes a estes. Este fato vai de encontro ao que orientam seus autores quando reforçam a necessidade de se encarar cada problema como se os alunos os estivessem fazendo pela primeira vez. (São Paulo, 2009a, p.24).

Ainda a respeito disso, Mendonça (2011), ao analisar as situações das Atividades 1, 2 e 3 observou que, apesar da indicação do uso da árvore de possibilidades e de outras estratégias de resolução, o uso de "problemas exemplos" e textos instrutivos traria prejuízo aos alunos por não favorecer a mobilização de estratégias de enumeração, já que para sua resolução bastaria identificar os números no enunciado e efetuar multiplicações com eles.

A pesquisadora entende que "a indicação de como resolver problemas elimina a oportunidade de o aluno explorar a situação e construir seu conhecimento a partir desta". (ibid, p.72).

Compartilhamos com Mendonça (2011) a sua preocupação quanto à construção do conhecimento, partindo de exploração de situações-problema pelos alunos, ao invés de se indicar inicialmente a resolução do problema como numa “receita de bolo”.

No entanto, ponderamos que uma instrução inicial pode ser realizada como meio de mobilizar esquemas cognitivos e tornar mais simples a resolução dos problemas de contagem. Esse nosso ponto de vista encontra apoio nos trabalhos de Fischbein (1975) e de Roa (2000), que mostraram um melhor desempenho dos estudantes que receberam instrução de técnicas combinatórias como o uso do diagrama de árvores. Há ainda que se relevar o fato de que os alunos do 2º Ano do Ensino Médio estão, em geral, na faixa etária dos 15, 16 e 17 anos, idade em que, segundo Piaget e Inhelder (1950), já há maturação cognitiva para consolidação dos esquemas combinatórios.

Nossa análise inicial nos leva a estabelecer como alguns pontos como hipótese:

1. Todos os problemas podem ser resolvidos por meio dos princípios multiplicativo e aditivo.
2. Os problemas propostos trazem situações diversificadas visando pontuar a relevância da ordem e a possibilidade ou não da repetição de elementos em cada agrupamento.

Para validar nossas hipóteses, o objetivo de nossa análise será a identificação dos tipos de Problemas de Contagem que estão presentes no Caderno do Aluno do 2º. ano do Ensino Médio.

Capítulo 4

4 REFERENCIAL TEÓRICO E ELEMENTOS BALISADORES DA PESQUISA

Neste capítulo são apresentados elementos que compõem a Teoria dos Campos Conceituais, que guiarão a análise que pretendemos fazer das situações presentes no Caderno do Aluno do 2º ano do Ensino Médio. Também são apresentadas as variáveis de tarefa levantadas por Navarro-Pelayo (1996) e que estarão presentes também na análise das já citadas situações.

IV.1 Teoria dos Campos Conceituais – Gerard Vergnaud

A teoria cognitivista dos Campos Conceituais do psicólogo francês Gerard Vergnaud constitui uma base para a compreensão das competências e atividades cognitivas complexas e do seu desenvolvimento por meio da experiência e da aprendizagem. Vegnaud (1996) entende por competências e atividades cognitivas complexas aquelas que se desenvolvem na escola e fora dela, em situações que demandam (ou não) conhecimentos formais e elaboração de novos conhecimentos. Deste modo, o autor considera que:

> A sua principal finalidade é fornecer um quadro que permita compreender as filiações e as rupturas entre conhecimentos, nas crianças e nos adolescentes, entendendo por "conhecimentos", tanto o saber fazer como os saberes expressos. (VERNAUD, 1991, p.155)

Essas rupturas e filiações ocorrem de modo natural nas crianças e adolescentes, pois para eles aprendizagem e desenvolvimento cognitivo aparecem conjuntamente. No adulto, porém, sua ocorrência está ligada mais ao confronto entre hábitos e tendências por ele já adquiridas do que propriamente ao desenvolvimento psíquico.

Mesmo não sendo uma teoria especificamente da educação matemática foi a partir do estudo das estruturas aditivas e multiplicativas, das relações número-espaço e da álgebra que ela se deu como teoria. O alcance da Teoria dos Campos Conceituais está para além da Matemática sendo que áreas como a Física e a Biologia a utilizam para estudar aspectos cognitivos ligados a essas respectivas áreas.

4.1.1 Conceitos e esquemas

Vergnaud chama atenção ao fato de que determinado conceito não pode ser apresentado somente por sua definição quando se trata do seu ensino e da sua aprendizagem e afirma que "é por meio das situações e dos problemas a resolver que um conceito adquire sentido para a criança" (VERGNAUD, 1991, p. 156).

Assim as formas de conhecimento – explícitos e implícitos – quando da ação do sujeito em situação, deve assumir papel central no estudo do desenvolvimento cognitivo. Lembramos aqui que Vergnaud (1991) entende por conhecimento tanto o "saber fazer" quanto aqueles "expressos" e que é na ação do sujeito frente a uma dada situação que eles se revelam.

Ao entrar em contato com determinada situação[25], a criança ou o adolescente busca, nos conhecimentos que já detêm, meios de resolvê-los. Às vezes, é bem sucedido; outras, não. Tudo depende de que o sujeito disponha antecipadamente de competências capazes de atender às necessidades da situação. Quando isso não ocorre, procura-se buscar, por outros caminhos, modos de resolvê-la. Exemplos desses caminhos são a exploração, a reflexão, as tentativas e erros, as representações semióticas. Há, então, duas classes de situações: a primeira, onde os sujeitos detêm competências para desenvolvê-las; a segunda; em que tais competências se mostram insuficientes para o manejo da situação.

As competências necessárias para se lidar com uma ou outra classe de situações estão assentadas nos "esquemas" construídos pelo sujeito ao longo do tempo e que, apesar de importantes para ambas desempenham papéis diferentes para cada uma delas. Para o primeiro tipo de situações, as condutas dos sujeitos se mostram organizadas num único esquema e são condutas automatizadas. Já no segundo, em face da novidade que a situação traz, o sujeito lança mão de vários esquemas que

[25] Apesar de usar insistentemente o termo situação, Gerard Vergnaud esclarece que não se trata do mesmo sentido de situação empregado por Guy Brousseau na sua Teoria das Situações Didáticas. Ele o considera a partir daquele dado pelos psicólogos, afirmando que "os processos cognitivos e as respostas do sujeito são funções das situações com as quais eles se confrontam" (Vergnaud, 1991, p.171).

“podem entrar em competição e que [...] devem ser acomodados, descombinados e recombinados” (Vergnaud, 1991, p.156).

Os esquemas são definidos como a “organização invariante da conduta para uma certa classe de situações” (Vergnaud,1991, p.157). Franchi (1999) salienta, porém, que a condição de invariante não está ligada aos entes formais que definem a classe de situações, nem mesmo às ações propriamente ditas, mas àquilo que é invariante no desenvolvimento das ações. Os esquemas comportam um “fazer” quase que inconsciente e automatizado o que lhe dá sua característica de invariante. Vergnaud (ibid) usa como exemplo um atleta que, ao realizar um salto em altura, apresenta um esquema de motricidade que organiza esse movimento e que dirige sua conduta nessa ação.

Também a aprendizagem em Matemática é regida por esquemas que estão intimamente associadas a uma classe restrita de situações, mas que, em razão das necessidades impostas por outras situações, têm seus limites ampliados para mais classes de situações. Essa generalização se dá, segundo Vergnaud (1991), quando o sujeito é capaz de reconhecer a operacionalidade do esquema nas novas situações. Um exemplo disso é a adição de números decimais a partir do algoritmo da adição de números inteiros.

Por outro lado, há situações em que se faz necessário decompor um esquema em outros menores, aplicáveis a sub-situações de modo a recompô-los, visando à resolução da situação maior. Alguns problemas de contagem, por exemplo, são divididos em problemas menores a fim de se tornar mais simples sua resolução.

Fato é que, por mais simples que seja, uma situação envolve mais de um conceito[26] e, do mesmo modo, um conceito não pode ser apreendido à custa de uma única situação. São as situações que darão sentido ao conceito que se pretende construir. Isso justifica o fato de se considerar não um conceito isolado e sim, um campo conceitual.

A Análise Combinatória não escapa desse fato, pois o estudo dos conceitos ligados a esse domínio matemático passa inevitavelmente pelo estudo das situações-

[26] Admitidos por Vergnaud como “um conjunto de invariantes utilizáveis na ação” (Cf. Vergnaud, 1991, p.166).

problema a ela pertencente. Em outras palavras, a construção dos conceitos ligados à Combinatória se dá por meio das ações do sujeito – que na maioria dos casos é o aluno – frente a uma situação dada. Cada situação, por sua vez, mobiliza os conceitos (explícitos ou implícitos), que serão traduzidos nas ações e no conjunto simbólico usados pelo sujeito.

Vergnaud (1991) destaca a importância das ações operatórias na conceitualização sem, contudo, reduzi-la a essas ações. Nesse sentido o autor salienta que um conceito é composto de uma terna (S, I e ξ) assim descrita por Carvalho (1994):

S: conjunto de situações que tornam o conceito significativo. Tais situações, como já fora explanado, não envolvem todas as propriedades de um conceito, motivo pelo qual se entende S por um conjunto de situações e não uma situação única.

I: conjunto de invariantes operatórias subjacentes ao tratamento da situação pelo sujeito. São constituídos dos conceitos e teoremas (ditos em-ação) que pautam a ação do sujeito frente à situação, no reconhecimento das propriedades e na aquisição das informações nela contida para seu tratamento.

ξ: conjunto de representações simbólicas que permitem representar as invariantes, as situações e os procedimentos de tratamento.

Ele observa ainda que a

> [...] vantagem desta abordagem pelas situações é permitir gerar uma classificação que assenta na análise das tarefas cognitivas e dos procedimentos que podem ser postos em jogo em cada um delas. (VEGNAUD, 1991, p. 167).

Em seus estudos, Vergnaud (1991) debruçou-se sobre os dois campos conceituais que servem de base para a construção dos demais conceitos em Matemática: o campo aditivo e o campo multiplicativo.

4.1.2 As Estruturas Aditivas e Multiplicativas

O campo das estruturas aditivas é constituído de situações que envolvem em suas resoluções a operação de adição, subtração ou um misto dessas duas.

Nesse campo, Vergnaud (1991) identificou seis relações, chamadas relações de base, nas quais se pode organizar o conjunto de problemas de aritmética envolvendo adição e subtração.

I. A composição de duas medidas numa terceira;

II. A transformação (quantificada) de uma medida inicial numa medida final;

III. A relação (quantificada) de comparação entre duas medidas;

IV. A composição de duas transformações;

V. A transformação de uma relação;

VI. A composição de duas relações.

Magina & Campos (2004) esclarecem que os problemas de composição são aqueles em que há duas parcelas ou ainda uma variação em que se conhece uma das parcelas e a soma e o que se quer saber é a outra parcela. Os problemas de transformação envolvem situações em que se tem um estado inicial e, por meio de uma transformação, seja ela positiva ou negativa, chega-se a um estado final. Nos problemas de comparação, estabelece-se uma relação estática entre duas quantidades em que se procura saber o quanto um tem a mais (ou a menos) que o outro.

Os problemas a seguir exemplificam essa classificação e foram extraídos de Magina & Campos (2004):

Problema de composição

"Há 4 meninos e 7 meninas em volta de uma mesa. Quantas crianças são ao todo?"

Problema de transformação[27]

"Roberto jogou duas partidas de bola de gude. Na primeira ele perdeu 4 bolas de gude. Ele jogou a segunda partida, mas não se lembra do que aconteceu nela. No final das duas partidas, ele contou e viu

[27] Sobre esse problema, especificamente, Magina & Campos (2004) observa que se trata de um problema de composição de transformações, em que não se conhece nem o estado inicial e nem o estado final, e ressalta que a maioria das crianças em idade de 11 anos não é capaz de resolver este tipo de problema.

que tinha ganhado 7 bolas de gude. O que aconteceu na segunda partida?”.

Problema de comparação

“Carlos tem 9 reais e Luiz tem 6 reais a mais que Carlos. Quantos reais tem Luiz?”

Segundo Vergnaud (1991), essa classificação é resultado de considerações advindas da psicologia e da matemática, quando se observa que as dificuldades enfrentadas na resolução de problemas em que figuram a mesma operação matemática são muito desiguais. Isso porque esses problemas têm estruturas diferentes. Além disso, ele observa que as diferentes classes de problemas, bem como os procedimentos utilizados e simbolizações matemáticas, vão se modificando com o desenvolvimento psíquico da criança.

O campo multiplicativo envolve situações resolvidas pelas operações de multiplicação e divisão. Vergnaud (1991) enfatiza a diferença entre as estruturas aditivas e multiplicativas, destacando o fato de que, nessa última, as relações de base são quaternárias por envolverem uma proporção. São três as classes de problemas das estruturas multiplicativas:

I. Isomorfismo de medidas;

II. Produto de medidas;

III. Proporções múltiplas.

Guimarães (2004) expõe que o isomorfismo de medidas e o produto de medidas diferem entre si no grau de complexidade dos seus problemas.

A seguir, ilustramos essas situações com os problemas constantes em Guimarães (2004, p,39) baseados nos trabalho de Vergnaud.

Isomorfismo de medidas

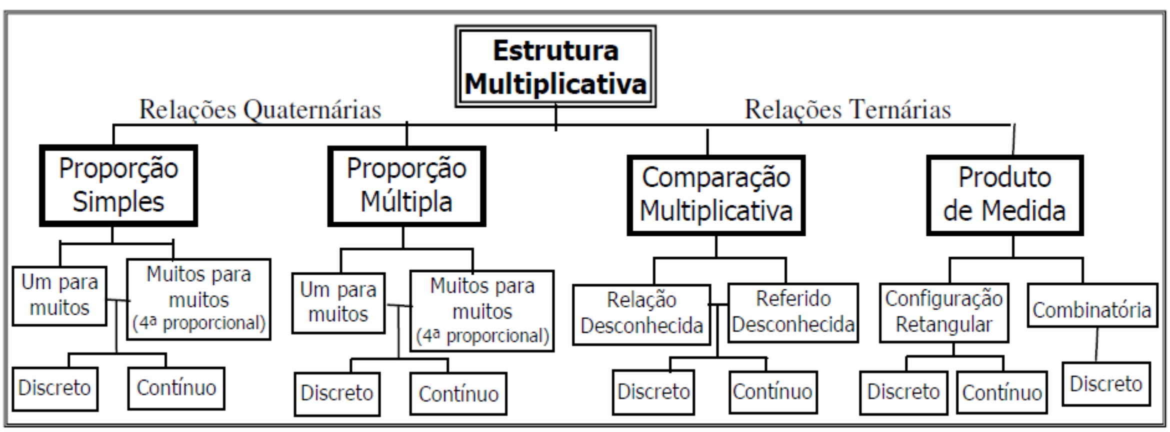
Tenho 3 bandejas de iogurte. Há 4 iogurtes em cada bandeja. Quantos iogurtes tenho?

