Universidade Federal do Maranhão
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática

A Importância das Deduções das Fórmulas Trigonométricas para a Construção de uma Aprendizagem Significativa

Emerson Carlos Castelo Branco

2013

Universidade Federal do Maranhão
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática

A Importância das Deduções das Fórmulas Trigonométricas para a Construção de uma Aprendizagem Significativa

por

Emerson Carlos Castelo Branco

sob orientação do

Prof. José Antônio Pires Ferreira Marão

Março de 2013

São Luís - MA

Castelo Branco, Emerson Carlos.

A importância das deduções das fórmulas trigonométricas para a construção de uma aprendizagem significativa/ Emerson Carlos Castelo Branco: UFMA, 2013.

87f

Orientador: Prof. José Antônio Pires Ferreira Marão

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Maranhão, Mestrado Profissional em Matemática, 2013.

1.Razões trigonométricas. 2. Equações trigonométricas . 3. Funções circulares. I. Título.

CDU: 514.116.3

Universidade Federal do Maranhão
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática

A Importância das Deduções das Fórmulas Trigonométricas para a Construção de uma Aprendizagem Significativa

por

Emerson Carlos Castelo Branco

Dissertação apresentada ao PROFMAT/ Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Geometria, Trigonometria Plana e Matemática Elementar.

Aprovada em: ..../....../........

Prof. José Antônio Pires Ferreira Marão - UFMA (Orientador)

Prof. Dr. Felix Siva Costa - UEMA

Prof. Manoel Ferreira Borges Neto - UNESP

À Lissandra , Emerson Filho

e Leide Chantrelle.

Agradecimentos

Primeiramente a Deus, por ter me oportunizado enfrentar os obstáculos e as dificuldades durante o acesso e permanência neste grande programa de qualificação.

À minha esposa Leide, aos meus filhos Emerson Filho e Lissandra, pelas horas e as vezes dias de afastamento pela dedicação ao programa.

À minha mãe D. Graça e aos meus irmãos Lidiane, Heliakim e Hélio (*in memorian.*)

Ao meu orientador, professor Marão, pelo grande empenho e auxílio nas horas difíceis, sempre com uma sugestão ou bibliografia, durante todo o PROFMAT e ainda para que se concretizasse este trabalho.

Ao professor João de Deus, que mesmo quando de forma mais incisiva nos cobrava, deixava claro que queria o melhor dos alunos e o engrandecimento do PROFMAT.

Aos demais professores colaboradores do PROFMAT no âmbito regional e nacional, bem como à SBM e ao IMPA.

Aos amigos de turma, sempre entusiasmados com a oportunidade e de um modo geral empenhados para que tudo fosse concluído com êxito e qualidade.

Aos meus amigos de trabalho, em especial, Ajax, Eduardo, Ana Ruth, Rosário, Vale, Aldo e Otamar, pelas palavras de encorajamento e por compartilharem da minha felicidade.

Ao ex-professor e amigo Chaves pela grande contribuição e suporte no uso das ferramentas indispensáveis à materialização deste trabalho.

À professora Yone, que como gestora da minha escola teve grande sensibilidade e apreço ao processo formativo.

À CAPES, pelo suporte financeiro e credibilidade dispensada ao PROFMAT.

Enfim, a todos que direta ou indiretamente contribuíram para este importante marco de realização pessoal e profissional.

“A Matemática se revela em mentes sensíveis, capazes de ver um espiral em um girassol, ângulos em uma estrela e Deus no infinito."

Manoel Paiva.

Resumo

O presente trabalho faz uma breve abordagem das razões trigonométricas, seguidas de um estudo sobre arcos e círculos trigonométricos, bem como das funções circulares, de suas variações e de seus respectivos gráficos. As deduções das relações recíprocas são feitas de forma geométrica. As fórmulas trigonométricas de adição e transformação em produto, são deduzidas de modo bem simples. Abordam-se as equações trigonométricas de uma forma diferente e finaliza-se com aplicações.

Palavras-chave: Razões trigonométricas, Equações Trigonométricas, Funções Circulares.

Abstract

This work makes a brief overview of the trigonometric ratios, followed by a study of arcs and circles trigonometric and circular functions, their variations and their respective charts. Deductions are made of reciprocal relationships of geometric shape. The trigonometric formulas for addition and transformation products, are deducted so simple. It addresses the trigonometric equations in a different manner and ends with applications.

Keywords: Trigonometric Ratios, Trigonometric Equations, Circular Functions.

Sumário

Lista de Figuras

Introdução

É muito comum os estudantes, sobretudo aqueles de escolas públicas, terem o primeiro contato com o estudo da Trigonometria apenas na segunda série do ensino médio. As dificuldades no desenvolvimento desse assunto ocorrem com frequência considerável. Acredita-se que essa dificuldade, deve-se ao fato de os alunos terem pouco contato no ensino fundamental com estudo de Geometria Plana. Tópicos como ângulos, congruência e principalmente, semelhança de triângulos, são de extrema relevância para um bom início no estudo da Trigonometria Plana.

Outro aspecto que deve ser considerado para que a aprendizagem da Trigonometria não ocorra de modo consistente é a abordagem feita por parte de muitos professores e por muitas produções Matemáticas que são disseminadas em nosso país! O conhecimento das definições que deveriam ser aplicadas em boa parte das demonstrações, seja das fórmulas, seja das relações trigonométricas, é muitas vezes negligenciado em detrimento de certas "receitas" como mero processo de memorização. Não é correto afirmar que em Matemática não se deva fazer uso de artifícios que possibilitem o educando a assimilar determinados conteúdos por meio de um processo mecânico, sobretudo num primeiro contato, porém, utilizar-se desse método como o único ou o método predominante, para que se crie um fictício de que a aprendizagem está ocorrendo de forma satisfatória, é o que se propõe discutir neste trabalho.

> *Um dos motivos do fracasso do ensino de Matemática, está tradicionalmente pautado em manipulações mecânicas de técnicas operatórias, resolução de exercícios, que são rapidamente esquecidos, assim como a memorização de fórmulas, tabuada, regras e propriedades (PAIVA, 2009).*

Está longe de se esgotar as discussões acerca da eficácia ou não das demonstrações no processo ensino-aprendizagem. Não especificamente de um ou outro assunto, mas sobre a Matemática de um modo geral. Há quem defenda e aqueles que veem com preocupação a metodologia de que se trabalhe a Matemática numa perspectiva de demonstrações.

> *A Matemática é uma ciência dedutiva: partindo de certas premissas, chega, por um estrito processo de dedução, aos vários teoremas que a constituem. É verdade que, no passado, as deduções matemáticas eram com frequência muito destituídas de rigor; é também verdade que o rigor é um ideal dificilmente alcançável. Não obstante, se faltar rigor em uma prova matemática, ela será, sob esse aspecto defeituosa; não constitui defesa a alegação de que o senso comum mostra ser o resultado correto, porquanto, se tivéssemos de confiar nisso, melhor seria abandonar completamente o argumento do que trazer a falácia em socorro do senso comum. Nenhum apelo ao senso comum, ou ?intuição? ou qualquer outra coisa que não a estrita lógica dedutiva, deve ser necessário à Matemática após estabelecidas as premissas (RUSSEL, 1976).*

Para alguns autores, o importante é a adequação do nível de abordagem e muitas vezes a necessidade da diversificação dos dos métodos utilizados nas demonstrações.

> *O desenvolvimento cognitivo dos estudantes deve ser levado em conta tal que a prova seja apresentada em formas que sejam para eles potencialmente significativas. Isto requer que os educadores e os matemáticos repensem a natureza da prova matemática e considerem o uso de diferentes tipos de prova de acordo com o desenvolvimento cognitivo do indivíduo (TALL apud BALACHEFF, 2004).*

Por outro lado, temos autores que compreendem que a maior dificuldade não está nas demonstrações propriamente ditas, mas sim na compreensão da necessidade de se demonstrar implicações lógicas para a veracidade de certas teorias.

> *O problema dos alunos com a demonstração reside mais na falta de motivação e de compreensão da respectiva função do que na falta de competência no raciocínio lógico, apontando estudos reveladores de que crianças muito novas são capazes de raciocinar logicamente num contexto de situações reais significativas para elas (VILLIERS, 2001).*

Neste trabalho faremos no primeiro capítulo uma abordagem Histórica do surgimento, dos "criadores", do desenvolvimento, e dos primeiros objetivos da Trigonometria.

No segundo capítulo, faremos um breve estudo das razões trigonométricas no triângulo retângulo e definiremos semelhança de triângulos para fins didáticos, pois esses tópicos serão necessários para uma melhor compreensão do desenvolvimento dos nossos objetivos.

Já no terceiro capítulo, faremos um estudo sobre arco e ângulo central, bem como o estudo das unidades de medida do arco como o grau e o radiano. Neste capítulo será evidenciado o porquê da preferência da unidade *radiano* em vez do *grau*.

A partir do quarto capítulo, faremos as definições das funções circulares, o estudo dos sinais, estudo de suas variações e os esboços de seus gráficos como funções periódicas. Ainda no quarto capítulo, veremos as relações fundamentais e desenvolveremos a ideia das relações recíprocas numa perspectiva geométrica, utilizando a semelhança de triângulos.

No quinto capítulo, faremos as deduções de várias fórmulas trigonométricas: fórmulas de adição, arco duplo, arco metade e transformação em produto de modo simples, mas sem deixar de lado o rigor que exige a Matemática.

No sexto capítulo, abordamos o cálculo da área de um triângulo usando o seno do ângulo compreendido entre dois lados conhecidos. Deduzimos a Lei dos Senos utilizando a fórmula para a área de um triângulo, apresentada anteriormente . Ainda no sexto capítulo faremos a dedução da Lei do Cosseno e ainda uma abordagem de soma de vetores, como aplicação prática da lei do cosseno .

Por fim, destinamos o sétimo capítulo para uma abordagem diferenciada no estudo das equações, sempre que possível utilizando o que foi estudado nos capítulos anteriores, objetivando sempre uma busca constante dos tópicos já vistos, no intuito de fixarmos qualitativamente os conhecimentos apresentados.

Capítulo 1

Um pouco da História da Trigonometria

O presente capítulo servirá como embasamento histórico para o desenvolvimento da Trigonometria. Além disso, traz fatos que auxiliam para um melhor entendimento de conceitos posteriores na Trigonometria Plana. As notas históricas de João Bosco Pitombeira de Carvalho, contidas em [5], apresentam importantes fases do desenvolvimento da trigonometria que serviram de suporte para a construção deste capítulo.

É bem verdade que devido às necessidades na Astronomia, na navegação e na Geografia, os conhecimentos acerca da trigonometria, primeiramente com triângulos esféricos (triângulos sobre superfície de uma esfera) datam, aproximadamente de 300 a.C.. Euclides, que viveu nessa época, desenvolveu em um de seus trabalhos, *"o Fenômenos"*, estudos sobre Geometria esférica.

Muitos contribuíram para o desenvolvimento da Trigonometria: Aristarco de Samos, que viveu em torno de 300 a.C., Apolônio de Perga que viveu em torno de 200 a.C., Teodósio, entre outros.

Aristarco de Samos, em seu livro "*Sobre as Distâncias do sol e da Lua*", utilizou raciocínio dedutivos corretos, contudo erros foram cometidos devidos aos dados experimentais de suas observações.

Deve-se a Hiparco de Nicéia (que viveu em torno de 120 a.C.), o título de fundador da Trigonometria. Não é muito o que se sabe sobre a vida de Hiparco. Hiparco foi o primeiro a determinar com precisão o nascer e o ocaso de várias estrelas, usando uma tabela de cordas que ele próprio calculou.

Os matemáticos gregos não usavam ainda o seno de um ângulo e sim a corda que determina o arco duplo, conforme Figura 1.1.

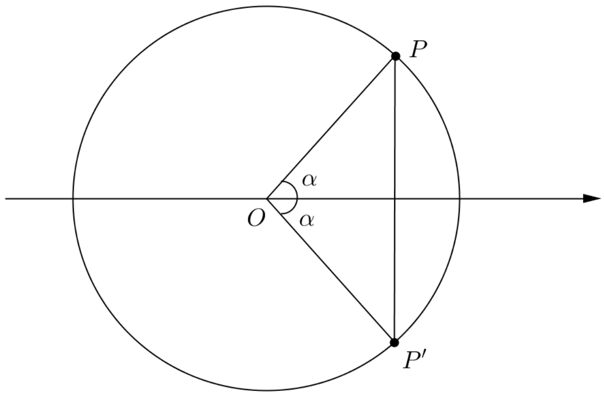


Figura 1.1: Corda de arco duplo

Um pouco depois, Hiparco e Menelao de Alexandria que viveu em torno de 100 a. C., já desenvolviam uma Trigonometria bem avançada, já com algumas demonstrações.

A Trigonometria grega atingiu seu ápice com Ptolomeu[1], já em 150 d.C.. Uma importante obra de Ptolomeu foi o *"Almagesto"*.

Ptolomeu deduziu expressões para $sen(a \pm b)$ e demonstrou para um ângulo agudo que

$$sen^2 A + cos^2 A = 1.$$

Muito da Trigonometria trazida por Ptolomeu no *"Almagesto"* ainda persistiu até o Renascimento.

Com os Hindus[2], a Trigonometria também tinha por finalidade a Astronomia. A Trigonometria hindu era essencialmente aritmética, enquanto a grega era predominantemente geométrica.

Os árabes introduziram a tangente, a cotangente, a secante e a cossecante, com o intuito de facilitar os cálculos.

A partir do Renascimento, a Trigonometria passou a ser utilizada em Cartografia e em Topografia, como já propunha Fibonnaci por volta de 1180 a 1250, em sua obra, *"Prática da Geometria"* de 1220.

[1] Cláudio Ptolemeu: (90 d.C.-168 d.C.), foi um cientista grego que viveu em Alexandria, uma cidade do Egito.

[2] Povos que habitavam o vale do rio Indo, situado entre o Paquistão e a Índia.

Copérnico (1473-1543) produziu partes substanciais dedicadas à Trigonometria e com demonstração de grande domínio do assunto.

George Joaquim Rético (1514-1576) fundiu as ideias de Copérnico e Regiomontano e ainda com suas próprias contribuições, produziu o mais completo tratado de Trigonometria até então publicado. O tratamento dispensado por Rético assemelha-se como o que é feito até hoje.

O matemático francês François Vieta (1540-1603) sistematizou o estudo da Trigonometria esférica. Deduziu fórmulas para $sen(n\theta)$ e $cos(n\theta)$, bem como,

$$sen\alpha - sen\beta = 2sen\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right).cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right).$$

Paralelamente, também na Europa, identidades como

$$2cosA.cosB = cos(A+B) + cos(A-B),$$

já estavam sendo utilizadas. Nessa época já existiam boas tabelas trigonométricas, com até 15 casas decimais.

A prostaférese (substituição de produtos por somas) antecedeu a ideia dos logaritmos como técnica para simplificar cálculos. Para multiplicar números com muitas casas decimais, após transformações convenientes, eram usados tábuas de *cossenos*.

A partir de Galileu (1564-1642), Descartes (1596-1650) e Fermat (1601-1665), muito foi desenvolvido no estudo das curvas.

A curva seno foi introduzida por Roberval (1602-1675), no livro Mecânica de Wallis (1616-1703) publicado em 1670.

Já nos séculos XVIII e XIX, as funções trigonométricas passaram a ser vistas como essenciais na resolução de certos problemas na Matemática e na Física. A introdução das séries de Fourier evidenciou ainda mais a importância das funções trigonométricas na Análise Matemática moderna e em várias aplicações.

A palavra Trigonometria vem do grego: trígonos, que significa “triângulo", e métron, “medida".

Capítulo 2

Razões trigonométricas em um triângulo retângulo

As razões trigonométricas são de grande importância para o estudo da trigonometria, no que tange ao triângulo retângulo e à trigonometria no círculo. Sendo assim, serão aqui mostradas estas relações, além da construção de uma breve relação de ângulos notáveis, onde cabe ressaltar que esta construção não é encontrada na maior parte das bibliografias adotadas para o ensino médio ou fundamental, onde estes valores são dados, em geral, na forma de tabelas.

Consideremos o triângulo ABC abaixo, retângulo no vértice A.

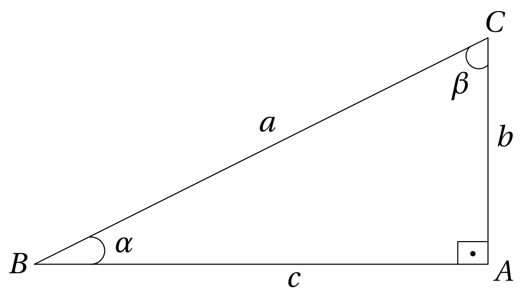


Figura 2.1: Triângulo retângulo ABC

Temos necessariamente que α e β são ângulos agudos. Os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ são denominados catetos (do grego, vertical ou perpendicular) e $\overline{BC}$ é a hipotenusa (que significa linha estendida por baixo).

Em relação ao ângulo agudo α, o cateto $\overline{AB}$ é dito adjacente enquanto o cateto $\overline{AC}$ é dito oposto. Em relação ao ângulo β, o cateto $\overline{AC}$ é dito adjacente enquanto o cateto $\overline{AB}$ é dito oposto.

