Universidade Estadual de Londrina

MARCOS ANTONIO MOSCA

# NÚMEROS IRRACIONAIS NO ENSINO MÉDIO:
DESDOBRANDO O TEMA COM EQUAÇÕES POLINOMIAIS

LONDRINA
2013

MARCOS ANTONIO MOSCA

# NÚMEROS IRRACIONAIS NO ENSINO MÉDIO:
DESDOBRANDO O TEMA COM EQUAÇÕES POLINOMIAIS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Túlio Oliveira de Carvalho

Londrina
2013

**Catalogação elaborada pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da Universidade Estadual de Londrina**

**Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)**

M894n Mosca, Marcos Antonio.
Números irracionais no ensino médio : desdobrando o tema com equações polinomiais / Marcos Antonio Mosca. – Londrina, 2013.
104 f. : il.

Orientador: Túlio Oliveira de Carvalho.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2013.
Inclui bibliografia.

1. Matemática – Estudo e ensino – Teses. 2. Matemática – Livros didáticos – Teses. 3. Números irracionais – Teses. 4. Equações – Raízes – Teses. 5. Equações – Soluções numéricas – Teses. I. Carvalho, Túlio Oliveira de. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Sociedade Brasileira de Matemática. IV. Título.

CDU 51:37.02

MARCOS ANTONIO MOSCA

# **NÚMEROS IRRACIONAIS NO ENSINO MÉDIO:**
# DESDOBRANDO O TEMA COM EQUAÇÕES POLINOMIAIS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática.

**BANCA EXAMINADORA**

Prof. Dr. Túlio Oliveira de Carvalho
Universidade Estadual de Londrina

Prof. Dr. Ulysses Sodré
Universidade Estadual de Londrina

Prof. Drª. Karina Alessandra Pessoa da Silva
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Londrina, 08 de Agosto de 2 013.

Dedico este trabalho à minha esposa Litiane e nossas amadas filhas.

# AGRADECIMENTOS

*A Deus pela vida, força, disposição e coragem para vencer os obstáculos;*

*Ao professor Túlio pelo apoio, paciência, disposição e clareza nas orientações;*

*À minha família, Litiane, Isabela e Manuela, pela paciência, apoio, compreensão e amor;*

*Aos colegas e professores do PROFMAT-UEL pela amizade e pelas valiosas contribuições;*

*À Banca Examinadora;*

*À CAPES pelo apoio financeiro;*

*À SBM por proporcionar a realização deste curso;*

*À SEED-PR por me conceder licença para os estudos;*

*Enfim a todos que de algum modo tornaram possível a realização deste trabalho,*

*Muito obrigado!!!*

*"Não há fórmulas mágicas para ensinar Matemática. Não há caminhos reais, como Euclides já dizia a Ptolomeu. A única saída é o esforço honesto e o trabalho persistente. Não só para aprender Matemática, mas para tudo na vida".*

*Elon Lajes Lima*

MOSCA, Marcos Antonio. **NÚMEROS IRRACIONAIS NO ENSINO MÉDIO:** DESDOBRANDO O TEMA COM EQUAÇÕES POLINOMIAIS . 2013. 104 folhas. Dissertação de Mestrado – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.


**RESUMO**

Neste trabalho discutimos a problemática do ensino de números irracionais na Educação Básica. Relatamos três modos para definir este conjunto numérico. Apresentamos algumas demonstrações da irracionalidade da raiz quadrada de dois. Mostramos alguns métodos para a resolução de equações e finalmente propomos a distinção entre números racionais e números irracionais por meio da análise das raízes de equações polinomiais.



**Palavras-chave:** Irracional. Demonstração. Equação. Métodos. Polinômios.

MOSCA, Marcos Antonio. **IRRATIONAL NUMBERS IN HIGH SCHOOL:** UNFOLDING THE THEME WITH POLYNOMIAL EQUATIONS. 2013. 104 sheets. Master's Dissertation – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

## ABSTRACT

In this work we discuss the problematic of teaching irrational numbers in elementary school. We describe three ways to define this set of numbers. We present some demonstrations about the irrationality of square root of two. Show some methods for solving equations and finally we propose to distinguish between rational and irrational numbers by analyzing the roots of polynomial equations.

**Key words:** Irrational. Demonstration. Equation. Method. Polynomial.

# Índice de ilustrações

# Índice de tabelas

# Sumário

# INTRODUÇÃO

As Diretrizes Curriculares da Educação Básica (PARANÁ, 2008, p. 49) afirmam que "para o Ensino Fundamental, o conteúdo estruturante *Números e Álgebra* se desdobra nos seguintes conteúdos: conjuntos numéricos e operações [...]". No Ensino Fundamental, os conjuntos numéricos são apresentados aos estudantes de maneira elementar. Geralmente o assunto é conduzido de formal a mostrar que há certas operações que são impossíveis de serem realizadas num determinado conjunto, por isso a necessidade de ampliá-lo. Ferreira (2011, p. 43) diz que "tais definições são dadas de modo ingênuo não rigoroso, numa tentativa de estender as operações aritméticas [...]. E é isso mesmo o que está acessível ao estudante do Ensino Fundamental (embora mais se espere do professor)".

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998), no Ensino Médio, o estudo referente aos conjuntos numéricos deve ser aprofundado, entretanto o que ocorre na maioria das vezes é uma revisão dos conjuntos numéricos sem fazer um estudo mais rigoroso, sem apresentar ou discutir teoremas fundamentais, raramente se faz alguma demonstração. Neste trabalho apresentamos as formas mais comuns de definir o conjunto dos números irracionais para o estudante da Educação Básica, oferecemos aos professores as demonstrações de alguns resultados, apresentamos alguns métodos para determinar raízes de equações e desenvolvemos uma proposta de distinção entre números racionais e números irracionais baseados em um teorema específico e por meio de equações polinomiais.

Este trabalho está estruturado da seguinte forma:

No Capítulo 1, abordamos os Parâmetros Curriculares Nacionais, no que diz respeito ao que os alunos do Ensino Fundamental devem saber com relação ao estudo do conjunto dos números reais, em particular o estudo do conjunto dos números racionais e do conjunto dos números irracionais, transcrevendo alguns trechos do documento. Discutimos sobre como estes assuntos são, em geral, tratados nos livros didáticos e como o conceito de número irracional não está muito claro, até mesmo para alguns professores.

No Capítulo 2, discutimos a necessidade dos números irracionais como solução à impossibilidade de o conjunto dos números racionais se corresponderem de forma biunívoca com o conjunto de medidas de segmentos de reta. Apresentamos um pequeno relato histórico relacionado ao surgimento, natural, da noção de incomensurabilidade e coletamos algumas definições padrão do conjunto dos números racionais e do conjunto dos números reais por completamento do conjunto dos números racionais.

No Capítulo 3, levantamos a hipótese de que o aluno do Ensino Fundamental e Ensino Médio não compreenda o significado do resultado apresentado por uma calculadora, em uma simples operação de extração da raiz quadrada de um número que não é quadrado perfeito. Usamos o exemplo da raiz quadrada de dois, por ser o que mais aparece nos livros didáticos. Considerando que os livros didáticos raramente apresentam uma demonstração formal da irracionalidade deste número, apresentamos sete demonstrações, acessíveis ao aluno do Ensino Médio.

O Capítulo 4 aborda métodos para calcular as raízes de equações: das tentativas; das aproximações sucessivas; do ponto fixo e de Newton. Chamamos ainda a atenção para as limitações que os softwares e as calculadoras podem apresentar.

No Capítulo 5, nosso principal objetivo é apresentar o teorema das raízes racionais e como ele pode ser uma ferramenta matemática útil, respeitando certas condições iniciais, para reconhecer se dado número real pertence ao conjunto dos números racionais ou não. Fazemos algumas aplicações do método do ponto fixo e do método de Newton como instrumento para determinar raízes reais de certas equações polinomiais.

Finalmente explicamos, nas considerações finais, o que nos motivou a examinar os documentos oficiais para a Educação Básica e verificar o que tais documentos abordam em relação ao ensino do conjunto dos números irracionais. E justificamos porque escolhemos as equações polinomiais e os métodos numéricos para desenvolver o conteúdo de números irracionais no Ensino Médio.

# CAPÍTULO 1:

# OS PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS, OS LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA DOS 8º E 9º ANOS E A CONCEPÇÃO DE NÚMEROS IRRACIONAIS DE ALGUNS PROFESSORES

Neste capítulo vamos expor o que dizem os Parâmetros Curriculares Nacionais sobre o ensino de números racionais e de números irracionais no Brasil, o entendimento que alguns professores possuem sobre os números irracionais e como, de modo geral, a maioria dos autores de livros didáticos aprovados pelo MEC não atende às sugestões apresentadas por este documento.

## *1.1 Os Parâmetros Curriculares Nacionais*

De acordo com os PCN (1998), os currículos de Matemática para o Ensino Fundamental precisam abranger, entre outros assuntos, o estudo dos números e das operações, que devem estar inseridos no campo da Álgebra e da Aritmética.

Os conteúdos matemáticos precisam ser desenvolvidos de forma gradativa e em diferentes níveis de complexidade, admitindo o estabelecimento de relações com conceitos anteriores, como é o caso dos números racionais e dos números irracionais:

> Sua aprendizagem desenvolve-se de forma gradual e em diferentes níveis e supõe o estabelecimento de relações com conceitos anteriores. [ … ], como o conceito de **número racional**. Outros serão iniciados como noções/ideias que vão se completar e consolidar no Ensino Médio, como é o caso do conceito de **número irracional.** (BRASIL, 1998, p.49, grifo nosso).

Tendo como base as propostas dos PCN (1998), nossa maior preocupação é com o ensino de matemática, e em particular com o ensino dos números irracionais, os quais possuem estreita ligação com o conjunto dos números racionais, principalmente no que tange à sua definição, no sentido de que se o aluno não compreender bem o significado dos assuntos envolvendo o conjunto dos números racionais, torna-se mais difícil se apoderar da compreensão dos significados do conjunto dos números irracionais. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998, p. 50) afirmam que:

> Nesse processo, o aluno perceberá a existência de diversos tipos de números (números naturais, negativos, racionais e irracionais) bem como de seus diferentes significados, à medida que se deparar com situações-problema envolvendo operações ou medidas de grandezas, como também ao estudar algumas das questões que compõem a história do desenvolvimento do conhecimento matemático.

Mesmo não estando explícitas as palavras comensurabilidade e incomensurabilidade, percebemos a importância de seus conceitos para o ensino dos números reais, uma vez que medir é comparar duas grandezas e estas são, ou não são, comensuráveis com uma unidade previamente estabelecida.

Os PCN (1998) reforçam a necessidade da abordagem do conjunto dos números racionais nas suas formas fracionária e decimal. Estes conteúdos precisam ser trabalhados sistematicamente, de modo que o aluno compreenda o significado das operações sem ter necessidade de ficar memorizando regras que, muitas vezes, frustram o aluno e até geram antipatia pelo conhecimento matemático. Segundo os PCN (1998, p. 67), “O importante é superar a mera memorização de regras e de algoritmos e os procedimentos mecânicos que limitam, de forma desastrosa, o ensino tradicional do cálculo”.

Segundo os PCN, os objetivos que o professor deve buscar alcançar junto de seus alunos no terceiro (6º ano e 7º ano), devem visar o desenvolvimento:

**i. Do pensamento numérico**

Por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a:

- ampliar e consolidar os significados dos números racionais e reconhecer que existem números que não são números racionais;
- resolver situações-problema envolvendo números: naturais, inteiros,

racionais e irracionais;

- selecionar e utilizar diferentes procedimentos de cálculo com números: naturais, inteiros, racionais e irracionais.

**ii. Da competência métrica**

Por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a "ampliar e construir noções de medida, pelo estudo de diferentes grandezas, utilizando dígitos significativos para representar as medidas, efetuar cálculos e aproximar resultados de acordo com o grau de precisão desejável"(BRASIL, 1988, p. 82).

Se a ideia de incomensurabilidade, mesmo que de forma implícita, já vinha sendo abordada desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, é imprescindível destacar o que os PCN trazem em relação ao conjunto dos números irracionais:

> Ao longo do Ensino Fundamental o conhecimento sobre os números é construído e assimilado pelo aluno num processo em que tais números aparecem como instrumento eficaz para resolver determinados problemas, [ … ].
>
> Na perspectiva de que o aluno amplie e aprofunde a noção de número, é importante colocá-lo diante de situações em que os números racionais são insuficientes para resolvê-las, tornando-se necessária a consideração de outros números: os irracionais. Recomenda-se, no entanto, que a abordagem destes últimos não siga uma linha formal, que se **evite a identificação do número irracional com um radical e que não se enfatizem os cálculos com radicais, como ocorre tradicionalmente.** (BRASIL, 1988, p. 83, grifo nosso).

Além disso, podemos encontrar nos Parâmetros Curriculares Nacionais, a seguinte menção:

> **O importante é que o aluno identifique o número irracional como um número de infinitas casas decimais não-periódicas,** identifique esse número com um ponto na reta, situado entre dois racionais apropriados, reconheça que esse número não pode ser expresso por uma razão de inteiros; conheça números irracionais obtidos por raízes quadradas e localize alguns na reta numérica [...]. Esse trabalho inicial com os irracionais tem por finalidade, sobretudo, proporcionar contra exemplos para ampliar a compreensão dos números. (grifo nosso). (BRASIL, 1988, p. 50).

A caracterização do significado de cálculo aproximado é um aspecto de extrema importância, que muitas vezes os professores do Ensino Fundamental deixam passar desapercebido, e este procedimento é nocivo à compreensão do conceito de número irracional, de acordo com os PCN:

> Particularmente com relação aos cálculos numéricos com aproximação convém observar que no campo dos racionais ocorrem duas representações, a fracionária e a decimal, que pode ser: finita ou infinita periódica. Sabe-se, além disso, que os irracionais podem se aproximados tanto quanto se queira por números racionais e que **sua representação decimal é necessariamente infinita**, e não-periódica. No caso das representações infinitas (tanto de racionais como de irracionais) surge o problema da aproximação numérica, ou seja, a necessidade que se tem de considerar apenas um número finito de ordens decimais na representação do número. (BRASIL, 1988, p. 83, grifo nosso).

Apesar de tradicionalmente ocupar um razoável espaço no currículo do 8º e 9º anos, o trabalho com os números irracionais pouco tem auxiliado os alunos na compreensão do seu conceito.

Possivelmente contribui para as dificuldades na aprendizagem dos assuntos envolvendo números irracionais a inexistência de modelos materiais que exemplifiquem este conjunto de numérico. Além disso, quando se estuda a reta numérica racional e se constrói o conhecimento da densidade dos números racionais - entre dois números racionais há uma infinidade de números racionais - parece não haver mais lugar na reta numérica para algum tipo de número além dos números racionais.

A verificação de que um número é um número irracional não pode ser obtida por um processo empírico, não há verificação experimental (diferentemente de conceitos físicos ou químicos, por exemplo) nem medição de grandezas, por mais precisa que seja, que possa garantir que uma medida tem valor irracional, isso ocorre somente no campo da mente humana usando o raciocínio abstrato, por isso, a necessidade de *demonstrarmos* este fato.

Nos PCN encontramos a sugestão de que é melhor apenas citar aos estudantes que é possível demonstrar que um dado número é irracional, evitando a demonstração propriamente dita. No documento, justifica-se esta escolha baseado unicamente na dificuldade de se demonstrar a irracionalidade do número $\pi$:

> a prova matemática de sua irracionalidade, ou seja, a impossibilidade de escrevê-lo como quociente de inteiros (ou equivalentemente como quocientes de racionais) é seguramente inadequada para o ensino fundamental. (BRASIL, 1988, p. 106).

Concordamos com o que diz os Parâmetros Curriculares Nacionais neste exemplo em particular, pois a demonstração de que o número $\pi$ é um número irracional requerer o conhecimento de frações contínuas ou de séries, alternativas que não são propostas nos PCN. Entretanto, há números irracionais (por exemplo $\sqrt{2}$), que admitem demonstração usando argumentos, que podem se tornar acessíveis ao estudante, como por exemplo um argumento por absurdo ou geométrico. De fato, o que se tem aqui é uma oportunidade de conceituar o papel central da dedução e da demonstração na Matemática.

## *1.2 Como os Livros Didáticos de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental tratam os Números Irracionais*

De acordo com BOFF (2006), as indicações e sugestões que encontramos nos PCN sobre o ensino de números reais não são contempladas na maioria dos livros didáticos. A autora chama a atenção ao fato, que causa estranheza, de que em nenhum momento nem nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental, tampouco nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio, é mencionada a continuidade topológica dos números reais, nem mesmo as dificuldades de se operar com números irracionais.

Em sua pesquisa BOFF (2006, p. 8) menciona o fato de que o conjunto dos livros por ela analisados não tem caráter amostral, considera-os suficientes para ilustrar a problemática, no que diz respeito à abordagem do conjunto dos números irracionais, afirmando que os livros didáticos disponíveis: "acabam se mostrando falhos, pois os poucos alunos que, depois de desenvolvido o assunto, se arriscavam afinal a definir número irracional, o faziam de maneira mecânica".

BOFF (2006) ressalta que, em geral, a abordagem de números "irracionais/reais" dos livros didáticos aprovados pelo MEC[1] que são destinados às séries finais do Ensino Fundamental, aludem:

- no 8º ano do Ensino Fundamental, apenas há uma apresentação do conceito de número irracional, nem todas as vezes completa, e oferecem apenas dois

1 A autora não menciona o ano em que tais livros foram aprovados pelo MEC.

exemplos de números irracionais: $\sqrt{2}$ e $\pi$, logo após afirmar que $\pi$ é um número irracional, o tornam o número racional 3,14 sem muitos comentários sobre tal aproximação.

- no 9º ano do Ensino Fundamental, os livros didáticos abordam quase que exclusivamente o cálculo com radicais, que pouco contribui para a real compreensão do conceito de número “irracional/real”, bem como sobre o significado das quantidades que estes números representam.

Ainda de acordo com BOFF (2006, p. 52) os livros didáticos definem número irracional como sendo “um número cuja representação decimal é infinita e não periódica, pressupondo, portanto, a existência de outros números, contrário a uma orientação dos Parâmetros Curriculares Nacionais”. A autora expõe ainda que o exemplo de $\sqrt{2}$ é apresentado sem a demonstração de sua irracionalidade, levando o aluno a ter de acreditar que sua expansão decimal é infinita e não-periódica.

Compreender o significado e saber como representar um número é de fundamental importância para os alunos da Educação Básica, pois é somente por meio de tais representações que o aluno pode manipular corretamente as situações envolvendo um conjunto numérico. Além de salutar, é imprescindível ao aluno saber expressar significativamente as medidas, aproximadas ou exatas, sabendo realizar de modo eficaz as operações fundamentais com este tipo de número. Observe-se que o ensino das operações com frações não apresentam dificuldades ao serem abordadas no Ensino Fundamental, contudo, quando se trata de definir estas mesmas operações usando a representação decimal dos números, estas se tornam mais complicadas.

Neste aspecto, BOFF (2006, p.10) chama a atenção ao fato de que, quando se trata da representação decimal dos números, há poucas discussões sobre este assunto, além do que, em alguns livros didáticos, a igualdade **1 = 0,9999...** é apresentada sem muitas explicações, sendo que muitos professores se sentem inseguros para explicar a veracidade desta igualdade, afirmando que:

> Com estas dúvidas não discutidas e esclarecidas durante a Graduação, os licenciados voltam à Escola Básica, agora como professores, e o que se

> revela é que eles não têm conseguido complementar os livros didáticos e fazer com que sejam atingidos os objetivos dos Parâmetros Curriculares Nacionais, no que tange ao ensino de números irracionais e reais.

Muitas vezes os autores de livros didáticos de Ensino Fundamental e de livros didáticos de Ensino Médio são os mesmos, e estes autores não abordam de maneira adequada e aprofundada os conjuntos numéricos em seus livros para o Ensino Básico, e, ao escrever os livros do Ensino Médio, abordam estes conteúdos, em geral, de modo mais superficial do que os primeiros.

LIMA et al. (2001) diz, ao analisar o volume 1 de um certo livro didático de Ensino Médio:

> Os alunos que ingressam no Ensino Médio certamente já tiveram um longo contato anterior com os números naturais, inteiros, racionais e até mesmo certos números irracionais, como o número $\pi$ e algumas raízes quadradas não-exatas. Reapresentar-lhes esses números só tem sentido se o objetivo for o de ganhar mais consistência teórica, explicando-lhes de forma mais convincente fatos que foram impostos peremptoriamente antes e, ao mesmo tempo, mostrar, mediante exemplos, problemas e outras aplicações (…).
>
> Isto não é feito aqui.

## *1.3 Algumas Considerações Sobre o Entendimento dos Números Irracionais por um Grupo de Professores.*

As dificuldades em compreender e conceituar adequadamente o conjunto dos números irracionais, infelizmente, não se restringe apenas ao conjunto dos estudantes do Ensino Fundamental e Ensino Médio. O embaraço também atinge parte dos professores: o estudo de BOFF (2008) com cerca de 130 professores da rede estadual de ensino de Foz do Iguaçu e Região exemplifica a situação. O que relatamos não tem por finalidade generalizar tal dificuldade de compreensão a todos os professores, porém é preocupante o fato de que alguns professores não entendem o que vão ensinar.

BOFF (2008, p.79) relata que alguns professores afirmaram que $\frac{2}{7}$ é um número irracional, pois quando fazem a divisão na calculadora resulta em 0,285714... “e como os decimais não se repetem dois sétimos é irracional”. Também causa estranheza a justificativa que alguns professores deram para afirmar que a soma de dois números irracionais nem sempre é um número irracional. “Afirmaram que a alternativa era falsa e justificaram do seguinte modo: $\frac{5}{7}+(-\frac{5}{7})=0.$ Como $\frac{5}{7}$ é irracional, pois os dígitos na calculadora não se repetem [...]”(BOFF, 2008, p.82), em lugar de pensarem em um exemplo como $\pi+(-\pi)=0.$

Em estudo realizado por COSTA (2008, p.63 e 64), também em Foz do Iguaçu e Região, um professor diante da afirmação “quaisquer que sejam os números irracionais $\alpha$ e $\beta$, pode-se concluir que $\alpha+\beta$ é irracional”, justificou que a afirmativa não é verdadeira pois: “$\sqrt{2}+\sqrt{7}=\sqrt{2+7}=\sqrt{9}=3,$ finalizando com a contestação: três é racional”.

De acordo com COSTA (2008, p.66) um professor ofereceu a fração $\frac{9}{14}$ como exemplo de número irracional, ao ser indagado como ele havia chegado a tal conclusão o professor respondeu: “em forma de fração é racional, mas se dividirmos é irracional”. Fica nítido que este professor não sabe conceituar, e não entende o significado de número irracional.

Diante do exposto é natural nossa preocupação sobre a abordagem que é dada aos números irracionais no Ensino Fundamental, e que em geral no Ensino Médio, não é aprofundada. A escassez de discussão sobre este assunto é um dos motivos de existirem dúvidas, tanto por parte de alguns professores como dos alunos, para reconhecer se um dado número real é um número racional ou um número irracional. Nos capítulos que se seguem tentaremos lançar alguma luz sobre o assunto.

# CAPÍTULO 2:

# A NECESSIDADE INTRÍNSECA DOS NÚMEROS IRRACIONAIS

Pode ocorrer (se ainda não aconteceu) com qualquer um de nós professores de matemática do Ensino Fundamental e Ensino Médio, ter de responder aos alunos para que servem os números, em particular para os alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental.

"Os números são objetos abstratos, desenvolvidos pelo homem como modelos que possibilitam contar, medir e, deste modo, estimar as diferentes quantidades de uma grandeza". (LIMA et al. 2006, p. 25).

O conjunto dos números naturais é um modelo abstrato que nos permite comparar quantidades de elementos de conjuntos distintos, ou seja, contar. O conjunto dos números racionais é um modelo abstrato que nos permite comparar duas grandezas, portanto, medir. Porém os números naturais e as frações não são suficientes para medir, por exemplo, todo segmento de reta, conforme explicamos em seguida.

## *2.1 Medida de um Segmento*

Neste trabalho indicamos com o símbolo $\overline{AB}$ a medida do segmento de reta $AB$. O comprimento, ou a medida $\overline{AB}$ é um número que deve expressar qual é a quantidade de vezes que o segmento $AB$ contém um segmento $u$, fixado previamente, e que se estipulou tomar como unidade de comprimento. Em outras palavras, $u$ é denominado segmento unitário, seu comprimento é $\overline{u}=1$ por definição.