Produto de Medidas

3 meninos e 4 meninas querem dançar. Cada menino quer dançar com cada menina e cada menina com cada menino. Quantos pares serão possíveis?

Querem fabricar bandeirinhas com tela de duas cores diferentes (roxo e azul). As bandeirinhas devem ter três partes. Quantas bandeirinhas diferentes podem ser fabricadas?

Há outras classificações dos problemas referentes a essa estrutura. Magina *et al.* (2010, p.6) organizam esses problemas, baseados em Vergnaud (1990; 1994) conforme é representado no seguinte quadro[28]:



Quadro 3 Estrutura do Campo Conceitual Multiplicativo. MAGINA et al. 2010.

As relações quaternárias envolvem problemas de proporção simples entre duas grandezas diretamente proporcionais e problemas de proporções múltiplas, ou seja, em que se relacionam, duas a duas, três ou mais grandezas.

[28] Esquema do Campo Conceitual Multiplicativo elaborado pelo grupo de pesquisa REPARE em EdMat – Reflexão, Planejamento, Ação, Reflexão em Educação Matemática – em 2009.

As relações ternárias são aquelas que compreendem as comparações multiplicativas e o produto de medidas. Nas primeiras são relacionadas grandezas de mesma natureza. Segundo Magina *et al.* (2010), já nas séries iniciais, essas relações aparecem em situações envolvendo as ideias de dobro, triplo, metade, etc.

Segundo Canôas (1997), o produto de medida é uma "estrutura que consiste de uma composição cartesiana de duas medidas espaciais, dentro de uma terceira". Moro (2006) escreve que as situações que envolvem:

> [...] problemas por ele denominados produto de medidas comportam uma relação ternária entre tais medidas: uma delas é produto de duas outras nos planos numérico e dimensional, sendo generalizável a mais de duas dimensões. (MORO, 2006, p. 100)

O produto de medidas se divide em duas subclasses:

- a configuração retangular, com problemas do tipo:

  Num cinema há 12 fileiras de cadeiras, com 37 cadeiras em cada fileira. Quantas cadeiras há no cinema?

  As 56 cadeiras de um auditório estão dispostas em fileiras e colunas. Se são 7 as fileiras, quantas são as colunas?

- a combinatória, com problemas do tipo:

  Se eu tenho 2 saias de cores diferentes e 5 blusas também diferentes, de quantas formas diferentes poderei vestir-me?

  Numa festa, foi possível formar 12 casais diferentes para dançar. Se havia 3 moças e todos os presentes dançaram, quantos eram os rapazes?

Procuramos situar, assim, os problemas de combinatória dentro das estruturas multiplicativas, no ramo das relações ternárias e, mais especificamente, como um produto de medidas.

Há de se considerar, contudo, que existem problemas no campo combinatório que exigem a articulação não somente da estrutura multiplicativa. Em muitos casos é necessário articular conjuntamente as estruturas aditivas. Exigem do sujeito em ação a capacidade de lançar mão das estratégias de contagem direta e indireta, nomeadamente daquelas que envolvam os agrupamentos, arranjo, permutação, combinação e suas variações.

4.2 Algumas considerações sobre Vergnaud e os trabalhos de Navarro-Pelayo *et al*. (1996).

Ao apresentarmos o nosso quadro teórico e os elementos balizadores desta pesquisa, julgamos necessário fazermos algumas considerações.

Vergnaud (1991), ao abordar as situações, assinala duas ideias principais:

> 1– *a ideia de variedade*: existe uma grande variedade de situações num dado campo conceitual e as variáveis de situação são um meio de gerar de forma sistemática o conjunto das classes possíveis.
>
> 2– *a Ideia de história*: os conhecimentos dos alunos são formados pelas situações com que eles depararam e que progressivamente dominaram, nomeadamente pelas primeiras situações suscetíveis de dar sentido aos conceitos e aos procedimentos que se pretende ensinar-lhes. (VERGNAUD, 1991, p. 171. grifo nosso)

A primeira ideia – a de variedade – nos assegura que as variáveis consideradas por Batanero, Navarro-Pelayo e outros, podem ser o elemento gerador de uma classe de situações ligadas à combinatória. Isso porque, mesmo situadas dentro das estruturas multiplicativas, na classe dos problemas de produto de medidas, os Problemas de Contagem têm características muito peculiares. As restrições impostas a esse tipo de problema – as questões da ordem e da repetição de elementos – são, muitas vezes, encaradas com certa dificuldade pelos estudantes, mesmo por aqueles com preparação matemática avançada (Navarro-Pelayo, 1996; Roa, 2000; Correa & Fernandes, 2007).

Isto posto, entendemos que a gama de situações que se pode gerar a partir das variáveis de Batanero constitui um elemento importante, que se encontra em plena sintonia com a teoria dos campos conceituais: a de que um conceito, para ser bem compreendido, deve ser experimentado a partir de situações várias. Situações que levem em conta não somente as operações combinatórias, mas que também considerem os modelos combinatórios implícitos, os elementos que se combinam e o valor dos parâmetros *m* e *n*, podem favorecer a organização de situações na apreensão dos conceitos ligados à combinatória.

Nossas considerações nos levam a admitir a ideia de um campo conceitual combinatório, numa perspectiva de sua constituição, entretanto estamos cientes de que se trata de algo a demandar tempo e estudos bem mais aprofundados.

Por ora, estamos convencidos de que, para a formação dos conceitos ligados à combinatória, devem ser propostas situações que, além das estruturas multiplicativas, mobilizem elementos das estruturas aditivas e que contemplem as variáveis de tarefa definidas por Navarro-Pelayo *et al.* (1996).

Deste modo, para análise dos Problemas de Contagem do Caderno do Aluno, estabelecemos as seguintes hipóteses de trabalho:

1. Os problemas propostos também envolvem elementos das estruturas aditivas, do modo como foram descritas por Vergnaud (1991).
2. Os problemas propostos podem ser enquadrados nos modelos combinatórios implícitos – seleção, distribuição e partição.
3. As situações de arranjo, permutação e combinação (considerando a possibilidade ou não de repetição) aparecem em contextos diversificados.
4. Os problemas propostos envolvem elementos diversos como pessoas, objetos, números, letras e estes se distribuem entre as situações de arranjo, permutação e combinação de modo equilibrado.
5. Os parâmetros *m* e *n* têm seus valores aumentados gradativamente, conforme o aumento do nível de dificuldade que se deseja.

Nosso objetivo, então, é:

I. A) mostrar que os problemas de contagem são problemas de produto de medidas, segundo Vergnaud; B) que há entre esses problemas os que envolvem estruturas aditivas.

II. Identificar as variáveis de tarefa – modelo combinatório implícito, operações combinatória, elementos que se combinam e valores dos parâmetros – presentes em cada problema simples (aqueles que envolvem uma única operação combinatória).

Para a identificação das estruturas aditivas, consideramos todo o rol de problemas que figuram no Caderno do Aluno.

Para o segundo objetivo, assim como em Navarro-Pelayo *et al.* (1996) e Roa (2000), abordaremos os problemas em que figuram somente uma operação combinatória, ou seja, problemas simples.

Outro ponto a esclarecer é que alguns dos problemas das Situações de Aprendizagem incluem vários itens, de modo que, cada um destes, na verdade, constitui um problema menor dentro do maior. Optamos, então, por considerar cada item como um problema distinto tendo o mesmo contexto em comum com os demais itens.

Deste modo foram selecionados os seguintes problemas:

- da *Atividade 1 – Construindo árvores de possibilidades* foram analisados o item *b* do problema 2 e os itens *a* e *b* do problema 3;
- da *Atividade 2 – Formação de filas sem e com elementos repetidos*, excetuando-se o problema de número 11, os demais todos foram analisados;
- da *Atividade 3 – Formação de grupos com elementos de uma ou mais categorias*, foram analisados os problemas 1, 7, 8 10, 15, o item *a* dos problemas 2 , 3, 14,16 e 17, os itens *a* e *b* do problema 11, os itens *c*, *d* e *e* do problema 9, os itens *a*, *b*, *c* e *d* do problema 12.

Capítulo 5

5. ANÁLISE DE CONTEÚDOS

Neste capítulo fazemos uma análise do conjunto dos Problemas de Contagem sob a lente da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud e das variáveis de tarefas descritas por Navarro-Pelayo et al (1996).

Como abordamos anteriormente, os problemas de combinatória se situam num dos ramos das estruturas multiplicativas: o produto de medidas. Nos problemas de produto de medidas, estabelecem-se relações ternárias, pois estão em jogo duas quantidades, sendo a terceira o produto delas.

Mas há situações de contagem em que a aplicação pura e simples do produto de medidas não dá conta de resolvê-los. Faz-se necessária a utilização de recursos aditivos para solucionar este tipo de problema.

Procuramos identificar que tipos de problemas figuram no Caderno do Aluno a partir das Estruturas Multiplicativas e Aditivas, descritas por Vergnaud.

A seguir, observamos, nesses problemas, as variáveis: Modelos Combinatórios Implícitos, Operações Combinatórias, Natureza dos Elementos que se combinam, e Valores dos Parâmetros *m* e *n* das situações-problema. Segundo Navarro-Pelayo et al. (1996), tais variáveis devem ser relevadas tanto na organização quanto na avaliação das capacidades combinatórias dos alunos.

5.1. Os problemas do Caderno do Aluno e o produto de medidas de Vergnaud

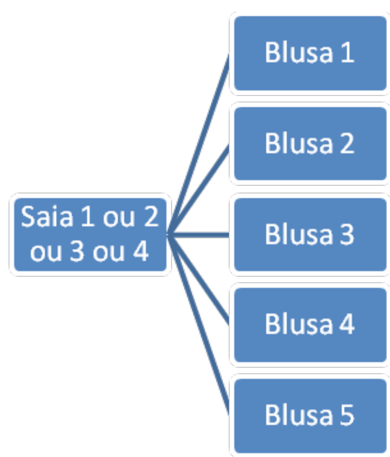
Ao analisarmos o Caderno do Aluno, constatamos que tanto o princípio multiplicativo quanto o aditivo permeiam os Problemas de Contagem que nele constam. Essa afirmação encontra amparo nos autores do material de Matemática que, ao falarem sobre estratégias de resolução dos problemas baseadas em representações semióticas, observam:

> A adoção da representação das resoluções por intermédio das árvores (de possibilidades) ilustra os dois principais tipos de raciocínio envolvidos na totalidade dos problemas de análise .combinatória: o raciocínio aditivo e o raciocínio multiplicativo. (SÃO PAULO, 2009a, p. 24-25).

O problema a seguir envolve uma situação clássica de produto de medidas, em que se procura compor um vestuário a partir de saias e blusas.

Problema 1 – Atividade 1

Uma menina deseja vestir-se com uma saia e uma blusa e dispõe de 4 saias diferentes e 5 blusas diferentes.



Escreva uma multiplicação para indicar o total de diferentes possibilidades de escolhas da menina.

O primeiro problema da Atividade 1- Construindo árvores de possibilidades – possui uma estrutura de produto de medida de Verganaud.

Nesse problema há uma articulação entre a representação do diagrama de árvores e o princípio multiplicativo.

Adiante, pretendemos mostrar que em geral os problemas de Contagem, mesmo que, à primeira vista, não se enquadrem entre os problemas de produtos de medidas, se transformados em vários problemas, passam a ser assim entendidos.

Para isso, consideremos o problema a seguir, baseado no Problema 1 da Atividade 1, cujo enunciado é:

Uma menina deseja escolher, para um evento, duas saias e duas blusas e dispõe, para isso, de 4 saias de cores distintas e 5 blusas de cores distintas. De quantos modos diferentes a menina poderá fazer essa escolha?

Observamos que de pronto ele não se caracteriza como produto de medidas, pois não há dois elementos distintos para serem multiplicados.

No entanto, podemos reduzi-lo a dois problemas de produto de medidas, que são:

- de quantos modos diferentes ela poderá escolher 2 saias dentre 4 distintas de que dispõe?
- de quantos modos diferentes ela poderá escolher 2 blusas dentre 5 distintas de que dispõe?

Temos, agora, problemas dentro do problema inicial. Para a solução de cada um deles, temos que considerar que a ordem nessa escolha não é importante e então os diferentes modos de fazer a escolha serão expressos pelo cálculo do número de possibilidades de se efetuar a ação completa: $C_{4,2} \times C_{5,2}$.

A relação de base "produto de medidas" é aplicada, aqui, várias vezes e em instâncias diferentes. Essa relação aparece no cálculo do número de modos diferentes que se pode escolher 2 dentre quatro saias. Esse número é dado por $4 \times 3 \times 2 \times 1$ que representa o total de modos em que posso arranjar as 4 saias, duas a duas. Como a mudança de ordem nessa escolha não forma novo agrupamento, esse total de arranjos dever ser dividido por 2, que é o resultado das permutações possíveis entre as duas saias escolhidas.

O mesmo acontece no cálculo do número de modos diferentes em que se pode escolher 2 de 5 blusas de que se dispõe.

$(5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) \div (3 \times 2 \times 1)$

Os problemas de arranjo, permutação e combinação são resolvidos, então, mobilizando os elementos da estrutura multiplicativa. No Caderno do Professor há evidente reforço e incentivo ao uso dessa estrutura na resolução dos problemas do Caderno do Aluno.

> De fato, 100% desses casos são resolvidos por intermédio de uma ou mais operações elementares entre números naturais: adição, subtração, multiplicação e divisão. Elas exigem a mobilização de estratégias de raciocínio semelhantes, quase sempre envolvendo uma das principais ideias da operação de multiplicação, a saber, o raciocínio multiplicativo. (SÃO PAULO, 2009a, p.23)

Há, porém, uma observação sobre a possibilidade do aluno se utilizar de procedimentos baseados no raciocínio aditivo. De acordo com as orientações do Caderno do Professor, tais procedimentos devem ser encarados como um passo anterior ao uso do raciocínio multiplicativo.

> É importante respeitar resoluções que utilizam prioritariamente o raciocínio aditivo, valorizando-as e, ao mesmo tempo, apresentar outra possibilidade que considera o raciocínio multiplicativo com a representação da árvore de possibilidades. (SÃO PAULO, 2009a, p. 25)

Todavia, destacamos algumas outras situações em que também se faz uso do raciocínio aditivo. Exemplo, O Problema 6 da Atividade 1:

Problema 6 – Atividade 1

Considere os numerais 1, 2, 3 e 4 e também todos os números de 4 algarismos distintos que podemos formar com eles. Imagine que todos esses números serão ordenados, do menor para o maior. Isso feito, o primeiro da fila será o 1234, o segundo será o 1243, e assim por diante, até o último, que será o 4321.

a) Qual é a posição do número 4321 nessa fila?

b) Qual é a posição do número 3241 nessa fila?

c) Acrescentando o numeral 5 aos numerais 1, 2, 3 e 4 e ordenando todos os números de 5 algarismos distintos que podem ser formados, qual é o número que ocupa a 72ª. posição?