Definem-se em um triângulo retângulo, as seguintes razões trigonométricas dos ângulos agudos α e β.

2.1 Seno

- *Seno*$\longrightarrow$ é a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa.

$$sen\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{b}{a} \quad \text{e} \quad sen\beta = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{c}{a}.$$

2.2 Cosseno

- *Cosseno*$\longrightarrow$ é a razão entre o cateto adjacente e a hipotenusa.

$$cos\alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{c}{a} \quad \text{e} \quad cos\beta = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{b}{a}.$$

2.3 Tangente

- *Tangente*$\longrightarrow$ é a razão entre o cateto oposto e a cateto adjacente.

$$tg\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{b}{c} \quad \text{e} \quad tg\beta = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{c}{b}.$$

A tangente de um ângulo agudo α pode ser obtida quando são conhecidos $sen\alpha$ e $\cos\alpha$. Como já foi definido, $tg\alpha = \frac{b}{c}$. Dividindo-se o numerador e o denominador por “a" , teremos:

$$tg\alpha = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{sen\alpha}{cos\alpha}.$$

Portanto,

$$tg\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha}.$$

Alguns ângulos, como por exemplo, 30°, 45° e 60°, ocorrem com muita frequência em problemas iniciais de Trigonometria Plana. Com um pouco de conhecimento de Geometria básica, podemos obter os senos, cossenos e tangentes desses ângulos.

Consideremos um quadrado de lado l. Sabemos que suas diagonais medem $l\sqrt{2}$ e ainda dividem o quadrado em dois triângulos retângulos isósceles conforme a Figura 2.2:

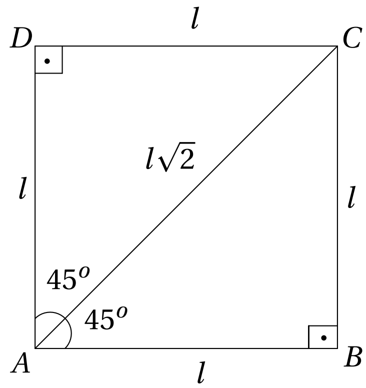


Figura 2.2: Quadrado de lado l

No triângulo retângulo ABC obtido, temos:

- $sen45^o = \dfrac{l}{l\sqrt{2}} \Longrightarrow sen45^o = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;
- $cos45^o = \dfrac{l}{l\sqrt{2}} \Longrightarrow cos45^o = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;
- $tg45^o = \dfrac{l}{l} \Longrightarrow tg45^o = 1$.

Consideremos agora um triângulo equilátero de lado l. Sabemos que sua altura h mede $\dfrac{l\sqrt{3}}{2}$ e divide o triângulo equilátero em dois triângulos retângulos congruentes, cujos ângulos agudos são 30° e 60°, conforme a Figura 2.3:

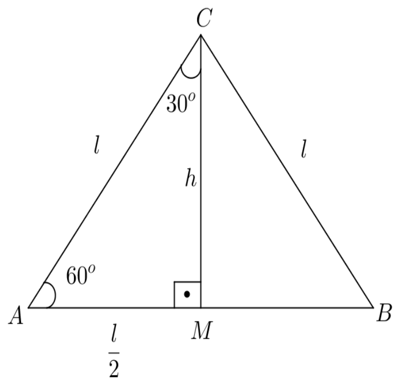


Figura 2.3: Triângulo equilátero

Para o triângulo retângulo AMC, temos:

- $sen30^o = \dfrac{\frac{l}{2}}{l} = \dfrac{l}{2}.\dfrac{1}{l} \Longrightarrow sen30^o = \dfrac{1}{2}$;
- $cos30^o = \dfrac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \dfrac{l\sqrt{3}}{2}.\dfrac{1}{l} \Longrightarrow cos30^o = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;
- $tg30^o = \dfrac{\frac{l}{2}}{\frac{l\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{l}{2}.\dfrac{2}{l\sqrt{3}} \Longrightarrow tg30^o = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

E ainda,

- $sen60^o = \dfrac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \dfrac{l\sqrt{3}}{2}.\dfrac{1}{l} \Longrightarrow sen60^o = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;
- $cos60^o = \dfrac{\frac{l}{2}}{l} = \dfrac{l}{2}.\dfrac{1}{l} \Longrightarrow cos60^o = \dfrac{1}{2}$;
- $tg60^o = \dfrac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{\frac{l}{2}} = \dfrac{l\sqrt{3}}{2}.\dfrac{2}{l} \Longrightarrow tg60^o = \sqrt{3}$.

O exemplo seguinte, motiva uma importante aplicação das razões trigonométricas[5].

Exemplo 2.1 *Seja um objeto de altura conhecida h. Mede-se o ângulo θ que faz a reta $\overleftrightarrow{BC}$ do horizonte de B com o segmento vertical $\overline{BO}$, Figura 2.4.*

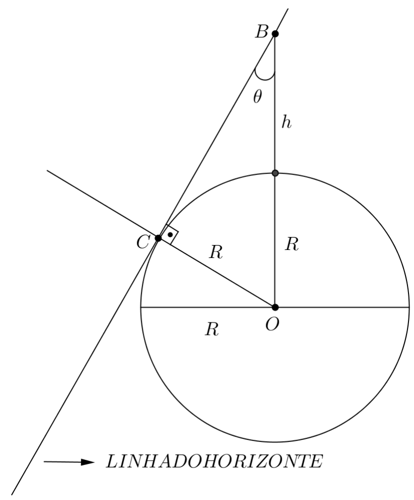


Figura 2.4: Ilustração da terra

Determine o raio aproximado da terra.

Resolução:

O triângulo BCO é retângulo em C. Tem-se:

$$sen\theta = \frac{R}{R+h}.$$

Daí, segue-se que,

$$Rsen\theta + hsen\theta = R.$$

Isolando e pondo R em evidência, teremos

$$R(1-sen\theta) = hsen\theta,$$

ou seja,

$$R = \frac{hsen\theta}{1-sen\theta}.$$

Portanto, conhecendo-se h, θ e uma tabela de senos, teremos uma medida aproximada do raio R da Terra. ■

Exemplo 2.2 *Considere dois círculos de raios r e R, centrados em A e B, respectivamente, que são tangentes externamente e cujas retas tangentes comuns formam um ângulo de* 60^o.

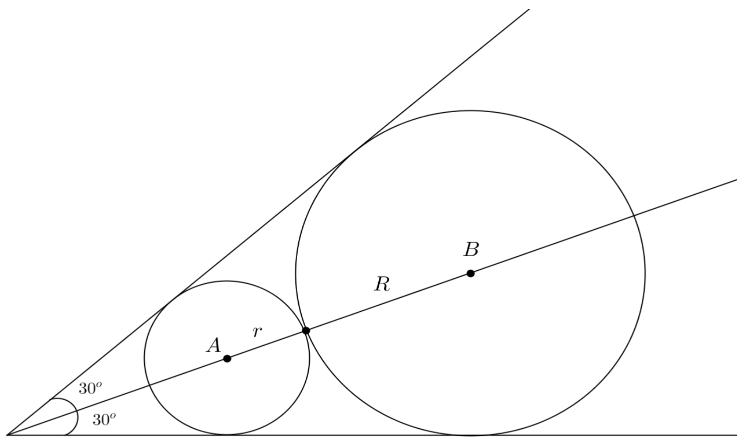


Figura 2.5: Círculos tangentes externamente

Qual a distância entre as projeções dos centros A e B sobre a tangente horizontal, em função de r ?

Resolução:

Representando por A' e B', respectivamente as projeções dos centros A e B sobre a tangente horizontal. Seja X um ponto do segmento $\overline{BB'}$, tal que $\overline{AX}$ seja paralelo a $\overline{A'B'}$. Temos que o triângulo BXA é retângulo em X e o ângulo $X\widehat{A}B$ mede 30^o.

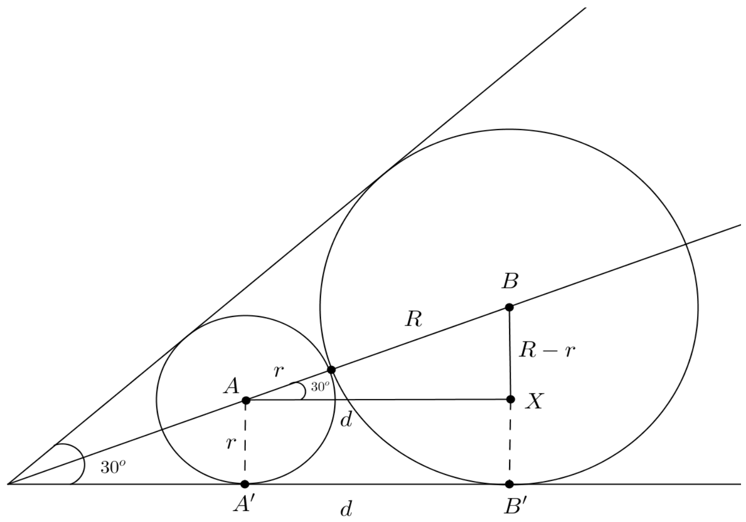


Figura 2.6: Círculos tangentes externamente

Aplicando a razão seno no triângulo BXA, temos:

$$sen30^o = \frac{R-r}{R+r},$$

ou seja,

$$\frac{1}{2} = \frac{R-r}{R+r}.$$

Pela propriedade fundamental das proporções, obtemos $2R - 2r = R + r$, ou ainda, $R = 3r$.

Como $R = 3r$, temos que $\overline{AB} = R + r = 4r$ e $\overline{BX} = R - r = 2r$. Seja a distância procurada d de A' a B', podemos obtê-la pelo teorema de Pitágoras no triângulo BXA:

$$d^2 + (2r)^2 = (4r)^2 \Longrightarrow d^2 = (4r)^2 - (2r)^2 = 12r^2 \Longrightarrow d = \sqrt{12r^2}.$$

Portanto, a distância procurada é $d = 2r\sqrt{3}$. ■

Capítulo 3

Medidas dos Arcos e dos Ângulos

Neste capítulo, estabelecemos as medidas de arco, comprimento de um arco e desenvolvemos a ideia de círculo trigonométrico. Estes elementos são indispensáveis ao estudo das funções circulares.

Sabe-se dos estudos da Geometria Plana, que um arco de circunferência e um ângulo central correspondente têm em comum o mesmo número como medida, sempre que for considerado para a unidade de ângulo, o ângulo central correspondente à unidade de arco.

De agora em diante, usaremos sempre a expressão arco quando nos referirmos a ângulo central.

É necessário então que seja estabelecida uma unidade de medida de arco.

Sabe- se da existência de várias unidades de medida de arco. Faremos o uso de duas das mais utilizadas: o *grau* e o *radiano*, onde esta última com uma maior frequência.

3.1 O grau (°)

Considerada como uma medida sexagesimal -é o arco que corresponde a $\frac{1}{90}$ de um ângulo reto ou a $\frac{1}{360}$ da circunferência. Cada 1 grau (1°) subdivide-se em 60 minutos ($60'$) e cada 1 minuto em 60 segundos ($60''$).

Assim:

$$1^\circ = 60' \quad \text{e} \quad 1' = 60''.$$

3.2 O radiano (rad)

Considerada como unidade do sistema circular - é o arco de circunferência cujo comprimento coincide com a medida do raio da circunferência que o contém.

Como o comprimento de uma volta de circunferência é dado por $2\pi r$, segue que:

$$\begin{array}{ccc} \textit{Comprimento} & & \textit{Medida} \\ 2\pi r & \longrightarrow & \alpha \\ r & \longrightarrow & 1rad \end{array}$$

Ou seja, $\alpha = 2\pi\ rad$. Assim, temos que o arco de uma volta tem por medida $2\pi\ rad$.

Naturalmente, sentimo-nos motivados a relacionar tais unidades.

Como o arco de uma volta corresponde a $360°$ e a $2\pi\ rad$, teremos: $360° = 2\pi\ rad$, ou mais simplificadamente, $180° = \pi\ rad$.

Com a utilização de uma regra de três simples, facilmente pode-se determinar a medida correspondente do arco na outra unidade.

Vejamos os exemplos:

Exemplo 3.1 *Converta* $40°$ *para radiano.*

Resolução:

Seja α a medida do arco equivalente em radiano, temos:

$$\begin{array}{ccc} 180° & \longrightarrow & \pi rad \\ 40° & \longrightarrow & \alpha \end{array}$$

Temos que

$$180°.\alpha = 40°.\pi rad \Longrightarrow \alpha = \frac{40°\pi}{180°} rad.$$

Simplificando, teremos: $\alpha = \frac{2\pi}{9} rad.$■

Exemplo 3.2 *Qual é a medida em graus, minutos e segundos de* $1rad$ *?*

Resolução:

Seja α a medida do arco equivalente em graus, minutos e segundos.

$$\begin{array}{ccc} 180° & \longrightarrow & \pi rad \\ \alpha & \longrightarrow & 1rad \end{array}$$

Temos que

$$\pi.\alpha = 180^\circ \Longrightarrow \alpha = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ = (57,29577951...)^\circ,$$

ou ainda

$$\alpha = 57^\circ + 0,29577951\cdots.60' = 57^\circ 17' + (0,746770784\cdots).60'' = 57^\circ 17' 44'', 806\cdots.$$

Dada a grande utilização, é conveniente que se conheça de forma mais imediata algumas correspondências:

$$30^\circ = \frac{\pi}{6} rad \qquad 45^\circ = \frac{\pi}{4} rad \qquad 60^\circ = \frac{\pi}{3} rad \qquad 90^\circ = \frac{\pi}{2} rad$$

$$120^\circ = \frac{2\pi}{3} rad \qquad 135^\circ = \frac{3\pi}{4} rad \qquad 150^\circ = \frac{5\pi}{6} rad \qquad 180^\circ = \pi rad$$

$$210^\circ = \frac{7\pi}{6} rad \qquad 225^\circ = \frac{5\pi}{4} rad \qquad 240^\circ = \frac{4\pi}{3} rad \qquad 270^\circ = \frac{3\pi}{2} rad$$

$$300^\circ = \frac{5\pi}{3} rad \qquad 315^\circ = \frac{7\pi}{4} rad \qquad 330^\circ = \frac{11\pi}{6} rad \qquad 360^\circ = 2\pi rad$$

3.3 Comprimento de um arco

Sempre que se tem um arco com medida em radiano, o comprimento desse arco é obtido imediatamente pelo produto da medida do arco pelo raio da circunferência.

Seja l o comprimento de um arco de medida α radianos numa circunferência de raio r. Teremos:

$$l = \alpha.r.$$

Muitos serão os casos, no decorrer deste texto, que faremos referências a circunferências de raio unitário, isto é, quando $r = 1$. Nesses casos, o comprimento l do arco, identifica-se com sua medida α em radianos, isto é, $l = \alpha$ unidades de comprimento. A preferência da unidade *radiano,* se dá exatamente por esse motivo, uma vez que fica fácil associar a cada comprimento de arco, um número real correspondente, identicamente.

Caso a medida do arco seja dada em graus, têm-se duas possibilidades para a obtenção de seu comprimento:

- Converter a medida do arco para radiano e, em seguida, efetuar o produto desse arco pelo raio da circunferência;

- Recorrermos à regra de três simples:

$$\begin{array}{ccc} \textit{Arco} & & \textit{Comprimento} \\ 360^\circ & \longrightarrow & 2\pi r \\ \alpha & \longrightarrow & l \end{array}$$

Daí, segue:

$$l = \frac{\alpha.\pi.r}{180^\circ}.\blacksquare$$

Exemplo 3.3 *Qual o comprimento de um arco de* 72° *em uma circunferência cujo raio mede* $\left(\frac{10}{\pi}\right) cm$*?*

Resolução:

Seja l o comprimento do arco, teremos:

$$l = \frac{\alpha.\pi.r}{180^\circ} = \frac{72^\circ.\pi.\left(\frac{10}{\pi}\right)}{180^\circ} = \frac{720}{180} = 4cm.$$

Portanto, o comprimento procurado do arco é $l = 4cm$.■

Exemplo 3.4 *Calcular o comprimento de um arco que mede* $1,5rad$ *em uma circunferência de raio* $\frac{4}{3}m$*.*

Resolução:

Seja l o comprimento do arco, teremos:

$$l = \alpha.r = 1,5.\frac{4}{3} = 2m.$$

Portanto, o comprimento procurado do arco é $l = 2m$.■

3.4 Circunferência Orientada

Seja uma circunferência de centro O. Tomemos um ponto A nessa circunferência. Para determinarmos um arco com origem em A, podemos percorrer dois sentidos: o anti-horário (chamado de positivo) ou o horário (chamado de negativo), conforme a Figura 3.1.

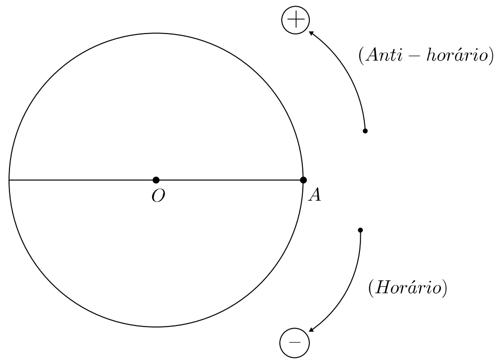


Figura 3.1: Circunferência orientada

Chama-se de circunferência orientada, toda circunferência na qual se estabelece um sentido de deslocamento como sendo positivo. Em geral, utiliza-se o sentido positivo para a representação dos arcos trigonométricos.

