LUCIANA CARDOSO BENVENUTTI

A OPERAÇÃO DIVISÃO: UM ESTUDO COM ALUNOS DE 5ª SÉRIE

ITAJAÍ (SC)

2008

UNIVALI
UNIVERSIDADE DO VALE DO ITAJAÍ
Pró-Reitoria de Pesquisa, Pós-Graduação, Extensão e Cultura – ProPPEC
Curso de Pós-Graduação *Stricto Sensu*
Programa de Mestrado Acadêmico em Educação – PMAE

LUCIANA CARDOSO BENVENUTTI

A OPERAÇÃO DIVISÃO: UM ESTUDO COM ALUNOS DE 5ª SÉRIE

Dissertação apresentada ao Colegiado do Programa de Mestrado Acadêmico em Educação (PMAE) da Universidade do Vale do Itajaí – UNIVALI, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Educação. Linha de Pesquisa: Desenvolvimento e Aprendizagem. Grupo de Pesquisa: Educação Matemática.

Orientadora: Profª Dra. Maria Helena Baptista Vilares Cordeiro.

ITAJAÍ (SC)
2008

UNIVALI
UNIVERSIDADE DO VALE DO ITAJAÍ
Pró-Reitoria de Pesquisa, Pós-Graduação, Extensão e Cultura – ProPPEC
Curso de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Educação
Programa de Mestrado Acadêmico em Educação – PMAE

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

LUCIANA CARDOSO BENVENUTTI

A OPERAÇÃO DIVISÃO: UM ESTUDO COM ALUNOS DE 5ª SÉRIE

Dissertação avaliada e aprovada pela Comissão Examinadora e referendada pelo Colegiado do PMAE como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Educação.

Itajaí (SC), 18 de dezembro de 2008.

Membros da Comissão:

Orientadora: ________________________________
Dra. Maria Helena Baptista Vilares Cordeiro

Membro Externo: ________________________________
Dr. Idemar Vizolli

Membro representante do Colegiado: ________________________________
Dra. Luciane Maria Schlindwein

AGRADECIMENTOS

Muitas foram as pessoas que contribuíram para a realização deste estudo. Meus sinceros agradecimentos a todas elas, em especial:

A Deus, pela capacidade a mim dada e por sempre iluminar o meu caminho nesta transição.

A toda a minha família, que compartilhou momentos de dificuldades durante a realização deste trabalho, principalmente os meus pais, responsáveis pelo incentivo e dedicação aos estudos.

Aos meus irmãos e sobrinhos pela confiança, compreensão e paciência.

Ao meu marido e aos meus filhos, Rodrigo, Isabel e Isadora pela compreensão nos momentos em que estive ausente.

À Professora Drª Maria Helena Baptista Vilares Cordeiro, uma profissional ética e acima de tudo humana, pela competência, dedicação e apoio na orientação deste trabalho.

À Professora Drª Maria Lucia Faria Moro e ao Professor Dr. José Erno Taglieber pelas contribuições no exame de qualificação.

À Professora Drª Luciane Schlindwein e ao Professor Dr. Idemar Vizolli, pelas contribuições na defesa final.

Às crianças da turma da 5ª série, sujeitos desta pesquisa, pela colaboração na realização deste estudo.

E a todos os meus amigos que ao longo desta caminhada estiveram comigo, sempre me incentivando.

RESUMO

Este estudo, que se fundamenta na teoria dos campos conceituais de Vergnaud (1991; 1996), propõe-se a caracterizar as estratégias de resolução escritas, produzidas por adolescentes que cursam a 5ª série para a solução de problemas de divisão, envolvendo partição e quotição. Participaram deste estudo 41 crianças e adolescentes da 5ª série do ensino fundamental de uma escola pública estadual de Camboriú, SC. O instrumento de coleta consistia em uma folha com quatro problemas de divisão, sendo dois de partição e dois de quotição, com resto e sem resto, nas quais os sujeitos registravam por escrito as suas estratégias de resolução de cada problema. Os registros produzidos pelos participantes foram analisados, sendo categorizadas as estratégias de resolução e os erros cometidos. A estratégia mais utilizada foi o algoritmo da divisão, mas observou-se que os participantes resolveram os problemas de várias maneiras e utilizando diversas operações, não se restringindo à utilização da operação da divisão com o respectivo algoritmo, como seria de se esperar, tendo em conta o seu nível de escolaridade. Foram analisados os erros encontrados na aplicação do algoritmo da divisão. Os mais frequentes foram os erros de tabuada, seguidos dos de execução do algoritmo. Foram encontradas respostas escritas em língua materna que não levavam em consideração os dados e as questões colocadas no enunciado dos problemas. Apenas três sujeitos trocaram os termos ao armar o algoritmo, o que sugere que quase todos compreendem o que os termos do mesmo representam ou que aprenderam a utilizar o número maior no dividendo e o menor no divisor. Concluiu-se que as crianças e os adolescentes, embora tenham utilizado como estratégia o algoritmo da divisão e poucos tenham errado a solução ao resolverem os problemas de partição e quotição, nem sempre mobilizaram os esquemas intelectuais próprios que têm à sua disposição

Palavras-chave: Campos conceituais. Problemas de divisão. Estratégias de resolução.

ABSTRACT

This study is based on Vergnaud's conceptual fields theory (1991; 1996) and seeks to characterize the written strategies used by 5th grade students (year 7 in the UK) to solve problems which involve partition and quotative division. Forty one children and teenagers attending 5th grade in a state school in Camboriú, SC, Brazil took part in this research. The research instrument was a sheet containing four division problems: two problems involving partition and two involving quotative division, both with and without remainders. Below each problem, there was a space in which the subjects were asked to write down the strategies used to solve each problem. The written productions where analysed and categories were created to classify both the strategies used and the errors made. The most frequent strategy was the division algorithm. However, contrary to what was expected, it was observed that the participants used different means to solve the problems. They also applied different operations that were not restricted to the division algorithm. The errors found in the cases where the division algorithm was applied where analysed. The most frequent errors related to knowledge of computing tables, followed by execution of the algorithm. Some of the answers, written down by the participants in their mother tongue, showed that they did not always consider the information and the questions included in the presentation of the problems. Just three subjects changed the terms in the composition of the algorithm, which suggests that almost all the subjects understood their meaning. Alternatively, they may have learnt to assign the higher number to the place of the dividend and the smaller to the place of the divisor. It can be concluded that in this research, despite using the division algorithm, just a few of the children and adolescents managed to successfully solve the partition and the quotative division problems. They did not mobilize the intellectual schemes that they are supposed to have already learned.

Key-words: Conceptual fields. Division problems. Solution strategies.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Antes mesmo de entrar na escola, as crianças apresentam um conhecimento espontâneo sobre vários conceitos matemáticos, dentre eles, a divisão. E quando são confrontadas, no seu dia-a-dia, com situações de divisão, resolvem-nas da forma que para elas faz mais sentido.

A divisão está presente desde cedo em diversas atividades cotidianas das crianças, como dividir objetos com um colega, repartir quantidades em partes iguais, colocar uma mesma quantidade de objetos em diversos recipientes (LAUTERT; SPINILLO, 2002).

Assim, vários conteúdos de matemática, incluindo o conceito de divisão, são fundamentais para o entendimento de questões relacionadas com a vida diária e isso ressalta a importância de que sejam trabalhados nas séries iniciais da educação básica. Espera-se que o processo de escolarização, proporcione à criança a oportunidade de ampliar os significados da divisão, ajudando-a, por exemplo, a coordenar as ideias de partição e de quotição, que nem sempre são exploradas suficientemente para que os alunos compreendam que o conceito matemático de divisão envolve diversos aspectos, tais como o uso de estratégias e procedimentos de resolução apropriados e o uso de representações diversas relacionadas ao conhecimento sobre número, quantidades e algoritmos (VERGNAUD, 1991).

No cotidiano escolar, é comum o conceito de divisão ser confundido com a competência em operar o algoritmo — sequência de instruções para realização de uma tarefa — da divisão, pois a aplicação dele com precisão passa a ser o único critério para definir e avaliar a compreensão que a criança tem sobre essa operação matemática.

Sabe-se que o emprego de algoritmos é uma estratégia para se chegar a um determinado resultado, muitas vezes mais rapidamente do que se forem seguidos outros procedimentos. Porém, na prática profissional, percebemos que os problemas de divisão são resolvidos mecanicamente por meio de fórmulas e regras operatórias, não havendo uma reflexão, por parte dos alunos, sobre qual conceito (partição ou quotição) está envolvido.

Observamos também que os algoritmos são utilizados de maneira isolada de seu contexto, dificultando, assim, o entendimento dos alunos acerca do conceito de divisão. Geralmente, eles resolvem os problemas usando os algoritmos e retirando os dados numéricos dos enunciados, sem compreender como chegaram àquele resultado, pois não sabem o que os algarismos e os termos dos algoritmos representam.

Em sala de aula, ao trabalharmos com crianças de 5ª série, percebemos as dificuldades apresentadas por elas ao solucionarem problemas de divisão por partição e quotição, notadamente com referência à operação que devem utilizar, pois fazem perguntas do tipo: "Que continha é pra fazer?" "É de dividir ou de multiplicar?"

Com base nas observações realizadas ao longo da minha experiência docente, posso afirmar que os alunos desenvolvem grande parte da sua aprendizagem recorrendo a métodos próprios e, mais especificamente na 5ª série, à utilização de algoritmos convencionais. A partir dessa constatação e também considerando o quanto é difícil para os alunos a compreensão dos conceitos matemáticos, entendo ser relevante desenvolver estudos que analisem o processo de construção desses conceitos e a reação das crianças diante de determinadas tarefas que lhes são propostas, assim como as estratégias e procedimentos por elas adotados na solução de problemas.

Foi pautada nessa perspectiva e no propósito de contribuir para o aperfeiçoamento do processo de ensino e aprendizagem da matemática que me lancei na investigação aqui relatada, buscando repostas para a questão: **Que estratégias de resolução escritas crianças e adolescentes que cursam a 5ª série apresentam para a solução de problemas de divisão, envolvendo participação e quotição?**

Assim, o objetivo geral deste estudo é **caracterizar as estratégias de resolução escritas, desenvolvidas por adolescentes que cursam a 5ª série para a solução de problemas de divisão envolvendo partição e quotição**. A partir dele, foram traçados os seguintes objetivos específicos:

1. Identificar quais as operações que os adolescentes consideram adequadas para chegar à solução de problemas de divisão, quando estes envolvem a partição e a quotição.

2. Avaliar se os registros que eles produzem representam adequadamente a operação escolhida.
3. Identificar, no tratamento dado aos registros produzidos, possíveis indicadores da existência de dificuldades dos adolescentes em compreender a relação entre esse tratamento e as ações que conduziriam à solução do problema.

O trabalho está organizado em quatro capítulos, sendo que o primeiro (Fundamentação teórica) apresenta a teoria dos campos conceituais, referencial teórico desta pesquisa, enfatizando o campo conceitual das estruturas multiplicativas e apresentando alguns trabalhos que abordam a operação divisão.

No Capítulo 2 são descritos os encaminhamentos metodológicos desta pesquisa e no Capítulo 3 é apresentada a análise dos dados, tendo em vista os objetivos específicos da investigação. Por fim, no Capítulo 4, são apresentadas as conclusões e as considerações finais acerca do estudo realizado.

Espero que este trabalho contribua para uma maior compreensão das dificuldades e das estratégias utilizadas por alunos de 5ª série na resolução de problemas de divisão apresentados em contextos escolares e ofereça subsídios para que os professores possam criar estratégias pedagógicas mais eficazes no ensino dos conteúdos matemáticos que envolvem o conceito de divisão.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 A teoria dos campos conceituais

Esta pesquisa tem como referencial a teoria dos campos conceituais do psicólogo francês Gérard Vergnaud (1991), considerada um exemplo representativo das relações entre a psicologia e a educação em um domínio de pesquisa recente, o da educação matemática. Aparece como uma "psicologia dos conceitos" (VERGNAUD, 1991, p. 167) e dos teoremas, cuja definição pragmática "faz apelo ao conjunto de situações que constituem a referência das suas diferentes propriedades e ao conjunto de esquemas utilizados pelos sujeitos nessas situações" (VERGNAUD, 1991, p. 166).

Esta teoria visa oferecer aos professores um quadro teórico que lhes permita compreender o processo psicológico de construção do conhecimento, como seus alunos aprendem conceitos matemáticos considerados importantes para a aprendizagem na escola e, no caso específico desta pesquisa, o conceito de divisão.

A teoria dos campos conceituais possibilita o estudo das representações e das conceitualizações construídas pelos alunos durante um longo período de tempo. Não é específica da matemática, mas foi elaborada inicialmente a fim de explicar os processos de conceitualização das estruturas aditivas e multiplicativas, das relações número-espaço e da álgebra (VERGNAUD, 1991).

Para o autor, na educação é importante propor questões desafiadoras com a utilização de problemas significativos para os sujeitos, para que o conhecimento possa ser visto como um auxílio para solução de problemas reais. Ele considera como problema qualquer situação que pede uma resposta e comporta a necessidade de descobrir relações e explorá-las, de elaborar hipóteses e verificá-las.

A competência para a resolução de problemas, de acordo com o psicólogo, envolve:

a) a compreensão de uma situação que exige a resolução;
b) a identificação de dados;

c) a mobilização de outros conhecimentos;
d) a elaboração de estratégias ou procedimentos;
e) a organização da informação;
f) o teste de validade da resposta;
g) a formulação de outras situações-problema.

Vergnaud (1991) enfatiza que um conceito não se reduz à sua definição; só adquire sentido para a criança através das situações e dos problemas. Por isso, a aquisição do conhecimento por meio de problemas é necessária para que o aluno tenha domínio dos conceitos que vem construindo. Ele acrescenta que um conceito envolve muitas situações e, reciprocamente, estas envolvem vários conceitos. O desenvolvimento de conhecimentos na criança se constitui por meio de um conjunto relativamente vasto de situações, entre as quais existem relações de parentesco (analogias, contrastes, variações). Para analisá-las, recorre-se a muitos conceitos e vários simbolismos.