O princípio multiplicativo resolve parcialmente o problema, pois dá o total de números de quatro algarismos distintos, mas não a posição de cada um deles, supondo-os dispostos numa ordem crescente.

Uma das alternativas para responder os dois primeiros itens seria elencar todos os números possíveis (24 números no total).

Porém, para o item **c**, depara-se com uma situação em que existem, ao todo, 120 números possíveis. A escrita de todos esses 120 números é possível, porém não desejável. Um recurso alternativo é usar a estrutura aditiva – problema de composição – para se efetuar a contagem até a posição considerada, conforme mostra o gabarito oficial[29]:

[29] O gabarito oficial se encontra na página http://www.rededosaber.sp.gov.br/arquivoteca/lstArquivos.aspx cujo acesso é restrito. Há outras páginas não pertencentes à Secretaria Estadual de Educação que oferecem o mesmo gabarito, sem que exista qualquer restrição de acesso.

Problema 6

a) Calculando a quantidade total de números distintos que podem ser formados com os algarismos 1, 2, 3, 4 → 4 . 3 . 2 . 1 = 24 números. Portanto, como o número 4 321 é o último, ele ocupa a 24ª posição.

b) Quantidade de números que começam com os algarismos 1 ou 2: 2 . 3 . 2 . 1 = 12.

Números que começam com 31: 1 . 1 . 2 . 1 = 2 (3 124 e 3 142).

Números que começam com 32: 1 . 1 . 2 . 1 = 2 (3 214 e **3 241**).

Somando os resultados, temos que a posição do número 3 241 é:

12 + 2 + 2 = 16ª posição.

c) Números que começam com os algarismos 1 ou 2: 2 . 4 . 3 . 2 . 1 = 48.

Números que começam com o algarismo 3: 1 . 4 . 3 . 2 . 1 = 24.

Como o número 35 421 é o último (maior) número que começa com 3, a posição dele é igual à soma dos resultados acima: 48 + 24 = 72, ou seja, 72ª posição.

Em dois outros figuram *problemas de composição* da estrutura aditiva, mais especificamente aquele em que se conhece uma parcela e a soma e se deseja encontrar a outra parcela. O primeiro deles é o Problema 6 da Atividade 3 – Formação de grupos com elementos de uma ou mais categorias.

Problema 6

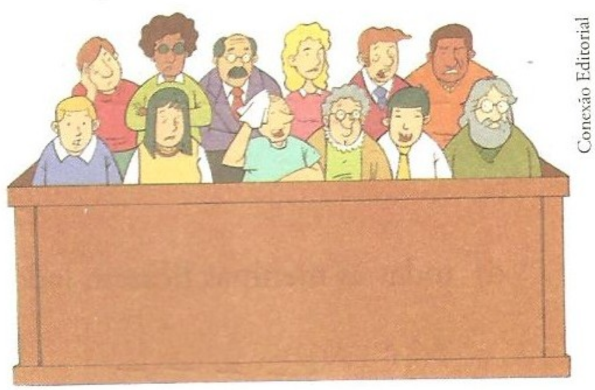
Na classe de Luiza e Roberta, estudam, contando com elas, 34 alunos. De quantas maneiras diferentes podem ser formados grupos de trabalho de 4 alunos se Roberta e Luiza não podem participar juntas de um mesmo grupo?

O outro é o Problema 16 da mesma Atividade 3, mais especificamente o item *b*.

Atividade 3

O desenho mostra 12 pessoas sentadas em uma arquibancada. Na fila de trás, estão 5 homens e 1 mulher. Na fila da frente estão 4 homens e 2 mulheres.

Entre as pessoas da fileira da frente, duas usam óculos, e duas pessoas da fileira de trás também usam.



Problema 16

Pensando apenas nas pessoas da fila de trás, responda: de quantas maneiras as pessoas podem trocar as posições entre si,

a) sem qualquer restrição?

b) de modo que as duas pessoas de óculos fiquem sempre separadas?

c) de modo que a mulher esteja sempre entre os dois homens que usam óculos?

A resposta ao problema 6 e ao item *b* do problema 16 pode ser obtida subtraindo-se do total aqueles em que essas pessoas aparecem juntas. Novamente temos um problema da estrutura aditiva de composição, em que se conhece a soma e uma das parcelas.

Essa é a forma para obter a solução indicada pelo gabarito oficial:

Problema 6 – Atividade 3 – Formação de grupos com elementos de uma ou mais categoriais.

Problema 6

Podemos calcular a quantidade total de grupos de 4 alunos formados com os 34 disponíveis para em seguida calcular a quantidade de grupos de 4 alunos de que Luiza e Roberta participam juntas. Por fim, subtraímos um resultado do outro para obter o resultado desejado.

- Grupos não ordenáveis de 4 alunos: 34 . 33 . 32 . 31 ÷ 4! = 46 376 grupos.
- Grupos não ordenáveis de 4 alunos, divididos em dois subgrupos de 2 alunos: um com Luiza e Roberta e outro com 2 dos demais 32 alunos:
  (1 . 1) . (32 . 31 ÷ 2!) = 496 grupos.
- Resultado procurado: 46 376 – 496 = 45 880 maneiras diferentes.

Problema 16 – Atividade 3 – Formação de grupos com elementos de uma ou mais categorias.

Problema 16

a) 6! = 720 maneiras.

b) Vamos calcular o total de filas em que duas pessoas de óculos estejam juntas e subtrair do total calculado no item a, logo:
2 . 1 . 4 . 3 . 2 . 1 = 48; multiplicando esse resultado por 5, pois são os possíveis lugares que as duas pessoas de óculos poderão ocupar, temos: 48 . 5 = 240 maneiras.
Portanto, 720 – 240 = 480 maneiras em que as pessoas de óculos estão separadas.

c) Considerando os dois homens de óculos e a mulher como sendo uma única pessoa, teremos, portanto, 4 pessoas, ou seja, 4! = 24 maneiras. Multiplicando o resultado obtido por 2, referente à troca de ordem dos homens de óculos, temos:
24 . 2 = 48 maneiras em que a mulher está entre os 2 homens de óculos.

Nessa primeira parte, procuramos evidenciar que os Problemas de Contagem do Caderno do Aluno do 2º. Ano do Ensino Médio pertencem ao rol daqueles que são classificados como de estruturas multiplicativas e aditivas, segundo Vergnaud (1991). Embora o objetivo primeiro do trabalho de Vergnaud não seja o de classificar problemas, tal enquadramento facilita o estudo dos processos cognitivos em jogo no momento de seu enfrentamento.

5.2 Análise das Variáveis de Tarefa de Navarro-Pelayo *et al.* (1996)

Nosso objetivo agora será o de identificar as diferentes variáveis de tarefa, nomeadamente, dos Modelos Combinatórios Implícitos, das Operações Combinatórias, da natureza dos elementos que se combinam e dos valores dos parâmetros *m* e *n*.

5.2.1 Modelo Combinatório Implícito

Todos os problemas selecionados para análise podem ser interpretados como problemas de seleção, ou de distribuição, ou das duas formas, pois há possiblidade de fazerem traduções entre os diferentes modelos, como sinaliza Dubois (1984).

A seguir exemplificamos uma situação de seleção. Trata-se do problema 3 da Atividade 2.

Problema 3 – Atividade 2

Em uma caixa foram colocadas 9 bolinhas, numeradas de 1 a 9. Para retirar uma bolinha dessa caixa, temos 9 maneiras diferentes: pegar a bolinha 1, ou a bolinha 2, ou a bolinha 3, e assim por diante. Para retirar duas bolinhas da caixa, temos já um número bem maior de maneiras diferentes: temos 8 vezes mais, isto é, 72 maneiras diferentes. Isso porque há 8 possibilidades de pegar a segunda bolinha depois de a primeira delas ter sido apanhada. Responda:

a) Quantas maneiras diferentes existem para pegar 3 bolinhas dessa caixa?

b) Quantas maneiras diferentes existem para pegar 4 bolinhas dessa caixa?

O verbo **“pegar”** que aparece nos dois itens do problema evidencia o fato de que se trata de um modelo de seleção e, neste caso, uma seleção ordenada sem reposição. Isto porque, como a situação sugere, as bolinhas numeradas são retiradas sem que haja reposições.

Os problemas de distribuição, no material do aluno, estão mais ligados à formação de filas e à organização de anagramas. Os seguintes exemplos são problemas da Atividade 2 do Caderno do Aluno.

Problema 1 – Atividade 2

Quantas filas diferentes poderão ser formadas com 5 pessoa, apenas alternando suas posições na fila?

Problema 2 – Atividade 2

Considere a palavra CABO. Se trocarmos a ordem entre as letras dessa palavra, formando agrupamentos de letras que podem ou não formar palavra conhecida, estaremos formando “anagramas”. Veja alguns dos anagramas da palavra CABO:

COBA, BACO, OCBA, ABOC, ACOB

a) Começando por A, quantos anagramas diferentes poderemos formar?

b) Quantos anagramas terminados por O existem?

c) No total, quantos anagramas existem?

No problema 1 e em cada item do problema 2 figuram aplicações bijetoras. Na primeira situação o número de pessoa e o número de posições a ocupar na fila são o mesmo estando, deste modo, cada pessoa associada a uma e somente uma posição na fila e vice-versa. Na segunda situação, a mesma relação é estabelecida entre as letras e suas respectivas posições no anagrama.

A atividade 2 explora bastante os problemas que envolvem formação de filas e anagramas uma vez que o objetivo é mobilizar a questão da ordem nos agrupamentos.

Esses problemas podem, inclusive, serem encarados como problemas de seleção. Dubois (1984) sinaliza sobre as transferências semânticas entre uma e outra configuração as quais chama de tradução entre um modelo combinatório e outro. No problema seguinte, retirado da Atividade 1, procuramos ilustrar esta possível tradução.

Problema 3 – Atividade 1

Os números 342, 335, 872, 900 são, entre tantos outros, números de três algarismos. Entre esses exemplos, os números 342 e 872 não repetem algarismos, contrariamente ao que ocorre, por exemplo, com os números 335 ou 900. Quantos números com 3 algarismos podemos escrever se:

a) Todos começarem por 1 e os algarismos puderem ser repetidos?

b) Todos começarem por 1 e os algarismos não puderem ser repetidos?

Cada um dos itens pode ser encarado como um problema de seleção se for entendido que é possível ser escolhido qualquer algarismo dentre os algarismos de 0 a 9, para constituírem os números. O problema já faz uma seleção prévia do algarismo da centena.

Pode-se, também, traduzir cada item em um esquema de distribuição, estabelecendo uma relação entre os espaços (células) destinados à colocação de algarismos que, da esquerda para a direita, representam a dezena e unidade, uma vez que o 1 já está fixado como algarismo da centena.

Dentre os problemas das três atividades da Situação de Aprendizagem 2, não identificamos nenhum problema de partição, nem mesmo dentre aqueles não simples.

Além disso, dos problemas cujo modelo correspondia ao de distribuição, algumas situações traziam o número de elementos associado maior que o número de células (distribuição injetora). Porém, não detectamos situações em que o número de células era maior que o número de elementos (sobrejetora). Esse tipo de situação, em especial, é propício para a conversão de um modelo de distribuição a um modelo de seleção.

Um exemplo desta situação aparece nos problemas trabalhados por Roa (2000) e por Navarro-Pelayo (1996), quando das suas pesquisas a respeito do raciocínio combinatório.

Problema 9: Estacionar 3 carros em 5 vagas na garagem.

A garagem de Angel tem cinco vagas. Como a casa é nova, até agora, há somente três carros: de Angel, de Beatriz e de Carmen que podem colocar a cada dia, no lugar que preferirem, se não estiver ocupado. Este é o esquema da garagem

1	*2*	*3*	*4*	*5*

De quantas formas Angel, Beatriz e Carmen podem estacionar seus carros na garagem? Exemplo: Angel pode estacionar seu carro na vaga 1, Beatriz na de número 2 e Carmen na de número 4.

Originalmente, trata-se de um problema de distribuição em que o número de objetos a serem colocados é menor de que o número de lugares. Esse problema pode ser convertido em um problema de seleção, se entendemos que cada pessoa pode selecionar uma das vagas disponíveis.

5.2.2 Operações Combinatórias

As Atividades 1, 2 e 3 da Situação de Aprendizagem 2 delimitam bem as operações combinatórias que prevalecem em cada uma delas: arranjos simples e com repetição, permutações simples e com repetição e combinações respectivamente.

Das situações da Atividade 1, destacamos o problema de número 2 no seu item cuja resolução pode ser feita a partir de um $A_{3,2}$, embora a orientação delimite a resolução por intermédio da árvore de possibilidades.

Problema 2 – Atividade 1

Um roteiro turístico prevê a visita a duas cidades do conjunto conhecido por "Cidades Históricas de Minas Gerais", formado pelas cidades de Ouro Preto, Mariana, Tiradentes e São João Del Rei. Quantos roteiros diferentes poderão ser traçados se:

b) Não houver restrição à escolha de duas cidades?

Os problemas da Atividade 2 são situações que, na maioria das vezes, envolvem a formação de filas e a construção de anagramas. Este último tipo de problema é o que mais aparece, não obstante o título dessa atividade seja: "*Formação de filas com ou sem elementos repetidos*".

Nas orientações do Caderno do Professor, consta que um dos objetivos dessa atividade é "apresentar o número fatorial (**n!**) como o fator que nos dá a quantidade de diferentes ordenações em um agrupamento de **n** elementos" (São Paulo, 2009b, p.26). Para tanto, há um texto explicativo no início dessa atividade.

Atividade 2 – Formação de filas sem e com elementos repetidos

Leitura e Análise de Texto

As filas

Quando duas pessoas A e B colocam-se em fila, há apenas duas possibilidades: primeiro vem A e depois B, ou primeiro vem B e depois A. Se uma pessoa C juntar-se a essas duas, a fila poderá, agora, ser formada de 6 maneiras diferentes:

ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA

Se uma quarta pessoa juntar-se a essas, agora, 4 vezes mais filas do que o número anterior. Isto é, serão 4.6 = 24 filas.

No início do segundo problema da Atividade 2, há também uma instrução referente ao que é um anagrama, seguida de alguns anagramas obtidos a partir da palavra CABO.