3.5 Arco Orientado

Sejam dois pontos A e B distintos de uma mesma circunferência orientada. Consideremos o arco $\widehat{AB}$ de origem em A e extremidade em B, no sentido positivo. Não necessariamente o arco $\widehat{AB}$ terá medida inferior a $2\pi rad$ ou 360°. O arco $\widehat{AB}$ pode representar um arco após uma, duas ou até um número grande de voltas na circunferência orientada.

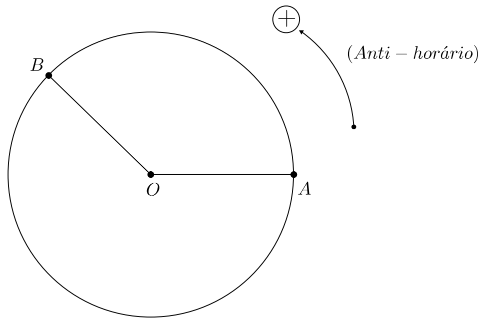


Figura 3.2: Arco orientado

Quando a medida do arco $\widehat{AB}$ vier precedida do sinal positivo (+), diz-se que a extremidade B foi localizada percorrendo-se o sentido anti-horário e quando vier precedida do sinal negativo (−), a extremidade B foi localizada percorrendo-se o sentido horário.

Diz-se que dois arcos são côngruos quando possuem as mesmas extremidades, ainda que sejam determinados em voltas distintas. Assim, se considerarmos o arco $\widehat{AB}$ com medida α, teremos como congruentes a α os arcos:

$$\alpha, \alpha+2\pi, \alpha+4\pi, \alpha+6\pi, \cdots, \{\alpha+2k\pi,\ \forall k \in \mathbb{Z}\}$$

ou, de forma equivalente,

$$\alpha, \alpha+360^\circ, \alpha+720^\circ, \alpha+1080^\circ, \cdots, \{\alpha+k360^\circ,\ \forall k \in \mathbb{Z}\}.$$

Resumidamente, pode-se escrever conforme [3].

$$\widehat{AB} \equiv \alpha(mod.2\pi) \quad \text{ou} \quad \widehat{AB} \equiv \alpha(mod.360^\circ).$$

Nota: Com respeito à notação acima, vale recordar que $a \equiv b(mod.r)$, onde se lê, a é congruente a b módulo r, corresponde a dizer que r divide $a-b$, ou, $a-b$ é múltiplo de r .

Podemos dizer então que, por exemplo:

$$780^\circ \equiv 60^\circ(mod.360^\circ) \quad \text{e} \quad \frac{33\pi}{4} \equiv \frac{\pi}{4}(mod.2\pi).$$

Dá-se o nome de primeira determinação positiva ao menor dos arcos não negativo, côngruo a um arco dado. Obviamente que a primeira determinação positiva deve obedecer

$$0 \leq \alpha < 2\pi rad \quad \text{ou} \quad 0^\circ \leq \alpha < 360^\circ.$$

Nos dois últimos casos, temos 60° e $\frac{\pi}{4}rad$ como primeira determinação positiva de 780° e de $\frac{33\pi}{4}$, respectivamente.

3.6 Círculo Trigonométrico ou Ciclo Trigonométrico

Dá-se o nome de círculo trigonométrico a um círculo orientado de raio unitário ($r = 1$).

Seja um sistema cartesiano de eixos ortogonais Ox e Oy no círculo trigonométrico de centro O. A orientação que está indicada na Figura 3.3 continua sendo a positiva.

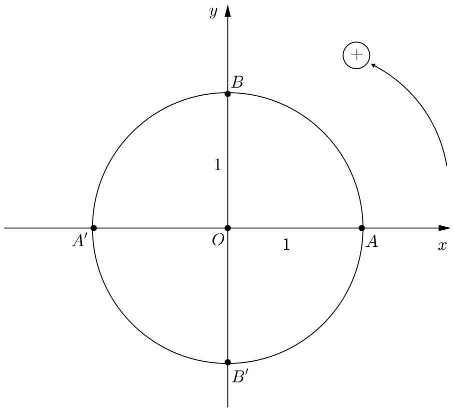


Figura 3.3: Círculo trigonométrico

Como o raio do círculo trigonométrico é $r = 1$, as coordenadas de A e A' serão $(1,0)$ e $(-1,0)$ enquanto que, as coordenadas de B e B' serão $(0,1)$ e $(0,-1)$, respectivamente.

O ponto A é sempre considerado origem dos arcos representados no círculo trigonométrico.

Cada uma das quatro regiões determinadas pelos eixos Ox e Oy é denominada quadrante. Por convenção ficam estabelecidos os quatro quadrantes como indicados na Figura 3.4.

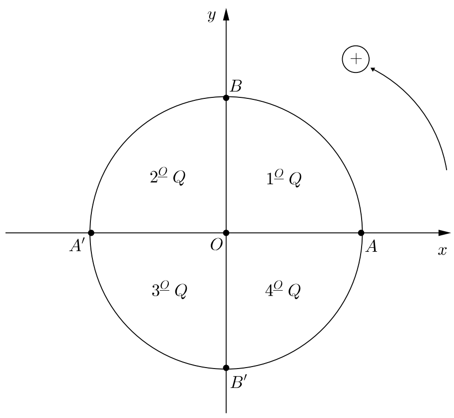


Figura 3.4: Círculo trigonométrico

Assim, as regiões compreendidas entre os arcos $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BA'}$, $\overset{\frown}{A'B'}$ e $\overset{\frown}{B'A}$ correspondem, respectivamente, ao 1º, 2º, 3º e 4º quadrantes.

Capítulo 4

Funções Circulares

As funções circulares aqui definidas, são exploradas utilizando-se os conhecimentos de coordenadas cartesianas, um pouco de semelhança e ainda as definições das razões trigonométricas dadas para um triângulo retângulo, no Capítulo 2. A abordagem das funções circulares neste capítulo, é feita de um modo geral, mais de forma geométrica que propriamente algébrica.

Seja P um ponto da circunferência do círculo trigonométrico, distinto de A. Fica então determinado $\overparen{AP}$ com origem A e extremidade P. Indicaremos por α a medida do arco $\overparen{AP}$.

Tracemos duas retas tangentes (t e t') à circunferência. A primeira passando em A e a outra em B. Tracemos por sua vez uma terceira tangente (t'') à circunferência passando em P, conforme descrito na Figura 4.1.

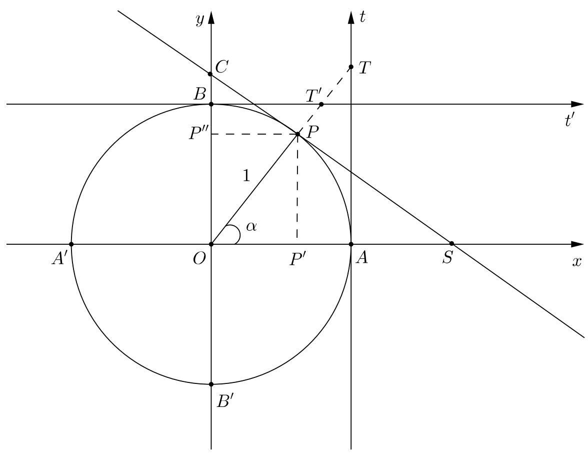


Figura 4.1: Círculo trigonométrico

Sejam C e S respectivamente os pontos de intersecção da terceira tangente com os eixos Ox e Oy.

Sejam ainda T' e T os pontos de intersecção da reta $\overleftrightarrow{OP}$ com as tangentes t' e t.

Naturalmente que P' corresponde à abscissa de P e P'' à ordenada de P. Ficam assim definidas as funções circulares.

4.1 Seno e cosseno

Definem-se por *seno* e *cosseno* do arco α, como sendo a ordenada e a abscissa de sua extremidade P, que representaremos por $sen\alpha$ (seno de α) e $cos\alpha$ (cosseno de α). Assim, conforme a figura 4.1:

$$sen\alpha = \overline{P'P} = \overline{OP''} \quad \text{e} \quad cos\alpha = \overline{P''P} = \overline{OP'}.$$

O eixo Ox, suporte do segmento $\overline{OP'}$ é o eixo dos cossenos e o eixo Oy, suporte do segmento $\overline{OP''}$ é o eixo dos senos.

Definição 4.1 (Função Limitada) *Uma função f é dita limitada, em seu domínio, quando sua imagem está contida num intervalo , ou seja, $Imf \subset [a,b]$, onde a e $b \in R$.*

De acordo com a definição acima, temos que as funções seno e cosseno são limitadas.

4.2 Tangente e cotangente

Definem-se por *tangente* e *cotangente* do arco α, como sendo respectivamente as medidas dos segmentos $\overline{AT}$ e $\overline{BT'}$, que representamos por $tg\alpha$ (tangente de α) e $cotg\alpha$ (cotangente de α). Assim, conforme a figura 4.1:

$$tg\alpha = \overline{AT} \quad \text{e} \quad cotg\alpha = \overline{BT'}.$$

Diz-se também que o eixo suporte do segmento $\overline{AT}$ é o eixo das tangentes e o eixo suporte do segmento $\overline{BT'}$ é o eixo das cotangentes.

4.3 Secante e cossecante

Definem-se por *secante* e *cossecante* do arco α, como sendo respectivamente as medidas dos segmentos $\overline{OT}$ e $\overline{OT'}$, que representamos por $sec\alpha$ (secante de α) e $cossec\alpha$ (cossecante de α). Assim, conforme a figura 4.1:

$$sec\alpha = \overline{OT} \quad \text{e} \quad cossec\alpha = \overline{OT'}.$$

A secante e a cossecante do arco α também correspondem, respectivamente, à abscissa do ponto S e à ordenada do ponto C, conforme na Figura 4.1. Assim:

$$sec\alpha = \overline{OS} \quad \text{e} \quad cossec\alpha = \overline{OC}.$$

4.4 Sinal das funções circulares

Para conhecermos o sinal das funções, basta supormos a extremidade P do arco $\overset{\frown}{AP}$, em cada um dos quadrantes.

Percebe-se que as funções duas a duas têm o mesmo sinal:

(i) As funções seno e cossecante são positivas no primeiro e segundo quadrante e negativas no terceiro e quarto quadrante;

(ii) As funções cosseno e secante são positivas no primeiro e quarto quadrante e negativas no segundo e terceiro quadrante;

(iii) As funções tangentes e cotangente são positivas no primeiro e terceiro quadrante e negativas no segundo e quarto quadrante. Resumindo, teremos:

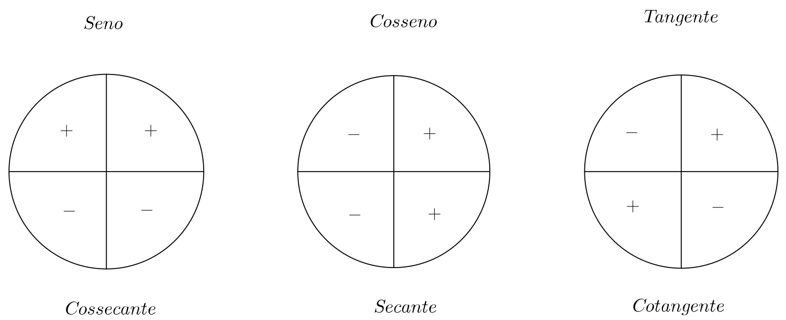


Figura 4.2: Sinal das funções circulares

Exemplo 4.2 *Mostre, geometricamente, que* $sec45° = cossec45° = \sqrt{2}$.

Resolução:

Vejamos a circunferência trigonométrica e os pontos assinalados, como mostra a Figura 4.3:

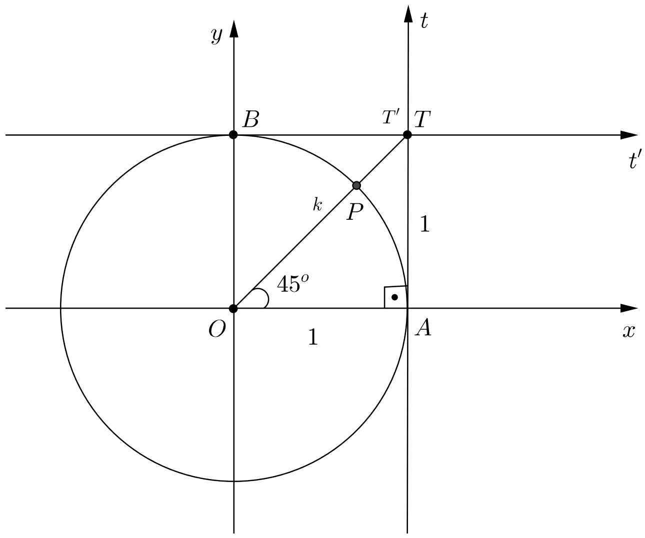


Figura 4.3: Secante e cossecante de 45° no ciclo

Para o arco $\widehat{AP} = 45°$, o triângulo OAT é retângulo isósceles. Nesse caso teremos T' e T coincidentes, o que acarreta em

$$sec45° = cossec45°,$$

pois ocorre $\overline{OT} = \overline{OT'}$.

Fazendo $\overline{OT} = \overline{OT'} = k$ e aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo OAT, obtém-se:

$$k^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \Longrightarrow k = \sqrt{2}.$$

Portanto,

$$sec45° = cossec45° = \sqrt{2}. \blacksquare$$

Exemplo 4.3 *Mostre, geometricamente, que* $tg22°30' = \sqrt{2} - 1$.

Resolução:

Vejamos a circunferência trigonométrica e os pontos assinalados, como mostra a Figura 4.4:

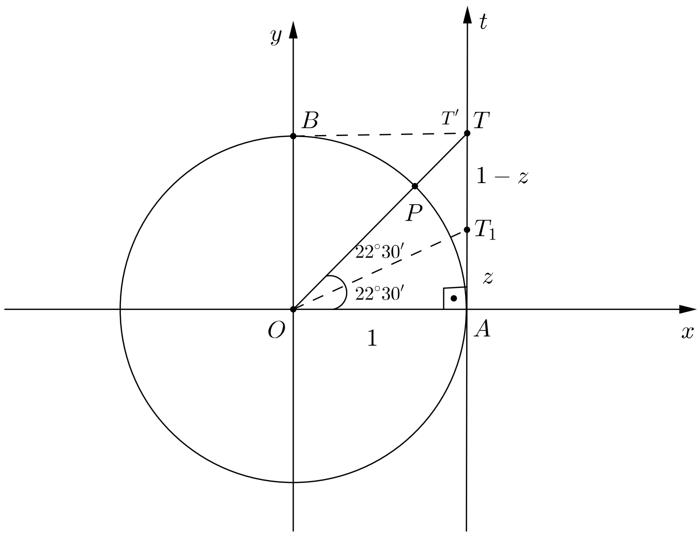


Figura 4.4: Tangente de $tg22°30'$

Construindo-se $\widehat{AP} = 45°$, segue que $tg45° = 1$, imediatamente, pois o triângulo OAT é isósceles o que resulta em $\overline{AT} = \overline{OA} = 1$.

Construindo-se $\overline{OT_1}$ como bissetriz interna ao ângulo $A\hat{O}T$, segue que:

$$A\hat{O}T_1 = 22°30'.$$

Fazendo $tg22°30' = \overline{AT_1} = z$, teremos:

$$\overline{T_1T} = 1 - z.$$

Vale lembrar que $\overline{OT} = \sqrt{2}$ e $\overline{OA} = 1$. Utilizando-se o teorema da bissetriz Interna, segue que:

$$\frac{\sqrt{2}}{1-z} = \frac{1}{z} \Longleftrightarrow z\sqrt{2} = 1 - z \Longleftrightarrow z = \frac{1}{\sqrt{2}+1} \Longleftrightarrow z = \frac{1.(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}.$$

Segue que:

$$z = \sqrt{2} - 1.$$

Portanto, $tg22°30' = \sqrt{2} - 1$, como queríamos demonstrar. ■

Mais adiante, veremos como calcular $tg22°30'$, com o uso de fórmulas.

4.5 Crescimento e Decrescimento

A variação do seno pode ser resumida assim:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$senx$	0	$1(máx)$	0	$-1(mín)$	0
$variação$		$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

De posse de alguns valores para $senx$ e de sua variação podemos traçar um esboço de um gráfico bastante aproximado da função $y = senx$.

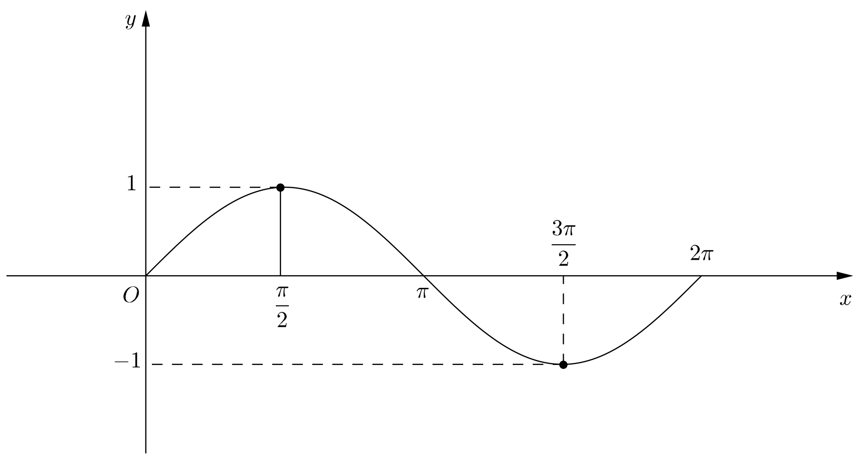


Figura 4.5: Função seno

O gráfico da função acima é chamado *senóide.*

A variação do cosseno pode ser resumida assim:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$cosx$	$1(máx)$	0	$-1(mín)$	0	1
$variação$		$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

Pode ser traçado um esboço de um gráfico bem aproximado da função $y = cosx$.