Para que um conceito possa ser compreendido em seu desenvolvimento, tanto do ponto de vista psicológico quanto didático, segundo o autor, faz-se necessário considerar que um conceito (C) é constituído por conjuntos, que não podem ser considerados separadamente:

(S) um conjunto de situações que dão sentido ao conceito: a referência;

(I) um conjunto de invariantes operatórios, ou conhecimentos em ação, que são conhecimentos implícitos que o sujeito pode mobilizar para construir esquemas e atribuir significado ao conceito: o significado;

(R) um conjunto dos recursos de que o sujeito dispõe para representar os esquemas construídos, ou seja, um conjunto das formas simbólicas ou linguísticas que permitem suas representações: o significante.

Esse três aspectos dos conceitos constituem um campo conceitual, como veremos mais adiante. Na perspectiva do teórico francês, estudar o desenvolvimento e o funcionamento de um conceito, no decorrer da aprendizagem ou quando da sua utilização, implica necessariamente considerar esses três planos ao mesmo tempo.

O processo de construção do conhecimento pelo sujeito se apóia fundamentalmente nos esquemas que ele possui. Vergnaud (1991, p. 156) retoma o conceito de esquema de Piaget, como "uma organização invariante da conduta para uma determinada classe de situações". Assim, um esquema pode ser uma ação concreta ou mesmo um conceito que o sujeito dispõe ao enfrentar situações iguais ou similares a outras já vividas. Os esquemas constituem os elementos básicos por meio dos quais o sujeito poderá atuar sobre a realidade.

Segundo Vergnaud (1991), um esquema é um plano de ação, uma estratégia que abrange uma classe de ações, numa determinada sequência, com a finalidade de realizar uma tarefa. Em suas formulações, ele coloca que os algoritmos são esquemas, mas nem todos os esquemas matemáticos são algoritmos. Isto quer dizer que os esquemas são frequentemente eficazes, mas nem sempre efetivos. Por exemplo, quando uma criança utiliza um esquema ineficaz para determinada situação, a experiência a conduz para a mudança ou a alteração do esquema.

É difícil, para não dizer quase impossível, as crianças explicitarem, por exemplo, todas as regras utilizadas no algoritmo da adição dos números inteiros, embora sejam capazes de executar a sequência das operações. Por isso, há muito de implícito nos esquemas (VERGNAUD, 1991).

Segundo o autor, a fiabilidade do esquema para o sujeito assenta, em última análise, no conhecimento explícito ou implícito que ele tem das relações entre o algoritmo e as características do problema a resolver. Quando, diante de uma situação, recorremos a um esquema, todas as nossas condutas comportam uma parte de automaticidade e uma parte de decisão consciente.

A operacionalidade de um conceito abrange uma variedade de situações que se manifesta sob diversas ações e esquemas. Isso é possível porque os esquemas são compostos por quatro tipos de elementos:

1. antecipações: os indivíduos podem antecipar o objetivo a ser alcançado, os efeitos a serem considerados e as etapas intermediárias eventuais;
2. regras de ação: possibilitam aos indivíduos gerarem uma sequência de ações, uma conduta;

3. invariantes operatórios: permitem ao sujeito selecionar a informação pertinente e tratá-las e determinam as diferenças entre um esquema e outro;
4. inferências: levam os indivíduos a reorganizarem as regras e antecipações a partir das informações e do sistema de invariantes operatórios de que dispõem;
5. os conhecimentos contidos nos esquemas são designados por conceitos-em-ato e teoremas-em-ação, também identificados pela expressão mais global de “invariantes operatórios” (VERGNAUD, 1991). Os conhecimentos contidos nos esquemas são designados por conceitos-em-ato e teoremas-em-ação, também identificados pela expressão mais global de “invariantes operatórios” (VERGNAUD, 1991). Compreendem as relações matemáticas que os alunos já possuem quando escolhem uma operação ou uma sequência de operações para resolver um problema.

Eles aparecem de modo intuitivo na ação do aluno, em contextos simples, não tendo um valor universal, mas permitem o conhecimento matemático no nível de esquemas e ação. Geralmente não são expressos verbalmente e podem não conduzir à solução correta. Por isso é importante que o professor faça com que a criança compreenda as relações matemáticas existentes quando utiliza suas próprias formas ou estratégias de solução aos problemas (CUNHA, 1997).

Vergnaud (1991) define os invariantes operatórios como os conhecimentos do sujeito que estão subjacentes às condutas e que são parte integrante de seus esquemas de ação, ocupando papel decisivo nos processos de aquisição de conhecimentos. Comenta que nos primeiros anos de vida, a criança adquire invariantes que lhe permitem organizar o mundo quanto a objetos, classe e relações. O reconhecimento de invariantes é, portanto, a chave da generalização do esquema.

Segundo este autor (1982; 1983), a psicogênese de certos campos conceituais da matemática pode ser mais bem compreendida se fizermos uma análise detalhada dos diferentes tipos de problemas que constituem cada campo conceitual e estudarmos, a seguir, as várias concepções e estratégias e diversos tipos de representação simbólica observados na solução de diferentes problemas.

O psicólogo francês propõe que os conteúdos referentes a cada conceito sejam estudados e descritos com base tanto nas situações e problemas com eles associados como nos procedimentos usados pelos indivíduos em tais situações. É por meio da consideração desses aspectos que se torna possível analisar a relação entre os conceitos, como conhecimentos explícitos, e os invariantes operatórios implícitos (ou conhecimentos em ação) que o sujeito pode mobilizar para resolver os problemas. Portanto, os teoremas-em-ação são importantes por ajudar os indivíduos a transformar os conhecimentos intuitivos em conhecimentos explícitos.

Talvez a mais importante implicação teórico-metodológica de uma proposta de formação de conceitos em matemática seja a compreensão do educador como mediador do processo de construção do conhecimento, criando situações pedagógicas para que o aluno exercite a capacidade de pensar e buscar soluções para os problemas (MIGUEL, 2005).

A aprendizagem significativa se caracteriza por meio da interação entre o conhecimento novo, que adquire significado, e o conhecimento prévio das crianças, que se transforma e passa a adquirir novo significado. Em geral, quando defrontados com uma nova situação, os alunos usam o conhecimento desenvolvido através de experiência em situações anteriores e tentam adaptá-lo a esta nova situação. Portanto, a aquisição do conhecimento se dá, em geral, por meio de situações e problemas com os quais eles têm alguma familiaridade, o que implica dizer que a origem do conhecimento tem características locais (CAMPOS et al, 2007).

Para Campos et al (2007), pode-se dizer que Vergnaud entende a construção do conceito como repetição constante dos atos de posicionar-se diante de uma nova situação, mobilizar conhecimentos pré-existentes para resolvê-la e utilizar-se dos recursos simbólicos para representar o resultado dessas operações de pensamento. Esse processo pode se prolongar no tempo e a cada repetição do ciclo o conceito ganha novos elementos e se torna mais sofisticado, caminhando em direção ao conhecimento científico formalizado.

A teoria dos campos conceituais tem como meta repensar as condições de aprendizagem conceitual, fornecendo um quadro para a compreensão do desenvolvimento e da aprendizagem de competências complexas, sobretudo nas áreas da matemática, das ciências e das técnicas. Nesse sentido, interessa ao ensino escolar, já que oferece subsídios para melhor analisar a relação dialética ali ocorrente entre ação, situação prática e verbalização teórica, sobretudo no que se refere à construção conceitual de crianças e adolescentes (VERGNAUD, 1996).

Moro (2004) também defende que a teoria dos campos conceituais interessa sobremaneira ao ensino escolar, por tratar de modo mais consistente das operações fundamentais da aritmética clássica. Ela permite analisar melhor a relação dialética entre as operações matemáticas.

A seguir será aprofundada a discussão acerca de conceitos e operações e da sua representação algorítmica.

2.2 Conceitos e operações

Pesquisas que refletem sobre o processo de ensino e aprendizagem da matemática, como, por exemplo, a de Brito (2001), demonstram que, muitas vezes, os conceitos matemáticos não são tratados como objetos de aprendizagem. A escola tradicional enfatiza a simples memorização dos signos e algoritmos matemáticos, sem ter uma conexão com a vida cotidiana nem com a formação do pensamento matemático.

Em geral, o ensino das operações matemáticas, mais especificamente da divisão, está baseado na comunicação de um procedimento de cálculo associado posteriormente a um pequeno universo de problemas que, supõe-se, "darão conta" do significado do conceito. Isso se dá porque os alunos não atribuem significado ao algoritmo que aplicam. Os algoritmos mostram uma relação superficial com o conhecimento, desembocando em ações puramente didáticas (centradas na situação escolar de aprendizagem), sem mobilização dos esquemas intelectuais próprios que, no entanto, têm à sua disposição (SAIZ, 1996).

A aprendizagem escolar da multiplicação e divisão está muito mais centrada sobre o ensino dos algoritmos do que sobre o desenvolvimento conceitual. Ao aprender os algoritmos, os alunos deixam de refletir sobre as relações entre diferentes aspectos das situações que envolvem e a divisão (NUNES et al, 2005).

Essa forma de ensinar matemática pouco ajuda o aluno a perceber o mundo real na perspectiva matemática. Correa e Spinillo (2004) concordam que esse modo de tratar o ensino de conceitos lógico-matemáticos apresenta algumas limitações, como a redução da matemática à execução de algoritmos, ignorando que esta fornece modelos para a representação e compreensão do mundo; ignora as diferenças entre operação e algoritmo, uma vez que a operação se refere às transformações realizadas sobre os números, quantidades, grandezas e medidas, enquanto que o algoritmo se refere ao conjunto de procedimentos que conduz à execução de uma operação; o desconhecimento, do ponto de vista psicológico, que o processo de aquisição de conceitos matemáticos envolve invariantes operatórios, sistemas de representação e situações que conferem significados aos conceitos.

> Numa perspectiva de formação de conceitos, a noção de operação deve ser tratada sob uma ótica dinâmica, mediada pela ação do sujeito, de forma a contemplar os princípios que regem o seu desenvolvimento cognitivo. Nesse pressuposto, a gênese, integração e diferenciação entre significado (número e operações) e significante (símbolos e notação dos elementos operantes) têm reflexos decisivos na vida escolar das crianças. Trata-se de fato verificável quando em etapas mais avançadas do conhecimento matemático apresentam graves deficiências e dificuldades de aprendizagem, decorrentes da idéia imprecisa do que seja "operação", defasagem esta rotulada, costumeiramente, pela maioria do professores, como falta de pré-requisitos. (MIGUEL, 2005, p. 384).

Dessa forma, a solução correta de um problema ou operação nem sempre é sinônimo de uma compreensão mais sofisticada do conceito, pois a criança pode aplicar corretamente o algoritmo para a solução de um problema e ter um nível de compreensão bastante elementar, ou de maneira oposta, cometer erros ao aplicar algoritmo e ter um conhecimento mais elaborado do que a criança que resolve corretamente (CORREA; SPINILO, 2004). Para as autoras, é uma tarefa complexa a reflexão e a interpretação dos tipos de resolução adotados por crianças, mas essencial tanto para pesquisadores como para educadores que se propõem a compreender o raciocínio da criança e a implementar formas de desenvolvê-lo.

Sobre essa questão, Nunes et al (2005, p. 172) lembram:

> Muitos investigadores já demonstraram que os alunos podem aprender os algoritmos escritos na escola sem compreender sua lógica. [...] Elizabete Miranda e Zélia Higino, pesquisadoras da UFPE, tiveram a oportunidade de corroborar essas observações em diversos estudos: a independência entre a aprendizagem dos algoritmos e a compreensão de princípios lógicos está, portanto, claramente demonstrada. Isso não significa que essa separação seja desejável. Ao contrário, exatamente porque sabemos que a conexão entre essas duas habilidades pode não se desenvolver espontaneamente, um dos objetivos da educação deve ser a promoção da conexão entre a lógica das operações aritméticas e a habilidade de cálculo.

Esses autores também alertam que não podemos restringir o ensino da matemática nas séries iniciais ao trabalho com números pequenos, com o pretexto de que é preciso garantir que os alunos se tornem capazes de calcular usando números pequenos. Segundo eles, “muitos pesquisadores sugerem que o raciocínio matemático não pode ser considerado como idêntico à habilidade de calcular. Piaget foi o primeiro a sugerir que saber somar e compreender a lógica da adição são duas capacidades distintas” (NUNES et al, 2005, p. 170). Salientam que os resultados de várias investigações mostram que não basta aprender a resolver continhas de somar para compreender a lógica da adição e isso se aplica também à divisão e a qualquer outra operação aritmética.

O estudo acerca do conceito de divisão se faz necessário, pois de acordo com a psicologia cognitiva, os conceitos matemáticos não são tratados como objetos de aprendizagem e cada grupo ou indivíduo tem representações que podem diferir em sua conceitualização.

Assim, torna-se fundamental o aprofundamento da discussão sobre o campo conceitual das estruturas multiplicativas, no qual se encontra inserido o objeto de estudo desta pesquisa: a divisão.

2.3 Campo conceitual das estruturas multiplicativas

Como explicado acima, Vergnaud (1996) propõe que os conceitos matemáticos estão inseridos em campos conceituais, que são definidos como um conjunto de situações que envolvem uma variedade de conceitos e cujo domínio requer a utilização, pelos sujeitos, de um conjunto de procedimentos e representações simbólicas, conectados entre si.

Para Vergnaud (1991), existem dois grandes campos conceituais da aritmética: o campo conceitual das estruturas aditivas e o campo conceitual das estruturas multiplicativas.

O campo das estruturas aditivas é o conjunto de situações que exigem uma adição, uma subtração ou uma combinação dessas duas operações. Envolve o raciocínio aditivo, o qual se refere "às situações que podem ser analisadas a partir de um axioma base: o todo é igual à soma das partes" (NUNES et al, 2005, p. 84).

Já o campo da estruturas multiplicativas é o conjunto de situações que exigem uma multiplicação, uma divisão ou uma combinação dessas duas operações. Também fazem parte desse campo conceitual outros conceitos, como fração, proporção, porcentagem, número racional, análise de dimensão, espaços vetoriais, razão, funções lineares e não lineares, e a presença de números inteiros ou decimais, de grandezas discretas ou contínuas.

Vergnaud (1991) destaca três categorias de problemas próprios das estruturas multiplicativas: produto de medidas, proporção múltipla e isomorfismo de medidas. Para o autor, essas diferentes categorias devem ser trabalhadas cuidadosamente, a fim de auxiliar as crianças a reconhecerem as estruturas dos problemas e utilizarem os procedimentos adequados para a solução de cada um deles.