**Definição 1:** Dado dois pontos distintos sobre uma reta, ao conjunto que contém estes pontos e todos os pontos que estão entre eles, denominamos *segmento de reta*.

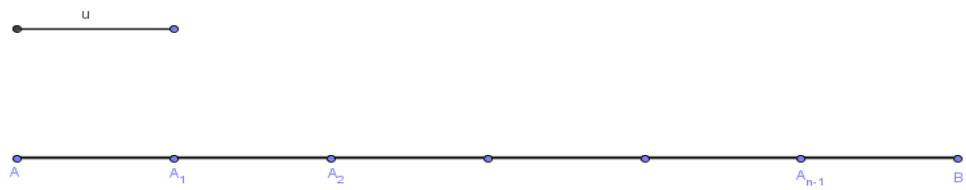
Dado um segmento de reta $AB$, se existir um ponto $C$, sobre $AB$ tal que os segmentos $AC$ e $BC$ tenham a mesma medida $u$, então a medida do segmento $AB$ será 2. Em símbolos temos: $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{BC} = 2$.

Em geral, se for possível obter $n-1$ pontos intermediários $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{n-1}$ sobre o segmento $AB$, de tal modo que os $n$ segmentos $AA_1, A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}B$ tenham a mesma medida do segmento unitário $u$, então o comprimento de $AB$ será $n$. Neste caso, escrevemos:

$$\overline{AA_1} + \overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \ldots + \overline{A_{n-1}B} = n.$$

Dizemos que a medida do segmento de reta $AB$ é $n$ porque $AB$ se decompõe em $n$ segmentos de reta justapostos, todos com o mesmo comprimento, conforme ilustramos na figura 1.

**Figura 1** - Segmentos justapostos




Se o segmento $AB$ não contém $u$ um número exato de vezes, vamos admitir que seja possível encontrar um segmento menor, digamos $w$, tal que $w$ esteja $n$ vezes contido no segmento unitário $u$ e $m$ vezes contido no segmento de reta $AB$, onde $m, n$ são números inteiros.

O segmento $w$ é denominado um submúltiplo comum dos segmentos $AB$ e $u$. Quando existe este submúltiplo comum, dizemos que os segmentos $AB$ e $u$ são **comensuráveis**. Pelo fato de o segmento $w$ estar contido $n$ vezes no segmento unitário $u$, dizemos que o comprimento do segmento $w$ é

$\frac{1}{n}$, deste modo, temos: $\overline{AB}=m\cdot\frac{1}{n}=\frac{m}{n}$.

Como $m,n$ são números inteiros, $\frac{m}{n}$ é o quociente entre dois inteiros e $\frac{m}{n}$ é a medida do segmento de reta $AB$. Dizemos que o resultado desta medição, ou seja, o número que expressa esta medida, é um número **racional**.

## *2.2 Existência de Segmentos Incomensuráveis*

Na Grécia antiga, os matemáticos que antecederam Pitágoras (quinto século A.C.) tratavam a questão da medida de um segmento, admitindo a possibilidade de encontrar um segmento comum a quaisquer dois segmentos, ou seja, admitiam que todos os segmentos fossem comensuráveis com uma unidade pré estabelecida.

Para eles, todas as grandezas, tais como: comprimento, área, volume, ângulos, etc. podiam ser associadas a um número inteiro ou a uma razão entres dois números inteiros. Na linguagem atual, esta concepção corresponde a assumir que os números racionais seriam suficientes para medir quaisquer segmentos de reta.

Eles acreditavam que uma operação de medição conduzia sempre a uma medida inteira ou, se isto não acontecesse, que sucessivas operações conduzissem sempre a um divisor comum entre dois segmentos quaisquer de reta. Entretanto um pitagórico[2] ao estudar qual deveria ser a medida da diagonal do quadrado de lado um, e supondo que tal medida pudesse ser representada pela razão entre dois números inteiros, percebeu uma consequente contradição e portanto não poderia existir um número que cumprisse tal condição. A questão que se impunha era se existia algum número capaz de satisfazer a propriedade de seu quadrado ser igual a 2? E se não existisse tal número, como ter certeza disso? Ora, para garantir que algo existe, basta exibi-lo. Porém se não existe, como exibir o que não existe? O único modo de garantir que algo não existe é demonstrar que não pode existir.

Os pitagóricos, ao que tudo indica, foram os responsáveis por um dos

2 Garbi (2010, p. 36) afirma que pode ser Hipasus, de Metaponto (cerca de 470 a.C).

momentos mais críticos da matemática: a demonstração da existência de **segmentos incomensuráveis.**

Neste ponto, Hipasus de Metaponto precisou de uma demonstração de impossibilidade, servindo-se do Método de Redução ao Absurdo, demonstrando que seria impossível encontrar um número racional $\frac{p}{q}$, tal que $\left(\frac{p}{q}\right)^2$. Assim, estava demonstrado que os números racionais não eram suficientes para medir qualquer segmento de reta, noutras palavras, admite-se a existência de outros números, **os números irracionais.**

De acordo com Eves (2002, p. 107)

> Tão grande foi o escândalo lógico que por algum tempo se fizeram esforços para manter a questão em sigilo. Conta a lenda que o pitagórico Hipasus (ou talvez outro) foi lançado ao mar pela ação ímpia de revelar o segredo a estranhos ou (de acordo com outra versão) que ele foi banido da comunidade pitagórica...

## *2.3 Definindo Números Racionais e Números Irracionais*

O estudo dos números racionais, feito em geral no sétimo ano do Ensino Fundamental, e retomado no ano seguinte, emperra em alguns itens, entre os quais destacamos:

- a compreensão do significado dos números racionais;
- sua escrita nas formas decimal ou fracionária;
- sua representação geométrica, como pontos associados a uma reta;
- o entendimento das quatro operações fundamentais.

Estas dificuldades muitas vezes se arrastam ao longo dos anos finais do Ensino Fundamental, e infelizmente não são raras as vezes em que tais dúvidas permanecem no Ensino Médio. Tais deficiências em relação ao conjunto dos números racionais, comprometem o estudo do conjunto dos números irracionais, por isso é imprescindível que o estudo dos primeiros seja feito de modo a oferecer aos alunos clareza quanto à definição e suas formas de representação.

Apresentaremos a seguir três maneiras de se definir o conjunto dos números: racionais e irracionais de modo a oferecer ao aluno condições de atingir os objetivos sugeridos nos PCN, tratados no capítulo anterior.

### 2.3.1 Definição por meio de Segmentos Comensuráveis

A priori, os números racionais são apropriados para representar todas as medidas empíricas. No cotidiano do homem moderno, os números racionais são capazes de fornecer o resultado para qualquer problema de contagem ou de medida.

> Deve-se entretanto lembrar que, quando o raciocínio matemático assegura a incomensurabilidade, o número racional obtido experimentalmente é apenas um valor aproximado; o valor exato é um número irracional. (LIMA, 2006, p. 59)

Na Antiguidade, como já mencionamos, os gregos anteriores a Pitágoras acreditavam que sempre seria possível encontrar segmentos que possuíssem medidas comuns. Porém o que os pitagóricos mostraram é que se tomarmos como segmento unitário $u$ o lado de um quadrado, é impossível obter um segmento $w$ que esteja contido $n$ vezes neste lado e $m$ vezes em sua diagonal, ou seja, o lado e a diagonal de um quadrado são grandezas incomensuráveis. De forma geral, se o lado de um quadrado tem medida racional, sua diagonal não pode ter comprimento racional.

De acordo com LIMA (2006, p. 54) “a solução que se impunha, e que foi finalmente adotada, era a de ampliar o conceito de número, introduzindo os chamados *números irracionais*”. Com a ampliação do conceito de número e a introdução destes “novos números”, fixando uma unidade de medida arbitrária, qualquer segmento de reta pode ter uma medida numérica.

**Definição 2:** Dizemos que um número $\frac{m}{n}$ é um *número racional* quando representa a medida de um segmento comensurável com a unidade.

**Definição 3:** Dizemos que um número é um *número irracional* quando representa a medida de um segmento incomensurável com a unidade.

**Definição 4:** Um número que representa a medida de qualquer segmento de reta, tanto os comensuráveis quanto os incomensuráveis com a unidade, é denominado *número real*.

**Observação 1:** Como neste item estamos abordando os números que representam a medida de um segmento, não faz sentido falar dos números reais negativos.

Geralmente os livros didáticos não apresentam este tipo de definição, é comum a ausência de explicações e até mesmo comentários sobre segmentos comensuráveis e incomensuráveis.

## 2.3.2 Definição por meio de Frações

Desde a mais tenra idade as crianças aprendem a contar, normalmente, com seus familiares. Em geral, contam coisas, objetos, os dedos da mão por exemplo: 1,2,3,4, e assim por diante. Estes números são chamados de números naturais. Representamos o conjunto[3] dos números naturais conforme segue $\mathbb{N}=\{1,2,3,4,...\}$.

O conjunto dos números naturais pode ser caracterizado a partir de quatro propriedades fundamentais, conhecidas como os *axiomas de* Peano[4]. Em linguagem matemática podemos escrever:

a1. Existe uma função $s:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N}$ que associa a cada $n\in\mathbb{N}$ um elemento $s(n)\in\mathbb{N}$, chamado o sucessor de $n$;

a2. A função $s:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N}$ é injetiva;

a3. Existe um único elemento 1 no conjunto $\mathbb{N}$, tal que $1\neq s(n)$ para todo

3 Vamos admitir que o leitor esteja familiarizado com a linguagem de conjuntos.
4 Para mais detalhes o leitor pode consultar LIMA (1992),(2006) e (2011).

$n \in \mathbb{N}$;

a4. Se um subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ é tal que $1 \in X$, e, se para cada $n \in X$ pode-se concluir que $s(n) \in X$, então $X = \mathbb{N}$.

Resumidamente, os axiomas de Peano dizem que:

a1'. Todo número natural $n$ possui um sucessor, e este é único;

a2'. Se $s(n) = s(m)$, então $n = m$, ou seja, números naturais distintos tem sucessores distintos;

a3'. Existe um único número natural que não é sucessor de nenhum outro, representado pelo símbolo 1;

a4'. Se um conjunto de números naturais contém o número 1 e, além disso, contém o sucessor de cada um de seus elementos, então esse conjunto coincide com $\mathbb{N}$.

Observe que $s(n)$, o sucessor de $n$ é denotado convenientemente por $n+1$, esta operação de soma de dois naturais pode ser definida indutivamente e nos permite estabelecer uma relação de ordem em $\mathbb{N}$.

- **Relação de Ordem em $\mathbb{N}$**

Dados os números naturais $a$ e $b$ escrevemos que $a < b$, lê-se $a$ menor do que $b$, se existe um natural $m$ tal que $a + m = b$. De modo análogo, escrevemos que $a > b$, lê-se $a$ maior do que $b$, se existe um natural $m$ tal que $a = b + m$.

Segundo NIVEN (1984, p. 1), “muito mais tarde, os hindus inventaram o importantíssimo número 0 e, no início dos tempos modernos, algebristas italianos inventaram números negativos”.

É importante mencionar que o conjunto dos números naturais goza da propriedade de ser fechado[5] em relação às operações de soma e multiplicação.

Para conseguirmos o fechamento em relação à operação de subtração, é necessário ampliarmos o conjunto dos números naturais, de tal modo que o novo

5 Um conjunto se diz fechado em relação a uma operação, se depois de realizada a operação o resultado pertence ao conjunto.

conjunto inclua o zero e os números negativos. Assim o conjunto dos números inteiros possui o elemento neutro da soma (zero) e o elemento simétrico, isto é, para todo natural $n$ existe $-n$ inteiro. Simbolicamente temos:

$$\mathbb{Z}=\{\ldots,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,\ldots\}.$$

A existência dos elementos: neutro e simétrico (em relação à soma), e a associatividade em relação à operação de adição dão ao conjunto dos números inteiros a estrutura algébrica de grupo, mais ainda, a operação de adição é comutativa o que o torna um grupo comutativo (abeliano). Além disso, a operação de multiplicação é associativa, comutativa e distributiva em relação a adição e há o elemento neutro para a multiplicação, isto fornece ao conjunto dos números inteiros a estrutura de anel abeliano.

- **Relação de Ordem em $\mathbb{Z}$**

Dados os números inteiros $a$ e $b$ escrevemos que $a \leq b$, lê-se $a$ menor do que ou igual a $b$, se, e somente se $b-a \in \mathbb{N} \cup 0$.

NIVEN (1984, p. 30) incia o capítulo sobre números racionais afirmando que muitas divisões de inteiros podem resultar em frações como:

$$\frac{2}{7}, \frac{-6}{-13}, \frac{-3}{4}, \frac{7}{-12}.$$

e que o conjunto $\mathbb{Q}$ de todas as frações como estas “é o conjunto dos números racionais”.

**Definição 5:** Um *número racional,* ou *fração ordinária* é um número que pode ser colocado na forma $\frac{a}{b}$, sendo que $a$ e $b$ são números inteiros $b$ não é zero.

Observamos que os termos *número racional* e *fração ordinária* são, em geral, usados como sinônimos, a palavra fração, sozinha, é usada para designar qualquer expressão algébrica que tenha um numerador e um denominador, por exemplo:

$$\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{15}{x}, \frac{x^2-2y^2}{x^3-y^2}.$$

Além disso, muitas vezes podem ocorrer frações como as seguintes

$$\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}} \text{ e } \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}},$$

e nenhuma delas está escrita na forma $\frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$, porém usando as propriedades da radiciação[6] percebemos que a primeira fração não representa um número racional, pois $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}} = \sqrt{2}$, mas $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$ representa o número racional $2$.

- **Relação de Ordem em $\mathbb{Q}$**

Sejam $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ números racionais com $b, d > 0$. Escrevemos $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ quando $a \cdot d \leq b \cdot c$, esta última desigualdade sendo verificada em $\mathbb{Z}$.

O conjunto dos números racionais contém os números inteiros. Munido das operações de soma e multiplicação o conjunto dos números racionais é um corpo ordenado, por exemplo cada elemento não-nulo possui inverso multiplicativo.

Além do conjunto dos números racionais ser corpo, observamos que entre dois números racionais existe outro número racional:

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

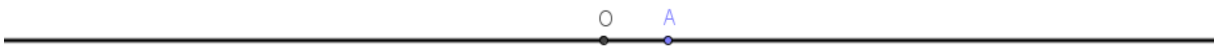
esta propriedade é denominada *densidade*. Mostraremos que, apesar de densos na reta, os números racionais não completam a reta, ou sejam, não esgotam todos os números da reta real.

#### *2.3.2.1 A Reta Real*

Com o objetivo de se ter uma ideia mais palpável dos novos números, isto é, dos incomensuráveis, ou equivalentemente, dos números que não podem ser expressos por meio de uma fração ordinária, e em particular localizá-los em relação aos números racionais, vamos imaginar, seguindo LIMA (2006), uma reta, conforme ilustra a figura 2, na qual foram fixados um ponto $O$, chamado a *origem*, e um ponto $A$, diferente de $O$. A reta $OA$ será denominada a *reta real,* ou *eixo real.*

6 Em geral, estas propriedades são estudadas no 7º ano e o estudo dos números racionais no 8° ano.

**Figura 2** - A Reta




Observe que a origem $O$ divide a reta em duas semirretas: a semirreta que contém todos os pontos que estão à direita do ponto $O$ denominaremos *positiva* e semirreta *negativa* contém os pontos que estão à esquerda de $O$.

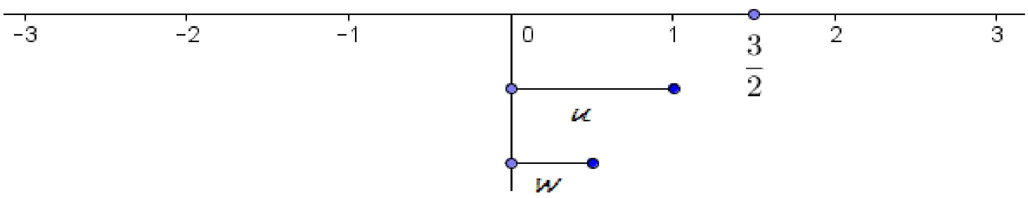
Tomamos $OA$ como segmento unitário. Consideremos um ponto $X$ qualquer da reta $OA$. Se o segmento $OA$ couber um número exato $n$ de vezes em $OX$, diremos que a abcissa de $X$ é um número natural $n$ ou o número negativo $-n$, dependendo da posição do ponto $X$ em relação à origem. Pode ocorrer de $X$ coincidir com a origem $O$, neste caso, sua abcissa será o número zero.

O conjunto $\mathbb{Z}$ constituído pelo número zero e pelas abcissas dos pontos $X$ do eixo real, tais que o segmento unitário cabe um número exato de vezes em $OX$, é denominado conjunto dos números inteiros, este conjunto é a reunião do conjunto dos números naturais com o zero e com o conjunto dos números negativos $(-\mathbb{N})$, simbolicamente

$$\mathbb{Z} = -\mathbb{N} \cup 0 \cup \mathbb{N}.$$

Pode ocorrer que $OX$ não contenha $OA$ um número inteiro de vezes. Se existir um segmento $OB$ tal que um número inteiro $n$ de segmentos $OB$ é congruente a $OA$ e também um número inteiro $m$ de segmentos $OB$ é congruente a $OX$, neste caso a abscissa do ponto $X$ é representada por: $\frac{m}{n}$ ou $-\frac{m}{n}$, dependendo da posição de $X$ em relação à origem. A figura 3 ilustra o caso quando o ponto $X$ pertence a semirreta positiva.

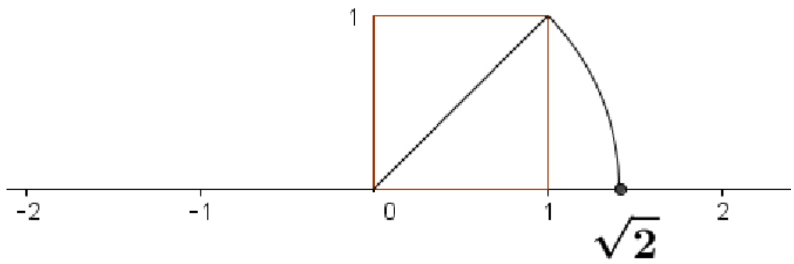
**Figura 3** - Localização do número racional $\frac{3}{2}$ sobre a reta




A representação da medida desses segmentos comensuráveis com a unidade é o que chamamos de conjunto dos números racionais e representamos por $\mathbb{Q}$. usando a relação de inclusão podemos escrever: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Como afirmamos no capítulo 2, $\mathbb{Q}$ não é capaz de medir todos os segmentos de reta, pois há segmentos incomensuráveis com a unidade, por exemplo os de medida $\sqrt{2}$. Podemos representar a abscissa desse ponto na reta fazendo a construção geométrica ilustrada abaixo.

**Figura 4** - localização de $\sqrt{2}$ na reta




Podemos concluir a partir da construção geométrica acima que existem números irracionais. A definição abaixo é uma proposta, digamos construtiva, de definição do conjunto de números reais para atender ao Ensino Médio.

**Definição 6:** O conjunto $\mathbb{R}$, denominado o *conjunto dos números reais* é o conjunto que contém o conjunto dos números racionais, e dado um número irracional ***a***, contém todos os números gerados por este a partir das quatro operações aritméticas.

Da definição 6, não segue que o conjunto dos números reais é completo. Em verdade, a repetição das operações fundamentais leva a um conjunto enumerável, se conhece apenas um subconjunto finito ou enumerável de irracionais. Entretanto, parece-nos fundamental ao estudante do Ensino Médio tão somente que haja um conjunto numérico fechado sob as quatro operações fundamentais. Deste modo propomos uma definição que visa transpor o obstáculo epistemológico de se definir o conjunto dos números irracionais, no Ensino Médio, evitando usar fatos que o aluno desconheça.

Nesta seção, definimos o conjunto dos números racionais (definição 5) usando o conjunto dos números inteiros, que é ensinado ao aluno no 7º ano do Ensino Fundamental, pelo menos um ano antes de ser ensinado o conjunto dos números racionais. Na sequência discutimos e mostramos que existem números irracionais, e propomos uma definição de números reais, com o intuito de apresentar a definição 7, que é tradicional na Educação Básica, sem sermos incoerentes no sentido de apresentar uma definição que usa um fato desconhecido dos estudantes da Educação Básica no 8º ano, isto é, a palavra **número real** que surge na definição 7, e que na Educação Básica é desconhecido dos alunos.

LIMA (2006, p. 58) diz que: “a descrição mais simples de $\mathbb{R}$ consiste em dizer que se trata de um *corpo ordenado completo”.* Embora o autor não deixe claro o que quer dizer com a palavra “simples”, acreditamos que seu intuito é assegurar que esta abordagem é mais fácil de ser compreendida pelo estudante de graduação, comparada à construção dos números reais via Cortes de Dedekind ou via Classes de Equivalência de Sequências de Cauchy. No nosso entendimento não há simplicidade alguma na passagem do conjunto dos números racionais para o conjunto dos números reais, em particular quando queremos oferecer ao estudante do Ensino Médio uma compreensão deste fato. Um modo de justificar ao estudante este “salto” pode estar relacionado ao conhecimento que o aluno possui sobre a densidade do conjunto dos números racionais. No ensino médio é ensinado aos estudantes que o conjunto dos números racionais é denso na reta e, mesmo gozando desta propriedade, não é suficiente para preenchê-la, isto é, os números racionais não completam a reta. É na palavra completa que está o âmago da questão, é ela que garante a continuidade da reta real e talvez o estudante fique satisfeito ao saber que a continuidade da reta real permite que se efetuem as quatro operações fundamentais sem extrapolar, nos resultados, este conjunto.

A bijetividade entre a reta real e o conjunto $\mathbb{R}$ torna o segundo um modelo aritmético de uma reta, enquanto a reta é o modelo geométrico do conjunto dos números reais. Esta observação, muito esclarecedora, normalmente é omitida aos alunos do Ensino Fundamental e Ensino Médio.

**Definição 7:** Um *número irracional* é um número real que não pode ser colocado na forma $\frac{a}{b}$, onde $a$ e $b$ são números inteiros e $b$ não é zero.

Segundo BOFF (2006), a maioria dos livros didáticos definem os números irracionais como aqueles números que não são **números**[7] racionais, o que também é corroborado pela nossa experiência. Este tipo de definição gera as seguintes dúvidas: $\sqrt{-1}$ seria um número irracional? Existem casos mais espantosos, em que autores definem número irracional como *aquele que não é racional*. Assim, uma mosca, por exemplo, é um número irracional.

### 2.3.3 Definição por meio de sua Representação Decimal

Na sociedade moderna é muito comum observar números como: $0{,}79\,;\,32{,}95\,;\,1{,}99\,;\,2{,}789$, em geral estes números são usados para informar o índice de inflação de um determinado mês, o preço de uma roupa; de certo tipo de mercadoria ou de um combustível. Os números acima representam as frações decimais $\frac{79}{100};\frac{3295}{100};\frac{199}{100};\frac{2789}{1000}$, pois seu denominador é uma potência de dez.

**Definição 8:** Uma *expansão decimal* é um símbolo da forma

$$n=a_0,a_1a_2a_3a_4\ldots a_n\ldots,$$

onde $a_0\in\mathbb{Z}$ e $a_1,a_2,a_3,a_4,\ldots,a_n,\ldots$ são números inteiros positivos, chamados dígitos, tal que cada digito $a_i$ é elemento do conjunto $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

**Definição 9:** Um número que pode ser expresso por meio de uma expansão

7 Grifo nosso.

decimal, é denominado *número real*.

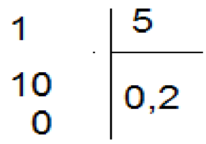
Muitas vezes queremos ou precisamos representar as frações ordinárias na forma de uma expansão decimal, o que em alguns casos é uma tarefa fácil.

Algumas frações ordinárias, como $\frac{1}{5}, \frac{3}{4}, \frac{7}{25}$ não são exatamente frações decimais, contudo na decomposição de seu denominador em fatores primos aparece dois ou cinco, ou seja, os fatores primos na decomposição de dez. As frações que gozam desta propriedade podem ser reescritas de tal modo que se tornem frações equivalentes as frações decimais. Por exemplo,

$$\frac{1}{5}=\frac{2}{10}, \frac{3}{4}=\frac{75}{100}, \frac{7}{25}=\frac{28}{100}.$$

A representação decimal deste tipo de fração ordinária pode ser obtida facilmente, fazendo a divisão longa euclidiana do numerador pelo denominador, por exemplo,

**Figura 5 -** Representação finita



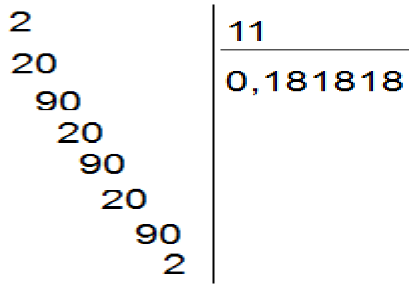

Neste caso dizemos que a representação decimal da fração ordinária $1/5$ é finita[8].