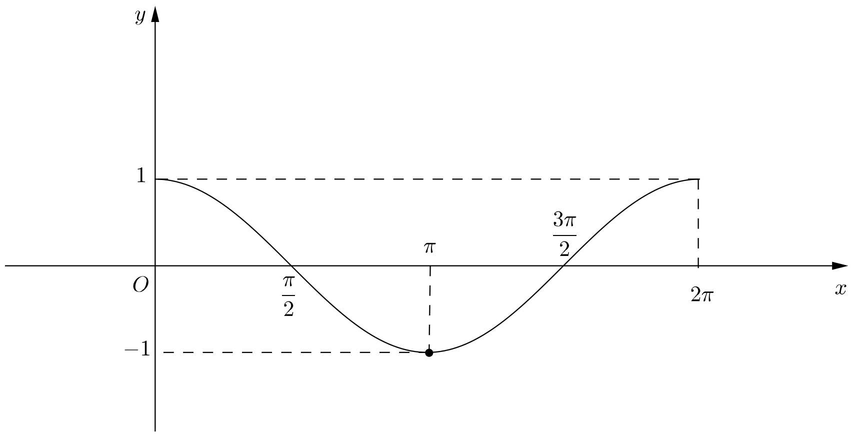


Figura 4.6: Função cosseno

O gráfico da função cosseno é chamado *senóide*.

Nota: Os gráficos das funções seno e cosseno correspondem à mesma curva, por isso recebem o mesmo nome.

Para fazermos os gráficos completos de $y = senx$ e de $y = cosx$, deveríamos repetir indefinidas cópias desses esboços á esquerda e à direita, fazendo com que x varie em todos os reais.

A variações da tangente e da cotangente podem ser resumida conforme o quadro abaixo:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
tgx	0		$\nexists$		0		$\nexists$		0
$variação$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	
$cotgx$	$\nexists$		0		$\nexists$		0		$\nexists$
$variação$		$\searrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\searrow$	

Podemos concluir que a função $y = tgx$ é sempre crescente enquanto $y = cotgx$ é sempre decrescente.

O gráfico de $y = tgx$ é a *tangentóide*.

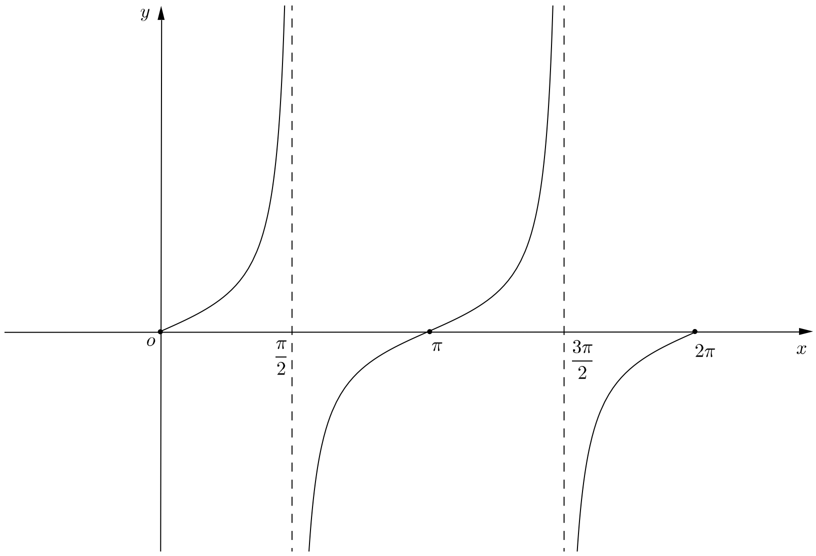


Figura 4.7: Função tangente

O gráfico de $y = cotgx$ é a cotangentóide.

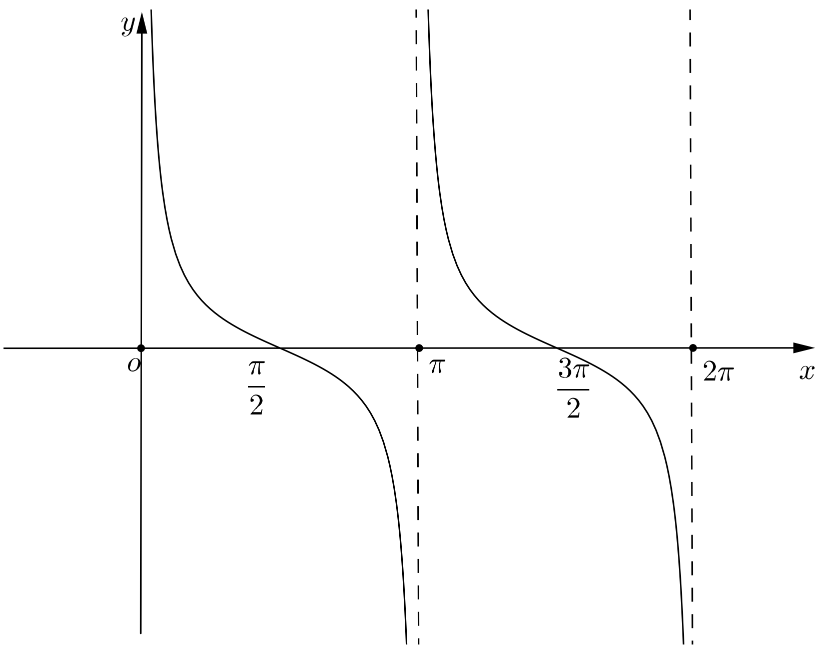


Figura 4.8: Função cotangente

Conclui-se ainda que a tangente e a cotangente variam no intervalo ilimitado $(-\infty, +\infty)$.

As variações da *secante* e da *cossecante* podem ocorrer da seguinte forma:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$secx$	1		$\nexists$		-1		$\nexists$		1
$variação$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$	
$cossecx$	$\nexists$		1		$\nexists$		-1		$\nexists$
$variação$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

O gráfico de $y = secx$ é chamado de *secantóide*.

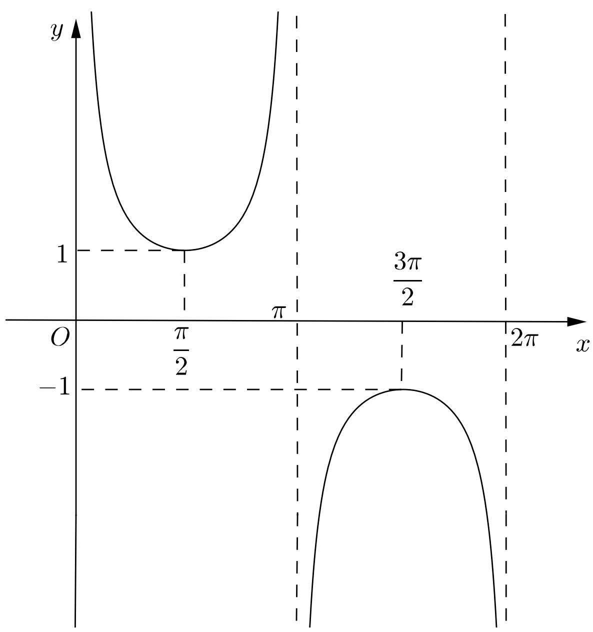


Figura 4.9: Função secante

O gráfico de $y = cossecx$ é chamado de *cossecantóide*.

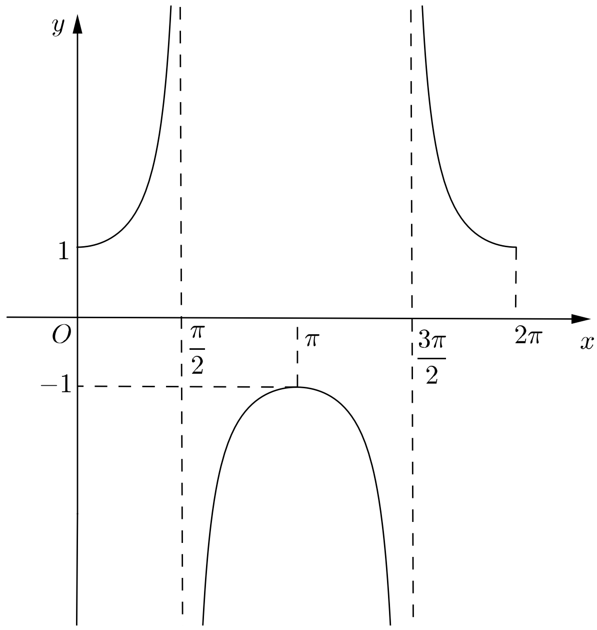


Figura 4.10: Função cosecante

Conclui-se ainda que a secante e a cossecante variam no intervalo $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$. Do exposto acima, vimos que as funções seno e cosseno são limitadas, enquanto as funções, secante, cossecante, tangente e cotangente são ilimitadas.

Exemplo 4.4 *Determine o valor máximo e o mínimo assumidos pelas funções:*

(a) $f(x) = 4 + 3senx$

(b) $f(x) = -2 + 4cosx$

(c) $f(x) = sen(e^{-x})$

Resolução (a):

Vimos que a função seno é limitada no intervalo [-1,1], ou seja, $-1 \leq senx \leq 1$. Assim sendo, multiplicando-se por 3 todos os membros dessa expressão, teremos:

$$-3 \leq 3senx \leq 3.$$

Adicionando-se 4, a todos os termos da expressão acima, segue:

$$4-3 \leq 4+3senx \leq 4+3 \Longrightarrow 1 \leq 4+3senx \leq 7.$$

Portanto, o valor mínimo será 1 e o valor máximo será 7.

Resolução (b):

Vimos que a função cosseno é limitada no intervalo [-1,1], ou seja, $-1 \leq cosx \leq 1$. Assim sendo, multiplicando-se por 4 todos os membros dessa expressão, teremos:

$$-4 \leq 4senx \leq 4.$$

Adicionando-se -2, a todos os termos da última expressão, segue,

$$(-2)-4 \leq -2+4senx \leq (-2)+4 \Longrightarrow -6 \leq -2+4senx \leq 2.$$

Portanto, o valor mínimo será -6 e o valor máximo será 2.

Resolução (c):

Teremos agora uma função com um coportamento diferente quando analisamos $x<0$ ou x suficientemente grande.

Para x suficientemente grande, a expressão e^{-x}, certamente vai para zero e consequentemente, $sen(e^{-x}) = sen0 = 0$.

Para $x<0$, a expressão e^{-x} terá variação em R_{+}, o que corresponde a afirmar que $sen(e^{-x})$ estará limitado no intervalo [-1,1].

Portanto, o valor mínimo será -1 e o valor máximo será 1.

Exemplo 4.5 *Determine os possíveis valores de k para que a expressão*

$$cosx = \frac{2k-3}{5}$$

esteja bem definida.

Resolução:

Já vimos que $cosx$ deve estar compreendido entre -1 e 1, isto é, $-1 \leq cosx \leq 1$. Substituindo $cosx$ por $\frac{2k-3}{5}$, segue:

$$-1 \leq \frac{2k-3}{5} \leq 1.$$

Multiplicando por 5 a última expressão, teremos:

$$-5 \leq 2k - 3 \leq 5 \Longrightarrow -5 + 3 \leq 2k \leq 5 + 3$$

onde $-2 \leq 2k \leq 8 \Longrightarrow -1 \leq k \leq 4$.

Portanto, os possíveis valores de k são tais que $-1 \leq k \leq 4$.

4.6 Arcos Simétricos

Dois arcos orientados são simétricos quando a soma de suas medidas algébricas é nula, isto é, zero.

Denota-se por $-x$ a medida algébrica do arco simétrico a x.

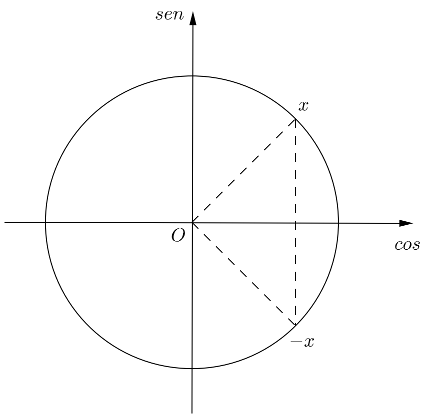


Figura 4.11: Arcos simétricos

Definição 4.6 *Uma função f é dita par quando qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$, tem-se $f(-x) = f(x)$ e é dita ímpar quando para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se $f(-x) = -f(x)$.*

Conforme essa definição, as funções $senx$, tgx, $cotgx$ e $cossecx$ são ímpares, enquanto $cosx$ e $secx$ são pares. Assim, ocorre que:

- $sen(-60°) = -sen60°$
- $cos(\pi - x) = cos(x - \pi)$
- $cotg(a - b) = -cotg(b - a)$

4.7 Redução ao primeiro quadrante

É de extrema importância a redução da extremidade de um arco ao primeiro quadrante, pois dessa forma, os cálculos das funções circulares já vistas, ficam reduzidos aos cálculos das funções para um arco de $0\,rad$ a $\frac{\pi}{2}\,rad$, a menos do sinal.

Os valores associados às funções trigonométricas serão os mesmos em valor absoluto quando da redução ao primeiro quadrante. Resta então a preocupação do sinal correto do valor da função associado à extremidade do arco original.

Para reduzirmos um arco ao primeiro quadrante, pode-se proceder das seguintes maneiras:

(i) Obtém-se a primeira determinação positiva do arco dado, o que nos leva à determinação do quadrante da extremidade do arco. Caso já o seja do primeiro quadrante, nada mais há a fazer, pois tal arco já estará reduzido ao primeiro quadrante;

(ii) Caso a extremidade recaia no segundo, terceiro ou quarto quadrante, iguala-se a primeira determinação positiva, respectivamente a $\pi - x$ ou $(180°)$, $\pi + x$ ou $(180° - x)$, $2\pi - x$ ou $(360° - x)$ conforme o arco esteja em radiano ou grau. A medida assim obtida será o arco correspondente ao arco dado, no primeiro quadrante.

Exemplo 4.7 *Obtenha o arco x do primeiro quadrante correspondente a:*

(a) $\frac{22\pi}{3}\,rad$

(b) $2295°$

Resolução (a):

A primeira determinação do arco $\frac{22\pi}{3}\,rad$ é obtida da seguinte forma:

$$\frac{22\pi}{3} = \frac{18\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = 6\pi + \frac{4\pi}{3} = 3.2\pi + \frac{4\pi}{3}.$$

O que quer dizer que o arco $\frac{22\pi}{3}\,rad$ é côngruo a $\frac{4\pi}{3}\,rad$ e $\alpha = \frac{4\pi}{3}\,rad$ é a primeira determinação positiva. Como a extremidade do arco $\frac{4\pi}{3}\,rad$ está no terceiro quadrante, devemos igualá-lo a $\pi + x$. Assim:

$$\pi + x = \frac{4\pi}{3} \Longrightarrow x = \frac{\pi}{3}.$$

Portanto, o arco procurado é $x = \dfrac{\pi}{3}$.■

Resolução (b):

Dividindo-se o arco 2295° por 360°, obtém-se o quociente 6 (que corresponde ao número de voltas) e resto 135° que é a primeira determinação positiva. Como a extremidade de 135° é do segundo quadrante, deve-se fazer $135° = 180° - x \Longrightarrow x = 45°$.

Portanto, o arco procurado é $x = 45°$.■

Exemplo 4.8 *Mostre que:*

(a) $sen(451,75\pi) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(b) $tg(361,8\pi) = -tg\dfrac{\pi}{5}$

Resolução (a):

$$sen(451,75\pi) = sen(450\pi + 1,75\pi) = sen(1,75\pi) = sen\left(\frac{7\pi}{4}\right).$$

Como $\dfrac{7\pi}{4}$ rad tem extremidade no quarto quadrante, seu correspondente no primeiro quadrante será $\dfrac{7\pi}{4} = 2\pi - x$, ou seja, $x = \dfrac{\pi}{4}$ rad.