Os problemas do tipo isomorfismo de medidas, abordados neste estudo, de acordo com Vergnaud (1991), apresentam os dados dos problemas em uma relação quaternária, entre quatro quantidades: duas quantidades são medidas de certo tipo, as outras são medidas de outro tipo. O esquema para resolver esse tipo de problema envolve três níveis de dificuldades: multiplicação, regra de três e divisão. No entanto, esses problemas podem ser representados por esquemas análogos, nos quais uma quantidade é procurada.

Vejamos dois exemplos de problemas multiplicativos do tipo isomorfismo de medidas, apresentados por Vergnaud (1991, p. 198):

1) Paguei R$ 12,00 por 3 garrafas de vinho. Qual é o preço de uma garrafa?

garrafas		reais
1	⟶	X
3	⟶	12

2) Pedro tem R$ 12,00 e quer comprar alguns pacotes de caramelo que custam R$ 4,00 cada pacote. Quantos pacotes ele pode comprar?

pacotes		reais
1	⟶	4
X	⟶	12

Para o autor, o resultado desses dois problemas pode ser encontrado através de uma tabela de correspondência entre dois tipos de quantidades que traduz o isomorfismo dos tipos de medidas (garrafas/reais ou pacotes/reais), como vemos na figura abaixo (VERGNAUD, 1991, p. 198):

pacotes/garrafas		reais
1	⟶	**4**
2	⟶	8
3	⟶	**12**
4	⟶	16
5	⟶	20

Embora esses dois problemas possam ser resolvidos e as respostas possam ser encontradas através do isomorfismo entre duas medidas, conforme a tabela acima, Vergnaud (1991) afirma que há diferenças entre eles. No primeiro problema, é preciso buscar o valor unitário, o quociente e a relação entre grandezas diferentes. Já no segundo exemplo, o valor unitário é dado, sendo então preciso buscar o número de unidades do primeiro tipo (pacotes) que corresponde a uma grandeza dada pelo segundo tipo (reais).

Segundo Vergnaud (1991), o primeiro problema é denominado de divisão por partição. Nesse tipo de problema, é dada uma quantidade inicial e o número de vezes (número de partes) em que esta quantidade deve ser distribuída, devendo-se encontrar o tamanho de cada parte (número de elementos). A resolução implica considerar que o quociente a ser obtido (4) se refere ao tamanho das partes, que o dividendo (12) é representado pelo todo (valor/quantidade a ser dividida) e que o divisor (3) se refere ao número de partes em que o todo é dividido.

O segundo problema é denominado por Vergnaud (1991) de divisão por quotição. Nele é dada uma quantidade inicial que deve ser dividida em quotas pré-estabelecidas. Para sua resolução, deve-se considerar que o quociente a ser obtido (3) se refere ao número de partes em que o todo foi dividido, que o dividendo (12) é representado pelo todo e o divisor (4) se refere ao tamanho das partes (quotas previamente estabelecidas).

Esses problemas revelam que a mudança de incógnita a ser encontrada altera a natureza da operação a ser aplicada. Em problemas de divisão por partição, a criança deve encontrar o tamanho das partes; já em problemas de divisão por quotição, deve encontrar o número de partes em que o todo foi dividido.

Ao considerar, com base no mesmo referencial teórico, que, embora esses dois problemas envolvam a divisão e diferentes graus de dificuldade, eles requerem uma forma de raciocínio diferente que está imbricada na situação, reforçando a ideia de que existem diferentes situações que envolvem um mesmo conceito.

Vergnaud (1991) faz referência a diversas dificuldades das crianças na compreensão da divisão envolvendo elementos discretos e/ou números inteiros, no contexto das estruturas multiplicativas, entre as quais, a necessidade de se efetuarem cálculos relacionais diferentes: procurar e obter a extensão da parte (valor unitário da mesma medida) conforme o valor escalar indicado, no caso da divisão por partição; ou procurar e obter o número de partes (a quota) conforme sua extensão indicada, no caso da divisão por quota.

Esse aspecto é contemplado na presente pesquisa que, partindo de problemas de divisão por partição e divisão por quotição, propõe-se a caracterizar as estratégias de resolução escritas pelas crianças e pelos adolescentes.

Veremos a seguir estudos de outros autores relacionados ao conceito de divisão, bem como a sua complexidade e as dificuldades das crianças e adolescentes na construção desse conceito.

2.4 A operação de divisão

Segundo Eves (2002), a civilização egípcia, ao longo de sua fascinante trajetória, apresentou uma vasta coleção de documentos matemáticos, como, por exemplo, os papiros de Rhind e de Moscou, considerados os trabalhos mais importantes da matemática egípcia por apresentarem o maior número de problemas, os quais surgiram como auxílio em atividades práticas de agricultura e engenharia.

O papiro de Rhind (ou Ahmes) é uma fonte primária rica sobre a matemática egípcia antiga. Trata-se de um texto matemático na forma de manual prático que contém 85 problemas copiados em escrita hierática pelo escriba Ahmes de um trabalho mais antigo. Descreve os métodos de multiplicação e divisão dos egípcios, assim como o uso que faziam das frações unitárias.

Boyer (1996) comenta que a operação de divisão no Egito era efetuada por sucessivas duplações (duplicações dos números). Esse método, portanto, requer principalmente habilidade para somar e para subtrair.

Para dividir 184 por 8, por exemplo, escrevem-se os números lado a lado. Por baixo do dividendo se escreve 1 e, por baixo do divisor, o próprio número. Em seguida, duplica-se cada número novo e coloca-se por baixo. A operação de duplicar o número é repetida até que na segunda coluna (a do divisor) dê um valor que, ao ser duplicado, ultrapasse o dividendo. Depois se verificam quais os números da coluna do divisor que, somados, dão o dividendo ou ficam o mais próximo possível dele. Assim:

184	8
1	8
2	16
4	32
8	64
16	128

Verificam-se quais os números que correspondem aos que foram somados na segunda coluna e somam-se os números da primeira coluna. O resultado da soma é a divisão pretendida: 1 + 2 + 4 + 16 = 23.

O processo egípcio de multiplicação e divisão não só elimina a necessidade de aprender uma tábua (ou tabuleta) de multiplicação, como também se amolda ao ábaco, o que perdurou enquanto esse instrumento esteve em uso (EVES, 2002).

Já a cultura matemática mesopotâmica se caracteriza pelo desenvolvimento do cálculo aritmético, que atingiu o mais alto grau de evolução na Antiguidade. De acordo com Eves (2002), muitos processos aritméticos eram efetuados com a ajuda de várias tábuas, que foram encontradas em 1864 nas proximidades do rio Eufrates.

Além dos cálculos com as tábuas, os mesopotâmicos também manejavam muito bem o ábaco.

As operações aritméticas fundamentais eram tratadas pelos babilônios de modo não muito diferente do usado hoje, e com facilidade comparável (BOYER, 1996). A divisão não era efetuada pelo incômodo processo de duplicação dos egípcios, mas por uma fácil multiplicação do dividendo pelo inverso do divisor. Todas as divisões eram tratadas como um tipo de multiplicação por tentativas.

Um problema de divisão do tipo a: b, por exemplo, era visto como se ele fosse um problema multiplicativo do tipo a x 1/b. A base da numeração babilônia era sexagesimal (60).

Já os hindus foram hábeis aritméticos e deram contribuições significativas à álgebra. Muitos dos problemas aritméticos eram resolvidos por falsa posição. Outro método de resolução preferido era o de inversão, no qual se trabalha para trás, a partir dos dados. O método Galé (antiga embarcação de guerra, comprida e com grandes remos), um modo de divisão usado antes de 1600, é de origem hindu (EVES, 2002).

O desenvolvimento de algoritmos para as nossas operações aritméticas elementares começou na Índia, talvez por volta do século X ou XI. Esses algoritmos foram adotados pelos árabes e mais tarde transportados para a Europa Ocidental, onde se modificaram até chegar à sua forma atual. Esse trabalho recebeu atenção considerável dos autores de aritméticas do século XV (EVES, 2002). No século XV apareceu um método chamado “danda”, um dos precursores do nosso atual método de divisão longa.

Segundo Tancredi (1989), as pesquisas que têm como tema o conceito de divisão indicam que a operação de divisão tem sido um dos grandes obstáculos que os alunos enfrentam na escola. Para a autora, os motivos de tais dificuldades vão desde as características do próprio algoritmo até o nível de conhecimento que os professores têm sobre o assunto e de como ensiná-lo.

Diversos autores, como Nunes e Bryant (1997), Vergnaud (1991), Lautert e Spinillo (1999), reconhecem a complexidade que envolve o conceito de divisão, enfatizando que ele envolve regras operatórias complexas (utilização de divisões sucessivas, multiplicação, subtração, busca de um quociente que pode envolver um resto e resultar em números fracionários). Também requer o estabelecimento de relações bastante complexas entre as partes que o compõem (dividendo, divisor, quociente e resto), implicando considerar o tamanho do todo, o número de partes, o tamanho das partes que deve ser o mesmo, a relação direta entre o total de elementos e o tamanho das partes, a relação inversa entre o tamanho das partes e o número de partes.

Compreender a divisão requer uma mudança qualitativa na maneira de pensar da criança, que deve aprender e entender um novo tipo de raciocínio: o raciocínio multiplicativo, no qual o invariante conceitual é a existência de uma relação fixa entre duas variáveis, diferentemente do raciocínio aditivo, cujo invariante conceitual é a relação parte-todo (NUNES et al, 2005).

> [...] parece bastante fácil defender que a multiplicação e a divisão não são simplesmente duas operações aritméticas novas que as crianças aprendem após a adição e a subtração. Há uma série de sentidos de número novos a serem aprendidos e novas situações a serem entendidas (NUNES; BRYANT, 1997, p. 188).

Para os autores, a origem da compreensão das operações aritméticas se encontra nos esquemas de ação das crianças. A adição e subtração, por exemplo, aparecem ligadas aos seguintes esquemas de ação: juntar e colocar em correspondência um-a-um. Já a multiplicação e a divisão têm origem nos esquemas de ação da distribuição equitativa e da correspondência um-a-muitos.

No caso específico da divisão, Lautert e Spinillo (2002) afirmam que o esquema de ação da distribuição permite que as crianças que ainda não foram formalmente ensinadas consigam resolver, de modo prático, problemas escolares ou do cotidiano.

Como foi colocado anteriormente, Vergnaud (1991) apresenta dois tipos de problemas de divisão: por partição e por quotição. Eles diferem, de acordo com Selva (1997), na compreensão das quantidades envolvidas. Enquanto nos problemas de partição se tem um conjunto para ser distribuído em partes, nos problemas de quotição se trabalha com um conjunto que deve ser dividido em quotas preestabelecidas.

A autora ressalta que esses problemas, embora diferentes do ponto de vista das quantidades, podem ser solucionados através do mesmo algoritmo, aplicado aos mesmos números. Contudo, na escola não é considerada essa diferença e tais problemas são tratados como iguais, valorizando-se na aprendizagem do aluno apenas as relações numéricas envolvidas.

Lautert (2005) considera, do ponto de vista matemático, que dois problemas de divisão podem ter a mesma solução formal (a utilização de um mesmo algoritmo), por exemplo, 24: 4. Mas numa perspectiva psicológica e educacional, segundo Vergnaud (1991), eles podem ser diferentes, apresentar situações distintas, como nos exemplos a seguir:

- Carlos comprou 24 apitos e quer colocá-los em 4 caixas. Ele quer que cada caixa tenha a mesma quantidade de apitos. Quantos apitos ficarão em cada caixa? (Problema de divisão por partição).
- Carlos comprou 24 figurinhas. Ele quer dar 4 figurinhas para cada um dos seus amigos. Quantos amigos vão ganhar figurinhas? (Problema de divisão por quotição).

Segundo Nunes et al (2005), nesses dois problemas, as crianças utilizam esquemas de ação (estratégias) diferentes, como o esquema da distribuição equitativa no primeiro e a correspondência um-a-muitos no segundo.

No primeiro problema (divisão por partição) há duas variáveis: número de caixas e de apitos, em uma relação constante. Assim, ele não pode ser resolvido por correspondência porque a relação fixa não é conhecida. A pergunta, nesse problema, é exatamente qual a relação que devemos fixar para que o número de apitos por caixa seja constante, ou seja, para que cada caixa tenha exatamente o mesmo número de apitos que as outras. O esquema de ação (estratégia) que as crianças utilizam para resolver esse problema é o de distribuir.

No segundo problema (divisão por quotição, classificado pelos autores como problema inverso), há duas variáveis: número de amigos e de figurinhas, em uma relação constante. Aqui, um dos fatores está ausente e a pergunta é feita sobre o valor desse fator. Na resolução pode então ser usado o esquema de ação (estratégia) de correspondência um-a-muitos, porque a relação fixa é conhecida: 4 figurinhas por amigo. Esse tipo de problema é um pouco mais difícil, pois a criança precisa tirar a conclusão de que o número de grupos é igual ao número de amigos.

A expressão verbal “24 dividido por 4” pode ser representada graficamente por diferentes formas matemáticas (notações) convencionais ou não convencionais (pictográfica ou icônica), ou ainda através de materiais concretos, como fichas ou objetos idênticos aos presentes no enunciado do problema (LAUTERT, 2005).

Além disso, como destacam Nunes e Bryant (1997), as crianças, ao tentarem resolver esses problemas (partição ou quotição), aplicam a essas situações os invariantes operatórios do conceito de divisão presentes nas suas ações:

- O todo deve ser distribuído em quantidades iguais (divisão equitativa das partes).
- O todo deve ser distribuído igualmente entre todas as partes até que não exista a possibilidade de uma nova rodada de distribuição.
- O todo inicial é constituído pelo número de partes multiplicado pelo tamanho das partes mais resto.
- Quanto maior (ou menor) o número de partes, menor (ou maior) o tamanho de cada parte (relação inversa entre o tamanho das partes e o número de partes).
- O resto nunca pode ser maior e nem igual ao número de partes ou tamanho das partes.

Para a compreensão do conceito de divisão, é necessário, portanto, que os sujeitos se apropriem de vários invariantes operatórios envolvidos na divisão durante o processo de construção desse conhecimento.