No entanto, a tarefa de transformar certas frações ordinárias em frações decimais finitas é uma empreitada impossível, como por exemplo $\frac{1}{9}$, $\frac{2}{11}$ ou $\frac{8}{15}$.

A representação decimal finita não ocorre com a fração ordinária $\frac{2}{11}$, como podemos observar na figura 6.

8 estamos admitindo que nenhuma representação decimal termina em uma sequência de zeros.

**Figura 6 -** Dízima Periódica




Neste caso, o processo de divisão continuada (longa), nos fornece um resto dois, isto quer dizer que: $2{,}000000 = 11 \times 0{,}181818 + 0{,}000002$, dividindo a igualdade por 11, e obtemos:

$$\frac{2}{11} = 0{,}181818 + \frac{2}{11\,000\,000}.$$

A igualdade acima, significa que, se substituirmos a fração ordinária $\frac{2}{11}$ pela expressão decimal 0,181818, estamos cometendo um erro de aproximação igual a $\frac{2}{11\,000\,000}$.

A igualdade $\frac{2}{11} = 0{,}181818...$ evoca as ideias de: convergência e de série, pois as reticências no final da igualdade levam a crer que se trata de uma soma de infinitas parcelas, ou seja,

$$\frac{2}{11} = 0 + \frac{18}{10^2} + \frac{18}{10^4} + \frac{18}{10^6} + ... + \frac{18}{10^{2n}} ..., \quad n \in \{0,1,2,3,4...\}$$

e quando substituímos a expansão acima por

$$\frac{2}{11} = 0 + \frac{18}{10^2} + \frac{18}{10^4} + \frac{18}{10^6} + ... + \frac{18}{10^{2n}}.$$

estamos afirmando que os números racionais $0 + \frac{18}{10^2} + \frac{18}{10^4} + \frac{18}{10^6} + ... + \frac{18}{10^{2n}}$ são valores aproximados da fração ordinária $\frac{2}{11}$. Tal substituição conduz a um erro máximo de $\frac{1}{10^{2n}}$, é importante deixar claro aos nossos alunos que apesar de não existir fim para o número de termos neste tipo de representação decimal, a soma tem um valor bem definido $\frac{2}{11}$.

É oportuno mencionar que toda fração decimal com representação finita, ou seja as frações irredutíveis do tipo $\frac{\alpha}{2^a \cdot 5^b}$ também podem ser escritas como uma dízima periódica infinita, como na discussão anterior, porém terminando em uma sequência de noves, para isto basta subtrair uma unidade em seu último algarismo e acrescentar uma sequência infinita de noves.

Com efeito, podemos escrever $0{,}2=0{,}19999999999...$, e devemos entender que a sequência de noves é uma soma de infinitas parcelas. De fato, se multiplicar ambos os membros da igualdade $0{,}2=0{,}19999999999...$ por 10, obtemos $2=1{,}9999999999...$, que é a representação decimal infinita do número natural dois. Ainda com este raciocínio podemos subtrair 1 em ambos os membros desta última igualdade e teremos, como foi dito no item 1.2, a igualdade.

$$1=0{,}9999999999...$$

De outro modo, seja $x=0{,}9999999999...$, se multiplicarmos os dois lados desta igualdade por 10, obtemos a equação $10x=9{,}999999999...$ equivalente a primeira, manipulando esta equação escrevemos $10x=9+0{,}999999999...$, nesta equação substituímos a dízima por $x$ e obtemos:

$$10x=9+x \Rightarrow x=1$$

Como supomos que $x=0{,}9999999999...$ e concluímos que $x=1$, a igualdade

$$1=0{,}9999999999...,$$

foi verificada.

Mais geralmente, pode-se demonstrar que não existe fração ordinária tal que, dividindo numerador pelo denominador, gere uma dízima periódica com bloco de repetição igual ao algarismo 9.

Com efeito, se $\alpha$ e $\beta$ são números naturais tal que $\frac{\alpha}{\beta}=0{,}99999...$

multiplicando toda a igualdade por 10, obtemos $10\cdot\frac{\alpha}{\beta}=9,9999...$, subtraindo $\frac{\alpha}{\beta}$ em ambos os membros desta igualdade, vem $9\cdot\frac{\alpha}{\beta}=9\Rightarrow\frac{\alpha}{\beta}=1$, mas o quociente entre dois números diferentes não pode ser 1, deste modo concluímos que $\alpha=\beta$.

Existe um resultado mais forte que caracteriza todos os possíveis denominadores de uma fração irredutível quando escrita como fração decimal.

**Teorema 1:** Toda fração irredutível $\frac{p}{q}$ é equivalente a uma fração cujo denominador tem uma das formas 10...0, 99...9, ou 99...90...0. Ocorrem os seguintes casos:

**1)** Se $q=2^a\cdot5^b$, então $\frac{p}{q}=\frac{n}{10...0}$.

**2)** Se *q* e 10 são primos entre si, então $\frac{p}{q}=\frac{n}{99...9}$.

**3)** Se $q=2^a\cdot5^{b.}q'$ onde *q'* e 10 são primos entre si, então $\frac{p}{q}=\frac{n}{99...90...0}$.

O leitor interessado em aprofundar-se no que tratamos neste item, incluindo a demonstração do teorema 1, deve consultar LIMA (2011, p. 158-171).

O caso 1 do Teorema 1 nos fornece uma representação decimal finita, por exemplo: $\frac{22}{5}=\frac{440}{100}=4,4$.

O caso 2 uma representação periódica $\frac{5}{7}=\frac{714285}{999999}=0,\overline{714285}$.

O caso 3 ocorre quando a dízima é pré periódica (composta), isto é, possui uma parte que não se repete antes da parte periódica, como é o caso da representação decimal da fração ordinária $\frac{43713}{99900}=0,43\overline{756}$. O bloco de repetição desta dízima é 756 (diferentemente dos livros didáticos, sugerimos que se refira ao período desta dízima como 3, ou seja, igual ao número de algarismos no bloco de repetição)

Com base na discussão anterior, podemos definir o conjunto dos números racionais.

**Definição 10:** Um número real é um *número racional*, se sua representação decimal for finita ou infinita pré periódica.

É importante frisar que a periodicidade ocorre somente quando procuramos representar uma fração ordinária, ou equivalentemente um número racional, sob a forma decimal. Contudo, há uma infinidade de números que não são números racionais, como por exemplo:

$$\log_{10} 2;\ \ \ln 3;\ \ 2-e;\ \ \pi+3;\ \ \sqrt[5]{4};\ \ 7+\sqrt{2};\ \ \operatorname{sen}(10^{\circ}),$$

que não podem ser expressos como razão de dois inteiros, como discutimos anteriormente, estes números são denominados números irracionais, cada um deles só pode ser representado por uma fração decimal infinita não-periódica.

**Definição 11:** Um número real é um *número irracional*, se sua representação decimal for infinita não-periódica.

Esta definição impõe uma restrição, pois não há mecanismo capaz de nos mostrar uma quantidade infinita de dígitos, então sempre temos uma quantidade finita de dígitos para examinar. Portanto baseados na definição 11, é impossível identificarmos se um número tem representação infinita não-periódica, por isso é a demonstração matemática que nos garante por exemplo que $\sqrt{2}$ ou $\pi$ tem sua representação decimal com infinitos dígitos não-periódicos.

Atente para o significado de tal representação, esta equivale a uma soma de infinitas parcelas que converge para o número irracional em questão. Em outras palavras, dizer que $\sqrt{2}=1{,}414213562...$ significa que o segundo membro da igualdade se aproxima de $\sqrt{2}$ quanto se deseje, isto é, a sequência dos números: 1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; 1,41421; 1,414213; 1,4142135; 1,41421356 *e assim por diante,* representa uma aproximação, por falta, cada vez mais próxima de $\sqrt{2}.$

Temos acima um caso de definição por recorrência dos termos de uma sequência, que a cada número natural $n$ associa um número racional com $n-1$ casas decimais iguais à da expansão decimal de $\sqrt{2}.$ Como em outros casos de definição por recorrência o importante é a compreensão do princípio de indução[9]. Segundo Davenport (1952, p. 16):

> "[…] the principle of induction is in effect an explanation of what is meant by the words "and so on", which must occur whenever we attempt to enumerate the natural numbers".

9 "se uma propriedade *P* é válida para o número 1 e se, supondo *P* válida para seu sucessor s(n), então *P* é válida **para todos** os naturais".(LIMA, 2011, p. 2, grifo nosso).

# CAPÍTULO 3:

# DEMONSTRAÇÕES DA IRRACIONALIDADE DA RAIZ QUADRADA DE 2

No Ensino Fundamental é apresentado ao aluno, sem demonstração, que todo número quadrado perfeito tem raiz quadrada exata. Este fato é bem recebido pelo estudante até mesmo do 7º ano, pois antes de tratar de radiciação é abordado a potenciação de números inteiros. Mas o que acontece quando o aluno se depara com uma equação do tipo $x^2 - N = 0$ onde $N > 0$ e $N$ não é um quadrado perfeito?

Em geral, livros didáticos e também professores preferem que os alunos acreditem que tais números não são números racionais; em vez de fazer uma simples demonstração que os convenceria disso. Neste capítulo, apresentamos sete demonstrações da impossibilidade de raiz quadrada de dois ser um número racional, e generalizamos este fato para todas as raízes n-ésimas de potências não perfeitas.

## *3.1 Algumas considerações sobre o resultado da operação raiz quadrada na calculadora*

Existem várias maneiras de obter a raiz positiva da equação $x^2 - N = 0$, que é equivalente a encontrar a raiz quadrada de $N$. Esta operação resultará em um número real se $N \geq 0$. Quando $N$ é um número quadrado perfeito, isto é, um número natural que pode ser escrito na forma $m^2$, para algum $m \in \mathbb{N}$, o resultado é um número inteiro, pois:

$$x^2 - N = 0 \Rightarrow x^2 - m^2 = 0 \Rightarrow x^2 = m^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{m^2} \Rightarrow x = \pm m.$$

Contudo, se um número real $N \geq 0$ não é um número quadrado perfeito o resultado desta operação raiz quadrada não é um número inteiro. Diante destas equações a maioria dos professores do Ensino Médio pedem para que seus alunos usem uma calculadora que tenha o símbolo $\sqrt{\ }$ e verifiquem qual é o resultado de $\sqrt{N}$, e tanto professores como alunos se dão por satisfeitos com o resultado apresentado pela máquina. Seria muito importante se o professor tivesse a preocupação em auxiliar o aluno a dar significado àqueles números que aparecem no visor da calculadora. Note que se o aluno precisar resolver uma situação-problema que apresente a equação $x^2-2=0$ como solução, ele fará uso da calculadora[10]e obterá o número 1,4142135 como resposta. O professor poderá questionar se o aluno entende o que este número representa. É muito provável que o aluno compreenda que o resultado é um número real, porém, ele será capaz de dizer se a resposta é exata ou aproximada? Ou se este número real é ou não é um número racional?

A resposta à primeira pergunta é facilmente verificada quando se multiplica o resultado 1,4142135 por ele mesmo e se obtém 1,9999998 como resposta. Evidentemente, neste caso, o aluno responderá sem pestanejar que 1,4142135 é um valor aproximado de $\sqrt{2}$ porém, a segunda pergunta é um assunto que parece gerar muitas dúvidas aos estudantes, por isso é importante que o professor aproveite a oportunidade para demonstrar que $\sqrt{2}$ não pode ser um número racional.

## *3.2 Demonstrações*

Decidimos apresentar sete demonstrações da irracionalidade da raiz quadrada de dois pelos seguintes motivos:  a peculiaridade de cada demonstração oferece ao professor a oportunidade de revisar alguns conceitos matemáticos abordados em anos anteriores, além de oferecer a oportunidade de apresentar novos assuntos, que não fazem parte do currículo de matemática, como por exemplo, congruência módulo dez. Outro aspecto é que raramente os livros didáticos apresentam a demonstração da irracionalidade da raiz quadrada de dois, e

10 A maioria dos alunos possui calculadora de 8 dígitos.

quando o fazem, em geral, apresentam apenas uma demonstração[11] em todos os livros, o que pode dar a falsa impressão de que existe apenas um modo de demonstrar tal fato.

Afirmar que $\sqrt{2}$ é um número racional é determinar um número $x=\frac{p}{q}$ sendo $p,q\in\mathbb{Z}$ e $q\neq 0$ tal que $x^2=2$, o que não é possível, conforme mostraremos na próxima seção.

Como todo número real que é representado por uma fração pode ser escrito de uma forma mais simples, eliminando os fatores comuns do numerador e do denominador, obtemos uma fração irredutível, sem perda de generalidade, vamos considerar, nesta seção, apenas as frações do tipo $p/q$ irredutíveis.

### 3.2.1 Examinando a paridade

De acordo com Carvalho (2004), um modo de fazer a demonstração de que não existe um número racional $x=\frac{p}{q}$ com $p,q\in\mathbb{Z}$ e $q\neq 0$ tal que $x^2=2$, é examinando a paridade de $p$ e de $q$: são quatro os casos possíveis:

- ambos são pares;
- ambos são ímpares;
- o primeiro é ímpar e o segundo par;
- o primeiro é par e o segundo é ímpar.

Embora esta demonstração possa ser considerada longa, optamos por apresentá-la por entender que ela é acessível até mesmo para alunos do Ensino Fundamental, além de oportunizar ao professor uma boa revisão de conceitos fundamentais com seus alunos do Ensino Médio. Sendo assim, adaptamos a demonstração encontrada em Carvalho (2004), conforme segue:

11 A mesma que apresentamos em 3.2.2 ou a demonstração feita em 3.2.3.

**Demonstração:** O primeiro caso, numerador e denominador ambos pares, não pode ocorrer, pois estamos supondo apenas frações $\frac{p}{q}$ irredutíveis (2 seria um fator comum).

Antes de tratar do segundo caso, vamos mostrar dois resultados auxiliares que nos permitirão fazer uma abordagem mais rigorosa.

**Teorema 2:** Se um número inteiro $m$ é par, então o seu quadrado é par.

**Demonstração:** De fato, suponha $m \geq 0$ (o caso em que $m < 0$ é análogo) se $m$ é par, então podemos escrever $m = 2\mathrm{k}$, $k \in \mathbb{N}$ assim temos:

$$m^2 = (2\mathrm{k})^2 = 4\mathrm{k}^2 = 2(2\mathrm{k}^2),$$

fazendo $2\mathrm{k}^2 = w$ obtemos $m^2 = 2\mathrm{w}$ que é par.

**Teorema 3:** Se um número inteiro $m$ é ímpar, então o seu quadrado é ímpar.

**Demonstração:** De fato, suponha $m > 0$ (o caso em que $m < 0$ é análogo) se $m$ é ímpar, então podemos escrever $m = 2\mathrm{k} - 1$, $k \in \mathbb{N}$ assim temos:

$$m^2 = (2\mathrm{k} - 1)^2 = 4\mathrm{k}^2 - 4\mathrm{k} + 1 = 2(2\mathrm{k}^2 - 2\mathrm{k}) + 1,$$

chamando $2\mathrm{k}^2 - 2\mathrm{k} = w$ obtemos $m^2 = 2\mathrm{w} + 1$ que é ímpar.

**Teorema 4:** Todo número natural maior do que 1 ou é primo ou se escreve de modo único (a menos da ordem dos fatores) como um produto de números primos. Este teorema é conhecido como Teorema Fundamental da Aritmética[12].

Apesar de que não encontrar este teorema explicitamente nos PCN, encontramos a seguinte referência “a compreensão dos números naturais acontece por um processo […] de interpretação de suas variadas formas de representação (canônica, **decomposta**, fatorada, ...)”. (BRASIL, 1988, p. 97, grifo do autor).

Tendo como base os teoremas acima, podemos analisar o segundo caso. Suponha que exista uma fração irredutível $\frac{p}{q}$, com numerador e denominador, ambos ímpares, tal que $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$, significando que $p^2 = 2\mathrm{q}^2$, o que não pode acontecer, pois $p^2$ é ímpar, enquanto $2\mathrm{q}^2$ é par.

12 Usaremos o resultado sem demonstrar, uma demonstração pode ser encontrada em HEFEZ (2011, p. 83).

O terceiro caso é semelhante ao anterior. Vamos supor que existe uma fração irredutível $\frac{p}{q}$, com numerador ímpar e denominador par, tal que $\left(\frac{p}{q}\right)^2=2$, isto significa que $p^2=2q^2$, o que não pode acontecer, pois se fosse possível teríamos uma igualdade em que um lado é ímpar e o outro par.

No quarto caso temos numerador par e denominador ímpar, ou seja $\left(\frac{p}{q}\right)^2=2 \Rightarrow p^2=2q^2$. Seguindo um passo do raciocínio anterior, isto poderia acontecer, já que ambos os lados são pares.

Suponha que existe uma fração irredutível $\frac{p}{q}$, com numerador par e denominador ímpar tal que $\left(\frac{p}{q}\right)^2=2$, ou seja $p^2=2q^2$, pelo Teorema Fundamental da Aritmética sabemos que a fatoração de $p$ e $q$ são únicas[13], isto implica que na fatoração de $p^2$ e $q^2$ cada fator vem aos pares, sendo assim, a quantidade de fatores 2 do lado esquerdo de $p^2=2q^2$ é par enquanto que do lado direito é ímpar, o que não pode ocorrer em uma igualdade.

### 3.2.2 Usando o Teorema Fundamental da Aritmética

A demonstração usando o Teorema Fundamental da Aritmética, é tradicional e pode ser encontrada em diversas referências inclusive em LIMA (2006). Talvez esta seja a demonstração mais comum de que raiz quadrada de dois não pode ser um número racional, ela envolve um raciocínio simples, até para o aluno do Ensino Fundamental, esta demonstração além de ser uma demonstração eficaz ela mostra a beleza da demonstração por absurdo.

**Demonstração:** Suponha, por absurdo, que $\sqrt{2}$ seja um número racional,

13 a menos da ordem dos fatores

deste modo existem $p$ e $q$ não nulos, tal que $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$, assim

$$\sqrt{2}^2=\left(\frac{p}{q}\right)^2 \Rightarrow p^2=2q^2,$$

mas esta última igualdade é absurda, pois na decomposição de $p^2$ em fatores primos o expoente do fator 2 é par (pode ser zero) enquanto em $2q^2$ é ímpar.

### 3.2.3 Por meio de Frações Irredutíveis

A demonstração abaixo, também é bastante difundida e pode ser encontrada em diversos livros, inclusive em DE MORAIS FILHO (2010). O aluno do Ensino Médio é capaz de compreendê-la com certa facilidade, o professor pode explorar várias propriedades de números inteiros durante a explicação.

Antes de iniciar a demonstração vamos apresentar uma definição que nos auxiliará na conclusão.

**Definição 12:** Sejam *p* e *q* inteiros. Dizemos que *p e q são relativamente primos* quando o maior divisor comum entre eles é 1.

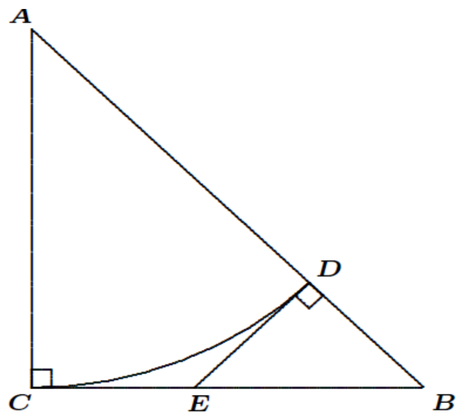
**Demonstração:** Suponhamos, por absurdo, que $\sqrt{2}$ seja racional. Assim, existem *p* e *q* inteiros, com *q* não-nulo, tais que, $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$. Sem perda de generalidade, assumiremos que *p* e *q* são relativamente primos. Elevando ao quadrado ambos os membros da igualdade obtemos $p^2=2q^2$. Logo, $p^2$ é um número par, donde concluímos que *p* é par, ou seja, $p=2k$, para algum $k\in\mathbb{Z}$. Dessa maneira, $4k^2=2q^2$, ou seja, $q^2=2k^2$. Por raciocínio análogo, concluímos que *q* é par. Sendo *p* par e *q* par, *p* e *q* não podem ser relativamente primos, o que contradiz nossa hipótese.

### 3.2.4 Por Construção Geométrica

A demonstração a seguir, de que a raiz quadrada de dois não pode ser um número racional, é baseada em OTTAWAY (2003). Consideramos que esta demonstração além de ser uma demonstração da impossibilidade da raiz quadrada de dois ser um número racional, proporciona ao professor do Ensino Médio a oportunidade de revisar vários conceitos de semelhança de triângulos, o que justifica sua apresentação neste trabalho.

**Demonstração:** Sabemos pelo Teorema de Pitágoras que é possível construir um triângulo com ângulo reto (triângulo retângulo) cujos lados medem 1, 1 e $\sqrt{2}$. Se admitirmos que $\sqrt{2}$ seja racional, podemos construir um triângulo que possui todos os lados com medidas inteiras[14]. Em particular, vamos escolher o menor triângulo *ABC* que goza desta propriedade. A figura 7 ilustra a construção.

**Figura 7** - Triângulo Retângulo




Primeiramente construímos o triângulo *ABC,* cujos lados tem medidas inteiras e que estamos supondo ser o menor possível, em seguida traçamos um arco de circunferência com centro no vértice *A* do triângulo *ABC* e raio *AC,* tal arco intersecta A*B* em *D*. Traçamos por *D* uma perpendicular a *AB* que encontra *BC* em *E.* Esta construção nos faz concluir que $AD \equiv AC$, ($\equiv$ lê-se congruente, significa que possui a mesma medida), então *AD* possui medida inteira, $DB = AB - AD$ é um inteiro, já que é a diferença entre dois inteiros. Como a medida do ângulo *DBE* é 45º

14 basta multiplicar todos os lados do triângulo pelo denominador $b$, já que podemos escrever $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$.

e a medida do ângulo *EDB* é 90º, temos que a medida do ângulo *DEB* é 45º, isto quer dizer que o $\triangle EBD$ é isósceles, logo $DE \equiv DB$ o que garante que *DE* é uma medida inteira. Como *DE* e *CE* são tangentes da mesma circunferência, eles possuem a mesma medida, deste modo, *CE* também é uma medida inteira. Sendo que $EB = CB - CE$, então *EB* é uma medida inteira. Deste modo, mostramos que os $\triangle ABC$ e o $\triangle EBD$ são semelhantes, sendo que o último também tem lados com medidas inteiras, o que contraria nossa hipótese de que o $\triangle ABC$ é o menor triângulo isósceles retângulo com lados de medidas inteiras. Deste modo, $\sqrt{2}$ não pode ser um número racional.

### 3.2.5 Usando Recorrência

Esta demostração, embora longa pode ser levada ao aluno do Ensino Médio, pois sua apresentação envolve conceitos que são intuitivos ao aluno. Basicamente será usado o argumento de que podemos construir infinitos retângulos, com a medida dos lados cada vez menores e, por isso, estamos construindo uma sequência decrescente, no que diz respeito a medida dos lados do retângulo. A demonstração abaixo pode ser encontrada em CHAVES e PORTO (2012).

**Demonstração:** De fato, consideremos o retângulo $R_1$ de lados $L_1 = \sqrt{2} + 1$ e $l_1 = 1$.

Como $1 < \sqrt{2} < 2$, segue que

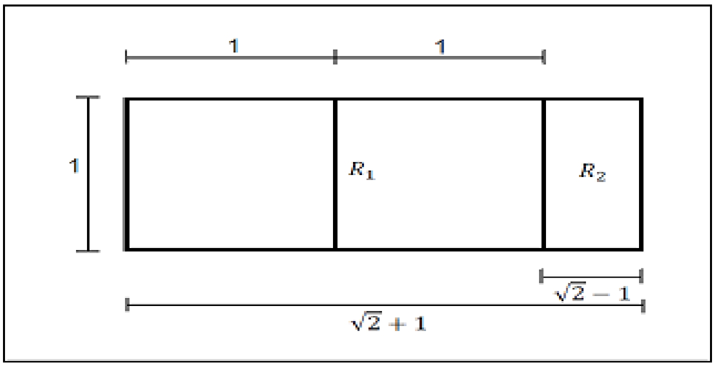
$$2 < \sqrt{2} + 1 < 3 \quad \text{e} \quad 0 < \sqrt{2} - 1 < 1.$$

Assim podemos construir um novo retângulo $R_2$, cujos lados são:

$$L_2 = l_1 = 1 \quad \text{e} \quad l_2 = L_1 - 2l_1 = \sqrt{2} - 1,$$

como podemos observar na figura 8.