Portanto, $sen(451,75\pi) = -sen(\dfrac{\pi}{4}) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.■

Resolução (b):

Conforme a figura 4.12,

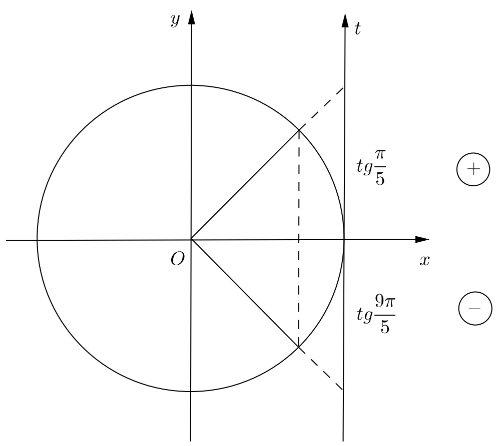


Figura 4.12: Eixo das tangentes

temos que:

$$tg(361,8\pi) = tg(360\pi + 1,8\pi) = tg(1,8\pi) = tg\frac{9\pi}{5} = -tg(-\frac{9\pi}{5}) = -tg(2\pi - \frac{9\pi}{5}),$$

ou seja, $tg(361,8\pi) = -tg\frac{\pi}{5}$.■

4.8 Funções Periódicas

Toda função de uma variável x, em que $f(x)$ repete seus valores em ciclos igualmente intervalados, é chamada de periódica. O menor intervalo de valores de x que corresponde a um ciclo completo de valores é chamado período P da função.

Pelos gráficos vistos anteriormente, fica claro que as funções $senx$, $cosx$, $secx$ e $cossecx$ têm período 2π enquanto tgx e $cotgx$ têm período π.

Para funções mais gerais como, por exemplo,

$$f(x) = a + b.sen(cx + d) \quad \text{ou} \quad f(x) = a + b.cos(cx + d),$$

com $c > 0$, teremos o período dado pela expressão $P = \frac{2\pi}{c}$.

Demonstração:

Supondo que um período inicia-se em x_1 e completa-se em x_2, teremos $P = x_2 - x_1$.

Fazendo $cx_1 + d = 0$ e $cx_2 + d = 2\pi$, segue-se que:

$$x_1 = -\frac{d}{c} \text{ e } x_2 = \frac{2\pi - d}{c}.$$

O que nos conduz a: $P = x_2 - x_1 = \frac{2\pi - d}{c} - \left(-\frac{d}{c}\right) = \frac{2\pi}{c}$.

Logo, teremos $P = \frac{2\pi}{c}$. ■

De modo muto parecido, as funções mais gerais que envolvem tangente e cotangente,

$$f(x) = a + b.tg(cx + d) \quad \text{ou} \quad f(x) = a + b.cotg(cx + d),$$

com $c > 0$, terão o período dado pela expressão $P = \frac{\pi}{c}$.

4.9 Arcos complementares

Dois arcos a e b são complementares quando a soma algébrica de suas medidas é 90° ou $\frac{\pi}{2} rad$. Sejam a e b, dois arcos complementares, têm-se:

$$cosb = sena; \quad cossecb = seca; \quad cotgb = tga.$$

Em outros termos, as funções $cosx$, $cossecx$ e $cotgx$ são co-funções, respectivamente a $senx$, $secx$ e tgx. As funções circulares de um arco são iguais às respectivas co-funções do arco complementar.

4.10 Relações Fundamentais

4.10.1 Semelhança de triângulos

Antes de trabalharmos as relações fundamentais da trigonometria, vale recordar a definição de semelhança de triângulos.

Definição 4.9 *Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, possuem os três ângulos ordenadamente congruentes e os lados homólogos proporcionais.*

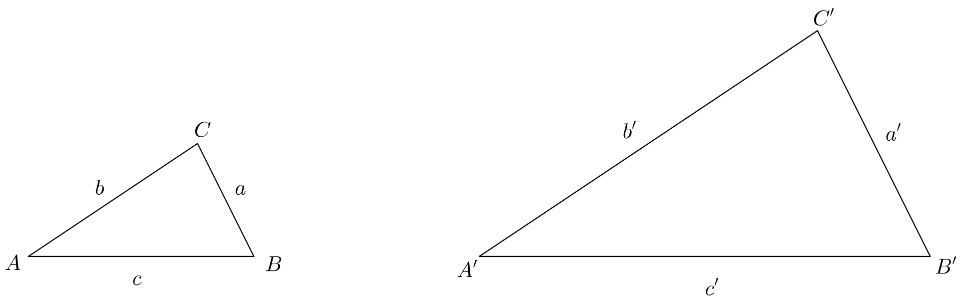


Figura 4.13: Triângulos semelhantes

Pela definição dada, temos: $\widehat{A'} \equiv \widehat{A}$, $\widehat{B'} \equiv \widehat{B}$ e $\widehat{C'} \equiv \widehat{C}$; e ainda: $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = k$, onde k é chamado de *razão de semelhança.*

A semelhança de triângulos é essencial para o estudo da Trigonometria.

As cinco relações trigonométricas que serão deduzidas a seguir são consideradas fundamentais:

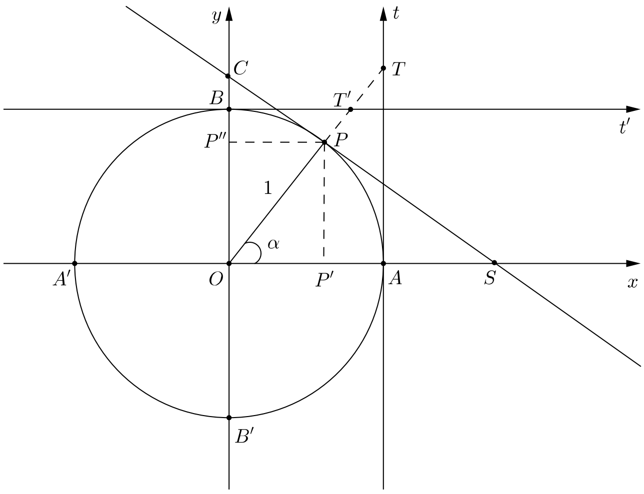


Figura 4.14: Círculo trigonométrico

Vimos que $\overline{OP'} = cos\alpha$, $\overline{OP''} = \overline{P'P} = sen\alpha$, $\overline{AT} = tg\alpha$, $\overline{BT'} = cotg\alpha$, $\overline{OT} = \overline{OS} = sec\alpha$ e $\overline{OT'} = \overline{OC} = cossec\alpha$.

(i) Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$.

Pelo teorema de Pitágoras no triângulo retângulo $OP'P$ acima, teremos:

$$\left(\overline{P'P}\right)^2 + \left(\overline{OP'}\right)^2 = \left(\overline{OP}\right)^2 \Longrightarrow |sen\alpha|^2 + |cos\alpha|^2 = 1.$$

Como $|x|^2 = x^2$; $\forall\, x \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1.\blacksquare \qquad (F_1)$$

(ii) Sabemos que os triângulos $OP'P$ e OAR são retângulos e semelhantes. Temos pela semelhança:

$$\frac{\overline{AT}}{\overline{P'P}} = \frac{\overline{OT}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OP'}} \Longrightarrow \frac{|tg\alpha|}{|sen\alpha|} = \frac{|sec\alpha|}{1} = \frac{1}{|cos\alpha|}.$$

Daí, segue:

$$\frac{|tg\alpha|}{|sen\alpha|} = \frac{1}{|cos\alpha|} \Longrightarrow |tg\alpha| = \frac{|sen\alpha|}{|cos\alpha|}.$$

Como $tg\alpha$ tem sempre o mesmo sinal que o quociente $\dfrac{sen\alpha}{cos\alpha}$, podemos concluir que:

$$tg\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha}, \qquad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k.\pi; k \in \mathbb{Z} \qquad (F_2)$$

Podemos ter ainda:

$$|sec\alpha| = \frac{1}{|cos\alpha|}.$$

Como $sec\alpha$ tem sempre o mesmo sinal que o quociente $\dfrac{1}{cos\alpha}$, podemos concluir que:

$$sec\alpha = \frac{1}{cos\alpha}; \qquad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k.\pi; k \in \mathbb{Z}. \qquad (F_3)$$

(iii) Por fim, sabemos que os triângulos $OP''P$ e OB' também são retângulos e semelhantes. Teremos:

$$\frac{\overline{BT'}}{\overline{P''P}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OP''}} = \frac{\overline{OT'}}{\overline{OP}} \Longrightarrow \frac{|cotg\alpha|}{|cos\alpha|} = \frac{1}{|sen\alpha|} = \frac{|cosseca\alpha|}{1}.$$

Daí, segue:

$$|cotg\alpha| = \frac{|cos\alpha|}{|sen\alpha|}.$$

Como $cotg\alpha$ tem sempre o mesmo sinal que o quociente $\dfrac{cos\alpha}{sen\alpha}$, podemos concluir que:

$$cotg\alpha = \frac{cos\alpha}{sen\alpha}; \qquad \alpha \neq \ k.\pi; k \in \mathbb{Z}. \qquad (F_4)$$

Podemos ter ainda,

$$|cossec\alpha| = \frac{1}{|sen\alpha|}.$$

Como $cossec\alpha$ tem sempre o mesmo sinal que o quociente $\dfrac{1}{sen\alpha}$, podemos concluir que:

$$cossec\alpha = \frac{1}{sen\alpha}; \qquad \alpha \neq \ k.\pi; k \in \mathbb{Z}. \qquad (F_5).$$

4.11 Relações trigonométricas derivadas

Destacaremos três relações derivadas das fundamentais:

A cotangente de um arco x é igual ao inverso da tangente do arco x sempre que ocorrer

$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k.\pi; k \in \mathbb{Z}$ e $\alpha \neq \ k.\pi; k \in \mathbb{Z}$.

Multiplicando-se membro a membro os termos das relações fundamentais $(F2)$ e $(F4)$, obteremos:

$$tg\alpha.cotg\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha}.\frac{cos\alpha}{sen\alpha},$$

donde

$$cotg\alpha = \frac{1}{tg\alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k.\pi; k \in \mathbb{Z} \text{ e } \alpha \neq \ k.\pi; k \in \mathbb{Z}. \qquad (D_1)$$

O quadrado da secante de um arco x é igual a uma unidade somada ao quadrado da tangente do arco x.

Elevando-se ao quadrado ambos os membros da relação fundamental $(F2)$, teremos:

$$tg^2\alpha = \frac{sen^2\alpha}{cos^2\alpha}.$$

Substituindo $sen^2\alpha$ por $1 - cos^2\alpha$, na expressão acima, chega-se a:

$$tg^2\alpha = sec^2\alpha - 1,$$

ou ainda

$$sec^2\alpha = 1 + tg^2\alpha. \qquad (D_2)$$

O quadrado da cossecante de um arco x é igual a uma unidade somada ao quadrado da cotangente do arco x.

Elevando-se ao quadrado ambos os membros da relação fundamental $(F4)$, teremos:

$$cotg^2\alpha = \frac{cos^2\alpha}{sen^2\alpha}.$$

Substituindo $cos^2\alpha$ por $1 - sen^2\alpha$, na expressão acima, chega-se a:

$$cotg^2\alpha = cossec^2\alpha - 1,$$

ou ainda

$$cossec^2\alpha = 1 + cotg^2\alpha. \qquad (D_3)$$

Capítulo 5

Fórmulas trigonométricas e operações com arcos de funções trigonométricas

As fórmulas trigonométricas servirão de subsídio para a aquisição de novos valores para as funções trigonométricas, a partir de alguns já conhecidos. O domínio algébrico dessas relações têm por consequência, uma compreensão ampliada na utilização de técnicas de resoluções de equações trigonométricas e de outros problemas relacionados.

5.1 Fórmulas de Adição

Para obtermos uma das fórmulas de adição, usaremos inicialmente o teorema de Pitágoras para determinarmos a distância entre dois pontos de um plano (x_1, y_1) e (x_2, y_2), que é dada por:

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Consideremos no círculo trigonométrico os pontos P e Q tais que

$$\widehat{AP} = a \text{ e } \widehat{AQ} = b.$$

Sabemos que:

$$P(cosa, sena), Q(cosb, senb) \text{ e } A(1,0)$$

.

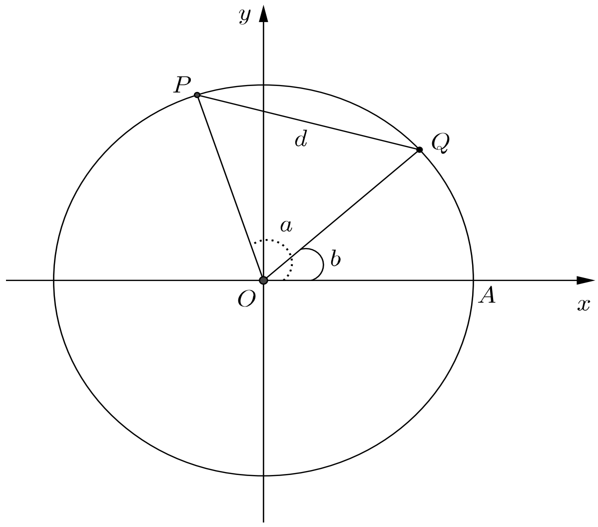


Figura 5.1: Círculo trigonométrico

Chamando de d, a distância entre os pontos P e Q, teremos:

$$d = \sqrt{(cosb - cosa)^2 + (senb - sena)^2} \Longrightarrow d^2 = (cosb - cosa)^2 + (senb - sena)^2.$$

segue que:

$$d^2 = cosb^2 - 2cosa.cosb + cos^2 a + senb^2 - 2sena.senb + sen^2 a.$$

Lembrando-se da relação fundamental $sen^2 x + cos^2 x = 1$, podemos reduzir a expressão acima para:

$$d^2 = 2 - 2(cosa.cosb + sena.senb).$$

Fazendo-se uma mudança de coordenadas com uma rotação dos eixos Ox e Oy de um arco de medida b, para que o novo eixo Ox' contenha Q, as novas coordenadas de Q serão $(1,0)$ e de P serão:

$$(cos(a-b), sen(a-b)).$$

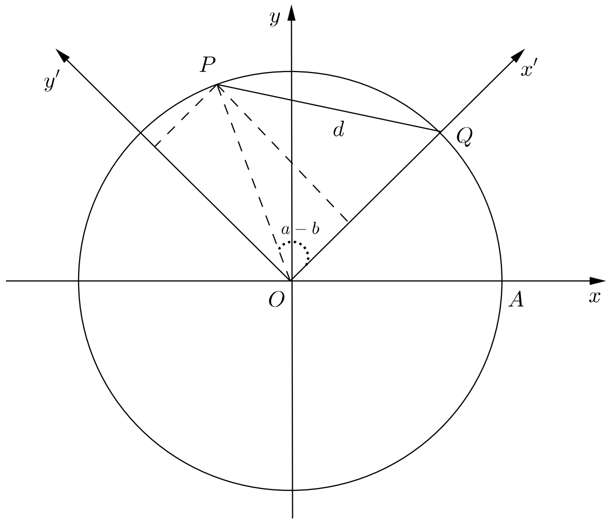


Figura 5.2: Círculo trigonométrico (eixo rotacionado)

A distância de P a Q também será

$$d^2 = [cos(a-b)-1]^2 + [sen(a-b)-0]^2 \Longrightarrow d^2 = cos(a-b)^2 - 2cos(a-b) + 1 + sen^2(a-b).$$

segue que, $d^2 = 2 - 2cos(a-b)$.

Igualando os dois valores de d^2, teremos:

$$2 - 2(cosa.cosb + sena.senb) = 2 - 2cos(a-b).$$

Daí, temos que:

$$cos(a-b) = cosacosb + senasenb. \qquad (1).$$

Substituindo b por $-b$ em (1), teremos:

$$cos(a+b) = cos[a-(-b)] = cosacos(-b) + senasen(-b),$$

ou seja

$$cos(a+b) = cosacosb - senasenb. \qquad (2).$$

Sabe-se que $sen(a+b) = cos\left[\frac{\pi}{2} - (a+b)\right]$. Assim:

$$sen(a+b) = cos\left[(\frac{\pi}{2} - a) - b)\right] = cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)cosb + sen\left(\frac{\pi}{2} - a\right)senb.$$

Daí, conclui-se que:

$$sen(a+b) = senacosb + senbcosa. \qquad (3).$$

Substituindo b por $-b$ em (3), teremos:

$$sen(a-b) = sen(a+(-b)) = senacos(-b) + sen(-b)cosa = senacosb - senbcosa. \qquad (4).$$

Nas deduções acima usamos os conhecimentos de paridade, aonde vimos que

$$sen(-x) = -senx \text{ e } cos(-x) = cosx$$

e a propriedade de arcos complementares.

Vimos nas relações fundamentais que $tgx = \frac{senx}{cosx}$, sempre que $x \neq \frac{\pi}{2} + k.\pi; k \in \mathbb{Z}$. Podemos então fazer $tg(a+b) = \frac{sen(a+b)}{cos(a+b)}$. Daí, segue:

$$tg(a+b) = \frac{senacosb + senbcosa}{cosacosb - senasenb}.$$

Dividindo-se o numerador e o denominador por $cosacosb$, teremos:

$$tg(a+b) = \frac{\frac{senacosb}{cosacosb} + \frac{senbcosa}{cosacosb}}{\frac{cosacosb}{cosacosb} - \frac{senasenb}{cosacosb}} = \frac{\frac{sena}{cosa} + \frac{senb}{cosb}}{1 - \frac{senasenb}{cosacosb}}$$

ou, de forma equivalente:

$$tg(a+b) = \frac{tga + tgb}{1 - tga.tgb}. \qquad (5).$$

Substituindo b por $-b$ em (5), teremos:

$$tg(a-b) = tg(a+(-b)) = \frac{tga + tg(-b)}{1 - tga.tg(-b)} = \frac{tga - tgb}{1 + tga.tgb} \qquad (6).$$

5.2 Arco duplo

Muitas vezes é conveniente que se tenha expressões para $sen2a$, $cos2a$ e $tg2a$, quando já são conhecidas as funções em a . Para isso, basta fazermos $b = a$ nas fórmulas (2), (3) e (5), como segue:

$$cos(2a) = cos(a+a) = cosa.cosa - sena.sena = cos^2 a - sen^2 a.$$

Portanto,

$$cos(2a) = cos^2 a - sen^2 a = 2cos^2 a - 1 = 1 - 2sen^2 a. \qquad (7).$$

Para $sen2a$, teremos:

$$sen(2a) = sen(a+a) = senacosa + senacosa = 2senacosa.$$

Portanto,

$$sen(2a) = 2senacosa. \qquad (8).$$

Para $tg2a$, teremos:

$$tg(2a) = tg(a+a) = \frac{tga + tga}{1 - tga.tga} = \frac{2tga}{1 - tg^2 a}.$$

Portanto,

$$tg(2a) = \frac{2tga}{1 - tg^2 a}. \qquad (9).$$

As relações (7), (8) e (9), são conhecidas como fórmulas de arco duplo.