Ao trabalhar com a divisão é essencial compreendermos qual o seu significado e levarmos em conta o que está sendo dividido para podermos interpretar o resultado da divisão. Segundo Teles (2007), em matemática, dividir um número por outro significa dividir em partes iguais, de forma que sobre o menor resto possível (convenção). É a chamada divisão euclidiana.

As divisões efetuadas no campo dos números naturais são de dois tipos: divisões que deixam resto (resto não-nulo) e divisões exatas (ou que têm resto zero).

Segundo Centurión (2002), há duas ideias ligadas à divisão:

- A ideia de repartir igualmente determinada quantidade por um determinado número, ou seja, temos uma quantia dada conhecida e queremos reparti-la num certo número de grupos (partição). Por exemplo: quero repartir 30 cadernos entre 6 alunos.
- A ideia de medir, verificar quantos grupos se consegue formar com determinada quantidade, ou seja, queremos saber quantas vezes uma quantidade cabe em outra. Por exemplo: com 80 lápis, quantas caixas de uma dezena cada poderei formar?

A maioria dos números que usamos em nossa vida cotidiana e na sala de aula se refere a uma quantidade. Quando falamos “dois botões”, “dois metros”, por exemplo, estamos nos referindo a quantidades extensivas (NUNES et al, 2005).

Quando comparamos diferentes quantidades entre si, vemos que existem diferentes tipos. Uma das formas de classificá-las está baseada na diferença entre quantidades contínuas e discretas. No caso dos botões, a unidade referida quando dizemos “dois botões” é uma unidade natural: um botão também é um objeto. Essas quantidades são chamadas de quantidades discretas (ou descontínuas).

No caso de metros, as unidades são convencionais: toma-se um padrão e compara-se esse padrão, por exemplo, ao comprimento de uma mesa, vendo-se que o comprimento da mesa equivale a duas vezes o comprimento da unidade convencional, o metro. Não temos dois objetos, como no caso dos botões, ou seja, os metros não estão separados no comprimento da mesa.

Piaget e Szeminska (1971) salienta que a lógica subjacente às quantidades contínuas e discretas é muito semelhante. Para ele, a dificuldade das quantidades contínuas, quando comparadas às discretas, reside em dois aspectos: (1) as unidades não são naturais e, portanto não são percebidas: a criança precisa imaginar que um comprimento pode ser analisado em partes para que estas sejam contadas. Além disso, a criança precisa compreender que as partes devem ser iguais. Se as unidades não forem iguais, o significado do número se torna ambíguo;

(2) as unidades são convencionais, portanto precisa haver um acordo sobre qual será o tamanho da unidade realizada.

Apesar das diferenças entre quantidades contínuas e discretas, elas estão baseadas na mesma estrutura lógica, ou seja, a relação parte-todo: a soma das unidades é igual ao valor do todo. Por exemplo: “dois metros” expressam a comparação de uma unidade de comprimento, o metro, com outro comprimento, o comprimento da mesa. Quando a medida de uma quantidade se baseia na comparação de duas quantidades da mesma natureza e na lógica parte-todo, ou seja, no raciocínio aditivo, dizemos que a medida se refere a uma quantidade extensiva.

A respeito dessa questão, importa lembrar que, quando existem duas possibilidades de representar o conceito matemático, o professor precisa perguntar-se, de imediato, qual das duas formas de representação é mais acessível aos alunos nas diferentes idades para saber como tratar o conceito em sala de aula (NUNES et al, 2005).

Para se entender o processo de divisão, é de suma importância que o aluno conheça as propriedades da divisão:

- Elemento Neutro: no conjunto dos números naturais existe um elemento neutro para a multiplicação que é o número um. Qualquer que seja o número natural N, tem-se que:
  - em N não tem a propriedade comutativa;
  - em N não tem a propriedade associativa.
- Para resto igual a zero, a propriedade distributiva da divisão exata é válida somente para direita, $D: d = q > d. q = D$, onde D é igual ao dividendo, d é o divisor, q é o quociente e o resto é subtendido ser “igual a zero”;
- Para resto diferente de zero implica $D = d. q + r$, onde D é o dividendo, d o divisor, q o quociente e r o resto.

Importa salientar que a representação da divisão não pode reduzir-se ao conhecimento de uma estratégia de solução acompanhada de um suposto “sentido” ou significado da operação que permita aplicá-la, porém, implica a capacidade de controlar várias estratégias, passando de uma a outra, segundo as estratégias (SAIZ, 1996).

Nesse sentido, Gravemeijer (*apud* NUNES e BRYANT, 1997) enfatiza a importância de trabalhar com representações para os dados dos problemas que ajudem os alunos a considerar o significado das operações, pois a divisão e a multiplicação envolvem sempre duas variáveis, como vimos anteriormente.

2.5 Outras pesquisas sobre divisão

Na literatura, as pesquisas referentes ao campo conceitual multiplicativo, mais especificamente quanto ao conceito de divisão, centram-se, quase sempre, na perspectiva do aluno (aprendizagem). Mas além de Vergnaud, renomados pesquisadores apontam na direção de uma ampliação do campo conceitual multiplicativo — como é o caso de Nunes e Bryant (1997), considerados referência na área — e avançam na pesquisa do entendimento do raciocínio multiplicativo.

Cunha (1997) elaborou e aplicou uma sequência de atividades com alunos de 5ª e 7ª séries da rede particular de ensino, com a finalidade de investigar as percepções sobre multiplicação e divisão, na busca de uma expansão do campo conceitual multiplicativo do grupo pesquisado. Dentre os principais resultados, a autora destaca que os alunos apresentam dificuldades em entender o surgimento dos números racionais e que as concepções “multiplicação sempre aumenta” e “divisão sempre diminui” estão muito interiorizadas pelos alunos. Ela considera que provavelmente uma mudança de concepções ocorreria se, desde o início da vida escolar, a multiplicação e a divisão fossem introduzidas e trabalhadas por meio de diversas abordagens, não somente como adições repetidas e como subtrações sucessivas.

Pesquisas em Psicologia Cognitiva e em Educação Matemática, como é o caso da pesquisa de Lautert (2005), apontam as dificuldades que as crianças experimentam em relação ao conceito de divisão; dentre elas, a dificuldade em compreender as relações inversas entre os termos da divisão quando o dividendo é mantido constante e a dificuldade em lidar com o resto.

A pesquisadora investigou o efeito de uma intervenção específica sobre o conceito de divisão, voltada para a superação de tais dificuldades. Participaram inicialmente da investigação 206 crianças de baixa renda, com idades entre 8 e 15 anos, alunos de 3ª série do ensino fundamental de escolas públicas do Recife. Todas as crianças foram submetidas a um pré-teste geral que consistia na resolução de doze problemas de divisão. Cem crianças foram selecionadas e distribuídas igualmente em dois grupos: um grupo de controle e um grupo experimental — este recebeu, individualmente, uma intervenção específica que requeria: a) compreender as relações inversas entre o número de partes e o tamanho das partes quando o dividendo é mantido constante; b) compreender o efeito do aumento do valor do resto sobre os demais termos; c) analisar procedimentos de resolução corretos e incorretos apresentados sob forma pictográfica.

O papel do examinador consistia em fornecer *feedback* e explicações durante todo o processo de resolução adotado pela criança, ressaltando os princípios invariantes da divisão que estavam presentes na resolução dos problemas. Os resultados obtidos mostraram que no pré-teste (geral e específico), os dois grupos não diferiam entre si, apresentando o mesmo nível de dificuldade. Observou-se que após a intervenção, as crianças do grupo experimental apresentavam um resultado mais favorável no pós-teste do que no pré-teste (geral e específico). Elas tanto apresentavam um desempenho melhor como eram capazes de oferecer justificativas mais elaboradas que expressavam uma compreensão dos invariantes da divisão. O mesmo progresso não foi observado em relação às crianças do grupo de controle. A autora conclui que a intervenção auxiliou as crianças a superar as dificuldades com a divisão, sendo capazes de identificar e analisar os princípios invariantes necessários para a compreensão dessa operação matemática, bem como desenvolver habilidades metagognitivas cruciais para a aprendizagem de conteúdos específicos, no caso, conceitos matemáticos.

Outra pesquisa, realizada por Borba e Selva (2006), teve a participação de professores do 2º ciclo do ensino fundamental de uma escola pública de Recife e buscou verificar o desenvolvimento conceitual dos alunos, com ênfase em problemas de divisão com resto diferente de zero. O estudo teve como objetivo analisar um processo de formação continuada, no qual se discutiu a compreensão de conceitos, com base na teoria proposta por Vergnaud, e o conhecimento dos alunos quanto à divisão com resto.

As autoras evidenciam que o professor deve atentar para as diversas formas de representação simbólicas do conhecimento matemático, pois elas não devem ser apresentadas aos alunos de forma pronta e acabada, nem de uma única maneira. Ressaltam que convém ao professor estar preparado para observar que um tipo de erro feito pelos alunos poderá ter uma lógica que deve ser considerada no processo de solução. Cabe a ele desmistificar, paulatinamente, a forma como o conhecimento matemático foi concebido no passado, em específico, a divisão, uma vez que esta deve se dar de forma prazerosa e significativa.

3 ENCAMINHAMENTOS METODOLÓGICOS

Este estudo se propõe a caracterizar as soluções escritas, produzidas por adolescentes que cursam a 5ª série para a solução de problemas de divisão envolvendo partição e quotição.

A principal preocupação é compreender os processos de solução adotados pelos adolescentes, por isso se busca gerar dados qualitativos que permitam descrever e analisar esses processos. Assim, optou-se pelo encaminhamento metodológico a seguir.

3.1 Sujeitos

Participaram desta pesquisa 41 alunos da 5ª série do ensino fundamental de uma escola pública estadual, localizada no centro da cidade de Camboriú, SC. A escola foi escolhida por conveniência, pois é o local onde a pesquisadora atua como professora do segundo segmento do ensino fundamental, o que permitiu um fácil acesso ao campo de estudo. Os sujeitos não eram alunos da pesquisadora, que se encontrava de licença na época em que os dados foram coletados.

Os sujeitos, crianças e adolescentes com idade entre 10 e 13 anos, que estudam numa das quatro turmas de 5ª série da escola, no turno vespertino, concordaram em participar do estudo e foram previamente autorizadas por seus pais ou responsáveis.

Alguns dados do histórico escolar desses sujeitos foram levantados: todos os alunos provinham de duas escolas municipais, uma do centro e outra do interior da cidade; a maioria (26) era do sexo masculino e 15 do sexo feminino; do total, 13 tinham a idade de 10 anos, 19 a idade de 11 anos, cinco tinham a idade de 12 anos e 4 tinham 13 anos, sendo que estes últimos eram todos repetentes, ou seja, estavam cursando a 5ª série pela segunda vez na mesma escola.

Todos os sujeitos da turma participaram do estudo e foram identificados por números de 1 (um) a 41 (quarenta e um).

3.2 Instrumento de coleta de dados

Foi apresentado aos 41 alunos um instrumento sob a forma de exercício escrito, contendo quatro problemas de divisão. Todos os problemas trabalhados foram selecionados de acordo com a classificação dos problemas de estrutura multiplicativa, do tipo isomorfismo de medidas, apresentada por Vergnaud (1991).

Esses problemas foram elaborados levando-se em consideração determinadas condições, conforme observado na figura seguinte:

Figura 1: Problemas de divisão

Como mostra esse esquema, os problemas foram organizados, levando-se em consideração duas grandes categorias: divisão por partição e divisão por quotição. Dentro de cada uma dessas categorias foi considerada a solução de problemas com resto e sem resto. Todos os problemas envolviam grandezas de natureza discreta.

Aos alunos foram apresentados dois problemas de divisão por partição (um sem resto e outro com resto) e dois de divisão por quotição, distribuídos da mesma forma (um sem resto e outro com resto), apresentados a seguir.

Problema 1: Carlos comprou 24 apitos e quer colocá-los em 4 caixas. Ele quer que cada caixa tenha a mesma quantidade de apitos. Quantos apitos ficarão em cada caixa?

Esse problema é de partição, sem resto, que envolve grandezas discretas (apitos e caixas). Apresenta dois dígitos no dividendo e um dígito no divisor. Nele são consideradas duas variáveis (apitos e caixas) e pretende-se conhecer qual a relação fixa entre essas duas variáveis (quantidade de apitos por caixa).

Trata-se de um problema direto de divisão, já que a situação em que se pretende descobrir a relação entre duas variáveis, expressa linguisticamente por "em cada", "para cada" ou "de cada", é familiar à criança e geralmente resolvida pela aplicação do esquema de distribuição equitativa, ou seja, dividindo-se igualmente a quantidade inicial (24 apitos) pelo número de caixas (4 caixas). O resultado (o quociente) relaciona as grandezas apitos e caixas.

Problema 2: João comprou 15 figurinhas de jogadores de futebol. Ele quer dar 5 figurinhas para cada um dos seus amigos. Quantos amigos vão ganhar figurinhas?

Esse problema é de quotas, sem resto, que envolve grandezas discretas (figurinhas e amigos). Apresenta dois dígitos no dividendo e um dígito no divisor. É dada uma quantidade inicial (15 figurinhas) que deve ser dividida em quotas pré-estabelecidas (números de elementos de cada quota: 5 figurinhas), devendo-se encontrar o número de quotas (número das partes: 3 amigos). O resultado (quociente) relaciona as grandezas amigos e figurinhas.

Problema 3: Rodrigo foi a uma papelaria e comprou 28 lápis de cor e quer colocá-los em 5 estojos. Ele quer que cada estojo tenha a mesma quantidade de lápis de cor. Quantos lápis de cor ele irá colocar em cada estojo?

Esse problema é de partição, envolve quantidades de natureza discreta, com resto, e também apresenta dois dígitos no dividendo e um dígito no divisor. É dada uma quantidade inicial (28 lápis) e o número de vezes (número de partes) em que esta quantidade deve ser distribuída (5 estojos), devendo-se encontrar o tamanho de cada parte (número de elementos: 5 lápis) e com resto de 3 lápis.

Ao trabalharmos com divisão, é necessário levar em conta o que está sendo dividido (a grandeza) para podermos interpretar o resultado. Nesse problema, 28 e 5 representam grandezas de naturezas distintas e discretas (a unidade dos lápis e dos estojos é, necessariamente, lápis e estojos).