**Figura 8** - Sequência de Retângulos




Note que $L_i$ e $l_i$ denotam, respectivamente, as medidas do: maior e do menor lado do retângulo $R_i$, para $i \in \{1,2\}$.

Observamos que a razão das medidas entre os lados dos retângulos construídos são iguais, pois:

$$\frac{L_1}{l_1} = \sqrt{2}+1 = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{L_2}{l_2}.$$

Utilizando o fato de que $1-2(\sqrt{2}-1) = 3-2\sqrt{2} = (\sqrt{2}-1)^2 > 0$, podemos construir um terceiro retângulo $R_3$, cujas medidas dos lados são: $L_3 = l_2 = \sqrt{2}-1$ e $l_3 = L_2 - 2l_2 = 3-2\sqrt{2}$, e ainda, obtemos a mesma razão entre as medidas dos lados maior e menor do retângulo $R_3$, pois:

$$\frac{L_3}{l_3} = \sqrt{2}+1.$$

De modo recursivo, podemos obter o n-ésimo passo da construção, isto é, um retângulo $R_n$ cujos lados medem: $L_n = l_{n-1}$ e $l_n = L_{n-1} - 2l_{n-1}$.

Ainda assim, temos que a razão entre a medida do maior e do menor lado do n-ésimo retângulo é dado por:

$$\frac{L_n}{l_n} = \sqrt{2}+1 \quad \text{para todo} \quad n \geq 1.$$

A demonstração desta afirmação se faz por indução. O caso base foi verificado na construção do retângulo $R_1$.

Deste modo, temos que a hipótese de indução é:

$$\frac{L_j}{l_j}=\sqrt{2}+1,\ j\in\mathbb{N}.$$

Com base nesta hipótese, temos que:

$$\frac{L_{j+1}}{l_{j+1}}=\frac{l_j}{L_j-2l_j}=\frac{1}{(\sqrt{2}+1)-2}=\sqrt{2}+1.$$

Portanto, a afirmação $\frac{L_n}{l_n}=\sqrt{2}+1$ para todo $n\geq 1$ é verdadeira.

Com base na afirmação acima, se pode concluir que:

**a)** Podemos construir infinitos retângulos $R_n$, pois os valores de $l_n$ obtidos pela relação de recorrência $l_n=L_{n-1}-2l_{n-1}$ são todos positivos.

De fato, considere $A=\{n\in\mathbb{N}/l_n<0\}$. Se $A\neq\emptyset$, então pelo Princípio da Boa Ordem $A$ possui um menor elemento, que denotaremos por $n_0$.

Com base na afirmação de que $\frac{L_n}{l_n}=\sqrt{2}+1$ para todo $n\geq 1$, temos:

$$\frac{L_{n_0}}{l_{n_0}}=\sqrt{2}+1>0,$$

de onde concluímos que $L_{n_0}<0$, visto que $l_{n_0}<0$. Mas $L_{n_0}=l_{n_0-1}<0$, logo $n_0-1\in A$ contrariando a minimalidade de $n_0$. Portanto $A=\emptyset$, ou seja, $l_n>0$ para todo $n\geq 1$. Assim concluímos a demonstração do item **a)**.

**b)** A sequência $(l_n)_{n\geq 1}$ é decrescente.

De fato, basta utilizarmos a relação $L_n=l_{n_{-1}}$ na afirmação $\frac{L_n}{l_n}=\sqrt{2}+1$ para todo $n\geq 1$, para obter $\frac{l_{n-1}}{l_n}=\sqrt{2}+1>1$, o que implica $\frac{l_{n-1}}{l_n}>1$.

Multiplicando a última desigualdade por $l_n$, obtemos $l_{n-1}>l_n$, o que conclui a demonstração do item **b)**.

Suponhamos, por contradição, que $\sqrt{2}$ seja racional. Assim, existem inteiros *p* e *q*, com *q* não nulo, tal que:

$$\sqrt{2}=\frac{p}{q}.$$

Consideremos um retângulo $R'_1$ cujos lados medem, respectivamente:

$$L_1'=p+q \text{ e } l_1'=q.$$

Assim,

$$\frac{L'_1}{l'_1}=\frac{p+q}{q}=\frac{p}{q}+1=\sqrt{2}+1.$$

Observe que: $L'_1-2l'_1=p-q>0$, visto que $\frac{p}{q}>1$. Dessa maneira, podemos construir um retângulo $R'_2$ com lados medindo: $L'_2=l'_1$ e $l'_2=L'_1-2l'_1$.

De modo análogo, ao que foi apresentado para o retângulo $R'_1$ obtemos:

$$\frac{L'_2}{l'_2}=\sqrt{2}+1.$$

De modo recursivo, se pode construir retângulos com lados cujas medidas são: $L'_n=l'_{n-1}$ e $l'_n=L'_{n-1}-2l'_{n-1}$ e os itens **a)** e **b)** discutidos anteriormente são verdadeiros neste caso.

Observe que a sequência $(l'_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de inteiros positivos, isto é, uma sequência de números naturais, decrescente e infinita, mas uma sequência como esta não pode ter um menor elemento, o que contradiz o Princípio da Boa Ordem[15], portanto, absurdo. Assim raiz quadrada de dois não é um número racional.

### 3.2.6 Por meio do Princípio da Boa Ordem

Para esta demonstração, nos baseamos em CHAVES e PORTO (2012). Nesta demonstração usamos o Princípio da Boa Ordem. Esta ideia intuitiva pode ser

15 Todo subconjunto não vazio do conjunto dos números naturais, possui um menor elemento.

apresentada aos alunos sem demonstração, por isso, omitiremos aqui e admitimos o resultado sem demonstração, mas o leitor interessado pode consultar LIMA (1992, p. 31).

**Demonstração:** Suponhamos, por absurdo, que $\sqrt{2}$ seja racional.

Assim, existem *p* e *q* inteiros, com *q* não nulo, tal que $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$.

Considere o conjunto $S=\{n\in\mathbb{N}/n\sqrt{2}\in\mathbb{Z}\}$, observe que *S* é não vazio, visto que $p=q\sqrt{2}\in\mathbb{Z}, q\in S$. Como *S* é um subconjunto do conjunto dos números naturais, segue pelo Princípio da Boa Ordem, que existe um elemento mínimo em *S.*

Seja *b* o elemento mínimo de *S,* assim $a=b\sqrt{2}\in\mathbb{Z}$.

Note que $\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)=2-\sqrt{2}$, ou seja, $\sqrt{2}=\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=\frac{2b-a}{a-b}$, pois

$$\frac{a}{b}=\sqrt{2}.$$

Como $1<\sqrt{2}<2$, segue que $1<\frac{a}{b}<2$, multiplicando esta desigualdade por *b* obtém $b<a<2b$ , agora subtraindo *b* concluímos que $0<a-b<b$. Este fato contradiz a hipótese de que *b* é o elemento mínimo de *S*, pois $(a-b)\sqrt{2}=2b-a$ pertencem ao conjunto dos números inteiros. Deste modo $\sqrt{2}$ não é um racional.

### 3.2.7 Usando Decimais

Esta demonstração pode ser apresentada aos alunos do Ensino Fundamental e Ensino Médio, pois para compreendê-la é necessário que o estudante saiba que todo número racional, quando é representado por uma expansão decimal, esta é finita ou é infinita periódica. Baseados em KLAZAR (2013) apresentamos a demonstração em dois casos.

No primeiro caso suporemos que a representação decimal do número é finita, no segundo caso que é infinita periódica.

**Caso 1:** Vamos supor, por absurdo, que $\sqrt{2}$ seja um número racional, cuja representação decimal seja finita, sejam $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ os dígitos dessa representação e $a_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Além disso, sem perder a generalidade, vamos supor que esta representação não termine com uma sequência de zeros.

Deste modo, podemos escrever

$$\sqrt{2} = 1, a_1 a_2 a_3 \ldots a_n,$$

multiplicando a igualdade por $10^n$ obtemos:

$$\sqrt{2} \cdot 10^n = 1\, a_1 a_2 a_3 \ldots a_n,$$

elevando, esta última igualdade ao quadrado chegamos ao absurdo,

$$(10^n \cdot \sqrt{2})^2 = 2 \cdot 10^{2\mathrm{n}} = (1\, a_1 a_2 a_3 \ldots a_n)^2,$$

pois o termo central termina em uma sequência de zeros, enquanto $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ não são zeros, tampouco seus quadrados.

Vamos ilustrar a demonstração acima por meio de um exemplo.

Suponhamos que $\sqrt{2} = 1{,}4142,$ multiplicando por $10^4$ obtemos:

$\sqrt{2} \cdot 10\,000 = 1{,}4142 \cdot 10\,000,$ ou $\sqrt{2} \cdot 10\,000 = 14\,142,$ elevando esta igualdade ao quadrado e efetuando os cálculos se obtém:

$$200\,000\,000 = 199\,996\,164\,,$$

mas esses números distintos, logo a igualdade é um absurdo.

**Caso 2:** Vamos supor que $\sqrt{2}$ seja um número racional com representação decimal infinita e periódica, isto é,

$$\sqrt{2} = 1, \overline{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n} = 1, a_1 a_2 a_3 \ldots a_n a_1 a_2 a_3 \ldots a_n \ldots .$$

Como os dígitos $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ estão escritos na forma decimal, podemos representá-los na forma de uma soma de frações com denominador sendo potências de $10^n,$ ou seja,

$$\sqrt{2}=1+\frac{a_1a_2a_3\ldots a_n}{10^n}+\frac{a_1a_2a_3\ldots a_n}{10^{2n}}+\frac{a_1a_2a_3\ldots a_n}{10^{3n}}+\ldots$$

mas

$$\frac{a_1a_2a_3\ldots a_n}{10^n}+\frac{a_1a_2a_3\ldots a_n}{10^{2n}}+\frac{a_1a_2a_3\ldots a_n}{10^{3n}}+\ldots=\frac{\dfrac{a_1a_2a_3\ldots a_n}{10^n}}{1-10^n}=\frac{a_1a_2a_3\ldots a_n}{\underbrace{999\ldots9}_{n\,noves}}.$$

Deste modo escrevemos $\sqrt{2}=1+\dfrac{a_1a_2a_3\ldots a_n}{\underbrace{999\ldots9}_{n\,noves}}$.

Note que podemos escrever $(10^n-1)=\underbrace{999\ldots9}_{n\,noves}$, assim fazendo uma manipulação algébrica na expressão acima e elevando ao quadrado, obtemos:

$$2\cdot\underbrace{999\ldots9}_{n\,noves}{}^2=(\sqrt{2}(10^n-1))^2=((10^n-1)+a_1a_2a_3\ldots a_n)^2.$$

A igualdade acima é um absurdo, pois o número do lado esquerdo termina com o algarismo 2, enquanto no membro direito isto não pode ocorrer. Há pelo menos dois modos de demonstrar para alunos do Ensino Médio o absurdo que ocorre na igualdade acima.

Pode-se usar o algoritmo de Euclides ou usar congruência módulo 10. Escolhemos o último modo. Embora congruência não seja assunto do currículo, esta pode ser uma ótima oportunidade para explorá-lo.

**Proposição 1:** Todo número natural *a,* no sistema decimal, pode ser escrito da seguinte forma:

$$a=b_n10^n+b_{n-1}10^{n-1}+\ldots+b_110+b_0.$$

Exemplo: o número 14 509, na base 10, é a representação de

$$1\cdot10^4+4\cdot10^3+5\cdot10^2+0\cdot10+9\,.$$

**Definição 13:** Seja *m* número natural diferente de zero. Diremos que dois números naturais *a e b são congruentes módulo m* se os restos de sua divisão euclidiana por *m* são os mesmos.

Se dois números naturais *a* e *b* forem congruentes módulo *m* escrevemos

$$a \equiv b \, mod \, m.$$

Exemplo: $45 \equiv 81 \, mod \, 6,$ pois o resto da divisão de 45 e de 81 por 6 é 3.

**Proposição 2:** Sejam $m \in \mathbb{N}, m > 1$. Para todos $a, b, c \in \mathbb{N},$ temos que:

i. $a \equiv a \, mod \, m;$

ii. Se $a \equiv b \, mod \, m,$ então $b \equiv a \, mod \, m;$

iii. Se $a \equiv b \, mod \, m$ e $b \equiv c \, mod \, m,$ então $a \equiv c \, mod \, m.$

**Proposição 3:** Sejam $a, b, c, d, m \in \mathbb{N},$ com $m > 1$.

i. Se $a \equiv b \, mod \, m$ e $c \equiv d \, mod \, m,$ então $a + c \equiv b + d \, mod \, m;$

ii. Se $a \equiv b \, mod \, m$ e $c \equiv d \, mod \, m,$ então $a \cdot c \equiv b \cdot d \, mod \, m$.

As demonstrações foram omitidas, pois foge ao nosso objetivo, contudo o leitor interessado pode encontrá-las em HEFEZ (2011, p. 111).

Mediante o conhecimento das proposições 2 e 3, e da definição 13, estamos aptos para demonstrar o absurdo que ocorre com a igualdade

$$2 \cdot \underbrace{999...9}_{n \, noves}{}^2 = ((10^n - 1) + a_1 a_2 a_3 ... a_n)^2.$$

De fato,

$$\underbrace{999...9}_{n \, noves} \equiv 9 \, mod \, 10 \Rightarrow 9^2 = 81 \equiv 1 \, mod \, 10.$$

logo

$$2 \cdot \underbrace{999...9}_{n \, noves}{}^2 \equiv 2.1 \equiv 2 \, mod \, 10$$

isto significa que o resto da divisão de $2 \cdot \underbrace{999...9}_{n \, noves}{}^2$ por 10 é 2.

Por outro lado, independente de conhecermos o último dígito do número representado pela expressão $((10^n - 1) + a_1 a_2 a_3 ... a_n)^2,$ podemos determinar os possíveis restos de sua divisão por 10.

Note que na congruência módulo 10, o que realmente interessa é o último dígito do número, pois de acordo com a proposição 1, qualquer que seja o número *a* podemos escrevê-lo na base 10 como $a=b_n 10^n+b_{n-1}10^{n-1}+...+b_1 10+b_0$. Colocando 10 em evidência, temos

$$a=10\cdot(b_n 10^{n-1}+b_{n-1}10^{n-2}+...+b_1)+b_0\equiv b_0 \, mod \, 10.$$

Deste modo, os possíveis restos de $((10^n-1)+a_1 a_2 a_3 ... a_n)^2$ por 10 só pode ser: 0;1; 4; 5; 6 ou 9, conforme ilustramos na tabela 1.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $0^2\equiv 0 \, mod \, 10$ | $1^2\equiv 1 \, mod \, 10$ | $2^2\equiv 4 \, mod \, 10$ | $3^2\equiv 9 \, mod \, 10$ | $4^2\equiv 6 \, mod \, 10$ |
| $5^2\equiv 5 \, mod \, 10$ | $6^2\equiv 6 \, mod \, 10$ | $7^2\equiv 9 \, mod \, 10$ | $8^2\equiv 4 \, mod \, 10$ | $9^2\equiv 1 \, mod \, 10$. |

**Tabela 1** - Congruência Módulo 10.

Assim mostramos que $2\cdot\underbrace{999...9}_{n\,noves}{}^2=((10^n-1)+a_1 a_2 a_3 ... a_n)^2$ não pode ocorrer, demonstrando desta forma que $\sqrt{2}$ não pode ser um número racional.

Até este ponto, mostramos que, em particular, raiz quadrada de dois é um número irracional, vamos generalizar o resultado. É de conhecimento do aluno, desde o sétimo ano do Ensino Fundamental, que se *n* não é um número quadrado perfeito, então sua raiz quadrada não é exata, como será demonstrado no Teorema 5. Mais geralmente, a raiz r-ésima, para $r\geq 2$, de um número natural que não é uma potência r-ésima de *r* é um número irracional, conforme será demonstrado no teorema 6.

As demonstrações abaixo, são baseadas em KHAZAD (2005), não estamos afirmando que devem ser apresentadas aos estudantes do Ensino Fundamental e Ensino Médio, contudo, é conveniente que o professor saiba mais do que aquilo que deve ensinar, por isso achamos interessante esta exposição.

**Teorema 5:** Se para algum $k$ natural: $k^2<n<(k+1)^2$, então $\sqrt{n}$ é um número irracional.

A demonstração será por contradição: Suponha que $\sqrt{n}$ seja um número racional, deste modo podemos escrevê-lo como uma fração irredutível $\frac{p}{q}$.

Assim $k<\sqrt{n}=\frac{p}{q}<k+1$, multiplicando o lado direito da igualdade por *q* e fazendo algumas manipulações algébricas, obtemos a seguinte desigualdade

$0 < p - qk < q,$ além disso:

$$\frac{p}{q} = \frac{p(p-qk)}{q(p-qk)} = \frac{p^2 - pqk}{q(p-qk)},$$

por hipótese $\sqrt{n} = \frac{p}{q},$ elevando ao quadrado obtemos $p^2 = nq^2$ substituindo em $\frac{p}{q} = \frac{p^2 - pqk}{q(p-qk)}$ e fazendo algumas simplificações, obtemos:

$$\frac{p}{q} = \frac{nq^2 - pqk}{q(p-qk)} = \frac{nq - pk}{p - qk}.$$

Note que o último membro da igualdade acima, é uma fração com numerador e denominador menores do que os da fração $\frac{p}{q}$ que supomos ser irredutível, e isto é um absurdo, então podemos concluir que $\sqrt{n}$ não é um número racional.

De fato, podemos demonstrar que a raiz r-ésima, para $r \geq 2,$ de um número natural que não é uma potência perfeita de *r* não pode ser um número racional.

**Teorema 6:** Se *k, r* e *n* são números naturais, e $k^r < n < (k+1)^r,$ então $\sqrt[r]{n}$ é um número irracional.

Com o objetivo de facilitar a demonstração do Teorema 6, vamos apresentar e demonstrar um Lema, para isto usaremos fortemente o resultado do Teorema 5 e a definição 14.

**Definição 14:** Dados dois números naturais $a$ e $b$ com $a \neq 0,$ dizemos que *a* divide *b*, e escrevemos $a|b,$ quando existir um número natural *c* tal que $b = a \cdot c.$ Se não existir *c* nas condições acima, dizemos que *a* não divide *b* e escrevemos $a \nmid b.$

**Proposição 4:** Se $a, b, c$ e $d$ são números inteiros com $b$ e $d$ diferentes de zero, então $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se, e somente se $a \cdot d = b \cdot c.$

Na realidade esta proposição é um Teorema conhecido como propriedade fundamental das frações. Sua demonstração pode ser encontrada em Ferreira

(2011, p.67).

**Lema 1:**

a) Se $x=\frac{a}{b}$ é um número racional e $b$ é o menor denominador positivo possível para a expressão racional de $x$, e se $x=\frac{c}{d}$ é uma outra representação racional do número *x,* então $b|d$.

b) Se $\sqrt[r]{n}=\frac{a}{b}$ onde *b* é o menor denominador positivo para toda expressão racional de $\sqrt[r]{n}$, então $\sqrt[r]{n^{r-1}}=\frac{a^{r-1}}{b^{r-1}}$ e $b^{r-1}$ é o menor denominador positivo para toda expressão racional de $\sqrt[r]{n^{r-1}}$.

**Demonstração do Lema 1.**

**(Parte a)** Para $x=\frac{a}{b}$, o denominador ser mínimo significa que *a* e *b* são relativamente primos.

Deste modo $x=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ implica que $ad=bc$. Fato que garante que $b|ad$ e como $mdc(a,b)=1$, temos que $b|d$ como queríamos demonstrar.

**(Parte b)** Podemos escrever $\sqrt[r]{n^{r-1}}=\frac{a^{r-1}}{b^{r-1}}$, se o denominador desta fração não for o menor possível, então podemos escrever uma outra fração que terá denominador mínimo, seja $\frac{c}{d}=\frac{a^{r-1}}{b^{r-1}}$, isto é $a^{r-1}\cdot d=b^{r-1}\cdot c$ .

Como o $mdc(a,b)=1$, segue que $mdc(a^{r-1},b^{r-1})=1$.

Consequentemente $b^{r-1}|d$, deste modo *d* não pode ser o menor denominador que representa $\sqrt[r]{n^{r-1}}$, assim segue o resultado.

Deste modo, temos subsídios suficientes para demonstrar o teorema 6, a demonstração é por absurdo.

**Demonstração:**

Suponha que $\sqrt[r]{n}$ seja racional, então existem *a* e *b* naturais, com *b* não nulo, tal que

$$\sqrt[r]{n}=\frac{a}{b}.$$

Observamos que a hipótese $k^r<n<(k+1)^r$ nos conduz a $k<\sqrt[r]{n}=\frac{a}{b}<(k+1)$, esta desigualdade garante que $a-bk>0$.

Vamos reescrever a fração que representa $\sqrt[r]{n^{r-1}}$ como se segue:

$$\begin{aligned}\sqrt[r]{n^{r-1}}&=\frac{a^{r-1}}{b^{r-1}}\\&=\frac{a^{r-1}(a-bk)}{b^{r-1}(a-bk)}\\&=\frac{a^r-a^{r-1}bk}{b^{r-1}(a-bk)}\\&=\frac{nb^r-a^{r-1}bk}{b^{r-1}(a-bk)}\\&=\frac{nb^{r-1}-a^{r-1}k}{b^{r-2}(a-bk)}.\end{aligned}$$

Como o menor denominador para representar $\sqrt[r]{n^{r-1}}$ é $b^{r-1}$, e obtemos $b^{r-2}(a-bk)\geq b^{r-1}$, que pode ser dividido por $b^{r-2}$ (este valor é não nulo), podemos escrever $a-bk\geq b$. Dividindo a desigualdade pelo valor não nulo *b*,

chegamos a $\frac{a}{b}\geq k+1$, o que contraria a hipótese.

# CAPÍTULO 4

# MÉTODOS PARA DETERMINAR AS RAÍZES DE EQUAÇÕES

A tarefa de determinar as raízes de uma equação, em particular do segundo grau, é muito relevante e executada no Ensino Médio, entretanto observamos que atualmente o ensino relativo à resolução de equações do segundo grau tem se restringido praticamente à apresentação e execução exaustiva da fórmula:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}.$$

Com o intuito de oferecer aos professores outras possibilidades para explorar um assunto inerente ao currículo e despertar no aluno o interesse e a possibilidade de investigar a matemática por meio do computador é que apresentamos, neste capítulo, alguns métodos numéricos para se encontrar as raízes de equações. Os recursos necessários para desenvolver quaisquer das atividades são de fácil acesso[16]: calculadora e os softwares *LibreOffice Calc* e o *GeoGebra* (ambos instalados nas máquinas dos laboratórios de informática das escolas públicas do Estado do Paraná).

Segundo LIMA (1988)

> Por mais antigo, tradicional e repisado que seja o assunto que estamos ensinando, convém sempre procurar novos ângulos para focalizá-lo, outras maneiras de abordá-lo, não somente buscando tornar mais atraentes nossas aulas mas até mesmo para nos dar um pouco mais de entusiasmo, quebrando a monotonia de repetir todos os anos a mesma história.

## *4.1 Método das Tentativas*

O método das tentativas, provavelmente é a forma mais rudimentar para determinar a raiz quadrada de um número $N$, quando $N$ não é um quadrado perfeito, o método fornece um valor aproximado da raiz quadrada de $N$.

16 Há 2 139 escolas no Estado do Paraná das quais, segundo Branco (2011), 2 100 possuem laboratório de informática, estes dados nos livra da preocupação com a falta de recursos tecnológicos nas escolas públicas do Estado do Paraná.

**Definição 15:** Dizemos que $x_0$ é uma *aproximação* para $x$ com erro menor do que ou igual a $\varepsilon$ se $|x-x_0|\leq\varepsilon$.