Uma importante consequência das fórmulas de arco-duplo é a possibilidade de deduzirmos expressões racionais para $senx$, $cosx$ e tgx, isto é, sem o uso de radicais, em termos de um parâmetro t, sendo $t = tg(\frac{x}{2})$, como veremos abaixo.

Pela fórmula (8),

$$senx = 2sen\left(\frac{x}{2}\right).cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2sen\left(\frac{x}{2}\right).cos\left(\frac{x}{2}\right)}{sen^2\left(\frac{x}{2}\right) + cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Dividindo-se o numerador e o denominador por $cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$, teremos

$$senx = \frac{\dfrac{2sen\left(\frac{x}{2}\right).cos\left(\frac{x}{2}\right)}{cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}}{\dfrac{sen^2\left(\frac{x}{2}\right)}{cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} + \dfrac{cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}{cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}}.$$

Daí, segue que

$$senx = \frac{2tg\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + tg^2\left(\frac{x}{2}\right)},$$

ou ainda

$$senx = \frac{2t}{1 + t^2}.$$

Pela fórmula (7),

$$cosx = cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - sen^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - sen^2\left(\frac{x}{2}\right)}{cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + sen^2\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Dividindo-se o numerador e o denominador por $cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$, teremos

$$cosx = \frac{\dfrac{cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}{cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} - \dfrac{sen^2\left(\frac{x}{2}\right)}{cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}}{\dfrac{cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}{cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} + \dfrac{sen^2\left(\frac{x}{2}\right)}{cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}}.$$

Daí, segue que

$$scosx = \frac{1 - tg^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}{1 + tg^2\left(\dfrac{x}{2}\right)},$$

ou ainda

$$senx = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}.$$

Pela fórmula (9), de forma mais direta, teremos:

$$tgx = \frac{2tg\left(\dfrac{x}{2}\right)}{1 - tg^2\left(\dfrac{x}{2}\right)},$$

ou ainda

$$tgx = \frac{2t}{1 - t^2}.$$

Estas últimas expressões nos permitem descrever de forma parametrizada, os pontos do círculo trigonométrico com funções racionais de um parâmetro t, conforme representado na Figura 5.3

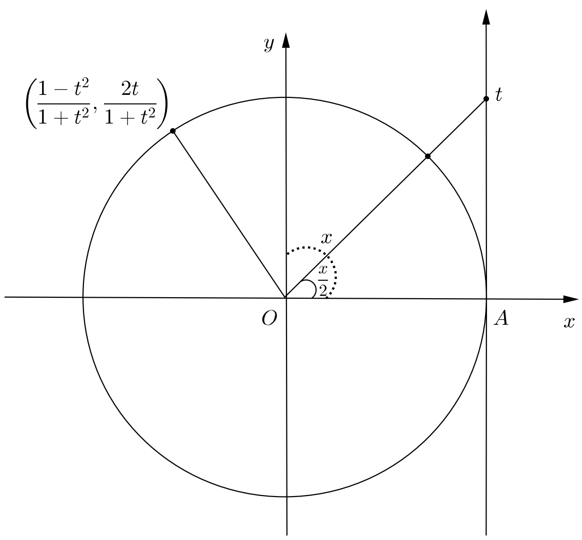


Figura 5.3: Círculo trigonométrico (coordenadas paramétricas)

5.3 Arco metade

Pode-se ainda determinar expressões que permitam calcular $cos\left(\frac{a}{2}\right), sen\left(\frac{a}{2}\right)$ e $tg\left(\frac{a}{2}\right)$, quando já são conhecidas as funções em a. Para isso, utilizaremos a fórmula (7), substituindo $2a$ por a como segue:

$$cosa = cos^2\left(\frac{a}{2}\right) - sen^2\left(\frac{a}{2}\right),$$

que é equivalente a:

$$cosa = cos^2\left(\frac{a}{2}\right) - \left[1 - cos^2\left(\frac{a}{2}\right)\right] = 2cos^2\left(\frac{a}{2}\right) - 1.$$

Isolando $cos\left(\frac{a}{2}\right)$, teremos:

$$cos\left(\frac{a}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+cosa}{2}}. \qquad (10).$$

A fórmula $cosa = cos^2\left(\frac{a}{2}\right) - sen^2\left(\frac{a}{2}\right)$, , também é equivalente a

$$cosa = \left[1 - sen^2\left(\frac{a}{2}\right)\right] - sen^2\left(\frac{a}{2}\right) = 1 - 2sen^2\left(\frac{a}{2}\right).$$

Isolando $sen\left(\frac{a}{2}\right)$, teremos:

$$sen\left(\frac{a}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-cosa}{2}}. \qquad (11).$$

Para obtermos $tg\frac{a}{2}$, faremos uso das expressões (10) e (11) e da relação

$$tg\frac{a}{2} = \frac{sen\frac{a}{2}}{cos\frac{a}{2}}.$$

Assim:

$$tg\frac{a}{2} = \pm\frac{\sqrt{\frac{1-cosa}{2}}}{\sqrt{\frac{1+cosa}{2}}}.$$

Portanto, teremos:

$$tg\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-cosa}{1+cosa}}. \qquad (12).$$

As relações (10), (11) e (12), são conhecidas como fórmulas de arco-metade.

Exemplo 5.1 *Determine o valor de:*

(a) $sen75°$ *(b)* $cos105°$ *(b)* $tg15°$

Resolução (a):

Fazendo $sen75° = sen(45° + 30°)$, teremos:

$$sen75° = sen(45° + 30°) = sen45°.cos30° + sen30°.cos45°.$$

Substituindo os valores já conhecidos, segue:

$$sen75° = \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Logo,

$$sen75° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

Resolução (b).

Fazendo $cos105° = cos(60° + 45°)$, teremos:

$$cos105° = cos(60° + 45°) = cos60°.cos45° - sen60°.sen45°.$$

Substituindo os valores já conhecidos, segue:

$$cos105° = \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Logo,

$$cos105° = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}.$$

Resolução(c).

Fazendo $tg15° = tg(60° - 45°)$, teremos:

$$tg15° = tg(60° - 45°) = \frac{tg60° - tg45°}{1 + tg60°.tg45°}.$$

Substituindo os valores já conhecidos, segue:

$$tg15° = \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}.1} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}.$$

Racionalizando o denominador, teremos:

$$tg15° = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}.\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2}.$$

Logo,

$$tg15° = 2 - \sqrt{3}.$$

Exemplo 5.2 *Sabendo que x é um arco do primeiro quadrante e $tgx + cotgx = 4$, determine o valor de $sen2x$.*

Resolução:

Pode-se reescrever $tgx + cotgx = 4$ em termos de $senx$ e $cosx$, assim:

$$tgx + cotgx = 4 \Longrightarrow \frac{senx}{cosx} + \frac{cosx}{senx} = 4 \Longrightarrow \frac{sen^2x + cos^2x}{senxcosx} = 4 \Longrightarrow \frac{1}{senxcosx} = 4.$$

Segue que $4senxcosx = 1 \Longrightarrow 2.(2senxcosx) = 1 \Longrightarrow 2senxcosx = \frac{1}{2} \Longrightarrow sen2x = \frac{1}{2}.$

Exemplo 5.3 *Sabendo que $senx - cosx = 0,6$, calcule o valor de $cos2x$.*

Resolução:

Elevando-se ao quadrado ambos os membros da igualdade $senx - cosx = 0,6$, segue:

$$(senx - cosx)^2 = (0,6)^2 \Longrightarrow sen^2x - 2senxcosx + cos^2x = 0,36.$$

Daí, temos que:

$$sen2x = 1 - 0,36 = 0,64.$$

Substituindo $sen2x = 0,64$, na relação $sen^2 2x + cos^2 2x = 1$, segue:

$$(0,64)^2 + cos^2 2x = 1 \Longrightarrow cos^2 2x = 1 - 0,4096 \Longrightarrow cos^2 2x = 1 - \frac{256}{625}.$$

Logo,

$$cos^2 2x = \frac{369}{625} \Longrightarrow cos2x = \pm\sqrt{\frac{369}{625}}.$$

Portanto:

$$cos2x = \pm\frac{2\sqrt{41}}{25}.$$

Exemplo 5.4 *Calcule o valor de $tg22°30'$.*

Resolução:

Sabe-se que $22°30' = \frac{45°}{2}$. Aplicando a fórmula de número (12) e sabendo que $cos45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, teremos:

$$tg22°30' = tg\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}.\frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}.$$

Racionalizando o denominador, segue que:

$$tg22°30' = \sqrt{2} - 1.$$

5.4 Fórmulas de multiplicação

Em muitos casos é conveniente transformarmos uma soma ou diferença de funções trigonométricas na forma de produto.

Sejam os arcos trigonométricos p e q, quaisquer. Podemos escrever $p = a + b$ e $q = a - b$, e, assim, $a = \frac{p+q}{2}$ e $b = \frac{p-q}{2}$.

Com o auxílio dessas expressões, podem-se transformar em produto:

$$senp + senq, \ senp - senq, \ cosp + cosq, \ cosp - cosq, \ tgp + tgq \text{ e } tgp + tgq.$$

Assim:

$$senp+senq = sen(a+b)+sen(a-b) = senacosb+senbcosa+senacosb-senbcosa = 2senacosb.$$

Logo,

$$senp+senq = 2sen\left(\frac{p+q}{2}\right)cos\left(\frac{p-q}{2}\right). \qquad (13).$$

Portanto, a soma dos senos de dois arcos é igual ao duplo produto do seno da semi-soma desses arcos pelo cosseno da semi-diferença desses arcos.

Por outro lado,

$$senp-senq = sen(a+b)-sen(a-b) = senacosb+senbcosa-senacosb+senbcosa = 2senbcosa.$$

Logo,

$$senp-senq = 2sen\left(\frac{p-q}{2}\right)cos\left(\frac{p+q}{2}\right). \qquad (14).$$

Portanto, a diferença dos senos de dois arcos é igual ao duplo produto do seno da semi-diferença desses arcos pelo cosseno da semi-soma desses arcos.

Temos também que:

$$cosp+cosq = cos(a+b)+cos(a-b) = cosacosb-senasenb+cosacosb+senasenb = 2cosacosb.$$

Logo,

$$cosp+cosq = 2cos\left(\frac{p+q}{2}\right)cos\left(\frac{p-q}{2}\right). \qquad (15).$$

Portanto, a soma dos cossenos de dois arcos é igual ao duplo produto do cosseno da semi-soma desses arcos pelo cosseno da semi-diferença desses arcos.

Temos também que:

$$cosp-cosq = cos(a+b)-cos(a-b) = cosacosb-senasenb-cosacosb-senasenb = -2senasenb.$$

Logo,

$$cosp-cosq = -2sen\left(\frac{p+q}{2}\right)sen\left(\frac{p-q}{2}\right). \qquad (16).$$

Portanto, a diferença dos cossenos de dois arcos é igual ao duplo produto negativo do seno da semi-soma desses arcos pelo seno da semi-diferença desses arcos.

Finalmente, temos:

$$tgp + tgq = \frac{senp}{cosp} + \frac{senq}{cosq} = \frac{senpcosq + senqcosp}{cospcosq} = \frac{sen(p+q)}{cospcosq}. \qquad (17).$$

Temos também que:

$$tgp - tgq = \frac{senp}{cosp} - \frac{senq}{cosq} = \frac{senpcosq - senqcosp}{cospcosq} = \frac{sen(p-q)}{cospcosq}. \qquad (18).$$

Exemplo 5.5 *Simplifique as expressões:*

(a) $\dfrac{senx + seny}{cosx + cosy}$ *(b)* $\dfrac{cosx - seny}{senx - seny}$

Resolução (a).

Aplicando as fórmulas (13) no numerador e (15) no denominador, teremos:

$$\frac{senx + seny}{cosx + cosy} = \frac{2sen\left(\frac{x+y}{2}\right)cos\left(\frac{x-y}{2}\right)}{2cos\left(\frac{x+y}{2}\right)cos\left(\frac{x-y}{2}\right)} = \frac{sen\left(\frac{x+y}{2}\right)}{cos\left(\frac{x+y}{2}\right)},$$

ou seja:

$$\frac{senx + seny}{cosx + cosy} = tg\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

Resolução(b).

Aplicando as fórmulas (16) no numerador e (14) no denominador, teremos:

$$\frac{cosx - seny}{senx - seny} = \frac{-2sen\left(\frac{x+y}{2}\right)sen\left(\frac{x-y}{2}\right)}{2sen\left(\frac{x-y}{2}\right)cos\left(\frac{x+y}{2}\right)} = -\frac{sen\left(\frac{x+y}{2}\right)}{cos\left(\frac{x+y}{2}\right)},$$

ou seja:

$$\frac{senx + seny}{cosx + cosy} = -tg\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

Exemplo 5.6 *Transforme em produto a expressão* $1 + cos2x + cos4x + cos6x$.

Resolução:

Lembrando que $cos0 = 1$, podemos escrever a expressão acima na forma $cos0 + cos2x + cos4x + cos6x$. Associando-se os dois primeiros termos e os dois últimos e ainda aplicando a fórmula (15) nos dois parênteses, teremos:

$$
\begin{aligned}
cos0 + cos2x + cos4x + cos6x &= (cos0 + cos2x) + (cos4x + cos6x) \\
&= 2cos\left(\frac{0+2x}{2}\right)cos\left(\frac{0-2x}{2}\right) + 2cos\left(\frac{4x+6x}{2}\right)cos\left(\frac{4x-6x}{2}\right) \\
&= 2cosxcos(-x) + 2cos5xcos(-x) \\
&= 2cosxcosx + 2cos5xcosx \\
&= 2.cosx[cosx + cos5x] \\
&= 2cosx.2cos\left(\frac{x+5x}{2}\right)cos\left(\frac{x-5x}{2}\right) \\
&= 2cosx.2cos3xcos(-2x).
\end{aligned}
$$

Assim:

$$1 + cos2x + cos4x + cos6x = 4cosxcos2xcos3x.$$

Capítulo 6

Lei dos Senos e Lei do Cosseno

Este capítulo é de grande relevância, sobretudo para a resolução de problemas que envolvem triângulos, bem como nos estudos de vetores, que no ensino médio, tem forte ocorrência no estudo de certas grandezas vetoriais na Física.

6.1 A Lei dos senos

Para demonstrarmos que os comprimentos dos lados de um triângulo qualquer são proporcionais aos senos dos ângulos opostos, usaremos o fato de que a área de um triângulo ABC é dada por $S = \frac{1}{2}bcsen\widehat{A}$, onde b e c são os comprimentos dos lados formadores do ângulo $\widehat{A}$. A partir da fórmula clássica para a área de um triângulo, demonstraremos a veracidade da fórmula acima.