Nessa divisão (não-exata, denominada divisão euclidiana) de uma quantidade discreta, não há sentido em subdividir o resto lápis. O resultado desse problema (o quociente) relaciona lápis e estojos.

Problema 4: Mariana comprou 27 lápis de cor. Ela quer guardar 6 lápis em cada estojo. De quantos estojos ela vai precisar?

Esse problema é de quotas, envolve quantidades de natureza discreta, com resto, e apresenta dois dígitos no dividendo e um dígito no divisor. A quantidade inicial (27 lápis) deve ser dividida em quotas pré-estabelecidas (números de elementos de cada quota: 6 lápis), devendo-se encontrar o número de quotas (número das partes: 4 estojos) e o resto.

Os dados 27 e 6 representam grandezas de mesma natureza e discretas (a unidade dos lápis é, necessariamente, lápis). A grandeza estojo também é de natureza discreta (a unidade de estojo é, necessariamente, estojo) e com resto 3 lápis. Assim como no problema anterior, não há sentido em subdividir o resto lápis. O resultado relaciona as grandezas lápis e estojos.

3.3 Procedimentos de coleta e de registro dos dados

Para a coleta de dados foram utilizadas duas aulas seguidas, acompanhadas pelo professor de matemática regente. A coleta foi realizada pela própria pesquisadora.

Para a aplicação do instrumento foi dada uma explicação inicial da atividade a ser desenvolvida (a resolução de problemas) e informado que o registro seria feito da maneira que os participantes preferissem. Foi comunicado que não haveria qualquer tipo de explicação durante a realização do exercício.

Os quatro problemas foram apresentados aos participantes, digitados em folha de papel sulfite (A4). Abaixo de cada problema foi deixado um espaço em branco, no qual os participantes deveriam registrar a solução, utilizando para isso lápis e borracha. Todos os problemas foram lidos antes pela pesquisadora.

Após a aplicação do instrumento e recolhidas as folhas com os registros dos participantes, a pesquisadora resolveu os problemas no quadro para que todos pudessem verificar as soluções.

4 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS

A análise das respostas dadas pelos sujeitos buscou responder às seguintes questões de pesquisa:

1. Quais as operações que os adolescentes consideram adequadas para chegar à solução de problemas de divisão, quando estes envolvem a partição e a quotição?
2. Os registros que eles produzem representam adequadamente a operação escolhida?
3. No tratamento dado aos registros que produziram, quais os indicadores da existência de dificuldades desses adolescentes em compreenderem a relação entre esse tratamento e as ações que conduziriam à solução do problema?

Para responder à primeira questão, procurou-se fazer um levantamento das operações registradas nas respostas dos sujeitos. Já a busca de resposta para a segunda e a terceira questões envolveu análise dos erros cometidos no registro das operações, tanto nos convencionais (algoritmos) como nos não convencionais (desenhos e outros).

4.1 Levantamento das operações utilizadas

Observou-se que os participantes resolveram os problemas de várias maneiras e utilizando diversas operações, não se restringindo à utilização da operação da divisão, com o respectivo algoritmo, como seria de se esperar, tendo em conta o seu nível de escolaridade. Chamarei de estratégias as diversas formas de resolução adotadas pelos participantes. Foram encontradas as seguintes estratégias (reunidas na Tabela 1):

1. Utilização do algoritmo da divisão.
2. Utilização do algoritmo da multiplicação.

3. Utilização do algoritmo da adição.
4. Utilização do algoritmo da subtração.
5. Utilização de desenhos e outras formas não convencionais, ou seja, formas diferentes das que geralmente são ensinadas na escola.

Tabela 1: Estratégias utilizadas por tipo de problema e resultado da solução

ESTRATÉGIAS UTILIZADAS		TIPOS DE PROBLEMAS														
		PROBLEMA 1			PROBLEMA 2			PROBLEMA 3			PROBLEMA 4			TOTAL		
		COR*	INC**	TOTAL	COR	INC	TOTAL	COR	INC	TOTAL	COR	INC	TOTAL	COR	INC	TOTAL
ALGORITMOS	DIVISÃO	37	1	38	28	5	33	23	12	35	20	14	34	108	32	140
	MULTIPLICAÇÃO	1	0	1	1	1	2	0	3	3	1	1	2	3	5	8
	ADIÇÃO	1	0	1	1	1	2	0	1	1	0	0	0	2	2	4
	SUBTRAÇÃO	0	1	1	0	2	2	0	0	0	0	2	2	0	5	5
DESENHOS/ OUTRAS FORMAS NÃO CONVENCIONAIS		0	0	0	1	0	1	0	2	2	2	0	2	3	2	5
NÃO REGISTRADA		0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	2	2
TOTAL		39	2	41	31	10	41	23	18	41	23	18	41	116	48	164

COR* = Solução correta

INC** = Solução incorreta

Conforme se observa na Tabela 1, do total de 164 respostas (41 alunos x 4 problemas), 116 mostram uma solução correta e 48 são incorretas.

A seguir são analisadas as estratégias de resolução utilizadas pelos participantes:

a) Utilização do algoritmo da divisão

A estratégia que utilizou o algoritmo da divisão ocorreu com maior frequência, em todos os tipos de problema, perfazendo um total de 140 respostas, sendo108 soluções corretas e 32 incorretas.

Essa estratégia foi utilizada em maior número no problema 1, por 38 sujeitos, tendo 37 apresentado soluções corretas e apenas 1 não resolveu corretamente. Trinta e três sujeitos adotaram-na no problema 2, apresentando 28 soluções corretas e cinco incorretas.

Já no problema 3, ela foi empregada em 35 problemas, dos quais 23 foram resolvidos corretamente e 12 incorretamente. No problema 4, de um total de 34 sujeitos que utilizaram o algoritmo da divisão, 20 resolveram o problema corretamente e 14 deram respostas incorretas.

Portanto, embora essa estratégia tenha sido mais utilizada no problema 1, de partição sem resto, a frequência no seu uso em relação aos outros problemas teve uma diferença muito pequena. Por outro lado, ao analisarmos a correção das respostas, podemos verificar que foi no problema 1 que os sujeitos obtiveram um melhor desempenho.

No problema 2, de quotição sem resto, o índice de sucesso também foi bastante alto (28 em 33). No entanto, nos problemas com resto, o número de respostas incorretas foi consideravelmente mais elevado (12 em 35 no problema 3 e 14 em 34 no problema 4). Mais adiante serão analisadas as respostas dos sujeitos, buscando compreender essas diferenças.

b) Utilização do algoritmo da multiplicação

A segunda estratégia mais utilizada foi o algoritmo da multiplicação, utilizada também em todos os tipos de problemas, sobretudo no problema 3, perfazendo um total de 8 respostas, das quais apenas 3 estavam corretas e 5 incorretas. É interessante verificar que a solução esperada para todos os problemas era a utilização da divisão. Porém, mesmo aplicando o algoritmo da multiplicação, alguns sujeitos chegaram à resposta correta. A seguir, essas respostas serão analisadas, para tentar compreender os procedimentos adotados.

O algoritmo da multiplicação foi utilizado no problema 1 por apenas um sujeito (08) que chegou à solução correta.

1. Carlos comprou 24 apitos e quer colocá-los em 4 caixas. Ele quer que cada caixa tenha a mesma quantidade de apitos. Quantos apitos ficarão em cada caixa?

6 x 4 = 24

Resposta: Vai coloco 6 apitos em cado caixa

O sujeito 08 registrou a operação sem o algoritmo. Deduz-se que ele calculou mentalmente o resultado, provavelmente recorrendo ao seu conhecimento da tabuada de multiplicar (qual o número que multiplicado por 4 dá 24?). Ele usou a mesma estratégia nos problemas 2 e 4, nos quais a relação é conhecida (cinco-para-um e seis-para-um, respectivamente).

2. João comprou 15 figurinhas de jogadores de futebol. Ele quer dar 5 figurinhas para cada um dos seus amigos. Quantos amigos vão ganhar figurinhas?

3 x 5 = 15

Resposta: 3 amigos

4. Mariana comprou 27 lápis de cor. Ela quer guardar 6 lápis em cada estojo. Quantos estojos ela vai precisar?

4 x 6 = 24

Resposta: 4 estojos vão ficar com 6 lapis e um vai ficar com treis

Comparando as notações realizadas por esse sujeito, observa-se que ele colocou a incógnita sempre na posição do multiplicando, não distinguindo se ela representava a relação, como nos problemas 2 e 4, ou não, como no problema 1. Isso pode sugerir um desconhecimento do que a “sentença matemática” representa.

Por outro lado, também indica um conhecimento, mesmo que implícito, da propriedade comutativa.

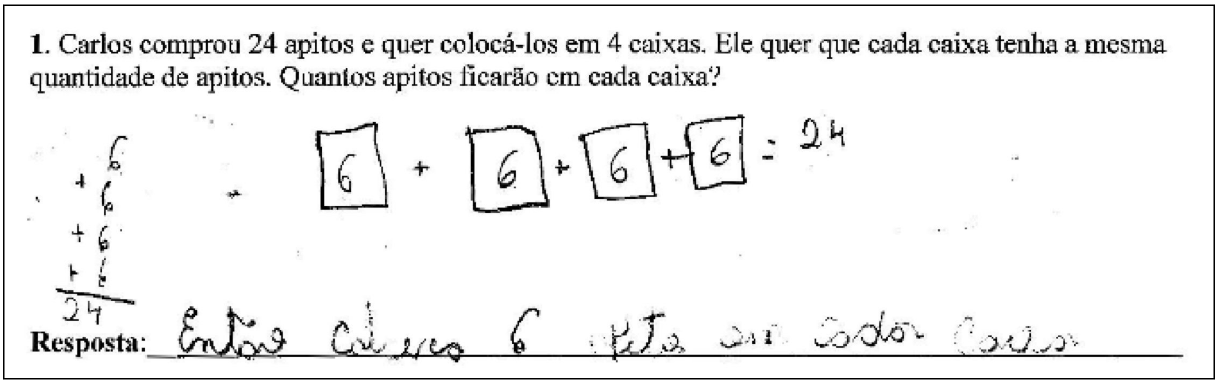
No problema 2 e no problema 4, além do sujeito 08, essa estratégia foi utilizada por mais um sujeito em cada caso. No entanto, os dois não chegaram à solução correta. No problema 3, os três sujeitos que utilizaram essa estratégia também não chegaram à solução correta. A análise dos erros será feita mais adiante.

Em síntese, é interessante verificar que, apesar do algoritmo da multiplicação não ser a estratégia proposta pela escola para a solução dos problemas de partição e quotição, em problemas simples, como os que foram utilizados nesta pesquisa, crianças e/ou adolescentes podem chegar à solução correta utilizando o conhecimento da tabuada da multiplicação, o que sugere que, mesmo que seja implicitamente, eles têm a noção de que a divisão é o inverso da multiplicação.

c) Utilização do algoritmo da adição

A estratégia que utilizou o algoritmo da adição foi verificada no exercício realizado por quatro sujeitos nos problemas 1, 2 e 3 e apresentou igual número de respostas corretas e incorretas.

No problema 1, apenas um sujeito (03) utilizou essa estratégia e de forma correta.

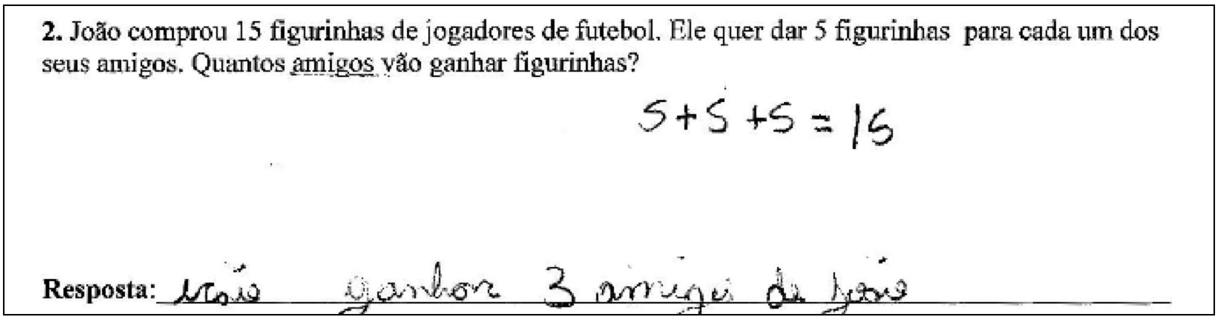

1. Carlos comprou 24 apitos e quer colocá-los em 4 caixas. Ele quer que cada caixa tenha a mesma quantidade de apitos. Quantos apitos ficarão em cada caixa?

$\boxed{6} + \boxed{6} + \boxed{6} + \boxed{6} = 24$

Resposta:

O sujeito 03 resolveu o problema por ensaio e erro (no original é possível observar as marcas dos registros que foram apagados). Primeiro ele formou quatro grupos (caixas) de 10 e adicionou essas quantidades. Quando percebeu que o total era maior que 24, foi reduzindo a quantidade de cada grupo, até obter um total de 24, como mostra o registro final. De acordo com Nunes et al (2005, p. 97), “o comportamento desses alunos, embora levando a acerto no problema, indica sua dificuldade em coordenar os esquemas de multiplicação e divisão”.

Já no problema 2, dos dois sujeitos que utilizaram essa estratégia, apenas um (03), o mesmo que resolveu o problema 1 como mostrado anteriormente, chegou à solução correta.



2. João comprou 15 figurinhas de jogadores de futebol. Ele quer dar 5 figurinhas para cada um dos seus amigos. Quantos amigos vão ganhar figurinhas?