O método das tentativas é amplamente utilizado por professores do Ensino Fundamental, sobretudo no sétimo ano, muitas vezes para que os alunos treinem as multiplicações. Obviamente, são usados números com poucos dígitos e suas aproximações com poucas casas decimais. Antes de inciar o estudo da radiciação é comum que o professor faça junto com seus alunos uma tabela de quadrados perfeitos, como na Tabela 2.

| n | $n^2$ | n | $n^2$ | n | $n^2$ | n | $n^2$ | n | $n^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 11 | 121 | 21 | 441 | 31 | 961 | 41 | 1681 |
| 2 | 4 | 12 | 144 | 22 | 484 | 32 | 1024 | 42 | 1764 |
| 3 | 9 | 13 | 169 | 23 | 529 | 33 | 1089 | 43 | 1849 |
| 4 | 16 | 14 | 196 | 24 | 576 | 34 | 1156 | 44 | 1936 |
| 5 | 25 | 15 | 225 | 25 | 625 | 35 | 1225 | 45 | 2025 |
| 6 | 36 | 16 | 256 | 26 | 676 | 36 | 1296 | 46 | 2116 |
| 7 | 49 | 17 | 289 | 27 | 729 | 37 | 1369 | 47 | 2209 |
| 8 | 64 | 18 | 324 | 28 | 784 | 38 | 1444 | 48 | 2304 |
| 9 | 81 | 19 | 361 | 29 | 841 | 39 | 1521 | 49 | 2401 |
| 10 | 100 | 20 | 400 | 30 | 900 | 40 | 1600 | 50 | 2500 |

**Tabela 2 -** Quadrados Perfeitos

Com esta tabela em mãos o método consiste em localizar dois quadrados perfeitos consecutivos, de tal modo que, um seja maior e o outro menor do que o número que se deseja descobrir o valor aproximado da raiz quadrada.

Por exemplo, desejamos determinar, com duas casas decimais de exatidão, o valor de $\sqrt{550}$.

Primeiramente notamos que $529<550<576$, logo $23<\sqrt{550}<24$.

Agora começamos o processo por tentativas e verificamos que $23{,}45<\sqrt{550}<23{,}46$ são as aproximações por falta e por excesso de $\sqrt{550}$, pois $23{,}45^2=549{,}90$ e $23{,}46^2=550{,}37$.

O professor deve decidir qual aproximação melhor lhe será útil.

## *4.2 Método das Aproximações Sucessivas*

Determinar $\sqrt{N}$ é equivalente a encontrar a raiz positiva da equação $x^2-N=0$. Se $x$ for solução (não nula) de $x^2=N$ então podemos escrever $x=\frac{N}{x}$. Suponhamos então que *N* não é um quadrado perfeito, deste modo, se $x$ for uma aproximação por falta de $\sqrt{N}$, então $\frac{N}{x}$ será uma aproximação por excesso. Não é difícil ocorrer a qualquer de nossos alunos, após raciocinar um pouco, que a média aritmética entre estes dois valores deve ser um valor mais próximo de $\sqrt{N}$. Assim para obtermos a $\sqrt{N}$ por este método começamos com uma primeira aproximação $x_0$, como estamos supondo que *N* não é um quadrado perfeito, temos $x_0\neq\sqrt{N}$ assim, sem perder a generalidade, pois poderíamos supor o contrário, concebemos que se $x_0>\sqrt{N}$, então $\frac{N}{x_0}<\sqrt{N}$. A média aritmética entre $x_0$ e $\frac{N}{x_0}$, será uma melhor aproximação para a raiz requerida, deste modo temos $x_1=\frac{1}{2}(x_0+\frac{N}{x_0})$, podemos tomar uma terceira aproximação $x_2=\frac{1}{2}(x_1+\frac{N}{x_1})$ que é uma aproximação ainda melhor do que a anterior e assim por diante.

Generalizando o que expomos acima, podemos obter uma aproximação para $\sqrt{N}$ recursivamente. Definir uma equação recursivamente é definir cada termo da equação a partir do termo anterior (ou de vários termos anteriores). Neste exemplo, basta conhecermos um termo, que será o nosso ponto de partida. Assim, para determinarmos recursivamente $\sqrt{N}$, por meio do método das aproximações sucessivas, fazemos

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{N}{x_n}), n\in\mathbb{N}.$$

O ponto de parada da sequência $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots$ vai depender da precisão que requeremos do processo.

Para ilustrar este método vamos determinar o valor aproximado da raiz quadrada de três com sete casas decimais de precisão[17].

Para darmos o ponto de partida, o chute inicial, é interessante, mas não é obrigatório situarmos o número do qual desejamos encontrar o valor aproximado da raiz quadrada, entre dois quadrados perfeitos consecutivos, assim podemos fazer uma boa escolha para $x_0$, que será o candidato a raiz. Quer dizer, se $k<\sqrt{N}<k+1$ e escolhermos $x_0 \in (k, k+1)$, então podemos diminuir o número de iterações. No nosso exemplo, primeiramente notamos que $1<3<4$, consequentemente $1<\sqrt{3}<2$, vamos tomar $x_0=1{,}5$, pois $x_0 \in (1{,}2)$.

Aplicando o processo descrito acima, teremos:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}\left(1{,}5+\frac{3}{1{,}5}\right)=1{,}75 \\ x_2 &= \frac{1}{2}\left(1{,}75+\frac{3}{1{,}75}\right)=1{,}7321428 \\ x_3 &= \frac{1}{2}\left(1{,}7321428+\frac{3}{1{,}7321428}\right)=1{,}7320508. \end{aligned}$$

Com este método conseguimos a aproximação desejada com apenas três iterações. Note que obtivemos sete casas decimais com bastante rapidez, o que faz deste um bom método.

As igualdades: $x_1=1{,}75$, $x_2=1{,}7321428$ e $x_3=1{,}7320508$ significam que temos $\sqrt{3}$ com uma casa decimal de precisão; três casas decimais exatas e sete casas decimais precisas. É muito provável que não seja necessário mais precisão do que a atingida em $x_3$, mas se desejarmos, podemos continuar o procedimento.

Uma possível dúvida ou até mesmo curiosidade do aluno, seria saber o motivo pelo qual o método funciona, mesmo quando tomamos valores fora do intervalo, no qual a resposta está confinada. Uma justificativa seria que a cada nova iteração conseguimos uma aproximação melhor do que a anterior, isto advém:

17 Normalmente a calculadora do aluno possui 8 dígitos.

i. da própria definição de aproximação;

ii. e do fato desta equação de recorrência ser convergente.

De acordo com LOPES (2012), podemos demonstrar que esta equação de recorrência converge para a raiz quadrada de $N$, conforme detalhamos abaixo.

De fato, se $x$ é um número real tal que $0<x<1$, então $x^2<x$. Assim se $x_0>1$ é uma aproximação de $\sqrt{N}$ tal que $0<|\sqrt{N}-x_0|<1$, temos:

$$(\sqrt{N}-x_0)^2<|\sqrt{N}-x_0|,$$

desenvolvendo o produto notável, podemos escrever:

$$0<N-2\cdot x_0\cdot\sqrt{N}+x_0^2<|\sqrt{N}-x_0|,$$

ou de modo equivalente

$$0<2\cdot x_0\left[\frac{N+x_0^2}{2\cdot x_0}-\sqrt{N}\right]<|\sqrt{N}-x_0|,$$

como $x_0>1$, podemos dividir a desigualdade por $2\cdot x_0$, assim:

$$0<\left[\frac{N+x_0^2}{2\cdot x_0}-\sqrt{N}\right]<\frac{1}{2\cdot x_0}|\sqrt{N}-x_0|<\frac{1}{2}|\sqrt{N}-x_0|.$$

As desigualdades acima, significam que quando $n$ cresce indefinidamente, o erro da aproximação tende a zero, pois o erro diminui a cada iteração por um fator de pelo menos 2.

A equação de recorrência, definida para cada $n\in\mathbb{N}$:

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{N}{x_n}\right).$$

converge para um limite $x$, que é justamente $\sqrt{N}$, isto é:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{N}{x_n}\right)=\sqrt{N}.$$

**Teorema 7:** Seja $k>0$ um número real. A sequência $(a_n)_{n\geq 0}, a_0>0$ definida por:

$$a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + \frac{k}{a_{n-1}}), n \geq 1,$$

converge para $\sqrt{k}$.

A demonstração do teorema pode ser simplificada, se usarmos o lema 2.

**Lema 2:** Seja $k>0$ um número real, e sejam $a>0$ e $b>0$ números reais tal que: $k=a \cdot b$. Seja $c=(a+b)/2$. As seguintes propriedades são válidas:

i. Se $a=\sqrt{k}$ ou $b=\sqrt{k}$, então $c=\sqrt{k}$;

ii. Se $a<b$, então $a<\sqrt{k}<c<b$;

iii. Se $a<b$, então $0<c-\sqrt{k}<\frac{1}{2}(b-\sqrt{k})$.

**Demonstração do Lema 2:**

i. Basta fazer a substituição em $k=a \cdot b$, se $a=\sqrt{k}$, então $b=\sqrt{k}$ e finalmente $c=\sqrt{k}$.

ii. Como $k=a \cdot b$ e $a<b$, temos:

a) $\sqrt{k}<a \Rightarrow k=(\sqrt{k})^2<a^2<ab$

b) $\sqrt{k}>b \Rightarrow k=(\sqrt{k})^2>b^2>ab$

Concluímos que $a<\sqrt{k}<b$. Além disso,

$$c=\frac{b+a}{2}=\frac{1}{2}(b+\frac{k}{b})=\frac{b^2+k}{2 \cdot b}.$$

consequentemente,

$$c-\sqrt{k}=\frac{b^2+k}{2 \cdot b}-\sqrt{k}=\frac{b^2+k-2 \cdot b \cdot \sqrt{k}}{2 \cdot b}=\frac{(b-\sqrt{k})^2}{2 \cdot b}>0.$$

donde concluímos que $\sqrt{k}<c$.

Ainda de $a<b$ temos que $c=\frac{a+b}{2}<\frac{(b+b)}{2}=b$, quer dizer $c<b$.

O que completa a demonstração.

iii. Como $a<b$, temos $a<\sqrt{k}<c<b$. Podemos escrever:

$$0<c-\sqrt{k}=\frac{(b-\sqrt{k})^2}{2\cdot b}=\frac{1}{2}(\frac{b-\sqrt{k}}{b})(b-\sqrt{k}),$$

mas, $0<\sqrt{k}$, então $b<\sqrt{k}+b$ subtraindo $\sqrt{k}$, obtemos: $b-\sqrt{k}<b$, dividindo esta desigualdade por $b$, pois $b>0$, basta $b\neq 0$, concluímos que:

$$\frac{b-\sqrt{k}}{b}<1,$$

em consequência

$$0<c-\sqrt{k}<\frac{1}{2}(b-\sqrt{k}).$$

o que conclui a demonstração do Lema 2.

**Demonstração do Teorema 7**

Note que, $a_1$ é a média aritmética entre $a_0$ e $\frac{k}{a_0}$, além disso,

$a_0\cdot(\frac{k}{a_0})=k$.

Percebemos ainda que $a_2$ é a média aritmética entre $a_1$ e $\frac{k}{a_1}$, além disso $a_1\cdot(\frac{k}{a_1})=k$ e assim por diante.

Agora estamos em condições de aplicar o Lema 2, sendo que, para cada $i\geq 0$, se tem $a=a_i$ e $b=\frac{k}{a_i}$ e vice-versa, ademais $c=a_{i+1}$.

Se $a_0=\sqrt{k}$, temos $a_1=\sqrt{k}$ pelo item (i) do Lema.

Reaplicando (i), obtemos $a_2=\sqrt{k}$, e assim sucessivamente, concluímos que $a_n=\sqrt{k}$ para todo $n\geq 0$.

Nesse caso a sequência $(a_n)_{n\geq 0}$ é constante e converge para $\sqrt{k}$.

Todavia, se $a_0\neq\sqrt{k}$ devemos examinar os casos: $a_0<\sqrt{k}$ e $a_0>\sqrt{k}$.

Suponhamos, que $a_0 < \sqrt{k}$. Fazendo $a = a_0$ e $b = \frac{a_0}{k}$, concluímos que $a < b$ e $c = a_1$.

Pelo item (ii) do Lema 2 concluímos que $\sqrt{k} < a_1$.

Tomando agora $a = \frac{a_1}{k}$ e $b = a_1$, temos $a < b$ e $c = a_2$.

Novamente pelo item (ii) do Lema anterior, observamos que $\sqrt{k} < a_2$ e por (iii) podemos escrever:

$$0 < a_2 - \sqrt{k} < \frac{1}{2}(a_1 - \sqrt{k}).$$

Repetindo o argumento segue que $\sqrt{k} < a_3$, consequentemente

$$0 < a_3 - \sqrt{k} < \frac{1}{2}(a_2 - \sqrt{k}) < \frac{1}{2^2}(a_1 - \sqrt{k}).$$

Repetindo sucessivamente o argumento acima, obtemos

$$0 < a_{n+1} - \sqrt{k} < \frac{1}{2^n}(a_1 - \sqrt{k}), \forall\, n \geq 1.$$

Por outro lado, se $a_0 > \sqrt{k}$, fazemos $a = \frac{a_0}{k}$ e $b = a_0$, temos $a < b$ e $c = a_1$. Pelo item (ii) do Lema 2 concluímos que $\sqrt{k} < a_1$.

Tomando agora $a = \frac{a_1}{k}$ e $b = a_1$, obtemos $a < b$ e $c = a_2$.

Novamente pelo item (ii) do Lema 2, observamos que $\sqrt{k} < a_2$ e por (iii) podemos escrever:

$$0 < a_2 - \sqrt{k} < \frac{1}{2}(a_1 - \sqrt{k}).$$

Repetindo sucessivamente o argumento acima, obtemos novamente a expressão:

$$0 < a_{n+1} - \sqrt{k} < \frac{1}{2^n}(a_1 - \sqrt{k}), \forall\, n \geq 1.$$

À medida que $n$ cresce indefinidamente o fator $\frac{1}{2^n}$ tende a zero, desta forma segue da desigualdade acima, que $a_{n+1}$ converge para $\sqrt{k}$, conforme queríamos demonstrar.

## *4.3 Método do Ponto Fixo*

O método do ponto fixo é um método numérico usado para determinar as raízes, muitas vezes aproximadas de equações. Nesta seção, vamos explorar, inicialmente as equações polinomiais de segundo grau e finalizaremos com uma equação não polinomial.

Este método pode ser levado ao aluno do Ensino Médio, pois como pré-requisito é necessário que o estudante saiba fazer manipulações algébricas com equações, uma vez que o método do ponto fixo consiste em determinar uma função $\varphi$ tal que a equação $x=\varphi(x)$ seja equivalente à equação original $p(x)=0$ e escolher uma aproximação inicial $x_0$ candidata à raiz da equação, além disso os recursos tecnológicos que podem ser utilizados, tais como: calculadora e softwares matemáticos estão disponíveis nas escolas públicas. Sendo assim, com base em PROFMAT (2012), podemos apresentar a definição e a observação abaixo.

**Definição 16:** Seja $f: A \to A$ uma função. Um ponto $p \in A$ é chamado *ponto fixo* de $f$, se $f(p)=p$.

De acordo com PROFMAT (2012) como motivação para o ensino deste método, o professor pode aguçar a curiosidade dos alunos pedindo a eles para que digitem em suas calculadoras o maior número que quiserem, (é interessante que não seja escolhido o mesmo número por toda a turma) e extraiam a raiz quadrada deste número. O professor deve pedir aos alunos para que executem o processo novamente e que repitam sucessivas vezes para que verifiquem o que acontece. Se o processo for realizado um número suficiente de vezes todos eles observarão que o resultado no visor de suas calculadoras é 1. Se repetirmos esta experiência, desta vez escolhendo o menor número positivo, o processo também conduzirá a 1. O que acontece matematicamente falando é o seguinte: dado $a>0$, considere a sequência $(a_n)$ obtida do seguinte modo:

$$a_1 = a \quad \text{e} \quad a_n = \sqrt{a_{n-1}}, \quad \text{para} \quad n \geq 2.$$

Então $\lim_{n \to \infty} a_n = 1$. Por que isto acontece? Isto ocorre, porque 1 é ponto fixo atrator da função raiz quadrada.

Note também que não são todas as vezes que o ponto fixo atrairá sequências obtidas por processos iterativos como este. O que estamos falando fica evidente se tomarmos a função definida por $f(x) = x^2$, como $f(1) = 1$, 1 é um ponto fixo desta função, mas agora não é mais um atrator. Vamos demonstrar abaixo, a veracidade desta afirmação.

**Demonstração:**

De fato, se $a_1 > 1$, e $a_n = (a_{n-1})^2, n \geq 2$, então o $\lim_{n \to \infty} a_n = +\infty$.

Se escolhermos $0 < a_1 < 1$, então $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$, note que *0* é o outro ponto fixo de $f(x) = x^2$, pois $f(0) = 0$.

Neste caso o ponto fixo *0* é atrator (e não 1), desde que escolhamos $0 < a_1 < 1$.

Podemos determinar algebricamente o ponto fixo de uma função fazendo a substituição $f(p) = p$ e determinando as raízes desta equação, suas raízes, supondo que existam, serão o(s) ponto(s) fixo(s).

Por exemplo, vamos determinar os pontos fixos da função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g_1(x) = x^2 - x - 3.$$

Fazendo $g_1(p) = p$, temos $p = p^2 - p - 3$, ou seja, $p^2 - 2p - 3 = 0$ cujas raízes são: $p_1 = -1$ e $p_2 = 3$. Observe que,

$$g_1(p_1) = g_1(-1) = (-1)^2 - (-1) - 3 = -1$$

e

$$g_1(p_2)=g_1(3)=3^2-3-3=3\,,$$

deste modo $p_1=-1$ e $p_2=3$ são os pontos fixos de $g_1$.

Mas nem toda função admite ponto fixo, vejamos um exemplo.

Seja a função $g:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ definida por $g_2(x)=x^2-x+3,$ ao executarmos o procedimento algébrico para determinar o ponto fixo desta função, fazendo $g_2(p)=p\,,$ obtemos:

$$g_{2'}(p)=p^2-p+3=p\Rightarrow p^2-2\,p+3=0\,.$$

Ora, não existe $p\in\mathbb{R}$ tal que $p^2-2\,p+3=0,$ assim $g_2$ não possui ponto fixo.

**Observação 3:** Os problemas de determinar a raiz da equação e o de obter o ponto fixo de uma função são de natureza equivalente.

A justificativa para esta observação é que, dado um problema de encontrar as raízes de $f(p)=0\,,$ podemos definir funções $g=g(x)$ com um ponto fixo em *p* de várias maneiras, como por exemplo $g(x)=x-f(x)$. Reciprocamente, se a função possui $g=g(x)$ um ponto fixo em *p*, então a função definida por $f(x)=x-g(x)$ tem uma raiz igual a *p*.

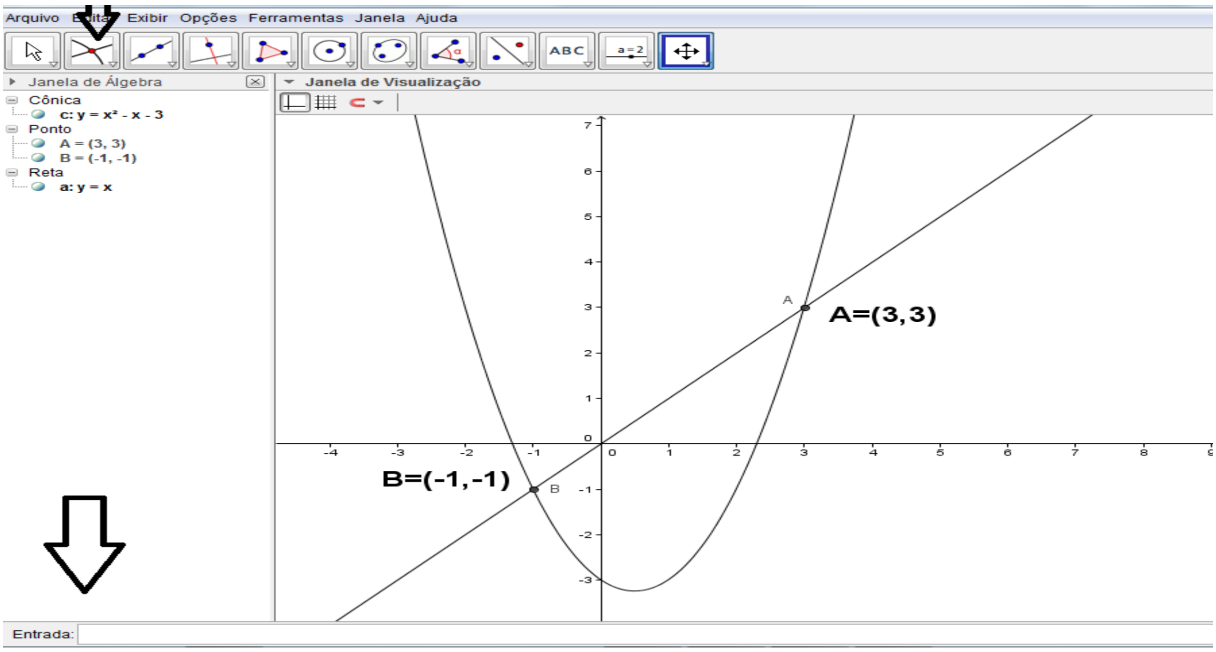
De acordo com Burden (2003, p. 50) “ainda que o problema que queiramos resolver […] o método do ponto fixo é mais fácil de examinar, e certas escolhas de pontos fixos levam a técnicas poderosas para o cálculo das raízes”. Devido as dificuldades inerentes ao currículo do Ensino Médio, pois aos nossos alunos não são apresentadas noções de cálculo, estes teriam dificuldades importantes para escolher pontos fixos que fossem atratores, por isso abordaremos aqui apenas o ponto de vista geométrico deste método.

Podemos interpretar geometricamente a definição de ponto fixo, da seguinte forma: Desde que $g(p)=p\,,$ as interseções do gráfico da função *g* com o gráfico da função identidade, fornece os pontos fixos de uma dada função, evidentemente se existirem.

Lançando mão do software *GeoGebra* 4.2, ilustramos, o problema de encontrar o ponto fixo da função $g_1(x)=x^2-x-3$, na figura 9. O procedimento é simples, e está listado abaixo:

1. no campo de entrada do software, escrevemos $y=x^2-x-3$, quando aplicamos o comando *enter* o software faz o gráfico da parábola $x^2-x-3$*;*
2. no campo de entrada do software, escrevemos $y=x$ (função identidade), quando aplicamos o comando *enter* o software faz o gráfico da reta $y=x$*;*
3. Na barra de ferramentas, no segundo ícone, selecionamos *intersecção de dois objetos,* o software marcará os pontos *A* e *B* (o destaque foi nosso) na janela gráfica e mostrará as coordenadas dos pontos na *janela de álgebra*.

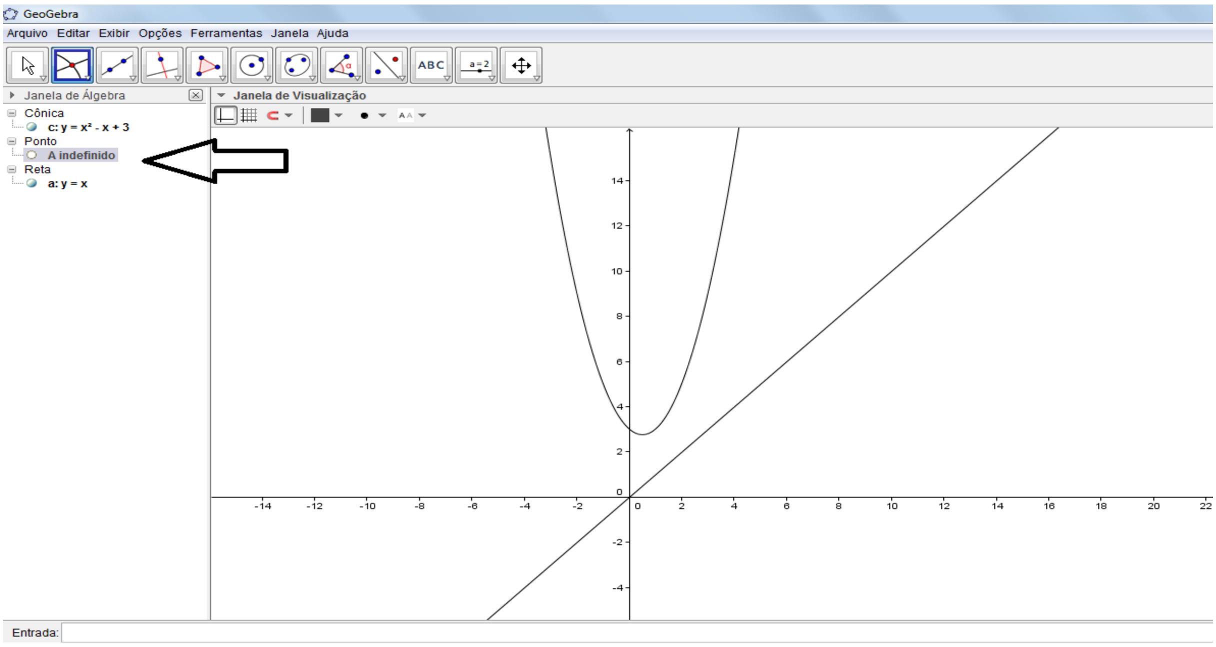
**Figura 9 -** Ponto Fixo Definido




Como foi afirmado anteriormente, *-1* e *3* são as raízes da equação $x^2-2x-3=0$, pois $x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$.