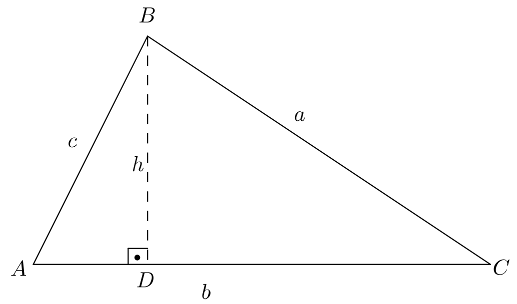


Figura 6.1: Triângulo acutângulo em A

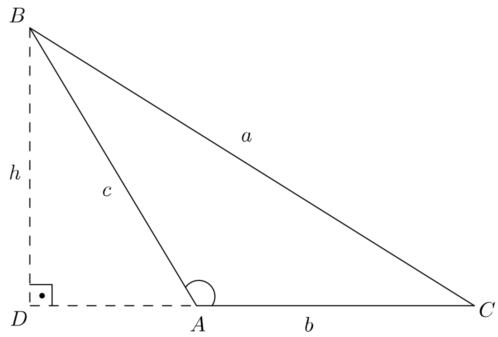


Figura 6.2: Triângulo obtusângulo em A

(i) Se Â é agudo (Figura 6.1) temos, $sen\hat{A} = \frac{h}{c} \Rightarrow h = c.sen\hat{A}$. Substituindo h em S, segue:

$$S = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}bcsen\widehat{A};$$

(ii) Â é obtuso (Figura 6.2), e lembrando que $sen(180° - \widehat{A}) = sen\widehat{A}$, temos

$$S = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}bcsen(180° - \widehat{A}) = \frac{1}{2}bcsen\widehat{A};$$

(iii) Se Â é reto (Figura 6.1), e lembrando que $sen90° = 1$, temos

$$S = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}bc.1 = \frac{1}{2}bcsen\widehat{A}.$$

Portanto, conhecendo-se dois lados b, c e o ângulo $\widehat{A}$ por eles formado, está provado que a área do triângulo ABC pode ser obtida por:

$$S = \frac{1}{2}bcsen\widehat{A}.$$

De modo análogo podemos obter para o mesmo triângulo

$$S = \frac{1}{2}acsen\widehat{B} \qquad \text{e} \qquad S = \frac{1}{2}absen\widehat{C}.$$

Para demonstrarmos a lei dos senos já enunciada, multiplicamos ambos os membros das três últimas fórmulas acima, pelo comprimento do lado oposto ao ângulo utilizado. Assim:

$$aS = \frac{1}{2}abcsen\widehat{A} \Longrightarrow \frac{a}{sen\widehat{A}} = \frac{abc}{2S};$$

$$bS = \frac{1}{2}abcsen\widehat{B} \Longrightarrow \frac{b}{sen\widehat{B}} = \frac{abc}{2S};$$

$$cS = \frac{1}{2}abcsen\widehat{C} \Longrightarrow \frac{c}{sen\widehat{C}} = \frac{abc}{2S}.$$

Comparando as três expressões à direita, podemos concluir que num triângulo qualquer, vale a relação

$$\frac{a}{sen\widehat{A}} = \frac{b}{sen\widehat{B}} = \frac{c}{sen\widehat{C}},$$

conhecida por lei dos senos.

6.2 A Lei do cosseno

Seja um triângulo ABC qualquer de lados cujos comprimentos medem a, b e c. Provaremos que "O quadrado da medida de um dos lados é igual à soma dos quadrados dos outros dois, menos o duplo produto desses lados pelo cosseno do ângulo por eles formado", ou seja:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.cos\widehat{A}.$$

Consideremos os dois casos:

(i) $\widehat{A}$ é agudo.

Tracemos $\overline{BH}$, perpendicular à reta suporte de $\overline{AC}$. Fazendo $\overline{BH} = h$ e $\overline{AH} = m$, temos no triângulo retângulo BHC, pelo teorema de Pitágoras:

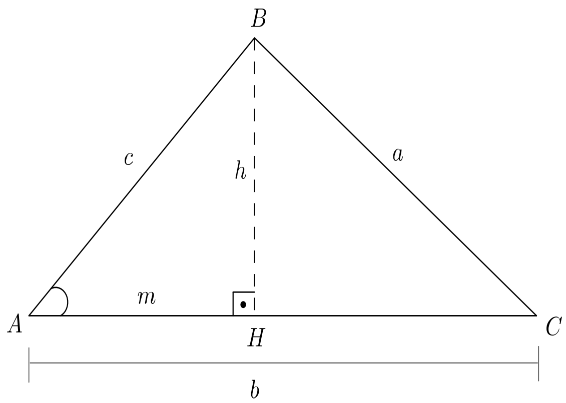


Figura 6.3: Triângulo acutângulo em A

Então, temos:

$$a^2 = h^2 + (b-m)^2 \Longrightarrow a^2 =^2 - m^2 + b^2 - 2bm + m^2 \Longrightarrow a^2 = c^2 + b^2 - 2bm.$$

Pelo $cos\widehat{A}$, no triângulo retângulo BHA, temos que $m = c.cos\widehat{A}$, daí, segue-se:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.cos\widehat{A}.$$

(ii) $\widehat{A}$ é obtuso.

Tracemos $\overline{BH}$, perpendicular à reta suporte de $\overline{AC}$. Fazendo $\overline{BH} = h$ e $\overline{AH} = m$, temos no triângulo retângulo BHC, pelo teorema de Pitágoras:

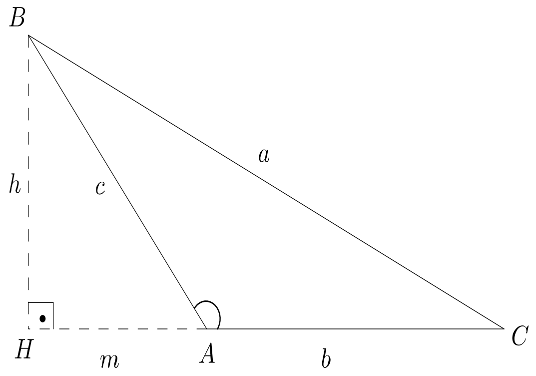


Figura 6.4: Triângulo obtusângulo em A

Então, temos:

$$a^2 = h^2 + (b+m)^2 \Longrightarrow a^2 = c^2 - m^2 + b^2 + 2bm + m^2 \Longrightarrow a^2 = c^2 + b^2 + 2bm.$$

Do triângulo retângulo BHA, temos que

$$cos(180° - \widehat{A}) = -cos\widehat{A} \text{ e } m = c.(-cos\widehat{A}).$$

Substituindo na relação acima, teremos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.cos\widehat{A}.$$

Portanto, de (i) e (ii), pode-se concluir que num triângulo qualquer vale:

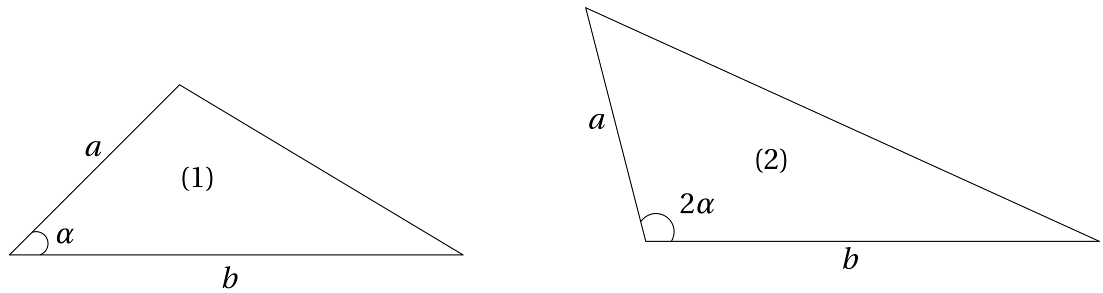
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.cos\widehat{A}.$$

A expressão acima é chamada lei do cosseno. Vale ressaltar que a lei do cosseno resulta numa relação equivalente ao teorema de Pitágoras quando Â é reto, uma vez que $cos90° = 0$.

Exemplo 6.1 *Seja S a área de um triângulo cujo ângulo compreendido entre os lados de medidas a e b é* $\alpha < 90°$. *Determine a área do triângulo que possui também os lados a e b, sendo* 2α *a medida do ângulo compreendido.*

Resolução:

Sejam os triângulos (1) e (2) abaixo:



Para o triângulo (1), teremos:

$$S_1 = \frac{1}{2}.a.bsen\alpha.$$

Para o triângulo (2), teremos:

$$S_2 = \frac{1}{2}.a.bsen2\alpha \Longrightarrow S_2 = \frac{1}{2}.a.b(2sen\alpha cos\alpha).$$

Podemos, por associatividade, escrever S_2 assim: $S_2 = \left(\frac{1}{2}.a.bsen\alpha\right)(2cos\alpha)$.

Substituindo $\left(\frac{1}{2}.a.bsen\alpha\right)$ por S_1, teremos: $S_2 = 2S_1cos\alpha$.■

Exemplo 6.2 *Sejam duas estacas A e B em uma mesma margem de um rio e uma terceira estaca C na outra margem. Sabendo que são conhecidas as medidas dos ângulos A e B, bem como a distância de A até B, determine a distância entre as estacas A e C.*

Resolução:

A situação acima pode ser descrita conforme a Figura 6.5:

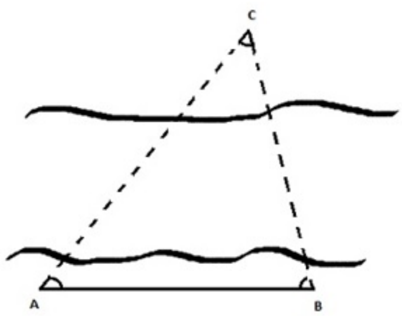


Figura 6.5: Triângulo (modelagem)

Sabemos que $C = 180° - (A+B)$ e ainda que $sen[180° - (A+B)] = sen(A+B)$. Aplicando a lei dos senos no triângulo ABC, segue:

$$\frac{\overline{AC}}{sen\widehat{B}} = \frac{\overline{AB}}{sen[180° - (A+B)]} \Longrightarrow \frac{\overline{AC}}{sen\widehat{B}} = \frac{\overline{AB}}{sen(A+B)}.$$

Portanto,

$$\overline{AC} = \overline{AB}.\frac{sen\widehat{B}}{sen(A+B)}.\blacksquare$$

Exemplo 6.3 *Sejam as medidas dos três lados de um triângulo ABC, os números consecutivos 4, 5 e 6. Mostre que o ângulo $\widehat{B}$ é o dobro do ângulo $\widehat{A}$.*

Resolução:

Consideremos o triângulo escaleno ABC da Figura 6.6.

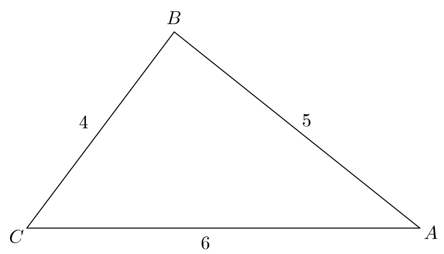


Figura 6.6: Triângulo escaleno

Aplicando a lei do cosseno para o vértice A, teremos:

$$4^2 = 5^2 + 6^2 - 2.5.6.cos\widehat{A} \Longrightarrow cos\widehat{A} = \frac{3}{4}.$$

Aplicando a lei do cosseno também para o vértice B, teremos:

$$6^2 = 4^2 + 5^2 - 2.4.5.cos\widehat{B} \Longrightarrow cos\widehat{B} = \frac{1}{8}.$$

Pela fórmula (7) de arco duplo, vimos que $cos2\widehat{A} = 2cos^2\widehat{A} - 1$. Assim:

$$cos2\widehat{A} = 2.\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 1 = \frac{1}{8} = cos\widehat{B}.$$

Portanto, $\widehat{B} = 2\widehat{A}.\blacksquare$

6.3 Aplicações da Lei do Cosseno para Vetores

A presente seção mostrará uma aplicação natural da lei do cosseno para vetores conforme será visto a seguir.

Grandezas como força, deslocamento, ou velocidade, são consideradas grandezas vetoriais, pois para estarem bem definidas, necessitam de um módulo ou intensidade, uma direção e um sentido.

Uma grandeza vetorial é em geral, representada geometricamente por um segmento de reta denominado vetor.

Geralmente, o “objeto" vetor é apresentado aos alunos da primeira série do ensino médio, na disciplina Física, mas é importante ressaltar que o vetor é um ente matemático de extrema relevância na própria Matemática, bem como em outras áreas do conhecimento.

A soma de vetores é uma importante aplicação prática da Trigonometria Plana. A resultante ou a soma vetorial de dois ou mais vetores coplanares, corresponde a um vetor desse plano, capaz de gerar o mesmo efeito de todos os vetores envolvidos simultaneamente.

Sejam dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, ambos representados com a mesma origem e α o ângulo formado pelos segmentos que correspondem aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Teremos como vetor soma ou resultante, o vetor designado por R, que corresponde à medida da diagonal do paralelogramo ilustrado na Figura 8.1.

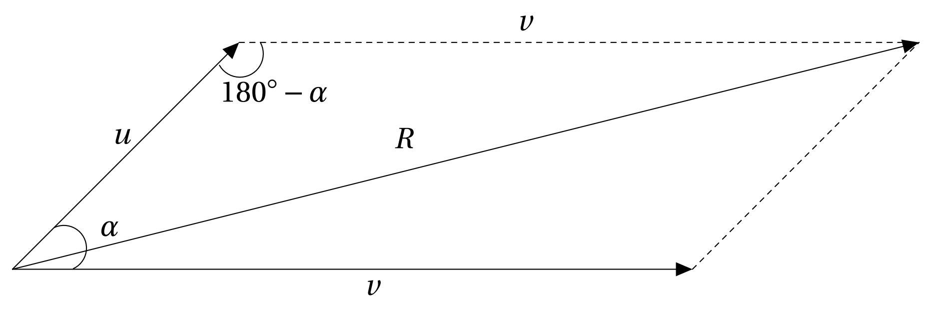


Figura 6.7: Vetor soma.

Pela lei do cosseno, teremos:

$$R^2 = u^2 + v^2 - 2.u.v.cos(180^\circ - \alpha) = u^2 + v^2 - 2.u.v.(-cos\alpha).$$

Daí, teremos:

$$R = \sqrt{u^2 + v^2 + 2.u.v.cos\alpha}.$$

Em particular, poderíamos ter:

1. $\alpha = 0°$

$$R = \sqrt{u^2 + v^2 + 2.u.v.cos0°} = \sqrt{u^2 + 2.u.v + v^2} = |u + v|.$$

2. $\alpha = 180°$

$$R = \sqrt{u^2 + v^2 + 2.u.v.cos180°} = \sqrt{u^2 - 2.u.v + v^2} = |u - v|.$$

3. $\alpha = 90°$

$$R = \sqrt{u^2 + v^2 + 2.u.v.cos90°} = \sqrt{u^2 + v^2}.$$

Capítulo 7

Equações Trigonométricas

As equações trigonométricas serão abordadas neste capítulo de modo a valorizarmos a utilização dos conhecimentos vistos até o momento. Dessa forma, objetiva-se que a obtenção das soluções sejam feitas de forma clara, didática e bem significativa, vez que, em geral, os alunos tendem a apresentar um grau de dificuldade maior na interpretação de situações em um "caminho de volta", em relação àqueles estabelecidos nas definições iniciais das funções circulares.

7.1 Equações Trigonométricas

São equações cujas incógnitas são dadas em termos das funções circulares.

Equações do tipo $senx - cos2x = \frac{1}{2}$ ou $tgx + cotx = 4$, são consideradas equações trigonométricas.

Resolver uma equação trigonométrica consiste em determinar toda a família de arcos trigonométricos que verificam as respectivas equações.

Sempre que uma equação trigonométrica no campo dos reais é possível, esta admite infinitas soluções. Todos os arcos côngruos àquele(s) já determinado(s) também o serão soluções da referida equação.

7.2 Equações trigonométricas elementares

Dada a sua simplicidade, equações do tipo $senx = t$, $cosx = t$ e $tgx = t$, são chamadas equações elementares.

7.2.1 Resolução da equação $senx = t$

Sendo $-1 \leq t \leq 1$, sabemos que existem arcos α tais que $sen\alpha = t$. Dessa forma, a equação dada é equivalente a $senx = sen\alpha$, ou ainda:

$$senx - sen\alpha = 0.$$

Transformando o primeiro membro dessa última equação em produto, teremos:

$$2sen\left(\frac{x-\alpha}{2}\right)cos\left(\frac{x+\alpha}{2}\right) = 0.$$

Pela propriedade de nulidade do produto, segue:

$$sen\left(\frac{x-\alpha}{2}\right) = 0 \quad (1) \quad \text{ou} \qquad cos\left(\frac{x+\alpha}{2}\right) = 0. \qquad (2)$$

De (1), segue,

$$\frac{x-\alpha}{2} = k\pi \Longrightarrow x = \alpha + 2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}.$$

De (2), segue,

$$\frac{x+\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Longrightarrow x = \pi - \alpha + 2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z} \Longrightarrow x = -\alpha + (2k+1)\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}.$$

Pode-se ainda resumir as soluções da equação $senx = t$, em uma só expressão:

$$S = \{x \in \mathbb{R}; x = (-1)^k\alpha + k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Exemplo 7.1 *Resolver a equação* $senx = \frac{1}{2}$.

Resolução:

Uma solução imediata de $senx = \frac{1}{2}$ é $\alpha = \frac{\pi}{6}\ rad$, pois $sen\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$. Portanto, o conjunto solução da equação $senx = \frac{1}{2}$ é dado por:

$$S = \{x \in \mathbb{R}; x = (-1)^k.\frac{\pi}{6} + k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Exemplo 7.2 *Resolver a equação* $senx = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Resolução:

Como a função $senx$ é impar, sabemos que $\alpha = -\frac{\pi}{4}\ rad$ é solução de $senx = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, pois $sen\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Portanto, todas as soluções serão dadas por:

$$S = \{x \in \mathbb{R}; x = (-1)^k.\left(-\frac{\pi}{4}\right) + k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}\}.$$

7.2.2 Resolução da equação $cosx = t$

Sendo $-1 \leq t \leq 1$, sabemos que existem arcos α tais que $cos\alpha = t$. Dessa forma, a equação dada é equivalente a $cosx = cos\alpha$, ou ainda:

$$cosx - cos\alpha = 0.$$

Transformando o primeiro membro dessa última equação em produto, teremos:

$$-2sen\left(\frac{x+\alpha}{2}\right)sen\left(\frac{x-\alpha}{2}\right) = 0.$$

Pela propriedade de nulidade do produto, segue:

$$sen\left(\frac{x+\alpha}{2}\right) = 0 \quad (1) \quad \text{ou} \qquad sen\left(\frac{x-\alpha}{2}\right) = 0. \qquad (2)$$

De (1), segue,

$$\frac{x+\alpha}{2} = k\pi \Longrightarrow x = -\alpha + 2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}.$$

De (2), segue,

$$\frac{x-\alpha}{2} = k\pi \Longrightarrow x = \alpha + 2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z} \Longrightarrow x = \alpha + 2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}.$$

Pode-se ainda resumir as soluções da equação $senx = t$, em uma só expressão:

$$S = \{x \in \mathbb{R}; x = \pm\alpha + 2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Exemplo 7.3 *Resolver a equação* $cosx = \frac{1}{2}$.