5+5+5=15

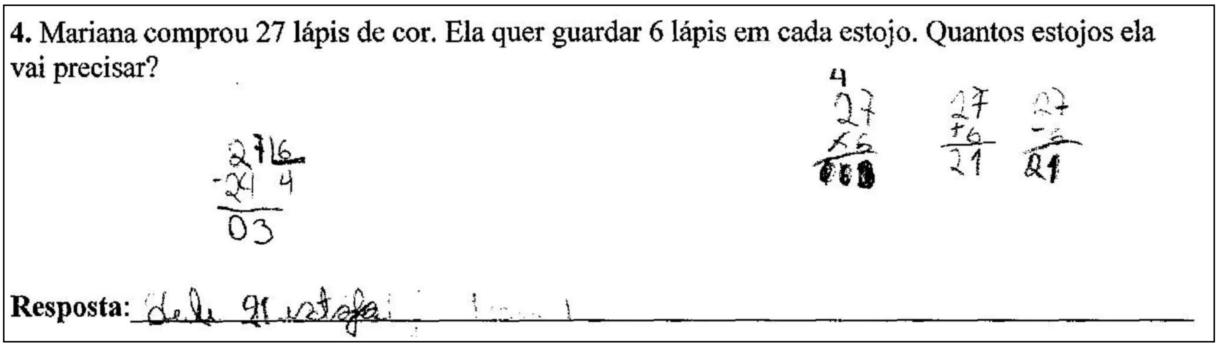
Resposta: vão ganhar 3 amigos de João

Dessa vez, como a relação é conhecida, por se tratar de um problema de quotição, ele provavelmente fez um cálculo mental e adicionou as quotas até chegar ao total de figurinhas. Segundo Nunes et al (2005), essa estratégia pressupõe a utilização do esquema de correspondência. No problema 3, apenas um sujeito utilizou essa estratégia e de forma incorreta.

d) Utilização do algoritmo da subtração

O algoritmo da subtração foi utilizado como estratégia de resolução nos problemas 1, 2 e 4, perfazendo 5 respostas, todas elas incorretas. No problema 1 foi utilizada por um sujeito e nos problemas 2 e 4 por dois sujeitos.

No problema 4, o sujeito 12 registrou uma estratégia de resolução diferente. Primeiro, efetuou a operação de divisão, armando e tratando o algoritmo corretamente. Depois efetuou todas as operações, como se procurasse chegar à solução por ensaio e erro, optando pela resposta obtida com a operação de subtração.

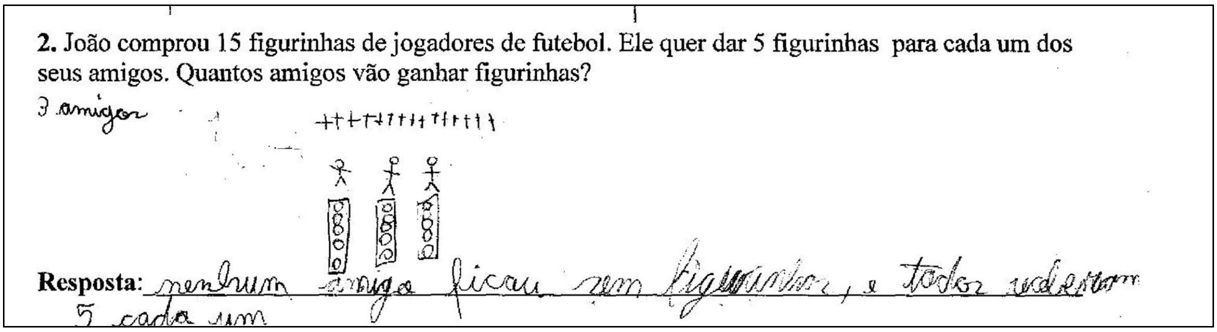

4. Mariana comprou 27 lápis de cor. Ela quer guardar 6 lápis em cada estojo. Quantos estojos ela vai precisar?

Resposta:

e) Utilização de desenhos ou outras formas não convencionais

Desenhos e outras formas não convencionais foram utilizados nos problemas 2, 3 e 4, perfazendo 5 respostas, sendo que 3 foram corretas e 2 incorretas.

No problema 2, apenas um sujeito (05) utilizou a estratégia desenhos e de forma correta. Ele resolveu o problema com uma representação vertical que permitiu controlar a correção da distribuição equitativa.


2. João comprou 15 figurinhas de jogadores de futebol. Ele quer dar 5 figurinhas para cada um dos seus amigos. Quantos amigos vão ganhar figurinhas?

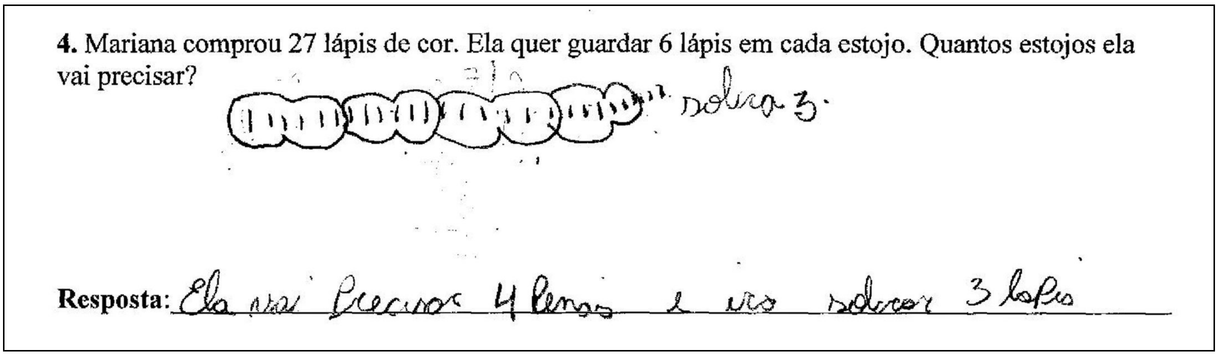
3 amigos

Resposta: nenhum amigo ficou sem figurinhas, e todos ... 5 cada um

Como a relação é conhecida, por se tratar de um problema de quotição, provavelmente ele fez um cálculo mental e foi distribuindo até chegar ao total de figurinhas (15).

Essa estratégia, de acordo com Nunes et al (2005), pressupõe a utilização do esquema de correspondência um para muitos. Uma observação interessante é que o sujeito "controlou" essa distribuição com a representação gráfica de tracinhos. Importa destacar que, tanto na representação icônica, desenhando os três amigos, (cada um com cinco figurinhas) como na resposta escrita em linguagem natural, ele demonstrou que sabia que as quotas correspondiam aos amigos e que a divisão é sem resto, pois deixou claro que nenhum amigo ficou sem figurinhas e que todos receberam a sua quota (5 figurinhas cada um).

Já no problema 3, os dois sujeitos que a utilizaram não chegaram à solução correta. O problema 4 foi resolvido por dois sujeitos (03 e 05) de forma não convencional. O sujeito 03 adotou essa estratégia e de forma correta.



4. Mariana comprou 27 lápis de cor. Ela quer guardar 6 lápis em cada estojo. Quantos estojos ela vai precisar?

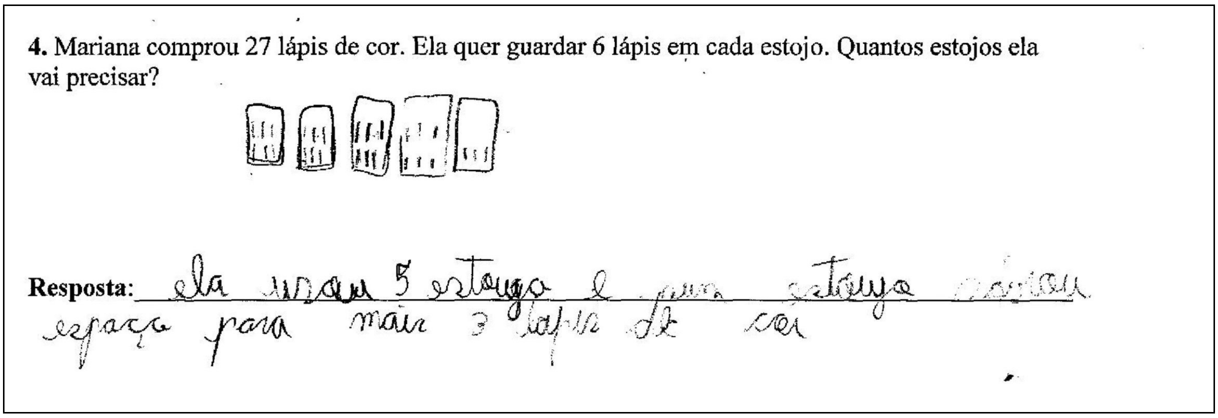
sobra 3.

Resposta: Ela vai Precisar 4 lensos e vai sobrar 3 lapis

Ele resolveu o problema com uma representação dos 27 lápis por meio de uma notação gráfica abstrata em forma de tracinhos, usando correspondência termo a termo – um tracinho para cada lápis (SINCLAIR, 1990), e formou quatro grupos de seis lápis cada um, pois já conhecia a relação de seis lápis por estojo, por se tratar de um problema de quotição.

É importante destacar que o sujeito 03 mostrou, tanto na representação gráfica abstrata como na resposta escrita em linguagem natural, que sabia que as quotas correspondiam aos estojos e que a divisão é com resto, dando o tratamento adequado ao resto. Além disso, deixou claro que, além dos quatro estojos necessários para agrupar seis lápis cada um, sobraram três lápis que ficaram fora do estojo.

A estratégia utilizada pelo sujeito 05, embora graficamente semelhante à que foi utilizada pelo sujeito 03, sugere que se baseia em diferentes procedimentos para produzir a correspondência de um para muitos (neste caso, um estojo para seis lápis).



4. Mariana comprou 27 lápis de cor. Ela quer guardar 6 lápis em cada estojo. Quantos estojos ela vai precisar?

Resposta: ela usau 5 estogo e um estoya ficau espaço para mais 3 lapis de cor

Supõe-se que o sujeito 05 tenha resolvido o problema, produzindo a representação icônica dos estojos, com o esboço de um estojo para cada seis lápis, totalizando quatro estojos de seis lápis cada um, pois já conhecia a relação (de seis lápis por estojo) presente em problemas de quotição. A estratégia foi ligeiramente diferente da utilizada pelo sujeito 03 na resolução desse mesmo problema, pois, em vez de desenhar todos os lápis e depois separá-los em grupos, foi formando grupos de seis lápis, controlando essa quantidade visualmente pelo arranjo desenhado, até se esgotarem os 27 lápis.

Cabe salientar que, provavelmente com base na vivência de situações análogas da vida real, considerou a existência de cinco estojos, pois, na resposta escrita na língua materna, ficou claro que a sua preocupação não foi com os lápis que sobraram e sim com o espaço que ficou livre em um dos estojos, no qual caberiam mais três lápis.

Ao comparar as notações produzidas pelos sujeitos 03 e 05, podemos concluir que o primeiro controlou o processo de estabelecimento de correspondência um a muitos com a ação de separar os grupos (provavelmente relacionada à subtração reiterada), enquanto o segundo controlou esse processo com a ação de juntar e totalizar (relacionada à adição).

f) Ausência de registro

Em duas respostas de um mesmo sujeito (21), nos problemas 2 e 4, não foi anotado o registro de como foram resolvidos. Apresentaram apenas a conclusão e, nos dois casos, a resposta foi incorreta.

2. João comprou 15 figurinhas de jogadores de futebol. Ele quer dar 5 figurinhas para cada um dos seus amigos. Quantos amigos vão ganhar figurinhas?

Resposta: Como e que eu vou resouver se não Tem a quantidade de meninos

4. Mariana comprou 27 lápis de cor. Ela quer guardar 6 lápis em cada estojo. Quantos estojos ela vai precisar?

Resposta: ela presizara de 6 estogo

Os resultados da pesquisa revelam que em quase todas as vezes, os participantes reconheceram que os problemas apresentados envolviam a operação de divisão, independentemente de a situação apresentada ser de partição ou de quotição, ou ainda de existir ou não resto.

Na quase totalidade dos casos, os sujeitos buscaram resolver os problemas utilizando estratégias aprendidas na escola — aplicação de algoritmos convencionais —, mas nem sempre obtiveram sucesso, mesmo quando optaram pelo algoritmo da divisão, que seria o mais adequado em todas as situações.

A seguir, serão analisados os tipos de erros cometidos na execução do algoritmo da divisão, já que a utilização de outras operações revela que os sujeitos não compreendem o que o registro algoritmo representa, mesmo que o tenham efetuado corretamente.

4.2 Análise dos erros na utilização do algoritmo da divisão

Considerando-se que a utilização do algoritmo da divisão foi a estratégia mais utilizada (140 problemas), mas que nem sempre conduziu à resolução correta do problema, cumpre promover a análise dos erros cometidos.

Foram consideradas *a posteriori* as seguintes categorias:

1. Troca os termos ao armar o algoritmo (revelando que os registros produzidos não representam adequadamente a operação escolhida).
2. Arma o algoritmo corretamente e não utiliza os procedimentos corretos na sua execução (revelando a existência de dificuldades na compreensão da relação entre o tratamento dos registros e as ações que conduziriam à solução do problema).
3. Arma o algoritmo corretamente e utiliza os procedimentos corretos, mas, na sua execução, erra a tabuada (multiplicação, subtração, divisão).
4. Arma o algoritmo corretamente e executa os procedimentos corretos, mas registra a resposta incorreta.

A tabela 2 mostra os erros cometidos pelos participantes no registro e tratamento do algoritmo da divisão

Tabela 2: Análise dos erros cometidos pelos participantes na registro e tratamento do algoritmo da divisão

TIPOS DE ERROS NO ALGORITMO DA DIVISÃO	P1	P2	P3	P4	TOTAL
Troca os termos ao armar o algoritmo.	1	1	0	1	**3**
Arma o algoritmo corretamente e não utiliza os procedimentos corretos na sua execução.	0	2	6	2	**10**
Arma o algoritmo corretamente e utiliza os procedimentos corretos, mas, na sua execução, erra a tabuada.	0	2	4	8	**14**
Arma o algoritmo corretamente e executa os procedimentos corretos, mas registra a resposta incorreta.	0	0	2	3	**5**

a) Erro de tabuada

Conforme se observa na tabela 2, o tipo de erro mais frequente sinaliza dificuldade no domínio da tabuada, relativamente às operações requeridas para a resolução do algoritmo da divisão, sobretudo na tabuada da subtração.

Observemos uma das soluções que apresentam a dificuldade sugerida acima, aplicada pelo sujeito 20 no problema 2:

2. João comprou 15 figurinhas de jogadores de futebol. Ele quer dar 5 figurinhas para cada um dos seus amigos. Quantos amigos vão ganhar figurinhas?

$$\begin{array}{r|l} 15 & 5 \\ -13 & 3 \\ \hline 00 & \end{array}$$

Resposta: cada [illegible] 3 [illegible]

Vejamos o erro do sujeito 27, também no problema 2:

2. João comprou 15 figurinhas de jogadores de futebol. Ele quer dar 5 figurinhas para cada um dos seus amigos. Quantos amigos vão ganhar figurinhas?

$$\begin{array}{r|l} 15 & 5 \\ -15 & 3 \\ \hline 00 & \end{array}$$

Resposta: ganhar 5 figurinhas cada um dos amigos

Nesse caso, a resposta escrita do sujeito revela também uma não compreensão da situação envolvida no problema, pois repetiu o que já estava dado.