Problema 2 Considere a palavra CABO. Se trocarmos a ordem entre as letras dessa palavra, formando agrupamentos de letras que podem ou não formar palavra conhecida, estaremos formando "anagramas". Veja alguns dos anagramas da palavra CABO: COBA, BACO, OCBA, ABOC, ACOB a) Começando por A, quantos anagramas diferentes poderemos formar? b) Quantos anagramas terminados por O existem? c) No total, quantos anagramas existem?

Na abordagem das permutações com repetições, é apresentado no início do problema 7 da Atividade 2 um texto visando instruir o aluno em relação ao cuidado que se deve ter ao resolver situações como essa.

Problema 7 – Atividade 2 Trocando a ordem das letras da palavra INA podem ser formados 6 anagramas diferentes: INA, IAN, AIN, ANI, NAI, NIA Com as letras da palavra ANA, o número de anagramas é menor; são apenas 3: ANA, AAN, NAA Por que o número de anagramas dessas palavras não é o mesmo, se ambas têm 3 letras? A resposta é: a palavra ANA tem letras repetidas. A palavra LUTA tem 24 anagramas, enquanto a palavra LULU, que tem 2 "L" e 2 "U", tem apenas 6 anagramas, pois a troca de um "L" com outro, ou a troca entre os dois "U" não geram novo anagrama. Quer dizer, o total de 24 anagramas de uma palavra em 4 letras distintas fica, no caso de LULU, duas vezes dividido por 2, por causa do "Ls" e dos "Us" repetidos. Então, $24 \div 2 \div 2 = 6$.

Mendonça (2011) chama atenção ao fato de que a permutação com repetição poderia ter sido proposta sem que houvesse uma instrução inicial e o modo como foi apresentada elimina "o desafio que é proposto ao aluno". Além de estarmos de pleno acordo com Mendonça (2011), acrescentamos que o modo como é apresentada tal instrução possibilita uma dupla interpretação.

O texto orienta quanto ao fato de que a palavra LULU, possui dois "Ls" e dois "Us" de modo que, em razão disso e nas palavras do próprio texto, "o total de 24 anagramas de uma palavra em 4 letras distintas fica, no caso de LULU, duas vezes dividido por 2, por causa do 'Ls' e dos 'Us' repetidos". Então 24÷2÷2 = 6 anagramas.

Não está claro, ao nosso entender, que o divisor "2" das duas divisões na verdade é "2×1", ou seja, 2 fatorial (2!). Uma pequena explicação bastaria para se evitar erros de interpretação.[30]

Finalmente, os problemas da Atividade 3 apresentam os conceitos de combinação com situações de formação de grupos de uma ou mais categorias. Tais categorias se referem a grupos ordenáveis e não ordenáveis. Introduz-se assim o conceito de combinação. O problema 1 dessa Atividade 3 pontua a distinção entre essas duas categorias.

Problema 1

Cinco pessoas, Arnaldo, Benedito, Carla, Débora e Eliane estão juntas em uma sala.

a) Quantos agrupamentos **ordenáveis** diferentes (filas) de 5 pessoas podem ser formados com essas 5 pessoas?

b) Quantos agrupamentos **não ordenáveis** diferentes (grupos) de 5 pessoas podem ser formados com essas 5 pessoas?

c) Quantos grupos diferentes de 2 pessoas podem ser formados com as pessoas presentes na sala?

[30] Uma delas seria a de se pensar que, em todos os casos onde há repetições de letras, basta dividir o número total das permutações (supondo elementos distintos) e dividi-los pelo número de vezes com que cada letra se repete. Por essa interpretação, por exemplo, o número de permutações da palavra BANANA seria calculado dividindo 720 (que é 6!) por 2 (pois há 2 "Ns") e por 3 (pois há 3 "As").

O enunciado faz uma analogia entre a ideia de ordenação e a formação de filas e a ideia de não ordenação e a formação de grupos. Ora, mas há grupos em que não se pode prescindir da ordem de seus integrantes. Podemos, por exemplo, atribuir uma função a cada elemento. Suponha que dentro desse grupo um deva ocupar a posição de (ou ser escolhido para) presidente, outro vice-presidente, outro primeiro secretário, outro segundo secretário e o último como tesoureiro.

Nas considerações sobre as atividades da Situação de Aprendizagem 2 que constam do Caderno do Professor, menciona-se a possibilidade de grupos em que se deve relevar a ordem, quando afirma que "uma fila é um conjunto ordenado, enquanto um grupo *normalmente* não é" (São Paulo, 2009a, p.28). No entanto, no Caderno do Aluno não há nenhuma observação quanto a isto.

O cálculo dos grupos não ordenados, ou seja, das combinações é proposto partindo-se do cálculo dos agrupamentos ordenados, conforme o texto de apresentação da Atividade 3.

Atividade 3 – Formação de grupos com elementos de uma ou mais categorias Observe a representação de uma parte da árvore de possibilidades para o seguinte problema: Quantos grupos ordenáveis (fila) de 3 elementos podemos formar com 7 pessoas? Ao observar a árvore percebemos que, para determinada pessoa em 1º. lugar, há 6 opções para o 2º. colocado, e, para cada um destes, há 5 possiblidades de escolha para o 3º. colocado. Assim, a quantidade de grupos ordenáveis é, nesse caso, igual ao produto 7.6.5 = 210. Agora, vamos mudar a questão e perguntar: a quanto ficaria reduzido o número de agrupamentos, se eles não fossem ordenáveis? Isto é, se o agrupamento "João, José, Maria" fosse o mesmo de "João, Maria, José", e o mesmo de "Maria, José, João", e igual a todos os demais em que só é trocada a ordem dos participantes? Em outras palavras, se em vez de serem feitas filas fossem feitos grupos de pessoas? Os 210 grupos ordenáveis ficariam reduzidos a 35 grupos não ordenáveis (resultados de 210÷6), uma vez que cada grupo de 3 elementos permite 6 permutações entre seus elementos.

A ideia é chegar ao total de combinações, calculando-se, primeiramente, o número de arranjos possíveis, “para em seguida descontar do valor obtido a troca de ordem entre os elementos de cada agrupamento”. (São Paulo, 2009a, p.30)

De um modo geral, as operações combinatórias estão associadas a três tipos de problemas:

- os arranjos estão ligados às situações de construção de numerais a partir de um universo de algarismos dados;
- as permutações, às situações de organização de elementos em filas e anagramas;
- as combinações, às situações de formação de grupos.

Isso não quer dizer que não haja problemas que fujam disto, mas eles são em número reduzido. Dois exemplos disso são os problemas 12 e 13 da Atividade 2 cuja operação combinatória envolvida, em ambos os casos, é a permutação com repetição.

Problema 12

Um jogo de futebol entre duas equipes **A** e **B** terminou empatada em 3x3. Alguém que não assistiu ao jogo pretende descobrir a ordem em que ocorrem os gols. Será que **A** começou ganhando e **B** empatou? Será que **B** fez 3x0 e depois A tentou reverter a situação? Enfim, como foram saindo os gols nessa partida? Quantas ordenações possíveis existem para os gols que ocorreram nessa partida?

O gabarito oficial traz a seguinte solução:

Trata-se de um problema semelhante aos anteriores, em que devem ser contadas todas as ordenações diferentes de uma sequência do tipo AAABBB. O resultado pode assim ser obtido:

6÷/(3!.3!) = 20 ordenações

Problema 13

Aplicando a propriedade distributiva e desenvolvendo o binômio $(A+B)^5$, isto é, fazendo (A+B).(A+B).(A+B).(A+B).(A+B), aparecerá um termo igual a A^5 e um termo igual a B^5. No entanto, vão aparecer vários termos com parte literal igual a A^3B^2, decorrentes da multiplicação entre 3 "As" de qualquer dos 5 binômios por 2 "Bs", também de qualquer dos 5 binômios. Quantos termos iguais com parte literal A^3B^2 aparecerão?

Assim como no problema anterior, segue a solução dada pelo gabarito oficial:

Temos de considerar todas as trocas de ordem entre os elementos de um agrupamento do tipo AAABB, o que pode ser obtido por: 5! ÷ (3!.2!) = 10 ordenações

Outro fato a se considerar é que em nenhum momento se faz menção, dentro do material do aluno, aos termos "arranjo", "permutação" e "combinação" para indicar os vários tipos de agrupamentos obtidos. Esse fato é assim justificado pelos autores:

> Não julgamos importante que os alunos conheçam, de início, essa nomenclatura, mas que, em algum momento, a critério do professor, isso lhe seja apresentado. (SÃO PAULO, 2009a, p. 26).

Isto indica a preocupação primeira dos autores desse material em centralizar o estudo nas estratégias de resolução e não na classificação dos problemas em categorias e consequente aplicação de fórmulas. No entanto, não temos a dimensão do que a ausência dessa terminologia poderia acarretar ao estudante em outros momentos de sua vida acadêmica ou profissional. Aliás, o próprio termo Análise Combinatória não está presente no Caderno do Aluno. Não nos cabe aqui essa discussão por não ser esse o foco de nossa investigação. Trata-se somente de uma constatação.

5.2.3 Elementos que se combinam

No que diz respeito à natureza dos elementos que se combinam, constatamos que havia pouca diversificação no grupo de problemas propostos pertencentes a cada Atividade.

A tabela a seguir mostra a distribuição desses elementos nas três atividades propostas.

Número da Atividade	**Números**	**Letras**	**Pessoas**	**Objetos**	**Outros**
1	1	0	0	0	1
2	2	4	4	1	1
3	1	0	11	2	0
Total	4	4	15	3	2

Quadro 4. Elementos que se combinam

Além de números, letras, pessoas e objetos, categorias essas que foram consideradas por Navarro-Pelayo *et al.* (1996), incluímos uma coluna com situações que não se enquadravam em nenhuma dessas classificações. O problema 13 da Atividade 2 é um exemplo disso, pois envolve um objeto matemático bem definido: os binômios.

> Problema 13 – Atividade 2
>
> Aplicando a propriedade distributiva e desenvolvendo o binômio $(A+B)^5$, isto é, fazendo (A+B).(A+B).(A+B).(A+B).(A+B), aparecerá um termo igual a A^5 e um termo igual a B^5. No entanto, vão aparecer vários termos com parte literal igual a A^3B^2, decorrentes da multiplicação entre 3 “As” de qualquer dos 5 binômios por 2 ”Bs”, também de qualquer dos 5 binômios. Quantos termos iguais com parte literal A^3B^2 aparecerão?

Na *Atividade 1 – Construindo árvores de possibilidades* observamos que dos problemas selecionados, um era relativo à viagem entre cidades mineiras e outro envolvia a formação de numerais a partir de um conjunto algarismos. Vale ressaltar que a maioria dos problemas dessa atividade – mesmo dentre aqueles em que figuram mais de uma operação combinatória – envolviam situações com números.

Já na *Atividade 2 – Formação de filas sem e com elementos repetidos,* dos problemas analisados, havia dois que envolviam números e o restante, na maioria, eram situações com pessoas e letras. Somente um – o problema 10 – envolvia objeto.

Problema 10

Três livros de Geografia, diferentes e três livros de História diferentes serão colocados um sobre o outro, de modo a formar uma pilha de livros. Quantas pilhas diferentes poderão ser formadas se:

a) não importar a matéria e sim os livros, que, no caso, são todos diferentes?

b) a diferença entre os livros não for levada em conta, mas apenas o fato de que são duas disciplinas diferentes?

Por último, das 14 situações analisadas na terceira atividade *“Formação de grupos com elementos de uma ou mais categorias”*, 11 envolviam agrupamentos formados por pessoas.

Nos casos das Atividades 1 e 2 há uma preocupação com a questão da ordem dos elementos nos agrupamentos. Os problemas envolvendo letras, números e pessoas organizadas em fila, evidenciam a importância que se deve dar à ordenação. Mas poderiam ser propostos outros problemas com elementos diferentes destes – objetos, por exemplo – a fim de ampliar o repertório e não limitar a situações só a esses elementos.

5.2.4 Valores dos parâmetros m e n

Fischbein e Gazit (1988), citados por Navarro-Pelayo *et al.* (1996), estudaram as dificuldades relativas aos problemas combinatórios em função, entre outros fatores, do número de elementos que se combinam, identificando alguns erros típicos.

Roa (2000) destaca que esses parâmetros podem gerar soluções com “configurações pequenas ou grandes”[31]. Quando as configurações são pequenas, a solução pode ser obtida facilmente por meio de tentativa e erro ou por uma enumeração sistemática, mesmo que não haja raciocínio recursivo. O uso da árvore de possibilidades é um exemplo disso. Por outro lado, quando essas configurações são maiores, torna-se mais difícil o uso de estratégias como tentativa e erro. Neste caso, o pesquisador pondera que será preciso conhecer bem a operação combinatória associada ao problema ou estabelecer estratégias como fixar uma variável ou dividir o problema em problemas menores.

Esses números, reafirmamos, estão ligados às investigações de Roa. No nosso caso, iremos observar os parâmetros, considerando os objetivos de cada Atividade estipulados pela Proposta Curricular.

Os problemas analisados da Atividade 1 – Construindo árvores de possiblidades têm por proposta o uso desse recurso com estratégia de resolução. Para tanto, a proposta articula o uso do princípio multiplicativo aliado a esse procedimento gráfico.

No problema 2 desta atividade, pretende-se escolher roteiros entre duas cidades, dentre as quatro que são oferecidas. Com valores nessa ordem de grandeza (m = 4 e n = 2), torna-se mais simples a enumeração de todas os roteiros possíveis. Estes se encontram destacados em negrito.

[31] Nos problemas do questionário de Roa (2000) foram consideradas pequenas soluções cujas configurações obtidas variavam de 4 a 24 e grandes, aquelas que variavam de 64 a 640.

Problema 2 – Atividade 1

Um roteiro turístico prevê a visita a duas cidades do conjunto conhecido por "Cidades Históricas de Minas Gerais", formado pelas cidades de Ouro Preto, Mariana, Tiradentes e São João Del Rei. Quantos roteiros diferentes poderão ser traçados se:

Ouro Preto sempre fizer parte do roteiro?

OURO PRETO – MARIANA

OURO PRETO – TIRADENTES

OURO PRETO – SÃO JOÃO DEL REI

Não houver restrição à escolha de duas cidades?

OURO PRETO – MARIANA

OURO PRETO – TIRADENTES

OURO PRETO – SÃO JOÃO DEL REI

MARIANA – TIRADENTES

MARIANA – SÃO JOÃO DEL REI

TIRADENTES – SÃO JOÃO DEL REI

O problema 3 desta mesma atividade lida com números formados por três algarismos.

Problema 3

Os números 342, 335, 872, 900 são, entre tantos outros, números de três algarismos. Entre esses exemplos, os números 342 e 872 não repetem algarismos, contrariamente ao que ocorre, por exemplo, com os números 335 ou 900. Quantos números com 3 algarismos podemos escrever se:

a) Todos começarem por 1 e os algarismos puderem ser repetidos?

b) Todos começarem por 1 e os algarismos não puderem ser repetidos?