Resolução:

Uma solução imediata de $cosx = \frac{1}{2}$ é $\alpha = \frac{\pi}{3}\ rad$, pois $cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$. Portanto, o conjunto solução da equação $cosx = \frac{1}{2}$ é dado por:

$$S = \{x \in \mathbb{R}; x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Exemplo 7.4 *Resolver a equação* $cosx = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Resolução:

Uma solução imediata de $cosx = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ é $\alpha = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$, pois $cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Portanto, o conjunto solução da equação $cosx = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ é dado por:

$$S = \{x \in \mathbb{R}; x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Nota: Nas equações elementares $senx = t$ e $cosx = t$, sempre que ocorrer $|t| > 1$, teremos o conjunto vazio como solução. Equações como, por exemplo, $cosx = -\sqrt{2}$ ou $senx = \frac{3}{2}$, terão como solução o conjunto vazio, ou seja: $S = \varnothing$.

7.2.3 Resolução da equação $tgx = t$

Sendo $t \in \mathbb{R}$, temos que a equação acima possui soluções, pois como vimos, a função tgx varia de $-\infty$ a $+\infty$, ou seja, existem $\alpha \in \mathbb{R}$, tais que $tgx = tg\alpha$ ou $tgx - tg\alpha = 0$. Transformando em produto o primeiro membro da última equação, segue que:

$$tgx - tg\alpha = \frac{sen(x-\alpha)}{cosxcos\alpha} = 0,$$

o que acarreta em $sen(x-\alpha) = 0$, ou seja, $x - \alpha = k\pi \Longrightarrow x = \alpha + k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$.

Portanto, o conjunto solução da equação $tgx = t$, dado queα é uma solução conhecida é:

$$S = \{x \in \mathbb{R}; x = \alpha + k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Exemplo 7.5 *Resolver a equação* $tgx = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Resolução:

Uma solução imediata de $tgx = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ é $\alpha = \dfrac{\pi}{6}\ rad$, pois $tg\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Portanto, o conjunto solução da equação $tgx = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ é dado por:

$$S = \{x \in \mathbb{R}; x = \frac{\pi}{6} + k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}\}.\blacksquare$$

Exemplo 7.6 *Resolver a equação* $tgx = -\sqrt{3}$.

Resolução:

Uma solução imediata de $tgx = -\sqrt{3}$ é $\alpha = -\dfrac{\pi}{3}\ rad$, pois $tg\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$.

Portanto, o conjunto solução da equação $tgx = -\sqrt{3}$ é dado por:

$$S = \{x \in \mathbb{R}; x = -\frac{\pi}{3} + k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}\}.\blacksquare$$

7.3 Equações trigonométricas que exigem certos artifícios

São equações que necessitam de um pouco mais de habilidades em sua resolução. Pode ocorrer uma ou mais funções circulares ou uma função com diferentes arcos.

Em geral, devemos escolher certa função circular como variável auxiliar e, a partir dela, substituí-la na equação proposta, de modo a obtermos uma equação equivalente com apenas uma função ou apenas um arco.

A escolha da variável auxiliar deve ser feita de modo a evitar sempre que possível o surgimento de expressões que envolvam radicais, pois além de torná-las mais complicadas, podem surgir raízes desnecessárias ou estranhas.

Exemplo 7.7 *Resolva a equação* $tgx + cotgx = 4$.

Resolução:

Reescrevendo a equação acima em termos das funções $senx$ e $cosx$, segue:

$$\frac{senx}{cosx} + \frac{cosx}{senx} = 4.$$

Reduzindo-a ao mesmo denominador,

$$\frac{sen^2x + cos^2x}{senxcosx} = \frac{4senxcosx}{senxcosx} \Longrightarrow 4senxcosx = 1 \Longrightarrow 2(2senxcosx) = 1.$$

Logo,

$$sen(2x) = \frac{1}{2}.$$

Como vimos nas equações elementares, podemos fazer:

$$2x = (-1)^k.\frac{\pi}{6} + k\pi.$$

Isolando-se x, teremos:

$$x = (-1)^k.\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}.$$

Portanto, a solução procurada é dada por:

$$S = \{x \in \mathbb{R}; x = (-1)^k.\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2},\ \ k \in \mathbb{Z}\}.\blacksquare$$

Nota: Caso queiramos as soluções na primeira volta, ou seja, no intervalo $[0, 2\pi]$ ou $[0°, 360°]$, basta substituirmos em S, $k = 0, 1, 2, 3$. Assim:

Para $k = 0$, tem-se $S_0 = \frac{\pi}{12}\ rad = 15°$;

Para $k = 1$, tem-se $S_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} = \frac{5\pi}{12}\ rad = 75°$;

Para $k = 2$, tem-se $S_2 = \pi + \frac{\pi}{12} = \frac{13\pi}{12}\ rad = 195°$;

Para $k = 3$, tem-se $S_3 = \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{12} = \frac{17\pi}{12}\ rad = 255°$.

Logo, as raízes da primeira volta são:

$$S' = \left\{\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}\right\} \text{ ou } S' = \{15°, 75°, 195°, 255°.\}$$

Exemplo 7.8 *Resolva a equação* $\dfrac{1}{1-senx}+\dfrac{1}{1+senx}=\dfrac{8}{3}$.

Resolução:

Reduzindo ao mesmo denominador os termos da equação $\dfrac{1}{1-senx}+\dfrac{1}{1+senx}=\dfrac{8}{3}$, tem-se,

$$\frac{3.(1+senx)+3(1-senx)}{3(1-senx)(1+senx)}=\frac{8(1-senx)(1+senx)}{3(1-senx)(1+senx)}=3+3senx+3-3senx=8(1-sen^2x).$$

Daí, temos que $8cos^2x=6\Longrightarrow cosx=\pm\sqrt{\dfrac{3}{4}}=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Portanto, o conjunto solução da equação é dado por:

$$S=\{x\in\mathbb{R};x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}\}.$$

As soluções da equação $\dfrac{1}{1-senx}+\dfrac{1}{1+senx}=\dfrac{8}{3}$, primeira volta, são:

$$S'=\left\{\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6},\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\right\}\ \text{ou}\ S'=\{30^\circ,150^\circ,210^\circ,330^\circ.\}$$

Exemplo 7.9 *Resolva a equação* $\sqrt{1-cosx}+\sqrt{1+cosx}=\sqrt{2}$.

Resolução:

Elevando-se ao quadrado ambos os membros da equação $\sqrt{1-cosx}+\sqrt{1+cosx}=\sqrt{2}$, teremos:

$$\left(\sqrt{1-cosx}+\sqrt{1+cosx}\right)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2\Longrightarrow 1-cosx+2\sqrt{(1-cosx)(1+cosx)}+1+cosx=2.$$

Segue que:

$$2\sqrt{1-cos^2x}=0\Longrightarrow\sqrt{sen^2x}=0\Longrightarrow senx=0.$$

O que acarreta em $x=k\pi$.

Portanto, a solução procurada é dada por:

$$S=\{x\in\mathbb{R};\ x=k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}\}.\blacksquare$$

Exemplo 7.10 *Resolva a equação* $senx + cosx = secx$.

Resolução:

Reescrevendo a equação $senx + cosx = secx$, em termos das funções $senx$ e $cosx$, segue:

$$senx + cosx = \frac{1}{cosx}.$$

Reduzindo-a ao mesmo denominador,

$$\frac{senxcosx + cos^2x}{cosx} = \frac{1}{cosx} \Longrightarrow senxcosx + 1 - sen^2x = 1 \Longrightarrow senxcosx - sen^2x = 0.$$

Pondo-se $senx$ em evidência,

$$senx(cosx - senx) = 0.$$

Daí, pela nulidade do produto,

$$senx = 0 \Longrightarrow x = k\pi \qquad (1)$$

ou $cosx - senx = 0$. Elevando-se ao quadrado ambos os membros, resulta em:

$$cos^2x - 2senxcosx + sen^2x = 0 \Longrightarrow sen(2x) = 1 \Longrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi. \quad (2)$$

Portanto, a solução procurada é dada pela reunião de (1) e (2):

$$S = \{x \in \mathbb{R};\ x = k\pi,\ \text{ou}\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi.\ k \in \mathbb{Z}\}.\blacksquare$$

Exemplo 7.11 *Resolva a equação* $1 + cos2x + cos4x + cos6x = 0$.

Resolução:

Já vimos no exemplo 16 (fórmulas de multiplicação) que $1 + cos2x + cos4x + cos6x$ é equivalente a $4.cosx.cos2x.cos3x$. Podemos fazer:

$$4.cosx.cos2x.cos3x = 0.$$

Da nulidade do produto, surge que:

$cosx = 0 \Longrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi;$ (1)

$cos2x = 0 \Longrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2};$ (2)

$cos3x = 0 \Longrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3};$ (3)

Portanto, a solução procurada é dada pela reunião de (1), (2) e (3):

$$S = \{x \in \mathbb{R};\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ \text{ou}\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\ \text{ou}\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}.\ k \in \mathbb{Z}\}.\blacksquare$$

Exemplo 7.12 *Resolva a equação* $sen^2x + cos^2x + tg^2x + cotg^2x + sec^2x + cossec^2x = 7.$

Resolução:

Substituindo $sen^2x + cos^2x$ por 1 na equação acima e escrevendo os demais termos do primeiro membro em função de $senx$ e $cosx$, teremos:

$$1 + \frac{sen^2x}{cos^2x} + \frac{cos^2x}{sen^2x} + \frac{1}{cos^2x} + \frac{1}{sen^2x} = 7 \Longrightarrow \frac{sen^2x + 1}{cos^2x} + \frac{cos^2x + 1}{sen^2x} = 6.$$

Reduzindo ao mesmo denominador, segue:

$$\frac{sen^2x(1 + sen^2x) + cos^2x(cos^2x + 1)}{sen^2xcos^2x} = \frac{6sen^2xcos^2x}{sen^2xcos^2x}.$$

Daí, temos que:

$$sen^4x + sen^2x + cos^4x + cos^2x = 2sen^2xcos^2x + 4sen^2xcos^2x$$

ou, de forma equivalente,

$$sen^4x - 2sen^2xcos^2x + cos^4x + 1 = 4sen^2xcos^2x \Longrightarrow \left(cos^2x - sen^2x\right)^2 + 1 = (2senxcosx)^2.$$

Pelas fórmulas (7) e (8) de arco duplo, no primeiro e segundo membros, respectivamente

$$cos^22x + 1 = sen^22x \Longrightarrow cos^22x - sen^22x = -1.$$

Novamente pela fórmula (7) de arco duplo no primeiro membro, teremos:

$$cos4x = -1 \Longrightarrow 4x = \pi + 2k\pi \Longrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}.$$

Portanto, o conjunto solução da equação dada é:

$$S = \{x \in \mathbb{R};\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},\ \ k \in \mathbb{Z}\}.\blacksquare$$

7.4 Uma equação clássica: $asenx + bcosx = c$.

Neste caso, sabemos que a e b são diferentes de zero, pois se ocorresse $a = 0$ ou $b = 0$, a equação dada seria reduzida a uma equação elementar já vista.

Resolvem-se equações desse tipo do seguinte modo: Dividimos os termos da equação dada por $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, que é diferente de zero.

A equação inicial passa a ter a forma:

$$\frac{a}{r}senx + \frac{b}{r}cosx = \frac{c}{r}. \qquad (*)$$

Sabe-se que $\left(\frac{a}{r}\right)^2 + \left(\frac{b}{r}\right)^2 = 1$. Então existe um arco real α tal que $sen\alpha = \frac{a}{r}$ e $cos\alpha = \frac{b}{r}$.
Substituindo $sen\alpha = \frac{a}{r}$ e $cos\alpha = \frac{b}{r}$ na equação $(*)$, segue:

$$sen\alpha senx + cos\alpha cosx = \frac{c}{r}.$$

Pelas fórmulas de adição já deduzidas, podemos fazer:

$$cos(x - \alpha) = \frac{c}{r}.$$

Esta última equação recai numa elementar, que geralmente é de fácil resolução.

Exemplo 7.13 *Resolva as equações:*

(a) $\sqrt{3}senx + cosx = 2$ *(b)* $senx - \sqrt{3}cosx = 1$

Resolução (a):

Seja $r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$. Dividindo todos os termos da equação por 2, teremos:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} senx + \frac{1}{2} cosx = 1 \Longrightarrow sen\frac{\pi}{3} senx + cos\frac{\pi}{3} cosx = 1,$$

ou seja:

$$cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Longrightarrow x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi \Longrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi.$$

Portanto,

$$S = \{x \in \mathbb{R};\ x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}\}.\blacksquare$$

Resolução (b):

Seja $r = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$. Dividindo todos os termos da equação por 2, teremos:

$$\frac{1}{2} senx - \frac{\sqrt{3}}{2} cosx = \frac{1}{2} \Longrightarrow sen\frac{\pi}{6} senx - cos\frac{\pi}{6} cosx = \frac{1}{2} \Longrightarrow cos\frac{\pi}{6} cosx - sen\frac{\pi}{6} senx = -\frac{1}{2},$$

ou seja:

$$cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$$

Daí,segue:

$$x + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \Longrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{ou}$$

$$x + \frac{\pi}{6} = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \Longrightarrow x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi.$$

Portanto,

$$S = \{x \in \mathbb{R};\ x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}\}.\blacksquare$$

Considerações Finais

A retomada das definições das razões trigonométricas no triângulo retângulo, bem como as deduções geométricas de uma tabela de valores notáveis serviu de sustentação para o desenvolvimento de diversos conceitos e relações abordadas no decorrer deste trabalho. É comum, professores apresentarem uma tabela de valores notáveis pronta, sem que se justifique o porquê desses valores.

Uma sensibilização acerca do uso de um círculo unitário faz-se necessária. Convencer o aluno da utilidade do círculo trigonométrico para ampliação das ideias vistas em um triângulo retângulo para um triângulo qualquer, bem como para que se estabeleçam as correspondências dos valores de senos e cossenos como coordenadas de um ponto pertencente a essa circunferência e na determinação de um arco qualquer, é sem dúvidas um marco decisivo para que se crie sustentação adequada para o desenvolvimento de novos conhecimentos na Trigonometria Plana, além de contribuir para um entendimento consistente e sem a necessidade de memorização de fórmulas e valores.

Não se pode negligenciar o fato de que todas as circunferências são semelhantes entre si. Quando optamos por uma circunferência de raio unitário é porque podemos associar biunivocamente a cada arco dessa circunferência, um ponto cujas coordenadas já correspondem ao cosseno e seno imediatamente.

Sempre que possível, resolver problemas da trigonometria de diferentes formas, sobretudo com uma abordagem geométrica como fizemos no capítulo quatro, para a tangente, secante e a cossecante, certamente agregam-se possibilidades de uma melhor compreensão.

As relações recíprocas quando deduzidas utilizando-se a semelhança de triângulos tornam-se incomparavelmente mais interessantes.

A técnica utilizada para as deduções das fórmulas de adição, de arco duplo e de arco metade, faz com que o educando torne-se menos dependente de métodos artificiais que o levem a reproduzir fórmulas sem de fato compreendê-las.

As fórmulas de transformação em produto foram deduzidas de forma simples, mas com o objetivo claro que é o auxílio nas técnicas utilizadas para a resolução de equações trigonométricas.

Foi possível demonstrar que uma abordagem adequada das equações trigonométricas, pode-se tornar mais fácil a compreensão deste tópico extremamente relevante.

Por fim, a abordagem aqui apresentada mostra que por meio de conceitos simples, como por exemplo, conceitos de Geometria Plana, foi possível demonstrar todas as fórmulas da Trigonometria Plana sem o uso de artifícios ou memorização de fórmulas, o que mostra que a matéria pode tornar-se mais interessante.

Referências

[1] GABAGLIA, Eugênio de Barros Raja.*Elementos de Trigonometria*. 1. ed. São Paulo: Garnier.

[2] HEINEMAN, E. Richard. *Plane Trigonometry*. 9. ed. New York: McGRAW-HILL, 1942.

[3] FILHO, Edgar de Alencar. *Curso de Trigonometria Plana*. 9. ed. São Paulo: Nobel, 1969.

[4] AYRES, Frank. *Trigonometria Plana e Esférica*. 1. ed. Rio de Janeiro: Livro técnico S.A, 1958.

[5] CARMO, Manfredo Perdigão do; MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo. Trigonometria /Números Complexos. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

[6] IEZZI, Gelson. Fundamentos de Matemática Elementar. 6. ed. São Paulo: Atual, 1993. v.3.

[7] NETO, Aref Antar et al. Trigonometria. 1. ed. São Paulo: Moderna, 1979. v.3.