Também merece ênfase o erro do sujeito 08 no problema 3:

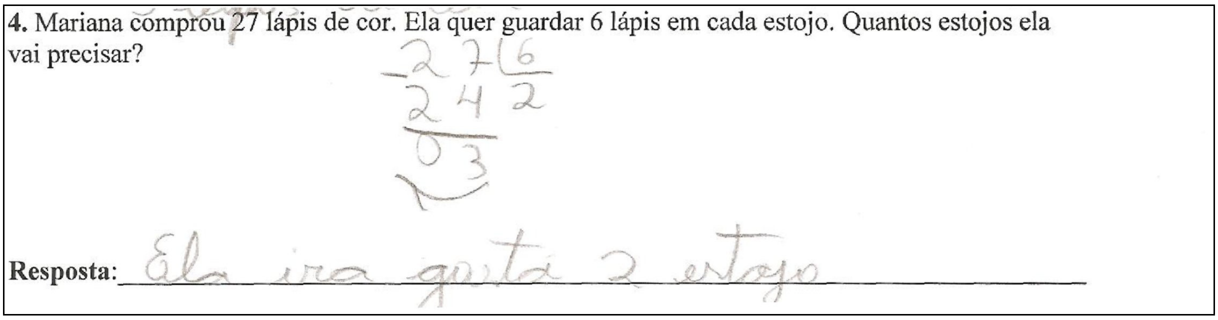
3. Rodrigo foi a uma papelaria e comprou 28 lápis de cor e quer colocá-los em 5 estojos. Ele quer que cada estojo tenha a mesma quantidade de lápis de cor. Quantos lápis de cor ele irá colocar em cada estojo?

$$\begin{array}{r|l} 28 & 5 \\ -25 & 4 \\ \hline 03 & \end{array}$$

Resposta: 3 estojos vão ficar com 5 lapis de cor e um vai ficar com 18 lapis de cor

Além do erro na tabuada da multiplicação (4X5=25), esse sujeito parece não compreender o que representa cada termo do algoritmo.

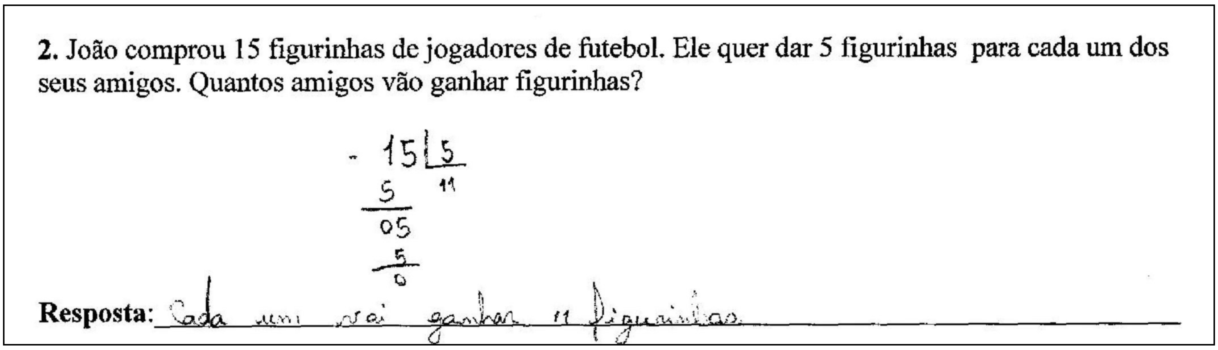
No problema 4, o sujeito 11 cometeu o mesmo tipo de erro:


4. Mariana comprou 27 lápis de cor. Ela quer guardar 6 lápis em cada estojo. Quantos estojos ela vai precisar?

Resposta: Ela ira gasta 2 estojo

b) Erro na execução do algoritmo

A segunda dificuldade mais frequente foi observada em relação aos procedimentos na execução do algoritmo, o que sugere que alguns participantes não compreendem a relação entre o tratamento dos registros e as ações que conduziriam à solução do problema. É o caso do erro do sujeito 41 no problema 2:

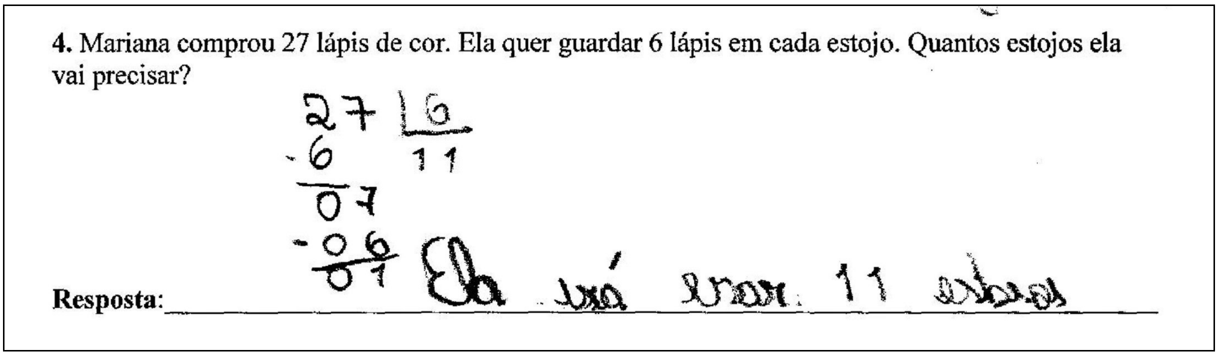

2. João comprou 15 figurinhas de jogadores de futebol. Ele quer dar 5 figurinhas para cada um dos seus amigos. Quantos amigos vão ganhar figurinhas?

Resposta: Cada um vai ganhar 11 figurinhas

O registro do sujeito revela um desconhecimento tanto do algoritmo da divisão como do da subtração. Provavelmente essas dificuldades estão associadas à não compreensão do valor posicional dos algarismos, o que demonstra que o sujeito não construiu ainda uma clara compreensão do sistema de numeração decimal. Entretanto, isso não se confirma nos outros problemas, que foram resolvidos corretamente pelo mesmo sujeito.

A resposta escrita também revela que o sujeito resolveu o problema como se fosse de partição, não percebendo que o que se queria saber era o número de amigos, pois o número de figurinhas já estava dado.

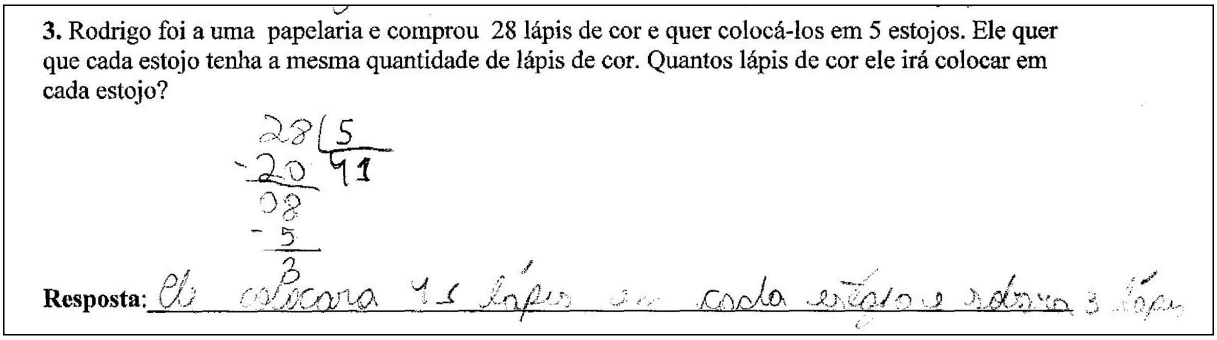
O sujeito 06, no problema 4, executa o algoritmo de uma forma semelhante a que acabamos de analisar:


4. Mariana comprou 27 lápis de cor. Ela quer guardar 6 lápis em cada estojo. Quantos estojos ela vai precisar?

27 | 6
-6   11
07
-06
01

Resposta: Ela irá usar 11 estojos

Um pouco diferente foi o erro do sujeito 16 no problema 3:


3. Rodrigo foi a uma papelaria e comprou 28 lápis de cor e quer colocá-los em 5 estojos. Ele quer que cada estojo tenha a mesma quantidade de lápis de cor. Quantos lápis de cor ele irá colocar em cada estojo?

28 | 5
-20 11
08
-5
3

Resposta: Ele colocara 11 lápis em cada estojo e sobrara 3 lápis

Nesse caso, percebe-se que o sujeito segue os passos corretamente, mas não compreende a relação entre o resto e o quociente. Ao perceber que o resto era maior que o divisor, ele dividiu o resto, sem compreender que esse procedimento correspondia a uma "segunda rodada", que consistiria em adicionar mais uma unidade ao quociente (processo de subtração sucessiva) e não em considerar que o resultado da "primeira rodada" correspondia ao algarismo das dezenas e o da segunda ao das unidades. Na realidade, isso revela a não compreensão do valor posicional dos algarismos e sua relação com a execução do algoritmo.

c) Erro ao armar o algoritmo

São poucos os casos em que os participantes tiveram dificuldade em armar o algoritmo, o que leva a inferir que quase todos compreendem como essa forma de registro representa a operação de divisão.

Detalhando a análise por problema, podemos perceber que no problema 1 foi encontrada apenas uma resolução incorreta, caracterizada pela troca dos termos ao armar o algoritmo. Vejamos o registro produzido pelo sujeito 02 no problema 1:

1. Carlos comprou 24 apitos e quer colocá-los em 4 caixas. Ele quer que cada caixa tenha a mesma quantidade de apitos. Quantos apitos ficarão em cada caixa?

24 | 6
24 6
00

Resposta: Ficaram em cada caixa 6 apitos

Esse caso sugere que o sujeito pode ter resolvido mentalmente e, ao anotar o algoritmo, colocou o resultado no divisor, possivelmente por distração.

Notemos agora o erro do sujeito 12 no problema 2:

2. João comprou 15 figurinhas de jogadores de futebol. Ele quer dar 5 figurinhas para cada um dos seus amigos. Quantos amigos vão ganhar figurinhas?

24 | 5
-15 3
11

Resposta: [illegible] ficarão [illegible] 3 figurinhas

Esse erro evidencia que o sujeito utilizou no dividendo os dados do problema anterior (24 em vez de 15). O resultado correto no quociente sugere que ele resolveu o problema mentalmente e depois tentou fazer o registro convencional do algoritmo. No entanto, a resposta em língua escrita revela que a resolução pode não ter sido feita de forma muito consciente, pois o sujeito respondeu como se o problema fosse de partição, sem prestar atenção à questão que foi colocada.

d) Erro ao registrar a resposta escrita

Cinco participantes cometeram o tipo de erro “arma o algoritmo corretamente e executa os procedimentos corretos, mas registra a resposta incorreta”. Um exemplo é o do sujeito 14 no problema 3:

3. Rodrigo foi a uma papelaria e comprou 28 lápis de cor e quer colocá-los em 5 estojos. Ele quer que cada estojo tenha a mesma quantidade de lápis de cor. Quantos lápis de cor ele irá colocar em cada estojo?

$$\begin{array}{r|l} 28 & 5 \\ -25 & 5 \\ \hline 03 & \end{array}$$

Resposta: 3 lápis de cor em cada estojo

Ele considerou que o resto seria a resposta, indicando que não reconhece o significado dos termos do algoritmo. A mesma confusão pode ser percebida no erro cometido pelo sujeito 38 no problema 4:

4. Mariana comprou 27 lápis de cor. Ela quer guardar 6 lápis em cada estojo. Quantos estojos ela vai precisar?

$$\begin{array}{r|l} 27 & 6 \\ -24 & 4 \\ \hline 03 & \end{array}$$

Resposta: ela precisara de 3 estojos.

Observando os erros cometidos pelos participantes no registro e tratamento do algoritmo da divisão, constatamos que, do total de 32 respostas, o erro mais frequente (14) foi do tipo “arma o algoritmo corretamente e utiliza os procedimentos corretos, mas, na sua execução, erra a tabuada”. O erro de tabuada ocorreu tanto no cálculo da divisão como no da multiplicação e de subtração, operações necessárias à execução do algoritmo da divisão.

Dez respostas apresentaram o erro do tipo “arma o algoritmo corretamente e não utiliza os procedimentos corretos na sua execução”, mostrando que os sujeitos não entendem quais as relações numéricas representadas no algoritmo.

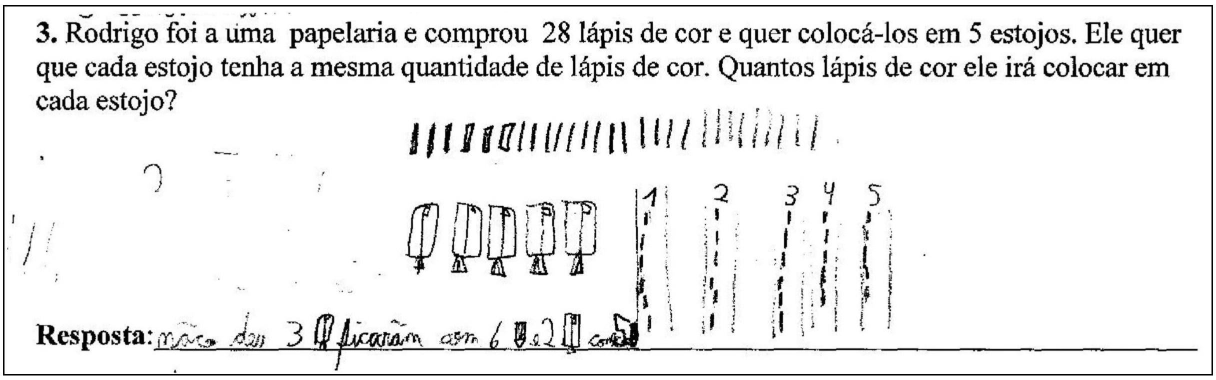
Em cinco respostas foi verificado o erro do tipo “arma o algoritmo corretamente e executa os procedimentos corretos, mas registra a resposta incorreta”, o que, em alguns casos, pode ter sido causado por distração, mas em outros casos, sinaliza a existência de uma dificuldade em compreender a ideia de quotição. Com efeito, algumas respostas relativas a outras categorias também continham o mesmo erro, que indica confusão entre os elementos atribuídos a cada quota e a quantidade de quotas.