A instrução do enunciado sugere que há muitos números formados por três algarismos dentre os dez do sistema hindu-arábico, sejam eles repetidos ou não. Deste modo, espera-se que o aluno utilize-se de outros procedimentos que extrapolem a enumeração não sistemática e instrumentalizem o raciocínio aditivo e multiplicativo.

> A contagem individual dos casos é, de fato, o embrião do raciocínio aditivo, semelhante ao que um estudante realiza no processo de contagem que denominamos vulgarmente de "mais um", em que ele adiciona uma unidade a um numeral com o objetivo de obter o próximo. (SÃO PAULO, 2009a, p. 25)

Na Atividade 2 – Formação de filas sem e com elementos repetidos, como já citamos anteriormente, tem como um dos objetivos a mobilização do número fatorial como forma de obter todas as permutações simples possíveis. O problema 5 ilustra bem essa intenção.

Problema 5 Quantos anagramas diferentes podem ser formados com as letras das palavras: BIA NICO LUCIA CAMILO

As orientações dadas pelo Caderno do Professor justificam essa opção pedagógica:

> A apresentação de palavras com número crescente de letras estimula a indução de que o número de ordens de um agrupamento de n elementos é n! (SÃO PAULO, 2009a, p.26)

O objetivo, então, é a generalização dos resultados por meio da indução. O problema seguinte explora essa linha considerando, num outro contexto, uma permutação de 7 elementos.

Problema 6 Sete pessoas formarão ao acaso uma fila indiana. Em quantas ordenações diferentes poderá ser formada a fila?

Essa mesma estratégia é usada na introdução das permutações com repetições.

Problema 7 Trocando a ordem das letras da palavra INA podem ser formados 6 anagramas diferentes: INA, IAN, AIN, ANI, NAI, NIA Com as letras da palavra ANA, o número de anagramas é menor; são apenas 3: ANA, AAN, NAA Por que o número de anagramas dessas palavras não é o mesmo, se ambas têm 3 letras? A resposta é: a palavra ANA tem letras repetidas. A palavra LUTA tem 24 anagramas, enquanto a palavra LULU, que tem 2 "L" e 2 "U", tem apenas 6 anagramas, pois a troca de um "L" com outro, ou a troca entre os dois "U" não geram novo anagrama. Quer dizer, o total de 24 anagramas de uma palavra em 4 letras distintas fica, no caso de LULU, duas vezes dividido por 2, por causa do "Ls" e dos "Us" repetidos. Então, 24 ÷ 2 ÷ 2 = 6. Agora, responda: qual é o total de anagramas da palavra: a) CARRO? b) CORPO? c) CORRO?

A instrução inicia mostrando palavras de três letras (INO e ANA) e, em seguida, palavras de quatro letras (LUTA e LULU), ou seja, numa proposta do uso do raciocínio indutivo, como outrora fizera. O mesmo acontece com as letras que se repetem. Na primeira situação a letra A se repete duas vezes e na segunda situação as letras L e U se repetem duas vezes. A orientação que consta do Caderno do Professor é a de que se "desconte" as palavras idênticas que surgem da permutação das letras repetidas.

> O professor deverá discutir com seus alunos que o fatorial pode ser usado para generalizar a contagem das ordens e também para descontar a troca de ordem entre elementos repetidos. (SÃO PAULO, 2009a, p.27)

Esse uso do fatorial, porém, não fica claro na orientação proposta no problema 7 e, como já havíamos observado, a impressão obtida é a de que a divisão se dá porque as letras se repetem duas vezes cada uma.

Uma sugestão para que se desfizesse essa falsa interpretação seria propor uma palavra com uma letra se repetindo três vezes, como URUTU, por exemplo. No entanto, os itens a, b e c apresentam palavras com cinco letras em que o único desafio é o aparecimento de duas letras repetidas no item c (O e R).

A proposta de se aumentar progressivamente os valores dos parâmetros visando a uma generalização para o cálculo das combinações, alvo da Atividade 3 – Formação de grupos com elementos de uma ou mais categorias, faz-se pertinente. Observamos isso nos problemas 7 e 8.

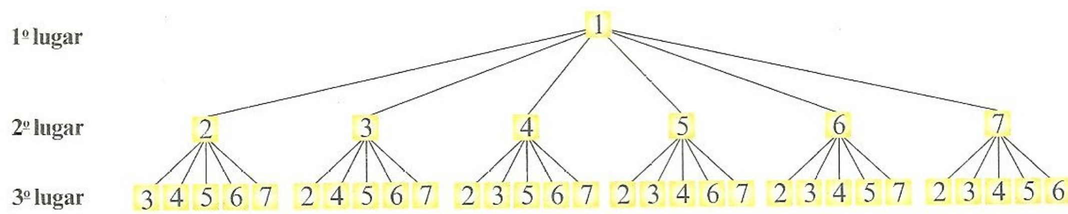
Problema 7
Dispomos de 8 pessoas para formar grupos de trabalho. De quantas maneiras diferentes o grupo poderá ser formado, se dele participar(em) apenas:
a) uma das 8 pessoas?
b) duas das 8 pessoas?
c) três das 8 pessoas?
d) quatro das 8 pessoas?

Problema 8
Em uma sala há n pessoas, com as quais formaremos grupos, ordenáveis ou não. De quantas maneiras diferentes poderemos formar o grupo se ele tiver:
a) apenas 1 elemento?
b) 2 elementos?
c) 3 elementos?
d) 4 elementos?
d) p elementos, $p < n$?

A estratégia proposta para se chegar ao número de combinações está em se calcular primeiramente do total de arranjos e ***descontar*** as permutações possíveis de cada agrupamento uma vez que a mudança de ordem dos elementos não constitui novos agrupamentos. (São Paulo, 2009a, p.30). Tal estratégia está explícita no texto que inicia a Atividade 3.

Leitura e Análise de Texto

Observe a representação de uma parte da árvore de possibilidades para o seguinte problema: Quantos grupos ordenáveis (fila) de 3 elementos podemos formar com 7 pessoas?



Ao observar a árvore percebemos que, para determinada pessoa em 1º. lugar, há 6 opções para o 2º. colocado, e, para cada um destes, há 5 possibilidades de escolha para o 3º. colocado. Assim, a quantidade de grupos ordenáveis é, nesse caso, igual ao produto 7.6.5 = 210.

Agora, vamos mudar a questão, e perguntar: a quanto ficaria reduzido o número de agrupamentos se eles não fossem ordenáveis? Isto é, se o agrupamento "João, José, Maria" fosse o mesmo de "João, Maria, José", e o mesmo de "Maria, José, João", e igual a todos os demais em que só é trocada a ordem dos participantes? Em outras palavras, se em vez de serem feitas filas fossem feitos grupos de pessoas?

Os 210 grupos ordenáveis ficariam reduzidos a 35 grupos não ordenáveis (resultados de 210÷6), uma vez que cada grupo de 3 elementos permite 6 permutações entre seus elementos.

O problema 1 propõe a formação de agrupamentos formados por 5 pessoas em que a ordem é importante (filas) e em que a ordem não é importante (grupos).

Problema 1 Cinco pessoas, Arnaldo, Benedito, Carla, Débora e Eliane estão juntas em uma sala. a) Quantos agrupamentos **ordenáveis** diferentes (filas) de 5 pessoas podem ser formados com essas 5 pessoas? b) Quantos agrupamentos **não ordenáveis** diferentes (grupos) de 5 pessoas pode ser formadas com essas 5 pessoas? c) Quantos grupos diferentes de 2 pessoas podem ser formados com as pessoas presentes na sala?

O confronto proposto entre os itens *a* e *b* é um caminho interessante, no nosso modo de ver, para se perceber a importância da ordem. No item *a* são 120 agrupamentos ordenáveis ao passo que no item *b* há apenas um agrupamento não ordenável possível. Poderiam ser exploradas situações com formação de grupos com 4, 3 e 2 elementos, uma vez que, mesmo que fossem usadas estratégias de enumeração não sistemática ou sistemática como o diagrama de árvores, estas não despenderiam de tanto tempo.

Apresentamos, a seguir, um quadro resumo com a identificação das variáveis de tarefa.

		VARIÁVEIS DE TAREFA			
	Número da questão	***Modelo Combinatório Implícito***	***Operação Combinatória***	***Elementos que se combinam***	***Valores dos parâmetros***
Construindo árvores de possibilidades **Atividade 1**	1	Seleção	P.F.C	Objetos	4 saias e 4 blusas
	2	Seleção	P.F.C	Objetos	4 cidades viagens de ida, e, de ida e volta
	3	Seleção/Distribuição	P.F.C Ou Arranjo simples e com repetição	Números	10 algarismos disponíveis e agrupamentos de 2 e 3 algarismos distintos ou repetidos
	4	Seleção/Distribuição	P.F.C Ou Arranjo simples e com repetição	Números	10 algarismos disponíveis e agrupamentos de 4 algarismos distintos
	5	Seleção/Distribuição	P.F.C Ou Arranjo simples e com repetição	Números	10 algarismos disponíveis e agrupamentos de 3 algarismos (distintos/repetido) resultando ora números pares ora ímpares
	6	Distribuição	P.F.C e Princípio Aditivo Permutação simples	Números	4 algarismos disponíveis e agrupamentos de 4 algarismos distintos

Quadro 5. Variáveis de tarefa e Atividade 1

			VARIÁVEIS DE TAREFA			
		Número da questão	***Modelo Combinatório Implícito***	***Operação Combinatória***	***Elementos que se combinam***	***Valores dos parâmetros***
Formação de filas sem e com elementos repetidos **Atividade 2**		1	Distribuição	Permutação simples	Pessoas	5 pessoas em uma fila
		2	Distribuição	Permutação simples	Letras	6 letras formando anagramas
		3	Seleção (ordenada sem reposição)	Arranjo simples	Números	9 bolinhas numeradas de 1 a 9, sendo escolhidas 3 bolinhas na primeira situação e 4 bolinhas na segunda situação
		4	Seleção (ordenada com reposição)	Arranjo com repetição	Números	9 bolinhas numeradas de 1 a 9, sendo escolhidas 2 bolinhas na primeira situação, 3 bolinhas na segunda situação, 4 na terceira, com reposição em todos os casos
		5	Distribuição/Seleção	Permutação simples	Letras	Construção de anagramas a partir de palavras com 3 letras, 4 letras, 5 letras e 6 letras distintas.
		6	Distribuição/Seleção	Permutação simples	Pessoas	7 pessoas formando uma fila indiana
		7	Distribuição/Seleção	Permutação com repetição	Letras	No primeiro item formar anagramas com palavra de 4 letras sendo 2 repetidas; na segunda de 5 letras sendo 2 repetidas; na terceira de 5 letras sendo 4 letras repetidas 2 a 2
		8	Distribuição/Seleção	Permutação com repetição	Letras	No primeiro item formar anagramas com palavra de 4 letras sendo 2 repetidas; na segunda de 5 letras sendo 2 repetidas; na terceira de 5 letras sendo 4 letras repetidas 2 a 2
		9	Distribuição/Seleção	Permutação simples e com repetição	Pessoas	Na primeira situação há 5 pessoas em fila independentemente do gênero (masculino e feminino). Na segunda, deve ser considerado o gênero (2 meninas e 3 meninos)
		10	Distribuição/Seleção	Permutação simples e com repetição	Objetos	Na primeira situação há 6 livros em fila independentemente da disciplina . Na segunda, deve ser considerada a disciplina (3 de História e 3 de Geografia)
	Lição de casa	11	Distribuição/Seleção	Permutação com repetição	Pessoas	São 7pessoas, sendo 3 meninas e 4 meninos.
		12	Distribuição/Seleção	Permutação com repetição	“Objetos”	Distribuição de 6 gols entre dois times, A e B, com três gols para cada time.
		13	Distribuição/Seleção			

Quadro 6. Variáveis de tarefa e Atividade 2

		VARIÁVEIS DE TAREFA			
	Número da questão	***Modelo Combinatório Implícito***	***Operação Combinatória***	***Elementos que se combinam***	***Valores dos parâmetros***
Atividade 3 Formação de grupos com elementos de uma ou mais categorias	1	Seleção	Permutação/Combinação	Pessoas	5 pessoas constituindo ora grupos ordenáveis ora não ordenáveis entre si, e grupos diferentes de 2 pessoas
	2	Seleção	Combinação/P.F.C.	Objetos	10 bolas numa caixa sendo 4 brancas e 6 pretas. Retirada de 4 bolas. Primeiramente, todas as 4 bolas brancas e depois, duas brancas e duas pretas.
	3	Seleção/Distribuição	Combinação/ Princípio Aditivo	Objetos	8 substâncias diferentes tomadas 2 a 2.
	4	Seleção/Distribuição	Combinação/P.F.C	Pessoas	Seleção de 2 entre 12 atletas de uma equipe e de 3 entre 10 atletas de outra equipe.
	5	Seleção	Combinação/P.F.C.	Objetos	15 bolas numa caixa sendo 8 brancas, 4 pretas e 3 amarelas. Retirada de 1 de cada cor.
	6	Seleção	Combinação/Princípio Aditivo	Pessoas	34 alunos formando grupos de 4 alunos dentre os quais duas alunas não podem ficar juntas.
	7	Seleção	Combinação	Pessoas	8 pessoas formando comissões inicialmente de 1 pessoa, e depois outros casos: de 2, de 3 e de 4 pessoas
	8	Seleção	Arranjo/Combinação	Pessoas	n pessoas formando grupos ordenáveis ou não de apenas 1 elemento e depois de 2, de 3 de 4 e de p elementos, p<n
	9	Seleção	Arranjo/P.F.C	Pessoas	24 pessoas dentre elas algumas com óculos e outras sem, sorteadas inicialmente 1 a 1 e depois 2 a 2 sob determinadas condições
	10	Distribuição	Permutação simples	Pessoas	7 pessoas em fila e vão trocar de lugar entre si
	11	Seleção	Combinação/P.F.C	Pessoas	19 homens formando grupos de 3 e 5 mulheres formando grupos de 3. Além disso, 6 homens com óculos formando grupos de 3 e, finalmente, grupos em que figurem 2 homens e 1 mulher e 1 homem e 2 mulheres

	12		Seleção	Combinação/P.F.C	Pessoas	7 pessoas dos quais 5 são homens e 2 são mulheres. formando grupos sob determinadas condições: todos homens, todas mulheres, todo usando óculos, ninguém usando óculos, e, grupos formados por 3 homens e 1 mulher e grupos formados por 2 homens e duas mulheres.
	13					
	Lição de casa	14	Distribuição	Permutação Simples	Pessoas	7 pessoas, 3 meninas e 4 meninos. Há restrições em alguns itens como duas meninas ficarem lado a lado.
		15	Distribuição	Arranjo simples/P.F.C	Números	Formação de números com quatro algarismos distintos
		16	Distribuição	Permutação simples/P.F.C e Princípio Aditivo	Pessoas	6 pessoas trocando de posição entre si, sob algumas condições como uma mulher esteja sempre entre dois homens que usam óculos
		17	Distribuição	Permutação simples/P.F.C e Princípio Aditivo	Pessoas	6 pessoas trocando de posição entre si, sob algumas condições como uma mulher esteja sempre entre dois homens que usam óculos

Quadro 7. Variáveis de tarefa e Atividade 3

Capítulo 6

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nossa investigação teve como mote o estudo dos Problemas de Contagem abordados ao longo do 2º. ano do Ensino Médio. Por se tratar de um tema matemático que causa desconforto tanto a alunos quanto a professores, fomos buscar razões para esse fato em pesquisas a respeito do ensino e da aprendizagem da Análise Combinatória.