Seguindo os três passos listados anteriormente, vejamos o que ocorre geometricamente com a função real definida por $g_2(x)=x^2-x+3$. Observamos que o software *GeoGebra* executa normalmente os passos 1 e 2, contudo no passo 3 o software não marca os pontos *A* e *B* na janela gráfica, pois não existe intersecção, neste caso o software mostra na *janela de álgebra,* a seguinte mensagem: *A indefinido.* Isto quer dizer que o *GeoGebra* não conseguiu encontrar um ponto comum entre os gráficos, conforme ilustramos na figura 10.

**Figura 10-** Função sem Ponto Fixo




O que está ilustrado acima significa que a função $g_2(x)=x^2-x+3$ não tem ponto fixo, pois a equação $x^2-x+3=0$ não tem raiz real.

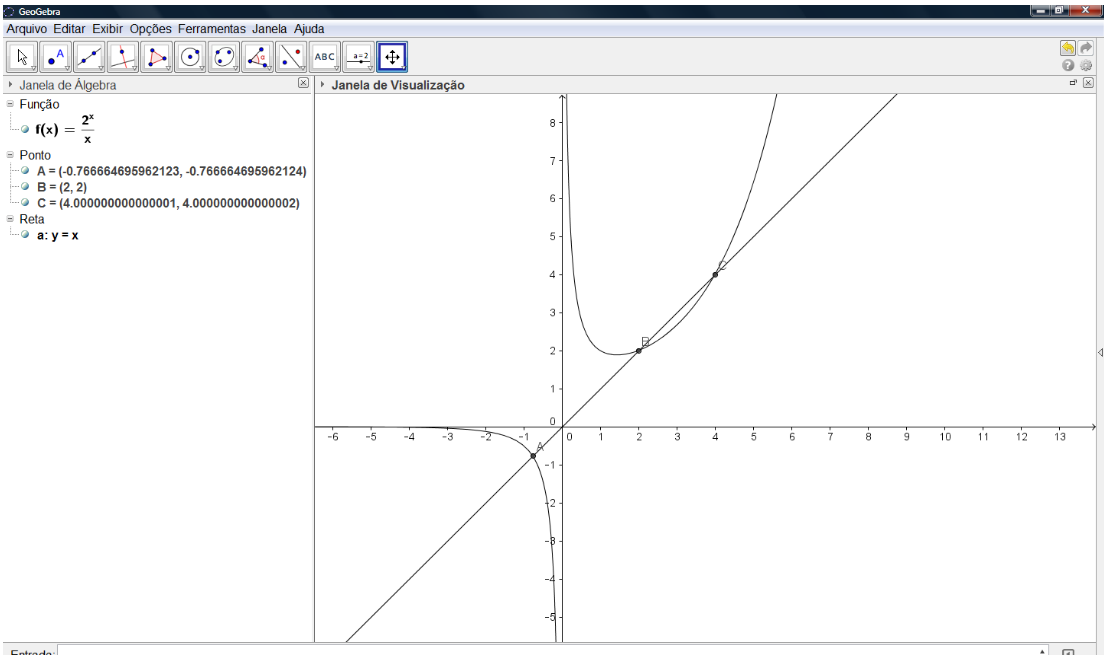
De fato, usando a fórmula $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}$ para determinar as raízes da equação $x^2-2x+3=0$ obtemos:

$$x=\frac{2\pm\sqrt{-8}}{-4},$$

que não admite solução real, pois $\sqrt{-8}\notin\mathbb{R}$, deste modo, está justificado algebricamente por que os gráficos não se intersectam.

Vamos considerar um exemplo de uma equação não polinomial, queremos encontrar todas as raízes reais da equação $x^2=2^x$, como zero não é raiz da equação podemos dividir ambos os membros da equação por x, e obtemos $x = \frac{2^x}{x}$, utilizando o software *GeoGebra* encontramos as três raízes da equação.

**Figura 11** - Gráfico da Função $x = \frac{2^x}{x}$




Observe que duas raízes são números inteiros, 2 e 4, (as coordenadas do ponto C deveriam ser (4,4), mas isto não ocorreu devido a limitações do software *GeoGebra* e não do método).

Com relação a raiz negativa que podemos observar no gráfico da função, não podemos determiná-la com processos puramente algébricos porque é um número transcendente, para maiores informações consultar LIMA (2011).

## *4.4 O Método de Newton*

Segundo STARK (1979), o método de Newton é um caso particular do método do ponto fixo, pois o algoritmo é essencialmente semelhante à iteração do tipo

$x=\varphi(x)$, porém neste caso a função $\varphi$ é escolhida de modo que a sua primeira derivada se anule na raiz $\alpha$.

O método de Newton consiste em estimar um valor $x_0$ próximo da raiz $\alpha$, com processo iterativo obtemos um valor $x_1$ que é mais próximo da raiz da função, em seguida aplicamos o método novamente, agora obtemos um valor $x_2$ mais próximo de $\alpha$ e assim sucessivamente.

A sequência $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ de números reais é obtida pela seguinte recorrência:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{p(x_n)}{p'(x_n)},$$

quando esta sequência converge, seu limite é uma raiz da equação polinomial.

Existem alguns modos de se deduzir esta equação de recorrência, no próximo capítulo serão apresentadas duas: a dedução a partir do método do ponto fixo e também uma dedução gráfica.

Para exemplificar o método, vamos determinar as raízes reais da equação cúbica expressa por: $x^3-2x^2-x+2=0$.

Neste exemplo temos:

$$p(x_n)=x_n^3-2x_n^2-x_n+2 \quad \text{e} \quad p'(x_n)=3x_n^2-4x_n-1$$ [18]

e consequentemente

$$x_{n+1}=\frac{2x_n^3-2x_n^2-2}{3x_n^2-4x_n-1}.$$

Usando a planilha eletrônica *LibreOffice Calc*, a partir de três valores iniciais arbitrários[19] obtemos rapidamente as três raízes reais da equação, conforme tabela 3.

---

18 Estamos admitindo que o leitor conheça esta regra de derivação, há uma definição formal no próximo capítulo.

19 No próximo capítulo veremos um teorema que auxilia nesta escolha inicial.

| iteração | aproximação | aproximação | aproximação |
|---|---|---|---|
| 0 | -5 | 8 | 0,2 |
| 1 | -3,2127659574 | 5,6226415094 | 1,2285714286 |
| 2 | -2,0778642151 | 4,0683147141 | 0,9450782433 |
| 3 | -1,4102574146 | 3,0749715721 | 0,9987218799 |
| 4 | -1,0923551093 | 2,4716867915 | 0,9999991863 |
| 5 | -1,0063637823 | 2,1478093526 | 1 |
| 6 | -1,0000334783 | 2,0220924176 | 1 |
| 7 | -1,0000000009 | 2,0006210632 | 1 |
| 8 | -1 | 2,0000005136 | 1 |
| 9 | -1 | 2 | 1 |

**Tabela 3 -** Raízes da Equação $x^3-2x^2-x+2=0$.

# CAPÍTULO 5

# IDENTIFICANDO RAÍZES IRRACIONAIS

Enquanto a comunidade, em geral, fala da necessidade de se motivar assuntos da matemática a partir de problemas reais, lamentavelmente os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) perdem a oportunidade de, pelo menos, sugerir que se deva abordar a resolução de equações polinomiais de grau maior do que 2, diz apenas que “aspectos do estudo de polinômios e equações algébricas podem ser incluídos no estudo de funções polinomiais, enriquecendo o enfoque algébrico que é feito tradicionalmente” (BRASIL, 1988, p. 43). Em outro documento oficial o PCN + Ensino Médio encontramos o seguinte parágrafo “o estudo das equações polinomiais […] devem receber um tratamento que enfatize sua importância cultural, isto é, estender os conhecimentos que os alunos possuem sobre a resolução de equações de primeiro e segundo graus [...]”(BRASIL, 2000, p. 167). As equações de grau superior a dois podem ser extraídas do enunciado de muitos problemas práticos e interessantes, que, em geral, os livros didáticos não abordam, pois requereria a determinação de raízes de equações polinomiais de grau três ou superior. O leitor interessado encontra em Carneiro (1999), uma lista de problemas práticos que envolvem tais equações.

Mostraremos, neste capítulo, que é possível abordar, no Ensino Médio, as equações polinomiais de grau maior do que dois e estaremos interessados em decidir se determinada raiz real é um número racional ou se é um número irracional.

## *5.1 Funções Polinomiais e Polinômios*

Neste item, admitiremos que o leitor tenha alguma familiaridade com os assuntos referentes às Funções Polinomiais e aos Polinômios, por isso assumiremos alguns resultados sem demonstração, pois este não é o ponto principal deste capítulo. Mais detalhes podem ser consultados em LIMA (2006).

**Definição 17:** Dizemos que $p:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma *função polinomial*, se existirem números $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ tais que, para todo $x \in \mathbb{R}$, obtemos:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

**Observação 4:**

- Se $a_n \neq 0$, então dizemos que a função polinomial tem grau n;
- A soma e o produto de funções polinomiais são funções polinomiais;
- Uma função polinomial de grau n, não pode ter mais do que n raízes;
- Se $p(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, então a função polinomial p é chamada de identicamente nula.

**Definição 18:** Dizemos que um *polinômio* é uma expressão formal do tipo

$$p(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0,$$

sendo que $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ é uma lista ordenada de números reais, chamados de coeficientes e X é um símbolo (dito uma indeterminada).

**Definição 19:** Dizemos que dois polinômios $p = p(X)$ e $q = q(X)$ são iguais, ou idênticos, se e somente se, dados:

$$p(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0$$

e

$$q(X) = b_n X^n + b_{n-1} X^{n-1} + \ldots + b_1 X + b_0,$$

se tivermos $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \ldots, a_n = b_n$.

**Observação 5:**

- Todo polinômio

$$p(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0,$$

de grau $(n \geq 1)$ pode ser decomposto em $n$ fatores do primeiro grau[20], ou

20 Corolário do Teorema Fundamental da Álgebra.

seja,

$$p(X)=a_n(X-r_1)(X-r_2)(X-r_3)...(X-r_n),$$

onde os $r_i$ são as raízes do polinômio, consequentemente admite $n$ raízes (reais ou complexas), contadas as multiplicidades;

- O símbolo $X^i$ é a abreviatura do produto de *i* fatores X.
- Basicamente, o polinômio $p=p(X)$ é a lista ordenada de seus coeficientes;

Para cada polinômio $p(X)=a_n X^n+a_{n-1} X^{n-1}+...+a_1 X+a_0$ é possível fazer corresponder a função $\overline{p}:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, tal que $\overline{p}(x)=a_n x^n+a_{n-1} x^{n-1}+...+a_1 x+a_0$, para todo $x\in\mathbb{R}$ . Esta correspondência é bijetiva, a sobrejetividade segue da definição destas funções, enquanto a injetividade provém da definição de polinômios idênticos. Por estes motivos, não é necessário fazermos distinção entre o polinômio $p$ e a função polinomial $\overline{p}$, deste modo diremos o polinômio $p$ ou a função polinomial $p$ sem distinção.

## *5.2 Raízes Racionais*

No Ensino Fundamental, as situações envolvendo equações são apresentadas aos alunos, na maioria das vezes somente com coeficientes inteiros, quando os coeficientes são números racionais são manipulados para se tornarem números inteiros, e raramente as equações apresentam coeficientes irracionais. No Ensino Médio a situação geral é a mesma, com exceção de poucas vezes as equações polinomiais apresentarem coeficientes pertencentes ao conjunto dos números complexos.

Trataremos aqui, apenas das equações polinomiais de coeficientes inteiros, por serem as mais manipuladas pelos alunos do Ensino Fundamental e Ensino Médio e por atender os objetivos deste trabalho.

**Teorema 8:** Se uma equação polinomial

$$P(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1 x+a_0=0\,,$$

com $a_n\neq 0$, possui apenas coeficientes inteiros e admite uma raiz racional $\frac{p}{q}$ com $p,q\in\mathbb{Z}$, $q\neq 0$ e $\frac{p}{q}$ irredutível, então *p* é um divisor de $a_0$ e *q* é um divisor de $a_n$.

Este teorema é conhecido como Teorema das Raízes Racionais, a demonstração é baseada em NETO (1982).

**Demonstração:**

Se $\frac{p}{q}$ é uma raiz de $P(x)=0$, podemos escrever:

$$a_n\cdot\frac{p^n}{q^n}+a_{n-1}\cdot\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}}+a_{n-2}\cdot\frac{p^{n-2}}{q^{n-2}}+...+a_1\cdot\frac{p}{q}+a_0=0\,,$$

multiplicando a equação por $q^n$, obtemos:

$$a_n\cdot p^n+a_{n-1}\cdot p^{n-1}\cdot q+a_{n-2}\cdot p^{n-2}\cdot q^2+...+a_1\cdot p\cdot q^{n-1}+a_0\cdot q^n=0\,,$$

subtraindo $a_0\cdot q^n$ na equação acima e depois dividindo os dois membros por $p$, temos:

$$a_n\cdot p^{n-1}+a_{n-1}\cdot p^{n-2}\cdot q+a_{n-2}\cdot p^{n-3}\cdot q^2+...+a_1\cdot q^{n-1}=-\frac{a_0\cdot q^n}{p}.$$

Note que o lado esquerdo da equação acima nos fornece um número inteiro, deste modo o lado direito também deve ser um número inteiro, mas por hipótese $p$ e $q$ são primos entre si, assim para que se tenha $\frac{a_0\cdot q^n}{p}\in\mathbb{Z}$, $a_0$ deve ser divisível por $p$, ou equivalentemente $p$ é um divisor de $a_0$.

De modo totalmente análogo, podemos obter a partir de

$$a_n\cdot p^n+a_{n-1}\cdot p^{n-1}\cdot q+a_{n-2}\cdot p^{n-2}\cdot q^2+...+a_1\cdot p\cdot q^{n-1}+a_0\cdot q^n=0$$

a equação

$$a_{n-1}\cdot p^{n-1}+a_{n-2}\cdot p^{n-2}\cdot q+...+a_1\cdot p\cdot q^{n-2}+a_0\cdot q^{n-1}=-\frac{a_n\cdot p^n}{q}.$$

Como anteriormente, notamos que o lado esquerdo da equação acima nos fornece um número inteiro, deste modo o lado direito também deve ser um número inteiro, por hipótese $p$ e $q$ são primos entre si, assim para que se tenha $\frac{a_n\cdot p^n}{q}\in\mathbb{Z}$, $a_n$ deve ser divisível por $q$, ou equivalentemente $q$ é um divisor de $a_n$.

**Corolário 1:** Se a equação polinomial $P(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1 x+a_0=0$ com $a_n=1$, possui apenas coeficientes inteiros e admite uma raiz racional $\frac{p}{q}$ com $p,q\in\mathbb{Z}, q\neq 0$ e $\frac{p}{q}$ irredutível, então essa raiz é um número inteiro.

**Demonstração:** De acordo com o Teorema 8 se a equação polinomial

$$P(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1 x+a_0=0,$$

admite raiz racional $\frac{p}{q}$, então $q$ é um divisor de $a_n$, por hipótese se tem $a_n=1$, então $q\in\{-1,1\}$ portanto $\frac{p}{q}=-p$ ou $\frac{p}{q}=p$, logo inteiro.

Para ilustrar o que foi dito no corolário 1, vamos determinar, se existirem, as raízes racionais da equação $x^3-3x+2=0$.

Como a equação $x^3-3x+2=0$ tem as condições do teorema 8, sabemos que se existir algum número racional $\frac{p}{q}$ que é solução desta equação, $p$ é um divisor de 2 e $q$ é divisor de 1, deste modo $p\in\{-2,-1,1,2\}$ e $q\in\{-1,1\}$. Pelo corolário 1 $\frac{p}{q}\in\mathbb{Z}$, ou seja, $\frac{p}{q}\in\{-2,-1,1,2\}$. Fazendo a verificação constamos que as raízes do polinômio são todas racionais, note que 1 tem multiplicidade 2, pois

$$x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2).$$

Para exemplificar o caso geral, consideremos a equação polinomial de grau 4, dada por $4x^4+5x^3-14x^2-10x+12=0$, esta equação satisfaz o teorema 8, pois todos os seus coeficientes são números inteiros, deste modo se existir algum número racional $\frac{p}{q}$ que é solução desta equação, $p$ é um divisor de 12 e $q$ é divisor de 4, deste modo:

$$p\in\{-12,-6,-4,-3,-2,-1,1,2,3,4,6,12\} \text{ e } q\in\{-4,-2,-1,1,2,4\},$$

para facilitar a visualização, podemos construir uma tabela na qual a primeira linha e coluna representam os possíveis valores de $p$ e $q$ e as outras linhas e colunas mostram os possíveis quocientes de $p$ e $q$.

| q \ p | -1 | 1 | -2 | 2 | -3 | 3 | -4 | 4 | -6 | 6 | -12 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -1 | 1 | -1 | 2 | -2 | 3 | -3 | 4 | -4 | 6 | -6 | 12 | -12 |
| 1 | -1 | 1 | -2 | 2 | -3 | 3 | -4 | 4 | -6 | 6 | -12 | 12 |
| -2 | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 1 | -1 | $\frac{3}{2}$ | $-\frac{3}{2}$ | 2 | -2 | 3 | -3 | 6 | -6 |
| 2 | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | -1 | 1 | $-\frac{3}{2}$ | $\frac{3}{2}$ | -2 | 2 | -3 | 3 | -6 | 6 |
| -4 | $\frac{1}{4}$ | $-\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{4}$ | $-\frac{3}{4}$ | 1 | -1 | $\frac{3}{2}$ | $-\frac{3}{2}$ | 3 | -3 |
| 4 | $-\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{3}{4}$ | $\frac{3}{4}$ | -1 | 1 | $-\frac{3}{2}$ | $\frac{3}{2}$ | -3 | 3 |

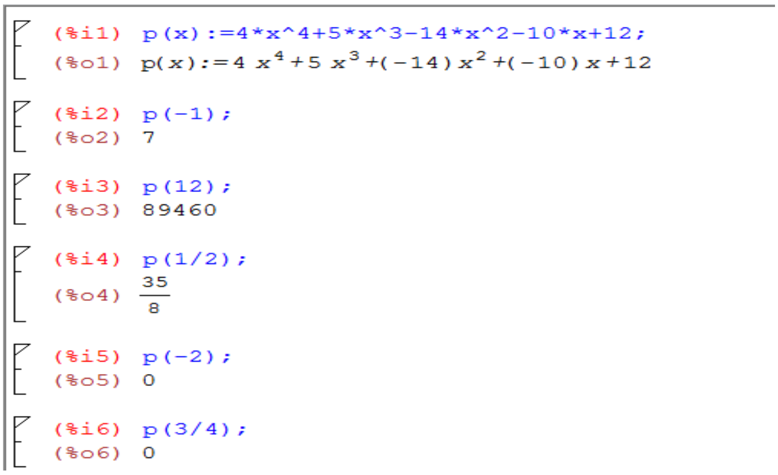
**Tabela 4 -** Possíveis Raízes Racionais

Sabemos que o polinômio $p(x)=4x^4+5x^3-14x^2-10x+12$ possui quatro raízes (reais ou complexas), contudo queremos apenas identificar se há raízes racionais, caso existam raízes reais.

Usando, por exemplo, o software *wxMaxima* podemos determinar facilmente o valor numérico do polinômio $p(x)=4x^4+5x^3-14x^2-10x+12$ para todos os valores da tabela 4 e observamos que dentre todas as possíveis raízes racionais, somente - $-2$ e $\frac{3}{4}$ são raízes da equação. Na figura 12, ilustramos como é possível determinar rapidamente o valor numérico de $p=p(x)$ usando o *wxMaxima*.

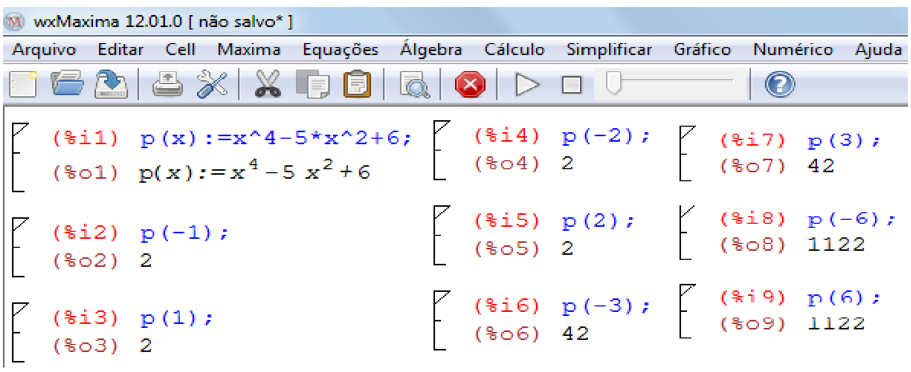
Devemos proceder do seguinte modo, neste exemplo devemos escrever na linha de comando do software *wxMaxima* $p(x):=4x^4+5x^3-14x^2-10x+12$, depois de definirmos $p=p(x)$, basta escrever no lugar do $x$ o número que desejamos, para que o *wxMaxima* determine o valor numérico, como ilustrado na figura 12, para alguns valores[21] de $x$.

**Figura 12 -** Valor Numérico




Note que se um polinômio possui apenas coeficientes inteiros o teorema 8 não garante a existência de raízes racionais, apenas oferece um instrumento para tentar encontrá-las, como no próximo exemplo. Seja a equação $x^4-5x^2+6=0$ vamos determinar, se existir, suas raízes racionais, como o coeficiente dominante é igual a um, usaremos o corolário 1, assim se $p$ é uma raiz racional da equação, então $p\in\{-6,-3,-2,-1,1,2,3,6\}$. O software *wxMaxima* nos mostra que não há raízes racionais, conforme verificamos na figura 13.

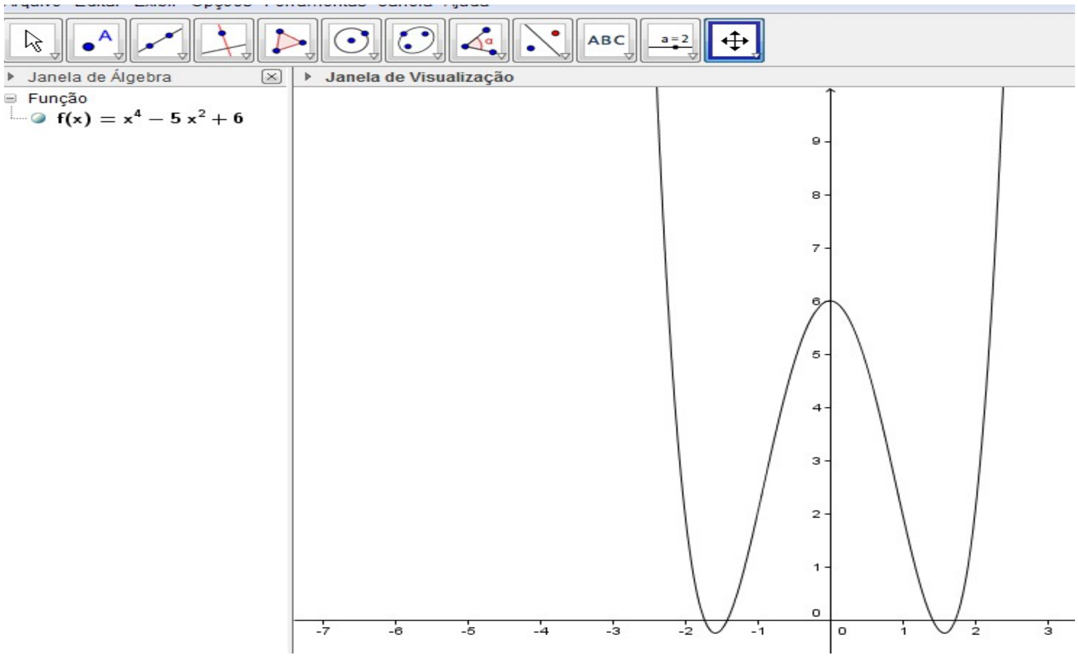
**Figura 13** - Possíveis Raízes Racionais




21 Determinamos o valor numérico do polinômio para todos os valores da tabela 4, para ilustrar escolhemos as duas raízes e outros três valores arbitrários.