Apenas três respostas apresentaram o erro do tipo “troca os termos ao armar o algoritmo”, levando a se considerar que os sujeitos compreendem o que representa o dividendo e o divisor, ou, alternativamente, que aprenderam a colocar no dividendo a quantidade maior e no divisor a quantidade menor.

Outra observação interessante é que os erros tiveram maior frequência nos problemas de partição e quotição com resto, provavelmente porque a existência de resto dificulta o uso de cálculo mental para descobrir a solução.

4.3 Análise dos erros na utilização de registros não convencionais

Quanto aos erros cometidos pelos participantes no registro com desenhos ou outras formas não convencionais, podemos observar o registro de duas soluções incorretas no problema 3. Uma delas diz respeito ao sujeito 05:


3. Rodrigo foi a uma papelaria e comprou 28 lápis de cor e quer colocá-los em 5 estojos. Ele quer que cada estojo tenha a mesma quantidade de lápis de cor. Quantos lápis de cor ele irá colocar em cada estojo?

Resposta:

Nesse caso, o sujeito representou inicialmente os 28 lápis por meio de uma notação gráfica abstrata, em forma de tracinhos, e em seguida representou na forma icônica os cinco estojos. Por último, fez a distribuição dos lápis nos estojos, representados por duas linhas verticais, até se esgotarem os 28 lápis, concluindo que três estojos ficarão com seis lápis e dois estojos ficarão com cinco lápis. Ele não reconhece o significado da partição equitativa, pois continua a distribuir os lápis até que se esgote o total deles, escrevendo que três estojos ficarão com seis lápis cada um e dois estojos ficarão com cinco lápis cada um. Essa solução traduz as experiências dos alunos em situações reais. No dia-a-dia, ao arrumarem lápis de cor, é mais provável que coloquem em alguns estojos uma quantidade maior do que aquela que deixam fora.

O sujeito 03 tentou utilizar a estratégia que utilizou no problema 1, por ensaio e erro (foi uma estratégia classificada como solução correta, utilizando o algoritmo da adição), mas não conseguiu porque o resto impossibilitava que a soma fosse igual ao total de lápis apresentado no problema. Primeiro ele formou sete grupos de quatro lápis, contou esses grupos e percebeu que a soma ultrapassou o total (28 lápis). Em seguida, tentou fazer uma divisão por seis, provavelmente pensando colocar seis lápis em cada estojo. Como não compreendeu o resultado (quociente quatro e resto quatro), tentou fazer uma multiplicação, usando os dados numéricos do problema (28 X 5). Ao constatar que a solução não era correta, apagou tudo. É possível observar no original as marcas dos registros que foram apagados.

5 CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo geral deste estudo foi caracterizar as soluções escritas, produzidas por crianças e adolescentes que cursam a 5ª série para a solução de problemas de divisão envolvendo partição e quotição. Investigamos 41 alunos, crianças e adolescentes, com idades entre 10 e 13 anos, que cursam a 5ª série do segundo segmento do ensino fundamental.

Na análise dos registros produzidos pelos sujeitos foi possível responder às três questões de pesquisa formuladas no início da investigação, como veremos a seguir.

1. *Quais as operações que os adolescentes consideram adequadas para chegar à solução de problemas de divisão, quando estes envolvem a partição e a quotição?*

Para responder à primeira questão, foi feito um levantamento das estratégias (operações) registradas nas respostas dos sujeitos. Observamos que os participantes resolveram os problemas de várias maneiras e utilizando diversas operações, não se restringindo à utilização da operação da divisão, com o respectivo algoritmo, como seria de se esperar, tendo em conta o seu nível de escolaridade.

As estratégias (diversas formas de resolução adotadas pelos participantes) levantadas foram as que utilizaram o algoritmo da divisão, da multiplicação, da adição, da subtração, além de desenhos e outras formas não convencionais, ou seja, formas diferentes das que geralmente são ensinadas na escola.

Observamos que, das 164 respostas (41x4), a estratégia que utilizou o algoritmo da divisão ocorreu com maior frequência, em todos os tipos de problema, perfazendo um total de 140 respostas, sendo 108 soluções corretas e 32 incorretas.

A segunda estratégia mais utilizada foi o algoritmo da multiplicação, empregada também em todos os tipos de problemas, sobretudo no problema 3, totalizando 8 respostas, das quais apenas 3 estavam corretas e 5 incorretas. É interessante verificar que a solução esperada para todos os problemas consistiria no uso da divisão. Porém, mesmo utilizando o algoritmo da multiplicação, alguns sujeitos chegaram à resposta correta.

A estratégia de utilizar o algoritmo da adição foi verificada nas respostas de quatro sujeitos aos problemas 1, 2 e 3 e apresentou igual número de respostas corretas e incorretas.

Já o algoritmo da subtração foi utilizado como estratégia de resolução nos problemas 1, 2 e 4, perfazendo 5 respostas, todas incorretas. No problema 1, foi adotado por um sujeito e nos problemas 2 e 4 por dois sujeitos.

Desenhos e outras formas não convencionais foram aplicados nos problemas 2, 3 e 4, num total de 5 respostas, sendo 3 delas corretas e 2 incorretas.

Além disso, verificamos que nos problemas 2 e 4 não foi anotado o registro de como foram resolvidos. Ambos, de um mesmo sujeito (21), apresentaram apenas a conclusão e, nos dois casos, a resposta era incorreta.

2. *Os registros que os sujeitos produzem representam adequadamente a operação escolhida?*

Foram poucos os casos em que os participantes tiveram dificuldade em armar o algoritmo, o que sugere que quase todos compreendem como essa forma de registro representa a operação de divisão. Uma das situações indica que o sujeito pode ter resolvido mentalmente e, ao anotar o algoritmo, colocou o resultado no divisor, possivelmente por distração.

Uma outra situação sugere que o sujeito também resolveu o problema mentalmente e depois tentou fazer o registro convencional do algoritmo. No entanto, a resposta em língua escrita revela que a resolução pode não ter sido feita de forma muito consciente, pois o sujeito respondeu como se o problema fosse de partição, sem prestar atenção à questão que foi colocada.

3. *No tratamento dado aos registros que produziram, quais os indicadores da existência de dificuldades desses adolescentes em compreender a relação entre esse tratamento e as ações que conduziriam à solução do problema?*

No registro e tratamento dos algoritmos da divisão, o tipo de erro mais frequente sinaliza dificuldade no domínio da tabuada, relativa às operações requeridas para a resolução do algoritmo da divisão, sobretudo na tabuada da subtração.

A segunda dificuldade mais frequente foi observada em relação aos procedimentos na execução do algoritmo, o que leva a inferir que alguns participantes não compreendem a relação entre o tratamento dos registros e as ações que conduziriam à solução do problema.

Cabe ressaltar que muitos alunos ingressam no segundo segmento do ensino fundamental (5ª série) sem compreender os conceitos básicos das estruturas aditivas e multiplicativas, o que coloca, aos professores, o desafio de buscar soluções para sanar essas dificuldades.

Em consonância com Saiz (1996), percebemos, na pesquisa, que as crianças e os adolescentes, embora tenham utilizado como estratégia o algoritmo da divisão e poucos tenham errado a solução desses problemas ao resolverem os problemas de partição e quotição, nem sempre mobilizaram os esquemas intelectuais próprios que têm à sua disposição. Para o autor, isso indica uma relação superficial com o conhecimento, desembocando em situações estereotipadas, puramente didáticas, ou seja, centradas na situação escolar da aprendizagem, o que pode se traduzir na dificuldade em reconhecer a utilidade dos conhecimentos já construídos em situações cotidianas.

Tal observação confirma o que é colocado por Nunes et al (2005), quando criticam o enfoque algorítmico em detrimento da promoção do desenvolvimento conceitual que ocorre no ensino escolar.

Nessa perspectiva, é fundamental que o professor, ao ensinar os algoritmos, explique os seus significados e as relações implícitas entre os termos. Cabe frisar, com base em Vergnaud (1991), que as ações se situam no plano da realidade e os algoritmos se situam no âmbito da representação; eles são regras de ação, mas nem todas as regras de ação são algorítmicas. Nesse sentido, é importante, como no caso desta pesquisa, analisar os procedimentos utilizados pelas crianças, mesmo que estes não conduzam necessariamente a uma solução dos problemas.

Concordamos com Cunha (1997) quando afirma que algumas concepções sobre multiplicação e divisão estão muito interiorizadas pelos alunos e que provavelmente uma mudança de concepções ocorreria se, desde o início da vida escolar dos alunos, a multiplicação e a divisão fossem introduzidas e trabalhadas por meio de diversas abordagens, não somente como adições repetidas e como subtrações sucessivas.

Assim como Carvalho e Gonçalves (2003), defendemos a apresentação de uma grande diversidade de situações para promover a construção conceitual. Entendemos ser relevante que se dê aos alunos a oportunidade de resolver uma grande variedade de problemas que, embora mobilizem a mesma operação, tenham uma estrutura diferente e envolvam novos sentidos de número.

É imprescindível que o professor trabalhe, com as crianças e os adolescentes, diferentes situações, como os problemas de partição e quotição, para que eles percebam e entendam que, embora sendo situações diferentes, podem ser resolvidos matematicamente por um mesmo algoritmo, por uma mesma operação, mas tendo estruturas distintas, exigem esquemas de ação (estratégias) diferenciadas, pois esses problemas envolvem conceitos diferentes (partição e quotição).

REFERÊNCIAS

BORBA, R. E. S. R.; SELVA, A. C. V. Alunos de 3ª e 5ª séries resolvendo problemas de divisão com resto diferente de zero: o efeito de representações simbólicas, significados e escolarização. In: ANPED, 29., 2006, Caxambu. **Anais...** ANPED, 2006.

BOYER, C. **História da matemática**. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

BRITO, M. R. F. A. Aprendizagem significativa e a formação de conceitos na escola. In*:* BRITO M. R. F. A. (Org.). **Psicologia da educação matemática:** teoria e pesquisa. Florianópolis: Insular, 2001. p. 69-84.

CAMPOS, T. M. M.; MAGINA, S.; CARZOLA, I.; RIBEIRO, E. As estruturas aditivas nas séries iniciais do ensino fundamental: um estudo diagnóstico em contextos diferentes. **RELIME – Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, v. 10, p. 219-239, 2007.

CARVALHO, A.; GONÇALVES, H. Educação Matemática. In: ENCONTRO NACIONAL DE PROFESSORES DO 1º CICLO, 6., Faro. **Anais...** Faro, 2003.

CENTURIÓN, M. **Números e operações**. São Paulo: Scipione, 2002.

CORREA, J.; SPINILLO, A. G. A resolução de tarefas de divisão por criança. **Estudos de Psicologia**, Natal, v. 9, n. 1, 2004.

CUNHA, M. C. C. da. **As operações de multiplicação e divisão junto a alunos de 5ª e 7ª séries**. 1997. Dissertação (Mestrado) – PUC, São Paulo, 1997.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Trad. Hygina H. Domingues. Campinas: Unicamp, 2002.

LAUTERT, S. L. **As dificuldades das crianças com a divisão:** um estudo de intervenção. 2005. Dissertação (Mestrado) – UFPE, Recife, 2005.

LAUTERT, S. L.; SPINILLO, A. G. As relações entre o desempenho em problemas de divisão e as concepções de criança sobre divisão. **Psicologia: Teoria e Pesquisa**, Brasília, v. 18, n. 3, p. 237-246, 2002.

LAUTERT, S. L.; SPINILLO, A. G. Como as crianças representam a operação de divisão: a linguagem oral para outras formas de representação. **Temas em Psicologia**, Ribeirão Preto, Brasília, v. 7, p. 23-36, 1999.

MIGUEL, J. C. **O ensino da matemática na perspectiva de formação de conceitos:** implicações teórico-metodológicas. São Paulo: UNESP, 2005.

MORO, M. L. F. Notações da matemática infantil: igualar e repartir grandezas na origem das estruturas multiplicativas. **Psicologia: Reflexão e Crítica**, Porto Alegre, UFRGS, v. 17, n. 2, p. 251-266, 2004.

NUNES, T.; BRYANT, P. **Crianças fazendo matemática**. Trad. Sandra Costa. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

NUNES, T.; CAMPOS, T. M. M.; MAGINA, S.; BRYANT, P. **Educação matemática:** números e operações. São Paulo: Cortez, 2005.

PIAGET, J.; SZEMINSKA, A. **A gênese do número na criança**. Trad. Christiano Monteiro Oiticia. Rio de Janeiro: Zahar, 1971.

SAIZ, I. Dividir com dificuldades ou dificuldades para dividir. In: PARRA, C.; SAIZ, I. (Orgs.). **Didática da Matemática:** reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artmed, 1996. p. 156-183.

SELVA, A. C. V. O resto da divisão: uma análise das estratégias. **Tópicos Educacionais**, Recife, v. 1, p. 141-158, 1997.

SINCLAIR, H. A notação numérica na criança. In: SINCLAIR, H. (Org.). **A produção de notações na criança:** linguagem, número, ritmos e melodias. São Paulo: Cortez, 1990.

TANCREDI, R. M. S. P. **O ensino dos números inteiros no 1º grau:** realidade e possibilidade. 1989. Dissertação (Mestrado) – FE-UFSCar, São Carlos, SP, 1989.

TELES, R. A. de M. **Imbricações entre os campos conceituais na matemática escolar:** um estudo sobre a fórmulas de área de figuras geométricas planas. 2007. Dissertação (Mestrado) – UFPE, 2007.

VERGNAUD, G. A teoria dos campos conceituais. In: BRUN, J. (Org.). **Didática das matemáticas**. Lisboa: Horizontes Pedagógicos, 1996. p.155-191.

VERGNAUD, G. **El nino, lãs matemáticas y la realidad:** problemas de la enseñanzade las matemáticas en la escuela primaria. Traducción Luiz Ortega Segura. México: Trillas, 1991.