Essas pesquisas apontaram alguns motivos que justificam esse desconforto. Dentre eles estão as dificuldades enfrentadas por alunos em distinguir situações em que a ordem é ou não relevante (Batanero, 1994; Navarro-Pelayo et. al., 1996), a ausência de raciocínio recursivo e de outras estratégias baseadas em representações semiótica mesmo entre aqueles com preparação matemática avançada (Navarro-Pelayo et. al., 1996; Roa, 2000; Esteves, 2001; Costa, 2003), e, a falta de preparo de professores no tratamento dos problemas em sala de aula (Costa, 2003; Sturm, 1999).

Propostas de uma abordagem alternativa também foram levantadas por essas pesquisas. São propostas que valorizam o enfrentamento das situações de combinatórias por recursos como o diagrama de árvores e no princípio multiplicativo e aditivo (Sturm, 1999; Pinheiro 2008), o uso da argumentação entre alunos de um mesmo grupo como forma de produzir conhecimento (Almeida, 2010), a intervenção do professor como meio de levar o aluno a refletir e buscar meios de resolver os Problemas de Contagem propostos (Placha, 2006).

Essas pesquisas nos levaram a refletir sobre o papel dos Problemas de Contagem, no desenvolvimento do raciocínio combinatório. Ao longo da história, esses problemas sempre estiveram presentes e merecem destaque. Foram eles os precursores das teorias ligadas a outros estudos no próprio ramo da Análise Combinatória e em Probabilidades. Além disso, sobre o raciocínio combinatório, Piaget e Inhelder, Fischbein e outros mostraram por meio de seus estudos que seu desenvolvimento se dá a partir do momento que a criança e o adolescente entra em contato com situações de contagem. E colocam essa estrutura cognitiva em igual importância às lógico-formais (Cf. Roa, 2000, p. 9).

Diante da importância dos Problemas de Contagem, procuramos investigá-los, apoiados na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, entendendo que tais problemas fazem parte de um conjunto de situações capaz de mobilizar estruturas cognitivas, e para o qual não se pode olhar do ponto de vista de um único conceito. Essas situações, dada a sua característica de mobilização de estruturas cognitivas, diferem entre si de modo a constituírem classes distintas de problemas. Os Problemas de Contagem se inserem no conjunto dos problemas ditos de "produto de medidas" das estruturas multiplicativas de Vergnaud.

A proposta de classificação dos Problemas de Contagem nos Modelos Combinatórios Implícitos de Dubois (1984), e seu posterior uso como uma das variáveis de tarefa usadas na pesquisa de Navarro-Pelayo et. al.(1996) chamou-nos a atenção. De fato a pesquisa a respeito do raciocínio combinatório baseado nas variáveis de tarefa – modelo combinatório implícito, operações combinatórias, a natureza dos elementos que se combinam e os valores dados aos parâmetros *m* e *n* – produziu seu efeito. A pesquisadora mostrou a influência dessas variáveis nas dificuldades dos alunos, considerando sua relevância na avaliação do raciocínio combinatório.

Desse modo, procuramos estabelecer as variáveis de tarefa de Navarro-Pelayo et. al. (1996) como a lente para observarmos os Problemas de Contagem. Dada a importância do Estado de São Paulo no cenário nacional, tendo a maior rede de ensino público do país, e a implantação da Proposta Curricular e dos Cadernos do Professor e do Aluno, escolhemos este último como material de pesquisa. Em outras palavras, nossa pesquisa se deu pela análise do conteúdo do 3º. bimestre do Caderno do Aluno que cursa o 2º ano do Ensino Médio na Rede Pública Paulista de Ensino.

Em nossas considerações finais buscamos confrontar os resultados desta investigação com as hipóteses que estabelecemos. Esse confronto objetiva apresentar os argumentos de respostas às questões levantadas: a) **Quais os tipos de problemas**

de combinatória que são abordados na Proposta Curricular Paulista? b) **Os problemas contemplam as variáveis citadas por Navarro-Pelayo et. al. (1996) em sua pesquisa?**

Passamos agora a confrontar as análises com as hipóteses levantadas

Hipótese 1. Os problemas propostos envolvem elementos das estruturas aditivas, do modo como foram descritas por Vergnaud (1991).

As situações de aprendizagem propostas nos Cadernos refletem a preocupação, dos autores, revelada inicialmente nos subsídios da Nova Proposta da SEE *em abordar a Análise Combinatória não por meio de categorizações dos problemas e consequente uso de fórmulas, mas por outros procedimentos. Esses últimos se pautam principalmente no uso de representações simbólicas (diagrama de árvores) e no princípio multiplicativo como estratégias de resolução.* (Cf. São Paulo, 2009a, p.9)

Os problemas que acabamos de referir, analisados nesta pesquisa, foram os da seção ***Situações de Aprendizagem 2 "Análise Combinatória: Raciocínios Aditivo e Multiplicativo"*** em que a preocupação, como o próprio nome sugere, era a resolução por meio dos raciocínios aditivo e multiplicativo. Nossa investigação, nesse sentido, procurou expor que os problemas que se apresentam no Caderno do Aluno de fato se enquadram na categoria de problemas de estruturas multiplicativas de Vergnaud e que em certos casos há um apelo a elementos das estruturas aditivas.

Esse enquadramento pode parecer inapropriado, no sentido de que a Teoria dos Campos Conceituais, em primeira análise, não se propõe a estudar a situação de aprendizagem propriamente. Seu objetivo primeiro é fornecer elementos que permitam avançar na compreensão das relações entre os "conhecimentos", sendo este último admitido "tanto como saber fazer como os saberes expressos" (Vergnaud, 1991, p.155). No entanto, as situações são, por assim dizer, o ambiente em que se desencadearão os conflitos cognitivos do sujeito em ação. O próprio autor considera que a "classificação das relações de base e das classes de problemas que se podem gerar a partir delas é um trabalho científico indispensável" (VERGNAUD, 1991, p.172).

O uso do raciocínio multiplicativo e aditivo foi uma opção dos autores expressa nos subsídios da Proposta Curricular para a abordagem dos Problemas de Contagem no 2º. ano do Ensino Médio. Outra opção foi o uso do diagrama de árvores (ou árvore de possibilidades como usa a Proposta Curricular) como instrumento de resolução dos Problemas de Contagem. Essas opções encontram respaldo não somente na teoria de Vergnaud (1991) e também em outras pesquisas como a de Fischibein (1975), Sturm (1999), Esteves (2001), Barreto (2001), Correia e Fernandes (2007).

Nossa análise a partir das variáveis de tarefa de Batanero (1994) e Navarro-Pelayo (1996) permite-nos levantar um perfil dos problemas do Caderno do Aluno do 2º. ano do Ensino Médio a partir das hipóteses de trabalho consideradas.

Hipótese 2. Os problemas propostos podem ser enquadrados nos modelos combinatórios implícitos – seleção, distribuição e partição.

Essa hipótese foi em parte verificada, uma vez que detectamos um grande número de problemas de seleção e de distribuição, porém nenhum relativo ao modelo de partição. Os modelos de seleção foram encontrados em número ligeiramente maior que os de distribuição. Além disso, muitos desses problemas poderiam ser "traduzidos" ou enfrentados segundo um ou outro modelo.

Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1997) ressaltam que essas traduções entre os diferentes modelos combinatórios, assim como o uso do raciocínio recursivo e de procedimentos sistemáticos de enumeração, devem ser consideradas quando se pretende organizar ou avaliar a aprendizagem em Análise Combinatória. Em razão disso entendemos que a ausência de problemas de partição é um fato a se considerar.

Baseados em seus estudos, os mesmos pesquisadores afirmam que o modelo de seleção é o mais usado na introdução dos elementos de Análise Combinatória nas escolas, pois se baseia na ideia de amostragem. Esse fato foi verificado por nós quando da introdução dos problemas de contagem: o problema da escolha entre saias e blusas.

Hipótese 3. As situações de arranjo, permutação e combinação (considerando a possibilidade ou não de repetição) aparecem em contextos diversificados.

Como já relatamos anteriormente, os contextos em que eram abordadas as situações de arranjos, permutação e combinação, de um modo geral eram bem definidos:

- os arranjos, ligados às situações de construção de números a partir de um universo de algarismos dados;
- as permutações, às situações de organização de elementos em filas e anagramas;
- as combinações, às situações de formação de grupos.

Poucos foram os problemas em que as operações combinatórias figuravam num contexto diverso destes citados.

Os diferentes contextos em que se abordam as operações combinatórias, no nosso ponto de vista, se tornam um caminho interessante quando o que se pretende é pontuar as diferenças entre os vários agrupamentos. Batenero (1994), Navarro-Pelayo (1996), Roa (2000), Costa (2003) Correia e Fernandes (2007) e outros observam, em suas pesquisas, que o reconhecimento da relevância ou não ordem é um dos pontos nevrálgicos quando se lida com Problemas de Contagem. Envolver diferentes contextos, no nosso ponto de vista, seria um meio de o aluno confrontar situações em que precisasse avaliar a importância ou não da ordem.

]

Hipótese 4. Os problemas propostos envolvem elementos diversos como pessoas, objetos, números, letras e estes se distribuem entre as situações de arranjo, permutação e combinação de modo equilibrado.

Os problemas propostos no Caderno do Aluno, na sua maioria, envolviam situações com números, letras, pessoas, objetos. Havia também alguns em que nfiguravam nenhum desses elementos, ao que consideramos como “outros”. Esses elementos são os mesmos que aparecem no rol de treze questões propostas por Batanero (1994) e Navarro-Pelayo et al. (1996). Todavia há uma diferença: as pesquisadoras procuram distribuir esses elementos em problemas diversos de arranjo e permutação (com ou sem repetição), como também de combinação.

Nos problemas que analisamos constatamos que letras e números estão ligados somente a situações em que a ordem importa – Situações de Aprendizagem 1 e 2.

Pessoas e objetos, por sua vez figuram em todas as situações com destaque para os problemas da Situação de Aprendizagem 3.

Os problemas que remetem à questão da ordem têm fácil identificação quando os elementos envolvidos são letras e números. Se por um lado isso é um facilitador, por outro entendemos que propor situações desse tipo pode restringir o alcance de um ensino em que se privilegiem diferentes formas e estratégias de resolução.

Hipótese 5. Os parâmetros m e n têm seus valores aumentados gradativamente conforme o aumento do nível de dificuldade que se deseja.

Nossa análise validou essa hipótese. De fato, constatamos que os problemas têm os valores dos parâmetros *m* (número total de elementos a serem agrupados), e *n* (números de elementos de cada agrupamento) aumentados gradativamente, conforme se deseja aumentar o nível de dificuldade dos problemas.

Essa é também uma opção metodológica da Proposta Curricular que visa às generalizações expressas nas fórmulas do cálculo das permutações, combinações e arranjos[32].

Com esses elementos podemos responder às questões referentes a que tipos de Problemas de Contagem figuram no Caderno do Aluno do 2º. ano do Ensino Médio e se estes problemas contemplam as variáveis de tarefa de Navarro-Pelayo et al (1996).

Foram observados vários Problemas de Contagem no material observado e todos eles são do tipo produto de medidas, segundo a classificação dada aos problemas de estrutura multiplicativa de Vergnaud. Observamos, todavia, o auxilio das estruturas aditivas, nomeadamente das relações de composição, em algumas situações analisadas, embora em número reduzido. Acreditamos que seria proveitoso que fossem propostas mais situações desse tipo, dada sua importância na formação do raciocínio combinatório.

[32] Cf. SÃO PAULO, 2009a, p.26;34-35

Quanto às variáveis de tarefa, elas se encontram parcialmente contempladas nos problemas alvo de nossa análise.

A ausência de situações envolvendo o modelo de partição chamou-nos a atenção. Nas pesquisas de Batanero (1994), Navarro-Pelayo (1996), Roa (2000), Rudat (2007) os problemas com estrutura baseada nesse modelo combinatório foram os que apresentaram as maiores porcentagens de erro e os maiores índices de dificuldade no seu enfrentamento.

Outro ponto que destacamos foi o contexto do enunciado dos problemas que estudamos. No nosso entender, os conceitos de arranjo, permutação e combinação ficaram muito associados a determinadas situações. Uma associação semelhante a essa se deu com os elementos que se combinavam, conforme relatamos anteriormente. Olhando esse fato a partir da Teoria dos Campos Conceituais, ele não favorece a construção dos conceitos ligados à combinatória exatamente por não apresentá-los em situações diversificadas.

Contudo, não deixamos de salientar o mérito da Nova Proposta Curricular do Estado de São Paulo em abordar esse assunto de um modo que seja significativo para alunos e professores. Isso é reflexo, no nosso modo de ver, das pesquisas feitas a respeito desse tema e, antes de tudo, da preocupação numa aprendizagem efetiva.

Nosso trabalho quis contribuir não somente para uma visão crítica das situações sobre Análise Combinatória contidas no Caderno do Aluno, do 2º. ano do Ensino Médio da Rede Estadual Paulista de Educação. Acreditamos que uma organização dos Problemas de Contagem baseada nas variáveis de tarefa já descritas pode ser uma ferramenta útil na constituição do raciocínio combinatório.

7. Referências

ALMEIDA, A. L. **Ensinando e Aprendendo Análise Combinatória com Ênfase na Comunicação Matemática:** um estudo com o 2º ano do Ensino Médio. Dissertação (Mestrados Profissional em Educação Matemática). Universidade Federal de Ouro Preto. Ouro Preto, MG. 2010.