A figura 14 ilustra o gráfico desta função, observe que o software *GeoGebra* mostra quatro raízes reais, com base na discussão acima estas raízes seguramente são valores irracionais.

**Figura 14 -** Raízes Irracionais




O Teorema 8 (das Raízes Racionais), pode também ser útil para demonstrar a irracionalidade de certos números como por exemplo: $\sqrt{2}$.

De fato, se $\sqrt{2}$ é raiz de alguma equação escrevemos $\sqrt{2}=x$.

Elevando ao quadrado e reorganizando, obtemos $x^2-2=0$, pelo corolário 1 se $p$ é raiz da equação, então $p\in\{-2,-1,1,2\}$, mas $p(-1)=p(1)=-1$ e $p(-2)=p(2)=2$, assim concluímos $\sqrt{2}$ que é um número irracional.

Com o auxilio do teorema 8 podemos verificar que a soma $\sqrt{2}+2$ é um número irracional.

Com efeito, se $\sqrt{2}+2$ é raiz de alguma equação escrevemos $\sqrt{2}+2=x$, consequentemente

$$\sqrt{2}+2=x\Rightarrow\sqrt{2}=x-2\Rightarrow 2=x^2-4x+4\Rightarrow x^2-4x+2=0.$$

De acordo com corolário 1 se a equação $x^2-4x+2=0$ admitir alguma raiz racional, esta raiz $x \in \{-2, -1, 1, 2\}$, determinando o valor numérico do polinômio $p(x) = x^2 - 4x + 2$ verificamos que a equação não admite raiz racional. Segue que $\sqrt{2} + 2$ é um número irracional.

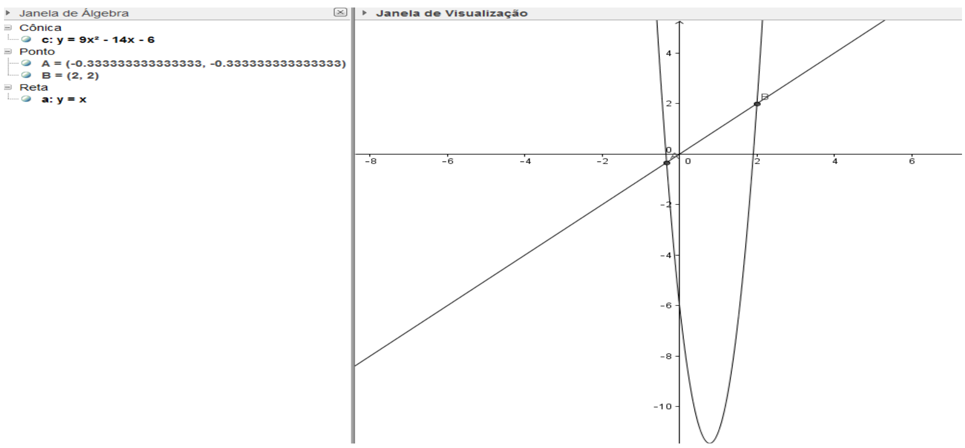
Mais geralmente, se $r \in \mathbb{Q}$, então $\sqrt{2} + r$ é um número irracional.

**Demonstração:** Suponha por absurdo que $\sqrt{2} + r$ seja racional, isto significa que $\sqrt{2} + r = \frac{p}{q}$, logo $\sqrt{2} = \frac{p}{q} - r$, pela propriedade de fechamento dos números racionais o lado direito da igualdade é um número racional e o lado esquerdo é um número irracional, absurdo, como queríamos demonstrar.

## *5.3 Aplicações do Método do Ponto Fixo*

Vamos determinar os zeros da função $f(x) = 9x^2 + 15x - 6$ usando o método do ponto fixo. Para tanto, basta tomarmos $g(x) = f(x) - x$ e encontrar, usando o *GeoGebra* os pontos fixos da função $g_3 = g_3(x) = 9x^2 + 14x - 6$.

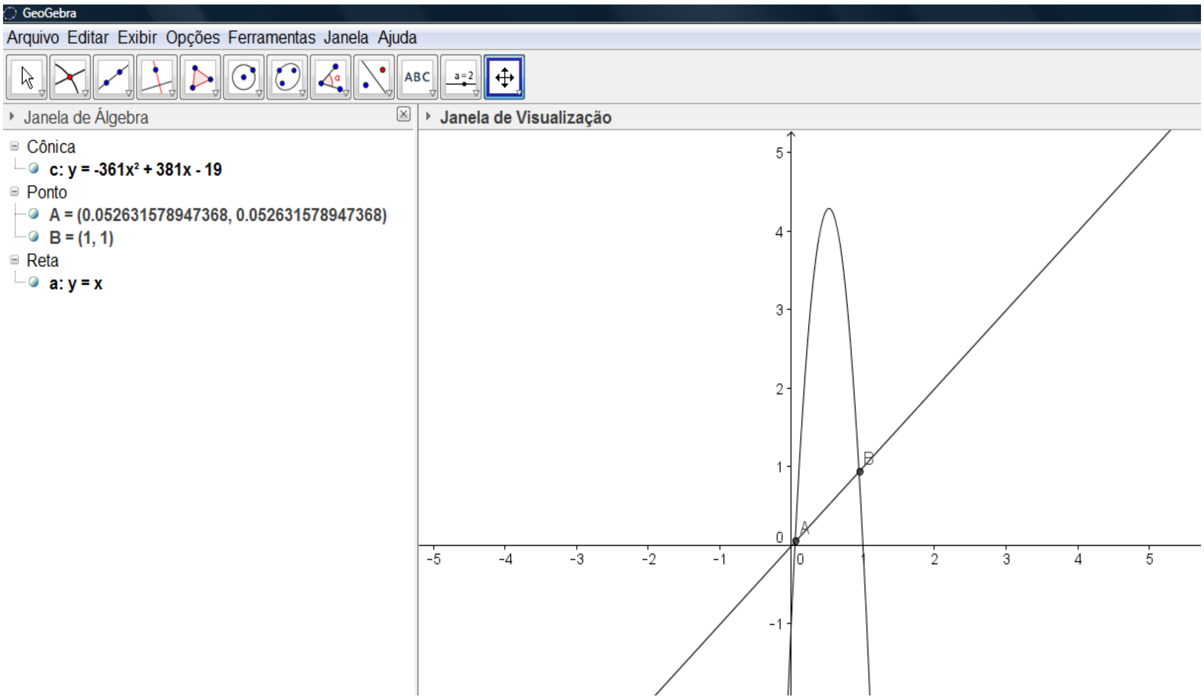
**Figura 15 -** Ponto Fixo da função $g_3$.




Vamos considerar outro exemplo. Suponha que fosse requerido aos alunos para que determinassem, usando o procedimento anterior, os valores para os quais a função $f(x) = 361x^2 - 380x + 19$ se anula, ou equivalentemente, quais são as raízes reais da equação $361x^2-380x+19=0$.

Usando o método do ponto fixo, devemos encontrar uma função $g=g(x)$, tal que $g(x)=x-f(x)$. Após um pouco de manipulação algébrica, o estudante notará que basta tomar $g_4=g_4(x)=-361x^2+381x-19$ e determinar geometricamente os pontos fixos desta função, conforme visualizamos na figura abaixo. Se por algum motivo desejássemos evitar o sinal de menos antes do termo dominante da função, poderíamos escolher $g(x)=x+f(x)$ e tomar a função $g_5=g_5(x)=361x^2-379x+19=0$ ao invés da primeira (o resultado será o mesmo).

**Figura 16 -** Ponto Fixo da função $g_4$.




Fazendo uso de uma ferramenta simples e motivadora, como o software *GeoGebra* (para citar um exemplo), além de sairmos do tradicionalismo do ensino, estes exemplos permitem explorar o conhecimento que o aluno possui a respeito dos números reais.

Note que na figura 15, na *Janela de Álgebra* do *GeoGebra,* podemos ver os valores das coordenadas dos pontos *A* e *B,* evidentemente, são números reais. Em *B,* é explícito que o número real em questão pertence ao conjunto dos números inteiros, mas em *A* esta evidência não é imediata. Deste modo, podemos perguntar a qual conjunto numérico pertence o número que representa o ponto *A*?

Não é difícil ocorrer, até mesmo ao menos experiente dos alunos de Ensino Médio, que o número 0,333333333333333[22] é um número racional: ou porque o aluno sabe que este número é a representação decimal da fração $\frac{1}{3}$, ou porque ele lembra da definição de número racional por meio de sua representação decimal, pois lhe fora ensinado que o número 0,3333333 que aparece no visor da calculadora é a representação aproximada[23] do número 0,333... (pois a máquina se limita a exibir os dígitos que seu visor permite) sendo que os três pontos depois do último número significa que o número se repete indefinidamente, neste exemplo o número três se repete.

Observe que nem sempre acontece como na representação decimal da divisão de um por três, por isso este tipo de ensino pode gerar algum tipo de confusão. Por exemplo se executarmos em uma calculadora, cujo visor ofereça 8 dígitos, a divisão de 3 por 17 e apresentarmos ao aluno apenas o resultado do visor 0,1764705, e pedirmos a ele para que justifique a qual conjunto numérico este número pertence, pode ocorrer que os mais apressados, ou ansiosos em dar uma resposta, possam dizer que é um número racional e justificarem dizendo, que sua representação decimal é finita, terminou no número cinco. Pode acontecer que algum aluno justifique que é um número racional, pois é uma dízima periódica, já que depois do último dígito (cinco) há uma infinidade de números cinco, pois ele aprendeu que em 0,3333333 há infinitos dígitos 3, e não podemos descartar a possibilidade de algum aluno dizer que, como não há repetição dos dígitos, não existe período, e julgar que o número em questão é um número irracional, além do que destacamos, pode ocorrer outras situações, as quais evidenciem algum tipo de confusão.

Pode ser que não esteja claro ao aluno que existe algum tipo de limitação da máquina; ou ainda, pode acontecer que exista alguma dúvida em relação aos conceitos de números: racional e irracional. De todo modo, é importante deixar claro ao estudante que todo número apresentado por uma máquina será um número

22 O software *GeoGebra* 4.2 oferece a possibilidade de quinze casas decimais.
23 Na maioria das vezes a palavra “aproximada” é omitida.

racional, pois ela não é capaz de apresentar infinitos dígitos, esta é uma prerrogativa da mente humana, o pensamento abstrato.

É fundamental destacarmos que a representação decimal oferecida pelas máquinas, sejam elas calculadoras ou computadores, é um número racional que pode representar exatamente um número racional, desde que a quantidade de dígitos do número seja igual ou menor do que a quantidade de dígitos oferecido pela máquina, como por exemplo 0,25; noutros casos é uma aproximação racional (por falta ou por excesso) de um número racional ou é a aproximação racional (por falta ou por excesso) de um número irracional.

Este tipo de limitação que ocorre quando usamos um software, por exemplo, é ilustrado nas figuras 15 e 16 onde há uma quantidade finita de dígitos para representar as coordenadas dos pontos de intersecção no gráfico. Uma questão que pode ser levantada, esta relacionada com o tipo de resposta que o aluno do Ensino Médio pode dar à pergunta, sobre a racionalidade ou irracionalidade do número que representa as coordenadas dos pontos *A* e *B* dessas figuras. Note que as coordenadas do ponto *B* na figura 16 não deixam dúvidas de que o número pertence ao conjunto dos números racionais[24], mas em relação ao ponto *A*, o que os alunos diriam? É possível que o aluno depois de observar atentamente que não há período nas 15 casas decimais apresentadas pelo software, diga que não se trata de um número racional (um engano). Com efeito, se a equação polinomial $-361x^2+381x-19=0$ admite alguma raiz racional, tal raiz pertence ao conjunto

$$A=\{-1,-\frac{1}{19},-\frac{1}{361},1,19\}.$$

De fato $-361\cdot 1^2+381\cdot 1-19=0$ e $-361\cdot(\frac{1}{19})^2+381\cdot(\frac{1}{19})-19=0$, e a raiz inteira não deixa dúvidas quanto a ser um número racional, no entanto, como o período da fração ordinária $\frac{1}{19}$ é $0{,}052631578947368421$, e este período possui mais dígitos do que aquele mostrado na figura 16 poderia ocorrer algum tipo de dúvida, contudo, lançado mão do teorema 8 garantimos que tal raiz é um número racional.

Com estes exemplos queremos chamar a atenção sobretudo aos seguintes

24 É comum o aluno do Ensino Médio dizer que 1 pertence ao conjunto dos números naturais.

aspectos:

1. Da precipitação, por parte de alguns alunos, ao dar respostas prematuramente, ou seja, sem refletir um pouco mais sobre o que lhe é requerido;
2. Como oferecer ao aluno uma garantia, uma demonstração de que o número que ele obteve como raiz de uma equação e observa no visor de uma calculadora ou na janela de um software é, ou não é, um número racional.
3. Sobre a limitação do software ou da calculadora, no que tange a quantidade de casas decimais oferecidas, é necessário esclarecer ao aluno o que aqueles dígitos representam ou podem representar;
4. Sobre a limitação do software ou da calculadora, no que tange a possíveis arredondamentos ou pelo fato da máquina operar com um número finito de dígitos.

Não estamos, de modo algum, desqualificando ou menosprezando o uso da tecnologia nas aulas de matemática, pelo contrário, a consideramos parte integrante de nossas aulas no Ensino Básico, porém devemos ser cuidadosos.

## *5.4 Aplicações do Método de Newton*

Para se determinar as raízes de equações polinomiais de grau dois, três e quatro há fórmulas fechadas, contudo, para equações de grau maior do que quatro devemos recorrer aos métodos numéricos (baseados em algoritmos aproximativos).

Apresentaremos neste item algumas aplicações do método de Newton, segundo LIMA (2006, p. 167) este método é "grandemente eficiente".

**Definição 20:** Seja a função polinomial $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por:

$$f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x+a_0,$$

com $a_n\neq 0$ e $n>0$, denominamos *função derivada* de $f=f(x)$ a função $f':\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por:

$$f'(x)=n\cdot a_n x^{n-1}+(n-1)\cdot a_{n-1}x^{n-2}+...+a_1$$

Para termos um exemplo, considere o polinômio

$$p(x)=3x^5+8x^3-x^2+2x-9,$$

sua função derivada, ou apenas sua derivada é dada por:

$$p'(x)=5\cdot 3x^4+3\cdot 8x^2-2\cdot x+2 \Rightarrow p'(x)=15x^4+24x^2-2x+2.$$

Como vimos no capítulo anterior a fórmula de recorrência dada por:

$$\boldsymbol{x_{n+1}=x_n-\frac{p(x_n)}{p'(x_n)}},$$

pode ser deduzida usando vários caminhos, escolhemos dois: a partir do método do ponto fixo e com base no gráfico da função.

**1) Método do Ponto Fixo**

Como a forma mais geral de $x=\varphi(x)$ equivalente a $f(x)=0$ é dado pela equação $x=x+A(x)f(x)=\varphi(x)$ observando que a função $A=A(x)$ deve ser contínua e impondo $A(\alpha)\neq 0, \alpha\in\mathbb{R}$. A escolha da função $A(x)$ deve ser feita de modo[25] que $\varphi'(\alpha)=0$. Assim partindo da equação

$$x+A(x)f(x)=\varphi(x)$$

obtemos sua derivada $1+A'(x)\cdot f(x)+A(x)\cdot f'(x)=\varphi'(x)$.

Calculando a derivada no ponto $\alpha$, obtemos $1+A(\alpha)\cdot f'(\alpha)=\varphi'(\alpha)$ podemos supor que $f'(\alpha)\neq 0$ e como gostaríamos que $\varphi'(\alpha)=0$ podemos reescrever a equação acima do seguinte modo: $1+A(\alpha)\cdot f'(\alpha)=0$, isolando $A(\alpha)$ temos:

$$A(\alpha)=-\frac{1}{f'(\alpha)}.$$

Como a ideia do método é determinar um zero, em geral aproximado, da função podemos admitir $x\cong\alpha$ e substituir o valor

25 o leitor interessado em mais detalhes pode consultar livros de cálculo numérico e análise numérica.

$$A(\alpha)=-\frac{1}{f'(\alpha)}$$

por

$$A(x)=-\frac{1}{f'(x)}$$

na equação

$$x+A(x)f(x)=\varphi(x)$$

e encontramos o valor que a função $\varphi$ deve assumir no ponto $x$, isto é:

$$\varphi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}.$$

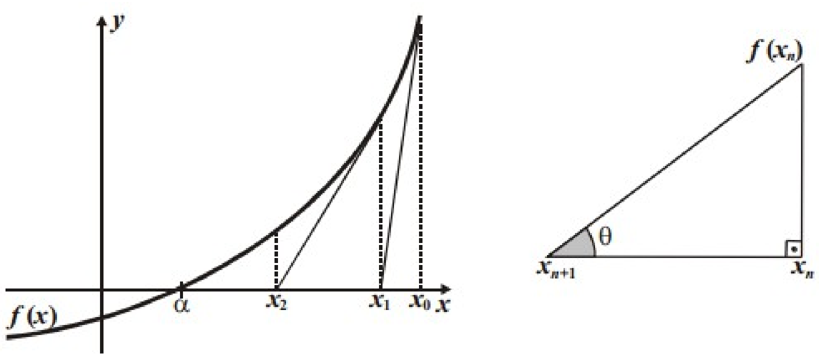
Considerando $f=f(x)$ uma função polinomial, temos em particular

$$x_{n+1}=x_n-\frac{p(x_n)}{p'(x_n)}.$$

**2) Geometricamente**

A figura 17 ilustra o caso em que tentamos determinar a raiz $\alpha$ da equação $y=f(x)$ a partir de um "chute" inicial $x_0$. Para obtermos um novo valor $x_1$, traçamos a reta tangente a curva $y=f(x)$ no ponto $(x_0, f(x_0))$, a intersecção desta reta com a abscissa do gráfico é a nova aproximação $x_1$. Analogamente, obtemos $x_2$ a partir de $x_1$ e consequentemente $x_{n+1}$ partindo de $x_n$.

**Figura 17 -** Interpretação gráfica do Método de Newton




Com base na figura 17, temos que $\Delta x=x_0-x_1$, como a inclinação da reta tangente à curva $y=f(x)$ no ponto $(x_0, f(x_0))$ é dada por $tg(\theta)=\dfrac{f(x_0)}{\Delta x}$, ou seja, $f'(x)=\dfrac{f(x_0)}{\Delta x}$ podemos isolar $\Delta x$ no primeiro membro da equação para obter $\Delta x=\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$, fazendo uma substituição e uma manipulação algébrica, podemos escrever:

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

ou de modo geral,

$$x_{n+1}=x_n-\frac{p(x_n)}{p'(x_n)}.$$

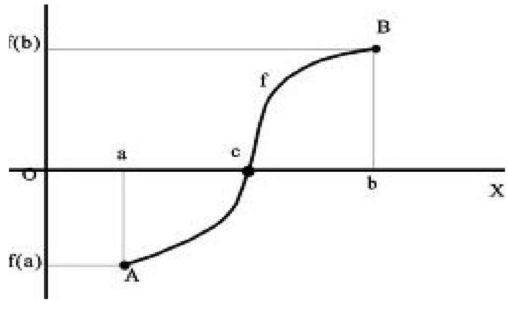
Ao usar este método se pode informar ao aluno que a função $p'$ é o que se chama função derivada, como o nosso foco é o estudante do ensino básico podemos apenas explicar como funciona a regra de derivação para funções polinomiais, pois a regra é simples e o aluno não sentirá dificuldades em manipular expoentes e resolver produtos.

Em COURANT (2000, p. 360) encontramos o seguinte teorema, que lá é demonstrado, aqui admitido sem demonstração.

**Teorema 9[26]:** Se uma função contínua de uma variável $x$ que é positiva para algum valor de $x$ e negativa para algum outro valor de $x$ em um intervalo fechado $a \leq x \leq b$, então ela se anula para algum valor intermediário $c \in [a, b]$.

Geometricamente,

**Figura 18 -** Teorema do Anulamento




26 Conhecido como Teorema Bolzano ou Teorema do anulamento.

O teorema nos diz que se os valores da função mudam de sinal, precisamos passar de um ponto abaixo do eixo dos $x$ para um ponto acima deste eixo (ou vice-versa), mas para isso acontecer é necessário atravessar o eixo das abscissas[27] pelo menos uma vez, conforme ilustramos na figura 18.

Em IEZZI (2005) encontramos uma consequência imediata do teorema 9, conforme o corolário 2[28].

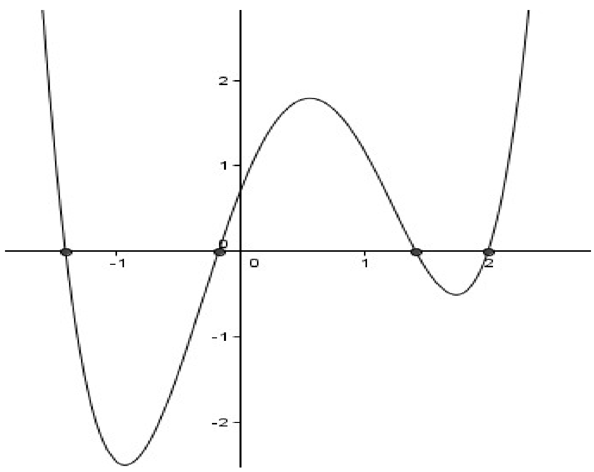
**Corolário 2:** Sejam $f(x)=0$ uma equação polinomial com coeficientes reais e $(a, b)$ um intervalo real aberto.

**1º)** se $f(a)$ e $f(b)$ tiver o mesmo sinal, então existe um número par de raízes ou não existem raízes reais da equação no intervalo $(a, b)$.

**2º)** se $f(a)$ e $f(b)$ tiver sinais opostos, então existe um número ímpar de raízes reais da equação no intervalo $(a, b)$.

Para exemplificar como funciona o método que descrevemos, vamos determinar todas as raízes reais (caso existam) da equação polinomial $17x^4-31x^3-40x^2+62x+12=0$. O software *GeoGebra* mostra que há quatro raízes reais distintas, conforme ilustramos na figura 19.

**Figura 19 -** Gráfico com quatro raízes reais




Como a equação de recorrência é dada por:

27 Este fato nem sempre é verdadeiro se a função não for contínua.
28 A demonstração será omitida aqui, mas pode ser encontrada em IEZZI (2005).

$$x_{n+1}=x_n-\frac{p(x_n)}{p'(x_n)},$$

no nosso exemplo temos:

$$p(x_n)=17x_n^4-31x_n^3-40x_n^2+62x_n+12,$$

aplicando a definição 20 se obtém:

$$p'(x_n)=68x_n^3-93x_n^2-80x_n+62.$$

Substituindo estes valores na fórmula de recorrência, podemos escrever:

$$x_{n+1}=\frac{51x_n^4-62x_n^3-40x_n^2-12}{68x_n^3-93x_n^2-80x_n+62}.$$

Para implementar o método de Newton, usamos a equação de recorrência acima e o software *LibreOffice Calc*, ilustramos na tabela 5 o procedimento e determinamos as quatro raízes reais da equação.

| iteração | aproximação | aproximação | aproximação | aproximação |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1,6 | -1,5 | 1,9 | -0,7 |
| 1 | 1,3352536005 | -1,4233203505 | 2,0397006047 | 0,0389178512 |
| 2 | 1,4113352358 | -1,4143319704 | 2,0033740117 | -0,2053477201 |
| 3 | 1,4142076506 | -1,4142135828 | 2,0000276473 | -0,1766723644 |
| 4 | 1,4142135623 | -1,4142135624 | 2,0000000019 | -0,1764705996 |
| 5 | 1,4142135624 | -1,4142135624 | 2 | -0,1764705882 |
| 6 | 1,4142135624 | -1,4142135624 | 2 | -0,1764705882 |
| 7 | 1,4142135624 | -1,4142135624 | 2 | -0,1764705882 |
| 8 | 1,4142135624 | -1,4142135624 | 2 | -0,1764705882 |

**Tabela 5 -** Recorrência pelo método de Newton

Observando a tabela 5, podemos afirmar que a raiz dois é um número racional, contudo pela simples observação não conseguimos saber a qual conjunto dos números reais pertencem as outras raízes. Observe que a equação em questão possui somente coeficientes inteiros, por isso vamos fazer a verificação via Teorema das Raízes Racionais (p. 78).