ALMEIDA, A. L.; FERRREIRA, A. C.. Aprendendo análise combinatória através de resolução de problemas. In ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUÇÃO EM EUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8, 2008. Londrina. **Anais**:.. Rio Claro: UNESP, 2008. Disponível em <http://www2.rc.unesp.br/eventos/matematica/ebrapem2008/upload/261-1-A-gt11_almeida_e_ferreira_ta.pdf>. Acesso em 05/06/2010.

APPOLINÁRIO, F. **Dicionário de metodologia científica**: um guia para a produção do conhecimento científico. São Paulo. Atlas. 2009.

BARDIN. L. **Análise de Conteúdo**. Edições 70. Lisboa. 1977

BARRETO, I. M. A. **Problemas Verbais Multiplicativos de Quarta Proporcional: A diversidade de procedimentos de resolução**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUCSP. São Paulo. 2001.

BATANERO (et. al). **Razonamiento Combinatório**. Madrid. Sintesis. 1994.

BATANERO, C., GODINO, J. D., NAVARRO-PELAYO,, V. Effect of the Implicit Combinatorial Model on Combinatorial Reasoning in Secondary School Pupils. In: **Educational Studies in Mathematics**. v.32. p.181-199. 1997.

BORBA, R. PESSOA. C. Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª. a 4ª. série**. Zetetiké. v. 17 n.28**. Campinas: Unicamp, 2009.

_____________________. O Desenvolvimento do Raciocínio Combinatório na Escolarização Básica. In: **Em teia**. Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana. v. 1. n.1. 2010. Disponível em: < http://www.gente.eti.br/emteia/index.php/emteia/article/view/4/2>. Acesso em 8 de janeiro de 2011.

BOURBAKI, N. **Elementos de la historia de las matemáticas**. traduction: Jesus Hernandes. Alcanza Editorial. Madrid. 1976.

CANÕAS, S. S. **O Campo Conceitual Multiplicativo na Perspectiva do Professor das Séries Iniciais (1ª a 4ª séries)**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. PUC-SP. São Paulo. 1997

CARVALHO, Dione Lucchesi de. **Metodologia do Ensino da Matemática**. Cortez. São Paulo, 1994.

CORREIA, P. F.; FERNANDES, J. A.. **Estratégias Intuitivas de Alunos do 9.º Ano de Escolaridade na Resolução de Problemas de Combinatória**. In: BARCA, A.; PERALBO, M.; PORTO, A.; Duarte da Silva, B. e Almeida, L. (Org.). Congresso Internacional Galego-Portugués de Psicopedagoxía. A.Coruña/Universidade da Coruña: Revista Galego-Portuguesa de Psicoloxía eEducación, 2007, p. 1256-1267.

COSTA, C. A. **As Concepções dos Professores de Matemática sobre o Uso da Modelagem no Desenvolvimento do Raciocínio Combinatório no Ensino Fundamental.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica. PUC-SP. São Paulo. 2003.

DUBOIS, J.G. Une systématique des configurations combinatoires simples. In **Educational Studies in Mathematics.** v.15. p.37-57. 1984

ESTEVES, I. **Investigando os fatores que influenciam o raciocínio combinatório em adolescentes de 14 anos – 8ª série do ensino fundamental**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Centro das Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2000.

EVES. H. **Introdução à história da matemática**. tradução: Higyno H. Domingues. Campinas. Editora Unicamp. 2004.

FIORENTINI, D. LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos**.2ª. ed. Campinas, SP. Autores Associdados. 2007.

FISCHBEIN, E. PAMPU, I. MINZAT, I. Effects of age and instruction on combinatory ability in children. In **The intuitive sources of probabilistic thinking in children**. Dordrecht: Reidel. 1975

FISCHBEIN, E.. **The intuitive sources of probabilistic thinking in children.** Dordrecht: Reidel.1975.

FISCHBEIN, E. GAZIT, A. The combinatorial solving capacity in children and adolescents. In **Zentralblatt für Didaktik der Mathematik**, 5: 193-198. 1988

GODINO, J. A. (et al). **An onto-semiotic analysis of combinatorial problems and the solving processes by university students.** In: Educational Studies of Mathematics.60. p.3-36. 2005

GUIMARÃES, K. P. **Processos Cognitivos Envolvidos na Construção de Estruturas Multiplicativas.** Tese (Doutorado em Educação). Universidade Estadual de Campinas. UNICAMP. Campinas,SP. 2004.

HAZZAN, S. Fundamentos de Matemática Elementar. v. 5. 6. ed. São Paulo. Atual Editora. 1993.

IEZZI, G. et al. **Matemática: 2ª. série**. 2º. grau. 6 ed. São Paulo: Atual Editora, 1979.

KATZ, V. J. Combinatorics and Induction in Medieval Hebrew and Islamic Mathematics. In: **Vita Mathematica**: historical research and integration with teaching. USA. Mathematical Association of America. 1996.

KNOBLOCK, E. Combinatorial Probability. In: **Companion encyclopedia of the history and philosophy of the mathematical sciences**. Ivor Grattan Guinness editor. Routledge Diference. London, UK. 1992.

MACHADO, S. D. et al. **Educação Matemática: uma introdução**. Série Trilhas. São Paulo: EDUC. 1999.

MAGINA, S. CAMPOS, T. As Estratégias dos Alunos na Resolução de Problemas Aditivos: um estudo diagnóstico. In: **Educação Matemática Pesquisa**. Educ. v. 6. São Paulo. 2004.

MAGINA, S. et. al. Como e Quando Introduzir a Divisão nas Séries Iniciais do Ensino Fundamental? Contribuição para o debate. In: **EM TEIA – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana.** v. 1. Ano 1. Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco. 2010

MENDONÇA, L. **Trajetória Hipotética de Aprendizagem: Análise Combinatória.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Centro das Ciências Exatas e Tecnologia. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo. 2011.

MORGADO, A. C. (et. al.). **Análise Combinatória e Probabilidade**. SBM. Rio de Janeiro. 1991.

MORO, M. L. F. SOARES, M. T. C. Níveis de raciocínio combinatório e produto cartesiano na escola fundamental. In: **Educação Matemática Pesquisa**. v. 8. n.1. São Paulo. 2006.

NAVARRO-PELAYO, V. **Estructura de los problemas combinatórios simples y Del razonamiento combinatório em alumnos de secundaria.** Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. 1994.

NAVARRO-PELAYO, V. et al. Razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria. In: **Educación Matemática**, 8(1), 26-39. 1996. Disponível em <http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/RAZON.htm>., acesso em 07.11.2010.

ODDI, V. S. **Percepção dos Professores de Matemática do Ensino Médio sobre o Projeto "São Paulo Faz Escola": um estudo em duas escolas de uma cidade da Grande São Paulo**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Centro das

Ciências Exatas e Tecnologia. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo. 2009.

OLIVEIRA, E. (et. al). Análise de Conteúdo e Pesquisa na Área de Educação. In: **Revista Diálogo Educacional.** v.4. n.9. Programa de Pós-Graduação PUC-PR. 2003.

PINHEIRO, C. A. M. **O Ensino da Análise Combinatória a partir de situações-problema**. Dissertação (Mestrados em Educação). Universidade do Estado do Pará. Belém. 2008

PLACHA, K. C. **As soluções de problemas de produto de medidas de crianças da 3ª série do Ensino Fundamental e a interação do professor**. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Federal do Paraná. Curitiba. 2006.

ROA, R. **Razonamiento combinatório en estudiantes com preparación matemática avanzada**. Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada, 2000.

ROA. R. FERNANDES, J. A. CORREA, P. F. **Aquisição das operações combinatórias por alunos pré-universitários através de uma intervenção de ensino**. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa [en línea] 2010, vol. 13 [citado 2011-07-21]. Disponible en Internet: http://redalyc.uaemex.mx/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=33515995005. Acesso em: 21 de julho de 2011.

RUDAT, R. **Modèles combinatoires implicites et résolution de problèmes en classe de 4ème : une étude des effets liés à la sémantique des situations.** Thèse Docteur. Faculté de Sciences Humanines et Socieles. Université Paris V. René Descartes. 2007.

SABO, R. D. O O Ensino dos Conceitos de Análise Combinatória e o Livro Didático: discurso de professores do ensino médio. In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUÇÃO EM EUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8, 2008. Londrina. **Anais**:.. Rio Claro: UNESP, 2008. Disponível em <http://www2.rc.unesp.br/eventos/matematica/ebrapem2008/upload/261-1-A-gt11_almeida_e_ferreira_ta.pdf>. Acesso em 05/06/2010.

________________. **Saberes Docentes: A Análise Combinatória no Ensino Médio.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Centro das Ciências Exatas e Tecnologia. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. 2010.

SÃO PAULO. **Proposta Curricular do Estado de São Paulo**. Coordenação Geral Maria Inês Fini. São Paulo. SEE. 2008a.

_________________. **Proposta Curricular do Estado de São Paulo**: Matemática/ Coordenação Geral Maria Inês Fini. São Paulo. SEE. 2008b.

SÃO PAULO. **Caderno do Professor: Matemática. Ensino Médio**. 2ª. série. Vol. 3. Coordenadora Maria Inês Fini. São Paulo. SEE. 2009a

________________. **Caderno do Aluno: Matemática. Ensino Médio.** 2ª. série. Vol. 3. Coordenadora Maria Inês Fini. São Paulo. SEE. 2009b

SANTOS, C. P. (et al). **A Geometria + Puzzle Stomachion**. Lisboa. Edimprensa. Lisboa. 2007.

SEVERINO, A. J. **Metodologia do trabalho científico**. 23 ed. São Paulo: Cortez. 2007.

SILVA, S. R. F. **Um estudo das estruturas multiplicativas nos guias de planejamento e orientações didáticas do programa ler e escrever**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Bandeirantes de São Paulo. UNIBAN. São Paulo. 2010.

SOUZA, A. C. P. Análise combinatória apoiada na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através de resolução de problemas. In ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8, 2008. Londrina. **Anais**:.. Rio Claro: UNESP, 2008. Disponível em <http://www2.rc.unesp.br/eventos/matematica/ebrapem2008/upload/309-1-A-gt8_castro_ta.pdf>. Acesso em 05/06/2010.

STIGLER, S. M. **Statistics on the table**: the history of statistical concepts and methods. Harvard University. USA. 2002.

STURM, W. **As possibilidades de um ensino de análise combinatória sob uma abordagem alternativa**. 94 p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas. UNICAMP. Campinas.1999.

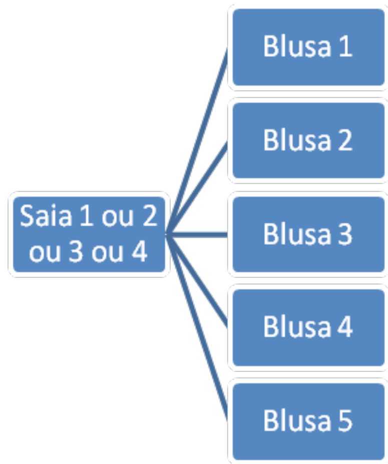
VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 10, n. 23, p. 133-170, 1991.

WALLIS, J. A discourse of Combinations, Alternations, and Aliquot parts. In: **The doctrine of permutations and combinations**. London. 1795.

ANEXO A – *Problemas da "Atividade 1 – Construindo a árvore de possibilidades"*

Problema 1

Considere a seguinte situação: uma menina deseja vestir-se com uma saia e uma blusa e dispõe de 4 saias diferentes e 5 blusas diferentes. O esquema a seguir representa as possibilidades de escolha da menina.



Escreva uma multiplicação para indicar o total de diferentes possibilidades de escolha da menina.

Problema 2

Um roteiro turístico prevê a visita a duas cidades do conjunto conhecido por "Cidades Históricas de Minas Gerais", formado pelas cidades de Ouro Preto, Mariana, Tiradentes e São João Del Rei. Quantos roteiros diferentes poderão ser traçados se:

a) Ouro Preto sempre fizer parte do roteiro?

b) Não houver restrição à escolha de duas cidades?

Problema 3

Os números 342, 335, 872, 900 são, entre tantos outros, números de três algarismos. Entre esses exemplos, os números 342 e 872 não repetem algarismos, contrariamente ao que ocorre, por exemplo, com os números 335 ou 900. Quantos números com 3 algarismos podemos escrever se:

a) Todos começarem por 1 e os algarismos puderem ser repetidos?

b) Todos começarem por 1 e os algarismos não puderem ser repetidos?

c) Não houver qualquer restrição, isto é, desde 100 até 999?

d) Os números não contiverem algarismos repetidos?

Problema 4

Existem 9000 números de 4 algarismos, e 1000 é o menor deles, e 9999 o maior. Entre esses 9000 números há muitos que não repetem algarismos, com 1023, 2549, 4571 ou 9760. Quantos são esses números de 4 algarismos distintos?

Problema 5

Para que um número de 3 algarismos seja par é preciso que ele "termine" por um numeral par, ou, em outras palavras, é preciso que o algarismo das unidades seja 0, ou 2, ou 4, ou 6, ou 8, ou seja por exemplo: 542, 134, 920, 888, etc.

a) Quantos números pares de 3 algarismos existem?

b) Quantos números ímpares de 3 algarismos existem?

c) Quantos números ímpares de 3 algarismos **distintos** existem?

d) Quantos números pares de 3 algarismos **distintos** existem?

e) A soma dos resultados obtidos nos itens c e d deste problema deve ser igual ao resultado do item d do **Problema 3**. Verifique se isso ocorreu com os resultados que você obteve, se não, procure descobrir o que saiu errado.

Problema 6

Considere os numerais 1, 2, 3 e 4 e também todos os números de 4 algarismos distintos que podemos formar com eles. Imagine que todos esses números serão ordenados, do menor para o maior. Isso feito, o primeiro da fila será o 1234, o segundo será o 1243, e assim por diante, até o último, que será o 4321.

a) Qual é a posição do número 4321 nessa fila?

b) Qual é a posição do número 3241 nessa fila?

c) Acrescentando o numeral 5 aos numerais 1, 2, 3 e 4 e ordenando todos os números de 5 algarismos distintos que podem ser formados, qual é o número que ocupa a 72ª. posição?

Conclusão da atividade 1

ANEXO B – *Problemas da "**Atividade 2 – Formação de filas sem e com elementos repetidos"***

Leitura e Análise de Texto

As filas

Quando duas pessoas A e B colocam-se em fila, há apenas duas possibilidades: primeiro vem A e depois B, ou primeiro vem B e depois A. Se uma pessoa C juntar-se a essas duas, a fila poderá, agora, ser formada de 6 maneiras diferentes:

ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA

Se uma quarta pessoa juntar-se a essas, agora, 4 vezes mais filas do que o número anterior. Isto é, serão 4.6 = 24 filas.

Problema 1

Quantas filas diferentes poderão ser formadas com 5 pessoas, apenas alternando suas posições na fila?

Problema 2

Considere a palavra CABO. Se trocarmos a ordem entre as letras dessa palavra, formando agrupamentos de letras que podem ou não formar palavra conhecida, estaremos formando "anagramas". Veja alguns dos anagramas da palavra CABO:

COBA, BACO, OCBA, ABOC, ACOB

a) Começando por A, quantos anagramas diferentes poderemos formar?

b) Quantos anagramas terminados por O existem?

c) No total, quantos anagramas existem?

Problema 3

Em uma caixa foram colocadas 9 bolinhas, numeradas de 1 a 9. Para retirar uma bolinha dessa caixa, temos 9 maneiras diferentes: pegar a bolinha 1, ou a bolinha 2, ou a bolinha 3, e assim por diante. Para retirar duas bolinhas da caixa, temos já um número bem maior de maneiras diferentes: temos 8 vezes mais, isto é, 72 maneiras diferentes. Isso porque há 8 possibilidades de pegar a segunda bolinha depois de a primeira delas ter sido apanhada. Responda:

a) Quantas maneiras diferentes existem para pegar 3 bolinhas dessa caixa?

b) Quantas maneiras diferentes existem para pegar 4 bolinhas dessa caixa?

Problema 4

Suponha que, no caso do problema anterior, a bolinha que for pega seja jogada novamente na caixa antes que a próxima bolinha seja sorteada. Em outras palavras, a bolinha é reposta na caixa a cada sorteio. Nessa condição, de quantas maneiras diferentes podemos retirar dessa caixa:

a) duas bolinhas;

b) três bolinhas;

c) quatro bolinhas.

Problema 5

Quantos anagramas diferentes podem ser formados com as letras das palavras:

a) BIA b) NICO c) LUCIA d) CAMILO

Problema 6

Sete pessoas formarão ao acaso uma fila indiana. Em quantas ordenações diferentes poderá ser formada a fila?

Problema 7

Trocando a ordem das letras da palavra INA podem ser formados 6 anagramas diferentes:

INA, IAN, AIN, ANI, NAI, NIA

Com as letras da palavra ANA, o número de anagramas é menor; são apenas 3:

ANA, AAN, NAA

Por que o número de anagramas dessas palavras não é o mesmo, se ambas têm 3 letras? A resposta é: a palavra ANA tem letras repetidas.

A palavra LUTA tem 24 anagramas, enquanto a palavra LULU, que tem 2 "L" e 2 "U", tem apenas 6 anagramas, pois a troca de um "L" com outro, ou a troca entre os dois "U" não geram novo anagrama. Quer dizer, o total de 24 anagramas de uma palavra em 4 letras distintas fica, no caso de LULU, duas vezes dividido por 2, por causa do "Ls" e dos "Us" repetidos. Então, 24 ÷ 2 ÷ 2 = 6.

Agora, responda: qual é o total de anagramas da palavra carro?

a) CARRO?

b) CORPO?

c) CORRO?

Problema 8

Quantos anagramas podem ser formados com as letras da palavra:

a) CASA

b) CABANA

c) BANANA

d) BANANADA

Problema 9

Quando três meninas, Ana, Bia e Carla, e um menino, Dan, formam uma fila, temos 24 filas diferentes, como já vimos em problemas anteriores. Se, no entanto, o critério para a formação de fila não for a individualidade das pessoas, mas apenas o gênero, serão apenas 4 filas diferentes formadas por 3 mulheres (M) e 1 homem (H), da seguinte forma

MMMH, MMHM, MHMM, HMMM

Com 5 pessoas, sendo 2 meninas e 3 meninos, quantas filas diferentes poderão ser formadas no caso de:

a) Ser considerada a individualidade das pessoas?

b) Ser considerado somente o gênero das pessoas?

Problema 10

Três livros de Geografia, diferentes e três livros de História diferentes serão colocados um sobre o outro, de modo a formar uma pilha de livros. Quantas pilhas diferentes poderão ser formadas se:

a) não importar a matéria e sim os livros, que, no caso, são todos diferentes?

b) a diferença entre os livros não for levada em conta, mas apenas o fato de que são duas disciplinas diferentes?

Problema 11

Sete pessoas, sendo 3 meninas e 4 meninos, formarão em fila. Desconsiderando a individualidade e levando em conta apenas o sexo dessas pessoas, quantas ordenações poderá ter a fila formada?

Problema 12

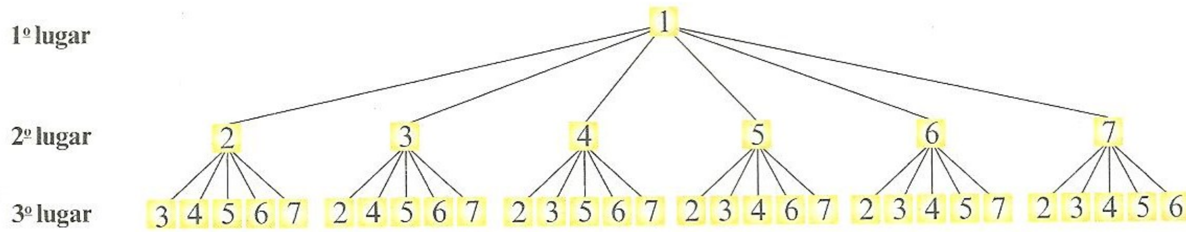
Um jogo de futebol entre duas equipes **A** e **B** terminou empatada em 3x3. Alguém que não assistiu ao jogo pretende descobrir a ordem em que ocorrem os gols. Será que **A** começou ganhando e **B** empatou? Será que **B** fez 3x0 e depois A tentou reverter a situação? Enfim, como foram saindo os gols nessa partida? Quantas ordenações possíveis existem para os gols que ocorreram nessa partida?

Problema 13

Aplicando a propriedade distributiva e desenvolvendo o binômio $(A+B)^5$, isto é, fazendo (A+B).(A+B).(A+B).(A+B).(A+B), aparecerá um termo igual a A^5 e um termo igual a B^5. No entanto, vão aparecer vários termos com parte literal igual a A^3B^2, decorrentes da multiplicação entre 3 "As" de qualquer dos 5 binômios por 2 "Bs", também de qualquer dos 5 binômios. Quantos termos iguais com parte literal A^3B^2 aparecerão?

ANEXO C – *Problemas da "Atividade 3 – Formação de grupos com elementos de uma ou mais categorias"*

Observe a representação de uma parte da árvore de possibilidades para o seguinte problema: Quantos grupos ordenáveis (fila) de 3 elementos podemos formar com 7 pessoas?



Ao observar a árvore percebemos que, para determinada pessoa em 1º. lugar, há 6 opções para o 2º. colocado, e, para cada um destes, há 5 possibilidades de escolha para o 3º. colocado. Assim, a quantidade de grupos ordenáveis é, nesse caso, igual ao produto 7.6.5 = 210.

Agora, vamos mudar a questão, e perguntar: a quanto ficaria reduzido o número de agrupamentos se eles não fossem ordenáveis? Isto é, se o agrupamento "João, José, Maria" fosse o mesmo de "João, Maria, José", e o mesmo de "Maria, José, João", e igual a todos os demais em que só é trocada a ordem dos participantes? Em outras palavras, se em vez de serem feitas filas fossem feitos grupos de pessoas?

Os 210 grupos ordenáveis ficariam reduzidos a 35 grupos não ordenáveis (resultados de 210÷6), uma vez que cada grupo de 3 elementos permite 6 permutações entre seus elementos.

Problema 1

Cinco pessoas, Arnaldo, Benedito, Carla, Débora e Eliane estão juntas em uma sala.

a) Quantos agrupamentos **ordenáveis** diferentes (filas) de 5 pessoas podem ser formados com essas 5 pessoas?

b) Quantos agrupamentos **não ordenáveis** diferentes (grupos) de 5 pessoas pode ser formadas com essas 5 pessoas?

c) Quantos grupos diferentes de 2 pessoas podem ser formados com as pessoas presentes na sala?

Problema 2

Há 10 bolas em uma caixa, todas iguais com exceção da cor, sendo 4 bolas brancas e 6 bolas pretas. Quantos conjuntos de 4 bolas podem ser formados, sendo:

a) todas brancas?

b) 2 brancas e 2 pretas?

Problema 3

Sobre a prateleira de um laboratório repousam 8 substâncias diferentes. Quantas misturas diferentes com iguais quantidades de 2 dessas substâncias podem ser feitas se:

a) não houve qualquer restrição?

b) entre elas há 3 substâncias que não podem ser misturadas duas a duas por formarem composto que exala gás tóxico?

Problema 4

Uma seleção de basquete com 5 jogadores será formada por atletas escolhidos de apenas duas equipes **A** e **B**. Da equipe **A**, que possui 12 atletas, serão selecionados 2, enquanto a equipe **B**, que possui 10 atletas, cederá 3 para a seleção. Se todos os atletas têm igual potencial de jogo, quantas seleções diferentes poderão ser formadas?

Problema 5

A partir de um conjunto de 15 bolas iguais, a não ser pela cor, em que 8 são brancas, 4 pretas e 3 amarelas, serão formados grupos de 3 bolas. De quantas maneiras diferentes poderão ser formados esses grupos se não são desejáveis grupos que contenham bolas de uma única cor?

Problema 6

Na classe de Luiza e Roberta estudam, contando com elas, 34 alunos. De quantas maneiras diferentes podem ser formados grupos de trabalho de 4 alunos se Roberta e Luiza não podem participar juntas de um mesmo grupo?

Problema 7

Dispomos de 8 pessoas para formar grupos de trabalho. De quantas maneiras diferentes o grupo poderá ser formado se dele participar(em):

a) apenas uma das 8 pessoas?

b) duas das 8 pessoas?

c) três das 8 pessoas?

d) quatro das 8 pessoas?

Problema 8

Em uma sala há n pessoas, com as quais formaremos grupos, ordenáveis ou não. De quantas maneiras diferentes poderemos formar o grupo se ele tiver:

a) apenas 1 elemento?

b) 2 elementos?

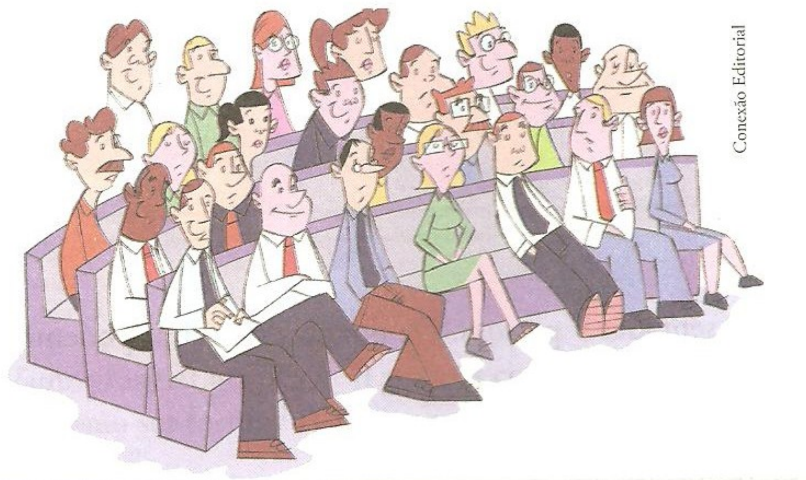
c) 3 elementos?

d) 4 elementos?

e) p elementos, $p < n$?

O texto seguinte serve de enunciado para os próximos problemas, de 9 a 13.

Observe a "foto" a seguir, das 24 pessoas que esperavam o início da aula de Matemática e complete a tabela com a quantidade de pessoas que apresentam as características indicadas.



	Homens	Mulheres
Com óculos		
Sem óculos		
Total		

Problema 9

De quantas **maneiras diferentes** podemos sortear, entre essas pessoas:

a) uma mulher?

b) um homem?

c) duas mulheres?

d) dois homens?

e) duas pessoas com óculos?

Problema 10

Na primeira fila estão sentadas 7 pessoas. De quantas maneiras podemos trocá-las de lugar de modo a mantê-las todas na mesma fila?

Problema 11

De quantas maneiras diferentes podemos formar, com as pessoas da foto, grupos de

a) 3 homens?

b) 3 mulheres?

c) 3 pessoas com óculos?

d) 2 homens e 1 mulher?

e) 1 homem e duas mulheres?

Problema 12

Agora atenção! Vamos formar grupos de 4 pessoas com as 7 pessoas da primeira fileira. Quantos grupos diferentes poderão ser formados se:

a) todos forem homens?

b) todas forem mulheres?

c) todos usarem óculos?

d) nenhuma pessoa usar óculos?

e) o grupo for formado por 3 homens e 1 mulher?

f) se o grupo for formado por 2 homens e 2 mulheres?

Problema 13

Invente um problema que envolva a ideia de agrupamento de pessoas, levando em conta o pessoal que está sentado ao seu redor. Não vale ser repetido e tem que ser resolvido.

Problema 14

Sete pessoas, 3 meninas e 4 meninos, entram em um cinema e vão ocupar 7 cadeiras. Uma pessoa em cada cadeira, colocadas lado a lado. De quantas maneiras diferentes essa ação poderá ser realizada se:

a) não houver qualquer restrição?

b) na primeira cadeira sentar um menino e na última uma menina?

c) duas meninas sempre ficarem lado a lado?

d) todas as meninas ficarem lado a lado?

e) todas as meninas ficarem lado a lado e os meninos também?

Problema 15

A fim de angariar fundos para uma viagem de estudos com sua turma, um professor de Matemática organizou uma rifa. Para tanto, ele imprimiu a maior quantidade possível de bilhetes contendo um l número de 4 algarismos distintos. Depois vendeu esses bilhetes a R$ 2,00 cada um para comprar as passagens que custavam, ao todo, R$ 4 000,00. Supondo que o professor tenha vendido todos os bilhetes, responda: ele conseguiu ou não comprar as passagens?

O enunciado seguinte serve para a resolução dos próximos problemas, de 16 a 19.

O desenho mostra 12 pessoas sentadas em uma arquibancada. Na fila de trás estão 5 homens e 1 mulher. Na fila da frente estão 4 homens e 2 mulheres.

Entre as pessoas da fileira da frente, duas usam óculos, e duas pessoas da fileira de trás também usam.

Problema 16

Pensando apenas nas pessoas da fila de trás, responda: de quantas maneiras as pessoas podem trocar as posições entre si,

a) sem qualquer restrição?

b) de modo que as duas pessoas de óculos fiquem sempre separadas?

c) de modo que a mulher esteja sempre entre os dois homens que usam óculos?

Problema 17

Pensando apenas nas pessoas da fila de frente, responda: de quantas maneiras as pessoas podem trocar as posições entre si,

a) se as duas pessoas que usam óculos estiverem sempre lado a lado?

b) se os homens sempre ficarem juntos e as mulheres também?

Problema 18 (Probabilidade)

Problema 19 (Probabilidade)