O teorema nos garante que se existir algum número racional $\frac{p}{q}$ que é solução desta equação $17x^4-31x^3-40x^2+62x+12=0,$ $p$ é um divisor de 12 e $q$ é divisor de 17, assim $p\in\{-12,-6,-4,-3,-2,-1,1,2,3,4,6,12\}$ e $q\in\{-17,-1,1,17\},$ deste modo as possíveis raízes racionais são:

$$\{-12,-6,-4,-3,-2,-1,-\frac{12}{17},-\frac{6}{17},-\frac{4}{17},-\frac{3}{17},$$
$$\frac{-2}{17},-\frac{1}{17},\frac{1}{17},\frac{2}{17},\frac{3}{17},\frac{4}{17},\frac{6}{17},\frac{12}{17},1,2,3,4,6,12\}.$$

Determinado o valor numérico para as possíveis raízes encontramos:

$$p(2)=0 \text{ e } p(-\frac{3}{17})=0, \text{ note que } \left(-\frac{3}{17}=-0,\overline{1764705882352941}\right),$$

portanto as outras duas raízes são números irracionais.

De fato, se fatorarmos o polinômio $p(x)=17x^4-31x^3-40x^2+62x+12$ obtemos $P(x)=(x-2)(x+\frac{3}{17})(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$, que possui quatro raízes reais: duas racionais e duas irracionais.

No próximo exemplo, vamos admitir que uma situação-problema resultou na seguinte equação $24x^7+28x^6-138x^5-165x^4+90x^3+128x^2-15=0$ e vamos determinar suas raízes reais e verificar quais delas pertencem ao conjunto dos números racionais e quais pertencem ao conjunto dos números irracionais. Para implementarmos o método de Newton, vamos usar a definição 20 para obter a derivada da função acima, assim se:

$$p(x)=24x^7+28x^6-138x^5-165x^4+90x^3+128x^2-15,$$

então:

$$p'(x)=168x^6+168x^5-690x^4-660x^3+270x^2+256x$$

e a equação de recorrência será dada por:

$$x_{n+1}=\frac{144x_n^7+140x_n^6-552x_n^5-495x_n^4+180x_n^3+128x_n^2+15}{168x_n^6+168x_n^5-690x_n^4-660x_n^3+270x_n^2+256x_n}.$$

Implementamos o método com o auxílio do *LibreOffice Calc*, ilustrado abaixo:

| iteração | aproximação | aproximação | aproximação | aproximação |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,2 | 0,7 | 2,6 | -2,5 |
| 1 | 0,370006712581953 | 1,346748822546540 | 2,394293917906660 | -2,344447525301540 |
| 2 | 0,334019817635309 | 1,072110285692130 | 2,278317275715590 | -2,261751214152430 |
| 3 | 0,333333693936982 | 0,934818344013269 | 2,239996866060250 | -2,237907589286430 |
| 4 | 0,333333333333433 | 0,877724086595025 | 2,236105757543120 | -2,236078230752950 |
| 5 | 0,333333333333333 | 0,866454380298704 | 2,236067981033380 | -2,236067977820430 |
| 6 | 0,333333333333333 | 0,866026012531774 | 2,236067977499790 | -2,236067977499790 |
| 7 | 0,333333333333333 | 0,866025403785667 | 2,236067977499790 | -2,236067977499790 |
| 8 | 0,333333333333333 | 0,866025403784439 | 2,236067977499790 | -2,236067977499790 |
| **iteração** | **aproximação** | **aproximação** | **aproximação** | |
| 0 | -0,7 | -0,6 | -0,9 | |
| 1 | -1,026730323848680 | -0,409010313008864 | -0,856296030051228 | |
| 2 | -1,005120365150680 | -0,486479634107697 | -0,865737669964041 | |
| 3 | -1,000248147346940 | -0,499502219560438 | -0,866025096971643 | |
| 4 | -1,000000628633500 | -0,499999256860239 | -0,866025403784088 | |
| 5 | -1,000000000004050 | -0,499999999998337 | -0,866025403784438 | |
| 6 | -0,999999999999996 | -0,500000000000000 | -0,866025403784434 | |
| 7 | -1,000000000000000 | -0,500000000000000 | -0,866025403784448 | |

**Tabela 6 -** Raízes da equação do sétimo grau

Os valores que escolhemos para a aproximação foram alicerçados no Teorema de Bolzano[29] e no Corolário 2, calculamos o valor numérico do polinômio $p(x)=24x^7+28x^6-138x^5-165x^4+90x^3+128x^2-15$ para alguns valores e obtemos:

$p(0)=\frac{-5}{8}$ e $p(1)=-2$, isto significa que há um número par de raízes entre zero e um, ou não há raízes neste intervalo; do mesmo modo como $p(1)=-2$ e $p(2)=-\frac{325}{8}$ tem mesmo sinal há um número par de raízes ou não há raiz neste intervalo; $p(2)=-\frac{325}{8}$ e $p(3)=1\,232$, como os sinais são opostos há pelo menos uma raiz neste intervalo, seguindo este raciocínio se pode verificar o valor numérico do polinômio para alguns valores negativos de $x$ para obter outras aproximações.

Observando a tabela 6 identificamos três raízes racionais: 0,333333333333333; -1 e – 0,5, mas o que dizer a respeito das outras raízes, a qual subconjunto dos números reais elas pertencem?

29 Teorema 9.

Note que $p(x)=24x^7+28x^6-138x^5-165x^4+90x^3+128x^2-15$ satisfaz as condições do teorema 8 (das raízes racionais), portanto podemos responder esta questão. De acordo com o teorema das raízes racionais, se a equação $p(x)$ admitir raiz racional, então:

$$p\in\{-15,-5,-3,-1,1,3,5,15\}$$

e

$$q\in\{-24,-12,-8,-6,-4,-3,-2,-1,1,2,3,4,6,8,12,24\}.$$

E as possíveis raízes racionais pertencem a um conjunto de 44 números, determinando o valor numérico do polinômio para cada um destes valores, obtemos:

$$p(\frac{1}{3})=0, p(-\frac{1}{2})=0 \text{ e } p(-1)=0,$$

estas são as únicas raízes racionais, como se pode observar na tabela 6 esta equação possui sete raízes reais, assim podemos responder a pergunta inicial afirmando que as quatro raízes (além das três raízes racionais) pertencente ao conjunto dos números irracionais. Fatorando $p(x)$, temos:

$$p(x)=(x-\frac{1}{3})(x+\frac{\sqrt{(3)}}{2})(x-\frac{\sqrt{(3)}}{2})(x+\frac{1}{2})(x+1)(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5}),$$

e se observa as quatro raízes irracionais e as três raízes racionais.

Considere a função polinomial $p(x)=16x^4-24x^3-87x^2+144x-54$. Desejamos obter seus zeros por meio do método de Newton, primeiramente obtemos a função derivada $p'(x)=64x^3-72x^2-174x+144$, logo a equação de recorrência será dada por:

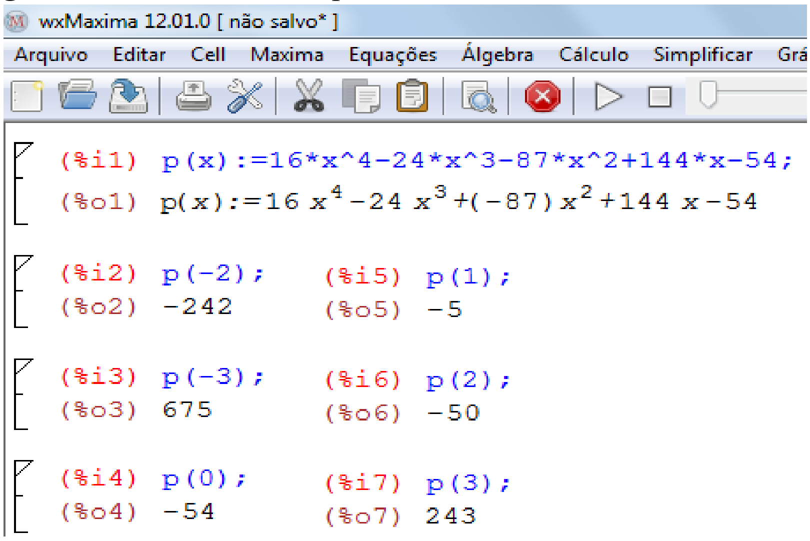
$$x_{n+1}=\frac{12x_n^3-3x_n^2-24x_n-18}{16x_n^2-6x_n-48},$$

ou

$$x_{n+1}=\frac{3}{2}\left(\frac{4x_n^3-x_n^2-8x_n-6}{8x_n^2-3x_n-24}\right).$$

Para determinar um possível intervalo que contenha uma raiz vamos usar o software *wxMaxima*, conforme ilustramos na figura 20.

**Figura 20 -** Intervalos com possível raiz




De acordo com o teorema 9 e com o Corolário 2 há um número ímpar de raízes nos intervalos $(-3,-2)$ e $(2,3)$ e no intervalo $(0,1)$ há um número par de raízes ou não há raízes. Usamos o software *LibreOffice Calc* para determinar as raízes, e ilustramos na tabela 7.

| iteração | aproximação | aproximação | aproximação |
|---|---|---|---|
| 0 | -2,5 | 2,5 | 0,8 |
| 1 | -2,451492537313430 | 2,452702702702700 | 0,774812030075188 |
| 2 | -2,449493061542400 | 2,449503911399880 | 0,762361687558801 |
| 3 | -2,449489742792310 | 2,449489743060390 | 0,756170075680029 |
| 4 | -2,449489742783180 | 2,449489742783180 | 0,753082383921830 |
| 5 | -2,449489742783180 | 2,449489742783180 | 0,751540533177758 |
| 6 | -2,449489742783180 | 2,449489742783180 | 0,750770102476036 |
| 7 | -2,449489742783180 | 2,449489742783180 | 0,750385010282422 |
| 8 | -2,449489742783180 | 2,449489742783180 | 0,750192494911373 |
| 9 | -2,449489742783180 | 2,449489742783180 | 0,750096244899358 |
| 10 | -2,449489742783180 | 2,449489742783180 | 0,750048121810739 |
| 11 | -2,449489742783180 | 2,449489742783180 | 0,750024060745652 |
| 12 | -2,449489742783180 | 2,449489742783180 | 0,750012030332899 |

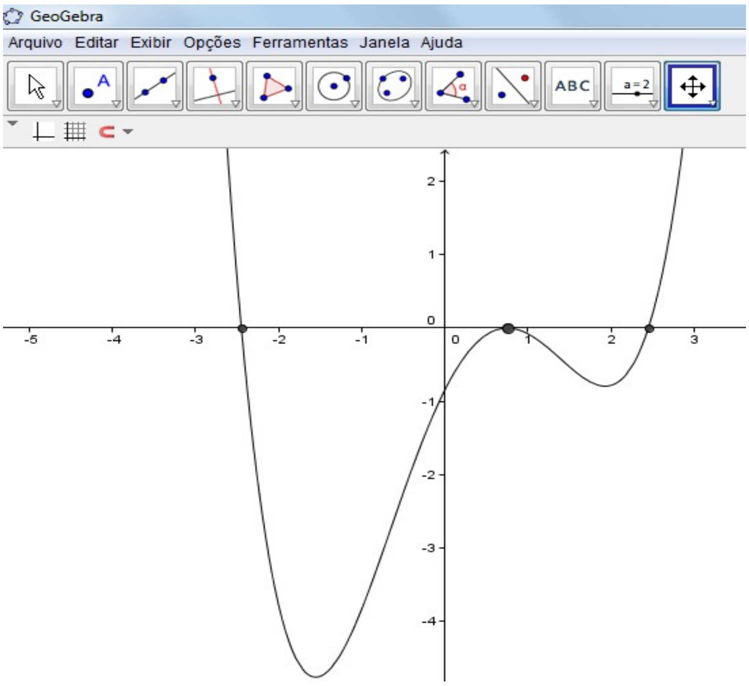
**Tabela 7 -** Raiz múltipla

Como foi previsto, há um número ímpar de raiz nos intervalos $(-3,-2)$ e $(2,3)$, porém no intervalo $(0,1)$ deve existir um número par de raízes ou não pode haver raiz, então por que encontramos uma raiz neste intervalo? Esta raiz é uma raiz com multiplicidade, neste caso, a raiz é dupla. Em relação a qual subconjunto dos números reais pertencem as raízes, executando o procedimento que já realizamos diversas vezes, chegaremos que dentre as possíveis raízes racionais, a única raiz é $\frac{3}{4}$, justamente a raiz com multiplicidade, as outras duas raízes pertencem ao conjunto dos números irracionais, como já foi observado, podemos fatorar o polinômio em fatores do primeiro grau, deste modo

$$p(x)=16x^4-24x^3-87x^2+144x-54=\left(x-\frac{3}{4}\right)^2(x-\sqrt{6})(x+\sqrt{6}).$$

Podemos verificar geometricamente, na figura 21, como é o gráfico da função que possui uma raiz múltipla.

**Figura 21** - Gráfico da Função com raiz múltipla.




Há uma série de exemplos e aplicações que não foram abordados neste trabalho, pois não é o foco, contudo o leitor pode consultar além das referências, livros de cálculo numérico e de análise numérica.

# Considerações Finais

A preocupação com o processo de ensino e de aprendizagem em matemática, em particular assuntos envolvendo números irracionais, nos motivou a verificar quais recomendações, para o ensino deste assunto, são encontradas nos documentos oficiais[30], e se os autores de livros didáticos as seguem[31]. O que se constata é que em geral os livros didáticos não atentam para tais recomendações, na maioria dos livros didáticos percebe-se, por exemplo, a escassez e muitas vezes a ausência da demonstração de um resultado. A demonstração em matemática é uma das competências indicadas nos PCN[32].

Encontra-se nos PCN a seguinte assertiva: "**O importante é que o aluno identifique o número irracional como um número de infinitas casas decimais não-periódicas,** [...]". (BRASIL, 1988, p. 50, grifo nosso). Esta afirmação conduz a diversas reflexões, entre as quais se destaca a necessidade da demonstração matemática, pois a verificação de que um número possui infinitas casas decimais não-periódicas não pode ser obtida por um processo empírico, não há verificação experimental (diferentemente de conceitos físicos ou químicos, por exemplo) que possa garantir que um número goza desta propriedade, essa é uma prerrogativa da mente humana usando o raciocínio abstrato, por isso, a necessidade de *demonstração* deste fato.

Os PCN enfatizam a representação decimal dos números: racionais e irracionais, contudo não é possível distinguir um número racional de um número irracional, observando apenas um número finito de dígitos de sua representação decimal. É a demonstração que vai dar a garantia de que certa representação decimal tem, por exemplo, infinitos dígitos não-periódicos. COURANT (2000, p. 69) afirma que: "Nada em nossa "intuição" pode nos ajudar a "enxergar" os pontos irracionais como distintos dos racionais". No trabalho, foram apresentadas algumas demonstrações de irracionalidade, particularmente no Capítulo III. Em geral, os livros didáticos apresentam aos estudantes do Ensino Médio afirmações sobre a irracionalidade sem discussão, o que possivelmente aprofunda o desconhecimento

30 PCN; PCN + Ensino Médio; Diretrizes Curriculares da Rede Pública do Estado do Paraná.
31 Não fizemos análise de livros didáticos, nos baseamos em BOFF (2006) e em LIMA et al. (2001).
32 Principalmente as demonstrações em Geometria.

dos professores da Educação Básica, por onde, espera-se, este trabalho ganha importância.

Sabe-se que há dificuldades inerentes ao processo de ensino e de aprendizagem dos números irracionais, ora por falta de uma definição adequada ora por falta de maturidade matemática do aluno para entender a construção axiomática dos conjuntos numéricos. Esta construção muitas vezes é omitida nos livros didáticos, fato que também contribui para o fracasso do ensino deste assunto, como já foi mencionado, muitos professores deixam os cursos de graduação cheios de dúvidas e não conseguem complementar os livros didáticos. Para citar um exemplo, o livro didático público que é usado na escola em que lecionamos (DANTE, 2008, p. 18) apresenta **todo** o conteúdo de números naturais em quatorze linhas, e não menciona a construção apresentada pelo matemático italiano Guiuseppe Peano, no final do século XIX.

Uma tentativa de superar o obstáculo epistemológico para se ensinar o conjunto dos números irracionais é construída na Definição 6, numa sequência didática mais construtiva. Procurou-se evitar o uso de fatos desconhecidos do estudante até aquele momento. A principal limitação da definição 6 é quanto à cardinalidade e completude dos números reais, e tal escolha é absolutamente consistente com os PCN. Ela captura o essencial para o Ensino Médio ao oferecer um conjunto numérico fechado sob as quatro operações fundamentais, contendo estritamente o conjunto dos números racionais.

Os PCN incentivam o uso de tecnologia para se ensinar os assuntos matemáticos, neste trabalho foi apresentado alguns métodos numéricos para se encontrar as raízes de equações usando os recursos tecnológicos disponíveis nas escolas públicas do Estado do Paraná, a ênfase foi maior para as equações polinomiais (são estudadas no Ensino Médio).

Sobre o uso de tecnologias, note-se a importância em chamar a atenção dos estudantes sobre as possíveis limitações destes recursos tecnológicos, não se pode confiar inteiramente neles, e é importante observar que é preciso saber matemática para se ter a segurança ao usar tais recursos, embora os estudantes não pensem assim, é fundamental que os professores chamem a atenção neste sentido, como fizemos na página 73 e observado na figura 11. O uso da tecnologia nas aulas de matemática é muito importante, além de motivador, por isso, a consideramos parte integrante de nossas aulas no Ensino Básico, porém devemos ser cuidadosos.

O objetivo com os *métodos do ponto fixo* e *de Newton* foi proporcionar ao professor uma ferramenta útil e motivadora para se determinar as **raízes reais** de equações. Fundamentados na definição de números racionais e de números irracionais por meio de sua representação decimal, o *teorema da Raízes Racionais*[33], juntamente com os métodos numéricos, foram o destaque para fazer o reconhecimento, identificação e distinção entre raízes racionais e raízes irracionais. Reitere-se os principais pontos deste trabalho: o reconhecimento de que um número possui infinitas casas periódicas sem repetição só é possível por meio da demonstração; a impossibilidade de garantir se um número é racional ou se é irracional, observando apenas uma quantidade finita de dígitos e a verificação de que a raiz real de uma equação polinomial de coeficientes inteiros pertence ao conjunto dos números racionais ou dos números irracionais.

33 Teorema 8.

# Referências Bibliográficas


AABOE, A. **Episódios da História Antiga da Matemática.** São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, 1984.

BOFF, D.S. **A Construção dos Números Reais na Escola Básica.** Dissertação de Mestrado Profissionalizante. UFRGS, Porto Alegre, 2006.

BOFF, M. P. **Números Irracionais e Transcendentes na Sala de aula de Matemática**. Monografia, Graduação. UNIOESTE, Foz do Iguaçu, 2008.

BOYER,C.B.**História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blücher,1974.

BRANCO, E.S; CANTINI, M.C.;MENTA, E. **Investigando o uso de Tecnologias nas Escolas Públicas Estaduais do Paraná,** Curitiba,Pr. PUC, 2011, disponível em: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/storage/materiais/0000016199.pdf>, acesso em 09/02/2013.

BRASIL.Secretária de Educação Média e Tecnológica. P**arâmetros Curriculares Nacionais**. Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental. 1998.

______.Secretária de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais.** Ensino Médio . 1998.

______. Secretária de Educação Média e Tecnológica. **P C N + Ensino Médio :** Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio. 2000.

BURDEN, R.L, FAIRES.J.D. **Análise Numérica**. São Paulo: Pioneira Thonson Learning, 2003.

CAJORI, F. **Uma História da Matemática**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2007.

CARNEIRO, J.P.Q. **Equações Algébricas de Grau maior que Dois:** Assunto para o Ensino Médio. Revista do Professor de Matemática nº 40, 2º Quadrimestre, 1999.

CARVALHO, Paulo C.P. **Vídeo aula PAPMEM:** Julho de 2004, disponível em: <http://strato.impa.br/videos/CAPEM_JUL04/Dia270704_2.wmv> , acesso em 01/12/2012.

CHAVES, A. P. A.; PORTO, T. . **Seis Maneira de Salvar Hipasus da Mort**e: A Irracionalidade de $\sqrt{2}$ . In: VI Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, 2012, Campinas. Anais da VI Bienal de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2012 .

COSTA, C. C**onsiderações sobre Números Racionais na Sala de aula de Matemática**. Monografia, Graduação. UNIOESTE, Foz do Iguaçu, 2008.

COURANT, R.;ROBBINS, H. **O que é Matemática?** Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda.,2000.

DAVENPORT, H. **The Higher Arithmetic** – an Introduticion to the Theory of Numbers. London, Hutchinson's University Library, 1952.

DANTE, L.R. **Matemática (Ensino Médio)** – Manual do professor, São Paulo, Editora Ática, 2008.

DE MORAIS FILHO,D.C. **Um convite à Matemática.** Rio de Janeiro, SBM, 2012.

DEWDNEY, A.K. **20.000 Léguas Matemáticas:** um passeio pelo misterioso mundo dos números, Rio de Janeiro, Jorge Zahar Editor, 2000.

EVES, H. **Introdução a Historia da Matemática**, 3. ed., Campinas, Editora da Unicamp 2002.

FERREIRA, J. **A Construção dos Números**, 2.ed, Rio de Janeiro, SBM, 2011.

FIGUEIREDO,D.G. **Números Irracionais e Transcendentes.** Rio de Janeiro: SBM, 2011.

GARBI, G. **A Rainha das Ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da Matemática.** São Paulo, Editora Livraria da Física, 2010.

GONÇALVES, C.H.B.,POSSANI.C.**Revisando a Descoberta dos Incomensuráveis na Grécia Antiga**. Revista Matemática Universitária nº 47, 2009.

HEFEZ, A. **Elementos de Aritmética**. Rio de Janeiro, SBM, 2011.

______. **Curso de Álgebra**: volume 1, 4 ed. Rio de Janeiro, SBM, 2010.

IEZZI,G. **Fundamentos de Matemática Elementar**,6: Complexos,Polinômios e Equações. São Paulo, Atual, 2005.

KHAZAD,A. **Irrational Roots of Integers**. The Mathematical Association of America, The College Mathematics Journal,vol.36, nº1,p.56-57, January, 2005.

KLAZAR,M. **Real Numbers as infinitive decimals and the irrationality of** $\sqrt{2}$ . Cornell University Library, disponível em <http://arxiv.org/abs/0910.5870> , acesso em 06/01/2013.

KLINE, M. **Mathematical Thought from Ancient to Modern Times**. New York: Oxford University Press, 1972.

LIMA, E.L.**Curso de Análise**, vol. 1, Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1992.

______. **Análise Real** volume 1 Funções de Uma Variável, Rio de Janeiro, IMPA, 2011.

______. **Medida e Forma em Geometria**, Rio de janeiro, SBM, Coleção do Professor de Matemática, 2009.

______. **Meu Professor de Matemática** e outras histórias, SBM, Rio de Janeiro, 2011.

______. **A Equação do Segundo Grau.** Revista do Professor de Matemática nº 13, 2º semestre, 1988.

LIMA, E.L. et al. **Exame de Textos**: Análise de livros de Matemática para o Ensino Médio.Rio de Janeiro, SBM, 2001.

______.**A Matemática do Ensino Médio**, vol.1, Rio de Janeiro, SBM, Coleção do Professor de Matemática 2006.

LOPES, J.M. **Aproximando raízes quadradas elevando ao quadrado.** Revista do Professor de Matemática nº 62. 2012,CD-ROOM.

NETO, A.A.,et al. **Números Complexos, Polinômios e Equações Algébricas**, São Paulo, Editora Moderna, 1982.

NIVEN, I. **Números Racionais e Irracionais.** Rio de Janeiro, SBM, 1984.

OTTAWAY, P. **Pólya´s Paragon**. Canada, Canadian Mathematical Society, vol. 29 nº 5, September 2003, disponível em <http://cms.math.ca/crux/v29/n5>, acesso em 03/12/2012.

PARANÁ, SEED. **Diretrizes Curriculares da Rede Pública da Educação Básica do Estado do Paraná** – Matemática. Curitiba, 2008.

PROFMAT, **MA 22 – Fundamentos de Cálculo**, capítulo 8, Disponível em : <http://moodle.profmat-sbm.org.br/MA22/2012/Unidades/MA22_Unidade_08.pdf>, acesso em 10/04/2012.

STARK, P. **Introdução aos Métodos Numéricos**. Rio de Janeiro, Interciência, 1979.